HAL
open science

Modèles déformables 2-D et 3-D : application à la segmentation d'images médicales

Isaac Cohen

To cite this version:

Isaac Cohen. Modèles déformables 2-D et 3-D : application à la segmentation d'images médicales. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Paris Dauphine - Paris IX, 1992. Français. NNT : . tel-00631474

HAL Id: tel-00631474

https://theses.hal.science/tel-00631474

Submitted on 12 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS IX – DAUPHINE
U.F.R. MATHEMATIQUES DE LA DECISION

THESE

pour l'obtention du titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Sujet : Modèles Déformables 2-D et 3-D :
Application à la Segmentation d'Images Médicales.

Directeur de Recherche : J. M. MOREL

Candidat : Isaac COHEN

Jury :

Président	**J.M. MOREL**
Rapporteurs	**P. CINQUIN**
	H. MAITRE
Examinateurs	**N. AYACHE**
	A. BLAKE
	L.D. COHEN
	C. PUECH

Date de la Soutenance : 03 Juin 1992

L'université n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans les thèses : ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

A mes parents,

à mes frères et sœurs,

à la mémoire de mes grand parents.

Remerciements

Je tiens a remercier toutes les personnes ayant contribué et facilité à réaliser ce travail dans de bonnes conditions. Je tiens à remercier plus particulièrement:

Monsieur Nicholas Ayache qui m'a proposé un sujet de recherche passionnant et m'a encadré et orienté tout au long de cette thèse.

Monsieur Laurent D. Cohen qui m'a proposé ce sujet de thèse et m'a fournit de nombreux et précieux conseils pour mener à bien ce travail. Je souhaiterai que cette précieuse collaboration se poursuive.

Monsieur Jean-Michel Morel pour l'intérêt qu'il porte dans mon travail et son suivi durant ces trois années de thèse.

Messieurs Henri Maitre et Philippe Cinquin qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de siéger à ce jury. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude pour l'intérêt dont ils ont fait preuve à l'égard de ce travail.

Messieurs Claude Puech et Andrew Blake qui me font l'honneur de faire partie de ce jury.

J'exprime toute ma sympathie à Isabelle Herlin, Jacques Levy-Vehel et Serge Benayoun, Jean-Paul Berroir, Gregoire Malandain, Jean-Marie Rocchisani, Robert Vojak et Hussein Yahia qui ont su donner une atmosphère de travail sympathique au sein du projet Epidaure et Nathalie Gaudechoux, Jean-Paul Chieze et Jean Baptiste Giorgi pour leur aide précieuse et infaillible. Merci également à Patrick Sulger, Olivier Monga, Jean-Philippe Thirion, André Gueziec et aux thésards et stagiaires des projets Epidaure et Syntim.

Enfin, je tiens à remercier vivement toute ma famille pour les encouragements et le soutien qu'ils m'ont prodigués durant cette thèse.

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Travaux Antérieurs 2

1.2 Principales Contributions 4

2 Modèles Déformables 2-D **7**

2.1 Définition et Modélisation du Problème 7

2.2 Détermination d'un Minimum 10

2.3 Résolution Numérique 14

2.4 Définition des Forces Extérieures 16

2.4.1 Instabilités Dues au Champ de Force 16

2.4.1.1 Contrôle du pas de temps τ 17

2.4.2 Définition du Potentiel d'attraction 18

2.4.3 Force d'Expansion 19

2.4.4 Autres Potentiels d'Attraction 20

2.5 Choix des Paramètres 22

2.6 Complexité Algorithmique 23

2.7 Autres Modèles 24

2.7.1 "Croissance de snakes" 24

2.7.2 B-snakes 25

2.7.3 "Anticipating-snakes" 25

2.7.4 Modèle géométrique intrinsèque 26

2.7.5 Modèle Statistique 27

2.8 En Résumé 27

3 Suivi de Structures Déformables 29

3.1 Suivi de Contours 29

3.1.1 Reconstruction 3-D à partir de Coupes 2-D 29

3.1.2 Suivi Temporel 30

3.2 Suivi de Points sur des Objets Déformables 32

3.2.1 Modélisation de la Mise en Correspondance 34

3.2.2 Modèle proposé par Duncan *et al* [DOSA91] 36

3.2.3 Formulation du Problème 37

3.2.3.1 L'extraction des contours 38

3.2.3.2 Le calcul des courbures 38

3.2.4 Résolution Numérique 39

3.2.4.1 Le problème discret 40

3.2.4.2 Calcul de la condition initiale f_0 41

3.2.5 Détermination des Paramètres 45

3.2.5.1 Les pas de discrétisation h et τ 45

3.2.5.2 Le paramètre de régularisation $R(s)$ 46

3.2.6 Résultats Expérimentaux 46

3.2.7 Généralisation 3-D 51

3.3 En Résumé 56

4 Modèles Déformables 3-D 57

4.1 Surfaces à Energie Minimale 58

4.2 Surfaces Déformables et Points de Contour 58

4.3 Résolution Numérique 62

4.3.1 Formulation Variationnelle 63

4.3.2 Discrétisation du Problème Variationnel 63

4.3.2.1 Discrétisation du domaine Ω 64

4.3.2.2 Les fonctions de base 64

4.3.3 Discrétisation du Problème d'évolution 68

4.3.4 Calcul du Vecteur L 69
4.4 Les Paramètres de Régularisation 71
4.5 Complexité Algorithmique 71
4.5.1 Comparaison avec la Méthode des Différences Finies 71
4.6 Résultats Expérimentaux 72
4.7 Autres Modèles 84
4.7.1 Modèle Simplifié de Surfaces Déformables 84
4.7.2 Surfaces Déformables à Topologie Variable 84
4.8 En Résumé 85

5 Calcul des Caractéristiques Différentielles 87
5.1 Calcul des Caractéristiques Différentielles avec un Modèle de Surfaces Déformables 88
5.2 Utilisation de la Normale à la Surface 91
5.2.1 Résultats Expérimentaux 92
5.3 En Résumé 94

6 Etude des Coefficients de Régularisation et Algorithme de Détermination 97
6.1 Méthode de Régularisation 97
6.1.1 Méthode des Résidus 100
6.1.2 Méthode de Validation Croisée 101
6.2 Comportement Asymptotique des Paramètres 102
6.3 Splines Cubiques 103
6.4 Détermination des Fonctions Régularisantes 105
6.4.1 Utilisation de la Méthode 109
6.5 Détermination des Paramètres de Régularisation dans le cas des Surfaces . . 113
6.5.1 Surfaces Déformables 114
6.5.2 Détermination des Paramètres à partir des Données 115
6.5.3 Méthode Proposée 118
6.5.4 Résultats Expérimentaux 119
6.6 En Résumé 122

7 Conclusion **125**

7.1 Perspectives de Recherche 126

7.1.1 Mise en Correspondance Rigide 127

7.1.2 Caractérisation de Mouvements Non Rigides 127

A L'élément fini de Bogner-Fox-Schmit **129**

B Calcul des matrices de rigidité des modèles déformables **131**

B.1 Modèles Déformables 2-D 131

B.2 Modèles Déformables 3-D 132

Chapitre 1

Introduction

La segmentation représente la première étape du traitement des images pour extraire des informations nécessaires à l'analyse de l'image. On distingue principalement deux types de segmentations: par régions et par contours. La segmentation par régions caractérise l'image à partir de l'homogénéité de la texture des régions qui la composent, tandis que la segmentation par contours délimite les différentes régions par leurs frontières.

La détermination des frontières ou des contours des objets est obtenue à l'aide du calcul local des variations des niveaux de gris de l'image: le gradient. Celui-ci servira à la localisation des contours définis par les points de l'image pour lesquels la norme du gradient, dans la direction de ce gradient est maximale [Can86]. Ces extrema locaux sont seuillés pour ne conserver que les points de contour représentant les variations du niveau de gris les plus significatives. Pour cela, différentes méthodes de seuillage sont utilisées pour extraire les extrema locaux de la norme du gradient [Can86, Der87, Der89] ainsi qu'une méthode de chaînage [Gir87, DC87] permettant de récupérer certains points de contour.

La détection des points de contour par la méthode précédente ne permet pas d'ajouter au critère de détection des contraintes globales ou la prise en compte d'une information a priori. Pour cela, on modélisera les contours des objets par des courbes ou des surfaces possédant des propriétés de régularité et pour lesquels les contours obtenus dépendront d'une donnée initiale représentant la connaissance a priori du modèle.

La modélisation considérée peut être de différents types, on distinguera les modèles

paramétriques pour lesquels les contours sont obtenus en ajustant les paramètres du modèle [YCH89] ou les modèles caractérisant les points de contour par l'intermédiaire de leurs degrés de liberté. Cette dernière approche, moins restrictive, sera développée dans la suite à l'aide du modèle de contours actifs défini par Kass *et al* [KWT87a].

Le modèle de contours actifs défini par Kass *et al* [KWT87a] conjugue détection et régularité des points de contour par l'intermédiaire d'une fonctionnelle. Le minimum de celle-ci dépend de la donnée a priori dont on dispose et permet de caractériser les contours d'un seul objet à la fois.

Cette fonctionnelle est également interprétée en terme d'énergie, car la formulation choisie est similaire à la modélisation d'un matériau élastique se déformant sous l'action de forces extraites de l'image et caractérisant les attributs recherchés.

L'ensemble du travail présenté dans cette thèse est lié au modèle de contours actifs. Nous présenterons un bref résumé des travaux antérieurs, notre contribution à la résolution de quelques problèmes ainsi que l'application de la méthode à la segmentation d'images médicales bidimensionnelles et tridimensionnelles et au suivi de structures déformables dans des images spatio-temporelles.

1.1 Travaux Antérieurs

Le modèle de contours actifs, a été repris par plusieurs auteurs pour détecter les points de contour d'une image et s'est vu apporter de nombreuses modifications. Nous résumerons quelques contributions qui nous paraissent importantes ou originales. Une des caractéristiques du modèle de contours actifs est la non convexité de la fonctionnelle minimisée, ainsi le modèle initial [KWT87a] nécessite la donnée d'une estimation de la solution. Cette estimation définira un voisinage de recherche du minimum local de l'énergie. Zucker *et al* [ZDDI88] ont proposé une première solution à ce problème d'initialisation, en considérant un ensemble de contours actifs qui interagissent, et initialisés en des points caractéristiques obtenus par un modèle statistique, mais cette solution est assez typique des images considérées par les auteurs (images d'empreintes digitales) et ne peut pas être généralisée. Une autre approche introduite par Laurent Cohen [Coh91] consiste à appliquer au contour

déformable une force d'expansion. Celle-ci permet de considérer une condition initiale plus grossière, et permet à la courbe de ne pas se fixer sur des points de contour isolés qui sont généralement dus au bruit. Une dernière solution apportée par Liu *et al* [LSM91] permet, à partir de la donnée d'un point dans une région de considérer les points de contour épars proches et de définir un potentiel d'attraction vers ces points.

Un deuxième problème auquel nous sommes confrontés, est la définition du champ de potentiel d'attraction de la courbe vers les points de contour. En effet, dans le modèle original, ce potentiel est défini à l'aide du gradient de l'image des niveaux de gris et par conséquent, est très sensible à la présence de bruit dans l'image. Ainsi, à proximité des points de contour, la courbe oscille au voisinage du minimum. Ces oscillations sont dues à une variation du gradient pour deux points voisins appartenant à un même contour, c'est à dire que le contour considéré n'est pas un contour d'iso-intensité ou a une amplitude d'attraction trop élevée. Une première solution apportée par Fua [FL88] consistait à définir différents déplacements en chaque point de la courbe. Comme le remarque Fua, cette solution n'est pas satisfaisante dans la mesure où elle ne garantit pas une minimisation de l'énergie et est numériquement coûteuse, car elle nécessite, à chaque itération, une redécomposition du système linéaire à résoudre. Une deuxième approche consiste à utiliser une image de points de contour, pour laquelle on n'a conservé que les points de forte norme du gradient et de redéfinir, à l'aide de ces points, un nouveau potentiel d'attraction Ce potentiel peut être généré par convolution ou à l'aide d'une image de distances établie à partir de l'image de contours. Cette approche, définie par Laurent Cohen [Coh91] permet également une normalisation du champ de forces et la disparition des oscillations de la courbe à proximité des contours.Une approche similaire, est adoptée par Menet *et al* [MSMM90] pour redéfinir la force d'attraction vers les points de contour.

Un autre problème concerne la sensibilité de la solution en fonction du nombre de points représentant la courbe. Avec la méthode des différences finies proposée par Kass *et al* [KWT87a] et reprise par plusieurs auteurs [FL88, Coh91, BM90], le nombre de points de discrétisation de la courbe doit être de l'ordre de sa longueur en pixel. Cette contrainte est due au fait que la force d'attraction ne peut être appliquée qu'aux points du maillage, induisant de ce fait un nombre de points de discrétisation élevé. Pour résoudre ce problème,

il est nécessaire de disposer d'une représentation continue de la courbe à partir d'un nombre fini de points du maillage. Une première solution consiste à résoudre le problème par une méthode d'éléments finis. Nous avons adopté cette approche en décomposant la solution sur une base de fonctions cubiques par morceaux [CC90]. De même Menet *et al* [MSMM90] et Leitner *et al* [LC91b] ont opté pour une décomposition de la solution dans une base de B-splines.

D'autres méthodes ont été proposées pour résoudre le problème de minimisation des contours actifs; Amini *et al* [AWJ90] ont adopté une méthode de programmation dynamique, cette méthode se révélant extrêmement coûteuse, Williams *et al* [WS90] ont présenté un algorithme "glouton", consistant à examiner chaque point voisin de la courbe et à se déplacer vers les points réduisant l'énergie du modèle. Ce dernier modèle, par sa formulation, est très sensible à la présence du bruit dans l'image.

1.2 Principales Contributions

L'intérêt de la décomposition de la fonction représentant un minimum de la fonctionnelle est apparu à la suite des limitations rencontrées par le modèle initial. Nous avons opté pour une résolution du modèle de contours actifs par une méthode d'éléments finis. Cette méthode a permis de considérer un nombre de points de discrétisation moins important que celui nécessaire aux différences finies. Cet avantage est dû à la meilleure prise en compte des forces appliquées à la courbe. Cette méthode a donné des résultats satisfaisants pour la segmentation d'images médicales 2-D et est décrite dans le chapitre 2.

Nous avons également proposé dans le chapitre 3 une méthode de segmentation d'images médicales 3-D, en propageant la solution obtenue dans une coupe 2-D aux coupes voisines. Ceci nous permet de reconstruire la surface des structures anatomiques apparaissant dans l'image 3-D [CC90]. Cette méthode a également été utilisée pour le suivi de structures anatomiques dans des images spatio-temporelles de type échographie [HA92, ACH92] ou Imagerie par Résonance Magnétique (IRM) [RMM+90]. Les résultats obtenus en segmentant des images spatio-temporelles par les contours actifs ont également servi de point de départ pour le suivi de points caractéristiques dans une séquence d'images.

Les modèles déformables offrent la possibilité de faire un suivi temporel des contours d'un objet, mais ce suivi est global et on ne définit pas une mise en correspondance point à point des points constituant le contour de l'objet. Pour cela nous nous sommes inspiré du modèle de suivi de points caractéristiques proposé par Duncan *et al* [DOSA91] en décrivant explicitement la mise en correspondance entre les points du contour de l'objet en mouvement. Cette nouvelle formulation garantit une mise en correspondance entre deux points des deux contours et permet de considérer des déformations plus amples [CAS92]. Dans cette méthode nous avons conjugué le suivi global des contours actifs avec un suivi ponctuel des contours. Le suivi de points caractéristiques est un premier pas pour la caractérisation du mouvement représenté par la séquence d'image temporelles.

La segmentation d'images 3-D en propageant les contours actifs d'une coupe à la suivante est limitée par le manque d'homogénéité spatiale de la surface. En effet, deux limitations subsistent:

i- lorsque les points de contour sont absents dans une coupe on ne peut pas tenir compte de l'information existant dans les coupes voisines,

ii- la surface est restreinte à une topologie cylindrique c'est à dire que son intersection avec chaque coupe 2-D est restreinte à une courbe fermée.

Pour résoudre ces problèmes nous avons considéré des surfaces permettant de représenter la structure des points de contour des images tridimensionnelles. L'algorithme considéré au chapitre 4 est celui des surfaces déformables définies par Terzopoulos *et al* [TWK88] se déplaçant dans des images 3-D sans contraintes. Cette méthode nous permet de segmenter les objets et de disposer d'une représentation surfacique de leurs contours [CCA91b]. Cette représentation continue peut servir à la caractérisation géométrique de la surface [CCA92a, CCA92b] et est présentée dans le chapitre 5.

Un dernier problème auquel nous sommes confrontés est le choix des paramètres définissant le modèle de contours actifs. Ces paramètres contrôlent le compromis entre régularité de la courbe (ou de la surface) et adéquation du modèle aux points de contour. Après avoir proposé un ensemble de paramètres permettant d'obtenir des résultats satisfaisants [CC90, CCA92b], nous présentons au chapitre 6 une méthode permettant de définir

localement ces paramètres. Cette méthode permet de prendre en compte localement la forme géométrique du modèle ainsi que l'erreur de détection des points de contour par le modèle de contours actifs.

L'ensemble de ces contributions est illustré par des résultats expérimentaux obtenus à partir d'images synthétiques et d'images médicales de différents types (échographie, IRM, scanner).

Chapitre 2

Modèles Déformables 2-D

2.1 Définition et Modélisation du Problème

La segmentation d'images permet d'extraire des informations caractéristiques des objets présents. Nous nous intéresserons par la suite, à la segmentation d'images par détection des points de contour. Ces points sont définis comme les points de l'image pour lesquels la norme du gradient des niveaux de gris est extrémale dans la direction du gradient de l'image [Can86]. En pratique, après avoir calculé le gradient de l'image, un seuillage [Can86, Der87, Der89] est effectué. Cette méthode est adoptée par tous les détecteurs de contours par filtrage linéaire. Ces derniers sont les plus utilisés pour leur simplicité d'implémentation, le faible temps de calcul et les résultats satisfaisants obtenus sur les images.

Le seuillage de la norme des gradients de l'image, consiste à conserver les points dont la norme du gradient est supérieure à un seuil donné. Celui-ci introduit une indéterminée: Pour quelle variation du niveau de gris détectera-t-on des points de contour ? et lesquels ? En considérant de faibles seuils les points de contour détectés sont nombreux et ne caractérisent pas les contours de l'image, dans le cas contraire seuls les points de contour les plus contrastés seront détectés.

Cette phase de seuillage permet de supprimer les points de contour erronés, mais par conséquent, les contours détectés ne sont plus connexes. On n'est donc plus en mesure de caractériser un objet par ses points de contour car ces derniers sont incomplets.

Nous allons nous intéresser au modèle de contours actifs défini par Kass *et al* [KWT87a] qui offre une solution partielle au problème de détection des points de contour. Ce modèle est basé sur la représentation des contours des objets par des courbes dans le cas d'images 2-D. Ces courbes devront caractériser les points de contour de l'image. Cette caractérisation s'obtient par la minimisation d'une fonctionnelle dont la définition est étroitement liée à celle des points de contour. Ainsi, en notant $I(i,j)$ le niveau de gris de l'image au pixel (i,j) et $\mathcal{I}$ la convolution de l'image I avec un filtre gaussien, la fonctionnelle caractérisant les point de contour est:

$$E_{\text{contour}}(i,j) = -\int |\nabla \mathcal{I}(i,j)|^2 . \tag{2.1}$$

La minimisation de la fonctionnelle E_{contour} caractérisera les points dont la norme du gradient est maximale: les points de contour.

La définition du modèle de contours actifs à partir de la fonctionnelle E_{contour} serait trop dépendante du calcul du gradient de l'image $\nabla\mathcal{I}$. Celui-ci est fait par un schéma discret de différentiation dont le résultat ne dépend pas de manière continue des données [TP86] et est très sensible à la présence de bruit dans l'image. On va donc restreindre l'ensemble des courbes minimisant la fonctionnelle E_{contour} en contraignant la solution à posséder une certaine régularité. Cette contrainte est formalisée par la considération d'un opérateur régularisant appelé stabilisateur de Tikhonov [TA74]. Un stabilisateur d'ordre p est défini par la fonctionnelle:

$$E_{\text{regul}}(v) = \int_{\Omega} \sum_{r=0}^{p} w_r(s) \left(\frac{\partial^r v}{\partial s^r}\right)^2 ds \tag{2.2}$$

où $w_r(s) \geq 0$ pour $r = 0, \ldots, p-1$ et $w_p(s) > 0$ et $s \in \Omega = [0,1]$ est une variable permettant de paramétrer la courbe v.

Ainsi, la recherche d'un minimum de la fonctionnelle E_{contour} en contrôlant la régularité de la courbe sera obtenue en minimisant la fonctionnelle:

$$E(v) = E_{\text{regul}}(v) + E_{\text{contour}}(v). \tag{2.3}$$

Le choix de l'ordre de régularité p est déterminé en fonction de l'ordre de continuité imposé à la solution. En effet, pour un ordre de régularisation $p > 1$, une fonction minimisant E (2.3) sera de classe $\mathcal{C}^{2p-3}$ et de classe $\mathcal{C}^{2p-2}$ si la fonction $w_p(s)$ est constante.

La fonctionnelle régularisante choisie par Kass *et al* [KWT87a]:

$$E_{\text{regul}}(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} w_1(s)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + w_2(s)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2 ds \tag{2.4}$$

impose donc une solution de classe $\mathcal{C}^1$ lorsque les fonctions w_1 et w_2 sont non nulles.

Cet ordre de continuité imposé à la solution dépend du problème considéré. Un modèle de classe $\mathcal{C}^1$ permettra de caractériser avec fidélité les points de contour mais sera insuffisant pour l'extraction des caractéristiques différentielles telles que les courbures nécessitant généralement des modèles de classe $\mathcal{C}^3$ [GA92]. De tels ordre de continuité sont généralement obtenus en considérant une décomposition de la solution par des fonctions splines particulières telles que les B-splines et non pas en considérant des stabilisateurs d'ordre 3 ou 4 dont la minimisation nécessite la résolution d'équations aux dérivées partielles d'ordre 6 ou 8!

Le modèle de contours actifs est donc défini par la courbe minimisant la fonctionnelle:

$$E(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} w_1(s)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 + w_2(s)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^2 ds + \int_{\Omega} P(v)ds, \tag{2.5}$$

où $P = -\left|\nabla\mathcal{I}\right|^2$. Ainsi, un minimum de E (2.5) représente un compromis entre régularité de la courbe et localisation des points de contour. Ce compromis est déterminé par les fonctions régularisantes w_1 et w_2.

Ce modèle est également appelé modèle de contours élastiques. Ceci est dû à la similarité de la fonctionnelle E à l'énergie de déformation d'un matériau élastique. En effet, si on considère la courbe comme un matériau élastique se déformant dans le plan sous l'action des forces appliquées, l'énergie caractérisant ces déformations est analogue à E ([Cia87], p.432), et on peut également donner une interprétation physique aux paramètres w_1 et w_2; w_1 représente la résistance de la courbe à l'élongation et w_2 la résistance de la courbe à la flexion. La fonction P, caractérisant les points de contour, est également interprétée en terme de champ de potentiel appliqué à la courbe et qui attirera celle-ci vers les points de contour de l'image. Nous parlerons indifféremment de fonctionnelle E ou d'énergie associée à la courbe.

Dans la suite, nous caractériserons les solutions du problème de contours actifs, nous présenterons la résolution numérique de l'équation d'évolution associée ainsi que le calcul

des différents éléments intervenant dans la résolution du problème.

2.2 Détermination d'un Minimum

La caractérisation d'une fonction v minimisant la fonctionnelle E est faite par l'intermédiaire de l'équation d'Euler-Lagrange $\nabla E(v) = 0$.

Lemme 2.1 *Un minimum v de l'énergie E est solution de l'équation aux dérivées partielles:*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = -\nabla P(v), \\ +\textit{Conditions aux limites.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Démonstration du lemme. Considérons une fonction u et calculons la dérivée de Gâteaux [Bre83, Aub84] de E dans la direction u.

$$\nabla E(v) \cdot u = \lim_{h \to 0} \frac{E(v + hu) - E(v)}{h} \cdot u,$$

$$E(v + hu) - E(v) = h\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial u}{\partial s}\right) + h\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right) + \int_\Omega P(v + hu) - P(v) ds,$$

où $(f, g) = \displaystyle\int_\Omega fg ds$. En intégrant par parties dans
$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \text{ tq } v_{|\partial\Omega} = 0 \text{ et } \partial v_{|\partial\Omega} = 0 \right\}$ où,

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \text{ tq } \frac{\partial v}{\partial s} \text{ et } \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} \in L^2(\Omega) \right\},$$

les termes aux bords disparaissent et on obtient:

$$E(v + hu) - E(v) = -h\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right), u\right) + h\left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right), u\right) + \int_\Omega P(v + hu) - P(v) ds.$$

En faisant tendre h vers 0,

$$\nabla E(v) \cdot u = -\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right), u\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right), u\right) + \int_\Omega \nabla P(v) \cdot u ds.$$

Cette égalité est définie pour v dans $H^2(\Omega)$ et est vérifiée pour toute fonction $u \in L^2(\Omega)$, on a donc:

$$\nabla E(v) = -\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \nabla P(v) = 0,$$

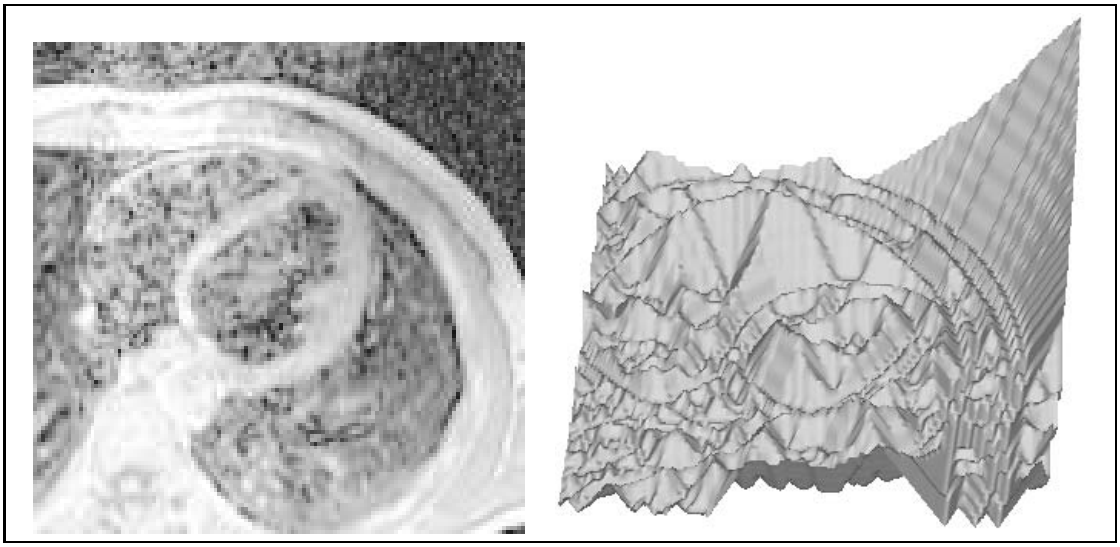

Figure 2.1. Illustration de la non convexité du potentiel P extrait de l'image; sont représentés à gauche l'image considérée, et à droite le potentiel P associé.

pour toute fonction v minimisant la fonctionnelle E. Dans ce qui précède (ainsi que dans la suite) nous avons considéré les conditions aux limites:

$$v(0) = \frac{\partial v}{\partial s}(0) = v(1) = \frac{\partial v}{\partial s}(1) = 0$$

par souci de simplicité des notations. Il est clair que d'autres conditions aux limites peuvent être utilisées. □

Le lemme précédent caractérise un minimum de la fonctionnelle E, mais ce minimum n'est pas forcement unique car l'énergie E n'est pas convexe. Cette non-convexité est due au potentiel P. Celui-ci n'est en effet connu que par l'intermédiaire d'une grille de valeur: l'image discrète. La figure 2.1 représente une image IRM et le potentiel P extrait de cette image.

La non-convexité de la fonctionnelle considérée permet de segmenter partiellement l'image. En effet, le minimum détecté par le modèle défini, dépend du point de départ de l'algorithme de minimisation et par conséquent les contours détectés dépendront de l'information a priori dont on dispose, qui permet d'initialiser le modèle de contours actifs. Cette information a priori définit la zone d'intérêt de l'image à segmenter, ou un contour d'un objet

dont on cherche à déterminer un suivi spatial ou temporel (ce dernier point est développé au chapitre 3).

Ainsi l'équation (2.6) caractérise a priori un minimum local de E. La détermination de celui-ci dépend donc de la condition initiale choisie. Celle-ci définit un voisinage de recherche du minimum local. Aussi, pour pouvoir considérer différentes conditions initiales, on reformule l'équation (2.6) en considérant le problème d'évolution associé. Ce problème d'évolution permettra de déformer la courbe initiale jusqu'à atteindre un minimum local de l'énergie E. Cette succession de déformations pour atteindre un équilibre est à l'origine du nom du modèle: "snakes" ou contours actifs.

Un minimum de la fonctionnelle E est à présent caractérisé par la solution stationnaire du problème d'évolution:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = -\nabla P(v), \\ v(0,s) = v_0(s) \text{ Courbe initiale,} \end{cases} \tag{2.7}$$

où la fonction v dépend de la variable temporelle t et spatiale s. On remarquera que lorsque $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ tend vers zéro, la fonction v caractérise bien un minimum de E.

Ce problème parabolique (2.7) est résolu en considérant à chaque instant t, la courbe soumise aux forces d'attraction $-\nabla P(v)$ calculées à partir de la position de la courbe à l'instant $t-1$. Ces forces varieront à chaque instant t en fonction de la position de la courbe v et pour cela nous conserverons la notation $-\nabla P(v)$ pour les représenter. Cette simplification nous permet de considérer l'équation (2.6) comme un problème aux limites elliptique. Ainsi pour une courbe initiale donnée, représentant la condition initiale au problème (2.7), un champ de forces $f = -\nabla P(v)$ calculé à partir de l'image lui est appliqué. Ce champ diffère à chaque itération, car il dépend de la position de la courbe. Nous sommes donc amenés à résoudre le problème parabolique:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = f, \\ v(0,s) = v_0(s) \text{ Courbe initiale.} \end{cases} \tag{2.8}$$

A présent, nous allons rappeler le cadre général [RT83] permettant de résoudre le problème parabolique (2.8).

Lemme 2.2 *La résolution de l'équation (2.8) est équivalente au problème: Déterminer une fonction $v : t \in [0,T] \mapsto v(t) \in H_0^2(\Omega)$ telle que:*

$$\forall u \in H_0^2(\Omega), \quad \frac{d}{dt}\left(v(t),u\right) + a\left(v(t),u\right) = \left(f(t),u\right), \tag{2.9}$$

$$v(0) = v_0, \tag{2.10}$$

où la dérivée $\frac{d}{dt}$ est prise au sens des distributions sur $]0,T[$.

Démonstration du lemme. En multipliant l'équation (2.8) par une fonction test $u \in H_0^2(\Omega)$ et en intégrant sur Ω, nous obtenons:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}(s,t)u(s)ds - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) u(s)ds + \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) u(s)ds = \int_\Omega f(s,t)u(s)ds.$$

En utilisant la formule de Green et en remarquant que:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}(s,t)u(s)ds = \frac{d}{dt}\int_\Omega v(s,t)u(s)ds,$$

on a, pour toute fonction $u \in H_0^2(\Omega)$,

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega v(s,t)u(s)ds + \int_\Omega w_1 \frac{\partial v}{\partial s}(s,t)\frac{\partial u}{\partial s}(s,t) + \int_\Omega w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}(s,t)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(s,t) = \int_\Omega f(s,t)u(s)ds.$$

Les variables s et t jouent des rôles différents; elles seront séparées en considérant pour chaque fonction $v : (s,t) \in Q_T = [0,1]\times]0,T[\mapsto v(s,t) \in I\!R^2$, la fonction $v(t) : s \in \Omega \mapsto v(s,t) \in I\!R^2$; si bien que la fonction v peut s'identifier à la fonction $t \mapsto v(t)$ définie sur $(0,T)$ à valeurs dans un espace de fonctions de Ω dans $I\!R^2$ [Cia85].

En posant:

$$a(u,v) = \int_\Omega w_1 \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}ds + \int_\Omega w_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}ds, \tag{2.11}$$

on retrouve la formulation énoncée du problème parabolique, où $(f,g) = \int fg\, ds$ représente le produit scalaire dans l'espace de fonctions $L^2(\Omega)$. □

Nous rappelons le théorème d'existence et d'unicité de la solution du problème parabolique considéré et vérifierons que le problème des contours actifs satisfait ces hypothèses.

Théorème 2.1 *Si la forme bilinéaire $a(.,.)$ est coercitive c'est à dire s'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\lambda \in I\!R$ telles que:*

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad a(v,v) + \lambda \left|v\right|^2 \geq \alpha \left\|v\right\|_2^2, \tag{2.12}$$

où $|.|$ et $\|.\|_2$ sont les normes respectives dans $L^2(\Omega)$ et $H^2(\Omega)$, alors le problème parabolique général: étant donné $v_0 \in L^2(\Omega)$ et $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$,
trouver une fonction v telle que:

$$v \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.13}$$

vérifiant l'équation (2.9) admet une solution et une seule. □

L'hypothèse de coercivité est vérifiée car la forme bilinéaire $a(.,.)$ est H_0^2-elliptique dès que les coefficients de régularisation w_1 et w_2 sont strictement positifs, de plus la norme définie par $a(v,v)$ est équivalente à la norme de l'espace

$$H_0^2(\Omega) = \left\{ v \in H^2(\Omega) \text{ tq } v(0) = v(1) = \frac{\partial v}{\partial s}(0) = \frac{\partial v}{\partial s}(1) = 0 \right\}.$$

Le théorème précédent permet d'assurer l'existence et l'unicité du problème parabolique associé aux contours actifs. Nous allons, à présent, détailler la résolution numérique de cette équation.

2.3 Résolution Numérique

La résolution numérique de l'équation (2.9) est basée sur la méthode de discrétisation du problème parabolique. Cette discrétisation se fera séparément pour les variables temporelle et spatiale, puisqu'elles sont indépendantes. Nous allons donc nous intéresser dans un premier temps à la résolution numérique du problème variationnel:

déterminer une fonction $v \in H_0^2(\Omega)$ telle que:

$$a(u,v) = (f,u), \quad \forall u \in H_0^2(\Omega). \tag{2.14}$$

En décomposant l'approximation v_h de la solution v dans la base des éléments finis d'Hermite (une étude plus complète est faite dans le chapitre consacré aux modèles

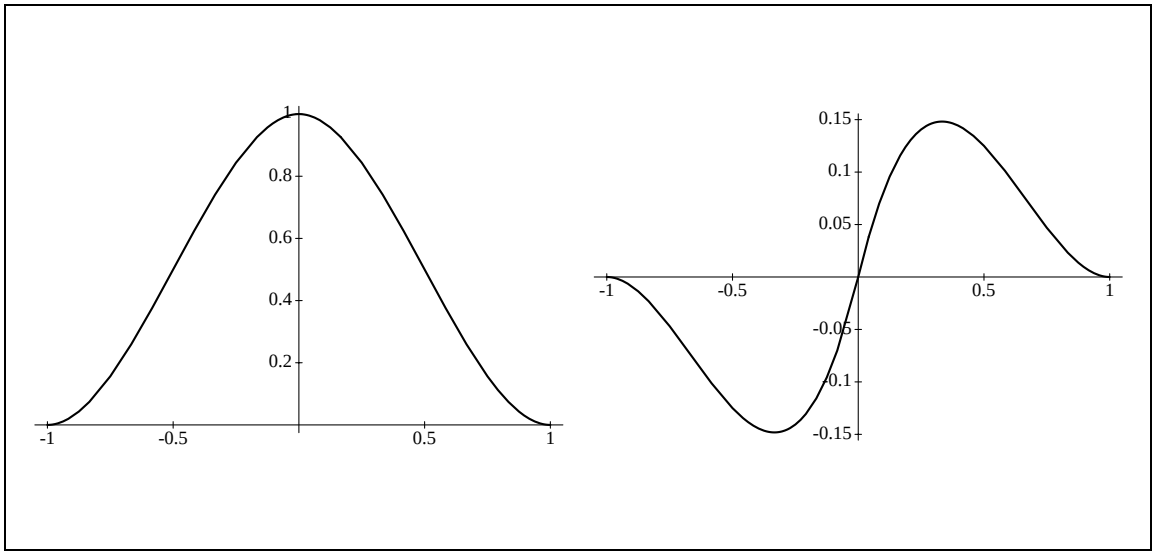

Figure 2.2. Représentation des deux fonctions de base de l'élément fini de Hermite dans $I\!R$.

déformables tridimensionnels (chapitre 4)) on obtient:

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_h(ih)\Phi_i + v'_h(ih)\Psi_i, \tag{2.15}$$

où Φ et Ψ sont les fonctions de base (Figure 2.2 et Annexe A pour l'expression analytique) et $v_h(ih)$, $v'_h(ih)$ les degrés de liberté associés, la résolution du problème variationnel (2.14) conduit au système linéaire suivant:

$$A \cdot V = L_V, \tag{2.16}$$

où le vecteur V représente les degrés de liberté de la solution dans la base d'éléments finis d'Hermite, A la matrice de rigidité associée à cet élément fini et L le vecteur du champ de force appliqué à la courbe.

Cette représentation discrète permet de réécrire l'équation (2.9) en:

$$\frac{dV}{dt} + AV = L_{V^{t-1}}. \tag{2.17}$$

Cette équation, continue en t, est également discrétisée à l'aide d'un schéma rétrograde ou implicite:

$$\frac{V_t - V_{t-1}}{\tau} + AV_t = L_{V^{t-1}}. \tag{2.18}$$

Ainsi le problème discret associé à l'équation d'évolution (2.9) est équivalent au système linéaire:

$$\begin{cases} (I + \tau A)\, V_t = \tau L_{V^{t-1}} + V_{t-1}, \\ V_0 \text{ Courbe Initiale.} \end{cases} \tag{2.19}$$

2.4 Définition des Forces Extérieures

Le schéma itératif (2.19) prend en compte, à chaque itération, le nouveau champ d'attraction auquel est soumis la courbe. Ce champ varie en fonction de la position de la courbe. Considérons le potentiel défini par Kass *et al*, $P(i,j) = -\left|\nabla \mathcal{I}(i,j)\right|^2$. L'utilisation de ce potentiel fait apparaître deux problèmes propres au modèle de contours actifs:

i- La force $f = -\nabla P$ engendre des oscillations, lorsque les contours recherchés ne sont pas des contours d'iso-intensité, c'est à dire des contours pour lesquels le gradient varie le long du contour.

ii- La force f appliquée au contour est définie localement et ne peut agir sur la courbe que lorsque celle-ci est dans un proche voisinage des points de contour. En effet, dans une région de l'image pour laquelle il n'y a pas de variation du niveau de gris, le potentiel P est nul. Dans ce cas, le modèle de contours actifs ne détectera pas les points de contour et évoluera sous l'effet des forces internes.

2.4.1 Instabilités Dues au Champ de Force

Lorsque les points de contour considérés ne sont pas des points de contour d'iso-intensité, la force d'attraction le long du contour varie. Cette variation engendre des oscillations de la solution du système linéaire (2.19) autour des points de contour et l'équation (2.19) ne converge pas vers une solution stationnaire. La figure 2.3 illustre ces oscillations: elle représente deux solutions successives de l'équation (2.19).

Cette instabilité peut être corrigée en contrôlant le pas de temps τ ou le module de la force d'attraction. En effet, à chaque itération, la direction de déplacement de la solution

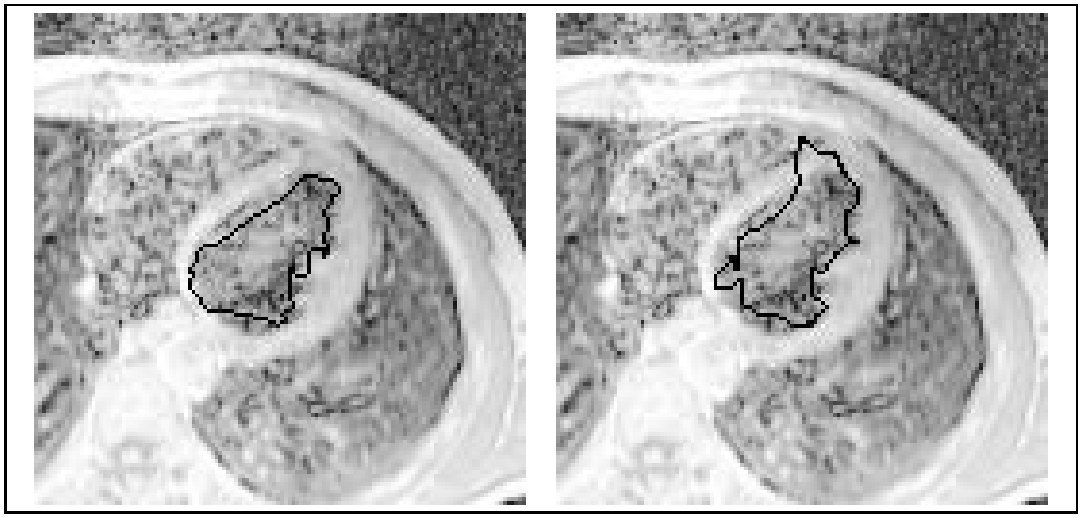

Figure 2.3. Illustration des instabilités du modèle de contour actifs en considérant le potentiel d'attraction $P(i,j) = -\left|\nabla\mathcal{I}(i,j)\right|^2$. Cette figure représente deux itérations successives du schéma de résolution (2.19).

est donnée par le vecteur τL. Pour contrôler ce déplacement on peut donc agir sur le pas de temps τ ou sur la force représentée par le vecteur L.

2.4.1.1 Contrôle du pas de temps τ

La première solution proposée par Kass *et al* [KWT87a] consiste à réduire "manuellement" le pas de temps τ dès que des instabilités apparaissent. Ceci a pour effet de réduire l'action du champ de force et d'augmenter l'inertie de la courbe. Cette solution n'est à envisager que dans le cadre d'une utilisation interactive des modèles de contours actifs.

Fua *et al* [FL88] proposent de limiter le déplacement de la courbe d'une itération à la suivante en contrôlant le pas de temps. Ainsi pour un déplacement Δ choisi, τ est défini par:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{2n}}{\Delta}\left|\nabla E(v_{t-1})\right|,$$

où n représente le nombre de points de discrétisation. Ce choix nécessite l'évaluation à chaque itération de l'énergie E pour s'assurer que la nouvelle position de la courbe est d'énergie inférieure. Dans le cas contraire, on réduit le déplacement choisi Δ et on réitère le calcul du pas jusqu'à obtenir une réduction de l'énergie E.

Ces deux méthodes sont numériquement coûteuses car elles nécessitent un calcul de la matrice $(I + \tau A)$ et par conséquent une nouvelle décomposition LU pour chaque pas de temps considéré.

L'instabilité du contour actif peut être également corrigée en normalisant la force d'attraction $\nabla P(v)$. Cette méthode proposée par Laurent Cohen [Coh91] est équivalente à la définition d'un pas de temps en chaque point de la courbe. La force appliquée à la courbe est définie par:

$$F(v) = -k\frac{\nabla P(v)}{|\nabla P(v)|}, \tag{2.20}$$

où k permet de contrôler l'amplitude du champ de force.

2.4.2 Définition du Potentiel d'attraction

Nous présentons dans ce paragraphe la définition des forces d'attraction proposée par L. Cohen [Coh91]. Cette définition permettra de conjuguer à la fois les résultats d'un détecteur de contours et les propriétés des contours actifs. Le potentiel $P = -|\nabla \mathcal{I}|^2$ caractérise les gradients de l'image en chaque point. Ces gradients seront calculés par un détecteur de contour [Der87] et les points de contour conservés sont obtenus par un seuillage par hystérésis. A partir de cette information binaire on calcule le champ de force en lissant cette image binaire par un filtre gaussien et en calculant les gradients du potentiel P. Ces derniers seront normalisés et représenteront le champ de forces appliqué à la courbe. La figure 2.4 illustre l'utilisation de cette force. La convolution de l'image binaire représentant les point de contour par une gaussienne permet au modèle de converger vers la solution avec un champ de forces nul aux points de contour et d'ignorer les points de contour éloignés. Cette définition sera utilisée dans les différentes expérimentations menées (2-D et 3-D).

Une autre solution, basée sur une détection préalable des points de contour, est de considérer une image de distances. Cette image de distances représente en chaque point de l'image la distance au point de contour le plus proche. Cette image est obtenue après convolution de l'image de contour par un masque caractérisant la métrique choisie. Les distances utilisées sont des distances Euclidienne [Dan80] ou de Chanfrein (Chamfer distance) [Bor84].

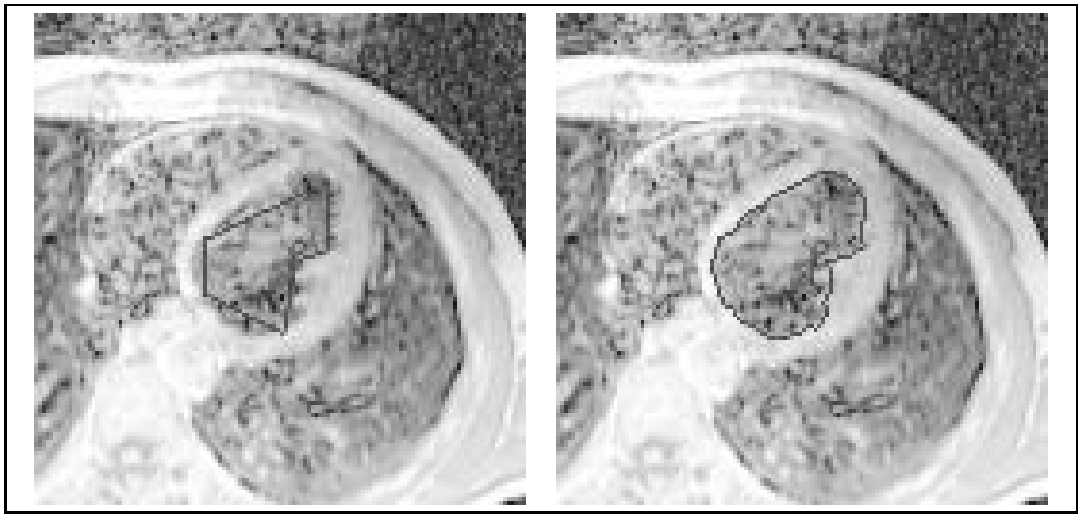

Figure 2.4. Exemple de segmentation d'une image IRM, segmentation de la paroi interne du ventricule gauche obtenue à partir de la condition initiale (6 points) fournie par l'utilisateur.

Elles permettent de calculer différentes forces d'attraction. Par exemple:

$$P(v) = -e^{-d(v)^2},$$

où $d(v)$ est la distance de la courbe au point de contour le plus proche. Cette méthode a aussi été utilisée par Menet *et al* [MSMM90] pour attirer le modèle des B-snakes vers les points de contour et également par Leitner *et al* [LMLC91] dans les snake splines.

2.4.3 Force d'Expansion

La donnée initiale permet de définir le voisinage de recherche du minimum de E. Cette convergence est ensuite assurée par la force d'attraction. Celle-ci déplacera la courbe en chaque point dans la direction du gradient d'énergie de contour $E_{contour}$. Ce gradient est défini localement et à proximité des contours. Cette définition locale du potentiel contraint l'utilisateur à fournir une courbe initiale proche des points de contour (figure 2.4). Dans le cas contraire, la courbe n'est pas soumise aux forces externes et évoluera en minimisant l'énergie de régularité ou interne. Dans ce cas, la solution obtenue à l'aide du schéma itératif (2.19) dépendra des conditions aux limites choisies. Si on impose la position des deux extrémités,

la solution sera la droite joignant ces deux extrémités et dans le cas cyclique la courbe convergera vers un cercle.

Dans certains cas, la considération d'une autre force permet de déplacer la courbe vers le voisinage des points de contour. Lorsque la courbe initiale est à l'intérieur de la région à segmenter, l'addition d'une force dans la direction normale à la courbe permet de considérer des courbes initiales plus grossières. Cette nouvelle force a été proposée par L. Cohen [Coh91] et correspond à une force d'expansion définissant le modèle de "ballon". La courbe est alors soumise à la force:

$$F(v) = -k\frac{\nabla P(v)}{|\nabla P(v)|} + k_1\vec{n}(v), \tag{2.21}$$

où $\vec{n}$ est la normale (unitaire) à la courbe et k_1 une constante permettant de contrôler l'amplitude de la force d'expansion. Celle-ci est toujours inférieure à l'amplitude de la force d'attraction des points de contour afin d'empêcher la courbe de passer au-delà des points de contour. La figure 2.5 illustre une utilisation de la force d'expansion pour segmenter la paroi interne du ventricule gauche.

La force d'expansion dérive également d'un potentiel. Rougon *et al* [RP91] ont montré que la force $k\vec{n}$ dérive du potentiel $\kappa(v)\wedge v_s$ où $\kappa(v)$ est une fonction définissant les propriétés de la force d'expansion. Ainsi, pour une force d'expansion isotrope $\kappa(v) = kv$, où k est l'amplitude de la force. La considération de ce potentiel non quadratique pour la résolution du problème engendre un problème d'optimisation non linéaire, pour cela Rougon *et al* [RP91] considèrent la force dérivant de ce potentiel comme une force appliquée à la courbe. Cette simplification est équivalente au modèle initial de force d'expansion proposé par L. Cohen [Coh91].

2.4.4 Autres Potentiels d'Attraction

L'extraction de caractéristiques géométriques de l'image telles que les courbures, permet de définir des potentiels d'attraction qui seront complémentaires à la force d'attraction liée à la position des contours. Ainsi, Delinguette *et al* [DHI91] considèrent un potentiel supplémentaire qui permet à la courbe ou à la surface d'être attirée dans un premier temps vers les points de contour dont la courbure est extrémale. Une fois ces points détectés la courbe se positionne sur les points de contour sous l'action d'un potentiel similaire à celui

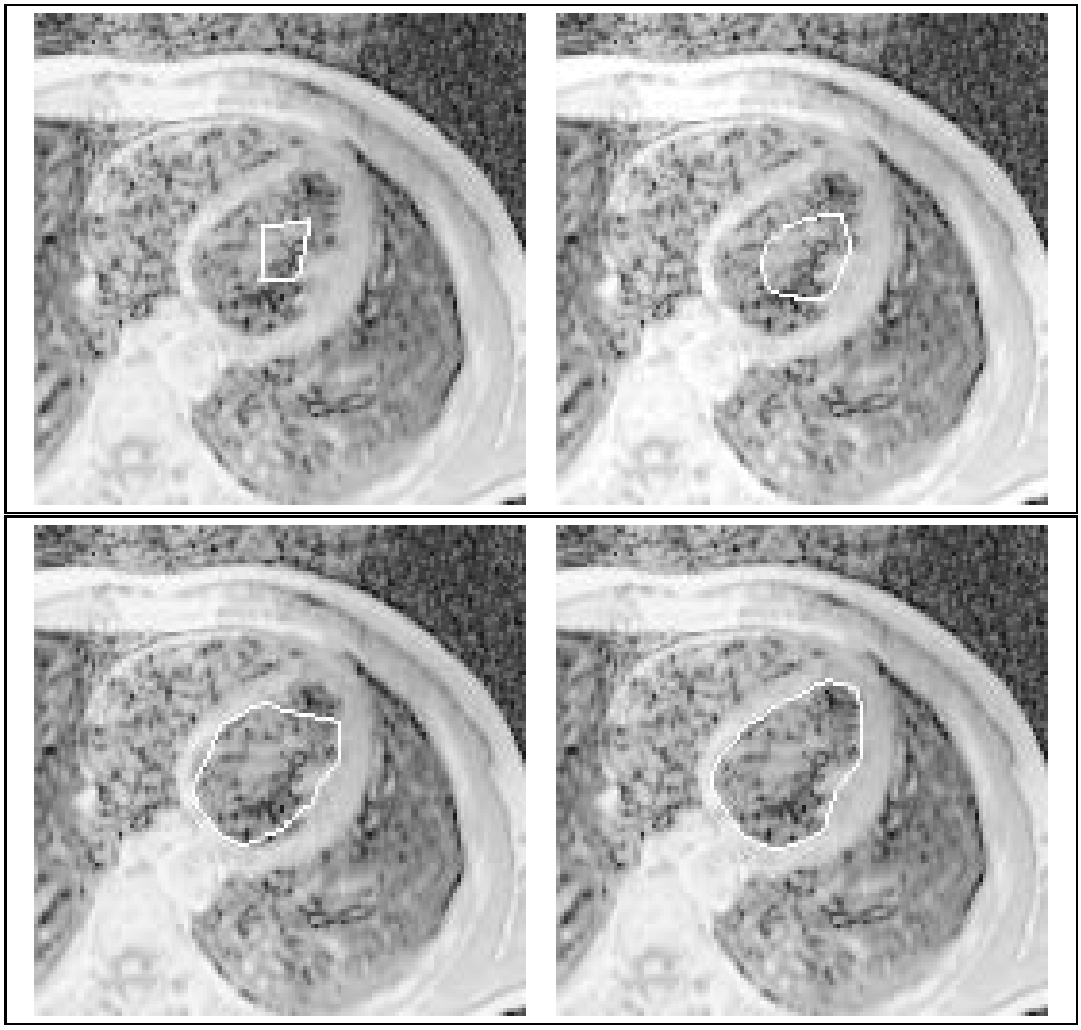

Figure 2.5. Evolution de la courbe sous l'action de la force d'expansion et d'attraction vers les contours de la paroi interne du ventricule gauche.

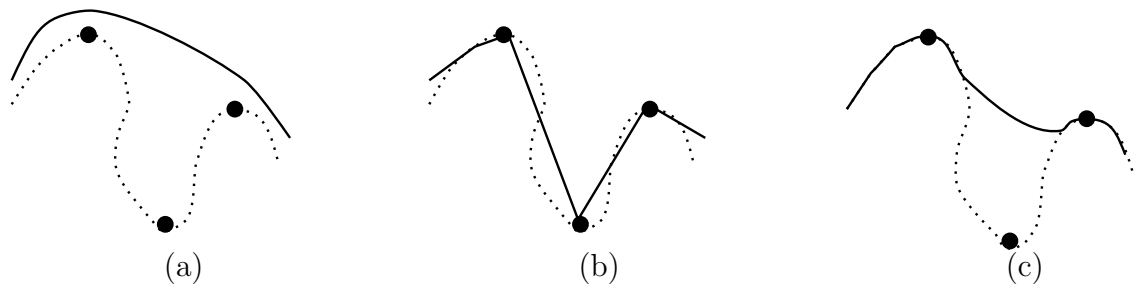

Figure 2.6. Illustration de la méthode proposée par Delinguette *et al* [DHI91]. **(a)** Tracé du contour à détecter (en pointillé) et de la courbe initiale (en noir), l'attraction de la courbe par les points de contour dont la courbure est extrémale est représentée dans la figure **(b)**. La courbe obtenue permet une évaluation plus précise de la position des points de contour. L'utilisation d'une force d'attraction classique ne permet pas une reconstruction fiable des points de contour **(c)**.

défini précédemment. Cette approche permet une évaluation plus précise de la position des points de contour une fois les points de courbure extrémale détectés.

La figure 2.6 illustre cette méthode, la courbe est attirée par les points de courbure extrémale puis par les points de contour.

2.5 Choix des Paramètres

Le choix des paramètres w_1 et w_2 est déterminant pour l'algorithme. Dans les exemples présentés nous avons considéré $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$ où h correspond au pas de discrétisation du domaine de paramétrisation $\Omega = [0, 1]$. Ce choix a été dicté par la nécessité de donner une importance égale aux forces d'attraction et aux forces internes. Cette définition des paramètres est obtenue à partir de l'étude du conditionnement de la matrice de rigidité A. En effet, considérons la norme matricielle:

$$\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}| \,,$$

on a alors:

$$\|A\| = \frac{w_1}{5}\left(\frac{24}{h} + 1\right) + \frac{12 w_2}{h^2}\left(\frac{4}{h} + 1\right).$$

Les paramètres w_1 et w_2 pour lesquels le conditionnement de la matrice A est le plus proche de l'unité seront calculés en utilisant le lemme suivant [Cia85]:

Lemme 2.3 *Si $\|A\| < 1$ alors la matrice $Id + A$ est inversible et de plus:*

$$Cond(Id + A) = \|Id + A\| \left\|(Id + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1 + \|A\|}{1 - \|A\|}.$$

□

La formulation du problème des contours actifs, donne un aperçu de la forme des coefficients w_1 et w_2, en effet la discrétisation de la fonctionnelle $E_{regular}$ conduit à:

$$E_{regular}(v) = \sum_i \frac{w_i^1}{h^2} \left(v((i+1)h) - v(ih)\right)^2 + \frac{w_i^2}{h^4} \left(v((i+1)h) - 2v(ih) + v((i-1)h)\right)^2. \tag{2.22}$$

Ainsi l'ordre de grandeur des paramètres w_1 est h^2 et w_2 est h^4. Par conséquent on cherchera les paramètres sous la forme $w_1 = h^m$ et $w_2 = h^p$ et on déterminera l'entier p en fonction de m pour que l'hypothèse du lemme précédent soit vérifiée. On a donc:

$$\|A\| = \frac{h^{m-1}}{5} (24 + h) + 12h^{p-3} (4 + h) < 1,$$

si:

$$p > m + 3 + \frac{log(240)}{log(N)} - \frac{log\left(5N^m - (24N + 1)\right)}{log(N)}, \tag{2.23}$$

dès que $(5N^m - (24N + 1)) > 0$ (vérifiée pour $m > 1$, $m \in \mathbb{N}$), où N est la taille de la matrice A.

Cette équation fournit un ensemble de paramètres satisfaisant l'hypothèse du lemme, dont les paramètres $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$ que nous avons proposés [CC90].

Nous présenterons dans le chapitre 6 une méthode permettant de déterminer les paramètres optimaux à partir de la forme de la courbe et de la précision de la détection des points de contour par le modèle de contours actifs. Cette méthode permettra de définir localement les paramètres et par conséquent de s'adapter aux contours considérés.

2.6 Complexité Algorithmique

La complexité algorithmique du modèle de contours actifs est essentiellement liée à la résolution du système linéaire (2.19). Ce système linéaire dépend de la méthode de

discrétisation de l'équation (2.6). Nous allons comparer deux méthodes de discrétisation implémentées: les éléments finis (MEF) [CC90] et les différences finies (MDF) [Coh91].

Considérons une subdivision uniforme de N points du domaine de paramétrisation. La matrice A obtenue par les éléments finis est symétrique, heptadiagonale (tridiagonale par blocs) de taille $2N \times 2N$ (il y a deux degrés de liberté par point de discrétisation). Alors que les différences finies fournissent une matrice symétrique, pentadiagonale de taille $N \times N$. En résolvant le système linéaire (2.6) à l'aide d'une décomposition LU on obtient une complexité algorithmique en CmN où m est la demi largeur de bande de la matrice A. Par conséquent la MEF aura une complexité en $8CN$ alors que la MDF une complexité algorithmique en $3CN$. Cette différence en complexité algorithmique est compensée par le fait qu'avec la MDF le nombre de points de discrétisation est plus élevé. En effet plusieurs auteurs [Ber91, Coh91], ont noté que le nombre de points de discrétisation de la courbe devait être égal à sa longueur l en pixel alors que la MEF nécessite, typiquement, un nombre de point de discrétisation de l'ordre de $l/6$. On a ainsi une réduction de la complexité algorithmique pour la MEF. Pour une courbe de longueur l la complexité algorithmique sera en $3Cl$ pour la MDF et en $8Cl/6$ soient Cl opérations pour résoudre le système linéaire obtenu par la MEF.

2.7 Autres Modèles

Après avoir présenté les problèmes propres aux contours actifs et leur résolution, nous présentons quelques variantes de ce modèle un modèle géométrique très proche et un modèle dont le potentiel est défini à partir d'indices statistiques.

2.7.1 "Croissance de snakes"

Le modèle proposé par Berger *et al* [BM90] est un modèle de contour actif pouvant s'allonger pour reconstruire la totalité du contour. Au départ, la courbe converge vers les points de contour à proximité de la courbe initiale, puis la courbe obtenue est "allongée". Cette phase consiste à considérer une prolongation de la courbe par les extrémités dans la direction de la tangente. Cette nouvelle courbe est alors considérée comme donnée initiale

du schéma itératif (2.19). Cette méthode s'applique bien lorsque il n'y a pas de points de jonction à proximité du contour, leur présence fausse le suivi du contour. Cette méthode est également limitée par l'utilisation de la méthode des différences finies. Comme nous l'avons rappelé, cette méthode nécessite autant de points de discrétisation que la longueur de la courbe en pixels et par conséquent à chaque "prolongation" de la courbe obtenue le nombre de points de discrétisation doit être modifié et la matrice A recalculée.

2.7.2 B-snakes

Le modèle des B-snakes proposé par Menet *et al* [MSMM90] représente une solution de l'équation d'Euler (2.6) à l'aide de B-splines [BBB87] représentant une base particulière d'éléments finis [Ino86]. La solution est alors définie par les points de contrôle de la spline. Cette approche présente l'avantage de réduire la complexité algorithmique de la méthode à l'aide de la définition de la spline par l'intermédiaire de ces points de contrôle ainsi que la prise en compte explicite des discontinuités de tangente. Celles-ci sont définies en dédoublant les points de contrôle de la spline aux points de discontinuité.

Une approche très similaire, a également été proposée par Leitner *et al* [LMLC91] considérant une description implicite de l'énergie interne par le choix des fonctions de base. En effet, les fonctions cubiques sont également définies par les minimums de la fonctionnelle [ANW67, Lau72]:

$$\int_0^1 \left[(x''(s))^2 + (y''(s))^2 \right] \, ds. \tag{2.24}$$

Ainsi la seule énergie considérée par Leitner *et al* est l'énergie externe, qui définira le déplacement de la courbe (caractérisée par les coefficients de la spline) vers les points de contour.

2.7.3 "Anticipating-snakes"

Ce modèle proposé par Ronfard [Ron92] repose sur le calcul de variance locale au cours de petites déformations appliquées aux points de contrôle d'une courbe spline. Les points de

contrôle de la spline sont déplacés à l'aide du champ de force dérivant du potentiel:

$$\int_{\mathcal{R}} (I_{in} - I_{out}) \left[I - \frac{I_{in} - I_{out}}{2} \right] ds,$$

où $\mathcal{R}$ est la région délimitée par la courbe et I_{in}, I_{out} représentent les niveaux de gris à l'intérieur et à l'extérieur du domaine $\mathcal{R}$, au voisinage $\mathcal{V}$ du point de contrôle considéré. La régularité de la courbe est assurée par l'interpolation des points de contrôle par une B-spline.

Ce schéma est réitéré en considérant des voisinages $\mathcal{V}$ plus grands tant que l'énergie de la courbe décroît. Ce schéma est complété par quelques heuristiques permettant au contour déformable de ne pas être piéger par des minimums locaux.

2.7.4 Modèle géométrique intrinsèque

Caselles *et al* [CCCD92] proposent un modèle de courbes dont le déplacement pour la détection des contours de l'image I est régi par l'équation du mouvement (mean curvature motion [OS88]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = g(x) \left| \nabla v \right| \left(div \left(\dfrac{\nabla v}{|\nabla v|} \right) + \nu \right) & (t, x) \in [0, \infty[\times I\!R^2, \\ v(0, x) = v_0(x), \end{cases} \tag{2.25}$$

où ν est une constante permettant à la courbe de se déplacer dans la direction normale et la fonction:

$$g(x) = \frac{1}{1 + (\nabla G_\sigma * I)^2},$$

où G_σ correspond a une gaussienne centrée de moyenne nulle et de variance σ^2, permet de stopper le déplacement de la courbe lorsque celle-ci a détecté un contour. La courbe initiale v_0 est définie par $1 - \chi_C$ où χ_C est l'indicatrice de la région C contenant l'objet à segmenter.

Cette équation donne lieu à un formalisme rigoureux sur l'existence et la caractérisation de la solution.

Cette méthode permet également une approche multi-snakes, c'est à dire la détection de plusieurs contours car l'entité déformée est une surface. Mais comme le remarquent les auteurs, cette méthode ne permet pas la définition de discontinuités et la considération de courbes non fermées.

2.7.5 Modèle Statistique

La définition du potentiel d'attraction et de caractérisation des points de contour peut être établie à l'aide de critères de maximum de ressemblance [ESA92]. Ces critères permettent de prendre en compte une information du type segmentation par région et classification de ces régions à l'aide d'indices statistiques. Les contours de l'image sont à présent détectés à partir de la variation de ces indices caractérisant un changement de région.

2.8 En Résumé

Dans ce chapitre nous avons rappelé la définition des contours actifs et le cadre mathématique permettant de résoudre le problème de minimisation de la fonctionnelle E. Nous avons également rappelé les différents problèmes rencontré par les contours actifs ainsi que les solutions apportées par différents auteurs et celles que nous avons adoptées. La méthode des éléments finis adoptée est plus élaborée que les différentes méthodes proposées par d'autres auteurs mais permet d'une part la connaissance de la courbe en tout point du domaine de paramétrisation et une réduction de la complexité algorithmique.

La simplicité d'utilisation des contours actifs nous a permis d'examiner d'autres problèmes tels que le suivi de structures dans une image IRM tridimensionnelle ou dans une séquence d'images temporelles sans modifier l'algorithme. Ces deux applications importantes ainsi qu'une approche pour l'appariement de points appartenant à deux courbes sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Suivi de Structures Déformables

3.1 Suivi de Contours

Le traitement d'une succession d'images donne une information concernant le déplacement des objets dans le cas d'une séquence temporelle et une information spatiale dans le cas d'une succession de coupes IRM. Les séquences d'images 2-D peuvent être également considérées comme des images 3-D, dans lesquelles la troisième coordonnée représentera le temps. Dans ce cas, les contours de l'objet en mouvement sont caractérisés par des surfaces spatio-temporelles.

Le processus d'acquisition des images IRM est en effet une acquisition plan par plan de l'information contenue dans un volume. Cette succession de plans représentera une image médicale 3-D. Une première approche pour traiter ces images 3-D est de traiter cette succession d'images 2-D. Nous présenterons dans ce chapitre une première segmentation des images 3-D à partir de la séquence d'image 2-D ainsi qu'une segmentation d'images spatio-temporelles.

3.1.1 Reconstruction 3-D à partir de Coupes 2-D

Dans une succession de coupes représentant un volume, on peut reconstruire la surface du volume à partir des contours obtenus dans chaque coupe 2-D [Boi88]. Nous avons adopté cette méthode pour segmenter une image 3-D à partir des coupes 2-D [CC90, Coh91].

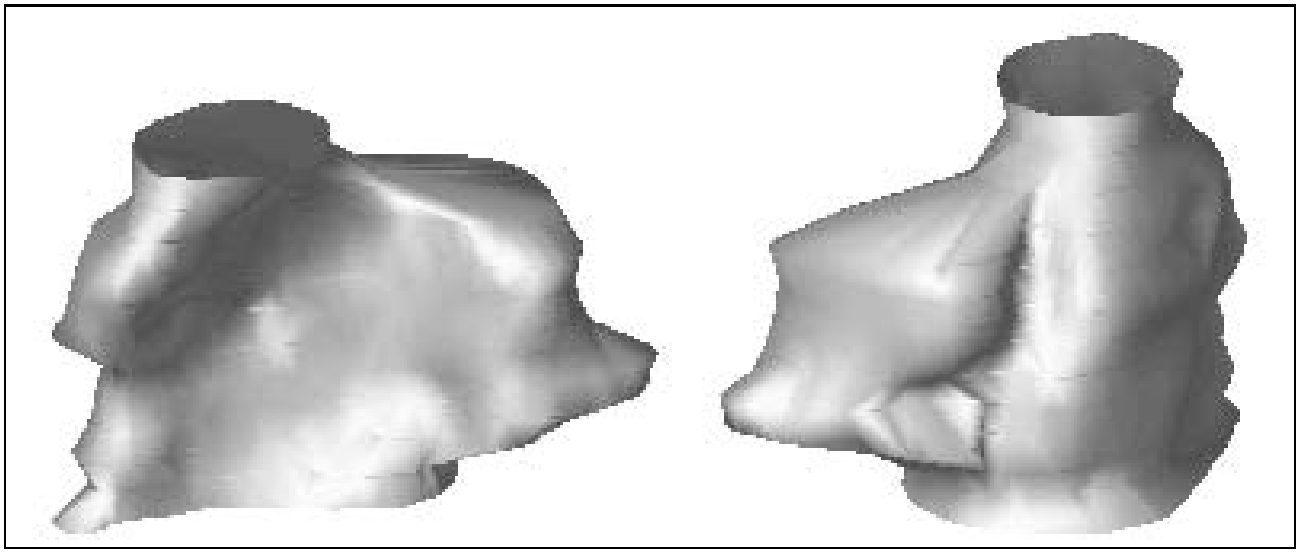

Figure 3.1. Représentation de la paroi interne du ventricule droit.

A l'aide du modèle des contours actifs on est en mesure de caractériser les contours des objets apparaissant dans une coupe. Les contours obtenus sont fermés et connexes. Ces caractéristiques des contours sont essentielles pour l'algorithme de reconstruction utilisé: NUAGES [Boi88].

Le traitement de ces images 3-D est fait coupe par coupe. Le modèle des contours actifs est initialisé sur une coupe et la courbe obtenue servira de donnée initiale pour les coupes adjacentes. Cela permet de disposer d'une méthode quasi-automatique pour la segmentation des images 3-D car l'utilisateur ne fournit qu'une seule courbe initiale. Cette méthode à été utilisée pour reconstruire les parois internes des ventricules droit et gauche. Les figures 3.1 et 3.2 illustrent cette méthode. La seule contrainte à cette méthode est que le nombre de coupes représentant le volume 3-D soit assez important pour caractériser la structure représentée par ce volume 3-D.

3.1.2 Suivi Temporel

Une séquence temporelle d'images est une succession d'images 2-D représentant un mouvement. Ce mouvement peut être dû au déplacement d'un robot dans une scène ou aux

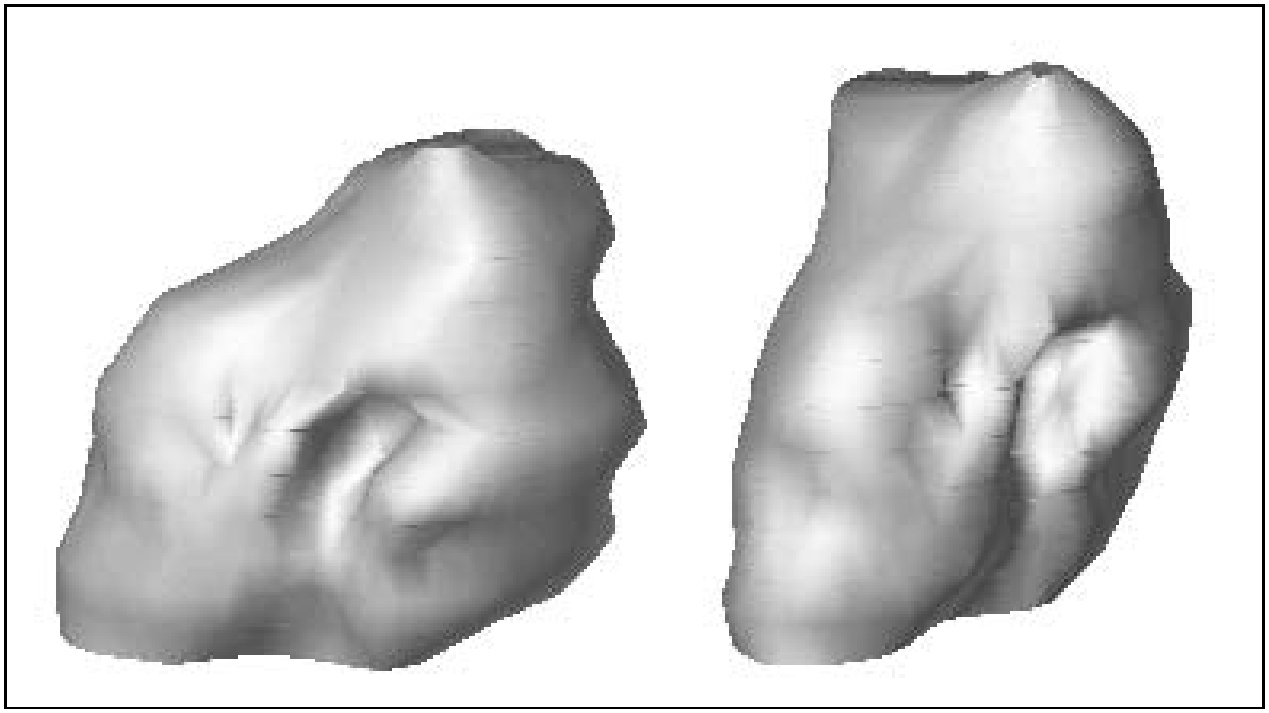

Figure 3.2. Représentation de la paroi interne du ventricule gauche.

mouvements d'un organe. Un aspect du traitement de ces images est le suivi des contours des objets durant la séquence. Ce suivi permet de caractériser le mouvement des objets. Une application directe est le suivi de structures anatomiques dans une séquence d'images IRM ou échographiques. Par exemple le suivi des contours dans une séquence échographique du cœur permet le diagnostic de certaines pathologies. Une partie du diagnostic est basée sur le déplacement de la valve mitrale. Après la détection des points de contour prenant en compte la nature spatio-temporelle des images, les modèles déformables sont utilisés pour régulariser les contours détectés. La chaîne de traitement est entièrement automatique puisque l'initialisation du contour actif sur chaque image est faite à l'aide d'un traitement morphologique [HA92, ACH92]. Les contours actifs peuvent également réaliser un suivi temporel des structures. Le modèle est initialisé (à l'aide d'une méthode morphologique ou par l'utilisateur) et la courbe obtenue à l'instant t sert d'initialisation pour le traitement de l'image $t+1$. Cette méthode donne des résultats satisfaisants lorsque la structure anatomique subit de faibles déformations au cours du temps, telles que les cavités cardiaques. Pour le

suivi de structures à mouvement rapide, telles les valves, une réinitialisation des contours actifs est nécessaire lorsque la forme de la structure subit un changement important. Cette limitation était prévisible dans la mesure où aucune information temporelle n'est prise en compte dans la modélisation des contours actifs. La figure 3.3 illustre un suivi de la valve mitrale dans une séquence d'images échographiques du cycle cardiaque [HA92]. On peut considérer des modèles plus élaborés qui permettront d'établir un suivi dynamique de ces structures. Ces modèles, régis par l'équation [TPBF87]:

$$\begin{cases} \mu(t)\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \gamma(t)\dfrac{\partial v}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial s}\left(w_1 \dfrac{\partial v}{\partial s}\right) + \dfrac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = -\nabla P(v), \\ v(0,s) \text{ et } \dfrac{\partial v}{\partial t}(0,s) \text{ données initiales,} \end{cases} \tag{3.1}$$

peuvent être conjugués avec un filtre de Kalman pour déterminer une estimation de la position de la courbe et de sa vitesse [HP91, MT91]. Il est également possible, à l'aide de l'approximation polygonale du contour en mouvement, utiliser des méthodes permettant la prédiction de la position ainsi que la mise en correspondance de ces segments de droite [DF90, CS90].

3.2 Suivi de Points sur des Objets Déformables

La section précédente illustrait l'utilisation des contours actifs pour le suivi des contours dans une séquence d'images. Ce suivi est global et ne caractérise pas le déplacement des points appartenant à la courbe. Ce déplacement relève un intérêt particulier, car il permet de caractériser le mouvement. On distingue deux types de mouvements:

i- les mouvements rigides, définis par six paramètres caractérisant les translations et les rotations.

ii- les mouvements non rigides ou élastiques.

En imagerie médicale, les mouvements observés sont élastiques et ne sont plus caractérisés par un ensemble de paramètres sans la définition préalable d'un modèle de déformation. Ces modèles paramétriques sont utilisés pour caractériser le mouvement. Ainsi, Metaxas *et al* [MT91] modélisent les objets observés par des super-quadriques et le mouvement des

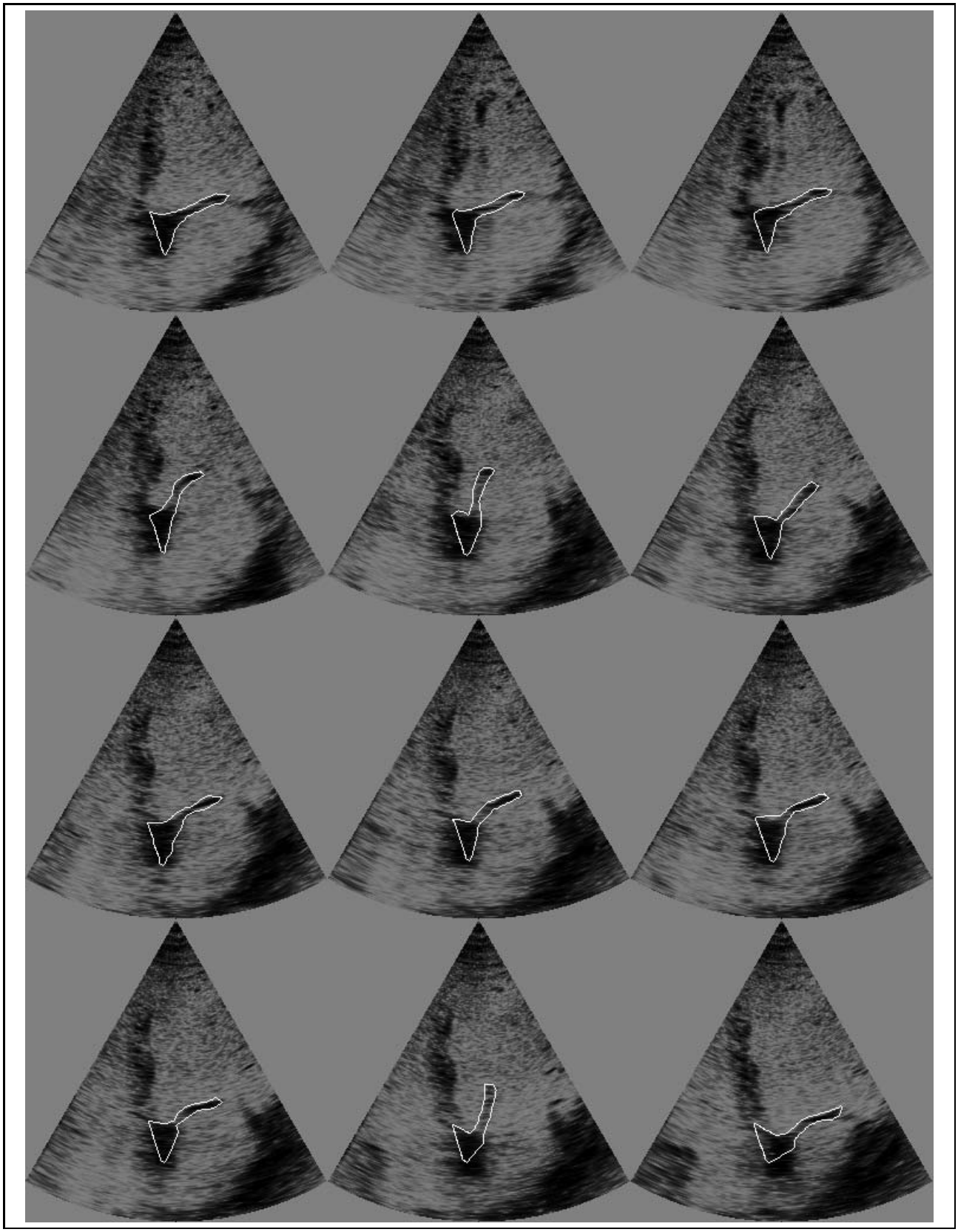

Figure 3.3. Suivi des contours de la valve mitrale dans une séquence échographique [HA92].

objets est caractérisé à partir des paramètres de la super-quadrique. Pentland *et al* [PS91] considèrent une modélisation physique de l'objet et le mouvement est caractérisé par les modes du champ de déplacement. Mais ces modèles supposent la modélisation des contours des objets par des modèles paramétriques ou physiques. Cette modélisation n'est pas toujours possible en imagerie médicale, car il existe différents modèles physiques et paramétriques pour chaque organe et nécessiterait l'utilisation d'un modèle particulier pour chaque type de structure.

En l'absence de modèle physique ou paramétrique, la mise en correspondance des points appartenant à différents contours nécessite une information permettant de caractériser les objets. En imagerie médicale, cette caractérisation est faite par l'intermédiaire des points de forte courbure, car ceux-ci ont généralement une interprétation anatomique [Cut89, MBF92] et par conséquent constituent de bons amers pour la mise en correspondance. Celle-ci privilégiera la mise en correspondance des points de forte courbure tout en imposant un champ de déplacement régulier. Cette approche est inspirée par les travaux de Duncan *et al* [DOSA91, AOS+91], basés sur la minimisation d'une fonctionnelle permettant de décrire la mise en correspondance. Cette description est implicite et ne garantit pas que les points mis en correspondance appartiennent aux contours des objets. Nous avons reformulé le problème et la fonctionnelle à minimiser de telle sorte que la description obtenue soit explicite, assurant de ce fait une mise en correspondance entre les points de contour des objets. Une deuxième contribution à ce modèle permettra la mise en correspondance de points lorsque les contours considérés subissent de grandes déformations.

Dans la suite nous présentons la modélisation du problème, sa formulation mathématique et sa résolution numérique. Nous définirons également les paramètres intervenant dans le modèles ainsi que le prétraitement des données. Finalement, l'applicabilité de la méthode est illustrée sur un ensemble de données synthétiques et réelles.

3.2.1 Modélisation de la Mise en Correspondance

Considérons deux courbes C_P et C_Q représentant les contours de deux images appartenant à la séquence d'images temporelles. Le contour C_Q est obtenu par une déformation élastique

du contour C_P. On suppose également que les courbes C_P et C_Q sont paramétrées par les applications $P(s)$ et $Q(s')$ respectivement.

Le problème de la mise en correspondance peut être reformulé par: pour chaque point P appartenant à la courbe C_P déterminer le point correspondant Q de C_Q.

Cette mise en correspondance est liée à un critère de ressemblance. Celui-ci sera basé sur les courbures des courbes aux points P et Q. Ce critère, définit à partir des courbures de C_P et C_Q permet de caractériser les points de forte courbure (saillants) des contours. De plus, dans le cas d'un mouvement rigide, ces points sont des invariants. On suppose dans la suite que les courbes subissent de faibles déformations et par conséquent les points saillants ainsi que la courbure sont préservés.

On peut alors mesurer la similarité entre deux points P et Q à l'aide de la fonctionnelle:

$$E_{courbe} = \frac{1}{2} \int_{\delta S} \left(K_Q(s') - K_P(s)\right)^2 ds, \tag{3.2}$$

où K_P et K_Q représentent les courbures des courbes C_P et C_Q paramétrées par les abscisses s et s' respectivement.

La fonctionnelle E_{courbe} est proportionnelle à l'énergie de déformation élastique due à la déformation de la courbe C_P en C_Q en considérant une déformation plane et sans torsion [LL86].

Une contrainte supplémentaire est la régularité du champ de déplacement. Cette contrainte est importante dans le cas où la fonctionnelle E_{courbe} n'est pas en mesure d'imposer une correspondance entre les points des deux courbes. Cette situation se produit lorsque sur une partie des courbes C_P et C_Q les courbures K_P et K_Q sont égales, induisant de ce fait une mise en correspondance de plusieurs points de la courbe C_P avec un même point de la courbe C_Q et réciproquement. Ceci peut être évité en imposant une contrainte de régularité au champ de déplacement ou de mise en correspondance. Ce champ est représenté par le vecteur $\overrightarrow{PQ}$, associant à chaque point P le point correspondant Q. La contrainte de régularité portera sur la variation de ce vecteur le long de la courbe C_P et est formalisée par la fonctionnelle:

$$E_{regular} = \int_{C_P} \left\| \frac{\partial(Q(s') - P(s))}{\partial s} \right\|^2 ds, \tag{3.3}$$

où $\|.\|$ représente la norme associée au produit scalaire euclidien $\langle ., . \rangle$ dans $I\!R^2$.

Cette fonctionnelle est similaire à celle utilisée par Hildreth [Hil84] pour imposer une régularité au champ de déplacement le long d'un contour.

La détermination des correspondances entre les points de la courbe C_P et C_Q est obtenue en minimisant la fonctionnelle:

$$E = \int_{C_P} (K_Q(s') - K_P(s))^2 ds + \int_{C_P} R(s) \left\| \frac{\partial(Q(s') - P(s))}{\partial s} \right\|^2 ds. \tag{3.4}$$

Celle-ci privilégie la mise en correspondance des points de courbure similaire tout en assurant un champ de déplacement régulier. Ce compromis entre la mise en correspondance des points de courbure similaire et la régularité du champ de déplacement est contrôlé par le paramètre $R(s)$. Ce paramètre est inversement proportionnel à la courbure au point P, permettant ainsi de privilégier E_{courbe} aux points de forte courbure et $E_{regular}$ dans le cas contraire.

3.2.2 Modèle proposé par Duncan *et al* [DOSA91]

Le modèle proposé initialement par Duncan *et al* [DOSA91] est basé sur la minimisation de la fonctionnelle:

$$F(u) = \int_0^1 C_1(s) \left(u^\top - d^\top\right)^2 + C_2(s) \left(u^\perp - d^\perp\right)^2 ds + \int_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 ds, \tag{3.5}$$

où d est l'estimation initiale de la mise en correspondance obtenue en minimisant E_{courbe} (3.2) (voir paragraphe 3.2.4.2 pour le calcul du vecteur d) et u le champ de déplacement à déterminer. Les fonctions positives $C_1(s)$ et $C_2(s)$ permettent de privilégier les composantes tangentielles (notées $^\top$) ou normales (notées $^\perp$) du champ de déplacement pour le calcul du champ de déplacement u.

La minimisation de la fonctionnelle F (3.5) ne garantit pas que la mise en correspondance obtenue u soit faite entre les points des deux courbes que l'on cherche à apparier. En effet, la minimisation de F fournira un champ de déplacement u proche de d et variant d'une manière régulière. Ceci est dû au fait que la fonctionnelle F ne contraint pas explicitement le champ de déplacement u à apparier des points appartenant aux deux courbes. Cette lacune est corrigée en associant à chaque point, le point le plus proche appartenant à la deuxième courbe.

Le modèle présenté précédemment ainsi que le formalisme proposé au paragraphe suivant sont basés sur l'idée proposée par Duncan *et al* [DOSA91] mais diffèrent en ce qui concerne le formalisme adopté et le critère de similarité locale permettant d'établir la mise en correspondance ponctuel des deux contours.

3.2.3 Formulation du Problème

Etant données deux courbes C_P et C_Q paramétrées par $s \in [0,1]$ et $s' \in [0,\alpha]$ (où α est la longueur de la courbe C_Q), la détermination des correspondances entre les points des courbes C_P et C_Q, est reformulée par la détermination de la fonction f telle que:

$$f : [0,1] \rightarrow [0,\alpha],$$

$$s \rightarrow s',$$

vérifiant:

$$f(0) = 0 \;\text{ et }\; f(1) = \alpha, \tag{3.6}$$

et

$$f = ArgMin(E(f)), \tag{3.7}$$

où:

$$E(f) = \int_{C_P} \left(K_Q(f(s)) - K_P(s)\right)^2 ds + \int_{C_P} R(s) \left\| \frac{\partial(Q(f(s)) - P(s))}{\partial s} \right\|^2 ds. \tag{3.8}$$

Les contraintes (3.6) représentent les conditions aux limites imposées. Elles supposent que la mise en correspondance entre les courbes est connue pour les points extrêmes. Ces conditions aux limites sont calculées à partir des courbes C_P et C_Q traitées. Ce calcul est explicité au paragraphe 3.2.4.2.

Dans la formulation présentée ci-dessus, nous avons supposé que:

i- Les contours des objets ont été préalablement extraits,

ii- La courbure K est connue en tout points des courbes C_P et C_Q.

Ces deux hypothèses représentent la chaîne de prétraitement de la séquence d'images.

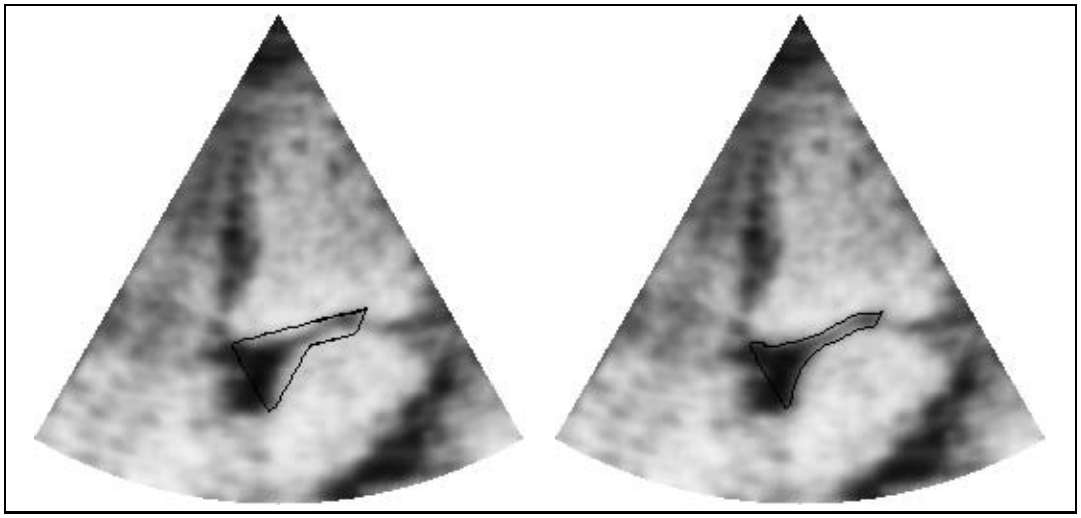

Figure 3.4. Exemple d'extraction des contours à l'aide des contours actifs. A gauche; initialisation des contours actifs et le résultat obtenu à droite.

3.2.3.1 L'extraction des contours

Les contours des objets sont extraits à l'aide des contours actifs. Ces contours sont précis et connexes. Cette dernière propriété est importante car elle permet de paramétrer les contours à l'aide d'une seule fonction. Les contours actifs permettent également, comme nous l'avons décrit précédemment, de faire un suivi des structures facilitant ainsi le traitement de la séquence d'images. La figure 3.4 illustre cette détection des contours.

3.2.3.2 Le calcul des courbures

Ce calcul est effectué en approximant les courbes C_P et C_Q à l'aide de fonctions B-spline. Celles-ci sont des polynômes de degré 4, garantissant une approximation de classe $\mathcal{C}^3$, dont les points de contrôle sont répartis en fonction de l'estimée de la courbure [GA92]. Cette approximation de classe $\mathcal{C}^3$ permet d'écrire l'équation aux dérivées partielles caractérisant le champ de déplacement recherché.

3.2.4 Résolution Numérique

La fonction f, vérifiant $f = ArgMin(E(f))$ et la condition (3.6), est caractérisée par l'équation d'Euler-Lagrange $\nabla E(f) = 0$.

Lemme 3.1 *Une fonction vérifiant $f = ArgMin(E(f))$ et la condition (3.6) est solution de l'équation aux dérivées partielles:*

$$\begin{cases} f'' \left\|Q'(f)\right\|^2 + K_P \left\langle N_P, Q'(f)\right\rangle + \frac{1}{R}\left[K_P - K_Q(f)\right] K'_Q(f) = 0, \\ f(0) = 0 \ et \ f(1) = \alpha, \end{cases} \tag{3.9}$$

où Q est la paramétrisation de la courbe C_Q, $Q'(f)$ le vecteur tangent, K'_Q la dérivée de la courbure de la courbe C_Q et N_P le vecteur normal à la courbe C_P.

Démonstration du lemme. Un minimum de E (3.8) vérifie l'équation $\nabla E = \nabla E_{courbe} + R\nabla E_{regular} = 0$. Pour toute fonction u on a:

$$\nabla E_{courbe}(f) \cdot u = -2 \int_{C_P} \left[K_P(s) - K_Q(f(s))\right] K'_Q(f(s)) u ds, \tag{3.10}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla E_{regular}(f) \cdot u &= -2 \int_{C_P} \left\langle \frac{\partial(P(s) - Q(f(s)))}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\left(Q'(f(s))u(s)\right)\right\rangle ds, \\ &= -2 \int_{C_P} \left\langle \frac{\partial^2(Q(f(s)) - P(s))}{\partial s^2}, Q'(f(s))u(s)\right\rangle ds, \\ &= -2 \int_{C_P} \left\langle f''(s)Q'(f(s)) + f'(s)Q''(f(s)) - P''(s), Q'(f(s))\right\rangle u(s)\, ds. \end{aligned}$$

La fonction Q est une paramétrisation normale de la courbe C_Q, par conséquent $\langle Q', Q''\rangle = 0$. On a de même:

$$P''(s) = -K_P(s)N_P(s),$$

où P'' est la dérivée seconde de P, K_P la courbure et N_P le vecteur normal à la courbe C_P. Par conséquent:

$$\nabla E_{regular}(f) \cdot u = -2 \int_{C_P} \left(f''(s) \left\|Q'(f(s))\right\|^2 + K_P(s) \left\langle N_P(s), Q'(f(s))\right\rangle\right) u(s)\, ds. \tag{3.11}$$

Puisque les relations (3.10) et (3.11) sont vérifiées pour toute fonction u on en déduit l'équation aux dérivées partielles (3.9). □

La résolution de l'équation (3.9) est difficile, car cette équation n'est pas linéaire par rapport à la fonction f. Cette équation peut être réinterprétée en considérant le terme $K_P \langle N_P, Q'(f)\rangle + \frac{1}{R}\left[K_P - K_Q(f)\right] K'_Q(f)$ comme une donnée du problème dépendant de la fonction à partir de laquelle on cherche à déterminer le minimum f de $E(f)$. Cette donnée dépend d'une fonction initiale définissant un voisinage dans lequel on cherchera à déterminer un minimum local de E. Pour prendre en compte cette donnée initiale nous considérons le problème d'évolution:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(s)}{\partial t} + f''(s)\left\|Q'(f(s))\right\|^2 + K_P(s)\left\langle N_P(s), Q'(f(s))\right\rangle + \dfrac{1}{R}\left[K_P(s) - K_Q(f(s))\right] K'_Q(f(s)) = 0, \\ f(0,s) = f_0(s) \ \text{ estimation initiale.} \end{cases} \tag{3.12}$$

Une solution stationnaire de l'équation (3.12) représentera également une solution de l'équation (3.9). Cette équation d'évolution peut être interprétée comme une méthode de descente dans la direction du gradient, ayant comme point de départ l'estimation initiale f_0.

Nous allons décrire le problème discret et le calcul de l'estimation initiale f_0.

3.2.4.1 Le problème discret

La discrétisation de l'équation aux dérivées partielles (3.9) par une méthode d'éléments finis mène à la résolution d'un système linéaire $Af = L$ où la matrice A est définie positive, symétrique et tridiagonale. Ce système linéaire est obtenu à partir du problème variationnel: Déterminer $f \in H^1[0,1] = \left\{v \in L^2[0,1] \text{ tq } \dfrac{\partial v}{\partial s} \in L^2[0,1]\right\}$ telle que:

$$a(f,g) = L(g) \quad \forall g \in H^1[0,1],$$

où $a(.,.)$ est la forme bilinéaire définie par:

$$a(f,g) = \int_0^1 \left\|Q'(f)\right\|^2 f'g'ds,$$

et L la forme linéaire définie par:

$$L(g) = \int_0^1 \left(K_P \left\langle N_P, Q'(f)\right\rangle + \frac{1}{R}\left[K_P - K_Q(f)\right] K'_Q(f)\right) gds.$$

La résolution de l'équation (3.12) est donc ramenée à la résolution itérative du système

linéaire:

$$\begin{cases} (I_d + \tau A) f_t = f_{t-1} + \tau L_{f_{t-1}}, \\ f_{t=0} = f_0, \end{cases} \tag{3.13}$$

où τ est le pas de temps choisi. Ce schéma itératif est résolu à l'aide d'une décomposition de Choleski de la matrice A tant que la norme $\|f_t - f_{t-1}\|$ est supérieure à une constante.

3.2.4.2 Calcul de la condition initiale f_0

Le calcul de la condition initiale f_0 est important et détermine en partie le minimum local obtenu par la résolution du système linéaire (3.13). Nous nous baserons sur la détermination de f_0 présentée par Duncan *et al* [DOSA91] et présenterons une amélioration de cette méthode.

Considérons $s_i \in [0,1]$, $i = 1 \ldots n$, une subdivision de l'intervalle $[0,1]$. Pour chaque point $P_i = (X(s_i), Y(s_i))$ appartenant à la courbe C_P, on cherche à déterminer un point $Q_i = (X(s'_i), Y(s'_i))$ appartenant à la courbe C_Q. Cette paire de points permet de définir l'estimation initiale f_0 par: $f_0(s_i) = s'_i$.

Décrivons à présent cette méthode. Pour chaque point s_i appartenant à la courbe C_P, nous associons un ensemble de points candidats S_i de la courbe C_Q. Cet ensemble est défini par le point s'_i représentant le point le plus proche de s_i appartenant à la courbe C_Q (voir figure 3.5) et $(N_{search} - 1)/2$ points de la courbe C_Q pris de part et d'autre du point s'_i. L'entier N_{search} définit la taille du voisinage, dans lequel nous chercherons le point correspondant. Cet entier joue un rôle important car il dépend de la forme des courbes C_P et C_Q. Si la courbe C_Q a subi de faibles déformations, c'est à dire que les courbes C_P et C_Q sont similaires, la taille du voisinage peut être petite, mais dans le cas contraire, ce voisinage doit être assez important pour pouvoir caractériser la déformation. Dans les résultats expérimentaux présentés nous avons pris $N_{search} = 10$. La figure 3.5 illustre cette méthode.

Parmi les points candidats appartenant à S_i, pour chaque point s_i nous considérerons le point minimisant:

$$E = \frac{1}{2} \int_{S_i} \left(K_Q(f(s)) - K_P(s)\right)^2 ds. \tag{3.14}$$

Ainsi la détermination de f_0 est basée sur une recherche locale du point dont la courbure est la plus proche.

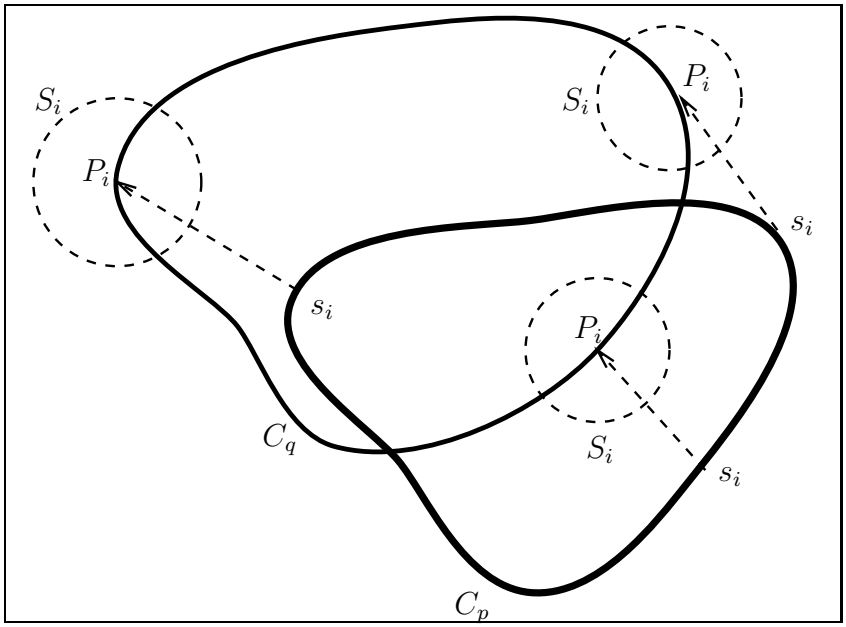

Figure 3.5. Représentation 3-D des voisinages de recherche pour la détermination de l'estimation initiale f_0.

Cette recherche locale est limitée par le choix du point s' correspondant au point le plus proche. La figure 3.6 illustre cette limitation de la méthode proposée par Duncan *et al* [DOSA91]. Dans cette figure les voisinage S_i ne sont pas définis correctement, car la déformation des contours est importante et fausse le choix du point s'_i. Le minimum obtenu en résolvant le schéma itératif (3.13) avec cette condition initiale est erroné.

La détermination de l'ensemble S_i est améliorée en considérant un critère supplémentaire portant sur les abscisses curvilignes s_i et s'_i. A présent le point s'_i correspond au point de la courbe C_Q le plus proche de s_i tel que $s'_i \simeq s_i/\alpha$ et l'ensemble S_i est défini à l'aide des $(N_{search} - 1)/2$ points de la courbe C_Q pris de part et d'autre du point s'_i. Cette nouvelle définition permet une détermination plus précise du voisinage S_i dans le cas de grandes déformations. La figure 3.7 illustre l'utilisation de cette définition avec les mêmes données que la figure 3.6.

Les différentes définitions de l'ensemble S_i nécessitent l'appariement préalable d'un point P_0 de la courbe C_P et d'un point Q_0 de la courbe C_Q. Ce point P_0, définit le point de

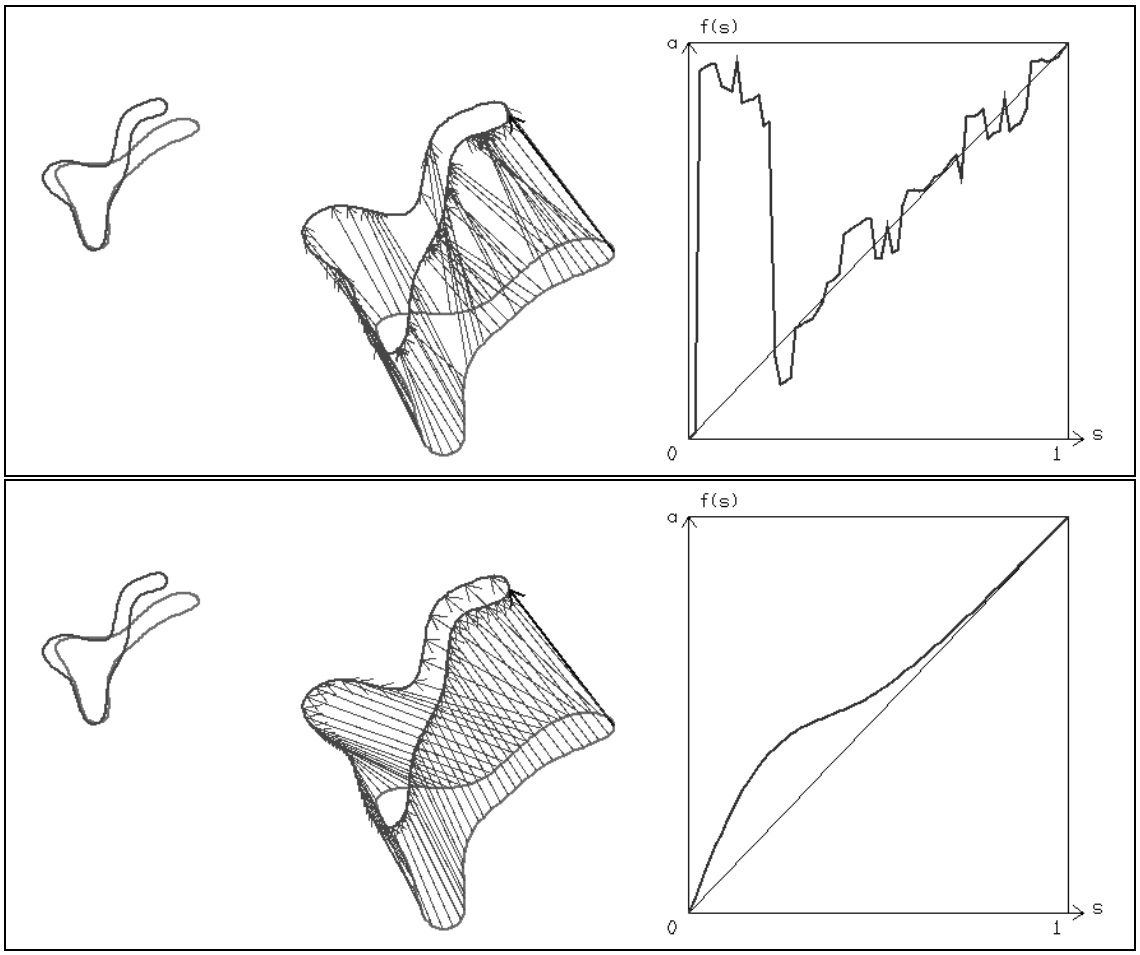

Figure 3.6. Illustration d'un cas où la méthode de détermination de f_0 à partir d'une recherche locale [DOSA91] fournit un résultat erroné. En haut, représentation et tracé de f_0, en bas, la solution correspondante. Les tracés des fonctions correspondent l'estimation initiale f_0 et la solution obtenue f. Ils représentent pour chaque abscisse s_i le point $s'_i = f(s_i)$ auquel il est apparié.

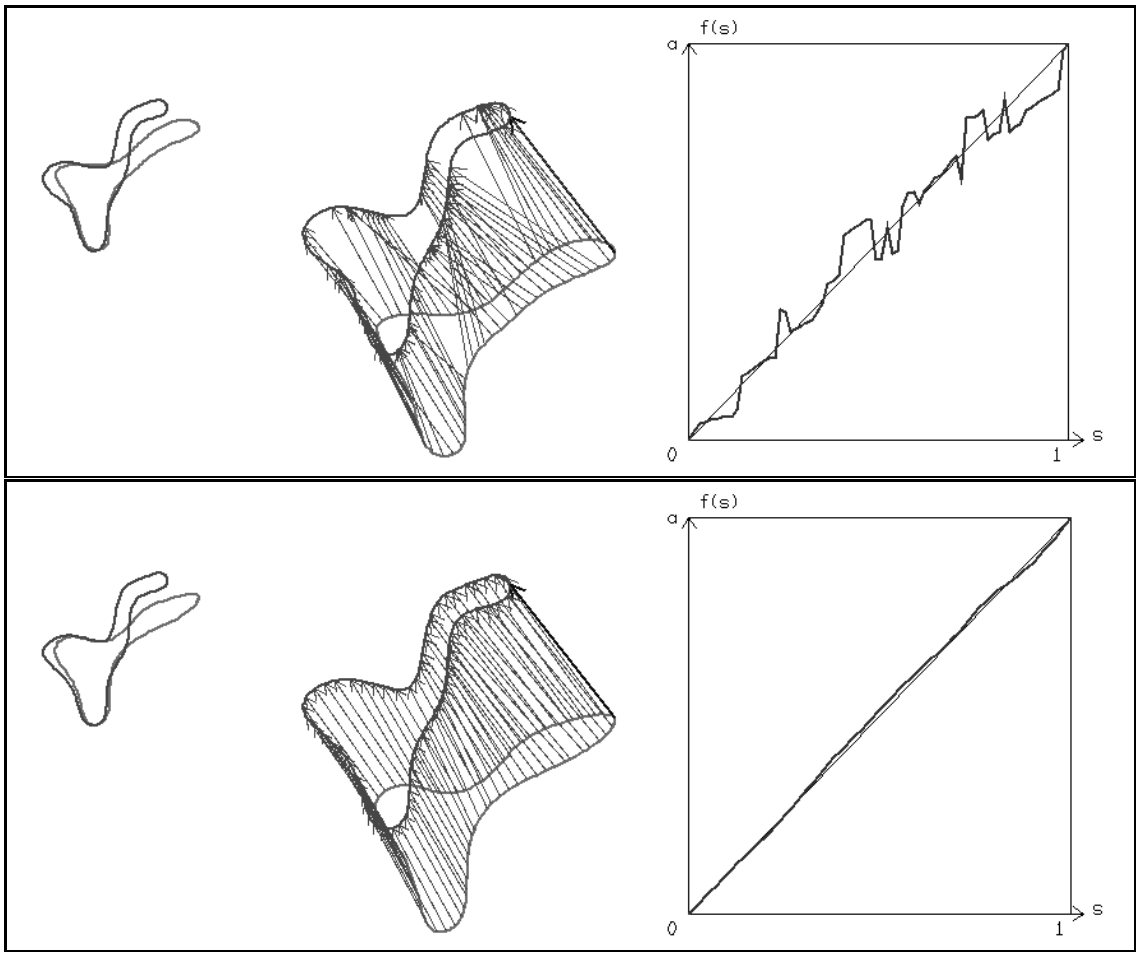

Figure 3.7. Exemple de détermination de l'ensemble S_i à l'aide de l'abscisse curviligne et d'une méthode locale. La solution obtenue met bien en correspondance les points de courbure proche tout en assurant un champ de déplacement régulier.

départ de la paramétrisation de la courbe C_P. On associera à ce point le point de la courbe de courbure maximale et le point Q_0 est défini par la méthode décrite précédemment. Ceci définit les conditions aux limites (3.6) de l'équation aux dérivées partielles (3.9).

3.2.5 Détermination des Paramètres

Le choix des paramètres intervenant dans le calcul d'un minimum de la fonctionnelle E (3.8) sont h et τ concernant la résolution du système linéaire (3.13) et le paramètre $R(s)$ permettant de contrôler le compromis entre régularité du champ de déplacement et similarité des courbures. La solution obtenue dépendra de ces paramètres. Nous présentons dans cette section le choix de ces paramètres et leur importance.

3.2.5.1 Les pas de discrétisation h et τ

La précision de la solution du système linéaire (3.13) dépend du conditionnement de la matrice $(I_d + \tau A)$. Ce conditionnement est défini par
$Cond(I_d + \tau A) = \|I_d + \tau A\| \, \|(I_d + \tau A)^{-1}\|$. La précision de la solution est d'autant plus grande que $Cond(I_d + \tau A)$ est proche de 1. Nous choisirons les paramètres h et τ tels que $Cond(I_d + \tau A)$ soit proche de l'unité. Ceci est fait en déterminant un majorant de $Cond(I_d + \tau A)$ à l'aide de la norme matricielle:

$$|||(a_{ij})_{i,j=1\ldots n}||| = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\sum_i \sup_j |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous avons:

$$Cond(I_d + \tau A) \leq 1 + \frac{n}{n+2} \left(\frac{\beta}{1+\beta} \right)^2,$$

où n est la taille de la matrice et $\beta = \dfrac{6\tau}{5h}$ est l'élément diagonal de la matrice A obtenue par la méthode des éléments finis.

Par conséquent en choisissant $\beta \simeq 1$, c'est à dire que h et τ ont des valeurs similaires, on a la majoration:

$$Cond(I_d + \tau A) < 1.12,$$

garantissant un bon conditionnement de la matrice $(I_d + \tau A)$.

3.2.5.2 Le paramètre de régularisation $R(s)$

Ce paramètre permet de définir le compromis entre la mise en correspondance des points et la régularité du champ de déplacement. Ce compromis est défini à l'aide des deux énergies E_{courbe} et $E_{regular}$. Ce paramètre permet de considérer des courbes ayant, localement, la même courbure. Dans ce cas, l'énergie E_{courbe} est localement constante et toute fonction $f \in H_0^1[0,1]$ sera un minimum E_{courbe}. Le paramètre $R(s)$ permet d'imposer une régularité au champ de déplacement. Ce paramètre devra être prépondérant lorsque l'information de la courbure n'est pas discriminante, c'est à dire constante et inversement. En effet, lorsque la courbure est localement constante, on doit contraindre la régularité du champ de déplacement f pour éviter que plusieurs points soient mis en correspondance avec le même point et obtenir une solution erronée.

Lorsque le paramètre $R(s)$ est nul, chaque point sera mis en correspondance avec le point dont la courbure est similaire et le champ de déplacement sera sensible à la précision du calcul de la courbure. En considérant $R(s) >> 1$ l'énergie $E_{regular}$ sera prépondérante et la minimisation de E ne tiendra pas compte des courbures de chaque courbe.

Nous avons considéré:

$$R(s) = \frac{1}{1 + K_P(s)^2},$$

pour pouvoir tenir compte de la courbure de la courbe et par conséquent des points caractéristiques lorsque ceux-ci sont présents et d'imposer un champ de déplacement régulier lorsque la courbe possède une faible courbure et par conséquent une information non discriminante pour la mise en correspondance.

3.2.6 Résultats Expérimentaux

Cette méthode de calcul du champ de déplacement ou de mise en correspondance de points appartenant à deux objets a été testée sur des exemples synthétiques et réels. Ces résultats représentent, en chaque point de la subdivision, le champ de déplacement initial représentant la condition initiale f_0 et la solution obtenue. La figure 3.8 illustre un exemple de déformation d'un contour synthétique. Le contour de départ (un rectangle) est transformé par une similitude (translation, rotation et homothétie) géométrique pour obtenir un carré.

L'estimation f_0 est obtenue à l'aide de la recherche locale décrite au paragraphe précédent. Nous remarquons que l'algorithme calcule précisément le déplacement des points de forte courbure (les 4 coins), pour les autres points la régularité du champ de déplacement prévaut. La figure 3.9 illustre l'utilisation de l'algorithme lorsque les points caractéristiques ne sont pas saillants. Les quatre points correspondant aux quatre points de courbure extrémale sont mis en correspondance.

Ces deux exemples illustrent l'algorithme: lorsque les courbes considérées possèdent des points caractéristiques, c'est à dire des points de forte courbure, le déplacement de ces points est calculé avec une grande précision, autrement la contrainte de régularisation prévaut et le champ de déplacement est régulier.

Le calcul de l'estimation initiale f_0 est important pour la mise en correspondance finale. Lorsque cette estimée n'est pas assez précise, par exemple la figure 3.6, la solution obtenue ne correspond pas au déplacement des contours. Nous avons essayé d'établir, expérimentalement, l'erreur maximale qui peut être commise sur le calcul de la fonction f_0 tout en préservant le résultat final. Nous avons donc considéré deux contours, pour lesquels le champ de déplacement f calculé à partir du schéma itératif (3.13) a été bruité puis pris comme estimation initiale, c'est à dire $f_0(s_i) = f(s_i) + \mathcal{G}(0, \sigma)$, où $\mathcal{G}(0, \sigma)$ représente un bruit blanc gaussien de variance $\sigma^2 = 0.05$. La figure 3.10 illustre la fonction initiale bruitée. Après quelques itérations la solution f est retrouvée. Cette fonction est représentée dans la figure 3.11.

Il apparaît que lorsque $|f - f_0| \leq 4h$ où h représente le pas de discrétisation, l'algorithme est en mesure de trouver le champ de déplacement f à l'aide de l'initialisation f_0. Cette inégalité représente l'erreur d'appariement qui peut être commise sur chaque point de la courbe C_Q. Ainsi pour chaque point P de la courbe C_P le point Q correspondant peut être déterminé avec une erreur de 4 points sur la grille de la courbe C_Q. Cette incertitude tolérée, est étroitement liée à la définition du voisinage S_i caractérisé par l'entier N_{search} définissant la taille de ce voisinage. Dans les résultats expérimentaux présentés nous avons pris $N_{search} = 10$, et par conséquent l'inégalité $|f - f_0| \leq 4h$ signifie que l'ensemble S_i contient le point correspondant au meilleur appariement.

Les figures 3.12, 3.13, 3.14, et 3.15, illustrent un suivi temporel des points du contour de

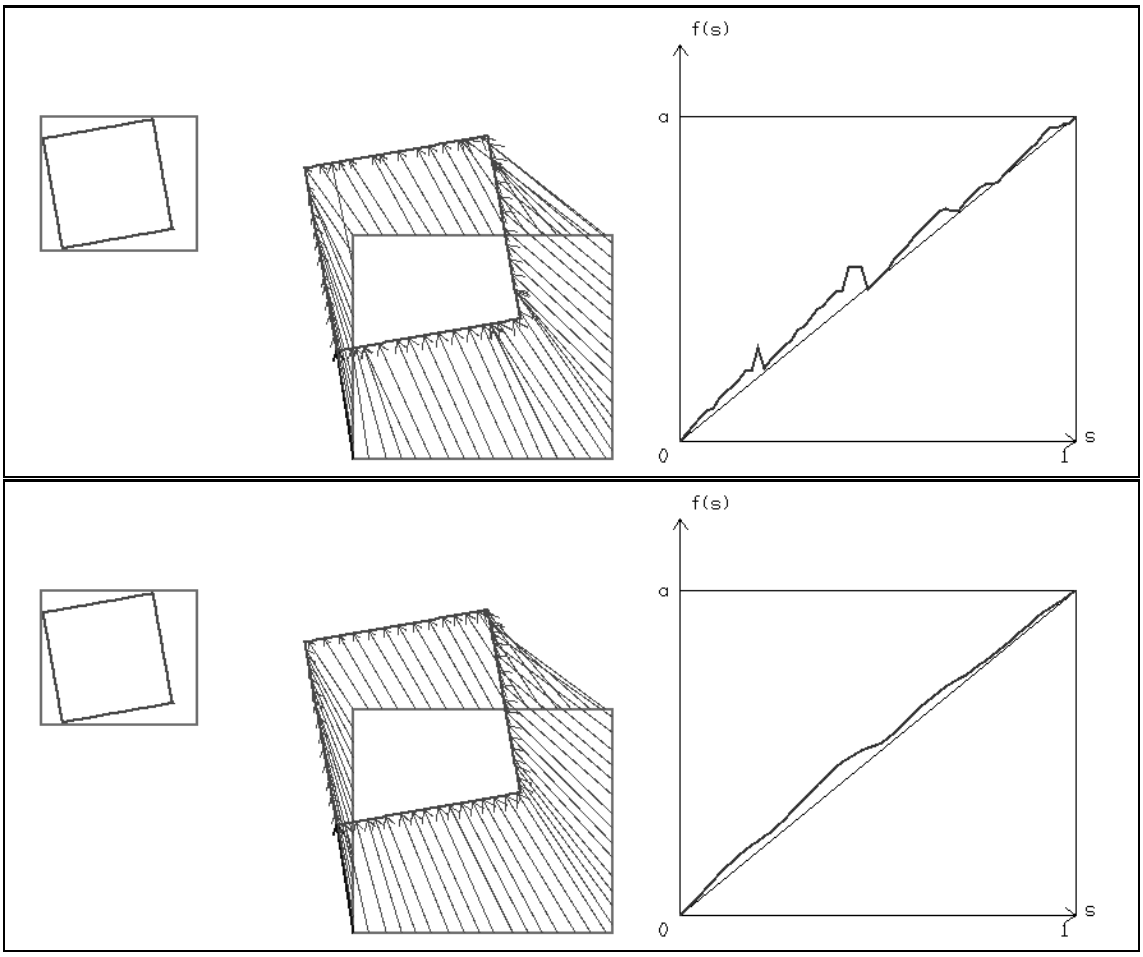

Figure 3.8. Le rectangle (en gris) subit une transformation non rigide. Le calcul de l'estimation initiale ainsi que la solution obtenue sont représentées. On remarquera la précision de la mise en correspondance des points de courbure similaire.

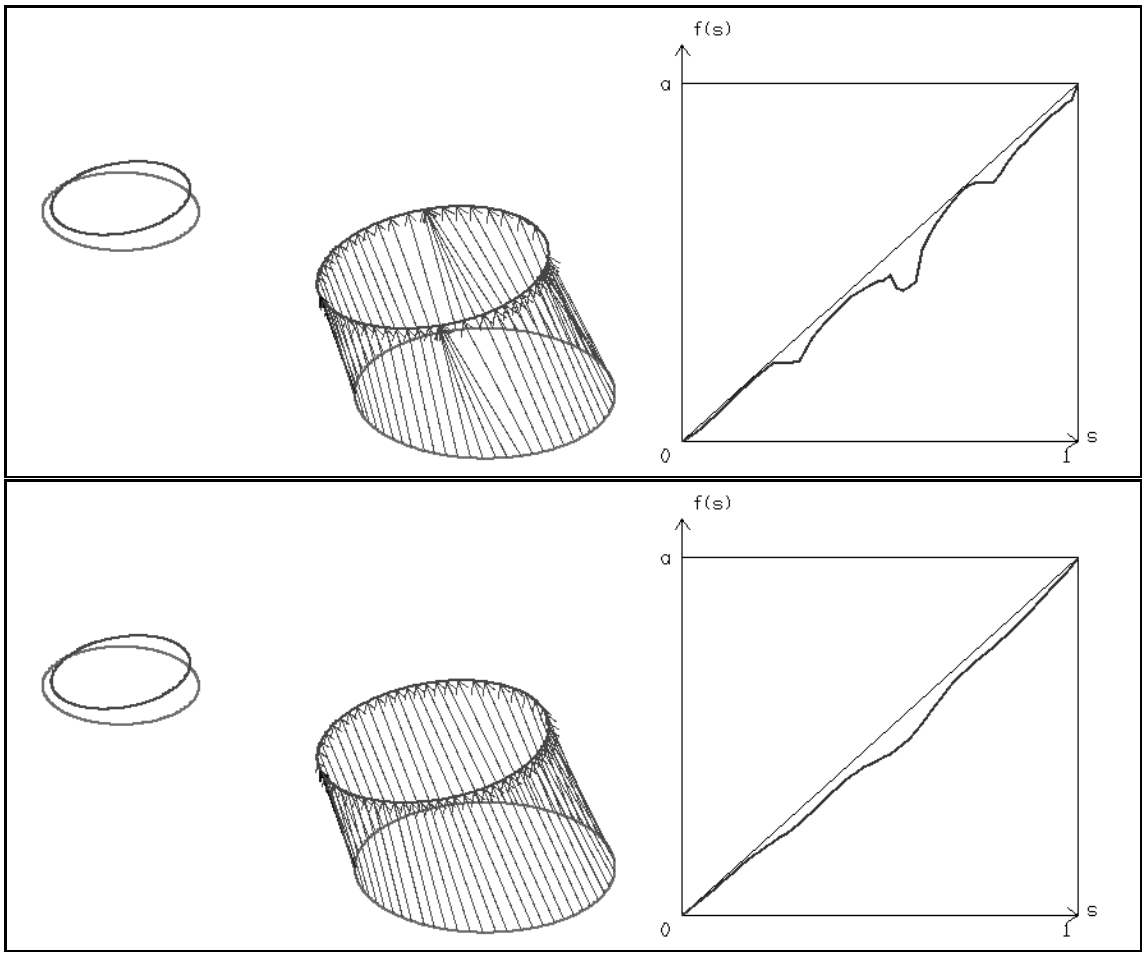

Figure 3.9. Calcul du champ de déplacement entre deux contours. Le second (en noir) correspond à une transformation non rigide du premier (en gris). La mise en correspondance des 4 points caractéristiques de l'ellipse est établie.

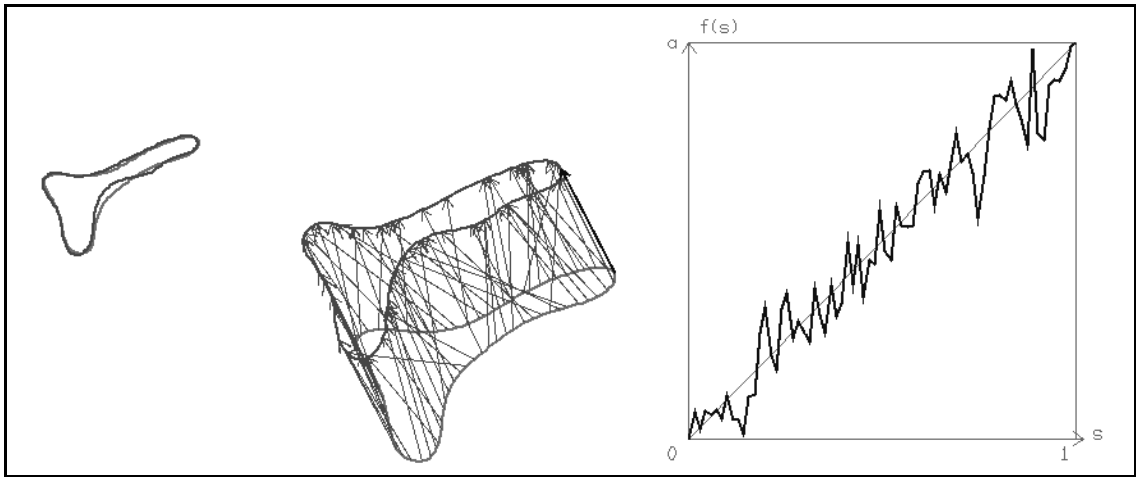

Figure 3.10. Représentation de la condition initiale f_0 bruitée à l'aide d'un bruit blanc gaussien.

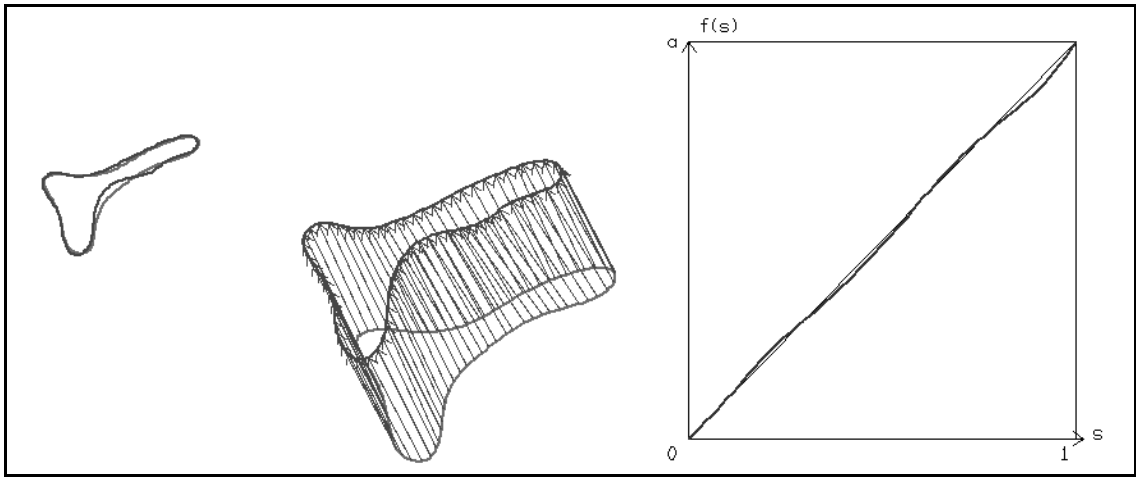

Figure 3.11. Champ de déplacement obtenu en considérant la condition initiale bruitée de la figure 3.10.

la valve mitrale durant le cycle cardiaque. Le suivi des contours à été obtenu à l'aide de la méthode décrite au paragraphe 3.1.2. Dans cette séquence, l'utilisateur a réinitialisé le modèle de contours actifs à quatre reprises. Ces réinitialisations correspondent aux mouvements brusques de la valve mitrale durant le cycle cardiaque. Les résultats sont présentés par paire de contours et illustrent ainsi le suivi de points dans une séquence d'images temporelles réelles.

3.2.7 Généralisation 3-D

La méthode présentée peut être généralisée au suivi de points caractéristiques sur des surfaces. Cette généralisation présente un intérêt pour le suivi de points sur des contours d'images tridimensionnelles. Ces contours sont représentés à l'aide de surfaces. Monga *et al* [MAS91, MBF92] ont montré, sur la base d'un ensemble de résultats expérimentaux, que les extrema de la plus grande des deux courbures principales correspondaient à des caractéristiques intrinsèques de la surface. Cette caractérisation géométrique invariante par transformation rigide peut être utilisée pour la mise en correspondance des points des deux surfaces.

Considérons deux surfaces S_P et S_Q paramétrées par $P(s,r)$ et $Q(s',r')$ et notons par κ_P la plus grande valeur des deux courbures principales de la surface S_P au point P. La mise en correspondance des points appartenant aux surfaces S_P et S_Q peut être formalisée par le problème:

Déterminer la fonction f:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$(s,r) \mapsto (s',r'),$$

minimisant la fonctionnelle:

$$\begin{aligned} E(f) &= \int_{S_P} (\kappa_Q(f(s,r)) - \kappa_P(s,r))^2 dsdr \\ &\quad + R_s \int_{S_P} \left\| \frac{\partial(Q(f(s,r)) - P(s,r))}{\partial s} \right\|^2 dsdr + R_r \int_{S_P} \left\| \frac{\partial(Q(f(s,r)) - P(s,r))}{\partial r} \right\|^2 dsdr, \end{aligned}$$

où $\|.\|$ représente la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^3$.

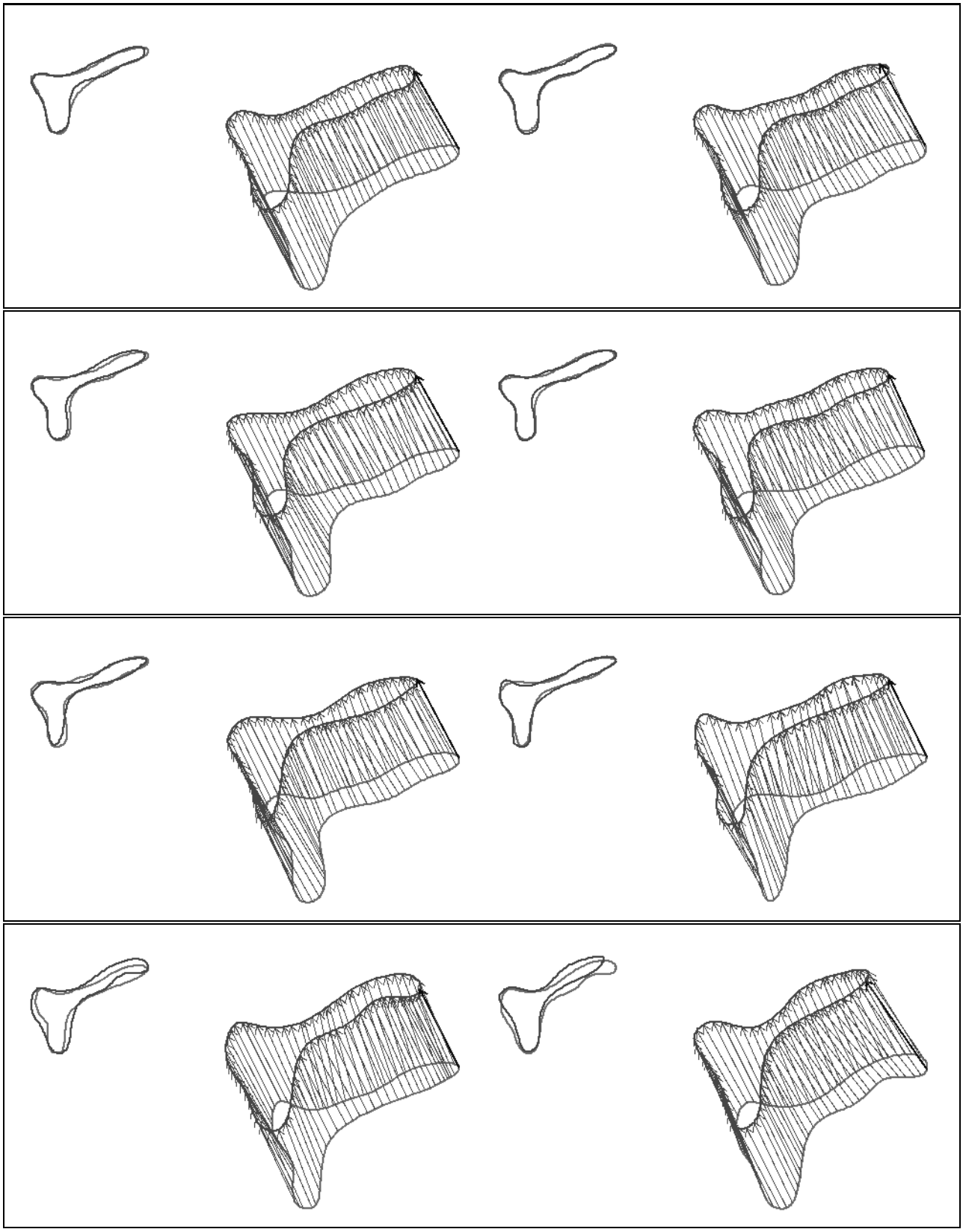

Figure 3.12. Suivi de points à l'aide de la courbure dans une séquence d'images temporelles. Images $1 - 8$

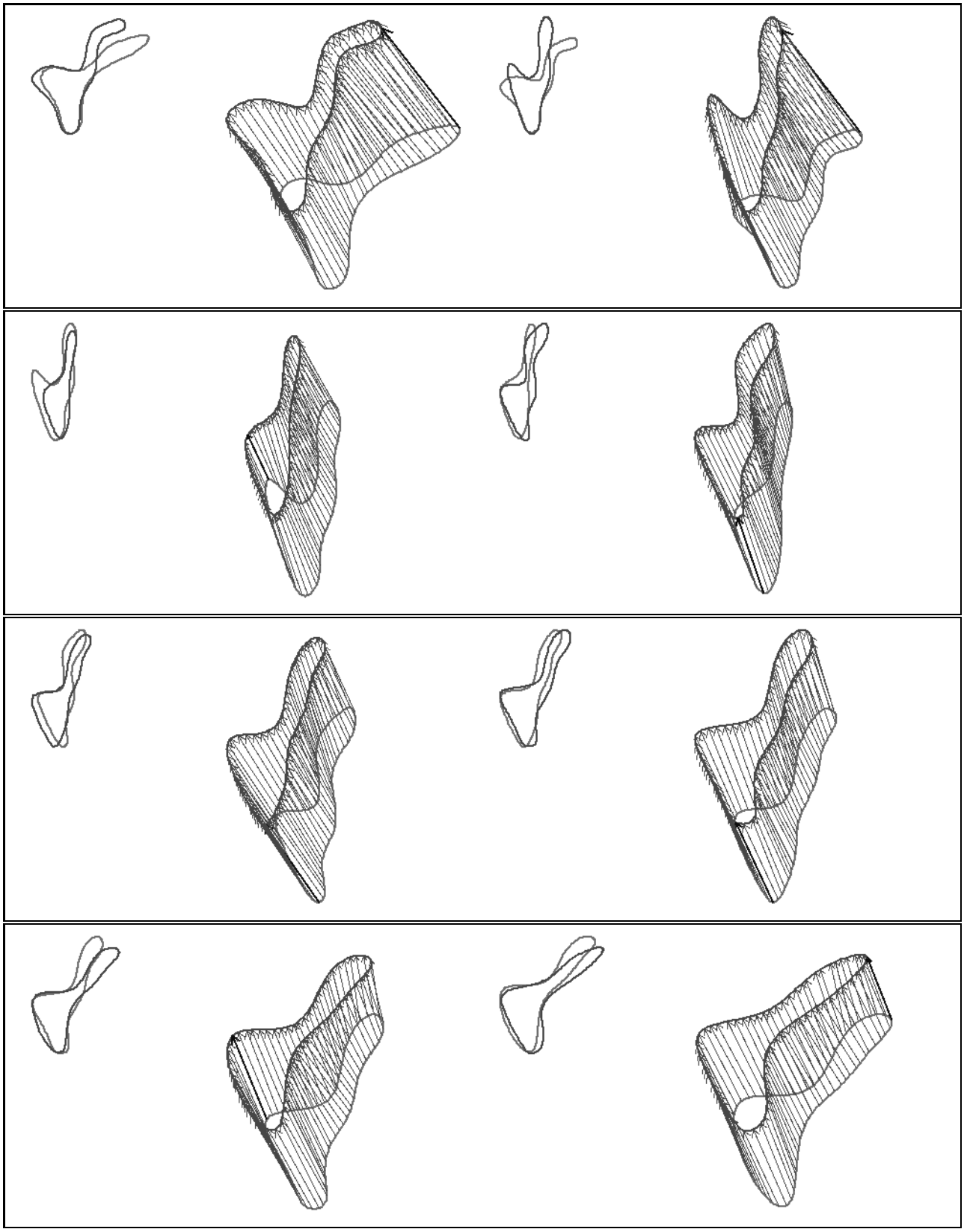

Figure 3.13. Images 9 – 17

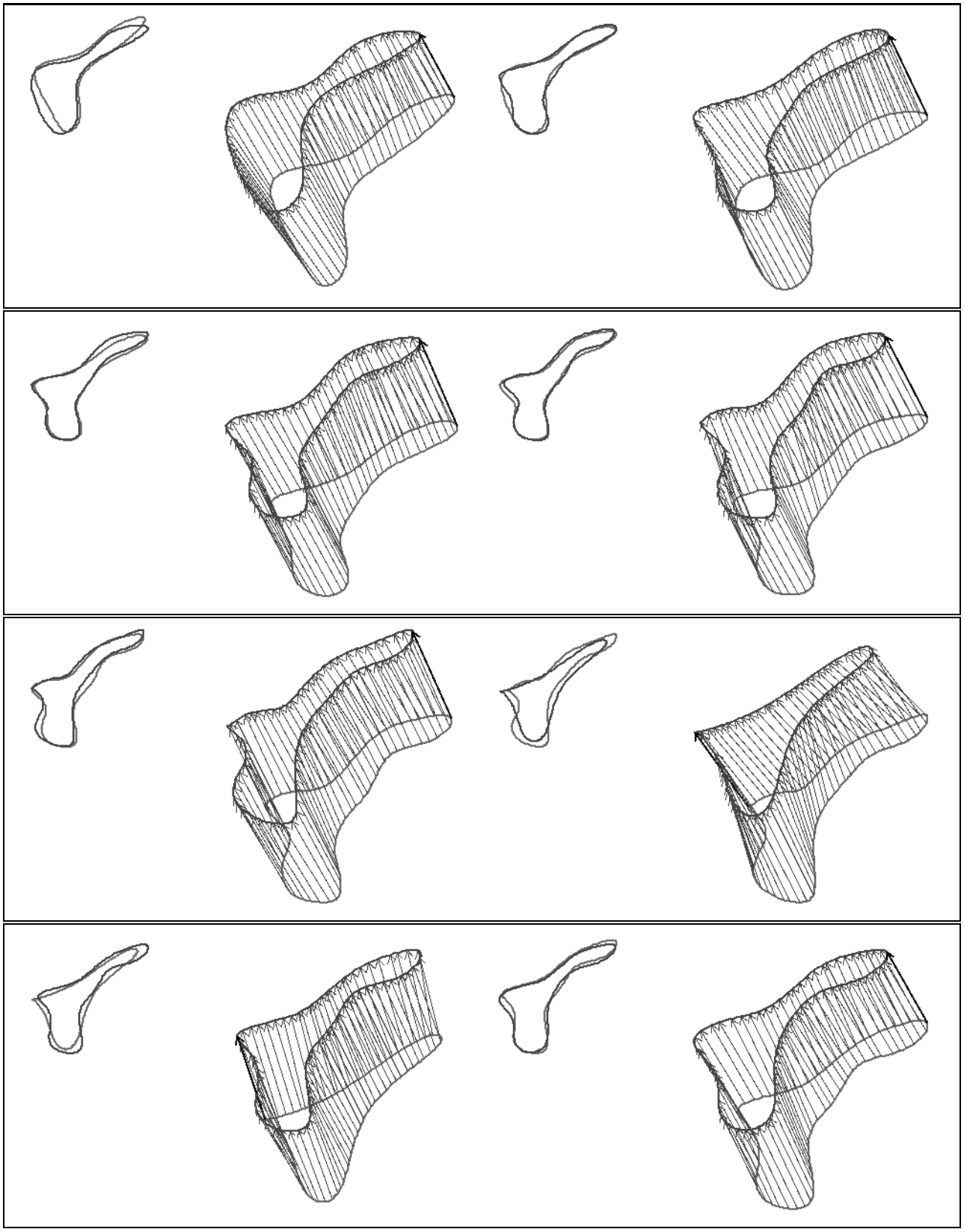

Figure 3.14. Images 17 – 25

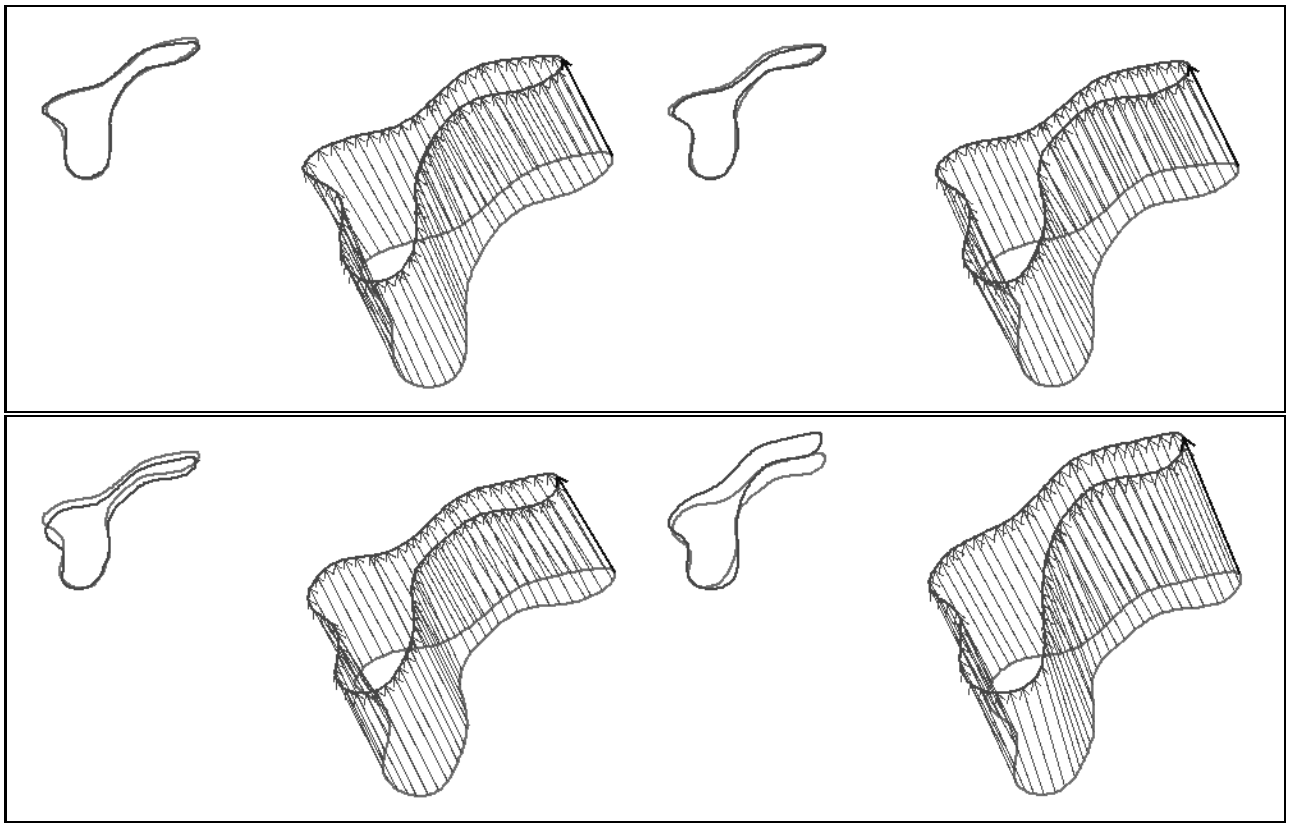

Figure 3.15. Images 25 – 29

Cette fonctionnelle permettrait la mise en correspondance des points dont la courbure principale est semblable tout en imposant une contrainte de régularité à ce champ de déplacement.

3.3 En Résumé

Ce chapitre dédié aux différents suivis de structures, illustrant les différentes applications des modèles déformables. Une première approche à la reconstruction des contours 3-D d'un objet a été proposée ainsi que le suivi temporel de structures. Finalement nous avons également montré que les propriétés globales des contours actifs pouvaient être conjuguées à des caractéristiques locales pour établir un suivi point à point d'une structure dans une séquence d'images temporelles. Le formalisme ainsi défini peut être également utilisé pour l'appariement de points appartenant à deux courbes similaires. Cet appariement servirait à la mise en correspondance d'objets similaires ou de structures anatomiques avec un atlas. Pour cette cette dernière tâche la généralisation 3-D proposée semble convenir, mais n'est pas encore implémentée.

Chapitre 4

Modèles Déformables 3-D

La caractérisation des contours des images 3-D est faite à l'aide de surfaces. Ces surfaces représentent les points du volume tridimensionnel pour lesquels la variation du niveau de gris de l'image dans la direction de la normale est maximale. Ces points de contour sont modélisés par des surfaces représentant les frontières des objets contenus dans le volume de données $I = I(i, j, k)$. La représentation de ces surfaces à l'aide des courbes correspondant aux intersections de la surface avec différents plans n'est pas satisfaisante dans la mesure où certains points de contour d'une même structure anatomique peuvent apparaître dans une coupe et pas dans les suivantes ou être parallèles aux coupes et par conséquent ce manque d'information dans certaines coupes peut mener à une reconstruction erronée de la surface. Une autre limitation de cette approche est l'impossibilité d'imposer une cohérence aux différentes courbes reconstruites (cette cohérence spatiale fournit une méthode de reconstruction robuste vis à vis des données).

Les modèles déformables 3-D seront définis à l'aide de surfaces qui permettront de caractériser les contours des différents volumes. Ce modèle de surfaces déformables a été introduit par Terzopoulos *et al* [TWK88] pour la représentation tridimensionnelle d'objets. Nous allons présenter l'utilisation de ce modèle pour la segmentation d'images 3-D.

4.1 Surfaces à Energie Minimale

Les contours des images 3-D sont décrits par un ensemble de surfaces. Ces surfaces représentent les frontières des objets, et possèdent une paramétrisation locale [dC76]. Cette propriété géométrique permettra de définir le modèle de surfaces déformables pour des surfaces paramétrées. Ce modèle devra d'une part détecter les points de contour tout en contrôlant la régularité de la surface. Nous considérerons une surface v définie par:

$$v : \Omega = [0,1] \times [0,1] \rightarrow I\!R^3,$$

$$(s,r) \mapsto v(s,r) = (x(s,r), y(s,r), z(s,r)),$$

et la fonctionnelle associée:

$$E : Ad \rightarrow I\!R,$$

$$v \mapsto E(v) = \int_\Omega w_{10} \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 + w_{01} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + 2w_{11} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right|^2 + w_{20} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|^2 + w_{02} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right|^2 + P(v(s,r)) ds\, dr,$$

où $P = -\left|\nabla \mathcal{I}\right|^2$ représente le potentiel associé aux forces appliquées à la surface. Ces forces, comme dans le cas de courbes déformables attireront la surface vers les points de contour.

La surface v caractérisera des points de contour de l'image lorsque $E(v)$ sera minimale. Un minimum de E est caractérisé par l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial s}\left(w_{10}\frac{\partial v}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(w_{01}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left(w_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_{20}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(w_{02}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) = -\nabla P(v), \\ + \text{ Conditions aux limites.} \end{cases} \tag{4.1}$$

Les conditions aux limites permettent de contraindre la structure de la surface en précisant différentes propriétés de la surface aux points frontières du domaine de paramétrisation $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Par exemple en imposant $v(s,0) = v(s,1)$, $\forall s \in [0,1]$ ou $v(0,r) = v(1,r)$, $\forall r \in [0,1]$ la structure de la surface v sera cylindrique.

4.2 Surfaces Déformables et Points de Contour

La définition du potentiel P est liée à celle des points de contour. Nous allons, à présent, déterminer la relation existant entre l'énergie:

$$E_{ext}(v) = \int_\Omega P(v) ds dr = -\int_\Omega \left|\nabla \mathcal{I}(v)\right|^2 ds dr, \tag{4.2}$$

et les points de contour. Le résultat que nous allons montrer est une généralisation 3-D du résultat 2-D montré par Fua *et al* [FL88]:

Lemme 4.1 *Une courbe $\mathcal{C}$ est un minimum local de:*

$$E_P(\mathcal{C}) = -\frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_0^{|\mathcal{C}|} |\nabla\mathcal{I}(f(s))|\, ds, \tag{4.3}$$

où f est une paramétrisation de la courbe $\mathcal{C}$ et $|\mathcal{C}|$ sa longueur, si:

$$\frac{d\,|\nabla\mathcal{I}(f(s))|}{dn(f(s))} = \gamma(s)\left(|\nabla\mathcal{I}(f(s))| - \frac{1}{|\mathcal{C}|}\int_0^{|\mathcal{C}|} |\nabla\mathcal{I}(f(s))|\, ds\right),$$

où $n(f(s))$ et $\gamma(s)$ sont respectivement la normale et la courbure de la courbe $\mathcal{C}$. □

Pour cela rappelons la définition des points de contour 3-D proposée par Canny [Can86].

Définition 4.1 *Un contour 3-D est une surface $\mathcal{S}$ constituée des points dont l'amplitude du gradient dans la direction normale à la surface est maximale. Les points de cette surface vérifient donc:*

$$\frac{d\,|\nabla\mathcal{I}(v(s,r))|}{dN(v(s,r))} = 0, \tag{4.4}$$

où $N(v(s,r))$ est la normale à la surface $\mathcal{S}$ paramétrée par l'application $v(s,r)$ et $\mathcal{I}$ représente l'image $I(i,j,k)$ convoluée avec une gaussienne.

Considérons l'énergie E_P associée au potentiel P, E_P s'écrit:

$$E_P(\mathcal{S}) = -\int_\Omega |\nabla\mathcal{I}(v(s,r))|^2\, dA, \tag{4.5}$$

où dA est l'élément de surface, il s'exprime en fonction des coefficients E, F et G de la première forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}$: $dA = \sqrt{EG - F^2}dsdr$.

Nous avons alors le résultat suivant:

Lemme 4.2 *La surface $\mathcal{S}$ est un minimum local de E_P si:*

$$|\nabla\mathcal{I}(v(s,r))|\left(\frac{d\,|\nabla\mathcal{I}(v(s,r))|}{dN(v(s,r))} + 2H\,|\nabla\mathcal{I}(v(s,r))|\right) = 0, \tag{4.6}$$

où H représente la courbure moyenne de la surface $\mathcal{S}$ au point $v(s,r)$.

Démonstration du lemme. Considérons la surface $\mathcal{S}_\lambda$ obtenue à partir d'une déformation infinitésimale de la surface $\mathcal{S}$, telle que la paramétrisation de la surface $\mathcal{S}_\lambda$ soit:

$$v^\lambda = v + \lambda\left(\alpha v_s + \beta v_r + \gamma N\right), \tag{4.7}$$

où $\alpha(s,r)$, $\beta(s,r)$ et $\gamma(s,r)$ sont des fonctions continues et différentiables quelconques et v_s, v_r et N représentent respectivement les dérivées de l'application v et la normale à la surface. Ces trois vecteurs définissent le repère local de la surface $\mathcal{S}$.

La surface $\mathcal{S}$ est un extremum local de E_P si:

$$\left.\frac{dE_P(\mathcal{S}_\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = 0, \tag{4.8}$$

quelles que soient les fonctions α, β et γ.

Notons $R(.) = |\nabla\mathcal{I}(.)|$, E_P s'écrit alors:

$$E_P(\mathcal{S}_\lambda) = -\int_\Omega R(v^\lambda(s,r))^2\sqrt{EG-F^2}dsdr,$$

et

$$\frac{dE_P(\mathcal{S}_\lambda)}{d\lambda} = \int_\Omega 2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(R(v^\lambda)\right)R(v^\lambda)\sqrt{EG-F^2} + R(v^\lambda)^2\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\sqrt{EG-F^2}\right)dsdr.$$

Cette équation s'écrit:

$$\begin{aligned}\frac{dE_P(\mathcal{S}_\lambda)}{d\lambda} &= \int_\Omega 2\left(\alpha v_s + \beta v_r + \gamma N\right)R(v^\lambda)\nabla R(v^\lambda)\sqrt{EG-F^2}dsdr \\ &- \frac{1}{2}\int_\Omega R(v^\lambda)^2\frac{E_\lambda G + EG_\lambda - 2FF_\lambda}{\sqrt{EG-F^2}}dsdr,\end{aligned}$$

où E_λ, F_λ et G_λ sont les dérivées des coefficients de la première forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}_\lambda$ par rapport à λ. Ils sont exprimés par:

$$E_\lambda|_{\lambda=0} = 2\left(\alpha_s E + \alpha v_s v_{ss} + \beta_s F + \beta v_s v_{sr} + \gamma v_s N_s\right),$$

$$F_\lambda|_{\lambda=0} = \alpha(v_r v_{ss} + v_s v_{sr}) + \alpha_s F + \alpha_r E + \beta(v_r v_{sr} + v_s v_{rr}) + \beta_s G + \beta_r F + \gamma(N_s v_r + v_s N_r),$$

et

$$G_\lambda|_{\lambda=0} = 2\left(\alpha v_r v_{sr} + \alpha_r F + \beta v_r v_{rr} + \beta_r G + \gamma v_r N_r\right).$$

Les dérivées secondes sont exprimées dans le repère local de la surface $\{v_s, v_r, N\}$ à l'aide des symboles de Christoffel Γ_{ij}^k ([dC76], page 232) et des coefficients e, f, et g de la seconde forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}$:

$$\begin{cases} v_{ss} &= \Gamma_{11}^1 v_s + \Gamma_{11}^2 v_r + eN, \\ v_{sr} &= v_{rs} = \Gamma_{12}^1 v_s + \Gamma_{12}^2 v_r + fN, \\ v_{rr} &= \Gamma_{22}^1 v_s + \Gamma_{22}^2 v_r + gN, \end{cases} \tag{4.9}$$

et les dérivées de la normale seront exprimées dans le repère local à l'aide de l'endomorphisme de Weingarten $(a_{ij})_{i,j=1,2}$ ([dC76], page 154):

$$\begin{cases} N_s &= a_{11} v_s + a_{12} v_r, \\ N_r &= a_{21} v_s + a_{22} v_r. \end{cases} \tag{4.10}$$

On a donc:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dE_P(\mathcal{S}_\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \int_\Omega 2\left(\alpha v_s + \beta v_r + \gamma N\right) R(v) \nabla R(v) \sqrt{EG - F^2} \\ &\quad - R(v)^2 \left(\alpha(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) + \alpha_s + \beta(\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) + \beta_r + 2\gamma H\right) \sqrt{EG - F^2} ds dr, \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} \left.\frac{dE_P(\mathcal{S}_\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} &= \int_\Omega R(v) \Big[\alpha \left(2 v_s \nabla R(v) + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) R(v)\right) + \alpha_s R(v) \\ &\quad + \beta \left(2 v_r \nabla R(v) + (\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^2) R(v)\right) + \beta_r R(v) + \gamma \left(N \cdot \nabla R(v) + 2H R(v)\right) \Big] dA. \end{aligned}$$

Intégrons par parties les deux termes contenant les fonctions α_s et β_r, nous obtenons:

$$\int_\Omega \alpha_s R(v)^2 dA = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial s} \left(R(v)^2 \sqrt{EG - F^2}\right) ds dr.$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\sqrt{EG - F^2}\right) = \left(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\right) \sqrt{EG - F^2},$$

par conséquent:

$$\int_\Omega \alpha_s R(v)^2 dA = -\int_\Omega 2 v_s R(v) \nabla R(v) - R(v)^2 \left(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2\right) dA.$$

Cette relation nous permet d'écrire que:

$$\int_\Omega R(v) \left[\alpha \left(2 v_s \nabla R(v) + (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2) R(v)\right) + \alpha_s\right] dA = 0.$$

Nous avons de même:

$$\int_\Omega R(v)\left[\beta\left(2v_r\nabla R(v)+(\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2)R(v)\right)+\beta_r\right]dA=0,$$

en utilisant la relation:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{EG-F^2}\right)=\left(\Gamma_{12}^1+\Gamma_{22}^2\right)\sqrt{EG-F^2}.$$

Finalement l'équation (4.8) est satisfaite, si:

$$|\nabla\mathcal{I}|\left(\frac{d\,|\nabla\mathcal{I}|}{dN}+2H\,|\nabla\mathcal{I}|\right)=0. \tag{4.11}$$

□

Ainsi les minimums de l'énergie E_{ext} seront caractérisés par les surfaces pour lesquels $|\nabla\mathcal{I}|=0$ représentant les zones homogènes de l'image ou par les surfaces vérifiant:

$$\frac{d\,|\nabla\mathcal{I}|}{dN}+2H\,|\nabla\mathcal{I}|=0.$$

On peut alors, à l'aide de cette équation caractériser les minimums de l'énergie E_{ext} en deux classes:

i- Les surface minimales (c'est à dire les surfaces pour lesquelles la courbure moyenne est identiquement nulle) seront considérées comme minimum de E_{ext} et par conséquent comme contours 3-D.

ii- Les surfaces pour lesquelles $|\nabla\mathcal{I}|$ est nul en tout point de la surface seront également considérées comme contours.

Cette caractérisation est théorique et ne se produit pas en pratique, car la surface déformable converge vers les points de contour en satisfaisant le critère de régularité imposé par les paramètres w_{ij}.

4.3 Résolution Numérique

La résolution numérique de l'équation d'évolution associée à l'équation (4.1) est faite à l'aide d'une formulation variationnelle de l'équation. Nous présenterons cette formulation ainsi que sa discrétisation à l'aide d'une méthode d'éléments finis conformes (MEF).

4.3.1 Formulation Variationnelle

Considérons une fonction $u \in H_0^2(\Omega)$, multiplions l'équation (4.1) par cette fonction et intégrons l'équation obtenue. On a:

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t} u dsdr - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial s}\left(w_{10}\frac{\partial v}{\partial s}\right) udsdr - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial r}\left(w_{01}\frac{\partial v}{\partial r}\right) udsdr + 2\int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left(w_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right) udsdr$$
$$+ \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_{20}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) udsdr + \int_\Omega \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(w_{02}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) udsdr = -\int_\Omega \nabla P(v) udsdr,$$

où la fonction v dépend des variables t, s et r. En considérant les mêmes remarques que dans le paragraphe 2.2, la résolution de l'équation d'évolution associée aux surfaces déformables est équivalente à la résolution du problème parabolique (2.9) où la forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie par:

$$a(u,v) = \int_\Omega w_{10}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + w_{01}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2w_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r} + w_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\ dsdr, \quad (4.12)$$

et la forme linéaire L_v est définie par:

$$L_v(u) = -\int_\Omega \nabla P(v)\ u\ dsdr. \quad (4.13)$$

En séparant les variables temporelles et spatiales la résolution du problème parabolique se ramène à résoudre séparément le problème variationnel et le problème d'évolution.

4.3.2 Discrétisation du Problème Variationnel

La discrétisation du problème variationnel:

Déterminer une fonction $v \in H_0^2(\Omega)$ telle que:

$$a(u,v) = L_v(u) \quad \forall u \in H_0^2(\Omega), \quad (4.14)$$

consiste à définir un problème variationnel discret associé, dont la solution possède certaines propriétés. Ce problème discret permet de déterminer une solution v_h définie dans un espace de dimension finie $V_h \subset H_0^2(\Omega)$ telle que $\|v - v_h\|_{H^2} \to 0$ lorsque $h \to 0$. La méthode de Galerkin permet de définir le problème discret qui est une approximation discrète du problème continu (4.14). Ce problème est défini par:

Déterminer une fonction $v_h \in V_h$ telle que:

$$a(v_h, u_h) = L_v(u_h) \quad \forall \; u_h \in V_h. \tag{4.15}$$

La résolution de ce problème discret est basée sur la construction de l'espace de dimension finie V_h. Cet espace est défini à l'aide de la méthode des éléments finis, caractérisée par:

i- La subdivision du domaine de paramétrisation $\Omega = [0,1] \times [0,1]$,

ii- La fonction v_h est polynomiale par morceaux,

iii- L'existence d'une base de l'espace V_h dont les fonctions ont un petit support.

Cette dernière propriété caractérise la complexité algorithmique de la méthode car la structure du système linéaire obtenu par la MEF est directement liée à la subdivision du domaine Ω et à la taille du support des fonctions de base.

4.3.2.1 Discrétisation du domaine Ω

Considérons $N_s > 1$ et $N_r > 1$, les nombres de points de discrétisation dans chaque direction du domaine Ω et $h_s = \dfrac{1}{N_s - 1}$ et $h_r = \dfrac{1}{N_r - 1}$ et considérons la subdivision uniforme du domaine Ω:

$$\Omega = [0,1] \times [0,1] = \bigcup_{i,j=0}^{N_s-1,N_r-1} K_{i,j} = \bigcup_{i,j=0}^{N_s-1,N_r-1} [ih_s, (i+1)h_s] \times [jh_r, (j+1)h_r],$$

composée des nœuds $a_{i,j} = (x_i, y_j) = (ih_s, jh_r)$, $0 \leq i \leq N_s - 1$ et $0 \leq j \leq N_r - 1$. La figure 4.1 représente la discrétisation considérée ainsi que le support de la fonction de base au nœud a_{ij}.

4.3.2.2 Les fonctions de base

La forme bilinéaire $a(.,.)$ intervenant dans le problème variationnel (4.14) est définie dans l'espace de Sobolev $H_0^2(\Omega)$, ainsi l'espace de dimension finie V_h sera défini à partir de fonctions polynomiales de $H_0^2(\Omega)$. L'ordre de continuité de ces fonctions de base est défini grâce au lemme [Cia87]:

Lemme 4.3 *Si $u \in \mathcal{C}^m(\overline{\Omega})$ alors $u \in H^{m+1}(\Omega)$.* □

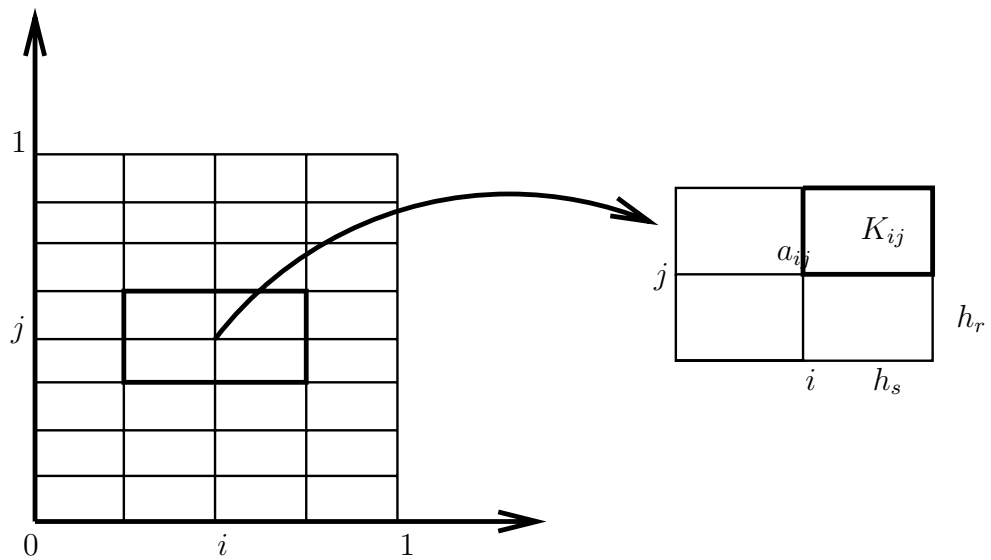

Figure 4.1. Illustration du maillage du domaine Ω et du support des fonctions de base au nœud a_{ij}.

Ainsi pour que les fonctions de base, engendrant l'espace V_h, soient dans $H_0^2(\Omega)$ il suffit que celles-ci soient de classe $\mathcal{C}^1$.

Nous allons considérer la famille affine d'éléments finis de Bogner-Fox-Schmit [BFS65, Cia87]. Celle ci est définie par:

i- Les rectangles K_{ij},

ii- L'ensemble des polynômes:

$$P_{K_{ij}} = Q_3(I\!R^2) = \left\{ p, \;\; p(s,r) = \sum_{0 \le k,l \le 3} \gamma_{k,l} s^k r^l \right\},$$

iii- L'ensemble des degrés de liberté:

$$\Sigma_{K_{ij}} = \left\{ p(c_k), \; \frac{\partial p(c_k)}{\partial s}, \; \frac{\partial p(c_k)}{\partial r}, \; \frac{\partial^2 p(c_k)}{\partial s \partial r} \quad 1 \le k \le 4 \right\},$$

permettant de définir d'une manière unique les polynômes de $Q_3(I\!R^2)$ sur chaque rectangle K_{ij}.

Le sous espace V_h est alors défini par:

$$V_h = \left\{ v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \;\; v_{|K_{ij}} \in Q_3(K_{ij}) \right\},$$

où $Q_3(I)$ représente la restriction de l'espace $Q_3(I\!R^2)$ aux polynômes définis sur I, et $v_{|I}$ la restriction à I de la fonction v. Cet espace est engendré par les quatre fonctions de base φ_{ij}, ψ_{ij}, η_{ij} et ζ_{ij} définies par les relations:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll}
\varphi_{ij}(a_{kl}) & = & \delta_{ij,kl}; & \dfrac{\partial\varphi_{ij}}{\partial s}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial\varphi_{ij}}{\partial r}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial^2\varphi_{ij}}{\partial s\partial r}(a_{kl}) & = 0, \\
\dfrac{\partial\psi_{ij}}{\partial s}(a_{kl}) & = & \delta_{ij,kl}; & \psi_{ij}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial\psi_{ij}}{\partial r}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial^2\psi_{ij}}{\partial s\partial r}(a_{kl}) & = 0, \\
\dfrac{\partial\eta_{ij}}{\partial r}(a_{kl}) & = & \delta_{ij,kl}; & \eta_{ij}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial\eta_{ij}}{\partial s}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial^2\eta_{ij}}{\partial s\partial r}(a_{kl}) & = 0, \\
\dfrac{\partial^2\zeta_{ij}}{\partial s\partial r}(a_{kl}) & = & \delta_{ij,kl}; & \zeta_{ij}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial\zeta_{ij}}{\partial s}(a_{kl}) & = & \dfrac{\partial\zeta_{ij}}{\partial r}(a_{kl}) & = 0,
\end{array}\right. \tag{4.16}$$

où

$$\delta_{ij,kl} = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = k \text{ et } j = l, \\ 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

La figure 4.2 représente ces quatre fonctions de base (voir l'annexe A pour la description analytique et la relation avec la base de l'élément fini de Hermite dans $I\!R$).

Ainsi pour toute fonction $v_h \in V_h$, on a l'identité:

$$v_h = \sum_{i,j=0}^{N_s-1,N_r-1} v_h(a_{ij})\varphi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{ij})\psi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{ij})\eta_{ij} + \frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{ij})\zeta_{ij}. \tag{4.17}$$

En prenant en compte la taille du support des fonctions de base, nous avons l'identité: $\forall(s,r) \in \Omega$, $\exists\, i,j$ tels que $(s,r) \in K_{ij}$ et

$$v_h(s,r) = \sum_{|k-i|<1,|l-j|<1} v_h(a_{kl})\varphi_{kl}(s,r) + \frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})\psi_{kl}(s,r) + \frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})\eta_{kl}(s,r) + \frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})\zeta_{kl}(s,r). \tag{4.18}$$

En reformulant le problème variationnel discret (4.15) par rapport aux quatre fonctions de base, on a $\forall i,j = 0,\ldots,N_s-1,N_r-1$:

$$\left\{\begin{array}{l} a(v_h,\varphi_{ij}) = L_v(\varphi_{ij}), \\ a(v_h,\psi_{ij}) = L_v(\psi_{ij}), \\ a(v_h,\eta_{ij}) = L_v(\eta_{ij}), \\ a(v_h,\zeta_{ij}) = L_v(\zeta_{ij}), \end{array}\right. \tag{4.19}$$

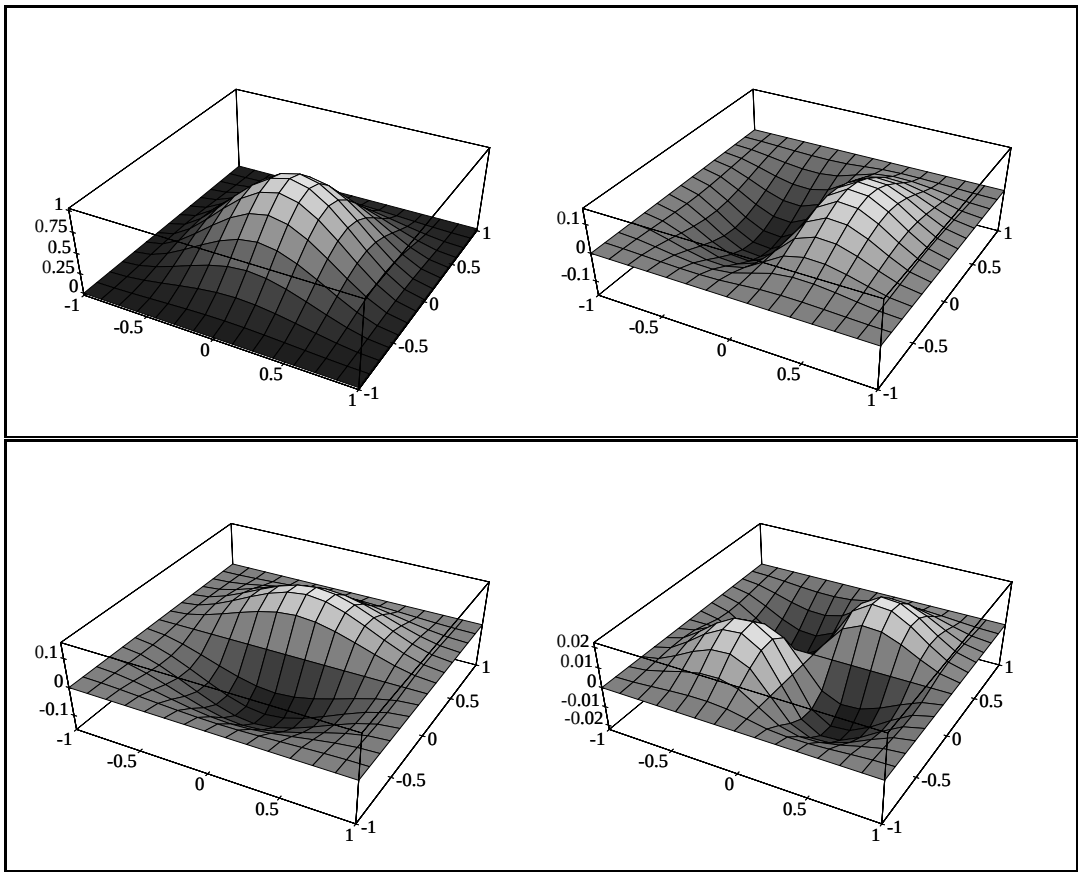

Figure 4.2. Représentation des quatre fonctions de base de l'élément fini de Bogner - Fox - Schmit.

et en utilisant l'identité (4.18), nous avons $\forall i, j = 0, \ldots, N_s - 1, N_r - 1$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{|k-i|<1,|l-j|<1} v_h(a_{kl})a(\varphi_{kl},\varphi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})a(\varphi_{kl},\psi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})a(\varphi_{kl},\eta_{ij})+\frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})a(\varphi_{kl},\zeta_{ij}) = L_v(\varphi_{ij}), \\ \sum\limits_{|k-i|<1,|l-j|<1} v_h(a_{kl})a(\psi_{kl},\varphi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})a(\psi_{kl},\psi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})a(\psi_{kl},\eta_{ij})+\frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})a(\psi_{kl},\zeta_{ij}) = L_v(\psi_{ij}), \\ \sum\limits_{|k-i|<1,|l-j|<1} v_h(a_{kl})a(\eta_{kl},\varphi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})a(\eta_{kl},\psi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})a(\eta_{kl},\eta_{ij})+\frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})a(\eta_{kl},\zeta_{ij}) = L_v(\eta_{ij}), \\ \sum\limits_{|k-i|<1,|l-j|<1} v_h(a_{kl})a(\zeta_{kl},\varphi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})a(\zeta_{kl},\psi_{ij})+\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})a(\zeta_{kl},\eta_{ij})+\frac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})a(\zeta_{kl},\zeta_{ij}) = L_v(\zeta_{ij}). \end{cases} \tag{4.20}$$

Le système d'équations (4.20) est un système linéaire où les inconnues sont les quatre degrés de liberté $v_h(a_{kl})$, $\dfrac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})$, $\dfrac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})$ et $\dfrac{\partial^2 v_h}{\partial s\partial r}(a_{kl})$ en chaque point du maillage. Ce système linéaire est donc équivalent à la résolution de:

$$A \cdot V = L,$$

où $A = (\tilde{A}_{ij,kl})_{i,k=0,\ldots,Ns-1;j,l=0\ldots Nr-1}$ est une matrice tridiagonale par blocs, avec:

$$\tilde{A}_{ij,kl} = \begin{pmatrix} a(\varphi_{ij},\varphi_{kl}) & a(\varphi_{ij},\psi_{kl}) & a(\varphi_{ij},\eta_{kl}) & a(\varphi_{ij},\zeta_{kl}) \\ a(\psi_{ij},\varphi_{kl}) & a(\psi_{ij},\psi_{kl}) & a(\psi_{ij},\eta_{kl}) & a(\psi_{ij},\zeta_{kl}) \\ a(\eta_{ij},\varphi_{kl}) & a(\eta_{ij},\psi_{kl}) & a(\eta_{ij},\eta_{kl}) & a(\eta_{ij},\zeta_{kl}) \\ a(\zeta_{ij},\varphi_{kl}) & a(\zeta_{ij},\psi_{kl}) & a(\zeta_{ij},\eta_{kl}) & a(\zeta_{ij},\zeta_{kl}) \end{pmatrix},$$

V correspond au vecteur composé des degrés de liberté en chaque point du maillage et L à l'évaluation de la force appliquée en ces points.

4.3.3 Discrétisation du Problème d'évolution

A présent la résolution du problème d'évolution associé aux surfaces déformables s'écrit sous la forme discrète:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + A \cdot V = L_V.$$

La discrétisation de cette équation par rapport à la variable temporelle est faite à l'aide d'un schéma rétrograde ou implicite. Ainsi pour un pas de discrétisation temporel $\tau > 0$, l'équation d'évolution s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{V^t - V^{t-1}}{\tau} + A \cdot V^t = L_{V^t}, \\ V^0 = v_0 \text{ estimation initiale}, \end{cases} \tag{4.21}$$

où V^t représente la solution à l'instant t. Ce schéma de résolution est difficile à résoudre car on ne peut pas exprimer le vecteur L_{V^t} par rapport à V_t d'une manière linéaire, ceci est dû à la définition du potentiel P à partir de l'image. Pour cela on considérera un schéma explicite pour le vecteur L_{V^t}, ceci signifie qu'à l'instant t, le vecteur V^t, sera calculé à partir de la donnée $L_{V^{t-1}}$ représentant le champ de forces appliqué à la surface. Le système linéaire (4.21) s'écrit donc:

$$(Id + \tau A) \cdot V^t = V^{t-1} + \tau L_{V^{t-1}}. \tag{4.22}$$

Ce schéma représente une expression implicite de la solution V^t à partir d'une évaluation explicite du champ de forces.

Ainsi un minimum de l'énergie E sera obtenu lorsqu'on atteindra une solution stationnaire du système linéaire (4.22). Ce schéma itératif est résolu à l'aide d'une méthode de gradient conjugué pour laquelle, à chaque instant t, la solution V^{t-1} est considérée comme estimation initiale. La méthode de gradient conjugué converge rapidement à chaque itération (3 à 10 itérations en considérant le test d'arrêt de Ginsburg [WR71]). Cette méthode a l'avantage d'être plus rapide qu'une décomposition LL^T de la matrice nécessitant un calcul préalable de la matrice L dont la structure n'est plus creuse.

4.3.4 Calcul du Vecteur L

La détection des points de contour de l'image par le modèle de surfaces déformables dépend de la précision du calcul du vecteur L. En effet, ce vecteur détermine la direction du déplacement de la surface en chaque point. Par conséquent, la localisation des points de contour sera rendue d'autant plus précise. Le vecteur L est défini par:

$$L_V^{t-1}(e_{ij}) = -\int_\Omega \nabla P\left(v_{t-1}(s,r)\right) e_{ij}(s,r)\, dsdr, \tag{4.23}$$

où $e_{ij} = (\varphi_{ij},\ \psi_{ij},\ \eta_{ij},\ \zeta_{ij})$ correspond au vecteur des fonctions de base, permettant de déterminer en chaque point du maillage la composante du champ de forces dans la base de l'élément fini de BFS.

Le potentiel P, comme nous l'avons précisé, est extrait de l'image et par conséquent, il n'est connu qu'en des valeurs entières. Ceci est dû à la représentation des images numériques

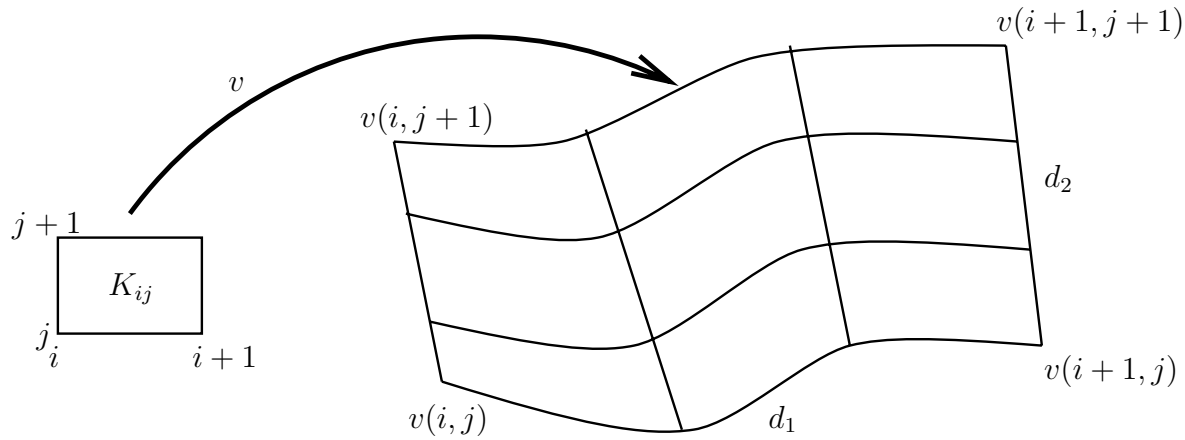

Figure 4.3. Illustration de la prise en compte de la totalité des points contenus dans l'ensemble $v([(i-1)h_s,(i+1)h_s]\times[(j-1)h_r,(j+1)h_r])$ pour le calcul du vecteur L.

par des matrices contenant en chaque point le niveau de gris associé. Pour cela toute évaluation du potentiel P en un point (x,y,z) se fera par l'intermédiaire d'une interpolation des valeurs des huit points voisins.

La formule d'intégration numérique choisie pour calculer (4.23) est telle que chaque pixel de l'image contenu dans l'ensemble $v([(i-1)h_s,(i+1)h_s]\times[(j-1)h_r,(j+1)h_r])$ sera pris en compte pour le calcul de la force appliquée à la surface au point (i,j) du maillage. Pour cela considérons le rectangle $K_{ij}=[ih_s,(i+1)h_s]\times[jh_r,(j+1)h_r]$ et les deux réels d_1 et d_2 définis par:

$$d_1 = Sup\Big[\ d(v(ih_s,jh_r),v((i+1)h_s,jh_r)),\ d(v(ih_s,(j+1)h_r),v((i+1)h_s,(j+1)h_r))\Big]$$

et

$$d_2 = Sup\Big[\ d(v(ih_s,jh_r),v(ih_s,(j+1)h_r)),\ d(v((i+1)h_s,jh_r),v((i+1)h_s,(j+1)h_r))\Big],$$

où $d(.,.)$ représente la distance euclidienne dans $I\!R^3$. La figure 4.3 illustre ces définitions dans un exemple simple. On définit alors la formule de quadrature:

$$\begin{aligned}\int_{K_{ij}} F(s,r)dsdr &= \sum_{l=0}^{d_1-1}\sum_{m=0}^{d_2-1}\int_{l\frac{h_s}{d_1}}^{(l+1)\frac{h_s}{d_1}}\int_{m\frac{h_r}{d_2}}^{(m+1)\frac{h_r}{d_2}} F(s,r)dsdr,\\ &= \frac{h_sh_r}{d_1d_2}\sum_{l=0}^{d_1-1}\sum_{m=0}^{d_2-1} F(ih_s+\frac{2l+1}{2d_1}h_s, jh_r+\frac{2m+1}{2d_2}h_r),\end{aligned}$$

où $F(s,r) = -\nabla P(v(s,r))e_{ij}(s,r)$.

Cette formule de quadrature permet de faire une subdivision adaptative du rectangle K_{ij} en fonction de la forme de la surface.

4.4 Les Paramètres de Régularisation

Ces paramètres sont choisis de telle sorte que le minimum atteint soit un compromis entre régularité de la surface et localisation des points de contour. Pour cela il suffit de considérer des paramètres tels que la matrice $(Id + \tau A)$ soit bien conditionnée. Un ensemble de paramètres satisfaisant cette contrainte est:

$$w_{10} = w_{01} = h_s^2 h_r^2 \quad \text{et} \quad w_{20} = w_{11} = w_{02} = h_s^3 h_r^3,$$

où h_s et h_r correspondent aux pas de discrétisation du domaine Ω (ces paramètres ont été obtenus par un calcul semblable à celui effectué au paragraphe 2.5). Ces paramètres ont été utilisés pour l'ensemble des résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre. Le chapitre 6 abordera plus en détails la détermination des paramètres de régularisation.

4.5 Complexité Algorithmique

L'étude de la complexité algorithmique du modèle concerne la résolution du schéma itératif (4.21). Ce schéma est résolu par une méthode de gradient conjugué. En considérant un maillage uniforme du domaine Ω constitué par les nœuds a_{ij} ($i = 0 \ldots N_s - 1$ et $j = 0 \ldots N_r - 1$), la matrice de rigidité obtenue à l'aide des éléments finis de Bogner-Fox-Schmit est symétrique tridiagonale par blocs et de taille $4 \times N_s \times N_r$, dont la largeur de bande est $2N_s - 1$. Ainsi à chaque itération du gradient conjugué le nombre d'opérations effectuées est: (44 *additions* + 42 *multiplications* + 1 *division*)$\times 4 \times N_s \times N_r$.

4.5.1 Comparaison avec la Méthode des Différences Finies

La discrétisation de l'équation (4.1) à l'aide de la méthode des différences finies [Cia85] conduit à résoudre un système linéaire dont la matrice A est symétrique, pentadiagonale par

bloc (la largeur de bande est $4N_s - 1$) et de taille $N_s \times N_r$, puisque chaque nœud a_{ij} possède un seul degré de liberté: $v_h(a_{ij})$. A chaque itération du gradient conjugué on effectue (18 *additions* + 16 *multiplications* + *1 division*) $\times N_s \times N_r$ opérations.

Par conséquent, en considérant le même maillage pour les deux méthodes, la méthode d'éléments finis est approximativement 12 fois plus coûteuse, mais cette complexité est compensée par le fait que la méthode des différences finies nécessite un nombre de nœuds plus élevé. En effet dans le cas des courbes déformables, plusieurs auteurs [Coh91, Ber91] ont constaté que le nombre de points de discrétisation devait correspondre à la longueur l de la courbe en pixels pour qu'il y ait convergence. Nous avons montré [CC90] que la méthode d'éléments finis ne nécessitait qu'un nombre de points discrétisation de l'ordre de $l/6$. En supposant que ce rapport soit conservé pour les surfaces déformables, le nombre de nœuds a_{ij} sera 36 fois plus élevé pour les différences finies. Dans ce cas la complexité algorithmique sera $36/12 = 3$ fois plus importante que celle des éléments finis.

Cet avantage est dû essentiellement au calcul du vecteur des forces appliquées au modèle et à la nature des deux méthodes. La MEF permet de calculer le déplacement de chaque point du domaine de paramétrisation alors que la MDF ne fournit le déplacement qu'aux nœuds du maillage et ce n'est qu'en ces points que le champ de forces est appliqué.

4.6 Résultats Expérimentaux

Les surfaces déformables permettent de propager des contraintes de forme dans les différents plan images. Cette contrainte n'est pas possible avec les courbes déformables, car avec celles-ci on ne peut qu'imposer une contrainte de forme pour une courbe sans pouvoir assurer une certaine régularité de la surface reconstruite à partir de cette collection de courbes. La figure 4.4 illustre un exemple où le modèle de courbes déformables ne peut pas reconstituer la surface de l'objet à partir des contours donnés. Cette figure représente les contours d'un cylindre à base elliptique pour lesquels des points de contour ont été supprimé volontairement. Le modèle surfacique permet de reconstruire les points de contour manquants grâce à l'homogénéité de la surface alors qu'un modèle de courbes déformables ne peut pas reconstituer les points de contour manquants (particulièrement les points de la

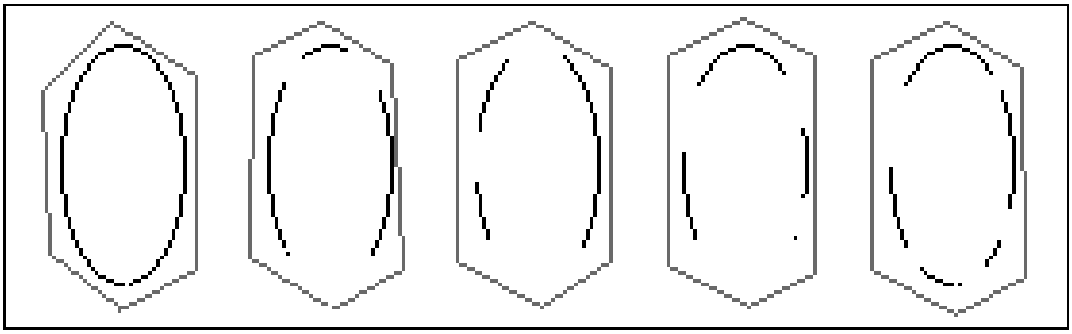

Figure 4.4. Représentations de quelques intersections successives de la surface initiale (en gris) avec les plans correspondants de l'image de contours (en noir).

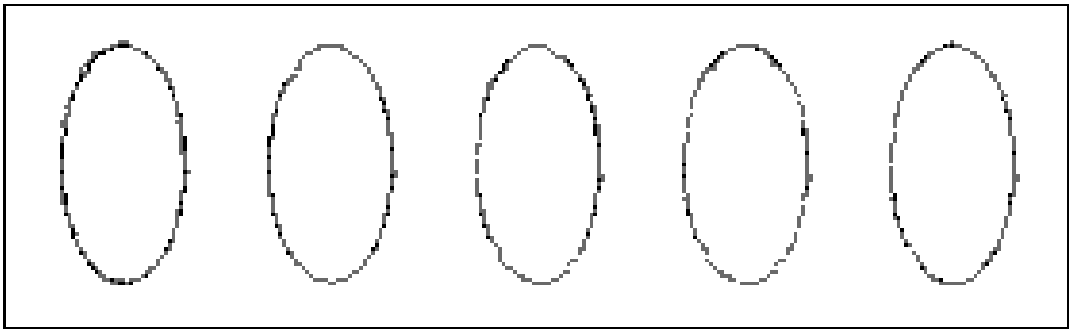

Figure 4.5. Intersection de la surface obtenue avec les images de contour.

troisième coupe). La figure 4.5 illustre cette reconstruction.

La sensibilité d'une segmentation par rapport au bruit présent dans l'image est importante en traitement d'image. Ce bruit peut être dû aussi bien au type d'acquisition qu'à la nature des objets. En imagerie médicale, ce bruit peut être dû à la texture (speckle) dans les images échographiques ou au mouvement de fluides et/ou d'organes durant l'acquisition d'images IRM. La figure 4.6 illustre la stabilité du modèle à partir d'images synthétiques bruitées. Ces images ont été obtenues en ajoutant un bruit gaussien de variance $\sigma^2 = 0.8$ à la position des points de contour d'un cylindre à base elliptique. La figure 4.6 représente quelques intersections de la surface (en gris) avec les plans correspondants de l'image de contour (en noir) ainsi que la représentation 3-D de la surface. Les figures 4.7 et 4.8 représentent un deuxième exemple de traitement d'images bruitées. Ces images de contours représentent

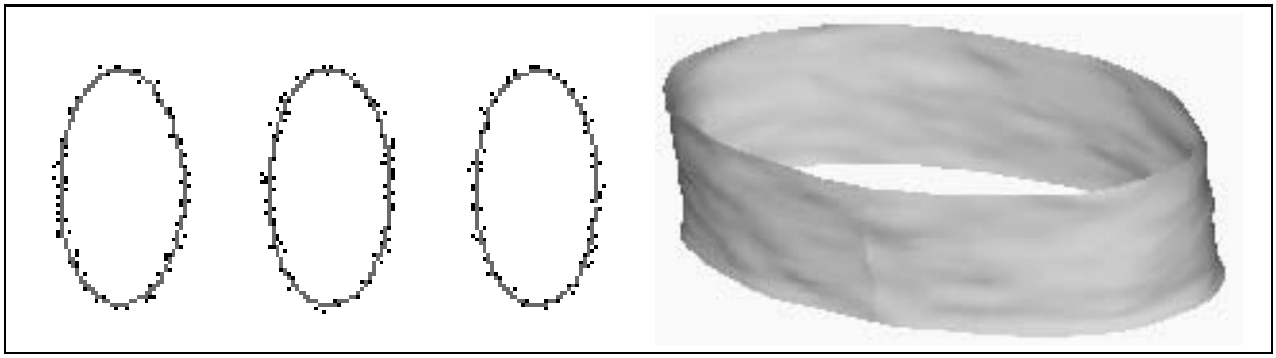

Figure 4.6. Représentation de la surface et de quelques intersections avec les plans images.

quelques coupes 2-D du volume IRM considéré (composé de 40 coupes). Elles représentent respectivement la surface initiale et la solution obtenue, correspondant à un minimum de E. La figure 4.9 est une représentation 3-D de cette surface.

Les images scanner permettent de mettre en évidence les structures osseuses. Les figures 4.10 et 4.11 illustrent l'application du modèle de surfaces déformables à ce type d'images. Une représentation en fil de fer de la surface reconstruite de la vertèbre est donnée dans la figure 4.12.

Les figures 4.13 et 4.16 représentent un dernier exemple d'utilisation de la méthode avec des images IRM. Ces volumes de données, constitués de 70 coupes sont isotropes. La figure 4.13 représente quelques intersections de la surface avec des plans images et la figure 4.14 les intersections de la surface obtenue avec les plans images sagitales et la figure 4.15 la surface 3-D. Ce volume de données étant isotrope nous avons pu recalculer les intersections de la surface avec des plans verticaux. Ces figures (4.14 et 4.16) montrent bien que la convergence du modèle déformable se fait dans le volume 3-D et non pas coupe par coupe.

L'extraction de certaines régions en imagerie IRM permet une initialisation automatique de la surface déformable. Par exemple pour extraire les contours de la face dans l'image IRM représentée dans la figure 4.14, on peut considérer la surface initiale comme étant le plan constituant le bord de l'image et appliquer à la surface une force supplémentaire permettant de déplacer la surface vers les points de contour [CC92] Cette force simule une force de gravitation analogue à la force d'expansion et permet de positionner la surface à proximité

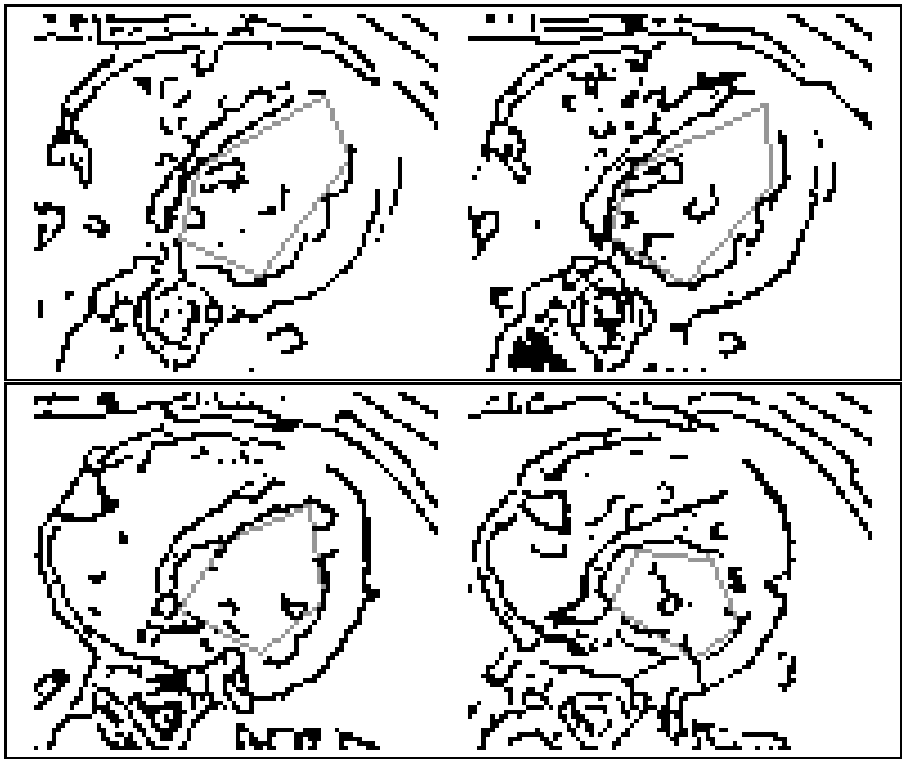

Figure 4.7. Quelques intersections de la condition initiale définie par l'utilisateur (en gris) avec l'image de contour.

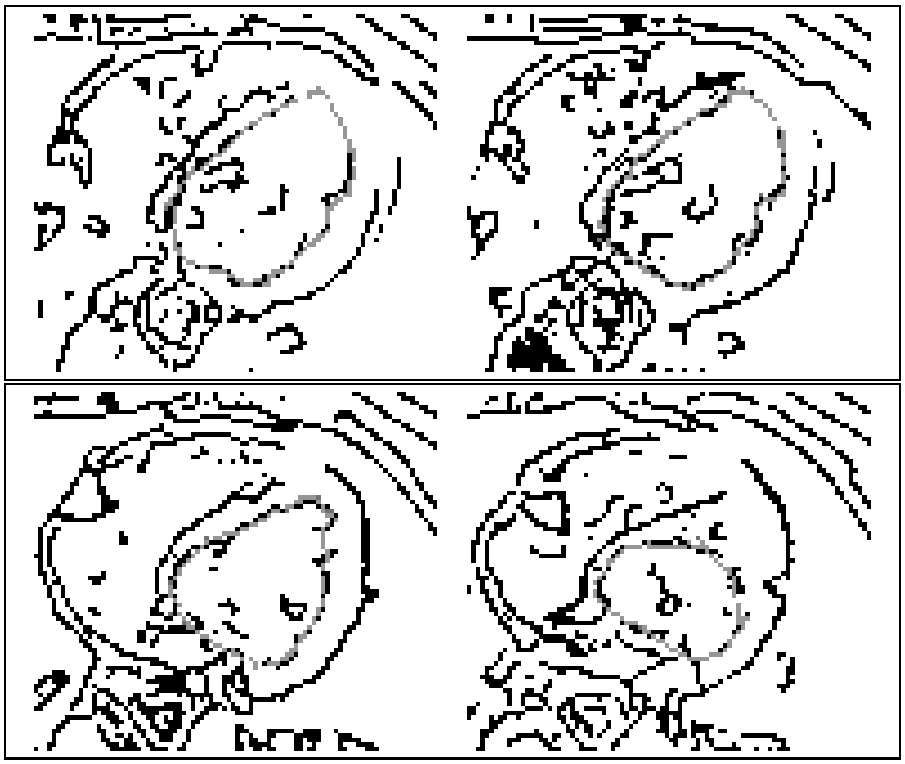

Figure 4.8. Intersections de la surface obtenue avec les images de contours correspondants.

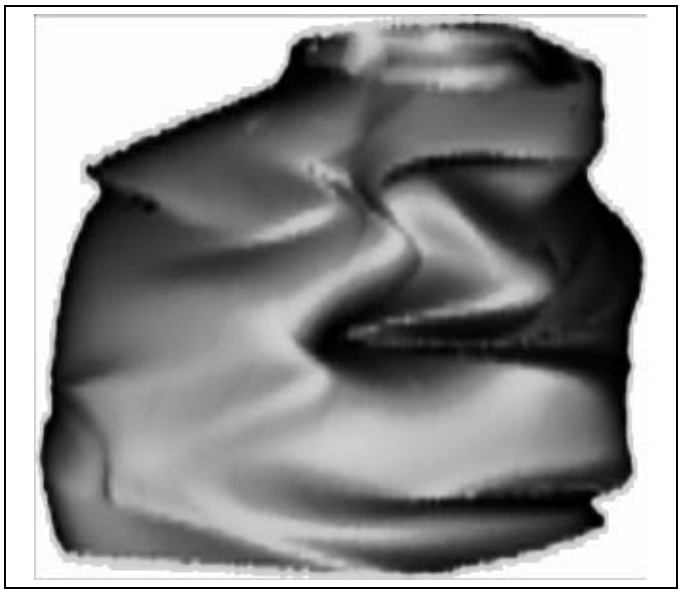

Figure 4.9. Représentation de la surface interne du ventricule gauche.

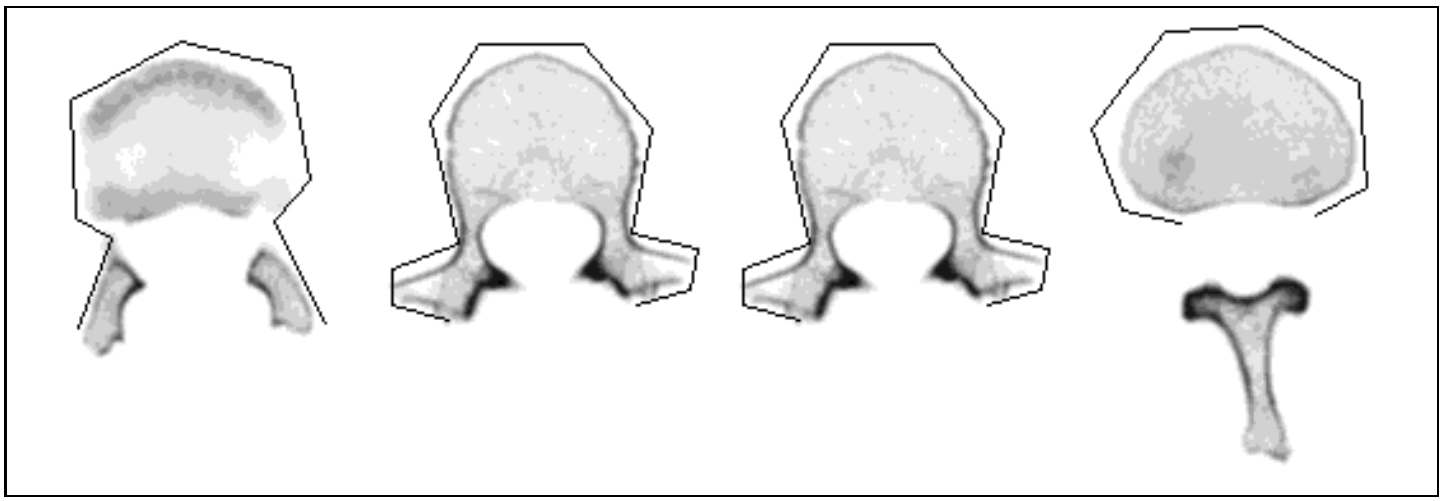

Figure 4.10. Superposition de l'image de la vertèbre avec quelques intersections de la surface initiale.

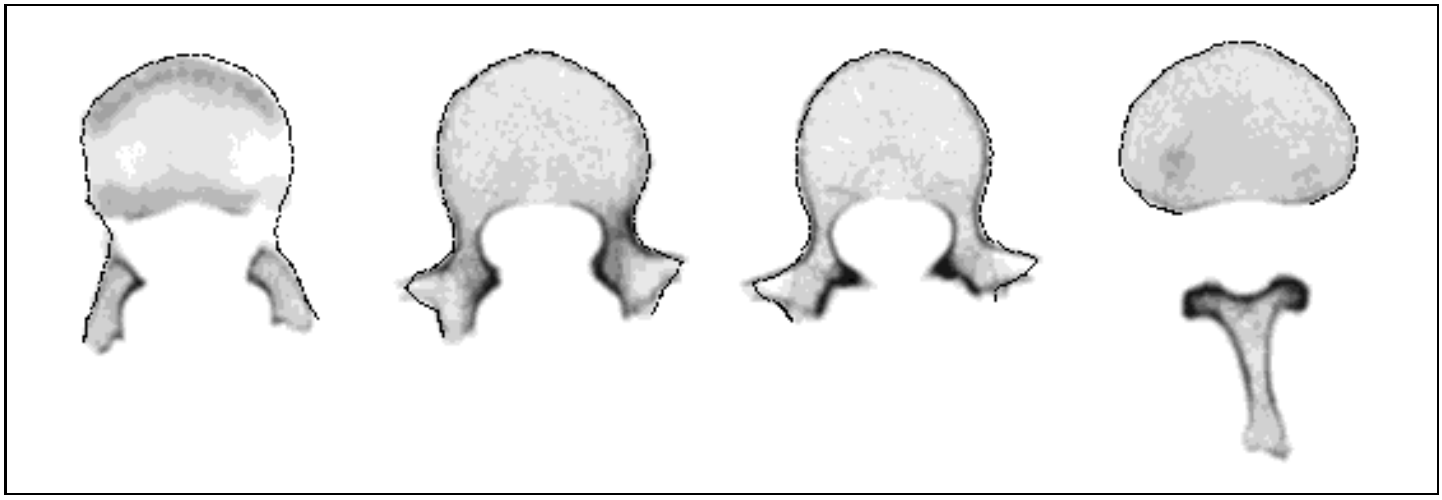

Figure 4.11. Solution obtenue par l'algorithme après 40 itérations du schéma (4.21).

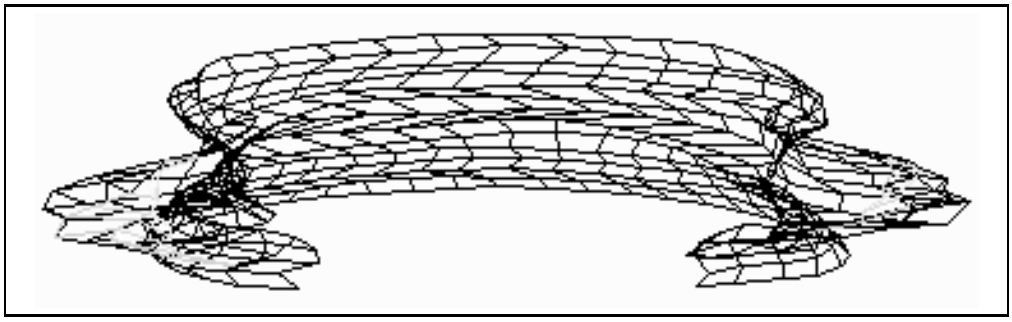

Figure 4.12. Une représentation en fil de fer de la surface de la vertèbre.

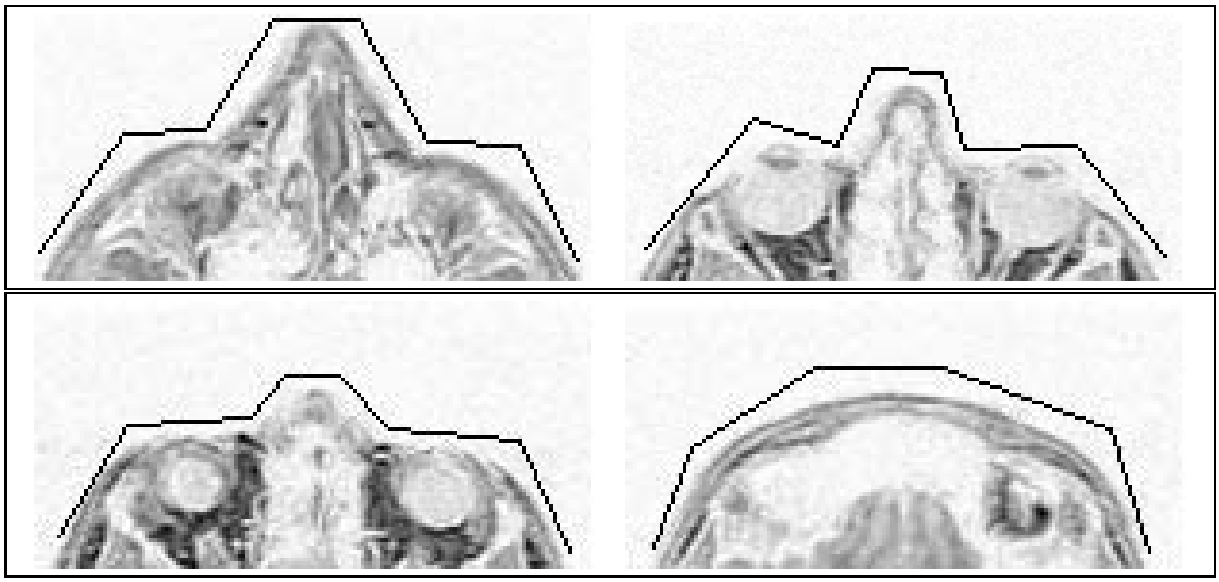

Figure 4.13. Quelques intersections de la surface initiale avec les plans images IRM.

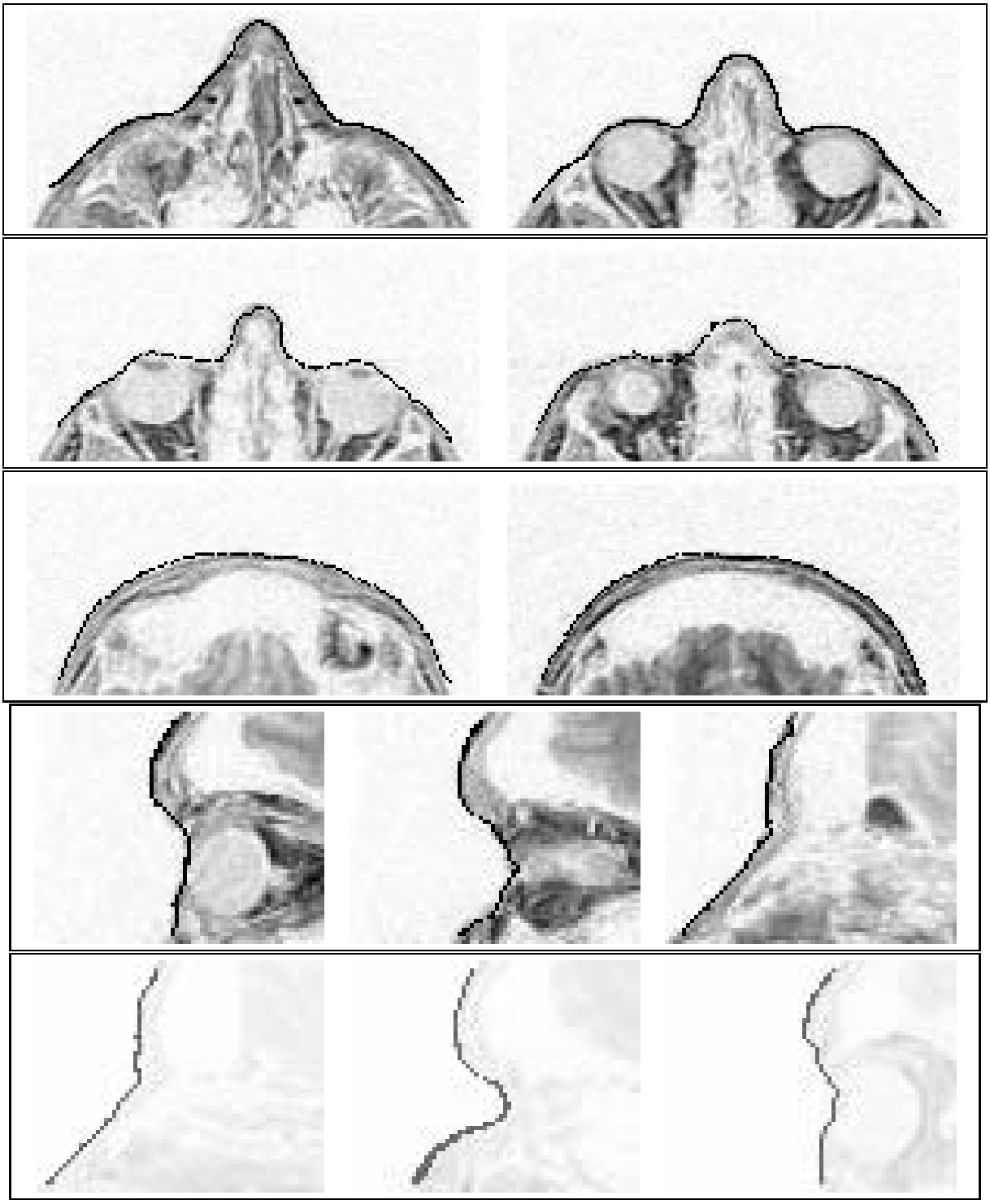

Figure 4.14. Illustration de l'intersection de la surface avec des images dans des directions orthogonales.

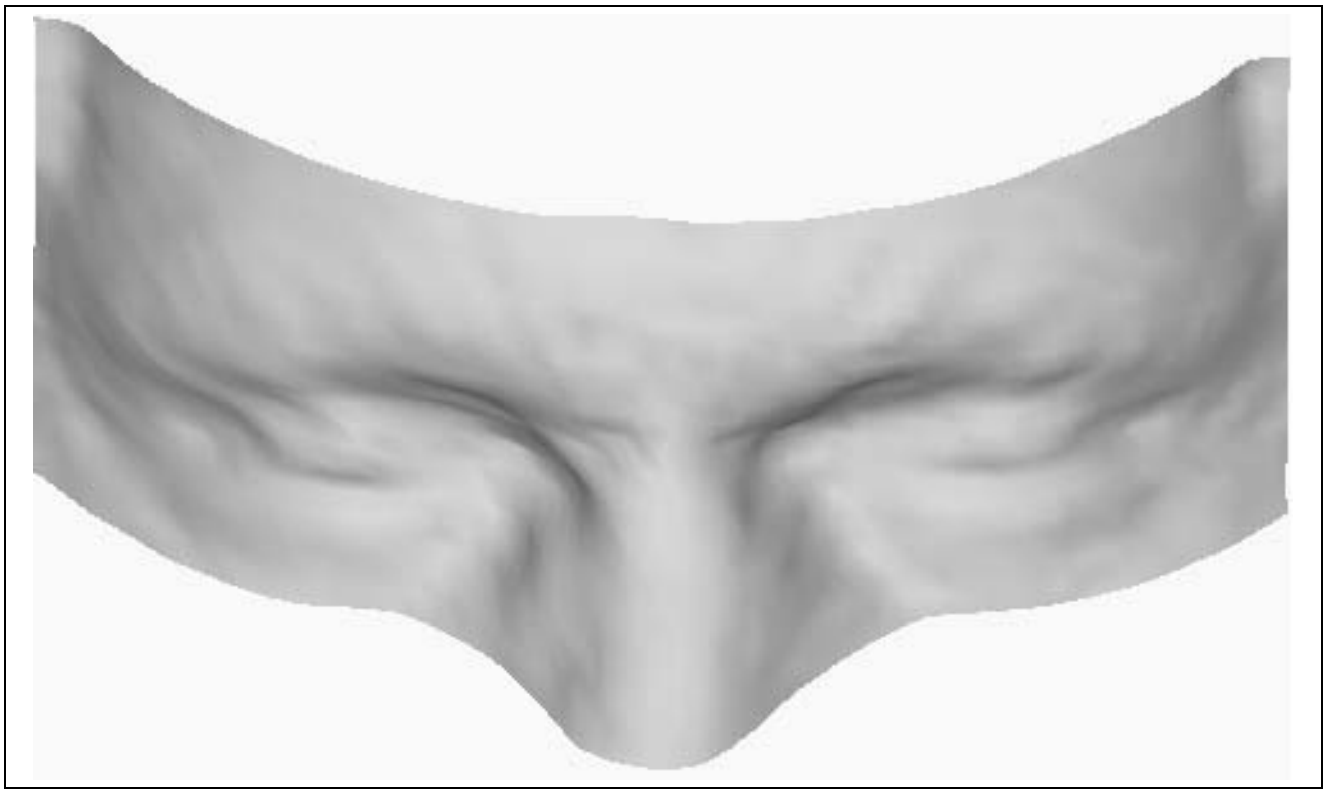

Figure 4.15. Représentation tridimensionnelle de la surface.

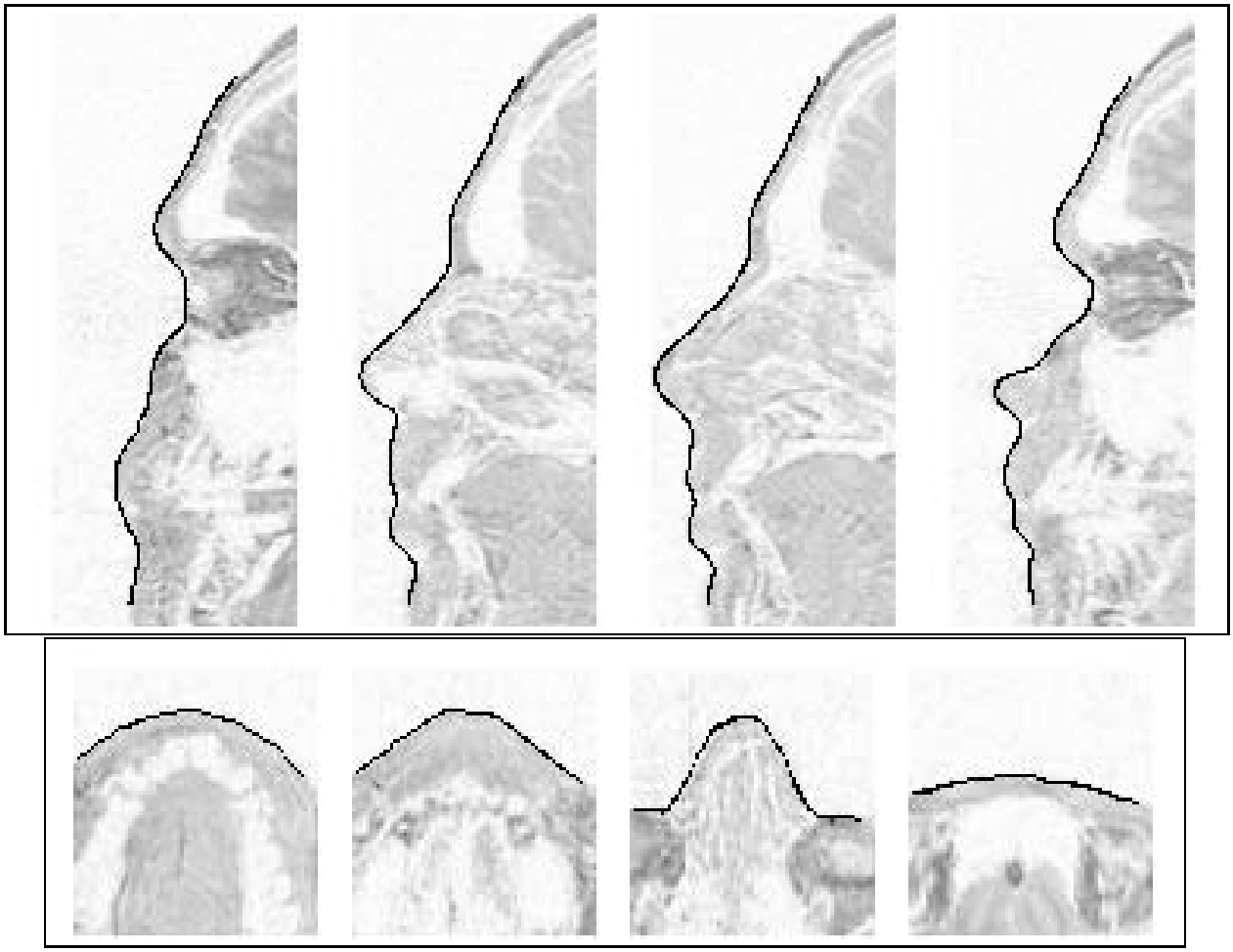

Figure 4.16. Surface obtenue sur un autre volume de données.

Figure 4.17. Représentation tridimensionnelle de la surface.

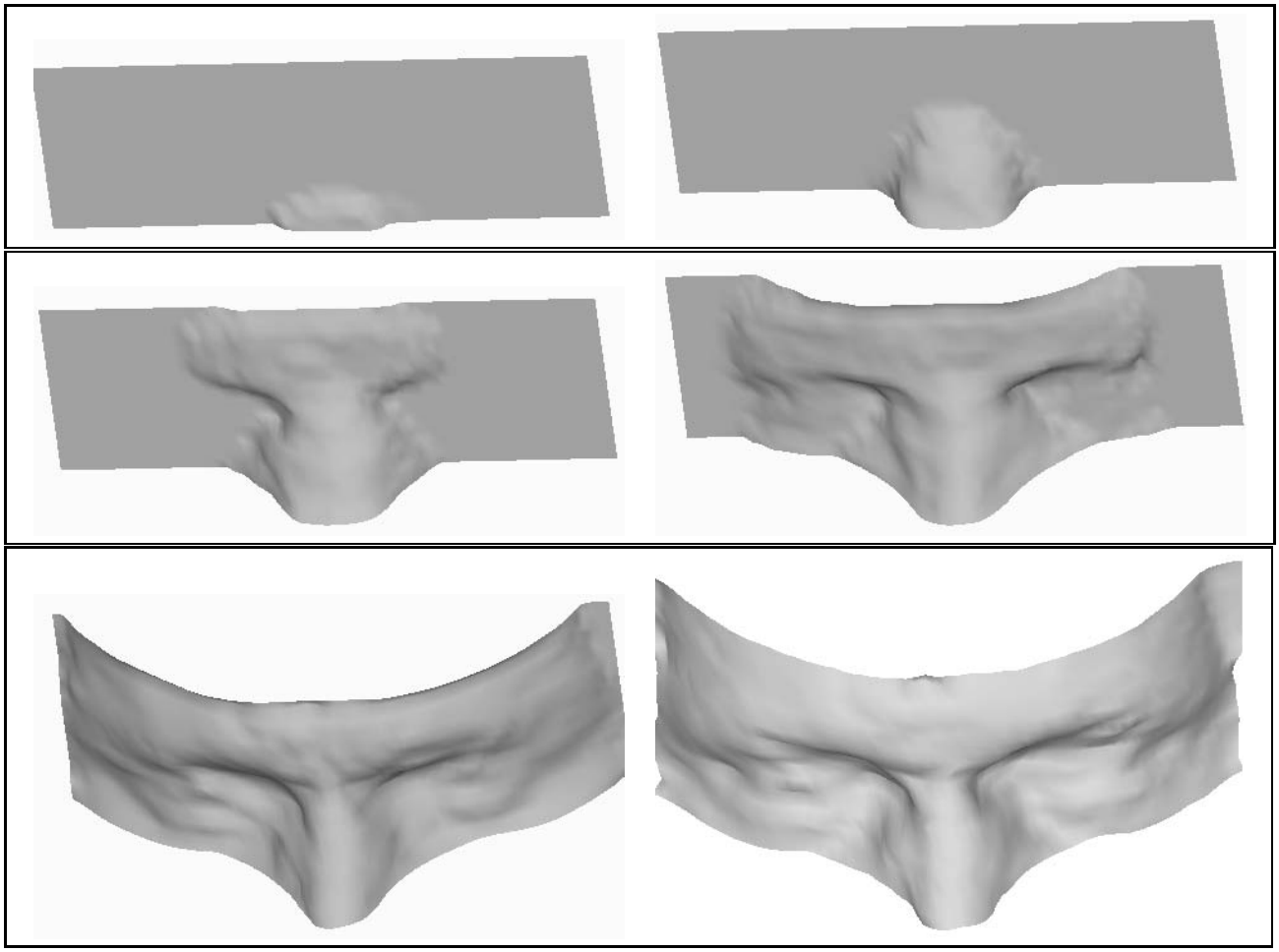

Figure 4.18. Evolution de la surface “tombant” sur les points de contour correspondant au visage dans une image IRM de la tête.

des contours. La figure 4.18 représente l’évolution de la surface et la convergence vers les points de contour. Cet exemple illustre une segmentation automatique à l’aide des surfaces déformables.

4.7 Autres Modèles

4.7.1 Modèle Simplifié de Surfaces Déformables

Le modèle défini dans le paragraphe précédent, n'impose aucune contrainte à la solution $v(s,r) = (X(s,r), Y(s,r), Z(s,r))$ et celle ci peut évoluer dans l'espace $I\!R^3$. Les données IRM 3-D sont acquises plan par plan et par conséquent on peut contraindre chaque nœud du maillage à rester dans le plan image et évoluer dans l'espace $I\!R^2$ défini par ce plan image [Coh90, CC91a, CC92]. La surface v est alors une succession de courbes planes et peut être paramétrée par $v(s,r) = (X(s,r), Y(s,r), r)$, où r est la coupe considérée. La résolution de l'équation d'évolution est simplifiée car seules deux composantes sont calculées et le schéma considéré est totalement explicite car la matrice $(Id + \tau A)^{-1}$ est approchée par son développement au premier ordre $(Id - \tau A)$ où la matrice A est calculée à partir d'un schéma de différences finies.

Cette formulation permet d'imposer une contrainte d'homogénéité entre les courbes appartenant aux différents plans tout en simplifiant la complexité de l'algorithme. Cette simplification est de deux ordres:

i- algorithmique, par le schéma explicite utilisé,

ii- simplicité de visualisation des résultats, car chaque isoparamétrique, à r constant, est une courbe contenue dans le plan image.

Ce modèle fournit des résultats satisfaisant, lorsque la surface recherchée présente un axe privilégié dans la direction orthogonale au plan x, y , par exemple des tubes ou des cônes, par contre le nombre de points de discrétisation pour la variable r doit correspondre au nombre de plans de l'image traitée.

4.7.2 Surfaces Déformables à Topologie Variable

La segmentation de structures anatomiques complexes nécessite généralement des surfaces dont la paramétrisation est assurée par une ou plusieurs fonctions, chaque fonction fournit une paramétrisation d'une partie de la surface. Ainsi pour pouvoir reconstruire

les frontières d'une structure anatomique possédant un ou plusieurs trous (telle que la vertèbre) Leitner *et al* [LC91b, LC91a] proposent une méthode originale de détection de trous dans les structures segmentées et par conséquent de changement de topologie du domaine de paramétrisation de la surface. Le modèle de snake spline 3-D choisi, permet par l'intermédiaire des points de contrôle de la spline de changer la topologie du domaine. Ainsi, la surface initiale à une topologie sphérique et dès qu'une intersection de la spline avec elle même est détectée, on considère le point d'intersection comme un trou. Une fois ce point détecté, le domaine de paramétrisation est subdivisé en deux domaines à topologie cylindrique. La topologie considérée est alors torique. Ce changement de topologie n'est pas algorithmiquement coûteux car il consiste en une renumérotation des points de contrôle de la spline. Ce changement de topologie s'accompagne d'un affinage du domaine de paramétrisation au voisinage des trous détectés.

4.8 En Résumé

Ce chapitre décrit, en détail, la formulation variationnelle des surfaces déformables ainsi que l'utilisation des éléments finis conformes de Bogner-Fox-Schmit pour la discrétisation du problème variationnel associé. Nous avons également montré sur un ensemble de résultats expérimentaux l'aptitude du modèle à segmenter des images 3-D.

Chapitre 5

Calcul des Caractéristiques Différentielles

Nous avons jusqu'à présent montré, comment utiliser les modèles déformables pour segmenter des images 2-D et 3-D. Dans ce chapitre nous supposerons que la surface a détecté avec précision les contours des objets, c'est à dire que la surface considérée est un minimum de l'énergie E. Cette surface caractérise les contours de l'objet segmenté, elle peut, par conséquent, servir à caractériser la forme de l'objet. Cette caractérisation géométrique est faite par l'intermédiaire du calcul des caractéristiques différentielles de la surface. Le chapitre 3 illustre l'intérêt de cette caractérisation géométrique. Celle-ci est importante pour la mise en correspondance d'images ou de structures similaires. Cette mise en correspondance peut également être faite entre l'image et un atlas numérique pour la reconnaissance et l'interprétation de formes [ABC+90, Gor91, GA92].

Ces caractéristiques ont été utilisées par plusieurs auteurs pour caractériser les contours des objets apparaissant dans l'image. Ainsi, Noble [Nob87], modélise une image 2-D par la fonction $z = I(i, j)$ et caractérise les points de jonction, ou les coins des contours par les courbures moyennes et gaussiennes de la surface $z = I(i, j)$ approximée par des polynômes de Chebychev. Sander *et al* [SZ90] extraient les caractéristiques différentielles des images 3-D en deux étapes. La première phase consiste à déterminer les surfaces des objets à l'aide d'une détection de contour 3-D, puis approximent ces points de contour, localement,

par des quadriques. Celles-ci serviront à calculer les caractéristiques différentielles des contours. Cette méthode a été reprise par Monga *et al* [MAS91] en considérant une information supplémentaire fournie par les détecteurs de contours: la normale à la surface dans le cas de contours d'iso-intensité et l'utilisation d'un filtre de Kalman pour l'approximation locale. Pour ces deux méthodes, l'approximation locale des points de contour par des quadriques dépend de la connexité de ces points. Cette dépendance limite considérablement cette approche. Pour résoudre ce problème, Monga *et al* [MBF92] proposent de calculer directement les caractéristiques différentielles en tout point du volume 3-D pour caractériser les contours de l'image.

Dans une première partie, nous expliciterons le calcul de ces caractéristiques avec le modèle des surfaces déformables puis nous présenterons comment insérer dans le modèle d'autres informations telles que les normales aux surfaces caractérisant les contours, dans le cas de contours d'iso-intensité.

5.1 Calcul des Caractéristiques Différentielles avec un Modèle de Surfaces Déformables

Les modèles déformables, présentés précédemment, fournissent une description analytique de la surface. Cette description de la surface v_h, formalisée par l'identité:

$$v_h = \sum_{i,j=0}^{N_s-1,N_r-1} v_h(a_{ij})\varphi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{ij})\psi_{ij} + \frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{ij})\eta_{ij} + \frac{\partial^2 v_h}{\partial s \partial r}(a_{ij})\zeta_{ij}, \tag{5.1}$$

où $\varphi_{ij}, \psi_{ij}, \eta_{ij}$ et ζ_{ij} sont les fonctions de base de l'élément de BFS et les coefficients $v_h(a_{ij})$, $\frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{ij})$, $\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{ij})$ et $\frac{\partial^2 v_h}{\partial s \partial r}(a_{ij})$ sont les degrés de liberté, calculés en chaque point du maillage par la résolution du système linéaire (4.21). Cette description analytique fournit également en chaque point de la surface le plan tangent défini par les vecteurs $v_s = \frac{\partial v}{\partial s}$ et $v_r = \frac{\partial v}{\partial r}$. Cette connaissance du plan tangent permettra de calculer les caractéristiques différentielles dans le repère local associé à la surface.

Considérons le repère $\{v_s, v_r, N\}$, où $N = \frac{v_s \wedge v_r}{|v_s \wedge v_r|}$ est la normale à la surface, et notons $T_p(\mathcal{S})$ le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ au point $p \in I\!R^3$. La caractérisation des courbures de la

surface est faite à partir de la dérivée de la normale à la surface. Explicitons cette dérivée à partir des formes fondamentales de la surface.

Les dérivées N_s et N_r sont dans le plan tangent $T_p(\mathcal{S})$, elles peuvent s'exprimer par:

$$\begin{aligned} N_s &= a_{11}v_s + a_{12}v_r, \\ N_r &= a_{21}v_s + a_{22}v_r, \end{aligned}$$

et par conséquent dN_p, représentant la dérivée du vecteur N au point p, est définie par la matrice $(a_{ij})_{i,j=1..2}$ dans le repère $\{v_s, v_r, N\}$. Cette matrice peut s'exprimer en fonction de la première et seconde forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}$ par la relation matricielle [dC76]:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{-1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

où E, F, G, e, f et g sont les coefficients de la première et seconde forme fondamentale de la surface $\mathcal{S}$, dans le repère local $\{v_s, v_r, N\}$, définis par:

$$E =< v_s, v_s >, \quad F =< v_s, v_r >, \quad G =< v_r, v_r >,$$

et

$$e =< N, v_{ss} >, \quad f =< N, v_{sr} >=< N, v_{rs} >, \quad g =< N, v_{rr} >,$$

où $< ., . >$ est le produit scalaire euclidien dans $I\!R^3$. On a alors les équations de Weingarten:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{fF - eG}{EG - F^2}, & a_{12} &= \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \\ a_{21} &= \frac{eF - fE}{EG - F^2}, & a_{22} &= \frac{fF - gE}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent, la courbure Gaussienne K et la courbure moyenne H de la surface $\mathcal{S}$ au point p sont définies par:

$$K = det(dN_p) = det(a_{ij}) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

et

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}.$$

Les courbures principales k_1 et k_2 sont définies par les valeurs propres de l'opérateur linéaire dN_p, elles vérifient l'équation:

$$det(dN_p + kI) = k^2 - 2Hk + K = 0,$$

Figure 5.1. Représentations de la plus grande courbure principale en chaque point de la surface. Les régions sombres correspondent aux points de forte courbure et les régions claires aux points de faible courbure. Cette information géométrique permet de caractériser certaines parties du visage telles que les arêtes du nez et les sourcils.

et par conséquent:

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

L'extraction des maxima des courbures principales maximales dans la direction de la courbure principale maximale, permet de caractériser les surfaces [MAS91]. Ces maxima décrivent les crêtes des surfaces. La figure 5.1 représente en chaque point de la surface la plus grande courbure principale. Ces résultats sont qualitativement corrects et sont comparables à ceux obtenus dans [MAS91] à partir d'une autre méthode. Nos résultats sont plus bruités, mais l'avantage de la méthode réside en le fait que la segmentation et la caractérisation de la surface sont obtenus simultanément et la complexité algorithmique est moins importante.

5.2 Utilisation de la Normale à la Surface

Dans le paragraphe précédent, le calcul des courbures principales est basé sur la position des points de contour. En effet, la convergence du modèle déformable surfacique est obtenue à l'aide des points de contour 3-D (X, Y, Z). Les courbures obtenues sont qualitativement correctes mais ne varient pas d'une manière régulière. L'utilisation d'une information supplémentaire, telle que la normale à la surface en chaque point de contour, peut améliorer la précision des courbures obtenues. Monga *et al* [MAS91] utilisent la normale aux points de contour pour approximer localement des quadriques aux points de contour, Lee [Lee91] utilise également les positions et les normales en fusionnant des données obtenues par stéréo binoculaire (points) et des données photométriques (normales). L'approximation de surfaces à partir des positions et des normales a également été utilisée par Terzopoulos [Ter88].

Le calcul des normales aux points de contour peut être obtenu directement à partir d'un détecteur de contour 3-D, en considérant ces points comme des points de contour d'iso-intensité. Dans ce cas les gradients de l'image sont colinéaires au vecteur normal $\mathcal{N}$ à la surface constituée de ces points. Cette hypothèse sera retenue dans ce qui suit.

En considérant une surface paramétrée $v(s, r) = (x(s, r), y(s, r), z(s, r))$, la prise en compte des normales mène à la résolution d'un problème non linéaire [SZ90]. Ce problème peut être évité en considérant la propriété: pour toute surface régulière il existe un voisinage pour lequel la surface v peut être exprimée sous la forme $v(s, r) = (s, r, g(s, r))$ ([dC76],p.164). Ceci est fait en choisissant un repère local tel que les deux premiers vecteurs de ce repère appartiennent au plan tangent.

Ainsi pour une surface de la forme $(s, r, v(s, r))$, un vecteur colinéaire à la normale à la surface s'écrit $N(s, r) = (-v_s, v_r, 1)$. Par conséquent, pour imposer à la surface d'approximer les points (X, Y, Z) obtenus par le modèle déformable surfacique et posséder une normale colinéaire aux normales $\mathcal{N}$ obtenues par le détecteur de contour 3-D [MDMC90], il faut transformer les vecteurs gradients dans le repère local défini. Cette transformation consiste à écrire ces gradients dans le repère local sous la forme $(N_1, N_2, 1)$.

A présent, l'approximation des points (X, Y, Z) et des normales $(N_1, N_2, 1)$ est obtenue

en minimisant la fonctionnelle $E = E_{regular} + E_{position}$, où:

$$E_{regular}(v) = \int_\Omega w_{10} \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 + w_{01} \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^2 + 2w_{11} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right|^2 + w_{20} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|^2 + w_{02} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right|^2 dsdr, \quad (5.2)$$

et

$$\begin{aligned} E_{position}(v) &= \frac{1}{2} C_1 \int_\Omega |v(s,r) - z|^2 \, dsdr \\ &+ \frac{1}{2} C_2 \left(\int_\Omega |v_s(s,r) + N_1|^2 \, dsdr + \int_\Omega |v_r(s,r) - N_2|^2 \, dsdr \right), \end{aligned} \quad (5.3)$$

où z représente la troisième composante de la projection du point (X, Y, Z) dans le repère local tangent.

Dans cette formulation, une fois encore, $E_{regular}$ (5.2) mesure la régularité de la courbe et $E_{position}$ l'écart entre les données (points et direction des normales) et la solution obtenue. Le minimum de cette fonctionnelle est caractérisé par l'équation:

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial s}\left(w_{10}\frac{\partial v}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(w_{01}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \; 2\frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left(w_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_{20}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(w_{02}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right) \\ \qquad\qquad = -C_1(v - z) - C_2\frac{\partial}{\partial s}(v_s + N_1) - C_2\frac{\partial}{\partial r}(v_r - N_2), \\ + \text{ Conditions aux limites.} \end{cases} \quad (5.4)$$

Cette équation est résolue à l'aide des éléments finis explicités précédemment.

5.2.1 Résultats Expérimentaux

Ce modèle a été utilisé pour déterminer la précision de l'approximation des données à l'aide des modèles déformables. Nous avons considéré des données synthétiques obtenues en échantillonnant la surface analytique

$$(s, r, z = \sqrt{1. - (s - 50.)^2/2500}),$$

pour $0 \leq s \leq 50$ et $0 \leq r \leq 20$. L'approximation de ces données par le modèle est illustrée dans la figure 5.2. Mais l'intérêt de cette méthode est illustré par la considération de données bruitées. Pour cela, nous avons considéré les données synthétiques:

$$(s, r, z = \sqrt{1. - (s - 50.)^2/2500} + \mathcal{G}(0, \sigma)),$$

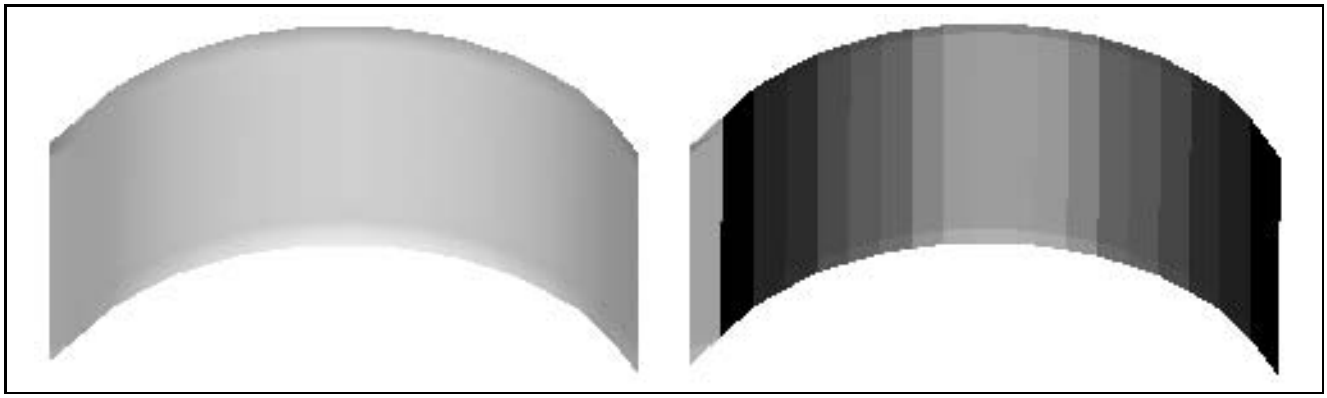

Figure 5.2. Une représentation de l'approximation des données (à gauche) ainsi que la courbure principale maximale de la surface (à droite).

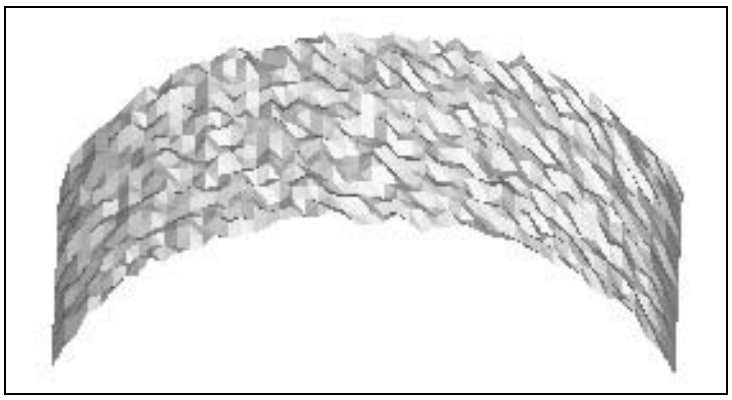

Figure 5.3. Représentation des données bruitées ($\sigma^2 = 0.01$).

où $\mathcal{G}(0, \sigma)$ est une gaussienne aléatoire centrée de variance σ^2. Les différentes variances considérées sont 0.01, 0.05 et 0.1. Le tableau 5.1 représente les valeurs obtenues par le modèle, les valeurs théoriques, ainsi que l'erreur relative de l'approximation pour six points de la surface.

L'expérimentation suivante a pour but de mettre en évidence l'intérêt de la prise en compte de la normale pour le calcul des courbures. Nous avons considéré les données synthétiques, bruitées ($\sigma^2 = 0.01$), précédentes illustrées par la figure 5.3.

Les figures 5.4 et 5.5 représentent l'approximation des données bruitées par la surface.

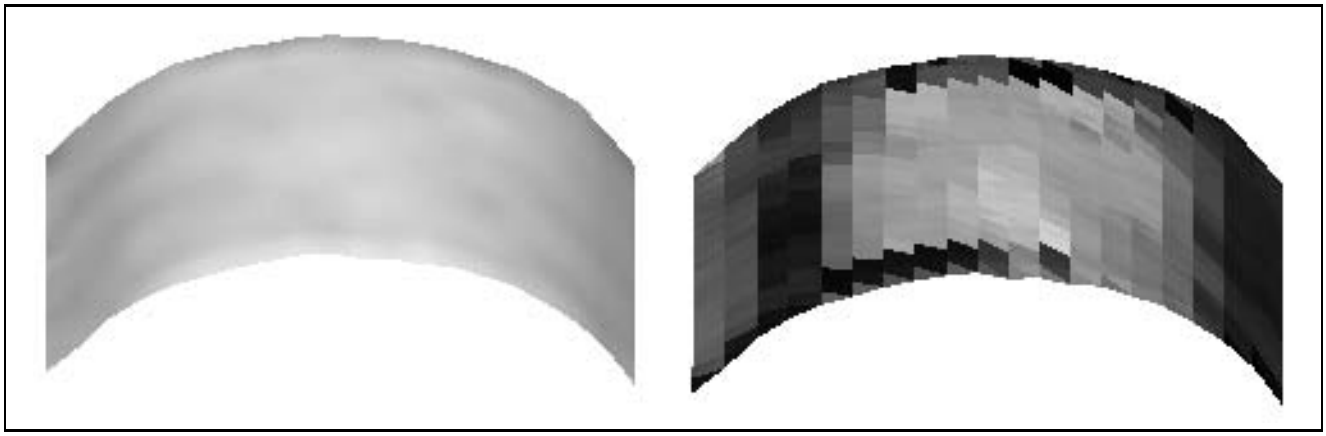

Figure 5.4. Représentation de l'approximation des données bruitées ainsi que le calcul de la courbure principale maximale en chaque point de la surface, sans la prise en compte de la normale à la surface.

Comme nous l'escomptions, la prise en compte de la normale à la surface permet un calcul plus précis et plus régulier des courbures. La différence de régularité entre les deux méthodes est illustrée par les figures 5.4 et 5.5. Ces deux figures représentent la courbure principale maximale en chaque point de la surface.

Le tableau 5.2 représente les valeurs de la courbure principale maximale théorique et calculée à partir du modèle pour des données parfaites et bruitées.

5.3 En Résumé

Les surfaces déformables considérées permettent à l'aide de l'expression analytique dont on dispose, de calculer les caractéristiques différentielles des points de contour détectés. Cette caractérisation est faite par l'intermédiaire du calcul des courbures principales de la surface. Les résultats obtenus montrent que ce calcul est légèrement bruité et est amélioré par la prise en compte des normales aux points de contour. Cette déficience était prévue car le modèle considéré est de classe $\mathcal{C}^1$ alors que ces caractéristiques géométriques sont calculées généralement sur des variétés de classe $\mathcal{C}^3$. Nous avons, cependant, une segmentation et une caractérisation simultanée des données et cela indépendamment de la connexité des données.

Points	*Valeur Théorique* z_t	$\sigma^2 = 0.01$		$\sigma^2 = 0.05$		$\sigma^2 = 0.1$	
		Valeur Calculée z_c	*Erreur Relative* $\|z_t - z_c\|$	*Valeur Calculée* z_c	*Erreur Relative* $\|z_t - z_c\|$	*Valeur Calculée* z_c	*Erreur Relative* $\|z_t - z_c\|$
$(0.375, 0.5)$	0.9682	0.8870	0.0812	0.8609	0.1073	0.8333	0.1349
$(0.5, 0.5)$	1.0000	0.9183	0.0817	0.8973	0.1027	0.8513	0.1487
$(0.75, 0.5)$	0.8660	0.8090	0.0570	0.7690	0.0970	0.6805	0.1855
$(0.75, 0.5)$	0.9682	0.8796	0.0886	0.8302	0.1380	0.7803	0.1879
$(0.5, 0.25)$	1.0000	0.9077	0.0923	0.8445	0.1555	0.7598	0.2402
$(0.75, 0.75)$	0.8660	0.8243	0.0417	0.8313	0.0347	0.7981	0.0679
Erreur moyenne		0.0658		0.0878		0.1409	
Variance de l'erreur		0.0175		0.0316		0.0820	

Tableau 5.1. Résultats obtenus en approximant les données bruitées (en considérant différentes variances) en quelque points de la surface.

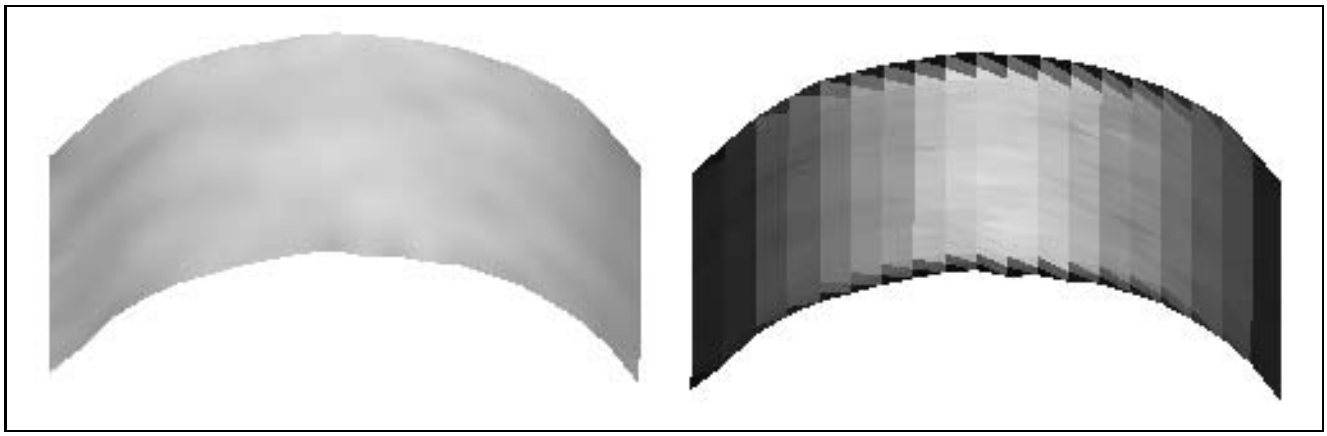

Figure 5.5. Approximation des données et des normales pour le calcul de la surface et de la courbure principale maximale

Points	*Courbure théorique* κ_t	*Données exactes*	*Données bruitées* ($\sigma^2 = 0.01$)			
		Courbure calculée κ_c	κ_c, *sans normales*	$\|\kappa_t - \kappa_c\|$	κ_c, *avec normales*	$\|\kappa_t - \kappa_c\|$
$(0.25, 0.5)$	2.658	2.418	1.846	0.812	1.924	0.734
$(0.5, 0.75)$	1.609	1.687	1.627	0.018	1.605	0.004
$(0.65, 0.5)$	2.141	1.276	1.746	0.409	1.802	0.340

Tableau 5.2. Comparaison des valeurs des courbures principales maximales obtenues avec et sans la prise en compte de la normale à la surface (les valeurs des courbures sont à multiplier par 10^{-3}).

Chapitre 6

Etude des Coefficients de Régularisation et Algorithme de Détermination

Nous allons présenter dans ce chapitre quelques résultats concernant l'influence des paramètres de régularisation sur la solution obtenue ainsi qu'une étude des méthodes existantes pour le choix de ces paramètres. Nous proposerons également une méthode de détermination des ces paramètres ainsi que quelques résultats expérimentaux obtenus avec cette méthode.

6.1 Méthode de Régularisation

Comme nous l'avons présenté dans les chapitres précédents le modèle de contours déformables introduit par [KWT87b] puis repris en détail par Terzopoulos [TWK88] a été suscité par le problème mal posé (au sens numérique), de la détection des points de contour dans une image. La détection des points de contour dans une image est en fait un problème de différenciation de la fonction $z = I(i, j)$ où $I(i, j)$ représente le niveau de gris de l'image au point (i, j) [PVY85, TP86]. Ce problème numérique est dit mal-posé, car la solution obtenue ne dépend pas de manière continue des données.

Le problème de différenciation de données, a été résolu par différentes méthodes, chacune prenant en compte la particularité des données:

- Les polynômes interpolants: La méthode consiste à interpoler les données a l'aide de fonctions polynomiales et d'évaluer les dérivées des polynômes à l'aide de différents schémas numériques [Bic41, Sal60, Cha61, Kra63, Sal63].

- Les splines interpolantes: Cette méthode est similaire à la méthode précédente, mais l'interpolation est faite à l'aide de fonctions splines qui imposent une certaine régularité à la fonction interpolante [dB62, BdB64, Sec65, Sch66].

- Méthode stochastique: Cette méthode considère les données comme un signal uniformément échantillonné et établit à l'aide des transformées de Fourier du signal, une fonction de transfert optimale permettant de calculer les dérivées [AB74a, AB74b].

Les deux premières méthodes fournissent de bons résultats lorsque les données sont exactes c'est à dire non entachées d'erreur. Cette contrainte limite le champ d'application de ces méthodes. La dernière méthode permet de prendre en compte de manière explicite les erreurs sur les données, mais celles-ci doivent être équidistantes.

L'inapplicabilité de ces méthodes pour discrétiser des équations de type équations intégrales dont la précision de la solution dépend directement de la précision des données, a mené à restreindre l'ensemble des solutions au problème en imposant un critère de régularité. Cette méthode, introduite par D. Phillips [Phi61] fût justifiée par Tikhonov [TA74].

L'idée maîtresse de la méthode de régularisation de Tikhonov est de restreindre l'espace des solutions en considérant les fonctions minimisant une certaine fonctionnelle. La régularisation du problème mal posé consistant à déterminer x à partir des données y tel que $Ax = y$, est définie en considérant une fonctionnelle régularisante P (généralement quadratique) et en résolvant l'un des trois problèmes variationnels équivalents [Vas70]:

- Parmi les x vérifiant $\|P(x)\| \leq C_1$ trouver x minimisant:

$$\|Ax - y\|,$$

- Parmi les x vérifiant $\|Ax - y\| \leq C_2$ trouver x minimisant:

$$\|P(x)\|,$$

- Déterminer x minimisant:

$$\|Ax - y\|^2 + \alpha \|P(x)\|^2,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes strictement positives.

La première méthode consiste à déterminer la fonction x qui vérifie la contrainte $\|P(x)\| \leq C_1$ et approximant au mieux les données. La seconde, à déterminer la fonction x suffisamment proche des données et qui est la plus régulière. Finalement dans la troisième méthode le paramètre α contrôle le compromis entre fiabilité aux données et régularité de la solution.

La dernière méthode est la plus utilisée, le paramètre α étant interprété comme un multiplicateur de Lagrange.

Avant de considérer le cas des modèles déformables, où le paramètre régularisant est remplacé par plusieurs fonctions régularisantes, nous allons décrire les différentes méthodes existantes pour déterminer le paramètre α. Pour cela nous allons reformuler le problème, considérons la fonctionnelle paramétrée

$$\Phi_\alpha(u) = \|Au - f\| + \alpha \|Lu\|, \tag{6.1}$$

où A et L sont des opérateurs linéaires et f est donnée. Ce formalisme générique permet de représenter une grande partie des problèmes d'approximation de données à l'aide de méthodes régularisantes. Par exemple, considérons le problème:

Problème 1. Soit $x_1 = 0 < \ldots < x_n = 1$ un ensemble ordonné de points et y_i $(i = 1, \ldots, n)$ l'ensemble des observations associées. Déterminer l'unique fonction f minimisant:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\delta y_i} \right]^2 + \alpha \int_0^1 \left(\frac{\partial^m f}{\partial x^m} \right)^2 dx. \tag{6.2}$$

Dans cet exemple nous avons $L = \dfrac{\partial^m}{\partial x^m}$ et $A = I$. Ce problème est en fait la définition des fonctions splines approximantes de degré $2m - 1$ [ANW67, Lau72].

6.1.1 Méthode des Résidus

Dans un problème d'approximation de données, nous sommes généralement confrontés au problème du compromis entre fiabilité aux données et régularité de la solution, c'est à dire à la question de savoir quelles doivent être la précision de l'approximation et la régularité de la fonction.

Considérons u_α la fonction minimisant Φ_α et définissons les fonctionnelles:

$$\rho(\alpha) = \|Au_\alpha - f\| \tag{6.3}$$

et

$$\gamma(\alpha) = \|Lu_\alpha\| \,. \tag{6.4}$$

La fonctionnelle $\rho(\alpha)$ mesure la précision de la fonction approximante et $\gamma(\alpha)$ sa régularité pour un paramètre α donné.

On a alors:

$$\Phi_\alpha(u_\alpha) = \rho(\alpha) + \alpha\gamma(\alpha).$$

Lorsque les données ne sont pas entachées d'erreurs on peut privilégier la fiabilité aux données et la solution obtenue sera la fonction interpolant les données, mais dans le cas contraire ce critère ne sera pas valide. On utilisera donc la fonction $\rho(\alpha)$ pour tenir compte de l'information a priori dont on dispose (variance du bruit par exemple) ou pour déterminer le paramètre α optimal pour une précision donnée. Cette méthode s'appelle *la méthode des résidus* [Rei67, Rei71, TA74, Mor84]. Ainsi pour une précision e_ρ donnée nous déterminerons le paramètre optimal $\hat{\alpha}$ en résolvant l'équation:

$$\rho(\alpha) = \|Au_\alpha - f\| = e_\rho. \tag{6.5}$$

La fonctionnelle $\rho(\alpha)$ est continue, strictement croissante [Mor84] et par conséquent la méthode de Newton peut être appliquée pour résoudre l'équation (6.5). La méthode de Newton converge en quelque itérations [Rei67, Rei71, Mor84]. Cette méthode à été utilisée avec succès dans plusieurs applications [Rei67, Cul71, Rei71, AB74b]. Reinsch [Rei67] a également mis en valeur un critère permettant de choisir l'erreur e_ρ en fonction de la variance σ^2 du bruit entachant les données: $\sigma^2\left(1-\sqrt{\frac{2}{n}}\right) \leq e_\rho \leq \sigma^2\left(1+\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$, où n est le nombre de

points à approximer. Ce domaine a été affiné par Wold [Wol71, Wah75] à partir de résultats expérimentaux: $0.7\sigma^2 \leq e_\rho \leq 0.95\sigma^2$.

Mais cette méthode impose la connaissance de l'erreur sur les données contrairement à la méthode de validation croisée.

6.1.2 Méthode de Validation Croisée

Afin de décrire cette méthode [Wah77, Lau], reconsidérons le problème d'approximation d'un ensemble de données décrit précédemment (problème 1). Supposons que l'on enlève la $k^{ème}$ donnée y_k et considérons le problème de minimisation avec les $n-1$ données restantes:

$$\sum_{i=1, i\neq k}^{n} \left[\frac{y_i - f(x_i)}{\delta y_i}\right]^2 + \alpha \int_0^1 (D^m f)^2 \, dx \tag{6.6}$$

et notons $f^{[k]}$ la solution associée. Si le paramètre α est bien choisi, $f^{[k]}(x_k)$ est une bonne estimation de la donnée manquante y_k. En réitérant le même procédé pour les autres points, on est amené à considérer la fonction de validation croisée ordinaire:

$$V_0(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{f^{[k]}(x_k) - y_k}{\delta y_k}\right)^2 \tag{6.7}$$

et à choisir le paramètre α minimisant $V_0(\alpha)$. L'expression de $V_0(\alpha)$ (6.7) est une forme particulière de $\rho(\alpha)$ (6.3). Mais cette méthode est trop coûteuse, car elle nécessiterait n fois la résolution du problème (6.6). Pour cela on considère généralement la fonction de validation croisée généralisée [Wah77, Lau]:

$$V(\alpha) = \frac{\|B_\alpha y - y\|^2}{\left(1 - \frac{1}{n} Tr(B_\alpha)\right)^2}, \tag{6.8}$$

où B_α est la matrice vérifiant: $(f(x_1), \ldots, f(x_n))^t = B_\alpha \, (y_1, \ldots, y_n)^t$.

Le paramètre optimal $\hat{\alpha}$ est obtenu en minimisant le critère $V(\alpha)$ à minimum unique. Une amélioration de la complexité algorithmique de cette méthode a été proposée par [dHH87, HdH85] et [Gir88]. L'application de cette méthode a été menée dans le cadre des courbes splines [CW79] et des surfaces splines [Wah84] approximantes.

Les méthodes précédentes ne peuvent s'appliquer dans le cadre des modèles déformables. En effet le paramètre α de régularisation est remplacé par plusieurs fonctions régularisantes

(2 dans le cas de courbes déformables et 5 dans le cas de surfaces déformables); ainsi en considérant une méthode de validation croisée, on ne peut pas réécrire le critère de validation V d'une manière analogue, car les termes diagonaux ne sont plus constants, puisqu'ils dépendent des fonctions w_1 et w_2 et la trace de la matrice B_α dépendrait également des paramètres w_1 et w_2.

La méthode que nous proposons est basée sur la méthode des résidus, mais la résolution se fait différemment. En effet, dans le cas de fonctions régularisantes on ne parvient pas à démontrer que la fonction

$$\rho(w_1, w_2) = \|\nabla P(v)\|^2$$

(où $P = -|\nabla \mathcal{I}|^2$ est le potentiel des forces externes) est elliptique, car la fonction P n'est connue que par l'intermédiaire des contours de l'image traitée et par conséquent, on ne peut pas résoudre l'équation (6.5) à l'aide d'une méthode de Newton.

Avant de détailler la méthode proposée pour la détermination des paramètres régularisants, nous allons décrire le comportement asymptotique des paramètres et une méthode basée sur l'interprétation physique de ces paramètres.

6.2 Comportement Asymptotique des Paramètres

Le modèle de contours déformables défini avec des coefficients d'élasticité et de rigidité constants est similaire au modèle de splines sous tension [Sch66, Cli74, Bar84]. En effet, notons $F_i = -\nabla P(v(ih)$ la force appliquée au point de la courbe d'abscisse curviligne ih. Dans un état stationnaire, c'est à dire lorsque la courbe a atteint les points de contour, on a $F_i = -\nabla P(v(ih) = 0$ et l'équation caractérisant la solution peut s'écrire:

$$-w_1 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + w_2 \frac{\partial^4 v}{\partial s^4} = F = 0, \tag{6.9}$$

en intégrant deux fois cette équation on obtient:

$$-w_1 v + w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} = as + b, \tag{6.10}$$

où a et b (ainsi que c et d définis par la suite) sont des constantes dépendantes des conditions aux limites imposées aux contours actifs. La solution de l'équation (6.10) dépend des valeurs des paramètres w_1 et w_2:

i- Si $w_1 = 0$ et $w_2 \neq 0$, la solution de l'équation (6.10) est une spline cubique de la forme

$$v(s) = as^3 + bs^2 + cs + d$$

et interpolant les points de contour.

ii- Si $w_1 \neq 0$ et $w_2 = 0$ la solution est la droite passant par les deux points extrêmes:

$$v(s) = as + b.$$

Cette propriété peut s'interpréter en terme de tension appliquée à la courbe. En effet, le rapport $\delta^2 = w_1/w_2$ représente la tension entre les points de la courbe [Sch66, Bar84, Ber91] et dans ce cas la tension δ est infinie et les points par lesquels la courbe passe sont les points extrêmes choisis comme conditions aux limites.

iii- Si $w_1 \neq 0$ et $w_2 \neq 0$, la solution de l'équation (6.10) est

$$v(s) = as + b + ce^{\delta s} + de^{-\delta s},$$

caractérisant les splines sous tension [Bar84].

Ces différents cas illustrent bien le comportement des contours déformables. Lorsque nous considérons les paramètres $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$, où h est le pas de discrétisation du domaine de paramétrisation [CC90], $\delta^2 = 1/h$ définit une tension inverse au pas de discrétisation, et par conséquent privilégie une répartition uniforme des points le long la courbe et permet à la courbe d'approcher au mieux la position des données. En considérant de faibles tensions il y a apparition d'oscillations et la courbe est irrégulière. Cette irrégularité est traduite par l'apparition de points d'inflexion dans la courbe. La tension optimale peut être calculée en contraignant la courbe interpolante à ne posséder des points d'inflexion qu'aux points interpolés [Sch66].

6.3 Splines Cubiques

En considérant la courbe comme une barre homogène mince, de faible section se déformant dans un plan, l'énergie de déformation de la courbe s'écrit [ANW67, LL67, LL86]:

$$E_{courbe} = EI \int_0^1 \kappa(s)^2 ds, \tag{6.11}$$

où E représente le module de Young, I le moment d'inertie, κ la courbure de la courbe et s une paramétrisation de la courbe. En considérant le graphe de la courbe $\beta(s) = (s, x(s), y(s))$ la courbure peut s'exprimer [dC76]:

$$\kappa(s) = \frac{|\beta' \wedge \beta''|}{|\beta'|^3},$$

$$\kappa(s)^2 = \frac{(x'y'' - x''y')^2 + x''^2 + y''^2}{(1 + x'^2 + y'^2)^3}.$$

Ainsi en supposant que la courbe subit de faibles déformations on peut considérer x' et y' nuls et on obtient l'énergie régularisante définissant les splines cubiques [Sch64]:

$$E_{courbe} = \int_0^1 \beta''(s)^2 ds. \tag{6.12}$$

La fonctionnelle E_{courbe} peut être pondérée différemment en chaque point par une fonction $w(s)$. Un choix astucieux de la fonction $w(s)$ a été proposé par Salkauskas [Sal84] en considérant l'énergie:

$$E_{courbe} = \int_0^1 w(s)\beta''(s)^2 ds, \tag{6.13}$$

où la fonction $w(s)$ est choisie de telle sorte que l'énergie E_{courbe} soit similaire au modèle physique, c'est à dire:

$$w(s) = \frac{1}{(1 + \beta'(s)^2)^3}. \tag{6.14}$$

La définition du paramètre prend en compte uniquement la forme géométrique de la courbe. Ainsi aux points de forte variation de tangente, et donc aux points de forte courbure, le paramètre w sera proche de 0 et pour les points de faible variation, il sera proche de 1. Cette définition du paramètre $w(s)$ donne des résultats satisfaisants dans le cadre de splines interpolantes [Sal84, Fol87a].

Dans le cadre de splines approximantes, ce modèle ne permet pas de prendre en compte, en chaque point, la précision locale de la spline pour ajuster celle-ci aux données. Cette précision locale du modèle est d'un grand intérêt en traitement d'image, où on cherche à approximer les données par des splines tout en préservant les discontinuités caractérisant les points de contour.

6.4 Détermination des Fonctions Régularisantes

Nous allons reformuler le problème des contours déformables. La fonctionnelle considérée est:

$$E(v) = \int_0^1 w_1^2(s) \left|\frac{\partial v}{\partial s}\right|^2 + w_2^2(s) \left|\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right|^2 ds + \int_0^1 P(v(s))ds. \tag{6.15}$$

Considérons les opérateurs linéaires:

$$L_1 \cdot = w_1 \frac{\partial \cdot}{\partial s},$$

défini dans l'espace $H^1[0,1]$ et à valeur dans $L^2[0,1]$ et

$$L_2 \cdot = w_2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial s^2},$$

défini dans l'espace $H^2[0,1]$ et à valeur dans $L^2[0,1]$ et notons $(.,.)_2$ le produit scalaire dans $L^2[0,1]$ et $\|.\|_2$ la norme associée. La fonctionnelle $E(v)$ peut s'écrire:

$$\Phi_{(w_1,w_2)}(v) = \Phi_\alpha(v) = (L_1 v, L_1 v)_2 + (L_2 v, L_2 v)_2 + \int_0^1 P(v(s))ds. \tag{6.16}$$

Lemme 6.1 *Un minimum u de la fonctionnelle $\Phi_\alpha(v)$ (6.16) vérifie l'équation d'Euler:*

$$L_1^* L_1 u + L_2^* L_2 u = -\nabla P, \tag{6.17}$$

où L_1^* et L_2^* sont les opérateurs adjoints des opérateurs L_1 et L_2 respectivement.

Démonstration du lemme. Comme nous l'avons vu précédemment (section 2.2), la minimisation de l'énergie E se ramène à résoudre l'équation:

$$\left(w_1 \frac{\partial u}{\partial s}, w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right)_2 + \left(w_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, w_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_2 = -\left(\nabla P(u), v\right)_2, \tag{6.18}$$

et ceci $\forall v \in H^2[0,1]$. Or,

$$\left(w_1 \frac{\partial u}{\partial s}, w_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right)_2 = (L_1 v, L_1 u)_2 = -\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1^2 \frac{\partial u}{\partial s}\right), v\right)_2 = (L_1^* L_1 u, v)_2,$$

on a donc

$$L_1^* L_1 u = -\frac{\partial}{\partial s}\left(w_1^2 \frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

et de la même façon:

$$L_2^* L_2 u = \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(w_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right).$$

Et par conséquent l'équation (6.18) est équivalente à (6.17). □

A présent considérons un potentiel d'attraction $P = -\left|\nabla \mathcal{I}\right|^2$ et une incertitude S tolérée sur la localisation de la courbe. Dans le cas des contours actifs, on a:

$$\rho(\alpha) = \left\|\nabla P(v)\right\|^2. \tag{6.19}$$

Au lieu de résoudre l'équation $\rho(\alpha) = S$ pour déterminer les paramètres de régularisation, on va considérer le problème suivant:

Problème 2. Déterminer les paramètres régularisants w_1 et w_2 tels que le résidu:

$$\tilde{\rho}(w_1, w_2) = \tilde{\rho}(\alpha) = \left(\left\|\nabla P(v)\right\|^2 - S\right)^2, \tag{6.20}$$

soit minimum.

Ce critère, similaire à la méthode des résidus, permet d'ajuster au mieux les paramètres w_1 et w_2 de telle sorte que la fonction v_α obtenue, sera la plus proche des données, c'est à dire des contours de l'image.

Avant de caractériser ces fonctions régularisantes, définissons quelques notations qui seront utilisées dans la suite.

La représentation de la solution à l'aide des éléments finis de Hermite, permet de décomposer la solution dans une base discrète. Dans la suite, v représentera la décomposition de la fonction v dans la base d'éléments finis. De même Ω_1 et Ω_2 sont deux matrices diagonales dont les termes diagonaux sont $w_1(ih)$ et $w_2(ih)$ respectivement. Posons:

$$A_\alpha v = -\frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega_1^* \Omega_1 \frac{\partial v}{\partial s}\right) + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\Omega_2^* \Omega_2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right).$$

La matrice A_α représente la matrice de rigidité de la formulation variationnelle associée au problème des contours actifs.

Avec cette notation l'équation d'Euler (6.17) s'écrit:

$$A_\alpha(v) = -\nabla P(v). \tag{6.21}$$

Avant de caractériser la solution optimale au problème (6.20), nous remarquerons qu'il n'y a pas de critère d'existence et d'unicité de la solution. Ceci est dû au fait que le potentiel

d'attraction P n'est connu que par l'intermédiaire d'une grille de valeurs. Nous allons cependant caractériser une solution du problème (6.20) à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange associée, en supposant que le potentiel d'attraction P ne dépend pas des paramètres w_1 et w_2.

Nous avons:

$$\tilde{\rho}'(\alpha) = 2\left(\|\nabla P(v)\|^2 - S\right)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\|\nabla P(v)\|^2 - S\right),$$

or

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\|\nabla P(v)\|^2 - S\right) = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(A_\alpha v, A_\alpha v\right)_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}A_\alpha v, A_\alpha v\right)_2 = 2\left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}v + A_\alpha\frac{\partial v}{\partial\alpha}, A_\alpha v\right)_2,$$

en utilisant l'équation (6.21).

En dérivant l'équation d'Euler (6.21) par rapport au paramètre α, le vecteur $\frac{\partial v}{\partial\alpha}$ vérifie les équations:

$$A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_1} = 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega_1\frac{\partial v}{\partial s}\right) \tag{6.22}$$

et

$$A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_2} = -2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\Omega_2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right). \tag{6.23}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial w_1}\left(\|\nabla P(v)\|^2 - S\right)\cdot\beta &= 2\left(-2\frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega_1\cdot\beta\frac{\partial v}{\partial s}\right) + A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_1}\cdot\beta, A_\alpha v\right)_2 \\
&= 4\left(\Omega_1\cdot\beta\frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial s}\left(A_\alpha v\right)\right)_2 + \left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_1}\cdot\beta, A_\alpha v\right)_2 \\
&= 4\left(\beta, \Omega_1^*\frac{\partial}{\partial s}\left(A_\alpha v\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^*\right)_2 + 2\left(\beta, A_\alpha v\left(A_\alpha^*\frac{\partial v}{\partial w_1}\right)^*\right)_2.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\tilde{\rho}(\alpha)}{\partial w_1}\cdot\beta = 0 \ \ \forall\beta$$

si:

$$\tilde{\rho}(\alpha) = 0 \tag{6.24}$$

ou,

$$2\Omega_1^*\frac{\partial}{\partial s}\left(A_\alpha v\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^* + A_\alpha v\left(A_\alpha^*\frac{\partial v}{\partial w_1}\right)^* = 0. \tag{6.25}$$

On a de même, en calculant la dérivée de $\tilde{\rho}(\alpha)$ par rapport au paramètre w_2,

$$2\Omega_2^* \frac{\partial^2}{\partial s^2}(A_\alpha v)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^* + A_\alpha v\left(A_\alpha^* \frac{\partial v}{\partial w_2}\right)^* = 0. \tag{6.26}$$

Ainsi un paramètre optimal $\alpha = (w_1, w_2)$ sera choisi à l'aide des relations

$$\Omega_1^* = -\frac{1}{2}\left[A_\alpha v\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_1}\right)^*\right]\left[\frac{\partial}{\partial s}(A_\alpha v)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^*\right]^{-1} \tag{6.27}$$

et

$$\Omega_2^* = -\frac{1}{2}\left[A_\alpha v\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_2}\right)^*\right]\left[\frac{\partial^2}{\partial s^2}(A_\alpha v)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)^*\right]^{-1}, \tag{6.28}$$

lorsque le critère $\tilde{\rho}(\alpha)$ n'est pas nul.

Ces formules peuvent être simplifiées en tenant compte de la structure des matrices y apparaissant. En effet, dans la représentation considérée, le choix des matrices est dû uniquement à la simplicité d'écriture, car en prenant Ω_1 une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $w_1(ih)$, on peut écrire le vecteur $(w_1(ih) * v(ih))_{i=1..n}$ comme étant le produit $\Omega_1 v$.

On peut donc expliciter les coefficients $w_1(ih)$ et $w_2(ih)$ pour $i = 1, \ldots, n$ par les relations suivantes:

$$w_1(ih) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial(A_\alpha v)}{\partial s}\right)_i \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_i}(A_\alpha v)_i\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_1}\right)_i, \tag{6.29}$$

et

$$w_2(ih) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2(A_\alpha v)}{\partial s^2}\right)_i \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_i}(A_\alpha v)_i\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_2}\right)_i, \tag{6.30}$$

qui peuvent être également décrites en fonction du potentiel d'attraction P à l'aide de l'équation (6.21) par:

$$w_1(ih) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial(\nabla P(v))}{\partial s}\right)_i \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_i}(\nabla P(v))_i\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_1}\right)_i, \tag{6.31}$$

et

$$w_2(ih) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2(\nabla P(v))}{\partial s^2}\right)_i \left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_i}(\nabla P(v))_i\left(A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_2}\right)_i. \tag{6.32}$$

L'expression de ces paramètres illustre leur signification physique. En effet, le paramètre w_1 contrôle l'élasticité de la courbe c'est à dire la capacité de la courbe à s'allonger et il est bien inversement proportionnel au vecteur vitesse. De même, le coefficient w_2 est

inversement proportionnel à la courbure de la courbe et représente la résistance de la courbe à se tordre. Ces paramètres dépendent localement, de la précision de la position de la courbe par rapport aux points de contour. Cette précision intervient à deux niveaux, pour mesurer l'approximation des données et également pour mesurer la variation des données. Cette variation, mesurée par $\frac{\partial \nabla P(v)}{\partial s}$ pour w_1 et $\frac{\partial^2 \nabla P(v)}{\partial^2 s}$ pour w_2, permettra de déterminer la géométrie des points de contour situés dans un proche voisinage de la courbe. Par exemple une grande valeur de $\frac{\partial^2 \nabla P(v)}{\partial^2 s}$ permettra de détecter un coin dans la structure des données et pénaliser en conséquence le coefficient w_2 pour que l'approximation des données soit meilleure. En effet en annulant le paramètre w_2 la courbe est en mesure de détecter les coins en imposant implicitement une discontinuité de tangente.

On a donc une méthode basée sur la géométrie de la courbe et également sur celle des données. En effet, la pénalisation des coefficients est faite par l'intermédiaire des dérivées de la courbe et des variations du potentiel P le long de cette courbe. Ces deux notions sont identiques dans le cas des splines interpolantes [Sal84, Fol87a]. D'autre part, ces paramètres sont calculés séparément pour chaque composante de la courbe.

6.4.1 Utilisation de la Méthode

Le calcul des paramètres optimaux est effectué lorsque la courbe a atteint les points de contour à l'aide du schéma de résolution propre aux contours actifs, dans cette étape les paramètres w_1 et w_2 sont choisis pour que le système linéaire correspondant soit bien conditionné, ce qui conduit à considérer $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$ où h est le pas de discrétisation du domaine de paramétrisation $[0, 1]$ (voir paragraphe 2.5). Cette approche permet d'évaluer correctement la forme géométrique de la courbe et du potentiel d'attraction. En effet, lorsque le contour actif converge, la géométrie peut varier de manière significative et l'évaluation de celle-ci en cours de convergence pour déterminer les paramètres optimaux peut entraîner des résultats erronés. Elle permet également d'évaluer la géométrie des données de manière plus rigoureuse, car il est fréquent que localement, la courbe en cours de convergence, ne soit pas à proximité des points de contour qu'on cherche à détecter.

La figure 6.1 représente la solution stationnaire obtenue (en gris) à l'aide du modèle de

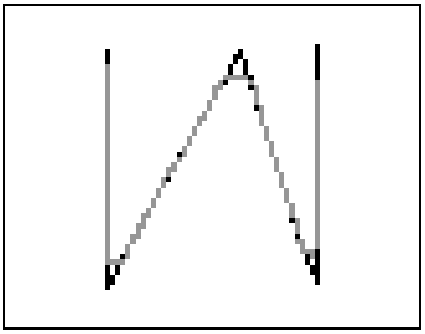

Figure 6.1. Solution obtenue par le modèle déformable avec les paramètres constants $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$. La courbe obtenue (en gris) ne parvient pas à détecter avec précision les coins existants dans les contours (en noir).

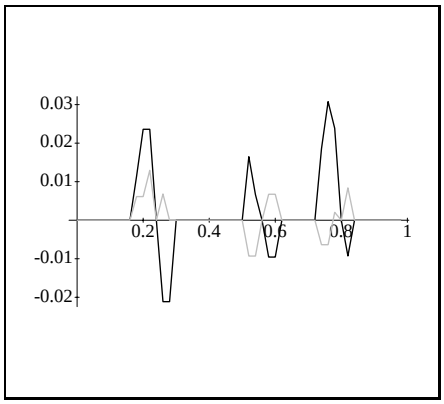

Figure 6.2. Tracé de la fonction ρ_α, pour les paramètres $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$.

contours déformables à cœfficients w_1 et w_2 constants pour détecter des points de contour (en noir). Comme il était prévu, la courbe obtenue ne détecte pas avec précision la position des coins. Nous utiliserons cette courbe ainsi que la fonction $\rho(\alpha)$ (représentée dans la figure 6.2) pour calculer les paramètres optimaux, à l'aide des équations (6.31) et (6.32). Celles-ci fournissent des paramètres optimaux, pour le critère choisi, pour chaque variable de la courbe. Ainsi, nous sommes en mesure de pénaliser indépendamment les discontinuités détectées pour chaque composante x ou y. Dans les figures présentées, les tracés gris correspondent à la variable x et les noirs à y.

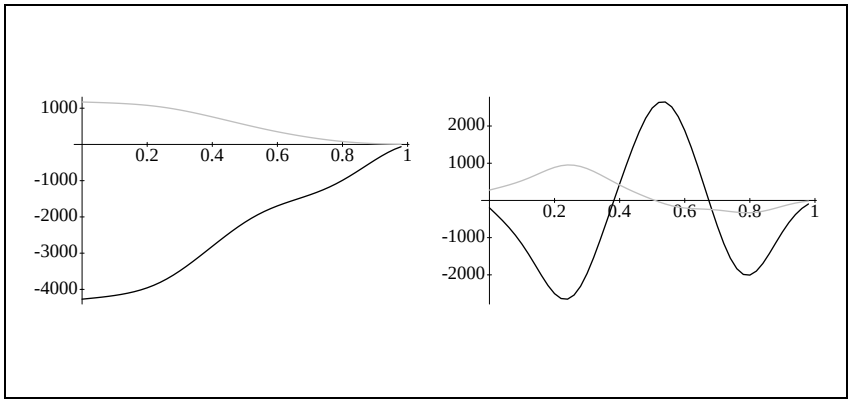

Figure 6.3. Tracés des fonctions $\frac{\partial v}{\partial w_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial w_2}$ obtenues en résolvant les systèmes linéaires (6.22) et (6.23).

Dans la méthode de calcul des paramètres présentée, la partie algorithmique la plus coûteuse réside dans l'évaluation des dérivées $\frac{\partial v}{\partial w_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial w_2}$. En effet, cette évaluation nécessite la résolution des systèmes linéaires (6.22) et (6.23). Ceux-ci sont résolus à l'aide d'une décomposition LU [WR71, Cia85] de la matrice de rigidité A_α. Ces dérivées sont illustrées dans la figure 6.3.

A la lumière des différentes expérimentations menées, une interprétation des dérivées $\frac{\partial v}{\partial w_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial w_2}$ à partir de leur tracés peut être donnée. En effet, nous avons constaté que les points en lesquels une discontinuité de position ou de tangente devait être imposée se traduisaient par une forte variation de la dérivée du vecteur v_α par rapport au paramètre concerné. La figure 6.3 illustre cette remarque, nous constatons dans le tracé du paramètre w_2 concernant la variable y trois fortes variations caractéristiques des trois coins présents dans la courbe.

A cette information dépendant uniquement de la courbe se conjugue l'information extraite des données $\rho(\alpha)$ pour obtenir les paramètres optimaux. Pour l'exemple considéré ceux ci sont illustrés par la figure 6.4. La courbe obtenue avec ces fonctions régularisantes est représentée dans la figure 6.5. La position de la courbe est plus précise au voisinage des coins.

La reparamétrisation de la courbe déformable, à chaque itération du schéma itératif (4.21), à l'aide de l'abscisse curviligne impose une contrainte de régularité supplémentaire. En effet, en redistribuant les points de discrétisation de manière uniforme

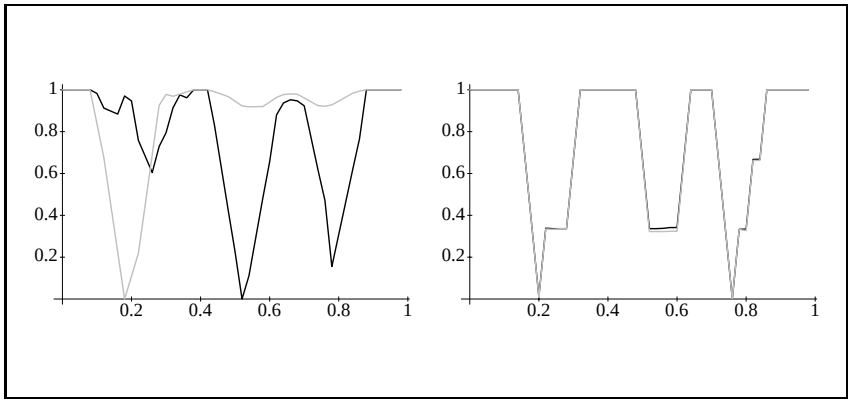

Figure 6.4. Tracés des fonctions régularisantes w_1 et w_2. Ces fonctions sont calculées séparement pour chaque variable x et y de la courbe.

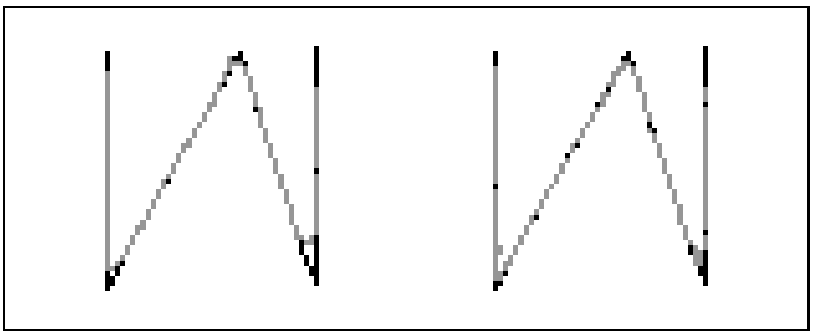

Figure 6.5. Courbes obtenues avec les paramètres w_1 et w_2 calculés. La première solution a été obtenue en reparamétrant la courbe par l'abscisse curviligne à chaque itération et la seconde a été obtenue sans reparamétrisation.

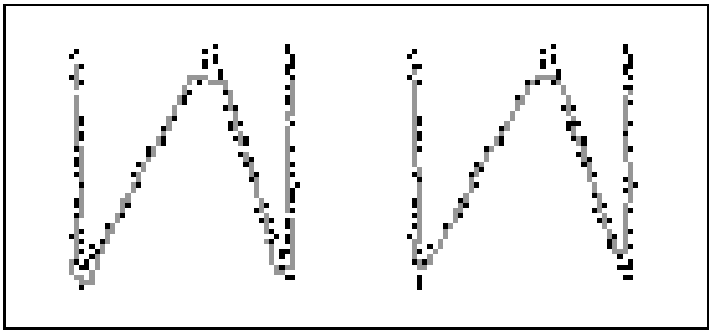

Figure 6.6. Détermination des paramètres w_1 et w_2, optimaux à partir de données bruitées. A gauche, la courbe obtenue avec des paramètres constants et à droite la courbe obtenue avec des paramètres variables.

le long de la courbe, la courbe ainsi reconstruite est de classe $\mathcal{C}^1$. Considérons L la longueur de la courbe v et répartissons les N points de discrétisation P_i tels que $d(P_i, P_{i+1}) = L/N$. On a alors $\forall i = 0 \dots N-1$, $|v'(ih)| = L/N$. La figure 6.5 illustre cette remarque, en considérant des paramètres w_1 et w_2 permettant d'imposer une discontinuité de tangente, la courbe ne détecte pas parfaitement les coins alors que, sans la reparamétrisation les mêmes paramètres permettent la détection des coins (figure 6.5) et d'imposer à la courbe d'être $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

La figure 6.6 illustre l'utilisation de la méthode avec des données bruitées. Nous avons pris l'exemple précédent en ajoutant un bruit gaussien de variance $\sigma^2 = 0.5$ aux positions des contours. La figure 6.6 représente les positions du modèle déformable (en gris) obtenues avec des paramètres w_i constants et calculés à partir des relations 6.31 et 6.32.

6.5 Détermination des Paramètres de Régularisation dans le cas des Surfaces

Nous allons considérer les surfaces de la forme $z = f(x, y)$ pour présenter les différentes méthodes permettant de calculer localement les paramètres. Ce choix n'est pas restrictif, dans la mesure où les méthodes présentées se généralisent aux surfaces paramétrées

$(X(s,r), Y(s,r), Z(s,r))$, mais illustre une modélisation des images adoptée par plusieurs auteurs. La représentation des discontinuités apparaissant dans les images est d'un intérêt essentiel dans l'interprétation et l'extraction d'informations des images. Cette caractérisation est faite généralement à l'aide de détecteurs de contours, [Can86, Der87] pour les images bidimensionnelles et [ZH81, MD89] pour les images tridimensionnelles. Mais pour certaines applications telles que la stéréo, le modèle numérique de terrain et les images de profondeur (range data) ces méthodes de filtrage ne s'appliquent pas. Pour ce type d'image, la méthode employée consiste à générer une représentation continue des données à l'aide d'une surface approximante [Gri83, Ter86a, Ter88, Ter86b] et de calculer les gradients des données à partir de cette approximation [Sch76] (voir également [Du88, DS89a, DS89b] et les références citées).

Cette représentation, à l'aide de surfaces splines de classe $\mathcal{C}^1$ ne permet pas de conserver les discontinuités des données qui sont caractéristiques des points de contour. Ainsi pour établir une représentation des données prenant en compte les discontinuités, plusieurs méthodes ont été proposées. On retrouve les modèles basés sur l'interprétation physique des coefficients de régularisation et les modèles basés sur les données.

6.5.1 Surfaces Déformables

Considérons le modèle de surfaces déformables de Terzopoulos [Ter88], défini par le problème

Problème 3. Etant données une image $I = (z_{ij} = I(i,j))_{i,j}$, et une surface v minimisant la fonctionnelle

$$\mathcal{E}(v) = \frac{1}{2}\int \rho(x,y)\left\{\tau(x,y)\left(v_{xx}^2 + 2v_{xy}^2 + v_{yy}^2\right) + [1-\tau(x,y)]\left(v_x^2 + v_y^2\right)\right\}dxdy + \sum_{i,j}|v_{ij} - z_{ij}|^2 . \tag{6.33}$$

Déterminer les paramètres ρ et τ optimaux permettant de conserver les discontinuités de l'image.

Deux méthodes ont été proposées par Terzopoulos [Ter88] pour résoudre ce problème. Dans les deux cas les paramètres ρ et τ ont des valeurs binaires. La première méthode consiste à introduire des discontinuités de position (c'est à dire $\rho(x,y) = 0$) aux points de l'image

pour lesquels le laplacien est nul et la norme du gradient supérieure à un seuil donné et des discontinuités de tangente (c'est à dire $\tau(x, y) = 0$) aux points de gradient nul et dont la norme du laplacien est supérieure à un seuil donné. Ces paramètres sont utilisés pour calculer à nouveau un minimum de (6.33). Ce critère est réitéré en réduisant les seuils, tant que la fonctionnelle (6.33) décroît.

La deuxième méthode, fait varier les paramètres $\rho(i, j)$ et $\tau(i, j)$ dans l'ensemble discret $\{0, 1\}$ et une valeur est conservée lorsque la fonctionnelle $\mathcal{E}$ (6.33) décroît.

Ces deux méthodes sont numériquement très coûteuses car elles nécessitent une double évaluation de la fonctionnelle en chaque point de l'image pour déterminer les paramètres optimaux.

6.5.2 Détermination des Paramètres à partir des Données

En considérant la minimisation de la fonctionnelle

$$E(v) = \int w_{10}v_s^2 + w_{01}v_r^2 + w_{20}v_{ss}^2 + 2w_{11}v_{sr}^2 + w_{02}v_{rr}^2 dsdr + \sum_{i,j} |v_{ij} - z_{ij}|^2 , \tag{6.34}$$

chaque paramètre w_{ij} pénalise les variations des dérivées correspondantes de la surface v. Par exemple dans des régions planes il est préférable que les dérivées secondes soient faibles, tandis que pour les régions à forte variation, les dérivées secondes seront élevées. Ainsi, on peut à l'aide d'une fonction de pénalisation générique, choisir des paramètres w_{ij} proches de l'unité dans les régions à faible variation de position ou de tangente (caractérisant discontinuités de position ou de tangente respectivement) et des paramètres proches de zéro dans les régions à forte variation.

Considérons la fonction de pénalisation:

$$\mathcal{P}_m(s, r) = \frac{1}{(1 + p(s, r)^2)^m}, \tag{6.35}$$

où $p(s, r)$ caractérise l'entité pénalisée par le paramètre correspondant. Par exemple $p(s, r) = v_s(s, r)$ pour le paramètre w_{10} et $p(s, r) = v_{sr}(s, r)$ pour le paramètre w_{11}. Le paramètre $m \geq 1$ permet de caractériser le critère de définition des discontinuités, pour m élevé, on imposera une discontinuité dès que $p(s, r)$ sera non nul et on retrouve les paramètres binaires

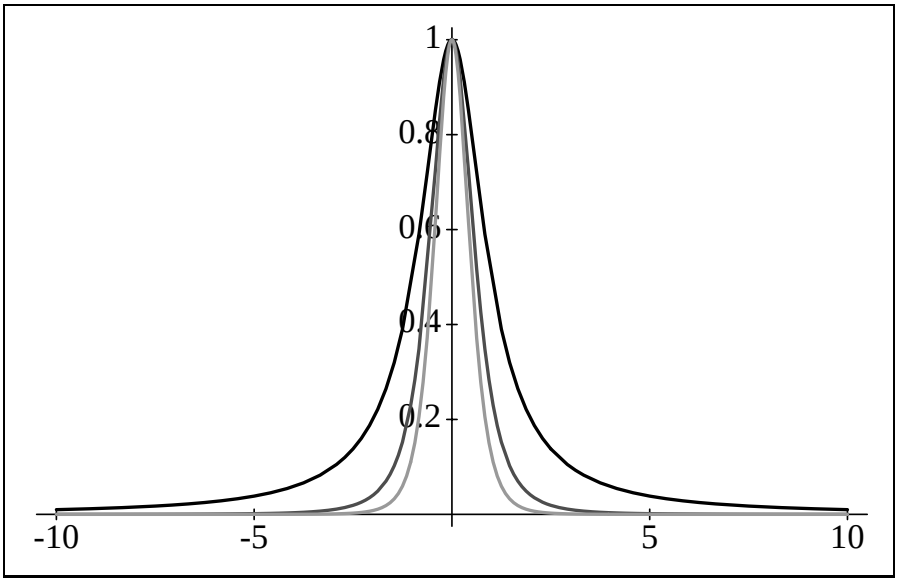

Figure 6.7. Une représentation de la fonction de pénalité $\mathcal{P}_m$ pour $m = 1, 2$ et 3.

utilisés par Terzopoulos [Ter88]. On considère généralement les paramètres $m = 1, 2$ ou 3, ces fonctions de pénalisation sont représentées dans la figure 6.7.

La fonction de pénalisation $\mathcal{P}_m$ définie par Foley [Fol87b] pour le cas de surfaces bicubiques interpolantes minimisant:

$$\int \frac{\partial^4 v}{\partial s^2 \partial r^2} ds dr,$$

est similaire à celle définie pour les splines cubiques par Salkauskas [Sal84] (équation (6.14)).

Nous avons considéré les fonctions de régularisation:

$$w_{10}(s,r) = \frac{1}{\left(1 + \left(z_{i+1,j} - z_{ij}\right)^2 / h_s^2\right)^m}, \tag{6.36}$$

et

$$w_{01}(s,r) = \frac{1}{\left(1 + \left(z_{i,j+1} - z_{ij}\right)^2 / h_r^2\right)^m} \tag{6.37}$$

pour pénaliser les discontinuités de position dans chaque direction et

$$w_{20}(s,r) = \frac{1}{\left(1 + \left(z_{i+1,j} - 2z_{ij} + z_{i-1,j}\right)^2 / h_s^4\right)^m}, \tag{6.38}$$

$$w_{02}(s,r) = \frac{1}{\left(1 + \left(z_{i,j+1} - 2z_{ij} + z_{i,j-1}\right)^2 / h_r^4\right)^m}, \tag{6.39}$$

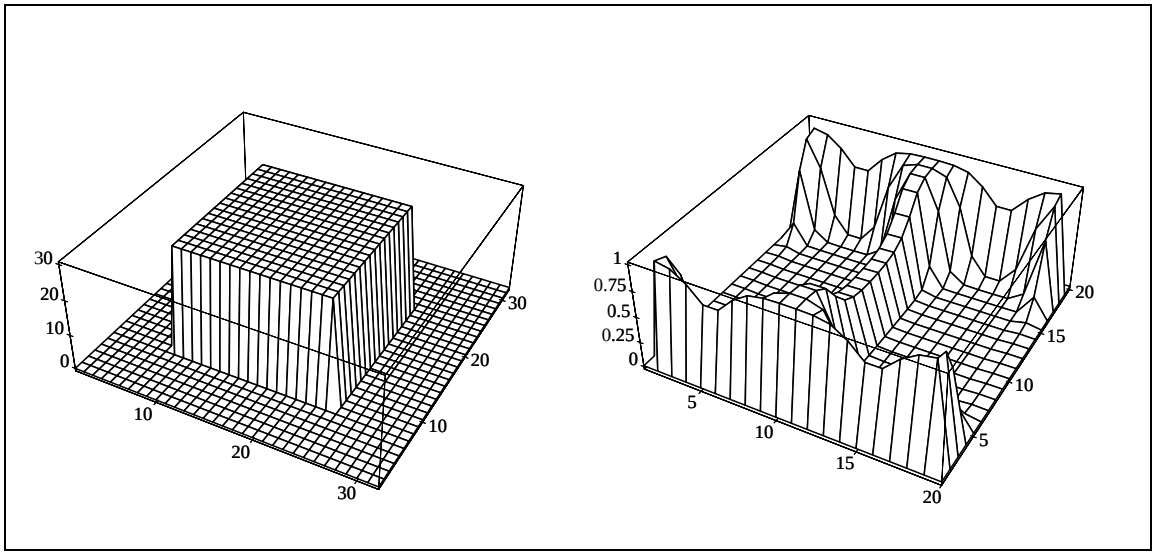

Figure 6.8. Illustration des paramètres définis par les relations 6.36 – 6.40 ($m = 2$). A gauche, sont représentées les données considérées et à droite la fonction régularisante w_{10} calculée. Les discontinuités ne sont pas détectées avec précision et ne permettent pas d'utiliser cette méthodes lorsque les discontinuités sont proches.

et

$$w_{11}(s,r) = \frac{1}{\left(1 + \left(z_{ij} + z_{i+1,j+1} - z_{i,j+1} - z_{i+1,j}\right)^2 / h_s^2 h_r^2\right)^m} \tag{6.40}$$

pour pénaliser les discontinuités de tangente.

Ces formules permettent d'adapter les coefficients de régularisation en fonction de la géométrie de la surface. Cette méthode ne donne pas une localisation précise des discontinuités de la surface dès que celles-ci sont proches. La figure 6.8 représente le tracé de la fonction régularisante w_{10} obtenue à partir d'un exemple synthétique. On remarquera la mauvaise localisation des points de discontinuités de position. Ce manque de précision rend la méthode inutilisable lorsque les contours sont proches.

D'autres auteurs ont également adopté des critères similaires pour le choix des paramètres. Sinha et Schunck [SS89, SS91, Sin91] utilisent un seul paramètre de régularisation indépendamment de la direction considérée pour pénaliser la surface approximante aux points de contour de l'image.

6.5.3 Méthode Proposée

Nous allons déterminer les cinq paramètres de régularisation avec la même méthode que dans le cas des courbes. On reformule donc le problème 2,

Problème 4. Déterminer les paramètres régularisants w_{ij}, $i, j = 0, 1, 2$ tels que

$$\tilde{\rho}(w_{10}, w_{01}, w_{20}, w_{11}, w_{02}) = \tilde{\rho}(\alpha) = \left(\|\nabla P(v)\|^2 - S\right)^2, \tag{6.41}$$

soit minimum, où S est l'erreur d'approximation admise.

Considérons A_α la matrice de rigidité associée aux éléments finis de Bogner-Fox-Schmit et v la décomposition de la solution dans la base de BFS, l'équation d'Euler caractérisant un minimum d'énergie est:

$$A_\alpha(v) = -\nabla P(v), \tag{6.42}$$

où la matrice A_α est définie par:

$$\begin{aligned} A_\alpha v = & -\frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega_{10}^*\Omega_{10}\frac{\partial v}{\partial s}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega_{01}^*\Omega_{01}\frac{\partial v}{\partial r}\right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\Omega_{20}^*\Omega_{20}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) + 2\frac{\partial^2}{\partial s\partial r}\left(\Omega_{11}^*\Omega_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Omega_{02}^*\Omega_{02}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right). \end{aligned} \tag{6.43}$$

En effectuant les mêmes calculs que dans le paragraphe 6.4 on obtient:

$$w_{10}(ih_s, jh_r) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial(\nabla P(v))}{\partial s}\right)_k\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)_i}\left(\nabla P(v)\right)_k\left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_{10}}\right)_k, \tag{6.44}$$

$$w_{01}(ih_s, jh_r) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial(\nabla P(v))}{\partial r}\right)_k\left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)_k}\left(\nabla P(v)\right)_k\left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_{01}}\right)_k, \tag{6.45}$$

$$w_{20}(ih_s, jh_r) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2(\nabla P(v))}{\partial s^2}\right)_k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)_k}\left(\nabla P(v)\right)_k\left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_{20}}\right)_k, \tag{6.46}$$

$$w_{11}(ih_s, jh_r) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2(\nabla P(v))}{\partial s\partial r}\right)_k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s\partial r}\right)_k}\left(\nabla P(v)\right)_k\left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_{11}}\right)_k, \tag{6.47}$$

et

$$w_{02}(ih_s, jh_r) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{\partial^2(\nabla P(v))}{\partial r^2}\right)_k\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right)_k}\left(\nabla P(v)\right)_k\left(A_\alpha\frac{\partial v}{\partial w_{02}}\right)_k, \tag{6.48}$$

où k représente l'élément du vecteur correspondant au nœud (i, j). Les dérivées de la fonction par rapport aux paramètres w_{ij} sont obtenues en résolvant les systèmes linéaires:

$$A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_{10}} = 2\frac{\partial}{\partial s}\left(\Omega_{10}\frac{\partial v}{\partial s}\right), \tag{6.49}$$

$$A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_{01}} = 2\frac{\partial}{\partial r}\left(\Omega_{01}\frac{\partial v}{\partial r}\right), \tag{6.50}$$

$$A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_{11}} = -4\frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left(\Omega_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r}\right), \tag{6.51}$$

$$A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_{20}} = -2\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left(\Omega_{20}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right), \tag{6.52}$$

et

$$A_\alpha \frac{\partial v}{\partial w_{02}} = -2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(\Omega_{02}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\right). \tag{6.53}$$

6.5.4 Résultats Expérimentaux

Nous avons utilisé ces paramètres optimaux dans le cas d'une image synthétique 2-D. Cette image est approximée à l'aide d'un modèle surfacique de la forme $(s, r, v(s, r))$. La figure 6.9 illustre l'approximation de données par les modèles déformables à coefficients constants et la surface obtenue après avoir calculé les paramètres w_{ij} optimaux.

Nous constatons que les discontinuités de l'image ne sont pas reconstruites avec précision car cela nécessiterait d'imposer des discontinuités de la surface en des points particuliers. Ces discontinuités sont définies par le choix des paramètres w_{ij}. Les paramètres optimaux, définis à partir des relations (6.44-6.48), permettent de définir localement ces discontinuités. La figure 6.10, illustre les discontinuités de position en des points particuliers de la surface. Pour des raisons de visualisation des paramètres w_{ij}, les fonctions tracées dans les figures correspondent à $Max(w_{ij}) - w_{ij}$, par conséquent les maxima de la fonction tracée caractérisent les points auxquels on imposera des discontinuités . Les discontinuités de tangente sont imposées par les fonctions w_{11} (figure 6.11) pénalisant les discontinuités de la dérivée seconde croisée, w_{20} et w_{02} (figure 6.12) imposent les discontinuités des dérivées premières.

Une autre illustration du choix des paramètre w_{ij} pour reconstruire les discontinuités présentes dans les données est montrée dans la figure 6.13. Cette figure représente l'approxi-

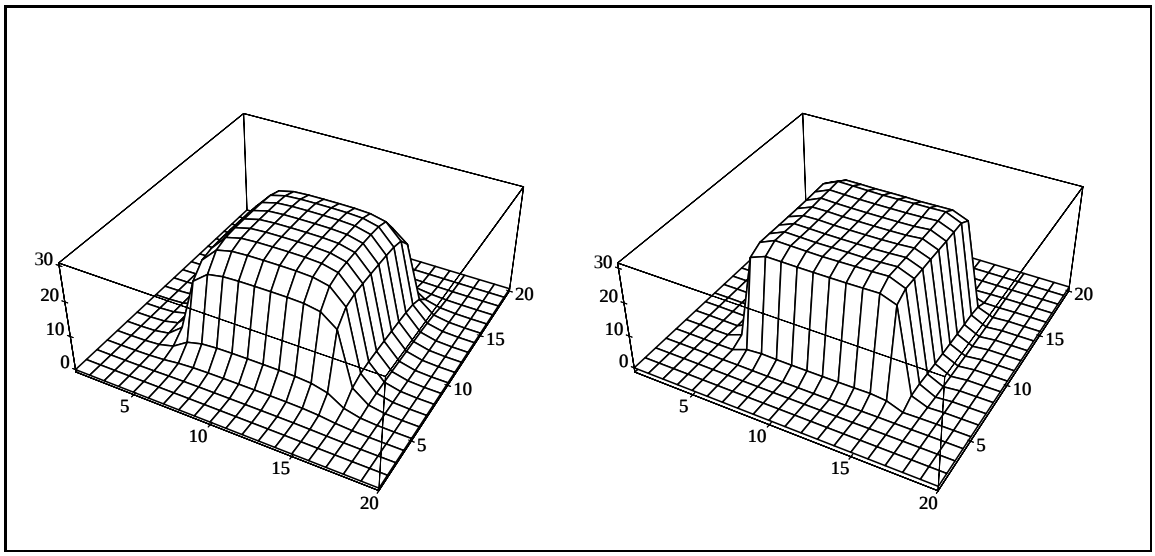

Figure 6.9. Illustration de l'approximation des données par la surface à l'aide du modèle déformable à coefficients constants (à gauche) et à l'aide des fonctions régularisantes tracées dans les figures 6.10, 6.11 et 6.12.

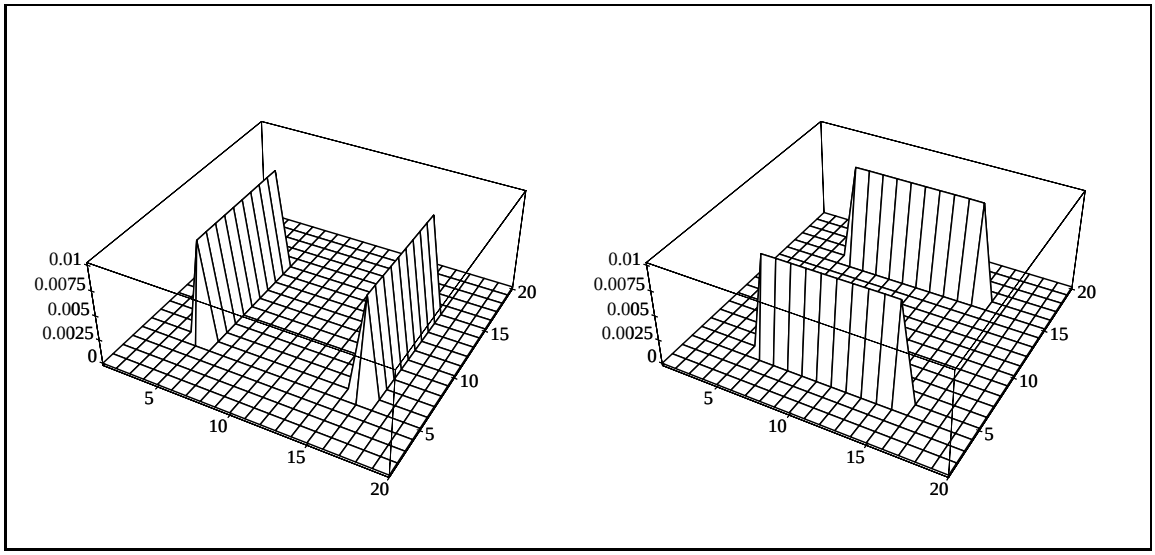

Figure 6.10. Tracé des fonctions de régularisation w_{10} et w_{01}.

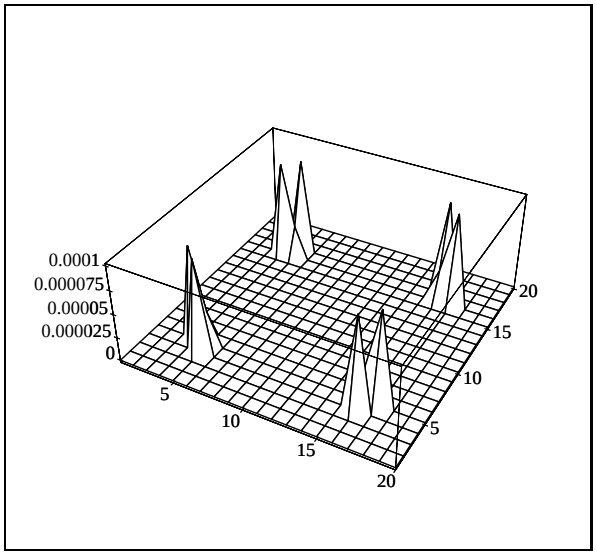

Figure 6.11. Points de discontinuité de la dérivée seconde croisée.

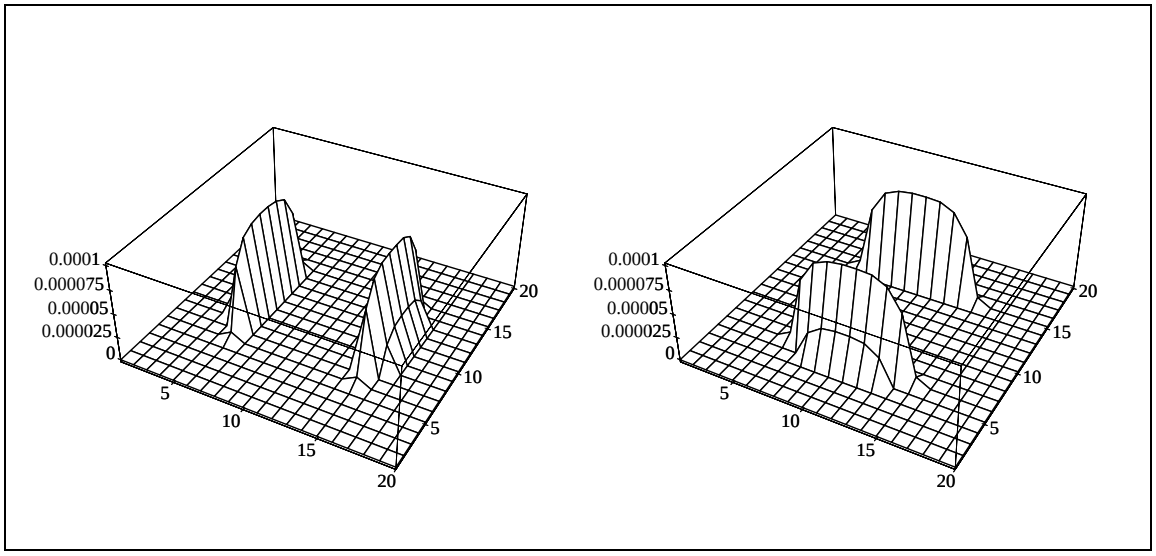

Figure 6.12. Points de discontinuité des dérivées premières.

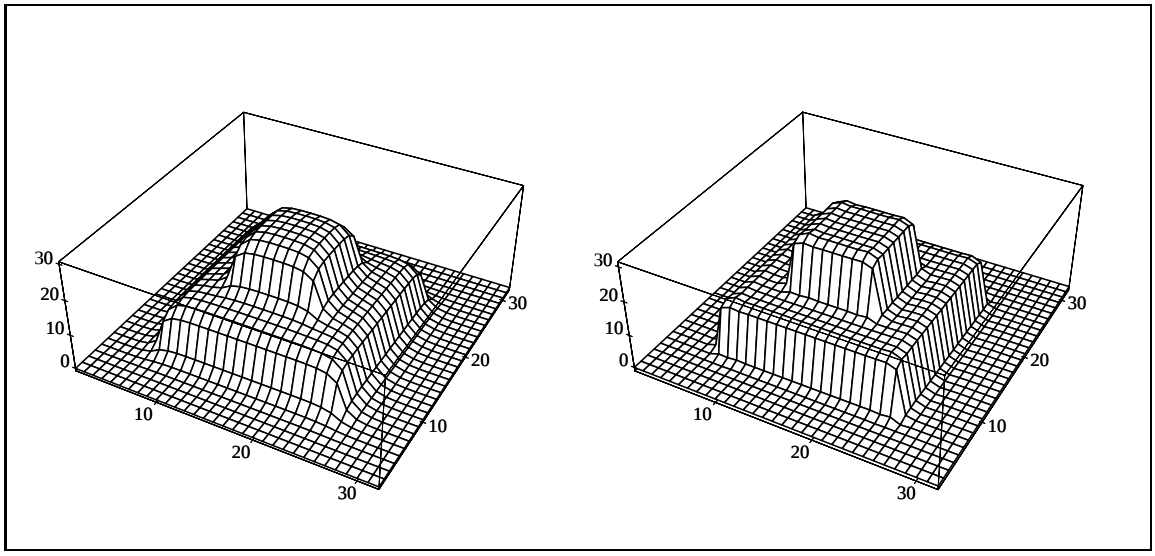

Figure 6.13. Recontruction de la surface à partir des données en considérant des paramètres constants (à gauche) et des paramètres variables prennant en compte la structure des données (à droite).

mation des données à l'aide de paramètres constants et la reconstruction implicite des discontinuités à l'aide des fonctions régularisantes.

La figure 6.14 illustre la définition implicite de ces discontinuités lorsque celles ci ne coïncident pas avec les isoparamétriques de la surface.

6.6 En Résumé

Après avoir donné un aperçu des méthodes de détermination des fonctions régularisantes nous avons proposé un algorithme basé sur la méthode des résidus. Cette méthode permet de définir localement, des discontinuités de position et de tangente, permettant ainsi d'approximer les données tout en prenant en compte leur géométrie. La méthode proposée conjugue à la fois, par le critère défini, la géométrie de la fonction approximante et des données permettant ainsi d'être moins sensible à la présence de bruit dans les images.

Cette méthode semble être une alternative aux différentes méthodes proposées, basées sur des heuristiques ou sur des méthodes géométriques propres à l'interpolation des données.

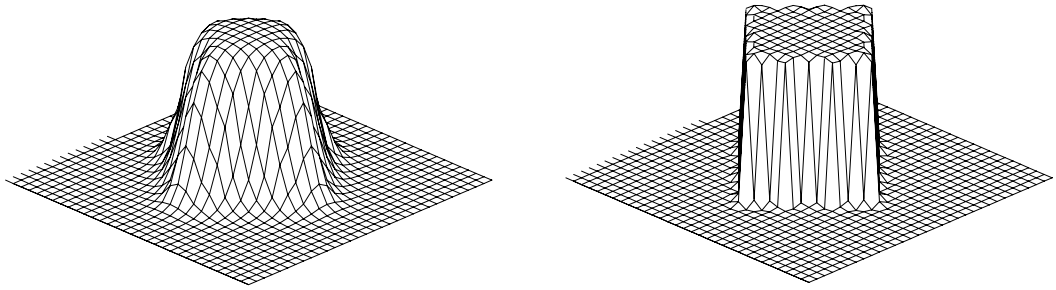

Figure 6.14. Illustration de la reconstruction des données à l'aide de surfaces déformables. Les deux surfaces représentées correspondent à la reconstruction des données à l'aide de paramètres constants et à l'aide de paramètres définis par les relations (6.44–6.48). Dans ce cas les contraintes de discontinuités ne coïncident pas avec les isoparamétriques de la surface.

Cette nouvelle méthode sera complétée dans la suite par une expérimentation et une étude détaillée des paramètres obtenus. Les résultats obtenus sur des exemples synthétiques semble être prometteurs.

Chapitre 7

Conclusion

La détection des contours à l'aide des modèles déformables permet de résoudre certains problèmes rencontrés par les méthodes locales de détection de contours. En effet, les méthodes locales ne permettent pas d'imposer explicitement une régularité aux contours détectés et d'utiliser une estimation a priori des contours.

Au modèle de contours actifs, proposé initialement par Kass *et al* [KWT87b] nous avons apporté quelques modifications qui ont amélioré le modèle. Ces modifications sont essentiellement liées à la résolution du problème de minimisation par un problème variationnel équivalent et sa résolution numérique à l'aide de la méthode des éléments finis conformes. Celle-ci nous a permis d'une part d'évaluer avec précision les forces attirant la courbe vers les points de contours et d'autre part une réduction de la complexité algorithmique due à la description de la courbe à l'aide d'une base de fonctions cubiques par morceaux [CC90].

Cette description des points de contour a également servi à définir une première approche à la reconstruction des contours tridimensionnels. Celle-ci est basée sur l'algorithme NUAGES [Boi88] permettant de reconstruire une surface à partir de ses intersections avec des plans. Nous avons pu ainsi, reconstruire des surfaces à partir des différentes coupes IRM représentant un volume de données [CC90, CC91b].

Une autre application du modèle a été le suivi temporel de structures. Ce suivi permet de caractériser les contours d'un objet se déplaçant dans une séquence d'images représentant un mouvement. Le modèle de contours actifs est initialisé à instant t et la solution obtenue

définit la donnée initiale pour le traitement de l'image à l'instant $t + 1$. Cette méthode a permis d'établir un suivi temporel quasi-automatique des structures en mouvement dans des images échographiques. Mais ce suivi est global et ne permet pas de définir le déplacement de chaque point. Nous avons alors combiné le suivi global défini par les contours actifs et une information géométrique des contours pour établir les déplacements de chaque point appartenant au contour. Ce formalisme nous permet de considérer des mouvements non rigides et de définir un appariement entre les points des deux contours [CAS92, ACH92].

L'utilisation du modèle déformable surfacique pour la segmentation des images 3-D a résolu plusieurs problèmes rencontrés avec la reconstruction des contours de l'image à partir des coupes 2-D. En effet, avec les surfaces déformables nous sommes en mesure d'imposer une homogénéité spatiale à la surface et de reconstruire les contours des objets parallèles aux plans d'acquisition IRM [CCA91b, CC92]. L'utilisation des éléments finis conformes a permis de disposer d'une représentation analytique de la surface et par conséquent des points de contour [CCA91a, CCA92a]. Nous avons utilisé cette description analytique des point de contour pour extraire des invariants géométriques qui permettraient la mise en correspondance de l'objet segmenté avec un atlas numérique [CCA92b]. Ce calcul n'est pas très précis mais donne une caractérisation de la forme de la surface qui pourrait être affinée par d'autres méthodes telles que les B-splines.

Finalement, nous avons consacré le dernier chapitre à l'étude des paramètres de régularisation. Après avoir décrit les méthodes existantes, nous avons proposé une méthode de détermination locale des paramètres pour les courbes et les surfaces, permettant de prendre en compte la géométrie de la courbe ou de la surface et des données. Cette méthode permet une localisation plus précise des discontinuités que les méthodes géométriques proposées par Salkauskas [Sal84] ou Sinha [SS89, SS91].

7.1 Perspectives de Recherche

Le modèle défini précédemment permet de modéliser une grande variété de problèmes rencontrés en traitement d'images médicales. Nous allons nous intéresser dans un proche avenir à la mise en correspondance de structures anatomiques ainsi qu'a la caractérisation

des déformations de ces structures.

7.1.1 Mise en Correspondance Rigide

L'application des modèles déformables aux images nous fournit une représentation géométrique de la structure anatomique apparaissant dans l'image. Cette représentation permet de calculer les caractéristiques de cet objet, principalement des caractéristiques liées à la forme de l'objet. Celles-ci sont en général des caractéristiques différentielles de la surface liées à la notion de courbure (telles que les points elliptiques, hyperbolique, ombiliques etc...). L'avantage de cette approche, liée à la courbure, est l'invariance de ces caractéristiques pour des transformations rigides de l'objet.

Une fois ces caractéristiques extraites sur les deux objets que l'on veut mettre en correspondance, on va définir (à l'aide du potentiel P introduit précédemment) des critères de similarité entre les deux objets.

L'intérêt de cette approche en imagerie médicale est la possibilité de mettre en correspondance des images provenant de différents types d'acquisition, par exemple Imagerie à Résonance Magnétique (IRM) et Scanner, pour mettre en concurrence les avantages et les spécificités de chaque type d'acquisition.

7.1.2 Caractérisation de Mouvements Non Rigides

Par opposition aux mouvements rigides définis par six paramètres représentant la rotation et la translation, les mouvements non rigides ne peuvent être caractérisés par un nombre fini de paramètres sans la définition préalable d'un modèle paramétrique représentant la structure en mouvement. Ce mouvement de l'objet peut être également caractérisé à partir du mouvement de certains points caractéristiques. En imagerie médicale, ces points sont généralement les points de fortes courbures qui possèdent une signification anatomique [Cut89] et par conséquent constituent de bons amers pour l'étude du mouvement. Par conséquent, l'étude des mouvements non rigides ou élastiques est basée sur le calcul des caractéristiques différentielles des objets en mouvement ainsi que la détermination du champ de déplacement de chaque point du contour de l'objet.

Nous avons montré dans le chapitre 3, paragraphe 3.2 que dans le cas des courbes, cette décomposition de l'étude du mouvement en deux phases permettait de déterminer avec une bonne précision les déplacements de chaque point. Nous pensons que la généralisation tridimensionnelle proposée au paragraphe 3.2.7 du chapitre 3 permettrait également l'étude des mouvements des points appartenant à une surface et par conséquent le suivi de structures tridimensionnelles ou la mise en correspondance d'une surface représentant une structure anatomique avec un atlas numérique pour la reconnaissance de structures anatomiques.

Une autre approche consisterait à définir un nouveau champ d'attraction pour les contours déformables qui permettrait à la courbe de détecter la position des contour mais également de posséder en chaque point une courbure précalculée par d'autres méthodes. Ainsi, on caractériserait à la fois les contours et leur géométrie. Ces informations pourraient servir au calcul du déplacement des objets ainsi qu'à l'appariement.

Une fois le champ de déplacement calculé, une décomposition de celui-ci à l'aide d'un nombre fini de primitives est nécessaire pour pouvoir caractériser et comparer différents mouvements du même objet. Une application possible est la classification des mouvements [HP91] à partir d'images echographiques et constituerait une aide au diagnostic de certaines maladies cardio-vasculaires.

Annexe A

L'élément fini de Bogner-Fox-Schmit

Les fonctions de base de l'élément fini de BFS [BFS65, Cia87] sont des polynômes bicubiques. Ils peuvent donc s'écrire à partir d'un produit tensoriel de deux polynômes cubiques définis sur $I\!R$. En effet, en considérant les fonctions de base Φ et Ψ de l'élément fini de Hermite dans $I\!R$ définies par:

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{2}{h^3}x^3 - \frac{3}{h^2}x^2 + 1 & \text{si } x \in [-h, 0] \\ \frac{2}{h^3}x^3 - \frac{3}{h^2} + 1 & \text{si } x \in [0, h] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.1}$$

et

$$\Psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}x^3 + \frac{2}{h}x^2 + x & \text{si } x \in [-h, 0] \\ \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{2}{h}x^2 + x & \text{si } x \in [0, h] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{A.2}$$

les fonctions de base de BFS sont définies par:

$$\varphi(s, r) = \Phi(s)\Phi(r), \tag{A.3}$$

$$\psi(s, r) = \Psi(s)\Phi(r), \tag{A.4}$$

$$\eta(s, r) = \Phi(s)\Psi(r), \tag{A.5}$$

et

$$\zeta(s, r) = \Psi(s)\Psi(r). \tag{A.6}$$

Cette séparation des deux variables de paramétrisation s et r permet une réduction considérable du nombre de multiplications et d'additions nécessaires à l'évaluation de la fonction v_h. A l'aide des équations (A.3–A.6) l'évaluation des fonctions de base nécessite 6 *additions* + 5 *multiplications* + 4 *divisions* au lieu de 8 *additions* + 21 *multiplications* + 8 *divisions*. La fonction v_h est définie par l'équation (4.18) est calculée à partir de l'équation:

$$v_h(s,r) = \sum_{|k-i|<1,|l-j|<1} \left[v_h(a_{kl})\Phi(s) + \frac{\partial v_h}{\partial s}(a_{kl})\Psi(s) \right] \Phi(r) + \left[\frac{\partial v_h}{\partial r}(a_{kl})\Phi(s) + \frac{\partial^2 v_h}{\partial s \partial r}(a_{kl})\Psi(s) \right] \Psi(r).$$

Annexe B

Calcul des matrices de rigidité des modèles déformables

La matrice de rigidité A est obtenue à partir de la forme bilinéaire $a(.,.)$ et de la base d'éléments finis considérée. Elle représente le produit scalaire entre des fonctions de base de l'élément fini caractérisant le problème considéré. Comme la MEF est différente dans le cas 2-D et 3-D nous expliciterons le calcul de la matrice dans chaque cas.

B.1 Modèles Déformables 2-D

La forme bilinéaire $a(.,.)$ est définie par:

$$a(u,v) = \int_\Omega w_1 \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} ds + \int_\Omega w_2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} ds. \tag{B.1}$$

Ainsi en décomposant la solution dans la base d'éléments finis d'Hermite, on a l'identité

$$v_h = \sum_{i=1}^{N} v_h(ih)\Phi_i + v_h'(ih)\Psi_i, \tag{B.2}$$

qui permet d'écrire le problème variationnel discret sous la forme:

$$\forall j = 1,\ldots,N \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{N} v_h(x_i)a(\Phi_i,\Phi_j) + \sum_{i=1}^{N} v_h'(x_i)a(\Psi_i,\Phi_j) = L(\Phi_j) \\ \sum_{i=1}^{N} v_h(x_i)a(\Phi_i,\psi_j) + \sum_{i=1}^{N} v_h'(x_i)a(\Psi_i,\Psi_j) = L(\Psi_j). \end{cases} \tag{B.3}$$

Ce système d'équations, peut s'écrire sous la forme $A.V = L$, où le vecteur $V = (v_h(1), v_h'(1), \ldots, v_h(N), v_h'(N))$ de taille $2N$, représente les degrés de liberté de la solution

dans la base d'éléments finis d'Hermite, A la matrice de rigidité associée à cet élément fini et L le vecteur du champ de force appliqué à la courbe.

La matrice $A = (\tilde{A}_{ij})_{i,j=1,\ldots,N}$ de taille $2N \times 2N$, est symétrique définie positive et tridiagonale par blocs, où

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{pmatrix} a(\Phi_i, \Phi_j) & a(\Phi_i, \Psi_j) \\ a(\Phi_i, \Psi_j) & a(\Psi_i, \Psi_j) \end{pmatrix}$$

et $\tilde{A}_{i,j} = 0$ si $|i-j| > 1$.

En supposant les fonctions w_1 et w_2 constantes par morceaux, en en notant $w_1^{i_m}$ la restriction de w_1 à l'intervalle $[(i-1)h, ih]$ et $w_1^{i_p}$ la restriction à l'intervalle $[ih, (i+1)h]$ (de même pour w_2), le calcul des termes $\tilde{A}_{ij}$ fournit:

$$\tilde{A}_{i,i} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5h}\left(w_1^{i_m} + w_1^{i_p}\right) + \frac{12}{h^3}\left(w_2^{i_m} + w_2^{i_p}\right) & -\frac{1}{10}\left(w_1^{i_m} - w_1^{i_p}\right) - \frac{6}{h^2}\left(w_2^{i_m} - w_2^{i_p}\right) \\ -\frac{1}{10}\left(w_1^{i_m} - w_1^{i_p}\right) - \frac{6}{h^2}\left(w_2^{i_m} - w_2^{i_p}\right) & \frac{2h}{15}\left(w_1^{i_m} + w_1^{i_p}\right) + \frac{4}{h}\left(w_2^{i_m} + w_2^{i_p}\right) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{i,i-1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5h}w_1^{i-1_p} - \frac{12}{h^3}w_2^{i-1_p} & \frac{1}{10}w_1^{i-1_p} + \frac{6}{h^2}w_2^{i-1_p} \\ -\frac{1}{10}w_1^{i-1_p} - \frac{6}{h^2}w_2^{i-1_p} & -\frac{h}{30}w_1^{i-1_p} + \frac{2}{h}w_2^{i-1_p} \end{pmatrix},$$

et

$$\tilde{A}_{i,i+1} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{5h}w_1^{i_p} - \frac{12}{h^3}w_2^{i_p} & \frac{1}{10}w_1^{i_p} + \frac{6}{h^2}w_2^{i_p} \\ -\frac{1}{10}w_1^{i_p} - \frac{6}{h^2}w_2^{i_p} & -\frac{h}{30}w_1^{i_p} + \frac{2}{h}w_2^{i_p} \end{pmatrix}.$$

B.2 Modèles Déformables 3-D

Nous avons établi au chapitre 4, paragraphe 4.3 que la détermination de la surface est faite en résolvant le système linéaire $A \cdot V = L$ où la matrice $A(\tilde{A}_{ij,kl})_{i,k=0,\ldots,Ns-1;j,l=0\ldots Nr-1}$ est tridiagonale par bloc , où

$$\tilde{A}_{ij,kl} = \begin{pmatrix} a(\varphi_{ij}, \varphi_{kl}) & a(\varphi_{ij}, \psi_{kl}) & a(\varphi_{ij}, \eta_{kl}) & a(\varphi_{ij}, \zeta_{kl}) \\ a(\psi_{ij}, \varphi_{kl}) & a(\psi_{ij}, \psi_{kl}) & a(\psi_{ij}, \eta_{kl}) & a(\psi_{ij}, \zeta_{kl}) \\ a(\eta_{ij}, \varphi_{kl}) & a(\eta_{ij}, \psi_{kl}) & a(\eta_{ij}, \eta_{kl}) & a(\eta_{ij}, \zeta_{kl}) \\ a(\zeta_{ij}, \varphi_{kl}) & a(\zeta_{ij}, \psi_{kl}) & a(\zeta_{ij}, \eta_{kl}) & a(\zeta_{ij}, \zeta_{kl}) \end{pmatrix},$$

et $\tilde{A}_{ij,kl} \neq 0$ si $|i-k| < 1$ et $|j-l| < 1$. Les coefficients de la matrice A sont calculés à partir de la forme bilinéaire:

$$a(u,v) = \int_\Omega w_{10}\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s} + w_{01}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial r} + w_{20}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + 2w_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial r}\frac{\partial^2 v}{\partial s \partial r} + w_{02}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}\, dsdr, \quad \text{(B.4)}$$

et de l'expression des fonctions de base de Bogner-Fox-Schmit (A.3–A.6).

Bibliographie

[AB74a] R.S. Andersen and P. Bloomfield. Numerical differentiation procedures for non-exact data. *Numerische Mathematik*, 22:157–182, 1974.

[AB74b] R.S. Andersen and P. Bloomfield. A time series approach to numerical differentiation. *Technometrics*, 16(1):69–75, February 1974.

[ABC+90] N. Ayache, J.D. Boissonnat, L. Cohen, B. Geiger, O. Monga, J. Levy-Vehel, and P. Sander. Steps toward the automatic interpretation of 3-D images. In H. Fuchs K. Hohne and S. Pizer, editors, *Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on 3D Imaging in Medicine*, volume F 60, pages 107–120, Travmunde, June 1990. Springer Verlag.

[ACH92] Nicholas Ayache, Isaac Cohen, and Isabelle Herlin. Medical image tracking. In *Active Vision,* Andrew Blake and Alan Yuille, chapter 17. MIT Press, 1992. December.

[ANW67] L.H. Ahlberg, E.N. Nilson, and J.L. Walsh. *The Theory of Splines and their Applications*. Academic Press, New-York and London, 1967.

[AOS+91] A. Amini, R. Owen, L. Staib, P. Anandan, and J. Duncan. *Non-rigid motion models for tracking the left ventricular wall*. Lecture notes in computer science: Information processing in medical images. Springer-Verlag, 1991.

[Aub84] J.-P. Aubin. *L'Analyse non linéaire et ses motivations économiques*. Masson, Paris, 1984.

[AWJ90] A.A. Amini, T.E. Weymouth, and R. Jain. Using dynamic programming for solving variational problems in vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(9):855–867, September 1990.

[Bar84] B.A. Barsky. Exponential and polynomial methods for applying tension to an interpolating spline curve. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:1–18, 1984.

[BBB87] R. Bartels, J. Beatty, and B. Barsky. *An introduction to splines for use in computer graphics and geometric modeleling*. Morgan Kaufmann publishers, 1987.

[BdB64] G. Birkhoff and Carl de Boor. Error bounds for spline interpolation. *Journal of Math. and Mech.*, 13:827–835, 1964.

[Ber91] M.O. Berger. *Les contours actifs: modélisation, comportement et convergence*. PhD thesis, Institut Polytechnique de Lorraine, Février 1991.

[BFS65] F. K. Bogner, R. L. Fox, and L. A. Schmit. The generation of interelement-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulae. In *Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mech.*, Air Force Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, October 1965.

[Bic41] W.G. Bickley. Formulae for numerical differentiation. *Math. Gaz.*, 25:19–27, 1941.

[BM90] M.O. Berger and R. Mohr. Towards autonomy in active contour models. In *Tenth International Conference on Pattern Recognition*, pages 847–851, Atlantic City, NJ, June 1990.

[Boi88] J. D. Boissonnat. Shape reconstruction from planar cross-sections. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 44:1–29, 1988.

[Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[Can86] John Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(6):679–698, November 1986.

[CAS92] Isaac Cohen, Nicholas Ayache, and Patrick Sulger. Tracking points on deformable objects using curvature information. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 458–466, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.

[CC90] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3-D reconstruction from cross sections. In *IEEE Proceedings of the Third International Conference on Computer Vision*, pages 587–591, Osaka, Japan, December 1990.

[CC91a] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons from 2-D to 3-D. Technical Report 9124, CEREMADE, U.R.A. CNRS 749, Université Paris IX - Dauphine, November 1991. Cahiers de Mathematiques de la Decision.

[CC91b] L.D. Cohen and Isaac Cohen. Using a finite element method for active contour models and 3-D reconstruction from cross sections. In Y.A. Feldman and A. Bruckstein, editors, *Artificial Intelligence and Computer Vision*, pages 237–247. Elsevier Science Publishers B.V., North-Holland, 1991. Also published in the Proceedings of the Seventh Israeli Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision, Tel-Aviv, December 1990.

[CC92] Laurent D. Cohen and Isaac Cohen. Finite element methods for active contour models and balloons from 2-D to 3-D. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 592–598, Urbana Champaign, Illinois., June 1992. To appear in PAMI.

[CCA91a] I. Cohen, L.D. Cohen, and N. Ayache. Segmenting 3-D images with energy minimizing surfaces. In *Proceedings of the Eight Israeli Conference on Artificial Intelligence and Computer Vision*, Tel-Aviv, Israel, December 1991.

[CCA91b] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Introducing new deformable surfaces to segment 3-D images. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 738–739, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[CCA92a] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surface to segment 3-D images and infer differential structures. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 648–652, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.

[CCA92b] Isaac Cohen, Laurent D. Cohen, and Nicholas Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-D images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 56(2):242–263, 1992.

[CCCD92] V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos. A geometric model for active contours in image processing. Technical Report 9210, CEREMADE, U.R.A. CNRS 749, Université Paris IX - Dauphine, 1992. Cahiers de Mathematiques de la Decision.

[Cha61] P.C. Chakravarti. Truncation error in interpolation and numerical differentiation. *Numerische Mathematik*, 3:279–284, 1961.

[Cia85] P. G. Ciarlet. *Introduction à l'analyse Matricielle et à l'Optimisation.* Masson, Paris, 1985.

[Cia87] P. G. Ciarlet. *The finite element methods for elliptic problems.* NORTH-HOLLAND, Amsterdam, 1987.

[Cli74] A.K. Cline. Scalar- and Planar-valued curve fitting using splines under tension. *Communication of the ACM, Numerical Mathematics*, 17(4), April 1974.

[Coh90] Laurent D. Cohen. *Etude des modèles de contours actifs et d'autres techniques de traitement d'Images*. PhD thesis, Université Paris-Sud Orsay, Decembre 1990.

[Coh91] Laurent D. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):211–218, March 1991.

[CS90] J.L. Crowley and P. Stelmaszyk. Measurement and integration of 3-D structures by tracking edge lines. In *Proceedings of the First European Conference on Computer Vision 1990*, pages 269–280, Antibes, France, April 1990. In Lecture Notes in Computer Science: Computer Vision – ECCV90, Springer-Verlag.

[Cul71] Jane Cullum. Numerical differentiation and regularization. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 8(2):254–265, June 1971.

[Cut89] Court B. Cutting. Applications of computer graphics to the evaluation and treatment of major craniofacial malformation. In Jayaram K.Udupa and Gabor T. Herman, editors, *3-D Imaging in Medicine*. CRC Press, 1989.

[CW79] P. Craven and G. Wahba. Smoothing noisy data with spline functions: Estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation. *Numerische Mathematik*, 31:377–403, 1979.

[Dan80] P. E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.

[dB62] Carl de Boor. Bicubic spline interpolation. *Journal of Mathematical Physics*, 41:212–268, 1962.

[dC76] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1976.

[DC87] R. Deriche and J.P. Cocquerez. Extraction de composantes connexes basée sur une détection optimale des contours. In *CESTA*, Paris, 1987.

[Der87] Rachid Deriche. Using canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, pages 167–187, 1987.

[Der89] Rachid Deriche. Fast algorithms for low level vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989.

[DF90] R. Deriche and O. Faugeras. Tracking line segments. In *Proceedings of the First European Conference on Computer Vision 1990*, pages 259–268, Antibes, France, April 1990. In Lecture Notes in Computer Science: Computer Vision – ECCV90, Springer-Verlag.

[dHH87] F.R de Hoog and M.F. Hutchinson. An efficient method for calculating smoothing splines using orthogonal transformations. *Numerische Mathematik*, 50:311–319, 1987.

[DHI91] H. Delinguette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 467–472, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[DOSA91] J.S. Duncan, R.L. Owen, L.H. Staib, and P. Anandan. Measurement of non-rigid motion using contour shape descriptors. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 318–324, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[DS89a] W.-H. Du and F.J.M. Schmitt. Free-form surface modelling using tensor product Bezier patches: A review with new solutions. Technical Report 89 D 014, Telecom Paris, Département Images, October 1989.

[DS89b] W.-H. Du and F.J.M. Schmitt. On the G1 smooth connection between triangular Bernstein-Bezier patches. Technical Report 89 D 012, Telecom Paris, Département Images, October 1989.

[Du88] W.-H. Du. *Etude sur la représentation de surfaces complexes: Application à la reconstruction de surfaces échantillonnées.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Telecom Paris, Octobre 1988. reference: 88 E 014.

[ESA92] M. Etoh, Y. Shirai, and M. Asada. Contour extraction by mixture density description obtained from region clustering. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 24–32, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.

[FL88] P. Fua and Y.G. Leclerc. Model driven edge detection. In *DARPA Image Understanding Workshop*, 1988.

[Fol87a] T. A. Foley. Interpolation with interval and point tension controls using cubic weighted ν-Splines. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 13(1):68–96, March 1987.

[Fol87b] T.A. Foley. Weighted bicubic spline interpolation to rapidly varying data. *A.C.M. Transaction on Graphics*, 6(1):1–18, January 1987.

[GA92] A. Guéziec and N. Ayache. Smoothing and matching of 3D-space curves. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 620–629, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.

[Gir87] G. Giraudon. An efficient edge chaining algorithm. In *Fifth Scandinavian Conference on Image Analysis*, Stockholm, June 1987.

[Gir88] D. Girard. Détection de discontinuités dans un signal (ou une image) par Inf-Convolution spline et validation croisée: Un algorithme rapide non paramétré. Technical Report RR 702-I-M, IMAG-TIM3, Janvier 1988.

[Gor91] Gaile G. Gordon. Face recognition from depth and curvature. In *Proceedings SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision*, San Diego, CA, July 1991.

[Gri83] W.E.L. Grimson. An implementation of a computational theory of visual surface interpolation. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 22:39–69, 1983.

[HA92] I.L. Herlin and N. Ayache. Features extraction and analysis methods for sequences of ultrasound images. In *Proceedings of the Second European Conference on Computer Vision 1992*, pages 43–57, Santa Margherita Ligure, Italy, May 1992.

[HdH85] M.F. Hutchinson and F.R de Hoog. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*, 47:99–106, 1985.

[Hil84] Ellen Catherine Hildreth. *The Measurement of Visual Motion*. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1984.

[HP91] B. Horowitz and A. Pentland. Recovery of non–rigid motion and structure. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 325–330, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[Ino86] H. Inoue. A least-squares smooth fitting for irregularly spaced data: Finite-element approach using the cubic B-spline basis. *Geophysics*, 51(11):2051–2066, November 1986.

[Kra63] H.C. Kranzer. An error formula for numerical differentiation. *Numerische Mathematik*, 5:439–442, 1963.

[KWT87a] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1987.

[KWT87b] Michael Kass, Andrew Witkin, and Demetri Terzopoulos. Snakes: Active contour models. In *Proceedings of the First International Conference on Computer Vision*, pages 259–268, London, June 1987.

[Lau] P.J. Laurent. La méthode de validation croisée. manuscript.

[Lau72] P.J. Laurent. *Approximation et Optimisation*. Hermann, Paris, 1972.

[LC91a] F. Leitner and P. Cinquin. Complex topology 3D-objects segmentation. In *Proceedings of SPIE*, Boston, November 1991.

[LC91b] F. Leitner and P. Cinquin. Dynamic segmentation: Detecting complex topology 3D-object. In *Proceedings of International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 295–296, Orlando, Florida, November 1991.

[Lee91] Simon Lee. *Visual Monitoring of Glaucoma*. PhD thesis, Robotics Research Group, Department of Engineering Science, University of Oxford, 1991.

[LL67] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*. MIR, Moscou, 1967.

[LL86] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity*. Pergamon Press, Oxford, 1986.

[LMLC91] F. Leitner, I. Marque, S. Lavallée, and P. Cinquin. Dynamic segmentation: Finding the edges with snake splines. In P.J. Laurent, A. Le Méhauté, and L.L. Schumaker, editors, *Curves and Surfaces*, pages 279–284. Academic Press, Boston, 1991.

[LSM91] L. Liu, B.G. Schunck, and C. Meyer. Optimal contour approximation by deformable piecewise cubic splines. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 638–643, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[MAS91] O. Monga, N. Ayache, and P. Sander. From voxel to curvature. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 644–649, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[MBF92] Olivier Monga, Serge Benayoun, and Olivier D. Faugeras. Using third order derivatives to extract ridge lines in 3-D images. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, Urbana Champaign, June 1992.

[MD89] Olivier Monga and Rachid Deriche. 3-D edge detection using recursive filtering. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.

[MDMC90] Olivier Monga, Rachid Deriche, Gregoire Malandain, and Jean-Pierre Cocquerez. Recursive filtering and edge closing: two primary tools for 3-D edge detection. In *First European Conference on Computer Vision (ECCV),*, Antibes, France, April 1990.

[Mor84] V.A. Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems.* Springer-Verlag, New-York, 1984.

[MSMM90] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models: Overview, implementation and applications. In *System, Man and Cybernetic*, pages 194–199, 1990.

[MT91] Dimitri Metaxas and Demetri Terzopoulos. Constrained deformable superquadrics and nonrigid motion tracking. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 337–343, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991. IEEE Computer Society Conference.

[Nob87] J. Alison Noble. Finding corners. In *Proceedings of Alvey Vision Conference*, pages 267–274, June 1987.

[OS88] S. Osher and J.A. Sethian. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *J. of Comput. Physics*, 79:12–49, 1988.

[Phi61] David L. Phillips. A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *J. Assoc. Comput. Mach.*, 9:84–97, 1961.

[PS91] Alex Pentland and Stan Sclaroff. Closed-form solutions for physically based shape modelling and recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-13(7):715–729, July 1991.

[PVY85] T. Poggio, H. Voorhees, and A. Yuille. A regularized solution to edge detection. Technical Report A.I. Memo 833, Massachusetts Institute of Technology, May 1985.

[Rei67] C.H. Reinsch. Smoothing by spline functions I. *Numerische Mathematik*, 10:177–183, 1967.

[Rei71] C.H. Reinsch. Smoothing by spline functions II. *Numerische Mathematik*, 16:451–454, 1971.

[RMM+90] J.M. Rocchisani, G. Malandain, O. Monga, I. Cohen, E. Mousseaux, and J. Bittoun. Segmentation dynamique en imagerie cardiaque. In *Congrés sur la recherche en imagerie médicale*, Bordeaux, Octobre 1990.

[Ron92] R. Ronfard. Local region-based principles and heuristics for active contour modeling. Technical Report 92 D 006, Telecom Paris, Département Images, March 1992.

[RP91] Nicolas Rougon and Françoise Prêteux. Deformable markers: Mathematical morphology for active contour models control. In *SPIE, Vol. 1568 Image Algebra and Morphological Image Processing II*, 1991.

[RT83] P.A. Raviart and J.M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Masson, Paris, 1983.

[Sal60] H.E. Salzer. Optimal points for numerical differentiation. *Numerische Mathematik*, 2:214–227, 1960.

[Sal63] H.E. Salzer. Equally-weighted formulas for numerical differentiation. *Numerische Mathematik*, 4:381–392, 1963.

[Sal84] K. Salkauskas. C^1 splines for interpolation of rapidly varying data. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14(1):239–250, Winter 1984.

[Sch64] I.J. Schoenberg. Spline functions and the problem of graduation. *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.*, 52:947–950, 1964.

[Sch66] Daniel G. Schweikert. An interpolation curve using a spline in tension. *Journal of Mathematical Physics*, 45(3):312–317, September 1966.

[Sch76] L.L. Schumaker. Fitting surfaces to scattered data. In G.G. Lorentz, C.K. Chui, and L.L. Schumaker, editors, *Approximation Theory II*, pages 203–268. Academic Press, London and Orlando, 1976.

[Sec65] Don Secrest. Error bounds for interpolation and differentiation by the use of spline functions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 2:440–447, 1965.

[Sin91] S. Sinha. *Surface Reconstruction in Computer Vision*. PhD thesis, University of Michigan, 1991.

[SS89] S. Sinha and B.G. Schunck. Discontinuity preserving surface reconstruction. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 229–234, San-Diego, June 1989.

[SS91] S. Sinha and B.G. Schunck. Surface approximation using weighted splines. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 44–49, Lahaina, Maui, Hawaii, June 1991.

[SZ90] Peter T. Sander and Steven W. Zucker. Inferring surface trace and differential structure from 3-D images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12:833–854, september 1990.

[TA74] A. Tikhonov and V. Arsenine. *Méthodes de Résolution de Problèmes Mal Posés*. MIR, Moscou, 1974.

[Ter86a] Demetri Terzopoulos. Image analysis using multigrid relaxation methods. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(2):129–139, March 1986.

[Ter86b] Demetri Terzopoulos. Regularization of inverse visual problems involving discontinuities. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(4):413–424, July 1986.

[Ter88] Demetri Terzopoulos. The computation of visible-surface representations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-10(4):417–438, July 1988.

[TP86] Vincent Torre and Tomaso Poggio. On edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-8(2):147–163, March 1986.

[TPBF87] D. Terzopoulos, J. Platt, A. Barr, and K. Fleischer. Elastically deformable models. In *Proceedings of SIGGRAPH '87*, pages 205–214, Anaheim, July 1987.

[TWK88] Demetri Terzopoulos, Andrew Witkin, and Michael Kass. Constraints on deformable models: recovering 3-D shape and nonrigid motion. *AI Journal*, 36:91–123, 1988.

[Vas70] V.V. Vasin. Relationship of several variational methods for the approximate solutions of ill-posed problems. *Math. Notes*, 7(3):161–166, 1970.

[Wah75] G. Wahba. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik*, 24:383–393, 1975.

[Wah77] G. Wahba. Pratical approximate solutions to linear operator equations when the data are noisy. *SIAM J. Numer. Anal.*, 14(4):651–667, September 1977.

[Wah84] G. Wahba. Surface fitting with scattered noisy data on euclidean D-space and on the sphere. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 14(1):281–299, Winter 1984.

[Wol71] S. Wold. Estimation of activation parameters from one kinetic experiment (vary-temp method). error analysis and revised computer program. *Acta. Chem. Scand.*, 25:336–339, 1971.

[WR71] J.H. Wilkinson and C. Reinsch. *Linear Algebra*. Springer Verlag, Berlin, 1971.

[WS90] D.J. Williams and M. Shah. A fast algorithm for active contours. In *IEEE Proceedings of the Third International Conference on Computer Vision*, pages 592–595, Osaka, Japan, December 1990.

[YCH89] A.L. Yuille, D.S. Cohen, and P.W. Hallinan. Feature extraction from faces using deformable templates. In *IEEE Proceedings of Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, June 1989.

[ZDDI88] S.W Zucker, C. David, A. Dobbins, and L. Iverson. The organization of curve detection: Coarse tangent fields and fine spline coverings. Technical report, Computer Vision and Robotics Laboratory, McGill Research Centre for Intelligent Machines, May 1988.

[ZH81] S.W. Zucker and R.M. Hummel. A three-dimensional edge operator. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3(3):324–331, May 1981.

Liste des Figures

2.1 Illustration de la non convexité du potentiel P extrait de l'image; sont représentés à gauche l'image considérée, et à droite le potentiel P associé. . 11

2.2 Représentation des deux fonctions de base de l'élément fini de Hermite dans $I\!R$. 15

2.3 Illustration des instabilités du modèle de contour actifs en considérant le potentiel d'attraction $P(i,j) = -\left|\nabla\mathcal{I}(i,j)\right|^2$. Cette figure représente deux itérations successives du schéma de résolution (2.19). 17

2.4 Exemple de segmentation d'une image IRM, segmentation de la paroi interne du ventricule gauche obtenue à partir de la condition initiale (6 points) fournie par l'utilisateur. 19

2.5 Evolution de la courbe sous l'action de la force d'expansion et d'attraction vers les contours de la paroi interne du ventricule gauche. 21

2.6 Illustration de la méthode proposée par Delinguette *et al* [DHI91]. **(a)** Tracé du contour à détecter (en pointillé) et de la courbe initiale (en noir), l'attraction de la courbe par les points de contour dont la courbure est extrémale est représentée dans la figure **(b)**. La courbe obtenue permet une évaluation plus précise de la position des points de contour. L'utilisation d'une force d'attraction classique ne permet pas une reconstruction fiable des points de contour **(c)**. 22

3.1 Représentation de la paroi interne du ventricule droit. 30

3.2 Représentation de la paroi interne du ventricule gauche. 31

3.3 Suivi des contours de la valve mitrale dans une séquence échographique [HA92]. 33

3.4 Exemple d'extraction des contours à l'aide des contours actifs. A gauche; initialisation des contours actifs et le résultat obtenu à droite. 38

3.5 Représentation 3-D des voisinages de recherche pour la détermination de l'estimation initiale f_0. 42

3.6 Illustration d'un cas où la méthode de détermination de f_0 à partir d'une recherche locale [DOSA91] fournit un résultat erroné. En haut, représentation et tracé de f_0, en bas, la solution correspondante. Les tracés des fonctions correspondent l'estimation initiale f_0 et la solution obtenue f. Ils représentent pour chaque abscisse s_i le point $s'_i = f(s_i)$ auquel il est apparié. 43

3.7 Exemple de détermination de l'ensemble S_i à l'aide de l'abscisse curviligne et d'une méthode locale. La solution obtenue met bien en correspondance les points de courbure proche tout en assurant un champ de déplacement régulier. 44

3.8 Le rectangle (en gris) subit une transformation non rigide. Le calcul de l'estimation initiale ainsi que la solution obtenue sont représentées. On remarquera la précision de la mise en correspondance des points de courbure similaire. 48

3.9 Calcul du champ de déplacement entre deux contours. Le second (en noir) correspond à une transformation non rigide du premier (en gris). La mise en correspondance des 4 points caractéristiques de l'ellipse est établie. 49

3.10 Représentation de la condition initiale f_0 bruitée à l'aide d'un bruit blanc gaussien. 50

3.11 Champ de déplacement obtenu en considérant la condition initiale bruitée de la figure 3.10. 50

3.12 Suivi de points à l'aide de la courbure dans une séquence d'images temporelles. Images $1 - 8$ 52

3.13 Images $9 - 17$ 53

3.14 Images $17 - 25$ 54

3.15 Images $25 - 29$ 55

4.1 Illustration du maillage du domaine Ω et du support des fonctions de base au nœud a_{ij}. 65

4.2 Représentation des quatre fonctions de base de l'élément fini de Bogner - Fox - Schmit. 67

4.3 Illustration de la prise en compte de la totalité des points contenus dans l'ensemble $v([(i-1)h_s,(i+1)h_s] \times [(j-1)h_r,(j+1)h_r])$ pour le calcul du vecteur L. 70

4.4 Représentations de quelques intersections successives de la surface initiale (en gris) avec les plans correspondants de l'image de contours (en noir). . . 73

4.5 Intersection de la surface obtenue avec les images de contour. 73

4.6 Représentation de la surface et de quelques intersections avec les plans images. 74

4.7 Quelques intersections de la condition initiale définie par l'utilisateur (en gris) avec l'image de contour. 75

4.8 Intersections de la surface obtenue avec les images de contours correspondants. 76

4.9 Représentation de la surface interne du ventricule gauche. 76

4.10 Superposition de l'image de la vertèbre avec quelques intersections de la surface initiale. 77

4.11 Solution obtenue par l'algorithme après 40 itérations du schéma (4.21). . . 77

4.12 Une représentation en fil de fer de la surface de la vertèbre. 78

4.13 Quelques intersections de la surface initiale avec les plans images IRM. . . 78

4.14 Illustration de l'intersection de la surface avec des images dans des directions orthogonales. 79

4.15 Représentation tridimensionnelle de la surface. 80

4.16 Surface obtenue sur un autre volume de données. 81

4.17 Représentation tridimensionnelle de la surface. 82

4.18 Evolution de la surface "tombant" sur les points de contour correspondant au visage dans une image IRM de la tête. 83

5.1 Représentations de la plus grande courbure principale en chaque point de la surface. Les régions sombres correspondent aux points de forte courbure et les régions claires aux points de faible courbure. Cette information géométrique permet de caractériser certaines parties du visage telles que les arêtes du nez et les sourcils. 90

5.2 Une représentation de l'approximation des données (à gauche) ainsi que la courbure principale maximale de la surface (à droite). 93

5.3 Représentation des données bruitées ($\sigma^2 = 0.01$). 93

5.4 Représentation de l'approximation des données bruitées ainsi que le calcul de la courbure principale maximale en chaque point de la surface, sans la prise en compte de la normale à la surface. 94

5.5 Approximation des données et des normales pour le calcul de la surface et de la courbure principale maximale 95

6.1 Solution obtenue par le modèle déformable avec les paramètres constants $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$. La courbe obtenue (en gris) ne parvient pas à détecter avec précision les coins existants dans les contours (en noir). 110

6.2 Tracé de la fonction ρ_α, pour les paramètres $w_1 = h^2$ et $w_2 = h^3$. 110

6.3 Tracés des fonctions $\frac{\partial v}{\partial w_1}$ et $\frac{\partial v}{\partial w_2}$ obtenues en résolvant les systèmes linéaires (6.22) et (6.23). 111

6.4 Tracés des fonctions régularisantes w_1 et w_2. Ces fonctions sont calculées séparement pour chaque variable x et y de la courbe. 112

6.5 Courbes obtenues avec les paramètres w_1 et w_2 calculés. La première solution a été obtenue en reparamétrant la courbe par l'abscisse curviligne à chaque itération et la seconde a été obtenue sans reparamétrisation. 112

6.6 Détermination des paramètres w_1 et w_2, optimaux à partir de données bruitées. A gauche, la courbe obtenue avec des paramètres constants et à droite la courbe obtenue avec des paramètres variables. 113

6.7 Une représentation de la fonction de pénalité $\mathcal{P}_m$ pour $m = 1, 2$ et 3. 116

6.8 Illustration des paramètres définis par les relations 6.36 – 6.40 ($m = 2$). A gauche, sont représentées les données considérées et à droite la fonction régularisante w_{10} calculée. Les discontinuités ne sont pas détectées avec précision et ne permettent pas d'utiliser cette méthodes lorsque les discontinuités sont proches. 117

6.9 Illustration de l'approximation des données par la surface à l'aide du modèle déformable à coefficients constants (à gauche) et à l'aide des fonctions régularisantes tracées dans les figures 6.10, 6.11 et 6.12. 120

6.10 Tracé des fonctions de régularisation w_{10} et w_{01}. 120

6.11 Points de discontinuité de la dérivée seconde croisée. 121

6.12 Points de discontinuité des dérivées premières. 121

6.13 Recontruction de la surface à partir des données en considérant des paramètres constants (à gauche) et des paramètres variables prennant en compte la structure des données (à droite). 122

6.14 Illustration de la reconstruction des données à l'aide de surfaces déformables. Les deux surfaces représentées correspondent à la reconstruction des données à l'aide de paramètres constants et à l'aide de paramètres définis par les relations (6.44–6.48). Dans ce cas les contraintes de discontinuités ne coïncident pas avec les isoparamétriques de la surface. 123