HAL
open science

Modélisation, déformation et reconnaissance d'objets tridimensionnels à l'aide de maillages simplexes

Hervé Delingette

To cite this version:

Hervé Delingette. Modélisation, déformation et reconnaissance d'objets tridimensionnels à l'aide de maillages simplexes. Modélisation et simulation. Ecole Centrale Paris, 1994. Français. NNT : . tel-00632191

HAL Id: tel-00632191

https://theses.hal.science/tel-00632191

Submitted on 13 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée pour obtenir le titre de Docteur

de l'Ecole Centrale de Paris

Spécialité : Génie des systèmes

Hervé DELINGETTE

MODELISATION, DEFORMATION ET RECONNAISSANCE D'OBJETS TRIDIMENSIONNELS A L'AIDE DE MAILLAGES SIMPLEXES

Nicholas Ayache	Directeur
Claude Puech Philippe Cinquin	Rapporteurs
Sabine Coquillart Takeo Kanade François Clément Francis Schmitt	Examinateurs

Table des matières

Partie I Introduction

1 Introduction **3**

1.1 Cadre Général 3

1.2 Approche du problème 6

1.3 Principales Contributions 9

Partie II Propriétés topologiques, géométriques et physiques des maillages simplexes

2 Définition et propriétés topologiques des maillages simplexes **15**

2.1 Maillage simplexe 16

2.1.1 Rappel sur les solides 16

2.1.2 Définition 19

2.2 Dualité entre les maillages simplexes et les solides 20

2.3 Orientation des maillages simplexes 27

2.4 Structure des maillages simplexes 32

2.4.1 1-Maillage Simplexe 32

2.4.2 2-Maillage Simplexe 33
2.4.3 3-Maillage Simplexe 38
2.5 Contours 40
2.6 Opérations topologiques sur les maillages simplexes 42
2.6.1 1-Maillage Simplexe 44
2.6.2 2-Maillage Simplexe 45
2.6.3 Opérations sur les 3-Maillage simplexes 56
2.7 Représentation des maillages simplexes 58

3 Géométrie des maillages simplexes 63
3.1 Géométrie des 1-maillages simplexes 65
3.1.1 Géométrie des courbes planes 65
3.1.2 Géométrie des 1-maillages simplexes plans 67
3.1.3 Géométrie des courbes gauches 72
3.1.4 Géométrie des 1-maillages simplexes de $\mathbb{R}^3$ 74
3.2 Géométrie des 2−Maillages Simplexes 76
3.2.1 Géométrie des surfaces tridimensionnelles 76
3.3 Géométrie des 2-maillages simplexes de $\mathbb{R}^3$ 81
3.3.1 Angle Simplexe 81
3.3.2 Propriété de la sphère minimale 84
3.3.3 Courbure moyenne discrète 88
3.3.4 Maillage simplexe sur une surface de $\mathbb{R}^3$ 89
3.3.5 Coefficients métriques et représentation des 2− maillages simplexes 102
3.3.6 Maillages simplexes et Triangulations 104
3.4 Géométrie des k-maillages simplexes de $\mathbb{R}^{k+1}$ 107
3.4.1 Angle Simplexe et Courbure moyenne 107
3.4.2 Représentation intrinsèque des k-maillages 108

4 Regularizing forces applied on simplex meshes 109
4.1 Regularization and Stabilizing Functionals 110
4.2 Properties of Stabilizers 114
4.3 Physically Based Smoothness Functionals 116

4.3.1 Elastic Energy 117
4.3.2 Mechanical Spline Energy 117
4.3.3 Soap film Energy 119
4.3.4 Bending Energy 121
4.4 Quadratic Smoothness Measure 121
4.4.1 Definition 121
4.4.2 Shrinking Effect 123
4.4.3 Tikhonov Stabilizers 123
4.4.4 Harmonic Functions 127
4.4.5 Invariance of Tikhonov Stabilizers 129
4.5 Differential stabilizers 130
4.5.1 Definition of the stabilization framework 130
4.5.2 Controlled-scale linear differential stabilizers 132
4.5.3 Intrinsic stabilizers of planar curves 137
4.5.4 Discretization 139
4.5.5 Shape constraints 140
4.6 Regularizing forces on simplex meshes 142
4.7 Internal Forces on 1-simplex meshes of $\mathbb{R}^2$ 144
4.8 Internal Forces on 1-simplex meshes of $\mathbb{R}^3$ 145
4.9 Internal Forces on 2-simplex meshes of $\mathbb{R}^3$ 147
4.10 Boundary conditions between contours and 2-simplex meshes 149

Partie III Modélisation et Reconstruction de Surfaces

5 Modélisation et reconstruction à partir de maillages simplexes 157
5.1 Équation d'évolution 158
5.2 Contraintes externes de déformation 159
5.2.1 Contraintes définies par l'utilisateur 159
5.2.2 Contraintes associées à des données tridimensionnelles 160
5.3 Reconstruction d'images tridimensionnelles 166
5.4 Adapatation topologique des maillages simplexes 169
5.4.1 Adaptation du nombre de bords d'un maillage 169
5.4.2 Adaptation du genre d'un maillage 172

5.5 Adaptation géométrique des maillages simplexes 173
5.5.1 Adaptation spatiale à la courbure 173
5.5.2 Raffinement des maillages simplexes 177
5.6 Résultats Expérimentaux 182
5.6.1 Modélisation avec des maillages simplexes 182
5.6.2 Images de profondeur structurées 183
5.6.3 Images non structurées 187
5.6.4 Images volumiques 191

Partie IV Reconnaissance de forme

6 Reconnaissance de forme 197
6.1 Introduction et relations avec les travaux précédents 198
6.2 Représentation d'objets à l'aide de SAI 202
6.2.1 Représentation des contours de $\mathbb{R}^2$ 202
6.2.2 Représentation des surfaces 205
6.3 Recalage rigide utilisant l'image simplexe 208
6.3.1 Comparaison des SAIs 208
6.3.2 Traitement des occultations 214
6.3.3 Détermination de la transformation rigide 218
6.4 Résultats de recalage rigide 221
6.4.1 Recalage de deux modèles complets 221
6.4.2 Recalage avec une vue partielle d'un objet 222
6.4.3 Recalage avec un objet occulté 227
6.5 Performances de l'algorithme de recalage 230
6.6 Conclusion 233

Partie V Conclusion

7 Conclusion et Perspectives 239
7.1 Segmentation d'images volumiques 239
7.2 Maillages simplexes volumiques 240

Bibliographie 245

Partie I

Introduction

Chapitre 1

Introduction

1.1 Cadre Général

Le domaine dans lequel se situe ce travail est celui de la modélisation et de l'interprétation d'images. De manière générale, la modélisation constitue une étape essentielle dans le traitement d'images, puisqu'elle consiste à transformer des données provenant de capteurs, c'est-à-dire les images du monde réel, en une information sémantiquement riche qui est un modèle du monde réel. Ce modèle est utilisé par des modules de haut-niveau permettant la visualisation, l'interprétation ou encore la simulation du monde réel (voir figure 1.1).

Un des axes principaux de recherche en vision par ordinateur est de déterminer "le modèle idéal" permettant une interprétation efficace des images, sans restriction sur la généralité du monde observé. L'existence d'un tel modèle reste hypothétique, malgré les propositions de David Marr dans son livre "Vision"[Mar82] sur l'analyse hiérarchique ("bottom-up") des images. Par contre, de nombreux modèles ont été proposés afin de résoudre des problèmes spécifiques de la vision par ordinateur.

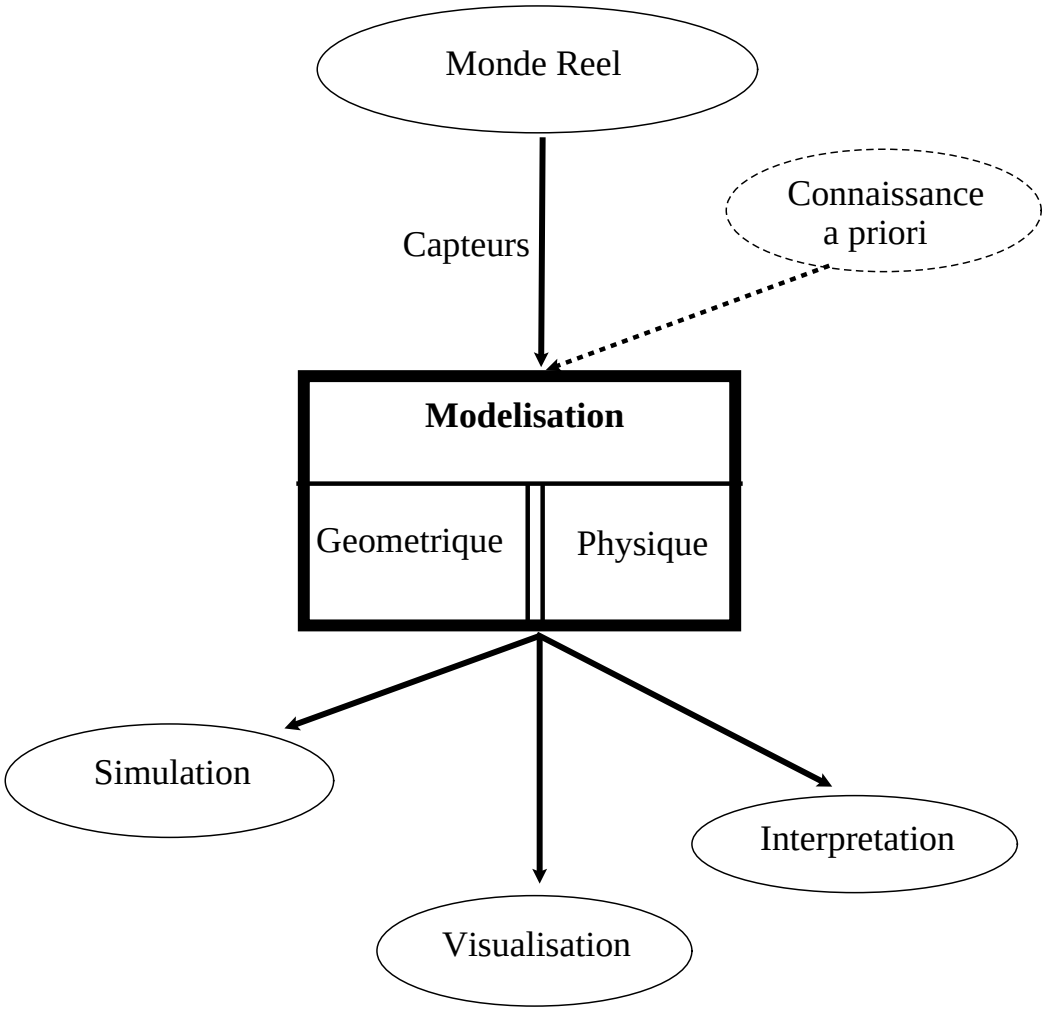


Fig. 1.1: La modélisation est au centre des problèmes de la vision artificielle.

Les travaux présentés dans cette thèse visent à introduire un modèle géométrique et physique d'objets. Ce modèle, appelé *maillage simplexe* est particulièrement bien adapté pour réaliser deux tâches de haut-niveau :

Simulation du monde réel Les maillages simplexes peuvent modéliser les caractéristiques géométriques et physiques des objets.

Reconnaissance de forme La forme de deux maillages simplexes peut être facilement comparée.

La modélisation comporte deux aspects distincts : la segmentation et la reconstruction. La segmentation extrait de l'image des entités géométriques minimales telles que les contours. Pour cela, différentes méthodes de seuillage sont utilisées pour extraire les extrema locaux de la norme du gradient[Can86][Der87]. La phase de reconstruction tend à créer une représentation de courbes, de surfaces ou de volumes qui se définissent à partir d'un ensemble de ces entités géométriques minimales.

Il apparaît que ces deux tâches sont extrêmement difficiles à résoudre notamment en raison de la médiocre qualité du signal acquis. Il est étonnant de constater l'énorme disparité existant entre les performances de l'homme et de la machine à ce sujet. On peut attribuer en grande partie, l'avantage de l'homme sur la machine à la connaissance générale et spécifique qu'il a de la scène observée. C'est cette connaissance a priori du monde qu'il est nécessaire d'introduire dans la modélisation pour la rendre performante. Reste à prendre en compte le paradoxe suivant : la quantité de connaissance a priori que nécessite un système de modélisation en augmente la performance mais elle en diminue la généralité d'application.

L'une des raisons du succès rencontré par la méthode des contours et des surfaces déformables est qu'ils autorisent un compromis acceptable entre la quantité de connaissance a priori sur l'image et la généralité de l'algorithme. En effet, des contraintes faibles ("weak constraints") sont appliquées sur les courbes ou surfaces ou bien en terme de régularité ou encore en terme de proximité de forme. Ces seules contraintes combinées à l'information extraite de l'image suffisent bien souvent à obtenir un modèle de l'objet.

Le concept de contour actif ou "snakes" a été inventé par Kaas, Witkin et Terzopoulos[KWT88]. Il est été ensuite étendu aux surfaces cylindriques ayant un

axe de symétrie[TWK87], puis aux surfaces de topologie sphérique [DHI91b]. Laurent et Isaac Cohen[CC90] ont introduit la méthode des éléments finis pour obtenir une représentation géométrique continue des modèles déformables. Metaxas[MT91] *et al*utilisent une représentation à la fois globale et locale d'une surface en définissant une surface spline déformable sur une superquadrique également déformable. Bardinet *et al*[BCA94a] utilise le principe des déformations libres, pour représenter la déformation d'une superquadrique. Menet[MSMM90] utilise une base de B-spline pour représenter le contour déformable. Les surfaces B-Splines déformables ont ensuite été utilisées par Guéziec[Gue93] et Leitner[LC91]. L'adaptativité des modèles déformables à la courbure a été d'abord introduite par Weiss[Wei90] pour les contours puis par Terzopoulos et Vasilescu pour les surfaces [TV91][VT92]. L'adaptation du genre du modèle aux données a été traitée par F. Leitner[LC91].

D'autres contributions au modèle initial de contour actifs ont été apportés par de nombreux chercheurs. Fua *et al*[FL88] adapte le pas de temps au gradient d'énergie afin d'en réduire l'instabilité dûe au potentiel extrait de l'image. Rougon[Rou93] a généralisé les forces d'expansion initialement proposées par L. Cohen[Coh91], dans son modèle de "*g*-snakes". Berger *et al*définit une énergie de déformation permettant de contrôler la longueur du contour actifs et ainsi de suivre tangentiellent les contours de l'image. Ronfard[Ron92] définit un champ de forces à l'aide des intensités des régions situées à l'intérieur et à l'extérieur du snake.

Le principe des contours et des surfaces déformables pour la segmentation d'images, est dérivé d'un cadre théorique plus général qu'est la régularisation. Ce cadre théorique, inventé par le russe Tikhonov[TA87] permet de résoudre nombre de problèmes de la vision artificielle. La régularisation transforme un problème mal-posé, c'est à dire ayant une infinité de solutions, en un problème bien-posé, ayant un nombre fini de solutions, en contraignant les solutions à être suffisamment régulière. C'est la formulation du terme régularisant, appelé "stabilisateur", qui détermine les propriétés d'invariance de la solution.

1.2 Approche du problème

On introduit une nouvelle représentation de surfaces appelée "maillage simplexe". La notion de maillage simplexe recouvre deux aspects fondamentaux, le premier topologique et le second géométrique.

L'introduction de ce nouveau type de maillage a été tout d'abord motivée, par la recherche d'une représentation permettant une formalisation simple et générale des déformations sur des surfaces de topologie non triviale. En effet, les modèles surfaciques déformables proposés initialement par Terzopoulos *et al*[TWK87] puis Cohen[CCA92] ne permettent pas de traiter de manière satisfaisante les objets de topologie sphérique voire de topologie plus complexe. L'utilisation de modèles de topologie duale de celle des triangulations [DHI91b] a fait apparaître l'intérêt de ce type de représentation pour les modèles déformables.

L'introduction de la notion d'angle simplexe a été motivée par la nécessité d'avoir une formulation intrinsèque des forces régularisantes agissant sur un modèle déformable. En effet, les forces dérivées de la minimisation des énergies de lissage introduites par Tikhonov, utilisées dans la plupart des modèles déformables[CCA92][TWK87][Rou93] ne correspondent pas à la notion intuitive de régularité. En particulier, elles déforment une sphère régulière en une sphère plus petite et par conséquent elles introduisent une dissymétrie au cours de la déformation. De plus, elles ne font intervenir aucun paramètre intrinsèque à la surface telle que la courbure.

La combinaison des deux aspects topologique et géométrique confère aux maillages simplexes déformables les propriétés suivantes :

- **Généralité**. Toute surface orientable peut être représentée par un maillage simplexe, quelle que soit sa topologie. De plus, les travaux présentés dans cette thèse permettent de représenter les déformations d'une k-variété de $\mathbb{R}^{k+1}$ à l'aide d'un k-maillage simplexe.

- **Simplicité et efficacité de calcul**. Un maillage simplexe est une représentation discrète de surface. La géométrie d'un maillage simplexe est uniquement déterminée par la position de ses sommets. Un maillage se déforme sous l'action de forces externes et internes. L'expression de la force est non linéaire, mais son calcul se fait de manière très rapide. De plus, puisque l'équation d'évolution est discrétisée avec un schéma explicite, aucune inversion de matrice est nécessaire, contrairement aux modèles déformables utilisant la méthode des éléments finis[CCA92][McI93]. Enfin, le nombre de sommets nécessaires pour décrire un objet est limité par l'adaptativité du maillage à la courbure. Ainsi, la plupart des maillages présentés dans ce rapport peuvent être déformés en

temps réel sur une station de travail graphique.

- **Contraintes intrinsèques de déformation**. On a introduit une formalisation permettant de contrôler la déformation locale d'un maillage simplexe. La régularité est imposée par la minimisation locale d'une énergie. Cette énergie est formulée en terme de paramètres intrinsèques, à savoir la courbure moyenne et de plus, elle fait intervenir un paramètre d'échelle qui contrôle la rigidité du modèle. La régularité est ainsi exprimée en termes de continuité d'orientation de normales ou de courbure moyenne. Enfin, la contrainte régularisante appliquée en chaque sommet du maillage permet d'obtenir un maillage avec une mémoire de forme. En l'absence de tout champ de force extérieur, le maillage se déforme du fait de ces forces régularisantes, vers une forme donnée, qui est définie à une rotation, translation et changement d'échelle près.

- **Adaptativité**. Trois niveaux différents d'adaptivité des maillages simplexes sont présentés. Le premier consiste à adapter l'espacement des sommets du maillage en fonction de la courbure. Les sommets se concentrent alors aux endroits de forte courbure permettant ainsi une description optimale de la forme. Le second niveau consiste à raffiner le maillage aux parties qui n'approxime pas correctement les données tridimensionnelles. Il permet de contrôler la précision globale de la représentation. Enfin, la topologie d'un maillage peut être modifiée en créant des bords ou en modifiant son genre afin qu'elle corresponde à celle de l'objet à modéliser.

- **Interaction entre les contours et les surfaces déformables** Des contours peuvent être simplement définis sur un 2-maillage simplexe. Ces contours sont eux-mêmes déformables et la condition de continuité entre un contour et le maillage simplexe s'exprime ou bien en terme d'orientation entre les vecteurs normaux à la courbe et à la surface, ou bien en terme de courbure moyenne.

- **Représentation intrinsèque de formes**. La forme d'un maillage simplexe, à une isométrie et échelle près, est déterminée par un nombre fixe de paramètres, proportionnel au nombre de sommets du maillage.

Cette dernière propriété rend la reconnaissance de formes des maillages simplexes particulièrement aisée. Un système de reconnaissance et de recalage rigide a été implémenté qui a les caractéristiques suivantes :

- **Représentation compacte des formes**. La forme d'un objet est codée à l'aide de son image simplexe ("SAI : Simplex Angle Image"). Celle-ci se compose d'un ensemble de sommets composant un maillage simplexe sphérique semi-régulier auquel on attache une valeur de l'angle simplexe. Par conséquent la forme du maillage en un sommet est codée par un seul scalaire. En pratique, on représente donc la forme d'un objet avec 500 scalaires.

- **Reconnaissance de surfaces lisses éventuellement occultées** L'image simplexe d'objets tridimensionnels permet de comparer de manière très efficace deux formes données. Cette méthode s'applique à toutes les surfaces de topologie sphérique éventuellement occultées. L'algorithme est d'autant plus performant que la surface est dotée de maxima de courbure très marqués.

Les maillages simplexes constituent une representation *discrète* de surfaces. Ainsi, toutes les notions géométriques définies sur ces maillages sont de nature discréte, sans référence à une quelconque paramétrisation de la surface. Dans cette thèse, aucune méthode n'est proposée pour établir une surface continue sous-jacente à un maillage simplexe, par exemple par l'introduction d'une base d'éléments finis. L'absence de formulation continue est un handicap lorsqu'il s'agit d'étudier la variation de grandeurs physiques (comme le flux de chaleur, les contraintes d'effort, l'écoulement d'un fluide) le long d'une surface. Cependant, nous pensons qu'en terme de d'analyse de déformations, une formulation discrète, utilisant des grandeurs géométriques discrètes, à l'avantage d'être plus simple et générale à implémenter.

1.3 Principales Contributions

Le résultat principal de cette thèse est d'une part, d'établir une liste des propriétés topologiques et géométriques ainsi que des propriétés de déformabilité des maillages simplexes et, d'autre part de démontrer l'apport de cette nouvelle représentation de surfaces pour la modélisation et la reconnaissance de formes. De nombreux concepts et de nombreuses propriétés sont introduits. Les chapitres 2 et 3 s'attachent à effectuer une étude théorique de la nature topologique et géométrique des maillages simplexes. Le chapitre 4 décrit les propriétés de déformation physique des maillages simplexes, alors que le cinquième chapitre présente un système de modélisation de surfaces permettant la reconstruction de modèles géométriques à partir d'images de

profondeur, d'images volumiques ou encore de nuages de points. Le dernier chapitre décrit un système de reconnaissance de formes fondé sur l'image simplexe d'objets tridimensionnels.

Nous énumérons à présent les contributions majeures rencontrées dans les différents chapitres de cette thèse.

Dans le second chapitre, sont d'abord étudiées les propriétés topologiques des maillages simplexes. Le concept de maillage simplexe est nouveau même s'il est proche du concept de complexe cellulaire dual. A notre connaissance, il n'existe pas de termes équivalent pour désigner un maillage non polyèdrique ayant un nombre constant de voisins. Les propriétés topologiques des maillages simplexes énoncées dans ce chapitre, découlent en général de celles existantes sur les complexes simpliciaux et les solides. Cependant, nous introduisons quatre opérations élémentaires sur les maillages simplexes permettant d'en changer le genre, la connexité et la topologie. Les conditions d'applicabilité des opérations sont systématiquement étudiées.

Le troisième chapitre, consacré à la géométrie des maillages simplexes développe de nombreux concepts géométriques et il inclue également la démonstration de plusieurs propriétés :

- Représentation des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Une représentation des surfaces continues à l'aide de la courbure moyenne et des deux courbures géodésiques des lignes de courbure est présentée.
- Définition de l'angle simplexe
- Définition de la courbure moyenne discrète
- Caractérisation de la courbure moyenne en tant que courbure optimale : propriété de la sphère minimale
- Théorème de convergence de la courbure moyenne discrète vers la courbure moyenne continue
- Définition des paramètres métriques
- Caractérisation de la forme d'un maillage simplexe

Le quatrième chapitre traite des énergies et des forces régularisantes agissant sur les maillages simplexes. Le cadre de la régularisation est tout d'abord étendu afin de

prendre en compte les *stabilisateurs différentiels*, ou forces régularisantes, ne dérivant pas d'un potentiel. Lorsque le stabilisateur est linéaire le cadre de la *stabilisation* est équivalent à celui de la régularisation. Ensuite, l'expression des stabilisateurs de Tikhonov est généralisée, d'abord en prenant en compte un facteur d'échelle, puis en utilisant une formulation intrinsèque fondée sur la courbure. Enfin, les forces internes appliquant des contraintes de régularité ou de forme sur les maillages simplexes, sont dérivées de la minimisation locale d'une énergie.

Le cinquième chapitre concerne l'application des maillages simplexes déformables au problème de la reconstruction et la modélisation de surfaces tridimensionnelles. Les forces externes sont calculées en considérant la projection sur la direction normale du point le plus proche. L'adaptation du maillage à la courbure s'effectue en minimisant localement une énergie qui dépend de la variation relative de la courbure moyenne. La création de bords sur le maillage s'effectue aux endroits du maillage dont les sommets n'ont pas de vis-à-vis sur les données tridimensionnelles.

Enfin dans le sixième chapitre, une méthode de reconnaissance de forme et de recalage rigide utilisant les maillages simplexes, est présentée. Les objets tridimensionnels sont modélisés à l'aide de maillages simplexes quasi-réguliers de topologie sphérique ayant leurs paramètres métriques pris égaux à 1/3. La forme de l'objet est représentée par l'ensemble des valeurs des angles simplexes calculées à chaque sommet. Cette représentation est appelée SAI. La comparaison entre deux objets s'effectue en déterminant la rotation qui fait coïncider les deux SAIs. Nous présentons plusieurs exemples de recalage rigide d'objets tridimensionnels notamment en présence d'occultations.

Chapitre 2

Définition et propriétés topologiques des maillages simplexes

Dans ce chapitre, les principales propriétés topologiques des maillages simplexes sont énoncées. Dans un premier temps, le lien topologique entre les maillages simplexes et les solides (triangulations) est démontré. Les problèmes de régularité topologiques ainsi que d'orientation sont abordés.

Dans un deuxième temps, quatre opérations topologiques sur les maillages sont proposées. Les conditions de validité de ces opérations sont analysées.

Une fraction de ce chapitre a été initialement publié dans les actes de la conférence Computer Animation'93[DWS93] ainsi que dans le rapport de recherche [Del94a]

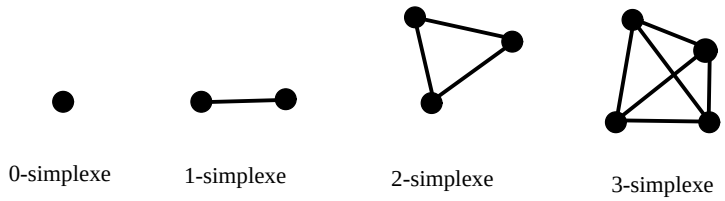


Fig. 2.1: Les k-simplexes ($0 \leq k \leq 3$)

2.1 Maillage simplexe

2.1.1 Rappel sur les solides

Les maillages simplexes ayant une structure duale de celle des solides, il convient tout d'abord de rappeler les notions associées aux solides. Les définitions qui suivent proviennent des références [Boi83][Rus91].

Tout d'abord, on notera par $P = (p_1, p_2, \ldots, p_d)^T$ les coordonnées d'un point P de $\mathbb{R}^d$. On dit que les k points $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ sont indépendants si la matrice M est de rang $k-1$, avec

$$M = \begin{pmatrix} p_{1_1} & p_{1_2} & \cdots & p_{1_d} \\ \vdots & & & \vdots \\ p_{k_1} & p_{k_2} & \cdots & p_{k_d} \end{pmatrix}$$

On peut à présent définir la notion de simplexe.

Définition 1 (Simplexe) *Un $k-$simplexe de $\mathbb{R}^d$ est un ensemble de $k+1$ points indépendants.*

Ainsi un point est un 0-simplexe, une arête non vide est un 1-simplexe, un triangle non aplati est un 2-simplexe et un tétraèdre non plat, un 3-simplexe (voir figure 2.1). On définit l'intersection de deux simplexes comme l'intersection de leurs enveloppes convexes. Un *complexe simplicial* est un ensemble de simplexes, appelées les *faces* du complexe, tels que deux simplexes ne s'intersectent pas ou sinon s'intersectent selon un simplexe de dimension inférieure constituant une face des deux simplexes. On parle d'un *k-complexe* si la dimension maximale des simplexes qui le composent est k. On dit qu'un complexe $\mathcal{C}$ est *pur* si et seulement si toute face de $\mathcal{C}$ est une face d'un k-simplexe de $\mathcal{C}$. On peut ainsi associer à un complexe pur une orientation et

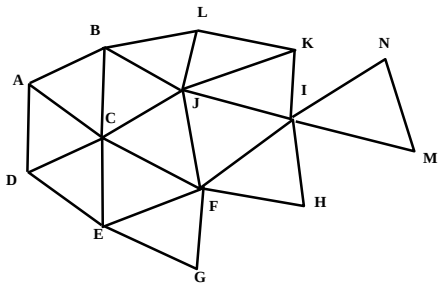


Fig. 2.2: Exemple de 2-complexe cellulaire orienté

un bord. On peut ainsi écrire le complexe pur orienté $\mathcal{C}$ de la figure 2.2 de la façon suivante :

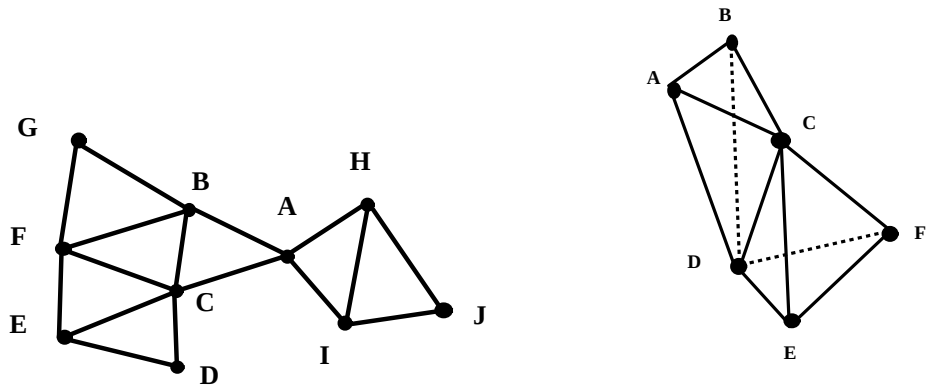
$$\mathcal{C} = BAC + CAD + CDE + CEF + FEG + CFJ + \\ JFI + IFH + IMN + JIK + JKL + JLB$$

Chaque face parcourue deux fois doit l'être dans les deux sens. Cette notation permet de facilement déterminer le bord d'un complexe pur comme étant la somme des bords de chacun des simplexes. Sachant que le bord d'une arête AB est $\partial(AB) = B - A$, celui d'un triangle $\partial(ABC) = BC - AC + AB$, on calcule le bord du complexe $\mathcal{C}$ comme:

$$\partial\mathcal{C} = BA + AD + DE + EG + GF + FH + HI + IM + MN + NI + IK + KL + LB$$

Un k-solide $\mathcal{S}$[Boi83] ou encore appelé une k-variété[Rus91] est un k complexe simplicial pur qui vérifie de plus les trois propriétés suivantes :

- Tout p-simplexe $0 \leq p \leq k$ est une face du solide. Deux k-simplexes ne s'intersectent pas ou bien s'intersectent suivant un p-simplexe $(0 \leq p \leq k-1)$.
- Pour chaque $(k-2)$-simplexes s, les k-simplexes pour lesquels s est une face peuvent être ordonnés de façon circulaire, telle que toute paire consécutive est $k-1$-adjacente (c'est-à-dire qu' ils ont un $(k-1)$-simplexe en commun).
- $\mathcal{S}$ est connexe.



(a) (b)

Fig. 2.3: (a) Dans un 2-solide, deux triangles ne peuvent s'intersecter suivant un sommet. Le 2-complexe simplicial ci-dessus n'est donc pas un solide; (b) Dans un 3-solide, deux tétraèdres ne peuvent s'intersecter suivant une arête. Le 3-complexe simplicial $ABCD + CDEF$ n'est donc pas un 3-solide.

Ainsi, un solide est un complexe simplicial "bien formé", où chaque sommet a un voisinage (on parle de coque) topologiquement équivalent à un disque ou un demi-disque ouvert. Par conséquent, dans un solide, on ne peux avoir deux triangles s'intersectant suivant un sommet, ou deux tétraèdres s'intersectant suivant une arête (voir figure 2.3). Les 1-solides sont des lignes polygonales, les 2-solides sont les polyèdres simpliciaux que l'on appellera simplement *triangulations*, alors que les 3-solides sont les *tétraèdrisations*. Ainsi, les solides correspondent aux triangulations telles qu'on les rencontre en pratique. On utilisera parfois le terme "triangulation" pour désigner les solides en général.

Une des propriétés les plus remarquables des k-solides est le fait qu'il existe une relation liant le nombre de faces de dimension $0 \leq d \leq k$. Cette relation est la relation d'Euler-Poincaré.

Pour une ligne polygonale fermée, cette relation s'écrit simplement:

$$E = V$$

où V est le nombre de sommets et E le nombre d'arêtes. Pour une triangulation, la

relation d'Euler, dans sa formulation généralisée s'écrit en fonction du nombre de triangles F, du nombre de trous H (le bord de la triangulation est la réunion de H polygones) et du genre g (le nombre de "poignées"):

$$V - E + F = 2(1 - g) - H \tag{2.1}$$

Enfin, pour une tétraèdrisation topologiquement équivalente à la sphère, la relation d'Euler est:

$$V - E + F - T = 0$$

où T est le nombre de tétraèdres.

2.1.2 Définition

Un k-maillage simplexe de $\mathbb{R}^d$ est un maillage où chaque sommet a $k+1$ voisins :

Définition 2 (Maillage simplexe) *Un $k-$maillage simplexe $\mathcal{M}$ de $\mathbb{R}^d$ est défini par l'ensemble $(V(\mathcal{M}), N(\mathcal{M}))$, où :*

- *$V(\mathcal{M})$ est un ensemble de n points de $\mathbb{R}^d$, $V(\mathcal{M}) = \{P_i\}_{i=1,\dots,n}$.*
- *$N(\mathcal{M})$ est la fonction d'adjacence qui attribue à un sommet de rang i, le $(k+1)$-uplet $(N_1(i), N_2(i), \dots, N_{k+1}(i))$ représentant le rang de ses $k+1$ voisins. On contraint de plus l'application $N(\mathcal{M}) : \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}^{k+1}$ à vérifier les deux propriétés suivantes:*

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, k+1\}, \forall l \in \{1, \dots, k+1\}, l \neq j$$

$$N_j(i) \neq i \tag{2.2}$$

$$N_l(i) \neq N_j(i) \tag{2.3}$$

Les deux propriétés garantissent une certaine régularité topologique d'un maillage simplexe. La première interdit l'existence d'arêtes joignant un même sommet alors que la seconde indique que deux sommets ne sont joints que par au plus, une arête.

On peut alors définir une arête $(i, N_j(i))$ comme un couple non ordonné de sommets voisins sur le maillage. Cette définition nous permet d'introduire la notion de graphe associé :

Définition 3 (Graphe associé) *On associe à un maillage simplexe $\mathcal{M}$, le graphe $G(\mathcal{M})$ définit par le couple $(V(\mathcal{M}), E(\mathcal{M}))$ où $E(\mathcal{M})$ est l'ensemble des arêtes de $\mathcal{M}$.*

La définition d'un graphe associé à un maillage simplexe est naturelle et elle permet de décrire les propriétés topologiques d'un maillage simplexe en termes de propriétés de son graphe associé. En particulier, on dira qu'un maillage simplexe est connexe si son graphe associé l'est également. Rappelons qu'un graphe est connexe si pour toute paire (i, j), il existe une chaîne reliant ces deux points.

Notation 1 *Par la suite, on désignera par "maillage simplexe", les maillages dont le graphe est connexe.*

Un maillage est une notion plus restrictive qu'un graphe puisque les sommets d'un maillage sont des points de l'espace euclidien $\mathbb{R}^k$. Il y a ainsi deux aspects associé à un maillage simplexe :

Aspect Topologique Les propriétés topologiques d'un maillage sont celles de son graphe associé. En fait, ces propriétés sont duales, c'est-à-dire équivalentes à celles des triangulations. La nature topologique d'un maillage est indépendante de l'espace euclidien dans lequel le maillage est plongé.

Aspect Géométrique La géométrie d'un maillage simplexe est liée aux distances et courbures mesurées sur le maillage. Il n'y a pas de dualité géométrique donc d'équivalence géométrique entre les maillages simplexes et les triangulations. Cependant, nous allons montrer que les deux représentations sont complémentaires à plusieurs titres. De plus, la géométrie d'un maillage dépend de la dimension de l'espace euclidien. Nous n'étudierons que la géométrie des maillages représentant des surfaces, c'est à dire des k-maillages de $\mathbb{R}^{k+1}$.

2.2 Dualité entre les maillages simplexes et les solides

Les maillages simplexes sont caractérisés par un nombre d'arêtes identique pour tous les sommets. Mais c'est à travers la notion de dualité que la topologie des maillages

simplexes est la plus intéressante à étudier. La dualité est un concept majeur de la théorie des graphes et de la géométrie combinatoire des solides.

La dualité s'exprime comme une équivalence topologique entre deux structures. Ainsi, un k-complexe simplicial $\mathcal{C}$ et un k-complexe cellulaire $\mathcal{C}^\star$ sont dits duaux si l'on peut établir une bijection entre les p-faces de $\mathcal{C}$ et les $(k-p)$-cellules de $\mathcal{C}^\star$. Un *complexe cellulaire* est une union de cellules éventuellement non bornées. Les 1-cellules sont des lignes polygonales, les 2-cellules sont des polyèdres. Le diagramme de Voronoï associé à un nuage de points de $\mathbb{R}^d$ est un exemple de d-complexe cellulaire. La notion de complexe cellulaire est plus générale que celle des complexes simpliciaux et est fréquemment utilisée en conception assistée par ordinateur. Pour une définition plus précise, voir les références [PS90][Ago76][Rus91].

Le tableau ci-dessous résume la dualité entre un complexe simplicial (CS) et un complexe cellulaire (CC). La figure 2.4 montre un exemple d'une telle dualité. Nous pouvons également définir la dualité sur un solide de manière différente, en

	$1-\text{CS} \Longleftrightarrow 1-\text{CC}$	$2-\text{CS} \Longleftrightarrow 2-\text{CC}$	$3-\text{CS} \Longleftrightarrow 3-\text{CC}$
$p=0$	Sommet $\Longleftrightarrow$ Arête	Sommet $\Longleftrightarrow$ 2-cellule	Sommet $\Longleftrightarrow$ 3-cellule
$p=1$	Arête $\Longleftrightarrow$ Sommet	Arête $\Longleftrightarrow$ Arête	Arête $\Longleftrightarrow$ 2-cellule
$p=2$		Triangle $\Longleftrightarrow$ Sommet	Triangle $\Longleftrightarrow$ Arête
$p=3$			Tétraèdre $\Longleftrightarrow$ Sommet

Tableau 2.1: Dualité entre un complexe simplicial et un complexe cellulaire

considérant différemment les simplexes appartenant au bord. Par exemple, nous pouvons définir une notion différente de dualité en associant aux p-simplexes du bord $\partial\mathcal{S}$ d'un k-solide $0 \leq p \leq k-1$ une $(k-p)$ et une $(k-p-1)$-cellule. La correspondance entre les simplexes d'un solide et les cellules d'un complexe cellulaire est décrite dans le tableau 2.2.

Avec cette définition de la dualité, nous avons la propriété suivante :

Propriété 1 *Le dual topologique d'un k-solide est un k-maillage simplexe.*

■ **Preuve** Il faut d'abord prouver que le dual d'un k-solide est $(k+1)$-connecté. Or le dual d'un k simplexe d'un k-solide qu'il soit situé ou non sur un bord du solide, est un sommet avec $k+1$ arêtes incidentes puisque un k-simplexe est bordé

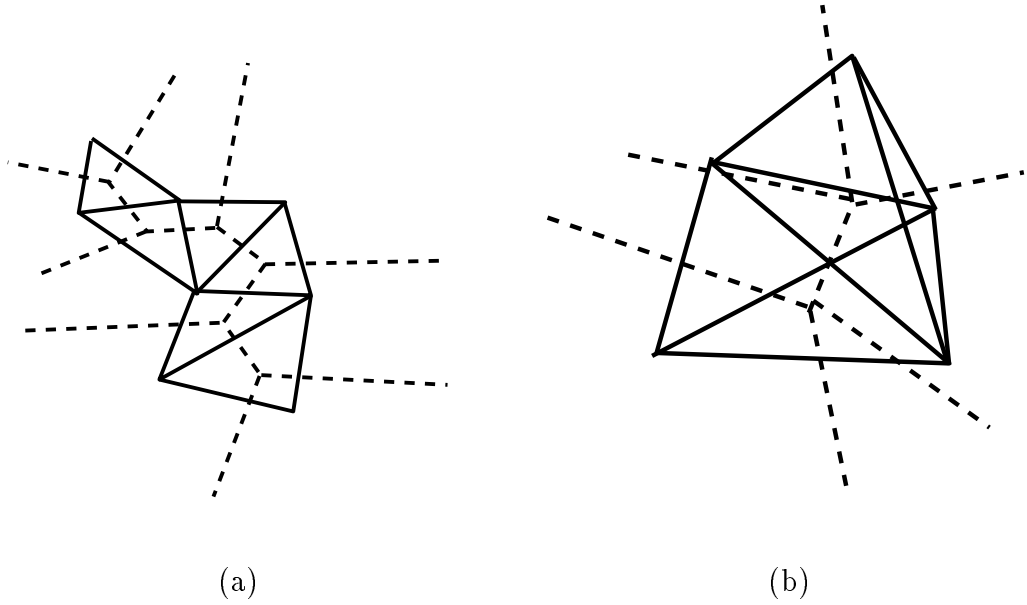


Fig. 2.4: (a) Le dual (en pointillé) d'un 2-complexe. (b) Le dual (en pointillé) d'un 3-complexe formé de deux tétraèdres.

	$1-$Solide $\Longleftrightarrow$ $1-$CC	$2-$Solide $\Longleftrightarrow$ $2-$CC	$3-$Solide $\Longleftrightarrow$ $3-$CC
$p = 0$	Sommet $\Longleftrightarrow$ Arête Sommet $\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ Sommet $\in \partial\mathcal{C}$	Sommet $\Longleftrightarrow$ 2-cellule Sommet$\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ Arête	Sommet $\Longleftrightarrow$ 3-cellule Sommet$\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ 2-cellule
$p = 1$	Arête $\Longleftrightarrow$ Sommet	Arête $\Longleftrightarrow$ Arête Arête $\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ Sommet $\in \partial\mathcal{C}$	Arête $\Longleftrightarrow$ 2-cellule Arête $\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ Arête $\in \partial\mathcal{C}$
$p = 2$		Triangle $\Longleftrightarrow$ Sommet	Triangle $\Longleftrightarrow$ Arête Triangle $\in \partial\mathcal{S} \Longleftrightarrow$ Sommet $\in \partial\mathcal{C}$
$p = 3$			Tétraèdre $\Longleftrightarrow$ Sommet

Tableau 2.2: Dualité entre un solide et un complexe cellulaire

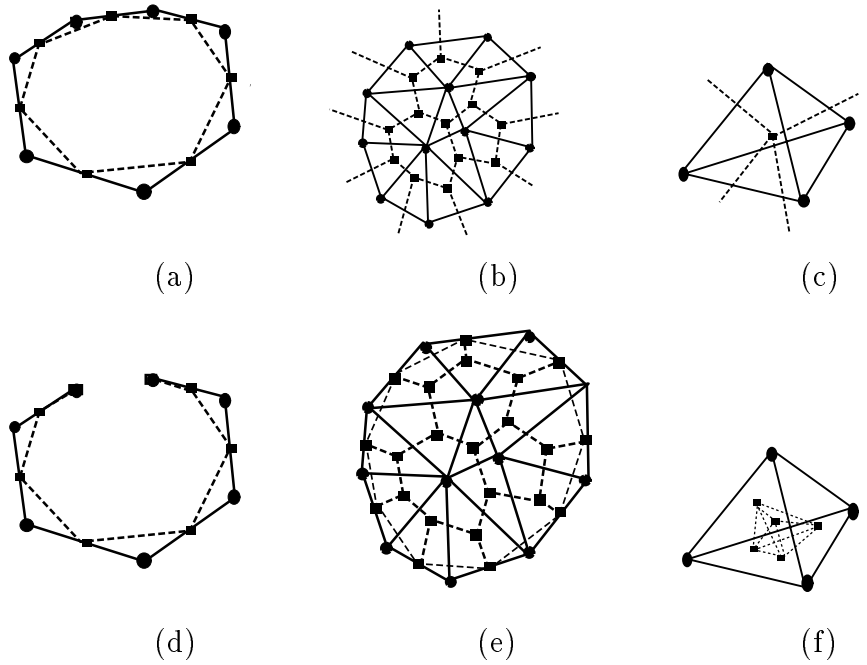


Fig. 2.5: Dualité entre les 1, 2 et 3-solides (en trait plein et cercles) et les 1, 2 et 3-maillages simplexes (en pointillés et carrés). Les trois premières figures correspondent au cas ou les maillages sont sans bords. Dans les trois dernières figures, au contraire, on considère le dual des bords.

de $k+1$ $(k-1)$-simplexes. De plus, le bord d'un k solide est une union de $(k-1)$-solides connexes. Par conséquent, le dual d'un $(k-1)$-simplexe appartenant au bord du solide est un sommet connecté d'une part, aux k sommets duaux des $(k-1)$-simplexes appartenant au bord et adjacents à ce $(k-1)$-simplexe et d'autre part connecté au dual du k-simplexe auquel il appartient.

Enfin, il faut prouver que le dual d'un solide vérifie les conditions de régularité des équations 2.2 et 2.3, ce qui est découle directement des propriétés des solides □

La figure 2.5 montre des exemples de dualité entre les maillages simplexes et les solides avec et sans bords.

Nous pouvons donc définir la notion de cellules dans un maillage simplexe. La table 2.3 précise la terminologie des $k-$ *cellules* $(k<4)$ dans ce document.

Les cellules appartenant à un maillage simplexe ont des propriétés duales de

0-cellule	1-cellule	2-cellule	3-cellule
Sommet	Arête	Face	Cellule

Tableau 2.3: Terminologie des k-cellules

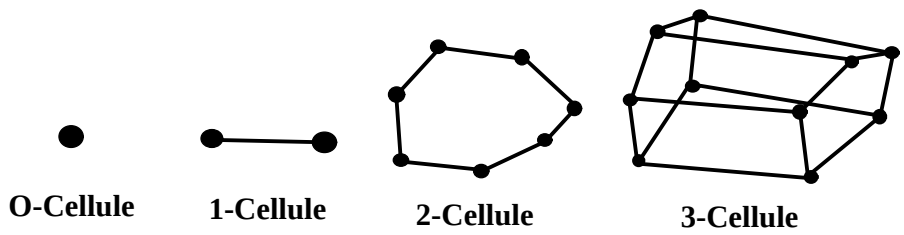


Fig. 2.6: Les k-cellules $0 \leq k \leq 3$. Une 3-cellule est un 2-maillage simplexe où chaque sommet a trois voisins.

celles des simplexes appartenant à un solide. Ainsi, un k-simplexe est composé de $k+1$ sommets alors que les k-cellules ont $k+1$ arêtes adjacentes à chaque sommet (voir figure 2.6).

Propriété 2 *Une p-cellule (pour $p > 0$) d'un k-maillage simplexe est un $(p-1)$ maillage simplexe.*

Par conséquent, on peut construire une structure de données pour représenter des maillages simplexes qui soit récursive, un k-maillage utilisant la structure de données des $(k-1)$-maillages. Cette approche n'est pas possible avec les solides où l'on doit représenter de façon différente d'une part, les simplexes constituant un solide et d'autre part, le solide lui-même.

De plus, les cellules d'un maillage simplexe vérifient les propriétés suivantes :

- Un sommet d'un k-maillage simplexe est adjacent à $\binom{p}{k+1}$ p-cellules. En particulier, un sommet est adjacent à $k+1$ k-cellules.
- Un k-maillage simplexe ayant n sommets a $\frac{(k+1)n}{2}$ arêtes.
- L'intersection de deux p-cellules est ou bien vide ou bien une $(p-1)$-cellule.

- Le bord d'un k-maillage simplexe est un $(k-1)$-maillage simplexe. C'est également une cellule du maillage.

Le tableau suivant récapitule les relations d'adjacence entre les sommets, les arêtes, les faces et les cellules pour les 1, 2 et 3-maillages simplexes.

	Arêtes / sommet	Faces / sommet	Faces / arête	Cellules / sommet	Cellules / arête	Cellules / face
p=1	2					
p=2	3	3	2			
p=3	4	6	3	4	3	2

Tableau 2.4: Les relations d'adjacence entre les arêtes, les sommets, les faces et les cellules

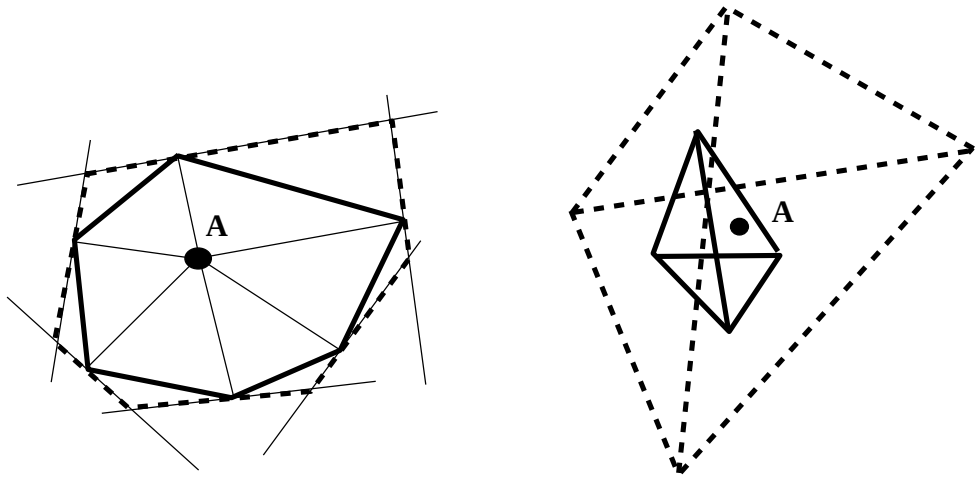
Propriété 3 *La dualité entre les solides et les maillages simplexes est d'ordre topologique et non d'ordre géométrique.*

En effet, la géométrie d'un maillage simplexe ou d'un solide est déterminée par la position de chacun de ses sommets. Or, le nombre de sommets d'un k-maillage simplexe est égal au nombre de k-simplexes d'un k-solide. Puisque le nombre de sommets et de k-simplexes est différent pour $k > 1$ (d'après l'équation d'Euler), il est impossible d'obtenir un homéomorphisme transformant les coordonnées des sommets d'un maillage simplexe en les coordonnées du solide dual.

Ainsi, il est impossible d'associer de façon bi-univoque un maillage simplexe à un solide sauf pour les 1-solides (les lignes polygonales). Cependant, si l'on restreint la généralité de la forme des maillages simplexes, il est possible d'établir une dualité géométrique.

Le premier exemple de dualité géométrique concerne les k-maillages simplexes dont les k-cellules sont "plates", c'est à dire contenues dans des hyperplans de $\mathbb{R}^{k+1}$ tous distincts. Il existe alors des transformations bi-univoques entre de tels maillages simplexes et les solides. En effet, la géométrie des maillages est alors déterminée par la position de chaque hyperplan constituant les k-cellules dont le nombre est égal au nombre de sommets d'un k-solide de structure duale. Il est cependant nécessaire que tous les hyperplans soient distincts.

Propriété 4 *Il existe une dualité géométrique entre les k-solides et les k-maillages simplexes dont les k-cellules sont contenues dans des hyperplans distincts de $\mathbb{R}^{k+1}$.*



(a) (b)

Fig. 2.7: (a) Dualité géométrique entre entre un 1-solide et un 1-maillage simplexe; Les droites du 1-maillage simplexe en pointillé sont orthogonales aux droites passant par A et les sommets du 1-solide en traits plein. (b) Dualité géométrique entre entre un 2-solide et un 2-maillage simplexe. Les sommets du tétraèdre intérieur sont les projections orthogonales de A sur les faces du tétraèdre extérieur.

Ainsi, nous pouvons définir une dualité géométrique en associant à un polytope convexe simple un polyèdre convexe simplicial. Pour ce faire, il suffit de considérer la transformation qui associe à un hyperplan Π ne passant pas par un point A, la projection orthogonale $\Pi^\star$ de A sur Π. Cette transformation projective réalise un homéomorphisme entre l'espace des hyperplans ne passant pas par A et l'espace des points de l'espace distincts de A. La figure 2.7 montre la dualité géométrique entre deux lignes polygonales et deux tétraèdres.

Le second exemple de dualité géométrique s'applique aux k-maillages simplexes où les sommets des k-cellules sont situés sur une même sphère. Le diagramme de Voronoï associé à un nuage de points est un complexe cellulaire (et donc pas un maillage simplexe) dont le dual géométrique est la triangulation de Delaunay. Les sommets du diagramme de Voronoi correspondent au centre du cercle circonscrit des triangles alors que les arêtes sont les médiatrices des arêtes de la triangulation

[Boi84].

Par la suite, nous considèrerons des maillages simplexes de forme générale sans restriction sur la planarité de leurs cellules. Par conséquent, il est important de remarquer que la représentation de surfaces par des maillages simplexes est distincte de celle utilisant des triangulations (ou solides). Il n'existe pas de triangulation sous-jacente à un maillage simplexe.

En pratique, cependant, nous avons besoin de trianguler un maillage simplexe afin d'en calculer l'aire ou encore pour en réaliser un rendu réaliste. Nous avons défini deux méthodes pour ce faire. La première consiste à créer un solide de structure duale en calculant les sommets de la triangulation comme le centre de gravité de chaque face. La seconde consiste à trianguler chaque cellule, en joignant le centre de gravité de chaque cellule à chaque sommet de la cellule (voir figure 2.8). La première méthode a l'avantage de créer une triangulation avec moins de sommets et de triangles, ce qui est intéressant pour améliorer la rapidité du rendu graphique du maillage. Par contre, elle résulte en une distorsion systématique de la forme du maillage en en sous-estimant la courbure. La seconde méthode est par contre utilisée pour calculer l'aire ou le volume d'une cellule.

Réciproquement, on peut générer un maillage simplexe à partir d'un solide quelconque en créant un maillage de structure duale (voir figure 2.5) de manière que chaque sommet coïncide avec l'isobarycentre de chaque simplexe. Il existe ainsi une relation linéaire entre la position des sommets du solide et la position des sommets du maillage simplexe.

2.3 Orientation des maillages simplexes

Dans la section 2.1.2, nous avons défini les maillages simplexes à l'aide de la fonction d'adjacence $N(\mathcal{M})$. Si nous avons alors utilisé la notion de sommets et d'arêtes, cette définition ne fait pas référence à la notion de cellules. Or la fonction d'adjacence définit une orientation des arêtes autour d'un sommet donné, puisqu'elle associe au sommet numéroté i, le $(k+1)$-uplet ordonné $(N_1(i), N_2(i), \ldots, N_{k+1}(i))$. La donnée d'une orientation définie automatiquement les p-cellules, $(0 \leq p \leq k)$ du maillage. En effet, les p-cellules se déduisent de la condition d'orientabilité du maillage :

Définition 4 *Un k-maillage simplexe est orienté si ses k-cellules le sont. Les p-cellules sont orientées de façon cohérente si les $(p-1)$-cellules sont orientées diffé-*

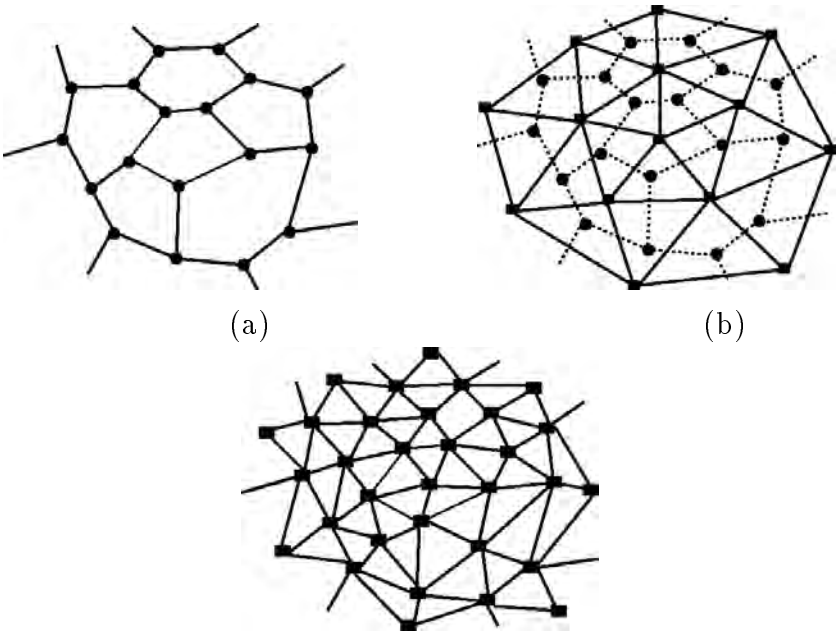


Fig. 2.8: Transformation d'un maillage simplexe (a) en une triangulation en considérant l'isobarycentre de chaque face (b) ou bien en triangulant chaque face (c).

remment selon qu'elles appartiennent à une p-cellule ou à l'autre.

Par cette définition récursive, on ramène l'orientation d'un maillage simplexe à l'orientation de ses arêtes, les 1-cellules.

L'obtention d'un maillage orienté n'implique pas qu'il a une "bonne" structure. Par exemple, la figure 2.9 (a) montre un maillage orienté où une face parcours deux fois une même arête. Par conséquent, les relations d'adjacence définies dans le tableau 2.4 ne sont pas respectées et ce maillage n'est pas topologiquement dual d'un solide. Il est donc nécessaire d'introduire une propriété plus forte :

Définition 5 *On dira qu'un k-maillage simplexe est complet si :*

- *Il est orienté.*
- *Il vérifie les relations d'adjacence du tableau 2.4.*
- *Deux k-cellules s'intersectent au plus suivant une (et une seule) $(k-1)$-cellule.*

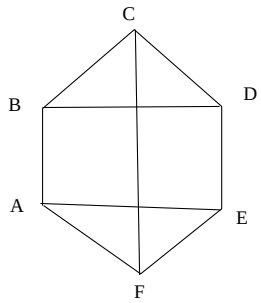
Pour les 2-maillages simplexes, cela revient à contraindre chaque arête à border deux faces distinctes chaque paire de faces à s'intersecter au plus sur une arête. Pour qu'un 3-maillage soit complet, il est nécessaire que les faces soient adjacentes à deux cellules distinctes et que deux faces ne s'intersectent qu'au plus sur une face. On dira qu'une orientation d'un k-maillage simplexe est *cohérente* si les k-cellules construites à partir de cette orientation forment un maillage complet.

Propriété 5 *Un k-maillage simplexe complet est le dual topologique d'un k-solide.*

Preuve: On construit le complexe simplicial dual du maillage simplexe. Il faut vérifier que la coque de chaque sommet du complexe est homéomorphe à un disque de $\mathbb{R}^k$. Or, un sommet du complexe simplicial correspond à une k-cellule du maillage simplexe. Puisque le maillage est complet, les $k+1$ k-cellules autour d'un sommet sont distincts et par conséquent les k-simplexes duaux existent bien (les $k+1$ sommets sont distincts). De plus, tous les k-simplexes adjacents au sommet sont distincts puisque les k-cellules voisines d'une k-cellule sont distinctes $\square$

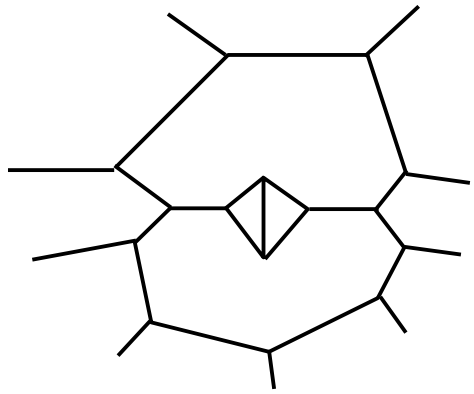
Dans la suite de ce document, *on envisagera uniquement des maillages simplexes complets.*

Nous avons affirmé que les p-cellules d'un k-maillage simplexe se déduisent uniquement de l'orientation des arêtes autour de chaque sommet. La construction des



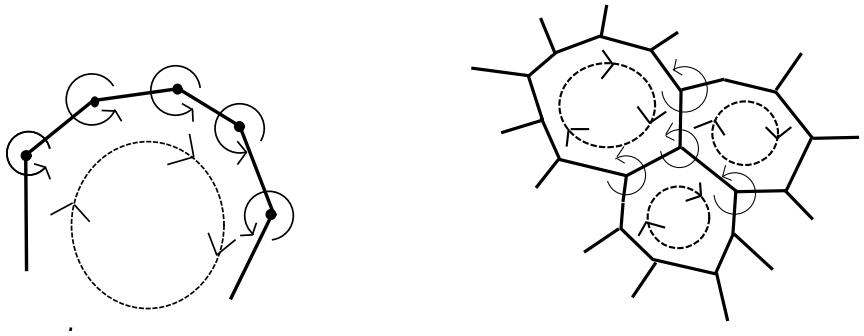
Face no 1:	AB + BC + CD + DE + EF + FA
Face no 2:	BA + AE + DE + DB
Face no 3:	CB + BD + DC + CF + FE + EA + AF + FC

(a)



(b)

Fig. 2.9: (a) Exemple d'un 2-maillage simplexe dont les faces sont bien définies mais dont la troisième face parcours l'arête CF deux fois. Ce maillage est correctement orienté, mais il n'est pas complet (topologiquement dual d'un solide). (b) Un maillage simplexe orienté mais qui n'est pas complet puisque deux faces ont deux arêtes en commun

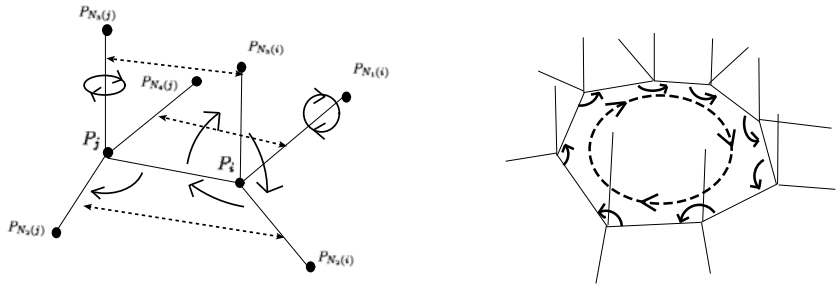


(a) (b)

Fig. 2.10: (a) L'orientation des deux arêtes autour d'un sommet permet d'orienter un 2-maillage simplexe. (b) L'orientation des trois arêtes autour d'un sommet définit complètement les faces d'un 2-maillage.

p-cellules peut s'effectuer de manière directe pour les 1 et 2-maillages simplexes. La figure 2.10 (b) montre comment les faces d'un 2-maillage sont générées à partir de l'orientation des arêtes autour des sommets. Pour une fonction d'adjacence quelconque, il est, en général, impossible d'en déduire des faces d'un 2-maillage simplexe. La construction des faces du maillage permet d'obtenir un maillage orienté.

Pour les 3-maillages simplexes, l'information d'adjacence ne permet pas de définir directement les faces et les cellules. Pour ce faire, il est nécessaire pour chaque arête de connaître la correspondance deux à deux entre les voisins de ses deux sommets. Par exemple, pour une arête joignant les sommets P_i et P_j, on associe à chacune des trois autres arêtes adjacentes à P_i, une arête adjacente à P_j (voir figure 2.11 (a)). La cellule opposée à $P_{N_3(i)}$ a trois faces contenant P_i. L'orientation des arêtes autour de P_i permet d'orienter de manière cohérente les trois portions de faces $P_{N_2(i)}P_i + P_iP_j$, $P_jP_i + P_iP_{N_3(i)}$ et $P_{N_3(i)}P_i + P_iP_{N_2(i)}$. La face contenant $P_{N_2(i)}P_i + P_iP_j$ contient également $P_jP_{N_2(j)}$ puisque les arêtes $P_iP_{N_2(i)}$ et $P_jP_{N_2(j)}$ sont associées. Enfin, la connaissance de l'orientation de la face $P_iP_j + P_jP_{N_2(j)}$ ainsi que que l'orientation des arêtes autour de P_j nous permet de savoir laquelle des deux arêtes $P_jP_{N_3(j)}$ et $P_jP_{N_4(j)}$ est opposée à la cellule (ici $P_jP_{N_3(j)}$). On peut alors itérer la même procédure pour déterminer la face (voir figure 2.11 (b)) et enfin toutes les faces constituant une cellule.



(a) (b)

Fig. 2.11: (a) Étant donnée une arête joignant deux sommets P_i et P_j, on associe deux à deux les autres trois arêtes de chacun des sommets (en pointillé sur le dessin). On peut ainsi déterminer la face passant par $P_{N_2(i)}$, P_i et P_j ;(b) Détermination de la face d'un 3-maillage simplexe par propagation des contraintes d'orientation décrite en (a)

2.4 Structure des maillages simplexes

2.4.1 1-Maillage Simplexe

Les 1-maillages simplexes sont des lignes polygonales. Ils ont une structure remarquable à plusieurs égards. Tout d'abord, les lignes polygonales sont leur propre dual, et elles peuvent être considérées, indifféremment comme 1-maillages simplexes ou comme 1-solides. De plus, elles sont caractérisées par un nombre de sommets égal au nombre d'arêtes :

$$E = V \tag{2.4}$$

Un 1-maillage simplexe a au plus un bord. Ce bord est constitué d'une arête. L'équation d'Euler s'écrit alors $E = V - 1$. Cependant, afin de simplifier la représentation interne des maillages, nous choisissons de considérer l'ensemble des V arêtes et d'étiqueter l'arête rajoutée comme étant un bord. En particulier, cela permet de manipuler les sommets d'un maillage en garantissant l'adjacence de deux arêtes. Par conséquent, l'équation 2.4 prévaut sur l'ensemble du maillage. La topologie des 1-maillages simplexes est uniquement caractérisé par le nombre de bord (0 ou 1).

Les 1-maillages simplexes ont également la propriété remarquable d'être réguliers.

Propriété 6 *Tous les 1-maillages simplexes sans bord sont réguliers.*

En effet, toutes les 1-cellules, c'est à dire les arêtes sont toutes congruentes les unes aux autres.

2.4.2 2-Maillage Simplexe

Les 2-maillages simplexes sont des maillages où chaque sommet a trois voisins. Par conséquent le nombre d'arêtes E est égal à $\frac{3V}{2}$. La relation d'Euler d'un maillage simplexe sans bord se déduit de celle des 2-solides (voir équation 2.1):

$$F - \frac{V}{2} = 2(1-g) \tag{2.5}$$

$$E = \frac{3V}{2} \tag{2.6}$$

Les bords d'un 2-maillage simplexe sont des 2-cellules ou *faces*. Pour simplifier la représentation interne des 2-maillages simplexes, nous choisissons de conserver les faces correspondant aux bords et de les considérer comme étant invisibles. Ainsi, l'équation 2.5 est valide indépendamment du nombre de bords.

Le genre et le nombre de bords permettent de classer les surfaces tridimensionnelles ainsi que les 2-maillages simplexes. La figure 2.12 montre des maillages simplexes de topologie différente. Les maillages simplexes comme les triangulations ont la propriété de pouvoir représenter toutes les surfaces orientables[Car76].

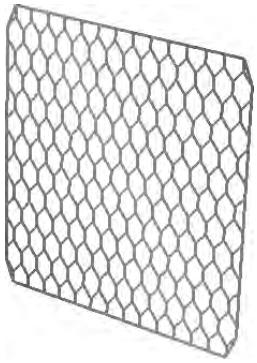
Les maillages simplexes de genre nul peuvent être caractérisés autrement que par la relation d'Euler, grâce au théorème de Kuratowski [Wil75]. Ce théorème établit qu'un graphe est plan si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à K_5 ou $K_{3,3}$ (voir figure 2.13). Pour les 2-maillages simplexes la condition de planarité se réduit à des sous graphes homéomorphes à $K_{3,3}$.

Propriété 7 (Planarité des 2-maillages) *Un 2-maillage est de genre nul si et seulement si son graphe associé ne contient pas de sous-graphe homéomorphe à $K_{3,3}$.*

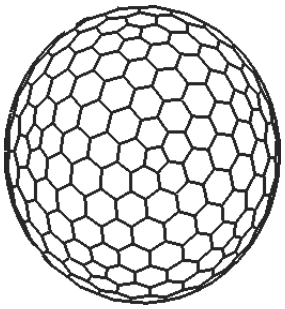
Les maillages réguliers sont caractérisés par un nombre de sommets par face constant. Un 2-maillage simplexe régulier ayant p sommets vérifie $V = \frac{pF}{3}$ et par conséquent l'équation d'Euler devient:

$$(1 - p/6)F = 2(1-g) \tag{2.7}$$

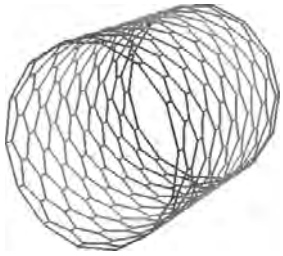
Les seules solutions possibles sont :



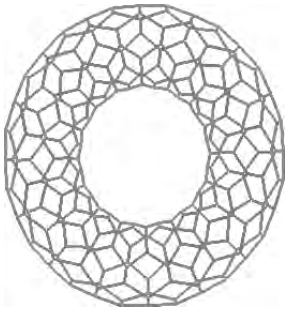
(a) Plan : Genre= 0 Bord= 1



(b) Sphère : Genre= 0 Bord= 0



(c) Cylindre : Genre= 0 Bord= 2



(d) Tore : Genre= 1 Bord= 0

Fig. 2.12: Quatre 2-maillages simplexes de genre et de nombre de bords différents.

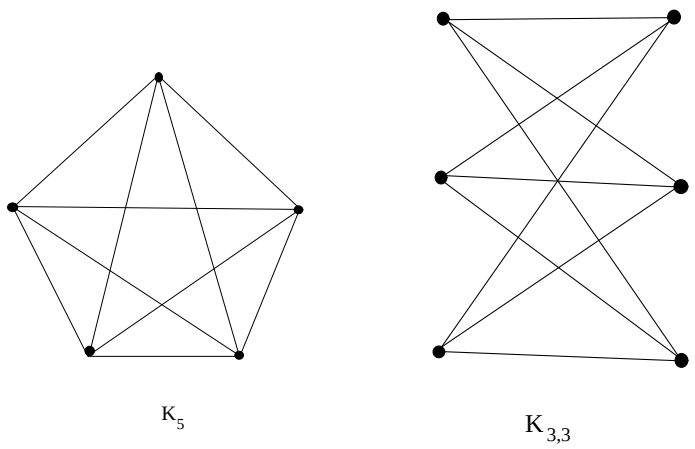


Fig. 2.13:

- $p = 3$, $F = 4$ et $g = 0$. Cette solution correspond au tétraèdre,
- $p = 4$, $F = 6$ et $g = 0$. Cette solution correspond au cube.
- $p = 5$, $F = 12$ et $g = 0$. Cette solution correspond au dodécaèdre.
- $p = 6$ et $g = 1$. Cette solution correspond à un maillage torique constitué uniquement d'hexagones. Il faut noter que ce résultat est indépendant du nombre de faces F. Par conséquent, c'est le seul maillage régulier avec un nombre variable de sommets.

Les 2-maillages simplexes réguliers sont décrits dans la figure 2.14. Le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre et leur polyèdre dual, le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre, forment l'ensemble des polyèdres réguliers de genre nul, appelés les solides platoniciens.

Une autre solution à l'équation 2.7 est obtenue pour les valeurs $F = \infty$, et $p = 6$. Cette solution correspond à un maillage hexagonal infini du plan. Il n'existe que trois divisions régulières du plan : les maillages triangulaires, les maillages carrés et les maillages hexagonaux (voir tableau 2.5). Ces trois divisions correspondent aux trois représentations de surfaces les plus naturelles que sont les triangulations, les grilles régulières et les maillages simplexes.

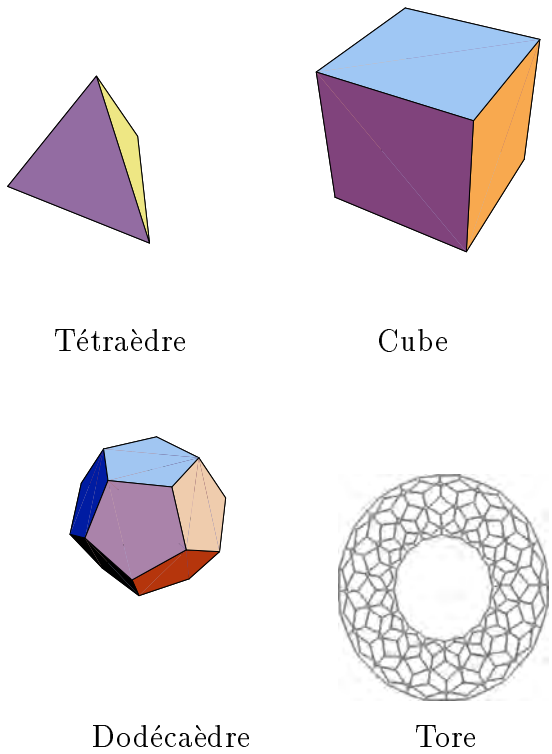


Fig. 2.14: Les quatre 2-maillages simplexes réguliers

	Adjacence entre Sommets	Adjacence entre faces	Maillage Régulier
Triangulation	$n \geq 3$	3	Triangles Equilatéraux
Maillage Rectangulaire	4	4	Carrés
Maillage Simplexe	3	$n \geq 3$	Hexagones Réguliers

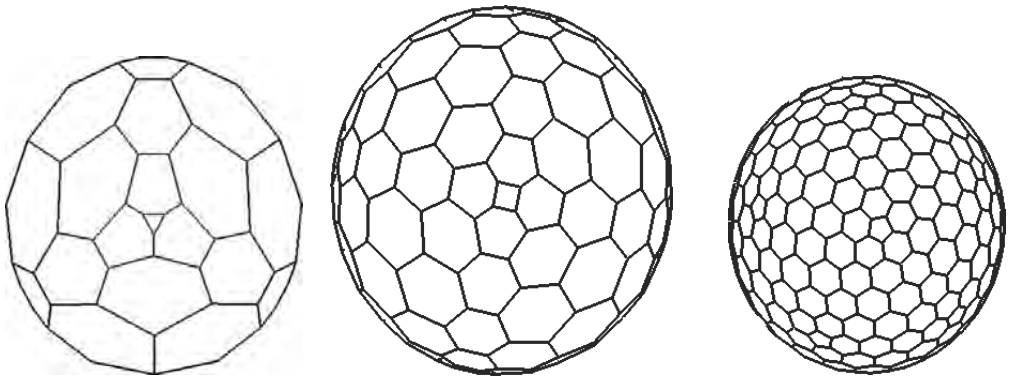
Tableau 2.5: Comparaison entre les triangulations, les maillages rectangulaires et les maillages simplexes

Le nombre moyen $\hat{p}$ de sommets par faces est lié au nombre de faces par une équation similaire à l'équation 2.7 :

$$(1 - \hat{p}/6)F = 2(1 - g) \tag{2.8}$$

Par conséquent, le nombre moyen de sommets par faces est proche de 6 pour des maillages avec un grand nombre de sommets. Ce nombre est inférieur, égal ou supérieur à 6 suivant que le genre du maillage est inférieur, égal ou supérieur à 1.

Pour les maillages simplexes topologiquement équivalent à la sphère il n'existe que trois maillages réguliers. Cependant, il est intéressant de considérer en pratique des maillages quasi-réguliers ayant un grand nombre de sommets. Ces maillages quasi-réguliers peuvent être construits en considérant le dual du tétraèdre, octaèdre ou icosaèdre dont on a régulièrement subdivisé chaque face. Ces maillages sont constitués d'un grand nombre d'hexagones et de quatre triangles, huit carrés ou douze pentagones suivant le type de maillage utilisé (voir figure 2.15). Un paramètre appelé la fréquence f correspond au niveau de subdivision des triangles et par conséquent, il contrôle le nombre de sommets constituant chacun des dômes sphériques. Ainsi un dôme sphérique généré à partir du tétraèdre a $4f^2$ sommets, celui généré à partir de l'octaèdre a $6f^2$ et celui généré à partir de l'icosaèdre a $20f^2$.



(a) (b) (c)

Fig. 2.15: Maillages duaux de tétraèdre (a), octaèdre (b) et icosaèdre (c) régulièrement subdivisés avec une fréquence = 5

Les maillages sphériques, plans, cylindriques et toriques (voir figure 2.12) constituent les quatre maillages utilisés comme primitives pour la reconstruction de sur-

faces. Dans tous les cas, le nombre de sommets est donné à l'aide d'un ou deux paramètres.

Il est intéressant de disposer de 3-maillages simplexes semi-réguliers dont on puisse controler le nombre de sommets. On peut procéder de manière similaire aux 2-maillages simplexes, en subdivisant de manière régulière les

2.4.3 3-Maillage Simplexe

Les 3-maillages simplexes topologiquement équivalent à une sphère, obéissent également à l'équation d'Euler :

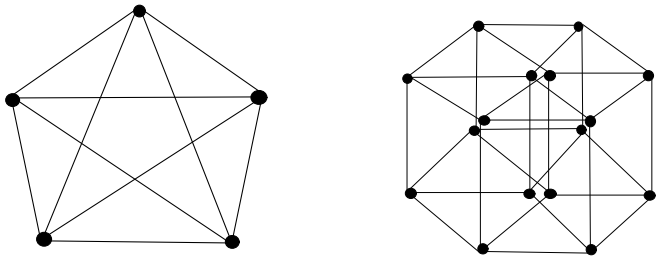
$$V - F + C = 0 \tag{2.9}$$

$$E = 2V \tag{2.10}$$

où C est le nombre de cellules d'un maillage. Le bord d'un 3-maillage simplexe est un 2-maillage simplexe ou *cellule*. Un 3-maillage représentant un volume plongé dans $\mathbb{R}^3$ a généralement un genre nul et au moins un bord. La notion de bord est gérée de façon similaire aux 2-maillages simplexes en étiquetant les cellules.

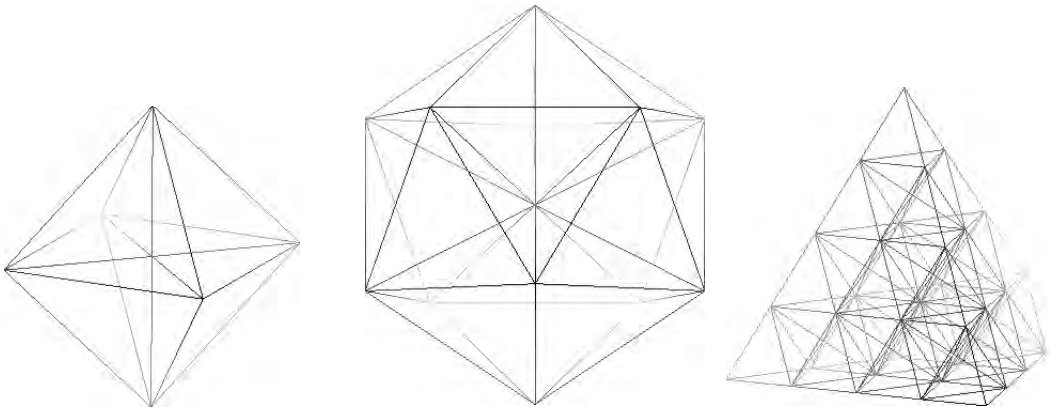
Il y a trois 3-maillages simplexes réguliers qui sont le pentaèdre, l'hypercube et le polytope régulier noté $\{5, 3, 3\}$ avec les symboles de Schläfli [Cox73]. Le premier a cinq cellules (des tétraèdres), le second huit (des cubes) (voir figure 2.16) et le dernier 120 (des dodecaèdres) (voir [Cox73, pp 177]). Mais contrairement aux polytopes de $\mathbb{R}^2$, il n'existe pas de pavage régulier de l'espace $\mathbb{R}^3$ utilisant des tétraèdres ou des dodécaèdres réguliers. Il n'existe pas non plus de 3-maillages quasi réguliers mais uniquement des maillages semi-réguliers. Coxeter[Cox73, pp 69-71] précise la nature et le nombre de tels maillages.

De manière similaire aux 2-maillages simplexes, il est intéressant de considérer des 3-maillages simplexes topologiquement équivalents à la sphère, ayant un nombre variable de sommets. Il est possible de construire de tels maillages en divisant de manière quasi-réguliere les 3 solides platoniciens que sont le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre. Pour celà, on procède en découpant chaque solide, à l'exception du tetraèdre, en sous-tétraèdres en reliant chaque triangle du solide à son centre (voir figure 2.17 (a) et (b)). Puis chaque sous-tétraèdre est régulièrement subdivisé, le niveau de subdivision étant controlé par le paramètre appelé la *fréquence* f (voir figure 2.17 (c)).



(a) (b)

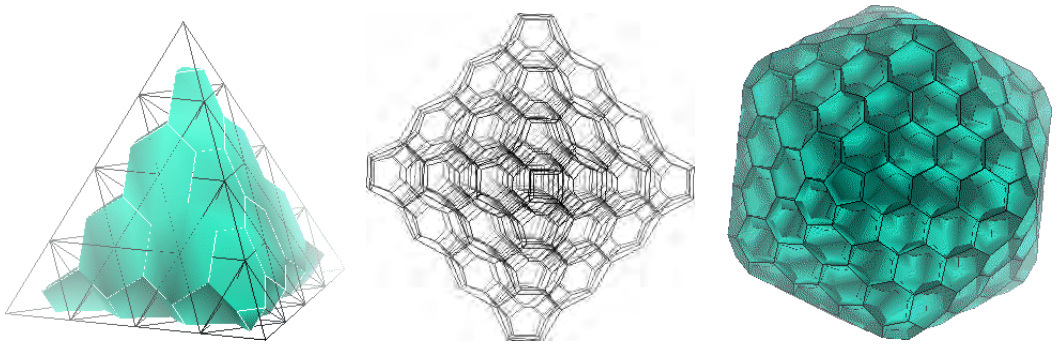
Fig. 2.16: 3-maillages réguliers : (a) le pentaèdre (b) l'hypercube



(a) (b) (c)

Fig. 2.17: Division de l'octaèdre (a) et de l'icosaèdre (b) en sous-tétraèdres; chaque sous-tétraèdre est à son tour divisé de manière régulière (ici la fréquence $f = 4$)

En considèrant le dual de ces tétraèdrisations, on peut alors construire trois types de 3-maillages simplexes topologiquement équivalent à la sphère (voir figure 2.18). Ces maillages ne sont pas semi-réguliers. Par exemple, le 3-maillage issue du découpage de l'icosaèdre est composé de 7 différentes cellules, pour $f \geq 3$. Les 7 différentes cellules sont présentées dans la figure 2.19.



(a) (b) (c)

Fig. 2.18: (a) Le tétraèdre subdivisé et son 3-maillage simplexe dual; (b) Le 3-maillage simplexe obtenu par dualité d'un octaèdre avec un coefficient de fréquence $f = 4$; (c) Rendu d'un 3-maillage simplexe dual d'un icosaèdre. Pour simplifier la figure, on a enlevé les faces appartenant au bord.

2.5 Contours

Nous introduisons à présent la notion de contours sur les 2-maillages simplexes. Ces contours permettent d'effectuer une partition des maillages simplexes et sont utilisés en particulier pour définir des opérations sur les maillages. Sur les 1-maillages, la notion équivalente est le sommet.

Un contour $\mathcal{C}$ sur un 2-maillage simplexe $\mathcal{M}$ est un 1-maillage simplexe dont les sommets et les arêtes appartiennent à $\mathcal{M}$.

Définition 6 (Contour) *Etant donné un 2-maillage* $\mathcal{M} = (V(\mathcal{M}) = \{P_i\}(i = 1, \ldots, n), N(\mathcal{M}))$, *un contour* $\mathcal{C}$ *sur* $\mathcal{M}$ *est défini à l'aide de la fonction d'adjacence* $\mathcal{C} = (J(\mathcal{C}))$ *qui attribue à* $i \in \{0, \ldots, l-1\}$, *le rang du sommet correspondant*

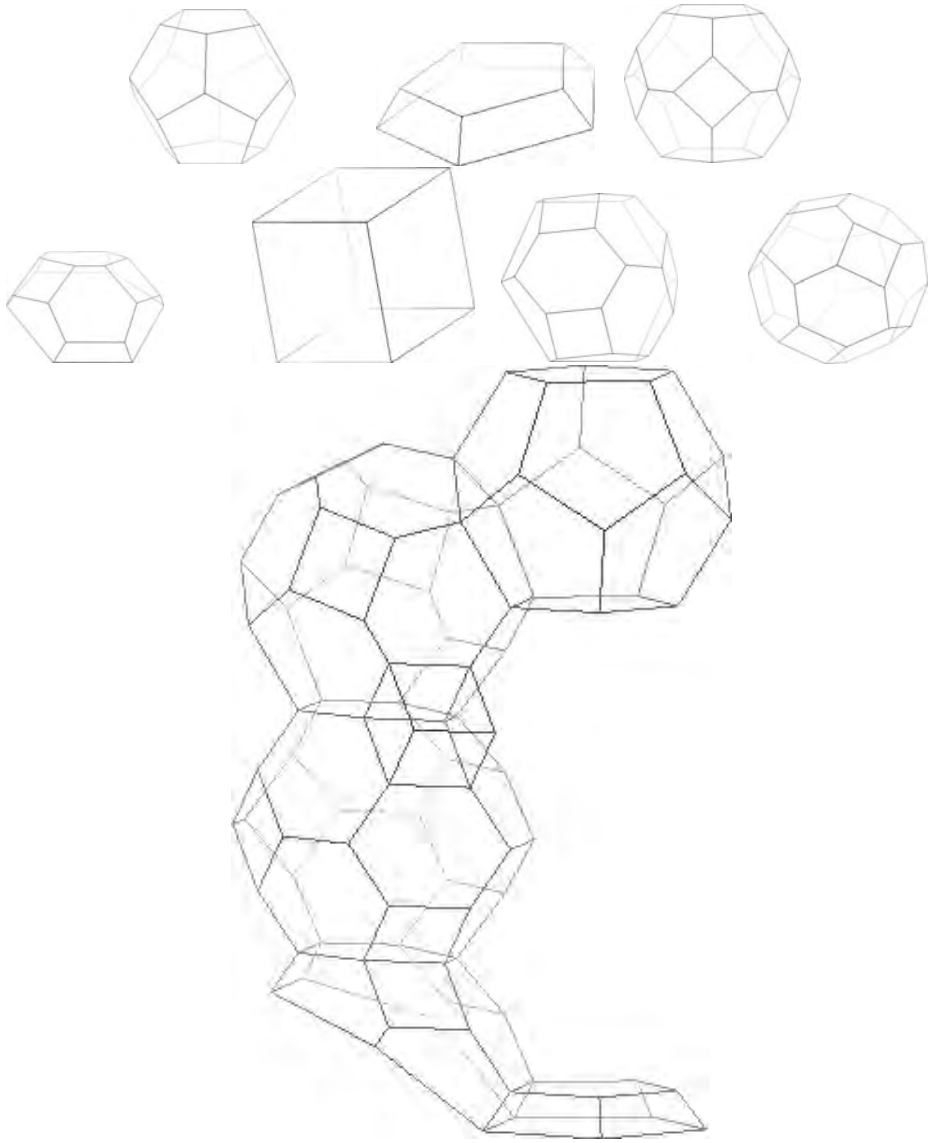


Fig. 2.19: Les 7 différentes cellules qui composent un 3-maillage issu de la découpe d'un icosaèdre. La figure ci-dessus montre comment les cellules s'assemblent dans l'espace.

$J(i) \in \{1, \ldots, n\}$. *Cette fonction d'adjacence doit de plus vérifier les trois propriétés suivantes:*

Fermeture $\forall i \in \{0, \ldots, l-1\}, \exists j \in \{1, 2, 3\}, J((i+1) \bmod l) = N_j(J(i))$. *Chaque contour est fermé. l est le nombre de sommets et d'arêtes constituant le contour.*

Contour Simple $\forall i \in \{0, \ldots, l-1\}, \forall j \in \{0, \ldots, l-1\}, P_{J(i)} \neq P_{J(j)}$. *Un contour ne peut pas s'intersecter lui-même.*

Indépendance $\forall i \in \{0, \ldots, l-1\}, \exists j \in \{1, 2, 3\}$ *tel que* $\forall k \in \{0, \ldots, l-1\}, N_j(J(i)) \neq J(k)$. *Un sommet appartenant à un contour ne peut avoir ses trois voisins sur le contour.*

Il est facile de montrer que la définition précédente est cohérente avec la définition 2 des 1-maillages simplexes. Ainsi, on peut définir des contours autour de chaque face, en particulier autour des faces étiquetées comme correspondant à un bord. Cependant, les contours peuvent ne pas correspondre à des faces, comme le montre la figure 2.20 (a). Les contours n'ont pas d'orientation privilégiée sauf pour ceux correspondant à une face auquel cas, ils ont la même orientation que la face du maillage.

En terme de topologie, on peut classer les contours en deux catégories suivant qu'ils réalisent une partition du maillage ou non. Un contour réalise une partition du maillage s'il existe deux sommets tels que tous les chemins joignant ces deux sommets traversent le contour. On appellera de tels contours, des *contours séparateurs*. Les contours définis sur des maillages de genre nul, topologiquement équivalent à la sphère, ne sont pas séparateurs. Les contours définis sur des maillages de genre supérieur à zéro, peuvent être séparateurs ou pas (voir figure 2.20 (b)). Les contours définis autour d'un bord ne sont pas séparateurs.

2.6 Opérations topologiques sur les maillages simplexes

Les maillages simplexes au même titre que les triangulations ont la propriété d'avoir une structure localement adaptable. C'est cette propriété qui différencie fondamentalement ces représentations que l'on peut ainsi qualifier de *non-uniforme*, des re-

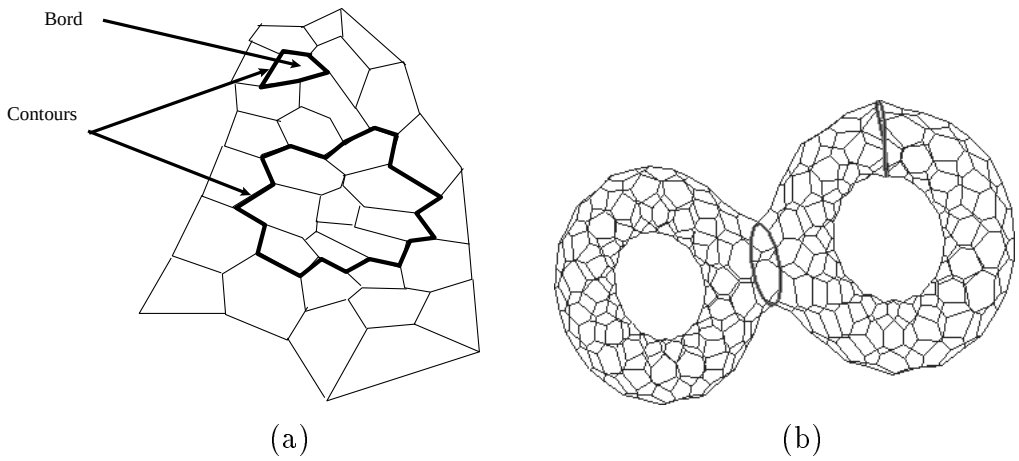


Fig. 2.20: (a) Définition d'un contour sur un 2-maillage simplexe. (b) Deux contours définis sur un maillage de genre deux. Le contour de droite est séparateur alors que celui de gauche ne l'est pas.

présentations utilisant des maillages réguliers (mailles rectangulaires ou parallélépipèdiques) que l'on qualifiera d'*uniforme*.

En effet, la structure des maillages réguliers ne peut être que globalement modifiée. Par exemple, une surface représentée à l'aide d'une grille régulière, ne peut être raffinée qu'en rajoutant une ligne ou colonne entière de sommets, ce qui indésirable. L'adaptation des maillages réguliers est un problème qui a été beaucoup étudié en conception assistée par ordinateur. Une approche consiste à considérer une superposition hiérarchisée de maillages réguliers. Citons les travaux de Forsey[For88], de Welch et Witkin[WW92] de Schmitt[SBD86] pour les surfaces splines et de Szeliski et Lavallée[SL93] pour les volumes splines.

La modification locale de la topologie des k-maillages simplexes s'effectue par un ensemble de t^k d'opérations $\{T_i^k\}$, $(i = 1, \ldots, t^k)$. Parmi tous les ensembles d'opérations topologiques que l'on peut définir sur les maillages simplexes, on ne retient que ceux vérifiant les deux propriétés suivantes :

Complétude Un ensemble d'opérations est dit complet [HDDM93], si étant donnés deux k-maillages simplexes, éventuellement de genre différent, il existe un nombre fini d'opérations transformant le premier maillage en le second. Ces opérations s'entendent en termes topologiques et non géométriques. Par

contre, on fera abstraction des bords du maillage en considérant de la même manière les faces correspondant à un bord ou non.

Indépendance Un ensemble d'opérations est dit indépendant si une opération élémentaire ne peut pas être obtenue par une combinaison des autres opérations élémentaires.

De plus, une opération est dite *eulerienne* si elle ne change pas le genre ou la connexité d'un maillage. Dans le cas contraire, on utilisera le terme de *méta-opération*. Les opérations eulériennes sont utilisées pour raffiner ou décimer un maillage, c'est-à-dire pour en contrôler le nombre de sommets. Les méta-opérations permettent de découper, de recoller ou d'agir sur le nombre de "poignées" du maillage.

La structure des maillages simplexes permet de ne définir que quatre opérations élémentaires $\{T_1^k, T_2^k, T_3^k, T_4^k\}$ sur un k-maillage simplexe. Les deux premières $\{T_1^k, T_2^k\}$ sont euleriennes et sont inverses l'une de l'autre. Les deux dernières $\{T_1^k, T_2^k\}$ sont des méta-opérations et sont également inverses l'une de l'autre. Ainsi, étant donnée une suite d'opération $\{T_{r(i)}^k\}$, $(i = 1, \ldots, n)$, $r(i) \in \{1, 2, 3, 4\}$ transformant un maillage $\mathcal{M}_1$ en un maillage $\mathcal{M}_2$:

$$\mathcal{M}_2 = T_{r(n)}^k \circ T_{r(n-1)}^k \circ \ldots \circ T_1^k(\mathcal{M}_1)$$

on peut transformer le maillage $\mathcal{M}_2$ en $\mathcal{M}_1$ à l'aide de la suite d'opérations élémentaires :

$$\mathcal{M}_1 = T_{\mathrm{Recip}(r(1))}^k \circ T_{\mathrm{Recip}(r(2))}^k \circ \ldots \circ T_{\mathrm{Recip}(r(n))}^k(\mathcal{M}_2)$$

où $\mathrm{Recip}(x)$ est la fonction définie sur $\{1, 2, 3, 4\}$ par:

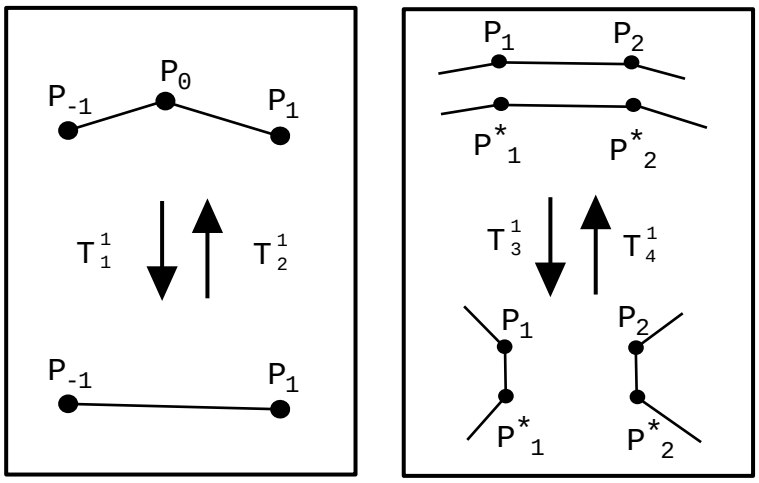
$$\mathrm{Recip}(1) = 2 \quad \mathrm{Recip}(2) = 1 \quad \mathrm{Recip}(3) = 4 \quad \mathrm{Recip}(4) = 3 \tag{2.11}$$

Dans les paragraphes suivants sont étudiées les opérations sur les 1, 2 et 3-maillages simplexes.

2.6.1 1-Maillage Simplexe

Les quatre opérations agissant sur les 1-maillages simplexes sont présentées dans la figure 2.21. Les deux opérations eulériennes T_1^1, T_2^1 consistent à supprimer ou à insérer un sommet dans le maillage. Les deux méta-opérations T_3^1, T_4^1 consistent à

connecter deux arêtes non adjacentes. Suivant que ces arêtes appartiennent ou non au même maillage, elles résultent en une séparation ou une fusion de maillages. Enfin, une conséquence du fait que les 1-maillages sont leur propre dual est que ces deux opérations sont équivalentes $T_3^1 = T_4^1$. L'ensemble des trois opérations $\{T_1^1, T_2^1, T_3^1\}$ satisfait trivialement aux deux critères de complétude et d'indépendance.



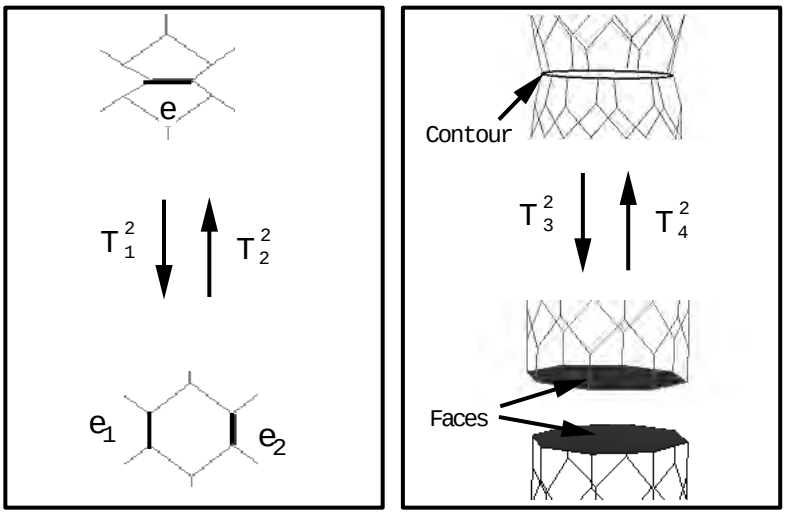
(a) (b)

Fig. 2.21: (a) Les deux opérations euleriennes T_1^1, T_2^1 ; (b) Les deux opérations T_3^1 and T_4^1 séparent ou soudent deux maillages. De plus, les deux opérations sont équivalentes $T_3^1 = T_4^1$

2.6.2 2-Maillage Simplexe

Les quatre opérations agissant sur les 2-maillages simplexes sont décrites dans la figure 2.22. Les deux opérations euleriennes T_1^1, T_2^1 agissent sur les arêtes. T_1^1 consiste à supprimer une arête et T_2^1 à connecter deux arêtes appartenant à une même face. Les deux méta-opérations T_3^1, T_4^1 opèrent respectivement sur les contours et les faces. T_3^1 coupe un maillage suivant un contour. Si ce contour est séparateur, alors T_3^1 coupe le maillage en deux parties; sinon T_3^1 diminue le genre de la surface (le nombre de "poignées"). T_4^1 connecte deux faces d'un même maillage ou de deux maillages distincts. Dans le premier cas, T_4^1 crée une poignée et donc augmente le genre du maillage. Dans le second cas, T_4^1 connecte les deux maillages.

Dans les paragraphes suivants, nous étudierons en détail le domaine de validité de ces opérations et nous introduirons trois *macro-opérations* T_5^1, T_6^1, T_7^1.



(a) (b)

Fig. 2.22: (a) Les deux opérations T_1^2, T_2^2 agissant sur les 2-maillages simplexes; (b) Les deux méta-opérations T_3^2 et T_4^2 qui modifient le genre ou la connexité du maillage.

Étude de T_1^2

La figure 2.23 décrit l'opération T_1^2 appliquée sur une arête e. Cette opération supprime deux sommets, $\Delta V = -2$, trois arêtes $\Delta E = -3$ et une face $\Delta F = -1$ de sorte qu'elle laisse inchangée la relation d'Euler :

$$\Delta V - \Delta E + \Delta F = 0$$

En fait, l'arête e et les quatre arêtes qui lui sont adjacentes sont supprimées et deux arêtes joignant P_1^1 à P_2^1 et P_1^2 à P_2^2 (voir figure 2.23) sont créées. Les deux faces opposées à e, $F_1^\star$ et $F_2^\star$ sont conservées mais leur nombre de sommets et d'arêtes est diminué d'une unité. La nouvelle face créée F provient de la fusion des deux faces adjacentes à e, F_1 et F_2. Les propriétés 2.2 et 2.3 associées aux maillages simplexes nous permettent d'établir que :

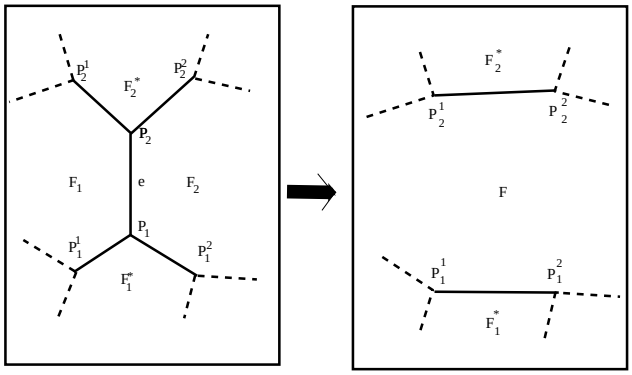


Fig. 2.23: Description de l'opération T_1^2

- $P_1^1 \neq P_1^2$ et $P_2^1 \neq P_2^2$.
- $P_2 \neq P_2^1$ et $P_2 \neq P_2^1$.
- $F_1 \neq F_2$.
- $F_1^\star \neq F_1$, $F_1^\star \neq F_2$, $F_2^\star \neq F_1$, $F_2^\star \neq F_2$.
- $P_1^1 \neq P_2^1$ et $P_1^2 \neq P_2^2$.

Afin que le maillage résultant de T_1^2 soit valide, il est nécessaire qu'il vérifie les deux propriétés 2.2 et 2.3 et qu'il soit complet. Ces conditions sont respectées si et seulement si :

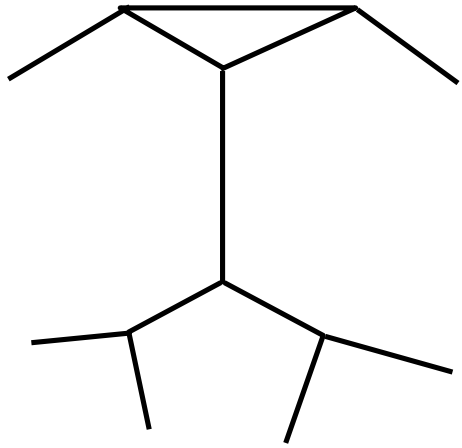
Configuration no 1 $F_1^\star$ ou $F_2^\star$ sont des triangles.

Configuration no 2 Il existe une face adjacente à F_1 et à F_2 autre que $F_1^\star$ et $F_2^\star$.

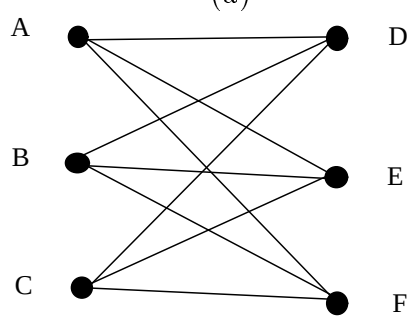
La figure 2.24 montre des exemples de maillages correspondant aux situations indiquées ci-dessus. Ils existent plusieurs maillages pour lesquels toutes les arêtes vérifient au moins l'une des ces deux conditions.

Étude de T_2^2

L'opération T_2^2 crée une arête entre deux arêtes d'une même face. Cette opération ajoute deux sommets, $\Delta V = +2$, trois arêtes $\Delta E = +3$ et une face $\Delta F = +1$



(a)



Face no 1:	AF + FB + BD + DC + CE + EA
Face no 2:	AD +DB + BE + EC + CF + FA
Face no 3:	DA+ AE + EB + BF + FC + CD

(b)

Fig. 2.24: Exemple de maillage où la face $F_1^\star$ est un triangle.(b) Maillage $K_{3,3}$ de genre un et constitué de trois hexagones. Dans ce maillage, chaque arête est dans la deuxième configuration qui interdit l'application de l'opération T_1^2.

de sorte qu'elle laisse également inchangée la relation d'Euler, quelle que soit la configuration du maillage. De plus, T_2^2 est l' opération inverse de T_1^2 :

$$T_1^2 \circ T_2^2(\mathcal{M}) = T_2^2 \circ T_1^2(\mathcal{M})$$

Pour cela, il suffit de montrer que l'arête séparant les deux faces crées par T_2^2 n'est pas dans l'une des deux configurations problématiques décrites dans la section précédente, ce qui est trivial.

Lorsque les deux arêtes sont adjacentes à un même sommet, l'opération T_2^2 est équivalente à une substitution d'un sommet par un triangle (voir figure 2.25).

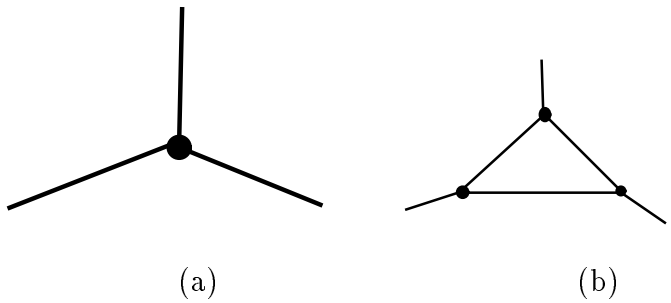


Fig. 2.25: L'application de l' opération T_2^2 sur deux arêtes adjacentes à un même sommet opère une transformation "étoile-triangle"

Étude de T_3^2

L'opération T_3^2 permet de découper un maillage en deux parties. L'algorithme de découpage est le même indépendamment du fait que le contour soit séparateur ou non. Lorsque que le contour n'est pas séparateur, T_3^2 ne change pas le nombre de sommets ni d'arêtes, $\Delta V = \Delta E = 0$, mais elle ajoute deux faces, $\Delta F = +2$ et augmente le genre d'une unité $\Delta g = 1$. Conformément à l'équation 2.5 on a bien :

$$\Delta F = -2\Delta g \tag{2.12}$$

On peut classer les sommets d'un contour en deux catégories. En effet, lorsque le contour est orienté, à chaque sommet du contour, il est possible d'associer un couple orienté d'arêtes. On distingue alors les sommets pour lesquels l'orientation

de ce couple d'arêtes est compatible ou non avec l'orientation des arêtes définie sur le maillage en ce sommet. C'est la compatibilité d'orientation qui permet de définir l'intérieur et l'extérieur d'un contour. Il y au moins un sommet "à l'intérieur" et au moins un sommet "à l'extérieur", sauf si le contour est une face du maillage, auquel cas il n'est pas possible d'effectuer l'opération.

L'algorithme consiste alors à créer les deux faces en joignant les sommets classés comme appartenant à l'intérieur ou à l'extérieur du contour (voir figure 2.26). Cette opération permet de construire des faces vérifiant les propriétés 2.2 et 2.3 des maillages simplexes puisqu'un sommet sur un contour ne peut avoir ses trois voisins sur ce contour.

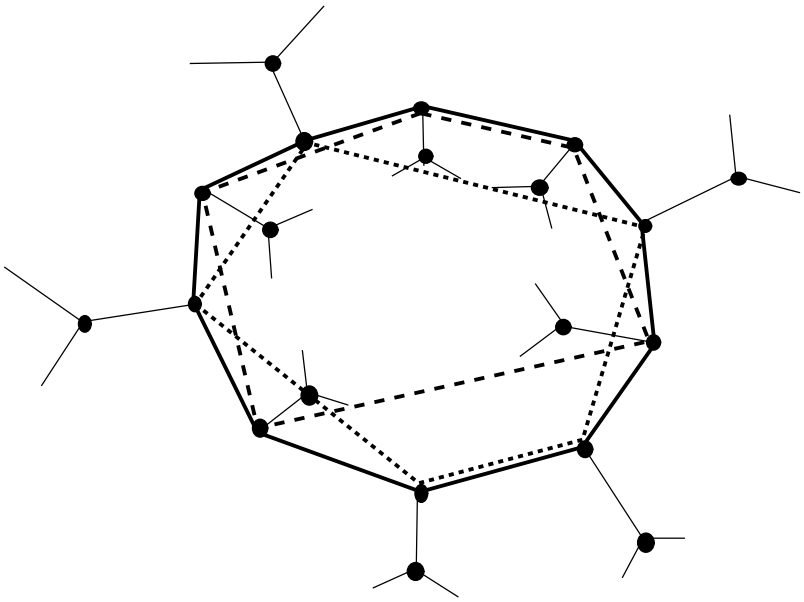


Fig. 2.26: Détail de l'algorithme permettant de découper un maillage suivant un contour (ici en gras). Les deux faces créées (en pointillés) relient les sommets qui ont la même orientation vis-à-vis du contour

Pour que T_3^2 soit valide, il est nécessaire qu'il y ait au moins trois sommets à l'intérieur ou à l'extérieur du contour. Or, ceci est toujours vérifié puisque l'existence d'un seule sommet à l'intérieur ou à l'extérieur est contradictoire avec le fait que le maillage soit complet (voir figure 2.27).

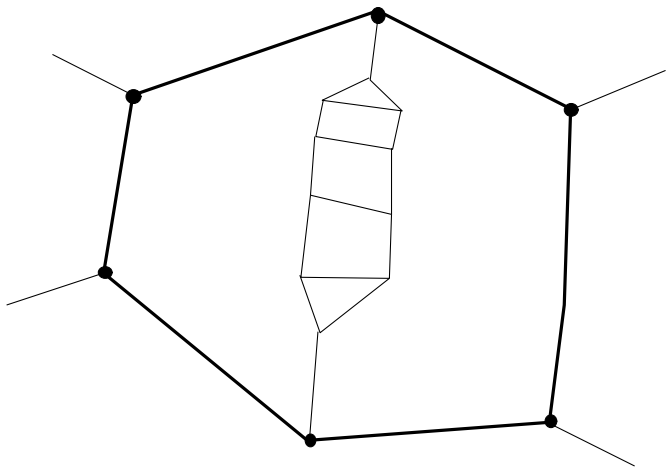


Fig. 2.27: Exemple de contour où il n'y a que deux sommets à l'intérieur. Dans ce cas, deux faces s'intersectent suivant deux arêtes et par conséquent le maillage n'est pas complet.

Etude de T_4^2

L'opération T_4^2 connecte deux faces d'un même maillage ou de deux maillages distincts. Lorsque les deux faces appartiennent au même maillage, l'opération laisse inchangé le nombre de sommets et d'arêtes, supprime deux arêtes, $\Delta F = -2$ et augmente le genre d'une unité de sorte que l'équation 2.12 soit vérifiée.

L'opération T_4^2 permet de connecter deux faces ayant éventuellement un nombre distinct de sommets p et q, $p \leq q$ (voir figure 2.28). Le contour ainsi créé a $p+q$ sommets dont p sont à l'intérieur et q sont à l'extérieur. Les sommets intérieurs et extérieurs sont disposés alternativement de la manière la plus régulière possible. Pour cela, on procède en déterminant le sommet i de la première face et le sommet j de la seconde face tels que la distance entre ces deux sommets soit minimum. A partir du sommet i, on insère au moins un sommet (puisque $p \leq q$) entre deux sommets de la première face. Le nombre de sommets à insérer au niveau de la r^{ime} arête est égal à $\lfloor rq/p \rfloor - \lfloor (r-1)q/p \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Pour que cette opération soit licite, il faut que les faces adjacentes aux arêtes soit distinctes. Par conséquent, on peut effectuer une opération T_4^2 sur deux faces si et seulement s'il n'existe pas de faces ayant une arête commune avec ces deux faces.

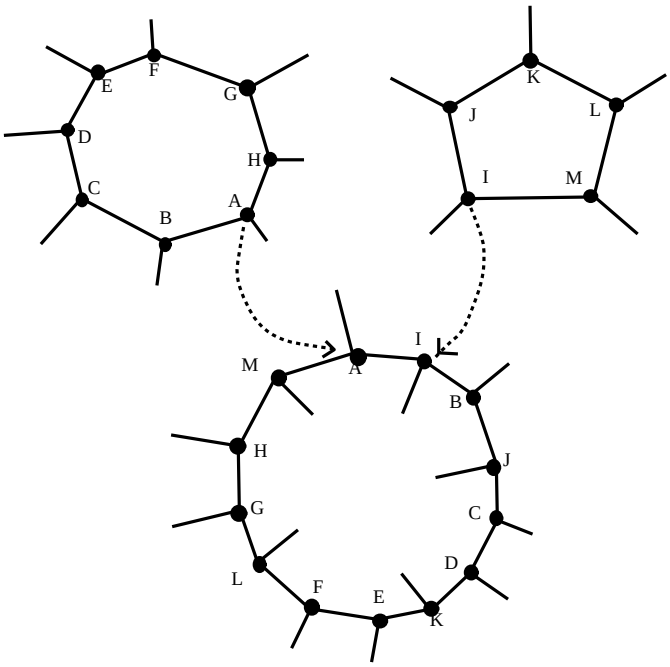


Fig. 2.28: L'opération T_4^2 permet de connecter deux faces ayant éventuellement un nombre différent de sommets (ici 8 et 5). Dans ce cas, il n'est pas possible de découper le maillage suivant le contour (en gras) puisqu'il n'y a que deux sommets "à l'intérieur" du contour.

Ce critère est évidemment vérifié si ces deux faces appartiennent à deux maillages distincts.

Deux macro-opérations T_5^2 et T_6^2

Nous définissons deux opérations euleriennes T_5^2 et T_6^2 supplémentaires. Ce sont des *macro-opérations* en ce sens qu'elles peuvent se décomposer à l'aide de T_1^2 et de T_2^2. Elles correspondent à des combinaisons particulières de ces opérations élémentaires qui seront utilisées lors de la décimation et le raffinement des maillages simplexes. T_5^2 correspond à une décimation d'une face (voir figure 2.29) et se décompose comme une succession d'opérations T_1^2 appliquées sur chaque arête de la face. T_6^2 permet, au contraire, de raffiner une face en créant à l'intérieur, une face ayant le même nombre de sommets (voir figure 2.31). La figure 2.30 montre la décomposition de cette opération en six opérations T_2^2. Ces deux opérations vérifient :

$$\mathcal{M} = T_6^2 \circ T_5^2(\mathcal{M})$$

Mais la composée de T_5^2 par T_6^2 ne redonne pas en général le maillage original.

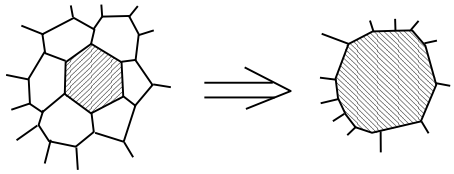


Fig. 2.29: Opération T_5^2 permettant de décimer une face

Échange d'arêtes T_7^2

L'opération T_7^2 est également une macro-opération eulerienne. Elle consiste à échanger une arête par son arête duale. Elle ne change ni le nombre de sommets ni celui des arêtes mais résulte en une augmentation du nombre de sommets des faces opposées d'une unité et une diminution du nombre de sommets des faces adjacentes d'une unité. Cette opération est donc utilisée pour harmoniser le nombre de sommets par faces. T_7^2 est licite si et seulement si les deux faces adjacentes ne sont pas des

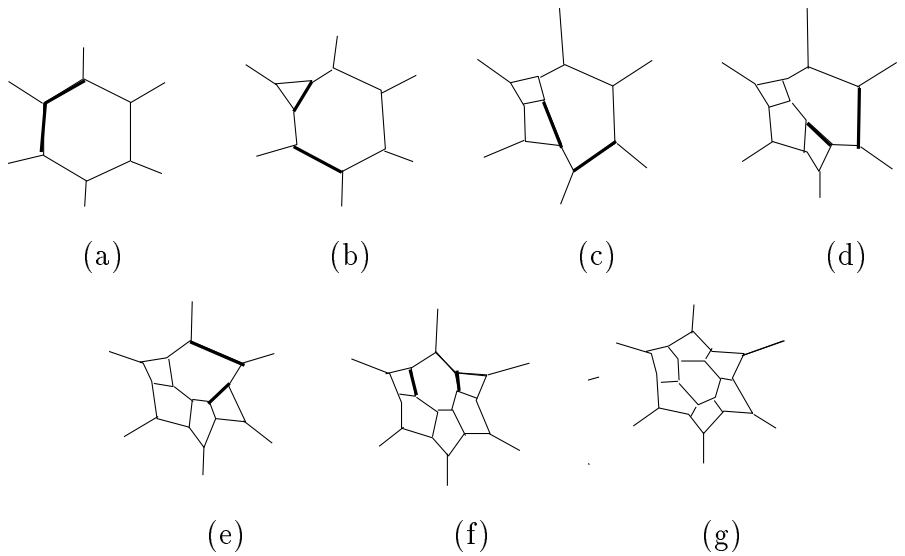


Fig. 2.30: Décomposition de la opération T_5^2 appliquée à une face de 6 sommets en 6 opérations T_2^2. Ces opérations sur les arêtes dessinées en gras.

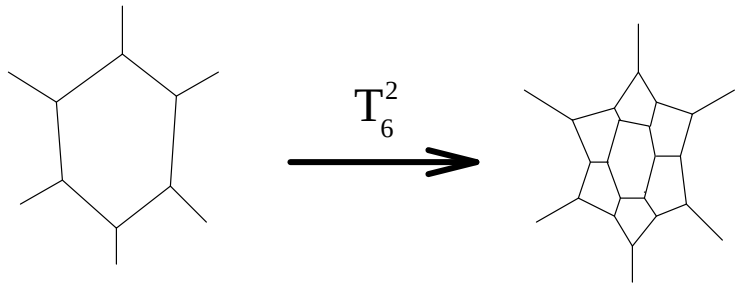
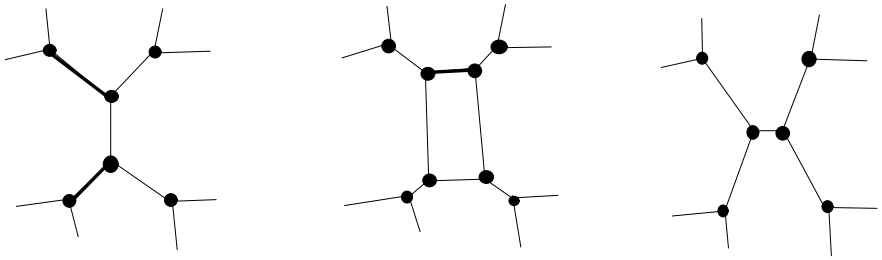


Fig. 2.31: Opération T_6^2 permettant de raffiner une face

triangles, et les deux faces opposées sont distinctes. La figure 2.32 montre comment cette macro-opération se décompose à l'une d'une opération T_2^2 et d'une opération T_1^2.



(a) (b) (c)

Fig. 2.32: L'opération T_7^2 consiste à échanger les sommets extrémités d'une arête. Elle peut se décomposer à l'aide d'une opération T_2^2 suivie d'une opération T_1^2. Les arêtes dessinées en gras sont celles sur lesquelles sont effectuées les opérations.

Opérations duales

A chaque opération sur les maillages simplexes correspond une opération duale sur les triangulations. Les opérations duales de T_1^2, T_2^2 et T_7^2 sont présentées dans la figure 2.33. Hoppe *et al*[HDDM93] utilise les trois opérations de suppression ("edge collapse"), de partage ("edge split") et d'échange d'arêtes ("edge swap") pour obtenir une triangulation géométriquement et topologiquement optimale. Il définit trois conditions pour lesquelles l'opération de suppression de l'arête AB, duale de T_1^2, est licite :

- Si C est adjacent à A et B, alors ABC est un triangle.
- Si A et B sont sur un bord alors A est une arête du bord.
- Si ni A ni B ne sont sur un bord, alors la triangulation doit avoir au moins 5 sommets. Si A ou B est sur un bord alors la triangulation doit avoir au moins 4 sommets.

Si l'on exclut les effets de bords qui n'ont pas d'équivalent pour les maillages simplexes, il n'existe qu'une seule condition générale pour que cette opération soit licite, correspondant aux deux configurations énumérées dans la section 2.6.2.

L'opération consistant à échanger les arêtes est très couramment utilisée pour régulariser des triangulations. Par exemple, elle permet d'obtenir des triangulations ayant des angles aux sommets les plus grands possibles dans l'ordre lexicographique. L'application successive de cette règle de régularisation sur une triangulation quelconque permet d'obtenir la triangulation de Delaunay[PS90]. Cette opération est aussi utilisée pour obtenir une triangulation où le nombre d'arêtes adjacentes par sommet est le plus régulier possible[FF91]. D'autres critères de régularité peuvent être optimisés comme la longueur totale des arêtes ou le rapport entre l'aire du cercle circonscrit et l'aire du triangle (voir l'article de Bern et Eppstein[BE91]). Il existe également un grande nombre de publications sur la génération automatique de maillages pour la méthode des éléments finis dont on trouvera un compte-rendu dans [HL88].

D'autres opérations euleriennes sur les triangulations sont employées par Turk[Tur92], Chen et Schmitt[CS93] et Huang *et al* [HG93]. Cependant, les opérations sur les triangulations permettant de changer leur genre ou leur connexité n'ont pas été étudiées de manière aussi exhaustive.

2.6.3 Opérations sur les 3-Maillage simplexes

Les deux opérations euleriennes T_1^3 et T_2^3 sont décrites dans la figure 2.34. La première consiste à supprimer une face et par conséquent à fusionner les deux cellules séparées par cette face. T_2^3, au contraire, opère sur un ensemble de faces d'une même cellule tel que chaque face ait deux arêtes en commun avec deux faces distinctes de cet ensemble. T_2^3 crée une nouvelle face, en joignant les arêtes séparant les faces adjacentes. Si p est le nombre de faces adjacentes, alors T_2^3 crée p nouveaux sommets ($\Delta V = +p$) $2p$ nouvelles arêtes ($\Delta E = +2p$) $p+1$ nouvelles faces ($\Delta F = p+1$) et une nouvelle cellule ($\Delta C = +1$), de sorte que l'équation d'Euler reste inchangée :

$$\Delta V - \Delta F + \Delta C = 0$$

Les configurations pour lesquelles l'opération T_1^3 n'est pas licite sont similaires à celles recontrées lors de l'étude de T_1^2 :

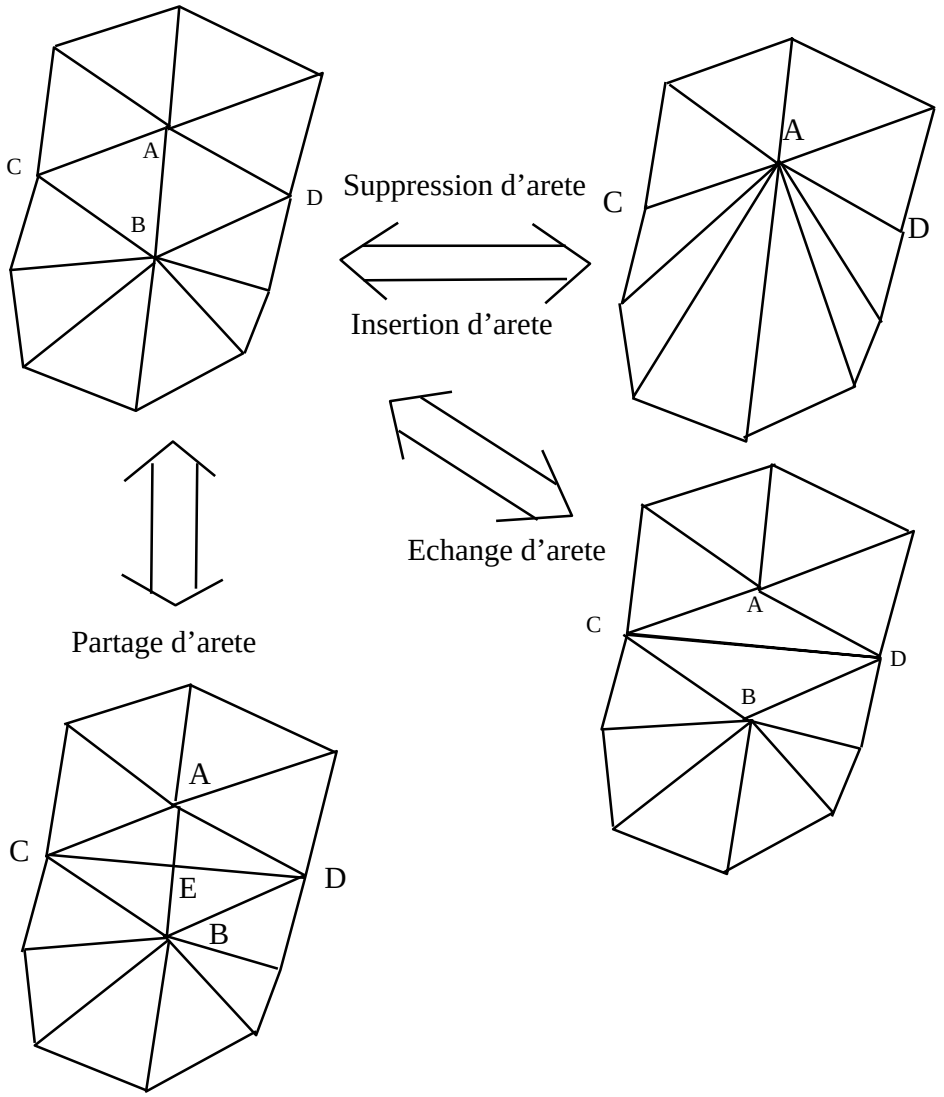


Fig. 2.33: Trois opérations définies sur des triangulations. Les deux premières consistent à supprimer ou à insérer une arête et sont duales de T_1^2 et de T_2^2. La troisième échange une arête et est duale de T_7^2.

Configuration no 1 La face f est adjacente à deux faces triangulaires (voir figure 2.35 (a)).

Configuration no 2 Il existe une cellule adjacente aux deux cellules distinctes des cellules opposées à chacune des arêtes de la face.

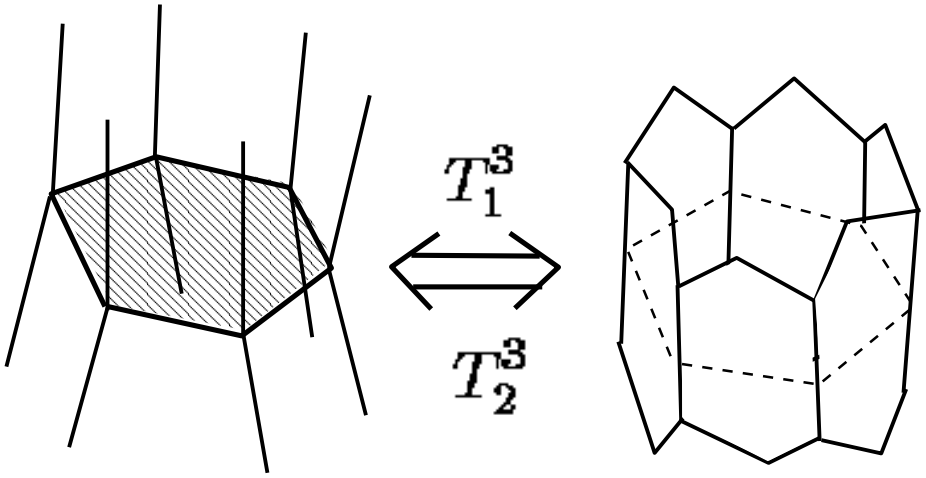


Fig. 2.34: Les transformations euleriennes agissant sur les 3-maillages simplexes.

2.7 Représentation des maillages simplexes

Les maillages simplexes ont une structure qui rend aisée leur manipulation à l'intérieur d'un programme informatique. Tout d'abord, les relations d'adjacence entre sommets et cellules sont fixées (voir tableau 2.4). De plus, dans un maillage simplexe orienté, on peut numéroter de manière cohérente les sommets et les cellules puisqu'on peut associer à une arête adjacente à un sommet, la cellule opposée. Enfin, contrairement aux triangulations, les bords du maillage sont représentés par une cellule du maillage. Par conséquent, il n'est pas nécessaire de prendre en considération lors des opérations topologiques, l'appartenance d'un sommet à un bord.

Les 1-maillages simplexes sont représentés comme des listes fermées doublement chaînées. Chaque élément de la liste pointe sur le sommet précédent et suivant et

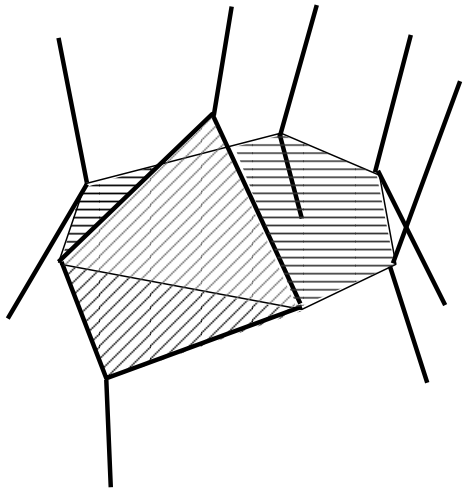


Fig. 2.35: Un 3-maillage simplexe où une face est adjacente à deux faces triangulaires.

contient les informations géométriques nécessaires à la déformation du maillage. Le maillage est une structure pointant sur le premier élément de la liste et éventuellement sur le sommet qui forme, avec le sommet suivant, le bord du maillage (voir figure 2.36).

Pour les 2-maillages simplexes, il existe plusieurs possibilités pour définir des structures de données minimales, sans redondance d'information. La première consiste à stocker à chaque sommet, la liste ordonnée des trois sommets voisins. Cette seule information permet de reconstruire simplement les faces et les arêtes.

Une autre structure de données, couramment utilisée en modélisation des solides par les frontières, est appelée "winged-edge" ou encore "arête ailée" décrite par Baumgart[Bau72]. L'élément de base de cette structure de donnée est l'arête. Chaque arête pointe sur les deux sommets adjacents, sur les deux faces adjacentes et sur les quatre arêtes adjacentes (voir figure 2.37). Chaque face pointe sur une seule arête et chaque sommet vers une arête adjacente. Cette structure est particulièrement efficace pour les 2-maillages simplexes pour lesquels il y a trois faces autour de chaque sommet.

Cependant, nous avons choisi d'utiliser une structure de données redondante,

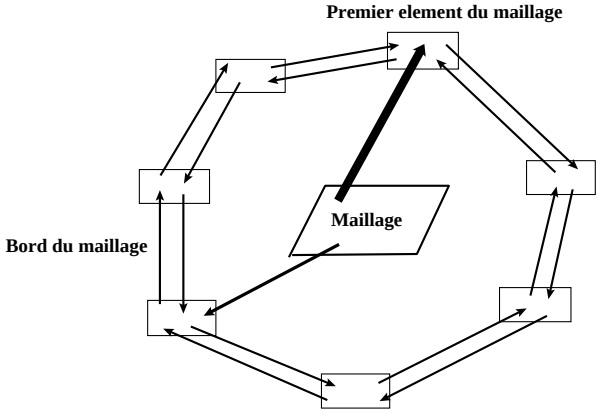


Fig. 2.36: Structure de données pour les 1-maillages simplexes

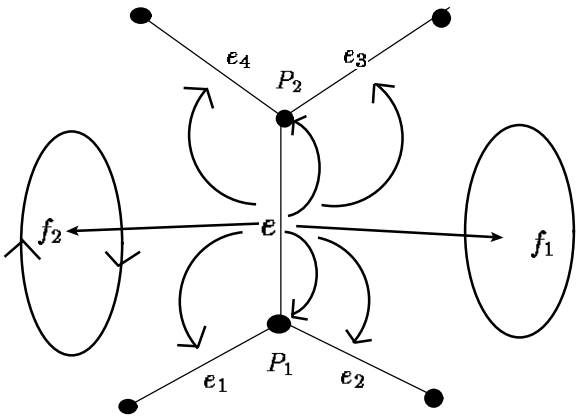


Fig. 2.37: Structure de données de l'arête ailée pour les 2-maillages simplexes

mais extrêmement complète. En effet, puisqu'il n'y a que quatre opérations élémentaires sur les maillages, la remise à jour de la structure de données ne s'effectue que dans quatre procédures, alors que la connaissance des adjacences entre sommets, arêtes et faces est nécessaire pour un nombre important de procédures. La simplicité d'implémentation ainsi que la vitesse de calcul a été privilégiée sur la quantité de mémoire de stockage. Le détail de la structure de données utilisée est présenté ci-dessous avec la syntaxe du langage C. Pour chaque maillage, sont créées la liste des sommets, celle des arêtes et celle des faces. Une face est représentée comme une liste fermée de sommets. Toutes les adjacences entre les sommets, arêtes et les faces sont stockées.

A chaque sommet, l'indice d'adjacence des trois sommets voisins permet de construire des fonctions sur un voisinage d'un sommet. En effet pour un sommet P_i, et un entier $k \in \{1, 2, 3\}$, on calcule l'indice l tel que $P_{N_l(k)} = P_i$. Ce paramètre l est stocké dans la structure de donnée comme étant $l =$ p1$->$which_neighbor[k]. Les deux sommets voisins de $P_{N_k(i)}$ distincts de P_i sont alors $P_{N_{(l+1) \pmod 3}(k)}$ et $P_{N_{(l+2) \pmod 3}(k)}$. En procédant ainsi par récurrence, on peut définir un voisinage à l'ordre m d'un sommet d'un 2-maillage simplexe.

```
typedef struct _Mesh{
{
    struct _Point  *first_point;        /* Le premier élément de la liste des sommets */
    struct _Edge   *first_edge;         /* Le premier élément de la liste des arêtes */
    struct _Face   *first_face;         /* Le premier élément de la liste des faces */
} *Mesh

typedef struct _Point{
{
    struct _Point  *neighbor[3];        /* Les 3 sommets adjacents */
    struct _Edge   *edge[3];            /* Les 3 arêtes adjacentes */
    struct _Face   *face[3];            /* Les 3 faces adjacentes */

    int            which_neighbor[3];   /* L'indice d'adjacence de ce sommet
                                           pour un sommet adjacent */
    struct _Point  *previous;           /* Le sommet précédent dans la liste */
    struct _Point  *following;          /* Le sommet suivant dans la liste */
} *Point
```

```
typedef struct _Edge
{
    struct _Point  *point[2];          /* Les deux sommets adjacents */
    struct _Face   *face[2];           /* Les deux faces adjacentes */

    struct _Edge   *previous;          /* L'arête précédente dans la liste */
    struct _Edge   *following;         /* L'arête suivante dans la liste */
} *Edge


typedef struct _Face
{
    struct _Face_Item  *first_item;            /* Le premier élément de la face*/

    struct _Face       *previous;              /* La face précédente dans la liste */
    struct _Face       *following;             /* La face suivante dans la liste */
} *Face


typedef struct _Face_Item
{
    struct _Point       *point;                /* Le sommet adjacent */
    struct _Edge        *edge;                 /* L'arête constituée par le sommet adjacent
                                               et son suivant */
    struct _Face        *face;                 /* La face adjacente à l'arête
                                               distincte de la face courante */

    struct _Face_Item   *previous;             /* L'élément précédent dans la face */
    struct _Face_Item   *following;            /* L'élément suivant dans la face */
} *Face_Item
```

Chapitre 3

Géométrie des maillages simplexes

Ce chapitre a deux objectifs principaux. Il s'agit, d'une part, de mettre en évidence les analogies existantes entre la géométrie des surfaces continues de $\mathbb{R}^{k+1}$ et la géométrie des k-maillages simplexes. Pour cela, on comparera les représentations de forme des surfaces et des maillages simplexes et on établira autant que possible des théorèmes de convergence entre les entités discrètes et les entités continues.

Il s'agit d'autre part, d'extraire des paramètres permettant de caractériser la forme des maillages simplexes. En particulier, on cherchera à obtenir une équation décrivant la position d'un sommet en fonction de ces paramètres de forme et de la position des sommets voisins. En effet, grâce à cette équation, il sera possible de définir des énergies locales permettant de lisser ou de régulariser un maillage simplexe. De plus, les paramètres permettant une représentation univoque de la forme, il sera ainsi possible de construire des énergies de déformations pour lesquelles

un maillage se déforme en gardant une forme a priori.

La géométrie des k-maillages simplexes prend une forme particulièrement simple lorsque ces maillages représentent des surfaces de $\mathbb{R}^{k+1}$. On se limitera par conséquent à l'étude de la géométrie des k-maillages de $\mathbb{R}^{k+1}$, à l'exception des 1-maillages de $\mathbb{R}^3$ correspondant à la discrétisation des courbes gauches.

De plus, on supposera dans ce chapitre que les k-maillages envisagés ne sont pas dégénérés, c'est à dire que les $k+1$ voisins d'un sommets sont linéairement indépendants et que par conséquent ils forment un $k-1$ simplexe de $\mathbb{R}^k$. On supposera ainsi que la distance entre les deux voisins d'un sommet d'un 1-maillage simplexe est non nulle, et que le rayon du cercle circonscrit aux trois voisins d'un sommet d'un 2-maillage simplexe est également non nul.

La contribution majeure de ce chapitre est d'introduire la notion d'angle simplexe à un sommet d'un maillage simplexe. L'angle simplexe est similaire à l'angle solide défini sur les triangulations (ou les polyèdres) et il généralise de plusieurs manières l'angle utilisé en géométrie plane.

L'angle simplexe est lié à la courbure moyenne et on démontre en particulier que la courbure moyenne discrète calculée à l'aide de l'angle simplexe, converge vers la courbure moyenne H de la surface dans certaines conditions. De plus, on démontre que la courbure moyenne est solution d'un critère d'optimalité : parmi toutes les sphères passant par un point donné, c'est la sphère minimale de courbure H qui minimise sa distance à la surface.

La notion d'angle simplexe a été présentée dans les actes de ICCV'93[DHI93], de CVPR'94[Del94b] ainsi que dans le rapport de recherche [DHI92b]. Une description géométrique plus complète se trouve dans le rapport de recherche[Del94a].

3.1 Géométrie des 1-maillages simplexes

3.1.1 Géométrie des courbes planes

Définition d'une courbe plane paramétrique

Une courbe de $\mathbb{R}^2$ est donnée par sa représentation paramétrique* :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

où les coordonnées cartésiennes x, y sont des fonctions différentiables de t. Pour éviter les problèmes potentiels concernant la paramétrisation de la courbe, nous supposerons que :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}, t \in [a, b]$$

où $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{dx}{dt}$ est la dérivée de $x(t)$ par rapport à t. Une telle paramétrisation est appelée régulière.

Un changement de variable $\tau = \tau(t)$, où τ est une fonction différentiable de t, ne change pas la forme de la courbe. Cette reparamétrisation sera régulière si $\dot{\tau} \neq 0$ pour $t \in [a, b]$, afin que l'on puisse calculer l'inverse $t = t(\tau)$. Soit :

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}\| dt$$

une paramétrisation. Parce que :

$$\dot{\mathbf{x}} dt = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} dt = \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} d\tau,$$

s est indépendant de la paramétrisation régulière utilisée. C'est un paramètre invariant appelé l'*abscisse curviligne* .

Repère de Frenet

Nous allons introduire un système de coordonnées locales en un point d'une courbe plane $\mathbf{x}(t)$, ce qui permet de faciliter la description de la forme locale de la courbe.

*On note en gras $\mathbf{x}$ les vecteurs et en italique $x(t)$ les scalaires

Si, on suppose que les dérivées utilisées existent en ce point, alors les premiers termes du développement de Taylor de $\mathbf{x}(t+\Delta t)$ sont :

$$\mathbf{x}(t+\Delta t) = \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}\Delta t + \ddot{\mathbf{x}}\frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$

Si on suppose que les deux premières dérivées sont linéairement indépendantes, alors $(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})$ forment un repère locale affine. En orthonormalisant, les deux vecteurs dérivées, on définit alors les vecteurs *tangent* et *normal*[†] :

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \quad \mathbf{m} = \mathbf{t}^{\perp} \tag{3.1}$$

Les deux vecteurs $(\mathbf{t}, \mathbf{m})$ forment un repère orthonormé local appelé le *repère de Frénet*.

Équation du repère mobile

L'évolution du repère de Frénet en fonction de la variation du paramètre t permet d'obtenir des informations sur la forme de la courbe dans le plan. Les formules sont particulièrement simples si on utilise la paramétrisation par l'abscisse curviligne :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= \kappa\mathbf{m} \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t} \end{aligned} \tag{3.2}$$

La courbure $\kappa = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{\|\dot{\mathbf{x}}\wedge\ddot{\mathbf{x}}\|}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3}$ peut se calculer à l'aide de la variation de l'angle polaire α du vecteur tangent :

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$$

Le cercle qui a un contact d'ordre deux avec la courbe est appelé le *cercle osculateur*. Son centre est $c = \mathbf{x} + \rho\mathbf{m}$ et son rayon ρ est le rayon de courbure $\rho = \frac{1}{\kappa}$.

Équation intrinsèque d'une courbe plane

La forme d'une courbe plane, à une transformation rigide près, est donnée par son *profil de courbure* $\kappa = \kappa(s)$. En effet, à l'aide d'une quadrature, le profil de courbure permet de déterminer l'angle polaire de la tangente $\alpha(s) = \int_0^s \kappa(u)du$, puis les

[†]Si $\mathbf{t} = (a,b)^T$ alors on note $\mathbf{t}^{\perp}$ le vecteur $\mathbf{t}^{\perp} = (-b,a)^T$

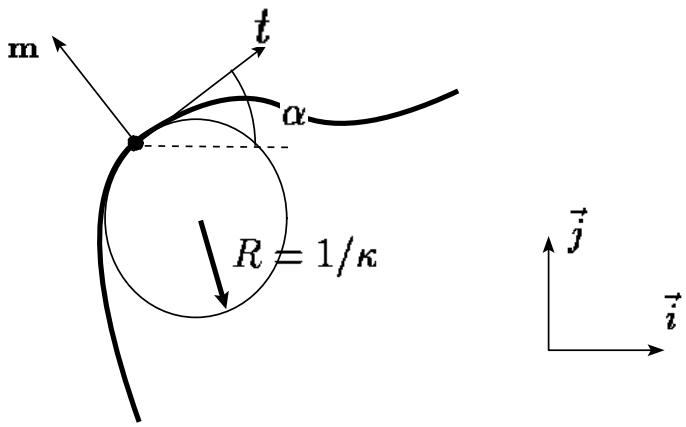


Fig. 3.1: Vecteur tangent $\mathbf{t}$, vecteur normal $\mathbf{m}$ et cercle osculateur définis en un point d'une courbe plane.

coordonnées :

$$x(s) = \int_0^s \cos(\alpha(s))ds \quad y(s) = \int_0^s \sin(\alpha(s))ds \tag{3.3}$$

Une équation différentielle faisant intervenir $\kappa(s)$ et ses dérivées $F(\kappa(s), \frac{d\kappa}{ds}, \ldots) = 0$ définit par conséquent, une famille de courbes qui se déduisent par transformation rigide. Cette équation est appelée *équation intrinsèque* de cette famille de courbes.

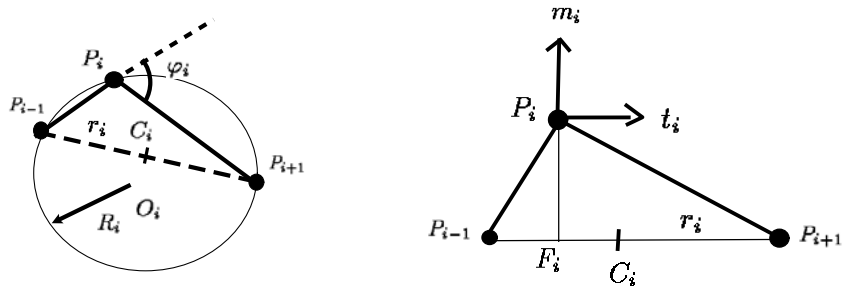
3.1.2 Géométrie des 1-maillages simplexes plans

Repère Local

Un 1-maillage simplexe est une ligne polygonale $\{P_i\}$, $(i = 1, \ldots, n)$. Dans cette section, nous considérerons le maillage plan, c'est à dire que $P_i \in \mathbb{R}^2$. Sur cette ligne polygonale, on définit, de manière identique aux courbes continues, un vecteur tangent et normal :

$$\mathbf{t}_i = \frac{P_{i-1}P_{i+1}}{\|P_{i-1}P_{i+1}\|} \quad \mathbf{m}_i = \mathbf{t}_i^{\perp} \tag{3.4}$$

Le repère orthonormé local $(\mathbf{t}_i, \mathbf{m}_i)$ est l'équivalent discret du repère de Frénet. La courbure (discrète) κ_i en un sommet P_i est évaluée comme l'inverse du rayon du cercle circonscrit aux trois points P_{i-1}, P_i, P_{i+1}. Le signe de la courbure dépend du coté où se situe le centre de courbure par rapport au vecteur normal.



(a) (b)

Fig. 3.2: (a) Définition de la courbure κ_i par l'intermédiaire du rayon du cercle circonscrit $R_i = 1/\kappa_i$. C_i est le milieu du segment $[P_{i-1}P_{i+1}]$. (b) Définition du vecteur tangent et normal. F_i est la projection orthogonale de P_i sur $P_{i-1}P_{i+1}$.

Représentation des 1-maillages simplexes plans

On définit également l'angle φ_i entre deux segments adjacents à P_i et les deux paramètres métriques ϵ_i^1, ϵ_i^2 :

$$\epsilon_i^1 = \frac{\overline{F_iP_{i+1}}}{\overline{P_{i-1}P_{i+1}}} \quad \epsilon_i^2 = \frac{\overline{P_{i-1}F_i}}{\overline{P_{i-1}P_{i+1}}} \tag{3.5}$$

Les deux paramètres métriques sont les coordonnées barycentriques de la projection orthogonale F_i de P_i sur le segment $[P_{i-1}P_{i+1}]$. Par conséquent, ils vérifient :

$$\epsilon_i^1 + \epsilon_i^2 = 1$$

Si on note r_i, la demi-longueur de $[P_{i-1}P_{i+1}]$, alors en utilisant la loi des sinus dans le triangle $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, la courbure en P_i peut s'exprimer simplement à l'aide de l'angle φ_i :

$$k_i = \frac{\sin(\varphi_i)}{r_i} \tag{3.6}$$

La hauteur de P_i au dessus du segment $[P_{i-1}P_{i+1}]$ ne dépend que de la demi-longueur r_i, de l'angle φ_i, de la distance d_i de F_i au milieu C_i (voir figure 3.3). On notera $L(r_i, d_i, -\varphi_i)$ la fonction donnant cette hauteur.

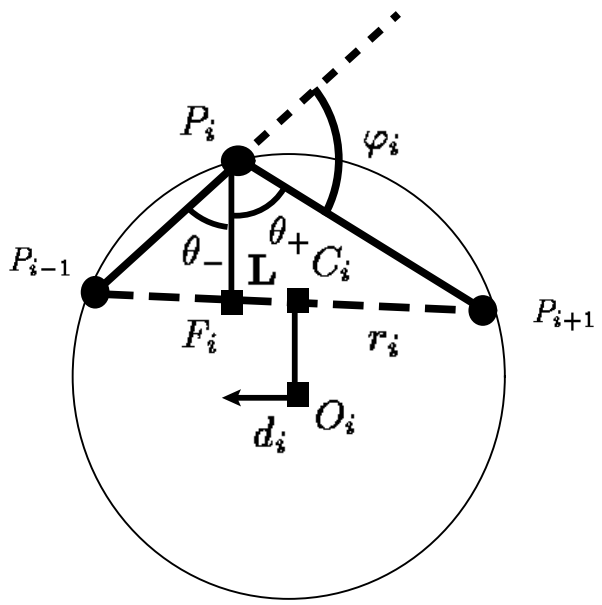


Fig. 3.3: Calcul de la hauteur $L(r_i, d_i, \varphi_i)$

Si on note θ_- l'angle $\angle P_{i-1}P_iF_i$ et θ_+ l'angle $\angle F_iP_iP_{i+1}$, alors on a les deux relations :

$$\tan(\theta_-) = \frac{(r_i - d_i)}{L} \qquad \tan(\theta_+) = \frac{(r_i + d_i)}{L}$$

Or puisque $\varphi_i = \pi - \theta_- - \theta_+$, on a de plus :

$$-\tan(\varphi_i) = \tan(\theta_- + \theta_+) = \frac{\tan(\theta_-) + \tan(\theta_+)}{1 - \tan(\theta_-)\tan(\theta_+)}$$

Après substitution, on obtient :

$$L(r_i, d_i, \varphi_i) = \frac{(r_i^2 - d_i^2)\tan(\varphi_i)}{\epsilon\sqrt{r_i^2 + (r_i^2 - d_i^2)\tan^2(\varphi_i)} + r_i} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 \quad si \quad |\varphi_i| < \pi/2 \\ \epsilon &= -1 \quad si \quad |\varphi_i| > \pi/2 \end{aligned}$$

En remarquant que $d_i = |2\epsilon_i^1 - 1|r_i = |2\epsilon_i^2 - 1|r_i$, on peut alors exprimer la position de P_i à l'aide de la position de ses deux voisins et des trois paramètres $\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \varphi_i$:

$$P_i = \epsilon_i^1 P_{i-1} + \epsilon_i^2 P_{i+1} + L(r_i, |2\epsilon_i^1 - 1|r_i, \varphi_i)\mathbf{m}_i \tag{3.8}$$

Lorsque $\epsilon_i^1 = \frac{1}{2}$, alors l'équation 3.8 se simplifie :

$$P_i = \epsilon_i^1 P_{i-1} + \epsilon_i^2 P_{i+1} + \frac{\tan \varphi_i}{2} \mathbf{m}_i \tag{3.9}$$

Il faut remarquer que le choix de ϵ_i^1 n'est pas complètement indépendant de celui de φ_i. En effet, le lieu des sommets P_i pour lesquels on a un angle au sommet égal à φ_i est un cercle de rayon $r_i / \sin(\varphi_i)$. Par conséquent, la valeur maximale de la distance d_i est $r_i / \sin(\varphi_i)$, ce qui entraine l'inégalité :

$$|(2\epsilon_i^1 - 1)\sin(\varphi_i)| \leq 1 \tag{3.10}$$

L'ensemble des deux paramètres indépendants $(\epsilon_i^1, \varphi_i)$ forment une représentation naturelle des 1-maillages simplexes plans. Le paramètre métrique ϵ_i^1 caractérise l'espacement entre les sommets du maillage. Si $\epsilon_i^1 = \frac{1}{2}$, pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors tous les sommets sont régulièrement espacés. L'angle φ_i, par contre, représente une mesure discrète de la courbure au point P_i. Une propriété importante est que cette représentation est univoque :

Propriété 8 *L'ensemble des valeurs $\{\epsilon_i^1, \varphi_i\}$ représente la forme d'un 1-maillage simplexe plan à une isométrie et échelle près.*

Preuve: Soit un maillage $\mathcal{M}$ et $\{\epsilon_i^1, \varphi_i\}$, $i = 1, \ldots, n$ l'ensemble des paramètres associés. La démonstration consiste à montrer que l'on ne peut construire qu'un seul maillage ayant $\{\epsilon_i^1, \varphi_i\}$ pour paramètres. On commence par choisir les deux sommets P_1 et P_3. Par la relation 3.8, on en déduit la position de P_2. En connaissant la position de P_2, P_3, on peut en déduire celle de P_4. En effet, en utilisant la figure 3.3, on en déduit les relations:

$$\begin{aligned} P_{i-1}P_i \cdot P_{i-1}P_{i+1} &= \epsilon_i^2 \|P_{i-1}P_{i+1}\|^2 \\ &= \epsilon_i^2 \left(\|P_{i-1}P_i\|^2 + \|P_iP_{i+1}\|^2 - 2\|P_{i-1}P_i\|\|P_iP_{i+1}\| \cos(\varphi_i) \right) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$P_{i-1}P_i \cdot P_{i-1}P_{i+1} = \|P_{i-1}P_i\|^2 - \|P_{i-1}P_i\|\|P_iP_{i+1}\| \cos(\varphi_i)$$

D'où une équation du second degré permettant de calculer $\|P_iP_{i+1}\|$ en fonction de $\|P_{i-1}P_i\|$, φ_i et $\epsilon_i^2 = 1 - \epsilon_i^1$:

$$\epsilon_i^2 \|P_iP_{i+1}\|^2 + (1 - 2\epsilon_i^2)\|P_{i-1}P_i\|\|P_iP_{i+1}\| \cos(\varphi_i) + (\epsilon_i^2 - 1)\|P_{i-1}P_i\|^2$$

Le discriminant étant toujours positif $\Delta = \|P_{i-1}P_i\|^2\|P_iP_{i+1}\|^2(1-(1-2\epsilon_i^2)^2\sin^2(\varphi_i))$ d'après la relation 3.10, on vérifie que l'on a qu'une seule racine positive. Ainsi, on peut construire un unique point P_4 et en itérant la méthode sur les deux derniers sommets, on construit ainsi le maillage de manière unique. Le choix initial de P_1 et P_3 définit la translation, rotation et échelle associées à la représentation □

Relation entre les notions géométriques discrètes et continues

Dans ce paragraphe, nous avons défini la notion de courbure, de tangente et une représentation de forme des 1-maillages simplexes. Il existe d'autres définitions possibles de ces entités géométriques. L'emploi du terme *courbure discrète* ne se justifie qu'en utilisant un argument de convergence de la notion discrète vers la notion continue lorsque la densité du maillage devient infiniment grande.

Ainsi, on peut justifier que le vecteur tangent discret $\mathbf{t}_i$ converge vers le vecteur tangent $\mathbf{t}$ au sens continu. En effet, soit P un point d'une courbe plane paramétrique $\mathbf{x}(t)$ et $P(t+\Delta t)$ et $P(t-\Delta t)$. En utilisant le développement de Taylor à l'ordre un, on a :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{t}_i = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} = \mathbf{t}$$

De même, on a $\lim_{\Delta t \to 0} \kappa_i = \kappa$ puisque lorsque les deux sommets voisins se rapprochent de P_i, le cercle formé converge vers le cercle osculateur de courbure κ. Enfin, on a :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{2\epsilon_i^1 - 1}{\Delta t} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{2\|\dot{\mathbf{x}}\|^2} = \frac{\frac{d^2 s}{dt^2}}{\frac{ds}{dt}}$$

Preuve: Puisque $P_{i+1}P_i \cdot P_{i+1}P_{i-1} = \epsilon_i^1\|P_{i-1}P_{i+1}\|^2$, en utilisant le développement de Taylor à l'ordre deux, on a :

$$\left(\dot{\mathbf{x}}\Delta t + \ddot{\mathbf{x}}\frac{\Delta t^2}{2}\right) \cdot (2\dot{\mathbf{x}}\Delta t) = \epsilon_i^1 \left(4\|\dot{\mathbf{x}}\|^2\Delta t^2 + O(\Delta t^4)\right)$$

□

Ainsi, les paramètres métriques caractérisent bien la nature de la paramétrisation. On peut ainsi faire un parallèle entre les 1-maillages ayant leurs sommets régulièrement espacés ($\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = 1/2$) et les courbes paramétrées par leur abscisse curviligne. On appellera les maillages simplexes vérifiant $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = 1/2$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, des maillages simplexes *paramétriquement réguliers*. Il découle de la propriété 8 la propriété suivante :

Propriété 9 *La forme des 1-maillages simplexes plan vérifiant $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = 1/2$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ est uniquement décrite par l'ensemble des angles aux sommets $\{\varphi_i\}$.*

Cette propriété est l'équivalent discret de la représentation des courbes planes par leur profil de courbure exprimé en fonction de l'abscisse curviligne.

3.1.3 Géométrie des courbes gauches

Une courbe de $\mathbb{R}^3$ est donnée par son équation paramétrique :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, t \in [a, b] \subset \mathbb{R}$$

On définit de manière similaire aux courbes planes, une paramétrisation invariante utilisant l'abscisse curviligne. Le repère de Frénet est construit par le procédé orthonormalisation de Gram-Schmidt des dérivées successives :

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}}\|} \quad \mathbf{m} = \mathbf{b} \wedge \mathbf{t} \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}}{\|\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}\|} \tag{3.11}$$

$\mathbf{b}$ est le vecteur binormal, orthogonal au plan osculateur.

Équation de Serret-Frénet

La méthode du trièdre mobile permet de caractériser la forme locale d'une courbe gauche. Elle exprime la dérivée du trièdre local en fonction de l'abscisse curviligne :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{t}}{ds} &= & +\kappa\mathbf{m} & \\ \frac{d\mathbf{m}}{ds} &= -\kappa\mathbf{t} & & +\tau\mathbf{b} \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= & -\tau\mathbf{m} & \end{aligned} \tag{3.12}$$

où κ et τ sont la courbure et la torsion de la courbe. Ils peuvent se définir à l'aide des dérivées en fonction de l'abscisse curviligne s et du paramètre courant[‡] :

$$\kappa = \kappa(s) = \|\tfrac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\| \qquad \kappa = \kappa(t) = \frac{[\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}\dddot{\mathbf{x}}]}{\|\dot{\mathbf{x}}\|^3}$$

[‡] $[abc]$ désigne le produit mixte : $[abc] = a \cdot (b \wedge c)$

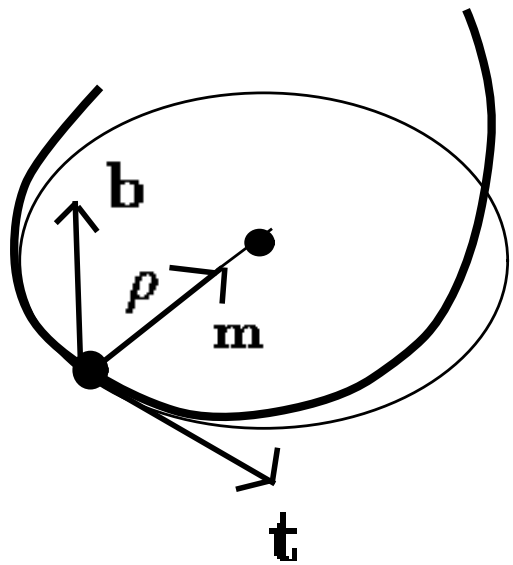


Fig. 3.4: Vecteur tangent $\mathbf{t}$, vecteur normal $\mathbf{m}$ vecteur $\mathbf{b}$ et cercle osculateur définis en un point d'une courbe gauche.

$$\tau = \tau(s) = \frac{1}{\kappa^2}[\frac{d\mathbf{x}}{ds}\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\frac{d^3\mathbf{x}}{ds^3}] \quad \tau = \tau(t) = \frac{[\dot{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{x}}\dddot{\mathbf{x}}]}{\|\dot{\mathbf{x}} \wedge \ddot{\mathbf{x}}\|}$$

La courbure et la torsion ont une signification géométrique intuitive. En effet il suffit de considérer un point $\mathbf{x}(s)$ d'une courbe gauche et un point "voisin" $\mathbf{x}(s+\Delta s)$. On appelle alors $\Delta\varphi$, l'angle entre les deux vecteurs normal $\mathbf{t}(s)$ et $\mathbf{t}(s+\Delta s)$ et $\Delta\psi$, l'angle entre les deux vecteurs binormal $\mathbf{b}(s)$ et $\mathbf{b}(s+\Delta s)$. Il est facile de prouver que :

$$\kappa = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad \tau = \lim_{\Delta s \to 0} -\frac{\Delta\psi}{\Delta s} \tag{3.13}$$

En d'autres termes, κ et τ sont les vitesses angulaires de $\mathbf{t}$ et $\mathbf{b}$ lorsque le trièdre est fonction du paramètre s.

Le cercle osculateur ayant un contact d'ordre deux avec la surface se situe dans le plan osculateur (voir figure 3.4). Le rayon de courbure est égale à l'inverse de la courbure.

Représentation d'une courbe gauche

La forme d'une courbe gauche est donnée par son profil de courbure $\kappa(s)$ ainsi que son profil de torsion $\tau(s)$. Mais, l'obtention des fonctions coordonnées à partir des deux profils de courbure et torsion, passe par la résolution d'une équation différentielle de Ricatti, dérivée des équations de Serret-Frénet. Il est en général impossible de résoudre explicitement cette équation.

3.1.4 Géométrie des 1-maillages simplexes de $\mathbb{R}^3$

Sur un 1-maillage simplexe gauche, le vecteur binormal en P_i est le vecteur normal au plan constitué par P_i et ses deux sommets voisins :

$$\mathbf{t}_i = \frac{P_{i-1}P_{i+1}}{\|P_{i-1}P_{i+1}\|} \quad \mathbf{m}_i = \mathbf{b}_i \wedge \mathbf{t}_i \quad \mathbf{b}_i = \frac{P_{i-1}P_i \wedge P_iP_{i+1}}{\|P_{i-1}P_i \wedge P_iP_{i+1}\|} \tag{3.14}$$

Lorsque les trois sommets P_{i-1}, P_i et P_{i+1} sont alignés, le vecteur binormal est a priori indéterminé. Cependant, il est possible de construire $\mathbf{b}_i$ en remplaçant P_iP_{i+1} par un vecteur $P_{i+p}P_{i+p+1}$ $(p > 0)$ non colinéaire à $P_{i-1}P_i$.

Nous définissons de la même manière que dans la section 3.1.2 les deux paramètres métriques $(\epsilon_i^1, \epsilon_i^2)$ ainsi que l'angle au sommet φ_i. Cet angle φ_i étant la formulation discrète de la courbure en P_i, il est intuitif d'introduire l'angle fait par les deux vecteurs binormaux $\mathbf{b}_{i-1}$ et $\mathbf{b}_{i+1}$ qui est la formulation discrète de la torsion. Cependant, il n'est pas possible en pratique d'exprimer explicitement la position de P_i en fonction de la position de ses voisins et de cet angle de torsion.

C'est pourquoi on introduit un vecteur auxiliaire $\mathbf{r}_i$ dont la direction est orthogonal à $\mathbf{t}_i$:

$$\mathbf{r}_i = \frac{\mathbf{t}_i \wedge (P_{i-2}P_{i-1} \wedge P_{i-1}P_{i-2})}{\|\mathbf{t}_i \wedge (P_{i-2}P_{i-1} \wedge P_{i-1}P_{i-2})\|} \tag{3.15}$$

Ainsi, $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{t}_i \wedge \mathbf{r}_i$ constituent une base orthonormée du plan normal, orthogonal à $\mathbf{t}_i$. Par conséquent, on peut définir l'angle orienté ψ_i que fait $\mathbf{m}_i$ avec $\mathbf{r}_i$:

$$\mathbf{m}_i = \cos(\psi_i)\mathbf{r}_i + \sin(\psi_i)\mathbf{t}_i \wedge \mathbf{r}_i \tag{3.16}$$

On peut alors exprimer la position de P_i en fonction de ses quatre voisins P_{i-2}, P_{i-1}, P_{i+1}, P_{i+2}, ainsi qu'en fonction des quatre paramètres adimensionés $(\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \varphi_i, \psi_i)$:

$$P_i = \epsilon_i^1 P_{i-1} + \epsilon_i^2 P_{i+1} + L(r_i, d_i, \varphi_i)(\cos(\psi_i)\mathbf{r}_i + \sin(\psi_i)\mathbf{t}_i \wedge \mathbf{r}_i) \tag{3.17}$$

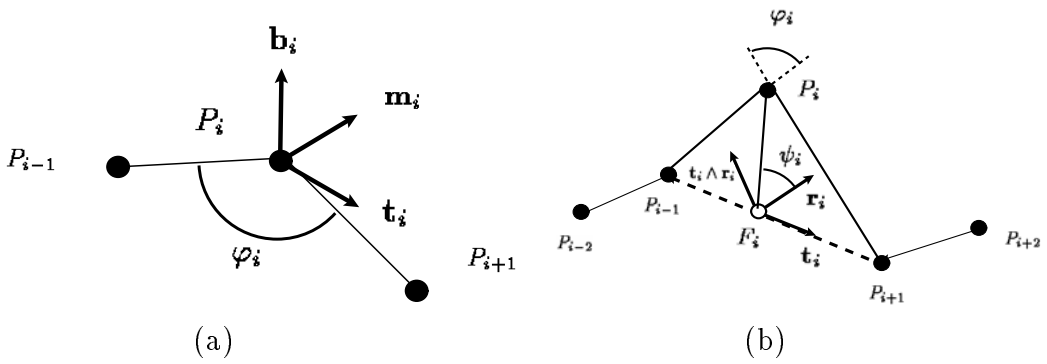


Fig. 3.5: (a) Définition de la courbure κ_i par l'intermédiaire du rayon du cercle circonscrit $R_i = 1/\kappa_i$. C_i est le milieu du segment $[P_{i-1}P_{i+1}]$. (b) Définition du vecteur tangent et normal. F_i est la projection orthogonale de P_i sur $P_{i-1}P_{i+1}$.

où

- $r_i = \frac{\|P_{i-1}P_{i+1}\|}{2}$.
- $d_i = |(1 - 2\epsilon_i^1)|r_i$

L'angle φ_i est toujours positif $\varphi_i \in [0, \pi[$ alors que l'angle ψ_i peut prendre toutes les valeurs entre $-\pi$ et π. L'ensemble des trois paramètres indépendants $\{\epsilon_i^1, \varphi_i, \psi_i\}$, $(i = 1, \ldots, n)$ constitue une représentation invariante par rotation, translation et par changement d'échelle de la forme d'un 1-maillage simplexe de $\mathbb{R}^3$. Le paramètre métrique ϵ_i^1 caractérise l'espace relatif des sommets, alors que l'angle au sommet φ_i est lié à la courbure discrète k_i par la relation :

$$k_i = \frac{\sin(\varphi_i)}{r_i}$$

Enfin, l'angle ψ_i caractérise la variation de torsion.

3.2 Géométrie des 2−Maillages Simplexes

3.2.1 Géométrie des surfaces tridimensionnelles

Définition et première forme fondamentale

Une surface est donnée par une représentation paramétrique :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \tag{3.18}$$

Afin d'éviter le problème de calcul du vecteur normal, on supposera de plus que la paramétrisation de la surface est régulière[§] :

$$\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0} \text{ pour } \mathbf{u} \in \Omega$$

Une courbe régulière $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ dans le plan (u,v) définit une courbe régulière $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ sur la surface. Le calcul de l'abscisse curviligne se déduit immédiatement de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_u\dot{u} + \mathbf{x}_v\dot{v}$:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

où

$$\begin{aligned} E &= E(u,v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \\ F &= F(u,v) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \\ G &= G(u,v) = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{aligned}$$

Cette relation est la première forme fondamentale qui caractérise la métrique de la surface [Car76]. L'élément de longueur ds est indépendant de la paramétrisation choisie pour représenter la surface. Il est également indépendant de l'espace de plongement de la surface.

Repère locale affine

Les vecteurs dérivés partiels $\mathbf{x}_u$ et $\mathbf{x}_v$ définissent le plan tangent à la surface en $\mathbf{x}(u,v)$. Le vecteur normal à la surface $\mathbf{n}$ est le vecteur normal au plan tangent :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v\|} \tag{3.19}$$

[§] Ici $\mathbf{x}_u$ désigne $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u}$

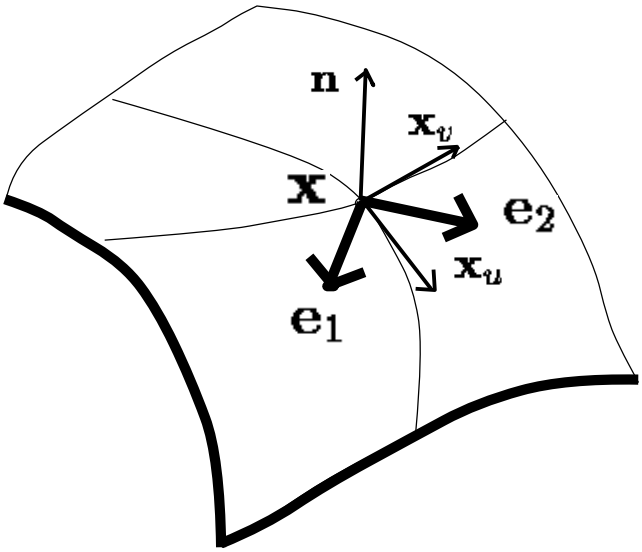


Fig. 3.6: Définition du plan tangent, du repère affine $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}$ et du repère principal $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}$

Le trièdre $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}$ forme un repère local affine. Contrairement au trièdre de Frénet, il est dépendant de la paramétrisation.

Seconde forme fondamentale et lignes de Courbure

Soit $\mathbf{x}(\mathbf{u}(t))$ une courbe régulière sur la surface. On calcule la courbure de cette courbe à l'aide des formules de Frénet :

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa\mathbf{m} = \mathbf{x}_{uu}(\frac{du}{ds})^2 + 2\mathbf{x}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{x}_{vv}(\frac{du}{ds})^2$$

Soit θ l'angle que fait la normale à la courbe avec la normale à la surface. On a alors [Car76]:

$$\kappa\cos(\theta)ds^2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{3.20}$$

où

$$\begin{aligned} L = L(u,v) &= -\mathbf{x}_u\mathbf{n}_u &= \mathbf{n}\mathbf{x}_{uu} \\ M = M(u,v) &= -\tfrac{1}{2}(\mathbf{x}_u\mathbf{n}_v + \mathbf{x}_v\mathbf{n}_u) &= \mathbf{n}\mathbf{x}_{uv} \\ N = N(u,v) &= -\mathbf{x}_v\mathbf{n}_v &= \mathbf{n}\mathbf{x}_{vv} \end{aligned}$$

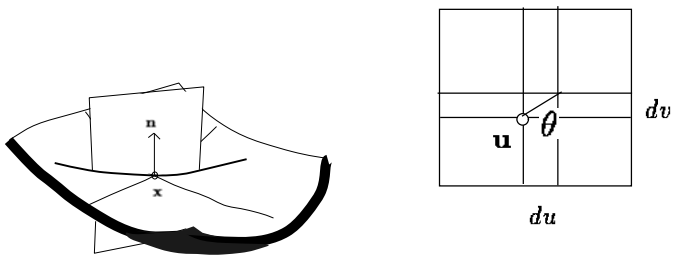


Fig. 3.7: Section normale d'une surface.

Pour une direction du/dv donnée dans le plan tangent et un angle θ donné, la seconde forme fondamentale permet de calculer la courbure κ d'une courbe tangente dans cette direction à la surface

Pour les courbes dont le plan osculateur est orthogonal au plan tangent de la surface, on peut exprimer la courbure normale κ en fonction de $\lambda = dv/du$:

$$\kappa(\lambda) = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

La courbure d'une section normale est extrêmale pour deux directions orthogonales $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ appelées les directions principales. Les courbures dans ces deux directions sont les courbures principales κ_1 et κ_2, liées par les relations :

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{3.21}$$
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{NE - 2MF + LG}{2(EG - F^2)}$$

La courbure gaussienne K, la courbure moyenne H et les deux courbure principales sont des caractéristiques indépendantes de la paramétrisation choisie de la surface.

Il est toujours possible d'effectuer un changement de paramètre de telle sorte que les directions $\mathbf{x}_u$ et $\mathbf{x}_v$ correspondent aux directions principales. On a alors une paramétrisation par les *lignes de courbures* et les deux coefficients $F \equiv 0$ et $M \equiv 0$ sont nuls. Le vecteur normal et les deux directions principales forment un trièdre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ orthonormé direct.

Courbure géodésique

Pour une courbe sur une surface $\mathbf{x}(\mathbf{u}(s))$ (s est l'abscisse curviligne), le vecteur normal à la courbe $\mathbf{m}$ est orthogonal au vecteur tangent $\mathbf{t}$ et peut se décomposer suivant le vecteur normal à la surface $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}$. On alors une décomposition de la forme :

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \kappa\mathbf{m} = \kappa_n\mathbf{n} + \kappa_g(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}) \tag{3.22}$$

avec :

$$\kappa_n = \mathbf{n}\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \quad \kappa_g = \left[\mathbf{n}, \mathbf{t}, \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right]$$

κ_n est la courbure de la section normale ayant la même tangente $\mathbf{t}$ que $\mathbf{x}(\mathbf{u}(s))$. Si on note α l'angle que fait $\mathbf{t}$ avec l'axe $\mathbf{e}_1$, alors la courbure normale κ_n vérifie de plus l'équation dite d'Euler :

$$\kappa_n = \cos^2(\theta)\kappa_1 + \sin^2(\theta)\kappa_2 \tag{3.23}$$

La courbure géodésique κ_g est nulle si la normale à la courbe coïncide avec la normale à la surface. Une courbe géodésique est caractérisée par $\kappa_g \equiv 0$.

Équations du repère mobile

Pour les surfaces de $\mathbb{R}^3$, les équations du repère mobile décrivent l'évolution du trièdre $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ lorsque l'on se déplace suivant une direction $\mathbf{t}$ dans le plan tangent faisant un angle α avec $\mathbf{e}_1$. On utilise la dérivée directionnelle des vecteurs principaux suivant l'abscisse curviligne s de la courbe. Les dérivées du repère principal font intervenir les courbures principales k_1 et k_2, de même que les courbures géodésiques des lignes de courbures g_1 et g_2 [Koe90][GA93] :

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & (g_1\cos(\alpha) + g_2\sin(\alpha)) & \kappa_2\cos(\alpha) \\ -(g_1\cos(\alpha) + g_2\sin(\alpha)) & & \kappa_1\sin(\alpha) \\ -k_1\cos(\alpha) & -k_2\sin(\alpha) & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}$$

ou plus simplement :

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_2\sin(\alpha) \\ k_1\cos(\alpha) \\ -(g_1\cos(\alpha) + g_2\sin(\alpha)) \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

Les courbures géodésiques des lignes de courbures s'expriment simplement en fonctions des coefficients de la première forme des lignes de courbure :

$$g_1 = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \tag{3.25}$$

$$g_2 = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \tag{3.26}$$

Équations de compatibilité

Les quatre coefficients κ_1, κ_2, g_1, g_2 ne sont pas indépendants les uns des autres. Les deux conditions d'intégrabilité $\mathbf{n}_{uv} = \mathbf{n}_{vu}$ et $\mathbf{e}_{1_{uv}} = \mathbf{e}_{1_{vu}}$ fournissent trois équations supplémentaires ¶ :

$$\frac{\partial \kappa_1}{\partial e_1} = g_2(\kappa_1 - \kappa_2) \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial \kappa_2}{\partial e_2} = g_1(\kappa_1 - \kappa_2) \tag{3.28}$$

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{\partial g_1}{\partial e_2} - g_1^2 - \frac{\partial g_2}{\partial e_1} - g_2^2 \tag{3.29}$$

Les deux premières équations sont les équations de Mainardi-Codazzi alors que la troisième est connue sous le non de *Theorema Egregium*[Car76]. Cette dernière est particulièrement intéressante puisqu'elle met en exergue le caractère intrinsèque de la courbure gaussienne.

Représentation des surfaces de $\mathbb{R}^3$

Une surface est entièrement déterminée à une translation et rotation par la donnée des six coefficients de la première et de la seconde forme fondamentale. Mais cette représentation peut être simplifiée en paramétrisant la surface par les lignes de courbures.

Ainsi, la donnée de la courbure moyenne $H(u, v)$ et des deux courbures géodésiques principales $g_1(u, v)$ et $g_2(u, v)$ permet de décrire la forme d'une surface. En effet, du *theorema Egregium* on calcule la courbure gaussienne à partir des deux

¶Ici la notation $\frac{d}{de_1}$ indique la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne de la première direction principale. Ainsi, lorsque l'on paramètre la surface par ses lignes de courbures, on a $\frac{d}{de_1} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{E}}$

courbures géodésiques. Puis les deux courbures principales sont calculées entièrement grâce aux courbures moyennes et gaussiennes. On vérifie ensuite que les quatre courbures satisfassent aux deux équations de Mainardi Codazzi. Enfin, les équations du trièdre mobile exprimées sur les deux directions principales fournissent un système de six équations différentielles dont la résolution donne les trois vecteurs $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ et $\mathbf{n}$ et par quadrature les trois fonctions coordonnées.

Koenderink[Koe90] a montré que la seule connaissance des courbures gaussiennes et moyennes ne permet pas en général de décrire la forme d'une surface.

3.3 Géométrie des 2-maillages simplexes de $\mathbb{R}^3$

3.3.1 Angle Simplexe

Soit P_i un sommet d'un 2-maillage simplexe de $\mathbb{R}^3$ et $(P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$ ses trois voisins. Les trois sommets voisins définissent un plan. On définit le vecteur normal $\mathbf{n}_i$ en P_i comme étant le vecteur normal à ce plan :

$$\mathbf{n}_i = \frac{P_{N_1(i)} \wedge P_{N_2(i)} + P_{N_2(i)} \wedge P_{N_3(i)} + P_{N_3(i)} \wedge P_{N_1(i)}}{\|P_{N_1(i)} \wedge P_{N_2(i)} + P_{N_2(i)} \wedge P_{N_3(i)} + P_{N_3(i)} \wedge P_{N_1(i)}\|} \tag{3.30}$$

Soit S_1 le cercle de centre C_i et de rayon r_i, circonscrit aux trois sommets voisins $(P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$. Soit S_2 la sphère de centre O_i et de rayon R_i, circonscrite aux quatre sommets $(P_i, P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$.

Définition 7 *L'angle simplexe $\varphi_i = \angle(P_i, P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$ en P_i est défini par les deux relations* [‖] *:*

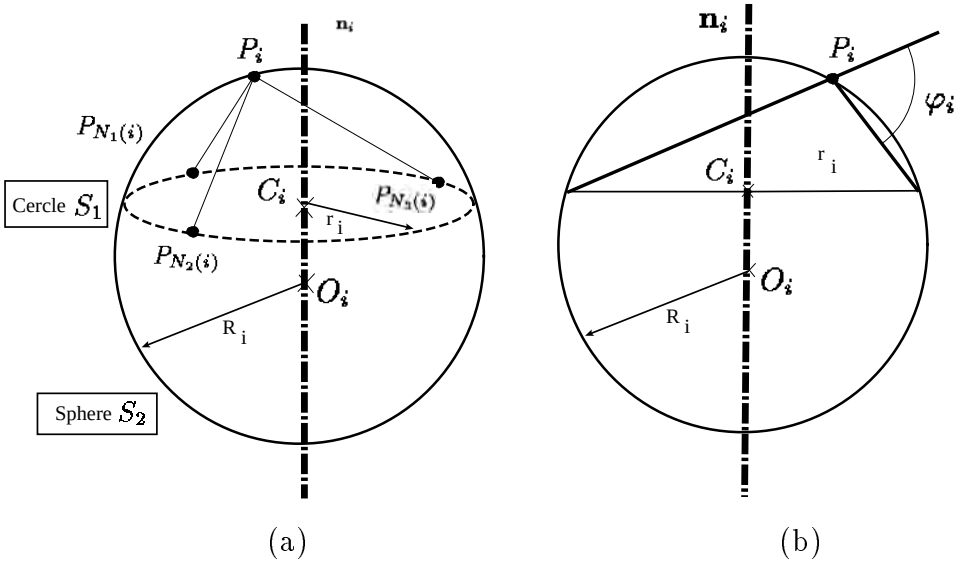
$$\begin{aligned} &\varphi_i \in [-\pi, \pi] : \\ &\sin(\varphi_i) = \tfrac{r_i}{R_i}\ \mathit{signe}(P_i P_{N_1(i)} \cdot \mathbf{n}_i) \\ &\cos(\varphi_i) = \tfrac{\|O_i C_i\|}{R_i}\ \mathit{signe}(O_i C_i \cdot \mathbf{n}_i) \end{aligned} \tag{3.31}$$

$\|O_i C_i\|$ représente la distance au plan $(P_{N_1(i)} P_{N_2(i)} P_{N_3(i)})$ du centre de la sphère O_i. L'angle simplexe φ_i est indépendant de la position de $P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)}$ sur le cercle S_1 et de la position de P_i sur un hémisphère de S_1. L'angle simplexe est nul si et seulement si P_i est dans le plan constitué par ses trois voisins.

[‖] signe(x) est égal à 1 si x est positif, -1 si x est négatif et 0 si x est nul.

Les relations dans l'équation 3.31 sont explicitées en construisant la projection de la sphère dans le plan (O_i, C_i, P_i) (voir figure 3.8). Dans cette figure, l'angle simplexe φ_i s'interprète comme l'angle, au sens de la géométrie plane, entre les segments joignant le projeté de P_i aux extrémités de la projection du cercle. L'interprétation est alors similaire à celle de l'angle au sommet des 1-maillages simplexes plans (voir figure 3.1).

Lorsque les points (O_i, C_i, P_i) sont colinéaires, P_i est équidistant de ses trois voisins et on utilise alors la projection sur un plan quelconque contenant O_iP_i pour interpréter l'angle simplexe.



(a) (b)

Fig. 3.8: (a) Le tétraèdre local et la sphère circonscrite S_2 de rayon R_i. S_1 est le cercle circonscrit aux trois voisins $P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)}$ de rayon r_i; (b) Projection de (a) sur le plan défini par O_i, C_i et P_i. L'angle simplexe peut être interprété comme un angle au sens de la géométrie plane.

L'équation 3.31 ne permet pas un calcul numériquement stable de l'angle simplexe, puisqu'elle fait intervenir le rayon de la sphère circonscrite qui devient arbitrairement grand lorsque P_i se rapproche du plan de ses trois voisins. Par contre, cet angle peut être facilement calculer en faisant intervenir une inversion autour de P_i. Cette inversion associe à chaque sommet voisin $P_{N_j(i)}$, le point $\mathrm{Inv}(P_{N_j(i)})$ tel

que :

$$P_i P_{N_j(i)} \cdot P_i \operatorname{Inv}(P_{N_j(i)}) = 1$$

Une inversion de centre P_i transforme toute sphère passant par P_i en un plan passant par les inverses de trois de ses points (voir figure 3.9). La distance $D_i^\star$ de P_i au plan image est très simplement liée à l'inverse du rayon de la sphère circonscrite :

$$D_i^\star = \frac{1}{2R_i} \tag{3.32}$$

De même le centre du cercle circonscrit O_i s'exprime très simplement à l'aide du vecteur normal $\mathbf{u}_i$ au plan image :

$$O_i = P_i + \frac{\mathbf{u}_i}{2D_i^\star} \tag{3.33}$$

Ainsi, on obtient une nouvelle formule de calcul de l'angle simplexe :

$$\begin{aligned} \sin(\varphi_i) &= 2r_i D_i^\star \operatorname{signe}(P_i P_{N_1(i)} \cdot \mathbf{n}_i) \\ \cos(\varphi_i) &= \|2D_i^\star P_i C_i + \mathbf{u}_i\| \operatorname{signe}(O_i C_i \cdot \mathbf{n}_i) \end{aligned} \tag{3.34}$$

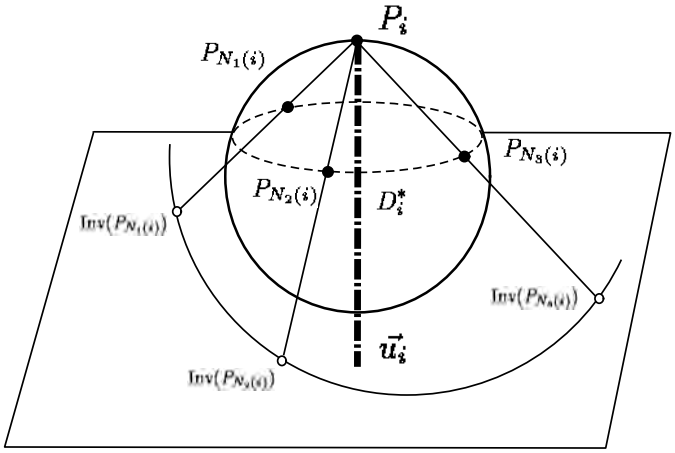


Fig. 3.9: L'inversion de centre P_i transforme une sphère en un plan. La distance de P_i à ce plan est noté $D_i^\star$ et $\mathbf{u}_i$ est le vecteur normal au plan image.

L'angle simplexe généralise plusieurs propriétés de géométrie plane :

Propriété de cosphéricité Étant donnés quatre points (A, B, C, D) de $\mathbb{R}^3$, la condition pour qu'un point P soit sur la sphère circonscrite aux quatre points (A, B, C, D), est :

$$\angle(P, B, C, D) = \angle(A, B, C, D)$$
$$ou$$
$$\angle(P, B, C, D) = \pi - \angle(A, B, C, D)$$

Conservation par inversion de centre P

$$\angle(P, A, B, C) = \angle(P,\ \mathrm{Inv}(A),\ \mathrm{Inv}(B),\ \mathrm{Inv}(C))$$

Propriété de l'angle moitié l'angle simplexe en un point est égal à la moitié de l'angle simplexe au centre de la sphère circonscrite :

$$\angle(A, B, C, D) = \frac{\angle(O, B, C, D)}{2}$$

où O est le centre de la sphère circonscrite à (A, B, C, D) (voir figure 3.10).

Ces propriétés se démontrent facilement en utilisant le fait que l'angle simplexe peut s'interpréter comme un angle au sens de la géométrie plane (voir figure 3.8 (b)).

3.3.2 Propriété de la sphère minimale

La courbure moyenne est une mesure extrinsèque de la courbure d'une surface et peut être qualifiée de "courbure moyennée dans toutes les directions" [Koe90, pp 147]. Dans ce paragraphe, on établit une caractérisation de la courbure moyenne des surfaces de $\mathbb{R}^3$. Cette caractérisation nous permettra de définir naturellement une notion de courbure moyenne discrète sur un 2-maillage simplexe.

Tout d'abord, on définit la notion de sphère minimale :

Définition 8 *Soit $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ un point d'une surface régulière définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\mathbf{n}$ le vecteur normal et H la courbure moyenne de la surface en ce point. Alors la sphère minimale en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ est la sphère passant par $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ et de centre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \frac{\mathbf{n}}{H}$.*

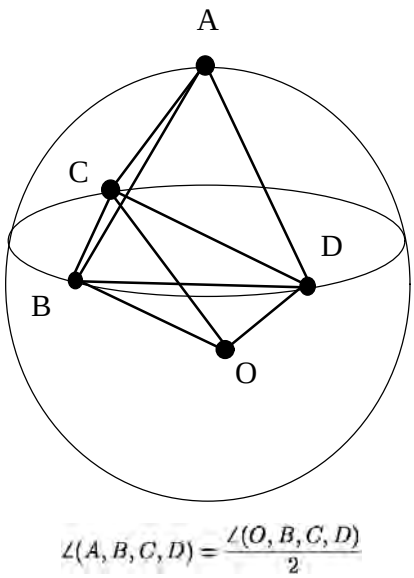


Fig. 3.10: la propriété de l'angle moitié.

Cette sphère minimale a la propriété d'être celle qui localement approche le mieux la surface :

Propriété 10 *Soit* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *une surface de* $\mathbb{R}^3$ *suffisamment régulière dans un voisinage de* $\mathbf{u}_0$. *On mesure la distance entre une sphère passant par* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *et la surface comme la somme sur un voisinage circulaire de* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *de la distance entre les points de la sphère et de la surface ayant la même projection orthogonale sur le plan tangent.*

Alors, parmi toutes les sphères passant par $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, *la sphère minimale est celle qui minimise sa distance à la surface.*

Preuve: La démonstration de cette propriété s'effectue en deux étapes. Dans un premier temps, on montre que la sphère qui minimise cette distance doit être tangente au plan tangent de la surface en $\mathbf{x}(\mathbf{u})$. Dans un deuxième temps, on montre que parmi toutes les sphères tangentes, la sphère de courbure H est celle qui est optimale.

Si l'on considère une paramétrisation de la surface par les lignes de courbures

alors le développement de Taylor dans un voisinage de $\mathbf{u}_0$ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + (u-u_0)\sqrt{E}\mathbf{e}_1 + (v-v_0)\sqrt{G}\mathbf{e}_2 + \\ \frac{1}{2}(E\kappa_1(u-u_0)^2 + G\kappa_2(v-v_0)^2)\mathbf{n} \\ +O(u-u_0)^3 + O(v-v_0)^3\end{aligned}$$

où $E = \|\mathbf{x}_u(\mathbf{u}_0)\|^2$ et $G = \|\mathbf{x}_v(\mathbf{u}_0)\|^2$. Dans un voisinage de $\mathbf{u}_0$, on peut écrire la surface de manière explicite :

$$z = \frac{1}{2}(\kappa_1 x^2 + \kappa_2 y^2) + O(x^3) + O(y^3)$$

Soit S une sphère passant par $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. Si le plan tangent de la sphère en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ est orthogonal au plan tangent à la surface, alors on ne peut pas définir de distance entre la surface et la sphère. Dans ce cas, on considérera la sphère comme infiniment distante de la surface.

Lorsque le plan tangent à la sphère n'est pas orthogonal au plan tangent à la surface, alors il est possible d'écrire localement la sphère de manière explicite :

$$z = ax + by + O(x^2) + O(y^2)$$

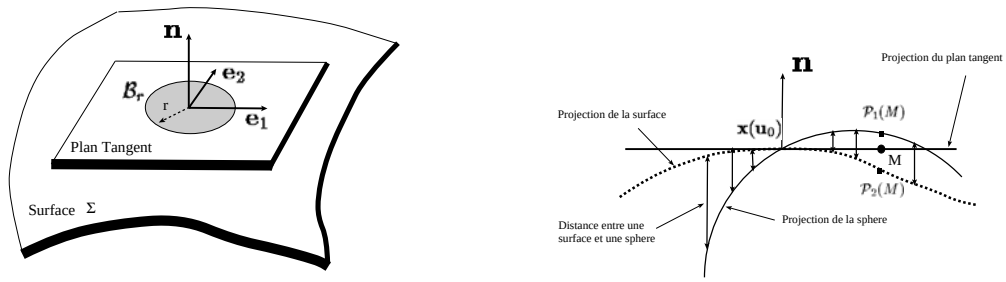
où $z = ax + by$ est l'équation du plan tangent à la sphère exprimée dans le repère principal lié à la surface. Il existe alors une boule $\mathcal{B}_r$ dans le plan tangent de centre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ et de rayon r telle que l'on puisse définir une transformation $\mathcal{P}_1$ de $\mathcal{B}_r$ sur la surface $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ ainsi qu'une transformation $\mathcal{P}_2$ de $\mathcal{B}_r$ sur la sphère S telles que $M\mathcal{P}_1(M) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$ et $M\mathcal{P}_2(M) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{0}$ (voir figure 3.11). On peut alors définir la distance D_r entre la sphère et la surface à un rayon r comme :

$$D_r = \int\int_{\mathcal{B}_r} \|\mathcal{P}_1(M)\mathcal{P}_2(M)\|^2$$

Puisque $\mathcal{P}_1(M)\mathcal{P}_2(M)$ est colinéaire à $\mathbf{n}$, on peut écrire D_r au premier ordre comme :

$$D_r = \int\int_{\mathcal{B}_r} (ax+by)^2 dxdy + O(r^5)$$

Après changement de variable $(x, y) = (l\cos(\theta), l\sin(\theta))$, $(0 \leq l \leq r, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$, le calcul donne $D_r = \frac{(a^2+b^2)\pi l^3}{3}$. Par conséquent, afin de minimiser D_r il est nécessaire que $a = b = 0$, ce qui signifie que la sphère doit être tangente à la surface en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$.



(a) (b)

Fig. 3.11: (a) La boule $\mathcal{B}_r$ de centre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ définie sur le plan tangent permet de construire un homéomorphisme entre la surface et la sphère. (b) La distance entre la surface est la sphère est définie pour les points du plan tangent appartenant à la boule $\mathcal{B}_r$ et elle est mesurée dans la direction normale au plan tangent.

Or, dans ce cas, on peut exprimer la sphère autour de $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ à l'aide d'une équation explicite du second ordre :

$$z = \frac{c}{2}(x^2 + y^2) + O(x^3) + O(y^3)$$

où c est la courbure de la sphère. La distance D_r entre la surface et la sphère s'écrit alors :

$$D_r = \int\int_{\mathcal{B}_r} ((c - k_1)x^2 + (c - k_2)y^2)^2 dxdy + O(r^7)$$

$$D_r = \frac{(8c^2 - 8ck_1 + 3k_1^2 - 8ck_2 + 2k_1k_2 + 3k_2^2)\,\pi r^5}{80} + O(r^7)$$

On vérifie que D_r atteint son minimum lorsque $c = (k_1 + k_2)/2 = H$ $\square$

La figure 3.12 illustre la propriété de la sphère minimale. Ainsi, on peut extraire la courbure moyenne en un point d'une surface en approximant localement cette surface par une sphère. Cette propriété se généralise sans difficulté aux k-variétés de $\mathbb{R}^{k+1}$. C'est une caractéristique extrinsèque de la variété puisqu'elle dépend de la dimension de l'espace où elle est plongée. Contrairement à la courbure gaussienne, la courbure moyenne n'est pas une fonction de la métrique (c'est à dire la première forme fondamentale) de la surface.

En général, la sphère minimale à un contact d'ordre un avec la surface et par conséquent, *n'est pas osculatrice*. Une surface de $\mathbb{R}^3$ est approximée au second ordre

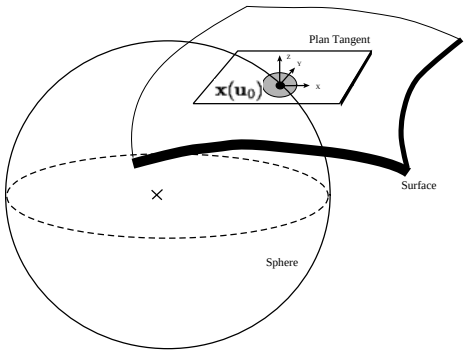


Fig. 3.12: On évalue la distance entre une sphère et la surface dans la direction du vecteur normal $\mathbf{n}$. La sphère minimale est, parmi toutes les sphères passant par $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, celle qui minimise cette distance

par une quadrique appelée la quadrique osculatrice dont l'équation explicite dans le repère principale est $z = \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2)$ [Car76]. Mais si le point est un ombilic, c'est-à-dire si les deux courbures principales sont égales, la quadrique dégénère en une sphère et la sphère minimale devient osculatrice. Par conséquent, la sphère minimale ne généralise pas complètement la situation des courbes planes où le cercle approximant localement la courbe est également osculateur.

3.3.3 Courbure moyenne discrète

On introduit à présent la courbure moyenne discrète en un point d'un 2-maillage simplexe :

Définition 9 *Soit P_i un sommet d'un 2-maillage simplexe $\mathcal{M}$. Si φ_i et r_i sont respectivement l'angle simplexe et le rayon du cercle circonscrit aux trois sommets voisins, alors on définit la courbure moyenne discrète en P_i comme :*

$$H_i = \frac{\sin(\varphi_i)}{r_i} \tag{3.35}$$

On a alors immédiatement :

Propriété 11 *La valeur absolue de la courbure moyenne est l'inverse de la sphère circonscrite au tétraèdre* $P_i P_{N_1(i)} P_{N_2(i)} P_{N_3(i)}$ *:*

$$|H_i| = \frac{1}{R_i} \tag{3.36}$$

On justifie le choix du terme "courbure moyenne discrète" pour H_i par le fait que :

- H_i est une caractéristique extrinsèque et son signe dépend de l'orientation du maillage.
- Un maillage simplexe défini sur une sphère a une courbure moyenne constante en chacun de ses sommets et égale à l'inverse du rayon de la sphère.
- La sphère de rayon $1/|H_i|$ est la sphère qui approxime le mieux le maillage autour de P_i puisqu'elle est circonscrite au tétraèdre local. Par conséquent, notre définition de la courbure moyenne sur un maillage simplexe vérifie également la propriété de la sphère minimale.
- La courbure moyenne discrète définie sur un maillage simplexe géodésique régulier converge vers la courbure moyenne de la surface (voir section suivante).

3.3.4 Maillage simplexe sur une surface de $\mathbb{R}^3$

On étudie à présent la convergence de la courbure moyenne discrète vers la courbure moyenne d'une surface. Pour cela, on définit un *maillage simplexe* sur une surface de telle sorte que les sommets et les arêtes du maillage soient définis sur la surface (voir figure 3.13). Les arêtes sont des courbes qui ne sont pas, en général, des géodésiques de la surface.

En un sommet du maillage, on considère la courbure moyenne discrète associée au sommet et à trois points se déplaçant sur les arêtes adjacentes. La valeur vers laquelle converge la courbure discrète, dépend des angles, mesurés dans le plan tangent, entre les arêtes ainsi que des vitesses à laquelle les sommets voisins convergent vers le sommet central.

■ **Théorème de convergence: Cas général** Soit $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ un sommet d'un maillage simplexe défini sur une surface $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ et $\mathbf{x}(\mathbf{u}_1(t_1))$, $\mathbf{x}(\mathbf{u}_2(t_2))$ et $\mathbf{x}(\mathbf{u}_2(t_3))$ les trois courbes paramétrées par $t_1 \in [0, l_1]$, $t_2 \in [0, l_2]$ et $t_3 \in [0, l_3]$.

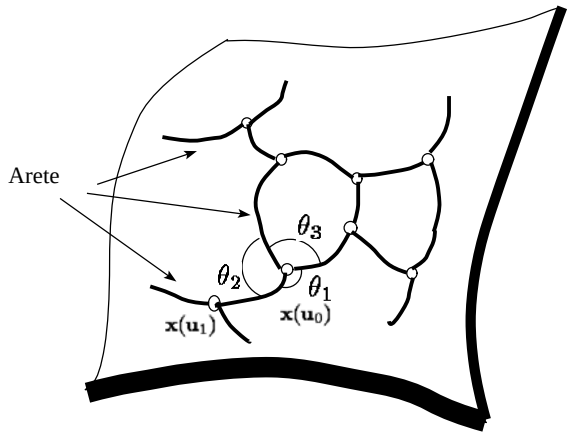


Fig. 3.13: Un maillage simplexe défini sur une surface

Les trois arêtes ont pour extrémité $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$: $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$, pour $i = 1, 2, 3$. La dérivée première de l'arête numéro i en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ est $v_i\mathbf{t}$ où v_i est la norme du vecteur dérivé, correspondant intuitivement à la notion de vitesse, et où $\mathbf{t}_i$ est le vecteur tangent à la courbe. La dérivée seconde est la somme d'une composante tangentielle et d'une composante normale :

$$\frac{dv_i}{dt}\mathbf{t}_i + v_i^2 c_i \mathbf{m}_i$$

où c_i et $\mathbf{m}_i$ est la courbure et le vecteur normal de l'arête en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. Le développement limité, à l'ordre deux, de la i^{ème} arête en 0 est :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t_i)) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + t_i v_i \mathbf{t}_i + \frac{t_i^2}{2}(\frac{dv_i}{dt}\mathbf{t}_i + v_i^2 c_i \mathbf{m}_i) + O(t_i^3)$$

Le vecteur normal $\mathbf{m}_i$ se décompose en une composante sur le vecteur normal à la surface et une composante suivant le plan tangent :

$$c_i\mathbf{m}_i = c_i^n\mathbf{n} + c_i^g(\mathbf{n} \wedge \mathbf{t}_i)$$

où c_i^n et c_i^g sont les courbures normales et géodésiques et de la courbe. On écrit à présent le développement limité de la courbe en 0, dans le repère principal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ de la surface en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$.

Le vecteur tangent $\mathbf{t}_i$ est dans le plan tangent et fait un angle θ_i avec le premier vecteur principal $\mathbf{e}_1$:

$$\mathbf{t}_i = \cos(\theta_i)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta_i)\mathbf{e}_2$$

On suppose que les trois directions dans le plan tangent des trois arêtes sont distinctes les unes des autres :

$$\theta_1 \neq \theta_2 \quad \theta_2 \neq \theta_3 \quad \theta_1 \neq \theta_3 \tag{3.37}$$

De plus, on considère que l'orientation du maillage simplexe est cohérent avec l'orientation de la surface. La cohérence d'orientation s'exprime par le fait que le produit scalaire entre le vecteur normal à la surface et le vecteur normal au maillage simplexe doit être positif lorsque les trois points convergent vers le point central.

La formule d'Euler exprime la courbure de la section normale en fonction des deux courbures principales κ_1, κ_2 :

$$c_i = \kappa_1 \cos^2(\theta_i) + \kappa_2 \sin^2(\theta_i)$$

Le développement limité en 0 s'écrit alors :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t_i)) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \begin{bmatrix} t_i v_i \cos(\theta_i) - \frac{t_i^2}{2} v_i^2 c_i^g \sin(\theta_i) + \frac{t_i^2}{2}\frac{dv_i}{dt}\cos(\theta_i) \\ t_i v_i \sin(\theta_i) + \frac{t_i^2}{2} v_i^2 c_i^g \cos(\theta_i) - \frac{t_i^2}{2}\frac{dv_i}{dt}\sin(\theta_i) \\ \frac{t_i^2 v_i^2}{2}(\kappa_1 \cos^2(\theta_i) + \kappa_2 \sin^2(\theta_i)) \end{bmatrix} + O(t_i^3)$$

ou plus simplement :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t_i)) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \begin{bmatrix} t_i v_i \cos(\theta_i) + O(t_i^2) \\ t_i v_i \sin(\theta_i) + O(t_i^2) \\ \frac{t_i^2 v_i^2}{2}(\kappa_1 \cos^2(\theta_i) + \kappa_2 \sin^2(\theta_i)) + O(t_i^3) \end{bmatrix}$$

On étudie à présent la courbure moyenne discrète en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ associée à trois points se déplaçant sur chaque arête. On considère que les trois points convergent vers $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ et l'on note $H(t)$ la courbure moyenne discrète associée au tétraèdre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_3(t))$. Lorsque t tend vers 0, les trois points $\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t))$ tendent vers $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, et $H(t)$ converge vers une valeur $H^\star$.

Théorème 1 *Lorsque les trois points voisins converge vers* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, *la courbure moyenne discrète* $H(t)$ *converge vers une valeur* $H^\star$ *qui ne dépend que des courbures principales de la surface en* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, *des angles mesurés dans le plan tangent,*

que font les arêtes entre elles, et des vitesses relatives des points en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. *Plus précisément,* $H^\star$ *est relié à la courbure moyenne* H *de la surface en* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, *par la relation :*

$$H^\star = H + (k_1 - k_2)\frac{a}{b} \tag{3.38}$$

avec :

$$a = \begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & v_1\cos(2\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & v_2\cos(2\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & v_3\cos(2\theta_3) \end{vmatrix} \tag{3.39}$$

$$b = \begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & v_1 \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & v_2 \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & v_3 \end{vmatrix} \tag{3.40}$$

Preuve: Dans la démonstration, on considère tout d'abord le cas où les deux courbures sont égales à zéro $k_1 = k_2 = 0$. On a alors :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t_i)) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0) + \begin{bmatrix} t_i v_i \cos(\theta_i) + O(t_i^2) \\ t_i v_i \sin(\theta_i) + O(t_i^2) \\ O(t_i^3) \end{bmatrix}$$

La distance des points au plan tangent formé par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est d'ordre trois, et par conséquent le plan tangent est la quadrique osculatrice aux quatre points lorsque les trois points convergent vers $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. Ainsi, la courbure de la sphère osculatrice converge vers 0.

On considère à présent que $k_1 \neq 0$ ou que $k_2 \neq 0$. On calcule la courbure moyenne discrète en considérant une inversion de centre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. La distance $D^\star(t)$ de $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ au plan formé par les transformés de $\mathbf{x}(\mathbf{u}_1(t))$ est alors simplement liée à la courbure moyenne discrète (voir équation 3.32) :

$$H(t) = 2D^\star(t)$$

On note $\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_i(t))$ l'inverse de $\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t))$. Puisque $\|\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t))\|^2 = v_i^2 t^2 + O(t^3)$, on a :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_i(t)) = \frac{\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t))}{\|\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_i(t))\|^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_i t}\cos(\theta_i) + O(1) \\ \frac{1}{v_i t}\sin(\theta_i) + O(1) \\ \frac{1}{2}(\kappa_1\cos^2(\theta_i) + \kappa_2\sin^2(\theta_i)) + O(t) \end{bmatrix}$$

La distance du plan passant par les trois points $\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_i(t))$ a pour expression :

$$D^\star(t) = \frac{[\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))]}{\|\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\|}$$

On va tout d'abord évaluer le dénominateur. Si l'on note (d_x, d_y, d_z) les composantes sur $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n})$ du vecteur $\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))$, alors on a :

$$\begin{aligned} d_x &= [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{e}_1] + [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t))\mathbf{e}_1] + [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{e}_1] \\ &= \frac{1}{t}\begin{vmatrix} 1 & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & \frac{k_1\cos^2(\theta_1)+k_2\sin^2(\theta_1)}{2} \\ 1 & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & \frac{k_1\cos^2(\theta_2)+k_2\sin^2(\theta_2)}{2} \\ 1 & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & \frac{k_1\cos^2(\theta_3)+k_2\sin^2(\theta_3)}{2} \end{vmatrix} + O(1) \\ &= O(1/t) \end{aligned}$$

De la même manière, on prouve que $d_y = O(1/t)$. Enfin, la composante d_z se calcule de la même manière :

$$\begin{aligned} d_z &= [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{n}] + [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t))\mathbf{n}] + [\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{n}] \\ &= \frac{1}{t^2}\begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta_1)}{v_1} & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_2)}{v_2} & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_3)}{v_3} & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & 1 \end{vmatrix} + O(1/t) \end{aligned}$$

Or puisque les trois angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont tous distincts entre eux, les trois points $(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i), 1)^T$ pour $(i = 1, 2, 3)$ sont linéairement indépendants et la composante d_z est toujours d'ordre $O(1/t^2)$. Or, puisque l'on a supposé que l'orientation du maillage simplexe et celle de la surface était cohérente, la composante d_z est positive et on peut écrire :

$$\|\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\| = \begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta_1)}{v_1} & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_2)}{v_2} & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_3)}{v_3} & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & 1 \end{vmatrix} + O(1/t)$$

On évalue à présent le numérateur :

$$[\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))] = \frac{1}{t^2}\begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta_1)}{v_1} & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & \frac{1}{2}(k_1\cos^2(\theta_1) + k_2\sin^2(\theta_1)) \\ \frac{\cos(\theta_2)}{v_2} & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & \frac{1}{2}(k_1\cos^2(\theta_2) + k_2\sin^2(\theta_2)) \\ \frac{\cos(\theta_3)}{v_3} & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & \frac{1}{2}(k_1\cos^2(\theta_3) + k_2\sin^2(\theta_3)) \end{vmatrix} + O(1/t)$$

En utilisant le fait que $\cos^2(\theta_i) = \frac{1+\cos(2\theta_i)}{2}$ et que $\sin^2(\theta_i) = \frac{1-\cos(2\theta_i)}{2}$, on montre que :

$$[\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))] = \frac{H}{2t^2}\begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta_1)}{v_1} & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_2)}{v_2} & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & 1 \\ \frac{\cos(\theta_3)}{v_3} & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & 1 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{(k_1-k_2)}{2t^2}\begin{vmatrix} \frac{\cos(\theta_1)}{v_1} & \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} & \cos(2\theta_1) \\ \frac{\cos(\theta_2)}{v_2} & \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} & \cos(2\theta_2) \\ \frac{\cos(\theta_3)}{v_3} & \frac{\sin(\theta_3)}{v_3} & \cos(2\theta_3) \end{vmatrix} + O(1/t)$$

Finalement, en utilisant le développement limité du numérateur et du dénominateur, on prouve bien que :

$$H(t) = 2D^\star(t) = H + (k_1-k_2)\frac{a}{b} + O(t)$$

□

Propriété 12 *La valeur vers laquelle converge la courbure moyenne discrète ne dépend que des valeurs relatives des vitesses v_i des points à l'origine, par exemple, v_2/v_1 et v_3/v_1*

Preuve: Lorsque l'on multiplie toutes les vitesses v_i par une coefficient l, on multiplie alors le déterminant a et b par l, laissant ainsi inchangé la valeur $H^\star$ vers laquelle converge la courbure moyenne discrète. En prenant $l = 1/v_1$, on prouve que cette valeur ne dépend que de v_2/v_1 et v_3/v_1.

On en déduit facilement le théorème suivant :

Théorème 2 *La courbure moyenne discrète $H(t)$ évaluée sur un maillage simplexe défini sur une surface de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, converge vers la courbure moyenne H de la surface en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, si et seulement les courbures principales k_1 et k_2 en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, les angles et les vitesses mesurés sur les arêtes vérifient :*

$$(k_1-k_2)\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & v_1\cos(2\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & v_2\cos(2\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & v_3\cos(2\theta_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.41}$$

Lemme 1 *Lorsque le sommet* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *du maillage est une ombilique de la surface* $k_1 = k_2$*, alors la courbure moyenne discrète converge toujours vers la courbure moyenne de la surface.*

L'interprétation géométrique de ce résultat est simple. Lorsque le sommet est une ombilique la sphère minimale de courbure moyenne H est alors osculatrice. La sphère circonscrite aux quatre points est alors, à l'ordre deux, la sphère osculatrice, quelle que soit la position des trois voisins sur cette sphère.

Lemme 2 *Dans le cas général, où le sommet* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *n'est pas une ombilique de la surface* $k_1 \neq k_2$*, la condition de convergence de la courbure moyenne discrète vers la courbure moyenne de la surface, ne fait intervenir que les vitesses* v_i *et les angles* θ_i *des points se déplaçant sur les trois arêtes :*

$$\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & v_1\cos(2\theta_1) \\ \cos(\theta_2) & \sin(\theta_2) & v_2\cos(2\theta_2) \\ \cos(\theta_3) & \sin(\theta_3) & v_3\cos(2\theta_3) \end{vmatrix} = 0 \tag{3.42}$$

L'interprétation géométrique de cette condition n'est pas aisée. Si l'on considère les points de coordonnées M_i de coordonnées $(\cos(\theta_i), \sin(\theta_i), v_i\cos(2\theta_i))^T$, alors la condition de convergence s'interprète comme la condition pour que le plan (M_1, M_2, M_3) passe par l'origine. La figure 3.14 montre la situation de ces points dans l'espace. On a tracé la courbe gauche d'équation paramétrique $\mathbf{x}(u) = (\cos(u), \sin(u), \cos(2u))^T$ ainsi que le cercle unité. Les points M_i se déduisent des points sur la courbe gauche par une affinité orthogonale d'amplitude v_i.

De la situation des trois points M_i, on en déduit trivialement le lemme suivant :

Lemme 3 *Pour que* $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ *vérifient la condition de convergence du lemme 2, il est nécessaire qu'ils vérifient les deux conditions suivantes :*

- *Il existe* $i \in \{1, 2, 3\}$ *tel que* $\theta_i \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ *ou* $\theta_i \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$
- *Il existe* $i \in \{1, 2, 3\}$ *tel que* $\theta_i \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$ *ou* $\theta_i \in [\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]$

Preuve: Il suffit de remarquer que pour que le plan (M_1, M_2, M_3) passe par l'origine, il est nécessaire qu'il y ait au moins deux points qui soient de part et d'autre du plan d'équation $z = 0$ ou alors que les trois points soient dans le plan $z = 0$ □

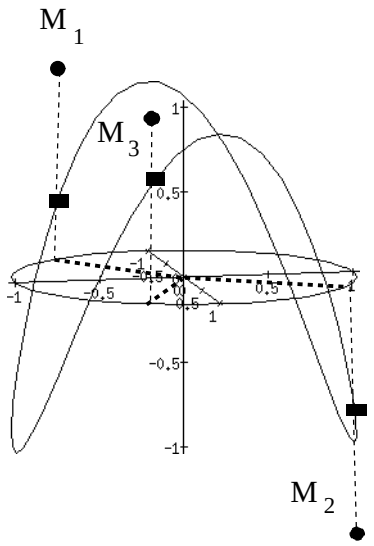


Fig. 3.14: Les trois points M_i se déduisent des trois points $\mathbf{x}(\theta_i) = (\cos(\theta_i), \sin(\theta_i), \cos(2\theta_i))^T$ par une affinité orthogonale d'amplitude v_i. On a tracé la courbe gauche d'équation $\mathbf{x}(u) = (\cos(u), \sin(u), \cos(2u))^T$ et le cercle unitéé.

■ **Théorème de convergence: Cas de la symétrie autour d'une arête** On se place désormais dans le cas non trivial où le sommet du maillage simplexe $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ n'est pas une ombilique de la surface. On considère le cas d'une symétrie autour d'une arête, par exemple autour de la première arête.

Définition 10 (Symétrie autour d'une arête) *On dit qu'un maillage simplexe défini sur une surface admet une symétrie autour de la $i^{ème}$ arête en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

- $v_{(i+1) \pmod 3} = v_{(i+2) \pmod 3}$
- *Il existe $\alpha \in]0, \pi[$ tel que : $\theta_{(i+1) \pmod 3} = \theta_i + \alpha$ et $\theta_{(i+2) \pmod 3} = \theta_i - \alpha$*

En d'autres termes, si le maillage est symétrique par rapport à une arête, les deux angles des deux autres arêtes sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la direction de l'arête de symétrie, et leurs deux vitesses sont égales.

Dans ces conditions, la condition de convergence du lemme 2 s'exprime très simplement en fonction de l'angle θ_i, α et du rapport des deux vitesses :

Lemme 4 *On considère un maillage simplexe symétrique autour d'une arête, par exemple autour de l'arête numéro 1. La courbure moyenne discrète converge vers la courbure moyenne de la surface, lorsque $k_1 \neq k_2$ si et seulement si :*

- $\theta_1 = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi/2}$

ou

- $v_1 \cos(\alpha) = v_2 \cos(2\alpha)$. *Dans ce cas, l'angle α est lié au rapport des deux vitesses $\lambda = \frac{v_1}{v_2}$ par la relation :*

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\lambda - \sqrt{8 + \lambda^2}}{4}\right) \tag{3.43}$$

Preuve: On évalue le déterminant d du lemme 2 en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{aligned} d &= \begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & v_1 \cos(2\theta_1) \\ \cos(\theta_1 + \alpha) & \sin(\theta_1 + \alpha) & v_2 \cos(2\theta_1 + 2\alpha) \\ \cos(\theta_1 - \alpha) & \sin(\theta_1 - \alpha) & v_2 \cos(2\theta_1 - 2\alpha) \end{vmatrix} \\ &= v_1 \cos(2\theta_1) \sin(2\alpha) - v_2 \cos(2\theta_1 + 2\alpha) \sin(\alpha) - v_2 \cos(2\theta_1 + 2\alpha) \\ &= \sin(\alpha)(2v_1 \cos(2\theta_1) \cos(\alpha) - 2v_2 \cos(2\theta_1) \cos(2\alpha)) \end{aligned}$$

Or puisque α est non nul, la condition de convergence s'exprime par :

$$\cos(2\theta_1)(v_1\cos(\alpha) - v_2\cos(2\alpha)) = 0$$

La première solution de cette équation correspond aux valeurs de θ_1 vérifiant $\cos(2\theta_1) = 0$, c'est-à-dire $\theta_1 = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi/2}$.

La seconde solution ne fait intervenir que des valeurs de $\lambda = \frac{v_1}{v_2}$ et de α. La condition de convergence s'écrit alors :

$$2\cos^2(\alpha) - \lambda\cos(\alpha) - 1 = 0$$

La résolution de cette équation du second degré, implique les deux solutions suivantes :

$$x_1 = \frac{\lambda - \sqrt{8+\lambda^2}}{4}$$
$$x_2 = \frac{\lambda + \sqrt{8+\lambda^2}}{4}$$

Puisque λ est toujours strictement positif et que $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$, α est donné par la relation suivante :

$$\cos(\alpha) = \frac{\lambda - \sqrt{8+\lambda^2}}{4}$$

□

La figure 3.15 montre l'évolution de la courbe donnant la valeur de l'angle α en fonction de λ, lorsque la condition de convergence 3.43 est vérifiée. On remarque que $\alpha \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ et que $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ lorsque $\lambda = 1$.

■ **Théorème de convergence: Cas d'un maillage régulier en un point** On utilise une contrainte de symétrie encore plus forte.

Définition 11 *Un maillage simplexe est dit régulier en* $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ *si les vitesses des trois points sur les arêtes sont égales et si les tangentes des trois arêtes font un angle de* $\frac{2\pi}{3}$ *entre elles :*

$$v_1 = v_2 = v_3$$
$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{2\pi}{3} \quad \theta_3 = \theta_1 - \frac{2\pi}{3}$$

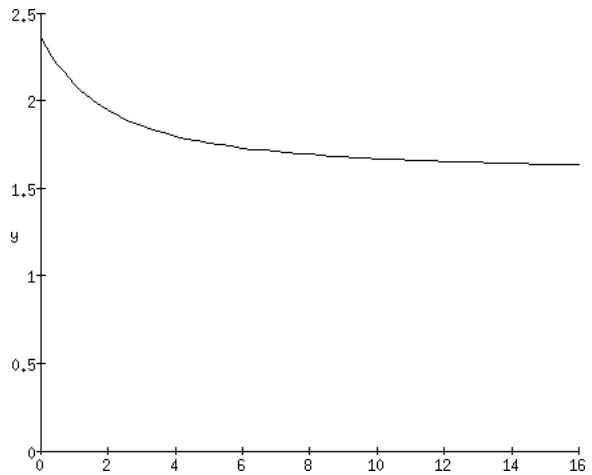


Fig. 3.15: Courbe donnant l'angle α en fonction du rapport des vitesses $\lambda = \frac{v_1}{v_2}$.

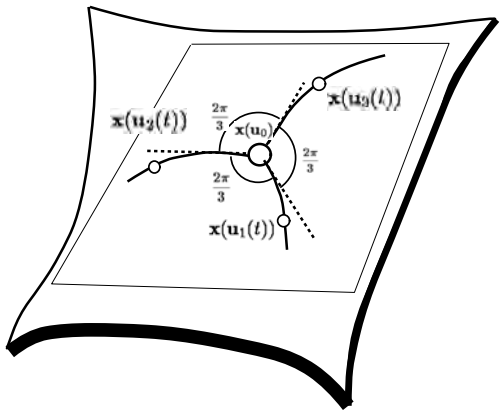


Fig. 3.16: Un maillage simplexe régulier en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$

Lemme 5 *Soit $\mathcal{M}$ un maillage simplexe défini sur une surface $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ tel que ses sommets appartiennent à la surface et les arêtes soient des courbes de la surface. Si le maillage simplexe est régulier en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ alors la courbure moyenne discrète $H(t)$ converge également vers la courbure moyenne de la surface :*

$$\lim_{t\to 0} H(t) = H$$

Preuve: On applique le lemme 4. Puisque $\lambda = 1$ et que $\alpha = 2\pi/3$, on a bien convergence de la courbure moyenne discrète vers la courbure moyenne de la surface□

On considère à présent un maillage simplexe géodésique où les arêtes du maillage sont des géodésiques de la surface. La condition de régularité permet d'obtenir une approximation de la convergence de la courbure discrète au second ordre :

Théorème 3 *Soit un maillage simplexe géodésique régulier en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. De plus, on suppose que les points voisins convergent vers le sommet $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$ avec une vitesse constante : $\frac{dv_i}{dt} = 0$. On a alors le résultat suivant :*

$$H(t) = H(\mathbf{u}_0) - \frac{t^2 H(\mathbf{u}_0)}{8}(H^2(\mathbf{u}_0) - K(\mathbf{u}_0)) + O(t^3) \tag{3.44}$$

Preuve: On reprend la démonstration du théorème 1. Puisque les arêtes sont des géodésiques de la surface, leur courbure géodésique est nulle. De plus, puisque $\frac{dv_i}{dt} = 0$, on a :

$$\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_i(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{v_i t}\cos(\theta_i) \\ \frac{1}{v_i t}\sin(\theta_i) \\ \frac{1}{2}(\kappa_1 \cos^2(\theta_i) + \kappa_2 \sin^2(\theta_i)) \end{bmatrix} + O(t)$$

Le calcul des composantes (d_x, d_y, d_z) du vecteur $\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))$ donne alors :

$$\begin{aligned}
d_x &= \frac{1}{v_1 t}\begin{vmatrix} 1 & \sin(\theta_1) & \frac{k_1\cos^2(\theta_1)+k_2\sin^2(\theta_1)}{2} \\ 1 & \sin(\theta_1+2\pi/3) & \frac{k_1\cos^2(\theta_1+2\pi/3)+k_2\sin^2(\theta_1+2\pi/3)}{2} \\ 1 & \sin(\theta_1-2\pi/3) & \frac{k_1\cos^2(\theta_1-2\pi/3)+k_2\sin^2(\theta_1-2\pi/3)}{2} \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{k_1-k_2}{2v_1 t}\begin{vmatrix} 1 & \sin(\theta_1) & \cos(2\theta_1) \\ 1 & \sin(\theta_1+2\pi/3) & \cos(2\theta_1-2\pi/3) \\ 1 & \sin(\theta_1-2\pi/3) & \cos(2\theta_1+2\pi/3) \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{-3\sqrt{3}\cos(3\theta_1)}{4}\frac{k_1-k_2}{v_1 t}
\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}
d_y &= \frac{1}{v_1 t}\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & 1 & \frac{k_1\cos^2(\theta_1)+k_2\sin^2(\theta_1)}{2} \\ \cos(\theta_1+2\pi/3) & 1 & \frac{k_1\cos^2(\theta_1+2\pi/3)+k_2\sin^2(\theta_1+2\pi/3)}{2} \\ \cos(\theta_1-2\pi/3)1 & 1 & \frac{k_1\cos^2(\theta_1-2\pi/3)+k_2\sin^2(\theta_1-2\pi/3)}{2} \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{k_1-k_2}{2v_1 t}\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & 1 & \cos(2\theta_1) \\ \cos(\theta_1+2\pi/3) & 1 & \cos(2\theta_1-2\pi/3) \\ \cos(\theta_1-2\pi/3) & 1 & \cos(2\theta_1+2\pi/3) \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{-3\sqrt{3}\sin(3\theta_1)}{4}\frac{k_1-k_2}{v_1 t} + O(1)
\end{aligned}$$

Enfin on a :

$$\begin{aligned}
d_z &= \frac{1}{v_1 t^2}\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 1 \\ \cos(\theta_1+2\pi/3) & \sin(\theta_1+2\pi/3) & 1 \\ \cos(\theta_1-2\pi/3) & \sin(\theta_1-2\pi/3) & 1 \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{2v_1 t^2} + O(1)
\end{aligned}$$

D'où l'approximation au second ordre :

$$\|\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) + \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_3(t)) \times \mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\| = \frac{3\sqrt{3}}{2v_1 t^2}\left(\sqrt{1+\frac{(k_1-k_2)^2 t^2}{4}} + O(t^2)\right)$$

Le numérateur est égale à :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}^\star(\mathbf{u}_2(t))] &= \tfrac{H}{2v_1^2 t^2}\begin{vmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 1 \\ \cos(\theta_1+2\pi/3) & \sin(\theta_1+2\pi/3) & 1 \\ \cos(\theta_1-2\pi/3) & \sin(\theta_1-2\pi/3) & 1 \end{vmatrix} + O(1) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4v_1 t^2} + O(1)
\end{aligned}$$

D'où le développement limité de $H(t)$:

$$H(t) = 2D^\star(t) = \frac{H}{\sqrt{1+t^2\frac{(\kappa_1-\kappa_2)^2}{16}+O(t^3)}} = H - \frac{t^2}{64}(\kappa_1-\kappa_2)^2 + O(t^3)$$

□

■ **Expression de la courbure moyenne en fonction de l'angle simplexe**
A chaque position du tétraèdre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_3(t))$, on associe un angle simplexe $\varphi(t)$ et un rayon du cercle circonscrit $r(t)$. On a :

$$H(t) = \frac{\sin(\varphi(t))}{r(t)}$$

Lorsque le maillage est régulier en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$, alors on a trivialement $r(t) = v_1 t + O(t)$, par conséquent on a la propriété suivante :

Définition 12 *Soit $\mathcal{M}$, un maillage simplexe défini sur une surface $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ et régulier en $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)$. Si $\varphi(t)$ est l'angle simplexe associé au tétraèdre $\mathbf{x}(\mathbf{u}_0)\mathbf{x}(\mathbf{u}_1(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_2(t))\mathbf{x}(\mathbf{u}_3(t))$, alors on a :*

$$H = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{v_1 t} \tag{3.45}$$

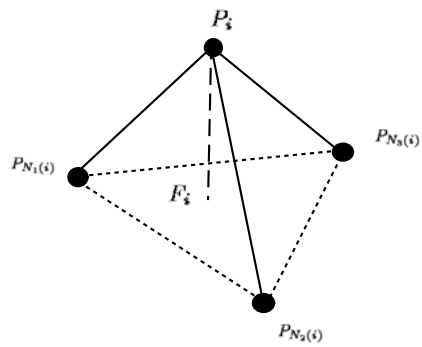
De manière générale, lorsque la courbure moyenne discrète converge vers la courbure moyenne de la surface, on a :

$$H = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi(t)}{r(t)} \tag{3.46}$$

On peut donc mesurer la courbure moyenne d'une surface, comme la limite d'une variation angulaire. Cette relation est à mettre en parallèle avec la relation $\kappa = \frac{d\phi}{ds}$ valable pour les courbes planes, ainsi que la relation $K = \frac{dA}{dS}$ reliant la courbure gaussienne à la variation de l'angle solide.

3.3.5 Coefficients métriques et représentation des 2− maillages simplexes

Nous avons défini la notion de courbure moyenne sur les 2-maillages simplexes ainsi que la notion d'angle simplexe lié de manière très simple à cette courbure. Mais la courbure en un sommet ne représente qu'un aspect de la forme du maillage. Ainsi, on introduit trois nouveaux paramètres appelés les paramètres métriques, $\{\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \epsilon_i^3\}$ qui décrivent la position relative de P_i par rapport à ses 3 voisins. De manière similaire aux 1-maillages simplexes, les paramètres métriques sont définis comme les coordonnées barycentriques de la projection F_i de P_i sur le triangle formé



$$F_i = \epsilon_i^1 P_{N_1(i)} + \epsilon_i^2 P_{N_2(i)} + \epsilon_i^3 P_{N_3(i)}$$
$$\epsilon_1^1 + \epsilon_i^2 + \epsilon_i^3 = 1$$

Fig. 3.17: Définition des paramètres métriques

par ses trois voisins (voir figure 3.17) :

$$F_i = \epsilon_i^1 P_{N_1(i)} + \epsilon_i^2 P_{N_2(i)} + \epsilon_i^3 P_{N_3(i)} \tag{3.47}$$
$$\epsilon_i^1 + \epsilon_i^2 + \epsilon_i^3 = 1 \tag{3.48}$$

L'angle simplexe et les trois paramètres métriques permettent ainsi de repérer le sommet P_i par rapport à ses trois sommets voisins :

$$P_i = \underbrace{\epsilon_i^1 P_{N_1(i)} + \epsilon_i^2 P_{N_2(i)} + \epsilon_i^3 P_{N_3(i)}}_{F_i} + L(r_i, d_i, \varphi_i)\mathbf{n}_i \tag{3.49}$$

où

- r_i est le rayon du cercle circonscrit au triangle $(P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$.
- d_i est la distance de F_i au centre du cercle circonscrit C_i.
- $L(r_i, d_i, \varphi_i)$ est la fonction décrite dans la section 3.1.2.
- $\mathbf{n}_i$ est le vecteur normal au plan $(P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$.

Les paramètres métriques $(\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \epsilon_i^3)$ contrôlent la position de F_i dans le triangle $(P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)})$ alors que l'angle simplexe contrôle la hauteur de P_i relativement à ce triangle. Cependant, les paramètres métriques influencent également la forme du maillage même s'il n'existe pas de relation simple entre les valeurs de ces paramètres avec, par exemple, la courbure gaussienne.

Étant donné un 2-maillage simplexe ayant n sommets, on représente la forme de ce maillage à une rotation, translation et un changement d'échelle près, à l'aide des $3n$ paramètres $\{(\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \varphi_i)\}$. Cette représentation est univoque si et seulement si les n équations 3.49 sont indépendantes entre elles. Bien que l'on ne démontrera pas formellement l'indépendance de ces équations, on a vérifié dans la pratique, et on considérera par la suite, que la représentation de la géométrie des 2-maillages simplexes par l'angle simplexe et les paramètres métriques est bien univoque.

Cette représentation des 2-maillages simplexes généralise celle des 1-maillages plans (voir section 3.1.2). De plus, elle est très similaire à la représentation des surfaces tridimensionnelles qui utilise la courbure moyenne et les deux courbures géodésiques des lignes de courbures (voir section 3.2.1). En effet, les courbures géodésiques ainsi que les paramètres métriques sont adimensionés et caractérisent la paramétrisation de la surface alors que la courbure moyenne et l'angle simplexe sont des paramètres relatifs à la courbure de la surface.

3.3.6 Maillages simplexes et Triangulations

Les triangulations et les maillages simplexes sont deux représentations discrètes de surfaces qui sont duales topologiquement sans être duales géométriquement. Dans ce paragraphe nous allons étudier l'estimation de la courbure gaussienne et moyenne sur les triangulations et les maillages simplexes afin de mettre en évidence la similarité géométrique des deux représentations. On trouvera dans [SW92], une étude comparative des différentes méthodes permettant d'estimer la courbure de surfaces extraites d'images de profondeur.

La dualité échange un sommet d'un maillage simplexe en un triangle d'une triangulation. Or, il est intéressant de remarquer que cette dualité topologique entraine une certaine similarité entre la courbure gaussienne et moyenne définies sur une triangulation ou un maillage simplexe.

Tout d'abord, en un sommet d'un 2-maillage simplexe on peut estimer une cour-

bure moyenne discrète alors qu' en un sommet d'une triangulation, c'est la courbure gaussienne discrète que l'on peut estimer (voir figure 3.18). Cette courbure gaussienne se calcule comme le rapport de *l'angle solide* (ou encore appelé *l'excès sphérique*) sur la somme des aires des triangles adjacents[Hil44]. Borelli[Bor93] a étudié les conditions de convergence de cette courbure gaussienne discrète vers la courbure gaussienne de la surface lorsque la triangulation devient infiniment dense. Borelli montre qu'il existe des conditions strictes sur la répartition des angles au sommets pour que la courbure discrète converge vers la courbure gaussienne de la surface.

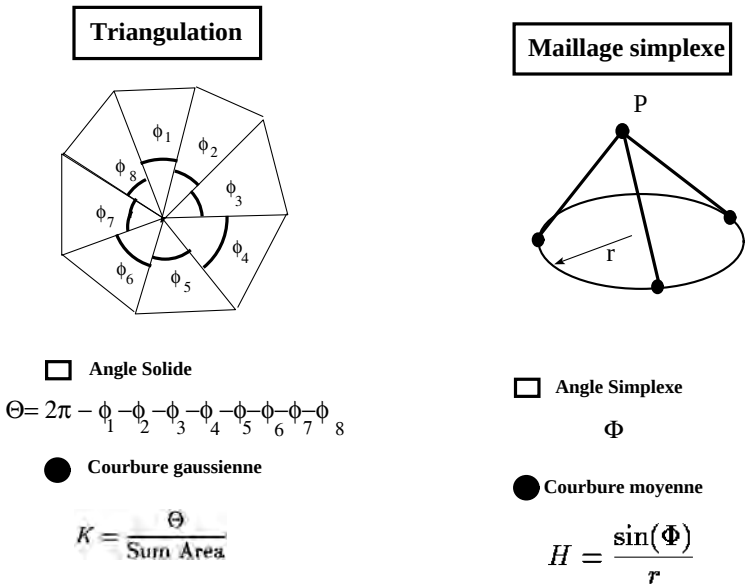


Fig. 3.18: Évaluation de la courbure gaussienne et moyenne sur une triangulation et un maillage simplexe.

De plus, on peut déterminer une mesure de la courbure moyenne sur un triangle d'une triangulation et une mesure la courbure gaussienne sur une face d'un maillage simplexe (voir figure 3.19). La mesure de la courbure moyenne se calcule comme la somme des longueurs de chaque arête multipliées par l'angle dièdre associé. La mesure de la courbure gaussienne est égale à l'aire du polygone sphérique décrit par les extrémités des normales de chacun des sommets de la face. L'aire du polygone sphérique se calcule simplement en fonction de l'angle dièdre calculé pour chaque

sommet du polygone sphérique [BS85, pp 187].

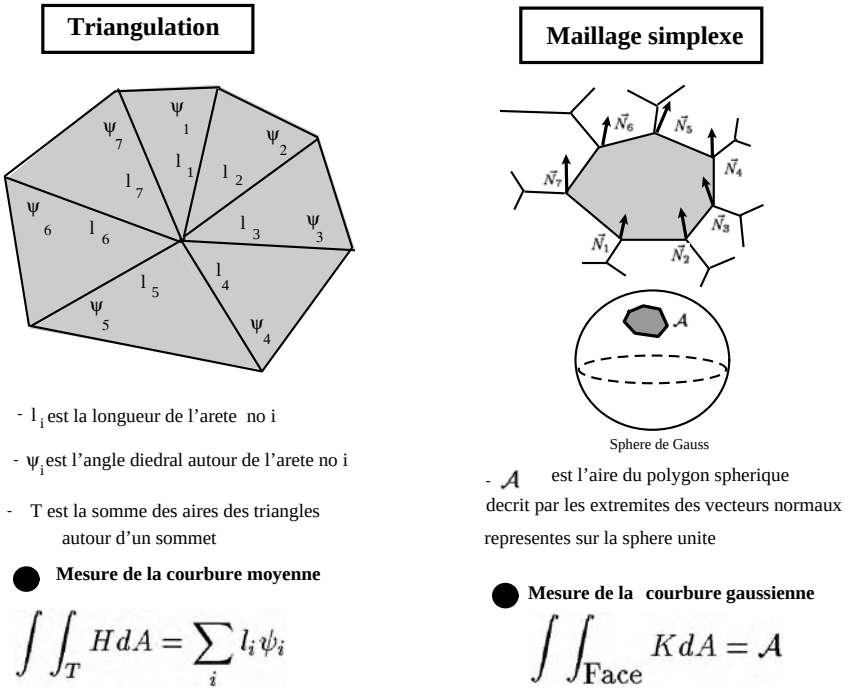


Fig. 3.19: Évaluation de la mesure de la courbure moyenne et gaussienne sur une triangulation et un maillage simplexe.

Par conséquent, il apparaît que la courbure gaussienne est un indice de courbure mieux adapté aux triangulations alors que la courbure moyenne est mieux adaptée aux maillages simplexes. Dans les deux cas, il n'est pas possible d'avoir à la fois une estimée de la courbure moyenne et gaussienne en un même sommet.

Plusieurs méthodes permettant d'effectuer le recalage d'objets triangulés et utilisant la courbure gaussienne discrète, ont été proposés. Horn et al.[Hor84] a défini l'image gaussienne étendue (Extended Gaussian Image) d'une triangulation en faisant correspondre à chaque triangle, la position de l'extrémité de son vecteur normal sur la sphère unité (la sphère de Gauss) à laquelle on associe l'aire du triangle. Ikeuchi *et al.* a utilisé cette représentation pour reconnaître la position et l'orientation d'objets dans un environnement naturel[Ike81]. L'image gaussienne étendue des triangulations permet d'effectuer la reconnaissance et la mise en correspondance des

objets en une seule passe de manière très simple. Cependant ce n'est pas une représentation univoque, sauf si l'on se restreint aux objets convexes. Afin détendre l'applicabilité de cette méthode, Kang[KI93] utilise un coefficient complexe sur la sphère dont la partie réelle correspond à l'aire du triangle et la partie imaginaire à la distance du triangle au isobarycentre de l'objet.

Dans le chapitre 6 on introduira une méthode permettant d'effectuer le recalage et la reconnaissance d'objets à partir de leur représentation simplexe.

3.4 Géométrie des k-maillages simplexes de $\mathbb{R}^{k+1}$

Dans ce chapitre, on généralise les notions d'angle simplexe et de paramètres métriques des 2-maillages simplexes aux k-maillages simplexes ($k \geq 3$), le but n'étant pas d'ordre pratique mais de démontrer la généralité de la représentation des surfaces par les maillages simplexes.

3.4.1 Angle Simplexe et Courbure moyenne

Soit $\mathcal{M}$ un k-maillage simplexe de $\mathbb{R}^{k+1}$. Les $k+1$ voisins d'un sommet P_i forment un hyperplan. Le vecteur normal à cet hyperplan est le vecteur normal $\mathbf{n}_i$ en P_i. La sphère S_k circonscrite à $P_i, P_{N_1(i)}, \ldots, P_{N_{k+1}(i)}$ est de centre O_i et de rayon R_i alors que la sphère S_{k-1} circonscrite à $P_{N_1(i)}, \ldots, P_{N_{k+1}(i)}$ est de centre C_i et de rayon r_i. L'angle simplexe en P_i, $\varphi_i = \angle(P_i, P_{N_1(i)}, \ldots, P_{N_{k+1}(i)})$ se définit alors à l'aide des deux relations :

$$\begin{array}{c} \varphi_i \in [-\pi, \pi] : \\ \sin(\varphi_i) = \frac{r_i}{R_i} \text{ signe}(P_i P_{N_1(i)} \cdot \mathbf{n}_i) \\ \cos(\varphi_i) = \frac{\|O_i C_i\|}{R_i} \text{ signe}(O_i C_i \cdot \mathbf{n}_i) \end{array} \tag{3.50}$$

On a ainsi la propriété suivante :

Propriété 13 *L'angle simplexe défini à un sommet d'un* 1*-maillage simplexe plan est égal à l'angle (au sens de la géométrie plane) entre deux arêtes consécutives.*

Preuve: Il suffit de vérifier que le cosinus et le sinus des deux angles sont égaux, ce qui est trivial (voir figure 3.3).

Les propriétés énoncées dans la section 3.3.1 sont également vérifiées pour l'angle simplexe des k-maillages. On généralise de même la courbure moyenne discrète H_i comme étant :

$$H_i = \frac{\sin(\varphi_i)}{r_i}$$

3.4.2 Représentation intrinsèque des k-maillages

La projection orthogonale F_i de P_i sur le k-simplexe formé par ses $k+1$ voisins définit les $k+1$ paramètres métriques $(\epsilon_i^1, \ldots, \epsilon_i^{k+1})$.

$$F_i = \epsilon_i^1 P_{N_1(i)} + \ldots + \epsilon_i^{k+1} P_{N_{k+1}(i)} \tag{3.51}$$

$$\epsilon_i^1 + \ldots + \epsilon_i^{k+1} = 1 \tag{3.52}$$

L'équation donnant la position de P_i en fonction de celle de ses voisins est :

$$P_i = \epsilon_i^1 P_{N_1(i)} + \epsilon_i^2 P_{N_2(i)} + \ldots + \epsilon_i^{k+1} P_{N_{k+1}(i)} + L(r_i, d_i, \varphi_i)\mathbf{n}_i \tag{3.53}$$

où d_i est la distance $\|F_i C_i\|$.

On représente la forme d'un k-maillage simplexe de $\mathbb{R}^{k+1}$ à l'aide des $k+1$ coefficients : $(\varphi_i, \epsilon_i^1, \ldots, \epsilon_i^k)$.

Chapitre 4

Regularizing forces applied on simplex meshes

This chapter introduces the regularizing forces acting on deformable simplex meshes. Regularizing forces describe how the mesh deforms under external constraints and are often described as *internal forces*. It is the relatively simplicity and the generality of those forces that make simplex meshes, a "good" representation of deformable models.

The expression of regularized forces on simplex meshes greatly differs from previous approaches. Most deformation constraints are derived from a variational principle by minimizing some kind of bending or stretching energy. We justify our approach by studying the properties of the different energies of deformation in the more general framework of regularization. Regularization is aimed at solving *ill-posed problems* by adding a regularizing functional that constrains the solution to be "admissible". The concept of physically deformable models, introduced by Kass

et al. [KWT88] in 1988, is largely based on the work by Terzopoulos[Ter84] and Grimson[Gri81] on visible surface reconstruction, a specific application of the theory of regularization.

The organization of the chapter is threefold. In a first stage, we analyze the different smoothness measures used in the regularization theory with respect to five criteria corresponding to natural transformations and shape invariance properties. We distinguish the physically based functionals from the quadratic smoothness measures. The former have nice invariance properties but are difficult to implement. The latter are widely used because they lead to numerically well-defined problems but they do not guaranty "fair" solutions and cannot evaluate smoothness over scale.

In a second stage, we extend the notion of *stabilizing functionals* to *differential stabilizers* by transforming the variational principle of the regularization theory into the problem of solving a differential equation. With this new framework, we first generalize the expression of Tikhonov stabilizers to provide a spatial control of the smoothness constraint. We then introduce a set of differential stabilizers called the *differential polynomial stabilizers* that allow an intrinsic shape formulation of the Tikhonov stabilizers and that do not exhibit any shrinking effect.

In a third stage, the regularizing forces applied on k-simplex meshes are derived from the discretization of the intrinsic polynomial stabilizers. Different expressions of those forces are presented in order to obtain smoothness or shape constraints of different orders.

The notion of differential stabilizers has been first published in the proceedings of the conference SPIE'91[DHI91a] and ECCV'94[Del94c]. The expressions of the regularizing forces defined on simplex meshes have been published in the proceedings of Computer Animation'93 conference[DWS93] and the technical report [Del94a].

4.1 Regularization and Stabilizing Functionals

Regularization

Deformable models have met a substantial amount of interest in the past few years in the field of computer vision. The principle of deformable models is especially well-suited to the domain of *early vision* where most tasks can be described as inferring geometric and physical properties of three dimensional objects from two dimensional

images. Poggio et al.[BTT87] defined early vision as "inverse optics" because early visual processes are generally formalized as inverse problems. Another characteristic of visual problems is their *ill-posed* nature[PT84], i.e. the image insufficiently constrains the solution or the problem is intrinsically unstable. Assumptions about the scene, such as *smoothness* or *shape* must be made to retain the "best" solution within the range of prior knowledge. Smoothness corresponds to the least constraining assumption and it relates to the notion of "reasonableness" of shape. Smoothness is a difficult concept to formalize because it is related to human psychology and human perception of surfaces. Shape prior, on the contrary, is a more structured constraint that relates to the notion of "likeness" of shape. Different techniques for solving inverse problem apply in computer vision depending on the amount of confidence given in the prior model.

Deformable models have the ability to solve inverse problems by including weak constraints either in terms of smoothness or shape. There is a strong relation between the principle of deformable models and the regularization theory since both rely on a variational principle. Regularization theory proposes to transform an ill-posed problem into a well-posed minimization problem by constraining the solution to belong to a set of allowed functions. In the standard theory pioneered by Tikhonov [TA87], a unique solution is guaranteed under weak conditions, by restricting the possible set of solutions to an Hilbert space with an appropriate norm or semi-norm.

We can describe most deformable models algorithms by using the regularization framework : if the visual problem may be formalized as $A\mathbf{x}(\mathbf{u}) = d$, where A is an operator describing the image formation process, and d is a function describing the data extracted from the image, then the regularized problem consists in finding a surface $\mathbf{x}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \Omega \in \mathbb{R}^d$ solving one of the three problems [BTT87]:

- **Interpolation Problem**. Find $\mathbf{x}^*_{interpolation}$ such that:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F} \text{ with } A\mathbf{x} = d, \qquad S(\mathbf{x}^*_{interpolation}) \leq S(\mathbf{x}) \tag{4.1}$$

- **Approximation Problem** Find $\mathbf{x}^*_{approximation}$ such that:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \qquad E(\mathbf{x}^*_{approximation}) \leq E(\mathbf{x}) = \lambda S(\mathbf{x}) + D(\mathbf{x}) = \lambda \|P\mathbf{x}\|_1^2 + \|A\mathbf{x} - d\|_2^2 \tag{4.2}$$

- **Constrained Approximation Problem** Find $\mathbf{x}^*_{constrained}$ such that:

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \qquad (4.3)$$
$$D(\mathbf{x}^*_{constrained}) \leq D(\mathbf{x})$$

where

- $S(\mathbf{x}) = \|P\mathbf{x}\|_1^2$ evaluates how smooth is the solution $\mathbf{x}$ and is called a *stabilizing functional* or *stabilizer*.
- $D(\mathbf{x}) = \|A\mathbf{x} - d\|_2^2$ evaluates how close to the data the solution is.
- λ is the regularizing parameter weighting the relative importance of smoothness with respect to closeness of fit.
- $\mathcal{F}$ is a class of admissible functions.

Constrained Approximation Problem

In the constrained approximation problem, the smoothness criterion minimized by the solution is embedded in the choice of the class of admissible functions. The set of admissible functions usually forms an Hilbert space, and the solution of the constrained approximation is expressed in terms of a limited set of basis functions. This framework simplifies the algorithmic complexity of the minimization since it usually transforms the problem into a simple least square estimation.

B-Splines[Far89] are well suited for the recovery of contours or surfaces that require a high order of continuity. Since B-splines are known to minimize some smoothness functionals[Far89][ANW67], the constrained minimization with B-splines may be seen as an approximation problem, the class of admissible functions (the class of finite elements) being restricted to the set B-splines functions.

The "B-snakes" model introduced by Menet *et al*[MSMM90] represents a contour with a limited set of control points. The degree of continuity of the spline is controlled by the degree of the B-Spline basis. Discontinuities may be defined by duplicating control points. The "B-snakes" scheme has been extended to deformable surfaces. Guéziec fits three dimensional B-Spline curves [Gue93] and surfaces[Gue93] in order to extract geometric invariant. Leitner[Lei93] recovers models of complex topologies from B-spline surfaces.

Euler-Lagrange Equation

A fundamental result in the calculus of variation is the Euler-Lagrange equation associated with a functional defined on a class of functions. The Euler-Lagrange equation gives a *necessary* and *local* condition for a function to *globally* minimize a functional. The Euler-Lagrange equations associated with the interpolation and the approximation problems are written as :

- **Interpolation Problem**.

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \qquad \delta S(\mathbf{x}^*_{interpolation})(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{4.4}$$

- **Approximation Problem**

$$\forall \mathbf{u} \in \Omega, \qquad \lambda \cdot \delta S(\mathbf{x}^*_{approximation})(\mathbf{u}) + \delta D(\mathbf{x}^*_{approximation})(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \tag{4.5}$$

where

- $\delta S(\mathbf{x})$ is the first variation of the smoothness functional $S(\mathbf{x})$. $\delta S(\mathbf{x})$ can be interpreted as a regularizing force that smoothes or shapes the surface in order to minimize the functional.
- $\delta D(\mathbf{x})$ is the first variation of the data functional and can be interpreted as a force proportional to the distance of the surface from the data.

Surfaces verifying equations 4.4 or 4.5 do not necessarily minimize the interpolation or approximation criteria since they may correspond to local minima of energy.

In the case of deformable models, the inverse problem to solve usually consists in recovering a surface or contour from some three dimensional data $\{D_i\}$, $(i = 1, \ldots, p)$. Therefore, the data functional $D(\mathbf{x})$ may be simply written as $\|\mathbf{x}(\mathbf{u}_i) - D_i\|_2^2$ and its first variation as $\delta D(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(\mathbf{u}_i) - D_i$. However, regularization applies to several different problems including shape from shading[IH81], edge detection[PVY85][GL93], shape from stereo[Gri81].

The principle of deformable models is related to other frameworks. Bayesian modeling [GG84] assumes a prior model statistical distribution on the data being

estimated and formalizes the image formation and sensing phenomena as stochastic processes. Szeliski [Sze87] showed that this framework is equivalent to regularization when the prior model consists of a Bolzmann distribution using an energy corresponding to the stabilizing functional. Furthermore, Szeliski and Terzopoulos[ST89] have used the bayesian framework to reconstruct surfaces of given fractal dimension.

The deformation of surfaces with quadratic smoothness measures may be analyzed in terms of filtering. Poggio et al.[PVY85] showed that regularization of surface reconstruction problem over continuous or regularly sampled data is equivalent to linear filtering the data with the regularization parameter controlling the filter size.

Finally, the classes of admissible functions are often related to some geometric modeling primitives such as splines either in the Bézier or B-spline basis [Far89], splines under tension [Sch66], Beta-Spline[BT83].

In this chapter, we will focus on the definition and properties of the stabilizing functional $S(\mathbf{x})$. This functional completely constrains the dynamics of the deformable models and the "reasonableness" of the solution.

The notion of "stabilization" and "differential stabilizers" has been published in the proceedings of SPIE'91[DHI91a] and of ECCV'94[Del94c]. Clothoids splines for the planning of trajectories of mobile robots has been published in the proceedings of IROS'91[DHI91c]. The expressions of the regularizing forces acting on simplex meshes has been published in the technical report[Del94a].

4.2 Properties of Stabilizers

This section is aimed at studying different smoothness functionals $S(\mathbf{x})$ used in computer vision and comparing them to the "intuitive" notion of smoothing associated with human perception. The underlying assumption is that the human reconstruction process is the "best" for a given data set.

We have retained four criteria that characterize the notion of smoothness as it is generally conceived for the human perception of shape:

- **Invariance with rigid motion**. For all isometries T, a smoothness measure $S(\mathbf{x})$ should verify: $S(T\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$. Object-centered representations are clearly beneficial for hi-level tasks such as object recognition[MN78]. Bolle and Vemuri[BV91] in a recent survey described in detail the importance of viewpoint invariance for surface reconstruction.

- **Invariance with size**. The smoothness of an object is independent on how far the viewer is from the object, assuming an infinite perceptual resolution. Therefore, a smoothness measure should verify: $S(l\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}), \forall l \in \mathbb{R}$.

- **Invariance with respect to parameterization**. Shape is clearly independent of the way a curve or surface is described but relies only on its intrinsic geometric parameters. For a planar curves, shape is solely a function of its curvature and length, while for surfaces it depends on its area, Gaussian and mean curvature, as well as the geodesic curvatures of the lines of curvatures[Koe90]. We would therefore expect for every mapping $\mathcal{M}$ from $\Omega_w \subset \mathbb{R}^d$, ($d = 1$ or 2), to $\Omega_u \subset \mathbb{R}^d$, that $S(\mathbf{x}(u)) = S(\mathbf{x}(\mathcal{M}(w)))$.

- **Dependence with inner-scale**. Smoothness is clearly relative to the scale at which it is considered. A problem commonly found in filtering, is to find the scale that encapsulates the most significant information of a given signal. For tasks such as model-based object recognition, the important features are often at large scale, since the fine scale tends to be lost in the noise. *Scale-space* analysis[Wit83] provides a compact representation of curves smoothness through scale by describing the evolution of zero-crossings of a continuously blurred signal. A sensible smoothness measure should therefore be a function of scale. Moreover, the scale should be allowed to vary spatially to encompass any discontinuities on the surface.

- **Shrinking Effect**. A well-known difficulty in the regularization of curves or surfaces[MM92] is the *shrinkage* of the smoothed surface, even if the original surface was already smooth. Gaussian smoothing of a circle, for instance, produces a smaller circle. The larger the scale at which the curve is smoothed, the greater is the occurring *shrinking effect*. As we will later demonstrate, the shrinking effect is of great importance for linear filters (and therefore for quadratic smoothness measures).

  Several researchers have dealt with this problem. Horn and Weldon [HW86] used an extension of the circular image to smooth convex contour without any shrinking effect. Lowe[Low88] proposed a smoothing method that uses standard Gaussian smoothing and then estimates, from the curvature of the smoothed curve, how much shrinkage occured at each point of the curve. This method gives correct results to the extent that the curvature rate of change

is small. Oliensis[Oli93] describes a linear filter that has local support in the spatial and frequency domain. The filter does not modify the amplitudes of the low frequencies and therefore does not entail any shrinkage. L. Cohen[Coh91] proposed an inflating force that prevents active contours to shrink to a point.

The amount of shrinkage of a stabilizer may be measured by looking at the effect of the stabilizer on circles or spheres (this approach has been already considered by Lowe). If a stabilizer accepts circles or spheres of all radius and centers, as surfaces of least energy, $\delta S(\mathbf{x}) = 0$ we will then considerer that the stabilizer is sphere invariant and therefore that it does not entail any shrinking effect :

$$(S(\mathbf{x}) \text{ is sphere invariant}) \Longleftrightarrow \left(\forall \mathbf{x} \in \Gamma(\mathbb{R}^d)\right), \\ S(\mathbf{x}) = 0$$

where $\Gamma(\mathbb{R}^d)$ is the set of all d-sphere of $\mathbb{R}^{d+1}$. Besides that spheres enclose the notion of ideal, hence optimal shapes, this criterion ensures that the surface has natural deformations when submitted to external constraints. For instance, if a stabilizer does not accept circles as optimum, the approximating spline minimizing equation 4.2 would be a circle, generally of smaller radius (see Figure 4.1()a). Consequently, the spline will tend to consistently deform itself toward the center of curvature, especially where the curvature is high.

4.3 Physically Based Smoothness Functionals

Many natural phenomena may be modeled through variational principles and potential energy of deformations of physical system may be used as regularity measures. Those physically-related functionals have two advantages over quadratic smoothness functionals. First, they are expressed in terms of intrinsic parameters independently of any parameterization. Second, curves or surfaces minimizing those regularity measures are, by definition, very "natural-looking" and in particular do not self-intersect. However, those physically-related functionals lead to non-linear expressions which practically make them ill-suited for computation.

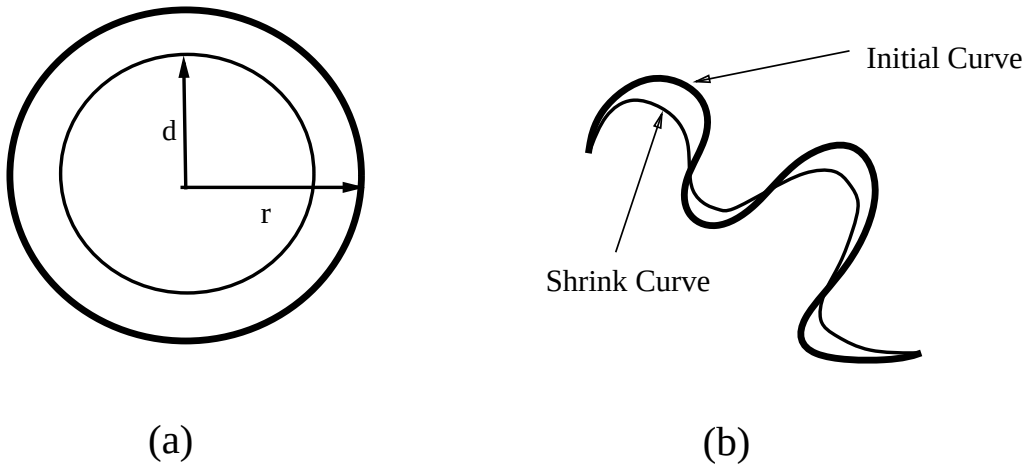


Fig. 4.1: "Shrinking effect": the curvature is consistently under-estimated after the smoothing.

4.3.1 Elastic Energy

An elastic spanned between two points reaches its equilibrium when it minimizes its length:

$$S(\mathbf{x}) = \int_0^{u_0} \|\mathbf{x}_u\| du = \int_0^{u_0} \sqrt{x_u^2(u) + y_u^2(u)} du \tag{4.6}$$

The first variation of the elastic functional is derived by applying the calculus of variation on each coordinate function $x(u)$ et $y(u)$ [BS85] :

$$\delta S(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{d}{du}\frac{x_u}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}} \\ -\frac{d}{du}\frac{y_u}{\sqrt{x_u^2+y_u^2}} \end{pmatrix} = -\frac{d}{du}\mathbf{t} = -\frac{ds}{du}k\mathbf{m}$$

Curves of least energy verify $\frac{d}{du}\mathbf{t} = \mathbf{0}$, hence are lines. This energy is the intrinsic version of the weak string energy.

4.3.2 Mechanical Spline Energy

The mechanical spline energy is derived from the physical deformation of a thin beam attached at specified points. The Bernouilli-Euler law specifies that the bending moment $M(s) = E(s)I(s)k(s)$ where $E(s)$ and $I(s)$ are respectively the Young's

modulus and the moment of inertia of the beam. The beam will deflect until it minimizes its energy U:

$$U = \int_0^{s_0} (EI)^2 k^2(s) ds \tag{4.7}$$

For an homogeneous material, this amounts to minimizing the sum of the square curvature:

$$S(\mathbf{x}) = \int_0^{s_0} k^2(s) ds = \int_0^{u_0} \frac{(x_u y_{uu} - y_u x_{uu})^2}{(x_u^2 + y_u^2)^{5/2}} du = \int_0^{u_0} L(x_u, y_u, x_{uu}, y_{uu}) du \tag{4.8}$$

This energy was proposed by Blake and Zisserman[BZ87] to achieve a view-point invariant surface reconstruction. For small deflections of the beam, the curvature may be approximated with its second derivative and the energy is equivalent to the thin plate functional. For large deflections, however, solutions minimizing the mechanical energy largely differs from those minimizing the thin plate energy.

The curves minimizing the sum of their square curvature or *mechanical splines*, called the "M-curves" have been studied by many authors including Horn[Hor83] and Su et al[SDY89]. The expression of the first variation of the functional is obtained directly from the Euler-Lagrange relation:

$$\delta S(\mathbf{x}) = \frac{d}{du}\left[k^2 \mathbf{t} + 2\frac{dk}{ds}\mathbf{m}\right] = \frac{ds}{du}\left(k^3 + 2\frac{d^2k}{ds^2}\right)\mathbf{m}$$

The optimum curves must verify $\delta S(\mathbf{x}) = 0$ which leads to the following intrinsic equation:

$$k^3 + 2\frac{d^2k}{ds^2} = 0 \tag{4.9}$$

This equation were first derived by Birkhoff and De Boor[BDB65] and completely described the shape property of the M-curves. Simpler equation may be derived with the polar angle of the tangent vector ϕ. Since, $\frac{d}{du}\left[k^2\mathbf{t} + 2\frac{dk}{ds}\mathbf{m}\right] = 0$, an integral equation is:

$$k^2\mathbf{t} + 2\frac{dk}{ds}\mathbf{m} = \mathbf{A} \tag{4.10}$$

where $\mathbf{A}$ is a constant vector. If we write as ϕ_0 the polar angle of $\mathbf{A}$ and μ its norm, we get two scalar equations by projecting equation 4.10 on the tangent and normal direction:

$$k^2 = \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 = \mu\cos(\phi - \phi_0) \tag{4.11}$$

$$2\frac{dk}{ds} = 2\frac{d^2\phi}{ds^2} = \mu\sin(\phi - \phi_0) \tag{4.12}$$

where μ and ϕ_0 are two constants and ϕ the polar angle of the tangent vector. Equation 4.12 is the equation corresponding to the angular variation of an oscillating pendulum. Solutions of these equations may be expressed in terms of elliptic integrals of the first kind.

Mehlum[Meh74] proposed to minimize a weighted sum of the elastic energy and the mechanical spline energy, the optimal curves being the M-curves under tension:

$$S(\mathbf{x}) = \int_0^{s_0} (k^2(s) + \rho)ds$$

$$\delta S(\mathbf{x}) = \frac{d}{du}\left[(k^2 - \rho)\mathbf{t} + 2\frac{dk}{ds}\mathbf{m}\right] = \frac{ds}{du}\left(k^3 - \rho k + 2\frac{d^2k}{ds^2}\right)\mathbf{m}$$

Hence, M-curves under tension verify the following intrinsic equation:

$$k^3 + \rho k + 2\frac{d^2k}{ds^2} = 0 \tag{4.13}$$

Both mechanical spline energy and mechanical spline energy under tension are clearly invariant by rigid motion and independent of the parameterization. However, they are not scale sensitive and furthermore the value of those functionals vary with the size of a curve. Finally, circles of intrinsic equation $k(s) = k_0$ are not solutions of equations 4.9 and 4.13 and therefore both energies are not circle invariant. This counter-intuitive result, pointed out by Horn[Hor83], demonstrates that intrinsic formulation of functionals do not guaranty the fairness of resulting curves.

4.3.3 Soap film Energy

The energy of a elastic beam is proportional to its length (see section 4.3.1) . Similarly, the energy of a soap film stretched accross a fixed wire is proportional to its area:

$$S(\mathbf{x}) = \int\int_D dA \tag{4.14}$$

Equation 4.14 states that at the equilibrium, a film of soap is submitted to equal pressure on both side. The shape of soap film have been studied extensively from the early work of Lagrange[Lag15] who first derived their geometric properties.

The associated Euler-Lagrange equation is :

$$\delta S(\mathbf{x}) = -2\sqrt{EG - F^2}H\mathbf{n} \tag{4.15}$$

Hence, area-minimizing surfaces verify the following intrinsic equation:

$$H = 0 \tag{4.16}$$

Surfaces with zero mean curvature are called "minimal surfaces" and have been studied by many authors[Oss69][Cou50]. A minimal surface does not necessarily minimize or maximize even locally its area, but may correspond to a saddle point of the energy. However, the Euler-Lagrange equation states that locally minimizing surfaces are minimal surfaces.

The formulation of the first variation in equation 4.15 may be written with the second differentiator of Beltrami[Koe90, page 352]:

$$\Delta^*\psi = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\psi_u - F\psi_v}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\psi_v - F\psi_u}{D}\right)\right] \tag{4.17}$$

where $D = \sqrt{EG - F^2}$. This operator is the parameter invariant expression of the Laplacian operator and is closely linked to the first and second fundamental forms. If we make an analogy with the geometry of planar curves, the second differentiator corresponds to the second derivative with respect to arc length:

$$\frac{d^2}{ds^2} = \frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}_u\|}\frac{d}{du}\right)$$

Hence, the Beltrami operator expresses the intrinsic variation of scalar or vector fields regardless of the parameterization. From equation 4.15, we can derive the expression of the first variation as:

$$\delta S(\mathbf{x}) = -\sqrt{EG - F^2}\Delta^*\mathbf{x}$$

This functional is clearly invariant by isometries and parameterization but do not accept spheres as optimal shape. Furthermore, it does not integrate any notion of scale.

4.3.4 Bending Energy

The bending energy of a plate is given by the following functional :

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \left(2AH^2(\mathbf{u}) - (A-B)K(\mathbf{u})\right) \sqrt{EG-F^2}dudv \tag{4.18}$$

where $A(\mathbf{u})$ and $B(\mathbf{u})$ are two positive functions that characterize the nature of the plate. When B is the null function, this energy may be expressed in terms of the two principal curvatures k_1 and k_2 :

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \frac{A}{2}(k_1^2(\mathbf{u}) + k_2^2(\mathbf{u}))\sqrt{EG-F^2}dudv$$

Since the Gauss-Bonnet theorem[Car76] states that the total curvature $\int_{\Omega} K(\mathbf{u})\sqrt{EG-F^2}dudv$ depends only of the genus of the surface and the geodesic curvature of the bordering contour, we can only use the square of mean curvature as the smoothness measure :

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} H^2\sqrt{EG-F^2}dudv \tag{4.19}$$

* The first variation of this functional is then[Che73] :

$$\delta S(\mathbf{x}) = \sqrt{EG-F^2}(\Delta^{\star}H - 2H(H^2-K))\mathbf{n}$$

Hence, the bending energy functional is parameter and viewpoint invariant and accept spheres as optimal shapes ($H = 1/r$ $K = 1/r^2$). However, they do not incorporate any notion of scale.

4.4 Quadratic Smoothness Measure

4.4.1 Definition

Most regularized problems in computer vision, are based on a quadratic smoothness measure. The first advantage of quadratic measures is that functional analysis provides a solid theoretical framework for studying convexity, stability and convergence. The corresponding Euler-Lagrange equation is a quasi-linear differential equations

*We consider the plate homogeneous and isotope and therefore the material parameter A is constant.

(the data term $D(\mathbf{x})$ may not be quadratic) and in the particular case of the interpolation and approximation surface reconstruction problem, the analytical form of solutions are known explicitly. Furthermore, the effect of the regularizing term can be analyzed in terms of linear filtering. Numerical approaches are either discrete with finite differences or finite elements methods or analytical with reproducing kernels (for more details, see Boult[BK86]).

Let $S(\mathbf{x}) = \|P\mathbf{x}\|^2$ be a quadratic functional over a set of multidimensional function $\mathbf{x} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^p$. P is a linear, symmetric, and translation invariant operator and therefore P may be written as a convolution:

$$P\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} p(x-u)\mathbf{x}(x)dx$$

The smoothness functional is :

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} (P\mathbf{x})^2 du$$

If $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{x}(x)exp(2\pi is.x)dx$ is the Fourier transform of $\mathbf{x}(u)$ and $\tilde{p}(s)$ the Fourier transform of $p(u)$, then using Parseval theorem:

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{p}(s)|^2 |\tilde{\mathbf{x}}(s)|^2 ds$$

Therefore, the measure $S(\mathbf{x})$ can be interpreted as the power signal of the transformed signal in the frequency domain. When P is a high pass filter, and under unrestrictive conditions, $S(\mathbf{x})$ is a semi-norm over a well-defined class of functions $\mathcal{F}$, with a finite dimensional null space[GJP93][MN90]. Their first variation is a linear functional whose expression is closely related to P :

$$\delta S(\mathbf{x}) = Q\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{p}(s)|^2 \tilde{\mathbf{x}}(s)ds = \int_{\mathbb{R}^d} q(x-u)\mathbf{x}(x)dx \tag{4.20}$$

Solutions of the interpolation problem are on the null space of Q whose dimension increases as the order of the linear operator increases. Solutions of the approximation problem are of the form[GJP93]:

$$\mathbf{x}^*(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i G(u-u_i) + \sum_{j=1}^{q} b_j h_j(u)$$

where

- $G(u)$ is the inverse Fourier transform of $1/|\tilde{p}^2|$ ($\tilde{G}(s) = 1/|\tilde{p}^2|$),

- $h_j (j = 1, \ldots, q)$ are the basis of the null space of Q.
- $a_i, (i = 1, \ldots, n)$, $b_j, (j = 1, \ldots, q)$ are constants that solely depends on the n constants u_i, the n data points P_i and the end conditions.

It is important to note that those results hold only for translation invariant linear operator. We will now consider the different class of quadratic stabilizing functionals and their properties.

4.4.2 Shrinking Effect

In section 4.2, we have linked the shrinking entailed by a stabilizing functional $S(\mathbf{x})$ with the fact that circles or spheres must verify $\delta S(\mathbf{x}) = 0$. The following property states that all non-trivial quadratic functionals consistently shrink (or expand) spheres.

Propriété 14 (Shrinking effect of Quadratic Functionals) *Quadratic stabilizing functionals are not circle or sphere invariant.*

■ **Proof** We should only consider the case of univariate functionals, since the multivariate case may be transformed into a univariate by considering their expression in the spherical coordinate frame. For a quadratic functional $S(\mathbf{x})$, the associated Euler-Lagrange equation $\delta S(\mathbf{x}) = 0$ is linear. Finding a circle invariant stabilizer, is equivalent to finding a linear operator $\delta S(\mathbf{x})$ such that:

$$\forall r \in \mathbb{R}^+, \delta S(\exp(2\pi r u))(u) = 0 \tag{4.21}$$

Since, $\delta S(\mathbf{x})$ may be written as a convolution, $\delta S(\mathbf{x}) = q * \mathbf{x}$, equation 4.21 is equivalent to stating that the Fourier transform of q is null, hence $\delta S(\mathbf{x}) \equiv 0$ □

Therefore, given a quadratic smoothness measure, there exists a sphere that does not verify $\delta S(\mathbf{x}) = 0$.

4.4.3 Tikhonov Stabilizers

Tikhonov and Arsenin[TA87] used the qth-order weighted Sobolev semi-norms restricted on Sobolev spaces as a stabilizing functional for regularizing an ill-posed problem. The qth-order weighted multivariate formulation generalized by

Duchon[Duc77] writes as:†

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{m=0}^{q} \int_{\mathbb{R}^d} w_m(\mathbf{u}) \sum_{j_1+\ldots+j_d=m}^{d} \frac{m!}{j_1! \ldots j_d!} \left(\frac{\partial^m \mathbf{x}(\mathbf{u})}{\partial u_1^{j_1} \ldots \partial u_d^{j_d}} \right)^2 du \tag{4.22}$$

where $w_m(u)$are non negative functions that control the non-homogeneity or the continuity of the surface.

Those functionals may be seen as linearized version of the physically-based functionals described in section 4.3. The linearisation of the physically-based functionals is only valid for small deflections of the curves. For large deflections, the surfaces minimizing the Tikhonov stabilizers may differ substantially from the surfaces minimizing the physically-based functionals [BZ87].

The two Tikhonov stabilizers of first and second order for curves are known as the *weak string* and the *thin rod* whereas those acting on the three dimensional surfaces are known as the *membrane* and the *thin plate*. Expressions of the stabilizers $S(\mathbf{x})$ (with constant weighting functions), their first variation δS and the curves or surfaces of least energy $N(S)$ are displayed in table 4.1.

The order of the regularizing functional is chosen depending on the degree of continuity required. For a non-negative weighting function $w_p(u)$, the Tikhonov stabilizer of order p guaranties a continuity of order C^{2p-2}. Kaas, Witkin and Terzopoulos in their seminal paper on active contour models [KWT88] proposed a sum of the first and second order Tikhonov stabilizers :

$$E(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (w_1(u)\mathbf{x}_u^2 + w_2(u)\mathbf{x}_{uu}^2) du$$

The resulting stabilizer combines the weak string and the thin rod energies with the non-negative weighting functions $w_1(u)$ and $w_2(u)$ respectively controlling the resistance to stretching and bending. But, the two functions $w_1(u)$ and $w_2(u)$ allow to nicely incorporate explicitly in the stabilizer expression the discontinuities of the contour. Terzopoulos has shown[Ter84] that the constraint $w_2(u) = 0$ imposes a C^1 discontinuity (orientation discontinuity) whereas the constraint $w_1(u) = w_2(u) = 0$ imposes a C^1 discontinuity at the point of the curve of parameter u.

The main problem of this approach is to require the *a priori* specification of the position of the discontinuities. In order to overcome this problem, Terzopoulos

†In this formula, the parameters of the surface are written : $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$

Weak String	$S(\mathbf{x})$	$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{x}_u^2(u)du$
	$\delta S(\mathbf{x})$	$-\mathbf{x}_{uu}(u)$
	$N(S)$	Lines $\quad \mathbf{x}(u) = u\mathbf{a} + \mathbf{b}$
Thin Rod	$S(\mathbf{x})$	$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{x}_{uu}^2(u)du$
	$\delta S(\mathbf{x})$	$\mathbf{x}_{uuuu}(u)$
	$N(S)$	Cubics $\quad \mathbf{x}(u) = u^3\mathbf{a} + u^2\mathbf{b} + u\mathbf{c} + \mathbf{d}$
Membrane	$S(\mathbf{x})$	$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{x}_u^2(u,v) + \mathbf{x}_v^2(u,v))dudv$
	$\delta S(\mathbf{x})$	$-(\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv})$
	$N(S)$	Harmonic functions $\quad \Delta\mathbf{x}(u,v) = 0$
Thin Plate	$S(\mathbf{x})$	$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathbf{x}_{uu}^2 + 2\mathbf{x}_{uv}^2 + \mathbf{x}_{vv}^2)dudv$
	$\delta S(\mathbf{x})$	$(\mathbf{x}_{uuuu} + 2\mathbf{x}_{uuvv} + \mathbf{x}_{vvvv})$
	$N(S)$	Iterated Harmonic functions $\quad \Delta\Delta\mathbf{x}(u,v) = 0$

Tableau 4.1: Tikhonov Stabilizing functionals for curves and surfaces

proposed to include in the smoothness functional two functions $\rho(u,v)$ and $\tau(u,v)$ controlling the discontinuities of the surface :

$$S(\mathbf{x},\rho,\tau) = \int\int_{\Omega} \rho(u,v)\left\{\tau(u,v)(\mathbf{x}_{uu}^2 + 2\mathbf{x}_{uv}^2 + \mathbf{x}_{vv}^2) + (1-\tau(u,v))(\mathbf{x}_u^2 + \mathbf{x}_v^2)\right\} dudv$$

Both rigidity $\rho(u,v)$ and tension functions are valued in the range $[0,1]$. As $\tau(u,v)$ is closed to one, the stabilizer behaves like a thin plate spline (C^1 continuity) whereas toward the other extreme, it behaves like a membrane spline. $\rho(u,v)$ determines the overall potency of the smoothness functional. Those *controlled-continuity stabilizer* do not require any a priori knowledge of the surface to reconstruct. However, it is no longer a quadratic functional with respect to $\mathbf{x}(u,v)$, $\rho(u,v)$ and $\tau(u,v)$ and therefore it requires sophisticated non-linear resolution methods.

Blake and Zissermann [BZ87] deal with discontinuities by adding a penalty term to the stabilizing functional. This term is proportional to the number of discontinuities for a curve and is proportional to the length of the discontinuity for a surface. The non-linear energy is minimized with the Gradually Non-Convexity Algorithm[BZ85].

To facilitate the segmentation of noisy images by active contours, L. Cohen [Coh91] introduced an additional force that expands the active contour until it locks itself on some strong edges. This additional force in the normal direction enables the use of a gross estimate of the contour as initial guess, when the snake is located inside the region to segment. Furthermore, it makes the snake insensitive to spurious noise and outliers.

Rougon[Rou93] showed that the inflating force $k\mathbf{n}$ may be derived from an energy that can be interpreted as a term of the internal pressure controlling the evolution of the area enclosed by the snake. Rougon proposed a generic stabilizer applied of a k-manifold called *g-snake* that comprise the weighted multivariate Tikhonov stabilizers (see equation 4.22) with a term of internal pressure. For a curve, the energy of the g-snake is [Rou93][‡] :

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}(w_1(u)\mathbf{x}_u^2 + w_2(u)\mathbf{x}_{uu}^2)du - \int_{\Omega}[\mathbf{k}(\mathbf{x}),\mathbf{x}_u]du \tag{4.23}$$

For an isotrope and homogeneous spline, $\mathbf{k}(\mathbf{x}(u)) = k\mathbf{x}(u)$ and the term corresponding to the internal pressure is proportional to the area of the snake :

$$\int_{\Omega}[\mathbf{k}(\mathbf{x}),\mathbf{x}_u]du = 2k\mathcal{A}(\mathbf{x})$$

[‡] $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ is the determinant of the two vectors of $\mathbb{R}^2$

Another functional has been invented by Berger[Ber91] in order to allow an active contour to stretch itself in the tangent direction of the contour. She proposes a functional that combines the length $\mathcal{L}(\mathbf{x})$ of the contour with the square of first derivative :

$$S(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \alpha(u) \left(\|\mathbf{x}\|^2 - (\mathcal{L}(\mathbf{x}) + k)^2 \right)^2 du$$

The sign of k determines whether the snake should stretch or shrink along the contour. This functional is no longer quadratic and can be linearized only if $\|\mathbf{x}\| - k$ becomes small.

4.4.4 Harmonic Functions

Curves of surfaces minimizing the standard Tikhonov stabilizers are harmonic or iterated harmonic functions. Harmonic functions correspond to the "most conservative" interpolation possible in the parameter space. Harmonic functions have the unique property that the value at the center of a ball in the parameter space is equal to the mean value taken over the ball :

$$\forall R \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \quad \mathbf{x}(u) = \frac{1}{A(\mathcal{B}_R^u)} \int_{\mathcal{B}_R^u} \mathbf{x}(v) d\mathcal{B}_R^u \tag{4.24}$$

where $\mathcal{B}_R^u$ is the ball of radius R centered on u. This mean value property uniquely characterizes harmonic functions and indeed corresponds to a highly desirable property for solving the interpolation problem. The mean value property may be expressed too in terms of mean value over a sphere $\mathcal{S}_R^u$ centered on u ($\mathcal{S}_R^u$ is the boundary of $\mathcal{B}_R^u$).

$$\forall R \in \mathbb{R}^+, \quad \forall u \in \mathbb{R}^d \quad \mathbf{x}(u) = \frac{1}{A(\mathcal{S}_R^u)} \int_{\mathcal{S}_R^u} \mathbf{x}(v) d\mathcal{S}_R^u \tag{4.25}$$

Figure 4.2 displays the mean value property on line and harmonic surfaces. Harmonic functions have nice parametric properties but do not necessarily have interesting shape properties. Minimal surfaces on the other hand, verify $\Delta^* \mathbf{x} = 0$, where Δ^* is the parameterization invariant equivalent of the Laplacian operator (it is the Beltrami second differentiator described in 4.17) and they have significant shape properties ($H = 0$).

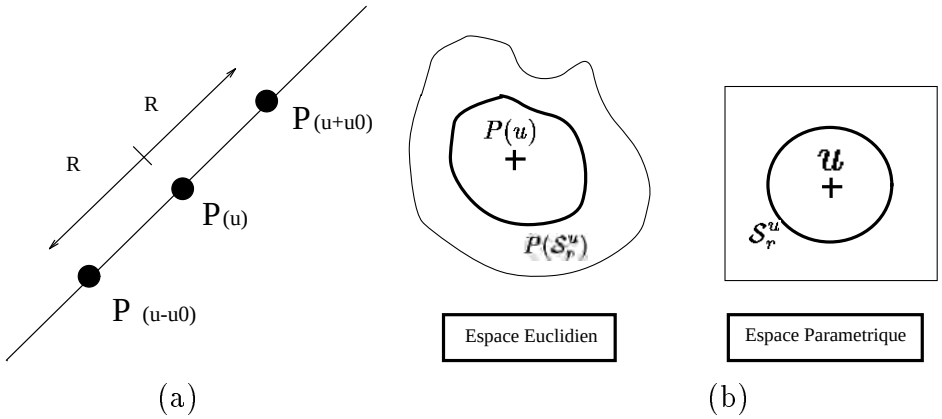


Fig. 4.2: The mean value property of harmonic functions for curves and surfaces; (a) $P(u)$ is the middle of $P(u+u_0)$ and $P(u-u_0)$; (b) $P(u)$ is the centroid of the curve image of $\mathcal{S}_r^u$, a circle of center u and radius r in the parameter space.

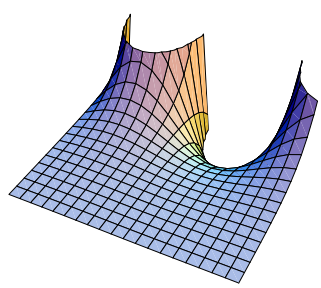


Fig. 4.3: Example of an harmonic surface of $\mathbb{R}^3$. The explicit equation of this surface is : $z = \exp(3x)\cos(3v)$.

4.4.5 Invariance of Tikhonov Stabilizers

Tikhonov stabilizers measure the amount of high frequency contained in a signal, the order of the functional controlling the filter attenuation gain. The Fourier transform of the multivariate qth order stabilizer with constant weighting functions w_m is:

$$S(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{q} \int_{\mathbb{R}^d} w_m |s|^{2m} \tilde{\mathbf{x}}^2(s) ds$$

Those filters exhibit the following properties:

- **Invariance to rigid motion**. The multivariate Tikhonov stabilizers have been especially designed for their rotation invariance. Furthermore, Brady and Horn[BH83] proved that the Laplacian operator and the secondly iterated Laplacian were the only possible solution for the Euler-Lagrange of rotationally symmetric linear and quadratic forms.

- **Dependence on size**. For all stabilizers $E(l\mathbf{x}) = l^2 E(\mathbf{x})$. However, the scaled solution is solution of the scaled problem.

- **Dependence on parameterization**. A necessary condition for the Tikhonov stabilizers to be translation-independent in the parameter space is that all weighting functions $w_p(\mathbf{u})$ must be constant. Furthermore Tikhonov stabilizers are not posed in terms of intrinsic parameters and consequently fairness of the reconstructed surfaces are not guaranteed. Parameterization dependence is a major drawback for reconstruction based on depth and slopes data, since slopes are specified in terms of partial derivatives instead of normal vectors.

- **Independence with inner-scale**. The smoothness measure is estimated on infinitely small neighborhood around each point of a surface. The regularization parameter λ weights the smoothing effect on the regularized surface and thereupon controls the scale at which the surface is smoothed[PVY85]. However, it couples both notion of "scale" and "closeness of fit" that are clearly distinct.

- **Spheres are not optimal**. Circles and spheres do not minimize the Tikhonov smoothness measures. The g-snake stabilizing functionals[Rou93] as well are not sphere invariant.

A major drawback of quadratic energies is their lack of intrinsicness. For small deflections, curvature can be linearized and quadratic functionals such as Tikhonov stabilizers release quasi-optimal shapes. When large deflections are involved however, the approximated surface may not have a fair shape and may "wobble" and even self-intersect.

4.5 Differential stabilizers

4.5.1 Definition of the stabilization framework

A *necessary* condition for ν to minimize $E(\nu) = \lambda \cdot S(\nu) + D(\nu)$ is the vanishing of the first variation $\delta E(\nu) = \lambda \cdot \delta S(\nu) + \delta D(\nu) = 0$. Since $E(\nu)$ is formulated as a variational principal, $\delta E(\nu)$ is derived through the Euler-Lagrange equation. In general, solutions of a variational problem are recovered by solving the associated Euler-Lagrange equation, hence making abstraction of the actual minimization problem. Direct methods involving optimization in the functional space such as Ritz Methods[BS85] are not well suited for computer vision problems because the energy corresponding to the closeness of fit is not known explicitly. In practice, the energy to minimize in non-convex, and the solution of Euler-Lagrange equation leads to local minima.

It is therefore natural to extend the framework of regularization by replacing the *necessary* condition $\lambda \cdot \delta S(\nu) + \delta D(\nu) = 0$ by the more general condition

$$\lambda \cdot \sigma(\nu) + \delta D(\nu) = 0 \tag{4.26}$$

where:

- $\sigma(\nu)$ is an operator from a specified functional space $\mathcal{F}$ into $\mathcal{F}$. We will call $\sigma(\nu)$ a *Differential Stabilizer* (DS).
- $\delta D(\nu)$ is the first variation of $D(\nu) = \|A\nu - d\|^2$.

We will call *"stabilization"* the transformation of the problem $A\nu = d$ into the following problem:

$$\begin{gathered} \text{Among all } \nu \in \mathcal{F}, \text{ that verify} \lambda \cdot \sigma(\nu) + \delta D(\nu) = 0 \\ \text{Find } \nu^* \text{that minimizes :} \\ C(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\nu)\nu du + \int_{\mathbb{R}^d} |A\nu(u) - d(u)|^2 du \end{gathered} \tag{4.27}$$

Instead of solving a minimization problem, stabilization proposes to solve the differential equation $\lambda \cdot \sigma(\nu) + \delta D(\nu) = 0$ similar to the Euler-Lagrange equation, and then to discriminate among solutions by minimizing the cost function $C(\nu)$. The first term of $C(\nu)$ measures the overall regularity of the solution whereas the second measures how close the solution is from the data. In general, stabilization is not equivalent to minimizing the cost function $C(\nu)$. However, when the differential stabilizer $\sigma(\nu)$ is a linear, symmetric and positive operator on a Hilbert space, then $\sigma(\nu)$ corresponds to the first variation of the functional $S(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\nu)\nu du$ and hence stabilization is equivalent to regularization. In general, if there is a functional $S(\nu)$ such that $\sigma(\nu) = \delta S(\nu)$ then the solution of the *stabilized* problem is not necessary the solution of the *regularized* problem except if the energy $E(\nu) = \lambda \cdot S(\nu) + D(u)$ is convex.

The incentive behind stabilization is to provide a wider range of smoothness functional for solving inverse problems. A justification of this approach can be made with an analogy with mechanics theory. The laws of mechanics are based on the minimization of the Lagrangian $L = T - U$ where T is the kinetic energy and U the total potential energy of the system. The Euler-Lagrange equation corresponding to the minimization of L is the law of motion $m\vec{\Gamma} = \vec{F}$. However, some forces are not derived from a potential field such as viscous or friction forces, so that it is not always possible to set the problem in terms of minimization of energy but only in terms of forces. Hence, the differential stabilizer $\sigma(\nu)$ may be seen as an internal force enforcing shape constraints while $\delta D(\nu)$ may be seen as an external force enforcing accuracy. Instead of the cost function defined in equation (4.26), we could use the following function:

$$C^*(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\nu)^2 du + \int_{\mathbb{R}^d} |A\nu(u) - d(u)|^2 du$$

which quantifies the total strain exerted on the surface.

Stabilization may be seen as *local smoothing* and regularization as *global smoothing*. Computationally, both approaches are generally equivalent since they rely on solving a differential equation. Techniques like GNC[BZ87], or scale-space tracking[Whi93] are both applicable to stabilization problems with the cost functions $C(\nu)$ or $C^*(\nu)$ as objective functions.

Several properties are desirable for a DS to render feasible and computable solutions. In addition to invariance with rigid motion, size, stability and convergence are

required to guaranty. The "smoothest" surfaces for a DS $\sigma(\nu)$ are those that verify $\sigma(\nu) = 0$. A DS will be characterized as "parameterization invariant" if its surfaces of least energy are expressed in terms of intrinsic parameters. Finally, we extend the notion of "sphere invariance" of a DS by:

$$(\sigma(\nu) \text{ is sphere invariant}) \iff \left(\forall S \in \mathcal{S}^d, \sigma(S) = 0\right)$$

The differential stabilizers framework allows us to introduce a far larger class of linear functionals than those of section4.4. In its general formulation a linear DS may be written as:

$$\sigma(\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} K(u,v)\nu(v)dv$$

Solving the interpolation problem is then equivalent to finding the null space of this linear operator whereas the approximation problem comes to solving:

$$\lambda \cdot \int_{\mathbb{R}^d} K(u,v)\nu(v)dv + (d(u) - \nu(u)) = 0$$

which is a Fredholm integral equation of the second kind. Functionals analysis of kernel operators provides a framework for analyzing convergence and stability of linear operators.

4.5.2 Controlled-scale linear differential stabilizers

We now propose an extension of the Tikhonov functionals described in section 4.4.3 by introducing the notion of "scale-sensitive derivatives". For instance, we can evaluate the first derivative on a curve $\nu(u)$ at different scale with the ratio $(\nu(u+r) - \nu(u-r))/2r$ where r controls the scale at which we consider the curve geometry. A smoothness measure of the first order at scale r on closed curves then writes as:

$$S(\nu) = \int_{\Omega} \frac{(\nu(u+r) - \nu(u-r))^2}{4r^2} du \tag{4.28}$$

$$\delta S(\nu) = \frac{\nu(u)}{2r^2} - \frac{\nu(u+2r) + \nu(u-2r)}{4r^2}$$

The curves of least energy verifying $\nu(u) = \frac{\nu(u+2r)+\nu(u-2r)}{2}$, are harmonic functions, since they verify the mean value property and therefore are straight lines.

The smoothness measure in equation 4.28 is meaningful only for closed curves with $\Omega = [a, b]$ and the following convention: $\nu(u+(b-a)) = \nu(u-(b-a)) = \nu(u)$. In order to define a similar smoothness criterion for opened curves, we further extend the Tikhonov stabilizers by allowing the scale parameter to vary spatially along the curve. We then consider the following differential stabilizer:

$$\text{Controlled-Scale Weak String DS} \quad \sigma(\nu) = \frac{\nu(u)}{2r^2(u)} - \frac{\nu(u+2r(u)) + \nu(u-2r(u))}{4r^2(u)}$$

In general, the scale parameter $r(u)$ should be large at the center of the definition set Ω and should be decreasing near the boundary $\partial\Omega$. The *controlled-scale weak string differential stabilizer* fully generalizes the weak string energy since $(\nu(u)/(2r^2) - \nu(u+2r(u)) + \nu(u-2r(u))/4r^2(u))$ converges toward $-\nu_{uu}(u)$ as $r(u)$ goes to 0. Table 4.2 summarizes the different controlled-scale differential stabilizers generalizing Tikhonov functionals.

Controlled-Scale Weak String	$\sigma(\nu) = \frac{2}{r^2(u)}\left(\nu(u) - \frac{\nu(u+r(u)) + \nu(u-r(u))}{2}\right)$
Controlled-Scale Thin Rod	$\sigma(\nu) = -\frac{2}{r^2(u)}\left(\nu_{uu}(u) - \frac{\nu_{uu}(u+r(u)) + \nu_{uu}(u-r(u))}{2}\right)$
Controlled-Scale Membrane	$\sigma(\nu) = \frac{4}{r(u)}\left(\nu(u) - \frac{\int_{\mathcal{S}_u^{r(u)}} \nu(u)du}{2\pi r(u)}\right)$
Controlled-Scale Thin Plate	$\sigma(\nu) = -\frac{4}{r(u)}\left(\Delta\nu(u) - \frac{\int_{\mathcal{S}_u^{r(u)}} \Delta\nu(u)du}{2\pi r(u)}\right)$

Tableau 4.2: The controlled-scale generalization of Tikhonov stabilizers

Using an analogy with mechanics, those "smoothing forces" can be interpreted as spring forces exerted between a surface point and the centroid of the curve $\nu(v), v \in \mathcal{S}_u^{2r(u)}$. Instead of considering the centroid of $\nu(v)$ surrounding a point, we can consider the centroid of the area it encloses. We then obtain another set of smoothing functionals that rely on the same notion of "scaled derivatives", but leads to smoother deformations because it averages over a larger extent. The *uniform controlled-scale differential stabilizers* at scale $r(u)$ is an averaged version of the previous stabilizers at scales r, $0 \leq r \leq r(u)$:

Those functionals have a simple expression for discrete problems. Given a curve $\nu_i, i = 1, \ldots, N$, we replace the discrete derivative $\nu_{i+1} - \nu_{i-1}$ by the scaled derivatives

Uniform Controlled-Scale Weak String	$\sigma(\nu) = \frac{6}{r^2(u)}\left(\nu(u) - \frac{\int_{u-r(u)}^{u-r(u)} \nu(v)dv}{2r(u)}\right)$
Uniform Controlled-Scale Thin Rod	$\sigma(\nu) = -\frac{6}{r^2(u)}\left(\nu_{uu}(u) - \frac{\int_{u-r(u)}^{u-r(u)} \nu_{uu}(v)dv}{2r(u)}\right)$
Uniform Controlled-Scale Membrane	$\sigma(\nu) = \frac{8}{r^2(u)}\left(\nu(u) - \frac{\int_{\mathcal{B}_u^{r(u)}} \nu(u)du}{\pi r^2(u)}\right)$
Uniform Controlled-Scale Thin Plate	$\sigma(\nu) = -\frac{8}{r^2(u)}\left(\Delta\nu(u) - \frac{\int_{\mathcal{B}_u^{r(u)}} \Delta\nu(u)du}{\pi r^2(u)}\right)$

Tableau 4.3: The uniform scaled-controlled generalization of Tikhonov stabilizers

$\nu_{i+r_i} - \nu_{i-r_i}$ or its averaged version $\sum_{j=1}^{r_i}(\nu_{i+j} - \nu_{i-j})/2r_i$. If we write $\Delta^2\nu_i = \nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}$, the discrete stabilizers are:

Controlled-Scale Weak String	$\sigma(\nu_i) = \nu_i - \frac{\nu_{i+r_i} + \nu_{i-r_i}}{2}$
Uniform Controlled-Scale Weak String	$\sigma(\nu_i) = -\nu_i + \frac{\sum_{j=-r_i}^{r_i} \nu(i+j)}{2r_i}$
Controlled-Scale Thin Rod	$\sigma(\nu_i) = \Delta^2\nu_i - \frac{\Delta^2\nu_{i+r_i} + \Delta^2\nu_{i-r_i}}{2}$
Uniform Controlled-Scale Thin Rod	$\sigma(\nu_i) = -\Delta^2\nu_i + \frac{\sum_{j=1}^{r_i} \Delta^2\nu(i+j)}{2r_i}$

Tableau 4.4: Discrete formulation of controlled-scale stabilizers

Solution of the differential equation 4.26 typically uses finite differences or finite elements methods with iterative schemes such as Gauss-Seidel relaxation. When using semi-implicit schemes it involves the inversion of the rigidity matrix. Tikhonov stabilizers lead to either tridiagonal or pentadiagonal sparse positive definite matrix inversion while the controlled-scale stabilizers lead to the inversion of an $r^* = Max(r_i), (i = 1, \ldots, N)$ banded positive definite matrix. For controlled-scale stabilizers, however, the matrix inversion is nearly as efficient as for the tridiagonal or pentadiagonal cases since each line is composed of at most three or nine elements.

Furthermore, since the bandwidth of the matrix is increased, controlled-scale stabilizers propagate constraints faster along the curve and therefore they significantly increase the rate of convergence.

Scale factor r_u and the regularizing parameter λ, control the spline deformation. The scale parameter sets the scale at which the spline is reluctant to deform. For dynamic systems such as "snakes"[KWT88], it is equivalent to controlling their rigidity. The regularization parameter λ on the other hand, governs the trade-off between smoothness and accuracy. λ determines the cut-off frequency of the resulting low-pass filter[PVY85] and therefore the scale at which the filter operates. However, the regularization parameter does not influence the dynamics of the spline nor the scale at which the smoothness constraint is considered.

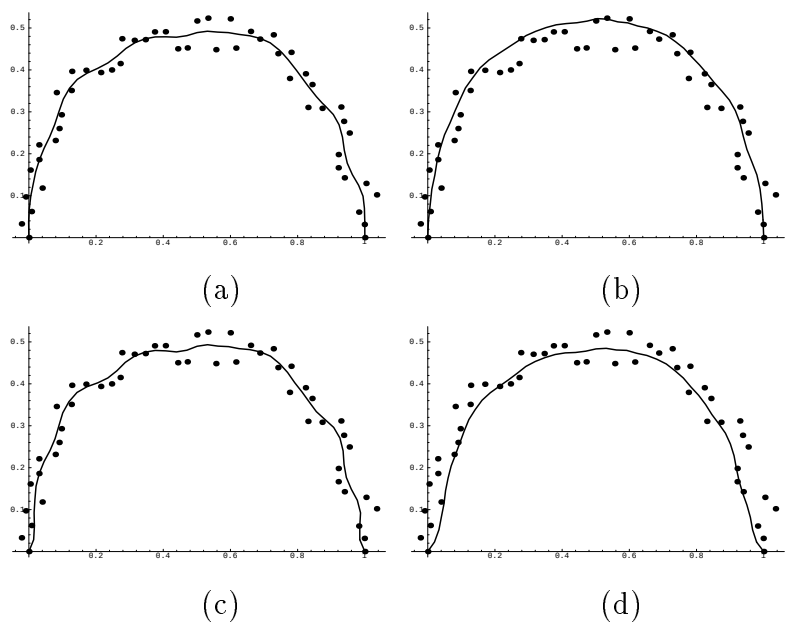


Fig. 4.4: Approximation of data points with the controlled-scale thin rod stabilizers (a) and IPS of order two (c) and constant scale parameter $r_i = 1$; same approximation for the controlled-scale thin rod stabilizers (b) and IPS of order two (d) but with maximum value of the scale parameter $r_i = Min(i, N - i)$

Figure (4.4) shows the effect of the scale parameters on a controlled-scale thin rod

spline approximating dense noisy data. For sparse data approximation, smoothness should not be evaluated over the discontinuity entailed by each data constraint. A condition for appropriate approximation over the data points P_i is to pick the scale parameters r_i such that:

$$\begin{gathered}\forall i \in 1, \ldots, N, \forall j : 1 \leq j < r_i \\ \nu_{i+j} \text{ is not constrained by any data points}\end{gathered} \tag{4.29}$$

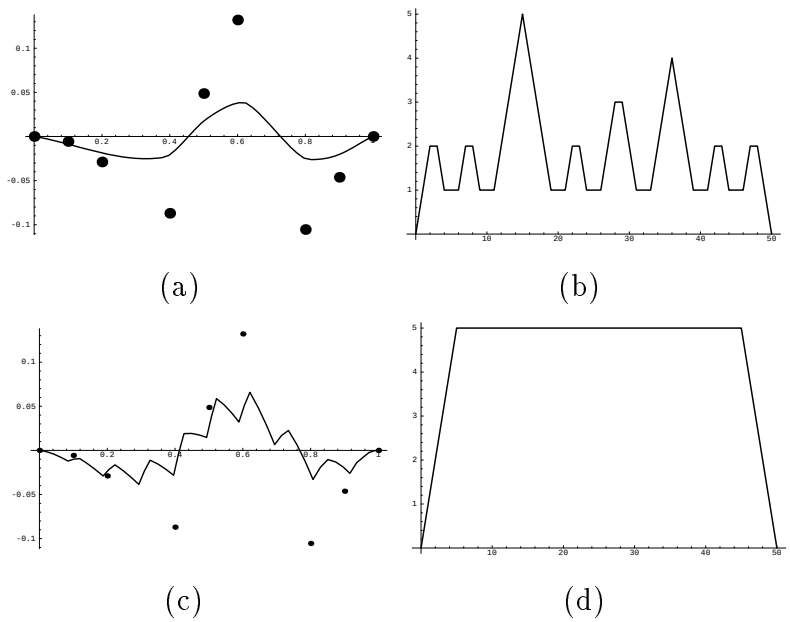


Fig. 4.5: (a) Approximation of data points with the controlled-scale thin rod stabilizers and varying scale parameter; (b) Distribution of the scale parameters along the curve. The parameter at each "attached" nodes is one, vary linear otherwise; (c) Result of the same approximation with almost constant scale parameters ; (d) Distribution of the scale parameters corresponding to (c): $r_i = Min(5, i, N - i)$

Figure 4.5(b) shows the distribution of the scale factors for a given approximation problem. The resulting curve is the same that would have been obtained by minimizing the thin rod energy. With almost constant scale parameters, the approximated spline have several spurious discontinuities due to the propagation of data constraints (see figure 4.5(c)).

4.5.3 Intrinsic stabilizers of planar curves

Definition

The controlled-scaled Tikhonov stabilizers provide control over scale of the smoothness of a curve or a tridimensionnal surface. But they lack intrinsicness and they are not circle invariant. The Intrinsic Polynomial Stabilizer[DHI91a] (IPS) are differential stabilizers of planar curves. They have the following properties:

- They are invariant to rigid motion.
- They are invariant to parameterization.
- They are scale sensitive.
- They accept circles as optimal curves.

The most interesting feature is their intrinsic nature which makes them sensitive to shape regardless of the parameterization. For a planar curve, shape is uniquely described by curvature as a function of arc length. However, curvature is a complex function of the parametric equation $\nu(u)$, hence making intrinsic variational formulation very hard to compute. We propose a set of non-linear stabilizers that do not derive from the variation of any energy, though easily computable and numerically stable.

Linear filtering is computationally efficient but is expressed in terms of intrinsic parameters. Our approach consists in linearly filtering the curvature space instead of linearly filtering the parameter space. More precisely, given a curve $\nu(u)$, we choose to filter the derivative of the tangent polar angle $\frac{d\phi}{du}$. This quantity measures the tangent rate of turn when moving along the curve and is related to the curvature:

$$k(u) = \frac{d\phi}{ds} = \frac{\frac{d\phi}{du}}{\frac{ds}{du}}$$

where $\frac{ds}{du} = \|\nu_u(u)\|$ measures the length variation along the curve. If $\frac{ds}{du}$ is constant then the parameter u is proportional to the arc-length and consequently $\frac{d\phi}{du}$ is proportional to the curvature.

Given a differential stabilizer $\sigma_1(\frac{d\phi}{du})$ applied on the rate of turn $\frac{d\phi}{du}(u)$, we define a differential stabilizer σ applied on the parametric equation:

$$\sigma(\nu)(u) = \frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} + \frac{ds}{du}\sigma_1(\frac{d\phi}{du})\mathbf{m} \tag{4.30}$$

Equation (4.30) expresses how a constraint on the rate of turn is transformed into a constraint on the position. $\mathbf{t}$, $\mathbf{m}$ are respectively the tangent and the normal vector at point $\nu(u)$. The *Intrinsic Polynomial Stabilizers* are derived directly from equation (4.30), with σ_1 corresponding to uniform controlled-scale differential stabilizers of different orders:

IPS order zero
$$\sigma_{IPS0}(\nu) = -\frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} \tag{4.31}$$

IPS order one
$$\sigma_{IPS1}(\nu) = -\frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} - \frac{ds}{du}\frac{d\phi}{du}\mathbf{m} \tag{4.32}$$

IPS order two
$$\sigma_{IPS2}(\nu) = -\frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} - \frac{ds}{du}\left(\frac{d\phi}{du}(u) - \frac{\int_{u-r(u)}^{u+r(u)} \frac{d\phi}{du}(v)dv}{2r(u)}\right)\mathbf{m} \tag{4.33}$$

IPS order three
$$\sigma_{IPS3}(\nu) = -\frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} - \frac{-1}{3}\frac{ds}{du}\left(\frac{d^3\phi}{du^3}(u) - \frac{\int_{u-r(u)}^{u+r(u)} \frac{d^3\phi}{du^3}(v)dv}{2r(u)}\right)\mathbf{m}$$

IPS order n
$$\sigma_{IPSn}(\nu) = -\frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} - \frac{(-1)^n}{\binom{n}{n-1}}\frac{ds}{du}\left(\frac{d^{2n-3}\phi}{du^{2n-3}}(u) - \frac{\int_{u-r(u)}^{u+r(u)} \frac{d^{2n-3}\phi}{du^{2n-3}}(v)dv}{2r(u)}\right)\mathbf{m}$$

The IPS of order one may be simply written as $\sigma(\nu) = -\nu_{uu}$ thus corresponding to the weak string differential stabilizer. The curves that nullify the IPS of order n verify both $\frac{d^2s}{du^2} = 0$ and $\sigma_1(\frac{d\phi}{du}) = 0$. For $n = 0$, the "smoothest" curve verify only $\frac{d^2s}{du^2} = 0$ which states that the parameter u is proportional to the arc-length. Therefore, the IPS of order zero do not constraint the shape of a curve, only its parameterization. It enforces only a C^0 continuity on the curve. Since, the polynomial of order $2n-1$ nullify the uniform controlled-scale stabilizers, the curves that solve $\sigma_{IPSn} = 0$ verify:

$$\frac{d^{(2n-1)}\phi}{du^{(2n-1)}} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d^2s}{du^2} = 0 \tag{4.34}$$

or equivalently:

$$\frac{d^{(2n-2)}k}{ds^{(2n-2)}} = 0 \tag{4.35}$$

For first order stabilizers, solutions are line while for second order stabilizers they are curves with linear curvature profile. These curves are called *Cornu's Spirals* or *Clothoids*.

The intrinsic equation (4.35) insures that IPS of order n ($n > 0$) are parameterization invariant. Furthermore, circles ($k = 1/r$) are optimal for stabilizers of order $n > 1$.

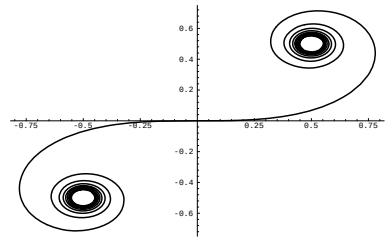


Fig. 4.6: Clothoid or Cornu's spiral

Intrinsic Polynomial Stabilizers can be seen as merely scale-sensitive Tikhonov stabilizers regularizing the curvature profile instead of the parametric equation. They are circle-invariant which prevents any "shrinking effect" during filtering.

4.5.4 Discretization

We now present the expression of the intrinsic polynomial stabilizers on a discrete curve $\{\nu_i\}$, $(i = 1, \ldots, N)$. The angle k_i between two consecutive segments at $\{\nu_i\}$ is the discrete analogue to $\frac{d\phi}{du}$. Using the equality $\frac{d^2 s}{du^2}\mathbf{t} = \nu_{uu} - \frac{ds}{du}\frac{d\phi}{du}\mathbf{m}$.The relation that links the stabilization of the curvature with the stabilization of the curve is:

$$\sigma(\nu_i) = \frac{\nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}}{2} + \tan\left(\frac{\sigma_i(k_i) - k_i}{2}\right)\frac{(\nu_{i+1} - \nu_{i-1})^{\perp}}{2}$$

The expressions of the stabilizers are then:

$$\text{IPS order zero} \quad \sigma_{IPS0}(\nu_i) = \frac{\nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}}{2} - \tan\left(\frac{k_i}{2}\right)\frac{(\nu_{i+1} - \nu_{i-1})^{\perp}}{2} \tag{4.36}$$

$$\text{IPS order one} \quad \sigma_{IPS1}(\nu_i) = \frac{\nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}}{2} \tag{4.37}$$

$$\text{IPS order two} \quad \sigma_{IPS2}(\nu_i) = \frac{\nu_{i-1} - 2\nu_i + \nu_{i+1}}{2} - \tan\left(\frac{\sum_{j=-r_i}^{r_i} k_{i+j}}{4r_i}\right)\frac{(\nu_{i+1} - \nu_{i-1})^{\perp}}{2} \tag{4.38}$$

We use an explicit finite difference scheme for solving the approximation, interpolation, and segmentation problem. The expression of the stabilizer is simple enough to render real-time deformations of an active contour on a Sun4 workstation. Figure (4.7) compares the interpolation and approximation solutions for the thin rod, IPS of order two and IPS of order three. The curvature profile shows clearly that IPS release smoother and natural-looking shapes than the linear thin rod stabilizer. Moreover, the approximation solution demonstrates that linear stabilizer grossly under-estimate curvature while IPS do not. Figure (4.4)c and d show the influence of scale parameters on the rigidity of the spline.

4.5.5 Shape constraints

Another interesting type of internal constraints for solving segmentation in computer vision is shape. For tracking deformable objects, one would like to have a template with enough shape constraint for correctly matching the target but with enough flexibility to adapt to perspective distortion and target deformation[BAZ93]. Weighted Intrinsic Polynomial Stabilizers create complex-shaped deformable templates with controlled-rigidity. Those templates naturally converge toward their initial shape when not submitted to any external constraints.

Given a curve and its curvature profile $k = f(s)$, we first determine the extrema of curvature. Between two extrema, the curvature is therefore monotonic. If we compute the weight function as $w(u) = 1/|f'(u)|$, then solutions of the weighted weak membrane differential stabilizer $\sigma(\nu) = \frac{d}{du}[w(u)\nu_u] = 0$ between two extrema are the functions $\nu(u) = af(u) + b$.

A stabilizer that enforces shape prior on a contour is defined as following:

$$\sigma(\nu)(u) = \frac{d^2s}{du^2}\mathbf{t} + \frac{ds}{du}\sigma_1(\frac{d\phi}{du})\mathbf{m}$$

with $\sigma_1(\frac{d\phi}{du})$ equals to:

- $\frac{d}{du}[w(u)\frac{d^2\phi}{du^2}]$ with $w(u) = 1/|f'(u)|$ if $f(u)$ is between two extrema.
- $f(u) - \frac{d\phi}{du}$ if $f(u)$ is an extremum of curvature.

This method can be applied to any C^2 continuous contour. The previous stabilizer can be extended further by integrating for notion of scale at which the shape is defined. Moreover, scale parameters would control the rigidity of the template. In

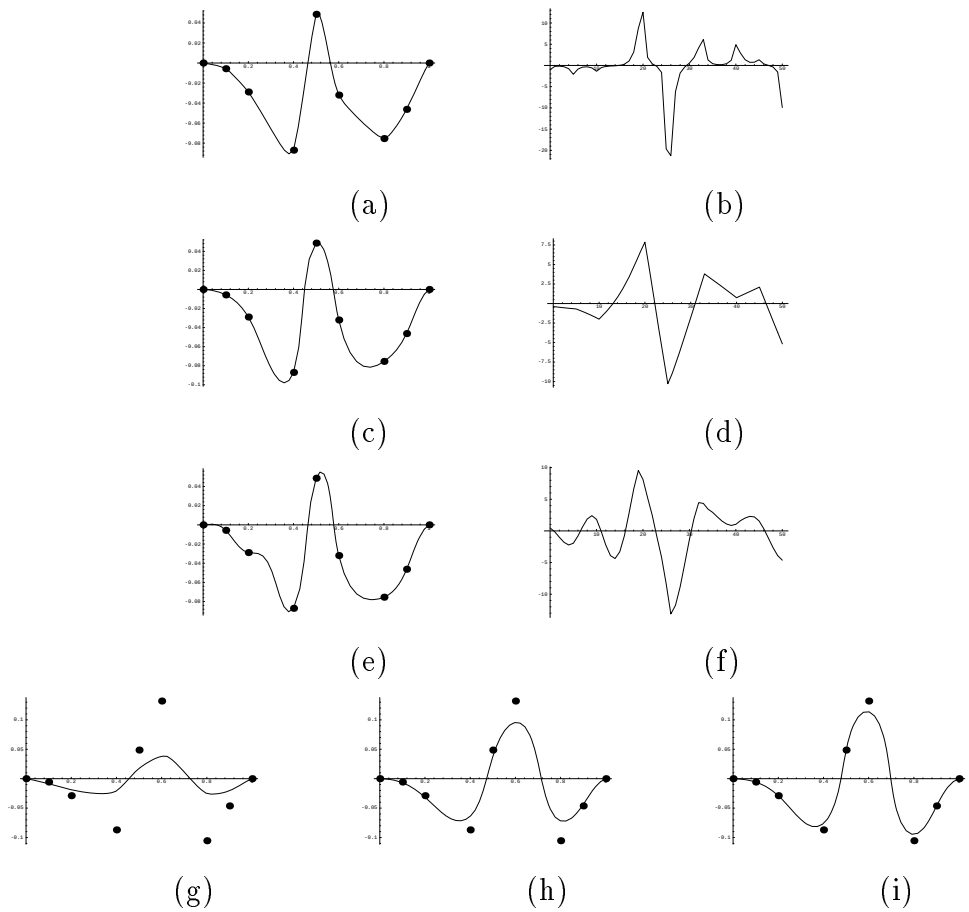
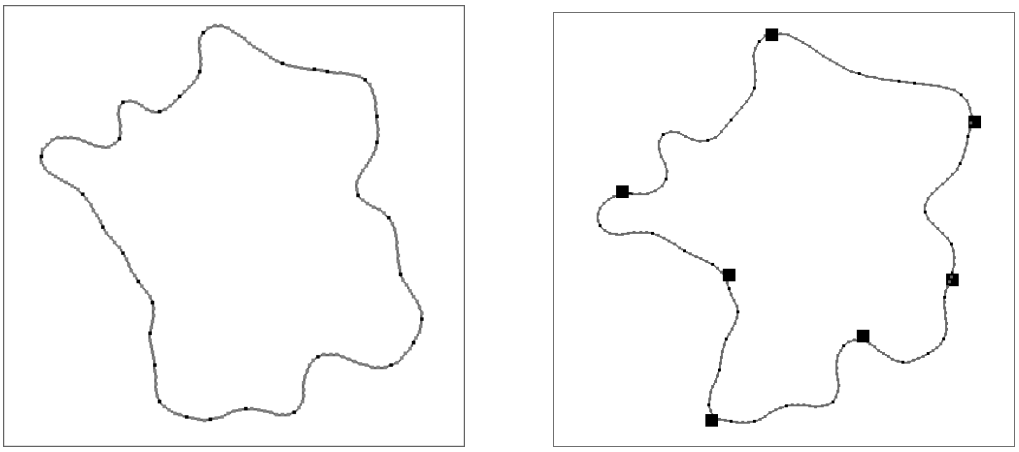


Fig. 4.7: (a) Interpolation and curvature profile (b) with the thin rod stabilizer; (c) Interpolation with IPS of order two; the curve is C^2 continuous and its curvature profile is piecewise linear (d); (e) Interpolation with IPS of order three the curve is C^4 and its curvature is piecewise cubic(f); Approximation with a thin rod (Figure g), IPS of order two (Figure h) and three (Figure i) with the same regularization parameter.

Figure (4.8), we have taken the smoothed shape of France to illustrate the shape prior ability of intrinsic stabilizers. After constraining the position of six nodes, the curve reaches a state of equilibrium with a trade-off between natural shape and closeness of fit.



(a) (b)

Fig. 4.8: (a)Initial curve at its rest shape; (b) Curve solution of an approximation problem under the influence of the weighted intrinsic polynomial stabilizer. The curve is constrained by seven springs attached to the black squares. Under the influence of the stabilizer, the curve shape is similar to its prior shape.

4.6 Regularizing forces on simplex meshes

A differential stabilizer may be seen as a regularizing force acting on contours or surfaces. We derive the regularizing force $\mathbf{F}_{int}$ on simplex meshes from the intrinsic polynomial stabilizers of planar curves. The shape or smoothness functionals of simplex meshes have the following properties :

Intrinsicness They are expressed in terms of mean curvature, and therefore fairness of resulting shape is guaranteed.

Invariance with translation, rotation and scale

Sphere Invariance

Dependence with inner-scale The size of the neighborhood around a vertex controls the scale at which smoothness is measured.

Local support Different types of constraint, different size of neighborhood may be applied on different parts of a mesh.

We have seen that the shape of a k-simplex mesh may be represented with the simplex angles and the $k+1$ metric parameters defined at all vertices. An equation exists that determines the position of a vertex P_i given the position of its $k+1$ neighbors and the $k+1$ shape parameters. The regularizing forces applied on a simplex mesh consist in performing a filtering of the simplex angle values of the vertices. Therefore, it amounts to filter the mean curvature of the mesh. The metric parameters $\epsilon_i^1, \ldots, \epsilon_i^{k+1}$ are not modified by the regularizing force. In order to ensure a stable behavior during the deformation, we further suppose that the metric parameters values at all vertices are all strictly positive :

$$\epsilon_i^1 + \ldots + \epsilon_i^{k+1} = 1 \tag{4.39}$$

$$0 < \epsilon_i^1 < 1 \quad 0 < \epsilon_i^p < 1 \quad 0 < \epsilon_i^{k+1} < 1 \tag{4.40}$$

We therefore control the regularity of a simplex mesh with the simplex angle parameter. In the next chapter, we will show that the metric parameters control the spacing of the vertices and thereupon the parameterization of a simplex mesh.

The regularizing force expressions generalize the discrete formulation of the intrinsic differential stabilizers of section 4.5.4. However, they can be seen as the forces resulting from the minimization of a *local* energy $\mathcal{S}_i$:

$$\mathcal{S}_i = \frac{1}{2}\alpha_i \|P_i P_i^\star\|^2 \tag{4.41}$$

where

- α_i is a constant between o and $0.5 : 0 \leq \alpha_i \leq 0.5$. Values of α_i over 0.5 result in unstable deformations.
- $P_i^\star$ is the position that would have P_i if it had the simplex angle $\varphi_i^\star$. $\varphi_i^\star$ is the filtered simplex angle at P_i that depends on the value of the simplex angle on a neighborhood of P_i.

Since $P_i^\star$ is independent of P_i, the minimization of $\mathcal{S}_i$ brings :

$$\mathbf{F}_{int} = \frac{\partial \mathcal{S}_i}{\partial P_i} = \alpha_i P_i P_i^\star \tag{4.42}$$

This expression corresponds to the intuitive concept of elasticity since it states that $\mathbf{F}_{int}$ is proportional to the deflection from a rest shape.The choice of $\varphi_i^\star$ determines the nature of the constraint.

4.7 Internal Forces on 1-simplex meshes of $\mathbb{R}^2$

The expression of the regularizing force of equation 4.42 becomes :

$$\mathbf{F}_{int} = \alpha_i(\epsilon_i^1 P_i P_{i-1} + \epsilon_i^2 P_i P_{i+1} + L(r_i, d_i, \varphi_i^\star)\mathbf{m}_i) \tag{4.43}$$

The different constraints on a 1-simplex mesh are :

Normal Discontinuity We set $\varphi_i^\star = \varphi_i$ (φ_i is the current value of the simplex angle). The resulting force does not constraint the simplex angle value at a vertex. The curve can freely bend at vertex P_i. This amounts to only constraining the distance between the vertices without constraining their curvature.

Normal Orientation Continuity Constraint We simply have $\varphi_i^\star = 0$. The force then writes as $\mathbf{F}_{int} = \alpha_i(\epsilon_i^1 P_i P_{i-1} + \epsilon_i^2 P_i P_{i+1})$. When the metric parameters are equal to 1/2, the force is equivalent to the weak string differential stabilizer term: $\mathbf{F}_{int} = \frac{\alpha_i}{2}\Delta^2 P_i$.

Angle Continuity Constraint $\varphi_i^\star$ is then defined as :

$$\varphi_i^\star = \sum_{j=i-s_i}^{j=i+s_i} \frac{\varphi_j}{(2s_i+1)} \tag{4.44}$$

s_i is the rigidity parameter that gives the scale at which which we should smooth the vertex angle values. When the metric parameters are equal to 1/2, then the expression of the force correspond the discretization of the IPS of order one (see equation 4.37). The continuity of angle does not guaranty a continuity of curvature unless, the vertices are regularly spaced on the curve.

Curvature Continuity Constraint $\varphi_i^\star$ is then defined as :

$$\varphi_i^\star = \arcsin\left(\sum_{j=i-s_i}^{j=i+s_i} \frac{e_j r_i \sin(\varphi_j)}{r_j}\right) \tag{4.45}$$

where e_j are constant verifying :

$$\sum_{j=i-s_i}^{j=i+s_i} e_j = 1 \quad 0 \leq e_j \leq 1$$

Equation 4.45 states that the curvature at P_i is the weighted average of the curvature over a neighborhood of size $2s_i + 1$:

$$k_i^\star = \sum_{j=i-s_i}^{j=i+s_i} e_j k_j$$

In particular, when $e_j = 1/(2s_i + 1)$, this amounts to applying a weak string differential stabilizer on the curvature values. Curves for which this force is null have a linear discrete curvature profile.

Shape Constraint The shape of a 1-simplex mesh is only determined by the metric parameters and angles at all vertices. Since we suppose the metric parameters as fixed, the shape of a 1-simplex mesh is only determined by the value of its angle. Therefore, given a shape $\{\epsilon_i^0, \varphi_i^0\}$, we constraint the shape at P_i with $\varphi_i^\star = \varphi_i^0$.

Curvature Constraint To constraint a vertex P_i to have curvature k_i^0, we set : $\varphi_i^\star = \arcsin(r_i k_i^0)$.

4.8 Internal Forces on 1-simplex meshes of $\mathbb{R}^3$

A contour defined on a simplex mesh, is a deformable structure that is handled independently of the mesh on which it is embedded. A vertex belonging to a contour is submitted to an internal force $\mathbf{F}_{int}$ that enforces shape or smoothness constraints of the contour rather than the surface model.

A contour defined on a 2-simplex mesh is a three dimensional curve, and therefore expressions defined in the previous section do not hold (a three-dimensional contour is not a manifold of co-dimension one).

Let $\mathcal{C} = (J(\mathcal{C}))$ be a contour defined on a simplex mesh $\mathcal{M}$. The shape at a vertex $P_{J(i)}$ is defined by the position of its four neighbors and the angle values $\varphi_{J(i)}$ and $\psi_{J(i)}$. The regularizing force $\mathbf{F}_{int}$ is proportional to the displacement vector joining

$P_{J(i)}$ to the point $P^\star_{J(i)}$ determined by the two angles $\varphi^\star_{J(i)}$ and $\psi^\star_{J(i)}$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{int} &= \alpha_{J(i)} P_{J(i)} P^\star_{J(i)} \\
\mathbf{F}_{int} &= \alpha_{J(i)}(\epsilon_{J(i)} P_{J(i)} P_{J(i-1)} + (1-\epsilon_{J(i)}) P_{J(i)} P_{J(i+1)} + && (4.46)\\
&\quad \lambda^\star_{J(i)}(\cos(\psi^\star_{J(i)})\mathbf{r}_{J(i)} + \sin(\psi^\star_{J(i)})\mathbf{t}_{J(i)} \times \mathbf{r}_{J(i)})) && (4.47)\\
\text{with}\quad & \lambda^\star_{J(i)} = L(\frac{\|P_{J(i-1)}P_{J(i+1)}\|}{2}, (\epsilon_{J(i)} - \frac{1}{2})\|P_{J(i-1)}P_{J(i+1)}\|, \varphi^\star_{J(i)}) && (4.48)
\end{aligned}$$

$\epsilon_{J(i)}$ is the metric parameter and this parameter is fixed during the deformation. We define the following constraints on a contour vertex :

Normal Discontinuity . We set $\varphi^\star_{J(i)} = \varphi_{J(i)}$ and $\psi^\star_{J(i)} = \psi_{J(i)}$ where $\varphi_{J(i)}$ and $\psi_{J(i)}$ are the current values of curvature and torsion. This expression only constrains the distance between vertices but not their shape.

Normal Continuity Constraint . We set $\varphi^\star_{J(i)} = 0$ and $\psi^\star_{J(i)} = 0$. The force then simply writes as $\vec{F}_{int} = \alpha_{J(i)}\left(\epsilon_{J(i)} P_{J(i)} P_{J(i-1)} + (1-\epsilon_{J(i)}) P_{J(i)} P_{J(i+1)}\right)$. This force is equivalent to the one obtained when minimizing the square sum of the first derivative as in [KWT88]. The curves that nullify this internal force are straight lines.

Angle Continuity Constraint . We set $\psi^\star_{J(i)} = 0$ and $\varphi^\star_{J(i)} = \frac{\varphi_{J(i-1)}+\varphi_{J(i)}+\varphi_{J(i+1)}}{3}$. We can generalize this expression by averaging over a larger extent s_i:

$$\varphi^\star_{J(i)} = \frac{\sum_{i-s_i \le j \le i+s_i} \varphi_{J(j)}}{2s_i + 1}$$

s_i is the rigidity coefficient that is similar to the simplex mesh case. Circles are the only closed curve for which the angle continuity constraint is null everywhere.

Curvature Continuity Constraint We average the curvature k_i over an extent s_i :

$$\varphi^\star_{J(i)} = \arcsin\left(\sum_{j=i-s_i}^{j=i+s_i} \frac{e_j r_i \sin(\varphi_j)}{r_j}\right)$$

For isotrope smoothing, we choose $e_j = 1/(2s_i + 1)$.

Shape constraint We set $\varphi^\star_{J(i)} = \varphi^0_{J(i)}$ and $\psi^\star_{J(i)} = \psi^0_{J(i)}$ where $\varphi^0_{J(i)}$ and $\psi^0_{J(i)}$ are two constants corresponding to the reference shape.

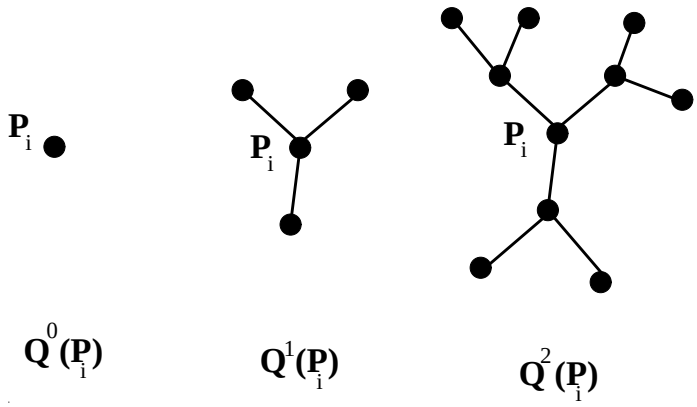


Fig. 4.9: Description of a neighborhood $Q^{s_i}(P_i)$ around a vertex P_i.

4.9 Internal Forces on 2-simplex meshes of $\mathbb{R}^3$

The stabilizing force expressions is a straightforward generalization of those encountered for the deformation of 1-simplex meshes of $\mathbb{R}^2$. The neighborhood around a vertex is here defined in a recursive manner. We will write $Q^{s_i}(P_i)$ as the neighborhood of extent s_i around P_i. We define $Q^0(P_i) = \{P_i\}$ and $Q^1(P_i) = \{P_i, P_{N_1(i)}, P_{N_2(i)}, P_{N_3(i)}\}$. The neighborhood $Q^{s_i}(P_i)$, $s_i > 1$ is the union of $Q^{s_i-1}(P_i)$ with the vertices of $\mathcal{M}$ that have a neighboring vertex in $Q^{s_i-1}(P_i)$. Figure 4.9 show an example of a neighborhood around a vertex.

The expression of the internal force is :

$$\mathbf{F}_{int} = \alpha_i(\epsilon_{1i}P_iP_{N_1(i)} + \epsilon_{2i}P_iP_{N_2(i)} + \epsilon_{3i}P_iP_{N_3(i)} + L(r_i, d_i, \varphi^\star)\mathbf{n}_i) \tag{4.49}$$

The choice of $\varphi_i^\star$ determines the constraint to be enforced:

Normal Discontinuity We set $\varphi_i^\star = \varphi_i$. The surface can freely bend around vertex P_i.

Surface Orientation Continuity constraint We have simply $\varphi_i^\star = 0$. Hence, the internal force writes as: $\mathbf{F}_{int} = \alpha_i(\epsilon_{1i}P_{N_1(i)} + \epsilon_{2i}P_{N_2(i)} + \epsilon_{3i}P_{N_3(i)} - P_i)$. When metric parameters are equal to 1/3, we have $\vec{F_{int}} = \frac{\alpha_i}{3}(P_{N_1(i)} + P_{N_2(i)} + P_{N_3(i)} - 3P_i)$ which can be written as $\vec{F_{int}} = \frac{\alpha_i}{3}\Delta_{\mathcal{M}}P$ where $\Delta_{\mathcal{M}}$ is the discrete Laplacian operator defined on the mesh. The mesh structure can be seen as

a surface parameterization though we cannot define properly any notion of derivatives.

Simplex Angle Continuity Constraint $\varphi_i^\star$ is defined as :

$$\varphi_i^\star = \sum_{j \in Q^{s_i}(P_i)} \varphi_j \tag{4.50}$$

The simplex angle continuity does not guaranty a continuity of mean curvature.

Mean Curvature Continuity Constraint $\varphi_i^\star$ is defined as :

$$\varphi_i^\star = \arcsin\left(\sum_{j \in Q^{s_i}(P_i)} \frac{e_{ij} * r_i * \sin(\varphi_j)}{r_j}\right) \tag{4.51}$$

$$\sum_{j \in Q^{s_i}(P_i)} e_{ij} = 1 \qquad 0 < e_{ij} < 1$$

Equation (4.51) states that the mean curvature at P_i is the weighted average of the neighborhood curvatures:

$$k_i^\star = \sum_{j \in Q^{s_i}(P_i)} e_{ij} * k_j$$

s_i corresponds intuitively to the notion of rigidity. If a highly rigid model is pinched at vertex P_i, the whole surface would bend slightly since the curvature is averaged over a large number of vertices and would quickly recover its rest shape. For a more flexible surface with a small value of s_i, a bump would only appear around P_i and the convergence toward its rest shape would be slower. Rigidity is a dynamic characteristic of a vertex and is not related to the notion of fairness. If we write equation (4.9) with $r = 1$ and $e_{i1} = e_{i2} = e_{i3} = 1/3$ we get: $k_{N_1(i)} + k_{N_2(i)} + k_{N_3(i)} - 3k_i^\star = 0$ or $\Delta_{\mathcal{M}} H = 0$.

Shape Constraint Given the constant φ_i^0 by setting $\varphi_i^\star = \varphi_i^0$ we constrain the simplex angle at P_i to φ_i^0. In order to constrain mean curvature k_i^0, the relation is $\varphi_i^\star = \arcsin(r_i * k_i^0)$. In both cases, the surface normal continuity at P_i may not be guaranteed depending on the constraints of neighboring vertices. The resulting action of shape constraint functionals may be seen in figure 4.10.

(a) (b) (c)

Fig. 4.10: Shape Constraint applied on a face model; (a) The initial deformed model; (b) Intermediate shape; (c) Recovering its initial shape

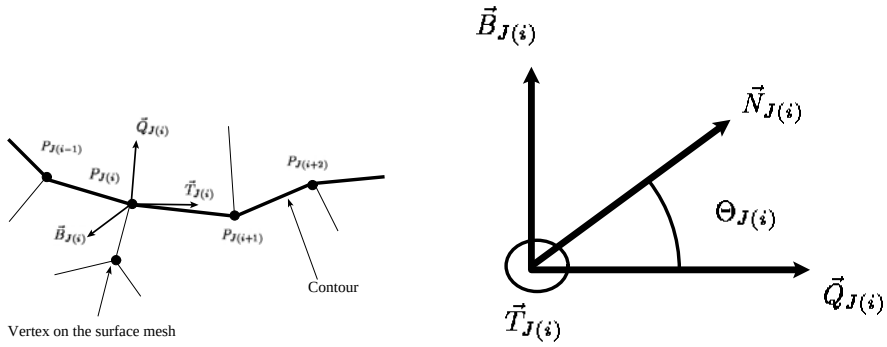
4.10 Boundary conditions between contours and 2-simplex meshes

Boundary conditions describe how contours are embedded inside a mesh. The simplex mesh provides a simple way of setting boundary conditions by controlling simplex angles $\varphi_{J(i)}$ at each vertex of contour $\{P_{J(i)}\}$. The underlying assumption is that smoothness forces defined through Equations (4.51) apply to vertices located around each contour. We propose two types of surface-contour constraints:

Curvature Condition Mean Curvature or simplex angle is set by:

$$\varphi_{J(i)} = \arcsin(r_{J(i)} k^0_{J(i)}) \quad \text{or} \quad \varphi_{J(i)} = \varphi^0_{J(i)}$$

Tangent Condition The angle between the tangent plane and the contour normal as measured around the contour tangent vector, intuitively corresponds to the angle between the surface and contour. Each contour vertex $P_{J(i)}$ has two neighbors on the same contour and a third on the mesh. Since the normal vector of the surface model at $P_{J(i)}$, $\mathbf{n}_{J(i)}$, is the normal at the triangle made by its neighbors, $\mathbf{n}_{J(i)}$ is perpendicular to $\mathbf{t}_{J(i)}$ and is therefore inside the plane $(\mathbf{m}_{J(i)}, \mathbf{b}_{J(i)})$ (see Figure 4.11). We will refer as $\Theta_{J(i)}$, the angle between $\mathbf{m}_{J(i)}$ and $\mathbf{m}_{J(i)}$. In order to constrain the surface to make an angle $\Theta^0_{J(i)}$ with the contour at $P_{J(i)}$, we set $\varphi_{J(i)} = \Theta^0_{J(i)} - \Theta_{J(i)}$.



(a) (b)

Fig. 4.11: (a) A contour vertex has one neighbor that does not belong to the contour. We can define at $P_{J(i)}$ a surface normal vector; (b) The tangent at the vertex is orthogonal to the surface normal vector $\mathbf{n}_{J(i)}$. $\Theta_{J(i)}$ is the angle between the surface normal vector and the contour normal vector.

Figure 4.12 shows the difference between the normal continuity constraint (figure (a) and (b)) and the curvature continuity constraint (figure (c) and (d)). The former constraint is equivalent to performing a convolution with a smoothing kernel of order one. The latter constraint, on the other hand, cannot be expressed in terms of linear smoothing but may be seen as smoothing the curvature value along the contour. The contour of figure 4.12 (c) and (d) has constant (discrete) curvature. In both cases, we have applied a curvature constraint between the contour and the mesh characterized by zero mean curvature $\varphi^0_{J(i)} = 0$. The mesh has everywhere null mean curvature (minimal mesh).

Figure 4.13 displays a simplex mesh with the same contour constraint as in figure 4.12 (c) and (d) but applies tangent constraint between the surface and the contour. Figure 4.13 (a) corresponds to an angle of $\Theta^0_{J(i)} = -95°$ while figure 4.13 (a) corresponds to an angle of $\Theta^0_{J(i)} = +145°$ between the contour normal and the surface normal. In both cases, we apply a curvature continuity constraint on the mesh vertices.

Finally, figure 4.14 shows a vase that was created from a cylinder by defining three intermediate contours with associated end conditions. Two contours are defined by

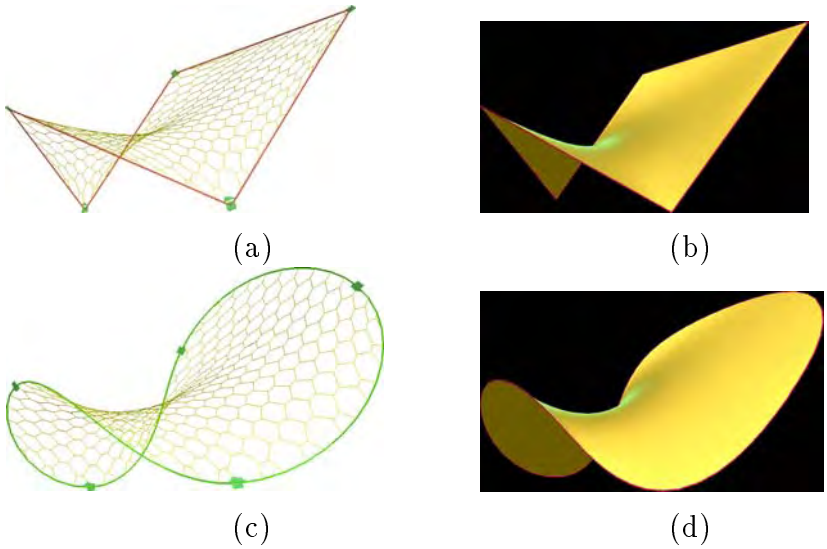
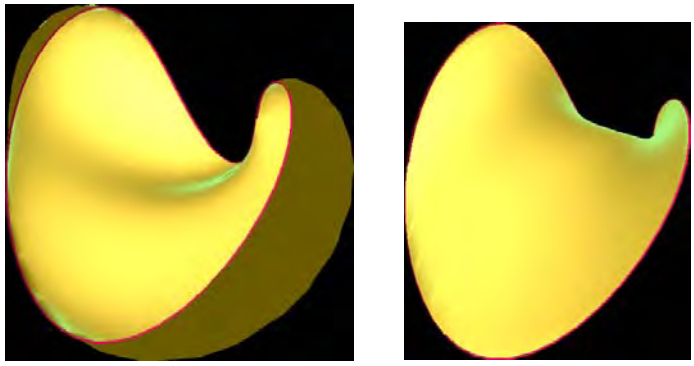


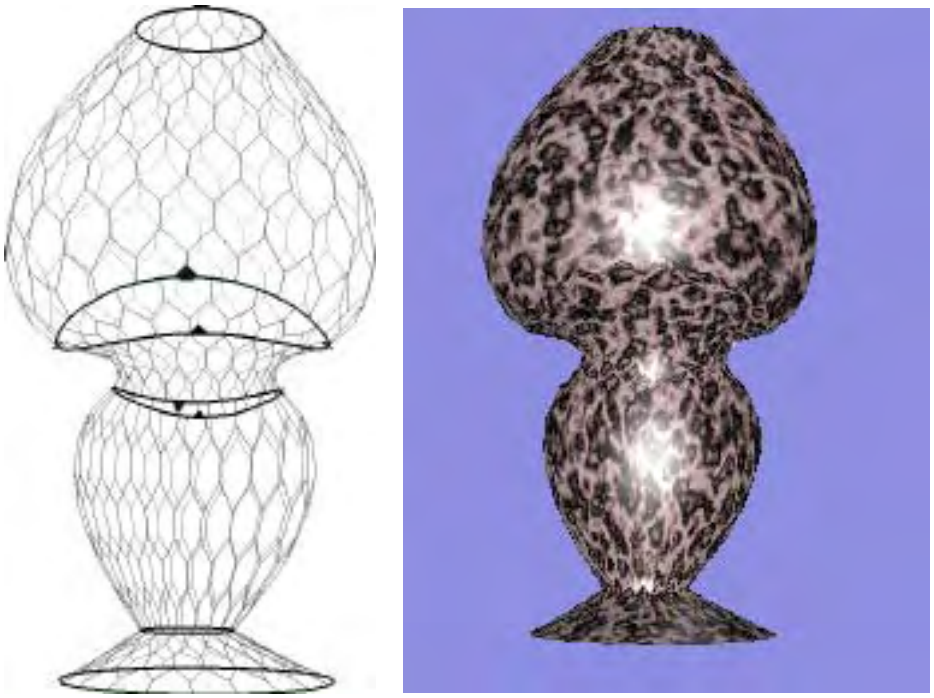
Fig. 4.12: (a) A contour defined on a simplex mesh is submitted to normal continuity constraints. The contour interpolated the position of five contour vertices displayed with the black squares. The surface mesh has everywhere null mean curvature; (b) Rendered display of (a); (c) Same as (a) except that the contour is submitted to curvature continuity constraints. The continuity of normal is then verified at each five fixed vertices; (d) Rendered display of (c)



(a) (b)

Fig. 4.13: (a) We constraint the surface normal vector to make an angle of $\Theta^0_{J(i)} = -95°$ with the contour normal vector; (b) Same as (a) with an angle of $\Theta^0_{J(i)} = +145°$

the interpolation of four non-coplanar points. The mesh is constrained to make an angle of $\pi/4$ and $-\pi/4$ with those two contours. The remaining three contours have a zero mean curvature constraint with the surface mesh.



(a) (b)

Fig. 4.14: (a) A vase created from a cylinder and five contours with appropriate end conditions; (b) Texture display of (a)

Chapitre 5

Modélisation et reconstruction à partir de maillages simplexes

Dans ce chapitre, nous utilisons les propriétés topologiques, géométriques et physiques des maillages simplexes décrites dans les chapitres précédents, pour la reconstruction de surfaces à partir de données tridimensionnelles provenant de divers capteurs.

Dans un premier temps, l'équation de la dynamique des maillages simplexes est présentée. Cette équation intègre des forces régularisantes décrites dans le chapitre 4 ainsi que des forces externes. Le calcul de ces forces est explicité lorsque les données sont sous la formes d'images de profondeur structurées, de nuages de points ou encore d'images médicales.

Puis, trois algorithmes permettant d'obtenir une description optimale des formes sont décrits. Le premier consiste à concentrer les sommets vers les endroits de forte courbure. Le second raffine le maillage aux endroits où le maillage n'est pas suffi-

samment proche des données. Enfin, le troisième change la topologie du maillage en créant des bords, là où le maillage n'a pas de vis-à-vis sur l'objet à segmenter.

De nombreux exemples sont présentés pour illustrer les performances de notre système de modélisation fondé sur les maillages simplexes.

La reconstruction de surfaces à partir de maillages simplexes a été publié dans les journaux "Image and Vision Computing"[DHI92a] et "IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence"[DHI94], dans les actes des conférences CVPR'91[DHI91b], ICCV'93[DHI93] et CVPR'94[Del94b] ainsi que dans les rapports de recherche [DHI92b] et [Del94a].

5.1 Équation d'évolution

On se propose de modéliser dans ce chapitre, des surfaces tridimensionnelles à l'aide de 2-maillages simplexes déformables. La déformation des maillages est contrôlée par une loi d'évolution dynamique de chacun des sommets du maillage. Nous utilisons une loi d'évolution Newtonienne du second ordre :

$$m\frac{d^2P_i}{dt^2} = -\gamma\frac{dP_i}{dt} + \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{ext} \tag{5.1}$$

où m est la masse du sommet P_i et γ est le facteur d'amortissement. $\mathbf{F}_{int}$ exprime la contrainte de régularité appliquée sur le sommet P_i. Lorsque P_i appartient à un contour, c'est l'expression de la force de régularité du contour qui prévaut sur la force de régularité du 2-maillage. Le chapitre précédent donne les différentes expressions de la force $\mathbf{F}_{int}$ pour les différents types de contraintes.

$\mathbf{F}_{ext}$, par contre, correspond à des contraintes externes appliquées au maillage. Le plus souvent, elles sont exprimées en termes de distance à des données tridimensionnelles. Elles peuvent également correspondre à des actions de l'utilisateur voulant contrôler la déformation d'un maillage.

La variable de temps t est discrétisée, et les dérivées temporelles sont approximées en utilisant la méthode d'Euler avec les différences centrées. Si P_i^t est la position du sommet i à l'itération t, alors l'équation 5.1 est discrétisée comme :

$$P_i^{t+1} = P_i^t + (1-\gamma)(P_i^t - P_i^{t-1}) + \mathbf{F}_{int} + \mathbf{F}_{ext} \tag{5.2}$$

Les deux forces $\mathbf{F}_{int}$ et $\mathbf{F}_{ext}$ sont calculées à l'instant t. Par conséquent, le schéma de calcul du maillage déformable est explicite. L'utilisation d'un schéma explicite

s'impose donc par sa simplicité d'implémentation et par la vitesse de calcul. En effet, il ne fait appel à l'inversion d'aucune matrice et ne nécessite pas de pré-calcul. Par contre, l'utilisation d'un schéma semi-implicite est réputé plus stable puisqu'en quelque sorte il consiste à lisser les forces appliquées sur le maillage [Coh92]. Cependant, puisque les forces régularisantes sont non-linéaires, un schéma semi-implicite nécessiterait une linéarisation de ces forces et l'inversion d'une matrice bande. Aucune instabilité de convergence n'est observée en pratique avec les expressions de $\mathbf{F}_{ext}$ décrites dans la section suivante.

La discrétisation des modèles déformables utilisant des fonctionnelles régularisantes quadratiques se fait en général à l'aide de la méthode des différences finies ou bien de la méthode des éléments finis. La méthode des différences finies a une complexité algorithmique plus faible que celle des des éléments finis. Cependant, Cohen[Coh92] et Berger[Ber91] ont remarqué que pour décrire une même forme, la méthode des différences finies nécessite jusqu'à six fois plus de points que celle des éléments finis ce qui diminue d'autant la complexité de calcul.

Notre méthode de résolution peut-être assimilée à celle des différences finies. L'adaptation spatiale d'un maillage simplexe à la courbure, permet d'optimiser le nombre de sommets nécessaires pour décrire la forme d'un objet. Le schéma explicite permet de calculer très rapidement la nouvelle position des sommets. La méthode des éléments finis nécessite de construire au préalable la matrice de rigidité et est plus lourde à gérer.

5.2 Contraintes externes de déformation

5.2.1 Contraintes définies par l'utilisateur

Les forces externes appliquées sur un maillage simplexe peuvent provenir de l'influence de données tridimensionnelles ou bien de contraintes provoquées par l'utilisateur. En effet, l'interface que nous avons mis au point autorise deux modes principaux d'interaction entre l'utilisateur et un maillage simplexe.

Le premier mode consiste à déformer un maillage à l'aide de la souris. L'utilisateur clique alors sur le pixel où il veut que le maillage se déforme. A un pixel donné, il correspond une ligne tridimensionnelle qui est le lieu des points de l'espace se projetant sur ce pixel. L'intersection de cette ligne avec le plan parallèle au plan image et passant par le milieu de la scène est calculée et une force élastique est

exercée entre ce point d'intersection et le sommet du maillage le plus proche (voir figure 5.1(a)). Les sommets voisins du sommet le plus proche sont également perturbés avec une force élastique dont l'amplitude décroît avec leur distance au sommet le plus proche. La constante de rigidité ainsi que l'étendue du voisinage sur lequel s'exerce la déformation, peut être ajustée pour obtenir l'effet désiré.

La seconde méthode utilise des techniques de réalité virtuelle. Un gant muni de deux capteurs de position et d'orientation permet d'utiliser le concept de main virtuelle (voir figure 5.2). Plusieurs modalités d'interaction sont disponibles avec la main virtuelle. Une de ces modalités consiste à générer un champ de potentiel répulsif centré sur la position de la main et dont l'amplitude décroît rapidement avec la distance. Ainsi, le maillage est déformé à l'approche de la main. Le maillage est ou bien dilaté ou contracté suivant que la main virtuelle se situe à l'intérieur ou à l'extérieur du maillage. Cette méthode est moins précise que la précédente, mais elle est néanmoins efficace lorsqu'il s'agit d'extirper un maillage d'un minimum local d'énergie. Les détails de l'interface de réalité virtuelle ont été publiés dans [DSCP94].

5.2.2 Contraintes associées à des données tridimensionnelles

Les contraintes externes appliquées sur les maillages simplexes déformables sont ici exprimées en termes de forces externes $\mathbf{F}_{ext}$ et non en terme de champs de potentiel.

Les exemples de maillages simplexes déformables présentés dans ce chapitre concernent la segmentation de surfaces et non pas la segmentation d'images. La différence principale entre ces deux domaines d'application provient de la nature des données. Dans le premier cas, il s'agit ou bien d'un ensemble de points, structuré ou non, ou encore d'une surface triangulée. Dans le second cas, il s'agit d'images d'intensité bidimensionnelles ou volumiques dont on extrait l'image de gradient. Les techniques de calcul de potentiels ou de forces externes sont cependant similaires.

Kass *et al*[KWT88] propose d'utiliser le champ de potentiel $\mathcal{P}(i,j) = -|\nabla \mathcal{I}(i,j)|^2$ pour attirer les contours actifs vers les pixels de l'image de plus fort gradient. La convolution de l'image par une gaussienne autorise un contrôle de l'échelle à laquelle les maxima de gradient sont considérés. L. Cohen[Coh91] a remarqué que la force résultante $\mathbf{F}_{ext} = \beta\nabla\mathcal{P}$ devenait instable a proximité d'un contour et il corrige cette instabilité en normalisant la force d'attrac-

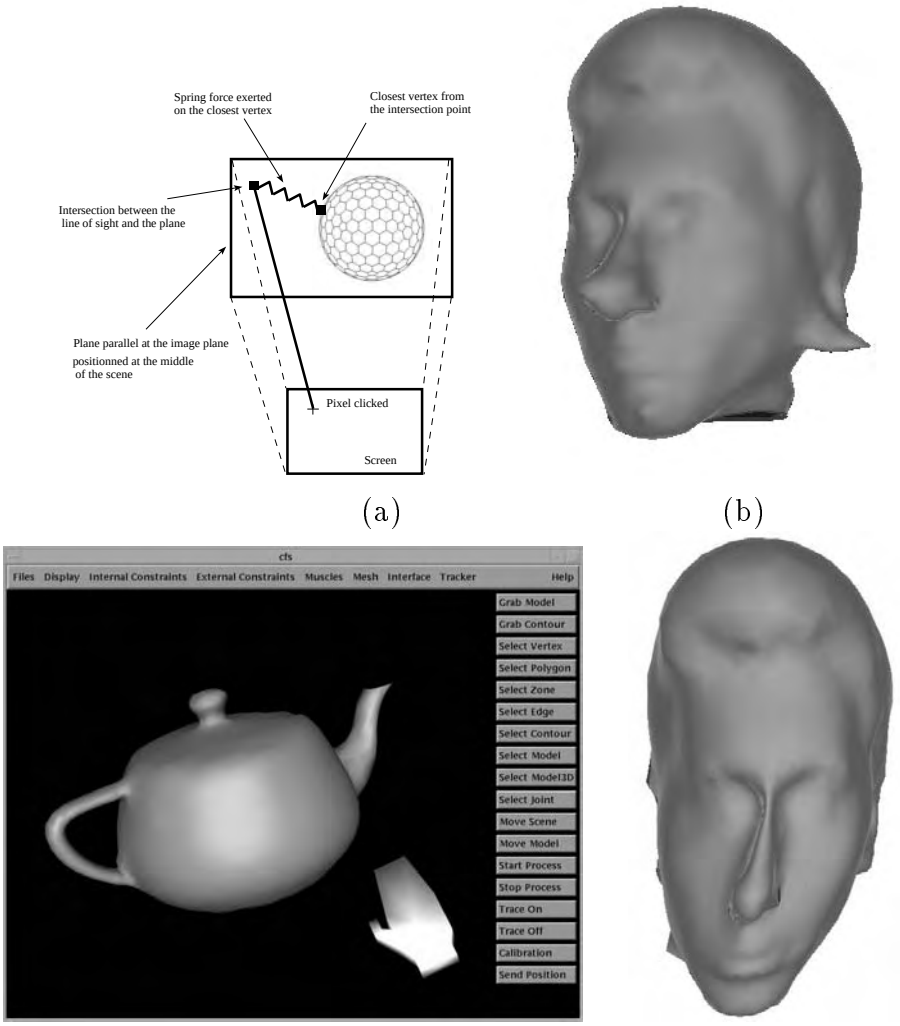


Fig. 5.1: (a) Description du système interactif permettant de déformer un maillage simplexe à l'aide d'une souris électronique; (b) Exemple de déformation d'un visage au niveau de l'oreille causée par l'action de la souris; c) L'interface utilisateur inclut une main virtuelle guidée par deux capteurs fixés sur un gant; (d) Exemple d'un visage déformé par une main virtuelle approchant par le coté droit.

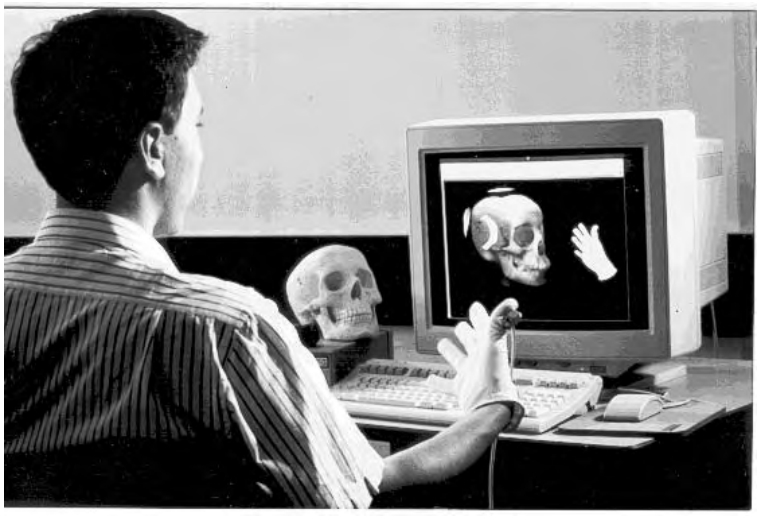


Fig. 5.2: L'utilisateur peut positionner dans l'espace tridimensionnel des maillages simplexes à l'aide d'une main virtuelle

tion. Une autre technique consiste à effectuer au préalable une détection de contours sur l'image puis à créer une carte de distance permettant de connaître en chaque point de l'image la distance au point de contour le plus proche. Cette image est obtenue après une convolution avec un masque caractérisant la métrique choisie. Les distances utilisées sont la distance euclidienne[Dan80] ou de Chanfrein[Bor84]. Cette approche a été utilisée par L. Cohen et I. Cohen[CCA92], Menet *et al*[MSMM90] et Leitner *et al*[LC91]. Mc Inerney *et al*combinent les deux approches précédentes en opposant au caractère global du champ de gradient, le caractère local de la carte de distance créée autour de chaque contour.

Pour la segmentation de surfaces, des expressions similaires ont été proposées. D'ailleurs, la segmentation d'images où l'on effectue au préalable, une détection de contours, se ramène, en réalité à un problème de segmentation de contours ou de surfaces puisque l'information de gradient est en quelque sorte binarisée. Lorsque les données à segmenter sont denses et complètes, la construction de cartes de distances autorise une convergence rapide comme le prouvent les travaux de Nastar[NA93] et Guéziec[Gue93].

Cependant, dans le cas général où les données sont incomplètes et bruitées, c'est

la méthode du point le plus proche qui est la plus appropriée. La distance considérée peut-être la distance euclidienne entre les deux points ou une distance généralisée incluant la notion de courbure comme celle définie par Feldmar[FA94]. C'est cette méthode du point le plus proche que nous utilisons pour déformer les maillages simplexes à proximité des données tridimensionnelles. A chaque itération, le point le plus proche $M_{Cl(i)}$ de chaque sommet P_i du maillage est calculé et la force résultante est alors :

$$\mathbf{F}_{ext} = \beta_i G\left(\frac{\|P_i M_{Cl(i)}\|}{D}\right)(P_i M_{Cl(i)} \cdot \mathbf{n}_i)\mathbf{n}_i \tag{5.3}$$

où $\mathbf{n}_i$ est le vecteur normal en P_i et $G(x)$ la fonction de raideur (voir figure 5.3). Cette expression est similaire à celle utilisée dans [DHI91b].

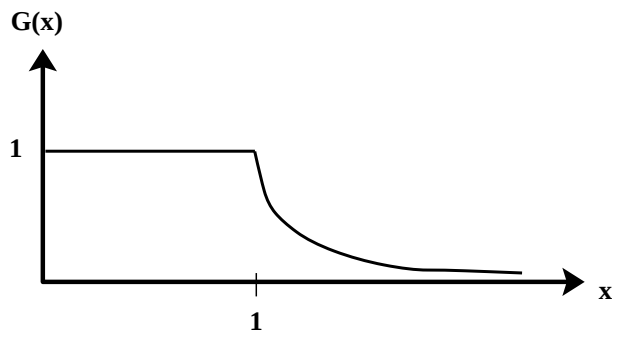


Fig. 5.3: La fonction de raideur $G(x)$.

Puisque nous utilisons une représentation de surface discrète, déplacer les sommets vers les données les plus proches générerait un maillage très désordonné, surtout en présence de points épars. Afin de résoudre ce problème de discrétisation, on projette le vecteur $P_i M_{Cl(i)}$ sur la direction normale au maillage. La colinéarité de la force d'attraction avec le vecteur normal $\mathbf{n}_i$, garantit de plus des déformations très lissées du maillage. Le scalaire D correspond à la distance maximale à laquelle un point des données peut attirer un sommet du maillage. Lorsque le point le plus proche $M_{Cl(i)}$ se trouve à une distance supérieure à D, alors la fonction de raideur décroît rapidement et par conséquent, le point a très peu d'effet sur le sommet

P_i. Il est nécessaire de limiter la distance d'attraction des données afin de limiter l'influence des points aberrants.

Le scalaire D est calculé comme une fraction du rayon de la sphère qui englobe l'ensemble des données. À la phase initiale de la déformation, nous choisissons une valeur relativement importante de D (jusqu'à 20% du rayon de la sphère) puisque le maillage peut être positionné "loin" des données à segmenter. Après quelques itérations, la valeur de D est diminué (au moins 8% du rayon de la sphère) afin d'accélérer la recherche du point le plus proche.

Nous allons à présent détailler la recherche du point le proche pour différents types de données tridimensionnelles.

Images de profondeur structurées

Ces images de profondeur structurées proviennent de capteurs actifs utilisant le plus souvent le principe de la triangulation. Nous utiliserons des images provenant de capteurs conçus par le National Research Council of Canada [RC88], par la société Cyberware[SW91] ou encore par l'université de Nagoya au Japon[SI87]. Ces images sont structurées puisque deux points voisins dans l'image sont également voisins sur la surface.

La recherche du point le plus proche $M_{Cl(i)}$ est théoriquement d'une complexité en $O(m^2)$ pour une image de taille $m \times m$. Cependant, lorsque la calibration du capteur est connue, cette opération peut s'effectuer en $O(1)$. En effet, nous restreignons alors, la recherche du point le plus proche à un segment, image de la ligne tridimensionnelle passant par P_i et dirigée selon $\mathbf{n}_i$ (voir figure5.4). Ce segment est centré sur la projection de P_i dans l'image et ne possède que quelques pixels de longueur. Lorsque le point du segment le plus proche est déterminé, nous réitérons la recherche du point le plus proche dans un voisinage 5×5 centré autour de ce point. Enfin, le point considéré comme le plus proche sera considéré comme tel, seulement s'il appartient au cône centré sur P_i, d'axe $\mathbf{n}_i$ et d'angle au sommet égal à 30 degrés.

Une autre condition qui peut être ajoutée sur l'existence du point le plus proche est la cohérence entre le vecteur normal $\mathbf{n}_i$ défini au sommet P_i et le vecteur normal calculé sur le voisinage de $M_{Cl(i)}$.

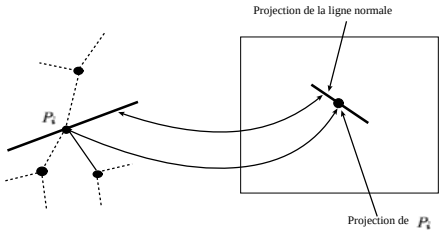


Fig. 5.4: Recherche du point le plus proche sur une image de profondeur structurée

Nuages de points

Lorsque les données consistent en des nuages de points non structurés, tels que ceux fournis par les algorithmes de stéréovision, il est impossible de définir une notion de voisinage, et l'algorithme présenté précédemment est impossible à utiliser. Par conséquent, nous utilisons une structure de "kd-tree"[PS90] pour déterminer les points les plus proches situés dans une sphère de rayon D centrée autour de P_i. Lorsque D est suffisamment petit, le temps de calcul est comparable à la méthode précédente. Lorsque l'on dispose à la fois d'une information de position et de vecteur normal pour chaque point de données, on crée alors un kd-tree à six dimensions combinant les différences de position et d'orientation, de manière identique à l'algorithme de Feldmar[FA94].

Images médicales

Les images volumiques provenant d'IRM, CT-Scan ou PET quantifient différentes propriétés physiques de tissus organiques[Aya93]. Les zones de l'image ayant une même intensité, correspondent le plus souvent aux frontières entre différentes structures du corps humain. L'extraction d'isosurfaces dans l'image permet donc dans des conditions idéales de segmenter des organes ou des structures osseuses. Nous utilisons un algorithme dérivé de l'algorithme des "marching cubes"[LC87] qui garantit une complète fermeture de la surface[TG92]. Dans chaque voxel, les cycles appartenant à l'isosurface sont triangulés, en joignant chaque sommet au milieu des sommets du cycle.

Le point le plus proche $M_{Cl(i)}$ est déterminé comme l'intersection de la ligne

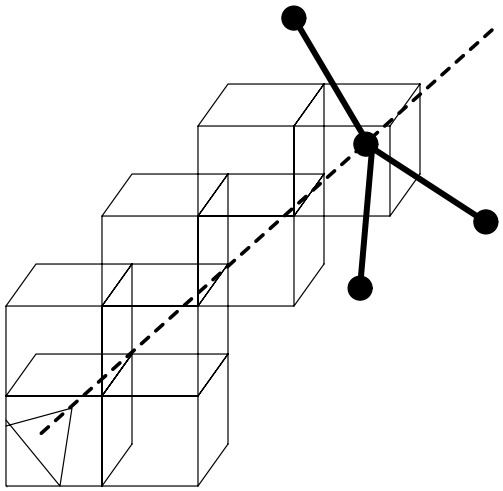


Fig. 5.5: Recherche du point le plus proche sur une image volumique

normale passant par P_i avec l'isosurface. Le calcul est effectué de manière très rapide, en conservant à chaque voxel, l'information sur l'isosurface qu'il contient. Ainsi, le point d'intersection est trouvé en vérifiant successivement si les voxels intersectés par la ligne contiennent une portion d'isosurface (voir figure 5.5). Dans l'affirmative, l'intersection de la ligne avec chacun des triangles est calculée pour obtenir une précision inférieure au voxel.

5.3 Reconstruction d'images tridimensionnelles

Nous présentons à présent le paradigme utilisé pour extraire des maillages simplexes d'un ensemble d'images tridimensionnelles. Le principe des modèles déformables permet de fusionner de manière élégante un ensemble de plusieurs images de profondeur exprimées dans un même repère. Il suffit, pour cela de considérer, lors du calcul de la force externe, que le point le plus proche $M_{Cl(i)}$ sur l'ensemble des images de profondeur. Des exemples de reconstruction d'objets à partir de trois images de profondeur OGIS seront présentés dans le chapitre 6.

La modélisation à l'aide de maillages simplexes s'effectue en deux étapes (voir figure 5.6). Dans une première étape, on effectue une initialisation du modèle et on procède à une déformation grossière de sorte à amener le maillage simplexe dans

un proche voisinage de l'objet. Le maillage est initialisé comme l'une des quatre primitives (tore, cyl;indre, plan, ellipsoide) et est positionné au voisinage des données à segmenter. La vitesse de convergence et la robustesse de la segmentation sont d'autant meilleurs que le maillage est initialisé très proche des données. Lorsque la surface à segmenter est non convexe, il est préférable que le maillage englobe les données.

Au cours de cette première déformation, le maillage est soumis à une contrainte de régularité (continuité de courbure moyenne) avec une valeur élevée du paramètre de rigidité s_i ($s_i \simeq 6$). Un modèle très rigide permet d'une part au maillage de rapidement atteindre son équilibre puisque les contraintes se propagent plus vite, et d'autre part d'éviter les minimums locaux. Une cinquantaine d'itérations (soit approximativement 30 secondes) sont généralement nécessaires pour cette première phase. Une valeur élevée (typiquement 20%) de la distance d'attraction D est alors utilisée.

Le maillage créé à la fin de cette première phase, tend à approximer grossièrement les parties fortement courbées.

Ensuite, la topologie du maillage est modifiée afin qu'elle s'adapte à celle de l'objet. Dans un premier temps, un certain nombre de contours sont crées, en fonction de la distance des points du maillages aux données. L'opérateur peut intervenir pour guider l'algorithme de créstion de contours. Dans un deuxième temps, un algorithme considère l'ensemble des contours existant sur le maillage et décidé éventuellement de fusionner plusieurs de ces contours afin de changer le genre de la surface.La encore, ce procédé est semi-automatique, l'utilisateur pouvant modifier les décisions de l'algorithme.

Le seconde étape améliore le maillage précédent en l'adaptant et éventuellement en le raffinant. Tout d'abord, la valeur du paramètre de rigidité est diminuée ($s_i \simeq 1$) ainsi que la distance d'attraction D. Le processus itératif d'adaptation et de raffinement est également appliqué sur une partie ou sur l'ensemble du maillage. Un nouvel équilibre est atteint lorsque les parties de fortes courbures sont suffisamment raffinées et quand le modèle approxime finement les données. Cette étape peut demander jusqu'à 400 itérations (soit 4 minutes) suivant la complexité de la forme, le niveau d'adaptation et de raffinement requis et, bien sûr, le nombre de sommets du maillage.

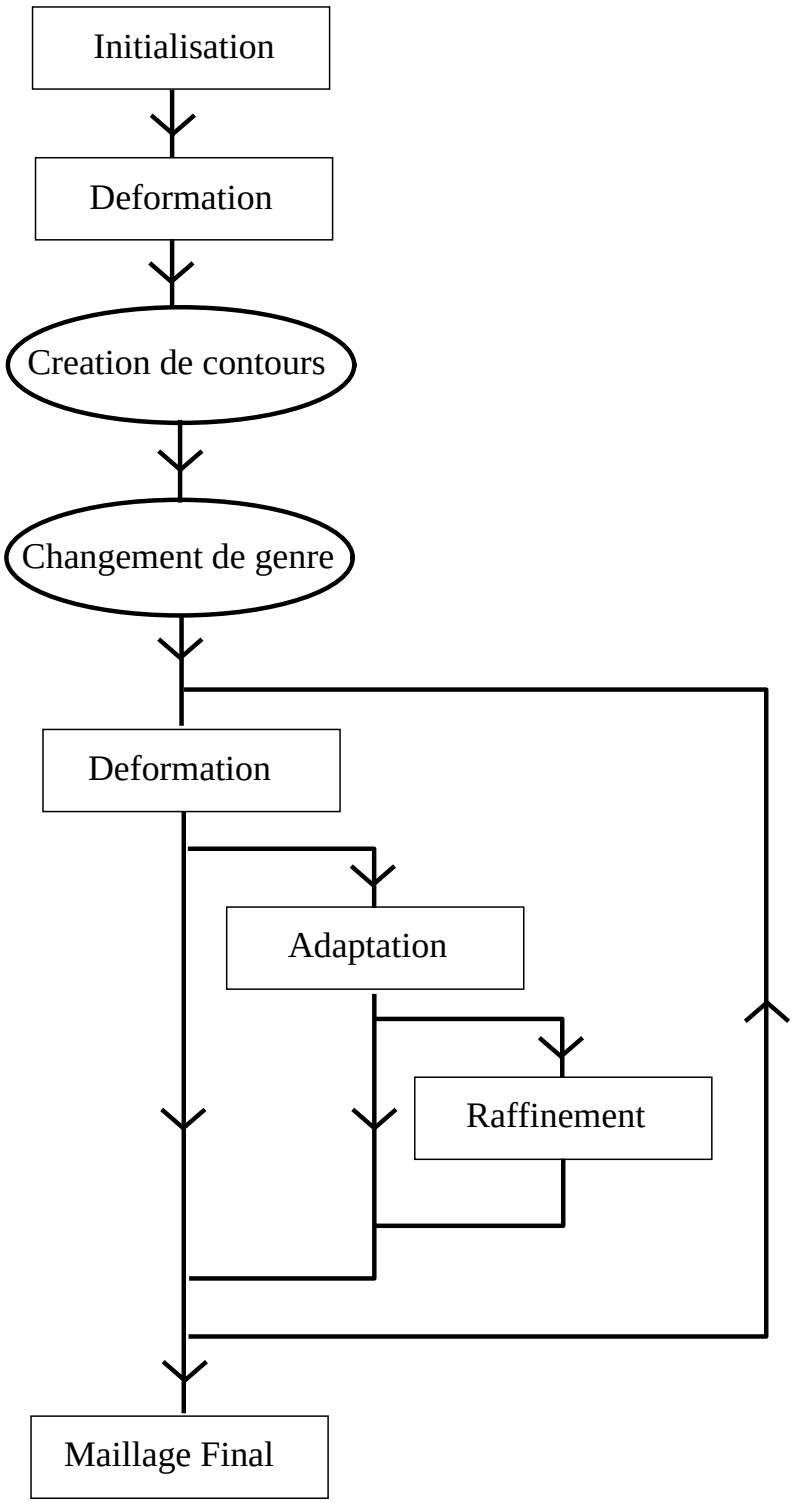


Fig. 5.6: Les différentes étapes permettant la reconstruction d'images tridimensionnelles

5.4 Adapatation topologique des maillages simplexes

5.4.1 Adaptation du nombre de bords d'un maillage

Il est possible de créer de manière semi-automatique des bords sur un 2-maillage simplexe. Partant d'un maillage générique, le modèle peut ainsi adapter sa topologie à celle de l'objet à reconstruire en créant des bords correspondant aux endroits où le maillage est distant des données.

Pour cela, on calcule tout d'abord, en chaque sommet du maillage, le point des données tridimensionnelles le plus proche. On crée des zones, c'est à dire des ensembles de faces, dont les sommets sont situés à une distance supérieure à une distance de référence des données tridimensionnelles. Un ensemble de contours entourant ces zones est alors créé et une suite d'opérations T_3^2 permet d'enlever les zones du maillage n'ayant pas de vis-à-vis dans les données. Des contours sont alors systématiquement créés autour des faces résultant des opérations T_3^2. Ces contours déformables se déformeront pour approximer la forme du trou existant dans les données.

Cette procédure a été utilisée pour construire un modèle de visage (voir figure 5.15) et de crâne (voir figure 5.22). La figure 5.7 montre comment l'algorithme opère pour un modèle de crâne. L'algorithme détecte correctement les deux orbites, au nez et au foramen comme étant les zones où un contour doit être créé. D'autres zones sont détectées mais elles ne sont pas découpées en raison de leur faible taille.

La construction du modèle de visage (voir figure 5.8) montre les limites de cette approche. En effet, dans ce cas, il existe deux zones où les sommets sont distants des données. La zone supérieure correspond aux cheveux alors que la zone inférieure correspond au cou. Cependant, il est intéressant de conserver la zone supérieure de la tête plutôt que de l'enlever afin d'interpoler les données qui n'ont pas pu être acquises par le scanner Cyberware. Par contre, il est nécessaire d'enlever la zone inférieure du cou afin d'obtenir un modèle avec la bonne topologie.

Par conséquent, la création automatique de bords suppose que la description de l'objet est complète. On préférera, en pratique, procéder de manière semi-automatique, en choisissant les zones à enlever.

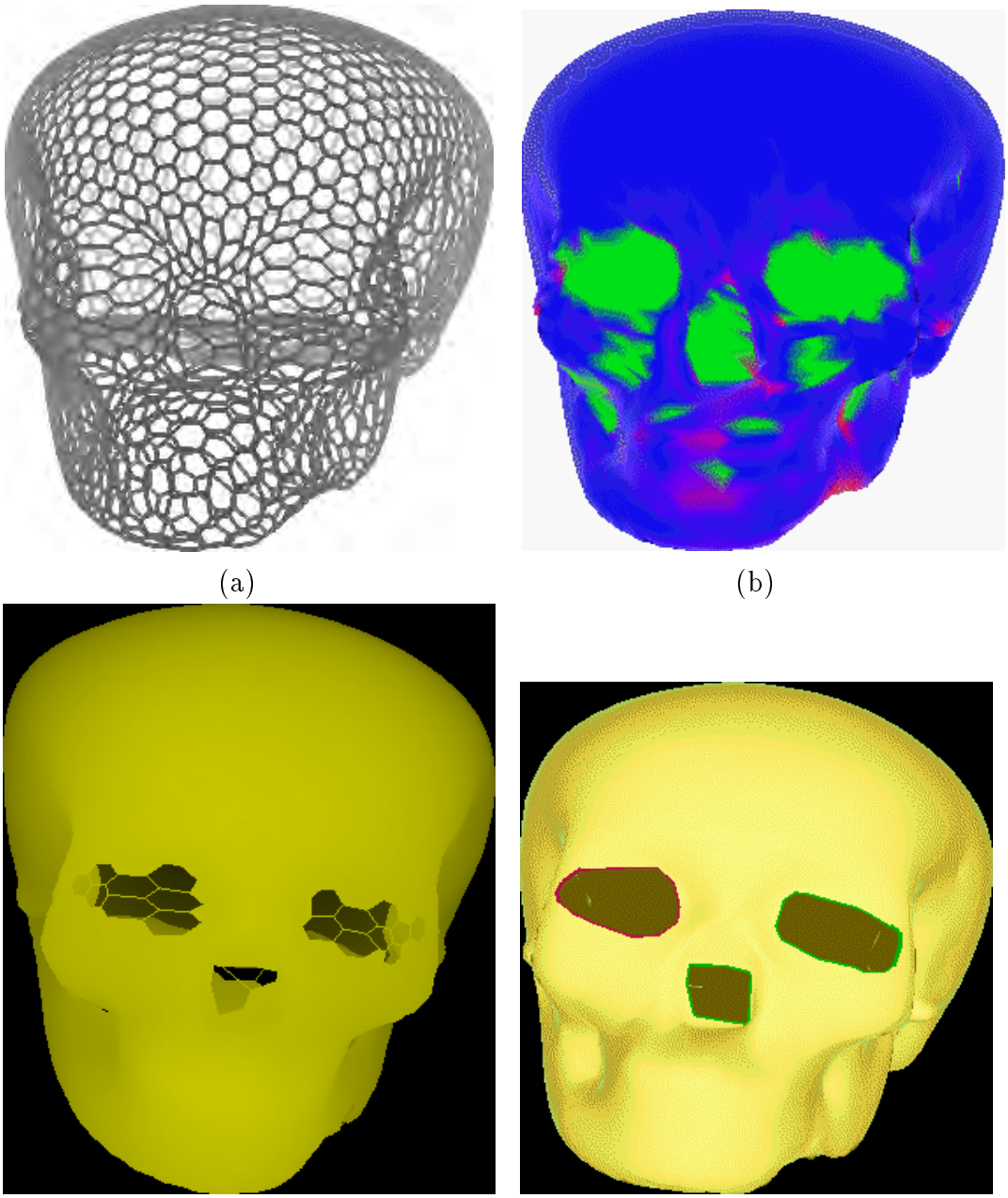


Fig. 5.7: Création de contours sur un modèle de crâne: (a) maillage simplexe après la première phase (b) distance des sommets du maillage à l'iso-surface correspondant au crâne. Le sommet est peint en bleu s'il est relativement proche des données et il est peint en vert s'il en est éloigné; (c) Les zones détectées comme étant éloignées des données; (d) le maillage après création des contours;

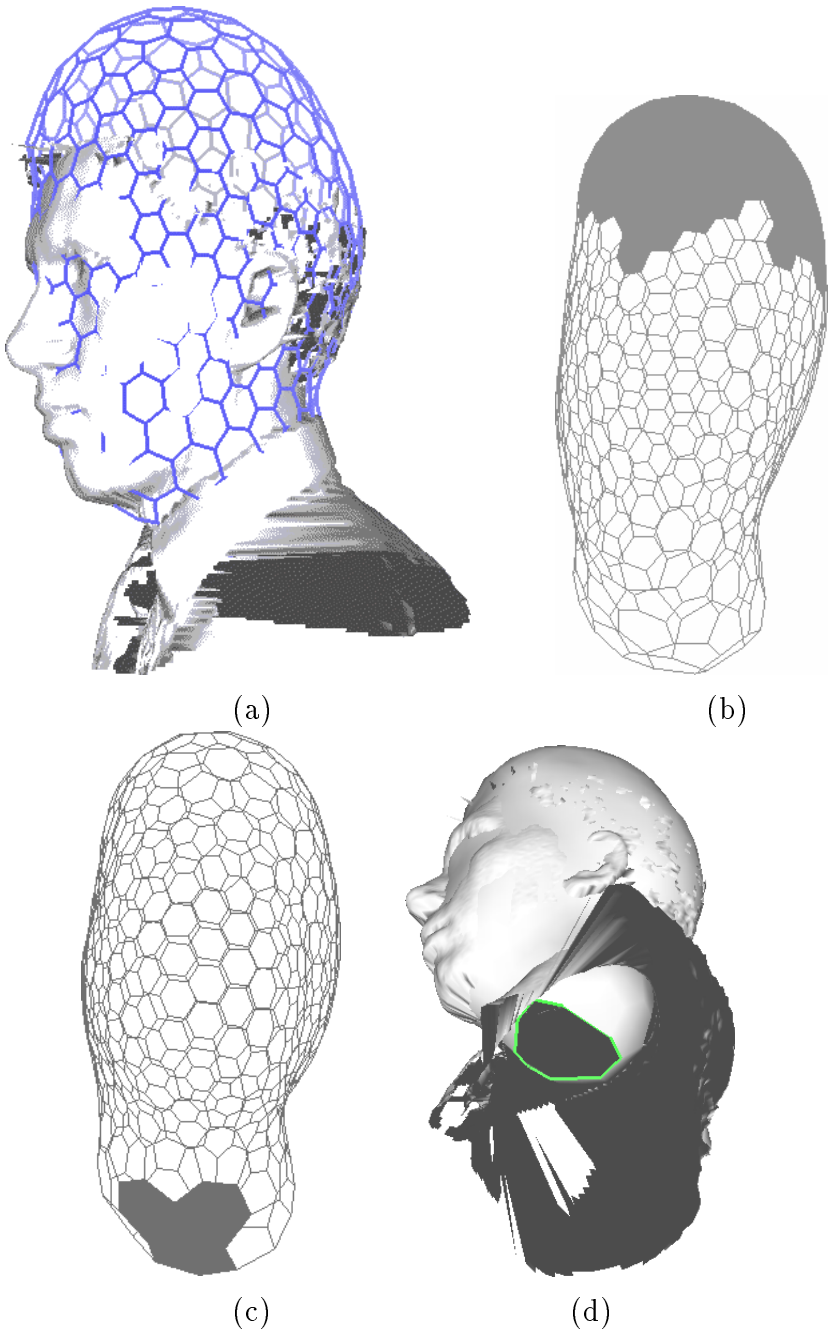


Fig. 5.8: Création de contours sur un modèle de visage: (a) maillage simplexe superposé avec les données après la première phase (b) première zone detectée comme étant éloignée des données; cette zone correspond à la partie supérieure de la tête où les données Cyberware sont manquantes; (c) seconde zone detectée comme étant éloignée des données; cette zone correspond au cou; (d) Maillage simplexe où la zone correspondant au cou a été enlevée;

5.4.2 Adaptation du genre d'un maillage

Le nombre de bords ne caractérise qu'un aspect de la topologie d'un maillage. Le genre, à savoir de nombre de "poignées" constitue une seconde caractéristique de la topologie du maillage. Nous proposons une méthode permettant d'augmenter de manière semi-automatique le genre d'un maillage simplexe. En effet, la modélisation d'un objet tridimensionnel se fait à partir de primitives de topologie simple, en général de genre nul (sphère, plan, cylindre). On peut alors complexifier la forme du maillage en effectuant des opérations T_4^2 sur deux faces. L'algorithme de changement de genre consiste par conséquent à selectionner ces deux faces.

Parmi les faces d'un maillage simplexe, on ne va considérer comme faces candidates à une opération T_4^2, que celles qui sont considérées comme "vides" et qui sont nécéssairement entourées par un contour. Le nombre de ces faces est par conséquent égal au nombre de bords du maillage. Parmi toutes ces faces, on ne retient que les couples de faces tels que :

- **Les centres des 2 contours sont proches.** Cette distance est mesurée par l'intermédiaire du rapport entre la distance des centres et la moyenne des rayons des 2 centres.
- **Les diamètres des 2 contours sont similaires.** L'écart relatif des deux diamètres est calculé et comparé à une valeur de référence (20% par exemple).
- **Les 2 contours sont situés dans des plans approximativement parallèles**. Un vecteur normal est calculé pour chacun des contours, et la coplanarité des deux contours est mesurée par l'intermédiaire de l'angle entre les deux vecteurs normaux.

La figure 5.9 montre un exemple de changement automatique de genre d'un maillage simplexe. Le modèle est initilisé comme une sphère de genre nul. Après une première déformation sur une isosurface représentant une vertèbre, le calcul des distances au point le plus proche permet de créer deux contours situés à chacune des deux extrémités de la "poignée" de la vertèbre. Les deux contours vérifiant les 3 conditions ci-dessus, ils sont fusionnés pour changer le genre du maillage. Le maillage est ensuite itérativement raffiné et adapté pour modéliser fidèlement la vertèbre.

Là encore, une utilisation complètement automatique de cet algorithme serait illusoire. L'utilisateur peut manuellement sélectionner deux contours et refuser le

couple de contours proposé par l'algorithme. Notons enfin l'approche hierarchique qui est utilisée entre la création de bords et le changement de genre. En effet, la procédure, affectant le genre du maillage utilise les contours créés par la procédure créant les bords. Cette approche correspond à relation intuitive entre les deux notions topologiques des surfaces de $\mathbb{R}^3$ que sont le nombre de bords et le genre.

5.5 Adaptation géométrique des maillages simplexes

5.5.1 Adaptation spatiale à la courbure

Les paramètres métriques $\epsilon_i = \{\epsilon_{1i}, \epsilon_{2i}, \epsilon_{3i}\}$ sont les coordonnées barycentriques du pied d'un sommet P_i sur le triangle constitué de ses trois voisins. Ces paramètres contrôlent la distance relative de P_i aux trois sommets voisins. Dans le chapitre précédent, nous avons décrit l'expression des forces internes de régularisation agissant sur les maillages simplexes. Nous avons alors considéré les paramètres métriques comme constants, l'angle simplexe permettant de déterminer la continuité de courbure sur le maillage. Dans cette section, nous définissons une procédure qui modifie la valeur des paramètres métriques et par conséquent l'espacement des sommets en fonction de la courbure.

De nombreux travaux ont introduit des principes d'adaptivité pour les modèles déformables afin d'en augmenter la robustesse et de diminuer la quantité d'information nécessaire a priori. La courbure est l'information géométrique la plus souvent utilisée pour adapter les modèles déformables. Une autre information fréquemment utilisée est la distance du modèle déformable aux données. En réalité, ces deux informations sont souvent redondantes puisqu'en raison des contraintes de lissage, un modèle déformable ne peut pas approximer correctement les données où la courbure est forte. Quoi qu'il en soit, les deux informations suggèrent une forte variation de la forme de l'objet.

La dénomination de "maillages adaptatifs" ("adaptive meshes" en anglais) revêt deux aspects distincts. Le premier concerne l'adaptation de la concentration d'information sur le maillage. Cette concentration vise à obtenir une description optimum de la forme à partir d'une structure donnée sans en changer la topologie. Pour les maillages discrets, c'est équivalent à adapter l'espacement des sommets pour les

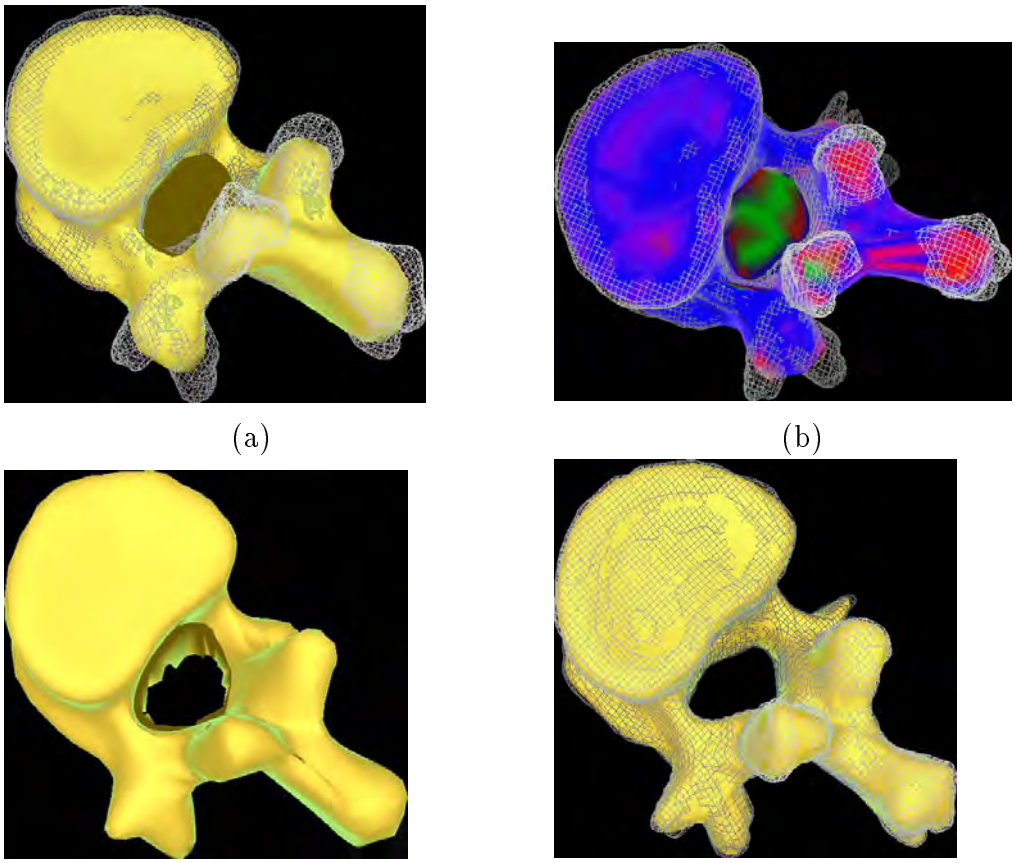


Fig. 5.9: (a) Déformation d'un maillage simplexe initialisé comme étant une sphère sur une isosurface représentant une vertèbre. A la fin de cette première étape, le maillage approxime grossièrement la surface et n'a pas le bon genre. (b) Pour chaque sommet, on calcule la distance au point le plus proche; la couleur bleue indique une faible distance, la couleur rouge, une distance intermédiaire et la couleur verte, une distance importante;(c) En utilisant l'algorithme du paragraphe précédent, on découpe deux portions du maillage au niveau de la "poignée" de la vertèbre. Deux contours sont automatiquement créés; (d) Les deux faces associées aux deux contours sont fusionnées par une opération T_4^2 , et le maillage a à présent un genre égal à 1. La figure montre le modèle de vertèbre après l'étape d'adaptation et de raffinement

concentrer aux endroits de fortes courbures. Pour les maillages paramétrées comme les B-Splines, cela revient à faire varier les noeuds de la paramétrisation de la courbe ou de la surface.

Le second aspect consiste à raffiner ou à décimer un modèle, pour obtenir la meilleure description possible de l'objet. On modifie alors la connexité et la topologie du maillage simplexe.

Dans cette section, on décrit une procédure d'adaptation des maillages simplexes permettant de concentrer les sommets aux endroits de forte courbure. Dans la section suivante, une procédure permettant de raffiner un maillage sera présentée. L'adaptation spatiale de maillage a été étudiée par de nombreux chercheurs.Weiss[Wei90] définit un principe variationnel qui concentre automatiquement les noeuds vers les régions de forte courbure permettant ainsi d'obtenir une description améliorée de la forme d'une courbe. Terzopoulos [TV91] et Vasilescu [VT92] font varier les coefficients de rigidité de modèles de ressorts, en fonction de la répartition spatiale de la courbure, de l'intensité ou de la profondeur. Leur modèle de ressorts ne permet cependant pas d'incorporer des contraintes de continuité de courbure. Benayoun[BCA94b] utilise également des modèles surfaciques ou volumiques de ressorts afin de suivre la déformation d'image bidimensionnelles ou volumiques. Guéziec [Gue93] propose une adaptation optimale des noeuds d'une courbe B-spline gauche pour une meilleure estimation des paramètres de courbure et de torsion.

Notre algorithme d'adaptation spatiale a les caractéristiques suivantes :

- La concentration des sommets se déduit de la minimisation locale d'une énergie $\mathcal{E}_i$. Cette énergie exprime le lien entre les paramètres métriques et la variation de la courbure moyenne.
- Les sommets de faible courbure vont migrer vers les sommets voisins de courbure relativement plus élevées. Par conséquent, la concentration des sommets dépend de la variation relative de la courbure moyenne.
- Les sommets de forte courbure ont des paramètres métriques proches de 1/3 afin d'obtenir une concentration uniforme sur les zones de fortes courbures.

L'adaptation des paramètres métriques à la courbure moyenne du maillage s'effectue de manière périodique. Si on désigne par $\epsilon_i^t = (\epsilon_i^1, \epsilon_i^2, \epsilon_i^3)^T$ les valeurs des paramètres métriques au sommet P_i à l'itération t, alors on calcule les paramètres métriques à l'itération $t + p$ comme :

$$\epsilon_i^{t+p} = \epsilon_i^t + \frac{1}{2}\vec{\nabla}\mathcal{E}_i$$

L'énergie $\mathcal{E}_i$ est définie de manière similaire à l'énergie $\mathcal{S}_i$ décrite à la section 4.6 :

$$\mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(\epsilon_i^\star - \epsilon_i)^2 \tag{5.4}$$

où $\epsilon_i^\star$ est calculé comme une fonction de la variation de la valeur absolue de la courbure moyenne. On détermine l'expression de $\epsilon_i^\star$ en considérant tout d'abord la valeur moyenne de la valeur absolue de la courbure moyenne $|\bar{H}_i| = (|H_{N_1(i)}| + |H_{N_2(i)}| + |H_{N_3(i)}|)/3$. On calcule ensuite le vecteur $\delta|H|_i$ de la variation relative de la courbure moyenne :

$$\delta|H|_i = \begin{pmatrix} \frac{|H_{N_1(i)}|-|\bar{H}_i|}{|H_i|} \\ \frac{|H_{N_2(i)}|-|\bar{H}_i|}{|H_i|} \\ \frac{|H_{N_3(i)}|-|\bar{H}_i|}{|H_i|} \end{pmatrix}$$

Le paramètre métrique de référence s'exprime alors simplement en fonction du vecteur $\delta|H|_i$:

$$\epsilon_i^\star = \frac{1}{3} + \gamma_i \delta|H|_i \tag{5.5}$$

γ_i est une constante qui contrôle dans quelle mesure le maillage doit s'adapter à la courbure moyenne. Ce coefficient est choisi en général entre 0.03 et 0.25. Cependant, puisque l'on contraint la valeur des paramètres métriques à être supérieure à 0.05 et inférieure à 0.833, il est parfois obligatoire de choisir une valeur de γ_i qui soit inférieure à 0.05. Finalement, on a :

$$\epsilon_i^{t+p} = \epsilon_i^t + \frac{1}{2}(\epsilon_i^\star - \epsilon_i^{t+p}) \tag{5.6}$$

Le coefficient 1/2 permet une variation douce des paramètres métriques au cours des itérations. En pratique, on choisit de mettre à jour les paramètres métriques toutes les 10 itérations afin de laisser le maillage se stabiliser avant de réévaluer la courbure moyenne du maillage.

Les figures 5.10 and 5.11 montrent l'effet de l'adaptation spatiale du maillage sur deux isosurfaces ayant la forme d'un cube et d'une croix. Les maillages sont initialisés comme des maillages simplexes sphériques semi-réguliers. Les paramètres métriques sont alors tous égaux à 1/3. Après l'adaptation du maillage, les sommets

se concentrent effectivement aux parties de forte courbure, le niveau de concentration étant déterminé par la valeur de γ_i.

L'adaptation spatiale des maillages simplexes présente une solution originale et élégante au problème de la modélisation de discontinuités sur un modèle déformable. En effet, les forces régularisantes appliquées sur les maillages déformables ont pour effet de grossièrement lisser les discontinuités présentes sur la surface. L'adaptation spatiale permet de concentrer les sommets aux endroits de fortes courbures et en particulier aux points présentant une discontinuité C^0 ou C^1. Ainsi, on obtient un modèle présentant de fortes courbures tout en appliquant une force régularisante. La variation de courbure entre les sommets voisins reste faible alors que la variation d'espacement des sommets est forte. Enfin, cette méthode ne rend pas nécessaire la segmentation explicite des discontinuités.

5.5.2 Raffinement des maillages simplexes

Le raffinement des maillages simplexes correspond au second type d'adaptation des maillages simplexes. Il est souvent nécessaire de raffiner un modèle déformable parce que la capacité de la description de forme est limitée par le nombre de sommets ou de points de contrôle du modèle. Nous introduisons, par conséquent, une méthode permettant d'avoir un contrôle sur la précision absolue du modèle reconstruit.

De nombreux travaux de recherche ont été effectués dans la même optique. Citons les travaux de Tanaka[TK93], de Schmitt [SBD86], de Chen et Schmitt [CS93], de Huang et Goldgof[HG92], de Mc Inerneney et Terzopoulos [McI93], de Leitner[LC91] et de Hoppe[HDDM93]. Notre approche consiste également à raffiner localement le maillage en fonction de la courbure, de la distance à des données tridimensionnelles, de l'aire et de l'élongation des faces d'un maillage simplexes. La procédure de raffinement s'opère de manière itérative mais à un plus haut niveau que l'adaptation spatiale du maillage. Notre approche a l'originalité de combiner les deux types d'adaptations, et ce de manière hiérarchique. L'adaptation spatiale du maillage permet d'optimiser l'emplacement des sommets, alors que l'adaptation topologique optimise le nombre de sommets pour décrire la forme de l'objet à reconstruire.

L'algorithme consiste à d'abord évaluer pour toutes les faces d'un maillage simplexe un critère mesurant le besoin de raffinement d'une face. Dans un deuxième temps, les faces dont le score est supérieur à un seuil sont raffinées et le maillage

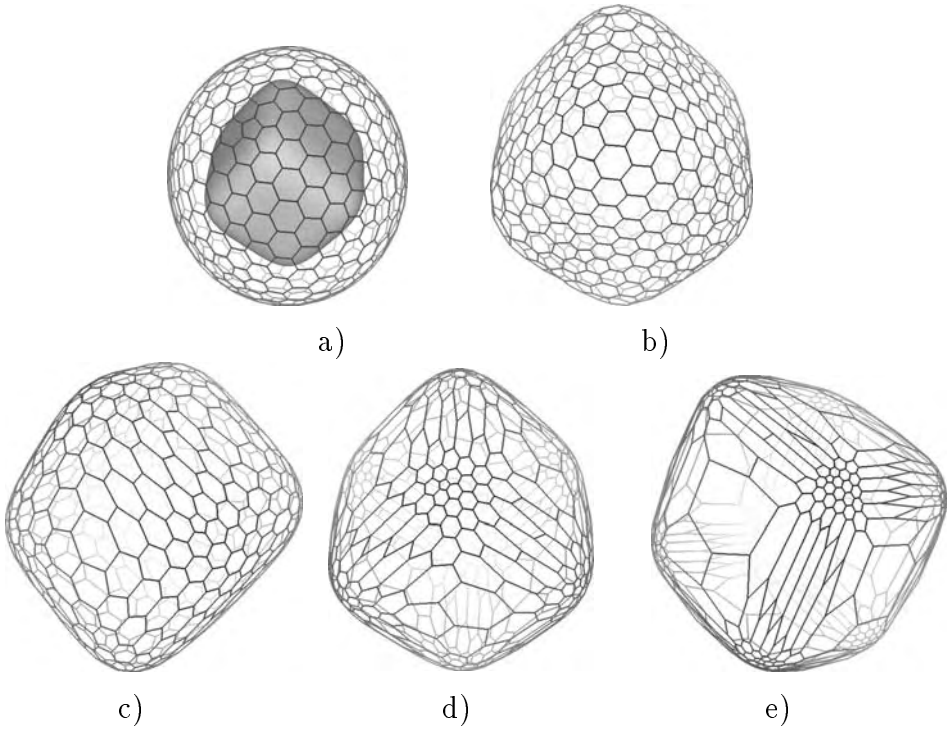
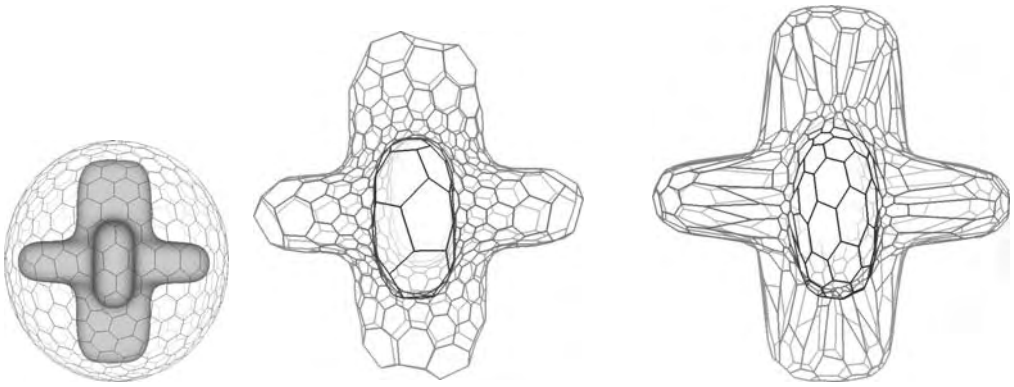


Fig. 5.10: a) Le maillage initial avec l'isosurface. b) Le maillage déformé sur l'isosurface. Les paramètres métriques sont partout égaux à 1/3. c) Le maillage adaptatif pour une valeur de $\gamma_i = 0.10$. d) Le maillage adaptatif pour une valeur de $\gamma_i = 0.15$. e) Le maillage adaptatif pour une valeur de $\gamma_i = 0.20$.



a) b) c)

Fig. 5.11: a) Le maillage initial entourant l'isosurface; b) La première déformation avec des paramètres métriques constants; c) Le maillage après adaptation des paramètres métriques : $\gamma_i = 0.15$

est déformé pendant un nombre constant d'itérations. Le processus de raffinement est répété jusqu'à ce que toutes les faces aient un score inférieur au seuil. Enfin, une procédure itérative est appliquée permettant d'obtenir des faces ayant un nombre de faces égale à 5, 6 ou 7. Cette approche a l'avantage d'obtenir des modèles ayant de bonnes propriétés géométriques (régularité et représentation fidèle de la forme de l'objet) et topologiques (concentration des sommets optimale et nombre de sommets par faces régulier).

Le critère de raffinement est calculé comme le produit de quatre paramètres adimensionés :

L'aire relative d'une face Elle est calculée comme le rapport de l'aire d'une face par l'aire totale du maillage. L'aire d'une face est définie en triangulant la face à l'aide de l'isobarycentre des sommets de la face.

L'élongation d'une face Ce coefficient est élevé lorsque la face est allongée. Il est calculé comme 1 plus la différence de longueur entre la plus longue et la plus petite arête, divisée par la valeur médiane des longueurs des arêtes de la face.

La mesure de la courbure Gaussienne sur la face Elle est évaluée par le calcul de l'aire du polygone sphérique décrit par les vecteurs normaux à chaque sommet de la face (voir section 3.3.6).

La distance relative aux données tridimensionnelles C'est le rapport de la distance au point le plus proche, par la profondeur du champ D d'attraction.

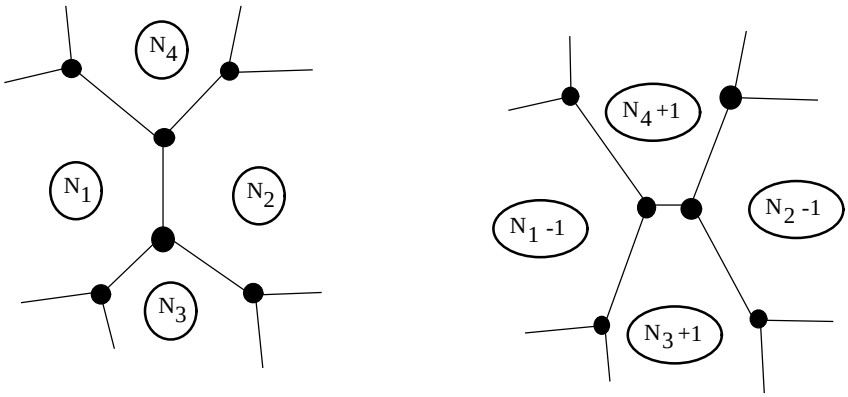
Le seuil de raffinement est adimensionné et par conséquent indépendant de la taille du maillage. On peut définir un seuil correspondant à une résolution fine, moyenne ou faible. On a vérifié que ces seuils avaient une signification pratique.

Le raffinement peut ne pas fonctionner correctement en présence de points abérants ou lorsque les données sont très bruitées. En effet dans ce cas, il est nécessaire de garder une forte rigidité du maillage pour pouvoir lisser le bruit. Cependant, il résulte qu'à ces endroits, la distance d'un modèle aux données et par conséquent, le score des faces correspondantes, est plus élevée. Un raffinement de ces faces résulterait en l'obtention d'un modèle bruité. Il est ainsi parfois nécessaire de vouloir restreindre l'application du processus de raffinement à certaine partie d'un maillage.

Afin de conserver un maillage dont le nombre de sommets par faces est le plus proche de six, on utilise ou bien l'opération élémentaire T_2^2 ou bien l'opération T_5^2 pour raffiner une face, suivant que le nombre de sommets dans la face est supérieur ou inférieur à cinq. Lorsque l'on applique T_2^2, on choisit deux arêtes dans la face permettant de séparer cette face en deux faces ayant un nombre équivalent de sommets.

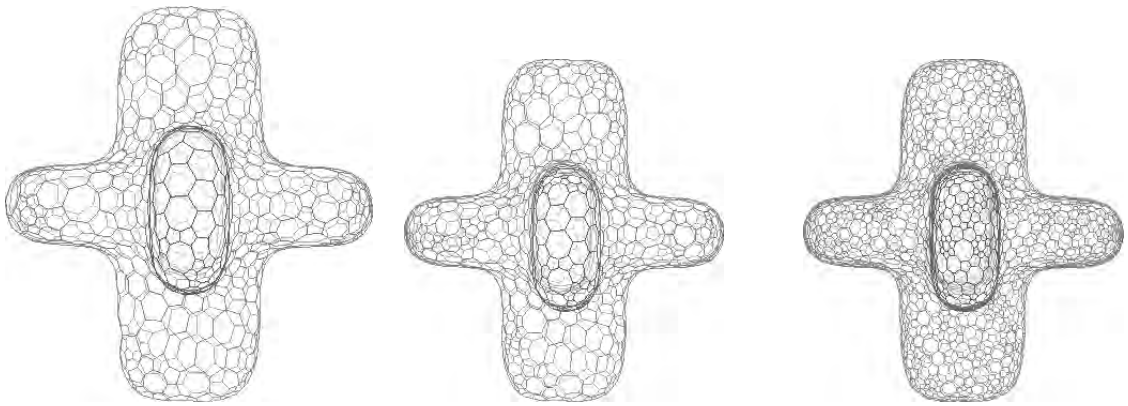
La procédure précédente partage les faces de la manière la plus régulière possible, mais en aucun cas ne permet de guarantir la régularité du nombre de sommets par face sur le maillage. Pour cela, nous calculons, pour chaque arête qui ne soit pas sur un bord, son critére de régularité. Ce critère est égale à la différence entre le nombre total de sommets des deux faces adjacentes à l'arête et le nombre total de sommets des deux faces opposées à l'arête (voir figure 5.12). Si cette différence est supérieure ou égale à 2, alors l'arête est candidate pour une opération T_7^2, opération d'échange d'arêtes, l'arête résultant de cette opération, ayant un critère diminué de deux. En pratique, on classe les arêtes par ordre décroissant du critère de régularité, les arêtes présentant la plus grande disparité du nombre de sommet étant modifiées en premier. Chaque opération T_7^2 modifie la valeur du critère de régularité pour toutes les arêtes appartenant aux quatre faces juxtaposant cette arête. Par conséquent, après l'application d'une opération T_7^2, la liste des arêtes est remise à jour, et la procédure est itérée jusqu'à ce que toutes les arêtes aient un critère inférieur à 2. Les faces du maillage, qui ne sont pas des bords, ont alors 5, 6 ou 7 sommets.

Dans la figure 5.13, le raffinement d'un maillage approximant une croix est ef-



(a) (b)

Fig. 5.12: (a) Pour chaque arête, un critère de régularité est calculé comme $N_1+N_2-N_3-N_4$ où N_i est le nombre de sommets de la face numéro i. Si cette arête a un critère supérieure ou égale à 2, alors l'opération T_7^2 lui est appliquée; (b) Après l'opération T_7^2 on a diminué la disparité du nombre de sommet autour de l'arête;



a) b) c)

Fig. 5.13: (a) A partir du maillage de la figure 23(b), on raffine le maillage avec une valeur élevée du seuil de raffinement; (b) identique à (a) avec une valeur moyenne du seuil; (c) identique à (a) avec une faible valeur du seuil.

fectué avec deux valeurs différentes du seuil.

5.6 Résultats Expérimentaux

5.6.1 Modélisation avec des maillages simplexes

Un système de modélisation fondé sur les maillages simplexes a été implémenté sur une station DEC Alpha AXP 3000/500 munie d'une carte graphique. Une interface complète permet à l'utilisateur d'effectuer les tâches suivantes :

- Appliquer une contrainte de régularité ou de forme sur un sommet, une face, une zone (un ensemble de faces), un maillage ou sur un ensemble de maillages. Les paramètres α_i, β_i de même que la régularité s_i peuvent être modifiés pour chacune des entités pré-citées.
- Initialiser un maillage comme l'une des quatre primitives suivantes : sphère, cylindre, plan ou tore. Le nombre de sommets dans le maillage est déterminé par l'utilisateur.
- Placer un maillage autour de données tridimensionnelles.

- Déformer le maillage à l'aide de la souris électronique ou de la main virtuelle.
- Appliquer les transformations élémentaires sur un maillage.
- Découper un maillage simplexe à l'aide de la souris.

Une interface utilisant X/Motif a été implémentée permettant d'établir de plusieurs contraintes et fixer la valeur de plusieurs paramètres, de node manière interactive. (voir figure 5.14).

5.6.2 Images de profondeur structurées

Modèle de visage

La figure 5.15 montrent les deux étapes de la reconstruction d'un visage à partir d'une image Cyberware. Il faut noter qu'il n'y a pas de données au niveau supérieur de la tête à cause de la réflectance des cheveux. La première étape (figure 5.15 (b)) interpole correctement la portion supérieure de la tête mais lisse le nez et le menton. L'adaptation du maillage à la courbure améliore le modèle (figure 5.15 (c)) mais la description de la forme est limitée par le nombre de sommets.

Les figures 5.15 (d),(e) et (f) montrent le résultat de l'application combinée du raffinement et de l'adaptation du maillage, pour différents niveaux de raffinement. Le menton, le nez, les sourcils et les lèvres apparaissent au fur et à mesure que le niveau de raffinement augmente. Le maillage final a 1700 sommets qu'il faut comparer aux 260 000 points présents dans l'image initiale.

Modèle de main

Une main est un objet très difficile à modéliser à cause de sa non-convexité. En effet, la performance des modèles déformables est en général limitée par le problème du minimum local qui apparaît au niveau des concavités. La reconstruction d'un modèle de main à l'aide d'un modèle déformable sans connaissance a priori sur la topologie et la forme, est une tâche difficile puisqu'il faut que le maillage se déforme entre les doigts. Une approche plus naturelle, consiste à modéliser puis à connecter des modèles correspondant à des sous-ensembles approximativement convexes des données. Les maillages simplexes offrent la flexibilité nécessaire (par opposition aux grilles régulières) pour effectuer cette reconstruction par sous-ensembles.

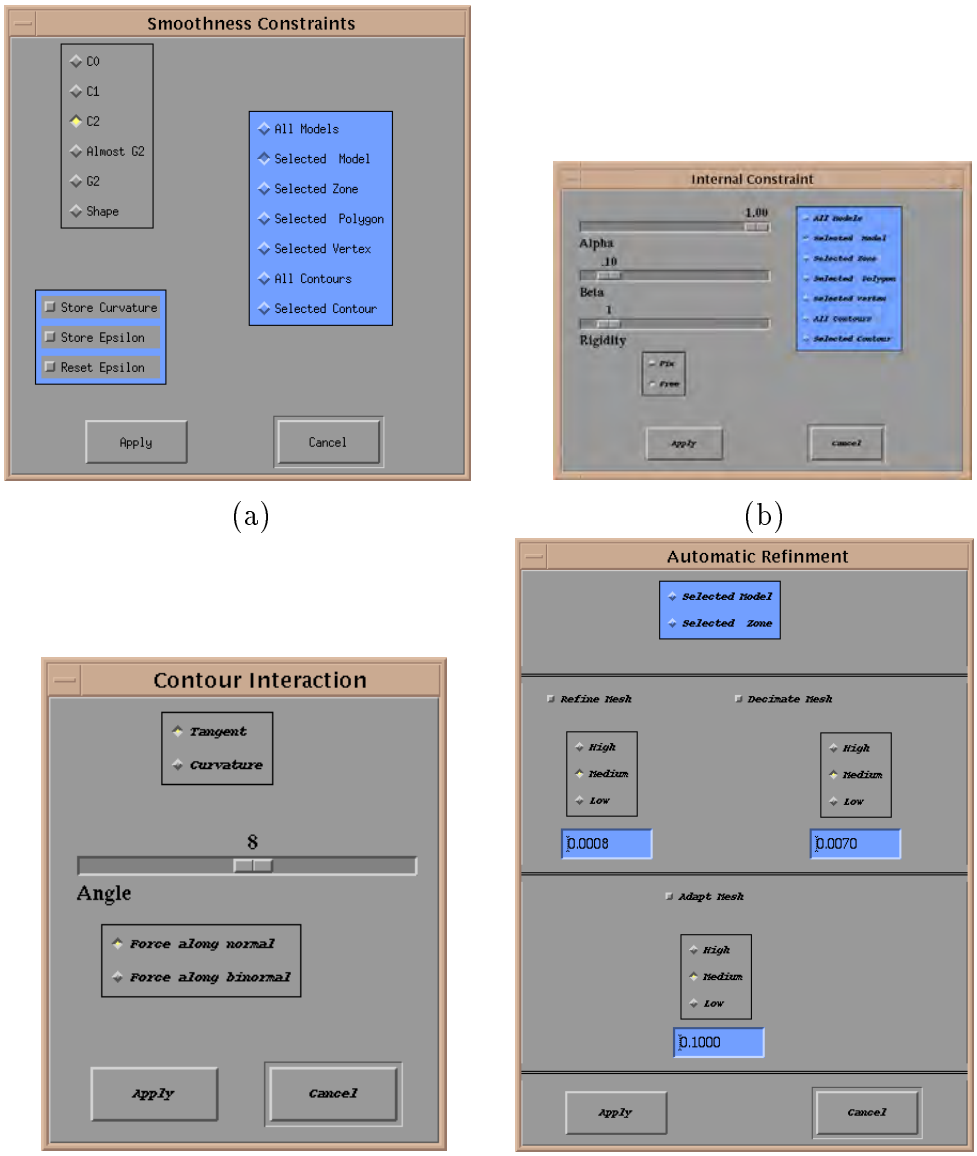


Fig. 5.14: Interface utilisateur (a) Sélection de différentes contraintes internes sur différentes parties d'un maillage simplexe; (b) Choix des coefficients internes et externes ainsi que de la rigidité sur différentes parties d'un maillage simplexe; (c) Choix des contraintes entre un maillage surfacique et un contour; (d) Choix des constantes pour l'adaptation géométrique (raffinement et adaptation) d'un maillage simplexe

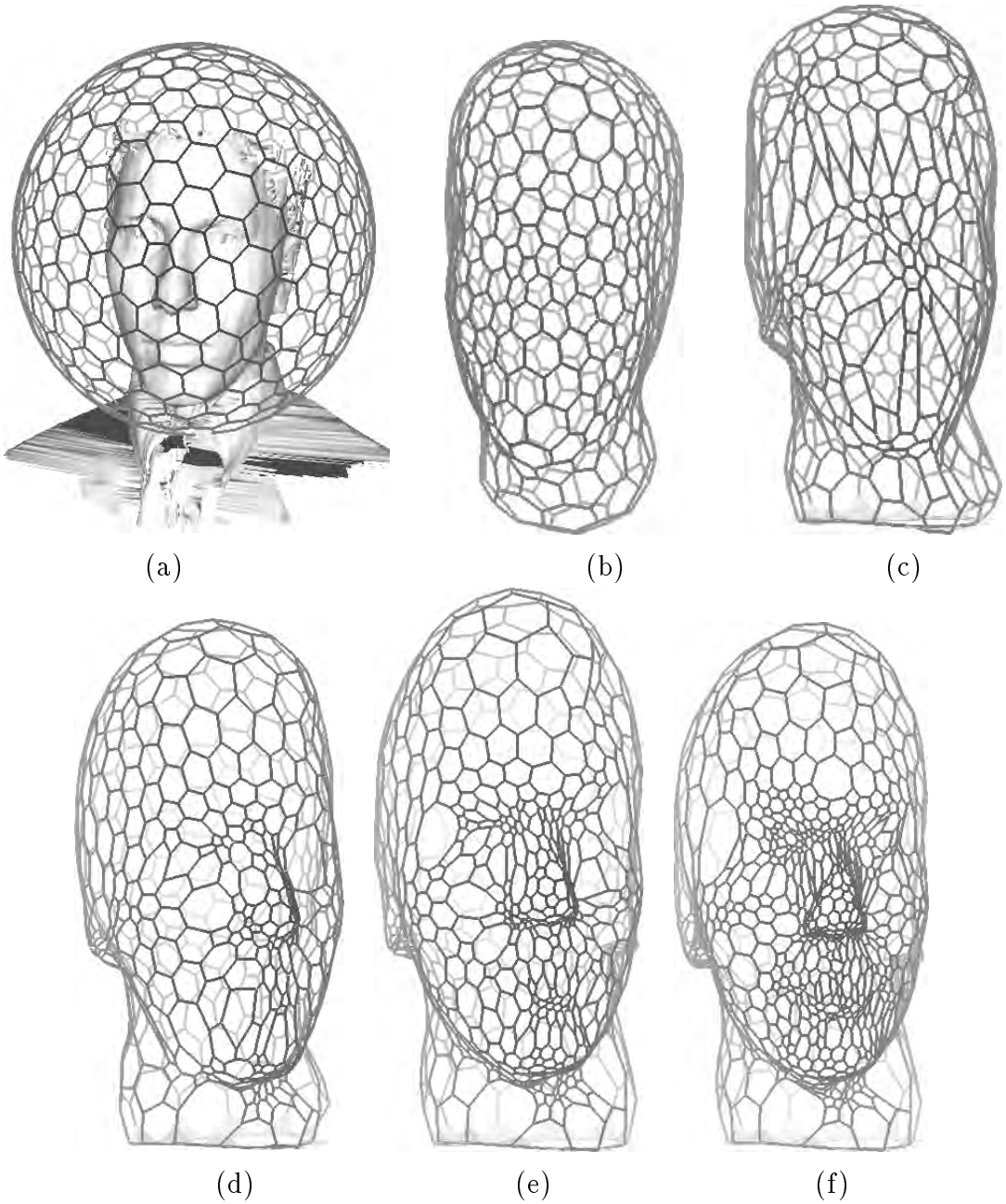


Fig. 5.15: (a) Le maillage initial est une sphère ayant 720 sommets; (b) Après la première étape de la déformation, le maillage approxime grossièrement les données Cyberware. (c) Le maillage après adaptation à la courbure avec une valeur de $\gamma_i = 0.15$. Les sommets sont concentrés autour du nez, du menton et des oreilles; Le maillage de la figure (b) est adapté et raffiné de manière itérative avec une faible valeur de $\gamma_i = 0.06$ et un niveau faible (d), moyen (e) et fort (f) de raffinement;

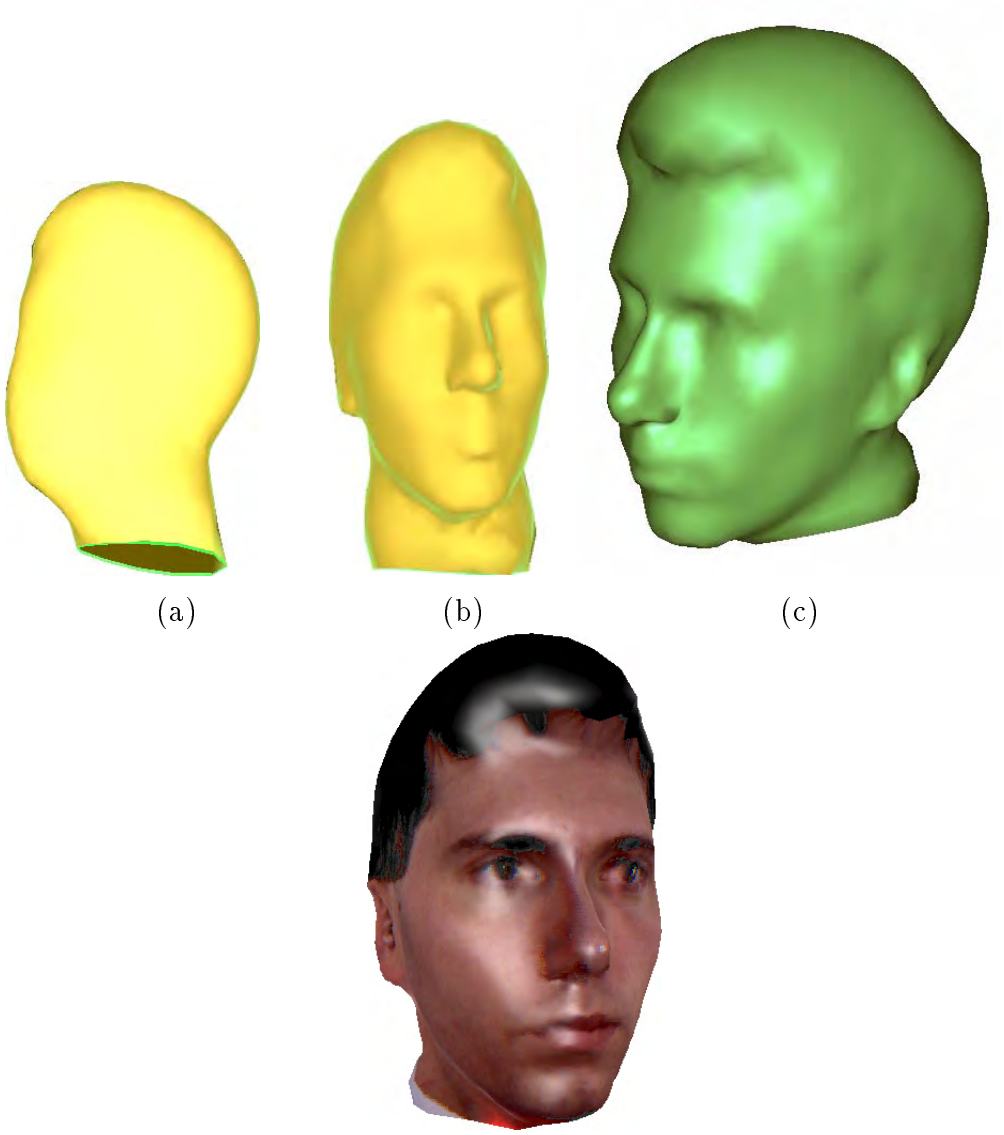


Fig. 5.16: (a) Le rendu Gouraud du maillage résultant de la première étape de la déformation. Un contour a été créé autour du bord au niveau du cou; (b) Le rendu du maillage correspondant à la figure 5.9 (f); Le rendu du maillage correspondant à la figure 5.9 (h); (d) Rendu texturé du maillage correspondant à la figure 5.9 (h);

Nous avons construit un modèle de main à partir de deux images Cyberware, une pour chaque côté de la main. La paume et les doigts sont d'abord modélisés séparément, puis connectés à l'aide de plusieurs opérations T_3^2 (voir figure 5.17). Les deux images n'étant pas parfaitement en correspondance, il est nécessaire de recaler la position de chacun des doigts entre les deux images. Pour cela, on procède en appliquant une contrainte de forme au maillage et en déplaçant les 18 contours placés aux articulations. Le modèle final a près de 8000 sommets et est texturé, sa texture se composant des textures de chaque image.

Modèle de corps humain

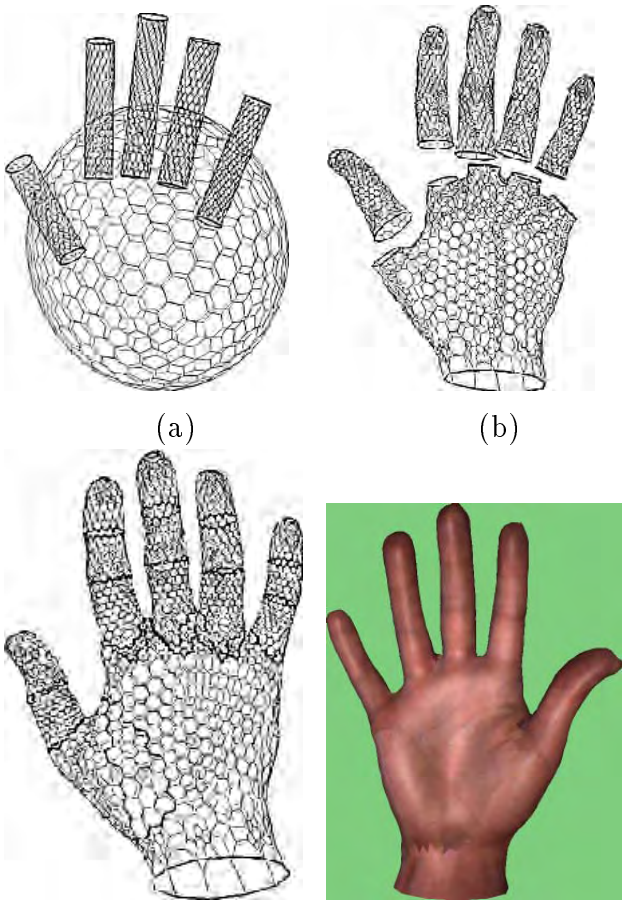
Nous avons utilisé 11 images Cyberware différentes pour construire un modèle complet du corps humain. La figure 5.18 montre le modèle complet créé par l'assemblage de 11 maillages simplexes et leur symétriques. Trois de ces images (la tête et la main) ont été acquises sur un être humain, les autres provenant d'un mannequin.

Modèle de pièce mécanique

Un maillage simplexe de genre 2, a été reconstruit à partir des données NRCC "Meca7" (voir figure 5.19). Le maillage est initialisé comme un ellipsoïde contenant l'objet. Le maillage a été raffiné puis quatre bords et quatre contours ont été créés automatiquement au niveau des trous. Les poignées résultent de l'application manuelle de deux transformations T_3^2. Un contour situé à l'intérieur de chaque poignée permet de compenser l'absence de données en contraignant la surface à interpoler une forme circulaire.

5.6.3 Images non structurées

La donnée de quelques centaines de points répartis suffit pour reconstruire un modèle complet. Dans la figure 5.20 (a), nous présentons un nuage de 825 points localisés grossièrement suivant trois plans orthogonaux entre eux. Ces points sont issus du modèle d'isosurface d'un ventricule cardiaque (voir la figure 5.21 (a)). Un modèle initialement sphérique se déforme, les forces d'attraction étant calculées à l'aide d'un kd-tree. Après adaptation du maillage à la courbure, le modèle de coeur est extrêmement proche du modèle complet extrait à partir de l'isosurface. Les artefacts de



(a) (b)

(c) (d)

Fig. 5.17: (a) Position initiale des maillages correspondant à la paume et aux 5 doigts; (b) Les six maillages après déformation; (c) Modèle complet de la main; (d) Modèle texturé de la main

- Déformer le maillage à l'aide de la souris électronique ou de la main virtuelle.
- Appliquer les transformations élémentaires sur un maillage.
- Découper un maillage simplexe à l'aide de la souris.

Une interface utilisant X/Motif a été implémentée permettant d'établir de plusieurs contraintes et fixer la valeur de plusieurs paramètres, de node manière interactive. (voir figure 5.14).

5.6.2 Images de profondeur structurées

Modèle de visage

La figure 5.15 montrent les deux étapes de la reconstruction d'un visage à partir d'une image Cyberware. Il faut noter qu'il n'y a pas de données au niveau supérieur de la tête à cause de la réflectance des cheveux. La première étape (figure 5.15 (b)) interpole correctement la portion supérieure de la tête mais lisse le nez et le menton. L'adaptation du maillage à la courbure améliore le modèle (figure 5.15 (c)) mais la description de la forme est limitée par le nombre de sommets.

Les figures 5.15 (d),(e) et (f) montrent le résultat de l'application combinée du raffinement et de l'adaptation du maillage, pour différents niveaux de raffinement. Le menton, le nez, les sourcils et les lèvres apparaissent au fur et à mesure que le niveau de raffinement augmente. Le maillage final a 1700 sommets qu'il faut comparer aux 260 000 points présents dans l'image initiale.

Modèle de main

Une main est un objet très difficile à modéliser à cause de sa non-convexité. En effet, la performance des modèles déformables est en général limitée par le problème du minimum local qui apparaît au niveau des concavités. La reconstruction d'un modèle de main à l'aide d'un modèle déformable sans connaissance a priori sur la topologie et la forme, est une tâche difficile puisqu'il faut que le maillage se déforme entre les doigts. Une approche plus naturelle, consiste à modéliser puis à connecter des modèles correspondant à des sous-ensembles approximativement convexes des données. Les maillages simplexes offrent la flexibilité nécessaire (par opposition aux grilles régulières) pour effectuer cette reconstruction par sous-ensembles.

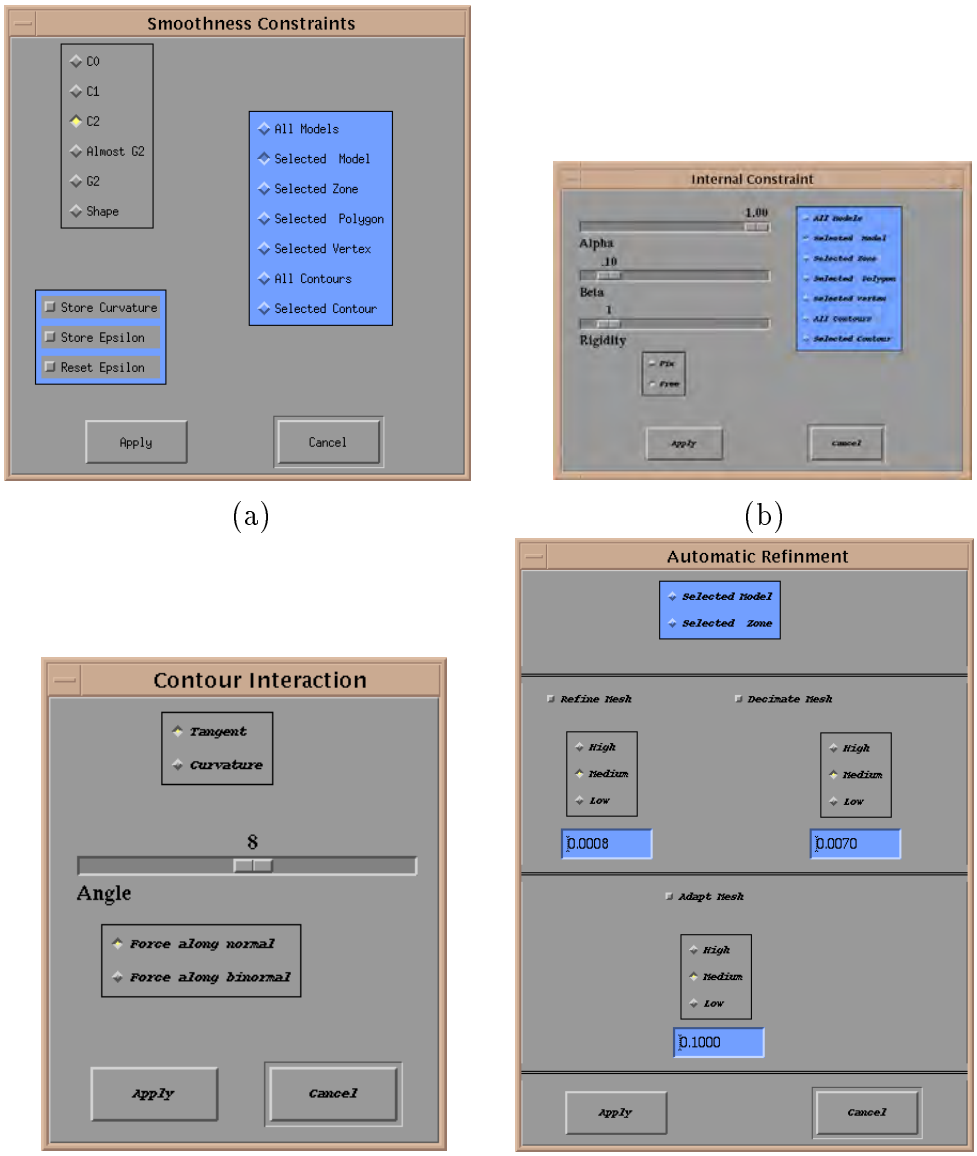


Fig. 5.14: Interface utilisateur (a) Sélection de différentes contraintes internes sur différentes parties d'un maillage simplexe; (b) Choix des coefficients internes et externes ainsi que de la rigidité sur différentes parties d'un maillage simplexe; (c) Choix des contraintes entre un maillage surfacique et un contour; (d) Choix des constantes pour l'adaptation géométrique (raffinement et adaptation) d'un maillage simplexe

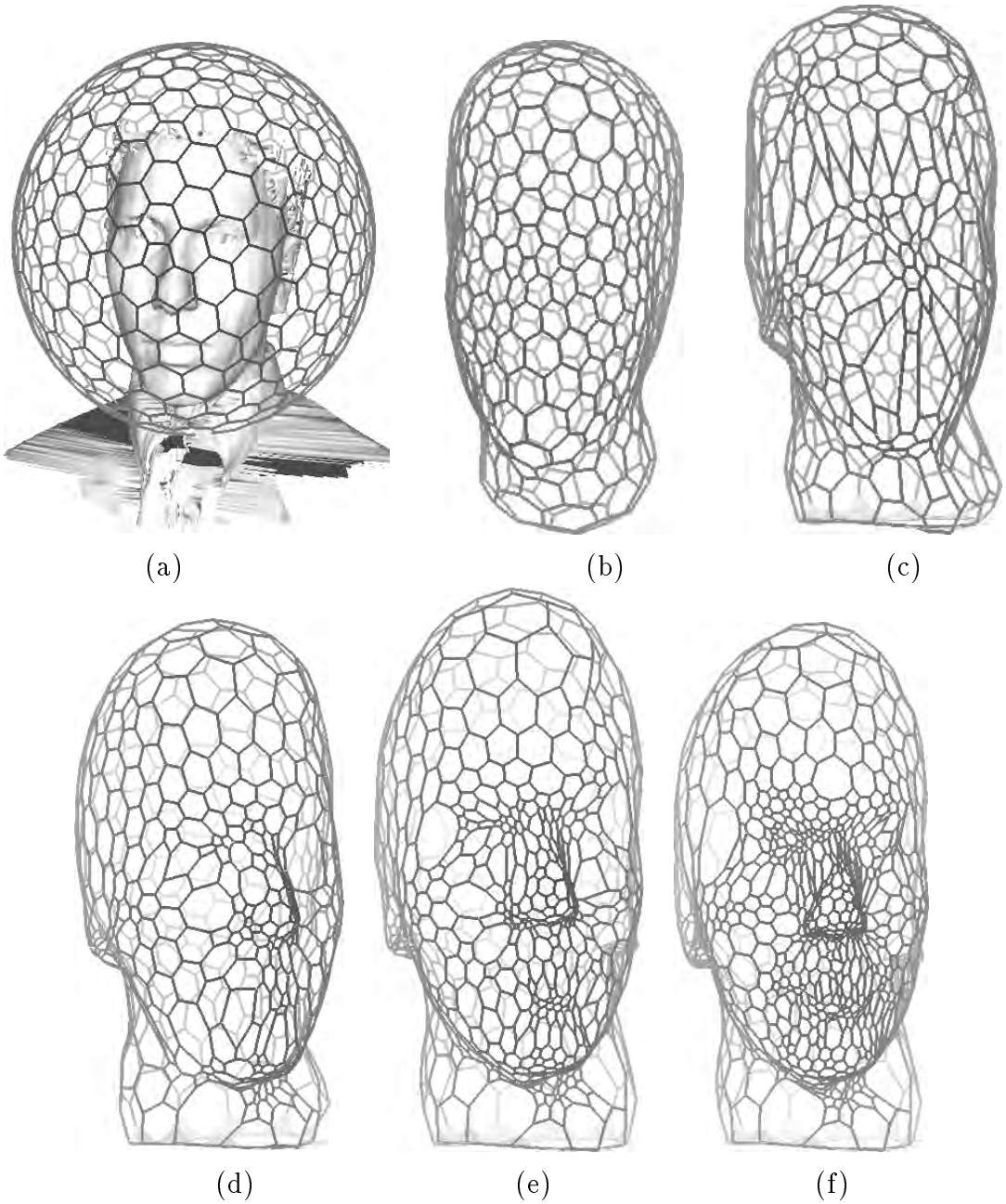


Fig. 5.15: (a) Le maillage initial est une sphère ayant 720 sommets; (b) Après la première étape de la déformation, le maillage approxime grossièrement les données Cyberware. (c) Le maillage après adaptation à la courbure avec une valeur de $\gamma_i = 0.15$. Les sommets sont concentrés autour du nez, du menton et des oreilles; Le maillage de la figure (b) est adapté et raffiné de manière itérative avec une faible valeur de $\gamma_i = 0.06$ et un niveau faible (d), moyen (e) et fort (f) de raffinement;

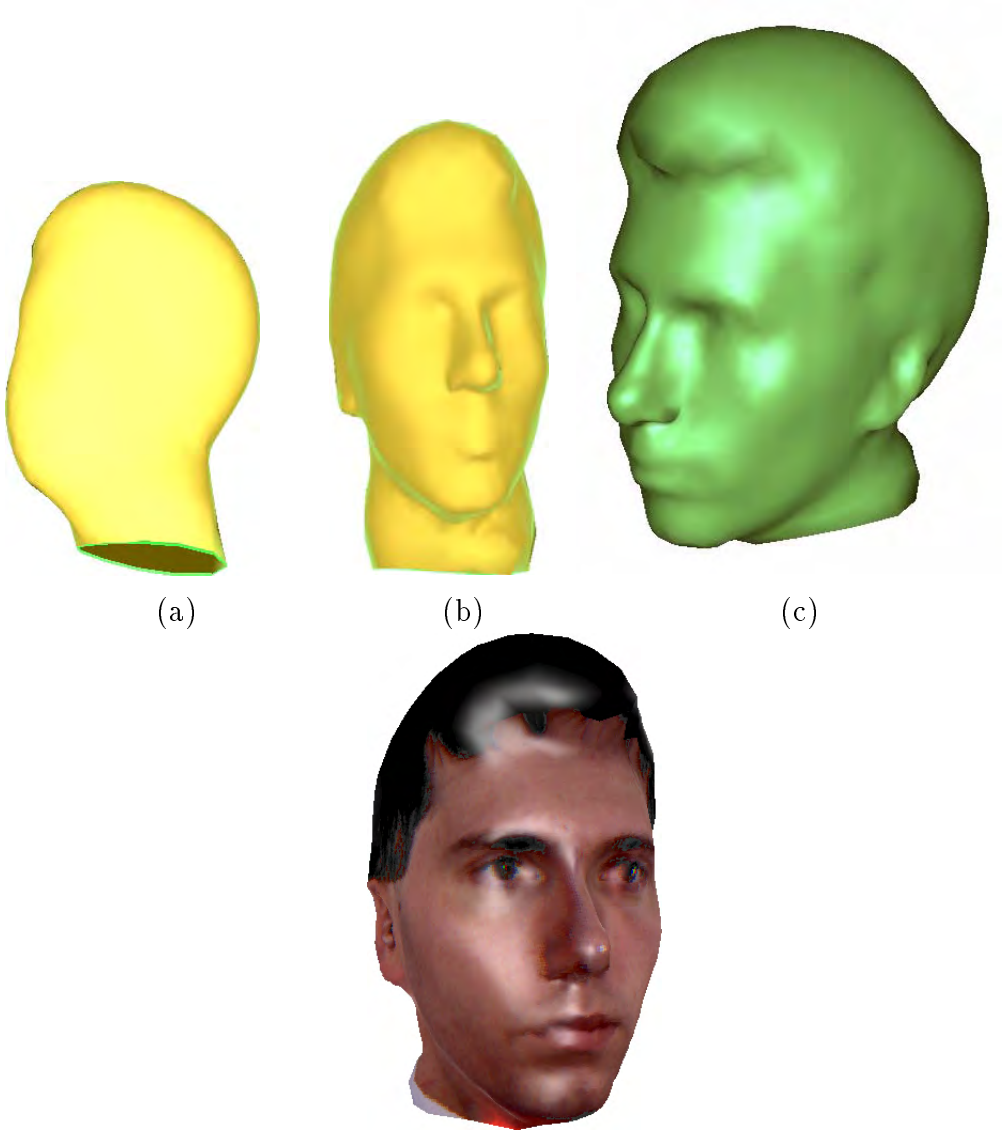


Fig. 5.16: (a) Le rendu Gouraud du maillage résultant de la première étape de la déformation. Un contour a été créé autour du bord au niveau du cou; (b) Le rendu du maillage correspondant à la figure 5.9 (f); Le rendu du maillage correspondant à la figure 5.9 (h); (d) Rendu texturé du maillage correspondant à la figure 5.9 (h);

Nous avons construit un modèle de main à partir de deux images Cyberware, une pour chaque côté de la main. La paume et les doigts sont d'abord modélisés séparément, puis connectés à l'aide de plusieurs opérations T_3^2 (voir figure 5.17). Les deux images n'étant pas parfaitement en correspondance, il est nécessaire de recaler la position de chacun des doigts entre les deux images. Pour cela, on procède en appliquant une contrainte de forme au maillage et en déplaçant les 18 contours placés aux articulations. Le modèle final a près de 8000 sommets et est texturé, sa texture se composant des textures de chaque image.

Modèle de corps humain

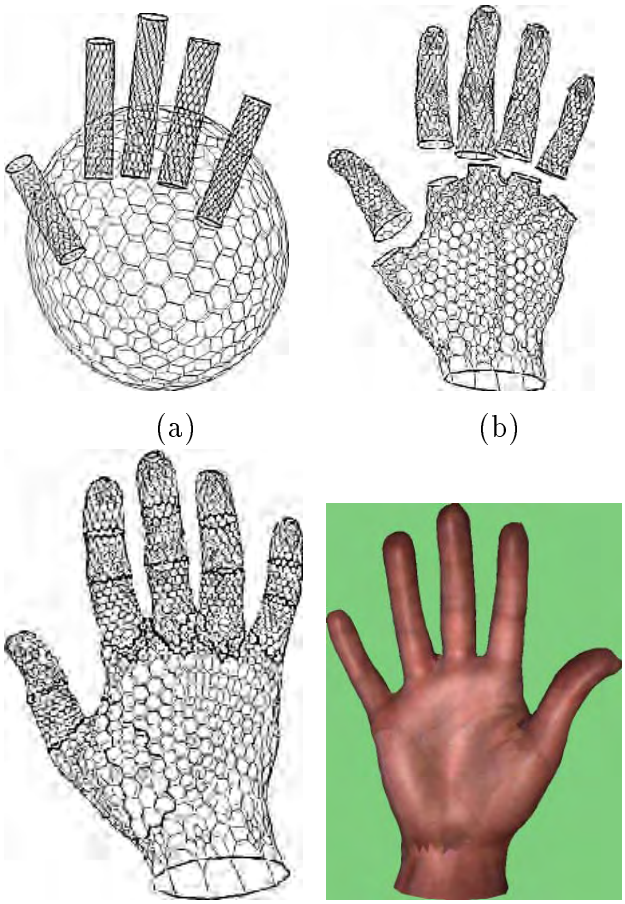
Nous avons utilisé 11 images Cyberware différentes pour construire un modèle complet du corps humain. La figure 5.18 montre le modèle complet créé par l'assemblage de 11 maillages simplexes et leur symétriques. Trois de ces images (la tête et la main) ont été acquises sur un être humain, les autres provenant d'un mannequin.

Modèle de pièce mécanique

Un maillage simplexe de genre 2, a été reconstruit à partir des données NRCC "Meca7" (voir figure 5.19). Le maillage est initialisé comme un ellipsoïde contenant l'objet. Le maillage a été raffiné puis quatre bords et quatre contours ont été créés automatiquement au niveau des trous. Les poignées résultent de l'application manuelle de deux transformations T_3^2. Un contour situé à l'intérieur de chaque poignée permet de compenser l'absence de données en contraignant la surface à interpoler une forme circulaire.

5.6.3 Images non structurées

La donnée de quelques centaines de points répartis suffit pour reconstruire un modèle complet. Dans la figure 5.20 (a), nous présentons un nuage de 825 points localisés grossièrement suivant trois plans orthogonaux entre eux. Ces points sont issus du modèle d'isosurface d'un ventricule cardiaque (voir la figure 5.21 (a)). Un modèle initialement sphérique se déforme, les forces d'attraction étant calculées à l'aide d'un kd-tree. Après adaptation du maillage à la courbure, le modèle de coeur est extrêmement proche du modèle complet extrait à partir de l'isosurface. Les artefacts de



(a) (b)

(c) (d)

Fig. 5.17: (a) Position initiale des maillages correspondant à la paume et aux 5 doigts; (b) Les six maillages après déformation; (c) Modèle complet de la main; (d) Modèle texturé de la main

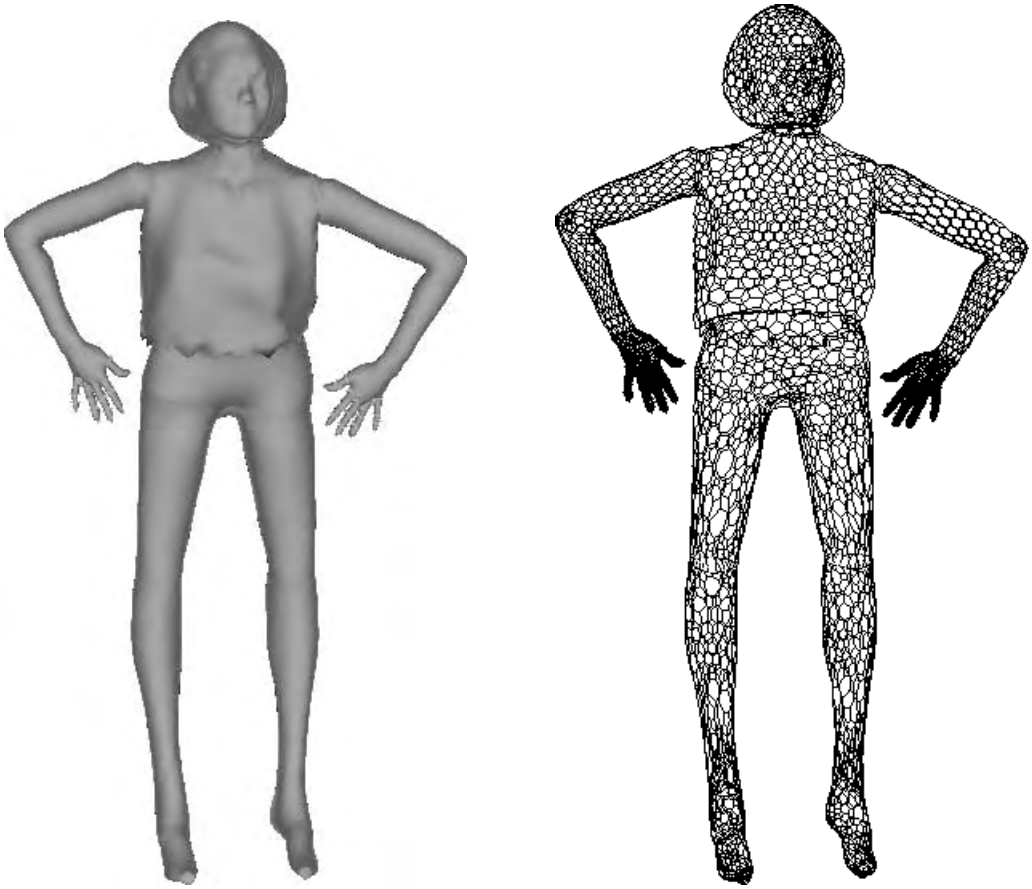
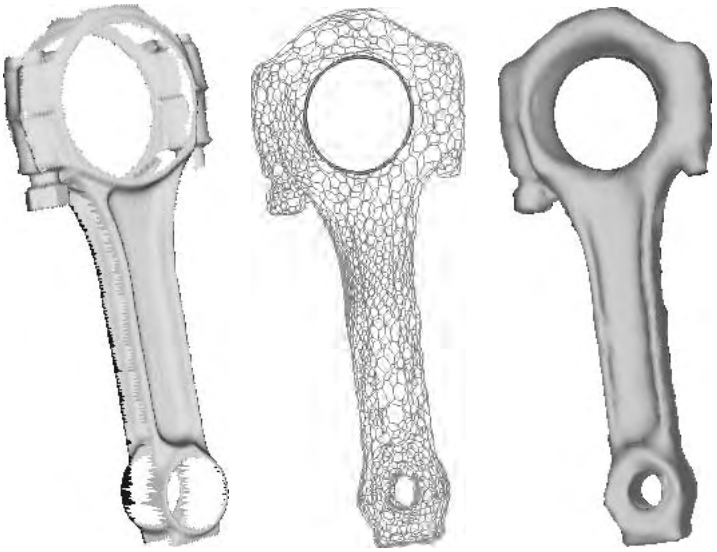
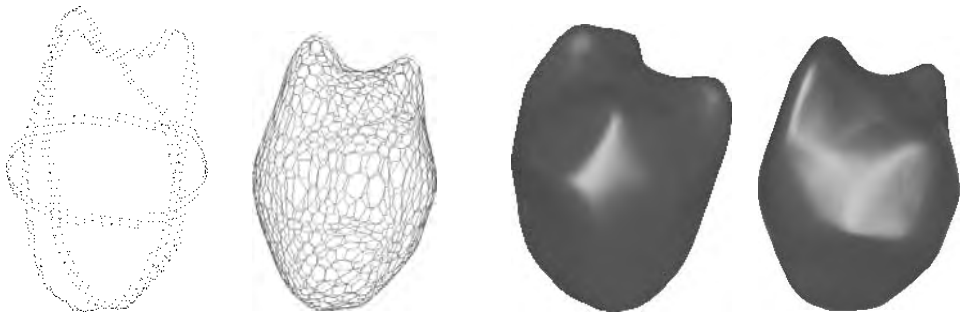


Fig. 5.18: Un modèle complet de corps humain reconstruit à partir de 11 images Cyberware.



(a) (b) (c)

Fig. 5.19: (a) Les données NRCC originales et leur symétriques; (b) et (c) Le maillage final est de genre 2. Il y a un contour au centre de chaque poignée.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 5.20: (a) 825 points localisés approximativement sur trois plans orthogonaux. Ces points appartiennent à une isosurface d'un ventricule cardiaque ; (b) Le maillage simplexe après adaptation; (c) et (d) Rendu du modèle final.

la discrétisation et de la non-homogénéité des données sont masqués par l'utilisation d'un maillage ayant une forte rigidité.

5.6.4 Images volumiques

Le but est ici d'obtenir des modèles de coeur et de crâne qui soient suffisamment simplifiés pour qu'il soit possible de les manipuler et de les déformer en temps réel dans un simulateur chirurgical[DSCP94]. Nous utilisons ici des images suffisamment contrastées pour qu'il soit possible d'en segmenter les composantes à l'aide d'une extraction d'isosurface. Les modèles géométriques extraits de ces images peuvent ensuite permettre de segmenter des images plus réalistes de coeur ou de crâne en déformant des maillages génériques avec une mémoire de forme.

Modèle de coeur

Nous utilisons une image de coeur de chien provenant d'un nouveau scanner de la Mayo Clinic (Rochester, USA). Un produit contrastant injecté dans le ventricule gauche facilite l'extraction d'isosurface. Une sphère ayant 1600 sommets est déformée puis adaptée afin qu'elle approxime correctement l'isosurface. Cependant la cavité de la surface n'est pas correctement approximée. La phase de raffinement (figure 5.21

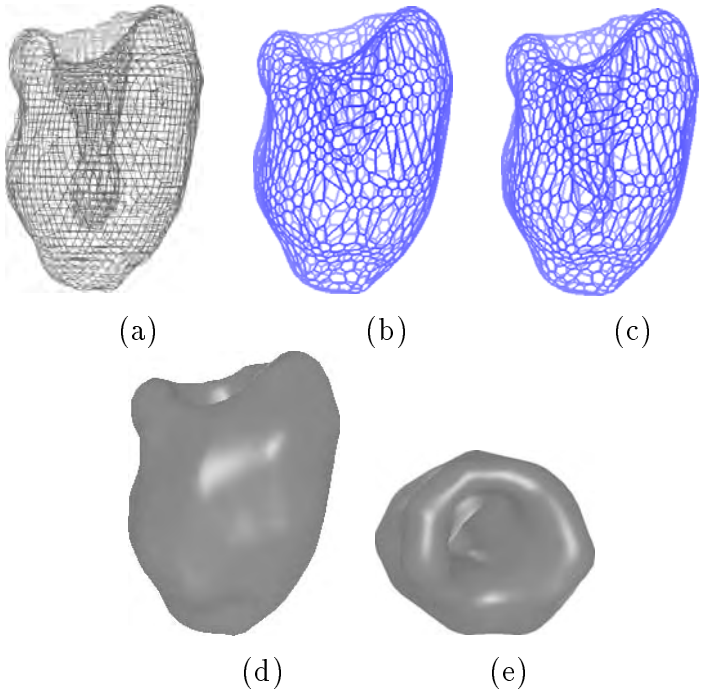


Fig. 5.21: (a) Les cycles composant l'isosurface. Il faut noter que la surface présente une cavité qui descend pratiquement jusqu'à la partie inférieure du ventricule. (b) Maillage reconstruit après adaptation. La cavité n'est pas complètement modélisée. (c) Maillage reconstruit après raffinement. La cavité est complètement modélisée. (d) et (e) Rendu Phong du ventricule.

(c)) ajoute une centaine de sommets au modèle principalement au bout de la cavité. Le maillage approxime alors correctement l'isosurface. Cette exemple illustre bien l'importance d'une phase de raffinement pour obtenir une représentation optimale d'une forme.

Modèle de crâne

Un modèle de crâne est extrait d'une image CT Scan de taille $60 \times 60 \times 60$. Le maillage simplexe initial est formé de 2000 sommets. La première phase de la déformation crée un modèle qui sous-estime largement la courbure de la mâchoire. L'adaptation du maillage permet d'améliorer de manière significative la modélisation de la mâchoire.

Aucun raffinement n'a été appliqué sur cet exemple.

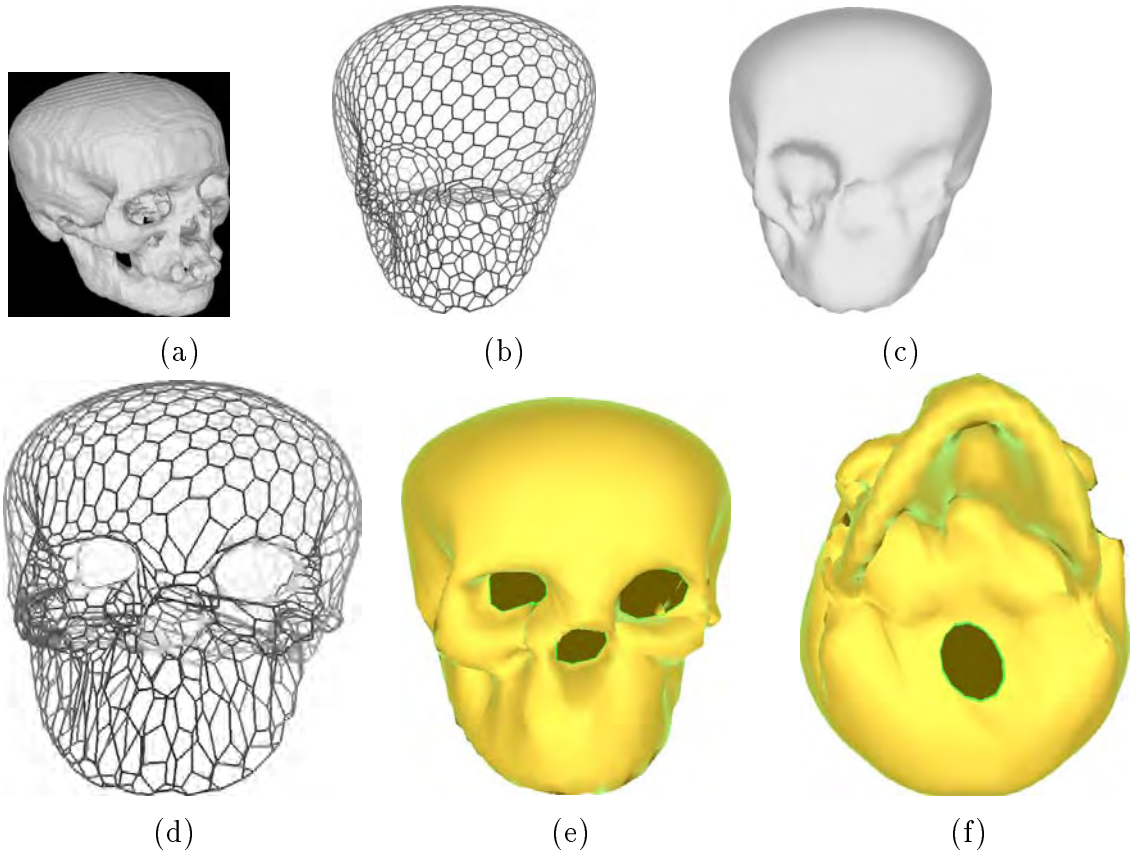


Fig. 5.22: (a) L'isosurface extraite d'une image CT Scan; (b) Une sphère ayant 2000 sommets est déformée avec une forte rigidité pour obtenir une première approximation du crâne; (c) Rendu Gouraud de (b); (d) Le maillage est à présent adapté à la courbure du crâne. Des bords sont automatiquement créés autour des orbites, du nez et du foramen; (e) Vue du dessous du modèle de crâne.

Chapitre 6

Reconnaissance de forme

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de reconnaissance et de recalage rigide d'objets tridimensionnels. Elle s'appuie sur la représentation d'objets tridimensionnels par un maillage simplexe quasi-régulier de topologie sphérique, appelé "Spherical Attribute Image"et noté SAI. La forme de l'objet est alors uniquement représentée par les valeurs de l'angle simplexe à chaque sommet du maillage, les valeurs des paramètres métriques étant pris égaux à 1/3. L'image simplexe de chaque objet étant construite, la comparaison de la forme de deux objets s'effectue en comparant leurs SAIs. Les occultations éventuelles sont compensées en effectuant une reparamétrisation de l'image simplexe de l'objet. Cette méthode est applicable aux objets de forme complexe.

Cet algorithme est en cours de publication dans le journal "IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence"[DHI94] et a été publié dans les actes de la conférence ICCV'93[DHI93] ainsi que dans le rapport de recherche[DHI92b]. Ce travail a été effectué lors d'un séjour à Carnegie-Mellon University (USA) en collaboration avec M. Hébert et K. Ikeuchi. Il a été poursuivi par K. Higuchi[KHI93]

en ajoutant notamment l'attribut de couleur à celui d'angle simplexe.

6.1 Introduction et relations avec les travaux précédents

La reconnaissance d'objets tridimensionnels ne concerne pas seulement les domaines d'applications traditionnels de la vision comme la reconnaissance d'objets industriels ou la reconnaissance de visage, mais également le problème de la navigation et de la manipulation en environnements naturels. Nous présentons une nouvelle méthode de reconnaissance utilisant les maillages simplexes et qui permet l'identification d'objets non polyédriques.

On peut classer les approches utilisées pour la reconnaissance d'objets tridimensionnels en deux catégories, suivant qu'elles soient *locales* ou *globales*.

Les méthodes locales représentent les objets à l'aide de primitives telles que les faces ou les arêtes. Ces algorithmes semblent donner de bons résultats sur les objets polyédriques, comme le montre les travaux de Grimson[GLP87] de Lowe[Low87] et de Ikeuchi[IH91], mais semblent ne pas être en mesure de traiter des objets de forme plus complexe. Plusieurs travaux font appel à des méthodes locales utilisant des éléments de géométrie différentielle pour identifier des objets quelconques. Ainsi, Faugeras et Hébert[FH86] décomposent les surfaces de $\mathbb{R}^3$ à l'aide de plans ou de quadriques. Besl and Jain[BJ86] utilisent les lignes paraboliques, séparant des parties de différentes courbures gaussiennes, pour segmenter des images de profondeur. Stein et Médioni[SM92] définissent des points et des arêtes extraits sur des surfaces tridimensionnelles pour les comparer avec une représentation préalablement stockée. Thirion[Thi93a] utilise la notion de points extrémaux sur des isosurfaces extraites d'images volumiques pour effectuer un recalage rigide de modèles de crâne. Ces méthodes locales ont tendance à être sensibles au bruit présent dans les données et de plus sont fondées sur une extraction stable de caractères géométriques.

Les méthodes globales, par contre, attachent en quelque sorte, un système de coordonnées à un objet et représentent cet objet à l'aide d'équations implicites ou paramétriques. La représentation résultante est globale puisque les coefficients de ces équations représentent la totalité de l'objet. Un exemple classique de représentation globale est l'utilisation de cylindres généralisés (CG). Un cylindre généralisé

est défini par une ligne axiale, et une fonction donnant le rayon du cylindre le long de l'axe. Bien que des résultats satisfaisants aient été obtenus avec des images d'intensité[Bro81], l'utilisation de cylindres généralisés pour la reconnaissance est délicate à cause de la difficulté à estimer les paramètres de cylindres généralisés à partir d'images de profondeur.

La représentation d'objets à l'aide de superquadriques a reçu également beaucoup d'intérêt. La phase de reconnaissance s'effectue en comparant les coefficients de la superquadrique extraite d'une image avec ceux stockés dans une base de données. Les superquadriques représentent un ensemble limité de forme qui peut être étendu en ajoutant des paramètres à l'équation implicite originale. Cependant, l'ajout de nouveaux paramètres à l'effet indésirable de rendre le calcul d'approximation des données beaucoup plus complexe et instable. Une généralisation possible de la modélisation par superquadriques consiste à segmenter les objets en un ensemble de superquadriques[FLW89], bien que cette approche soit très coûteuse en temps de calcul. Une approche encore plus générale a été adoptée par Bobick et Bolles[BB92] consistant à utiliser plusieurs représentations de surfaces (superquadriques, cylindres généralisés) en fonction du niveau de détail désiré.

Au lieu d'utiliser des superquadriques, Taubin [TCSP92] représente des objets à l'aide de surfaces algébriques d'un degré fixé. La phase de reconnaissance s'effectue en comparant les coefficients des équations algébriques ou en comparant des propriétés invariantes associées aux équations algébriques[FMZC92]. Cependant aucune garantie n'existe pour que le polynôme calculé sur une vue partielle de l'objet soit similaire au polynôme calculé sur l'ensemble de l'objet.

L'approximation de données à l'aide de surfaces paramétrées ou implicites tend à réduire la complexité des objets que l'on peut représenter et reconnaître. Une limitation de cette approche est que l'estimation des paramètres de ces primitives est d'autant plus difficile que la forme des primitives est complexe. Pour éviter ces limitations, Besl[BM92] et Zhang[Zha94] utilisent une méthode globale de mise en correspondance qui ne nécessite aucune segmentation ni de modélisation. Cette méthode consiste à minimiser une distance entre deux nuages de points et ne nécessite aucune correspondance explicite entre les données et le modèle. Afin d'augmenter la robustesse de cette méthode, Malandain[MFvR94] adopte une formalisation mécanique qui permet de contrôler la convergence de la minimisation par la mesure de l'énergie cinétique du système. Cependant, l'inconvénient de cette méthode, comme

de toutes les techniques de minimisation, est qu'aucune garantie n'existe quant à la détermination d'un minimum global, surtout en présence d'occultations ou encore de différence de densité de points entre les deux scènes. Pour un exposé sur l'état de l'art pour le problème de la mise en correspondance, voir[Zha93][Bro92].

Une autre approche globale est fondée sur la distribution des vecteurs normaux sur la sphère de Gauss. La représentation EGI (Extended Gaussian Image) a été introduite par Horn[Hor84] et bien qu'elle ne soit valable que pour des objets polyèdriques, elle est bien adaptée pour des objets de formes complexes. Cette representation est indépendante de la translation et de plus, permet de facilement extraire la pose de l'objet, une fois la mise en correspondance des EGI effectuée. Ainsi, Ikeuchi[Ike81] propose une méthode de reconnaissance en effectuant une simple corrélation entre EGI. Cependant, cette représentation n'est univoque que pour les objets convexes et ainsi, cet algorithme de reconnaissance ne gère pas correctement les occultations existantes dans une scène. Pour cela, Kang[KI93] a introduit la notion de Complex EGI (CEGI) qui rend cette représentation univoque pour les objets non convexes.

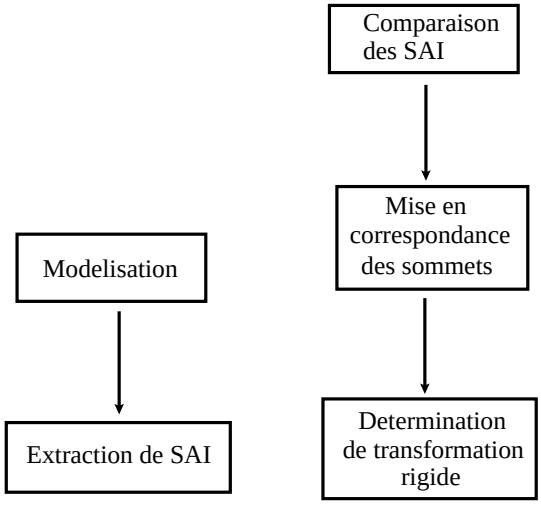
Notre algorithme de reconnaissance utilise à la fois des éléments de la technique de minimisation de Besl[BM92] et de la représentation par EGI de Horn[Hor84]. C'est une approche globale ne se fondant sur aucune représentation analytique et par conséquent pouvant représenter des formes complexes, quoique limitées à la topologie sphérique. Chaque objet est modélisé à l'aide d'un maillage simplexe quasi-régulier de topologie sphérique où les paramètres métriques sont égaux à 1/3. Comme pour la représentation EGI, chaque sommet est projeté sur la sphère unité, et l'angle simplexe du sommet est stocké au sommet image sur la sphère. Nous appelons la représentation sphèrique de l'object, sa représentation simplexe notée SAI (Spherical Attribute Image)*. Cette représentation est invariante par transformation rigide ainsi que par changement d'échelle.

Etant donné un objet, il est possible d'extraire plusieurs représentations SAI, qui se déduisent les unes des autres par une rotation de la sphère unité. Mais contrairement à la représentation EGI, la rotation existant entre deux représentations d'un même objet ne correspond pas à la rotation, dans l'espace euclidien, due à la dif-

*Dans les publications les plus anciennes [DHI93] et [DHI92b] le terme "Simplex Angle Image" a été utilisé plutôt que "Spherical Attribute Image". Ce changement reflète le fait que des attributs autres que l'angle simplexe (voir [KHI93]) peuvent être stocké à chaque sommet de la sphère.

férence de pose de l'objet. Une autre différence importante est le fait que le SAI preserve la connexité en ce sens que deux sommets voisins sur le maillage de l'objets sont voisins sur le SAI. Ceci explique en partie pourquoi il est possible de reconnaître des objets avec le SAI même en présence de fortes occultations, alors que les méthodes globales telles que EGI ne le permettent pas.

La reconnaissance d'objets à partir de données tridimensionelles, s'effectue en deux étapes. Dans une première étape, un maillage quasi-régulier de topologie sphérique est déformé pour approximer les données (voir figure 6.1(a)). La représentation simplexe, SAI, est alors extraite du maillage simplexe modélisant l'objet. Dans une seconde étape, cette représentation SAI est comparée à d'autres représentations (voir figure 6.1(b)). Dans l'hypothèse où une forte corrélation des représentations est observée, on procède à la mise en correspondance des sommets des deux maillages simplexes puis à la détermination par une méthode de minimisation de la transformation rigide entre les deux maillages.



(a) (b)

Fig. 6.1: Les deux étapes de l'algorithme de reconnaissance

6.2 Représentation d'objets à l'aide de SAI

La représentation par SAI peut être interprétée comme une représentation de surfaces discrètes par la courbure. Sous-jacent à cette représentation est la volonté de déterminer un système de coordonnées intrinsèques sur une surface de $\mathbb{R}^3$ et par conséquent d'en déduire une représentation intrinsèque compacte de la surface. Si la création de maillages intrinsèques sur une surface est possible, comme le prouve l'existence d'un maillage extrêmal[Thi93b], il n'existe pas, dans l'état actuel de la recherche, de représentation compacte de la forme d'une surface continue. Ainsi, les seules courbures gaussiennes et moyennes ne suffisent pas à caractériser la forme d'une surface. Dans le chapitre 3.2.1, nous avons montré qu'il est possible d'utiliser la courbure moyenne et les deux courbures géodésiques des lignes de courbure pour caractériser à une transformation rigide près, une surface. Cependant, cette représentation n'est pas compacte, puisque les deux courbures géodésiques sont liées par des équations de compatibilités complexes.

Pour les surfaces représentées par des maillages simplexes, il est possible d'obtenir une représentation compacte qui soit "quasi" invariante. Nous savons d'ores et déjà que la forme d'un maillage simplexe peut être représentée à l'aide des angles simplexes ainsi que des paramètres métriques. Pour obtenir une représentation "quasi-intrinsèque", il faut de plus que ce maillage vérifie deux conditions supplémentaires. La première condition est de nature géométrique et elle indique que les paramètres métriques doivent tous être égaux à 1/3. La seconde concerne la topologie du maillage. Il faut que les maillages soient topologiquement, les plus réguliers possibles. Dans le cas de la topologie sphérique, cela implique que le nombre de sommets par face soit le plus possible voisin de 6.

6.2.1 Représentation des contours de $\mathbb{R}^2$

Pour faciliter la compréhension de la reconnaissance de formes des surfaces de $\mathbb{R}^3$ utilisant le SAI, on fera une analogie avec la reconnaissance des contours de $\mathbb{R}^2$. La méthode de reconnaissance utilisant le SAI est généralisable aux surfaces de toutes dimensions. Cependant, cette méthode est particulièrement simple dans le cas des contours de $\mathbb{R}^2$.

Dans le chapitre 3.1.1, nous avons montré comment une courbe de $\mathbb{R}^2$ peut être représentée par son seul profil de courbure en fonction de l'abscisse curviligne. Nous

avons également montré que la forme des 1-maillages simplexes, c'est à dire les lignes polygonales, est déterminée par la donnée des angles (simplexes) aux sommets et des paramètres métriques (en fait il n'y a qu'un seul paramêtre métrique indépendant). En particulier, la forme des lignes polygonales fermées ayant n sommets qui vérifient $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = 1/2$ ne sont caractérisées que par leurs n angles aux sommets $\{\varphi_i\}$, $(i = 1, \ldots, n)$. Les sommets de ces maillages sont alors équidistants (voir figure 6.2).

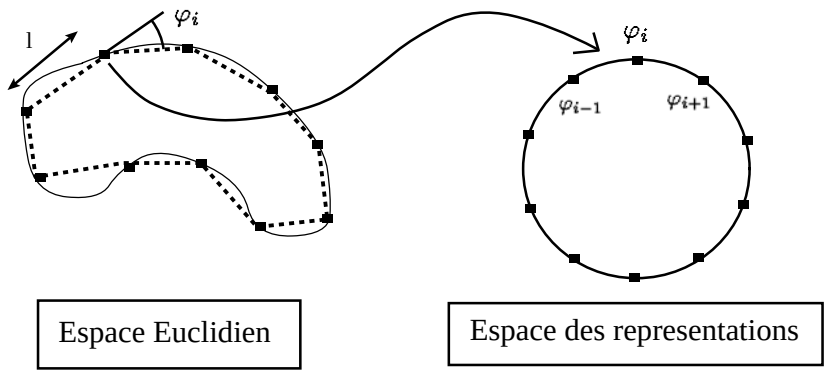


Fig. 6.2: Représentation des 1-maillages simplexes fermés avec des paramêtres métriques égaux à 1/2. Les sommets sont équidistants d'une distance l. On représente la forme de ces maillages à l'aide du cercle unité auquel on a adjoint les valeurs des angles aux sommets φ_i.

Pour caractériser la forme de ces maillages, on adopte une représentation où l'on associe à chaque maillage simplexe ayant n sommets sa projection sur le cercle unité. Les sommets sur le cercle unité sont également équidistants et sont ordonnés suivant le sens trigonométrique, le sommet d'ordre 0 ayant les coordonnées $(1, 0)$. Ainsi on va associer au $i^{\text{ème}}$ sommet du cercle unité, la valeur de l'angle au sommet φ_i du $i^{\text{ème}}$ sommet du maillage simplexe.

Puisque les angles aux sommets représentent la forme d'un maillage, on compare la forme de deux maillages, en comparant la répartition des angles φ_i (voir figure 6.3). La comparaison de la forme de deux 1-maillages simplexes ayant leurs sommets équidistants se fait alors de la manière suivante. On cherche la rotation du cercle unité, qui fait coincider la représentation du premier maillage avec celle du second

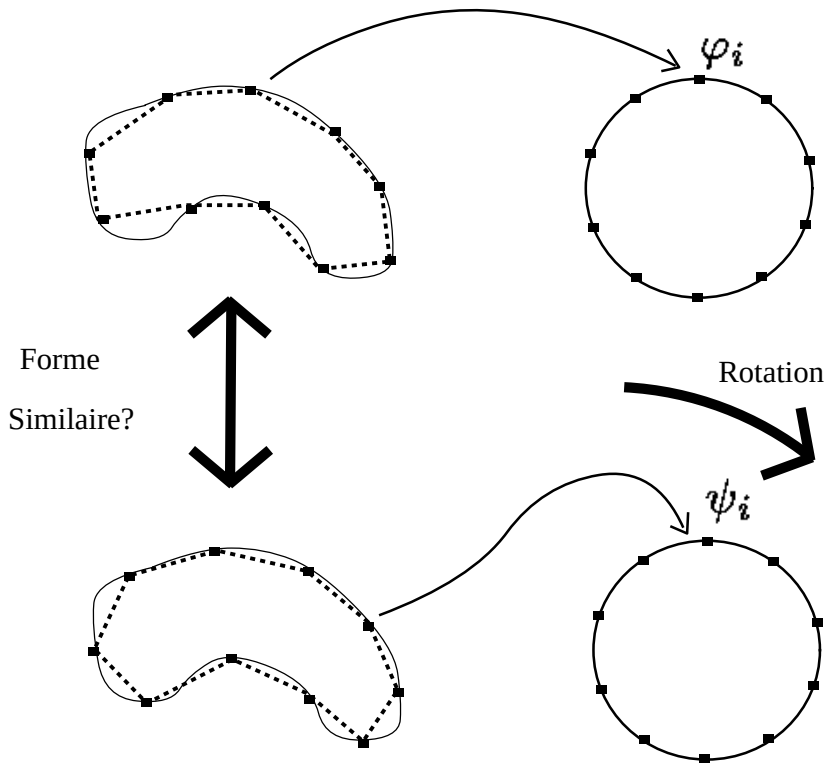


Fig. 6.3: Comparaison de deux 1-maillages simplexes avec $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = 1/2$. On cherche l'angle de rotation du cercle unité, qui minimise la somme des carrés des différences des angles.

maillage. Pour cela, on peut échantilloner l'espace des rotations en m angles $2\pi j/m$ ($j = 0, \ldots, m-1$), et pour ces valeurs, calculer la somme des carrés des différences des angles :

$$D_j = \sum_{i=0}^{n} (\varphi_i - \psi_i^\star)^2$$

où $\psi_i^\star$ correspond à la valeur de l'angle simplexe après rotation de la seconde représentation de $2\pi j/m$. D_j mesure la distance entre les deux représentations. La valeur de l'angle simplexe est interpolée linéairement sur le cercle pour pouvoir évaluer la valeur de l'angle simplexe entre deux sommets. Les formes des deux maillages seront similaires si la valeur minimale $\inf_{j=1,\ldots,m} D_j$ des distances est inférieure à un seuil donné.

Deux maillages simplexes représentant un même contour auront une distance faible, mais non nulle. En effet, à cause de la discrétisation même du contour, la répartition des angles est différente d'un maillage à l'autre, la différence étant d'autant plus grande que le nombre de sommets est faible. Il est important par conséquent de choisir correctement le nombre de sommets pour décrire la forme d'un contour. Un nombre de sommets trop faible implique une valeur très importante de la distance D_j même pour les maillages représentant le même contour. Un nombre de sommets trop important implique une forte sensibilité au bruit présent sur le contour.

6.2.2 Représentation des surfaces

La méthode de représentation des surfaces utilise le principe énoncé dans le paragraphe précédent. On utilise le résultat fondamental que la forme d'un 2-maillage simplexe est représentée par l'ensemble des angles simplexes et des trois paramètres métriques. On considère alors, les 2-maillages simplexes pour lesquels les paramètres métriques sont égaux à 1/3 : $\epsilon_i^1 = \epsilon_i^2 = \epsilon_i^3 = 1/3$. La forme de ces maillages est alors uniquement décrite par l'ensemble des angles simplexes.

La différence majeure existant entre la représentation intrinsèque des 1-maillages simplexes et celle des 2-maillages est que tous les 1-maillages simplexes fermés sont topologiquement réguliers (toutes les cellules sont congruentes les unes aux autres). Ce n'est pas le cas des 2-maillages simplexes topologiquement équivalents à la sphère. Dans le paragraphe 2.4.2, nous avons montré que les trois seuls maillages réguliers étaient le tétraèdre, le cube et le dodécaèdre. Cependant, il existe plusieurs maillages quasi-réguliers parmi lesquels les dômes sphériques qui sont composés d'hexagones et

de pentagones. Ces maillages sont construits en subdivisant de manière régulière les 20 triangles d'un icosaèdre et en construisant le maillage dual de cette triangulation (voir chapitre 2.4.2).

Le coefficient de fréquence f correspond au niveau de subdivision de chaque triangle, et permet de contrôler le nombre de sommets. Plus précisément, le nombre de sommets du maillage simplexe est égal à $20f^2$. Il est possible de repérer chaque sommet à l'aide de deux paramètres (a_i,b_j), $(i = 1,\ldots,20)$, $(j = 1,\ldots,f^2)$. Le premier paramètre a_i indique de quel triangle de l'icosaèdre, ce sommet est issu. Le second paramètre b_j indique l'ordre d'apparition du sous-triangle dans la subdivision de chaque triangle de l'icosaèdre. Ces maillages ont un nombre de pentagones toujours égal à 12 et ont le même groupe de symétrie que le dodécaèdre et l'icosaèdre. Par conséquent, pour une valeur grande de f, ces dômes sphériques sont "presque" réguliers.

Le principe de la représentation par SAI est montré dans la figure 6.4. Etant donné un objet décrit par un ensemble de données tridimensionnelles provenant de capteurs ou d'un système de CAO, on déforme un maillage simplexe quasi-régulier jusqu'à ce qu'il en épouse la forme. Les valeurs des angles simplexes φ_i sont alors associées au sommet correspondant sur la sphère unité.

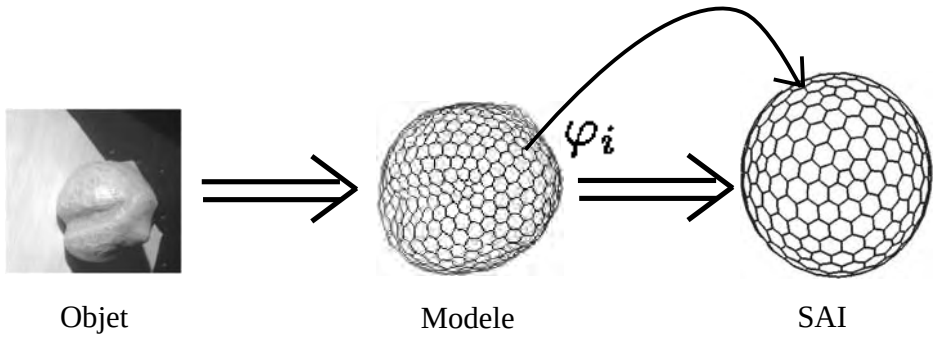


Fig. 6.4: Schéma indiquant le processus de construction d'un SAI à partir d'image de profondeur ou de données CAO

La déformation des maillages s'effectue suivant les principes énoncés dans le chapitre précédent. Aucune adaptation ni aucun raffinement du maillage n'est effectué

pour conserver au maillage sa structure quasi-régulière. Pour obtenir une représentation fiable de l'objet, il est important que les paramètres métriques du maillage soient le plus proche possible de 1/3. Pour cela, on laisse le maillage se déformer jusqu'à ce que les forces résiduelles soient très faibles et que par conséquent le maillage soit complètement stabilisé. Au début de la déformation, le maillage est initialisé comme un ellipsoïde de sorte qu'il entoure approximativement l'objet. Il est alors soumis à une contrainte de lissage assez forte. Après la première convergence du modèle, la contrainte de lissage est diminuée puis est remplacée par une contrainte de continuité de position afin de ne pas lisser exagérément la forme de l'objet. Une legère contrainte de lissage est parfois conservée lorsque les données sont trop bruitées. Ce lissage a pour effet de régulariser les valeurs de l'angle simplexe sur la sphère unité.

La représentation SAI est alors construite en associant la valeur de l'angle simplexe à chaque sommet correspondant sur le maillage sphérique. La représentation est donc dépendante de la fréquence, et par conséquent du nombre de sommets, du maillage quasi-régulier. Là également, en fonction de la complexité de la forme à décrire, on choisira la fréquence adaptée. En pratique, on utilise des dômes sphériques de fréquence au moins égale à 5 (500 sommets) et au plus égale à 9 (1620 sommets).

Afin de visualiser une SAI, nous avons choisi d'utiliser une représentation en coordonnées sphériques où le rayon est proportionnel à la valeur de l'angle simplexe. Puisque l'angle simplexe varie entre $]-\pi, \pi]$, le rayon est égal à $\pi + \varphi_i$.

La figure 6.5 montre un exemple de SAI associé à un modèle de poivron vert. Pour construire ce modèle on utilise trois images de profondeur à l'aide de trois capteurs OGIS[SI87]. Ces capteurs sont calibrés vis à vis de la même cible, et par conséquent il est possible de combiner les informations provenant des trois capteurs par rapport au même système de coordonnées. En disposant les trois capteurs autour de l'objet, on peut ainsi obtenir une description à 80% de la forme de l'objet.

Dans la figure 6.6, on utilise la description en facettes d'une sorte de lego japonais, extraite d'un système de CAO. Le maillage simplexe quasi-régulier se déforme de sorte qu'il approxime l'objet. Pour cela, on définit une force externe de déformation fondée sur la notion de point le plus proche et qui a la même expression que dans la formule 5.3. Le point le plus proche est calculé comme l'intersection de la ligne normale en un sommet avec la triangulation définissant l'objet.

Le SAI correspondant au lego est montré à la figure 6.6(e). Il est facile d'observer

les points de courbure maximale correspondant aux arêtes et aux creux présents sur l'objet.

6.3 Recalage rigide utilisant l'image simplexe

6.3.1 Comparaison des SAIs

Nous traitons à présent le problème de la mise en correspondance des SAIs : étant données deux représentations SAI de même fréquence, déterminer s'ils correspondent au même objet. Comme nous l'avons indiqué dans le paragraphe précédent, les représentations simplexes issues du même objet se déduisent par une rotation de la sphère unité. Par conséquent, l'approche la plus naturelle est de calculer une mesure de corrélation entre les deux SAIs pour toutes les rotations possibles. Parce que cette méthode nécessite l'exploration complète de l'espace à 3 dimensions des rotations de la sphère unité, elle est coûteuse en temps de calcul. Nous décrirons brièvement une méthode beaucoup plus efficace.

Soient $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ les deux représentations SAI correspondant aux deux maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. On note $\varphi_1(\mathbf{P})$, resp. $\varphi_2(\mathbf{P})$, les angles simplexes définis au point $\mathbf{P}$ de la sphère unité. Si $\mathbf{P}$ coïncide avec un sommet P_i de $\mathcal{S}_1$, alors $\varphi_1(\mathbf{P}) = \varphi_i$. Sinon, on détermine le sommet de $\mathcal{S}_1$ le proche de $\mathbf{P}$, et on en déduit la valeur de $\varphi_1(\mathbf{P})$ par interpolation linéaire :

$$\begin{aligned}\varphi_1(\mathbf{P}) &= W(\|\mathbf{P} - P_i\|)\varphi_i + W(\|\mathbf{P} - P_{N_1(i)}\|)\varphi_{N_1(i)} + \\ &\quad W(\|\mathbf{P} - P_{N_2(i)}\|)\varphi_{N_2(i)} + W(\|\mathbf{P} - P_{N_3(i)}\|)\varphi_{N_3(i)} \qquad (6.1)\end{aligned}$$

où $W(x)$ est une fonction de pondération qui ne dépend que de la distance x au point $\mathbf{P}$. Cette fonction est d'autant plus importante que x est faible et la somme des 4 coefficients de pondérations est égale à 1. Une approche plus rigoureuse calculerait $\varphi_1(\mathbf{P})$ en utilisant une triangulation de la sphère unité et en interpolant linéairement la valeur de l'angle simplexe entre les sommets de chaque triangle. Cependant, la méthode présentée a l'avantage d'être rapidement calculable.

Les deux SAI $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ sont les représentations du même objet s'il existe une rotation $\mathbf{R}$ telle que :

$$\varphi_2(\mathbf{P}) = \varphi_1(\mathbf{RP}) \qquad (6.2)$$

pour chaque sommet $\mathbf{P}$ de $\mathcal{S}_2$.

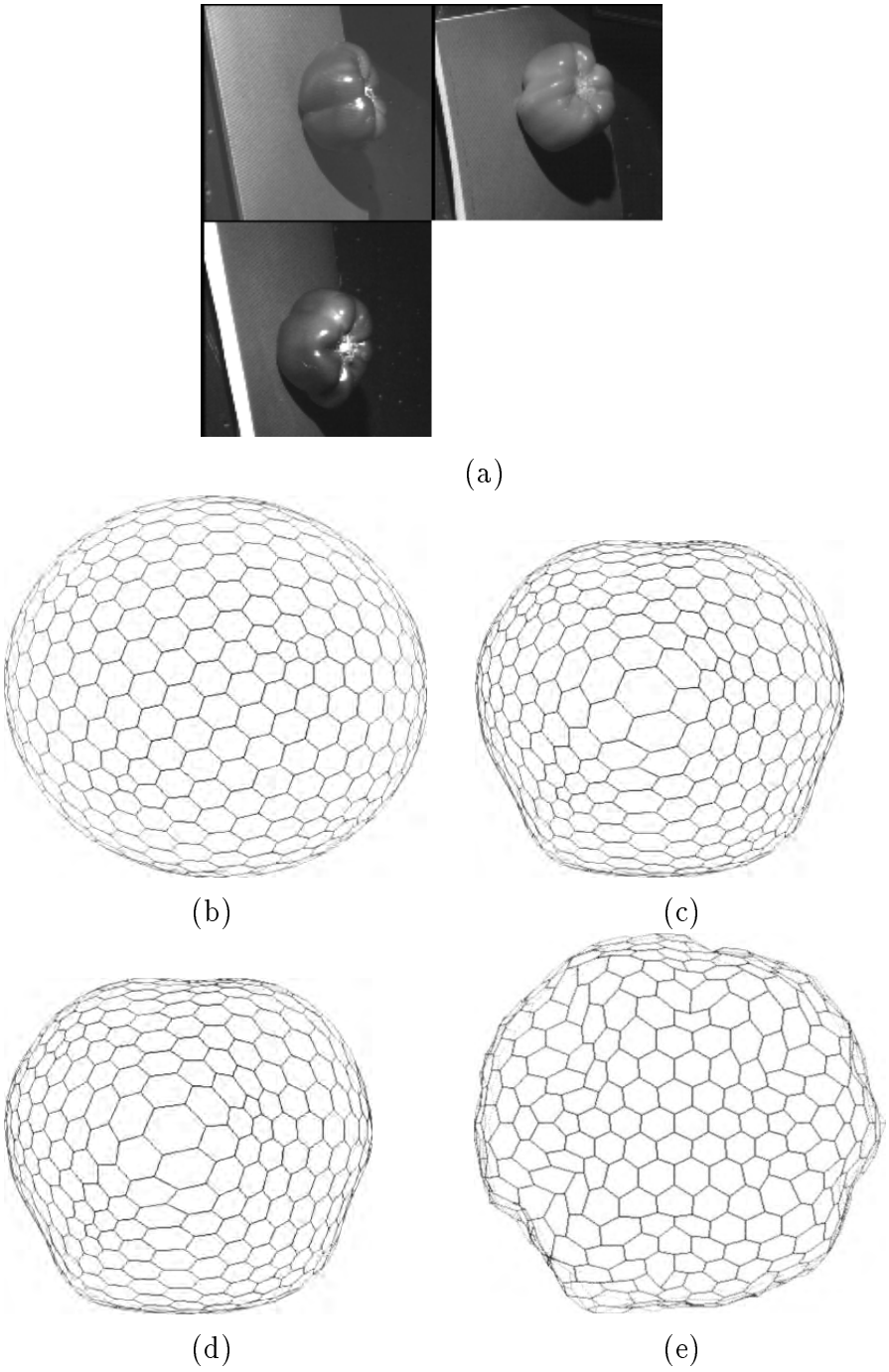
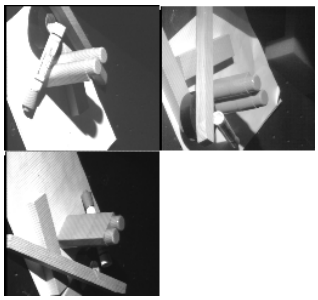
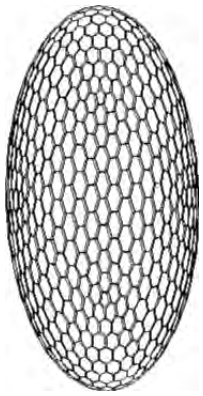


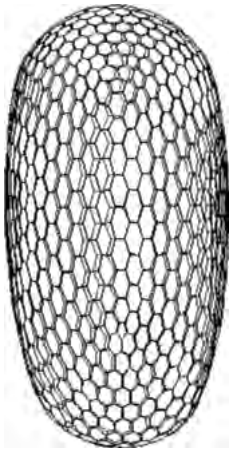
Fig. 6.5: (a) Les trois vues de l'objet, ici un poivron vert, observé par trois capteurs tridimensionnels. (b) Le maillage est initialisé comme un ellipsoide et positionné autour de l'objet. (c) Maillage simplexe après 10 itérations. (d) Modèle final de l'objet. (e) SAI associé au maillage (d).



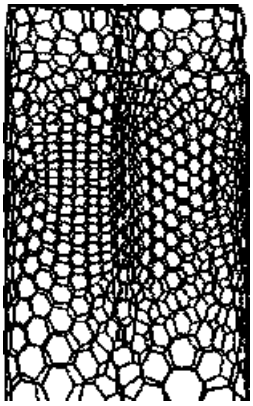
(a)



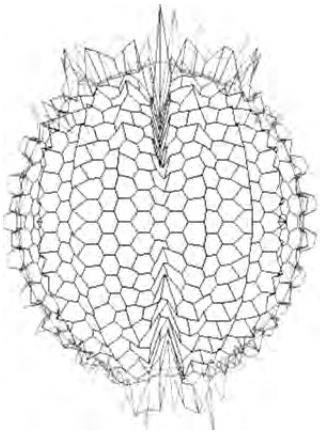
(b)



(c)



(d)



(e)

Fig. 6.6: (a) Le modèle CAO de l'objet, un lego japonais. (b) Le maillage est initialisé comme un ellipsoïde et positionné autour de l'objet. (c) Maillage simplexe après 15 itérations. (d) Modèle final de l'objet. (e) SAI associé au maillage (d).

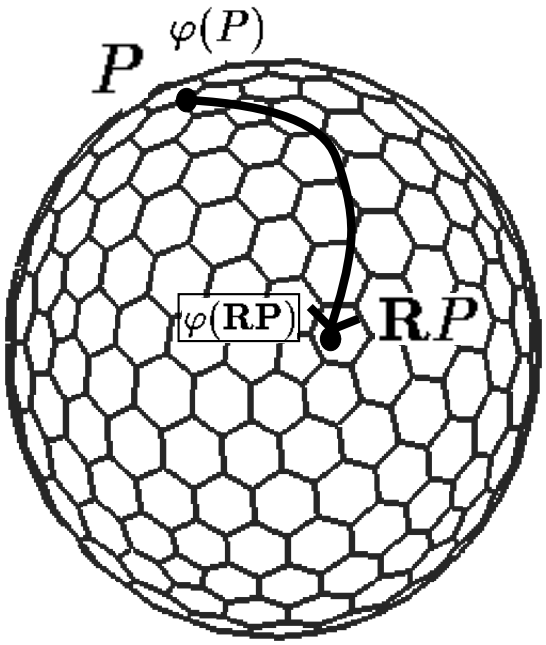


Fig. 6.7: Définition de la rotation **R** utilisée lors de la mise en correspondance de deux SAIs

Pour déterminer si cette rotation existe, on va définir une mesure $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$ de distance entre les deux SAIs après application d'une rotation R :

$$D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{S}_2} (\varphi_2(\mathbf{P}) - \varphi_1(\mathbf{RP}))^2 \tag{6.3}$$

La valeur minimale de $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$ correspond à la meilleure rotation qui transforme $\mathcal{S}_1$ en $\mathcal{S}_2$. Il est important de rappeler que cette rotation *n'est pas* la rotation entre les objets, mais la rotation entre leur représentation. La stratégie la plus simple est d'échantillonner l'espace des rotations, représenté par les angles (α, β, γ) et d'évaluer $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$ pour chaque valeur discrète $(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$. La définition des angles (α, β, γ) est détaillée dans la figure 6.8 : β mesure la rotation autour de l'axe des $\mathbf{X}$, α mesure la rotation autour de l'axe $\mathbf{Z}$ et γ mesure la rotation autour du nouvel axe des $\mathbf{Z}$.

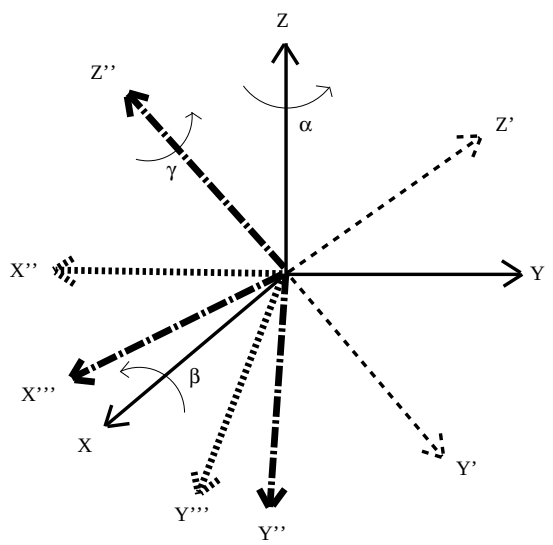


Fig. 6.8: Définition des angles (α, β, γ) utilisés pour paramétrer l'espace des rotations

Dans une première méthode, nous effectuons une exploration multi-échelle de l'espace des rotations. L'espace entier des rotations de la sphère unité est parcouru lorsque α varie de $[0, 2\pi[$, β varie de $[0, \pi[$ et enfin γ varie de $[0, 2\pi[$. Dans une première étape, nous balayons l'ensemble de l'espace avec un pas de $\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\gamma = 10^o$. Une table de taille $36 \times 18 \times 36 = 23328$ éléments est alors calculée et un ou

plusieurs minimums sont détectés. On procède dans une seconde étape, en explorant avec un pas de $\Delta\alpha = \Delta\beta = \Delta\gamma = 1^o$ un sous-espace de $36^o \times 18^o \times 36^o$ centré autour de chaque minimum. Le minimum global de $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$ est alors déterminé à 1° près. Cette méthode est "naïve" dans son principe et de plus nécessite environ 20mn de calcul sur une Sparcstation Sun. Nous n'avons cependant aucunement essayé d'optimiser le temps de calcul par cette première méthode. L'utilisation de différents pas de discrétisation et de différents niveaux d'échelle pourrait sans doute améliorer le temps de calcul.

Il serait cependant vain de vouloir améliorer la précision de la rotation minimisant $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$, à cause de la nature discrète des SAIs. Il est évident que la précision associée à la rotation doit être liée au niveau de discrétisation de la sphère, et par conséquent, à la fréquence utilisée pour les modèles simplexes quasi-réguliers.

Une seconde méthode de détermination du minimum global est proposée dans [DHI94]. Cette méthode plus performante utilise la structure quasi-régulière des SAIs et ne nécessite aucune interpolation sur la sphère. L'approche consiste à ne considérer que les rotations qui transforment un sommet et ses trois sommets voisins en un autre sommet du maillage sphérique et ses trois voisins. En effet, la correspondance entre ces deux sommets et leurs voisins définit une unique rotation de la sphère. Si le maillage $\mathcal{S}_1$ était régulier, on pourrait définir un groupe de rotations en effectuant une permutation des sommets sur la sphère. Le maillage $\mathcal{S}_1$, n'est pas régulier mais quasi-régulier, et on va, de la même manière, définir des quasi-rotations en effectuant une permutation des sommets du maillage. La mise en correspondance des SAIs, s'effectue alors en deux étapes. La première étape consiste à pré-calculer les $3n$ permutations d'indices $\{R_j\}$ $(j = 1, \ldots, 3n)$, n étant le nombre de sommets de $\mathcal{S}_1$ et de $\mathcal{S}_2$. Pour chaque rotation,numérotée j, on associe à un sommet P_i, le sommet $P_{R_j(i)}$. Ces fonctions de permutations d'indices $\{R_j\}$ sont calculées préalablement et stockées sous forme de fichiers. Il est nécessaire de calculer ces fonctions pour l'ensemble des SAIs de différentes résolutions, c'est à dire pour les SAI de différentes fréquences (en pratique, f varie de 5 à 10).

La seconde étape consiste à calculer une mesure de corrélation $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, S_j)$ entre les deux SAIs pour la permutation S_j :

$$D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, R_j) = \sum_{l=1}^{n} \left(\varphi^1_{R_j(l)} - \varphi^2_l\right)^2 \tag{6.4}$$

où φ_i^1 et φ_i^2 indiquent respectivement les angles simplexes sur $\mathcal{S}_1$ et sur $\mathcal{S}_2$. Cette mesure de corrélation est calculée pour l'ensemble des $3n$ permutations, et la permutation qui minimise $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, S_j)$ est alors déterminée. Il est important de noter que l'ensemble des $3n$ permutations correspond à un échantillonage quasi-régulier de l'espace des rotations de la sphère unité et que par conséquent la valeur minimale de $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, R_j)$ correspond bien à un minimum global.

Cette méthode a l'avantage d'être très performante en temps de calcul, puisqu'elle nécessite 7 secondes de calcul sur une Sparcstation Sun. De plus, on a vérifié expérimentalement que le minimum déterminé ainsi est très proche de la rotation déterminée par la méthode précédente.

6.3.2 Traitement des occultations

Jusqu'à présent, nous avons supposé que nous disposions d'une vue complète de l'objet, comme dans la figure 6.5. Cette supposition est appropriée lors de la construction de modèle de référence qui seront stockés dans une base de donnée. Cependant, lors de la phase de reconnaissance, seulement une portion de l'objet est visible. L'algorithme du paragraphe précédent doit être modifié pour autoriser la présence d'occultations.

Lors de la phase de modélisation, il est possible d'étiqueter les sommets du maillage comme étant interpolés ou proches des données tridimensionnelles. Pour cela, on calcule pour chaque sommet la distance aux données, et ceux pour lesquels la distance est supérieure à un seuil donné, sont considérés comme interpolés. Les zones du maillage où les sommets sont étiquetés comme étant interpolés correspondent alors à la partie occultée de l'objet, les zones complémentaires correspondant à la partie visible de l'objet.

Le problème des parties occultées est illustré dans la figure 6.9 pour les contours de $\mathbb{R}^2$. Dans la figure 6.9(a), un contour est approximé par un 1-maillage simplexe ayant 8 sommets équidistants. La longueur totale du maillage est alors $L = 8l$. Dans la figure 6.9(b), une partie du contour est occultée et la partie visible est approximée par un maillage ayant 8 sommets également mais de longueur $L_1 = 8l_1$. Puisque la partie occultée est représentée par une portion rectiligne, la longueur de ce maillage est inférieure à celle du maillage représentant le contour complet : $L > L_1$. De la même manière, la longueur de la partie de la représentation correspondant à la

partie visible L_2 (voir figure 6.9(d)) est supérieure à la longueur $L^\star$ de la partie correspondante sur la représentation du contour complet (voir figure 6.9(c)). Afin de calculer la distance entre les deux représentations du paragraphe 6.2.1, le SAI du contour occulté doit subir un changement d'échelle de sorte qu'il occupe la même longueur relative que la représentation complète du contour. Si $L^\star$ était connu, le facteur de changement d'échelle k serait :

$$k = \frac{L^\star}{L_2} \tag{6.5}$$

En réalité, la valeur de $L^\star$ n'est pas connue parce que nous ne connaissons pas à l'avance quelle partie du maillage de référence correspond à quelle partie visible du contour occulté. Pour éliminer la variable $L^\star$ dans l'équation 6.5, on utilise la relation :

$$\frac{L_1}{L} = \frac{L^\star}{2\pi} \tag{6.6}$$

Cette équation exprime le fait que le rapport entre la longueur totale du maillage occulté et du maillage non occulté est égale au rapport entre les longueurs totales exprimées cette fois-ci dans l'espace des représentations. Cette relation est vraie parce que tous les sommets sont équidistants à la fois dans l'espace euclidien et dans l'espace des représentations. On peut alors combiner les équations 6.6 et 6.5, pour calculer le coefficient k :

$$k = \frac{2\pi L_1}{L_2 L} \tag{6.7}$$

Dans le cas des 2-maillages simplexes et des représentations de surfaces, on peut généraliser l'approche décrite précédemment en remplaçant les longueurs $L, L_1, L_2, L^\star$ par les aires $A, A_1, A_2, A^\star$:

$$k = \frac{4\pi A_1}{A_2 A} \tag{6.8}$$

La généralisation des équations des 1-maillages simplexes aux 2-maillages simplexes n'est qu'une approximation parce que la relation $A_1/A = A^\star/4\pi$ équivalente à l'équation 6.6, n'est valable que si l'aire par sommet est constante sur l'ensemble du maillage. En pratique, cependant, on a pu vérifier que l'aire par sommet était presque constante si le maillage a ses paramètres métriques égaux à 1/3.

Une fois k calculé à l'aide de l'équation 6.8, on applique au SAI de l'objet occulté, une transformation qui va modifier la taille de la partie visible de la SAI. Cette transformation est décrite dans la figure 6.10. Pour chaque sommet du SAI, on

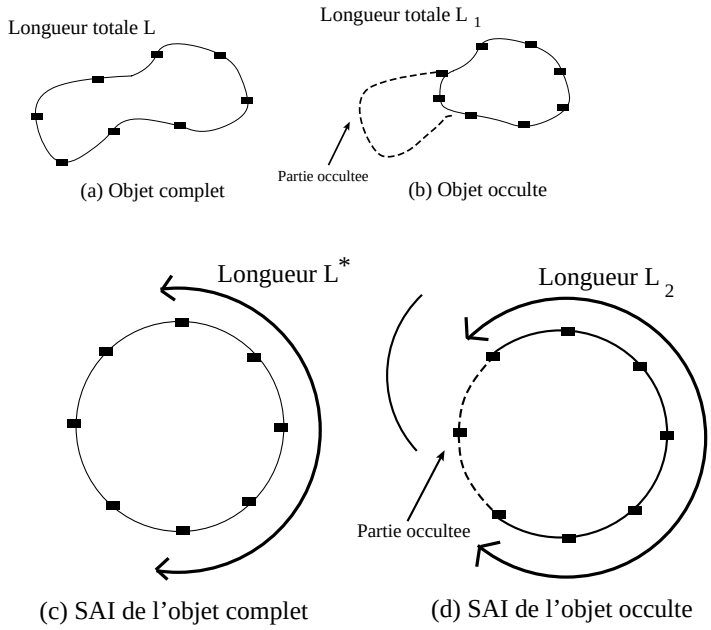


Fig. 6.9: Prise en compte des parties occultées pour la mise en correspondance des SAIs. Définition des longueurs $L, L_1, L_2, L^\star$.

détermine s'il correspond à un sommet interpolé ou non, sur le maillage simplexe représentant l'objet occulté. On détermine ensuite l'isobarycentre C des sommets correspondant à la région visible de l'objet. On repère un sommet P_i de la $\mathcal{S}$ par ses coordonnées sphériques d'axe OC (O est le centre de la sphère unité). On note θ_i l'angle que fait OP_i avec l'axe OC. La transformation consiste alors à associer à P_i le sommet P_i' situé sur le grand cercle contenant C et P_i, et tel qu'il fasse un angle θ_i' avec l'axe OC :

$$1 - \cos(\theta_i') = k(1 - \cos(\theta_i)) \tag{6.9}$$

où k est le facteur d'échelle défini par l'équation 6.8. Cette transformation est choisie parce qu'elle garantit que l'aire de la région visible est modifiée exactement d'un facteur k si cette région est circulaire. Même lorsque la région n'est pas circulaire, alors cette transformation donne de bons résultats.

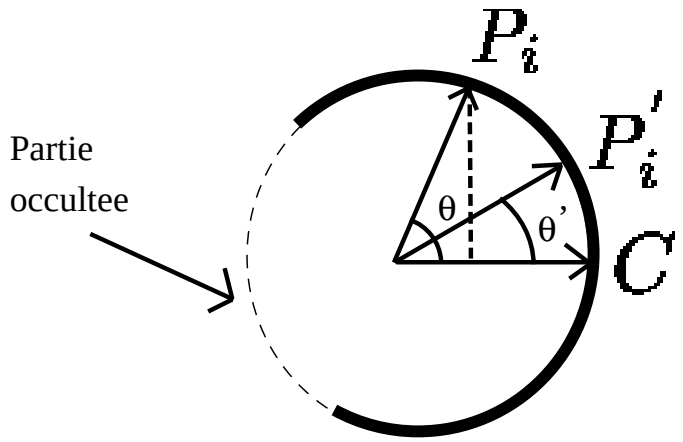


Fig. 6.10: Description de la méthode de changement d'échelle de la région visible d'un SAI

Après avoir transformé le SAI de l'objet occulté, on applique l'algorithme de mise en correspondance des SAIs décrit dans le paragraphe précédent, en ne tenant en compte dans le calcul de distance que des parties visibles des deux SAIs. Ainsi, en reprenant les notations du paragraphe précédent, la distance entre les deux SAIs $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ à une rotation $\mathbf{R}$ près, $D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R})$, se calcule à présent différement. Il convient, en effet, d'ignorer le cas où $\mathbf{P}$ appartient à la partie occultée de $\mathcal{S}_2$ ou si $\mathbf{RP}$ appartient à la partie occultée de $\mathcal{S}_1$. On appelle Ω la région de la sphère unité

où $\mathbf{P}$ et $\mathbf{RP}$ appartiennent à la partie visible de respectivement $\mathcal{S}_2$ et $\mathcal{S}_1$. La nouvelle mesure de distance entre les deux SAI est alors :

$$D(\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathbf{R}) = \frac{\sum_{\mathbf{P}\in\Omega} \left(\varphi_2(\mathbf{P}) - \varphi_1(\mathbf{RP})\right)^2}{\text{Aire } (\Omega)} \tag{6.10}$$

Le fait de diviser par l'aire de portion visible commune des deux SAIs, permet d'éviter de favoriser les configurations pour lesquelles la portion commune est faible mais où la distance est relativement grande.

Une formulation similaire est adoptée pour la seconde méthode décrite pour la mise en correspondance des SAI.

Il est important de noter que ce qui assure le succès de cette méthode de recalage en présence d'occultations, est le fait que cette représentation conserve la connexité entre les sommets. Plus précisément, si une zone connexe sur l'objet est visible, alors la zone correspondante sur le SAI est également connexe. Cette propriété, nous permet de mettre en correspondance les deux zones connexes par un simple changement d'échelle. Dans le cas de l'EGI, la connexité n'est pas conservée durant le passage de l'espace euclidien à l'espace des représentations, et par conséquent, le problème des occultations est difficile. Pour ce qui est des représentations utilisant des équations implicites, par exemple des équations algébriques ou des superquadriques, la présence des occultations est également problématique. Les coefficients de ces équations calculés sur l'ensemble de l'objet peuvent être complètement différents de ceux calculés sur une partie de l'objet.

6.3.3 Détermination de la transformation rigide

Après avoir déterminé la rotation qui minimise la distance entre deux SAIs, on est en mesure d'évaluer la similarité entre deux formes. Pour cela, on peut par exemple estimer que deux SAIs ayant une distance inférieure à un seuil sont considérés comme décrivant une même forme. Aucune tentative n'a été effectuée pour vérifier si cette approche est licite, d'autres expressions de la distance entre deux SAIs pouvant être utilisées.

Lorsque deux SAIs sont jugés comme correspondant au même objet, se pose le problème de la détermination de la transformation rigide amenant le premier maillage vers le second. Le principe de l'algorithme utilisé est exposé dans la figure

6.11. L'existence d'une rotation $\mathbf{R}$ entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ permet d'établir une correspondance entre les sommets des deux SAIs. Cette correspondance peut être transposée au niveau des sommets des deux maillages simplexes $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ représentant les deux objets. La transformation rigide est alors calculée en utilisant uniquement ces couples de points.

Soit P_i un sommet de $\mathcal{S}_2$ et $\mathbf{R}P_i$ le point de la sphère unité correspondant sur $\mathcal{S}_1$. $\mathbf{R}P_i$ ne coïncide pas nécessairement avec un sommet de $\mathcal{S}_1$, la valeur de l'angle simplexe en $\mathbf{R}P_i$ étant calculé par interpolation linéaire (voir équation 6.1). Soit M_i le sommet de $\mathcal{M}_2$ correspondant à P_i. Puisque la rotation $\mathbf{R}$ a mis en évidence la similarité des deux maillages, le sommet M_i a un équivalent sur le maillage $\mathcal{M}_1$ qui est le correspondant de $\mathbf{R}P_i$. Lorsque $\mathbf{R}P_i$ correspond à un sommet de $\mathcal{S}_1$ alors il est facile de lui faire correspondre un sommet $M_i^\star$ sur $\mathcal{M}_1$. Dans le cas contraire, on calcule le correspondant de $\mathbf{R}P_i$, $M_i^\star$, sur $\mathcal{M}_1$ en effectuant une interpolation linéaire des positions de sommets voisins sur $\mathcal{M}_1$, les coefficients associés à chaque sommet étant ceux associés à leur correspondant dans la formule 6.1.

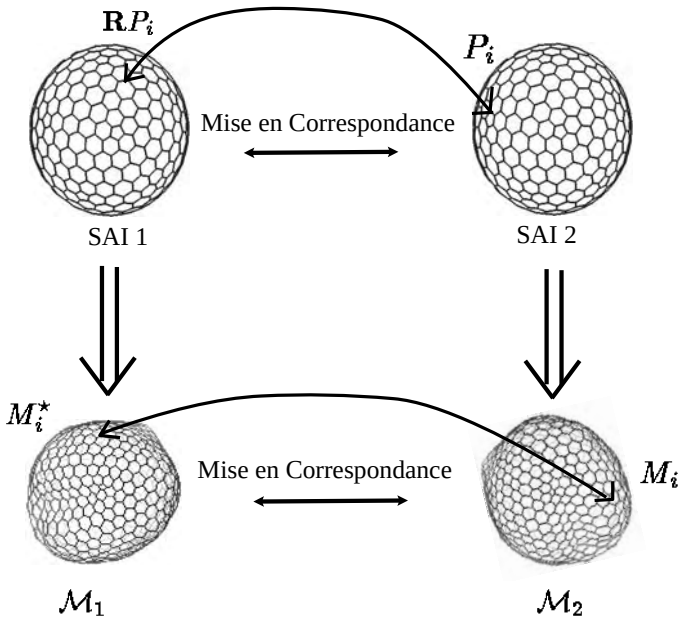


Fig. 6.11: Principe de l'algorithme de détermination de la transformation rigide

Après avoir calculé les n couples de points $\{(M_i, M_i^\star)\}$, il convient de déterminer

la rotation $\mathbf{R}_0$ et la translation $\mathbf{T}_0$ existant entre les maillages $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Une estimée de cette transformation rigide peut être calculée en minimisant la somme des distances entre les points M_i de $\mathcal{M}_2$ et les points $\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0)$. Formellement, l'expression à minimiser est :

$$E_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0) = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0) - M_i\|^2$$

Il est possible d'obtenir une expression formelle de la transformation rigide minimisant $E_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)$ (voir [Hor87]). Cependant, cette transformation n'est qu'une approximation parce qu'elle suppose que les points se correspondent exactement. Or, du fait de la discrétisation et aux différentes approximations effectuées lors de la mise en correspondance des SAIs, la correspondance entre les points n'est pas parfaite. Par contre, il est certain que le point $\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0)$ doit être dans un voisinage de M_i et par conséquent dans le plan tangent de M_i. Donc, si $\mathbf{n}_i$ est le vecteur normal en M_i, on choisit de minimiser :

$$E_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0) = \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{n}_i.\,(\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0) - M_i)\,\|^2 \tag{6.11}$$

Il n'est cependant plus possible d'obtenir une solution explicite pour la minimisation de $E_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)$. La méthode itérative que nous proposons pour résoudre cette minimisation s'inspire des équations de la mécanique appliquées à un système rigide de points. Elle a l'avantage d'être très simple à calculer et de converger rapidement. Cette approche est, dans son esprit, similaire à celle de Malandain[MFvR94].

On considère que, sur le système matériel formé par les n points $\{M_i^\star\}$ s'exerce les forces ponctuelles $\mathbf{f}_i = \mathbf{n}_i\,(\mathbf{n}_i.\,(\mathbf{R}_0^t(M_i^\star + \mathbf{T}_0^t) - M_i))$ où $\mathbf{R}_0^t$ et $\mathbf{T}_0^t$ désignent respectivement l'estimée de la rotation et la translation à l'itération t. On va montrer que une condition nécessaire pour minimiser $E_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)$ est que la somme des forces $\mathbf{f}_i$ soit nulle. Pour cela, on va exprimer la condition nécessaire pour que $\mathbf{T}_0$ soit optimale. Si l'on remarque que $\frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{T}_0}{\partial \mathbf{T}_0} = \mathbf{A}^T$ alors il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)}{\partial \mathbf{T}_0} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(\mathbf{n}_i^T \mathbf{R}_0 \mathbf{T}_0)}{\partial \mathbf{T}_0} (\mathbf{n}_i.\,(\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0) - M_i)) \\
&= \mathbf{R}_0 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_i\,(\mathbf{n}_i.\,(\mathbf{R}_0(M_i^\star + \mathbf{T}_0) - M_i)) = \mathbf{R}_0 \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i
\end{aligned}$$

Par conséquent, la condition $\frac{\partial E_1(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)}{\partial \mathbf{T}_0} = 0$ implique que $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i = \mathbf{F} = 0$. En écrivant la même condition pour $\mathbf{R}_0$, on montrerait que la somme des moments des

forces f_i est nécessairement nulle : $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{n} GM_i^\star \wedge \mathbf{f}_i = 0$, où G est le centre d'inertie du système. Par conséquent, on va résoudre le problème de minimisation, en cherchant à déterminer la transformation rigide qui amène le système matériel à sa position d'équilibre stable. On va procéder itérativement en initialisant la transformation rigide par celle obtenue en minimisant le critère $E_0(\mathbf{R}_0, \mathbf{T}_0)$. La loi d'évolution de $\mathbf{R}_0^t$ et de $\mathbf{T}_0^t$ est donnée par les équations de la dynamique. Cependant, afin de simplifier les calculs, on écrit les termes d'inertie au premier ordre au lieu du second ordre. On écrit un vecteur vitesse à la place du vecteur d'accelération et on écrit un vecteur de moment cinétique à la place d'un vecteur de moment dynamique :

$$\begin{aligned} m\frac{\partial G(t)}{\partial t} &= \mathbf{F} \\ I\mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}\mathbf{Q} \end{aligned} \tag{6.12}$$

où est m est la masse du système, $\mathbf{\Omega}$ est son vecteur rotation instantané et I son inertie par rapport à son centre d'inertie : $I = \sum_{i=1}^{n} \|GM_i^\star\|^2$. Si l'on note $\mathbf{R}(\mathbf{u}, \alpha)$ la rotation d'axe $\mathbf{u}$ et d'angle α, alors la discrétisation des équations 6.12 donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0^{t+1} &= \mathbf{T}_0^t + \frac{\mathbf{F}}{2n} \\ \mathbf{R}_0^{t+1} &= \mathbf{R}_0^t.\mathbf{R}(\frac{\mathbf{Q}}{\|\mathbf{Q}\|}, \frac{\|\mathbf{Q}\|}{2I}) \end{aligned} \tag{6.13}$$

Ce système converge en général très rapidement en une dizaine d'itérations. Pour qu'il n'y ait qu'un seul minimum, il est nécessaire les vecteurs normaux ne soient pas dégénérés, c'est à dire que la matrice $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{n}_i\mathbf{n}_i^T$ soit inversible.

6.4 Résultats de recalage rigide

6.4.1 Recalage de deux modèles complets

Dans cet exemple, nous utilisons un même objet, un poivron vert, qui est observé dans deux poses différentes. Dans les deux cas, une description à 80% de l'objet est disponible grâce à trois capteurs OGIS[SI87]. La description des trois vues correspondant à la première pose de l'objet est montrée dans la figure 6.5(a) et celle correspondant à la seconde pose est montrée dans la figure 6.12(a). La différence de

pose entre les deux objets est essentiellement dûe à une translation dans le plan horizontal et une rotation suivant un axe vertical, comme le montrent les deux coupes planes de la figure 6.12(b) et (c).

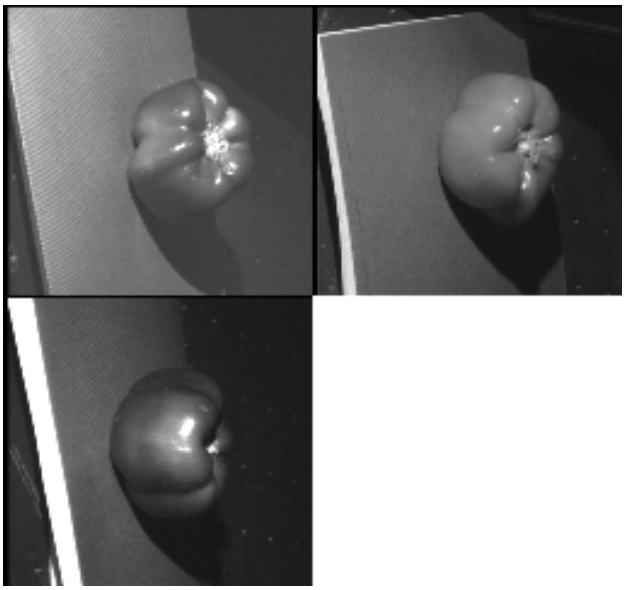
La figure 6.13(a) montre la valeur de la distance entre les deux SAIs. La distance est présentée uniquement en fonction de α et β, puisqu'il serait graphiquement difficile de représenter la distance en fonction des trois angles α, β et γ. Par conséquent on choisit de représenter en (α, β) la valeur minimale de la distance pour tous les valeurs possibles de γ. La résolution du graphe est de 10° pour α et β. Le graphe montre clairement l'existence d'un seul minimum correspondant à la rotation existant entre les deux SAIs.

Les figures 6.13 (b) et (c) montrent la superposition des coupes des deux modèles après que le second maillage eut été transformé par la transformation rigide calculée par l'algorithme présenté dans le paragraphe 6.3.3. La figure 6.13 (d) montre la projection du premier maillage transformé, dans une image correspondant à la seconde acquisition. Ces résultats montrent que la transformation rigide a été correctement calculée parce que la distance moyenne entre les deux maillages après recalage est de l'ordre de la précision des capteurs utilisés.

6.4.2 Recalage avec une vue partielle d'un objet

Nous montrons à présent un exemple de mise en correspondance dans le cas où l'un des modèles n'est vu que très partiellement. Dans une première acquisition, on utilise trois capteurs tridimensionnels grâce auxquels on modèlise approximativement 80% de la forme de l'objet (voir figure 6.14(b)). Le SAI décrivant la quasi totalité de la forme de l'objet est montré dans la figure 6.14(c).

Dans un deuxième temps, une seule vue de l'objet est utilisée, représentant approximativement 30% de la forme de l'objet. Après extraction du SAI correspondant, et une mise à l'échelle à l'aide de l'algorithme décrit dans le paragraphe 6.3.2, on procède à la mise en correspondance des deux représentations. Les figures 6.15(a) et (b) montrent la variation de la distance entre les deux SAIs en fonction de (α, β) ainsi que de (β, γ). Là encore, le minimum de la distance est clairement discernable dans les deux figures. En utilisant cette rotation des deux SAIs, on détermine la transformation rigide entre les deux poses. Les figures 6.15(c) et (d) ainsi que la figure 6.15 montrent que cette transformation rigide est correctement estimée.



(a)

(b)

(c)

Fig. 6.12: (a) Les trois vues correspondant à la seconde acquisition du poivron vert. La posture de l'objet est différente de la figure 6.5. Coupe horizontale (b) et verticale (c) où l'on a superposé les deux acquisitions du poivron vert.

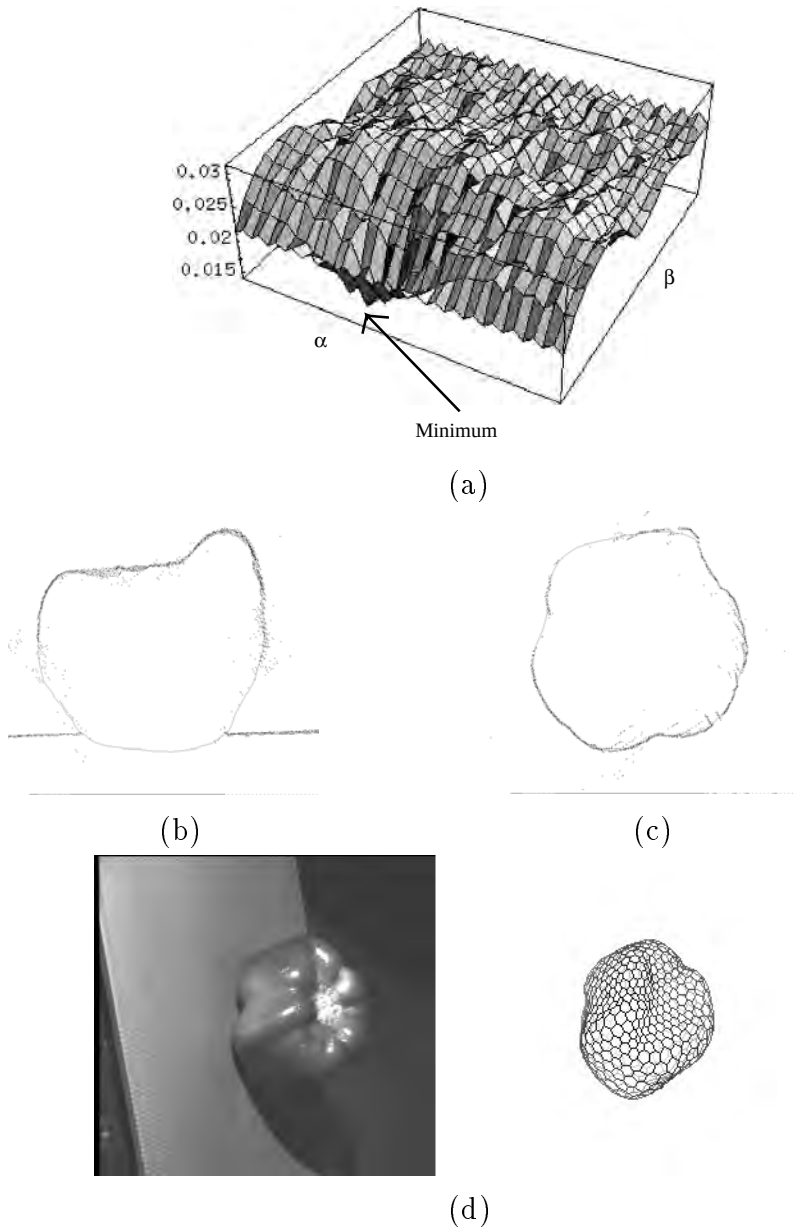
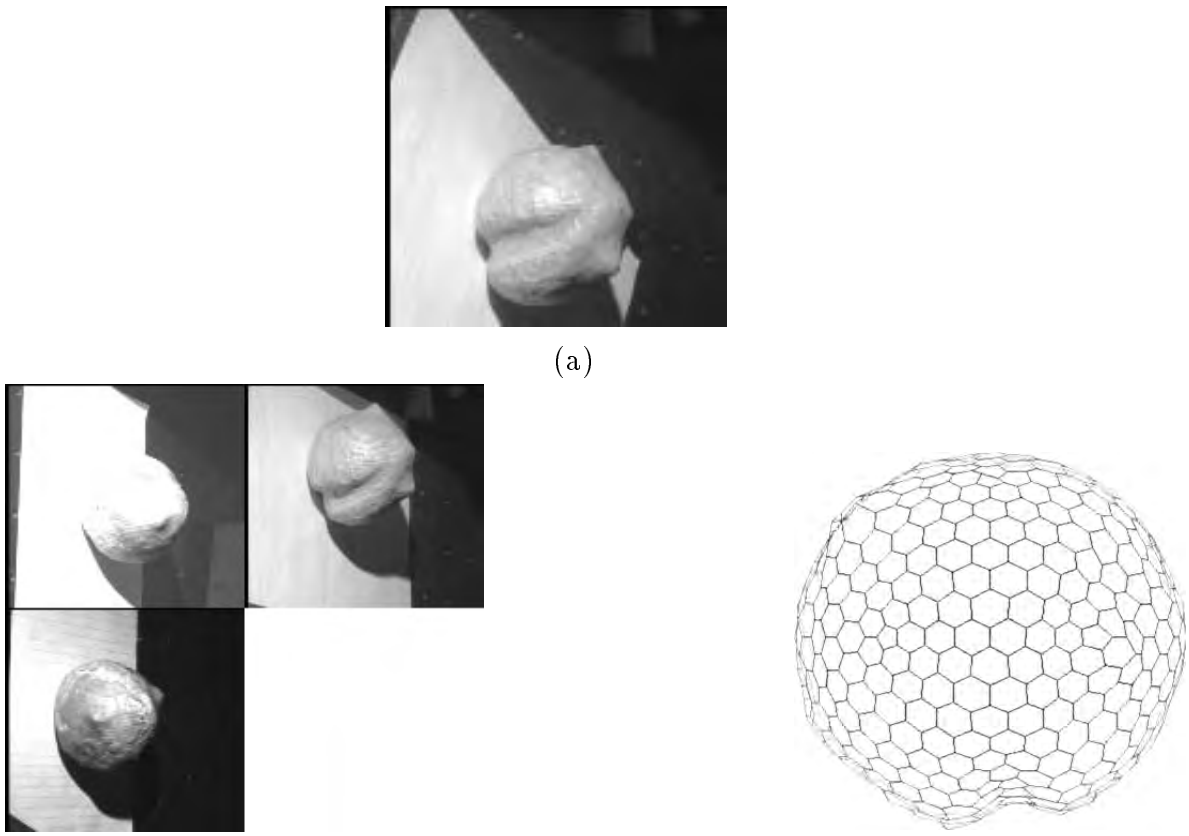


Fig. 6.13: (a) Graphe donnant la distance entre les 2 SAIs en fonction de α et β. Coupe horizontale (b) et verticale (c) des deux maillages de poivron vert, après recalage rigide. (d) Superposition dans l'image du poivron au cours de la première acquisition, du maillage simplexe recalé, correspondant à la seconde acquisition.



(a) (b) (c)

Fig. 6.14: (a) Vue partielle d'un objet. Seulement 30% de l'objet est visible. (b) Les vues correspondant à l'acquisition à 80% de la forme de l'objet. (c) SAI associé au modèle complète de l'objet.

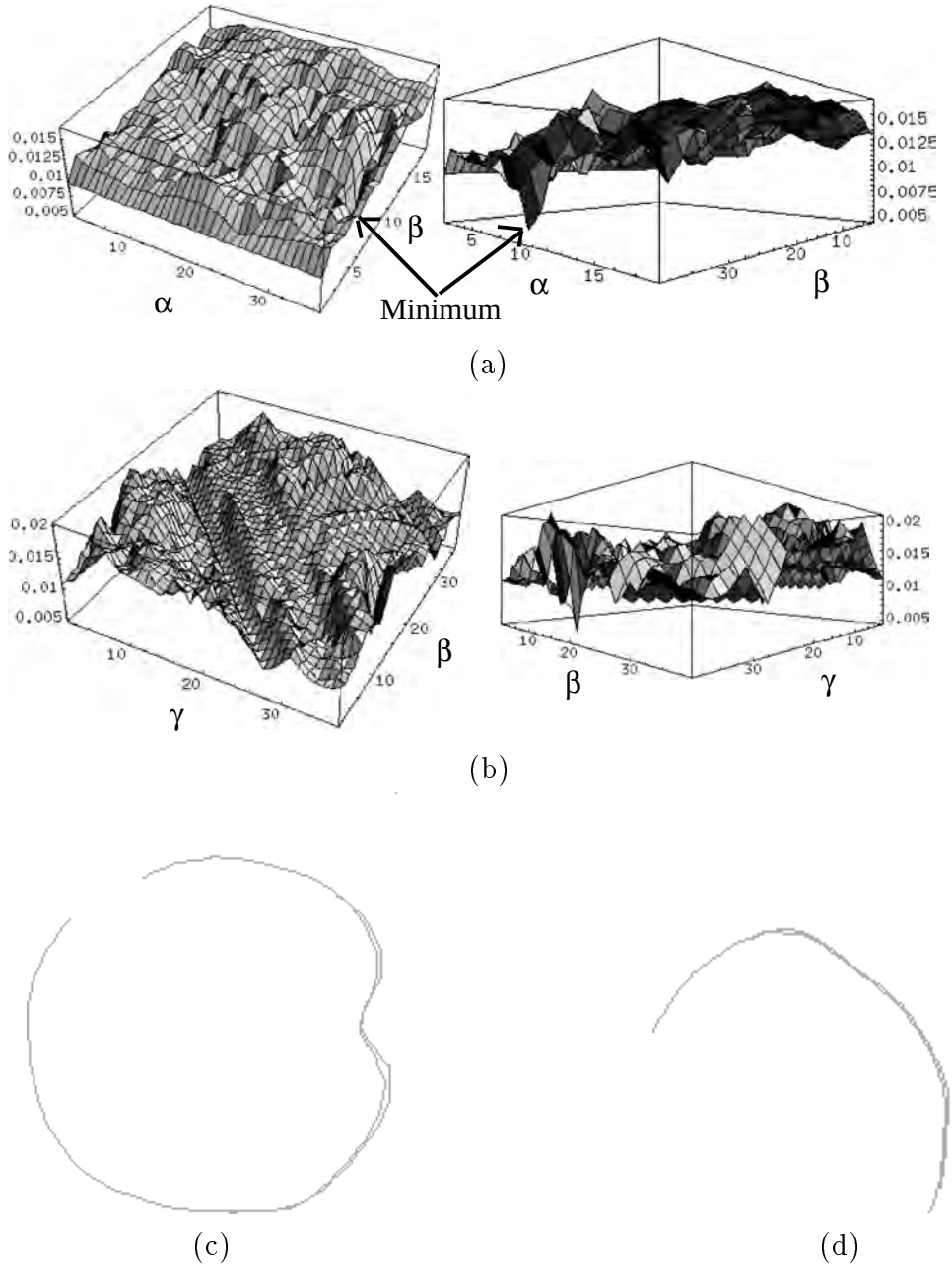


Fig. 6.15: Graphe montrant la distance entre les deux SAIs en fonction des angles α et β (figure (a)) puis β et γ (figure (b)). Coupe horizontale (c) et verticale (d) montrant la superposition des deux maillages après recalage.

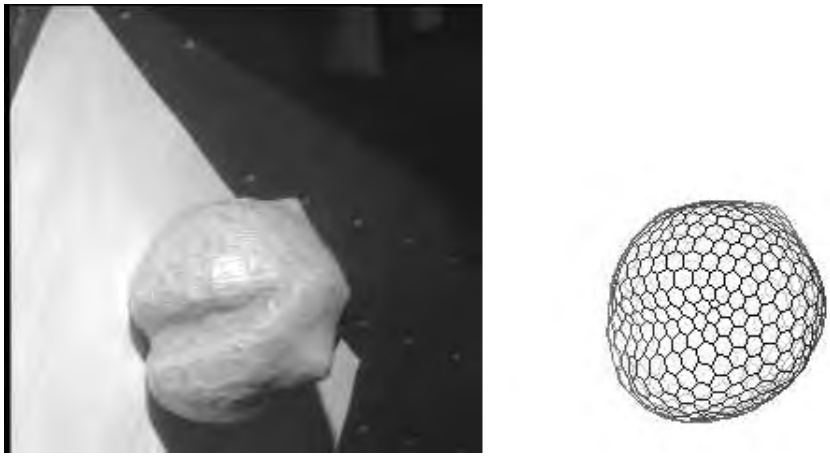
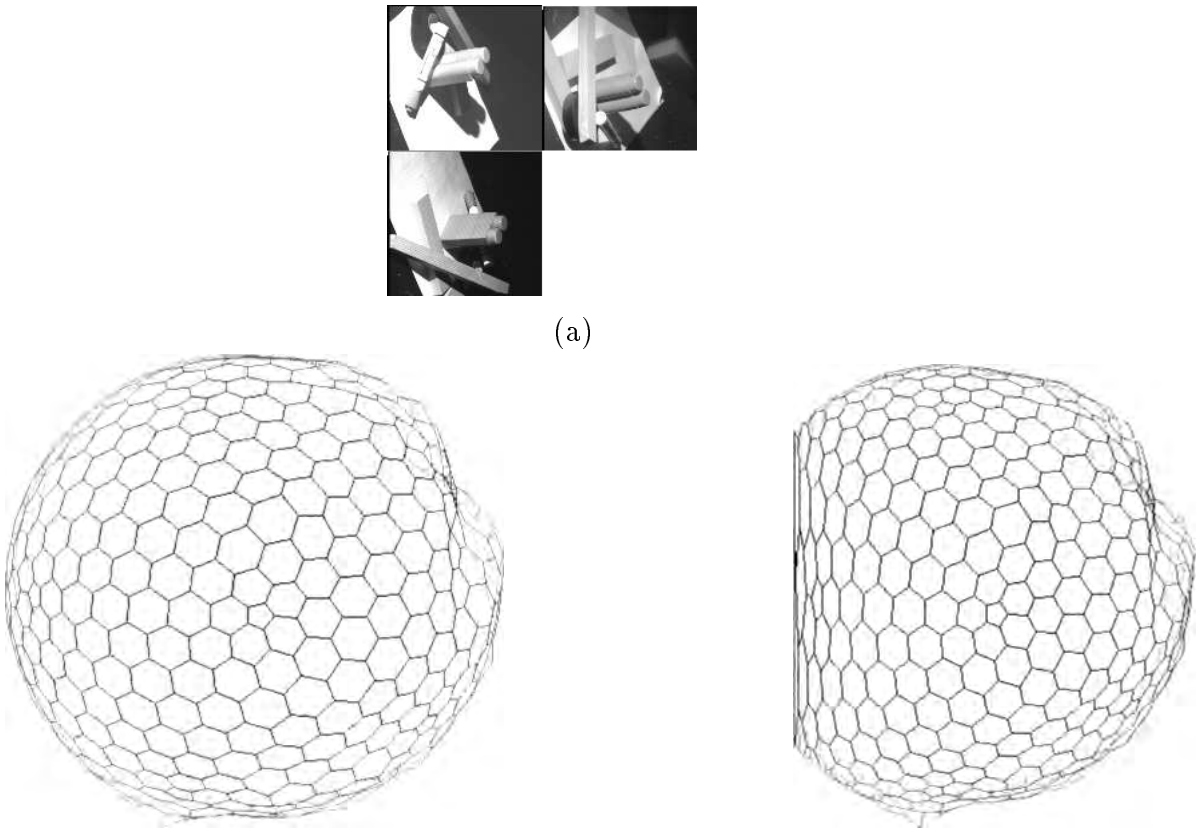


Fig. 6.16: Superposition dans l'image correspondant à l'acquisition partielle de l'objet, du maillage simplexe recalé, correspondant à la l'acquisition complète de l'objet.

6.4.3 Recalage avec un objet occulté

Dans cet exemple, on effectue le recalage d'un objet dans un environnement occulté, à l'aide de la représentation issue d'un système de CAO (voir figure 6.6). La scène où apparaît l'objet est montrée dans la figure 6.17)(a). Le SAI avant et après le changement d'échelle est montré dans la figure 6.17)(b) et (c). La précision du recalage rigide est mise en évidence dans les figures 6.18(a), (b) et (c).

Dans cet exemple comme dans le précédent, l'algorithme de modélisation utilisant les maillages simplexes, est utilisé pour séparer l'objet du reste de la scène. Les sommets du maillage qui sont considérés comme éloignés des points de données sont alors étiquetés comme étant sur la partie occultée du SAI. Le changement d'échelle du SAI a pour effet d'augmenter la densité des sommets de la partie visible de l'objet et d'en diminuer la densité pour la partie occultée. Cette technique permet de correctement recaler des portions de surfaces, même lorsqu'une proportion relativement faible est visible.



(a) (b) (c)

Fig. 6.17: (a) Les trois vues correspondant à la scène. (b) Le SAI extrait du maillage représentant l'objet occulté. (c) Le SAI après changement d'échelle.

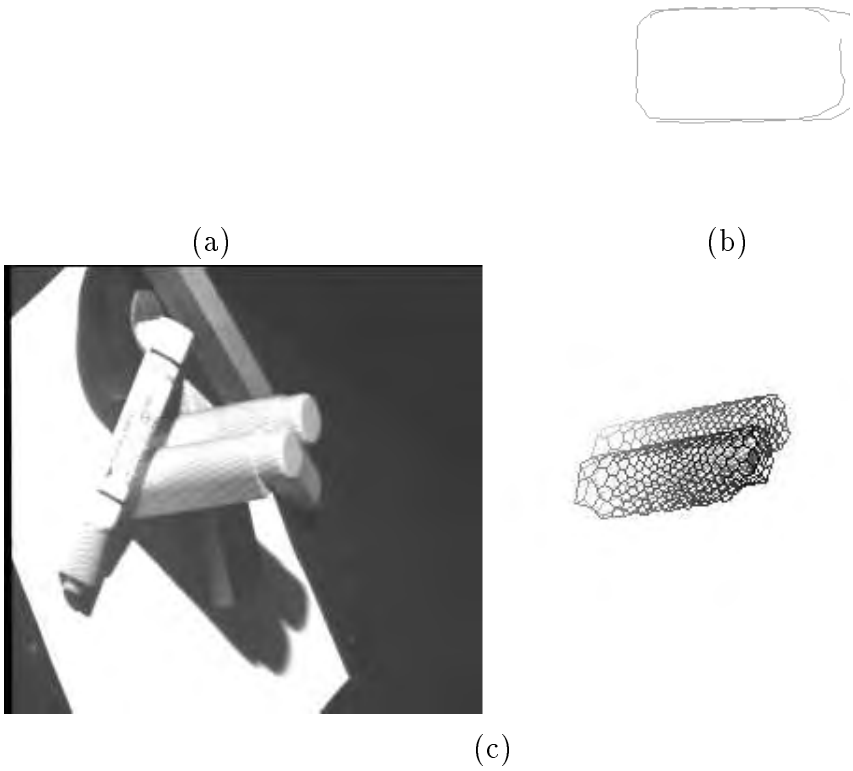


Fig. 6.18: Coupe horizontale (a) et verticale (b) des deux maillages après recalage. (c) Superposition dans la scène occultée du maillage simplexe recalé, extrait à partir du modèle CAO

6.5 Performances de l'algorithme de recalage

La figure 6.19 montre la distribution d'erreur après recalage. Dans ce cas, les maillages et les SAIs de deux vues d'un visage sont construits et mis en correspondance. La figure 6.19(d) montre l'image d'intensité d'une statue représentant un visage. La figure 6.19(e) montre la superposition des deux nuages de points provenant d'un capteur tridimensionnel. La figure 6.19(f) montre ces mêmes nuages de points après mise en correspondance des SAIs et recalage rigide. Afin d'avoir une meilleur compréhension de la distribution de l'erreur après recalage, les figures 6.19(a) (b) et (c) présentent à chaque sommet une ligne normale dont la longueur est proportionnelle à l'erreur. L'erreur est observée sous trois angles différents. L'erreur est calculée comme la distance entre un sommet du maillage et le point de données le plus proche. Ces figures montrent que l'erreur est répartie de manière uniforme le long du maillage. Des valeurs élevées de l'erreur apparaissent aux bords du maillage parce qu'elles correspondent aux endroits où les deux nuages de points ne se recouvrent pas.

Dans la figure 6.20, le modèle complet d'un objet est recalé avec une vue partielle du même objet. Là encore, l'erreur est faible et uniforme le long du maillage. La figure 6.20(d) montre le maillage avec le nuage de points extrait d'une image de profondeur.

	Visage	Objet
Min	0.006	0.0086
Max	2.46	1.11
Moyenne	0.167	0.105
Ecart type	0.215	0.115
Nombre de points	998	869

Tableau 6.1: Statistique effectuée sur l'erreur de recalage sur les exemples de la figure 6.19 et 6.20. Les erreurs sont exprimées en mm.

Pour une évaluation plus quantitative du recalage, la table 6.1 liste le minimum, maximum et moyenne et l'écart-type de l'erreur de recalage aux sommets du maillage. Uniquement les sommets qui appartiennent à la partie visible de l'objet

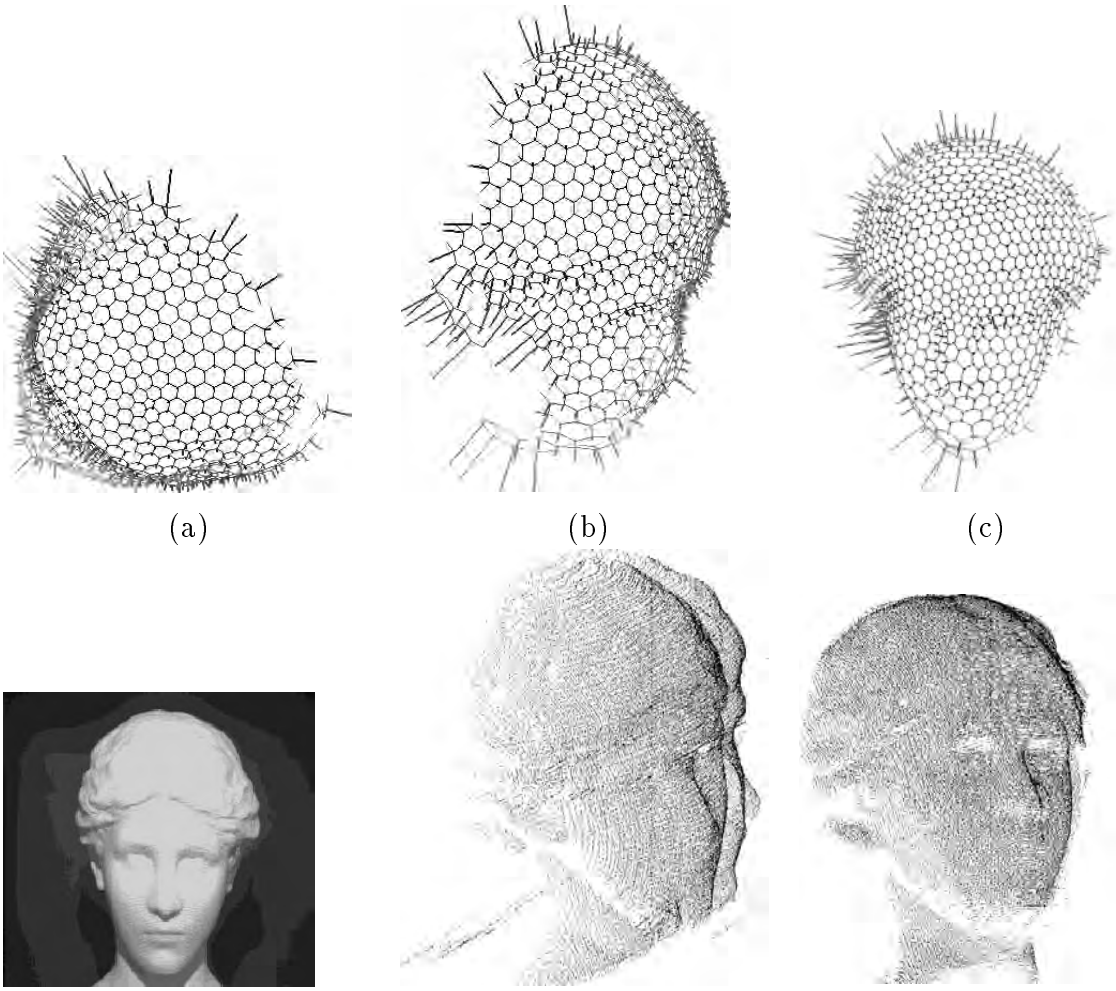


Fig. 6.19: (a) (b) (c) Distribution de l'erreur entre le maillage recalé et le nuage de points. Chaque pic a une longueur proportionnelle à la valeur de l'erreur. (d) Image d'intensité correspondant à une des deux images de profondeur. (e) Les deux nuages de points avant recalage. (f) Les deux nuages de points après recalage.

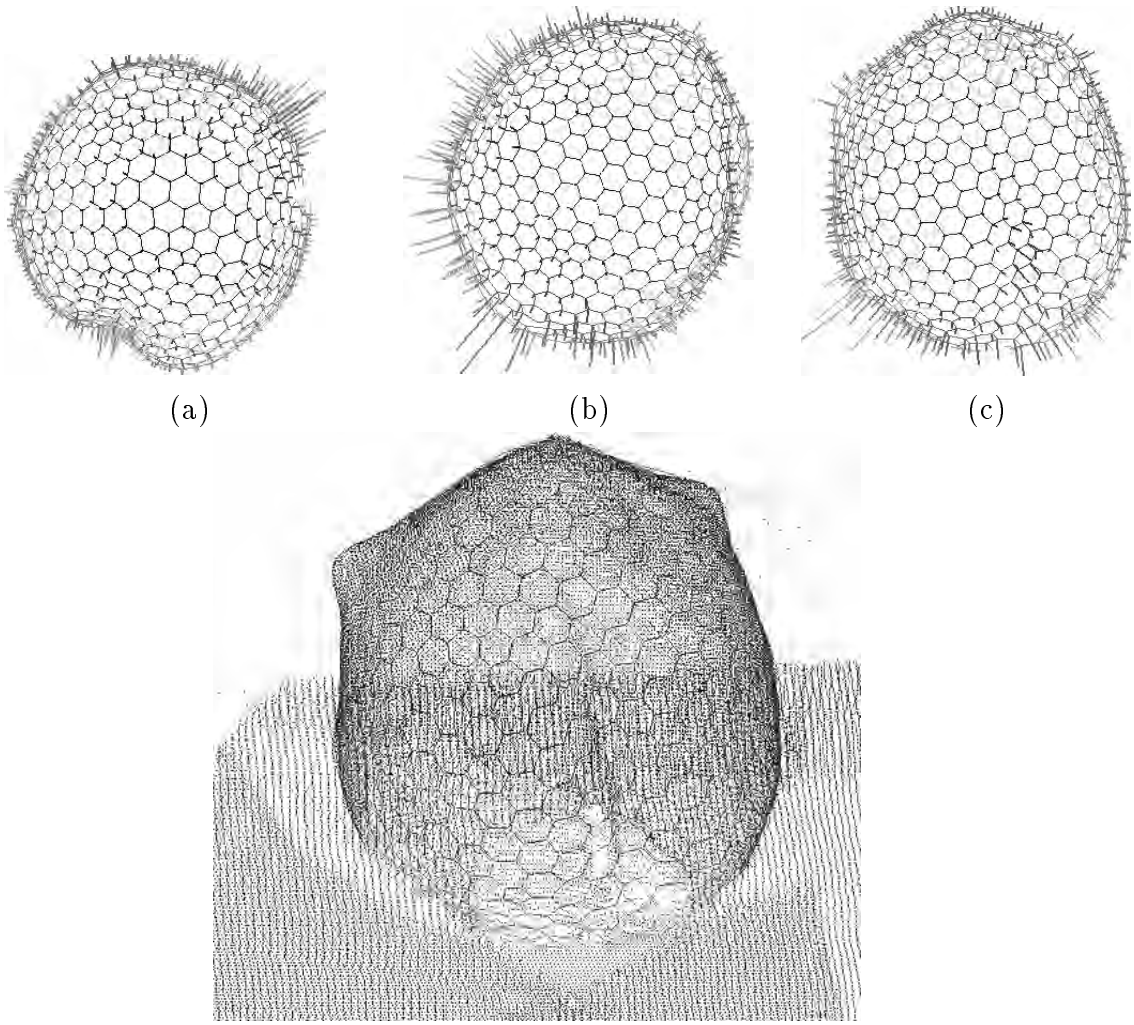


Fig. 6.20: (a) (b) (c) Distribution de l'erreur entre le maillage recalé et le nuage de points. Chaque pic a une longueur proportionnelle à la valeur de l'erreur. (d) Superposition du nuage de points d'une image de profondeur et le maillage simplexe après recalage rigide.

sont utilisés pour la compilation de ces statistiques. Pour le visage, 998 sommets ont été utilisés sur les 1620 existants sur le maillage entier, alors que 869 sur 980 l'ont été pour le second objet. La différence de proportion entre ces deux exemples, s'expliquent par le fait que deux vues partielles ont été utilisées pour le visage alors qu'une vue complète de l'objet est disponible dans le second cas.

Dans les deux exemples, la valeur moyenne de l'erreur est de l'ordre de 0.1 mm ce qui est la résolution maximum des capteurs. L'écart-type est de l'ordre de 0.2 mm, ce qui prouve l'uniformité de l'erreur sur le maillage. Les valeurs maximales de l'erreur apparaissent sur les quelques sommets du maillage situés au bord de l'image de profondeur, là où il n'y a pas de recouvrement entre les deux jeux de données. L'effet est plus important pour le modèle de visage où on utilise deux vues partielles du même objet. Enfin, la valeur minimale de l'erreur est très faible, de l'ordre de 0.01 mm, mais elle n'a pas de signification particulière puisqu'elle correspond à quelques sommets du maillage où il y correspondance parfaite entre la position du sommet et un point de l'image de profondeur.

6.6 Conclusion

Nous avons introduit une nouvelle approche pour reconnaître et recaler des objets non-polyédriques. Nous montrons comment extraire une représentation d'objets utilisant la notion d'angle simplexe, et comment comparer ces représentations pour reconnaître et recaler des objets tridimensionnels.

La représentation par SAI a plusieurs propriétés intéressantes qui la rend particulièrement efficace pour la reconnaissance d'objets tridimensionnels :

- Le SAI est invariant par tranformation rigide et par changement d'échelle. Cette invariance n'est pas vérifiée pour de nombreuses représentations utilisées en vision. Cette invariance autorise la comparaison de la forme de deux maillages sans une mise en correspondance explicite de caractéristiques géométriques et sans le calcul de transformation rigides.

- Le SAI conserve la connexité entre les différentes parties d'un objet : les sommets qui sont voisins sur le maillage le sont également sur le SAI. Par conséquent, le SAI ne présente pas les mêmes problèmes de non-unicité pour les formes non-convexes que les représentations par EGI ou CEGI.

- La représentation par SAI permet de prendre en compte les occultations et les vues partielles d'objets. L'approche consiste à déformer le SAI d'un objet afin que la proportion sur le SAI de la partie visible par rapport à la partie occultée soit la même que sur le maillage simplexe représentant l'objet. Cette approche est justifiée par le fait qu'il y a une conservation de la connexité entre le maillage simplexe et son SAI.

Les résultats prouvent que cette méthode permet de correctement déterminer la transformation rigide entre deux objets, même lorsque l'on ne dispose que d'une vue partielle de l'objet ou bien en présence d'occultations. Cette méthode est bien adaptée aux objets non-polyédriques, particulièrement lorsque la résolution des données ne permet d'extraire de manière fiable des informations de courbure. Enfin la méthode de construction de SAI est suffisamment générale pour utiliser des modèles CAO d'objets.

Plusieurs aspects de l'algorithme doivent être améliorés. Tout d'abord, il est nécessaire de perfectionner la recherche du minimum de distance entre deux SAIs. Bien que le précalcul de rotations entre deux sphères discrétisées ait apporté une amélioration substantielle du temps de calcul, d'autres optimisations sont sans doute possibles. De plus, il serait particulièrement intéressant d'avoir une implémentation parallélisée de cet algorithme, étant donnée la nature intrinsèquement locale des maillages simplexes. Enfin, une extension de cet algorithme à des objets de topologie non sphérique est possible. La figure 6.21 montre les maillages simplexes quasi-réguliers pouvant être utilisés pour reconnaître des objects de topologie plane, cylindrique et torique. Les algorithmes d'extraction de SAI, de mise en correspondance de deux SAIs et de calcul de transformation rigide sont facilement adaptables à ces nouvelles topologies. L'existence de bords peut-être facilement pris en compte en ajoutant la contrainte que chaque bord doit être circulaire (sans contrainte sur le rayon du cercle).

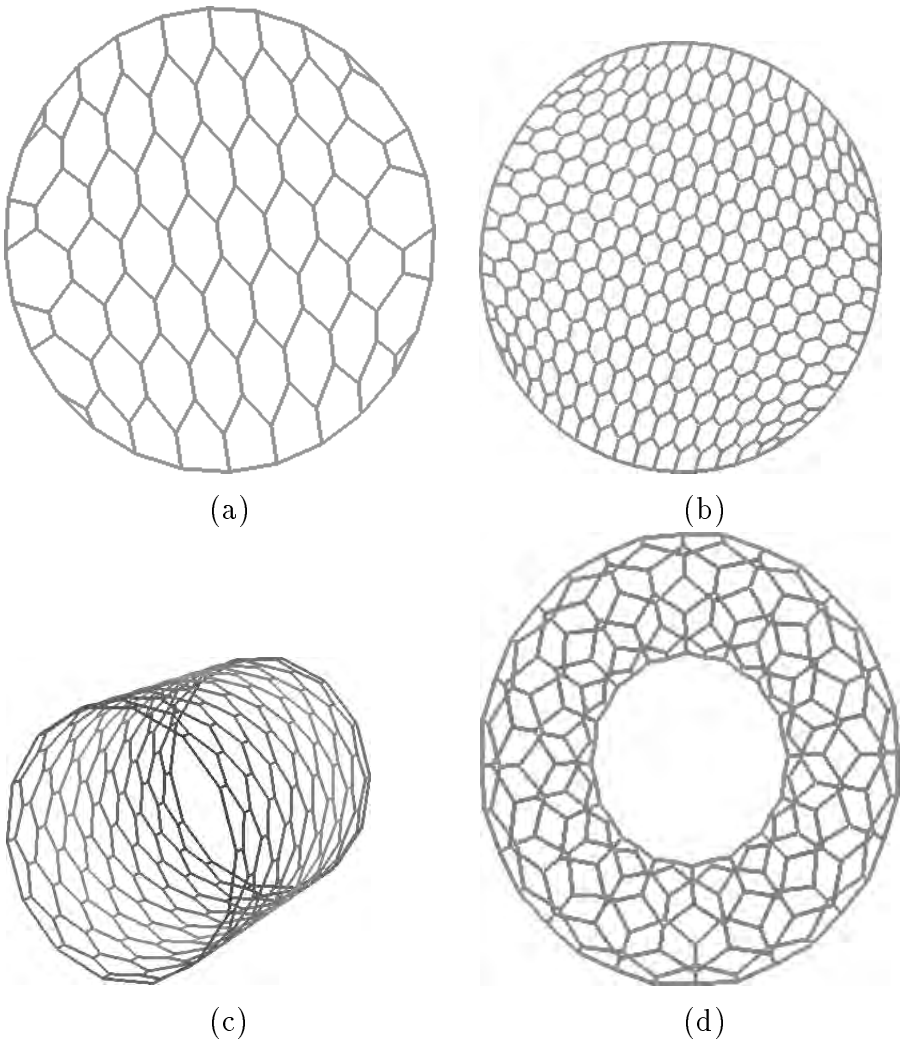


Fig. 6.21: Les modèles simplexes quasi-régulierd de topologie plane (a) (b), cylindrique (c) et torique (d), pouvant être utilisé pour la reconnaissance par SAI

Chapitre 7

Conclusion et Perspectives

Nous avons énoncé dans les chapitres 2, 3 et 4 les propriétés topologiques, géométriques et physiques des maillages simplexes. L'intérêt pratique de tels maillages a été démontré d'une part pour la modélisation de surfaces dans le chapitre 5 et d'autre part pour la reconnaissance d'objets tridimensionnels de forme quelconque, dans le chapitre 6. La flexibilité de ces maillages, leurs comportements physiques ouvrent des perspectives de recherches immenses. Nous citons celles qui sont déjà engagées.

7.1 Segmentation d'images volumiques

Lorsque les images sont peu contrastées, l'extraction d'isosurface est impossible, et il est nécessaire d'utiliser le gradient de l'image pour segmenter un organe ou une structure osseuse. Une première méthode consiste à plonger un modèle déformable dans un champ de potentiel calculé à partir du gradient de l'intensité. C'est

l'approche utilisée par Cohen[CCA92], Mc Inerney[McI93] et Leitner[Lei93]. Une seconde méthode extrait des contours plans dans chaque coupe et reconstruit la surface comme une triangulation s'appuyant sur ces contours (voir les travaux de Geiger et Boissonnat[BG93] et de Kubler *et al*[KG90]). Dans les deux cas, il est impossible de garantir que la topologie de l'objet reconstruit est bien celle de l'organe.

Notre approche est de construire des modèles génériques d'organes à l'aide de maillages simplexes. Ces maillages peuvent alors être déformés par un champ de potentiel créé à partir de l'image de gradient, mais avec une force interne qui contraint le maillage à garder une forme proche de celle qu'il avait initialement. Toute la connaissance a priori sur la topologie et la forme de l'organe à segmenter est inclue dans la mêmoire de forme du maillage simplexe.

La construction de modèles génériques se fait à partir d'images volumiques très contrastées dont on extrait une isosurface. Dans le chapitre 5, nous avons montré comment construire un modèle à partir d'isosurfaces triangulées. Il existe une autre alternative pour la construction de maillages simplexes génériques. Il s'agit de construire un maillage simplexe de structure duale de celle de l'isosurface triangulée, puis de décimer celui-ci suffisamment, pour qu'il ait un nombre raisonnable de sommets (inférieur à 8000). Cette solution a l'avantage de pouvoir traiter des organes de topologie extrêmement complexe, même si elle demande un temps de calcul beaucoup plus conséquent. Cette solution est en cours d'étude.

7.2 Maillages simplexes volumiques

Dans les chapitres 2, 3 et 4, une analyse de la topologie, de la géométrie et de la déformation des k-maillages simplexes a été conduite, indépendamment de la dimension de ces maillages. Les maillages simplexes volumiques ou 3-maillages simplexes sont intéressants à plusieurs titres:

- Ils permettent de modéliser l'interaction entre deux surfaces représentées par deux maillages simplexes surfaciques.
- Ils permettent de modéliser de manière plus réaliste le comportement physique d'organes, par exemple en empêchant le modèle de d'intersecter lui-même ou en simulant la découpe par un scalpel.

Une étude des maillages simplexes volumiques a déjà été menée pour modèliser l'interaction entre deux zones de 2-maillages simplexes. La figure 7.1 montre les deux fonctionnalités des 3-maillages simplexes existants à l'heure actuelle. La donnée de deux zones (un ensemble connexe de faces) suffit pour automatiquement générer un maillage volumique "s'accrochant" aux sommets des deux zones (figure 7.1 (a)). Il est possible de contrôler de nombre de "couches", c'est-à-dire l'épaisseur du maillage volumique. La première fonctionnalité de déformation du maillage consiste à répartir de manière homogène les sommets (figure 7.1 (b)). La seconde fonctionnalité de déformation consiste à modéliser l'élasticité de tissus mous. Les sommets du 3-maillages tirent alors sur les deux 2-maillages auxquels ils sont accrochés (figure 7.1 (c) et (d)).

Cette première maquette nous a permis de simuler l'aspect du visage d'un patient après une opération de chirurgie craniofaciale. La description de cette simulation est publiée dans[DSCP94]. Les différents tissus mous créés entre le crâne et le visage ainsi que l'aspect texturé du patient après l'opération sont montrés dans la figure 7.2.

Ces premiers résultats prouvent l'importance des maillages volumiques pour la simulation réaliste de phénomènes physiques.

Nous travaillons actuellement sur la création de maillages volumiques génériques tels que la sphère, le cylindre ou le parallèlépipède. Le bord d'un 3-maillage simplexe étant un 2-maillage simplexe, nous pensons obtenir un modèle volumique d'organe en déformant son bord de la manière décrite dans le chapitre 5.

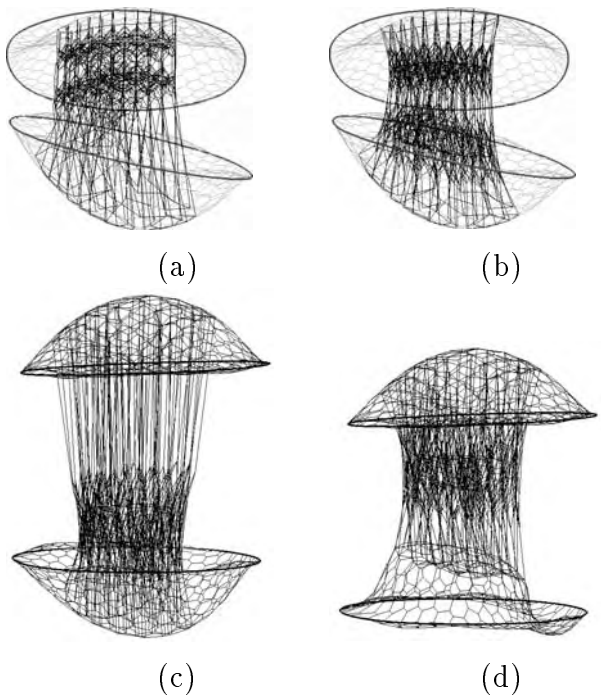
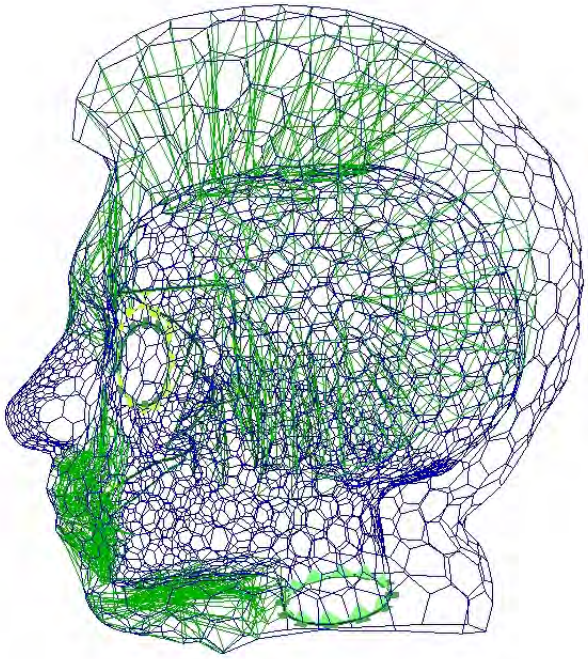
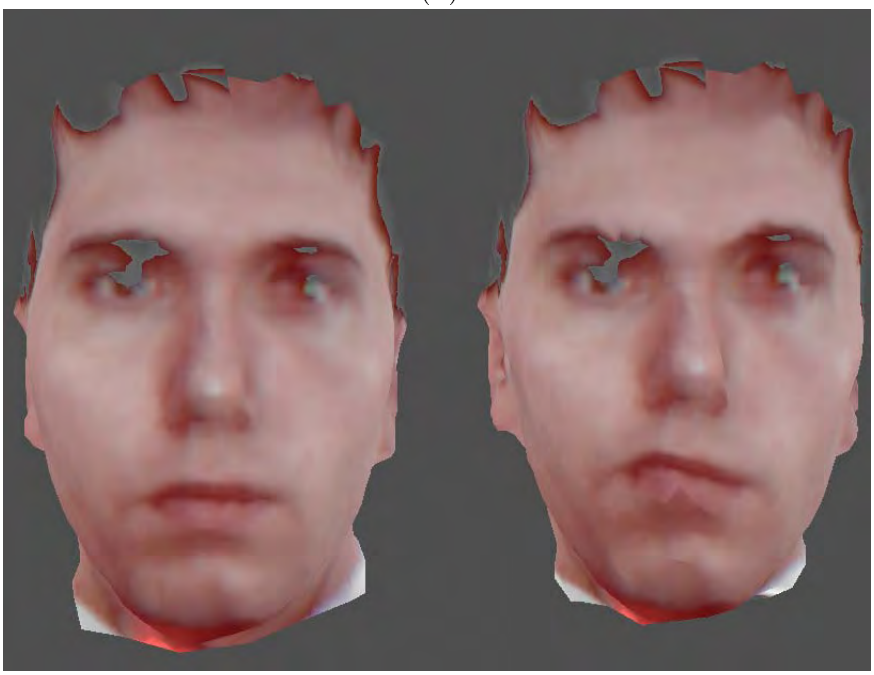


Fig. 7.1: (a) Un maillage simplexe volumique à une couche est construit automatiquement entre deux zones de deux maillages simplexes surfacique. (b) les sommets du maillage volumique sont lissés. (c) Le maillage supérieur est déplacé. La position des sommets du maillage supérieur est alors maintenue fixe. (d) Par réaction, le maillage inférieur par l'intermédiaire du maillage volumique se déforme.



(a)



(b)

Fig. 7.2: (a) Les différents maillages volumiques créés entre le modèle de visage et le modèle de crâne. (b) Visage texturé avant et après la simulation de chirurgie.

Bibliographie

[Ago76] M.K. Agoston. *Algebraic Topology, a first course pure and applied mathematics*. Marcel Dekker Ed., New-York, 1976.

[ANW67] L.H. Ahlberg, E.N. Nilson, and J.L. Walsh. *The theory of splines and their Applications*. Academic Press, New-York and London, 1967.

[Aya93] N. Ayache. *Volume Image Processing : Results and research Challenges*. Technical Report 2050, INRIA, September 1993.

[Bau72] B.G. Baumgart. *Winged-Edge Polyhedron Representation*. Technical Report STAN-CS-320, Stanford Artificial Intelligence Laboratoty, Stanford-University, 1972.

[BAZ93] R. Blake A., Curwen and Zisserman. Affine-invariant contour tracking with automatic control of spatiotemporal scale. In *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 66–75, Berlin, 1993.

[BB92] R.M. Bobick and R.C. Bolles. The representation space paradigm of concurrent evolving object descriptions. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):146, 1992.

[BCA94a] E. Bardinet, L. Cohen, and N. Ayache. Fitting of iso-surfaces using superquadrics and free-form deformations. In *Workshop on Biomedical*

Imaging Analysis, Seattle, June 1994.

[BCA94b] S. Benayoun, I. Cohen, and N. Ayache. Adaptive meshes and nonrigid motion computation. In *12th Inter. Conference on Pattern Recognition*, Jerusalem, October 1994.

[BDB65] G. Birkhoff and C. De Boor. Piecewise polynomial interpolation and approximation. In H.L. Garabedian, editor, *Approximation of Functions*, pages 164–190, 1965.

[BE91] M. Bern and D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. In D. Du and F. Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, pages 23–90, World Scientific Publishing Co, 1991.

[Ber91] M-O. Berger. *Les Contours Actifs : Modelisation, Comportement et Convergence*. Ph.D. dissertation, Institut Polytechnique de Lorraine, January 1991.

[BG93] J.D. Boissonnat and B. Geiger. Three dimensional reconstruction of complex shapes based on the delaunay triangulation. In R.S. Acharya and D.B. Goldgof, editors, *SPIE Conference on Biomedical Image Processing and Biomedical Visualization*, San Jose, CA, February 1993.

[BH83] M. Brady and B.K.P. Horn. Rotationally symmetric operators for surface interpolation. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 70–94, 1983.

[BJ86] P.J. Besl and R. Jain. Segmentation through symbolic surface descriptions. *Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'86)*, 77–85, 1986.

[BK86] T.E. Boult and J.R. Kender. Visual surface reconstruction using sparse depth data. In *Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'86)*, pages 68–76, 1986.

[BM92] P. J. Besl and N.D. McKay. A method for registration of 3-d shapes. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):239–256, February 1992.

[Boi83] J.D. Boissonnat. *Geometrie Algorithmique des solides*. Ph.D. dissertation, INRIA, 1983.

[Boi84] JD. Boissonnat. Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Transactions in Graphics*, 1984.

[Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 27:321–345, 1984.

[Bor93] V. Borrelli. *Courbures Discretes.* Master's thesis, Universite Claude Bernard- Lyon 1, 1993.

[Bro81] R. Brooks. Symbolic reasoning among 3d models and 2d images. *Artificial Intelligence Journal*, 17:285–348, 1981.

[Bro92] L.G. Brown. A survey of image registration techniques. *ACM Computing Surveys*, 24(4):325–376, December 1992.

[BS85] I.N. Bronshtein and K.A. Semendyayev. *Handbook of Mathematics.* Van Nostrand Reinhold Company, 1985.

[BT83] H.G. Barsky and J.M. Tenenbaum. Local control of bias and tension in beta-splines. *ACM Trans. on Graphics*, 109–134, 1983.

[BTT87] M. Bertero, Poggio T., and V. Torre. *Ill-Posed Problems in early vision.* Technical Report A.I. Memo 924, M.I.T., A.I. Laboratory, May 1987.

[BV91] R.M. Bolle and Baba C. Vemuri. On three dimensional surface reconstruction methods. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(1):1–13, January 1991.

[BZ85] A. Blake and A. Zisserman. *Using Weak Continuity Constraints.* Technical Report CSR-186-85, Dept of Computer Science, Edingburgh University, 1985.

[BZ87] A. Blake and A. Zisserman. *Visual Reconstruction.* MIT Press, 1987.

[Can86] J. Canny. A computational approach to edge detection. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:679–698, November 1986.

[Car76] M.P. Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, 1976.

[CC90] L. Cohen and I. Cohen. A finite element method applied to new active contour models and 3d reconstruction from cross sections. In *International Conference on Computer Vision (ICCV'90)*, pages 587–591, Osaka, Japan, December 1990.

[CCA92] I. Cohen, L.D. Cohen, and N. Ayache. Using deformable surfaces to segment 3-d images and infer differential structures. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 242–263, 1992.

[Che73] B.Y. Chen. On a variational problem of hypersurfaces. *Journal of London Mathematical Society,*, 2(6):321–325, 1973.

[Coh91] L. Cohen. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):21–218, March 1991.

[Coh92] I. Cohen. *Modeles Deformables 2D et 3D : Application a la segmentation d'images medicales.* Ph.D. dissertation, Universite Paris IX Dauphine, June 1992.

[Cou50] R. Courant. *Dirichlet's Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces.* Interscience, 1950.

[Cox73] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes.* Dover Publications, 1973.

[CS93] X. Chen and F. Schmitt. Vision-based construction of cad models from range images. In *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 129–136, 1993.

[Dan80] P.E. Danielsson. Euclidean distance mapping. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 14:227–248, 1980.

[Del94a] H. Delingette. *Simplex Meshes: a General Representation for 3D Shape Reconstruction.* Technical Report 2214, INRIA, March 1994.

[Del94b] H. Delingette. Simplex meshes: a general representation for 3d shape reconstruction. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'94)*, Seattle, USA, June 1994.

[Del94c] H. Delingette. Intrinsic stabilizers of planar curves. In *3rd European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, Stockholm, Sweden, May 1994.

[Der87] R. Deriche. Using canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, 167–187, 1987.

[DHI91a] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Energy functions for regularization algorithm. In *Proc. SPIE., Geometric Methods in Computer Vision, Vol. 1570*, pages 104–115, 1991.

[DHI91b] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces. In *IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR91)*, pages 467–472, June 1991.

[DHI91c] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Trajectory generation with curvature constraints based energy minimization. In *Int. Conf. on Intelligent Robotics and*, Osaka, 1991.

[DHI92a] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces. *Journal of Image and Vision Computing*, 10(3):132–144, April 1992.

[DHI92b] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. *Representation and Recognition of Free-Form Surfaces.* Technical Report CMU-CS-92-214, Carnegie Mellon University, 1992.

[DHI93] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. A spherical representation for the recognition of curved objects. In *Proc. of the International Conference on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 103–112, 1993.

[DHI94] H. Delingette, M. Hebert, and K. Ikeuchi. Shape representation and image segmentation using deformable surfaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1994. To appear, accepted as publication.

[DSCP94] H. Delingette, G. Subsol, S. Cotin, and J. Pignon. *A Craniofacial Surgery Testbed.* Technical Report 2199, I.N.R.I.A., Sophia-Antipolis, France, February 1994.

[Duc77] J. Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in sobolev spaces. In *Constructive Theory of Functions of several Variables*, pages 85–100, 1977.

[DWS93] H. Delingette, Y. Watanabe, and Y. Suenaga. Simplex based animation. In *Models and Techniques in Computer Animation (Computer Animation'93)*, 1993.

[FA94] J. Feldmar and N. Ayache. Rigid and affine registration of smooth surfaces using differential properties. In *3rd European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, Stockholm, May 1994.

[Far89] G. Farin. *Curves and Surfaces for Computed Aided Geometric Design.* Academic Press, 1989.

[FF91] W. Frey and D.A. Field. Mesh relaxation: a new technique for improving triangulations. *Int. Jour. Numeric. Meth. Eng.*, 31:1121–1133, 1991.

[FH86] O. Faugeras and M. Hebert. The representation, recognition and locating of 3d objects. *The International Journal of Robotics Research*, 5(3):27–52, 1986.

[FL88] P. Fua and Y. Leclerc. Model driven edge detection. In *DARPA Image Understanding Workshop*, 1988.

[FLW89] F.P. Ferrie, L. Lagarde, and P. Whaite. Darboux frames, snakes and super-quaddics: Geometry from the bottom-up. In IEEE Computer Society, editor, *IEEE Workshop on Interpretation of 3D Scene*, pages 170–176, 1989.

[FMZC92] D.A. Forsyth, J.L. Mundy, A. Zisserman, C. Coelho, A. Heller, and C. Rothwell. Invariant descriptors for 3d object recognition and pose. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13:971–992for, October 1992.

[For88] D.R. Forsey. Hierarchical b-spline refinement. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'88)*, pages 309–317, 1988.

[GA93] A. Gourdon and N. Ayache. *Registration of a curve on a surface using differential properties.* Technical Report 2145, INRIA, December 1993.

[GG84] S. Geman and D. Geman. Stochastic relaxation gibbs distribution and the bayesian restoration of images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 721–741, 1984.

[GJP93] F. Girosi, M. Jones, and T. Poggio. *Priors, Stabilizers and Basis Functions: from regularization to radial, tensor and additive splines.* Technical Report, M.I.T., A.I. Laboratory, 1993.

[GL93] M. Gokmen and C. Li. Edge detection using refined regularization. In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1993.

[GLP87] W.E. Grimson and T. Lozano-Perez. Localizing overlapping parts by searching the interpretation tree. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 4:469–482, September 1987.

[Gri81] W.E.L. Grimson. *From Images to Surfaces: A Computational Study of the Human Early Visual System.* M.I.T. Press, 1981.

[Gue93] A. Gueziec. Large deformable splines, crest lines and matching. In *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 650–657, 1993.

[HDDM93] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle. Mesh optimization. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'93)*, pages 19–26, 1993.

[HG92] W.C. Huang and D.B. Goldgof. Adaptive-size physically-based models for nonrigid motion. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'92)*, pages 833–835, June 1992.

[HG93] W. Huang and D. Goldgof. Adaptive-size meshes for rigid and nonrigid shape analysis and synthesis. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(6):611–616, June 1993.

[Hil44] D. Hilbert. *Geometry and the Imagination.* Dover, 1944.

[HL88] K. Ho-Le. Finite element mesh generation methods: A review and classification. *Computer Aided Design*, 20(1):27–38, 1988.

[Hor83] B.K.P. Horn. The curve of least energy. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 1983.

[Hor84] B.K.P. Horn. Extended gaussian images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 72(12):1671–1686, December 1984.

[Hor87] B.K.P. Horn. Closed form solutions of absolute orientation using unit quaternions. *Journal of Optical Society of America*, A-4(4):629–642, April 1987.

[HW86] B.K.P. Horn and E.J. Weldon. Filtering closed curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8:665–668, 1986.

[IH81] K Ikeuchi and B.K.P. Horn. Numerical shape from shading and occluding boundaries. *Artificial Intelligence*, 141–184, 1981.

[IH91] K. Ikeuchi and K.S. Hong. Determining linear shape change: Toward automatic generation of object recognition program. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 53(2):154–170, March 1991.

[Ike81] K. Ikeuchi. Recognition of 3d objects using the extended gaussian image. In *Proc. of the Seventh IJCAI*, pages 595–600, 1981.

[KG90] O. Kubler and G. Gerig. *Segmentation and analysis of multidimensional data sets in medecine*, pages 63–81. Volume F60, Springer Verlag, 1990.

[KHI93] Martial Hebert K. Higuchi and K. Ikeuchi. *Combining Shape and Color Information for 3D Object Recognition.* Technical Report CMU-CS-93-215, Carnegie Mellon University, December 1993.

[KI93] S.B. Kang and K. Ikeuchi. A new representation for 3d pose determination. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 15(7):707–721, July 1993.

[Koe90] Jan J. Koenderink. *Solid Shape.* MIT Press, 1990.

[KWT88] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos. Snakes: Active contour models. *International Journal of Computer Vision*, 1:321–331, 1988.

[Lag15] J. Lagrange. *Mécanique analytique.* Volume 2 volumes, Van Nostrand Reinhold Company, Paris, 1811-1815.

[LC87] W. Lorensen and H.E. Cline. Marching cubes: a high resolution 3d surface construction algorithm. *ACM Computer Graphics (SIGGRAPH'87)*, 21:163–169, 1987.

[LC91] F. Leitner and P. Cinquin. Complex topology 3d objects segmentation. In *SPIE Conf. on Advances in Intelligent Robotics Systems*, Boston, November 1991.

[Lei93] F. Leitner. *Segmentation Dynamique d'images tridimensionnelles.* Ph.D. dissertation, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France, September 1993.

[Low87] D.G. Lowe. Three-dimensional object recognition from single two-dimensional images. *Journal of Artificial Intelligence*, 31:335–395, 1987.

[Low88] D.G. Lowe. Organization of smooth image curves at multiple scales. In *Proc. of the Second Int. Conf. on Computer Vision*, pages 558–567, Tampa, Florida, 1988.

[Mar82] D. Marr. *Vision.* Freeman, 1982.

[McI93] D. McInerney, T. Terzopoulos. A finite element model for 3d shape reconstruction and nonrigid motion tracking. In *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 518–523, 1993.

[Meh74] E. Mehlum. Nonlinear splines. In *Computer Geometric Aided Design*, 1974.

[MFvR94] G. Malandain, S. Fernandez-vidal, and J.M. Rocchisiani. Improving registration of 3d medical images using a mechanical based method. In *Third European Conference on Computer Vision (ECCV'94)*, pages 131–136, Stockholm, Sweden, May 2-6, 1994.

[MM92] F. Mokhtarian and K. Mackworth. A theory of multiscale, curvature-based shape representation for planar curves. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):789–804, August 1992.

[MN78] D. Marr and H.K. Nishihara. Representation and recognition of the spatial organization of three dimensional structure. In *Proc. of the Royal Society London B*, pages 269–294, 1978.

[MN90] W.R. Madych and S.A Nelson. Multivariate interpolation and conditionally positive definite functions. *Mathematics of Computation*, 211–230, 1990.

[MSMM90] S. Menet, P. Saint-Marc, and G. Medioni. Active contour models: Overview, implementation and applications. *System, Man and Cybernetic*, 194–199, 1990.

[MT91] D. Metaxas and D. Terzopoulos. Constrained deformable superquadrics and nonrigid motion tracking. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'91)*, pages 337–343, Maui, Hawai, June 1991.

[NA93] C. Nastar and N. Ayache. Fast segmentation, tracking and analysis of deformable objects. In *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'93)*, pages 275–279, May 1993.

[Oli93] J. Oliensis. Local reproducible smoothing without shrinkage. In *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, pages 307–312, March 1993.

[Oss69] R. Osserman. *Survey of Minimal Surfaces.* Van Nostrand Reinhold, 1969.

[PS90] F. P. Preparata and M. I. Shamos. *Computational Geometry: an introduction Texts and monographs in computer science.* Springer-Verlag, 1990.

[PT84] T. Poggio and V. Torre. Ill-posed problems and regularization analysis in early vision. In *IUS Workshop*, pages 257–263, 1984.

[PVY85] T. Poggio, H. Voorhees, and A. Yuille. *A Regularized Solution to Edge Detection.* Technical Report, M.I.T., A.I. Laboratory, 1985.

[RC88] M. Rioux and L. Cournoyer. *The NRCC three-dimensional Image data files.* Technical Report NRCC 29077, National Research Council of Canada, Ottawa, Canada, 1988.

[Ron92] R. Ronfard. *Local region-based principles and heuristics for active contours modeling.* Technical Report 92 D 006, Telecom Paris, Departement Image, March 1992.

[Rou93] N. Rougon. *Elements pour la Reconnaissance de formes tridimensionnelles deformables : application a l'imagerie biomedicale.* Ph.D. dissertation, Ecole Nationale Superieure des Telecommunications, Paris, France, February 1993.

[Rus91] P. Rushenas. *Etude et Implantation d'un systeme de modelisation geometrique multidimensionnelle pour la conception assistee par ordinateur.* Ph.D. dissertation, Universite de Montpellier II, July 1991.

[SBD86] F. Schmitt, B. Barsky, and W. Du. An adaptive subdivision method for surface-fitting from sampled data. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'86)*, pages 179–188, August 1986.

[Sch66] D.G. Schweikert. An interpolation curve using a spline in tension. *Journal of Math. Phys.*, 312–317, 1966.

[SDY89] BU-Qing Su and Liu Dingy-Yuan. *Computational Geometry- Curve and Surface Modeling.* Academic Press, Inc., 1989.

[SI87] K. Sato and S. Inokuchi. Range-imaging system utilizing nematic liquid crystal mask. In *International Conference on Computer Vision (ICCV'87)*, pages 657–661, 1987.

[SL93] R. Szeliski and S. Lavallee. Matching 3-d anatomical surfaces with non-rigid deformations using octree-splines. In *SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision II*, pages 306–315, SPIE, 1993.

[SM92] F. Stein and G. Medioni. Structural indexing: Efficient 3d object recognition. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(2):125, 1992.

[ST89] R. Szeliski and D. Terzopoulos. From splines to fractals. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'89)*, pages 51–60, July 1989.

[SW91] Y. Suenaga and Y. Watanabe. A method for the synchronized acquisition of cylindrical range and color data. *IEICE Transactions*, E 74(10):3407–3416, October 1991.

[SW92] E.M. Stokely and S. You Wu. Surface parameterization and curvature measurement of arbitrary 3-d objects: Five practical methods. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8):833–840, August 1992.

[Sze87] R. Szeliski. *Uncertainty in Low Level Representations.* Ph.D. dissertation, Carnegie Mellon University, 1987.

[TA87] A.N. Tikhonov and V.A. Arsenin. *Solutions of Ill-Posed Problems.* Winston, 1987.

[TCSP92] G. Taubin, F. Cukierman, S. Sullivan, J. Ponce, and D.J. Kriegman. Parameterizing and fitting bounded algebraic curves and surfaces. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'92)*, 1992.

[Ter84] D. Terzopoulos. *Multiresolution Computation of Visible-Surface Representation.* Ph.D. dissertation, MIT, Cambridge, MA, USA, 1984.

[TG92] J.P. Thirion and A. Gourdon. *The 3D Marching Lines Algorithm and its application to crest lines extraction.* Technical Report 1672, I.N.R.I.A., May 1992.

[Thi93a] J.P. Thirion. *New Feature Points based on geometric invariants for 3D Image Registration.* Research Report 1901, INRIA, Mai 1993. To appear in ECCV'94.

[Thi93b] J.P. Thirion. *The Extremal Mesh and the Understanding of 3D Surfaces.* Technical Report 2149, I.N.R.I.A., December 1993.

[TK93] H. Tanaka and F. Kishino. Adaptive mesh generation for surface reconstruction. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'93)*, pages 88–94, New-York, June 1993.

[Tur92] G. Turk. Re-tiling polygonal surfaces. *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, 26(2):55–64, July 1992.

[TV91] D. Terzopoulos and M. Vasilescu. Sampling and reconstruction with adaptive meshes. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'91)*, pages 70–74, June 1991.

[TWK87] D. Terzopoulos, A. Witkin, and M. Kass. Symmetry-seeking models for 3d object reconstruction. *International Journal of Computer Vision*, 1(3):211–221, 1987.

[VT92] M. Vasilescu and D. Terzopoulos. Adaptative meshes and shells. In *Proc. of Int. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR'92)*, pages 829–832, 1992.

[Wei90] I. Weiss. Shape reconstruction on a varying mesh. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(4):345–362, 1990.

[Whi93] G. Whitten. Scale space tracking and deformable sheet models for computational vision. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 697–706, 1993.

[Wil75] R.J. Wilson. *Introduction to Graph Theory.* Longman Group Ltd, 1975.

[Wit83] A. Witkin. Scale-space filtering. In *Proc. Int. Joint Conf. Artificial Intelligence*, 1983.

[WW92] W. Welch and A. Witkin. Variational surface modeling. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'92)*, pages 157–166, July 1992.

[Zha93] Z. Zhang. *Le probleme de la mise en correspondance : l'etat de l'art.* Technical Report 2146, I.N.R.I.A., December 1993.

[Zha94] Z. Zhang. Iterative point matching for registration of free-form curves and surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 1994.