



HAL
open science

Matière noire et rayons cosmiques galactiques

Richard Taillet

► **To cite this version:**

Richard Taillet. Matière noire et rayons cosmiques galactiques. Cosmologie et astrophysique extragalactique [astro-ph.CO]. Université de Savoie, 2010. tel-00633127

HAL Id: tel-00633127

<https://theses.hal.science/tel-00633127>

Submitted on 17 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Matière noire et rayons cosmiques galactiques

Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches
présenté à l'université de Savoie par

Richard Taillet

soutenu le 8 décembre 2010 devant la commission d'examen :

E. Vangioni

J. Silk *rapporteur*

P. Salati

J. Orloff *rapporteur*

A. Bottino *rapporteur*



université de Savoie
Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique



Avant-propos

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches vise à exposer plusieurs facettes de mon travail de recherche, depuis mon arrivée en thèse au laboratoire de physique théorique d'Annecy-le-Vieux (alors appelé ENS-LAPP, aujourd'hui LAPTH) sous la direction de Pierre Salati. Ce travail de rédaction m'a fourni l'opportunité de rassembler et de réécrire plusieurs notes relatives à la matière noire, le sujet au cœur de mon travail. Au cours de ces années, j'ai eu le plaisir de rédiger des documents de vulgarisation, de donner des conférences destinées au grand public, d'interagir avec des journalistes scientifiques sur ce sujet, et il m'a semblé opportun et intéressant de prolonger ici ce travail. Je crois profondément qu'une des missions de la recherche est de faire partager notre travail et de le présenter au grand public, qu'il s'agisse de résultats, de motivations ou de la méthode scientifique elle-même. Le but de cette activité n'est pas que les non scientifiques comprennent parfaitement et sans ambiguïté les subtilités des résultats obtenus par les scientifiques : ceci me semble impossible, certains d'entre eux n'étant pas transcritibles de manière fidèle dans le langage courant. Toutefois, j'ai la chance de travailler dans un domaine qui se prête assez facilement à des échanges, à une forme de partage, avec le grand public. Le [chapitre 1](#) propose une présentation assez générale du problème de la matière noire qui, sans vouloir relever de la vulgarisation, tente de rester compréhensible pour les personnes non familières avec le domaine. J'ai fait ce choix car j'estime que diriger le travail de thèse d'un étudiant, c'est d'une part pouvoir le guider sur des points très techniques et pointus, mais c'est aussi de pouvoir l'aider à situer son travail dans un contexte plus général.

La suite du document est ciblée sur mon travail de recherche proprement dit, avec le but de présenter de manière synthétique les tenants et les aboutissants des différents travaux reproduits à la fin de ce document. Je n'ai pas cherché à paraphraser les articles et la plupart des détails techniques seront à aller chercher dans les articles eux-mêmes. Le symbole `REF` présent dans la marge au niveau de chaque section indique la référence des articles concernés. Leur liste se trouve à la fin du document, et certains des articles eux-mêmes sont joints en annexe.

Le [chapitre 2](#) présente les bases de la partie de mon travail consacrée aux rayons cosmiques galactiques de moyenne énergie. J'ai voulu y présenter les choses que j'ai apprises ou comprises en explorant ce domaine, en collaborant et en discutant avec plusieurs collègues, et certains y reconnaîtront probablement des bribes de discussions enflammées (mais amicales !). Ce chapitre permet d'aborder la lecture des articles sans s'attarder sur les parties de présentation générale du problème et du contexte.

Le [chapitre 3](#) présente une synthèse de mes travaux de ces dernières années, dont le fil directeur est l'étude de l'importance des structures galactiques dans la détermination des propriétés locales des flux de rayons cosmiques. En particulier, la structure spatiale des sources de rayonnement cosmique, qu'il s'agisse des sources standard ou exotiques, affecte les flux de certaines espèces d'une manière qu'il convient de modéliser proprement, si l'on veut espérer faire la moindre prédiction théorique ou la moindre comparaison avec des données expérimentales.

Je n'ai pas cherché à exposer tout mon travail de recherche dans ce document. Dans un souci de cohérence thématique, j'ai notamment délibérément passé sous silence le travail effectué au LPNHE au sein du groupe de cosmologie expérimentale étudiant les supernovae, pendant deux années formidables passées en délégation CNRS dans ce laboratoire.

Le [chapitre 4](#) présente mon travail d'enseignant de façon brève, ce qui ne reflète nullement un manque d'intérêt pour cette activité, comme pourront en témoigner mes collègues, ainsi que mes étudiants, du moins je l'espère !

Table des matières

Avant-propos	3
Matière noire	7
1. Histoire	8
2. Aujourd'hui	11
2.1 Les amas de galaxies	11
2.2 Cosmologie.....	15
2.3 Les galaxies.....	16
3. Candidats	17
3.1 Les objets astrophysiques	17
3.2 Les candidats de la physique des particules.....	18
3.3 Les modifications des lois de la gravitation	22
4. Astrophysique des particules	26
5. Détection	26
5.1 Détection directe.....	26
5.2 Une quête ingrate	27
5.3 Faux positifs.....	28
Rayons cosmiques	31
1. Signaux et fonds	32
2. Propagation	33
2.1 L'approximation diffusive	33
2.2 L'équation de diffusion complète	33
2.3 Complémentarité des espèces	39
2.4 Résolution semi-analytique	40
2.5 Usine.....	40
2.6 Grammage	42
3. Noyaux cosmiques	44
3.1 Les différentes espèces.....	44
3.2 Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC).....	45
3.3 À propos des « prédictions du modèle de diffusion »	47
3.4 Les espèces radioactives.....	47
4. Antiprotons	49
4.1 Composante standard	49
4.2 Composante exotique : matière noire	51
4.3 Composante exotique : trous noirs primordiaux.....	52
4.4 Antinoyaux.....	53
5. Positons	54
5.1 Composante standard	54
5.2 Composante exotique : matière noire	56
6. Origine spatiale	56
6.1 Méthode	56
6.2 Cartes de probabilité de provenance.....	58
6.3 Contribution exotique : distribution en volume	58

Structures	59
1. Bulle locale	60
2. Anneau moléculaire	62
3. Sources discrètes	63
3.1 Sources standard	63
3.2 Sources exotiques	65
4. Grumeaux	65
5. Variance et boost	66
5.1 Augmentation du signal et facteurs de boost	66
5.2 Variance du signal	70
5.3 Probabilité d'un grumeau très proche.....	70
5.4 Mini-spikes.....	71
6. Anisotropies	72
6.1 Généralités.....	72
6.2 Sources continues	72
6.3 Sources discrètes	73
7. Prospective	74
Enseignement	75
1. Cours	76
1.1 Cours, TD et TP à l'université de Savoie	76
1.2 Cours à l'ENS de Lyon.....	77
1.3 Cours doctoraux et post-doctoraux	77
1.4 Cours à la formation TETRAS (L3 pro).....	77
1.5 Soutien en L1	77
1.6 CNED	77
2. Livres	78
2.1 Optique physique (2006).....	78
2.2 Dictionnaire de physique	79
2.3 Mementos	79
3. Stages	80
4. Rencontres	80
4.1 Rencontres avec le grand public.....	80
4.2 Rencontres avec les lycéens	81
4.3 Futura-Sciences.....	81
4.4 La Turbine.....	81
4.5 France-Inter	81
5. Administration	82
5.1 Responsabilité du L3 de physique.....	82
5.2 Responsabilités pédagogiques	82
Remerciements	83
Liste de publications	85
Articles publiés dans des revues à comité de lecture	85
Articles supplémentaires.....	87
Livres universitaires	88
Articles joints	89

Chapitre 1

Matière noire

1. Histoire
2. Aujourd'hui
3. Candidats
4. Astrophysique des particules
5. Détection indirecte

But nobody wants to hear this tale
The plot is clichéd, the jokes are stale
And baby we've all heard it all before
Oh I could get specific but
Nobody needs a catalog
With details of love I can't sell anymore

And aside from that, this chain of reaction,
baby, is losing a link
Though I'd hope you'd know what I tried to tell you
And if you don't I could draw you a picture in invisible ink

Aimée Mann, « Invisible Ink »

La question de la matière noire occupe aujourd'hui une place importante en astrophysique, en cosmologie, et même en physique des particules. Ce chapitre, très général et destiné à un public plus vaste que le reste du document, présente une introduction aux différents problèmes recouverts par le terme « matière noire ». Cette présentation ne saurait être exhaustive et j'ai choisi de me concentrer sur les aspects qui m'ont particulièrement intéressés depuis une quinzaine d'années, que ce soit parce qu'ils sont directement liés à mon travail de recherche ou parce que simplement je les ai découverts avec plaisir. C'est le cas notamment de la synthèse historique qui ouvre ce chapitre, fruit d'une page internet que je nourris et corrige de temps en temps.



1. Histoire



Fritz Zwicky (1898–1974)

Dans son article de 1937, Zwicky montre que les vitesses des galaxies dans l'amas de Coma sont trop élevées pour n'être dues qu'à l'action gravitationnelle des galaxies visibles. Il mentionne aussi que l'âge de l'Univers alors estimé à un milliard d'années est probablement trop court (l'amas n'a pas eu le temps d'atteindre l'état dynamique observé). Il propose aussi d'utiliser l'effet de lentille gravitationnelle pour étudier plus en détail la composante manquante de l'amas. Il annonce un article à paraître sur le sujet : « *The mathematical analysis of the formation of images of distant nebulae through the action of gravitational fields of nearer nebulae will be given in detail in an article to be published in the Helvetica physica acta.* » Cet article ne vit jamais le jour, pour des raisons que je ne connais pas.

Je vais ici retracer brièvement l'histoire de ce concept. Pour plus de détails (en particulier sur certains résultats précurseurs), le lecteur pourra consulter la page internet¹ sur laquelle j'ai rassemblé un certain nombre de dates et de références sur le sujet.

L'idée que l'Univers pourrait contenir beaucoup de masse sous une forme n'émettant pas de lumière est assez ancienne, et le terme « dark matter » était utilisé à la fin du XIX^e siècle pour désigner des taches sombres qui apparaissent sur certains objets astronomiques. Elles étaient généralement attribuées à la présence de matière absorbante et il s'agissait alors de matière que l'on détecte directement (par cette absorption). On peut situer la naissance du concept moderne de matière noire, c'est-à-dire de matière que l'on n'observe pas directement, en 1933 avec les observations de Fritz Zwicky (1898–1974).

À cette date, Zwicky mesura la distribution des vitesses des galaxies de l'amas de Coma, et trouva des valeurs excessivement élevées, supérieures à la vitesse de libération estimée à partir de la masse déduite de la luminosité des galaxies de l'amas. Ces résultats furent publiés² en allemand, puis en anglais en 1937 dans la revue *The Astrophysical Journal*. Les conclusions de Zwicky étaient qualitativement correctes, bien que numériquement faussées par le fait que la valeur mesurée de la constante de Hubble était beaucoup trop élevée à l'époque (Zwicky a considéré $558 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{Mpc}^{-1}$). Une étude réalisée en 1936 par Sinclair Smith montra qu'un problème similaire se posait dans l'amas de la Vierge. En 1939, H. W. Babcock³ mesura la rotation de la galaxie d'Andromède (M31), et trouva qu'elle était beaucoup plus élevée que ce qu'on attendait.

Il fallut attendre plusieurs décennies pour que ces résultats éveillent réellement l'intérêt de la communauté astrophysique. En 1966, Boldt *et al.*⁴ détectèrent une émission X en provenance de l'amas de Coma, grâce à des expériences embarquées sur des ballons. La même année, Felten *et al.*⁵ interprétèrent cette mesure en supposant que l'émission est due à la présence de gaz chaud entre les galaxies de l'amas : « *We find that the emission is accounted for by a mass of hot gas equivalent to the familiar missing mass suggested by application of the virial theorem to this cluster (...)* ». Trois ans plus tard, Vera Rubin et W. Ford⁶ obtinrent de nouvelles mesures de la rotation de la galaxie d'Andromède. On avait déjà remarqué auparavant que la rotation globale des galaxies était trop rapide (cf paragraphe précédent), mais grâce aux progrès de la détection de la raie de l'hydrogène neutre (découverte en 1951), on put à cette époque d'une part mesurer la rotation plus loin du centre, et d'autre part mesurer la vitesse de rotation en fonction du rayon (courbe de rotation). Ceci marqua le début d'une série de mesures systématiques qui mirent en évidence le fait que les courbes de rotation des galaxies spirales sont plates à grande distance du centre (la vitesse ne dépend que très peu de la distance au centre), ce qui ne s'explique pas avec la composante visible.

Parallèlement à ces avancées astronomiques, la cosmologie apporta aussi des éléments intéressants. Le modèle cosmologique aujourd'hui considéré comme standard était connu dans les années 1930, grâce aux travaux de Friedmann et Lemaître, qui en se basant sur les équations de la relativité générale ont montré que l'univers devait être en expansion, que cette hypothèse expliquait la loi de Hubble et que l'évolution cosmique était déterminée par le contenu de l'Univers. Toutefois, ce modèle fut victime d'une connaissance erronée de la constante de Hubble, dont la valeur alors admise était presque dix fois trop importante que la valeur aujourd'hui mesurée. Il en résultait un âge de l'univers inférieur à l'âge de la Terre, ce qui portait un coup sérieux à la crédibilité du modèle. En 1948, trois événements importants se produisirent :

1 http://lapth.in2p3.fr/~taillet/dossier_matiere_noire/histoire.php

2 F. Zwicky, « On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae », *The Astrophysical Journal*, **86** (1937) p. 217

3 H.W. Babcock, « The rotation of the Andromeda Nebula », *Lick Observatory bulletin* ; no. 498

4 Boldt, McDonald, Riegler, Sermelitsos, « Extended Source of Energetic Cosmic X Rays », *Physical Review Letters* **17** (1966) p. 447

5 J.E. Felten, R.J. Gould, W.A. Stein, N.J. Woolf, « X-Rays from the Coma Cluster of Galaxies », *The Astrophysical Journal*, **146** (1966) p.955–958

6 V. Rubin, W. Ford Jr, « Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions », *The Astrophysical Journal*, **159** (1970) p. 379

- Alpher, Bethe et Gamow⁷ montrèrent que les éléments légers se forment lors du Big-Bang. La nucléosynthèse primordiale est née ;
- Gamow⁸ proposa que les galaxies se forment par instabilité gravitationnelle. La conception moderne de la formation des structures cosmologiques était née ;
- Bondi et Gold⁹, ainsi que Fred Hoyle¹⁰, proposèrent un modèle cosmologique stationnaire. Ce modèle est en expansion mais sa densité reste constante, la dilution étant compensée par la création continue de matière.

Cette dernière proposition fut à l'origine de débats houleux qui traversèrent la cosmologie pendant plusieurs décennies, entre les partisans de l'univers stationnaire et ceux du Big-Bang. La découverte en 1965 du rayonnement de fond cosmologique (CMB) par Penzias et Wilson¹¹, un des arguments extrêmement forts en faveur du modèle du Big-Bang, n'a pas clot ces débats, les Bondistes ayant aussi proposé une explication à cette observation. En revanche, la découverte en 1992 des anisotropies dans le CMB, grâce aux observations du satellite COBE, ont fait définitivement pencher la balance en faveur du Big-Bang pour la plupart des cosmologistes qui hésitaient encore.

CMB : acronyme de « Cosmic Microwave Background », désignant le rayonnement de fond cosmologique micro-ondes.

Quant à Alpher, Bethe et Gamow, ils ont montré que le modèle du Big Bang permettait de comprendre la formation des éléments légers qui ne sont pas formés par des processus stellaires ou explosifs, et de calculer leur abondance. L'idée fut affinée au cours des années, avec des calculs de plus en plus précis et au début des années 1970, on découvrit que l'abondance du deutérium ne s'expliquait qu'en supposant que la densité de baryons était plusieurs fois inférieure aux estimations de la densité totale dans l'Univers.

Le modèle du Big-Bang permet aussi de comprendre comment les grandes structures cosmiques se forment par effondrement gravitationnel de fluctuations de densité d'un milieu en expansion. James Peebles (1935–), un des grands esprits du domaine, joua un grand rôle dans cette compréhension et perçut immédiatement¹² la portée des observations de Penzias et Wilson. La formation des structures est très sensible au contenu matériel de l'Univers. En se basant sur des simulations numériques, Ostriker et Peebles¹³ montrent en 1973 que les disques galactiques sont instables en l'absence d'un halo étendu de matière noire. Ce résultat sera repris et infirmé plusieurs décennies plus tard, mais il participe à ancrer l'idée selon laquelle les galaxies doivent être entourées d'un halo de matière noire.

La question de la nature de cette matière noire est abordée timidement, et ce n'est qu'en 1977 que l'on peut lire, sous la plume de Rees¹⁴, « *There are other possibilities of more exotic character, for instance the idea of neutrinos with small (few eV) rest mass has been taken surprisingly seriously by some authors.* » L'hypothèse d'un neutrino massif jouit alors, pendant quelques années, de la faveur de la plupart des cosmologistes. Elle permettait en effet aussi de résoudre le problème des neutrinos solaires.

En 1982, Peebles montra¹⁵ qu'il était difficile de comprendre les détails de la formation des galaxies si la matière noire était constituée de neutrinos. Il étudia l'hypothèse de particules plus massives. Cette hypothèse fut reprise en 1984 par Blumenthal *et al.*¹⁶ qui introduisirent officiellement le terme « matière noire froide ». À partir de ce moment, cette hypothèse s'an-

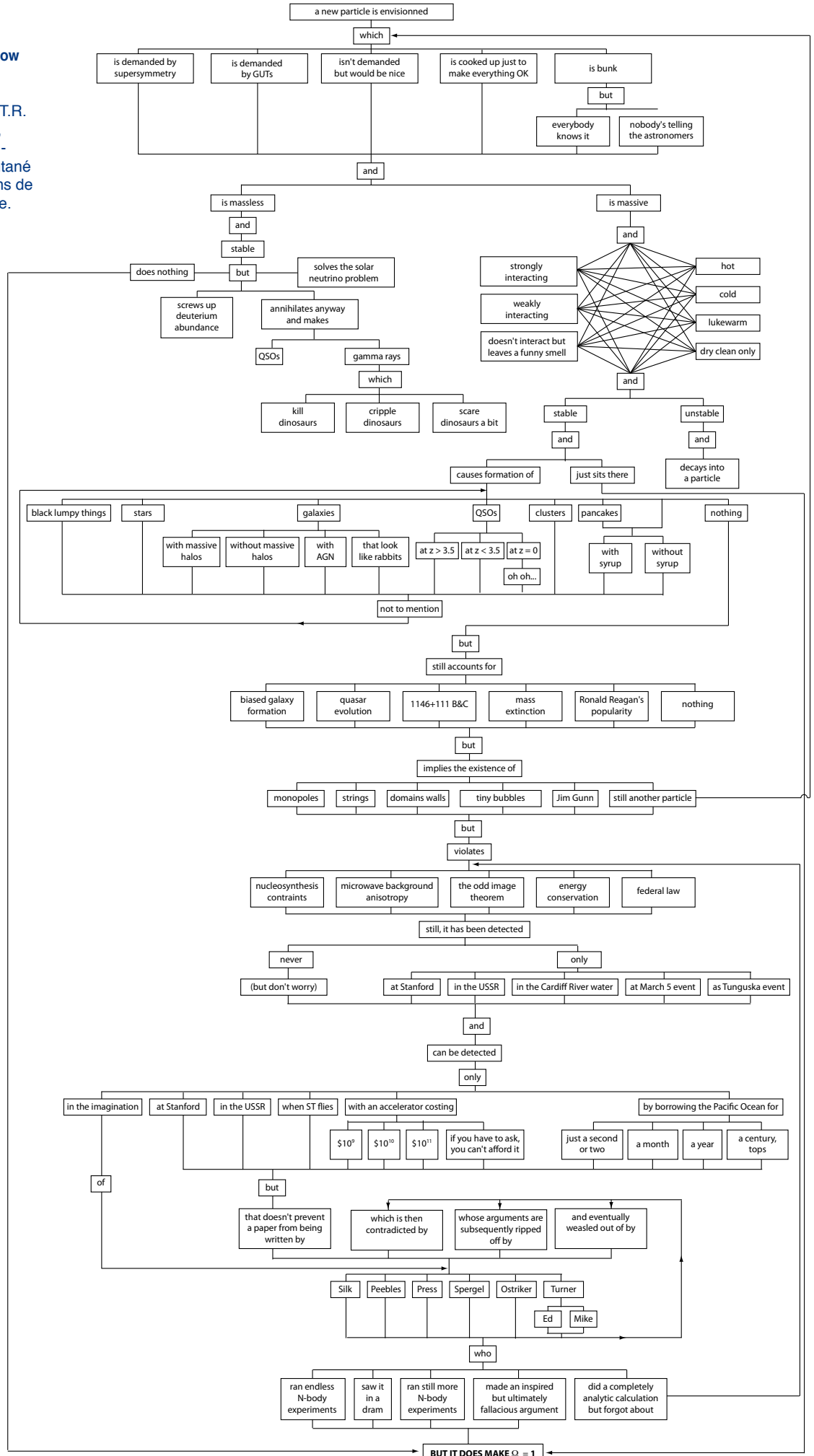


James Peebles (1935–)
Cosmologiste américano-canadien.

- 7 R.A. Alpher, H.A. Bethe, G. Gamow, « The Origin of Chemical Elements », *Physical Review* 73 (1948) p. 803
- 8 G. Gamow, « Evolution of the Universe », *Nature* 162 (1948) p. 680-682
- 9 Bondi & Gold, « The Steady-State Theory of the Expanding Universe », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 108 (1948) p. 252
- 10 F. Hoyle, « A New Model for the Expanding Universe », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 108 (1948) p.372
- 11 A.A. Penzias & R.W. Wilson, « A Measurement of Excess Antenna Temperature at 4080 Mc/s », *The Astrophysical Journal*, 142 (1965) p. 419–421
- 12 P.J.E. Peebles, « The Black-Body Radiation Content of the Universe and the Formation of Galaxies », *The Astrophysical Journal*, 142 (1965) p. 1317
- 13 Ostriker & Peebles, « A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive? », *The Astrophysical Journal*, 186 (1973), p. 476
- 14 Rees, « The Evolution of Galaxies and Stellar Populations », ed. B. M. Tinsley & R. B. Larson (New Haven: Yale Univ. Obs.), 339
- 15 P.J.E Peebles, « Primeval adiabatic perturbations - Effect of massive neutrinos », *The Astrophysical Journal*, 258 (1982) p. 415
- 16 G.R. Blumenthal, S.M. Faber, J.R. Primack, M.J. Rees, « Formation of galaxies and large-scale structure with cold dark matter », *Nature*, 311 (1984) p. 517–525

Figure 1.1 - Dark Matter Chart Flow

Document établi vers 1986 par quatre étudiants de Princeton, T.R. Lauer, T.S. Statler, B.S. Ryden, D.H. Weinberg. Au-delà de l'humour potache, il offre un instantané très complet des préoccupations de l'époque liées à la matière noire.



cra de plus en plus profondément dans le paradigme cosmologique. Il faut dire que du côté des physiciens des particules, un grand nombre d'études se penchaient sur les extensions du modèle standard et sur les conséquences cosmologiques de l'existence de nouvelles particules. L'axion fut introduit en 1977 et l'extension supersymétrique minimale du modèle standard (MSSM) en 1981. En 1984, John Ellis et ses collaborateurs¹⁷ étudièrent de manière détaillée l'hypothèse que la matière noire soit constituée de particules supersymétriques et favorisent le neutralino.

La physique des particules s'en mêle

Dans les années 1990, un flot de données astrophysiques vint confirmer le problème de la matière noire et précise ses propriétés. La détection en 1992 des anisotropies du CMB, puis son étude détaillée par une série d'autres expériences favorise l'hypothèse de la matière noire froide. L'utilisation du phénomène de lentille gravitationnelle à partir de 1990 permet d'établir des cartes de la distribution spatiale de la matière noire dans les amas de galaxies.

Enfin, la montée en puissance des moyens informatiques a permis à partir des années 1990 de simuler de manière précise la formation des grandes structures et d'explorer les différentes hypothèses sur la nature de la matière noire.

Simulations numériques

2. Aujourd'hui

REF [1,3,5,7,SNLS]

Pour quelqu'un qui aborde l'astrophysique et la cosmologie avec un œil neuf, le problème de la matière noire se pose aujourd'hui dans plusieurs contextes différents :

- la dynamique de certains corps visibles (galaxies et amas de galaxies) ne s'explique pas par la seule influence gravitationnelle de la matière visible qu'ils contiennent ;
- la cosmologie n'explique les observations de l'évolution du taux d'expansion et la formation des grandes structures (en particulier le CMB, mais pas seulement) qu'à condition de supposer que la densité de masse-énergie est dominée par une composante non baryonique ;
- l'étude du potentiel gravitationnel au sein des amas de galaxies, basée notamment sur l'effet de lentille gravitationnelle ou la distribution du gaz chaud qu'ils contiennent, montre que celui-ci n'est pas distribué d'une manière compatible avec la masse visible.

De manière remarquable, les propriétés de la matière noire qu'on est conduit à invoquer dans ces trois contextes sont très similaires, en termes de quantité ou de propriétés physiques (les explications alternatives introduisant une gravitation modifiée peinent à atteindre cette cohérence, voir la [section 3.3](#)). Il faut ajouter à cette liste un élément crucial : les physiciens des particules ont sous la main de nombreux candidats pour la matière noire, qu'ils sont amenés à introduire pour des raisons qui n'ont rien à voir avec l'astrophysique.

Je vais décrire de manière plus approfondie ces arguments en faveur de l'existence de la matière noire, sans tenter d'être exhaustif, les articles de revue sur le sujet n'y parvenant pas en quelques centaines de pages. L'étude des amas de galaxies fournit à mon avis les arguments les plus convaincants, et je vais insister sur ce point, avant de présenter les autres arguments.

► 2.1 Les amas de galaxies

Les amas de galaxies sont des ensembles de galaxies liées par interaction gravitationnelle. Ils peuvent contenir de plusieurs centaines à plusieurs dizaines de milliers de galaxies (la limite inférieure n'a rien de physique, les ensembles de moins d'une centaine de galaxies étant plutôt appelés des groupes). Ils fournissent un terrain d'étude particulièrement fécond pour étudier le problème de la matière noire, car on dispose de plusieurs méthodes indépendantes pour estimer leur contenu en masse :

- la dispersion des vitesses des galaxies individuelles fournit des contraintes sur la masse totale de l'amas. C'est ce qui avait permis à Zwicky de mettre le problème de la matière noire en évidence en 1933 ;
- l'émission en rayons X du gaz chaud contenu au cœur des amas permet dans certaines conditions de reconstituer le potentiel gravitationnel de l'amas et donc sa distribution de

¹⁷ John Ellis et al., « Supersymmetric relics from the Big Bang », Nuclear Physics B238 (1984) p. 453

- masse ;
- l'étude de la distorsion des images des galaxies d'arrière-plan par effet de lentille gravitationnelle permet de remonter à la distribution du potentiel gravitationnel dans l'amas.

2.1.1 Dynamique

Si un amas est virialisé, la distribution des vitesses des galaxies individuelles est intimement reliée au potentiel gravitationnel qui régit dans l'amas. En particulier, la mesure de la dispersion des vitesses permet, au prix de certaines hypothèses sur la symétrie de l'amas, de déterminer des caractéristiques du potentiel gravitationnel. C'est ainsi que Fritz Zwicky, en étudiant la dispersion de vitesse dans l'amas de Coma, put estimer le rapport masse/luminosité des galaxies, en supposant qu'elles étaient seules responsables de la dynamique de l'amas. Il trouva que ce rapport devait être anormalement élevé, c'est-à-dire que ces galaxies étaient anormalement massives étant donnée leur luminosité. On considère que cette découverte marque le début de l'histoire de la matière noire. La question a bien sûr considérablement évolué depuis cette époque. Ce type d'analyse présente plusieurs faiblesses. D'une part, les mesures de vitesses sont basées sur l'effet Doppler, qui ne donne accès qu'à la composante de la vitesse dirigée le long de la ligne de visée (l'effet Doppler transverse est beaucoup trop faible pour être mesurable pour des galaxies). On a recours à des méthodes statistiques pour exploiter cette information unidimensionnelle. D'autre part, l'hypothèse que l'amas est virialisé – hypothèse cruciale – est violée dans un grand nombre d'amas. Il faut sélectionner les amas pour lesquels cette hypothèse s'applique, ce qui pose le problème du biais de sélection et de son influence sur le résultat. Toutefois, l'étude de la distribution des vitesses fournit des informations précieuses lorsqu'on la combine avec les autres méthodes.

On obtient aussi des informations importantes sur la matière noire en étudiant des amas en collision (et donc non virialisés). Nous y reviendrons dans le cas spécifique de l'amas de la boulette, au 3.3.1.

Encadré 1 : optique gravitationnelle

La déviation due à une masse ponctuelle se calcule aisément dans le cadre de la relativité générale, elle est donnée par

$$\alpha = \frac{4GM}{rc^2}.$$

Pour une distribution étendue, dans beaucoup de situations, on peut assimiler la distribution de masse responsable de ces effets à une distribution bidimensionnelle en projetant la masse dans la direction de la ligne de visée,

$$\Sigma(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi, x) dx$$

où Σ représente une masse surfacique, et supposer que la déflexion se produit d'un coup lorsque le rayon lumineux traverse le plan contenant la masse. Dans la limite des déviations faibles ($\alpha \ll 1$, ce qui en pratique est valable même pour l'effet de lentille dit fort), les déviations de chaque élément de masse de la lentille s'ajoutent linéairement. Pour une lentille à symétrie sphérique, la déflexion s'écrit donc

$$\vec{\alpha}(\xi) = \frac{8\pi G}{\xi} \int_0^\xi \Sigma(\xi') \vec{\xi}' d\xi'.$$

Pour une lentille se trouvant à une distance D_ℓ de l'observateur, une source (l'objet) à une distance D_s , et en notant $D_{\ell s}$ la distance source-lentille, on peut définir une masse surfacique critique

$$\Sigma_c \equiv \frac{D_s}{4\pi G D_\ell D_{\ell s}}.$$

C'est cette masse surfacique qui définit la limite entre l'effet de lentille fort et l'effet faible, entre la présence d'images multiples ou non.

2.1.2 Émission de rayonnement X

On sait aujourd'hui que les amas de galaxies sont principalement constitués de gaz intergalactique, les galaxies elles-mêmes ne représentant que quelques pourcents de la masse de gaz. Ce gaz est retenu par le potentiel gravitationnel de l'amas, et comprimé pour atteindre des températures de plusieurs millions de degrés. Son rayonnement thermique se situe principalement dans le domaine spectral des rayons X et n'a pu être observé que depuis l'avènement de l'astronomie spatiale, l'atmosphère étant opaque aux rayons X. On parvient aujourd'hui à obtenir des cartes des amas dans cette gamme spectrale, donnant en chaque point le spectre et l'intensité de l'émission X. Ces deux informations permettent de remonter à la température du gaz et à sa densité, ou du moins à leur moyenne le long de la ligne de visée. Lorsque le gaz est à l'équilibre hydrostatique (une hypothèse analogue à celle de la virialisation que nous avons évoquée plus haut), on en déduit le profil du potentiel gravitationnel dans l'amas.

On trouve de nouveau que la masse de l'amas est beaucoup plus importante que la masse visible, c'est-à-dire le gaz et les galaxies. Ce type d'étude présente sur le précédent l'avantage de fournir une information sur la distribution spatiale du potentiel gravitationnel, et donc sur la répartition de la masse responsable de ce potentiel.

2.1.3 Lentilles gravitationnelles

L'effet de lentille gravitationnelle fournit un troisième moyen de sonder les amas. La déviation gravitationnelle des rayons lumineux provenant d'objets lumineux situés en arrière-plan de l'amas permet de déterminer le potentiel gravitationnel dans l'amas, ou plus précisément l'intégrale de ce potentiel le long de la ligne de visée. En ajoutant des hypothèses sur la forme de l'amas (en particulier en supposant qu'il respecte la symétrie sphérique), on en déduit aussi le potentiel gravitationnel tridimensionnel.

L'effet de lentille gravitationnelle se manifeste sous deux formes : en présence de fortes concentrations de masse, la déviation peut conduire à la formation de plusieurs images d'un même objet (des mirages gravitationnels), on parle alors d'**effet de lentille fort** (*strong lensing*). Lorsque la distribution de masse est plus diffuse, on n'obtient qu'une image par objet, celle-ci pouvant être faiblement déformée et amplifiée, on parle d'**effet de lentille faible** (*weak lensing*) ou de **cisaillement gravitationnel**.

L'effet fort se manifeste par la présence d'images multiples, parfois sous la forme d'arcs gravitationnels, il contraint principalement la distribution de masse dans les régions les plus denses de l'amas.

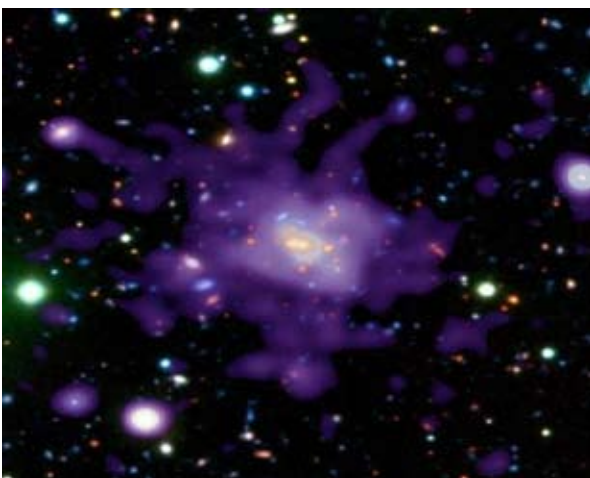


Figure 1.2 - Amas RDCS 1252.9-2927 par Chandra
Les régions violettes représentent l'émission en rayons X du gaz contenu dans cet amas.



Figure 1.3 - Amas SDSS J1004+4112 par Hubble
On distingue sur cette image des arcs tangentiels, caractéristique la plus évidente de l'effet de lentille fort.

L'effet faible se manifeste lui-même de deux manières distinctes. Tout d'abord il conduit à un aplatissement des images dans la direction radiale, c'est-à-dire l'ajout d'une ellipticité dans la direction orthoradiale. Lorsque les galaxies que l'on observe sont elles-mêmes elliptiques, il faut s'abstraire de cette ellipticité intrinsèque, ce que l'on fait généralement en considérant un ensemble de galaxies voisines et en moyennant leurs ellipticités, les composantes intrinsèques étant fortement réduites par cette opération si leurs directions sont indépendantes. Cet effet dépend du cisaillement κ , défini dans l'encadré 1, qui décroît faiblement avec la distance apparente entre l'objet observé et l'amas qui s'interpose : l'effet se fait sentir même pour des rayons lumineux passant relativement loin de la distribution de masse, et il permet a priori donc de sonder la distribution de masse loin du centre de la lentille, en observant de grands champs. Toutefois, pour y parvenir, il faut être capable d'estimer et d'éliminer les déformations dues au télescope et à la caméra (les aberrations), ce qui est d'autant plus difficile que l'on observe l'image d'un champ étendu. Plusieurs caméras à grand champ permettent aujourd'hui de mettre cette technique en œuvre (par exemple Megacam monté sur le télescope du CFHT, à Hawaï).

Ensuite, on peut montrer que l'effet de lentille conserve la brillance de surface de l'image¹⁸. Comme la taille de l'image est altérée par l'effet de lentille faible, la luminosité totale de l'image est aussi affectée, celle-ci pouvant être amplifiée ou atténuée. En observant des objets de luminosité intrinsèque connue (des chandelles standard), on peut espérer utiliser cet effet pour obtenir des contraintes supplémentaires sur la distribution de masse de l'amas¹⁹.

Lorsque l'effet fort et l'effet faible sont présents dans un même amas, leur analyse fournit des contraintes complémentaires sur la distribution de masse.

2.1.4 Formation des amas et simulations numériques

Les simulations numériques offrent une quatrième manière d'analyser les propriétés des amas de galaxies en rapport avec la matière noire. La cosmologie permet de modéliser la formation des structures dans l'univers primordial : les amas de galaxies se forment par effondrement gravitationnel des régions surdenses dans la distribution de matière noire primordiale, par exemple issue de l'inflation, et l'étude de la dynamique de cet effondrement permet de relier les propriétés des amas (abondance, masse, luminosité, corrélations dans leur distribution spatiale) à la nature et la quantité de matière noire, ainsi qu'à l'histoire de l'expansion cosmologique (qui dépend elle-même, entre autres, du contenu en matière noire).

Cette voie connaît aujourd'hui un essor important, grâce au développement de méthodes informatiques puissantes, dues à l'augmentation des performances physiques des ordinateurs eux-mêmes, en termes de capacité de stockage et de vitesse de processeur, mais aussi grâce au développement de méthodes logicielles nouvelles (calcul massivement parallèle, développement d'algorithmes spécifiques)²⁰.

2.1.5 Effet Sunyaev-Zel'dovich

Le gaz présent dans les zones les plus chaudes des galaxies se trouve sous forme ionisée. Les électrons présents interagissent avec le rayonnement de fond cosmologique micro-onde par effet Compton inverse, ce qui modifie sa distribution spectrale. C'est l'effet **Sunyaev-Zel'dovich**, prédit à la fin des années 1960 par Rachid Sunyaev et Iakov Zel'dovich²¹. En étudiant le spectre du rayonnement micro-onde dans la direction des amas, on peut en déduire la densité d'électrons, intégrée le long de la ligne de visée, ainsi que leur température, ce qui donne une autre manière d'évaluer la profondeur du puits de potentiel gravitationnel au centre de l'amas.

18 I. M. H. Etherington, « On the Definition of Distance in General Relativity », *Philosophical Magazine*, series 7 15, Nr. 18, 761 (1933)

19 Voir par exemple astro-ph/0910.4098 pour l'utilisation de supernovae de type Ia.

20 Voir par exemple Via Lactea : <http://www.ucoick.org/~diemand/vl/movies.html#infall>

21 Zel'dovich, Ya. B.; Sunyaev, R. A., « The Interaction of Matter and Radiation in a Hot-Model Universe », *Astrophysics and Space Science* 4, pp.301-316

► 2.2 Cosmologie

La cosmologie est la branche de la physique qui s'intéresse à l'Univers dans son ensemble, ses propriétés globales, son évolution, son histoire. La cosmologie moderne s'appuie notamment sur la relativité générale qui permet de décrire l'évolution de l'espace-temps et sur la physique des hautes énergies (physique des particules, physique nucléaire) qui permet de décrire l'évolution de son contenu (le fluide cosmologique), les deux évolutions étant couplées. Il est aujourd'hui établi que l'Univers est en expansion et qu'il a évolué à partir d'un état très chaud et très dense. Cette expansion s'accompagne d'un refroidissement et d'une dilution du fluide cosmologique, eux-mêmes responsables de plusieurs phénomènes physiques dont l'ensemble constitue l'histoire thermique de l'Univers. Ce scénario est appelé **modèle du Big Bang**²².

Les étapes de cette histoire thermique sont d'autant plus spéculatives que l'on remonte loin dans le passé. Selon le paradigme actuel, l'Univers aurait subi une phase d'expansion exponentielle appelée inflation, alors qu'il était extrêmement chaud et dense. Cette hypothèse qui permet de résoudre plusieurs problèmes que pose le modèle du Big Bang (horizon, platitude, monopôles) conduit à une prédiction cruciale : à la fin de l'inflation, le milieu initialement homogène a développé de minuscules inhomogénéités avec une distribution $\delta\rho/\rho$ que l'on peut calculer. Ce sont ces inhomogénéités qui, instables, donnent ensuite naissance aux grandes structures cosmiques, en évoluant sous l'action de l'interaction gravitationnelle.

Après l'inflation, l'histoire de l'Univers devient moins spéculative. Elle consiste en une suite de découplages chimiques et thermiques : une particule donnée peut être créée par des réactions entre d'autres particules si celles-ci sont assez énergétiques, c'est-à-dire si le milieu est suffisamment chaud. Elle peut aussi être détruite si elle est instable ou si le taux de réactions destructives est suffisamment important, c'est-à-dire si la densité est suffisamment importante pour que les collisions soient fréquentes. À haute température et forte densité, ces réactions conduisent à un équilibre chimique (équilibre entre créations et destructions) et à un équilibre thermique (l'espèce est thermalisée avec son environnement). Lorsque l'Univers s'expand, la température et la densité décroissent et ces deux équilibres sont rompus, l'un après l'autre. L'espèce considérée est découplée du reste du milieu et sa densité (appelée **densité relique**) n'évolue plus que par la dilution due à l'expansion cosmologique.

2.2.1 Nucléosynthèse primordiale

Un des premiers grands succès de la cosmologie fut d'expliquer ainsi la formation des noyaux légers par les réactions de fusion nucléaire se produisant dans le milieu chaud. C'est la **nucléosynthèse primordiale**, dont les pionniers sont Ralh Alpher, Hans Bethe et George Gamow. Les abondances primordiales de ^3He , ^4He , D, ^7Li , Be peuvent aujourd'hui être calculés et comparées aux valeurs mesurées (plus ou moins directement). Ces calculs font intervenir comme paramètre le nombre de baryons par photon. La densité de photons étant aujourd'hui bien mesurée, la nucléosynthèse primordiale permet donc d'évaluer la densité de baryons dans l'Univers. La densité d'une espèce est souvent exprimée par le **paramètre de densité** $\Omega \equiv \rho/\rho_c$, la densité normalisée par la densité critique ρ_c définie par

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \approx 1,45 \times 10^{11} M_\odot \cdot \text{Mpc}^{-3} \approx 10^{-26} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

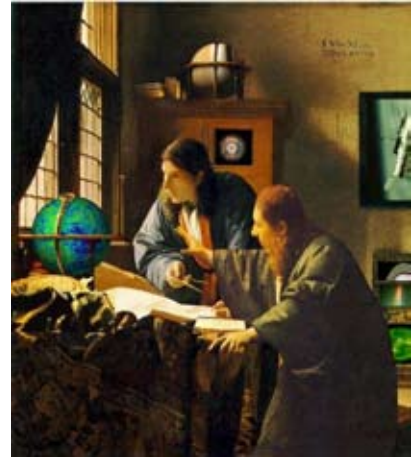
soit environ 6 protons par m^3 . On trouve pour les baryons $\Omega_b h^2 \approx 0,028$ avec une incertitude de l'ordre du pourcent, soit $\Omega_b \approx 0,052$, Cette valeur est inférieure à :

- la densité de matière visible dans l'Univers : il y a de la matière noire baryonique ;
- la densité de matière dans l'Univers : il y a de la matière noire non baryonique ;
- la densité totale : il y a autre chose, c'est l'énergie noire.

2.2.2 Les anisotropies du CMB

La cosmologie dite de précision repose aujourd'hui sur l'observation des propriétés du

²² Ce terme sera utilisé dans la suite pour désigner ce scénario d'évolution et non quelque événement singulier initial, comme c'est parfois le cas dans la littérature.



Cosmologie

Montage réalisé pour le dixième anniversaire du site APOD (Astro-nomy Picture of the Day).

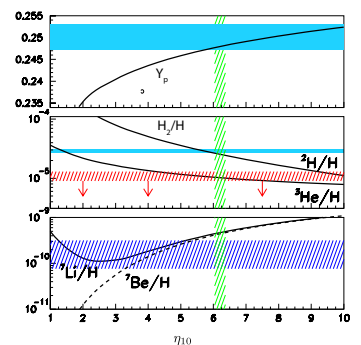


Figure 1.4 - Abondance des éléments légers

On rencontre quatre types de nucléosynthèse en astrophysique : primordiale (celle décrite dans le texte), stellaire lorsqu'elle a lieu au coeur des étoiles, explosive lorsqu'elle se produit de façon violente dans les explosions de supernovae, et spallative dans les rayons cosmiques. Cette figure montre l'abondance des éléments légers formés par la nucléosynthèse primordiale, en fonction du nombre de baryons par photon.

rayonnement de fond cosmologique micro-ondes (CMB). Il s'agit du rayonnement émis au moment de la recombinaison primordiale, lorsque le plasma cosmique s'est suffisamment refroidi pour que les électrons se lient aux protons de manière durable pour former des atomes d'hydrogène. Depuis sa formation, ce rayonnement s'est fortement décalé vers le rouge du fait de l'expansion de l'univers et on l'observe aujourd'hui principalement dans le domaine des micro-ondes. Sa distribution dans le ciel est remarquablement isotrope, les variations d'un point à l'autre étant de l'ordre de 10^{-5} en valeur relative si l'on exclut la composante dipolaire due au mouvement de la Terre.

Ces petites anisotropies ont été mesurées de manière remarquablement précise, par de multiples expériences, au sol, en ballon ou par satellite, avec des résolutions angulaires de plus en plus faibles et des sensibilités de plus en plus grandes. En confrontant ces mesures aux prévisions du modèle standard de la cosmologie, on peut déterminer les valeurs de différents paramètres cosmologiques. On améliore cette détermination en les combinant avec d'autres mesures cosmologiques (lentilles gravitationnelles, effet SZ, pic acoustique des baryons, relation distance-redshift des supernovae de type Ia). En particulier, la densité de baryons Ω_b et la densité totale de matière Ω_m sont aujourd'hui connus avec une précision respectable :

$$\Omega_m = 0,226 \pm 0,029 \text{ et } \Omega_b = 0,0449 \pm 0,0028$$

Ces valeurs indiquent que l'univers comporte une grande quantité de matière noire non baryonique.

► 2.3 Les galaxies

Les galaxies sont des ensembles autogravitants formés principalement d'étoiles et de gaz. Elles se présentent sous des morphologies différentes, reflétant des histoires différentes ou de stades différents de leur évolution à l'échelle cosmologique. Aux deux extrémités du spectre de ces morphologies, on trouve :

- les galaxies elliptiques, dans lesquelles les étoiles et le gaz sont distribués dans un ellipsoïde, avec des vitesses réparties aléatoirement, de manière similaire aux molécules dans un gaz ;
- les galaxies spirales, dans lesquelles les étoiles et le gaz sont distribués dans un disque mince en rotation différentielle.

La mesure de la vitesse des constituants des galaxies, en fonction de leur position dans la galaxie, permet d'obtenir des informations sur la dynamique de l'amas. Dans le cas des galaxies spirales, on introduit la **courbe de rotation**, donnant la vitesse de rotation $v(r)$ en fonction de la distance r au centre. Pour les galaxies elliptiques on introduit $\sigma(r)$, donnant la dispersion de vitesse en fonction de r .

La courbe de rotation des galaxies spirales est déterminée par la distribution de masse $\rho(\vec{r})$ dans la galaxie,

$$\frac{v^2(r)}{r} = G \iiint \frac{\rho(\vec{r}')}{r'^2} d^3\vec{r}'.$$

mais la relation entre ces deux grandeurs n'est pas biunivoque (ce qui est inévitable, le membre de droite étant une grandeur connue dans un disque bidimensionnel alors que la distribution de masse porte une information tridimensionnelle). Cette relation se simplifie en faisant des hypothèses supplémentaires sur les symétries de la distribution de masse. En particulier, en supposant que la densité ne dépend que du rayon r (symétrie sphérique), le théorème de Gauss conduit à

$$\frac{v^2(r)}{r} = 4\pi G \int \rho(r) dr.$$

En supposant que la masse est concentrée dans un disque plat à symétrie cylindrique avec une masse surfacique Σ , on ne peut plus utiliser le théorème de Gauss et on obtient une relation différente. On obtient une courbe de rotation plate avec

$$\rho = \frac{v_c^2}{4\pi G r^2} \text{ pour une distribution à symétrie sphérique (sphère isotherme)}$$

$$\Sigma = \frac{v_c^2}{2\pi Gr} \text{ pour une distribution plane à symétrie cylindrique (disque de Mestel)}$$

Dans les deux cas, la masse contenue dans une sphère de rayon r croît linéairement avec r .

3. Candidats

► 3.1 Les objets astrophysiques

3.1.1 Généralités

Il n'est pas insensé s'imaginer qu'il existe dans l'Univers de la matière qui n'émet pas suffisamment de lumière pour être vue directement. Après tout, la plupart des objets qui nous entourent dans la vie quotidienne n'émettent pas de lumière, on ne les voit que parce qu'ils sont éclairés par des sources externes. L'idée de matière noire baryonique est donc assez naturelle, finalement. Voici les principaux candidats qui ont pu être envisagés à un moment ou un autre :

- nuages d'hydrogène moléculaire H_2 ;
- poussières ;
- naines brunes ;
- naines blanches ;
- étoiles à neutrons ;
- trous noirs.

Chacune de ces hypothèses peut conduire à des tests expérimentaux, car aucun des ces objets n'est parfaitement invisible et il devrait être possible de les voir directement. Reprenons-les dans l'ordre.

Les nuages moléculaires peuvent conduire à l'émission de rayonnement gamma quand ils sont traversés par le rayonnement cosmique (celui dont il est abondamment question dans le chapitre suivant) que contient la Galaxie, ils peuvent aussi absorber une partie du rayonnement qui les traverse quand on regarde un objet placé derrière.

Les poussières ont tendance à absorber, diffuser et rougir la lumière qui les traverse, si bien qu'il ne peut s'en cacher une grande quantité...

Les naines brunes, les naines blanches et les étoiles à neutrons sont des objets de type stellaire qui émettent du rayonnement dans certaines longueurs d'onde. Les naines blanches ont la propriété de pouvoir se refroidir indéfiniment, étant retenues contre l'effondrement gravitationnel par leur pression de dégénérescence, un phénomène quantique qui subsiste à basse température, contrairement à la pression thermique qui assure l'équilibre des étoiles. Les naines blanches peuvent s'éteindre (alors que la majorité des autres types d'astres s'échauffent au cours de leur évolution) et devenir des naines noires, si bien qu'on pourrait imaginer que l'Univers en contienne beaucoup sous forme éteinte et donc peu visibles. En fait, étant donné l'âge de notre Galaxie, on peut déterminer la luminosité des naines blanches les moins brillantes qu'elle contient (ce sont les plus vieilles). Il se trouve qu'elles ne sont pas assez sombres pour échapper au télescope spatial Hubble, lequel en a observé un nombre très insuffisant pour résoudre le problème de la matière noire. C'est aussi le cas des naines brunes d'ailleurs. Ceci n'est pas une grosse surprise, car notre compréhension actuelle de l'histoire de la formation stellaire dans notre galaxie n'y prédit pas une population importante de naines blanches éteintes. Cette remarque s'applique aussi aux étoiles à neutrons.

Notons aussi que les trous noirs plus gros que quelques millions de masses solaires sont exclus car ils auraient un effet destructeur sur les disques et les bulbes galactiques. Les trous noirs ayant une masse inférieure à celle de la Terre ne sont pas exclus, mais on ne connaît pas de mécanisme qui pourrait conduire naturellement à leur formation dans l'Univers primordial.

Il semble qu'aucun de ces candidats ne puisse réellement résoudre le problème de la matière noire, même si l'on ne cherche qu'à mettre en évidence la petite fraction de nature baryonique.

3.1.2 Microlentilles gravitationnelles

Il existe d'autres contraintes sur l'abondance de tous ces objets dans la galaxie : les naines brunes, les naines blanches, les étoiles à neutrons, et dans une certaine mesure les nuages moléculaires compacts et les trous noirs de masse stellaire, peuvent aussi être détectés indirectement par le phénomène de microlentille gravitationnelle. Il s'agit de l'accroissement de luminosité apparente d'un objet lumineux lorsqu'un objet compact passe sur sa ligne de visée. On s'attend naïvement à une diminution de luminosité lorsqu'une telle occultation se produit (c'est le cas par exemple lorsqu'une planète de notre système solaire passe devant une étoile). Dans certaines géométries cependant, si l'objet occultant est suffisamment compact, son champ gravitationnel courbe suffisamment les rayons rasants pour les ramener vers l'observateur terrestre et ainsi rendre l'objet plus brillant. Cet effet a été bien observé et plusieurs expériences²³ (EROS²⁴, OGLE, MACHO, AGAPE) ont mis en place de grands programmes de recherche systématique d'objets compacts sombres, profitant de l'avènement de caméras CCD de grand champ. Ces recherches ont permis de montrer que la matière noire galactique ne pouvait pas être constituée de plus de 10 % d'objets compacts dont la masse serait comprise entre 10^{-6} et 1 masse solaire environ (voir la figure 1.5).

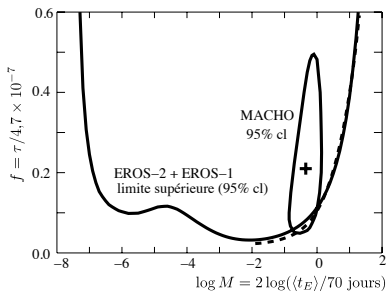


Figure 1.5 - Résultats d'EROS

Limites apportées par l'expérience française EROS sur la proportion de masse qui pourrait être due à des objets compacts dont la masse est reportée sur l'axe des abscisses, en échelle logarithmique. La région « MACHO » correspond à une annonce qui avait été faite par cette expérience américaine.

3.1.3 Le gaz primordial

Il est possible de détecter les grands nuages primordiaux d'hydrogène, grâce à leurs propriétés d'absorption : en observant une source très lointaine (décalage vers le rouge de l'ordre de 2 ou plus) dont le spectre est connu, on peut voir des raies d'absorption causées par ces nuages. La raie d'absorption de chaque nuage est décalée vers le rouge d'un facteur qui dépend de la distance à laquelle il se trouve. On observe alors dans le spectre des quasars une multitude de raies correspondant à l'ensemble des nuages qui se trouvent sur la ligne de visée. On parle de forêt Lyman alpha (Lyman alpha est le nom de la transition atomique qui donne naissance à la raie que l'on voit répétée à différents décalages vers le rouge). Leur étude est d'une grande importance en cosmologie, d'une part parce qu'elle permet d'étudier la manière dont les nuages sont répartis dans l'espace (et donc de tester les modèles de formation des grandes structures) et d'autre part parce qu'on peut mesurer la quantité de gaz présent dans les régions sondées. Le résultat net est que la densité de gaz observé est très compatible avec les prédictions de la nucléosynthèse primordiale. Autrement dit, on arrive à détecter la totalité des baryons dans l'Univers primordial, et il n'y a pas vraiment de problème de matière noire baryonique aux grandes échelles.

► 3.2 Les candidats de la physique des particules

La physique des particules décrit les phénomènes élémentaires en se basant sur la théorie des champs relativiste. Cette théorie fournit un cadre formel dans lequel on peut développer des modèles de manière rigoureuse, c'est-à-dire expliciter le type de particules qui peuvent exister et la manière dont elles interagissent entre elles. La physique des particules s'appuie pour cela sur des considérations de symétrie, qui ont fait leur preuve à plusieurs occasions en physique, notamment en permettant d'unifier (et de comprendre) l'interaction faible et l'interaction électromagnétique. Le modèle standard de la physique des particules est bâti sur une symétrie décrite par le groupe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Ce modèle permet de comprendre la plupart des phénomènes de physique des hautes énergies, mais il pose plusieurs questions importantes ouvertes. Par exemple, il ne permet pas de comprendre pourquoi l'Univers que l'on observe est fait de matière sans contrepartie notable en antimatière (dont pourtant il prédit l'existence et décrit très bien les propriétés observées expérimentalement), ni pourquoi toutes les particules connues ont des charges électriques qui sont des multiples entiers d'une charge élémentaire, pour ne citer que quelques-unes de ces questions ouvertes. Ceci a conduit les chercheurs à penser qu'il existe un modèle plus complet, peut-être basé sur une

23 J'ai eu la chance de participer à deux reprises aux observations et aux prises de données de la collaboration EROS, à La Silla au Chili.

24 Tisserand et al. (collab. EROS), « Limits on the Macho Content of the Galactic Halo from the EROS-2 Survey of the Magellanic Clouds », *Astronomy and Astrophysics* **469** (2007) 387

théorie nouvelle ou des modèles plus complets. De telles extensions du modèle standard ont été proposées sous plusieurs formes, notamment

- les **théories de Grande Unification**, qui partent de l'hypothèse que les différentes interactions (interaction électromagnétique, interaction faible, interaction forte) sont différentes facettes d'une même interaction fondamentale, décrite par un groupe de symétrie plus général ;
- les **théories supersymétriques**, qui partent de symétries d'espace-temps plus étendues que dans le modèle standard, j'y reviendrai plus loin ;
- les **théories de cordes**, dans lesquelles les objets fondamentaux ne sont plus des points mais des objets étendus unidimensionnels. Ces cordes possèdent plusieurs modes d'excitation que l'on peut identifier à des particules différentes. Ainsi, les différentes particules ne seraient que les excitations différentes d'un même objet fondamental et les réactions entre particules seraient les passages d'un mode de vibration à un autre, accompagné éventuellement d'une séparation de la corde en plusieurs morceaux. Notons que ces théories de cordes reposent en général sur la supersymétrie et sur l'unification.

Ces pistes sont encore seulement théoriques, dans le sens qu'aucune d'entre elles n'est encore appuyée par une confirmation expérimentale. Il faut aussi souligner que même au niveau purement théorique, il reste encore des problèmes de cohérence et des obstacles conceptuels. En tout état de cause, ces théories prédisent l'existence de nouvelles particules :

- monopôles magnétiques ;
- leptoquarks : particules qui possèderaient un nombre leptonique et un nombre baryoniques simultanément non nuls ;
- particules supersymétriques (par exemple : les neutralinos, voir plus bas) ;
- excitations lourdes de cordes.

D'autres théories, invoquées pour répondre à des impératifs divers et variés, amènent leur bataillon de nouvelles particules :

- axions ;
- neutrinos lourds ;
- Q-balls ;
- wimpzillas, cryptons, la liste serait longue des nouvelles particules envisagées dans l'ensemble de la littérature...

La plupart de ces particules sont instables et se désintègrent spontanément en d'autres particules. Toutefois, certaines peuvent être stables (ou du moins avoir un temps de vie très long). Si une telle nouvelle particule stable peut exister, et si elle a pu être créée à un quelconque moment du passé de l'Univers, alors on peut imaginer que l'Univers actuel en soit rempli et que cette particule constitue la matière noire. Au fil de mes travaux liés à la matière noire, je me suis intéressé à deux des éléments de cette liste qui jouissent des faveurs de la communauté scientifique : le neutralino et les particules de Kaluza-Klein.

Insistons sur le fait que les considérations qui amènent les physiciens des particules à introduire de nouvelles particules sont totalement différentes de celles pour lesquelles les astrophysiciens introduisent la matière noire. Le fait que deux problèmes différents puisse avoir une solution commune est très séduisant.

Les caractéristiques de ces nouvelles particules (spin, masse, couplages) sont fixées par le détail du modèle de physique des particules dont elles découlent. Par exemple, dans le cadre de la supersymétrie, en fixant tous les paramètres qui interviennent dans le lagrangien de la supersymétrie, on fixe la masse et les couplages de toutes les particules supersymétriques. En pratique, ces paramètres ne sont pas connus, et on est amené à considérer toute une gamme de paramètres, conduisant à des gammes de variation pour la masse et les couplages des particules.

3.2.1 Masse et matière noire chaude ou froide

Les propriétés qui importent pour déterminer si une particule peut constituer la matière noire sont sa masse et ses sections efficaces d'interaction, avec elle-même et avec les autres particules.

Commençons par détailler l'importance de la masse : plus une particule est massive, moins sa vitesse est élevée pour une énergie donnée. Au cours de l'expansion cosmologique, la température diminue, et donc aussi l'énergie moyenne des particules en équilibre thermique. Lorsque cette énergie moyenne devient bien inférieure à la masse de la particule, celle-ci devient non relativiste. Ceci se produit plus tôt pour les particules lourdes que pour les particules légères. Au moment où les fluctuations primordiales de densité commencent à s'effondrer sur elles-mêmes pour former ce qui deviendra plus tard les premières grandes structures cosmiques (galaxies, amas de galaxies et superamas), la situation est complètement différente selon la masse des particules de matière noire. Dans l'hypothèse où la matière noire est formée de particules, l'étude de la formation des grandes structures permet donc de fournir des informations sur la masse de ces particules.

Dans le cas où les particules sont relativistes au moment du découplage (on parle de **matière noire chaude**), elles peuvent s'échapper rapidement dès qu'elles ont formé une surdensité, ce qui a tendance à ralentir voire empêcher leur effondrement ultérieur, en particulier sur les petites échelles spatiales. La formation des structures commence alors par les grandes échelles spatiales, les superamas de galaxies, qui au cours du temps se fragmentent pour donner des amas de galaxies, puis des galaxies. On parle de scénario **top-down**.

Dans le cas où les particules sont non relativistes au moment du découplage (on parle alors de **matière noire froide**), le phénomène précédent n'a pas lieu et les petites structures (galaxies, petits amas de galaxies) se forment d'abord. Les grandes structures se forment plus tard, par rassemblement et fusion de structures plus petites. On parle de scénario **bottom-up**. Les observations cosmologiques favorisent nettement le premier type de scénario.

3.2.2 Sections efficaces et densité relique

Les sections efficaces d'interaction de la particule sont cruciales. Tout d'abord, elles déterminent la **densité relique**, c'est-à-dire la quantité de particules qui peuvent survivre aux nombreuses réactions qui tendent à diminuer leur densité lors de l'expansion cosmologique. Le neutralino est à cet égard assez remarquable, car la physique des particules fournit une gamme de sections efficaces qui conduit à des densités reliques correspondant en gros à la densité de la matière noire. C'est très encourageant et l'hypothèse du neutralino compte parmi les favoris des astrophysiciens. Ensuite, les sections efficaces déterminent la facilité avec laquelle on peut espérer détecter ces particules, car c'est en interagissant avec un instrument que la particule pourrait être détectée directement, ou en s'annihilant avec une autre qu'elle pourrait être détectée indirectement (voir la [section 5](#)). On est confronté ici à une situation peu engageante : pour qu'une particule soit abondante dans l'univers aujourd'hui, il ne faut pas que sa section efficace soit trop grande, il faut donc qu'elle soit assez peu réactive. Comme c'est par leurs réactions qu'on détecte les particules, ceci implique qu'elle sera plus difficile à détecter ! On peut contourner cet argument, par exemple dans des modèles où la section efficace d'annihilation varie fortement au cours de l'expansion, pour passer d'une faible valeur au moment du découplage à une valeur importante dans l'univers actuel, mais cette situation n'est pas très naturelle et ne survient que dans certains modèles, pour certaines valeurs des paramètres.

Les calculs de densité relique permettent de trier le vaste ensemble de modèles de physique de particules qui pourraient résoudre le problème de la matière noire, en éliminant ceux qui conduisent à des densités reliques plus fortes que la densité de matière noire déterminée par les astronomes. Ceci permet par exemple d'exclure les masses trop élevées pour les neutralinos, ce qui permet d'espérer que si la supersymétrie est réalisée dans la nature, elle devrait être à portée d'accélérateur, en particulier du LHC.

3.2.3 Susy et les neutralinos : matière noire « froide »

La supersymétrie est une théorie quantique des champs basée sur une symétrie d'espace-temps qui généralise l'invariance sous les transformations de Poincaré en introduisant des variables d'espace-temps qui anticommulent (des variables de Grassmann). Elle fut proposée dans les années 1970, en vue de résoudre certains problèmes conceptuels du modèle standard de la physique des particules. Ceci a conduit à l'élaboration de nouvelles théories des interactions fondamentales, qui sont à ce jour encore spéculatives, mais dont on a déjà

commencé à tester expérimentalement certaines prédictions. Dans sa version minimale, la supersymétrie, souvent appelée **susy**, associe à chaque particule du modèle standard une nouvelle particule appelée son **partenaire supersymétrique**, un boson étant toujours associé à un fermion, et vice-versa. Le nom de ces partenaires est formé en ajoutant un préfixe s- si la particule du modèle standard est un fermion, ou un suffixe -ino si c'est un boson. Par exemple, les partenaires supersymétriques des électrons, neutrinos, quarks, top et tau sont respectivement appelés les sélectrons, sneutrinos, squarks, stop et stau ; les partenaires supersymétriques des photons, des W, des Z et des B sont appelés les photinos, winos, zinos et binos} Toutes ces particules sont notées avec un tilde (\tilde{e} pour le sélectron, par exemple).

D'après les lois générales de la physique quantique, l'existence de toutes ces particules nouvelles affecte les interactions entre les particules du modèle standard. En particulier, elle affecte la stabilité du proton, et on a été amené très tôt à postuler l'existence d'une symétrie, appelée R-parité, qui protège le proton en le rendant stable. Cette symétrie a une conséquence fondamentale : elle rend aussi stable la plus légère des particules supersymétriques (LSP pour « lightest supersymmetric particle »), ce qui en fait naturellement un candidat potentiel pour la matière noire. Insistons sur le « naturellement » : la R-parité et la supersymétrie ont été introduites pour des raisons étrangères à toute considération cosmologique ou astrophysique, et le fait qu'elles conduisent à un candidat de matière noire est une retombée troublante.

La supersymétrie n'est pas une symétrie qui est réalisée explicitement dans la nature, et si elle existe elle doit être brisée. D'un point de vue théorique, il y a plusieurs manières d'introduire une telle brisure de symétrie .

Le spectre des particules supersymétriques (leurs masses) dépend des paramètres supersymétriques (124 paramètres pour le MSSM, dont 19 décrivent les particules du modèle standard), et selon les valeurs de ces paramètres, la LSP peut être un sneutrino, un gravitino, ou une combinaison de jauginos neutres. Ce dernier cas a été très étudié, la particule porte le nom générique de **neutralino**, c'est une superposition de quatre états quantiques, photino, zino et deux higgsinos.

3.2.4 Les particules de Kaluza-Klein

D'autres extensions du modèle standard de la physique des particules sont considérées de manière sérieuse, et conduisent à la prédiction de l'existence de nouvelles particules qui pourraient constituer la matière noire.

Une des motivations de ces extensions est de fournir une description unifiée des différentes interactions fondamentales, de la même manière que les interactions électriques et magnétiques furent unifiées par James Maxwell au XIX^e siècle, puis l'interaction faible avec l'interaction électromagnétique au XX^e siècle.

Ces extensions font généralement appel à la possibilité que notre Univers ait plus de 4 dimensions, les dimensions supplémentaires nous étant cachées pour une des raisons suivantes :

- elles sont compactes, c'est-à-dire enroulées sur elles-mêmes à des échelles sub-microscopiques ;
- les forces autres que la gravitation n'y ont pas d'effet.

Dans le premier cas, la périodicité de ces dimensions se traduit par une multiplication des états de masse de toutes les particules du modèle standard, les nouvelles particules étant appelées particules de Kaluza-Klein, en référence aux pionniers du domaine qui dans les années 1920 avaient ajouté une cinquième dimension à l'espace-temps pour tenter d'unifier l'électromagnétisme et la gravitation. Dans les théories modernes à dimensions supplémentaires, il existe de nombreuses manières de rendre ces dimensions compactes, ce qui conduit à plusieurs types de particules. Dans plusieurs situations, l'une de ces particules peut être stable, en particulier si une symétrie interdit sa disparition, et pourrait constituer un candidat intéressant pour la matière noire. L'hypothèse des dimensions supplémentaires peut aussi conduire à une modification de la loi de gravitation à petite distance. Ceci pourrait fournir un moyen de la valider ou de l'infirmer.

L'étude de cette hypothèse présente un avantage sur celle des candidats supersymétriques : les paramètres sont beaucoup moins nombreux et la densité relique fixe de manière univoque la masse de la particule, une fois fixés les paramètres du modèle à dimensions supplémentaires. On obtient des masses allant de quelques centaines de GeV/c^2 à $1 \text{ TeV}/c^2$ environ. Les contraintes que l'on peut apporter en étudiant les signatures indirectes sont donc plus strictes.

3.2.5 Chercher de la matière noire dans les accélérateurs ?

Du fait de ce qui précède, on lit parfois que les accélérateurs, en particulier le LHC, permettent de chercher la matière noire, et il me semble que c'est une affirmation trompeuse. Le LHC permet de tester l'hypothèse de supersymétrie, mais ceci n'a a priori rien à voir avec le problème de la matière noire. Même si le LHC parvient à détecter des particules supersymétriques, rien ne nous assure que celles-ci sont produites en grand nombre dans l'univers primordial et qu'elles forment aujourd'hui la matière noire. Il faut pour cela mesurer la masse et les couplages des nouvelles particules détectées, et faire de la cosmologie. Bien sûr, ceci serait une avancée extraordinaire dans ce domaine de recherche, en particulier la découverte de particules supersymétriques pourrait permettre de rechercher la matière noire de façon beaucoup plus ciblée et efficace, que ce soit en détection directe ou indirecte. Mais le raccourci consistant à affirmer que l'on pourrait découvrir la matière noire en accélérateur me semble abusif.

► 3.3 Les modifications des lois de la gravitation

Le problème de la matière noire est purement gravitationnel : on infère sa présence de l'analyse du champ gravitationnel, celui-ci n'étant pas seulement dû à la matière ordinaire connue ou observée. On peut envisager que le problème provienne d'une mauvaise compréhension de la gravitation ou de la dynamique. Si l'on se donne une distribution de masse, le champ gravitationnel s'en déduit par la relativité générale, via les équations d'Einstein qui relient le tenseur énergie-impulsion à la courbure de l'espace-temps, elle-même reliée au champ gravitationnel. Dans la limite des vitesses faibles et des champs faibles, adaptée pour l'étude des phénomènes à l'échelle galactique, ces équations se réduisent à la relation fondamentale de la dynamique en présence du champ gravitationnel newtonien (voir le [paragraphe 3.3.3](#) cependant pour une remise en cause de cette affirmation). La mécanique de base, telle que celle que l'on enseigne dès la terminale, suffit pour étudier les courbes de rotation galactique et mettre en évidence le problème de la matière noire galactique. On pourrait envisager deux modifications drastiques aux équations de base de la mécanique newtonienne. D'une part, le champ gravitationnel pourrait être relié à ses sources d'une manière différente que ce qu'on suppose, la force gravitationnelle entre deux masses ponctuelles n'étant pas inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. D'autre part, la relation fondamentale de la dynamique elle-même pourrait ne pas être valide de manière universelle.

3.3.1 MOND et TeVeS

C'est ce qui fut proposée en 1983 par Mordehai Milgrom, qui a baptisée sa nouvelle théorie MOND pour « MOdified Newtonian Dynamics » (en français : Dynamique Newtonnienne Modifiée). En 1984, Jakob Bekenstein y apporte un point de vue formel crucial. L'idée de base est la suivante : il existerait une accélération limite a_0 qui séparerait deux régimes. Dans le régime des « grandes » accélérations ($a \gg a_0$, en fait le régime auquel nous sommes habitués), la loi de Newton habituelle est vérifiée et $a = GM/r^2$. Dans le régime des faibles accélérations ($a \ll a_0$), cette relation doit être remplacée par $a^2/a_0 = GM/r^2$, soit $a \propto 1/r$. L'accélération a_0 serait alors une constante fondamentale de la nature. L'ajustement des observations de courbes de rotation galactique permet de la déterminer numériquement : elle est de l'ordre de

$$a_0 \approx 10^{-8} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Milgrom est troublé par le fait que cette valeur est numériquement assez proche du produit cH entre la vitesse de la lumière et la constante de Hubble.



Cette approche permet de résoudre le problème de la matière noire à l'échelle des galaxies. En particulier, elle explique le fait que les galaxies de faible luminosité de surface semblent être dominées par la matière noire en leur coeur, alors que les galaxies de forte luminosité de surface sont dominées par la matière ordinaire. Du point de vue de MOND, ceci est dû au fait qu'il y a moins de matière dans les premières, l'accélération y est donc plus faible et on se trouve alors en plein dans le régime de MOND, des faibles accélérations. Pour les secondes il y a plus de matière et on est dans le régime de la gravité usuelle.

Il reste toutefois à cette approche encore beaucoup d'étapes à franchir avant de prétendre fournir une véritable réponse au problème de la matière noire. Tout d'abord, elle propose une modification de la loi de Newton alors qu'on sait que celle-ci découle de la relativité générale. Plusieurs tentatives ont été faites pour incorporer MOND dans un cadre relativiste, et la version la plus élaborée est appelée TeVeS (pour tenseur-vecteur-scalaire), une extension de la relativité générale dans laquelle le champ de gravitation possède, en plus de sa composante tensorielle habituelle, une composante vectorielle et une composante scalaire. Ensuite (et ce point est relié au précédent) les conséquences de MOND sur la cosmologie sont difficiles à évaluer en l'absence d'une version relativiste²⁵. On trouve tout de même des études qui confrontent MOND à des observations cosmologiques, comme par exemple à l'observation du rayonnement de fond cosmologique par WMAP²⁶ ou celles des grandes structures en général²⁷. Cette dernière étude, par exemple, conclut que seule l'observation précise du troisième pic acoustique pourrait permettre de trancher avec l'hypothèse de matière noire froide : MOND prédit que les pics successifs sont d'amplitude de plus en plus faible, contrairement aux scénarios de matière noire. Les premières confrontations de la théorie MOND avec les données lui semblent défavorables²⁸, l'amplitude observée du troisième pic étant trop grande. Ce n'est pas le dernier mot pour MOND, car on peut imaginer des scénarios dans lesquels l'amplitude du troisième pic serait finalement assez élevée, notamment si les neutrinos ont une masse assez élevée (une hypothèse de plus en plus difficile à tenir).

3.3.2 Balistique galactique : l'amas de la boulette

Les amas de galaxies permettent de tester conjointement l'hypothèse MOND et l'hypothèse de matière noire. En effet, dans le premier cas le champ de gravitation « suit » le champ de matière visible, alors que dans le second, le champ de gravitation suit la matière noire qui est distribuée de façon différente de la matière visible. Or dans certains amas de galaxies, ces deux composantes sont séparées spatialement. C'est en particulier le cas de l'amas de galaxies nommé 1E0657-56 ou 1E0657-558 selon les auteurs, et plus connu par les anglo-saxons sous le sobriquet de « Bullet Cluster »²⁹. Découvert en 1995 dans le domaine des rayons X, il contient en effet une structure visible dans ces longueurs d'onde sous une forme qui évoque le sillage d'une balle de fusil. On découvre en 1998 qu'il s'agit d'un couple d'amas en interaction, la balle étant constituée du coeur d'un des amas qui a traversé l'autre.

L'étude de cet amas permet d'obtenir des contraintes intéressantes sur la nature et sur les propriétés de la matière noire. En 2003, une première étude indique que les propriétés observées sont compatibles avec l'hypothèse que la matière noire est formée de particules sans interactions mutuelles³⁰. En revanche, les hypothèses de gravité modifiée sont défavorisées par cette étude. Cette étude, ainsi que la suivante³¹, reconstruit le potentiel

25 Cependant, voir A. Lue & G.D. Starkman, « *Squeezing MOND into a Cosmological Scenario* », Physical Review Letters **92** (2004) id. 131102 [astro-ph/0310005].

26 S. McGaugh, « *Confrontation of MOND Predictions with WMAP First Year Data* », The Astrophysical Journal **611** (2004) 26 [astro-ph/0312570].

27 C. Skordis, D. F. Mota, P. G. Ferreira, C. Boehm, « *Large scale structure in Bekenstein's theory of relativistic MOND* », Physical Review Letters **96** (2006) id. 011301 [astro-ph/0505519].

28 A. Slosar, A. Melchiorri, J. Silk, « *Test of modified Newtonian dynamics with recent Boomerang data* », Physical Review **D72** (2005) id. 101301 [astro-ph/0508048].

29 Je l'appellerai l'**amas de la boulette**, qui sonne mieux que l'amas de la balle.

30 D. Clowe ; A. Gonzalez ; M. Markevitch ; « *Weak lensing mass reconstruction of the interacting cluster 1E0657-558: Direct evidence for the existence of dark matter* », The Astrophysical Journal **604** (2004) 596 [astro-ph/0312273].

31 D. Clowe et al. , « *A direct empirical proof of the existence of dark matter* », The Astrophysical Journal **648** (2006) L109 [astro-ph/0608407].

gravitationnel de l'amas en se basant sur les effets de lentilles gravitationnels faibles, et en déduit la distribution de masse responsable de ce potentiel. La matière baryonique est quant à elle détectée grâce aux observations en rayons X. Cette approche avait déjà été suivie par de nombreuses équipes et ne constitue pas l'originalité de ce travail. Dans le cas précis de cet amas, et contrairement aux cas usuels, la distribution de matière baryonique (le gaz) est décalée par rapport aux centres des puits de potentiel gravitationnel. Dans le cadre de la matière noire, cette propriété s'explique facilement : lors de l'interaction entre les amas de galaxies, les composantes non collisionnelles (les galaxies et la matière noire) se sont traversées sans se voir, continuant leur chemin après la rencontre, seulement freinées par leur attraction gravitationnelle. En revanche, la composante collisionnelle (le gaz responsable de l'émission en X) a subi un choc au moment de la rencontre, ce qui l'a freinée et laissée en arrière.

Par contre, il semble plus difficile a priori d'expliquer cette observation par des théories de gravité modifiée, car on s'attend à ce que la distribution de potentiel soit alors centrée sur la distribution de masse baryonique, en contradiction avec les observations.

Tout ceci a conduit à l'annonce de la victoire triomphale de l'hypothèse de la matière noire sur les défenseurs des théories de la gravité modifiée, et même à la « mort de MOND ». Toutefois, si ces résultats peuvent embarrasser les MONDiens, ils ne permettent pas, pour le moment, de justifier ces affirmations catégoriques. En effet, même dans MOND, la distribution de potentiel n'est pas nécessairement centrée sur celle de la masse. Angus et ses collaborateurs avaient montré³² qu'une distribution de masse présentant trois maxima pouvaient donner des effets de lentille gravitationnelle (calculés par MOND) qui ressembleraient fortement aux effets de deux masses, calculés par la relativité générale usuelle. En d'autres termes, une même observation pourrait être interprétée de deux façons radicalement différentes, et peut-être toutes deux cohérentes.

Cette étude générale fut suivie par une autre³³, s'intéressant au cas particulier de l'amas de la « Bullet ». Cette même équipe montra alors que même dans le cas de MOND, une composante de matière peu collisionnelle devait être présente dans des proportions importantes pour rendre compte des effets observés. On pourrait penser que la proposition MOND n'apporte rien dans ce contexte, puisque de la matière noire doit être introduite. Ce n'est pas tout à fait le cas, car dans le cas de MOND cette matière noire pourrait être constituée de neutrinos, pourvu que leur masse soit de l'ordre de 2 eV (dans les analyses usuelles basées sur la relativité générale, un tel candidat ne permet pas d'expliquer la concentration de matière noire formant les halos galactiques). Ces neutrinos ne joueraient pas un grand rôle sur la dynamique des galaxies, car ils seraient distribués de façon très diffuse et très homogène à cette échelle. Cette possibilité avait été proposée par Sanders³⁴ en 2002 et étudiée par Pointecouteau et Silk³⁵ en 2005. Cette hypothèse aurait pu être falsifiée par les mesures directes de la masse des neutrinos, en particulier par l'expérience KATRIN si elle avait été réalisée aux alentours de 2009 comme initialement prévu. Elle le fut par les MONDiens eux-mêmes, qui montrèrent que cette solution, si elle explique les observations au niveau des amas, ne convient pas au niveau des groupes de galaxies³⁶. Les propositions ultérieures, faisant appel à un neutrino stérile de 11 eV, par exemple, sont beaucoup moins attirantes, forçant à dépasser le modèle standard de la physique des particules et retombant de fait dans les travers qu'elles étaient censées éviter.

On peut noter que les interactions entre les partisans des différentes solutions au problème

32 G.W. Angus ; B. Famaey ; H.S. Zhao, « Can MOND take a bullet? Analytical comparisons of three versions of MOND beyond spherical symmetry », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 371, Issue 1, pp. 138-146, astro-ph/0606216

33 G.W. Angus ; H. Shan ; H.S. Zhao ; B. Famaey, « On the proof of dark matter, the law of gravity, and the mass of neutrinos », *The Astrophysical Journal*, 654 (2007) L13-L16, astro-ph/0609125.

34 R.H. Sanders, « Clusters of galaxies with modified Newtonian dynamics », *Monthly Notice of the Royal Astronomical Society*, Volume 342, (2003) 901-908, astro-ph/0212293.

35 E. Pointecouteau ; J. Silk, « New constraints on MOND from galaxy clusters », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 364 (2005) pp. 654-658, astro-ph/0505017.

36 Angus, G. W.; Famaey, B.; Buote, D. A. , « X-ray group and cluster mass profiles in MOND: unexplained mass on the group scale », *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 387 (2008) 1470-1480

de la matière noire n'est pas toujours très saine. On lit par exemple dans l'introduction de [Angus 2008] :

« The only alternative [to MOND] uses cold dark matter particles without any experimental motivation in massive, triaxial halos to provide the additional gravity needed to boost the rotation velocities of the systems with an acceleration discrepancy. »

ce qui, en mettant de côté tout esprit partisan, représente une description assez partielle, voire malhonnête, des motivations pour introduire de la matière noire sous forme de particules. On trouve autant de mauvaise foi de l'autre côté, bien évidemment !

Les amas de galaxies en collision constituent des systèmes de choix pour étudier le rapport entre la matière baryonique sous forme de gaz, celle sous forme d'étoiles, et la matière noire. Le cas de la Bullet Cluster que nous venons de décrire fournit des informations importantes sur la matière noire, mais celui d'Abell 520 est plus troublant. Cet amas en collision a été étudié par Mahdavi et al.³⁷, qui l'ont qualifié de « cosmic train wreck », un carambolage cosmique. La situation dans cet amas est très différente de celle du Bullet Cluster, car la matière noire y occupe cette fois des régions différentes de celle occupée par les galaxies. Or, si ces deux composantes n'ont que des interactions gravitationnelles, on s'attend à les trouver au même endroit. Ce résultat³⁸ suggérerait que la matière noire pourrait avoir des interactions autres que gravitationnelles. Toutefois, la qualité des observations menant à ces conclusions semble discutable, les différents groupes qui ont observé Abell 520 sont arrivés à des conclusions différentes.

3.3.3 L'affaire Cooperstock et Tieu

Je vais présenter une des nombreuses controverses liées au problème de la matière noire, comme on en rencontre quelques-unes tous les ans, plus ou moins médiatisées. J'ai eu l'occasion de me pencher sur celle-ci, ayant été consulté pour l'exposer à plusieurs reprises, au sein du GdR PCHE puis à l'occasion de plusieurs séminaires.

Deux auteurs, Cooperstock et Tieu, ont proposé³⁹ que les anomalies de courbes de rotation ne soient pas dues à de la matière noire, mais « simplement » à des effets de non-linéarité de la relativité générale, la physique newtonienne n'étant selon eux pas une limite adaptée à l'échelle galactique. Cette proposition a soulevé un grand scepticisme, car d'une part la validité de la physique classique pour étudier la rotation des galaxies semblait bien établie, et d'autre part le papier est assez confus et ne montre pas vraiment où l'approximation classique devient fautive dans les traitements habituels. Plusieurs réactions ont alors signalé des incohérences dans cette approche. Par exemple, Korzynski⁴⁰ indique que la distribution de matière choisie par ces auteurs est singulière, et que les effets mis en évidence ne viennent pas spécifiquement de la relativité générale mais plutôt de la singularité non physique introduite dans le modèle. Vogt et Letelier⁴¹ indiquent que la distribution de matière adoptée est de type exotique, c'est-à-dire présentant des régions où la densité d'énergie est négative. Enfin, Garfinkle montre⁴² en se basant sur des arguments post-newtoniens que la situation envisagée par Cooperstock et Tieu n'est pas viable d'un point de vue formel. Les auteurs originaux ont répondu à ces critiques⁴³ et maintiennent leur position initiale.

37 A. Mahdavi, H. Hoekstra, A. Babul, D. Balam, P. Capak, « A dark core in Abell 520 », The Astrophysical Journal **668** (2007) 806 [astro-ph/0706.3048].

38 Mahdavi, A. ; Hoekstra, H. ; Babul, A. ; Balam, D. ; Capak, P. , « A Dark Core in Abell 520 », The Astrophysical Journal, Volume 668, Issue 2, pp. 806-814

39 F.I. Cooperstock; S. Tieu , « General relativity resolves galactic rotation without exotic dark matter », astro-ph/0507619.

40 M. Korzynski , « Singular disk of matter in the Cooperstock and Tieu galaxy model », astro-ph/0508377.

41 D. Vogt; P.S. Letelier, « Presence of exotic matter in the Cooperstock and Tieu galaxy model », astro-ph/0510750.

42 D. Garfinkle , « The need for dark matter in galaxies », Classical and Quantum Gravity 23 (2006) pp. 1391-1392, astro-ph/0511082

43 F.I. Cooperstock; S. Tieu , « Perspectives on Galactic Dynamics via General relativity », astro-ph/0512048.

Cependant, D. Cross⁴⁴ présente une analyse poussée du problème, et montre plusieurs problèmes dans l'analyse de Cooperstock et Tieu. Notamment, la métrique utilisée ne peut pas décrire la rotation différentielle d'une galaxie, et les développements limités présentés auraient dû être faits avec des paramètres sans dimension. En analysant ce même problème dans un référentiel comobile (comme dans l'article original) puis dans un référentiel non comobile, Cross montre que l'effet proposé par Cooperstock est présent en principe, mais beaucoup trop faible pour expliquer la platitude des courbes de rotation dans les galaxies. L'effet vient du couplage de la métrique au moment angulaire de la Galaxie, qui est beaucoup trop faible en général.

Ceci n'a pas clos le débat, puisque Cooperstock et Tieu sont revenus à la charge⁴⁵, ainsi que plusieurs détracteurs^{46,47}, mais ce débat semble s'estomper et ne provoque pas de grand remous dans le domaine de la matière noire.

4. Astrophysique des particules

La question de la matière noire a profondément changé le paysage de la recherche en physique des particules et a aussi affecté celui de l'astrophysique. Une partie de la communauté de la physique des particules et de la physique théorique s'est tournée vers cette question, apportant évidemment l'expertise sur les méthodes expérimentales spécifiques pour la détecter ainsi que sur les modèles théoriques sous-jacents. Le rapprochement de cette communauté vers des questions d'ordre astrophysique a aussi eu des conséquences sur le fonctionnement même de la recherche en astrophysique. Plusieurs grands projets astrophysiques ont ainsi été conçus comme des expériences autant que comme des campagnes d'observation, conduites dans le cadre de grandes collaborations, précédées par des simulations pour estimer les signaux et les bruits, recherchant des événements identifiés grâce à des triggers et triés grâce à des coupes statistiques et s'appuyant sur des chaînes d'analyse complexes similaires à celles familières en physique des particules. En France, les exemples d'EROS (voir le [paragraphe 3.1.2](#)) et de SNLS sont à cet égard exemplaires.

On utilise aujourd'hui le terme « astrophysique des particules » pour désigner l'ensemble des activités liées à la physique des hautes énergies et à l'astrophysique, ainsi que la communauté concernée.

5. Détection

L'hypothèse que la matière noire pourrait être constituée de particules d'un type nouveau ne peut être validée que par la détection de ces particules. On parle de **détection directe** lorsqu'on cherche à mettre en évidence le passage d'une particule de matière noire dans un détecteur spécialement conçu. On est alors sensible à la matière noire locale, au niveau de la Terre. On parle de **détection indirecte** lorsqu'on cherche à voir des particules émises par l'annihilation de particules de matière noire (des neutrinos, des photons, des positons, des antiprotons, par exemple). On est alors sensible à la matière noire présente à l'endroit où se produit l'annihilation, ce qui peut correspondre à des endroits éloignés de la Terre.

► 5.1 Détection directe

La détection directe consiste à rechercher les signaux provenant de la collision entre une particule de matière noire et un noyau présent dans un détecteur. On distingue trois types de signaux :

44 D.J. Cross, « Comments on the Cooperstock-Tieu Galaxy Model », astro-ph/0601191

45 F.I. Cooperstock; S. Tieu, « Galactic Dynamics via General Relativity: A Compilation and New Developments », Int. J. Mod. Phys. A22:2293,2007, astro-ph/0610370

46 D. Vogt, P. S. Letelier, « Exact General Relativistic Rotating Disks Immersed in Rotating Dust Generated from van Stockum Solutions », IJMPD, astro-ph/0611428

47 Dylan Menzies, Grant J. Mathews, « Comment on the Relativistic Galactic Model by Cooperstock and Tieu », astro-ph/0701019

- ionisation : la collision peut ioniser des atomes du détecteur, et les électrons ainsi libérés peuvent être collectés, grâce à l'application d'un champ électrique ;
- scintillation : de la lumière peut être émise à l'issue de la collision, par désexcitation radiative des atomes atteints par la matière noire. Ceci nécessite l'emploi de milieux scintillateurs, comme le NaI (dopé au tantale), le LXe ou le CaF2 ;
- recul : le recul du noyau atteint excite des phonons dans le milieu, et ceux-ci peuvent être mesurés grâce à des bolomètres très sensibles.

La difficulté expérimentale de la détection directe consiste à reconnaître un éventuel signal dû à la matière noire, à le discriminer du bruit de fond, les neutrons et les rayons cosmiques atteignant les détecteurs pouvant aussi engendrer ces trois types de réponse, dans des proportions différentes toutefois. Ainsi, en étudiant simultanément deux types de réponse, on peut atteindre des taux de réjection du bruit de fond permettant d'espérer voir la matière noire. Les différentes expériences n'ont pas tous adopté la même stratégie et on trouve toutes les combinaisons possibles :

- ionisation et recul : EDELWEISS, CDMS ;
- scintillation et recul : CRESST ;
- ionisation et scintillation : XENON10 (2006-2007), XENON100 (2007-2010), ZEPLIN2, ZEPLIN3, LUX utilisent du xénon (une phase liquide pour la scintillation et une phase vapeur pour l'ionisation), ArDM utilise de l'argon, XMASS-II, WARP.

Certaines expériences n'utilisent qu'un signal :

- la scintillation (DAMA/LIBRA, XMASS, ZEPLIN, mini-CLEAN, CoGENT) ;
- l'ionisation (CoGENT) ;
- le recul : CUORE ;
- certaines utilisent le principe des chambres à bulles, le passage d'une particule de matière noire dans un milieu surchauffé pouvant provoquer l'apparition de bulles (SIMPLE, PICASSO, COUPP).

Pour interpréter les résultats de ce type de recherche de matière noire, il faut pouvoir calculer le taux de collisions entre les particules de matière noire et les atomes du détecteur. Il s'écrit

$$\frac{dN}{dt} \propto \frac{\rho}{m} \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \frac{f(v)}{v} dv,$$

où $f(v)$ désigne la distribution des vitesses et où les bornes de l'intégrale sur la vitesse sont données d'une part par la vitesse minimale v_{\min} que doivent avoir les particules de matière noire pour engendrer un signal détectable par l'instrument, et d'autre part par la vitesse maximale v_{\max} que peuvent avoir les particules du halo de matière noire (v_{\max} dépend de la vitesse de libération). Pour une expérience détectant le recul, avec un seuil en énergie E_R , un calcul cinématique montre que

$$v_{\min} = \frac{M+m}{m} \sqrt{\frac{E_R}{2M}}.$$

Les expériences ont intérêt à diminuer v_{\min} , en diminuant le seuil E_R autant que possible. Le taux de collision dépend finalement de la densité locale de matière noire et de la structure de l'espace des phases décrivant la matière noire, ce qui constitue une incertitude majeure. Il dépend aussi de la vitesse de la Terre par rapport au halo. Du fait du mouvement de la Terre autour du Soleil, on s'attend à une modulation annuelle du signal de détection directe. L'expérience DAMA présente depuis plusieurs années des résultats indiquant une telle modulation, mais la communauté reste sceptique, les autres expériences ne parvenant pas aux mêmes conclusions.

Il faut aussi connaître les propriétés de l'interaction entre la particule de matière noire et les atomes du détecteur, ce qui est possible si on se place dans un cadre théorique donné (par exemple la supersymétrie), avec des paramètres donnés. Avec certains détecteurs, on peut distinguer les interactions qui dépendent du spin de celles qui n'en dépendent pas.

► 5.2 Une quête ingrate

La détection de matière noire est un objectif excitant et noble, mais la réalité quotidienne de

la recherche associée à ce but est plutôt ingrate : on cherche à détecter une particule dont on ne connaît pas les propriétés a priori, ni précisément la distribution spatiale. Imaginez un chasseur en quête d'un animal dont il ne saurait ni la taille, ni les habitudes, ni la répartition géographique, à peine l'habitat...

Le premier point complique énormément les tentatives de détection directe, en cherchant les traces de son passage à travers un détecteur (par l'ionisation qu'elle provoque, ou le recul qu'elle communique aux noyaux présents), car on ne connaît pas a priori les sections efficaces d'interaction de l'hypothétique particule recherchée avec la matière qui constitue le détecteur. Ceci rend tout aussi difficile les tentatives de détection indirecte, en cherchant les produits d'annihilation de cette particule, car on ne connaît pas a priori les sections efficaces d'annihilation dans les différents canaux.

En pratique, la recherche se fait à l'aveugle, en présupposant un modèle théorique (par exemple un modèle supersymétrique particulier). On explore l'espace des paramètres libres de ce modèle, chaque jeu de paramètres fixant les propriétés des nouvelles particules, en particulier leurs interactions qui déterminent les possibilités de détection directe et indirecte. La supersymétrie introduit une centaine de paramètres indépendants, et il est absolument impossible d'explorer de façon approfondie un espace de dimension si élevée. Les études s'intéressent généralement à des versions contraintes de la supersymétrie, dans lesquelles des hypothèses de symétrie ou d'unification permettent de diminuer sensiblement le nombre de paramètres.

On peut aussi s'intéresser à des descriptions effectives des particules de matière noire, les seuls paramètres qui jouent un rôle important étant leur masse, leur spin et leurs sections efficaces d'annihilation dans le canal considéré, ou d'interaction avec le détecteur.

Le second point n'est pas beaucoup plus encourageant : si la distribution spatiale de la matière noire galactique est connue dans ses grandes lignes, grâce à l'analyse des courbes de rotation, et dans une moindre mesure grâce aux simulations cosmologiques, il reste deux grandes incertitudes. D'une part la distribution de matière noire au centre de la galaxie est mal connue, car la masse y est dominée par la matière visible. D'autre part, on ne dispose pas d'une description à petite échelle de la densité de matière noire. Or les perspectives de détection, directe ou indirecte, sont extrêmement sensibles à la structure locale de la distribution de matière noire, grumeaux, queues de marée, fluctuations locales de densité. L'augmentation du signal exotique dû à ces structures peut atteindre un facteur 100 ou 1000 dans certaines publications. Nous reviendrons sur ce point important au [chapitre 3](#).

Un dernier point que nous avons déjà mentionné au [paragraphe 3.2.2](#) vient assombrir encore ce tableau. Les particules ayant une section efficace d'annihilation actuelle élevée semblent a priori plus prometteuses en termes de chances de détection indirecte. Toutefois, l'abondance relique de ces particules est d'autant plus faible que la section efficace d'annihilation était importante au moment du découplage cosmologique de ces particules, et les particules qui s'annihileraient le plus facilement aujourd'hui sont aussi celles qui se sont déjà beaucoup annihilées dans le passé, sauf cas particulier, si la section efficace au moment du découplage a été particulièrement faible, ou si la section efficace a radicalement augmenté depuis, ce qui peut arriver pour certaines valeurs des paramètres supersymétriques, par exemple.

La recherche de matière noire sous forme de particules attend encore sa révolution, qui pourrait survenir sous deux formes :

- la confirmation expérimentale d'une extension ou d'une révision du modèle standard de la physique des particules, notamment au LHC ;
- la détection directe de particules non décrites par le modèle standard, dépourvue de toute ambiguïté.

► 5.3 Faux positifs

L'excitation à l'idée de découvrir des signaux indirects issus de la matière noire ne doit pas faire oublier la prudence. Lorsqu'on détecte un signal astrophysique dont on ne comprend pas l'origine, il convient de ne pas l'attribuer trop rapidement à la présence de matière noire, comme ce fut le cas pour l'excès de positons au centre de notre galaxie, pour l'excès du

flux de positons détecté vers 10 GeV par HEAT puis PAMELA ou celui observé au-dessus de 100 GeV par Fermi/Glast. Ceci peut être à l'origine de frictions entre la communauté astrophysique et la communauté des physiciens des particules.

Dit autrement, dès que quelque chose ne tourne pas rond en astrophysique, on assiste à une bouffée d'articles sur les serveurs de preprints, qui tentent de l'expliquer grâce à la matière noire ou de réfuter une telle explication. Il convient de se rappeler que pour le moment, la matière noire est le nom donné à un problème en astrophysique, pas une solution.

Chapitre 2

Rayons cosmiques

1. Signaux et fonds
2. Propagation
3. Noyaux
4. Antiprotons
5. Positons
6. Origine spatiale

Ce chapitre présente les bases de la plupart des travaux auxquels j'ai participé sur le rayonnement cosmique. Lorsque j'avais abordé ce vaste sujet de recherche, d'abord en collaboration avec Pascal Chardonnet, Pierre Salati, Xiaochun Lou et Joseph Silk [4,6] puis au cours de la thèse de David Maurin, il s'agissait de comprendre la manière dont se propagent les antiprotons, pour être capables de prédire les flux d'origine exotique au niveau de la Terre, pour différents modèles de matière noire. Il est rapidement devenu évident que ce travail serait de longue haleine et qu'il serait nécessaire de bien comprendre la propagation des noyaux cosmiques usuels si l'on voulait espérer obtenir des informations intéressantes sur la manière dont se propagent les antiprotons, ainsi que les positons d'ailleurs.

Au fur et à mesure que nous comprenions les subtilités de la propagation, nous avons réalisé que nous pouvions aussi contribuer de façon originale à l'étude des rayons cosmiques standard, et nous avons depuis mené de front les études portant sur la détection indirecte de matière noire et celles portant sur la propagation des rayons cosmiques galactiques d'origine non exotique.

Dans la plupart des publications, il est nécessaire de rappeler les bases du modèle de diffusion que nous avons développé, implémenté sous forme numérique puis utilisé dans nos travaux. Ce chapitre commence par présenter la base commune de ces rappels puis s'intéresse aux spécificités des différentes espèces que nous avons étudiées (noyaux stables, espèces radioactives, antiprotons, antideutérons, positons).



1. Signaux et fonds

Si la matière noire est constituée de particules d'un type nouveau pouvant s'annihiler mutuellement, on peut espérer détecter ces particules de manière indirecte, en essayant d'observer les produits de ces annihilations. Il peut s'agir de photons, de neutrinos, de leptons chargés ou de hadrons, c'est-à-dire de particules relativement faciles à détecter. La difficulté de cette approche réside dans la discrimination entre la contribution exotique et la contribution standard au flux de chacune de ces particules. On peut séparer deux groupes de produits d'annihilation :

- les particules neutres (photons et neutrinos) se déplacent en ligne droite depuis l'endroit où elles ont été créées et se prêteraient, en cas de détection, à une véritable astronomie. On peut aussi augmenter les chances de succès de la recherche d'un excès en observant des objets particuliers, dans lesquels on estime que l'annihilation de matière noire est importante ;
- les particules chargées (électrons, positons, noyaux et antinoyaux) sont déviées par le champ magnétique de notre galaxie, ce qui a plusieurs conséquences importantes : d'une part elles peuvent être confinées et leur densité est augmentée par rapport au cas d'une propagation rectiligne, et d'autre part l'information de leur provenance spatiale est perdue.

Nous nous intéressons ici au cas des particules chargées, que nous appellerons de manière un peu restrictive les **rayons cosmiques**.

Il existe de nombreux processus standard, qui ne sont reliés en aucune sorte à la matière noire, susceptibles de produire ou d'accélérer des particules chargées dans la galaxie. Pour mettre en évidence un excès qui pourrait provenir d'annihilations de matière noire, il convient de calculer précisément le flux \mathcal{F}_s qui est dû à ces processus standard, celui \mathcal{F}_{dm} dû à une contribution exotique, ainsi que les incertitudes qui sont associées à ce calcul. Trois situations peuvent se présenter :

- si $\mathcal{F}_{dm} \gg \mathcal{F}_s$, le signal exotique serait si important qu'on l'aurait déjà observé. Le fait qu'on arrive à rendre compte des flux observés sans faire appel à la matière noire exclut presque certainement cette situation. Plus précisément, ce cas de figure permet d'exclure les modèles qui conduisent à cette situation ;
- si $\mathcal{F}_{dm} \ll \mathcal{F}_s$, la matière noire reste cachée dans la contribution standard, à moins de disposer d'une mesure extrêmement précise de cette dernière ;
- si $\mathcal{F}_{dm} \sim \mathcal{F}_s$, il convient d'être extrêmement prudent, en estimant bien les incertitudes théoriques et expérimentales associées à ces deux grandeurs, avant de conclure à la présence ou non d'un excès (par rapport à ce qu'on attend de la contribution standard) imputable à la matière noire.

Dans les études portant sur les rayons cosmiques, cette prise en compte des incertitudes a longtemps été négligée lorsqu'il s'agissait d'expliquer des déviations entre les observations et un modèle théorique, ou de prédire la détectabilité d'une contribution exotique.

Parmi les nombreuses particules susceptibles d'être créées par annihilation de particules exotiques, les antiprotons et les positons méritent une attention particulière. La création de ces particules par des processus standard (spallations) conduit à des abondances relativement faibles, c'est-à-dire qu'un éventuel signal d'origine exotique est moins noyé dans le fond que pour des protons ou des électrons.

Comme ce sont des particules chargées, leur propagation est déterminée par leur interaction avec le champ magnétique galactique, dont les caractéristiques sont encore assez mal connues. Ce champ magnétique possède une composante turbulente, et on peut montrer que la propagation des particules chargées peut alors, sous certaines hypothèses, être décrite par une équation de diffusion. Lorsque c'est le cas, il n'est pas nécessaire de connaître les propriétés du champ magnétique si on parvient à déterminer directement celles du coefficient de diffusion, ce qui est possible grâce à l'étude des noyaux contenus dans le rayonnement cosmique. En effet, la composition chimique et isotopique de ces noyaux est modifiée au cours de leur propagation dans la galaxie, et moyennant plusieurs hypothèses sur les sources du rayonnement cosmique et sur la géométrie de la galaxie, on peut déduire certaines propriétés du milieu diffusant. Ces informations permettent alors de calculer la propagation des antiprotons et des positons, qu'ils soient d'origine standard ou exotique. L'étude des noyaux cosmiques, qui n'a a priori absolument rien à voir avec la matière noire,

joue donc un rôle crucial dans toute étude sur les signaux de détection indirecte de matière noire : elle détermine à la fois le signal et le fond duquel on veut le distinguer.

Je suis impliqué depuis une dizaine d'années dans cette activité de recherche et la compréhension du fond standard de particules chargées a constitué une partie importante de ma réflexion scientifique pendant ces années, en particulier dans des collaborations à géométrie variable avec notamment David Maurin¹, Pierre Salati, Fiorenza Donato, Julien Laval, Laurent Derôme, Antje Putze, Aurélien Barrau et Nicolao Fornengo. Ce chapitre en expose les fondements et donne les clés nécessaires pour aborder les articles joints. Je vais donc ici commencer par discuter les propriétés générales de la propagation diffuse, avant de m'intéresser plus précisément au cas des noyaux cosmiques, des antiprotons puis des positons.

2. Propagation

REF [S1, S2, 9, 11, 13, 15, 16]

► 2.1 L'approximation diffuse

Le mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique \vec{B} est déterminé par la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. Localement, le champ magnétique a pour effet de faire tourner la trajectoire, avec un rayon de courbure donné par le rayon de Larmor

$$R_L = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

où m désigne la masse de la particule, v_{\perp} la composante de la vitesse dans la direction orthogonale à celle de \vec{B} et q la charge électrique de la particule.

Nous sommes ici dans une situation où l'on ne connaît pas la distribution spatiale exacte du champ magnétique, c'est-à-dire que l'on ne dispose pas de carte tridimensionnelle suffisamment précise de \vec{B} . En revanche, les modélisations théoriques de la turbulence magnétique galactique proposent différentes distributions statistiques de ce champ, en particulier le spectre de puissance de sa décomposition de Fourier spatiale

$$\vec{B}(\vec{k}) \propto \iiint \vec{B}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3\vec{r}$$

Dans un champ magnétique turbulent, si la valeur de \vec{B} change de manière appréciable sur un rayon de Larmor, alors le champ magnétique auquel est soumis la particule change rapidement le long de sa trajectoire et celle-ci devient très irrégulière. On peut montrer² que l'on peut décrire la propagation de manière approchée par une équation de diffusion.

Le coefficient de diffusion dépend de l'énergie. En effet, la diffusion s'explique physiquement par le fait que la giration d'une particule dans un champ magnétique l'amène dans une région où le champ magnétique a changé. Le mouvement de la particule est donc sensible aux variations du champ magnétique sur une échelle spatiale de l'ordre de son rayon de giration, qui dépend lui-même de l'énergie. La dépendance en énergie du coefficient de diffusion reflète donc le spectre de puissance des variations spatiales du champ magnétique.

► 2.2 L'équation de diffusion complète

L'équation de diffusion s'écrit, sous sa forme la plus simple enseignée en licence,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N$$

où N désigne le nombre de particules par unité de volume, Δ l'opérateur laplacien et D le coefficient de diffusion, considéré comme une constante dans les applications élémentaires de cette équation. Ici, comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe précédent, le coefficient dépend de l'énergie. Au cours de leur propagation diffuse, les rayons cos-

¹ dont c'était le sujet de thèse de 1999 à 2001.

² V.L. Ginzburg et S.I. Syrovatskii, « The origin of cosmic rays » (Pergamon Press, Oxford, 1964)

Encadré 1 : résolution de l'équation de diffusion

Pour illustrer le principe de la résolution de l'équation de diffusion dans un cas simple, intéressons-nous à une espèce dont les sources sont situées dans le disque galactique et pouvant être détruite par spallation dans le disque. En considérant que le disque est infiniment fin, les spallations et le terme source sont décrits par un delta de Dirac et l'équation de diffusion s'écrit

$$\frac{\partial N}{\partial t} = D\Delta N - 2h\Gamma\delta(z)N + q(r)\delta(z),$$

soit en régime stationnaire

$$D\Delta N - 2h\Gamma\delta(z)N = -q(r)\delta(z).$$

Lorsque le volume de diffusion et la distribution des sources respectent la symétrie de révolution, on se place en coordonnées cylindriques, soit

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - \frac{2h\Gamma}{D} N\delta(z) = \frac{-q(r)}{D} \delta(z).$$

On commence par résoudre l'équation dans le halo,

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} = 0$$

On développe $N(r, z)$ et $q(r)$ sur les fonctions de Bessel $J_0(\zeta_i r/R)$, où ζ_i désigne le i -ième zéro de la fonction J_0 ,

$$N(r, z) = \sum_{i=1}^{\infty} N_i(z) J_0\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) \text{ avec } N_i(z) = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho N(\rho R, z) J_0(\zeta_i \rho) d\rho.$$

Toute la dépendance radiale est maintenant codée dans le poids relatif des fonctions de Bessel. On a alors

$$\frac{\partial N}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i}{R} N_i(z) J_0'\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) \text{ et } \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\zeta_i^2}{R^2} N_i(z) J_0''\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right)$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{\infty} N_i(z) \left[\frac{\zeta_i^2}{R^2} J_0''\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) + \frac{\zeta_i}{R} J_0'\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) \right] + \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) N_i''(z) = 0$$

Or, par définition des fonctions de Bessel,

$$\frac{d^2 J_0}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dJ_0}{dx} = -J_0(x)$$

ce qui permet d'écrire (c'était tout l'intérêt d'utiliser les fonctions de Bessel, fonctions propres de la partie radiale de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques)

$$-\sum_{i=1}^{\infty} N_i(z) \frac{\zeta_i^2}{R^2} J_0\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) N_i''(z) = 0$$

Les fonctions $J_0(\zeta_i r/R)$ forment une base des fonctions qui s'annulent en $r = R$, si bien que

$$N_i''(z) - \frac{\zeta_i^2}{R^2} N_i(z) = 0$$

ce qui, en considérant que $N_i(z = \pm L) = 0$, se résout en

$$N_i = N_i^0 \sinh\left\{ \frac{\zeta_i(L - |z|)}{R} \right\}$$

Cette fonction est solution de l'équation de diffusion partout sauf a priori en $z = 0$. Par continuité, elle est aussi solution dans le disque, c'est donc la solution générale. Les termes en $\delta(z)$ n'ont jusqu'ici joué aucun rôle, mais ce serait une erreur d'en conclure que les phénomènes ayant lieu dans le disque peuvent être oubliés, ne serait-ce parce que le disque contient les sources ! Ces termes déterminent les constantes N_i^0 . On peut le montrer de

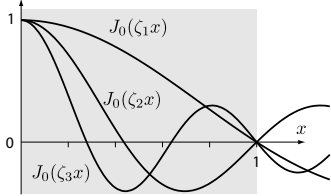


Figure 2.1 - Fonctions de Bessel
Représentation des trois premières fonctions de Bessel intervenant dans le développement des fonctions qui s'annulent en $x=1$.

différentes manières, j'utiliserai ici la méthode basée sur les distributions, parce qu'elle me plaît. La fonction $N_i(z)$ que nous venons d'écrire n'est pas dérivable en $z = 0$, à cause de la valeur absolue. Toutefois, on peut faire le calcul des dérivées au sens des distributions, en écrivant

$$\sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L - |z|)}{R} \right\} = \Theta(z) \left[\sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L - z)}{R} \right\} - \sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\} \right] + \sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\}$$

où $\Theta(z)$ désigne la fonction de Heaviside, valant 1 pour $z > 0$ et 0 pour $z < 0$, et dont la dérivée est $\Theta'(z) = \delta(z)$. On peut ainsi calculer les dérivées de $N_i(z)$ même en $z = 0$ et les injecter dans l'équation de diffusion complète, valable aussi dans le disque. On trouve

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dz} = & \delta(z) N_i^0 \left[\sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L - z)}{R} \right\} - \sinh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\} \right] \\ & - \Theta(z) \frac{\zeta_i N_i^0}{R} \left[\cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L - z)}{R} \right\} + \cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\} \right] + \frac{\zeta_i N_i^0}{R} \cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\} \end{aligned}$$

soit, en remarquant dans le premier terme du membre de droite est identiquement nul car le crochet s'annule en $z = 0$, seul point où la distribution de Dirac n'est pas nulle,

$$\frac{dN_i}{dz} = -\Theta(z) \frac{\zeta_i N_i^0}{R} \left[\cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L - z)}{R} \right\} + \cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\} \right] + \frac{\zeta_i N_i^0}{R} \cosh \left\{ \frac{\zeta_i(L + z)}{R} \right\}$$

On calcule de même la dérivée seconde et en reportant dans l'équation de diffusion originale, on peut identifier les termes en $\delta(z)$, ce qui donne

$$N_i'' = -\frac{2\zeta_i N_i^0}{R} \cosh \left\{ \frac{\zeta_i L}{R} \right\} \delta(z) + \frac{\zeta_i^2}{R^2} N_i.$$

En insérant cette expression dans l'équation de diffusion, on trouve que

$$-\frac{2\zeta_i D N_i^0}{R} \cosh \left\{ \frac{\zeta_i L}{R} \right\} - 2h\Gamma N_i^0 \sinh \left\{ \frac{\zeta_i L}{R} \right\} = -q_i$$

et la solution s'écrit finalement

$$N(r, z) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{A_i} J_0 \left(\frac{\zeta_i r}{R} \right) \frac{\sinh(\zeta_i(L - |z|)/R)}{\sinh(\zeta_i L/R)} \text{ où } A_i \equiv 2h\Gamma + \frac{2\zeta_i D}{R} \coth \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right).$$

► Solution de l'équation de diffusion

Lorsque l'on prend en compte l'effet d'un vent galactique de norme constante, dirigé perpendiculairement au disque galactique, vers l'extérieur, on obtient une expression similaire,

$$N(r, z) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{A_i} J_0 \left(\frac{\zeta_i r}{R} \right) \frac{\sinh(S_i(L - |z|))}{\sinh(S_i L)},$$

avec

$$A_i = 2D \left\{ \frac{1}{r_{\text{spal}}} + \frac{1}{r_{\text{vent}}} + S_i \coth(S_i L) \right\} \text{ et } S_i = \sqrt{\frac{1}{r_{\text{vent}}^2} + \frac{\zeta_i^2}{R^2}}, \quad r_{\text{vent}} = \frac{2D}{V_c}, \quad r_{\text{spal}} = \frac{2D}{\Sigma \sigma v}.$$

Les bords latéraux du volume de diffusion ont un effet relativement faible sur la densité, et dans beaucoup de situations on peut considérer que le volume diffusif n'est pas limité radialement. Dans ce cas, les séries de Bessel deviennent des intégrales, et l'on a

$$N(r, z) = \int_0^\infty \tilde{N}(k) J_0(kr) dk \text{ avec } \tilde{N}(k) \equiv \int_0^\infty r J_0(kr) N(r, z) dr$$

ce qui s'obtient en effectuant la substitution $\zeta_i/R \rightarrow k$ et $\sum_i \rightarrow \int d(kR/\pi)$, en notant que $1/J_1^2(\zeta_i) \approx R\pi\zeta_i/2 \rightarrow k\pi R/2$.

miques sont sensibles à plusieurs effets physiques qui affectent leurs abondances et leurs spectres, et qui se traduisent par des termes supplémentaires dans l'équation précédente. Nous allons les passer brièvement en revue, le lecteur est invité à consulter les références citées dans les articles joints pour plus de détails.

2.2.1 Spallations

Les rayons cosmiques se propagent dans un milieu qui contient du gaz, principalement constitué d'hydrogène atomique et d'hélium. Ils peuvent subir des collisions avec ces atomes qui peuvent mener à des réactions nucléaires³ si l'énergie incidente est suffisante. Ces réactions nucléaires conduisent à la destruction du noyau initial et à la formation de nouvelles espèces. Elles doivent être prises en compte dans l'équation de diffusion par un terme de destruction

$$\left. \frac{dN_i}{dt} \right|_{\text{destruction}} = -c\sigma_i^d N_i n_{\text{IS}},$$

où n_{IS} désigne la densité numérique d'atomes dans le milieu interstellaire, et par un terme de source

$$\left. \frac{dN_i}{dt} \right|_{\text{création}} = c \sum_j \sigma_{j \rightarrow i} N_j n_{\text{IS}}.$$

Par souci de simplicité, les expressions ont été écrites pour un seul type d'atome-cible, on les étend facilement pour prendre en compte la composition plus complexe du milieu interstellaire (il est constitué principalement d'hydrogène et d'hélium).

Un ensemble de rayons cosmiques se propageant dans le milieu interstellaire depuis des sources voit sa composition évoluer, certaines espèces étant détruites par spallations, d'autres étant créées. La composition dépend des sections efficaces de spallation des différentes espèces ainsi que de la quantité de matière traversée. Cette dernière est généralement exprimée en termes de **grammage**, c'est-à-dire la densité massique de matière intégrée le long de la trajectoire des particules,

$$x(\ell) = \int_0^\ell \rho ds,$$

elle est souvent exprimée en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$. Pour une espèce dont la section efficace de destruction par spallation vaut σ , la probabilité de survie après avoir traversé un grammage x vaut

$$\mathcal{P} = e^{-\sigma x/m}$$

où m désigne la masse des constituants du milieu interstellaire sur lesquels ont lieu les spallations. Nous reviendrons en détail sur cette notion dans la [section 2.3](#).

2.2.2 Vent galactique

Le milieu dans lequel diffusent les rayons cosmiques n'est pas au repos : d'une part il suit le mouvement de rotation de la galaxie, et d'autre part il est animé d'un mouvement de convection dirigé perpendiculairement au disque galactique, vers l'extérieur. Les rayons cosmiques sont entraînés avec le milieu, ce qui peut se modéliser par un terme convectif dans l'équation de diffusion

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{vent}} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{V}_c N).$$

Au-delà de cette affirmation générale, la forme précise de cette convection est mal connue. On en trouve différentes formes dans la littérature, en particulier :

- un vent uniforme, dont la vitesse V_c de dépend pas de la position dans le halo ;
- un vent dont la vitesse augmente linéairement avec la distance z au plan galactique, $V_c = v_c z$.

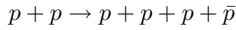
Il faut aussi noter que cette convection s'accompagne d'une expansion du milieu, ce qui se traduit par un terme de perte d'énergie des rayons cosmiques,

³ Ce terme est ici à prendre au sens large du terme, c'est-à-dire qu'il inclut les réactions de physique des particules qui changent la nature des nucléons eux-mêmes.

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{conv}} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{V}_c}{3} \frac{\partial}{\partial E} \left(\frac{p^2 N}{E} \right)$$

2.2.3 Pertes d'énergie

Enfin, plusieurs processus sont susceptibles de modifier l'énergie des rayons cosmiques au cours de leur propagation. Tout d'abord, lors d'une spallation l'énergie de la particule incidente se répartit dans les particules produites. Dans les cas où la particule incidente se fragmente en noyaux plus petits, on peut généralement considérer que l'énergie cinétique par nucléon se conserve au cours de la spallation. C'est une approximation qui permet de simplifier notablement les calculs. Dans les cas où de nouvelles particules sont créées, comme par exemple pour la production d'antiproton



ou la production de positons, cette approximation n'est pas du tout vérifiée.

Par ailleurs, il existe d'autres processus qui modifient l'énergie des rayons cosmiques au cours de leur propagation. On distingue notamment

- les **pertes par ionisation**, qui surviennent lorsqu'un noyau ionise un atome du milieu interstellaire ;
- les **pertes coulombiennes**, associées à l'interaction d'un rayon cosmique avec les ions du milieu interstellaire ;
- les **pertes par rayonnement synchrotron**, qui sont d'autant plus importantes que la masse de l'espèce considérée est faible ;
- les pertes par **diffusion Compton inverse**, lorsqu'une particule chargée (un électron ou un positon) est diffusée par un photon (provenant de la lumière stellaire ou du CMB) ;
- les **pertes adiabatiques** associées au vent galactique.

Ces processus ont des dépendances différentes en énergie, et en pratique on peut se contenter de considérer le processus prédominant, dans une gamme d'énergie donnée, pour une espèce donnée.

En notant $b(E)$ le taux de perte d'énergie,

$$b(E) \equiv \frac{dE}{dt}$$

le terme de perte d'énergie s'écrit de façon générique

$$\left. \frac{dN}{dt} \right|_{\text{pertes}} = - \frac{d}{dE} (b(E)N).$$

2.2.4 Réaccélération diffusive

Les interactions entre les rayons cosmiques et les inhomogénéités magnétiques du plasma interstellaire qui conduisent à la diffusion spatiale s'accompagnent aussi d'une diffusion dans l'espace des impulsions, décrite par une équation de la forme

$$\left. \frac{dN(E)}{dt} \right|_{\text{reac}} = \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1 + \beta^2}{E} D_{pp}^2 N - \beta^2 D_{pp} \frac{\partial N}{\partial E} \right]$$

où D_{pp} désigne le coefficient de diffusion dans l'espace des quantités de mouvement. Ce coefficient est relié au coefficient de diffusion spatiale D , d'une manière qui dépend du type de turbulence considéré (voir [13] pour quelques exemples). Nous avons principalement considéré le cas de la turbulence d'Alfvén, pour laquelle

$$D(E) = D_0 \beta \mathcal{R}^\delta \text{ et } K_{pp} \propto \frac{V_a^2 p^2}{D(E)}$$

où V_a désigne la vitesse d'Alfvén, qui caractérise les ondes magnétiques présentes dans le milieu et responsables des échanges d'énergie avec les rayons cosmiques. Le terme de réaccélération diffusive complique énormément la résolution numérique des équations de propagation. Sans pertes d'énergie, la résolution se fait de manière analytique. Avec seulement les pertes d'énergie, on doit résoudre de manière numérique une équation différentielle du premier ordre, portant sur l'énergie, ce qui se fait sans gros problème. En

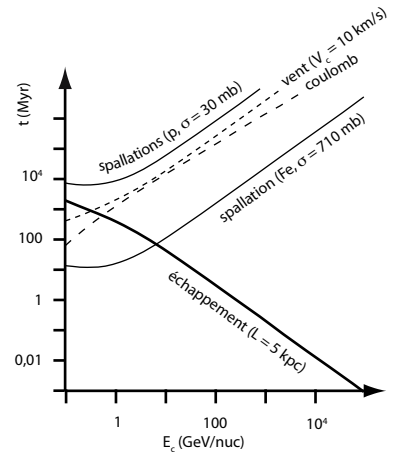


Figure 2.2 - Temps caractéristiques

Évolution des temps caractéristiques associés à différents processus physiques, en fonction de l'énergie cinétique par nucléon.

revanche, la prise en compte de la réaccélération demande de résoudre une équation différentielle du second ordre sur l'énergie, ce qui pose des problèmes numériques sérieux. Il faut d'une part parvenir à exprimer proprement les conditions aux limites associées à cette équation, et d'autre part réduire fortement les instabilités numériques inhérentes à ce type de problème. C'est probablement la raison pour laquelle dans l'approche de Strong et Moskalenko, la réaccélération diffusive a longtemps été traitée séparément des autres effets (voir la section 2.3).

Il n'existe pas de consensus sur l'endroit où se produit la réaccélération dans la galaxie, certains auteurs la situent dans le disque galactique, d'autres dans l'ensemble du halo de diffusion. Les travaux présentés ici considèrent la première possibilité, pour laquelle la résolution semi-analytique est beaucoup plus simple : on obtient ainsi des équations différentielles portant seulement sur les N_i^0 de l'encadré 1, et non des équations aux dérivées partielles portant à la fois sur l'énergie et la position.

2.2.5 Désintégration

Certains noyaux présents dans les rayons cosmiques sont radioactifs. Si leur temps de vie est très court devant les temps typiques associés à la diffusion, on peut considérer qu'ils se désintègrent sitôt formés et ne comptabiliser que leurs noyaux-fils. Dans le cas contraire, il faut prendre les désintégrations de manière plus fine et ajouter un terme de disparition et un terme de production dans l'équation de diffusion. Il faut distinguer la radioactivité β , au cours de laquelle le noyau a une probabilité de désintégration par unité de temps constante, et la radioactivité par capture électronique, pour laquelle le noyau doit avoir un électron dans une couche interne pour pouvoir se désintégrer. Dans le premier cas, les termes supplémentaires dans l'équation de diffusion s'écrivent

$$\left. \frac{dN_i}{dt} \right|_{\text{desint}} = -\frac{N_i}{\tau_i} \text{ et } \left. \frac{dN_i}{dt} \right|_{\text{rad}} = \sum_j f_{j \rightarrow i} \frac{N_j}{\tau_j},$$

où τ_i désigne la constante de temps de la désintégration radioactive, reliée au temps de demi-vie $t_{1/2}^i$ par $t_{1/2} = \tau \ln 2$. Cette constante de temps dépend de l'énergie, du fait de la dilatation relativiste des durées. Elle s'écrit en fonction du facteur de Lorentz

$$\tau_i = \gamma \tau_i^0 /$$

Dans le second cas (capture électronique), il faut aussi prendre en compte la probabilité d'attachement d'un électron, ce qui ne peut se faire que dans le disque de matière. Les équations correspondantes sont assez lourdes et le lecteur pourra les trouver dans la littérature citée en fin de document.

Contrairement au cas des secondaires stables, l'abondance des espèces radioactives ne dépend pas seulement du grammage traversé mais aussi du temps écoulé depuis leur création. On les appelle souvent des horloges cosmiques. La distance typique parcourue par un noyau instable de demi-vie $t_{1/2}$ avant qu'il ne se désintègre est de l'ordre de

$$\ell \sim \sqrt{\gamma D t_{1/2}^0}$$

Pour des espèces ayant des temps de vie de l'ordre du million d'années, des énergies par nucléon inférieures au GeV, et des valeurs raisonnables du coefficient de diffusion, on trouve que $\ell \sim 50$ pc.

2.2.6 Modulation solaire

Lorsque les rayons cosmiques arrivent au voisinage de la Terre, ils ont dû pénétrer dans l'environnement magnétique du Système solaire. L'interaction avec le vent solaire leur a fait perdre de l'énergie, selon un phénomène complexe appelé **modulation solaire**. Cette perte d'énergie dépend des caractéristiques spatiales et spectrales du vent solaire. Une modélisation simple, appelée **force field**, consiste à considérer que la modulation solaire décale l'énergie totale et le flux selon

$$E_{\text{TOA}} = E_{\text{IS}} - \frac{Z\phi}{A} \text{ et } \frac{\phi_{\text{TOA}}(E_{\text{TOA}})}{\phi_{\text{IS}}(E_{\text{IS}})} = \left(\frac{p_{\text{TOA}}}{p_{\text{IS}}} \right)^2$$

noyau	fil	demi-vie
^{10}Be	^{10}B	1,51 My
^{26}Al	^{26}Mg	0,91 My
^{36}Cl	^{36}Ar	0,36 My

Exemples de noyaux radioactifs

Le tableau indique le noyau fils et le temps de demi-vie associés à la désintégration bêta. L'aluminium 26 et le chlore 36 peuvent aussi se désintégrer par capture électronique.

où les quantités modulées sont repérées par l'indice TOA signifiant « top of atmosphere » et les quantités non modulées par IS signifiant « interstellar ». Le paramètre de modulation solaire ϕ qui intervient dans ces relations est censé prendre en compte tous les effets de ce phénomène physique complexe, et cette description est probablement trop simpliste dans certaines situations. Elle permet néanmoins d'estimer les effets de la modulation solaire d'une manière simple.

Attention : on rencontre aussi dans la littérature le paramètre $\Phi \equiv Z\phi/2$ soit $\Phi \approx \phi/2$ pour les noyaux autres que les protons.

La valeur du paramètre ϕ est liée à l'activité solaire et suit le même cycle de 11 ans. Pour comparer à des mesures expérimentales, il faut être en mesure de moduler des spectres théoriques et il faut donc connaître la date des mesures et la valeur de ϕ à ces dates. Ceci peut poser problème si l'on cherche à représenter sur une même courbe des données prises sur des périodes s'étendant sur plusieurs décennies. On peut alors préférer démoduler les données et présenter les flux interstellaires correspondants, mais il faut alors aussi prendre soin de démoduler les barres d'erreur. Les expériences préfèrent généralement fournir les flux observés, c'est-à-dire modulés, alors que les théoriciens préfèrent présenter les flux interstellaires pour que les résultats ne dépendent pas du moment du cycle solaire dans lequel on se trouve.

► 2.3 Complémentarité des espèces

Toutes les espèces de noyaux cosmiques ne sont pas sensibles aux effets précédents de la même façon, et les études conjointes de diverses espèces permettent d'obtenir des informations complémentaires sur la diffusion et sur le milieu dans lequel elles diffusent. On est ainsi amené à séparer les rayons cosmiques en différents ensembles et il existe plusieurs classifications et dénominations différentes, selon le critère choisi pour effectuer cette séparation.

Nous avons déjà mentionné la différence entre :

- les espèces **primaires**, directement issues des sources ;
- les espèces **secondaires**, créées par spallation (d'un primaire ou d'un secondaire) sur le milieu interstellaire.

L'étude des rapports secondaire/primaire permet généralement de limiter les incertitudes associées aux sources de rayons cosmiques. Ces rapports dépendent des sections efficaces nucléaires et des paramètres de diffusion, il est particulièrement sensible au grammage traversé par le primaire (voir la [section 2.5](#)) et donne des contraintes fortes sur le rapport D_0/L .

On regroupe aussi les espèces autour de quelques noyaux primaires dominants, en particulier :

- le groupe BCNO, comprenant l'oxygène, un noyau très abondant et essentiellement primaire ;
- le groupe sub-Fe/Fe, comprenant le fer, lui aussi essentiellement primaire, et ses secondaires (Sc, Ti, V, Cr, Mn).

Les sections efficaces de spallation sont beaucoup plus importantes dans le second groupe que dans le premier, et l'étude des rapports secondaire/primaire des deux groupes permet en principe de désimbriquer l'effet de ces sections efficaces et d'affiner la détermination des autres paramètres (en particulier le rapport D_0/L). En pratique, on ne dispose pas encore de données suffisamment précises et dénuées d'erreurs systématiques pour tirer pleinement parti de cette possibilité. Nous verrons aussi dans la [section 2.6](#) que les noyaux lourds proviennent en moyenne de sources situées plus près de nous que les noyaux légers, ils donnent des informations plus locales sur les caractéristiques de la diffusion. Si le coefficient de diffusion n'est pas homogène et varie dans le disque sur une échelle spatiale inférieure au kiloparsec, il faut être prudent sur la comparaison entre les résultats provenant de l'analyse de ces deux groupes de noyaux : ils ne sont pas forcément sensibles au même coefficient de diffusion, ni aux mêmes autres paramètres de diffusion.

Cette dernière remarque s'applique de manière encore plus forte aux espèces radioactives (et aux électrons/positons) : elles permettent de sonder le milieu galactique sur une échelle spatiale inférieure au dixième de kiloparsec, et les paramètres de diffusion qu'ils permettent d'obtenir pourraient différer de ceux fournis par l'analyse des espèces stables. Nous reviendrons plus en détail sur ce point à la [section 2.6](#).

► 2.4 Résolution semi-analytique

L'équation de diffusion que nous devons résoudre pour calculer la densité de chaque espèce est obtenue en assemblant tous les éléments présentés plus haut. Il s'agit d'un ensemble d'équations différentielles couplées (une par espèce) du premier ordre en temps, du second ordre dans les variables spatiales et du second ordre dans les variables d'énergie.

On peut aborder le problème de manière purement numérique, avec des méthodes standard de résolution de ce type d'équation, en discrétisant le problème. C'est ce que fait par exemple le code `GALPROP` développé par Strong & Moskalenko et utilisé par une grande partie de la communauté des cosmiciens.

La particularité et la force du travail commencé pendant la thèse de David Maurin et prolongé au sein de plusieurs collaborations réside dans la possibilité de résoudre cette équation de manière semi-analytique, moyennant quelques hypothèses simplificatrices :

- le problème respecte la symétrie cylindrique ;
- un régime stationnaire a été atteint ;
- la réaccélération et les pertes d'énergie n'ont lieu que dans le disque ;
- le vent galactique est constant de part et d'autre du disque galactique ;
- le coefficient de diffusion est homogène (on pourrait considérer qu'il soit différent dans le halo diffusif et dans le disque).

On peut alors résoudre la partie spatiale de l'équation de diffusion en développant la densité $N(r, z)$ en série de Bessel, ce qui donne ensuite des équations différentielles ordinaires du second ordre sur l'énergie, portant sur les coefficients de Fourier-Bessel. Les équations couplées ainsi obtenues ont la structure d'une cascade, les noyaux lourds donnant naissance aux noyaux plus légers mais pas l'inverse. En supposant que les spallations se produisent en conservant l'énergie cinétique par nucléon, ces équations peuvent être résolues de manière numérique, par exemple en utilisant la méthode de Crank-Nicholson. Cette procédure présente sur la résolution purement numérique l'avantage d'être beaucoup plus rapide. Ceci nous a permis d'explorer systématiquement l'espace des paramètres de diffusion avec un temps de calcul non prohibitif. On contrôle aussi mieux les erreurs numériques, la partie spatiale en étant dépourvue dans notre cas. Elle présente aussi plusieurs désavantages, en particulier elle est inadaptée si les hypothèses sur lesquelles elle repose ne sont pas vérifiées. On ne peut pas, par exemple, étudier l'effet de la variation du coefficient de diffusion dans le disque ou celle d'une distribution de matière inhomogène ne respectant pas la symétrie cylindrique.

► 2.5 Usine

Ce modèle de propagation a été implémenté numériquement dans un programme en C++ principalement écrit par David Maurin, qui a fait l'énorme travail de chercher dans la littérature les sections efficaces, de comprendre leurs modélisations, de les traduire dans le code, ainsi que de coder les expressions semi-analytiques et la résolution des équations différentielles sur l'énergie. J'ai eu l'occasion de participer à l'élaboration, aux tests et aux développements ultérieurs de ce programme, qui porte aujourd'hui le nom `USINE`. Il est sur le point d'être rendu public, après une réécriture majeure de l'ensemble des classes, toujours par David Maurin. C'est un programme lourd, à la structure complexe et l'équipe⁴ réunie autour de ce projet essaie de faire d'`USINE` un outil accessible et performant.

Le but avoué est de s'affirmer face au programme `GALPROP` développé par Strong et Moskalenko, non pas pour faire en sorte que tout le monde utilise `USINE` à la place de `GALPROP`, mais pour que tout le monde puisse utiliser les deux programmes. La situation actuelle dans laquelle beaucoup d'équipes utilisent `GALPROP` (et seulement `GALPROP`) comme une boîte noire ne nous semble pas satisfaisante et conduit à des aberrations (voir la [section 3.2](#)). Nous pensons qu'avec au moins deux programmes concurrents, basés sur des méthodes de résolution et des hypothèses de base différentes, il sera plus facile et plus naturel d'estimer les incertitudes systématiques, associées à ces hypothèses de base.

⁴ Elle est actuellement composée de David Maurin, Laurent Derôme, Fernando Barao, Antje Putze et moi-même.

Encadré 2 : astuces numériques

REF [S2]

En manipulant les développements de Fourier-Bessel dans des situations différentes, nous avons été amenés à nous poser des questions d'ordre numérique au moment de les évaluer explicitement. Ces développements peuvent converger plus ou moins rapidement selon le terme source considéré, et on peut gagner beaucoup de précision et de temps de calcul en étant astucieux. Je veux ici illustrer ce point par quelques exemples.

Comme pour les développements en série de Fourier usuels, chaque terme de Fourier-Bessel nous informe sur la structure de la solution à une échelle spatiale donnée, les premiers termes décrivant la structure globale, les termes d'ordre élevé les variations à petite échelle. On peut d'ailleurs noter que l'effet de la diffusion est très net sur ce type de développement : à la composante q_i de la source correspond une composante q_i/A_i de la densité. Or le terme A_i croît avec i , via le terme ζ_i : la diffusion a pour effet de couper les contributions d'ordre élevé à la densité, c'est-à-dire de laver les détails fins de la distribution des sources. Dans un langage emprunté au traitement du signal, la diffusion introduit un filtre passe-bas de fonction de transfert $1/A_i$.

Pour des sources distribuées de façon continue sur tout le disque galactique, on peut se contenter de tronquer le développement de Fourier-Bessel au dixième terme. En revanche, une source ponctuelle conduit à une densité très piquée, et le développement doit être poursuivi sur un très grand nombre de termes pour rendre compte de cette variation rapide. Ce problème persiste sous une forme différente avec les intégrales de Fourier-Bessel (dans la limite où $R \rightarrow \infty$) : l'intégrale permettant de calculer les coefficients de Bessel s'étend de 0 à l'infini, et il faut considérer une borne supérieure très grande pour faire le calcul de manière numérique. Une première astuce consiste à utiliser non pas le développement de N , mais celui de la différence de N avec une fonction simple qui a le même comportement dans la partie difficile à décrire. Plus précisément, le comportement de la densité au voisinage de la source est assez insensible à la présence des bords du halo diffusif et on s'attend à ce que la solution soit assez proche de la fonction $N_0(r) = 1/4\pi Kr$. On peut donc écrire

$$N(r) = N_0(r) + (N(r) - N_0(r))$$

et ne développer que le terme entre parenthèses en série de Fourier-Bessel, car le développement de ce terme converge beaucoup plus vite que la fonction originale.

Les coefficients de Bessel de N_0 sont donnés par

$$\tilde{N}_0(k) = \int_0^\infty r \frac{1}{4\pi Kr} J_0(kr) dr = \frac{1}{4K\pi k}$$

et la densité s'écrit alors

$$N(r) = N_0(r) + \int_0^\infty k J_0(kr) \left\{ \tilde{N}(k) - \tilde{N}_0(k) \right\} dk = \frac{1}{4\pi Kr} + \int_0^\infty J_0(kr) \left\{ k\tilde{N}(k) - \frac{1}{4K\pi} \right\} dk$$

La singularité est entièrement contenue dans le premier terme et l'intégrale converge beaucoup plus rapidement, les contributions des k élevées étant de plus en plus faibles.

On peut aussi adoucir le terme source et étaler la fonction de Dirac sur un rayon a , en remplaçant la fonction $\delta(\vec{r})$ par $g(r) = \theta(a-r)/(\pi a^2)$, ce qui assure une convergence plus rapide pour un choix de a judicieux.

Nous travaillons actuellement pour rendre ce code public et permettre aux utilisateurs de l'utiliser à distance via une interface web. Ceci s'inscrit dans un projet plus général, consistant à rassembler sur un site web un ensemble cohérent de données et d'outils relatifs aux rayons cosmiques. Je participe activement à ce projet et j'ai déjà conçu une base de données et une interface permettant d'accéder aux données expérimentales relatives aux noyaux cosmiques⁵. Cette interface permet d'accéder à des expériences données, à des noyaux ou des rapports isotopiques donnés, et propose le résultat de la requête sous forme de liste en format texte ou de macro root permettant de tracer les points de données avec leurs erreurs expérimentales.

► 2.6 Grammage

La notion de grammage fournit une autre manière d'aborder la propagation des rayons cosmiques. Elle jouait un rôle particulièrement important quand le modèle du Leaky Box était employé par la majorité des cosmiciens, mais son intérêt n'a pas disparu lorsque les modèles de diffusion ont pris le relais. Au fil de nos collaborations avec David Maurin, nous avons eu plusieurs occasions de réfléchir sur la place de la notion de grammage dans les différentes manières de décrire les rayons cosmiques, et je voudrais ici présenter une synthèse de ce que j'en ai compris et qu'on ne trouve pas si facilement dans la littérature.

2.6.1 Généralités

La probabilité qu'une particule puisse se propager de sa source à la Terre dépend notamment des spallations qu'elle peut subir, et donc de la quantité de matière rencontrée sur son trajet. Le grammage est défini comme la densité de matière interstellaire intégrée le long du chemin suivi par la particule. Les particules reçues sur Terre ont toutes suivi des chemins différents et l'on parle plutôt de distribution des grammages. Si les pertes d'énergie peuvent être négligées, alors la probabilité qu'une particule émise en une source située en \vec{r}_s parvienne au point \vec{r} sans avoir été détruite par spallation s'écrit

$$\mathcal{P}(\text{indemne}|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}) = \int_0^\infty \mathcal{P}(\text{indemne}|x)\mathcal{P}(x|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}) dx$$

où $\mathcal{P}(x|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r})$ désigne la **distribution des grammages**, c'est-à-dire la probabilité que la particule ait traversé le grammage x et $\mathcal{P}(\text{indemne}|x)$ la probabilité qu'elle ait survécu en traversant ce grammage. Cette dernière quantité se calcule facilement, d'après la définition de la section efficace de destruction σ et du grammage. Pour une espèce primaire en particulier, la probabilité de survie p évolue après traversée du grammage x selon

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\sigma p}{m} \text{ soit } p(x) = p(0)e^{-\sigma x/m} \equiv \mathcal{P}(\text{indemne}|x)$$

ce qui donne, en remarquant que par définition $p(0) = 1$,

$$\mathcal{P}(\text{indemne}|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}) = \int_0^\infty \mathcal{P}(x|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r})e^{-\sigma x/m} dx$$

Cette expression est particulièrement intéressante, car le terme de gauche peut être directement relié à la densité de particules au point \vec{r} , en multipliant par le terme source présent au point \vec{r}_s . Cette expression indique que la distribution des grammages est obtenue par transformée de Laplace de la densité, le paramètre conjugué au grammage x étant le rapport σ/m .

On peut ainsi calculer la distribution des grammages dans tout modèle de diffusion, une fois connue l'expression analytique de la densité en fonction de σ . Dans le cas d'une distribution de sources contenue dans le plan galactique supposé infiniment mince, la densité s'écrit, pour une espèce primaire,

$$N(r, z) = \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{A_i} J_0 \left(\frac{\zeta_i r}{R} \right) \frac{\sinh(\zeta_i(L - |z|)/R)}{\sinh(\zeta_i L/R)} \text{ où } A_i = v\sigma \frac{\Sigma_{\text{ISM}}}{m} + \frac{2\zeta_i D}{R} \coth \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right)$$

où Σ_{ISM} désigne la masse surfacique du disque de matière interstellaire, de l'ordre de

⁵ visibles pour le moment aux adresses http://www.cosmicrays.fr/CR_php/CR2_experiments.php et http://www.cosmicrays.fr/CR_php/CR_demo2.php

$10 \text{ g} \cdot \text{m}^{-2}$. La transformée de Laplace se calcule aisément en utilisant le fait que

$$\frac{1}{a + \sigma/m} = \int_0^\infty e^{-ax} e^{-\sigma x/m} dx$$

et on trouve

$$\mathcal{P}(x|\text{sources} \rightarrow \vec{r}) \propto \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_i}{v\Sigma_{\text{ISM}}} J_0\left(\frac{\zeta_i r}{R}\right) \frac{\sinh(\zeta_i(L-|z|)/R)}{\sinh(\zeta_i L/R)} e^{-x/x_i}$$

avec

$$x_i \equiv \frac{Rv\Sigma_{\text{ISM}}}{2\zeta_i D} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right)$$

On peut noter que pour $x = 0$ (particules n'ayant encore traversé aucune matière), l'expression précédente a bien la même distribution spatiale que les sources. De plus, si la distribution de sources est suffisamment régulière dans le disque, seuls les premiers termes de la somme de Fourier-Bessel contribuent de façon appréciable et le grammage typique vu par les cosmiques est de l'ordre de $x_1 = Lc\Sigma_{\text{ISM}}/2D\zeta_1$ soit environ $10 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-2}$, ce qui indique que les cosmiques traversent typiquement $cL/D \sim 10^4$ fois le disque de matière avant d'être détectés sur Terre.

2.6.2 Calcul probabiliste

REF [S2]

On peut aussi, dans des cas simples, calculer directement $\mathcal{P}(x|\vec{r}_s \rightarrow \vec{r})$. Par exemple, nous avons calculé cette quantité dans le cas d'un disque source homogène, infiniment mince et d'extension radiale infinie. Le calcul se ramène alors à celui de la distribution du nombre n de fois qu'une particule traverse le disque au cours d'une marche aléatoire qui la mène de la source au point \vec{r} considéré, le grammage étant augmenté de Σ_{ISM} à chaque traversée. Le calcul permet de retrouver la distribution des grammages dans ce cas simple. Ce joli calcul nous avait permis de faire le lien entre plusieurs approches analytique et avait fait l'objet d'une note d'un niveau intermédiaire entre un texte destiné à des étudiants et un article de recherche. Elle est disponible sous la forme d'un preprint sur ArXiv [S2], je l'ai aussi reproduite en annexe de ce document.

2.6.3 Séparation de la physique nucléaire et de la propagation

On peut remarquer que les effets des spallations, prenant en compte la physique nucléaire, et la diffusion proprement dite se séparent naturellement lorsqu'on écrit

$$N_i(\vec{r}) = \int_0^x \tilde{N}(\vec{r}, x) \mathcal{G}_i(x) dx.$$

En effet, si l'on impose que la fonction $\mathcal{G}(x)$ obéisse à l'équation nucléaire

$$\frac{d\mathcal{G}_i(x)}{dx} = -\frac{\sigma_i}{m} \mathcal{G}_i(x) + \sum_{j>i} \frac{\sigma_{i \rightarrow j}}{m} \mathcal{G}_j(x),$$

on trouve alors, en injectant l'expression précédente dans l'équation de diffusion, que la quantité $\tilde{N}(\vec{r}, x)$ (la distribution des grammages) obéit à une équation de diffusion généralisée

$$\frac{\partial \tilde{N}(\vec{r}, x)}{\partial t} = K \Delta \tilde{N}(\vec{r}, x) + q(\vec{r}, t) \delta(x) - mv_{\text{ism}}(\vec{r}) \frac{\partial \tilde{N}(\vec{r}, x)}{\partial x}$$

où le dernier terme décrit l'évolution du grammage à la traversée du milieu interstellaire. Le terme source crée des particules de grammage nul, d'où le terme en $\delta(x)$. Attention, cette équation ne prend pas en compte l'influence des spallations au cours de la propagation, elle permet seulement de décrire le grammage que traverserait la particule si les spallations ne la faisaient pas disparaître. La grandeur $\tilde{N}(\vec{r}, x)$ est universelle, elle ne dépend pas du noyau considéré (dans le cadre des approximations considérées ici, en particulier lorsque l'énergie des particules est constante). On peut voir le grammage x comme un compteur associé à la particule et gardant la trace de la quantité de matière qu'elle traverse.

2.6.4 Modèle du Leaky Box

Le modèle du Leaky Box a été très utile dans l'évolution de la compréhension des rayons cosmiques galactiques. Il est basé sur l'hypothèse que les rayons cosmiques sont confinés et sont caractérisés par un temps d'échappement τ_e , qui peut dépendre de l'énergie. Dans ce modèle, l'évolution temporelle de la densité n_i d'une espèce i est supposée obéir à une équation de la forme

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = q - \frac{n_i}{\tau_e} - \Gamma_i n_i + \sum_j \Gamma_{j \rightarrow i} n_j$$

où le phénomène d'échappement est pris en compte comme une probabilité de disparition instantanée à un taux $1/\tau_e$. Ce modèle ne considère aucune dépendance spatiale, en particulier les spallations se produisent de façon uniforme dans toute la zone de confinement. On peut montrer qu'en régime stationnaire, la distribution des grammages est exponentielle. Cette propriété se montre très facilement pour une espèce primaire, la solution est alors donnée par

$$n_i = \frac{q_i}{\Gamma_i + 1/\tau_e} \text{ soit } n_i \propto \frac{1}{\sigma + \sigma_0}$$

avec $\sigma_0 \equiv (n_H v \tau_e)^{-1}$. La transformée de Laplace de cette expression pour la densité n_i , vis-à-vis de la variable σ , est bien une exponentielle. On interprète parfois ce résultat en disant que ce modèle correspond à une zone de propagation uniformément remplie de matière, si bien que le grammage s'identifie au temps passé dans la boîte. La probabilité de disparition par unité de temps étant constante au cours du temps, la probabilité de survie est bien exponentiellement décroissante en fonction du temps, et donc aussi du grammage. Toutefois, il est très délicat de trouver une réalisation physique du Leaky Box : il faut que toutes les quantités physiques soient uniformes, ce qui n'est pas le cas dans un modèle de diffusion. Par ailleurs, dans le Leaky Box la probabilité qu'une particule s'échappe doit aussi être uniforme dans la zone de confinement, ce qui n'est pas vrai en pratique : une particule située au cœur de la zone de propagation a une probabilité d'échappement plus faible car elle doit d'abord atteindre un bord pour pouvoir s'échapper. Il faut donc voir le Leaky Box comme une modélisation effective d'une situation physique plus complexe, plutôt que comme une modélisation physique simple de la propagation.

REF [2,9,11,13,15,29]

3. Noyaux cosmiques

► 3.1 Les différentes espèces

Les différentes espèces nucléaires présentes dans le rayonnement cosmique ont des histoires de propagation très différentes, et fournissent des informations complémentaires sur les paramètres de propagation. On peut classer ces espèces en plusieurs grandes catégories.

Les noyaux primaires sont ceux qui nous parviennent du site où ils ont été accélérés (leur source) sans avoir été détruits. Par exemple, l'oxygène est un noyau essentiellement primaire. Certains des noyaux qui auraient pu atteindre la Terre ont subi des collisions avec le milieu interstellaire qui ont donné naissance à d'autres noyaux, qu'on appelle les noyaux secondaires. Par exemple, le bore est essentiellement secondaire.

En réalité, les noyaux ne sont ni purement primaires ni purement secondaires, par exemple de l'oxygène peut être formé par spallation de noyaux plus lourds et contient une composante secondaire. On peut noter cependant que dans la plupart des cas, le caractère primaire ou secondaire d'un noyau est dénué d'ambiguïté. Par définition, les primaires diffusent directement depuis les sources, alors que les secondaires diffusent depuis l'endroit où ils ont été créés, c'est-à-dire depuis un endroit lui-même atteint par diffusion par le primaire. On ne s'étonnera donc pas que le rapport secondaire sur primaire S/P (le secondaire étant issu du primaire considéré) soit très sensible au coefficient de diffusion $D(E)$. Dans le cas le plus simple où l'on ne prend pas en compte les spallations, le vent convectif et les pertes d'énergie, ce rapport est inversement proportionnel à $D(E)$. On peut ainsi, en mesurant l'évolution du rapport S/P en fonction de l'énergie, avoir accès au coefficient de diffusion.

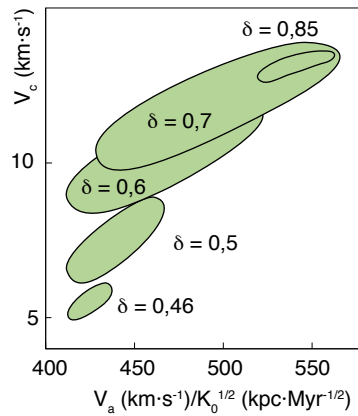
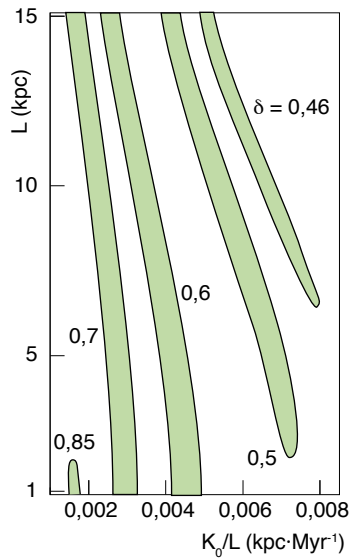


Figure 2.3 - Contraintes sur la propagation

Adaptation des figures obtenues dans [9], montrant les régions de l'espace des paramètres compatibles avec les données B/C de la mission HEAO-3.

Quand on rentre dans les détails, on se rend compte que le rapport S/P dépend de tous les paramètres de diffusion et de la géométrie du volume de diffusion et que sa mesure ne permet que d'établir des relations entre ces paramètres et non de les déterminer individuellement. En particulier, la comparaison des mesures de B/C avec les valeurs issues de modèles de diffusion permet de contraindre les régions permises dans l'espace des paramètres de propagation.

Les figures ci-contre montrent les contraintes que nous avons obtenues en 2001 sur les paramètres de propagation D_0 , L , V_c et V_a , en ajustant les modèles théoriques sur les données de B/C obtenues par le satellite HEAO-3. Ces résultats ont été extrêmement importants dans la suite de nos études : nous disposons de l'ensemble des valeurs des paramètres de diffusion compatibles avec les rapports B/C observés, et toute étude ultérieure sur d'autres espèces (antiprotons, positons, noyaux radioactifs) se devait de considérer seulement ces valeurs de paramètres.

On peut remarquer que pour une valeur de δ donnée, les incertitudes sur D_0/L sont réduites, ce qui reflète le fait que cette quantité est directement liée au grammage traversé. On peut donc espérer réduire fortement les incertitudes si le type de turbulence magnétique responsable de la diffusion était connu. Cette avancée pourrait venir des théoriciens et astronomes travaillant dans le domaine de la magnétohydrodynamique galactique

► 3.2 Monte Carlo par chaînes de Markov (MCMC)

REF [29]

La recherche des paramètres de diffusion compatibles avec les données avait été réalisée, dans [9, 13], en quadrillant systématiquement l'espace des paramètres, en survolant rapidement les régions évidemment défavorables. Cette méthode est sûre mais peu efficace et coûteuse en temps. J'ai participé⁶ au développement d'une autre méthode d'exploration de l'espace des paramètres beaucoup plus efficace, basée sur des chaînes de Markov.

Elle consiste à réaliser des marches au hasard dans l'espace des paramètres en se basant sur quelques règles simples : à chaque pas, on tire au sort la direction du suivant, ce qui donne un nouveau jeu de paramètres. On calcule les prédictions théoriques du modèle associé au nouveau jeu de paramètres et on calcule l'écart entre ces prédictions et un jeu de données fixé d'avance. Si l'écart est trop grand, on rejette ce nouveau pas et on repart de l'ancien. Si en revanche l'écart est suffisamment petit, on accepte ce nouveau pas et

⁶ En collaboration avec Laurent Derôme, Antje Putze, David Maurin et Laurence Perotto

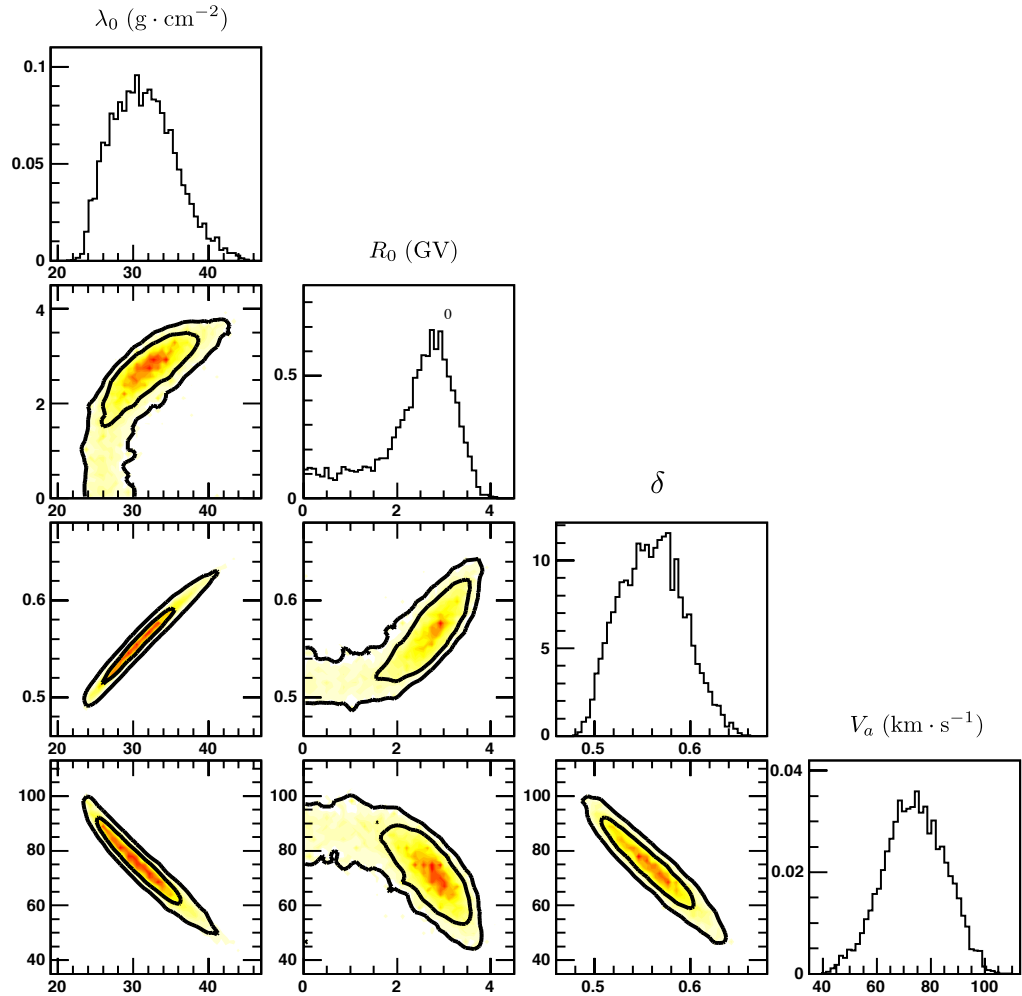


Figure 2.4 - Exemple de résultats du MCMC

Régions de l'espace des paramètres où la vraisemblance des modèles est élevée. Ces figures ont été obtenues pour une des méthodes que nous avons utilisées pour explorer l'espace des paramètres.

on répète la procédure à partir de ce nouveau point.

On peut montrer que sous certaines conditions assez lâches, la chaîne ainsi obtenue est représentative de la vraisemblance des différents modèles, dans le sens où la chaîne passe d'autant plus souvent dans une région de l'espace des paramètres que la vraisemblance des modèles associés est importante (pour le jeu de données considéré). La puissance de cette technique réside dans le fait que le temps de calcul croît lentement avec la dimensionnalité de l'espace des paramètres. Le temps de calcul est optimisé, la chaîne allant naturellement explorer les régions les plus vraisemblables.

Nous avons appliqué cette méthode au modèle du Leaky Box, en testant plusieurs variantes de la méthode MCMC et plusieurs descriptions de la distribution des grammages. La [figure 2.4](#) montre par exemple les résultats obtenus en explorant les paramètres λ_0 , R_0 et δ intervenant dans une distribution des grammages de la forme

$$\lambda_{\text{esc}}(R) = \begin{cases} \lambda_0 \beta R_0^{-\delta} & \text{si } R < R_0, \\ \lambda_0 \beta R^{-\delta} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où R désigne la rigidité.

► 3.3 À propos des « prédictions du modèle de diffusion »

Je voudrais insister une fois de plus sur le fait qu'il n'existe pas de modèle standard de propagation des rayons cosmiques, en me basant sur un exemple précis. La figure⁷ ci-contre montre des mesures de la fraction positonique, les points rouges étant obtenus par l'expérience PAMELA et les points noirs par un ensemble d'expériences antérieures. Les auteurs ont superposé aux points de données une courbe représentant la « valeur théorique », obtenue avec un code de propagation (en l'occurrence GALPROP, mais le problème n'est pas là). Ce que montre cette courbe, c'est qu'on peut rendre compte des points noirs avec modèle de diffusion, pour un jeu de paramètres donné. Ce que veulent montrer les auteurs, c'est que les points rouges représentent un excès. Pour cela, il faudrait montrer qu'aucun modèle théorique n'est capable de rendre compte à la fois des points noirs et des points rouges, et non pas qu'il existe une courbe rendant compte des points noirs mais pas des rouges.

Cette discussion prête probablement des intentions trop fortes aux auteurs de cette figure, mais il n'est malheureusement pas rare de voir des auteurs piocher dans les résultats de GALPROP une courbe et d'en faire « la prédiction du modèle de diffusion ». En particulier, jusqu'à très récemment la valeur canonique pour la hauteur du halo de diffusion était de 4 kpc, parce que cette valeur était favorisée dans certaines analyses des noyaux cosmiques menées par Strong et Moskalenko, quand bien même d'autres valeurs tirées des mêmes publications pouvaient donner des prédictions théoriques autant en accord avec les données expérimentales.

► 3.4 Les espèces radioactives

Les espèces radioactives présentes dans le rayonnement cosmique fournissent des contraintes sur les paramètres de propagation complémentaires de celles issues de l'étude des noyaux stables. En effet, celles dont le temps de vie τ est court ne peuvent se propager que sur une courte distance $\ell \sim \sqrt{D\gamma\tau_0}$ avant de se désintégrer, où τ_0 désigne le temps de vie et γ le facteur de Lorentz. Leur flux est proportionnel à la densité de noyaux primaires qui leur donne naissance par spallation mais le rapport instable/parent ne dépend que des paramètres de diffusion. Pour des espèces dont la durée de vie est faible devant le temps moyen d'échappement, ce rapport est peu sensible à la présence des bords du halo diffusif et ne contraint que faiblement son épaisseur L (voir les figures suivantes). Il est aussi peu sensible aux effets dont le temps caractéristique est très supérieur à τ , comme la réaccélération ou les pertes d'énergie. En revanche, il donne une information très directe sur la valeur locale du coefficient de diffusion. Cette information, combinée aux contraintes sur D/L provenant de l'analyse des rapports secondaire/primaire, permet en principe d'en déduire l'épaisseur du halo diffusif, un paramètre crucial dans les estimations de signaux d'annihilation de matière noire. Attention toutefois, c'est vraiment la valeur locale du coefficient de diffusion qui est déterminée par l'analyse des radioactifs, alors que les noyaux stables donnent des indications sur la valeur du coefficient de diffusion moyennée sur une région plus vaste. Si le coefficient de diffusion est inhomogène sur des distances de l'ordre du dixième de kiloparsec, il devient difficile de croiser ces deux types d'information.

Les expériences permettent aussi de mesurer, en plus du rapport instable/parent, des rapports instable/stable entre la densité de l'espèce radioactive et celle d'une espèce stable issue du même parent. Les densités sont données en fonction des sections efficaces de création par $N_{\text{stable}} \propto \sigma_{\text{stable}} \times t_{\text{moyen}}$ et $N_{\text{instable}} \propto \sigma_{\text{rad}} \times \tau$, où t_{moyen} désigne le temps moyen que les rayons cosmiques arrivant sur terre passent dans la zone contenant la matière. On peut donc estimer le rapport

$$\frac{N_{\text{instable}}}{N_{\text{stable}}} \sim \frac{\sigma_{\text{instable}}}{\sigma_{\text{stable}}} \times \frac{\tau}{t_{\text{moyen}}}$$

La quantité t_{moyen} dépend de l'épaisseur du halo et du coefficient de diffusion. Pour déterminer L , il est préférable de s'intéresser à un rapport instable/parent, sensible essentiel-

⁷ tirée de Adriani et al., Nature 458 (2009) 607

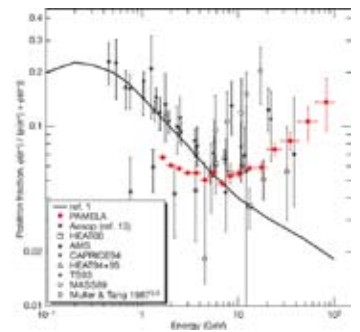
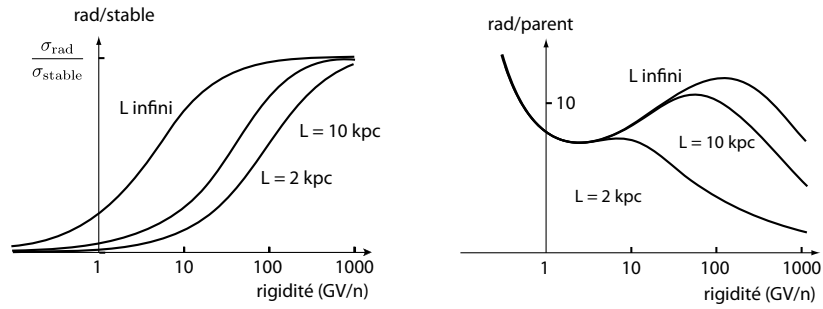


Figure 2.4 - Exemple d'utilisation des modèles

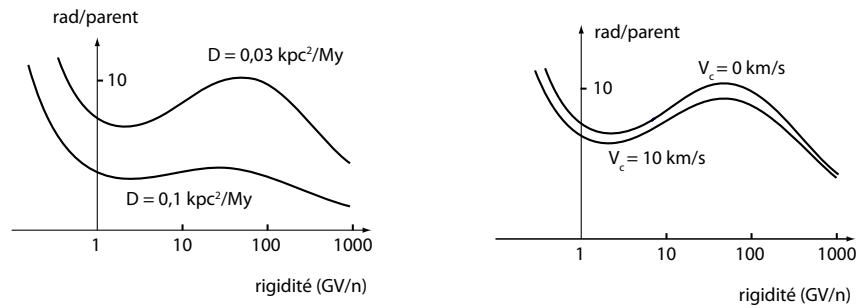
Courbe tirée de Adriani et al. 2009, censée illustrer un excès de la fraction positonique mesurée à haute énergie.

REF [11]



Figures 2.5 - Rapports utiles pour l'étude des espèces radioactives

Ces figures montrent l'évolution du rapport rad/stable (à gauche) et rad/parent (à droite) avec la rigidité, pour plusieurs tailles de halo L . On voit que le second rapport ne devient sensible à L qu'à haute énergie. Tant que le facteur de Lorentz est suffisamment petit pour que la distance sur laquelle se propage le noyau radioactif est petite, la production peut être décrite de manière locale, les bords du halo diffusif ne jouant aucun rôle.



Figures 2.6 - Influence des autres paramètres de diffusion

Ces figures montrent l'évolution du rapport rad/parent (à gauche) avec la rigidité, pour plusieurs coefficients de diffusion (à gauche) et plusieurs valeurs de la vitesse pour du vent convectif (à droite). On voit que ce type de rapport est très sensible à D et peut en principe être utilisé pour mesurer la valeur locale du coefficient de diffusion.

lement au coefficient de diffusion, puis de croiser la contrainte sur D avec celles de D/L obtenues par ailleurs.

On remarque sur les figures 2.5 et 2.6 qu'à haute énergie, le rapport instable/parent devient sensible à l'épaisseur du halo à haute énergie. Ceci est dû au fait qu'à haute énergie, la dilatation relativiste des durées allonge la durée de vie des espèces instables par le facteur de Lorentz γ , ce qui rapproche leur comportement de celui des espèces stables. Si l'on pouvait mesurer expérimentalement le rapport instable/parent sur une gamme d'énergie large, on pourrait obtenir de précieuses informations sur l'épaisseur du halo diffusif.

L'expérience AMS était à cet égard très prometteuse, dans sa configuration initialement prévue basée sur un aimant supraconducteur. Le remplacement par un aimant permanent a profondément affecté les performances de cet instrument et il est difficile de dire à quel point la configuration actuelle sera effectivement utile pour l'étude des noyaux radioactifs.

4. Antiprotons

REF [2,10,12,14,18,20,28]

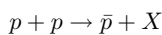
Les antiprotons pourraient constituer un signal d'annihilation de matière noire, et l'étude de cette hypothèse nécessite deux étapes : il faut tout d'abord être en mesure de prédire le signal dû aux processus standard, avec ses incertitudes, puis être capable de prédire, pour un modèle de matière noire donné, le signal d'annihilation avec ses incertitudes. Examinons-les l'une après l'autre.

► 4.1 Composante standard

REF [10]

4.1.1 Estimation des flux

Des antiprotons sont présents dans les rayons cosmiques, ils sont créés par les réactions nucléaires



au cours de spallations de protons, libres ou contenus dans des noyaux d'hélium, sur le milieu interstellaire. Une partie de l'énergie cinétique des particules initiales est convertie en énergie de masse lors de la création de particules. La section efficace totale de la réaction pp est de l'ordre de 40 mbarn. Le seuil cinématique pour la création d'un antiproton de l'ordre de 7 GeV/c².

C'est une espèce secondaire et le rapport \bar{p}/p est sensible aux paramètres de propagation de la même façon que les autres rapports secondaire/primaire et présente les mêmes dégénérescences. Inversement, ceci entraîne qu'une fois que l'on dispose des paramètres de diffusion compatibles avec les rapports S/P de noyaux, on peut prédire assez précisément le rapport \bar{p}/p . Historiquement, les premiers calculs de ce rapport indiquaient de faibles valeurs aux petites énergies, ce qui laissait de grands espoirs pour détecter une éventuelle composante exotique à ces énergies. Il s'est ensuite avéré que ce n'est pas le cas, comme nous avons contribué à le montrer dans [10].

Le calcul numérique du spectre d'antiprotons standard demande plus qu'une légère modification des codes de propagation écrits pour les noyaux. Pour commencer, la réaction nucléaire qui les crée ne se fait pas à énergie cinétique par nucléon constante : les antiprotons d'énergie $E_{\bar{p}}$ sont produits par des spallations de protons ayant une énergie $E_p > E_{\bar{p}}$, typiquement $E_p \sim 10 \times E_{\bar{p}}$. L'approche de type « cascade » retenue pour les noyaux n'est plus adaptée. En revanche, on peut tirer profit du fait que le spectre des protons est bien mesuré au niveau du Système solaire. Le terme dn/dE_p figurant dans le terme source

$$q_{\bar{p}}(E_{\bar{p}}, \vec{r}) \propto \int \frac{d\sigma(E_p \rightarrow E_{\bar{p}})}{dE_{\bar{p}}} \frac{dn_p(E_p, \vec{r})}{dE_p} dE_p$$

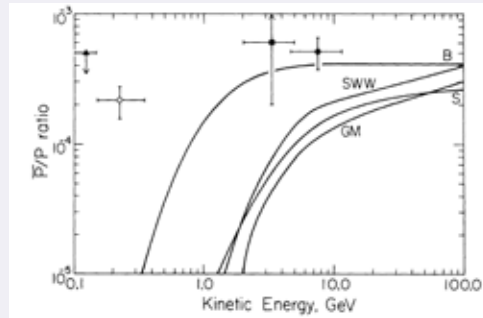
est donc connu avec précision sur une gamme d'énergie importante à la position du Système solaire, et les équations de propagation permettent de le déterminer en tout point de la galaxie. Il faut tenir compte du fait que les collisions proton-hélium, hélium-proton et hélium-hélium peuvent aussi conduire à la réaction précédente.

Ensuite, un phénomène spécifique aux collisions nucléon-antinucleon participe aux pertes d'énergie : les collisions inélastiques non-annihilantes, au cours desquelles un antiproton collisionne un proton du milieu interstellaire et lui communique l'énergie nécessaire pour passer dans un état nucléaire excité (une résonance). Cet effet n'intervient pas pour les autres noyaux, car l'énergie nécessaire pour amener un proton dans un état excité suffirait à briser le noyau, et la collision conduit alors à une spallation destructive et non à une perte d'énergie. L'importance de cet effet est illustrée dans l'encadré 3.

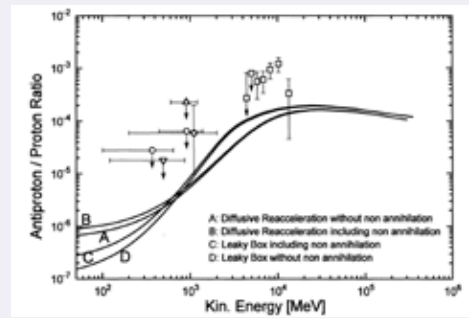
Une fois ces subtilités implémentées dans le code de propagation, il suffit de calculer les flux d'antiprotons pour tous les jeux de paramètres de diffusion compatibles avec le rapport B/C observé. L'enveloppe de toutes les courbes obtenues donne une estimation de l'incertitude due à la méconnaissance des paramètres de diffusion. Par ailleurs, la section efficace de production d'antiprotons par spallation de protons n'est pas mesurée sur toute la gamme d'énergie qui nous intéresse, et les prédictions des modélisations nucléaires diffèrent à bas-

Encadré 3 : rapport antiproton/proton

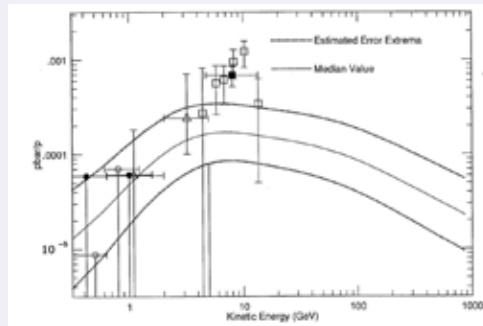
Les figures suivantes proposent une courte séquence de courbes illustrant l'évolution au cours des décennies de notre connaissance du rapport antiprotons/protons dans les rayons cosmiques, que ce soit du point de vue théorique ou expérimental.



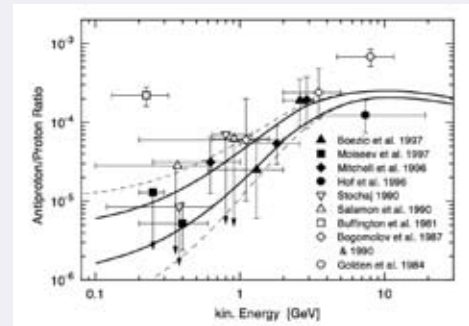
(a) État de l'art en 1981 (B = Badwar 1975, SWW = Szabelski, Wdowczyk et Wolfendale 1980, GM = Gaisser et Maurer 1973, S = Stephens 1981). On note la rapide décroissance vers les basses énergies. Le point de donnée à 200 MeV, est interprété comme un excès par rapport à ces prédictions. (Buffington 1981)



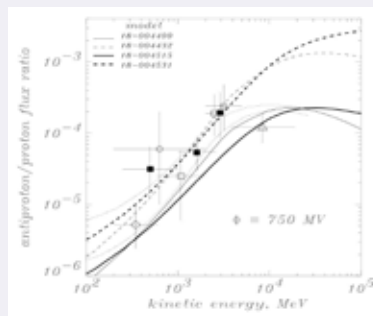
(b) Prise en compte de la réaccélération diffusive (Simon & Heinbach 1996)



(c) Inclusion des réactions de spallation faisant intervenir l'hélium (Gaisser & Schaefer 1992).



(d) Leaky-Box avec des sections efficaces revues (Simon, Molnar & Roesler 1998).



(e) Modèle de diffusion complet (Moskalenko, Strong & Reimer 1998)

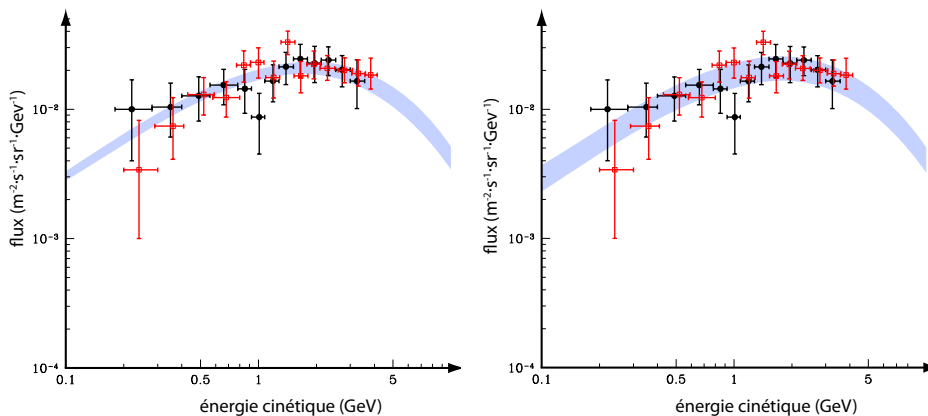


Figure 2.7 - Flux d'antiprotons secondaires

Spectre des antiprotons secondaires issus des spallations, calculé en faisant varier les paramètres de diffusion dans la gamme compatible avec les observations du rapport B/C (à gauche) et en faisant varier les paramètres nucléaires (à droite).

se énergie incidente. Nous avons aussi estimé l'incertitude due à la méconnaissance des paramètres nucléaires intervenant dans ces modèles, en les faisant varier dans une gamme raisonnable. Dans l'état actuel du domaine, l'incertitude qui en résulte sur le flux d'antiprotons est plus importante que celle due aux paramètres de diffusion.

4.1.2 Discussion des résultats

Les estimations relatives aux antiprotons se présentent généralement sous deux formes : le flux d'antiprotons ou le rapport antiproton/proton en fonction de l'énergie. Pour les espèces nucléaires sujettes à des destructions spallatives (par exemple le carbone en bore), la réaction conserve l'énergie par nucléon et le rapport secondaire/primaire, à une énergie fixée, permet de s'affranchir en grande partie des incertitudes sur le flux de l'espèce primaire. Pour les antiprotons, ceci n'est plus vrai, car un antiproton d'énergie donnée est plutôt créé par spallation de protons d'énergie beaucoup plus élevée. D'un point de vue théorique, le rapport \bar{p}/p ne présente pas d'intérêt particulier, et peut même s'avérer trompeur. Imaginons par exemple que le flux de protons de 1 GeV soit plus faible que ce qu'on pense, pour une raison ou une autre. Ceci n'affecte en rien le flux d'antiprotons à cette énergie, ceux-ci étant créés par des spallations de protons de plusieurs dizaines de GeV. Le rapport \bar{p}/p apparaîtrait ainsi plus élevée que prévu, pour une raison qui n'a rien à voir avec les antiprotons. En revanche, d'un point de vue expérimental ce rapport est sujet à une incertitude de mesure plus faible que les flux individuels, car les erreurs de mesure systématiques qui dépendent de l'énergie s'y compensent partiellement.

La conclusion principale que l'on peut tirer de cette étude est que les prédictions du modèle de diffusion que nous avons adopté sont en très bon accord avec les données expérimentales, comme on le voit sur la figure 2.9. C'est une bonne nouvelle, et l'obtention de ces résultats constitue pour moi un excellent souvenir de réussite scientifique collective. Le revers de la médaille, c'est que ces courbes laissent peu de place pour un signal exotique important. Si une contribution exotique est présente dans le flux d'antiprotons, il faudra considérablement affiner les mesures et les modélisations théoriques pour la séparer de la contribution standard, dans la gamme d'énergie présentée ici en tout cas.

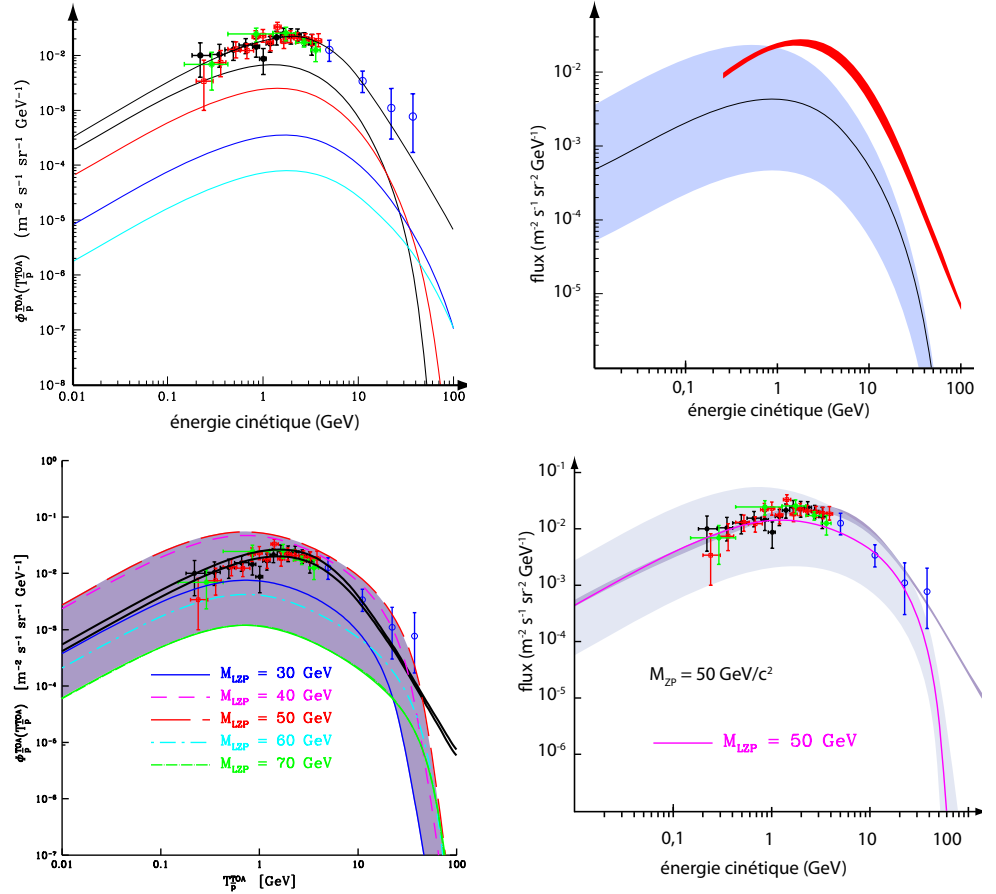
► 4.2 Composante exotique : matière noire

REF [2,18,20]

Une fois les paramètres de propagation contraints par l'analyse des rapports secondaires/primaires, on peut les utiliser pour propager une éventuelle composante exotique, comme celle due à l'annihilation de matière noire (ce paragraphe) ou à l'évaporation de trous noirs

Figures 2.8 - Flux d'antiprotons primaires

Prédiction du flux d'antiprotons primaires issus de l'annihilation de neutralinos (en haut) ou de particules de Kaluza-Klein (en bas), avec les points de données. La bande rouge indique la composante secondaire et son incertitude liée aux paramètres de diffusion. La colonne de gauche montre, pour un jeu de paramètres de propagation donné, les flux obtenus pour différentes masses de particules de matière noire. La colonne de droite indique les incertitudes liées aux paramètres de propagation, pour une particule de masse donnée (particule L_{ZP} de 50 GeV/c² en bas).



primordiaux (paragraphe suivant).

Si on suppose que la matière noire est constituée de particules nouvelles, décrites par un modèle théorique donné (supersymétrie ou dimensions supplémentaires, par exemple), on peut calculer son taux d'annihilation en tout point de la galaxie. Sous cette affirmation simple se dissimulent deux sources d'incertitudes :

- le modèle théorique n'est pas connu et les prédictions des modèles diffèrent de plusieurs ordres de grandeur en terme de production d'antiprotons (ou de positons) ;
- la distribution spatiale de matière noire n'est pas non plus connue avec précision (voir le chapitre 3 pour beaucoup plus de détails à ce sujet).

Ces points ont été abordés dans le premier chapitre, et nous n'allons pas discuter ici des différents profils de halos de matière noire, pour nous concentrer sur les incertitudes liées à la dégénérescence des paramètres de propagation, qui sont déjà énormes. En particulier, la hauteur L du halo diffusif, paramètre très mal connu, détermine le confinement des rayons cosmiques, d'une part via leur échappement, et d'autre part via la quantité d'annihilations qui ont lieu dans la zone de diffusion. La figure précédente montre l'incertitude sur le flux d'antiprotons primaires uniquement due à la méconnaissance des paramètres de diffusion. Cette incertitude provient essentiellement de la méconnaissance de L . Si cette incertitude permet d'espérer que le signal d'origine exotique pourrait dominer le fond standard à basse énergie, elle mine surtout toute possibilité de prédire ce signal avec précision.

REF [12]

► 4.3 Composante exotique : trous noirs primordiaux

On peut suivre la même procédure pour toute contribution primaire, et nous avons fait le même exercice dans [12] pour des antiprotons créés lors de l'évaporation de trous noirs primordiaux.

Il a été envisagé qu'au cours de l'histoire thermique de l'Univers, certaines régions soient devenues suffisamment compactes pour que des trous noirs se forment. On les appelle des

trous noirs primordiaux. Leur masse pourrait s'étaler sur une gamme étendue, et certains pourraient être suffisamment peu massifs pour que leur rayonnement de Hawking soit important aujourd'hui. Lorsque les trous noirs s'évaporent, c'est-à-dire perdent davantage d'énergie par rayonnement de Hawking que ce qu'ils gagnent par ailleurs, en absorbant la matière et le rayonnement environnants, leur masse diminue, leur température de Hawking augmente et le taux d'évaporation augmente. L'évaporation s'emballé et pendant ses derniers instants, le trou noir peut émettre des quarks qui se hadronisent, formant notamment des antiprotons. Les trous noirs les plus légers se sont déjà évaporés, et la masse des trous noirs primordiaux s'évaporant aujourd'hui peut être estimée à environ $M \sim 5 \times 10^{11}$ kg (soit la masse d'une grosse montagne).

En exigeant que la contribution de ces trous noirs primordiaux ne dépasse pas les flux d'antiprotons observés, nous avons pu mettre une limite supérieure à la densité locale (au niveau du Système solaire) de trous noirs primordiaux,

$$\rho_{\odot} \lesssim 10^{-33} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

obtenue en considérant que le spectre de masse actuel est donné par

$$\frac{dn}{dM} \propto M^2$$

et pour des hauteurs de halo de quelques kiloparsecs. Cette limite est comparable à celle obtenue par les analyses des mesures de rayonnement gamma.

Ce travail nous avait fourni l'occasion de réfléchir sur la contribution des sources externes au halo sur le flux de rayons cosmiques au niveau de la Terre ([appendice B](#) de [12]). Nous avons montré que cette contribution est toujours très faible (inférieure à 10^{-4} en valeur relative) et peut être négligée. Au-delà de cette conclusion, la méthode utilisée était intéressante : nous avons considéré que les rayons cosmiques émis par les sources externes pénétraient dans le halo diffusif sur une épaisseur égale au libre parcours moyen, quand elles l'atteignaient. Ceci se traduit par un terme source situé tout près du bord, pour lequel on peut calculer la densité de rayons cosmiques au niveau de la Terre, après diffusion. Le lecteur est invité à se reporter à [12] pour les détails.

► 4.4 Antinoyaux

REF [6,14]

Une fois que l'on sait calculer la production de nucléons et d'antinuéons par un ensemble de processus donnés, spallation, annihilation de matière noire ou évaporation de trous noirs, on peut assez facilement en déduire la production d'antinoyaux plus complexes par ces mêmes processus. On suppose pour cela que deux nucléons émis simultanément peuvent fusionner si leurs quantités de mouvement sont suffisamment proches. Plus précisément, on appelle impulsion de coalescence la valeur de la différence de quantité de mouvement maximale permettant la fusion. Elle est de l'ordre de 160 MeV.

Le taux de production d'antinoyaux s'obtient en convoluant les densités des nucléons dans l'espace des phases, avec la condition que les quantités de mouvement doivent être assez proches pour que la coalescence se produise. On trouve ainsi que le rapport antideutéron/proton est de l'ordre de 10^{-9} , c'est-à-dire que le rapport antideutéron/antiproton est de l'ordre de 10^{-5} . De manière générale, pour les antinoyaux plus lourds, l'addition de chaque antinucléon multiplie le flux final par un facteur de l'ordre de 10^{-4} - 10^{-5} .

Nous avons étudié ce point dans le cadre de la production par l'évaporation de trous noirs [14], le signal en antideutérons devant être a priori plus facile à distinguer du fond standard que celui en antiprotons. Nous avons aussi étudié la production standard d'antimatière [6] et nous avons montré que les expériences du type d'AMS devraient détecter quelques noyaux d'antideutérium d'origine spallative, mais aucun noyau d'antihélium. La découverte éventuelle d'un tel noyau serait donc une preuve forte de l'existence d'anti-étoiles.

5. Positons

Les rayons cosmiques contiennent aussi des électrons et des positons. Ceux-ci peuvent être créés par spallation, ils sont produits par désintégration de pions chargés, eux-mêmes produits par les spallations des noyaux cosmiques sur le milieu interstellaire. Ces espèces étaient dans le collimateur des chasseurs de matière noire depuis que l'expérience HEAT avait découvert un excès de positons vers 10 GeV. Elles ont reçu un regain d'attention lorsque l'expérience PAMELA a trouvé un excès de positons au-dessus de quelques GeV. Plus précisément, cette expérience a mesuré la fraction positronique, définie comme le rapport $e^+/(e^++e^-)$, en fonction de l'énergie et a trouvé que cette quantité augmente au-dessus de quelques GeV, alors que d'après les modèles de propagation usuels, elle devrait diminuer. Plusieurs explications ont été proposées pour cet excès, et parmi celles-ci nous nous sommes intéressés à la possibilité que les positons surnuméraires soient dûs à l'annihilation de matière noire. Il faut pour cela être en mesure de calculer le flux de positons secondaires.

► 5.1 Composante standard

5.1.1 Estimation des flux

L'équation de propagation décrivant les positons (et les électrons) présente une différence importante avec celle des noyaux : les pertes d'énergie y jouent un rôle très important, les leptons, beaucoup plus légers que les noyaux, étant beaucoup plus sensibles au rayonnement synchrotron et à l'effet Compton inverse sur le CMB et sur la lumière stellaire. L'équation de diffusion s'écrit, en négligeant les destructions,

$$-D_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^\delta \Delta N(\vec{r}, E) + \frac{\partial}{\partial E} \left(N(\vec{r}, E) \frac{dE}{dt} \right) = q(\vec{r}, E)$$

où le taux de perte d'énergie s'écrit, pour les pertes synchrotron et Compton inverse,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{E^2}{E_0 \tau_E}.$$

Dans cette expression τ_E désigne le temps caractéristique associé à ces pertes, il est de l'ordre de 10^{16} s. En définissant un pseudo-temps $\hat{\tau}$, une variable dépendant de l'énergie et homogène à un temps,

$$\hat{\tau} \equiv \tau_E \frac{(E/E_0)^{\delta-1}}{1-\delta},$$

et en redéfinissant la densité et le terme source,

$$\hat{N} \equiv N \times \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \text{ et } \hat{q} \equiv q \times \left(\frac{E}{E_0} \right)^{2-\delta},$$

l'équation de diffusion se réécrit sous une forme familière

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{\tau}} - D_0 \Delta \hat{N} = \hat{q}.$$

Lorsqu'un positon est créé avec une énergie donnée, il diffuse en perdant de l'énergie et s'éloigne de la source d'une distance moyenne $\ell \sim \sqrt{D_0 \hat{\tau}}$. Les électrons de basse énergie ont donc, en moyenne, plus diffusé que les électrons de haute énergie.

On peut compléter cette équation pour tenir compte des autres termes de perte d'énergie, de la réaccélération et du vent galactique. Le terme source fait intervenir les sections efficaces de production de positons, dont il existe plusieurs paramétrisations. Le lecteur est renvoyé à l'article [30] pour les détails concernant les sections efficaces. La résolution de l'équation de diffusion permet de calculer le flux de positons pour n'importe quel jeu de paramètres de propagation. Nous avons utilisé les paramètres compatibles avec le rapport B/C

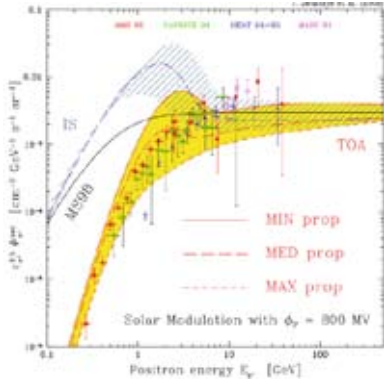
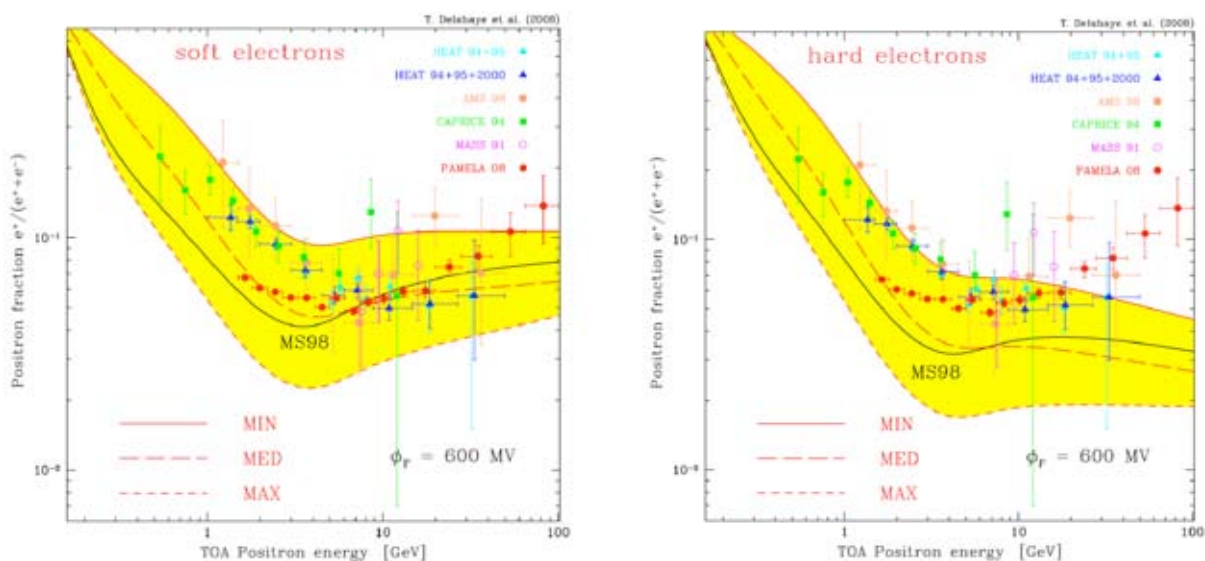


Figure 2.9 - Spectre des positons

Les bandes jaunes délimitent l'ensemble des valeurs obtenues pour le flux de positons, pour l'ensemble des paramètres de diffusion compatibles avec le rapport B/C.



Figures 2.10 - Fraction positronique

Les bandes jaunes délimitent l'ensemble des valeurs obtenues pour la fraction positronique, pour l'ensemble des paramètres de diffusion compatibles avec le rapport B/C. À gauche, la fraction est calculée avec une hypothèse haute sur la pente du spectre des électrons (spectre mou). À droite, elle est calculée avec une pente plus faible (spectre dur).

et en accord avec le flux observé pour les antiprotons, afin d'évaluer l'incertitude sur le flux de positons secondaires due à la dégénérescence des paramètres de propagation.

5.1.2 Discussion des résultats

La figure 2.10 représente les flux de positons, la bande jaune indiquant l'ensemble des flux obtenus avec les paramètres de propagation compatibles avec le rapport B/C. La bosse au-dessus du GeV est due à la réaccélération diffusive. On voit que sans ajustement, ces flux sont compatibles avec les valeurs expérimentales au-dessous de quelques GeV. L'hypothèse selon laquelle ces positons de basse énergie sont d'origine secondaire et se propagent dans un milieu diffusif ayant les propriétés indiquées par l'analyse du rapport B/C semble donc raisonnable.

Les figures 2.11 représentent la fraction positronique, dont l'évaluation repose sur une extrapolation du flux d'électrons dans la gamme d'énergie considérée. Les extrapolations extrêmes que l'on peut considérer conduisent aux deux bandes jaunes. Ces courbes montrent que l'on ne peut pas expliquer les résultats de PAMELA à haute énergie par une composante spallative, diffusant avec des paramètres compatibles avec les mesures des autres rayons cosmiques.

Il convient de noter que l'excès de la fraction positronique n'implique pas nécessairement un problème avec les positons, il pourrait s'agir d'un déficit d'électrons dans cette gamme d'énergie. Il se trouve qu'il est expérimentalement beaucoup plus difficile d'extraire les spectres des électrons et des positons individuellement que leur rapport, qui permet de s'affranchir de plusieurs sources d'erreur systématique.

Plusieurs explications ont été proposées pour cet excès. Bien évidemment, il a été suggéré qu'il pourrait s'agir d'un signal indirect de matière noire, mais il faut alors expliquer que cet excès ne soit pas du tout observé dans le spectre d'antiprotons. Ce type de matière noire est dit leptophile (ce qui ne résoud pas grand-chose). Cette restriction rend cette solution peu naturelle à mon avis. Des solutions astrophysiques ont aussi été suggérées, par exemple Delahaye et al. ont étudié la possibilité qu'un excès de positons primaires provienne de

pulsars proches et dans une très belle étude⁸ ont pu montrer que cette hypothèse permet d'expliquer le résultat de PAMELA.

REF [27,28]

► 5.2 Composante exotique : matière noire

Je n'ai malheureusement pas participé à l'analyse générale de Delahaye et al.⁹ calculant la contribution exotique provenant de l'annihilation de matière noire. J'ai toutefois pu aborder des questions reliées à cette contribution dans [27,28], en analysant le facteur d'amplification dû à la concentration de matière noire dans des grumeaux. Ce point est développé dans le chapitre 3.

REF [15,16,19]

6. Origine spatiale

Les sources de rayons cosmiques sont probablement distribuées de façon beaucoup plus complexes que dans la modélisation qui conduit aux résultats précédents. D'une part les sources d'espèces primaires sont localisées dans certains sites d'accélération, probablement associés aux restes de supernovae ou aux pulsars. D'autre part, la matière interstellaire étant structurée en nuages et en régions surdenses, les sources d'espèces secondaires ne sont pas non plus distribuées de façon uniforme. Enfin, la matière noire forme vraisemblablement des grumeaux, si bien que la contribution exotique est elle aussi associée à des structures discrètes. Les remarques de l'encadré 2 laissent penser que la nature diffusive de la propagation amoindrit l'effet de cette granularité spatiale, mais cet effet pourrait tout de même rester quantitativement important. Pour déterminer à quel point il est nécessaire d'entrer dans le détail fin pour décrire la granularité des sources, puis dans un second temps à quel point il faut connaître la position précise des sources discrètes, nous nous sommes intéressés à l'origine spatiale des rayons cosmiques. Lorsqu'on détecte une particule d'une espèce donnée, celle-ci ne porte aucune information sur la position de la source qui l'a accélérée. Toutefois, grâce à l'équation de diffusion, on peut déterminer la probabilité qu'elle parvienne d'un endroit donné de la galaxie. Muni de cartes de probabilité de provenance, on peut alors discuter de la pertinence d'une description très fine de la répartition spatiale des sources. Nous reviendrons sur les questions liées aux structures spatiales dans le chapitre suivant. De surcroît, cette étude permet aussi de comprendre la signification physique des paramètres de diffusion déduits d'observations de rayons cosmiques : avec des espèces issues essentiellement de notre voisinage, nous avons accès à la valeur locale du coefficient de diffusion, alors qu'avec des espèces pouvant provenir de plusieurs kiloparsecs, nous avons accès à sa valeur moyenne.

► 6.1 Méthode

Un rayon cosmique étant détecté à la position de l'observateur \vec{r}_o , quelle est la (densité de) probabilité

$$\frac{d\mathcal{P} \{ \text{émis en } \vec{r}_s \text{ à } \vec{r}_s + d\vec{r}_s \text{ près} \mid \text{observé en } \vec{r}_o \}}{d\vec{r}_s} \equiv \frac{d\mathcal{P} \{ \vec{r}_s \mid \vec{r}_o \}}{d\vec{r}_s}$$

qu'il soit issu d'une source située au point \vec{r}_s à $d\vec{r}_s$ près ? Cette probabilité est donnée par

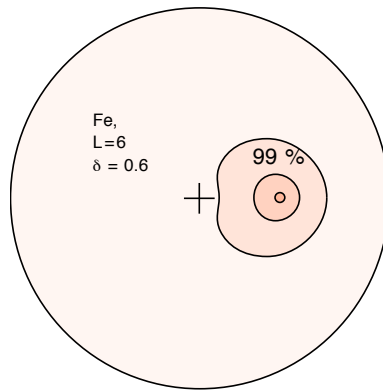
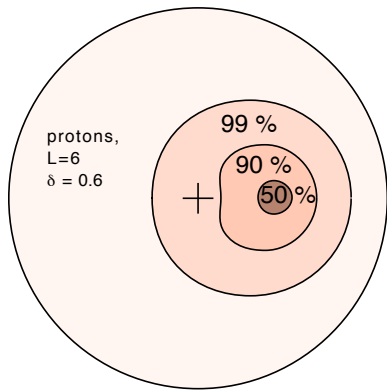
$$\frac{d\mathcal{P} \{ \vec{r}_s \mid \vec{r}_o \}}{d\vec{r}_s} = \frac{d\mathcal{N} [\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}_o] / d\vec{r}_s}{\mathcal{N} [\rightarrow \vec{r}_o]}$$

où $\mathcal{N} [\rightarrow \vec{r}_o]$ désigne le nombre de chemins atteignant la position \vec{r}_o et $d\mathcal{N} [\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}_o] / d\vec{r}_s$ le nombre de chemin reliant \vec{r}_s (à $d\vec{r}_s$ près) à \vec{r}_o . On remarque que cette quantité détermine aussi la densité $N(\vec{r}_o \mid \vec{r}_s)$ de rayons cosmiques à la position \vec{r}_o , lorsqu'une source est placée en \vec{r}_s . En effet,

$$N(\vec{r}_o \mid \vec{r}_s) \propto \frac{d\mathcal{N} [\vec{r}_s \rightarrow \vec{r}_o]}{d\vec{r}_s}.$$

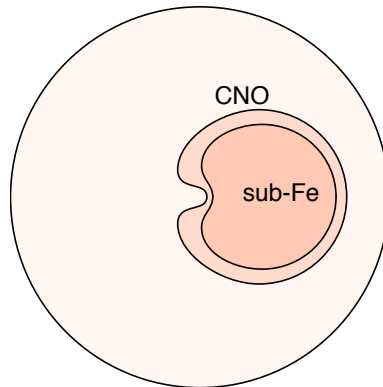
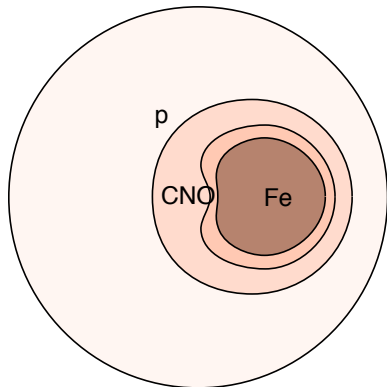
Cette quantité peut être calculée : la densité est solution de l'équation de propagation pour

- 8 T. Delahaye, J. Lavalley, R. Lineros, F. Donato, N. Fornengo , « Galactic electrons and positrons at the Earth: new estimate of the primary and secondary fluxes », arXiv:1002.1910v1
- 9 Delahaye, T.; Lineros, R.; Donato, F.; Fornengo, N.; Salati, P., « Positrons from dark matter annihilation in the galactic halo: Theoretical uncertainties », Physical Review D77 (2008) id. 063527



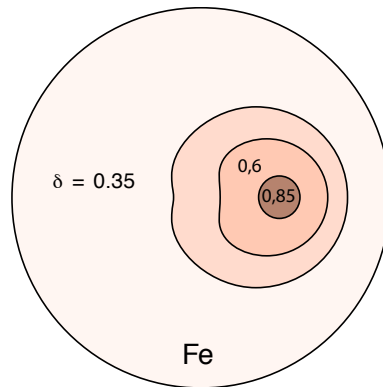
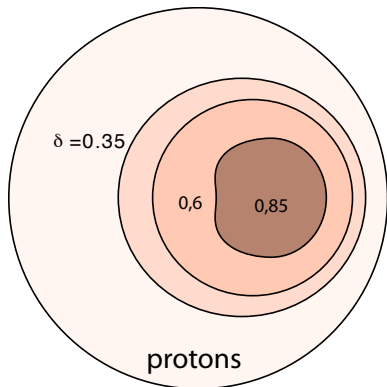
Figures 2.11 - Origine spatiale de différents noyaux

À gauche, contour contenant les sources d'où proviennent 50 %, 90 % et 99 % des protons cosmiques atteignant la Terre.
À droite, idem pour les noyaux de fer.



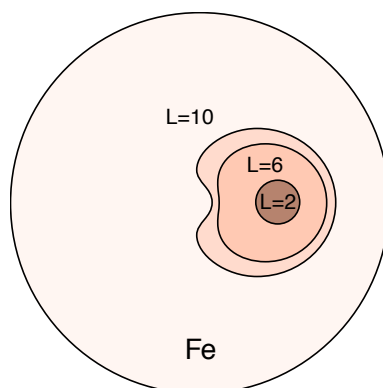
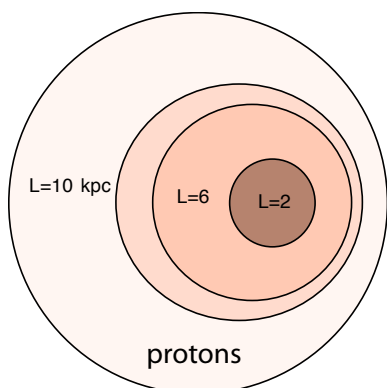
Origine spatiale de différents noyaux

À gauche, contour contenant les sources d'où proviennent 99 % de plusieurs noyaux primaires.
À droite, idem pour les noyaux secondaires correspondants..



Influence de la pente du coefficient de diffusion

À gauche, contour contenant les sources d'où proviennent 99 % des protons cosmiques atteignant la Terre, pour différentes valeurs de delta.
À droite, idem pour les noyaux de fer.



Influence de la taille du halo diffusif

À gauche, contour contenant les sources d'où proviennent 99 % des protons cosmiques atteignant la Terre, pour différentes valeurs de L.
À droite, idem pour les noyaux de fer.

une source ponctuelle située en \vec{r}_s , et le facteur de normalisation manquant est obtenu en imposant que l'intégrale de $d\mathcal{P}/d\vec{r}_s$ sur l'ensemble des sources est égale à l'unité. Si la distribution spatiale des sources est inhomogène, il faut prendre en compte le poids $w(\vec{r}_s)$ et la probabilité qu'un rayon cosmique détecté en \vec{r}_o provienne d'une surface \mathcal{S} du disque est donnée par

$$\mathcal{P}\{\mathcal{S}|\vec{r}_o\} = \frac{\int_{\mathcal{S}} w(\vec{r}_s) N(\vec{r}_o|\vec{r}_s) d\vec{r}_s}{\int_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} w(\vec{r}_s) N(\vec{r}_o|\vec{r}_s) d\vec{r}_s}$$

À partir de l'équation de diffusion, on peut calculer N pour chaque espèce, en fonction des paramètres de propagation, puis établir des cartes de probabilité de provenance.

REF [15]

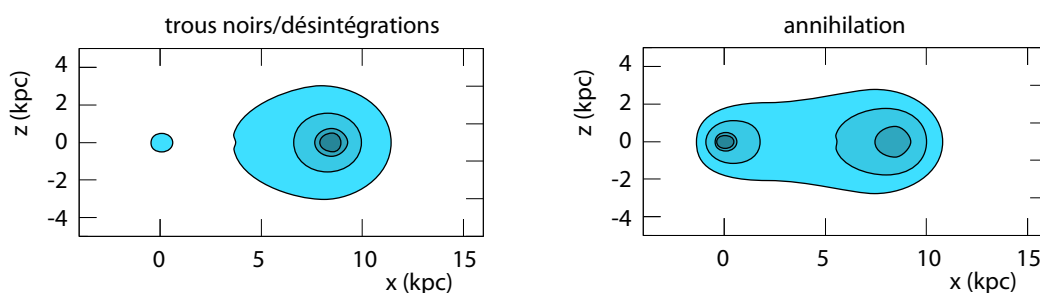
► 6.2 Cartes de probabilité de provenance

On peut définir une infinité de régions du disque galactique dont proviennent une proportion donnée des rayons cosmiques standard atteignant la Terre. Les figures 2.12 indiquent les régions s'appuyant sur les contours d'isoprobabilité, qui correspondent aux surfaces les plus petites vérifiant la propriété recherchée. On voit notamment que les espèces lourdes (comme le fer), sont beaucoup plus locales que les espèces plus légères (ici les protons). On voit aussi que, comme on s'y attend, les espèces secondaires proviennent de régions plus étendues que les primaires dont ils sont issus. Enfin, l'influence de la pente δ du coefficient de diffusion et de la hauteur L du halo sont y sont aussi représentées. L'interprétation détaillée de ces cartes peut être trouvée dans [15]

REF [16]

► 6.3 Contribution exotique : distribution en volume

On peut étendre cette analyse à des sources distribuées non plus dans le disque galactique, mais dans l'ensemble du volume diffusif, comme c'est le cas pour les contributions exotiques. Ceci permet de visualiser à quelle partie du halo de matière noire nous sommes plus sensibles, depuis la Terre. Un exemple est représenté sur la figure 2.12.



Figures 2.12 - Origine spatiale des antiprotons issus du halo de matière noire

Vue en coupe dans le plan (r,z) des volumes contenant les sources d'où proviennent 10 %, 25 %, 50 % et 75 % des antiprotons d'origine exotique atteignant la Terre. À gauche, le terme source est proportionnel à la densité de matière noire, pour des antiprotons qui viendraient de l'évaporation de trous noirs ou de désintégration d'une particule instable. À droite, le terme source est proportionnel au carré de la densité de matière noire, comme pour des antiprotons venant d'annihilations de particules de matière noire. Les deux régions plus marquées correspondent à la position de la Terre ($r = 8$ kpc) et au centre galactique ($r = 0$).

Chapitre 3

Structures



He deals the cards as a meditation
And those he plays never suspect
He doesn't play for the money he wins
He doesn't play for respect
He deals the cards to find the answer
The sacred geometry of chance
The hidden law of probable outcome
The numbers lead a dance

Sting, « Shape of my Heart »



1. Bulle locale
2. Anneau moléculaire
3. Grumeaux
4. Sources discrètes
5. Variance et boost
6. Anisotropies

L'essentiel des résultats présentés dans le chapitre précédent se base sur l'hypothèse que les sources de rayonnement cosmique sont distribuées dans la galaxie de façon continue et relativement homogène aux petites échelles. En toute rigueur ceci n'est pas le cas. D'une part, l'accélération et la production des rayons cosmiques a lieu dans des sites astrophysiques bien définis (très probablement les restes de supernovae). L'hypothèse consistant à remplacer ces sources discrètes par une distribution continue est valide pour étudier des espèces qui diffusent sur de grandes distances, en particulier les rapports secondaires/primaires ou le flux d'antiprotons. En revanche, quand il s'agit d'étudier des espèces diffusant sur des petites distances, comme c'est le cas pour les positons et les électrons de haute énergie, ainsi que pour certains noyaux radioactifs, cette hypothèse doit être remise en cause. Il faut alors se poser la question de la structure spatiale des sources de rayons cosmiques. D'autre part, le milieu interstellaire responsable des spallations présente des structures à différentes échelles spatiales, et il convient de le décrire avec un degré de détail correspondant à l'échelle spatiale sur laquelle l'espèce étudiée se propage avant de disparaître (noyaux radioactifs) ou perdre de l'énergie (électrons et positons).

Au cours de plusieurs collaborations, j'ai pu explorer différentes pistes pour étendre l'étude des rayons cosmiques galactiques dans cette direction. Ce chapitre est consacré à la présentation de ces travaux, pour finir sur une piste que je commence à explorer dans le cadre de l'encadrement de la thèse de Guilhem Bernard.



1. Bulle locale

Nous avons rappelé au chapitre précédent le rôle que pouvaient jouer les espèces radioactives dans la levée de dégénérescence des paramètres de propagation. En particulier, leur étude permet en principe de déterminer la valeur locale du coefficient de diffusion. Le rapport D/L étant connu, relié au grammage traversé par les espèces stables, on peut en déduire la taille du halo diffusif L , le paramètre crucial dans les estimations des signaux d'annihilation de matière noire exotique.

Ceci nécessite toutefois de bien modéliser la structure locale du milieu interstellaire : on sait que le système solaire est situé dans une cavité appelée la bulle locale, dont la taille typique est de l'ordre de $r_{\text{trou}} \sim 100$ pc, et contenant un gaz très chaud et peu dense. Les spallations y sont donc moins fréquentes. Ceci implique que la création d'espèces secondaires est localement amoindrie dans un rayon de cet ordre de grandeur. Pour des espèces instables de durée de vie τ , qui ont une probabilité faible de parcourir une distance plus grande que $\sqrt{D\tau}$, la présence de la bulle locale affecte profondément la densité attendue au niveau de la Terre lorsque $\sqrt{D\tau} \sim r_{\text{trou}}$. La densité locale est diminuée d'un facteur de l'ordre de

$$\exp\left(-r_{\text{trou}}/\sqrt{D\tau}\right),$$

cette expression étant obtenue en considérant que le Système solaire se trouve au centre d'une bulle sphérique, elle-même contenue dans un milieu homogène d'extension infinie. Les valeurs numériques sont indiquées à titre d'exemple dans le tableau ci-contre, pour quelques noyaux, à une énergie de 100 MeV/n, pour un coefficient de diffusion de 0,03 kpc²/My et une bulle de 100 pc de rayon.

Il est donc crucial de prendre la bulle locale en compte si l'on veut utiliser les noyaux radioactifs pour mesurer les paramètres de propagation. On notera en particulier que la croyance selon laquelle la hauteur du halo aurait été déterminée une bonne fois pour toutes en exploitant les données sur les espèces radioactives n'est pas fondée : aucune étude, avant [11], ne considérait l'influence de la bulle locale, pourtant cruciale.

La figure ci-contre montre l'influence de la bulle locale sur une espèce radioactive, l'aluminium 26, pour plusieurs énergies, ainsi que pour une espèce stable. On voit que l'influence de la bulle locale sur les espèces stables n'est pas ridiculement faible, de l'ordre de quelques pourcents, et l'étude de l'impact sur la détermination des paramètres de diffusion reste à faire. Nous allons ici nous concentrer sur les espèces radioactives.

Le travail présenté dans [11] considérait le rayon de la bulle locale comme un paramètre libre supplémentaire dans la modélisation de notre galaxie. L'ajustement des rapports instable/stable indiquait une valeur comprise entre 0 et 100 pc, ce qui est en bon accord avec

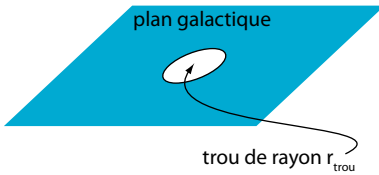
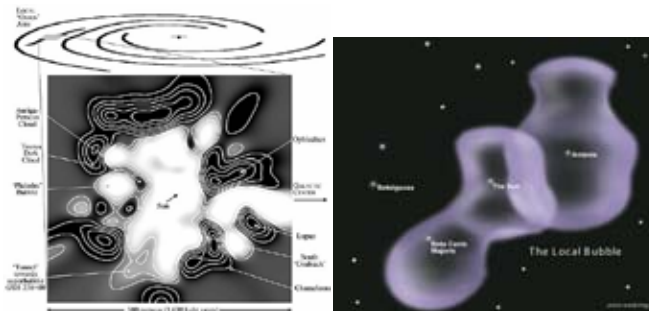
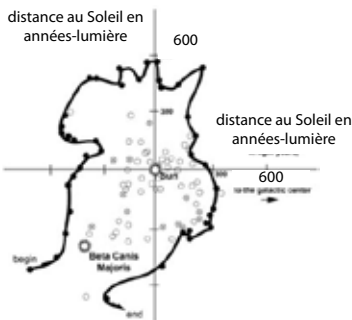


Figure 3.1 - Modèle du plan troué
 Lorsque l'on considère que le disque galactique est infiniment mince, la bulle locale est modélisée par un trou circulaire de rayon r_{trou} .



Figures 3.2 - Géométrie de la bulle locale, selon plusieurs sources.

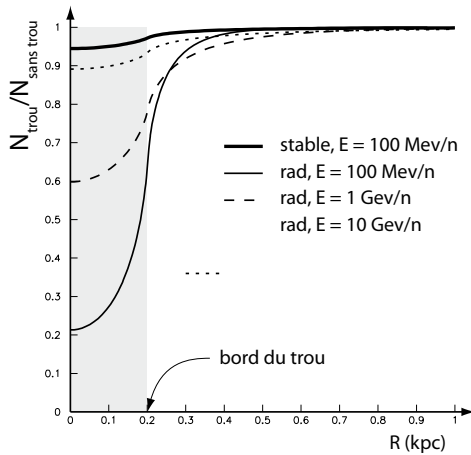


Figure 3.3 - Influence de la bulle locale sur la densité locale

Cette figure montre le profil de densité de rayons cosmiques en présence de la bulle locale, pour une espèce stable et pour une espèce radioactive, pour trois énergies.

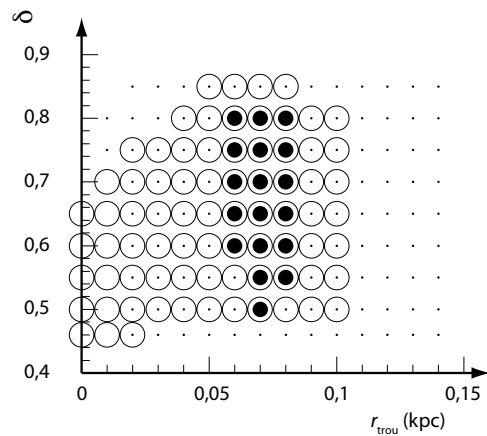
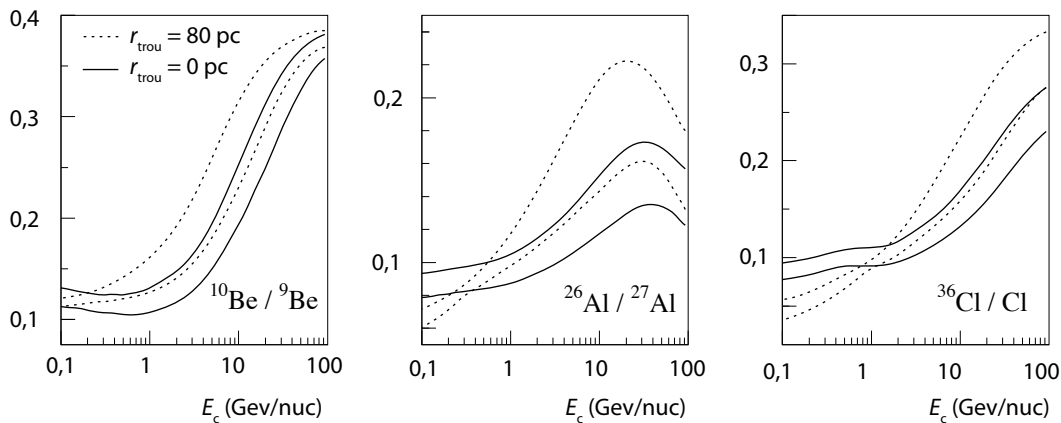


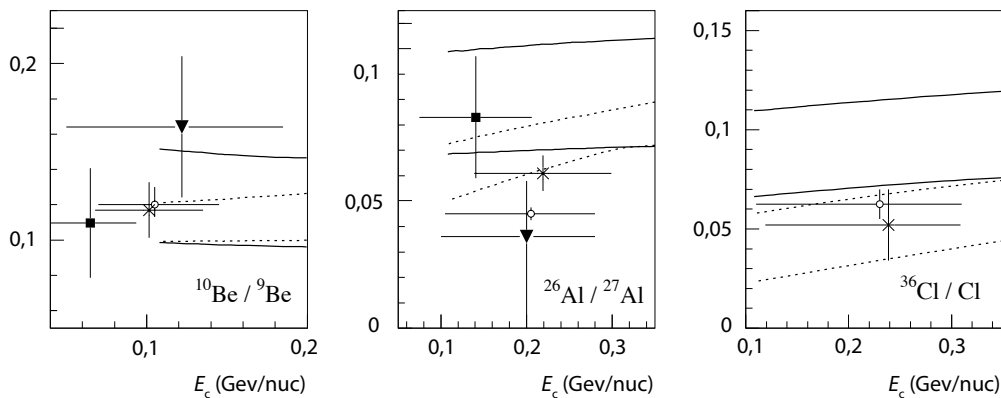
Figure 3.4 - Contraintes sur la taille du trou

Les cercles représentent les paramètres δ et r_{trou} pour lesquels il existe des paramètres de diffusion compatibles avec les rapports B/C de HEAO-3, ainsi que les rapports $^{10}\text{Be}/\text{Be}$ et $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ mesurés par ACE. Les cercles blancs correspondant aux barres d'erreur à 3σ et les cercles noirs à 1σ .



Figures 3.5 - Spectres compatibles avec $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$

Ces figures indiquent les enveloppes des rapports isotopiques indiqués, compatibles avec les points de donnée obtenus par l'expérience ACE pour le rapport $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$. Le calcul a été effectué dans deux cas, représenté en traits plein dans le cas sans trou (sans bulle locale) et en pointillés dans le cas avec un trou de 80 pc de rayon.



Figures 3.6 - Zoom sur les spectres compatibles avec $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$

Zoom sur la partie basse énergie des figures précédentes, sur lesquelles on a ajouté les points de données de expériences ACE (cercles), Ulysses (croix), Voyager (carrés) et ISEE (triangles), avec des barres d'erreur à 3σ .

la valeur indiquée plus haut, estimée par des moyens plus directs. Ensuite, en combinant les contraintes fournies par le rapport B/C avec celles fournies par les noyaux radioactifs, on parvient à contraindre le rayon de la bulle avec une précision de l'ordre de 20%, la valeur centrale étant de l'ordre de 70 pc. En revanche, cette étude ne permet pas du tout de contraindre la taille du halo de diffusion, une grandeur très importante dans l'étude de la détection directe de matière noire. Il faut noter que la qualité des données utilisées pour cette étude n'est pas irréprochable. En particulier, les données relatives à l'aluminium 26 ne semblent pas s'accorder à celles du béryllium et du chlore. Ce travail a été repris depuis¹, en se basant sur des données différentes et en utilisant un MCMC (Monte Carlo basé sur des chaînes de Markov) pour explorer l'espace des paramètres. Cette étude confirme la précédente, avec des valeurs légèrement plus élevées pour r_{trou} .

Pour tirer pleinement parti des propriétés uniques des espèces radioactives, il faudrait disposer de flux sur une gamme d'énergie plus importante, les données actuelles étant groupées à des énergies de l'ordre de quelques centaines de MeV/n. La communauté cosmicienne fondait de grands espoirs sur l'expérience AMS, qui annonçait pouvoir mesurer des spectres de radioactifs avec précision. Après l'annonce du remplacement de l'aimant supraconducteur par un aimant permanent, les caractéristiques de cet instrument ont été affectées et il n'est pas clair qu'AMS soit toujours en mesure de fournir des résultats nouveaux sur les espèces radioactives.

REF [19]

2. Anneau moléculaire

Au moment où nous commençons à nous intéresser aux effets physiques liés à la distribution spatiale des sources, nous avons été interpellés par la parution d'un article² indiquant que la présence d'un anneau moléculaire dans notre galaxie augmentait la quantité de spallations, ce qui pouvait conduire à une modification drastique de la distribution des grammages. Plus précisément, la courbe représentant la probabilité qu'un noyau ait traversé un grammage donné présentait un maximum très marqué (voir la [figure 3.3](#)), contrairement à la plupart des courbes que l'on peut trouver dans la littérature.

L'analyse rigoureuse de la distribution des grammages dans le cadre des modèles de diffusion nous a permis de détecter plusieurs erreurs conceptuelles dans la manière dont ces auteurs estimaient cette quantité. Une de ces erreurs consiste à considérer le grammage traversé en moyenne par tous les rayons cosmiques présents dans la galaxie, alors que nous n'avons accès expérimentalement qu'à une petite partie d'entre eux : ceux qui atteignent la Terre. Le calcul de cette distribution est présenté en détail dans l'[appendice B](#) de [19] et je vais simplement ici en résumer l'esprit.

L'équation de diffusion généralisée, portant sur le propagateur $\mathcal{G}(\vec{r}, t, x)$ des particules ayant traversé le grammage x au bout d'un temps t , est donnée par

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = D \Delta \mathcal{G} + q(\vec{r}, t) \delta(x) - \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} m v n_{\text{ISM}}(\vec{r}).$$

Lorsque la matière interstellaire sur laquelle se produit les spallations est distribuée de manière homogène dans le disque, la densité du milieu interstellaire est donnée par

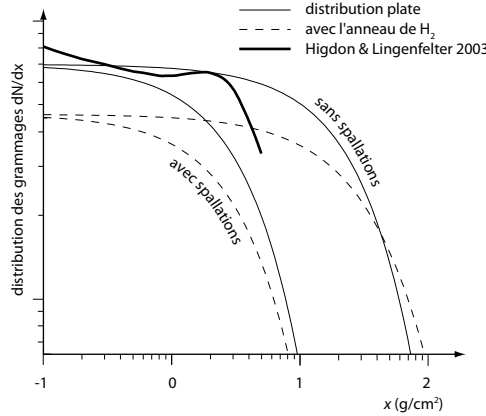
$$n_{\text{ISM}} = \Sigma_{\text{ISM}} \delta(z),$$

et on retrouve les résultats donnés dans le chapitre précédent. Si on relâche cette hypothèse

- 1 A. Putze, L. Derôme, D. Maurin, « A Markov Chain Monte Carlo technique to sample transport and source parameters of Galactic cosmic rays: II. Results for the diffusion model combining B/C and radioactive nuclei », *Astronomy and Astrophysics* **516** (2010) A66
- 2 Higdon & Lingenfelter, « The Myriad-Source Model of Cosmic Rays. I. Steady State Age and Path Length Distributions », *The Astrophysical Journal* **582** (2003) 330

Figure 3.7 - Influence de la bulle locale sur la densité locale

Cette figure montre le profil de densité de rayons cosmiques en présence de la bulle locale, pour une espèce stable et pour une espèce radioactive, pour trois énergies.



en considérant toutefois que n_{ISM} respecte la symétrie de révolution autour de l'axe de symétrie de la Galaxie, on peut développer l'équation précédente en série de Fourier-Bessel, ce qui donne une équation sur les coefficients de cette série (voir l'encadré 1 du chapitre 2). On obtient pour les particules situées dans le disque galactique ($z = 0$) la double somme

$$\mathcal{G}(r, z = 0, x) = \sum_{i=0}^{\infty} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} e^{-x/x_j} \Theta(x)$$

où a_{ij} et x_j sont les vecteurs propres et les valeurs propres de la matrice

$$A_{ij} \equiv \frac{2mv\Sigma_{\text{ISM}}^0}{DS_i} \tanh\left(\frac{S_i L}{2}\right) \int_0^1 J_0(\zeta_i \rho) J_0(\zeta_j \rho) f(\rho) d\rho$$

et où $f(\rho) = \Sigma_{\text{ISM}}(\rho R)/\Sigma_{\text{ISM}}^0$ et $S_i \equiv 2\zeta_i/R$. On peut ainsi calculer la distribution des grammages pour un profil de densité interstellaire donné. La figure 3.3 représente la distribution obtenue avec l'anneau moléculaire considéré par Higdon et Lingenfelter 2003. On voit qu'elle diffère de celle indiquée par ces auteurs. Le lecteur trouvera dans la partie 2.2.3 de [19] une discussion détaillée de la source de leur erreur.

Ce travail avait été essentiellement théorique, nous voulions alors obtenir des expressions analytiques pour les distributions des grammages et pour l'évolution temporelle des flux. Pris dans un élan calculatoire, j'avais aussi effectué le calcul de la distribution des grammages dans le cas d'un vent augmentant linéairement dans la direction orthogonale au disque. Les solutions font appel à des fonctions hypergéométriques confluentes, notées ${}_1F_1$, M ou ϕ dans la littérature, selon les auteurs. Au-delà de l'aspect ludique de ce calcul, ceci nous avait permis d'établir une correspondance entre les modèles à vent constant et les modèles à vent linéaire, en associant les paramètres de ces deux modèles donnant des distributions de grammages similaires (figure 3.8).

3. Sources discrètes

La description des sources de rayons cosmiques par une distribution continue est une approximation, la production et l'accélération des noyaux cosmiques ayant lieu dans des sites discrets, que ce soit pour des sources standard ou des sources exotiques. Examinons ces deux situations séparément.

► 3.1 Sources standard

L'accélération des rayons cosmiques galactiques standard a probablement lieu dans des sites astrophysiques bien définis (les restes de supernovae). Il faut donc dans l'équation de diffusion remplacer le terme source continu de la forme

$$q(\vec{r}, E) = \alpha n_s(\vec{r}) Q(E)$$

par

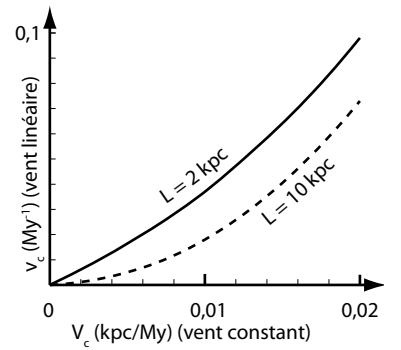


Figure 3.8 - Correspondance entre vent constant et vent linéaire

Les courbes indiquent la correspondance entre les valeurs de la vitesse convective V_c dans le cas du vent constant et du paramètre v_c intervenant dans $V_c = v_c z$ dans le cas du vent linéaire.

REF [19, 27, 28]

REF [19]

$$q(\vec{r}, E, t) = \alpha \sum_{n=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) f(t - t_n) Q(E)$$

où \vec{r}_n désigne la position de la n -ème source discrète, t_n le temps auquel cette source devient active, f une fonction décrivant l'évolution temporelle de l'efficacité de la source, $Q(E)$ la distribution spectrale au niveau de la source et n_s la densité volumique de sources. Si les sources sont distribuées dans l'espace de façon suffisamment dense, les deux descriptions deviennent équivalentes, avec

$$\left\langle \sum_{n=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_n) \right\rangle \rightarrow n_s(\vec{r}) \text{ et } f(t - t_n) = \text{cte.}$$

On s'attend à ce que les sources lointaines puissent être bien décrites de façon continue, alors que cette hypothèse risque d'être plus facilement mise en défaut pour les sources proches. De plus, les sources proches fournissent principalement des rayons cosmiques jeunes, et il importe de connaître en détail le moment où ces sources sont actives. La [figure 3.4](#) montre la structure en âge des protons cosmiques, dans un modèle de diffusion typique, en fonction de l'énergie. On voit que les sources jeunes contribuent davantage à haute énergie. Une distorsion spectrale due à un excès ou un défaut de source locale doit donc être recherché à haute énergie. Une partie de l'article [19] est consacrée à décrire plus en détail le cas de sources discrètes émettant des bouffées de rayons cosmiques à des instants donnés. Nous y avons écrit la solution de l'équation de diffusion dépendant du temps sous la forme

$$N(r, z = 0, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Dt}\right) g(t),$$

où $g(t)$ désigne une fonction du temps qui prend en compte les effets autres que la diffusion. Elle est donnée par

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-(k_n^2 + k_w^2)Dt} \sin^2(k_n L),$$

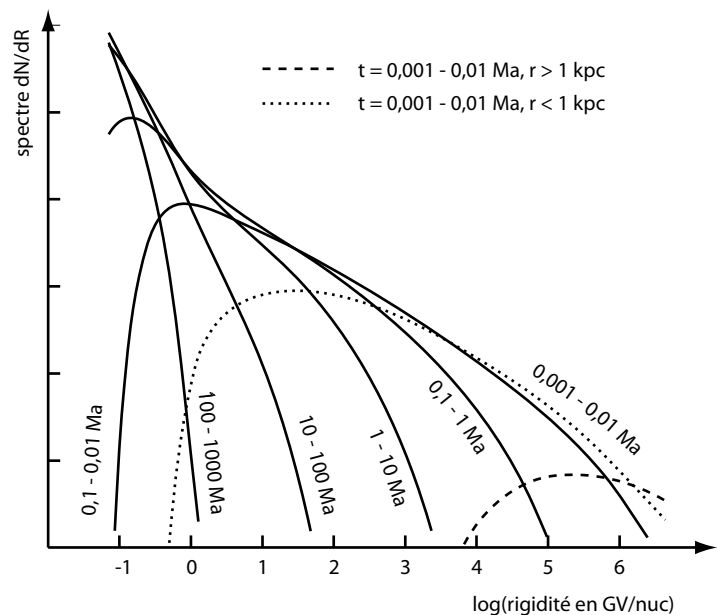
où $k_w \equiv 2D/V_c$ est une quantité homogène à l'inverse d'une distance et caractérisant l'importance du vent de convection, et k_n est solution de l'équation implicite

$$k_n \cotan(k_n L) = -k_w - k_s,$$

où $k_s = D/hv\sigma_{\text{ISM}}$ caractérise l'importance des spallations. C'est cette expression qui per-

Figure 3.9 - Structure en âge du rayonnement cosmique

Décomposition du spectre des protons en différentes tranches d'âge. La contribution des protons les plus jeunes a été décomposée en deux parties, provenant des sources plus proches ou plus lointaines que 1 kpc.



met d'obtenir la [figure 3.9](#). Les quantités k_w , k_s et k_n sont homogènes à l'inverse d'une longueur, on peut en déduire des longueurs typiques, caractérisant respectivement l'influence du vent de convection, des spallations, et la diffusion sur l'échelle spatiale associée à l'indice de Fourier-Bessel n ,

$$r_s \equiv \frac{h\nu\sigma_{\text{ISM}}}{D}, r_w \equiv \frac{V_c}{2D} \text{ et } r_n \equiv \frac{1}{k_n} \sim \frac{L}{(2n-1)\pi}.$$

La quantité r_w/L est appelée **nombre de Péclet**, elle intervient dans les problèmes de diffusion en présence de vent convectif.

Cette étude prenant en compte la dépendance du temps m'avait aussi permis de réexprimer le modèle stationnaire sous une forme nouvelle : en intégrant la solution $N(r, z, t)$ sur le temps, on obtient la solution stationnaire (que je n'écris ici que dans le disque, en $z = 0$, par souci de concision)

$$N(r, z = 0) = \frac{1}{D} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} K_0 \left(r \sqrt{k_n^2 + k_w^2} \right) \sin^2(k_n L),$$

où K_0 désigne la fonction de Bessel du troisième type d'ordre 0. C'est une fonction monotone et cette série présente l'avantage de converger beaucoup plus rapidement que celle faisant intervenir les fonctions oscillantes J_0 .

► 3.2 Sources exotiques

REF [27,28]

Les rayons cosmiques qui seraient issus de l'annihilation de particules de matière noire (la composante « exotique ») sont aussi sensibles à la distribution spatiale de la matière noire, à la présence d'inhomogénéités dans cette distribution, en particulier en présence de concentrations bien localisées (des **grumeaux**, traduction libre du terme anglosaxon consacré « clumps »). Dans le cas de la composante exotique, il est souvent fait appel dans la littérature à un « clumpiness factor » (aussi appelé « boost factor » pour des raisons que nous exposerons plus loin), un coefficient multiplicatif qui augmenterait le flux de rayons cosmiques au niveau du Système solaire, et dont la valeur dépendrait de la structure interne des grumeaux. La suite de ce chapitre est consacrée à cette situation.

4. Grumeaux

La distribution de matière dans les galaxies est inhomogène, on y trouve des nuages de gaz et de poussières, des étoiles, des amas globulaires, des amas ouverts et des galaxies naines. Ces inhomogénéités ont des origines très différentes. D'une part, les étoiles se sont formées par fragmentation, au sein d'un milieu relativement homogène. D'autre part, les galaxies naines proviennent de l'accrétion de matière dans les puits de potentiel préexistants, formés par la matière noire, des vestiges de l'effondrement gravitationnel qui a conduit à la formation de la galaxie-hôte.

En 1978, S. White et M. Rees proposèrent un scénario de formation hiérarchique, selon lequel les petites structures fusionnent pour former les plus grosses, en étant (au moins partiellement) détruites au cours du processus. Bien que les questions entourant la nature de la matière noire aient beaucoup évolué depuis cette époque, ce scénario reste l'hypothèse préférée des cosmologistes et constitue le fondement du modèle standard de la cosmologie.

Pour comprendre la formation des structures et la sous-structuration de la matière galactique, la marche à suivre semble claire, du point de vue du cosmologiste théoricien :

- la cosmologie, en s'appuyant sur l'hypothèse de l'inflation, permet de déterminer les propriétés des fluctuations primordiales de densité (les conditions initiales pour ce qui

suit) ;

- les équations de la relativité générale permettent d'étudier l'évolution de ces fluctuations, sous l'effet des interactions gravitationnelles ;
- lorsque d'autres interactions deviennent importantes (viscosité, pression), des calculs plus élaborés permettent de suivre l'évolution des structures au fur et à mesure qu'elles se forment et se détruisent.

En pratique, la situation est beaucoup plus complexe, pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les simulations numériques intéressantes pour ces questions ne permettent de décrire le milieu qu'avec une résolution limitée (correspondant au mieux à un millionième de masse solaire environ) et les interactions microscopiques décrivant l'évolution du fluide de matière noire doivent être prédigérées par des calculs analytiques. Or il n'y a pas de consensus sur l'état des structures correspondant à l'état initial des simulations numériques. Ensuite, les calculs numériques complets, prenant en compte tous les effets physiques susceptibles d'affecter la croissance et l'évolution des sous-structures, sont trop complexes pour les moyens informatiques actuellement disponibles, et les cosmologistes travaillant dans ce domaine sont amenés à faire de nombreuses approximations sur lesquels ils ne s'accordent pas tous.

5. Variance et boost

REF [27,28]

Le fait que les sources soient distribuées de façon discrète ou selon des grumeaux se traduit de deux manières sur les prédictions que l'on peut faire sur les flux locaux de rayons cosmiques, qu'ils soient d'origine standard ou exotique : le signal peut être amplifié par rapport au cas lisse, et le signal ne peut être prédit que de manière statistique, avec une variance associée à notre méconnaissance de la position précise des grumeaux autour de nous.

► 5.1 Augmentation du signal et facteurs de boost

5.1.1 Facteur de boost effectif

À quantité totale de sources donnée, le carré de la densité ρ^2 est distribué de manière plus piquée dans le cas de grumeaux que d'une distribution lisse, si bien que le taux d'annihilation de matière noire est augmenté. Cet effet, appelé « boost » dans la littérature, a fait couler beaucoup d'encre et a sauvé du naufrage de nombreuses propositions de résolution du problème de la matière noire. Son invocation permet en effet de rendre potentiellement détectable par la prochaine génération d'instruments un candidat dont le signal d'annihilation semblait désespérément faible. Selon les hypothèses sur la taille et la densité des grumeaux, on trouve dans la littérature des facteurs de boost allant de 1 à 1000. Dans le cas des particules chargées, cet effet présente une subtilité qui n'a pas toujours été bien assimilée dans les travaux sur ce sujet. Considérons pour simplifier la discussion que les particules sont toutes créées avec la même énergie $E_s > E$. Les flux de particules $\phi_\ell(E)$ et $\phi(E)$ ayant une énergie E , dans le cas d'une distribution lisse ρ_ℓ ou en présence de grumeaux s'écrivent respectivement,

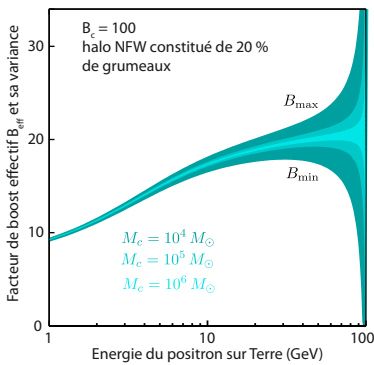


Figure 3.10 - Facteur de boost effectif

Le facteur B_{eff} du signal positronique est représenté en fonction de l'énergie, pour différentes masses individuelles M_c des grumeaux et dans le cas où les annihilations donnent des positrons d'énergie fixée, ici 100 GeV. Cette figure montre l'évolution de la variance de B_{eff} avec l'énergie.

$$\phi_\ell(E) = A_{\text{micro}} \iiint \mathcal{G}(\vec{r}, E) \rho_\ell^2(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

et

$$\phi(E) = A_{\text{micro}} \iiint \mathcal{G}(\vec{r}, E) \rho^2(\vec{r}) d^3\vec{r}.$$

où A_{micro} désigne un facteur ne dépendant que de la physique des particules et \mathcal{G} le propagateur. L'effet des grumeaux sur le spectre n'est donc pas nécessairement de le multiplier simplement par un facteur $\langle \rho / \rho_\ell \rangle$ comme on pourrait s'y attendre. Le facteur multiplicatif $B_e \equiv \phi / \phi_\ell$, que l'on appelle **facteur de boost effectif**, fait intervenir le propagateur \mathcal{G} . On notera en particulier qu'il dépend de l'énergie pour les particules chargées.

À ce stade, tout est écrit et on pourrait s'épargner la discussion qui suit : si l'on connaît la distribution spatiale de la matière noire, on peut calculer l'intégrale du carré de sa densité et en déduire, après propagation, le flux au niveau du Système solaire, ainsi que l'augmentation du flux par rapport au cas lisse.

Toutefois, de nombreux articles abordent ce problème sous un angle légèrement différent, en introduisant un facteur de boost individuel pour chaque grumeau, une quantité que l'on peut espérer pouvoir étudier de manière plus simple que la distribution dans son ensemble.

5.1.2 Profil de densité dans les grumeaux

REF [1,3]

La distribution de la densité dans les grumeaux est d'une importance capitale pour déterminer le taux d'annihilation. Elle dépend de l'histoire des grumeaux, de leur formation, de leurs interactions mutuelles et de leurs interactions avec les autres objets galactiques. Le taux d'annihilation dans un grumeaux est fixé par l'intégrale du carré de la densité sur l'ensemble du grumeau, dont la valeur est d'autant plus élevée que le grumeau est concentré.

Ces profils sont mal connus, d'un point de vue théorique (ne parlons pas du point de vue observationnel totalement inexistant). On peut énoncer quelques généralités, pour les grumeaux qui se sont formés par effondrement gravitationnel, lorsque leur masse est devenue supérieure à leur masse de Jeans :

- les grumeaux se forment par **relaxation violente**³, phénomène dicté par le champ gravitationnel moyen et se produisant sur un temps de l'ordre du temps de chute libre,

$$t_{\text{libre}} \sim \sqrt{\frac{R^3}{8GM}}$$

- les grumeaux les plus vieux se sont formés dans un environnement plus dense, et la densité γ est probablement plus élevée aujourd'hui. Ce pourrait être le cas des grumeaux situés plus près du centre galactique ;
- les grumeaux qui évoluent dans un environnement peuplé en étoiles ou en autres grumeaux ont probablement été remodelés par les interactions de marée. Celles-ci ont tendance à épilucher les régions externes des grumeaux, car elles sont moins liées. Si la structure du grumeau avait le temps de se réajuster à cette évaporation, l'effet principal serait d'augmenter la concentration. Ce phénomène est notamment responsable de l'évolution des amas globulaires, structures auto-gravitantes constituées de 10^4 - 10^6 étoiles. Toutefois, ce sont les interactions à deux corps des constituants du grumeau qui déterminent le temps de relaxation dans le grumeau, lequel est de l'ordre de

$$t_{\text{relax}} \sim \frac{N}{\ln N} \times t_{\text{libre}}$$

Pour des particules microscopiques ce temps est plus long que l'âge de la galaxie et la relaxation à deux corps est probablement très peu efficace.

Pour des grumeaux se formant par accrétion autour de mini trous noirs, on peut sous certaines hypothèses calculer le profil de densité (voir la [section 5.1.3](#)).

Si la matière noire se trouve sous la forme de grumeaux dans le halo de notre galaxie, il n'est actuellement pas possible de leur attribuer un profil de densité de manière solide. Nous nous sommes intéressés à l'effet de la granularité pour le signal d'annihilation en positons, qui est principalement d'origine locale. On peut donc supposer que les grumeaux de même masse ont des profils similaires voire égaux.

En ce qui concerne la masse totale des grumeaux, les simulations numériques semblent indiquer qu'elle est distribuée selon

$$\frac{dN}{d \log M} \propto M^{-1}.$$

3 Lynden-Bell, « *Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems* », MNRAS **136** (1967) 101

Les grumeaux les plus légers sont donc les plus abondants et on pourra, en première approximation, considérer que tous les grumeaux ont la même masse, égale à celle des plus légers d'entre eux. D'après ce qui précède sur les profils, on pourra supposer pour l'étude du signal en positons que tous les grumeaux sont identiques et ont la même luminosité (voir le paragraphe suivant).

5.1.3 Luminosité d'un grumeau et facteur de boost individuel

luminosité : nombre de particules émises par seconde par un grumeau.

La luminosité d'un grumeau est reliée à son profil de densité par

$$\mathcal{L}_i = A_{\text{micro}} \iiint \rho_i^2 dV.$$

Cette quantité ne dépend que des propriétés du grumeau et non de son environnement. Elle est directement proportionnelle à ce qui est appelé facteur de boost et noté B_c dans [27], c'est-à-dire l'augmentation du flux causée par une augmentation de la densité par rapport à une densité de référence ρ_0

$$B_c \equiv \frac{\iiint \rho_i^2 dV}{\iiint \rho_0^2 dV}.$$

On peut discuter la pertinence de l'appellation « facteur de boost » dans la mesure où la définition de B_c conduit à un facteur de boost différent de l'unité pour une distribution lisse aux endroits où la densité n'est pas égale à la densité de référence. De plus, elle ne tend pas vers l'unité lorsque l'on fait tendre la distribution grumelée vers la distribution lisse.

On peut aussi définir le facteur de boost individuel B comme l'augmentation du terme source obtenue en remplaçant une région homogène par un grumeau de même masse, construit à partir de la densité locale ρ_ℓ

$$B \equiv \frac{\iiint \rho_i^2 dV}{\iiint \rho_\ell^2 dV},$$

où les intégrales portent sur un grumeau individuel. La masse d'un grumeau est alors égale à $M = \rho_\ell V$ et si la distribution est assez lisse pour pouvoir être supposée homogène sur la taille d'un grumeau, alors on peut réécrire

$$B = \frac{1}{M\rho_\ell} \iiint \rho_i^2 dV.$$

Les deux quantités B et B_{eff} sont reliées entre elles. Considérons, toujours pour simplifier la discussion, que toute la matière noire se trouve sous la forme de grumeaux que l'on assimile à des sources ponctuelles. Le flux créé par un grumeau i s'écrit

$$\phi_i = A_{\text{micro}} \iiint_{\text{grumeau}} \mathcal{G}_i(\vec{r}, E) \rho_i^2(\vec{r}) d^3\vec{r}$$

soit, en supposant que le grumeau est assez petit pour que le propagateur soit constant sur le grumeau,

$$\phi_i = A_{\text{micro}} \mathcal{G}_i(\vec{r}, E) \iiint_{\text{grumeau}} \rho_i^2(\vec{r}) d^3\vec{r} = A_{\text{micro}} \mathcal{G}_i M \rho_0 B^* = A_{\text{micro}} \mathcal{G}_i M \rho_\ell B.$$

Pour calculer la valeur moyenne du flux total, dû à l'ensemble des grumeaux, il faut faire une hypothèse sur la manière dont la luminosité varie d'un grumeau à l'autre. L'hypothèse la plus simple consiste à supposer que tous les grumeaux sont identiques, c'est-à-dire que leurs luminosités sont égales. Ainsi, le facteur B_c est constant, et le facteur B est d'autant plus faible que la densité lissée ρ_ℓ est importante. On a donc

$$\langle \phi \rangle = A_{\text{micro}} N M B_c \rho_0 \langle \mathcal{G}_i \rangle_P,$$

où la notation $\langle \cdot \rangle$ désigne dans le premier terme la valeur moyenne sur l'ensemble des réali-

sations d'un halo fait de grumeaux, et où $\langle \cdot \rangle_p$ désigne dans le terme de droite l'intégrale sur le volume, pondérée par la probabilité de présence des grumeaux, c'est-à-dire leur fonction de distribution numérique. Si les grumeaux ont tous la même masse, cette fonction de distribution est proportionnelle à ρ_ℓ/M , et

$$\langle \phi \rangle = A_{\text{micro}} N B^* \langle \mathcal{G}_i \rho_\ell \rangle.$$

Le flux total pour une distribution lisse est quant à lui donné par

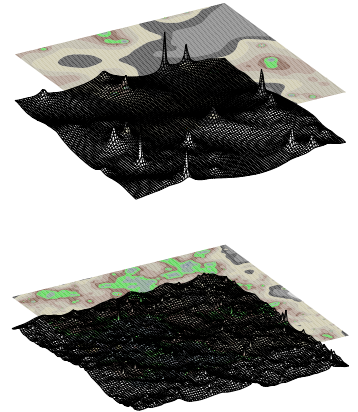
$$\phi_\ell = A_{\text{micro}} V \langle \mathcal{G} \rho_\ell^2 \rangle.$$

On trouve ainsi

$$B_{\text{eff}} = B_c \frac{\mathcal{I}_1}{\mathcal{I}_2} \text{ où } \mathcal{I}_n(E) \equiv \iiint_{\text{halo}} G(\vec{x}, E) \left\{ \frac{\rho_s(\vec{x})}{\rho_0} \right\}^n d^3\vec{x}.$$

L'amplification est dans ce cas différente de B_c et dépend de l'énergie. En effet, dans le cas où B^* est constant et où les grumeaux sont distribués selon ρ_ℓ , à basse énergie on sonde des régions plus vastes dans lesquelles la densité lissée prend des valeurs différentes de la densité locale, ce qui augmente ou diminue le nombre de sources contribuant effectivement au signal observé sur Terre.

Si l'on avait supposé que tous les grumeaux ont le même facteur de boost individuel B et sont distribués numériquement comme la densité lisse, on aurait trouvé que l'amplification du signal due à la présence des grumeaux est simplement égale à B et ne dépend pas de l'énergie. Il est plus raisonnable de supposer que B_c est constant d'un grumeau à l'autre, c'est-à-dire que B est plus faible dans les régions plus denses. Le facteur de boost effectif est donc plus faible à basse énergie, où l'on est sensible au flux provenant de grumeaux plus proches du centre galactique, pour lesquels B est plus faible. Ceci est une autre manière de comprendre pourquoi le facteur de boost effectif dépend de l'énergie.



Cartes d'antiprotons

Carte de la densité d'antiprotons, pour des sources ponctuelles tirées au sort dans tout le disque galactique. La région représentée est un carré de 2 kpc de côté, centré sur la position du Système solaire. En haut, pour 10 000 sources et en bas, pour 500 000 sources. Les sources ponctuelles sont moins visibles dans le second cas car les sources lointaines forment un fond continu plus important.

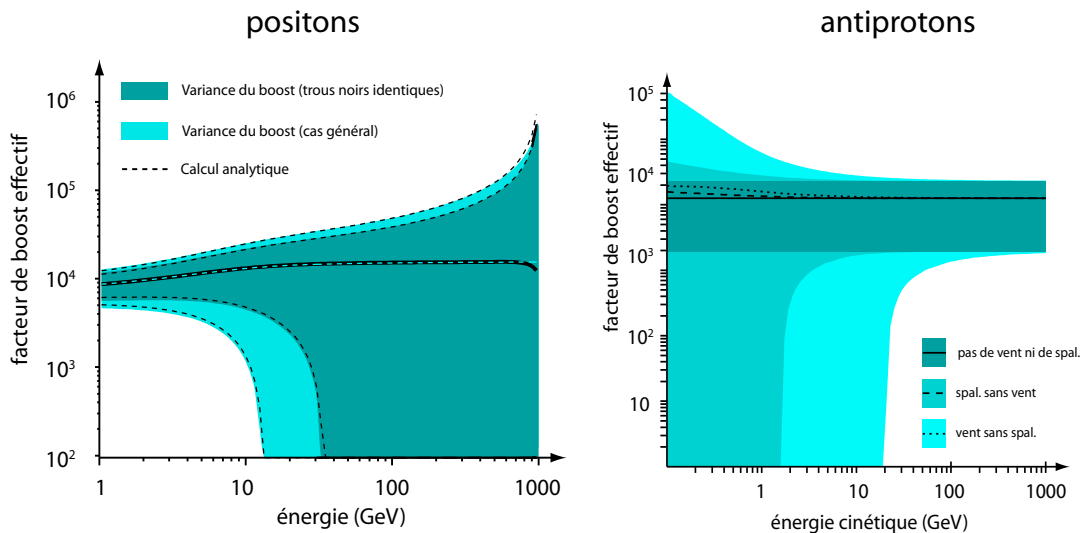


Figure 3.11 - Amplification et variance du signal d'annihilation

Ces figures représentent le facteur de boost effectif pour les positons (à gauche) et pour les antiprotons (à droite), dans le cadre d'un modèle spécifique de distribution des trous noirs de masse intermédiaire. La figure de gauche superpose les limites à 1σ résultant d'un tirage Monte Carlo (zones grisées) aux prédictions de l'étude statistique (en pointillés), qui donnent les mêmes résultats.

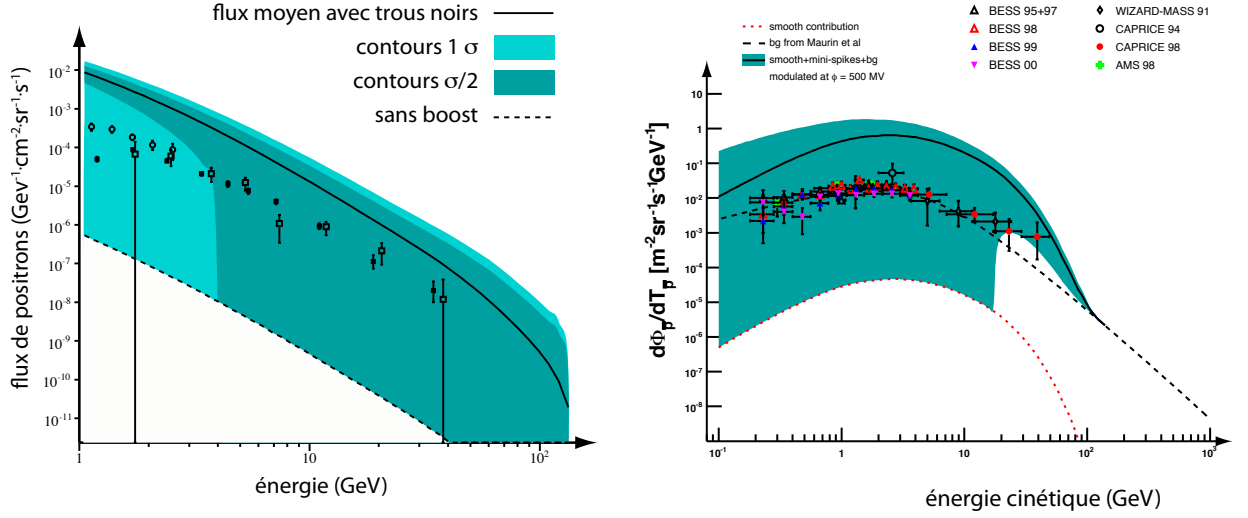


Figure 3.12 - Signal d'annihilation

Ces figures représentent le flux au niveau de la Terre pour des positons (à gauche) et pour des antiprotons (à droite), dans le cadre d'un modèle spécifique de distribution des trous noirs de masse intermédiaire, pour de la matière noire supersymétrique constituée de binos de masse $m = 140 \text{ GeV}/c^2$.

REF [27,28]

► 5.2 Variance du signal

Si la matière noire se présente sous la forme de grumeaux discrets, il faut aussi tenir compte du fait qu'on ne connaît pas dans le détail la position des grumeaux individuels. Le signal que l'on peut prédire serait fortement affecté par la présence fortuite d'un ou plusieurs grumeau particulièrement proches. Cette méconnaissance est décrite par la variance du signal, pour toutes les réalisations envisageables de la distribution des grumeaux, compatible avec les propriétés globales de la distribution (symétries, homogénéité, densité moyenne),

$$\sigma_\phi^2 = \langle \phi^2 \rangle_p - \langle \phi \rangle_p^2 \text{ soit } \frac{\sigma_\phi^2}{\langle \phi \rangle_p^2} = \frac{\langle \phi^2 \rangle_p}{\langle \phi \rangle_p^2} - 1.$$

Pour un grumeau unique, le calcul de cette variance donne, pour une luminosité B_c constante,

$$\sigma_i^2 = \iiint A_{\text{micro}}^2 \mathcal{G}_i^2 M^2 \rho_0^2 B_c^2 p(\vec{x}) dV = A_{\text{micro}}^2 M^2 \rho_0^2 B_c^2 V \langle \mathcal{G}_i^2 \rho_i \rangle,$$

soit pour N grumeaux,

$$\frac{\sigma_\phi^2}{\langle \phi \rangle^2} = \frac{M}{\rho_0} \frac{\mathcal{J}_1}{\mathcal{I}_1^2} \text{ où } \mathcal{J}_n(E) \equiv \iiint \mathcal{G}^2(\vec{x}, E) \left\{ \frac{\rho_s(\vec{x})}{\rho_0} \right\}^n d^3\vec{x}$$

et où l'on a négligé le terme en $1/N$ qui apparaît dans le calcul.

REF [28]

► 5.3 Probabilité d'un grumeau très proche

Pendant plusieurs années, l'expérience HEAT semblait indiquer un excès dans le flux de positons au niveau du Système solaire, aux énergies de l'ordre d'une dizaine de GeV. De nombreuses études ont exploré la possibilité que celui-ci soit dû à l'annihilation de matière noire. En particulier, le fait que le signal d'annihilation se traduise par une bosse proéminente dans le spectre pourrait indiquer qu'il est dû à la présence d'un grumeau particulièrement proche de la Terre⁴. Nous avons montré que dans les conditions envisagées par ces auteurs, il est extrêmement improbable que la contribution d'un grumeau domine celle de tous les autres : si au cours d'un tirage au sort des positions un grumeau est très proche de la Terre, alors

⁴ Cumberbatch & Silk, astro-ph/0602320

il est extrêmement improbable qu'un autre ne le soit pas. Nous avons ainsi estimé, avec des ordres de grandeurs raisonnable pour l'ensemble des paramètres physiques entrant en jeu, que la probabilité P que le signal dû à un grumeau unique soit dominante était de l'ordre de

$$\log_{10} P \sim -10^{12}$$

ce que l'on peut assimiler à une probabilité nulle.

► 5.4 Mini-spikes

REF [28]

Après avoir mené la réflexion décrite ci-dessus pour les positons issus de l'annihilation dans des grumeaux de matière noire [27], nous en avons appliqué les méthodes pour déterminer l'influence d'une augmentation de la densité de matière noire due à l'accrétion autour de mini trous noirs sur le signal d'annihilation en antiprotons et en positons [28].

Gianfranco Bertone et ses collaborateurs venaient d'étudier le signal d'annihilation en rayons gamma et en neutrinos dans un nouveau modèle, dans lequel la formation de trous noirs primordiaux de masse intermédiaire ($10^2 M_{\odot} \lesssim M \lesssim 10^6 M_{\odot}$) était accompagnée de l'accrétion de la matière noire environnante, et donc d'une augmentation de la densité autour de ces trous noirs. Il était naturel de compléter cette étude par celle du signal en antiprotons et en positons.

Si l'accrétion se produit de manière adiabatique, on peut montrer qu'un profil de densité en loi de puissance, avec la pente γ , devient piquée pour former un « spike » de pente

$$\gamma_{\text{sp}} = \frac{9 - 2\gamma}{4 - \gamma}.$$

Pour un profil initial de type Navarro-Frenk-White, la valeur $\gamma = 1$ conduit à $\gamma_{\text{sp}} = 7/3$. La structure interne de ces spikes peut donc être déduite de leur processus de formation, ce qui signifie que la luminosité de ces spikes en antiprotons ou en positons est connue, dans le cadre d'un modèle de matière noire donnée. Les propriétés statistiques de la distribution spatiale et de la distribution en masse des trous noirs était aussi donnée par les modèles de formation, nous avons pu calculer celles des signaux d'annihilation en antimatière.

Nous avons commencé à étudier ces propriétés statistiques par méthodes de Monte Carlo, grâce à des tirages aléatoires de la position des trous noirs en accord avec les indications théoriques. J'avais alors commencé à retrouver les résultats par une étude purement statistique, et l'article comporte une comparaison des deux approches. La partie de gauche de la [figure 3.8](#) montre la comparaison entre l'approche Monte Carlo et l'approche analytique. L'accord observé nous a permis de nous assurer que nous avons compris la partie analytique, et nous a encouragé à l'utiliser dans des travaux ultérieur. C'est pour moi un excellent souvenir de collaboration scientifique faite de discussions passionnées et stimulantes sur les probabilités, les statistiques et la physique.

Pour en revenir au contenu de la [figure 3.8](#), on voit que la situation est très différente pour les antiprotons et les positons. Dans le cas des antiprotons, les pertes d'énergie sont faibles et si l'on ne prend en compte que la diffusion, le facteur de boost et la variance ne dépendent pas de l'énergie. C'est le cas à haute énergie. Si l'on prend en compte le vent galactique et les spallations, des effets plus importants à basse énergie car le coefficient de diffusion augmente avec l'énergie, alors le facteur de boost, et surtout la variance, dépendent de l'énergie. Dans le cas des positons, les pertes d'énergie dominent la propagation et les positons de haute énergie sont ceux qui ont le moins diffusé. Ils ont une origine très locale, et induisent un effet de bruit de grenaille.

6. Anisotropies

► 6.1 Généralités

Le flux de rayons cosmiques que nous recevons sur Terre est quasiment isotrope, avec quelques indications tendant à suggérer la présence d'une anisotropie au niveau de 10^{-3} en valeur relative, à haute énergie. L'isotropie s'explique bien par le fait que la propagation diffusive tend à isotropiser les flux. On s'attend aussi naturellement à une anisotropie due au courant engendré par le gradient de concentration : la loi de Fick s'écrit

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$$

et on doit donc voir un excès de rayons cosmiques provenant de la direction opposée à \vec{j} . La carte de provenance des rayons cosmiques devrait donc comporter un dipôle orienté selon le gradient de la densité. Lorsque les sources sont distribuées de façon continue en respectant la symétrie cylindrique autour de l'axe de la galaxie, le gradient est radial et le dipôle devrait l'être aussi. Quantitativement, il existe plusieurs manières de définir l'anisotropie dipolaire. En particulier, la quantité

$$\delta_{\text{dipole}} \equiv \frac{3D}{c} \frac{\|\vec{\nabla} n\|}{n}$$

donne, dans l'approximation diffusive, l'amplitude du dipôle. Le gradient spatial de la densité étant de l'ordre de n/R , où R désigne le rayon du halo diffusif, on a

$$\delta_{\text{dipole}} \sim \frac{3D}{Rc}.$$

La diffusion n'est qu'une approximation de la propagation des rayons cosmiques, et une manière de mieux comprendre les anisotropies consiste à relaxer légèrement l'hypothèse diffusive et de considérer que les rayons cosmiques qui arrivent sur Terre parviennent directement d'une distance λ , la distance moyenne qui sépare deux diffusions par les inhomogénéités du champ magnétique local, ou **libre parcours moyen**. La carte d'anisotropie devrait alors suivre la carte de la densité sur la sphère de rayon λ et centrée sur la Terre. On s'aperçoit alors, d'après la distribution de densité au voisinage du disque, que la distribution est plus complexe qu'un dipôle. En particulier, dans le cas d'un disque infiniment mince, la densité décroît rapidement de part et d'autre du disque galactique et on s'attend à une composante quadrupolaire appréciable. Dans le cas d'un disque épais, la densité décroît moins vite dans la direction orthogonale au disque galactique et la composante quadrupolaire est probablement réduite. Ces questions ont fait l'objet du stage de M2 de Guilhem Bernard, au printemps 2010, et seront reprises et prolongées au début de sa thèse sous ma direction.

► 6.2 Sources continues

Dans un premier temps, Guilhem a calculé les cartes d'anisotropie résultant d'une distribution continue de sources, aux énergies observées par l'expérience Milagro, afin de comparer avec la carte publiée par cette expérience⁵. Les cartes qu'il a obtenues sont qualitativement similaires à celles publiées (voir la [figure 3.13](#)), et l'étude quantitative préliminaire a montré que l'on peut espérer contraindre davantage les paramètres de diffusion par ce type d'étude. En effet, le dipôle δ_{dipole} croît avec l'énergie comme $D(E)$, car le terme en $\|\vec{\nabla} n\|/n$ de l'expression précédente dépend peu de l'énergie. Sa mesure expérimentale donnerait donc des indications sur la pente δ (rien à voir avec δ_{dipole} !) du coefficient de diffusion. Les résultats préliminaires de Guilhem indiquent une valeur $\delta \sim 0,8$. Cette étude demande à être raffinée, en particulier en utilisant le modèle de diffusion complet pour calculer le gradient de la densité, prenant en compte le vent de convection, les spallations et les pertes/gains d'énergie. Il faudra aussi croiser les contraintes obtenues avec celles provenant des noyaux.

⁵ Abdo et al., « *The Large Scale Cosmic-Ray Anisotropy as Observed with Milagro* », *The Astrophysical Journal* **698** (2009) 2121.

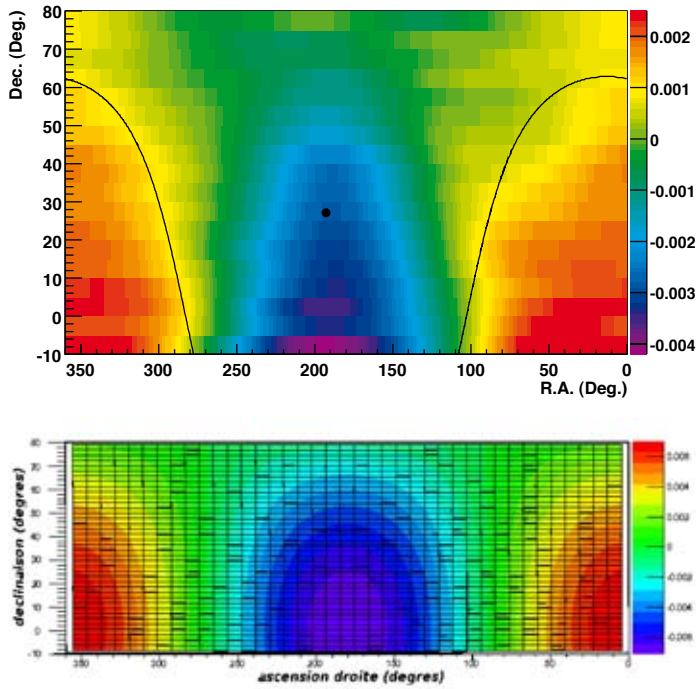


Figure 3.13 - Cartes d'anisotropie

En haut, représentation du flux de rayons cosmiques en fonction de l'ascension droite et de la déclinaison, publiée par l'expérience Milagro, à une énergie de 6 TeV. Il ne s'agit pas d'une carte proprement dite, car pour chaque déclinaison la dépendance en ascension droite a été modélisée par une sinusoïde. En bas, carte obtenue lors du stage de Guilhem Bernard, en utilisant la même procédure que celle qui donne la figure du haut, pour $\delta = 0,6$.

► 6.3 Sources discrètes

Lorsqu'on s'intéresse au flux de rayons cosmiques dont les sources sont situées dans un disque, la contribution d'un anneau de sources de rayon r ne dépend pas de r , pour un propagateur purement diffusif, en $1/r$.

Notons N le nombre de sources discrètes qu'il faut placer pour obtenir le même flux, en moyenne, que pour la distribution continues, c'est-à-dire tel que la densité dans le cas continu soit donné par

$$n_{\text{cont}} = N \langle n \rangle_1$$

où $\langle \cdot \rangle_1$ désigne la valeur moyenne sur toutes les positions possibles d'une unique source, soit pour des sources distribuées dans un disque mince,

$$\langle n \rangle = \iint \mathcal{G}(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) q(\vec{r}') d^3 \vec{r}',$$

où q décrit la distribution spatiale des sources. La valeur moyenne du gradient est donnée par

$$\langle \vec{\text{grad}} n \rangle_1 \equiv \vec{\text{grad}}_{\vec{r}} \left\{ \iint \mathcal{G}(\vec{r}' \rightarrow \vec{r}) q(\vec{r}') d^3 \vec{r}' \right\} = \vec{\text{grad}} \langle n \rangle_1 = \frac{1}{N} \vec{\text{grad}} n_{\text{cont}}.$$

La valeur moyenne du rapport $\|\vec{\nabla} n\|/n$ dans le cas des sources discrètes est donc égale à la valeur obtenue dans le cas continu. Toutefois, cette remarque n'est finalement que de peu d'utilité en pratique, puisque l'on n'a accès qu'à une réalisation de la distribution des sources ponctuelles. C'est, encore une fois, la variance de ce rapport qui permet d'estimer la valeur typique que l'on peut attendre pour une unique réalisation. Cette étude reste à faire. La figure 3.14 montre le rapport entre le cas discret et le cas continu.

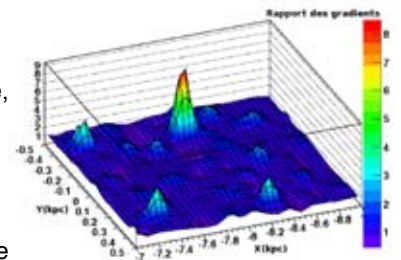


Figure 3.14 - Sources discrètes

Cette carte, obtenue pendant le stage de Guilhem Bernard, montre le rapport entre le gradient de densité obtenu pour un tirage aléatoire donné de la position des sources discrètes et la valeur du gradient obtenue pour la distribution continue.

7. Prospective

L'étude de l'anisotropie promet de nous mener assez loin dans l'étude des modèles de diffusion. Tout d'abord, il faudra probablement revenir sur l'hypothèse de diffusion, la loi de Fick cessant probablement d'être valable aux échelles du libre parcours moyen λ utilisé pour calculer l'anisotropie dans la [section 6.1](#). Ensuite, la plupart des calculs effectués avec `USINE` sont basés sur l'hypothèse d'un disque infiniment mince. Si celle-ci semble pertinente pour étudier des espèces dont la longueur de diffusion est de l'ordre de quelques kiloparsecs, sa validité demande à être vérifiée lorsque l'on s'intéresse à des phénomènes se déroulant sur une fraction de parsec (ceci s'applique probablement aussi à l'étude des espèces radioactives, au passage).

Par ailleurs, nous devons nous poser sérieusement la question de la nature des sources du rayonnement cosmique, si l'on veut espérer calculer l'anisotropie pour la vraie distribution des sources (un catalogue) et non d'un ensemble stochastique de réalisations possibles.

Ce travail demandera probablement d'utiliser `USINE` de manière intensive et d'y ajouter des nouveaux modules. Ceci s'inscrira dans une tâche plus générale, celle de maintenir la version publique d'`USINE`, ainsi que le site web associé, qui pourrait devenir une ressource précieuse si on s'en occupe suffisamment bien.

Enfin, avec l'arrivée de la prochaine génération d'instruments, je pense en particulier à PAMELA et AMS, il faudra revoir en détail toutes les hypothèses du modèle de diffusion sur lesquelles nous nous appuyons dans la plupart de nos études : homogénéité et isotropie du coefficient de diffusion, homogénéité du milieu interstellaire, répartition spatiale de la réaction, connexion disque-halo de diffusion.

1. Cours
2. Livres
3. Stages
4. Rencontres
5. Administration

Ce chapitre présente une synthèse de mes activités liées à l'enseignement, qui représente une partie importante de mon activité professionnelle. Un enseignant-chercheur n'est pas un enseignant à mi-temps, pas plus qu'il n'est chercheur à mi-temps. C'est un métier à part, subtilement différent de celui de chercheur, et très différent de celui d'enseignant. La mission qui consiste à donner des cours à des étudiants dans différents cursus universitaires prend ses racines dans la démarche de recherche, au moins autant que dans le goût de partager les connaissances. Dans l'idéal, donner un cours, même à un niveau qu'on pourrait croire élémentaire, demande d'explorer toutes les sources de confusion, toutes les erreurs de compréhension, de cerner toutes les difficultés conceptuelles ou techniques, afin de mieux les aborder face aux étudiants. Cette exploration commence bien souvent par une introspection sincère, par la question « ai-je vraiment compris ce que je raconte ? » ou même « au fait, c'est vrai ce que je suis en train de dire ? ». Parfois, elle débouche sur une nouvelle façon de comprendre un concept, plus personnelle, plus profondément ancrée en nous. La démarche aura alors été similaire à celle de la recherche et conduit à des moments de satisfaction, voire de plaisir profond, très similaires.

Le plaisir est probablement assez similaire aussi à celui que peut éprouver un musicien quand une nouvelle mélodie se révèle à lui. J'oserai même poursuivre cette analogie en évoquant le plaisir de la scène, au moment d'enseigner. Ces moments de partage, parfois laborieux, parfois magiques, toujours éprouvants et enrichissants, sont pour moi extrêmement précieux et contribuent beaucoup à mon équilibre sur le plan professionnel certes, mais aussi sur le plan personnel, émotionnel.

L'université change rapidement, le métier d'enseignant-chercheur aussi, d'une manière parfois difficile à comprendre et à accepter. J'espère sincèrement que les conditions offertes aux étudiants et aux enseignants resteront guidées par les considérations que je viens d'évoquer.



1. Cours

► 1.1 Cours, TD et TP à l'université de Savoie

J'enseigne à l'université de Savoie depuis 1994, ayant commencé comme moniteur AMN (assistant moniteur normalien), puis comme maître de conférences à partir de 1998. La taille humaine de cette université m'a permis de choisir de manière relativement libre les enseignements auxquels j'ai pu participer et de les varier, que ce soit au niveau des types d'enseignements (cours, TD, TP), des filières (sciences fondamentales et appliquées, sciences de la vie et de la terre, licence professionnelle des métiers du vide), des niveaux (du L1 au M2), des matières et même des lieux géographiques où se déroulent ces enseignements.

Je suis attaché à cette variété, non pas parce qu'un même cours deviendrait moins intéressant au fil des années – je pense au contraire qu'un cours devient de plus en plus intéressant, au fur et à mesure qu'on se heurte aux difficultés des étudiants, aux difficultés de la matière elle-même et qu'on expérimente de nouvelles manières d'organiser un cours et de présenter une matière – mais parce qu'elle permet une vue en coupe d'une partie de l'ensemble des étudiants.

Un enseignement idéal pour moi équilibrerait trois volets :

- une partie « introduction à la physique », pour des élèves entrant à l'université (L1) ou n'ayant pas eu l'occasion de faire de la physique depuis longtemps (L3 pro, Licence professorat des écoles) ;
- une partie « révision de la physique » pour des élèves préparant le concours du capes ;
- une partie « physique approfondie », pour des élèves plus mûrs pour s'intéresser à des aspects plus formels et plus complexes de la physique.

Il devrait aussi équilibrer la part respective des cours dits « magistraux », d'encadrement de travaux dirigés et de travaux pratiques. J'essaie de réaliser ces deux équilibres, dans la mesure où les contraintes organisationnelles le permettent.

Les objectifs pédagogiques sont très différents d'un cours à l'autre. Pour les étudiants de L1, tout frais sortis du lycée, il s'agit autant de les accueillir à l'université que de leur enseigner la physique. Je m'efforce de leur montrer de nouvelles méthodes de travail, de nouvelles approches de la physique, des études en général, de les responsabiliser vis-à-vis de leur présence en cours, de leur attention. La plupart des étudiants n'ont pas de projet d'études bien défini sur le moyen terme, et il s'agit aussi de leur montrer les pistes reliées aux sciences physiques. Par ailleurs, ces étudiants ont souvent une relation fragile avec les mathématiques, une relation faite d'un mélange de peur et de respect, comme on respecterait une grenade rangée dans un placard du garage. Une partie des efforts pédagogiques, en L1, consiste à désamorcer cette peur, à exposer les outils mathématiques dont se sert la physique, à montrer aux étudiants que ça s'apprend, comme la guitare ou le karaté, à condition de s'y mettre sérieusement, car il ne s'agit pas non plus de camoufler ou nier cette difficulté. Comme je le dis à ces étudiants, il ne faut pas croire que Jimi Hendrix est parvenu à son niveau de guitare sans efforts ni même sans douleur. Ce mélange fait de cet enseignement une aventure très humaine.

L'enseignement à la préparation au capes, devenu un enseignement de master de préparation aux métiers de l'enseignement cette année, est aussi assez particulière. Cette fois, les étudiants ont un projet très bien défini : réussir un concours. Ils sont aussi plus âgés et possèdent des méthodes de travail personnel bien rodées. Les cours-TD que j'y donne, ainsi que les séances de TP que j'y encadre, constituent de vrais dialogues, où il s'agit autant de partager des manières de concevoir une notion et les approches possibles pour l'enseigner que d'apprendre ou rappeler ces notions. Il est encore trop tôt pour estimer les effets de la maîtrise de ces filières, mais il semble d'ores et déjà clair que cette ambiance, la qualité de ce dialogue, seront affectés par la nouvelle structuration de la préparation aux

concours d'enseignement.

Au cours de cette quinzaine d'années, j'ai enseigné la physique générale (L3 pro, préparation au professorat des écoles), l'optique (L1, capes), la mécanique (L1), la thermodynamique (capes), l'électromagnétisme (L2), la mécanique quantique (L3, M1), l'astrophysique (M1), la relativité générale (M2, voir ci-dessous), l'histoire des sciences (L3).

► 1.2 Cours à l'ENS de Lyon

Depuis quelques années, je donne un cours d'introduction à la relativité générale au niveau M2, à l'ENS de Lyon. Les responsables du M2 m'ont demandé de placer le niveau de ce cours à un niveau intermédiaire entre M1 et M2, ce qui cause parfois des malentendus avec les étudiants, certains étant déçus de ne pas y trouver un cours pointu de géométrie différentielle, d'autres n'acceptant pas (ne comprenant pas ?) que le premier cours de deux heures puisse ne contenir que quelques expressions mathématiques. Ces malentendus sont heureusement rares et ce cours est bien perçu par la majorité des étudiants.

► 1.3 Cours doctoraux et post-doctoraux

J'ai été invité plusieurs fois à donner des cours dans les écoles doctorales et post-doctorales :

- « Transport des rayons cosmiques et modèles galactiques », avec David Maurin, à PARC 2003 (Physique et Astrophysique du Rayonnement Cosmique, Goutelas);
- « Recherches de supernovae et énergie noire » aux Houches (28/08/2005 – 9/09/2005) ;
- « Dark Matter » : XI^e Vietnam School of Physics, Da Nang (27/12/2004 – 07/01/2005) ;
- « Cosmology from type Ia supernovae » à Cargèse (août 2007) ;
- « Dark matter in the Universe » à Oran (mai 2009).

L'objectif est là encore très différent, les étudiants sont généralement bien préparés pour suivre les détails techniques du cours enseigné, et la difficulté pédagogique consiste à bien doser ces détails, à oublier les réflexes acquis en enseignant en licence.

► 1.4 Cours à la formation TETRAS (L3 pro)

J'ai aussi enseigné la physique générale dans la formation VIDAP (Vide et Applications), délivrée par le centre TETRAS, dans le cadre d'un L3 pro. Les étudiants sont en alternance entre leurs cours et un stage en entreprise, ils n'ont dans la plupart des cas plus fait de physique depuis plusieurs années. C'était un enseignement difficile, d'une part parce que l'objectif pédagogique et les besoins des étudiants n'étaient pas clairement définis, d'autre part parce qu'il fallait délivrer théoriquement délivrer un enseignement d'un niveau L3 à des étudiants qui, dans cette discipline, possédaient parfois celui de terminale.

► 1.5 Soutien en L1

Depuis quelques années, un dispositif appelé « plan licence » a été mis en place pour lutter contre l'échec scolaire en première année universitaire. À l'université de Savoie, il comporte un volet de soutien aux étudiants les plus en difficulté. Je participe à ce soutien, consistant en des séances de type TD, en très petits groupes (5 étudiants au maximum), au cours desquels en partant d'un exercice très simple on tente d'identifier les difficultés rencontrées par les étudiants, pour y passer le temps nécessaire durant la séance. La difficulté de cette activité, du point de vue de l'enseignant, consiste essentiellement à rester à l'écoute et à ne rien prendre pour acquis, même parmi les notions de base, en physique, en mathématiques, ou même en logique ou en raisonnement.

► 1.6 CNED

Je collabore depuis plus de dix ans à la préparation au concours de l'Agrégation de Scien-

ces Physiques proposée par le CNED (« Centre National d'Enseignement à Distance »), en rédigeant des leçons de physique (ainsi que quelques problèmes de physique). J'ai ainsi pu aborder les thèmes suivants :

- Caractère non galiléen du référentiel terrestre. Conséquences ;
- Principes de la cinématique relativiste. Durée propre. Longueur propre ;
- Collisions en relativité restreinte : application à l'étude des particules élémentaires ;
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique indépendant du temps. Applications ;
- Premier principe de la thermodynamique : énergie interne. Conséquences ;
- Notion d'état microscopique. Interprétation statistique de l'entropie. Exemples ;
- Rayonnement à l'équilibre thermique; Corps noir. Applications ;
- Étude d'un phénomène de transport : diffusion de particules ;
- Traitement d'un signal électrique : filtrage linéaire. Étude spectrale. Exemples et applications ;
- Dispersion et absorption d'une onde électromagnétique plane dans un milieu diélectrique. Modélisations microscopiques ;
- Exemples simples de phénomènes de propagation unidimensionnels : Ondes progressives. Ondes stationnaires. Aspects énergétiques ;
- Réflexion et réfraction d'une onde électromagnétique monochromatique plane à la surface de séparation entre deux milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes ;
- Ondes sonores dans les fluides. Approximation acoustique. Aspect énergétique ;
- Diffraction de Fraunhofer. Applications ;
- Diffraction par des structures périodiques dans différents domaines spectraux ;
- Propagation dans un milieu dispersif; Vitesse de phase, vitesse de groupe; Paquets d'ondes planes et évolution. Exemples ;
- Le photon : la particule et ses interactions avec la matière ;
- Effet tunnel. Applications ;
- Le noyau : stabilité, énergie ;
- Obtention d'interférences à deux ondes en optique. Notion de cohérence ;
- Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques ;
- Mécanismes de la conduction électrique. Loi d'Ohm. Effet Hall. Applications ;
- Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique ;
- Absorption, émission spontanée ou induite du rayonnement : coefficients d'Einstein. Applications ;
- Introduction au facteur de Boltzmann à partir d'un exemple au choix ;
- Évolution et condition d'équilibre d'un système à l'équilibre thermodynamique fermé. Potentiel thermodynamique. Exemples.
- Confinement de l'électron et quantification de l'énergie. Exemples.

2. Livres

Ces dernières années, mon activité d'enseignement est complétée par la rédaction d'ouvrages universitaires, depuis ma rencontre avec Fabrice Chrétien, éditeur en physique aux Éditions De Boeck. Ceci me permet de nouer des liens pédagogiques particuliers avec les étudiants, que j'essaie de faire participer à la phase de rédaction en leur faisant relire des passages du manuscrit et en tenant compte de leurs commentaires éventuels. Bien sûr, le simple fait de mener de front l'écriture d'un ouvrage et la préparation d'un cours destinés aux mêmes étudiants est très enrichissant et participe à améliorer la qualité de mon enseignement, je l'espère en tout cas.

► 2.1 Optique physique (2006)

L'ouvrage « Optique Physique » est un texte de cours de niveau L2-L3, que j'ai écrit pour mettre à plat ce que j'ai appris, compris, en enseignant l'optique. Comme tout enseignant,

j'ai dû trouver seul la réponse à certaines questions de base, et j'ai pris grand plaisir à les rédiger pour en faire mon premier vrai livre. Un des aspects les plus intéressants de la rédaction a été de réaliser des figures originales (par exemple l'évolution de la polarisation au cours du temps pour une onde quasimonochromatique), et d'écrire des programmes permettant de tracer une figure d'interférence ou de diffraction. Avec le recul, cet ouvrage souffre de quelques défauts de jeunesse mais il est extrêmement bien reçu et je le consulte moi-même pour me rafraîchir les idées sur quelques notions délicates.

► 2.2 Dictionnaire de physique (2009 et 2010)

L'écriture du dictionnaire de physique, en collaboration avec Loïc Villain et Pascal Febvre, a été une aventure extraordinaire. Le projet a vu le jour comme une commande des éditions De Boeck. Le but de cet ouvrage est d'expliquer les termes de physique qu'un étudiant de licence est susceptible de rencontrer dans ses cours ou dans ses lectures extra-scolaires. Un but moins avoué est d'exciter la curiosité du lecteur, en faisant figurer des définitions dépassant le cadre de la licence, ou même celui de la physique pure et dure. Nous avons écrit l'ouvrage que nous aurions aimé avoir, comme étudiants puis comme enseignant. La deuxième édition, parue en 2009, correspond d'assez près au livre que nous voulions écrire.

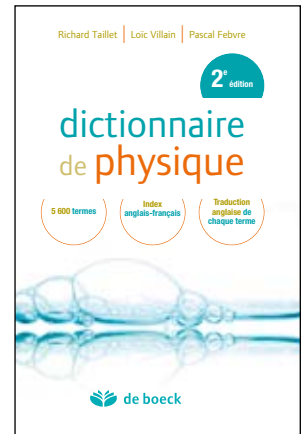
Pendant quelques années ce projet a révolutionné ma manière d'écrire, de lire et d'enseigner : j'ai passé énormément de temps à lire des revues scientifiques de niveau intermédiaire entre la recherche et l'enseignement (American Journal of Physics, Physics Today, les articles compagnons de Nature Physics ou de Nature Photonics), toute lecture devenant prétexte à des améliorations des définitions, à la proposition de nouvelles.

Ce projet aura été une fabuleuse expérience de collaboration, en particulier avec Loïc Villain avec qui nous avons passé de très nombreuses heures à discuter, à confronter nos manières de comprendre, d'expliquer ou de formuler, parfois très antagonistes !

De façon plus anecdotique, l'écriture du dictionnaire de physique m'a donné l'occasion de développer les outils collaboratifs nécessaires pour travailler à trois de manière efficace. Les entrées et les définitions se présentent sous la forme d'une base de données (MySQL) gérée par des interface en php que j'ai écrites spécifiquement pour le dictionnaire. Ces interfaces nous permettaient d'ajouter ou modifier des définitions, et de partager des commentaires entre auteurs. Cette méthode de travail a eu un autre gros avantage : le travail d'édition s'est fait de manière assez automatique, une fois écrits les scripts php qui transformaient la base de données en document LaTeX et une fois bien définis les styles du document. Ceci nous a permis de gagner beaucoup de temps pour la seconde édition.

► 2.3 Mementos (2008 et 2009)

J'ai aussi publié deux « mementos », des ouvrages d'une centaine de pages destinés aux révisions des étudiants de licence, l'un portant sur l'optique géométrique, l'autre sur la thermodynamique. L'objectif a clairement été atteint si j'en crois le commentaire publié dans le Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et Chimie : « *Il est en effet à porter au crédit de l'auteur son sens développé de la synthèse qui lui permet de proposer un concentré des faits physiques, des concepts, des formules et des figures importants dans un texte essentiellement rédigé et lisible, aux antipodes de certaines collections de formules compilées et vendues à des fins indécises.* »



3. Stages

J'encadre régulièrement des stagiaires au niveau L et M, à raison d'un ou deux par an. Dans la mesure du possible, j'essaie d'encadrer deux étudiants de niveaux différents et sur des sujets proches mais différents, afin de leur laisser la possibilité de discuter sur les parties communes à ces sujets. Le sujet correspond généralement à une interrogation du groupe d'astrophysique des particules dans lequel est accueilli l'étudiant, le but étant multiple :

- faire découvrir à l'étudiant le quotidien des chercheurs et des enseignants-chercheurs ;
- l'initier à l'ensemble des étapes ponctuant un travail de recherche : exploration et synthèse de la bibliographie, formalisation d'un problème, utilisation d'outils de calcul modernes, rédaction d'un rapport, présentation orale du stage ;

J'ai encadré deux stages de M2, celui de Rémi Vincent en juin – juillet 2002 sur la « Propagation des rayons cosmiques galactiques » et celui de Guilhem Bernard de mars à juin 2010 sur « L'anisotropie du rayonnement cosmique galactique ». Ce dernier stage se poursuit actuellement une thèse au sein du groupe d'astrophysique et de cosmologie du LAPTH, sous ma direction.

4. Rencontres

La diffusion de la connaissance, l'enseignement au sens large, passe aussi par d'autres voies que celles offertes par l'université. Elle est aussi parfois suscitée par des rencontres, provoquées ou fortuites, je voudrais ici en donner quelques exemples.

► 4.1 Rencontres avec le grand public

Le domaine de l'astrophysique des particules se prête particulièrement bien à des conférences de vulgarisation pour le grand public, et j'ai l'occasion d'en donner entre 5 et 10 par an. Certaines de ces conférences ont été préparées seul, sur des sujets tels que :

- « l'antimatière dans l'Univers » ;
- « les rayons cosmiques » ;
- « la matière noire » ;
- « la relativité générale » ;
- « l'histoire de l'optique et de l'astronomie » ;
- « des grands télescopes : pourquoi faire ? » ;
- « les gogos de la science ».
- « l'optique du trou : les applications modernes d'une idée millénaire ».

J'ai notamment eu la chance de présenter la première au 14^e Festival d'astronomie de Fleurance, en août 2004.

D'autres sont préparées collectivement, au sein de la « commission communication » du LAPTH, un groupe de quelques chercheurs et enseignants-chercheurs préparant pendant une année une conférence qui est ensuite présentée dans des conférences, par exemple à la fête de la science ou dans des écoles, mais pas uniquement. Elles ont eu pour titres :

- « des atomes aux particules et au-delà: élémentaire, mon cher Watson ! » ;
- « grains d'onde: les deux visages de la lumière » ;
- « un voyage dans l'espace et le temps : les dimensions supplémentaires ».

J'ai participé à deux reprises à la série de conférences « French Science Today » organisées tous les ans par les alliances françaises en Inde, sur des sujets variés. Le but est d'exposer (en anglais) des sujets de recherche de personnalités scientifiques françaises, pour un public d'amateurs de sciences et de scolaires. J'ai ainsi pu présenter à Calcutta, Bombay, Hyderabad, Pune, Goa, Bangalore, Chennai, Trivandrum, des conférences portant sur :

- « Antimatter in the Universe » (octobre 2003) ;
- « Dark Matter » (2004).

► 4.2 Rencontres avec les lycéens

Certaines de ces conférences ont été ciblées plus précisément sur les lycéens, avec un objectif supplémentaire : sensibiliser les élèves du secondaire à la possibilité de faire des sciences à l'université et tenter de démêler l'écheveau des idées préconçues et des réalités sur l'enseignement universitaire, pour en exposer les forces et les faiblesses.

► 4.3 Futura-Sciences

Après avoir participé érateurs pendant plusieurs années, sous le pseudonyme deep_turtle. Ceci qui m'a amené à échanger plus 10 000 messages lors de discussions avec les internautes. Cette activité m'a permis de rencontrer un public nouveau (notamment des internautes très jeunes, ainsi que des amateurs de science autodidactes avec qui il est assez difficile de discuter dans un autre cadre). Elle m'a aussi obligé à faire un effort de pédagogie particulier, encore différent de celui que l'on attend d'un enseignant. Je me suis désengagé de cette activité non par manque de motivation, mais parce qu'on ne peut pas tout faire (bien) en même temps !



Dans le cadre de cette collaboration avec futura-sciences, j'ai pu réaliser deux dossiers thématiques de quelques pages, l'un sur l'antimatière, l'autre sur la matière noire. J'ai développé ce dernier en un site complet beaucoup plus conséquent, avec des entrées à des niveaux de lecture différents et des renvois bibliographiques précis. Ce site reçoit environ 4000 visites par an, et arrive en seconde position (après l'article de wikipédia) lors d'une requête « matière noire » sur google.

► 4.4 La Turbine

À l'occasion de l'Année Mondiale de l'Astronomie, Philippe de Pachtère, directeur du CCSTI La Turbine, situé à Cran-Gévrier, m'a fait l'honneur de m'inviter comme « scientifique à résidence ». Ceci consiste à être présent à un certain nombre de manifestations, sur l'année, afin de créer un lien particulier avec le public qui fréquente ce centre. Ainsi, j'ai participé :

- à des séances de cinéma mensuelles, au cours desquelles la projection d'un film de science-fiction était suivie d'une intervention de ma part et d'une discussion avec le public, sur des points reliés à l'astrophysique ou à la science en général. C'était l'occasion de parler de manière décontractée des métiers de chercheur et d'enseignant-chercheur, ainsi que de l'université en général ;
- à des astro-randos, des randonnées en raquette sous la pleine lune en compagnie d'un astronome amateur, membre d'une association, pour parler du ciel et d'astronomie ;
- à des conférences sous forme de carte blanche ;
- au comité consultatif du CCSTI, que je préside.



► 4.5 France-Inter

Lors de mon séjour en délégation CNRS à Paris, j'ai eu la chance de participer à deux reprises à l'émission « Libre cours » présentée par Anne Sinclair. Cette émission propose une rencontre entre une personnalité scientifique éminente (George Charpak puis Hubert Reeves) et un ensemble de jeunes étudiants se destinant à une carrière scientifique, des étudiants en maîtrise ou en thèse de doctorat. J'avais participé à la préparation de l'émission en aidant à coordonner tout ce petit monde, et dans un enchaînement dont j'ai oublié les détails, j'ai fini par me retrouver dans l'équipe des jeunes aspirants. Ce fut pour moi une expérience passionnante, que ce soit les discussions préparatoires avec les étudiants et l'assistante d'Anne Sinclair, ou le jour de l'émission elle-même, en présence de ces grands hommes et de cette grande femme !



5. Administration

► 5.1 Responsabilité du L3 de physique

Je suis responsable du L3 de physique et de sciences physiques depuis trois ans. Cette responsabilité englobe :

- la conception des emplois du temps, une activité ingrate dont le seul intérêt, mis à part le fait qu'il faut bien que quelqu'un le fasse, est qu'elle permet de rester en contact avec les enseignants des autres filières, pour coordonner les modules communs ;
- la responsabilité pédagogique de la formation, la participation aux jurys, l'organisation des commissions pédagogiques, le conseil aux étudiants pour les poursuites d'étude ;
- la participation aux réunions des équipes pédagogiques, au cours desquelles sont discutées les choix pédagogiques des différentes formations. C'est notamment au cours de ces réunions qu'une partie des décisions relatives aux contrats quadriennaux sont prises ;
- la participation à des manifestations d'information et de rencontre avec les lycéens et les étudiants (journée du lycéen, portes ouvertes, journée des licences et des masters).

► 5.2 Responsabilités pédagogiques

En tant qu'enseignant de cours de physique de PHYS 111 (mécanique), PHYS 112 (optique) et PHYS 301 (électromagnétisme), je suis responsable des EC correspondantes. Cette responsabilité s'accompagne de plusieurs obligations :

- concevoir et rédiger les sujets d'examens (ou de contrôles continus) ;
- corriger l'ensemble des copies ;
- s'assurer que les programmes figurant sur les différents documents accessibles aux étudiants sont à jour ;
- s'assurer du bon déroulement des TD et TP encadrés par d'autres enseignants, ainsi que de leur articulation avec le cours.

Je suis aussi responsable du semestre 3 en L2, pour la physique et directeur des études en physique pour la licence à l'université de Savoie. Je participe donc à l'ensemble des jurys de semestre (soit par année, six jurys de première session, six jurys de seconde session, un jury de DEUG, deux jurys de licence). Je participe aussi activement aux diverses activités de pilotage de la licence. En particulier, j'ai été porteur du projet du contrat quadriennal 2011-2014, pour sa partie relative à la licence, et j'ai pris en charge la rédaction du dossier. Ce projet a été évalué A par l'AERES en avril 2010.

Depuis plusieurs années, le nombre d'étudiants inscrits en licence décroît fortement, et sans que nous, les enseignants, en soyions tenus directement responsable (il s'agit d'une tendance lourde et constatée dans l'ensemble des universités, pas seulement française), nous sommes fortement incités à tenter de remédier à cette situation. Ceci se traduit par une charge administrative supplémentaire. Je pense que les enseignants d'une discipline ont en effet un rôle à jouer, par exemple via les activités que j'ai mentionnées dans le chapitre 4. En revanche, je ne pense pas qu'ils puissent le faire seuls, sans une infrastructure solide, sans être épaulés par des personnes qui connaissent très bien l'ensemble des formations, qui sont capables de répondre à des questions beaucoup plus générales que celles qui concernent directement leur discipline. Je ne pense pas non plus qu'il leur revienne d'inventer les moyens d'attirer les étudiants vers les sciences, le problème est global, national, et c'est une perte d'énergie et de temps que de laisser les enseignants tenter, chacun de leur côté, de résoudre ce problème. On pourrait rêver que ce problème soit abordé au niveau national et que la volonté politique d'amener les jeunes vers les sciences soit plus clairement affirmée.

Remerciements

Ce travail de synthèse de mes activités scientifiques m'aura permis de revenir en arrière et de me rappeler le rôle qu'ont pu jouer différentes personnes de mon entourage professionnel dans ces travaux et leur évolution. En premier lieu, le LAPTH a toujours constitué un environnement de rêve pour travailler dans des conditions excellentes. Je tiens à remercier le service administratif, Dominique Turc, Virginie Malaval, Véronique Jonnery et Nathalie Perkins, qui dans une bonne humeur qui ne ternit aucunement leur efficacité, parviennent à rendre transparent tout un pan administratif lié à la recherche. Je remercie aussi les directeurs successifs du LAPTH, Paul Sorba, Patrick Aurenche, Fawzi Boudjema qui, avec des sensibilités certes différentes, ont toujours été très ouverts et soucieux du bien-être professionnel des différentes équipes. Merci Eric pour avoir, entre autres, passé cinq ans à me rappeler que ce serait bien que je passe cette HDR ! Merci à l'ensemble du LAPP, pour un certain nombre d'excellents moments !

La recherche scientifique est l'occasion de voyages et de rencontres. Je remercie vivement les membres de l'équipe SNLS de Jussieu (en particulier Reynald Pain, Julien Guy, Pierre Astier et Nicolas Regnault) qui m'ont accueilli à bras ouverts en délégation CNRS pendant deux ans. Ceci m'a permis de découvrir une nouvelle facette de ce métier, de nouveaux collègues, une nouvelle ville, et d'avoir la chance de passer quelque temps à Hawaii pour raisons astronomiques.

Merci aussi aux différents collègues qui m'ont fait l'honneur de m'accueillir dans des collaborations scientifiques, leur confiance me touche, merci notamment à Elisabeth Vangioni, à Joseph Silk, à Aurélien Barrau, à Julien Lavalle.

Le volet « rayons cosmiques » de mon travail n'aurait certainement pas pris autant d'ampleur sans David Maurin l'indéfectible, son travail, son acharnement, son sérieux et sa personnalité. Merci David ! L'équipe qui s'est réunie il y a dix ans autour de ce nouveau thème a aussi eu pour moi une place importante, un grand merci aussi à Fiorenza Donato et Pierre Salati.

Le noyau qui se forme à Grenoble autour des activités liées aux astroparticules prend de l'ampleur et c'est toujours un très grand plaisir d'y retrouver, en plus des personnes mentionnées plus haut, Laurent Derôme, Michel Buenerd, Antje Putze (que je compte comme Grenobloise, malgré elle) avec qui j'espère avoir l'occasion de travailler de manière plus régulière (Michel me dit qu'il est à la retraite, mais ça n'empêche pas de discuter !).

Je remercie vivement Elisabeth Vangioni, Alessandro Bottino, Joseph Silk, Jean Orloff et Pierre Salati pour avoir accepté de me faire l'honneur de participer au jury de cette habilitation, et je remercie doublement Joe, Alessandro et Jean pour en avoir été les rapporteurs.

Merci aux collègues de l'université pour rendre ma deuxième vie aussi agréable que ma première (ou l'inverse), en particulier merci Damir Buskalic et Marie Ginibre ; merci spécial pour Sean, extraordinaire double collègue !

Enfin je tiens, du fond du cœur, à remercier de nouveau Pierre Salati, qui comme chef de groupe me laisse une liberté extraordinaire. Au-delà de cet aspect, merci pour tout Pierre...

Liste de publications

Mes publications dans des revues à comité de lecture sont indiquées dans la liste suivante, le numéro entre crochet étant utilisé dans le corps du texte pour s'y référer. Ce numéro est cliquable et mène à l'article correspondant dans la base de données bibliographiques ADS de la NASA. Deux articles ont été ajoutés à la fin de la liste, avec une numérotation séparée, car ils n'ont pas été publiés dans des revues à comité de lecture. J'ai aussi fait figurer mes livres universitaires publiés chez De Boeck.

Articles publiés dans des revues à comité de lecture

- [30] *Galactic secondary positron flux at the Earth*
Delahaye, T.; Lineros, R.; Donato, F.; Fornengo, N.; Lavalle, J.; Salati, P.; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **501** (2009) 821-833
- [29] *A Markov Chain Monte Carlo technique to sample transport and source parameters of Galactic cosmic rays. I. Method and results for the Leaky-Box model*
Putze, A.; Derome, L.; Maurin, D.; Perotto, L.; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **497** (2009) 991-1007
- [28] *Antiproton and positron signal enhancement in dark matter minispikes scenarios*
Brun, Pierre; Bertone, Gianfranco; Lavalle, Julien; Salati, Pierre; Taillet, Richard
Physical Review **D76** (2008) id. 083506
- [27] *Clumpiness of dark matter and the positron annihilation signal*
Lavalle, J.; Pochon, J.; Salati, P.; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **462** (2007) 827-840
- [26] *The Rise Time of Type Ia Supernovae from the Supernova Legacy Survey*
Conley, A.; Howell, D. A.; Howes, A.; Sullivan, M.; Astier, P.; Balam, D.; Basa, S.; Carlberg, R. G.; Fouchez, D.; Guy, J.; Hook, I.; Neill, J. D.; Pain, R.; Perrett, K.; Pritchett, C. J.; Regnault, N.; Rich, J.; Taillet, R.; Aubourg, E.; Bronder, J.; Ellis, R. S.; Fabbro, S.; Filiol, M.; Le Borgne, D.; Palanque-Delabrouille, N.; Perlmutter, S.; Ripoche, P.
The Astronomical Journal **132** (2006) 1707-1713
- [25] *Rates and Properties of Type Ia Supernovae as a Function of Mass and Star Formation in Their Host Galaxies*
Sullivan, M.; Le Borgne, D.; Pritchett, C. J.; Hodsman, A.; Neill, J. D.; Howell, D. A.; Carlberg, R. G.; Astier, P.; Aubourg, E.; Balam, D.; Basa, S.; Conley, A.; Fabbro, S.; Fouchez, D.; Guy, J.; Hook, I.; Pain, R.; Palanque-Delabrouille, N.; Perrett, K.; Regnault, N.; Rich, J.; Taillet, R.; Baumont, S.; Bronder, J.; Ellis, R. S.; Filiol, M.; Lusset, V.; Perlmutter, S.; Ripoche, P.; Tao, C.
The Astrophysical Journal **648** (2006) 868-883
- [24] *The Type Ia Supernova Rate at $z \sim 0.5$ from the Supernova Legacy Survey*
Neill, J. D.; Sullivan, M.; Balam, D.; Pritchett, C. J.; Howell, D. A.; Perrett, K.; Astier, P.; Aubourg, E.; Basa, S.; Carlberg, R. G.; Conley, A.; Fabbro, S.; Fouchez, D.; Guy, J.; Hook, I.; Pain, R.; Palanque-Delabrouille, N.; Regnault, N.; Rich, J.; Taillet, R.; Aldering, G.; Antilogus, P.; Arsenijevic, V.; Balland, C.; Baumont, S.; Bronder, J.; Ellis, R. S.; Filiol, M.; Gonçalves, A. C.; Hardin, D.; Kowalski, M.; Lidman, C.; Lusset, V.; Mouchet, M.; Mourao, A.; Perlmutter, S.; Ripoche, P.; Schlegel, D.; Tao, C.
The Astronomical Journal **132** (2006) 1126-1145
- [23] *Photometric Selection of High-Redshift Type Ia Supernova Candidates*
Sullivan, M.; Howell, D. A.; Perrett, K.; Nugent, P. E.; Astier, P.; Aubourg, E.; Balam, D.; Basa, S.; Carlberg, R. G.; Conley, A.; Fabbro, S.; Fouchez, D.; Guy, J.; Hook, I.; Lafoux, H.; Neill, J. D.; Pain, R.; Palanque-Delabrouille, N.; Prit-

chet, C. J. ; Regnault, N. ; Rich, J. ; Taillet, R. ; Aldering, G. ; Baumont, S. ; Bronder, J. ; Filiol, M. ; Knop, R. A. ; Perlmutter, S. ; Tao, C.

The Astronomical Journal **131** (2006) 960-972

- [22] *The Supernova Legacy Survey: measurement of Ω_M , Ω_Λ and w from the first year data set*
Astier, P. ; Guy, J. ; Regnault, N. ; Pain, R. ; Aubourg, E. ; Balam, D. ; Basa, S. ; Carlberg, R. G. ; Fabbro, S. ; Fouchez, D. ; Hook, I. M. ; Howell, D. A. ; Lafoux, H. ; Neill, J. D. ; Palanque-Delabrouille, N. ; Perrett, K. ; Pritchett, C. J. ; Rich, J. ; Sullivan, M. ; Taillet, R. ; Aldering, G. ; Antilogus, P. ; Arsenijevic, V. ; Balland, C. ; Baumont, S. ; Bronder, J. ; Courtois, H. ; Ellis, R. S. ; Filiol, M. ; Gonçalves, A. C. ; Goobar, A. ; Guide, D. ; Hardin, D. ; Lusset, V. ; Lidman, C. ; McMahon, R. ; Mouchet, M. ; Mourao, A. ; Perlmutter, S. ; Ripoche, P. ; Tao, C. ; Walton, N.
Astronomy and Astrophysics **447** (2006) 31-48
- [21] *Gemini Spectroscopy of Supernovae from the Supernova Legacy Survey: Improving High-Redshift Supernova Selection and Classification*
Howell, D. A. ; Sullivan, M. ; Perrett, K. ; Bronder, T. J. ; Hook, I. M. ; Astier, P. ; Aubourg, E. ; Balam, D. ; Basa, S. ; Carlberg, R. G. ; Fabbro, S. ; Fouchez, D. ; Guy, J. ; Lafoux, H. ; Neill, J. D. ; Pain, R. ; Palanque-Delabrouille, N. ; Pritchett, C. J. ; Regnault, N. ; Rich, J. ; Taillet, R. ; Knop, R. ; McMahon, R. G. ; Perlmutter, S. ; Walton, N. A.
The Astrophysical Journal **634** (2005) 1190-1201
- [20] *Kaluza-Klein dark matter and galactic antiprotons*
Barrau, Aurélien ; Salati, Pierre ; Servant, Géraldine ; Donato, Fiorenza ; Grain, Julien ; Maurin, David ; Taillet, Richard
Physical Review **D72** (2005) id. 063507
- [19] *The Effects of Discreteness of Galactic Cosmic-Ray Sources*
Taillet, R. ; Salati, P. ; Maurin, D. ; Vangioni-Flam, E. ; Cassé, M.
The Astrophysical Journal, Volume **609**, Issue 1, pp. 173-185
- [18] *Antiprotons in cosmic rays from neutralino annihilation*
Donato, F. ; Fornengo, N. ; Maurin, D. ; Salati, P. ; Taillet, R.
Physical Review D, vol. 69, Issue 6, id. 063501
- [17] *Supersymmetric dark matter in M31: can one see neutralino annihilation with CELESTE?*
Falvard, A. ; Giraud, E. ; Jacholkowska, A. ; Lavalle, J. ; Nuss, E. ; Piron, F. ; Sapinski, M. ; Salati, P. ; Taillet, R. ; Jedamzik, K. ; Moutaka, G.
Astroparticle Physics, Volume **20**, Issue 4, p. 467-484
- [16] *Spatial origin of Galactic cosmic rays in diffusion models. II. Exotic primary cosmic rays*
Maurin, D. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **404** (2003) 949-958
- [15] *Spatial origin of Galactic cosmic rays in diffusion models. I. Standard sources in the Galactic disk*
Taillet, R. ; Maurin, D.
Astronomy and Astrophysics **402** (2003) 971-983
- [14] *Antideuterons as a probe of primordial black holes*
Barrau, A. ; Boudoul, G. ; Donato, F. ; Maurin, D. ; Salati, P. ; Stéfanon, I. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **398** (2003) 403-410
- [13] *New results on source and diffusion spectral features of Galactic cosmic rays: I B/C ratio*
Maurin, D. ; Taillet, R. ; Donato, F.
Astronomy and Astrophysics **394** (2002) 1039-1056
- [12] *Antiprotons from primordial black holes*
Barrau, A. ; Boudoul, G. ; Donato, F. ; Maurin, D. ; Salati, P. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **388** (2002) 676-687

- [11] *beta -radioactive cosmic rays in a diffusion model: Test for a local bubble?*
Donato, F. ; Maurin, D. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **381** (2002) 539-559
- [10] *Antiprotons from Spallations of Cosmic Rays on Interstellar Matter*
Donato, F. ; Maurin, D. ; Salati, P. ; Barrau, A. ; Boudoul, G. ; Taillet, R.
The Astrophysical Journal **563** (2001) 172-184
- [9] *Cosmic Rays below $Z=30$ in a Diffusion Model: New Constraints on Propagation Parameters*
Maurin, D. ; Donato, F. ; Taillet, R. ; Salati, P.
The Astrophysical Journal **555** (2001) 585-596
- [8] *Detection of neutralino annihilation photons from external galaxies*
Baltz, E. A. ; Briot, C. ; Salati, P. ; Taillet, R. ; Silk, J.
Physical Review **D61** (2000) id.023514
- [7] *Kinematics of LMC stellar populations and self-lensing optical depth*
Salati, P. ; Taillet, R. ; Aubourg, É. ; Palanque-Delabrouille, N. ; Spiro, M.
Astronomy and Astrophysics **350** (1999) L57-L61
- [6] *Antimatter cosmic rays*
Chardonnet, P. ; Salati, P. ; Taillet, R.
New Astronomy **4** (1999) 275-282
- [5] *Microlensing optical depth of the Large Magellanic Cloud*
Aubourg, É. ; Palanque-Delabrouille, N. ; Salati, P. ; Spiro, M. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **347** (1999) 850-859
- [4] *The gas deficiency of the galactic halo*
Salati, P. ; Chardonnet, P. ; Luo, X. ; Silk, J. ; Taillet, R.
Astronomy and Astrophysics **313** (1996) 1-7
- [3] *The Dark Side of Globular Clusters*
Taillet, Richard ; Salati, Pierre ; Longaretti, Pierre-Yves
Astrophysical Journal **461** (1996) 104
- [2] *Galactic diffusion and the antiproton signal of supersymmetric dark matter*
Chardonnet, Pascal ; Mignola, Giulio ; Salati, Pierre ; Taillet, Richard
Physics Letters **B384** (1996) 161-168
- [1] *Baryonic dark matter in globular clusters*
Taillet, Richard ; Longaretti, Pierre-Yves ; Salati, Pierre
Astroparticle Physics **1** (1995) 87-97

Articles supplémentaires

- [S1] *Galactic Cosmic Ray Nuclei as a Tool for Astroparticle Physics*
Maurin, D. ; Taillet, R., Donato, F., Salati, P., Barrau, A., Boudoul, G.
Research Signposts, «Recent Research Developments in Astrophysics» (2002)
- [S2] *Diffusion in a slab: different approaches*
Taillet, R. ; Salati, P., Maurin, D., Pilon, E.
arXiv:physics/0401099v1 (2004)
- [S3] *La propagation des rayons cosmiques galactiques*
Maurin, D. et Taillet, R.
Cours de l'école de Goutelas (2003)

Livres universitaires

- [L1] *Dictionnaire de Physique (deuxième édition)*
Richard Taillet, Loïc Villain, Pascal Febvre
Éditions De Boeck, 2009
- [L2] *Optique Physique*
Richard Taillet
Éditions De Boeck, 2006
- [L3] *Mémento d'optique géométrique*
Richard Taillet
Éditions De Boeck, 2008
- [L4] *Mémento de thermodynamique*
Richard Taillet
Éditions De Boeck, 2010

REF

[19]

The effects of discreteness of galactic cosmic-ray sources

R. Taillet, P. Salati, D. Maurin, E. Vangioni-Flam, M. Cassé

The Astrophysical Journal **609** (2004) 609

THE EFFECTS OF DISCRETENESS OF GALACTIC COSMIC-RAY SOURCES

R. TAILLET,^{1,2} P. SALATI,^{1,2} D. MAURIN,^{3,4} E. VANGIONI-FLAM,³ AND M. CASSE^{3,4}

Received 2003 August 7; accepted 2004 March 17

ABSTRACT

Most studies of GeV Galactic cosmic-ray (GCR) nuclei assume a steady state/continuous distribution for the sources of cosmic rays, but this distribution is actually discrete in time and space. The current progress in our understanding of cosmic-ray physics (acceleration, propagation), the need for a consistent explanation of several properties of GCRs (nuclei, γ , etc.), and the precision of present and future space missions (e.g., *INTEGRAL*, *AMS*, *AGILE*, *GLAST*) point toward the necessity to go beyond this approximation. A steady state semianalytical model that well describes many nuclei data has been developed in the past years based on this approximation, as well as others. We wish to extend it to a time-dependent version, including discrete sources. As a first step, the validity of several approximations of the model we use is checked to validate the approach: (1) the effect of the radial variation of the interstellar gas density is inspected and (2) the effect of a specific modeling for the Galactic wind (linear vs. constant) is discussed. In a second step, the approximation of using continuous sources in space is considered. This is completed by a study of time discreteness through the time-dependent version of the propagation equation. A new analytical solution of this equation for instantaneous pointlike sources, including the effect of escape, Galactic wind, and spallation, is presented. Application of time and space discreteness to definite propagation conditions and realistic distributions of sources will be presented in a future paper.

Subject heading: cosmic rays

1. INTRODUCTION

The cosmic-ray (CR) flux at any given position in the Galaxy is due to many sources, which are probably related to the remnants of supernovae. Each source of position \mathbf{r}_i and age t_i yields, at position \mathbf{r}_0 and time $t = 0$ (now), a flux $N(\mathbf{r}_i, t_i, \mathbf{r}_0, t_0 = 0)$ that can be obtained by solving the diffusion equation with the appropriate source term and boundary conditions (see below). The total flux is given by

$$N_{\text{tot}}(\mathbf{r}_0) = \sum_i N(\mathbf{r}_i, t_i, \mathbf{r}_0). \quad (1)$$

This model has been coined the Myriad model by Higdon & Lingenfelter (2003).

The effects of discreteness have been studied in the past. With regard to the spatial discreteness, Lezniak & Webber (1979) start with the time-dependent diffusion equation in which both spallations and energy losses are taken into account, to eventually derive the steady state Green function necessary to study the no-near-source effect (expected to reproduce a depletion of the path length distribution at low grammage). As for the temporal discreteness, Owens (1976) derived time-dependent solutions in the framework of halo models (see also Lezniak 1979), including spallations but assuming a gas density that is constant throughout the diffusive volume (in this case the mean time and the mean matter crossed are proportional). The most complete work to provide a “simple” formula for the time-dependent case is probably

Freedman et al. (1980), who derive the mean age and the grammage distribution to seek if it is possible to constrain the propagation parameters from current observations of charged nuclei. They conclude that a large degeneracy in propagation parameters remains in most cases. It has been shown that the distribution of electrons and positrons at high energy is particularly sensitive to nearby sources, as a result of their huge energy losses (Aharonian et al. 1995; see also Cowsik & Lee 1979). A nearby source such as the supernova remnant (SNR) associated with the Geminga pulsars probably has a great influence on them. The situation regarding the stable charged CR spectra is less clear, but nearby sources are expected to be more and more important as energy grows. While some authors estimate the contribution from Geminga to be at most 10% (Johnson 1994), some others (Erlykin & Wolfendale 2001a) argue that a single supernova event can explain the feature observed in the spectrum at a few PeV. This could be the Sco-Cen association that is expected to have been able to generate the Local Bubble 11 Myr ago (Benítez et al. 2002). This can be tested by measuring the anisotropy (see, e.g., Dorman et al. 1985) or by gathering observations from the past and from the rest of the Galaxy. For instance, Ramadurai (1993), working from an inspection of Antarctic ice sediments, argued that Geminga could be responsible for an increase of the cosmic-ray flux by a factor of 1.8. The measurement of the isotopic composition of the Earth crust (see, e.g., Knie et al. 1999), of meteorites, and of ice cores can be used to investigate the time variation of the CR flux on Earth (see also Erlykin & Wolfendale 2001b).

Most studies of the chemical composition of CRs assume that the sum given by equation (1) can be approximated by an integral

$$N_{\text{tot}}(\mathbf{r}_0) \approx \int d^2\mathbf{r} \int_0^\infty dt N(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}_0), \quad (2)$$

¹ Laboratoire de Physique Théorique LAPTH, 74941 Annecy-le-Vieux, France.

² Université de Savoie, 73011 Chambéry, France.

³ Institut d’Astrophysique de Paris, 98 bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France.

⁴ Service d’Astrophysique, Commissariat à l’Energie Atomique, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette, France.

which is equivalent to equation (9) only in the limit of a source distribution that is continuous in space and time (continuous distributions for \mathbf{r}_i and t_i). This approximation is justified if the sources are numerous and densely distributed, but it probably fails for nearby and/or recent sources, for which the detailed location and age should be known. This paper is devoted to investigating the validity of this approximation and to providing a more accurate description of diffusion when it fails. The chemical composition of CRs is determined by the quantity of matter that has been crossed by primaries during their propagation from the sources to the Earth, and it can be conveniently described and studied by the grammage distribution. Section 2 is devoted to the study of the grammage distribution in diffusion models, and the importance of space discreteness of the sources on the CR composition is investigated. Section 3 presents a new analytical solution of the time-dependent diffusion equation for point sources, taking into account spallations, convective wind, and escape. It is then used to find a criterion to separate the sources in two categories, one containing the far away and old, which can be modeled by the usual steady state model, the other containing the close or recent, which require a finer description. Section 4 gives conclusions and presents some applications of the present work that will be further developed in a future paper.

2. STEADY STATE PATH LENGTH DISTRIBUTION

During their journey between a source and Earth, cosmic rays cross regions in which interstellar matter is present. The nuclear reactions (spallations) induced by the collisions lead to a change in the chemical composition. CRs can be sorted according to the *grammage*, i.e., the column density of matter they have crossed (denoted by x in this paper and usually expressed in g cm^{-2}). If it is temporarily assumed that cosmic rays do not interact with the matter they cross, i.e., the spallations are switched off, their density originating from a source located at \mathbf{r}_s , detected at \mathbf{r}_o , and having crossed the grammage x is called the “path length distribution” (PLD). It can be used to compute the probability of nuclear reaction when the spallations are switched on, and thus it provides a tool to compare several diffusion models, as similar PLDs give rise to similar chemical compositions.

2.1. Definition—Generalized Diffusion Equation

The evolution of the PLD $\mathcal{G}(\mathbf{r}, t, x)$ at position \mathbf{r} and time t can be described by a generalized diffusion equation inspired by Jones (1979):

$$\frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{r}, t, x)}{\partial t} = K \Delta \mathcal{G}(\mathbf{r}, t, x) + q(\mathbf{r}, t) \delta(x) - \frac{\partial \mathcal{G}(\mathbf{r}, t, x)}{\partial x} m v n_{\text{ISM}}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

where on the right-hand side the first term stands for diffusion, the second is the source term (creating particles with null grammage), and the third gives the augmentation of the grammage due to the crossing of matter. It should be noted that when the density n_{ISM} is not homogeneous in the whole diffusive volume, grammage is not proportional to time (this is discussed further in § 2.2.3). We emphasize that equation (3) does not take into account the influence of the spallations on propagation but rather introduces the variable x as a counter that keeps track of the quantity of matter crossed by the cosmic rays, spallations being switched off.

The density can finally be obtained from the grammage distribution by noting that a primary CR having crossed a grammage x has a survival probability given by $\exp(-\sigma x/m)$, where σ is the destruction cross section. In the following, m denotes the *mean* mass of the interstellar medium atoms. The probability for a cosmic ray emitted in \mathbf{r}_s and reaching \mathbf{r}_o unharmed is written as

$$N_p(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o) = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma}{m}x\right) \mathcal{G}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o, x) dx. \quad (4)$$

For a secondary species, a similar expression can be written as

$$N_s(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o) = \int_0^\infty g_s(x) \mathcal{G}(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}_o, x) dx, \quad (5)$$

where the function g_s is obtained by solving the set of equations

$$\frac{dg_s}{dx} = -\frac{\sigma_s}{m} g_s + \sum_i \frac{\sigma_{i \rightarrow s}}{m} g_i \quad (6)$$

with the initial conditions (the values of g_s for $x = 0$) set to the source abundance of the species considered.

The PLD, along with the B/C ratio, is computed in the next section. We take the opportunity of this computation to consider a more general situation than in our previous works, namely, considering a realistic radial dependence of the matter density in the disk. The aim is twofold: First, we want to comment on the computation of path lengths by Higdon & Lingenfelter (2003), and in particular we want to discuss the existence of a feature at $x \sim 2 \text{ g cm}^{-2}$ that they claim is present because of the H_2 ring in the Galactic disk. Second, this provides a way to effectively take into account the radial dependence by computing the mean matter density that is probed by each CR species and to introduce this mean density back into our code.

2.2. Analytical Result for Radial Distribution of Matter

2.2.1. Path Length Distribution

We compute the grammage distribution in the diffusion model we used in previous studies (Maurin et al. 2001; Donato et al. 2002). It exhibits cylindrical symmetry, escape happens through the $z = \pm L$ and $R = 20 \text{ kpc}$ boundaries, Galactic wind is constant in the halo, and matter is localized in a thin disk at $z = 0$. We consider a radial dependence of the surface mass density $\Sigma(r)$, taking into account the radial distributions of H I, H II, and H_2 (Ferrière 1998). For convenience, we normalize this quantity by the local mean surface density $\Sigma_{\text{ISM}}^0 \equiv 6.2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$; i.e., we introduce $f(r) \equiv \Sigma(r)/\Sigma_{\text{ISM}}^0$. The models used in our previous studies considered only flat matter distribution, to keep the problem tractable in a semianalytical way, and we take the opportunity of this study to investigate the importance of this assumption.

The generalized diffusion equation (3), with the left-hand side set to 0, can then be solved as detailed in Appendix B, by expanding the quantities over a set of Bessel functions. The solution is

$$\mathcal{G}(r, z, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sinh[\zeta_i(L - |z|)/R]}{\sinh(\zeta_i L/R)} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} e^{-x/x_j} \Theta(x), \quad (7)$$

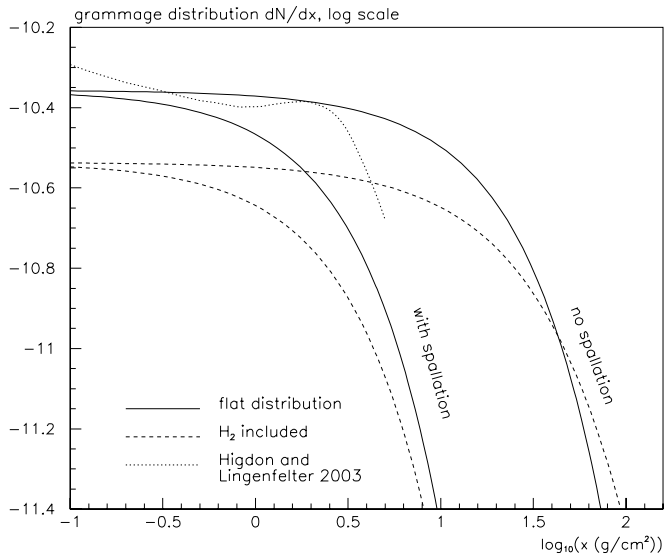


FIG. 1.—Upper curves represent the PLD (x in g cm^{-2}) for $L = 4$ kpc and a homogeneous disk distribution corresponding to the local matter density, and with a realistic gas distribution, including the H_2 ring, radially distributed according to Ferrière (1998). The lower curves are obtained by taking into account the spallation cross section of oxygen. The feature at $x \sim 2 \text{ g cm}^{-2}$, visible in the Higdon points (dotted line), is not reproduced by the analytical result.

where $\Theta(x)$ is the Heaviside distribution and a_{ij} and x_j are the eigenvectors and eigenvalues of the matrix

$$A_{ij} = \frac{2mv\Sigma_{\text{ISM}}^0}{KS_iJ_i^2(\zeta_i)} \tanh\left(\frac{S_iL}{2}\right) \int_0^1 J_0(\zeta_i\rho)J_0(\zeta_j\rho)f(\rho r) d\rho,$$

$$S_i = \frac{2\zeta_i}{R}.$$

For a flat distribution of matter (f independent of r), this expression reduces to

$$A_{ij} = \frac{mv\Sigma_{\text{ISM}}^0}{KS_i} \tanh\left(\frac{S_iL}{2}\right) \delta_{ij}.$$

We have not considered energy losses in this computation, as the aim is not to provide a very sophisticated modeling of the CR diffusion, but rather to give an estimate of various effects. It follows that the results presented here do not apply directly to electrons and positrons, for which the energy losses are predominant.

2.2.2. Application

We now use the above expression to evaluate the effect of the choice of $\Sigma(r)$ on the PLD and then on the composition of CRs. This is done by first computing the PLD for a flat and for a more realistic matter distribution. The result for $K = 0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$ and $L = 5 \text{ kpc}$ is displayed in Figure 1. The feature at $x \sim 2 \text{ g cm}^{-2}$, visible in the Higdon points (dotted line), is never reproduced by the analytical result. This difference is discussed in the next section.

The effect on the composition of CRs is illustrated in Figure 2, where the B/C ratio is computed in the two cases from the PLD. For low values of the diffusion coefficient K_0 , this ratio is not very sensitive to the global distribution of matter, as the diffusion range is smaller, spallations being relatively more important, whereas for higher values of K_0 , the

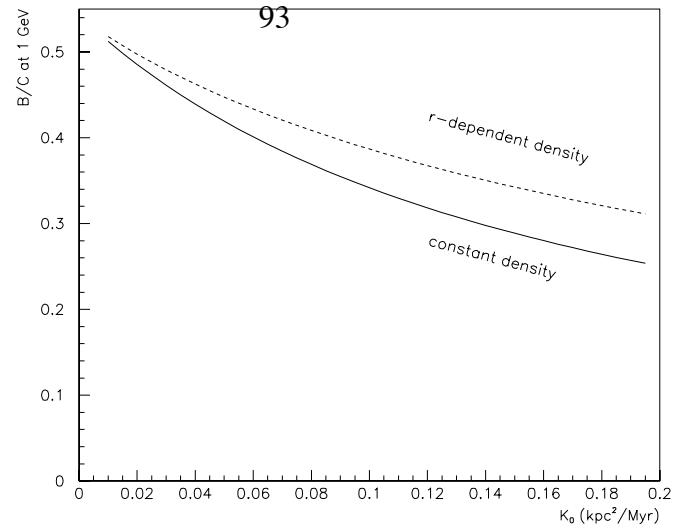


FIG. 2.—Secondary-to-primary ratio B/C, as a function of the diffusion coefficient normalization K_0 in $\text{kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$, for a homogeneous matter distribution (solid line) and for a realistic gas distribution (dashed line).

B/C ratio is sensitive to the increase of matter density at $r \sim 4 \text{ kpc}$. As the diffusion coefficient $K(E)$ actually increases with energy, the spectrum is likely to be affected by this effect, CRs of higher energy probing a larger portion of the Galactic disk. However, for high values of K , the difference between a flat and a realistic distribution becomes independent of K , and hence of E , so that the shape of the spectrum is not affected. In particular, if K_0 is high, as hinted at by Ptuskin & Soutoul (1998), then the spectrum is not affected by the presence of an H_2 ring.

These results provide an effective way to take into account the radial distribution of matter in our model. For a given energy, we can compute the constant interstellar gas density $n_{\text{H}}^{(\text{B/C})}$ that must be assumed to reproduce the observed B/C ratio. The same thing can be done for sub-Fe/Fe, providing another effective density $n_{\text{H}}^{(\text{Fe})}$. These densities are different because the corresponding species have different diffusion ranges, the latter being much more sensitive to spallations. The flux of each species can then be computed using the appropriate effective interstellar matter density.

2.2.3. Comparison to the Higdon & Lingenfelter Approach

Another approach has recently been proposed in Higdon & Lingenfelter (2003) to compute the grammage distribution: starting from the CR distribution $w(\mathbf{r}, t)$ due to an instantaneous point source of age t , the mean matter density seen at age t by these CRs is computed as

$$n_{\text{SN}}(t) = \frac{\int \int \int d^3\mathbf{r} w(\mathbf{r}, t) n_{\text{ISM}}(\mathbf{r})}{\int \int \int d^3\mathbf{r} w(\mathbf{r}, t)}. \quad (8)$$

Summing all of the individual contributions with the appropriate weight, the mean matter density $n_{\text{CR}}(t)$ seen by the CRs of age t reaching the Earth is computed. From this quantity, the evolution of the mean grammage is computed as a function of time, through

$$\frac{\partial \bar{X}}{\partial t} = \bar{m}\beta c n_{\text{CR}}(t), \quad (9)$$

which corresponds to their equations (4.1) and (4.2). We argue that this approach is not correct, for the following reasons.

First, the derivation of the time evolution of $\bar{X}(t)$ is given in Appendix D, and equation (9) is not recovered. The above expression would be correct only with another (tricky) definition of $n_{\text{CR}}(t)$ and $n_{\text{SN}}(t)$.

Second, the averaging process given by equation (8) gives the mean density as seen by *all* the CRs emitted by the source, whereas what is needed would be the mean density seen by the CRs that reach the Earth (those we do observe). These quantities are different, and the corresponding time evolution is computed in Appendix D.

Finally, and most importantly, it is quite tricky to infer the grammage distribution $\mathcal{G}(\mathbf{r}, x)$ (needed to apply the weighted slab technique) from the mean grammage $\bar{X}(t)$, and their equation (4.3) is not correct. To see that more clearly, consider the more fundamental quantity $\mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)$ giving, at position \mathbf{r} , the density of CRs having crossed a grammage x at age t . The quantities introduced by Higdon & Lingenfelter (2003) are then related to $\mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)$ through

$$w(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t), \quad \mathcal{G}(\mathbf{r}, x) = \int_0^\infty dt \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t),$$

$$\bar{X}(t) = \frac{\int_0^\infty dx x \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}{\int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}, \quad (10)$$

which are fundamentally different from their equations (4.2) and (4.3). In particular, their $X(t)$ is actually $\bar{X}(t)$ and should be a function of t in their equations (4.1) and (4.2), whereas the X that appears in their grammage distribution equation (4.3) should be a parameter and as such is *independent* of t .

This explains why we do not find the same grammage distributions as Higdon & Lingenfelter (2003). Their assimilation of the grammage distribution from individual sources to Dirac distributions has the effect of sharpening the final grammage distribution. In particular, the feature at $x \sim 2 \text{ g cm}^{-2}$ is not present in our results. The distributions appear to be actually quite close to exponentials, i.e., to leaky-box distributions.

2.3. Spatial Discreteness of the Sources in a Steady State Model

2.3.1. General Results

We now want to investigate the effect of discreteness of the source distribution on the CR composition, through the PLD. We first compute this quantity for a point source, and we then compare the PLDs obtained for a set of point sources and an equivalent continuous source distribution. For the sake of simplicity, we focus on the case of a uniform distribution of matter, for which A_{ij} is diagonal and the solution given in Appendix B can be simplified. As the composition of CRs is only measured in the Galactic disk, we express the results in $z = 0$. It is then found that

$$\tilde{\mathcal{G}}_i(z = 0, x) = \frac{q_i}{v \Sigma_{\text{ISM}}^0} \exp\left(-\frac{x}{x_i}\right) \Theta(x),$$

with

$$x_i = \frac{mv \Sigma_{\text{ISM}}^0}{2K} \left[\frac{1}{r_w} + \frac{S_i}{2} \coth\left(\frac{S_i L}{2}\right) \right]^{-1}$$

and $r_w \equiv 2K/V_c$. This expression could have been obtained by an inverse Laplace transform of Fourier-Bessel coefficients of the steady state density (see, e.g., Maurin et al. 2001)

$$\tilde{N}_i(z = 0) = \frac{q_i}{v \Sigma_{\text{ISM}}^0 \sigma + V_c + K S_i \coth(S_i L/2)}.$$

The q_i are obtained by Fourier-Bessel transforming the radial source distribution, which is assumed to be pointlike and located in the Galactic disk. Unless this point source is at the Galactic center, the cylindrical symmetry of the problem is broken and the previous study does not apply. However, as the influence of the R boundary is expected to be negligible, we consider that the diffusion volume is not limited in the radial direction ($R \rightarrow \infty$). The origin can then be set at the position of the source, which restores cylindrical symmetry. In this $R \rightarrow \infty$ limit, the summations over Bessel functions become integrals, the discrete sets q_i , x_i , N_i become functions $q(k)$, $x(k)$, $N(k)$, and the final result is obtained by performing the substitution $1/J_1^2(\zeta_i) \rightarrow k\pi R/2$, $\sum_i \rightarrow \int d(Rk/\pi)$, and $\zeta_i/R \rightarrow k$,

$$\mathcal{G}(r, z = 0, x) = \frac{1}{v \Sigma_{\text{ISM}}^0} \int_0^\infty dk J_0(kr) q(k) \exp\left[-\frac{x}{x(k)}\right], \quad (11)$$

with

$$x(k) = \frac{mv \Sigma_{\text{ISM}}^0 / 2K}{1/r_w + S(k) \coth[S(k)L]}$$

and

$$S(k) = 2 \left(\frac{1}{r_w^2} + k^2 \right)^{1/2}, \quad q(k) = k \int_0^\infty r dr \frac{\delta(r)}{2\pi r} J_0(kr) = \frac{k}{2\pi}.$$

In the particular case of infinite L and $r_w = 0$, equation (11) gives

$$\mathcal{G}(r, z = 0, x) = \frac{1}{4\pi K r} \frac{K^2 x}{mv^2 (\Sigma_{\text{ISM}}^0)^2 r^2} \times \left[1 + \frac{x^2 K^2}{r^2 m^2 v^2 (\Sigma_{\text{ISM}}^0)^2} \right]^{-3/2} \Theta(x),$$

which is the expression obtained in Taillet & Maurin (2003) from a random walk approach.

2.3.2. Impact on the Chemical Composition

The PLDs given by equation (11) are displayed in Figures 3 and 4, for several propagation conditions, to emphasize the relative effect of escape, Galactic wind, and spallation. The effect of escape or wind is more important at higher grammages. This was expected as they correspond to longer paths. The effect of the convective wind is seen to be similar to that of escape but quantitatively different at low grammages. To understand this, let us first consider diffusion in free space without wind. Several kinds of paths are responsible for low grammages: short paths, connecting us to nearby sources in the disk, and longer paths that wander in the halo without crossing the disk too much. It happens that the second kind is rather important, which explains why escape from a boundary at $z = \pm L$ (which kills the paths wandering too far in the halo)

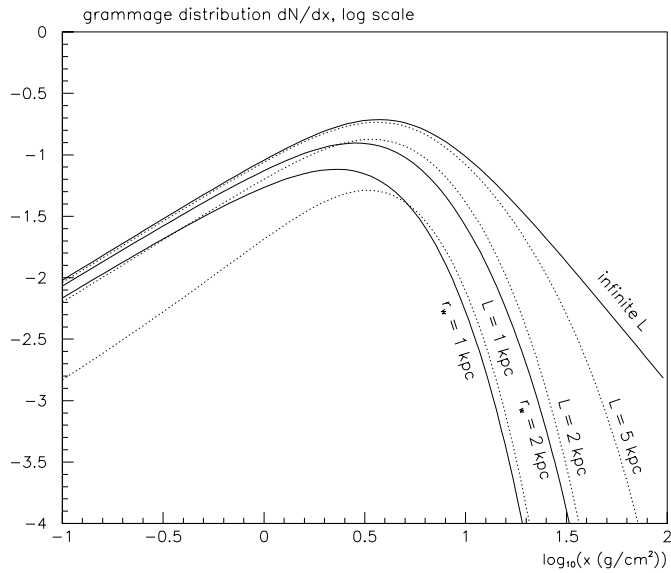


FIG. 3.—PLDs (x in g cm^{-2}) shown for a point source located at a distance $r = 1$ kpc and for different propagation conditions. The thick line corresponds to free diffusion (no boundary, no wind). The thin dotted lines show the influence of escape for $L = 1, 2,$ and 5 kpc. The higher grammages, corresponding to longer paths, are more suppressed by escape, which shifts the maximum of the PLD toward low grammages. The effect of the convective wind, displayed as solid lines for $r_w = 1$ and 2 kpc, is similar although quantitatively different for low grammages (see text for a discussion). The overall normalization is decreased when escape and/or wind are considered, which reflects the corresponding decrease of flux.

actually affects the low end of the grammage distribution. When wind is present, the short paths are more important, and the low grammages are less affected.

Even for a point source, the path lengths are quite broadly distributed around the mean value, as can be seen in Figures 3 and 4. As a result, the grammage distribution due to a set of discrete sources is smoothed to a great extent, and it is very

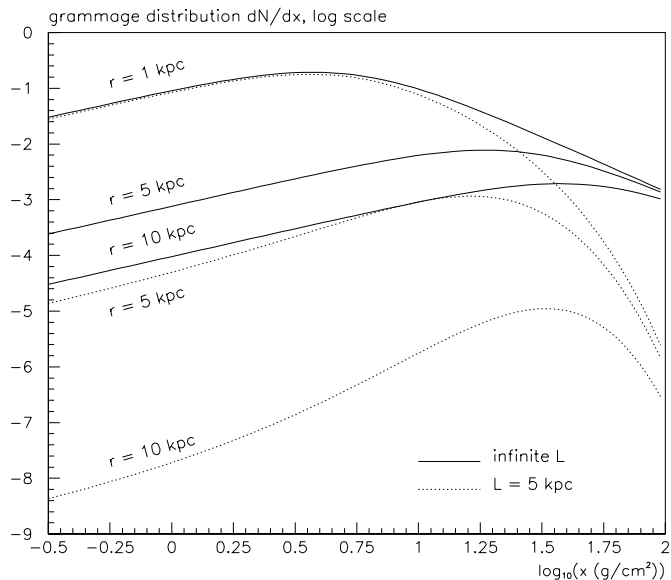


FIG. 4.—PLD (x in g cm^{-2}) shown for a point source and for different r . The two situations $L = 5$ kpc and L infinite are shown for comparison. The short grammages are depleted for remote sources, as the probability to travel a long distance without crossing the disk is small. This effect is all the more pronounced that L is small. The normalization also decreases with L , which reflects the corresponding decrease of flux.

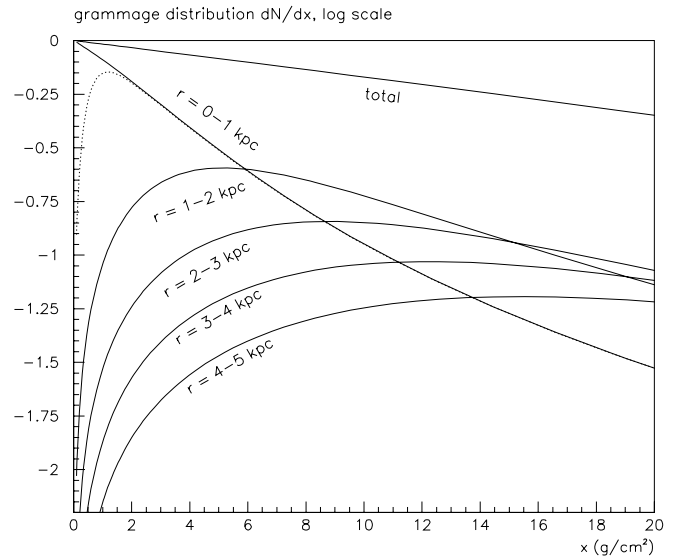


FIG. 5.—Contributions to the PLD (thick line) from continuous sources distributed in several rings (thin lines) displayed for $L = 5$ kpc. The PLD from a set of 100 point sources drawn randomly in the central ring (inner 1 kpc) is also shown (dotted line). The effect of discreteness is most visible for low grammages. For the other rings, the difference between the continuous distribution and 200 discrete sources is of the order of a percent. The effect of Galactic wind is very similar to that of L , replacing L by $L^* \equiv K/V_c = r_w/2$.

unlikely to have observable consequences on the composition of CRs on Earth, except for very nearby sources (see below). To illustrate this point, we compare the grammage distributions and the B/C ratio from a smooth distribution to that obtained from a discrete sample representative of this distribution. The relative importance of the sources located at different distances in making the observed composition (e.g., the B/C ratio) was estimated and discussed in Taillet & Maurin (2003), and it was found that the nearby sources can be responsible for a substantial fraction of the flux of each species. The contribution of a point source located at a distance r to the B and C flux, obtained from equation (11), is displayed as a function of r in Figure 5. More specifically, we divide the sources into the far ($r > L$), the intermediate ($0.1L < r < L$), and the nearby ($r < 0.1L$), and Table 1 gives the fraction of flux coming from these regions, for different species.

The grammage distribution from a ring delimited by R_{\min} and R_{\max} is given by

$$\mathcal{G}(r, z = 0, x) = \frac{1}{2\pi v \Sigma_{\text{ISM}}^0} \frac{2}{R_{\max}^2 - R_{\min}^2} \times \int_0^\infty dk [R_{\max} J_1(kR_{\max}) - R_{\min} J_1(kR_{\min})] \exp\left[-\frac{x}{x(k)}\right]. \quad (12)$$

We randomly draw the position of sources inside each ring, with a given surface density of sources; we then compute the corresponding flux and the relative difference with the smooth case. As expected, this difference gets smaller as the source density is increased, i.e., as the granularity of the source distribution is decreased. Table 1 gives $n_{\text{B/C}}$, the surface number density of sources in the disk (in kpc^{-2}) beyond which the difference in composition between the discrete and continuous case is less than 1%. The secondaries are less sensitive to the

TABLE 1
CONTRIBUTION OF DIFFERENT RINGS TO THE OBSERVED TOTAL FLUXES

Rings (1)	B (%) (2)	C (%) (3)	Sub-Fe (%) (4)	Fe (%) (5)	$n_{B/C}$ (kpc^{-2}) (6)
$0 < r/L < 0.1$	3	12	7	20	...
$0.1 < r/L < 1$	57	65	71	68	100
$1 < r/L$	40	23	22	11	20

NOTES.—Cols. (2)–(5) give, for the four species indicated (B, C, sub-Fe, and Fe), the fraction of flux due to the three rings defined in col. (1) ($0 < r/L < 0.1$, $0.1 < r/L < 1$, and $1 < r/L$), in the case of a homogeneous source distribution. Col. (6) gives $n_{B/C}$, the surface number density of discrete sources (in kpc^{-2}), randomly distributed in these rings, beyond which the difference in flux with the continuous case is smaller than 1%. There is no number given for the inner ring because there is no motivation to randomly draw the sources located very close to us, as these should be observed. The quantity $n_{B/C}$ was computed for $L = 1$ kpc and should be divided by L^2 for other values. It does not depend on the value of K . The effect of the convective wind can be estimated by replacing L by $L^* \equiv K/V_c = r_w/2$.

discreteness of sources, as their sources (the primaries) do have a continuous distribution. These results do not depend on the value of K , as it is only sensitive to the relative importance of nearby and remote sources.

The results are presented as a function of r/L . If we now consider the disk defined by $r < 1$ kpc, the resulting effect of granularity is quite insensitive to the value of L (or V_c), as long as $L > 1$ kpc (or $r_w > 1$ kpc). This is because for $r < L$ (or $r < r_w$), the cutoff effect of escape (or wind) is always small. As expected, the effect of discreteness is smaller for the outer rings. The main effect is that when discrete sources are considered, the very nearby sources necessary to flatten the low end of the distribution are always lacking. Another way of phrasing this result is that shot noise is dominated by the nearby sources. The absence of nearby sources had been proposed by Lezniak & Webber (1979) to explain, in a different context, the depletion at low grammages that was thought to be observed, before Webber et al. (1998) proposed a settlement to this particular issue. The total PLD is very close to an exponential, as expected for a homogeneous source distribution in an infinite disk (Jones 1979).

The effect of the wind is very similar to that of escape. It has been remarked by Jones (1978) that to a given value of V_c (in the case where the wind velocity is constant on each side of the halo) can be associated an effective escape height $L^* = K/V_c = r_w/2$, and we have explicitly checked that the previous results apply by replacing L by L^* .

2.4. Constant versus Linear Galactic Wind

The previous results, as well as the results presented in our previous works, rely on the assumption of a constant wind presenting a discontinuity through the Galactic disk. To probe the sensitivity of our results to this hypothesis, we consider another model in which the value of $V_c = V_0 z$ varies linearly with z . This corresponds to the choice made, e.g., in the widely used code GALPROP. The calculations are detailed in Appendix C, and the results are used here without further justification. The PLD reads

$$N(r, z, x) = \sum_i 2hq_i J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{x}{x_i}\right) \Theta(x),$$

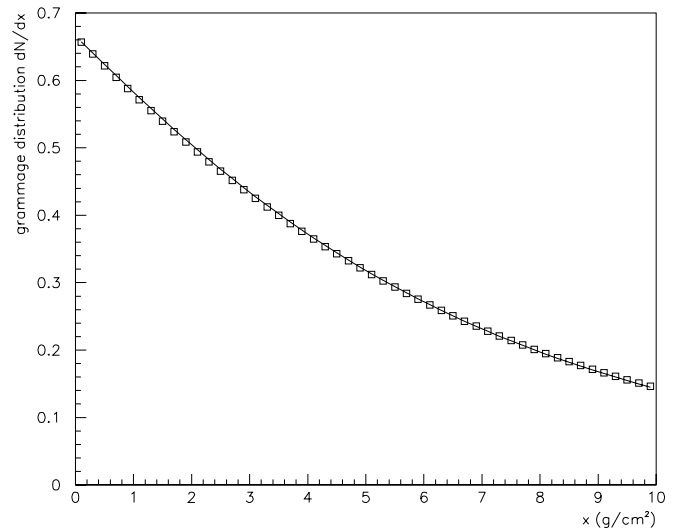


Fig. 6.—PLDs for a linear (squares; $V_0 = 0.018$ $\text{kpc Myr}^{-1} \text{kpc}^{-1}$) and a constant Galactic wind (solid line; $V_c = 0.01$ kpc Myr^{-1}). It appears that the effects of a linear or constant wind are very similar. For each value of V_0 , it is possible to find a value of V_c yielding a grammage distribution that is very similar, with an accuracy better than 1%.

with

$$x_i = \frac{mv\Sigma_{\text{ISM}}^0 L}{2K} \frac{\phi\left(\frac{3+a_i}{4}, \frac{3}{2}; \frac{V_0 L^2}{2K}\right)}{\phi\left(\frac{1+a_i}{4}, \frac{1}{2}; \frac{V_0 L^2}{2K}\right)},$$

$$a_i \equiv \frac{2K}{V_0} \frac{\zeta_i^2}{R^2} + 2,$$

where ϕ is the confluent hypergeometric function, also denoted ${}_1F_1$ or M in the literature. The resulting PLD is shown in Figure 6 for a linear and a constant (and discontinuous at $z = 0$) wind. It appears that these two situations lead to very similar results, and one can establish a one-to-one correspondence between the parameters V_c and V_0 of these models (see Fig. 7).

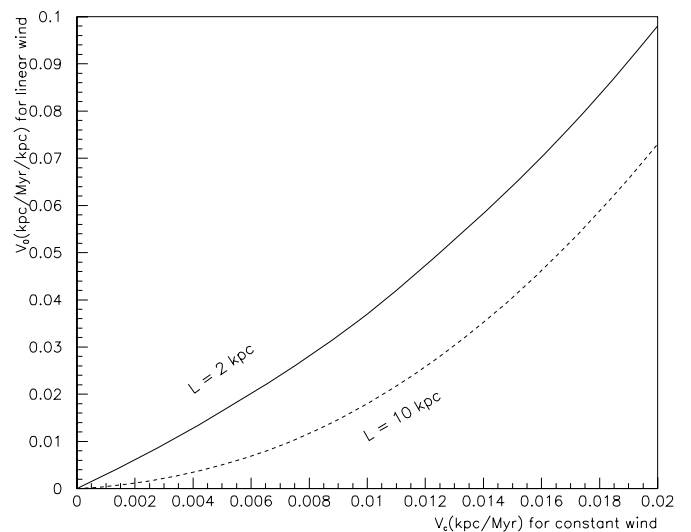


Fig. 7.—Correspondence between the values of V_c for a constant wind (x -axis) and V_0 for a linear wind (y -axis) giving approximately the same PLDs, for two values of L .

It must be noted that the energy losses have not been considered here. Adiabatic losses are associated with the wind gradient, and their effect should be different for the two forms of the Galactic wind: in the constant case, they are confined to the disk, whereas in the linear case, they are present in the whole diffusive volume.

3. TIME-DEPENDENT DIFFUSION EQUATION

3.1. Solutions

We now turn to the problem of discreteness in time. For that, we must solve the time-dependent diffusion problem for an instantaneous source. Diffusion occurs independently in the z - and r -directions. Neglecting the radial boundary, pure diffusion occurs in the radial direction and the density can be written as

$$N(r, z, t) = \frac{1}{4\pi K t} e^{-r^2/4Kt} N(z, t),$$

where the function $N(z, t)$ satisfies a time-dependent diffusion equation along z . It is convenient to introduce the quantities $k_s = K/hv\sigma n_{\text{ISM}}$ and $k_w = 2K/V_c$, so that $N(z, t)$ is a solution of

$$\frac{\partial N}{\partial(Kt)} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - 2k_w \text{sign}(z) \frac{\partial N}{\partial z} - 2k_s \delta(z)N.$$

For pointlike and instantaneous sources, the radial distribution in the disk is given by (see Appendix A)

$$N(r, z=0, t) = \frac{1}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) \times \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-(k_n^2 + k_w^2)Kt} \sin^2(k_n L), \quad (13)$$

where the discrete set of k_n are the solutions of

$$k_n \cot(k_n L) = -k_s - k_w \quad (14)$$

and

$$c_n = L - \frac{\sin 2k_n L}{2k_n} = L + \frac{(\sin k_n L)^2}{k_n^2} (k_s + k_w).$$

Although it is not immediately apparent in equation (13), the spallations *are* taken into account, through equation (14) determining the k_n . Moreover, this expression is more general than the form that is usually found in the literature, considering only the effects of escape, which is obtained by replacing the right-hand side of equation (14) by 0.

The result for a source that would accelerate particles for a long period of time would be obtained by integrating the above expression over the acceleration period. Finally, when energy losses are not considered, a whole energy spectrum is also simply accounted for by a linear superposition of delta-function sources.

3.2. Interpretation—Relative Importance of Nearby/Recent Sources

Equation (13) can be written as

$$N(r, z=0, t) = \frac{1}{(4\pi K t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) g(t),$$

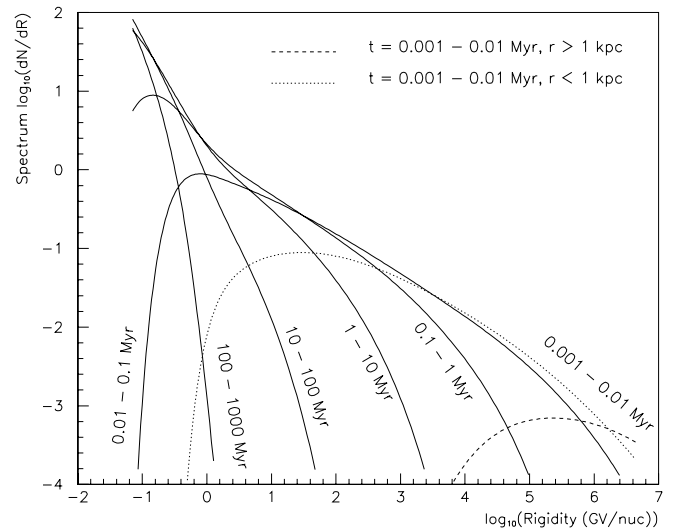


FIG. 8.—Contribution to the spectrum from different age classes for a uniform source distribution. In the more recent age class ($0.001 \text{ Myr} < t < 0.01 \text{ Myr}$), the contribution from nearby sources ($r < 1 \text{ kpc}$) has been separated from the rest ($r > 1 \text{ kpc}$). The effect of time discreteness will be more important in this recent age class, which contains less sources.

where the function $g(t)$ gives the correction to the purely diffusive case and takes into account all the relevant physical effects. As such, it depends on the propagation parameters (spallation cross section, Galactic wind, halo height, diffusion coefficient). The importance of these effects depends on the position of the source in the (r, t) -plane. In particular, the old (large t) and remote (large r) sources are more affected by all these effects. For large values of t , $g(t)$ goes rapidly to zero, ensuring the convergence of the integral over time in equation (2). It also makes the function of r obtained by this integration decrease faster than $1/r$, thus ensuring the convergence of the integral over r .

This expression will be applied in a future study to the observed distribution of sources. For now, we want to illustrate the possible effect of discreteness in time. For that, we divide the sources into several decades in age, and we compute their contribution to the total spectrum. The energy spectrum of a primary species can be obtained by taking into account the energy dependence of K in equation (13).

The result is shown in Figure 8, where the source distribution has been assumed to be uniform in the disk. If we denote by \bar{r} the average distance from the sources to the Earth, the age t gives the contribution at the energy E for which $\bar{r} \sim [K(E)t]^{1/2}$. The more recent sources dominate the high-energy tail of the spectrum. This is where the effect of discreteness in time is expected to be the greatest, as the lower decades in age contain the smallest number of sources. For the more recent decade, the sources have been further split into nearby ($0.1 \text{ kpc} < r < 1 \text{ kpc}$) and bulk ($r > 1 \text{ kpc}$). For a rate of three supernova explosions by century in our Galaxy, there should be about three nearby sources in the more recent age decade. It is therefore probably important to know the actual position and age of these sources and to correctly model propagation from these sources, e.g., from equation (13).

3.3. Reformulation of the Steady State Model

The steady state density results from the continuous superposition of solutions for instantaneous sources and thus

can be derived from the time-dependent solution discussed above:

$$N_{\text{stat}}(r, z) = \int_{-\infty}^0 N(r, z, t) dt.$$

The integration yields

$$N_{\text{stat}}(r, z) = \frac{1}{K} \exp(-k_s |z|) \times \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} K_0 \left(r \sqrt{k_n^2 + k_w^2} \right) \sin(k_n L) \sin[k_n(L - |z|)],$$

where the Bessel function of the third kind K_0 has been introduced. This expression provides an alternative (but is exactly equivalent) to the usual Fourier-Bessel expansion over J_0 functions. The functions K_0 over which the development is performed do not oscillate, inducing a faster convergence. It is thus particularly well suited for sources sharply localized in

space, as pointlike sources. We have checked that this expression is fully equivalent to the Fourier-Bessel expansion.

4. SUMMARY AND CONCLUSIONS

The distribution of CR sources is not continuous. The granularity of the distribution has observable effects on the fluxes, spectra, and composition and thus should be considered when interpreting observed quantities. We have presented an analytical solution of the diffusion problem for an instantaneous point source, which takes this effect into account when the effects of escape through the boundaries $z = \pm L$, convective wind, and spallation are considered. The next step is to apply this solution to the observed local distribution of CR sources.

This work has benefited from the support of PICS 1076, CNRS, and the Programme National de Cosmologie (PNC).

APPENDIX A

TIME-DEPENDENT SOLUTION OF THE DIFFUSION EQUATION

We consider diffusion in a cylindrically symmetric box, where both disk spallations and Galactic wind have been taken into account. The convection velocity V_c lies in the vertical direction and drags the particles outside so that its value is given by $\text{sign}(z)V_c$, where a constant value for V_c has been assumed. The diffusion equation reads, introducing the quantities $k_s = h\nu\sigma_{\text{ISM}}/K$ and $k_w = V_c/2K$,

$$\frac{1}{K} \frac{\partial N}{\partial t} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right] - 2k_w \text{sign}(z) \frac{\partial N}{\partial z} - k_s \delta(z) N. \quad (\text{A1})$$

As boundaries in the radial direction r play little role in our analysis, the Galactic disk is modeled as an infinite flat disk in the xOy plane. It is furthermore sandwiched by two confinement layers that extend to $z = \pm L$.

The aim of this section is to derive the contribution of a source S located at $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$ and exploding at time $t = 0$ to the subsequent CR density anywhere else in the Galaxy at location $P\{x, y, z\}$. The initial density reduces to the Dirac distribution

$$N(x, y, z, t = 0) \equiv \delta(x)\delta(y)\delta(z), \quad (\text{A2})$$

and we would like to compute it at any time $t > 0$. The radial diffusion is independent from diffusion along z and is not affected by any of the processes other than diffusion. As a result, the solution can be factorized into

$$N(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) n(z, t), \quad (\text{A3})$$

where n is a solution of

$$\frac{1}{K} \frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - k_w \text{sign}(z) \frac{\partial n}{\partial z} - k_s \delta(z) n. \quad (\text{A4})$$

The trick is to factorize once again the time t and the vertical z behaviors so that $n \equiv f(z)g(t)$, which separates the diffusion equation into

$$g' = -\alpha g, \quad f'' - 2k_w \text{sign}(z)f' - k_s \delta(z)f + \frac{\alpha}{K} f = 0. \quad (\text{A5})$$

The resulting solution may appear contrived and exceptional. Actually an infinite set of such functions obtains that turns out to be a natural basis for the generic solutions to equation (A4). The time behavior amounts to the exponential decrease $g(t) = \exp(-\alpha t)$.

The equation on f can be solved for $z > 0$ and $z < 0$ with the appropriate boundary conditions $f(z = \pm L) = 0$ as

$$f(z) = \begin{cases} A \sinh[k(L - |z|)], & V_c^2 - 4K\alpha > 0, \\ A \sin[k(L - |z|)], & V_c^2 - 4K\alpha < 0, \end{cases} \quad (\text{A6})$$

with $k^2 = \alpha/K - V_c^2/4K$. The first possibility does not fulfill the disk crossing condition (eq. [A7] with hyperbolic functions). We therefore disregard it. We then insert equation (A6) into equation (A5). Derivation is to be understood in the sense of distributions because of the singularity of $|z|$ in $z = 0$. This yields

$$K f''(z) = -\alpha f(z) - 2K k A \delta(z) \cos kL.$$

Inserting into equation (A5) gives the condition

$$2k \cot(kL) = -k_s - k_w. \tag{A7}$$

The general solution reads

$$N(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n t} \sin[k_n(L - |z|)].$$

The functions $\sin[k_n(L - |z|)]$ form an orthogonal set, and it is found that

$$\int_{-L}^L \sin[k_n(L - |z|)] \sin[k_{n'}(L - |z|)] dz = \delta_{nn'} c_n,$$

with

$$c_n = L - \frac{\sin 2k_n L}{2k_n}. \tag{A8}$$

The A_n are found by imposing that for $t = 0$, the distribution is a Dirac function,

$$\delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin[k_n(L - |z|)].$$

Multiplying by $\sin[k_m(L - |z|)]$ and integrating over z yields

$$A_m = c_m^{-1} \sin k_m L$$

so that finally

$$N(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-\alpha_n t} \sin(k_n L) \sin[k_n(L - |z|)] \tag{A9}$$

and

$$\mathcal{N}(r, z, t) = \frac{1}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4K t}\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-\alpha_n t} \sin(k_n L) \sin[k_n(L - |z|)]. \tag{A10}$$

The radial distribution in the disk is given by

$$\mathcal{N}(r, z = 0, t) = \frac{1}{4\pi K t} \exp\left(-\frac{r^2}{4K t}\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-k_n^2 K t} \sin^2(k_n L). \tag{A11}$$

APPENDIX B

PATH LENGTH DISTRIBUTION FOR A NONHOMOGENEOUS SPALLATIVE DISK

This section details the derivation of equation (7), giving the grammage distribution in the case of an arbitrary radial distribution of spallative matter. The general method was sketched in Wallace (1981) to derive the CR density profile, and we present here a more general version that gives the grammage distribution.

We start from equation (3) for the steady state case

$$0 = K \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \mathcal{G}(r, z, x)] + \frac{\partial^2 \mathcal{G}(r, z, x)}{\partial z^2} \right\} + q(r) \delta(z) \delta(x) - \frac{\partial \mathcal{G}(r, z, x)}{\partial x} v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 f(r) \delta(z),$$

with $f(r) \equiv \Sigma_{\text{ISM}}(r)/\Sigma_{\text{ISM}}^0$ and $\Sigma_{\text{ISM}}^0 = 6.2 \times 10^{20} \text{ cm}^{-2}$ (Ferrière 1998). We perform Fourier-Bessel transforms using the J_0 functions,

$$\mathcal{G}(r, z, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{G}_i(z, x) J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right), \quad f(r)\mathcal{G}(r, z = 0, x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(x) J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right),$$

with

$$\mathcal{G}_i(z, x) = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho J_0(\zeta_i \rho) \mathcal{G}(\rho R, z, x) d\rho,$$

$$f_i(x) = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho J_0(\zeta_i \rho) f(\rho R) \mathcal{G}(\rho R, z = 0, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \mathcal{G}_j(0, x),$$

where we have introduced the matrix

$$\alpha_{ij} = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho J_0(\zeta_i \rho) J_0(\zeta_j \rho) f(\rho R) d\rho.$$

These expressions are reminiscent of those in the work of Wallace (1981), which was dedicated to a perturbative resolution of the diffusion equation in the presence of an arbitrary matter distribution (with no description of the PLD). The generalized diffusion equation reads

$$0 = K \left\{ \frac{\zeta_i^2}{R^2} \mathcal{G}_i(z, x) + \frac{\partial^2 \mathcal{G}_i(z, x)}{\partial z^2} \right\} + q_i \delta(z) \delta(x) - \frac{\partial f_i(x)}{\partial x} v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 \delta(z). \tag{B1}$$

The solution for $z \neq 0$ satisfying $f(z = \pm L, x) = 0$ is

$$\mathcal{G}_i(z, x) = \mathcal{G}_i(0, x) \frac{\sinh[\zeta_i(L - |z|)/R]}{\sinh(\zeta_i L/R)}.$$

This expression is inserted back into the diffusion equation, taking care of the singularity of $|z|$ in 0, which yields

$$0 = \mathcal{G}_i(0, x) + \frac{q_i R}{K 2\zeta_i} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right) \delta(x) - \frac{v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2\zeta_i K} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \frac{\partial \mathcal{G}_j(0, x)}{\partial x}. \tag{B2}$$

The solutions of this linear set of coupled first-order differential equations are

$$\mathcal{G}_i(0, x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} e^{-x/x_j} \Theta(x), \tag{B3}$$

where x_j are the eigenvalues of the matrix

$$A_{ij} = \frac{v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2K\zeta_i} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right) \alpha_{ij}.$$

Indeed, inserting equation (B3) in equation (B1) and using

$$\frac{\partial \mathcal{G}_j(0, x)}{\partial x} = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{jk}}{x_k} e^{-x/x_k} \Theta(x) + \delta(x) \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk},$$

we find an equation that can be separated into a regular part [factor of $\Theta(x)$] and a singular part [factor of $\delta(x)$]. The former reads

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} e^{-x/x_j} - \frac{v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2\zeta_i K} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ik} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{kj}}{x_j} e^{-x/x_j} = 0.$$

In order for each coefficient of e^{-x/x_j} to be zero, one must have

$$a_{ij} - \frac{v m \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2\zeta_i K x_j} \tanh\left(\frac{\zeta_i L}{R}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{ik} a_{kj} = 0 \tag{B4}$$

so that

$$\det \left[x_j \delta_{ik} - \frac{vm \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2\zeta_i K} \tanh \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right) \alpha_{ik} \right] = 0. \quad (\text{B5})$$

This shows that the x_i are eigenvalues of A_{ij} . This equation alone is then not enough to compute the a_{ij} . An extra relation is provided by the singular part

$$-\frac{vm \Sigma_{\text{ISM}}^0 R}{2\zeta_i K} \tanh \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} = -\frac{q_i}{K} \frac{R}{2\zeta_i} \tanh \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right),$$

which gives

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} a_{jk} = \frac{q_i}{vm \Sigma_{\text{ISM}}^0}. \quad (\text{B6})$$

The coefficients a_{ij} are completely set by equations (B4) and (B6).

When the Galactic wind is taken into account, a more tedious derivation shows that equation (B2) should be replaced by

$$0 = \mathcal{G}_i(0, x) + \frac{q_i}{2K} \left[\frac{1}{r_w} + S_i \coth \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right) \right]^{-1} \delta(x) - \frac{vm \Sigma_{\text{ISM}}^0}{2K} \left[\frac{1}{r_w} + S_i \coth \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right) \right]^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{ij} \frac{\partial \mathcal{G}_j(0, x)}{\partial x} \quad (\text{B7})$$

so that the same results apply, provided that one makes the substitution

$$\frac{R}{2\zeta_i} \tanh \left(\frac{\zeta_i L}{R} \right) \rightarrow \left[\frac{1}{r_w} + S_i \coth \left(\frac{S_i L}{2} \right) \right]^{-1}, \quad S_i = 2 \left(\frac{1}{r_w^2} + \frac{\zeta_i^2}{R^2} \right)^{1/2}.$$

APPENDIX C

LINEAR GALACTIC WIND IN THE STEADY STATE CYLINDRICAL DISK-HALO MODEL

C1. RESOLUTION OF THE DIFFUSION EQUATION FOR A STABLE PRIMARY

We write $V_c(z) = V_0 z$, and the steady state diffusion equation reads (see also Bloemen et al. 1993)

$$0 = \frac{K}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right) - \frac{\partial N}{\partial z} \left(-K \frac{\partial N}{\partial z} + V_0 z N \right) - \sigma \Sigma v \delta(z) N + 2hq \delta(z).$$

Developing over Bessel functions,

$$-\frac{2hq_i}{K} \delta(z) = -\frac{\zeta_i^2}{R^2} N_i + \frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2} - \frac{V_0 z}{K} \frac{\partial N_i}{\partial z} - \frac{V_0}{K} N_i - \frac{\sigma \Sigma v}{K} \delta(z) N_i.$$

It is convenient to rewrite this equation in a hermitic differential form, to ensure that the solutions form an orthogonal set of functions (see, e.g., Morse & Feshbach 1953). We introduce $n_i = N_i \exp(-k^2 z^2/2)$, $\beta = V_0/4K$, and $y = kz$ with $k = (V_0/2K)^{1/2}$, which yields in the halo

$$n_i'' - n_i(a_i + y^2) = 0,$$

where

$$a_i \equiv \frac{2K}{V_0} \frac{\zeta_i^2}{R^2} + 2.$$

The solutions are of the form, taking into account the condition $n_i(z = \pm L) = 0$,

$$n_i = B_i e^{-k^2 z^2/2} \left[\phi \left(\frac{1+a_i}{4}, \frac{1}{2}; k^2 z^2 \right) - \frac{z}{L} \frac{\phi \left((1+a_i)/4, 1/2; k^2 L^2 \right)}{\phi \left((3+a_i)/4, 3/2; k^2 L^2 \right)} \phi \left(\frac{3+a_i}{4}, \frac{3}{2}; k^2 z^2 \right) \right],$$

where ϕ is the confluent hypergeometric function, also noted ${}_1F_1$. The value of B_i is found by integrating the diffusion equation through the disk, so that

$$2 \left| \frac{dn_i}{dz} \right|_{z=0} = \frac{\sigma \Sigma_{\text{ISM}}^0 v}{K} n_i(0) - \frac{2hq_i}{K}.$$

This gives $B_i = 2hq_i/A_i$ with

$$A_i = \frac{2K}{L} \frac{\phi((1+a_i)/4, 1/2; k^2L^2)}{\phi((3+a_i)/4, 3/2; k^2L^2)} + v\sigma\Sigma_{\text{ISM}}^0. \quad (\text{C1})$$

The final solution is thus obtained as

$$N(r, z) = \sum_i \frac{2hq_i}{A_i} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \left[\phi\left(\frac{1+a_i}{4}, \frac{1}{2}; k^2z^2\right) - \frac{z}{L} \frac{\phi((1+a_i)/4, 1/2; k^2L^2)}{\phi((3+a_i)/4, 3/2; k^2L^2)} \phi\left(\frac{3+a_i}{4}, \frac{3}{2}; k^2z^2\right) \right]. \quad (\text{C2})$$

The density in the disk is thus given by

$$N(r, z=0) = \sum_i \frac{2hq_i}{A_i} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right). \quad (\text{C3})$$

It can be shown that this expression reduces to the usual expressions in the case of a vanishing wind.

C2. THE PATH LENGTH DISTRIBUTION

The dependence in σ is very simple and the PLD is obtained by inverse Laplace transform as

$$N(r, z, x) = \sum_i 2hq_i J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \exp\left(-\frac{x}{x_i}\right) \Theta(x),$$

with

$$x_i = \frac{mv\Sigma L}{2K} \frac{\phi(5/4 + (K/2V_0)(\zeta_i^2/R^2), 3/2; V_0L^2/2K)}{\phi(3/4 + (K/2V_0)(\zeta_i^2/R^2), 1/2; V_0L^2/2K)}.$$

APPENDIX D

REMARK ABOUT THE TIME EVOLUTION OF THE MEAN GRAMMAGE

The mean grammage of the CR emitted by a single source can be expressed from the distribution $\mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)$ as

$$\bar{X}(t) \equiv \frac{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx x \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}. \quad (\text{D1})$$

In this expression, the averaging process is understood to be performed over the whole spatial distribution of CRs. The time derivative of this expression yields

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \frac{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx x \partial \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t) / \partial t}{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)} - \bar{X} \frac{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx \partial \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t) / \partial t}{\int \int \int d^3\mathbf{r} \int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}. \quad (\text{D2})$$

The denominator is simply $N(t)$, the total number of CRs in the diffusive volume. Using the fact that

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = -\bar{m}\beta cn(\mathbf{r}),$$

where $n(\mathbf{r})$ is the interstellar gas density, and integrating the first term by parts, we finally find

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \bar{m}\beta cn_{\text{SN}}(t) - \bar{X}(t) \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}, \quad (\text{D3})$$

where $n_{\text{SN}}(t)$ is defined as in equation (8). The last term is missing in equation (4.3) of Higdon & Lingenfelter (2003). This term is positive and represents the change in grammage due to the escape of a fraction of CRs between times t and $t + dt$.

As stressed in the text, a quantity that has a greater physical importance to us is the mean grammage of the CRs that reach the Earth at time t , i.e.,

$$\bar{x}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int_0^\infty dx x \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}{\int_0^\infty dx \mathcal{G}(\mathbf{r}, x, t)}. \quad (\text{D4})$$

Following the same procedure as above, its time evolution is given by

$$\frac{\partial \bar{x}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \bar{m} \beta c n(\mathbf{r}) - \bar{x}(\mathbf{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} [\ln w(\mathbf{r}, t)], \quad (\text{D5})$$

where the definition of $w(\mathbf{r}, t)$ is given in equation (10).

REFERENCES

- Aharonian, F. A., Atoyan, A. M., & Völk, H. J. 1995, *A&A*, 294, L41
 Benítez, N., Maíz-Apellániz, J., & Canelles, M. 2002, *Phys. Rev. Lett.*, 88, 81101
 Bloemen, J. B. G. M., Dogiel, V. A., Dorman, V. L., & Ptuskin, V. S. 1993, *A&A*, 267, 372
 Cowsik, R., & Lee, M. A. 1979, *ApJ*, 228, 297
 Donato, F., Maurin, D., & Taillet, R. 2002, *A&A*, 381, 539
 Dorman, L. I., Ghosh, A., & Ptuskin, V. S. 1985, *Ap&SS*, 109, 87
 Erlykin, A. D., & Wolfendale, A. W. 2001a, *J. Phys. G*, 27, 941
 ———. 2001b, *J. Phys. G*, 27, 959
 Ferrière, K. 1998, *ApJ*, 497, 759
 Freedman, I., Giler, M., Kearsy, S., & Osborne, J. L. 1980, *A&A*, 82, 110
 Higdon, J. C., & Lingenfelter, R. E. 2003, *ApJ*, 582, 330
 Johnson, P. A. 1994, *Astropart. Phys.*, 2, 257
 Jones, F. C. 1978, *ApJ*, 222, 1097
 Jones, F. C. 1979, *ApJ*, 229, 747
 Knie, K., Korschinek, G., Faestermann, T., Wallner, C., Scholten, J., & Hillebrandt, W. 1999, *Phys. Rev. Lett.*, 83, 18
 Lezniak, J. A. 1979, *Ap&SS*, 63, 279
 Lezniak, J. A., & Webber, W. R. 1979, *Ap&SS*, 63, 35
 Maurin, D., Donato, D., Taillet, R., & Salati, P. 2001, *ApJ*, 555, 585
 Morse, P. M., & Feshbach, H. 1953, *Methods of Theoretical Physics* (New York: McGraw-Hill)
 Owens, A. J. 1976, *Ap&SS*, 44, 35
 Ptuskin, V. S., & Soutoul, A. 1998, *A&A*, 337, 859
 Ramadurai, S. 1993, *Bull. Astron. Soc. India*, 21, 391
 Taillet, R., & Maurin, D. 2003, *A&A*, 402, 971
 Wallace, J. M. 1981, *ApJ*, 245, 753
 Webber, W. R., et al. 1998, *ApJ*, 508, 940

REF

[1 1]

*β -radioactive cosmic-rays in a diffusion model :
test for a local bubble ?*

F. Donato, D. Maurin , R. Taillet,

Astronomy and Astrophysics **381** (2002) 381

β -radioactive cosmic rays in a diffusion model: Test for a local bubble?

F. Donato¹, D. Maurin^{1,2}, and R. Taillet^{1,2}

¹ Laboratoire de Physique Théorique LAPTH, 74941 Annecy-le-Vieux, France

² Université de Savoie, 73011 Chambéry, France

Received 7 August 2001 / Accepted 12 September 2001

Abstract. In a previous analysis, Maurin et al. (2001) have constrained several parameters of the cosmic ray diffusive propagation (the diffusion coefficient normalization K_0 and its spectral index δ , the halo half-thickness L , the Alfvén velocity V_a , and the galactic wind V_c) using stable nuclei. In a second paper (Donato et al. 2002), these parameters were shown to reproduce the observed antiproton spectrum with no further adjustment. In the present paper, we extend the analysis to the β -radioactive nuclei ^{10}Be , ^{26}Al and ^{36}Cl . These species will be shown to be particularly sensitive to the properties of the local interstellar medium (LISM). As studies of the LISM suggest that we live in an underdense bubble of extent $r_{\text{hole}} \sim 50\text{--}200$ pc, this local feature must be taken into account. We present a modified version of our diffusion model which describes the underdensity as a hole in the galactic disc; we believe some of the formulæ presented here are new. It is found that the presence of the bubble leads to a decrease in the radioactive fluxes which can be approximated by a simple factor $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$ where $l_{\text{rad}} = \sqrt{K\gamma\tau_0}$ is the typical distance travelled by a radioactive nucleus before it decays. We find that each of the radioactive nuclei independently points towards a bubble of radius $\lesssim 100$ pc. If these nuclei are considered simultaneously, only models with a bubble radius $r_{\text{hole}} \sim 60\text{--}100$ pc are marginally consistent with data. In particular, the standard case $r_{\text{hole}} = 0$ pc is disfavored. Our main concern is about the consistency of the currently available data, especially $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$.

Key words. ISM: bubbles – galaxy: Solar neighbourhood

1. Introduction

The idea of using long-lived radioactive isotopes to estimate the average age of cosmic rays is not new and the name “radioactive chronometer” is now standard. Indeed, the finite lifetime of these nuclei has a deep impact on their propagation and they are expected to give independent clues about the propagation parameters. To this end, the nucleus ^{10}Be ($t_{1/2} = 1.51$ Myr) was proposed in the fifties, but due to an insufficient knowledge of the processes occurring during propagation, it has long been thought not to be the best candidate after all. Instead, Reames (1970) proposed ^{53}Mn which is EC (electronic capture) unstable ($t_{1/2} = 3.74$ Myr), but it was subsequently shown to be of no great interest, owing to the specific behavior of the EC channel. Later on, Cassé (1973) proposed ^{54}Mn which is a mixed β -EC unstable as a chronometer of the Fe group, the latter being mostly created by collisions of cosmic ray Fe on the interstellar medium. These propositions are very instructive since they demonstrate the early hesitations and progressive comprehension of cosmic ray nuclei propagation. From an observational point of view, the first clues about this propagation time came from the isotope ^{10}Be (Hagen et al. 1977; Webber et al. 1977; Garcia-Munoz et al. 1977). Other isotopically resolved chronometers followed as ^{26}Al (Freier et al. 1980), ^{36}Cl (Wiedenbeck 1985) and ^{54}Mn (Leske 1993). Since then, numerous accurate experiments have been performed (see Sect. 5.2) giving more confident estimates of the surviving fraction of these radioactive clocks.

Most of the conclusions of radioactive studies have been drawn in leaky box models, using the notion of surviving fraction to estimate the age of cosmic rays. The early analyses focused on the surviving fraction and this quantity hinted at the existence of a diffusive halo far beyond the thin galactic disc (see in particular Simpson & Garcia-Munoz 1987 for a discussion). We emphasize that in diffusion models, these notions have no clear physical meaning (see discussion in Sect. 3.1), as stable species and each radioactive species have different ages. The main goal nowadays is

Send offprint requests to: R. Taillet, e-mail: taillet@lapp.in2p3.fr

rather to use a diffusion model that can consistently reproduce all observed radioactive abundances. Our purpose here – following Ptuskin et al. (1997), Ptuskin & Soutoul (1998) – is to demonstrate that one may have to consider local properties of the interstellar medium (ISM) in order to bring this program to a successful conclusion.

The plan of the paper is the following: in a first part we recall the nuclear properties of the radioactive species. In the second part, we focus on the astrophysical aspects of propagation. More specifically, we introduce an inhomogeneous model for the production and propagation of radioactive species. We also discuss the meaning of older models and some false claims that are made in the literature about the predictive power of β radioactive clocks. We then present our analysis and results.

2. Description of radioactive species

From the propagation point of view, one can associate three attributes to each nucleus: (i) a reaction cross section, (ii) a spallation production cross section and (iii) a rest frame half-life. We will not discuss further the first two points as they were discussed at length in Maurin et al. (2001) (hereafter Paper I). Indeed, the cross section code and parameterizations developed in Webber et al. (1990), Webber et al. (1998) (spallation cross section) and Tripathi et al. (1997a, 1997b, 1999) (reaction cross section) are appropriate for both stable and radioactive nuclei.

However, it is not so straightforward to specify decay channels for unstable nuclei. Despite the fact that one can find half-lives easily in nuclear charts (Audi et al. 1997)¹, the information needed from a cosmicist point of view is not always clearly extractable: for example β and EC modes are often combined whereas these two effects act differently during propagation. Thus in the following section, we give a list of nuclei that need to be propagated as unstable. We emphasize that these ingredients were already present in the version of our code used in Paper I, although they were not explicitly discussed.

2.1. Half-lives

Two different disintegration modes must be distinguished: β decay (the nucleus decays spontaneously with a given lifetime $\tau_0 = t_{1/2}/\ln 2$) and EC decay (the nucleus decays after capturing a K -shell electron if one has been attached). In the latter case, the decay rate depends on the electron density and on the typical attachment time. On Earth, many electrons are available so that a nucleus unstable *via* electronic capture behaves as β^+ (at least in terms of the daughter nucleus and half-life). Nevertheless in the ISM, where fewer electrons can be attached, the attachment time must be taken into account in the EC mode. We will come back to this point later on.

Among all the radioactive nuclei, those which have lifetimes of the order of the propagation time may bring interesting information about their propagation. We select and classify them into three categories: β -unstable, EC-unstable and mixed β -EC-unstable. We emphasize that this classification only has a meaning in the context of cosmic ray propagation: were we interested in stellar nucleosynthesis, for example, other tables would be necessary to encode disintegration channels as the characteristic times of evolution involved and the properties of the medium would be drastically different.

Up to now, the most complete description of half-lives adapted to cosmic ray description has been given in Letaw et al. (1984). In this paper, we only consider β unstable nuclei, but as results about EC species will be presented in a separate paper (Donato et al. 2002, in preparation) we find it convenient to describe in this section all unstable species (β and EC). Thus, the following tables are similar to those in Letaw et al. (1984), but we restrict ourselves to $Z \leq 30$ and we take the opportunity to incorporate updated values for some half-lives.

2.1.1. β unstable

In Table 1, we present the three pure β unstable isotopes having proper half-lives in the time range 1 kyr–100 Myr. Nucleus ^{14}C is the shortest-living β unstable isotope included in our cascade. This choice is motivated by the measured propagation time, which runs between 10–20 Myr depending on the propagation model (this time decreases with energy). If a nucleus has a half-life \lesssim kyr, we can consider it as a ghost nucleus (see details in Paper I); this means in particular that as soon as it is created, this nucleus immediately (compared to the typical propagation time) disappears into its daughter nucleus, so that its density in cosmic radiation is negligible and it does not need to be propagated. We might object our $\tau_0 > 1$ kyr cut-off, arguing that because of the Lorentz factor $\gamma = E_{\text{tot}}/m$, even a short proper lifetime can give a large effective lifetime at sufficiently high energy. Actually, we are concerned with energies $E_{\text{tot}} < 100$ GeV/nuc, so that $\gamma < 100$. It follows that proper half-lives $\tau_0 < 1$ kyr correspond to effective half-lives $\tau = \gamma\tau_0 < 0.1$ Myr, which is too short compared to the propagation time for our purpose. Moreover, this cut-off is natural in practice as there are no radioactive half-lives in the interval 0.1–1 kyr. Conversely, if this lifetime

¹ see also <http://sutekh.nd.rl.ac.uk/CoN/> or <http://nucldata.nuclear.lu.se/nucldata/>

Table 1. Pure β unstable isotopes ($1 \text{ kyr} < t_{1/2} < 100 \text{ Myr}$).

Z	Nucleus	Daughter	$t_{1/2}^{\text{unit.}}$ (error)
4	${}^4_4\text{Be}$	${}^4_5\text{B}$	1.51^{Myr} (0.06)
6	${}^6_6\text{C}$	${}^6_7\text{N}$	5.73^{kyr} (0.04)
26	${}^{60}_{26}\text{Fe}^\dagger$	$({}^{60}_{27}\text{Co} \xrightarrow{\beta^-} {}^{60}_{28}\text{Ni})$	1.5^{Myr} (0.3)

[†] The transition from Fe to Co has a half-life of 1.5 Myr while transition from Co to Ni is immediate from a cosmic ray point of view ($t_{1/2} \sim 5 \text{ yr}$).

is too high, the corresponding nucleus could be propagated as a stable one. To give an example, ${}^{40}\text{K}$ – whose β half-life is about $\sim 10^9 \text{ yr}$ – can clearly be considered as stable.

2.1.2. EC unstable

In Table 2, we present the isotopes that are unstable under electronic capture transitions. Unlike for β -decay, these nuclei have to attach an electron to be able to decay. As (i) nuclei are completely stripped of e^- at cosmic ray energies and (ii) the interstellar medium is very poor in e^- , the attachment time may be much longer than the lifetime of the decay. This means that even a nucleus with a very short EC-lifetime may have a long effective lifetime. As a result, there is no need to consider any lower bound on the half-lives. This will be discussed further in Sect. 2.2, and the interested reader can refer to Letaw et al. (1984) or Adams et al. (1985) who show in a leaky box model that the effective half-life of EC nuclei is at least of the order of the attachment rate, which is about $\sim \text{Myr}^{-1}$.

Table 2. Pure EC unstable isotopes.

Z	unstable (EC)	Daughter	$t_{1/2}^{\text{unit.}}$ (error)
4	${}^7_4\text{Be}$	${}^7_3\text{Li}$	53.29^{d} (0.07)
18	${}^{37}_{18}\text{Ar}$	${}^{37}_{17}\text{Cl}$	35.04^{d} (0.04)
20	${}^{41}_{20}\text{Ca}$	${}^{41}_{19}\text{K}$	103^{kyr} (4)
22	${}^{44}_{22}\text{Ti}$	$({}^{44}_{21}\text{Sc} \xrightarrow{\beta^+} {}^{44}_{20}\text{Ca})$	49^{yr} (3)
23	${}^{49}_{23}\text{V}$	${}^{49}_{22}\text{Ti}$	330^{d} (15)
24	${}^{48}_{24}\text{Cr}^\dagger$	$({}^{48}_{23}\text{V} \xrightarrow{\beta^+} {}^{48}_{22}\text{Ti})$	21.56^{h} (0.03) [‡]
24	${}^{51}_{24}\text{Cr}$	${}^{51}_{23}\text{V}$	27.702^{d} (0.004)
25	${}^{53}_{25}\text{Mn}$	${}^{53}_{24}\text{Cr}$	3.74^{Myr} (0.04)
26	${}^{55}_{26}\text{Fe}$	${}^{55}_{25}\text{Mn}$	2.73^{yr} (0.03)
27	${}^{57}_{27}\text{Co}$	${}^{57}_{26}\text{Fe}$	271.79^{d} (0.09)
28	${}^{59}_{28}\text{Ni}^\S$	${}^{59}_{27}\text{Co}$	80^{kyr} (11)

[†] This nucleus has an allowed β transition, but contrary to ${}^{54}\text{Mn}$ and ${}^{56}\text{Ni}$ (cf. Table 3), it has not been studied recently so that we can set it as a pure EC.

[‡] In this two-step reaction, the second transition ${}^{48}\text{V} \xrightarrow{\beta^+} {}^{48}\text{Ti}$ has a half-life greater than the first one – 15.9735^{d} (0.0025). Nevertheless, this second reaction can be taken as immediate because of its β nature. We thus can consider this second element as a ghost (see text). Finally, only the first reaction (${}^{48}\text{Cr} \rightarrow {}^{48}\text{V}$) enters the decay rate.

[§] This nucleus has a β decay, but with $t_{1/2} > 100 \text{ Gyr}$. For the same reason as explained in Sect. 2.1.1, it is sufficient to take into account the EC channel.

2.1.3. Mixed β –EC unstable

Finally we turn to the case in which the two decay modes are allowed (hereafter mixed decay), in Table 3. In general, β decay is dominant, but we also need to consider some EC contributions. This is the case for ${}^{54}\text{Mn}$ which is often

Table 3. Mixed EC- β isotopes.

Z	Nucleus	Daughter (EC)	$t_{1/2}^{\text{unit.}}$ (error)	Daughter (β)	$t_{1/2}^{\text{unit.}}$ (error)
13	${}^{26}_{13}\text{Al}^*$	${}^{26}_{12}\text{Mg}$	4.08^{Myr} (0.15)	${}^{26}_{12}\text{Mg}$	0.91^{Myr} (0.04)
17	${}^{36}_{17}\text{Cl}$	${}^{36}_{16}\text{S}$	15.84^{Myr} (0.11)	${}^{36}_{18}\text{Ar}$	0.307^{Myr} (0.002)
25	${}^{54}_{25}\text{Mn}^\dagger$	${}^{54}_{24}\text{Cr}$	312.3^{d} (0.4)	${}^{54}_{26}\text{Fe}$	0.494^{Myr} (0.006)
28	${}^{56}_{28}\text{Ni}^\ddagger$	${}^{56}_{27}\text{Co}^{\beta^+}$	6.075^{d} (0.020)	${}^{56}_{26}\text{Fe}$	0.051^{Myr} (0.022)

* Martínez-Pinedo & Vogel (1998) (for this nucleus, one can often find in the literature a half-life of 0.74 Myr: it corresponds to the combined β -EC channels, and this is incorrect since these two processes are not equivalent during propagation).

† β half-life taken from Martínez-Pinedo & Vogel (1998). A higher value for this channel is not excluded.

‡ Lund Fisker et al. (1999).

§ ${}^{56}_{27}\text{Co}$ decays via EC (80%) and β^+ (20%), but as the half-life is of the order of two months, one can consider that the only effective channel is β -decay so that this nucleus vanishes immediately. Notice that these values are taken from Goldman (1982). More recent references (Audi et al. 1997) or nuclear charts on the web (see footnote 1) are ignored because they give either pure β channel or pure EC channel.

discussed as a possible chronometer for the Fe group, but its EC contribution is rarely treated correctly. Incidentally, Table 3 also shows that the usual two chronometers ${}^{26}\text{Al}$ and ${}^{36}\text{Cl}$ have mixed decay channels. But contrary to ${}^{54}\text{Mn}$ we will see in the next section that the EC channel is completely suppressed, and it is usually neglected.

2.2. Modifications of decay properties during propagation: Effective half-lives

While β decay is independent of the nucleus environment, electronic capture decay depends sharply on the ISM electronic density as well as on the attachment and stripping cross sections. It also follows that the energy dependence of lifetimes is more complex in the EC mode than in the β mode.

This is of great importance for the stability of nuclei, and it gives a flavor of how different the propagation is for these two modes, even for similar half-lives (i.e. $t_{\text{EC}} = t_\beta$). In order to clarify these specific behaviors, the pure β -decay will serve as a reference process to which EC processes can be compared. The expression for the density of a β -unstable nucleus can be found in Webber et al. (1992), or formulæ (A8), (A9) and (A10) of Paper I (the disintegration rate appears explicitly in S_i).

As regards the other radioactive species, they actually may be treated like β radioactive species as it is possible to transform their solution into that of pure β with an effective rate instead of the pure EC rate or of the usual combined β -EC rate. An effective lifetime can be introduced, obtained by combining t_{EC} , attachment and stripping cross sections (and t_β for mixed decay). A discussion of the validity of such approximations can be found in Letaw et al. (1984), Adams et al. (1985) and references therein. The physical inputs required to describe EC-unstable and β -unstable are

Table 4. Pure β unstable isotopes ($1 \text{ kyr} < t_{1/2} < 100 \text{ Myr}$) from a propagation point of view.

Z	Nucleus	Daughter	$t_{1/2}^{\text{unit.}}$ (error)
4	${}^{10}_4\text{Be}$	${}^{10}_5\text{B}$	1.51^{Myr} (0.06)
6	${}^{14}_6\text{C}$	${}^{14}_7\text{N}$	5.73^{kyr} (0.04)
13	${}^{26}_{13}\text{Al}$	${}^{26}_{12}\text{Mg}$	0.91^{Myr} (0.04)
17	${}^{36}_{17}\text{Cl}$	${}^{36}_{18}\text{Ar}$	0.307^{Myr} (0.002)
26	${}^{60}_{26}\text{Fe}$	${}^{60}_{28}\text{Ni}$	1.5^{Myr} (0.3)

different and we made the choice here to focus on the latter case. The case of EC-unstable species will be discussed elsewhere (Donato et al. 2002, in preparation). Consequently, the nuclei that one might consider as pure β are given in Table 4.

We have checked that the EC mode can be neglected for ${}^{27}\text{Al}$ and ${}^{36}\text{Cl}$ but not for ${}^{54}\text{Mn}$ and ${}^{56}\text{Ni}$. The comparison of our tables to Letaw et al. (1984) shows that the largest difference is for ${}^{60}\text{Fe}$ half-life which changed from 3×10^5 to 1.5×10^6 yr. For other nuclei, minor corrections in half-lives and their uncertainties have been made.

Finally, we recall that the propagation of nuclei which are radioactively produced requires a specific treatment. Their solution corresponds to formula (A11) of Paper I and as they do not play any role in this study, we will not discuss these daughter nuclei further.

3. Motivation for a local treatment of radioactive cosmic rays propagation

The propagation of cosmic rays is a priori affected by the details of the gas density distribution in the galactic disc. Several models have been proposed to take this into account: for example, Strong & Moskalenko (1998) consider a gas density distribution $n(r, z)$, whereas Osborne & Ptuskin (1987) and Ptuskin & Soutoul (1990) model the ISM as a cloudy medium. As far as the stable species are concerned, one can use an equivalent treatment with an average description of the ISM density. This is what we did in Paper I.

The situation is drastically different for radioactive species. Due to their finite lifetime, those that reach the solar system must have been created locally, i.e. in a region which is at most a few hundred parsecs away (see below). As a consequence, the local interstellar matter (LISM) has to be carefully described.

Actually, there are reasons to believe that this LISM is highly inhomogeneous, which motivates a more elaborate model for radioactive species. This model will be described in the next section, after we have discussed the locality of radioactive production and the inhomogeneity of the LISM.

3.1. Locality from diffusion equation

It is often claimed that the size of the diffusion halo can be estimated from radioactive cosmic ray species. This is true in the framework of a leaky box propagation model, but not for diffusion models (see below). Indeed, the leaky box models have been so widely used in the past that some of their conclusions have become popular wisdom and are sometimes used out of their proper context. Actually, as was explicitly shown in the early seventies (Prishchep & Ptuskin 1975; Ginzburg et al. 1980), leaky box models are almost never equivalent to diffusion models, so that one should be very careful before directly applying leaky box inspired results to another class of models, e.g. diffusion models.

3.1.1. The old leaky box paradigm, and what we should forget to go further. . .

The so-called leaky box modelling of cosmic ray propagation assumes that the particles freely move in a homogeneous finite-sized box. When a particle reaches a boundary of the box, there is a finite probability that it escapes the system. As a result, forgetting about anything but propagation, the density is given by, in this model,

$$\frac{\partial N(E, t)}{\partial t} - \frac{N(E, t)}{\tau_{\text{esc}}(E)} = 0$$

where $\tau_{\text{esc}}(E)$ is the typical time a particle of energy E spends in the box. It is possible to account for the measured abundance of all the stable cosmic ray nuclei abundances with a suitable $\tau_{\text{esc}}(E)$, adjusted for all nuclei. However, the physical picture provided by this model is wrong. Cosmic rays do not freely stream in a homogeneous box, but they are scattered by the inhomogeneities of the galactic magnetic field. This results in a diffusive propagation. This difference is of no importance when one is concerned only with the local abundance of stable nuclei, and it can be shown that in this case, there is an equivalence between these two approaches (see discussion in Paper I and references therein). But as soon as one tries to change the mathematically correct local description of stable nuclei provided by the leaky box into a physical picture and tries to extend it either to radioactive species or to another location, trouble begins.

First, it is obvious that from the start, the leaky box model is unable to describe the spatial distribution of cosmic rays. We will not discuss this point further.

Second, it is also clear that this model is bound to fail for radioactive cosmic ray nuclei. The species we consider have a proper lifetime of the order of $\tau \sim 1$ Myr, so that at the speed of light they can travel more than ~ 300 kpc before they decay. As the radius of the galaxy is ~ 20 kpc, these nuclei should have enough time to propagate in the whole available volume and their distribution is sensitive to the global geometry and localization of the sources. This is at variance with the diffusion model in which the average distance travelled by a nucleus during a time τ is given by $\sqrt{K(E)\tau}$, which is of the order of a few hundred parsecs at low energy. This means that in this case, the distribution of these species only depends on the *local* characteristics of the diffusive medium and of the sources.

It is sometimes claimed that a radioactive species gives the size L of the diffusive halo: the bigger the halo, the smaller the quantity of nuclei that survive from the sources to the Earth. This is easily understood in the framework of the leaky box, but it is physically wrong for diffusion models. A more quantitative version of the intuitive argument given above can be found in Prishchep & Ptuskin (1975). They showed that diffusion models are equivalent to leaky

box models only when the relationship $\tau_0 \gg L^2/K$ is satisfied. In the most favorable of the cases we consider here, this corresponds to $\tau_0 \gg 100$ Myr, which is wrong for the nuclei we are interested in.

Thus, one should be careful not to use leaky box induced conclusions out of this specific context. They may be very intuitive but wrong when applied to a diffusion model. For example, the next section shows that the radioactive-to-parent ratio is not sensitive to the size of the halo in a diffusion model.

3.1.2. Does a radioactive really tell something about the halo size L ?

In the diffusion model, a radioactive nucleus with a proper lifetime τ_0 has most probably travelled a distance $l_{\text{rad}} = \sqrt{K(E)\gamma\tau_0}$ between its creation in the disc and its detection on Earth. At low energy, this distance is much smaller than the size of the diffusive volume, and this nucleus is not very sensitive to the boundaries of this volume. This can be seen in the expression giving the ratio radioactive/parent nucleus. In the case when there is only one parent nucleus and if energetic gains and losses are discarded, the density is given by (see Eq. (A8) of Paper I)

$$N^{\text{uns}}(z=0, r) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2h\Gamma^{\text{prod}} N_i^{\text{parent}}(z=0)}{A_i} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \quad (1)$$

with

$$A_i \equiv 2h\Gamma^{\text{inel}} + V_c + K S_i \coth(S_i L/2) \quad (2)$$

and

$$S_i = \left(\frac{V_c^2}{K^2} + \frac{4\zeta_i^2}{R^2} + \frac{4\Gamma^\beta}{K} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

When the lifetime is so short that $\Gamma^\beta L/K \approx L/l_{\text{rad}} \gg 1$, we have $\coth(S_i L/2) \approx 1$. It can be easily seen that in these conditions, the ratio $N^{\text{uns}}(z=0, r)/N^{\text{par}}(z=0, r)$ becomes independent of the halo size L . Figure 1 displays this ratio for various L when formula (1) is used. The diffusion coefficient $K(E)$ and l_{rad} are increasing functions of energy, so that when l_{rad} becomes of the order of the typical size of the halo (L or R), diffusive propagation is affected by the shape and size of the halo.

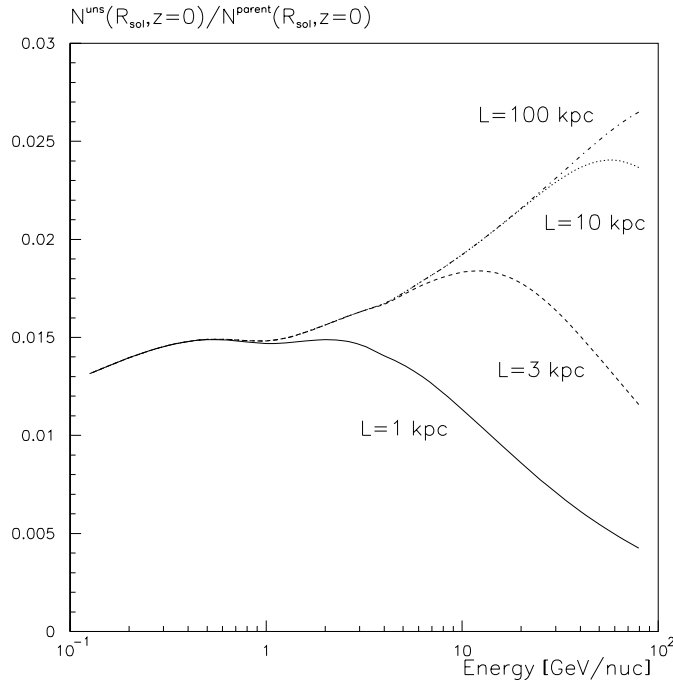


Fig. 1. Unstable/parent ratio ($^{26}\text{Al}/^{28}\text{Si}$) for different values of L in kpc, all other parameters being fixed.

We have presented here a model in which only one parent was considered. Actually, there are several parents and the above conclusion is not exact but remains approximate if they are considered, so that at low energy, the ratio

$N^{\text{uns}}/\sum_{\text{par}} N^{\text{par}}$ is the same whatever the size of the halo. All current data on radioactive nuclei are at low energy, so that we do not expect such a ratio to give direct constraints on L .

Nevertheless, the ratio of isotopes having the same parents, like $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$, are usually considered. As the quantity $^9\text{Be}/\sum_{\text{par}} N^{\text{par}}$ does depend on the halo size the ratio $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ eventually also does.

3.2. Local sub-density: We all leave in a local bubble

Interest in the study of our local environment has grown in the last thirty years (see for example Cox & Reynolds 1987 for a review). As emphasized in McKee (1998), the very recent all sky survey by ROSAT became an invaluable resource for all astronomers in general, and for the LISM study in particular. In this section, we present evidence indicating why it is probably necessary to have a specific description for the local ISM (in a region of about ~ 100 pc around the solar neighborhood). We then develop a model to incorporate the effect of these local properties of the ISM on radioactive species within our diffusion model.

3.2.1. Main properties of the LISM

First, it has to be noticed that far more progress has been made in mapping three dimensional distribution of galaxies many megaparsecs away than the distribution of local interstellar clouds within a hundred parsecs (McKee 1998). We can nevertheless summarize a few points about the local composition. First, the LISM is defined as a region of extremely hot gas ($\sim 10^5$ – 10^6 K) and low density ($n \lesssim 0.005 \text{ cm}^{-3}$) within a bubble of radius between $\lesssim 65$ – 250 pc surrounded by a dense neutral gas boundary (“hydrogen wall”) (Sfeir et al. 1999; Linsky et al. 2000). A smaller scale description of this bubble shows that the Sun is located in a local fluff with $N_{\text{HI}} \sim 0.1 \text{ cm}^{-3}$, $T \sim 10^4$ K and a typical extension of ~ 50 pc. It is of great importance for further modelling to realize that the local bubble is highly asymmetric (Cox & Reynolds 1987; Welsh et al. 1994; Fruscione et al. 1994), and that several cloudlets are present in the bubble (for a schematic representation, see for example Fig. 1 of Breitschwerdt et al. 2000). Various models have attempted to explain the formation of this local bubble (Smith & Cox 2001; Breitschwerdt et al. 2000; see also Cox 1997 for a brief review), but this subject is far beyond our concern.

Finally, a model can be built, considering that the Sun is surrounded by a first shell of radius ~ 50 pc and density $\sim 0.1 \text{ cm}^{-3}$, and a second shell of radius ~ 200 pc with an almost null density. Beyond this second shell, we recover the usual average density 1 cm^{-3} (or zero density if the radius of the second shell extends beyond the disc). In the rest of this paper, we use a coarser description, in which the underdensity is modelled with one cylindrical hole of radius r_{hole} to be determined and with a null density. It will be called “the hole” throughout this paper.

3.2.2. Consequences for the radioactive production

The propagation of cosmic rays is influenced by (i) the local magnetic properties and (ii) the local matter content of the disc. In this section, we investigate the effect of this hole on these properties.

First, we assume that diffusion itself, as described by the coefficient $K(E)$, is not affected by the presence of the hole, i.e. diffusion is homogeneous. Homogeneity seems to be confirmed by radio and γ -ray observations, which can test in situ the spectrum and density of cosmic rays (McKee 1998; Morfill & Freyberg 1998).

The presence of the hole has another consequence. Because the density is lower, there are less spallations in the bubble, so that the secondary nuclei abundances (including radioactive ones) are probably perturbed. As a matter of fact, a realistic description of the matter content of the disc should take into account a spatial distribution (exponential or more complex) as used for example in Strong & Moskalenko (1998). However, the only relevant quantity for stable nuclei is the average grammage of matter they cross. As these nuclei propagate in a region which is much bigger than the hole, this average grammage is only slightly changed by the presence of the hole. This can be seen in Fig. 5, where the change in the radial distribution of a stable species due to the hole is represented. In the following, the local density of stable nuclei will be computed with a full matter disc of density 1 cm^{-3} .

The situation is different for radioactive species, as the typical distance they travel from their creation in the disc to their detection on Earth is limited by their finite lifetime τ . This distance can be estimated as $l_{\text{rad}} \sim \sqrt{K(E)\gamma\tau_0}$. For the nuclei we consider here, and for energies of a few hundred MeV/nuc, l_{rad} is of the same order of magnitude as the size of the hole, so that their propagation is expected to be more strongly perturbed. To be specific, the fact that spallations do not occur within the hole has three distinct physical effects. First, it leads to a decrease in the spallation source term of the radioactive species. Second, it also leads to a local decrease of destructive spallations. Third, as there is less interstellar matter to interact with, the energy losses are also lowered.

4. Modelling the local propagation

We now want to take these remarks and incorporate the three physical effects discussed above in our diffusion model. We start with a very simple model, in which the influence of the hole can be easily understood. We then adapt the model discussed at length in Paper I and Donato et al. (2002) (hereafter Paper II). In the following subsections, we present the demonstration of the corresponding new formulæ. This section is a bit technical and the confident reader can skip the demonstrations and go directly to Sect. 4.6.

4.1. A first simple approach

We begin with a very simple model, in which the galactic disc is an infinitely thin disc extending to infinity, embedded in an infinite diffusive volume. These assumptions are not unreasonable as propagation of radioactive species is a local phenomenon and is not expected to be much affected by boundaries. We also ignore destructive spallations, galactic wind and energy losses. At the origin of the galactic plane stands a hole of radius r_{hole} .

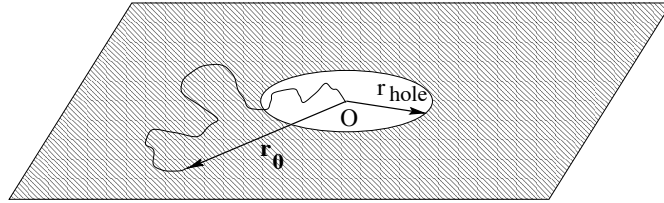


Fig. 2. Schematic representation of the first model. The disc is infinite in all directions and has zero thickness.

Consider first the nuclei coming from spallations at time t_0 and at a source point \mathbf{r}_0 . They act as an instantaneous source term $f_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0)$. The number that would reach the center at time $t > t_0$, with no decay, satisfies

$$\frac{\partial f}{\partial t} = K\Delta f = \frac{K}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) = f_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\delta(t - t_0).$$

A solution of this equation is given by

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, t - t_0) = \frac{f_0}{(4\pi K(t - t_0))^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2}{4K(t - t_0)} \right\}.$$

For radioactive species with a lifetime $\tau = \gamma\tau_0$ (where τ_0 is the rest frame lifetime), decay must be taken into account and we have instead, at $\mathbf{r} = \mathbf{0}$,

$$f(\mathbf{0}, t) \propto \frac{1}{(t - t_0)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{r_0^2}{4K(t - t_0)} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{t - t_0}{\tau} \right\}. \quad (4)$$

This function is actually the propagator of this diffusion problem. In the permanent regime, the total quantity of these nuclei at the center of the hole is obtained by summing the solutions for a distribution of point sources acting at all instants from $t_0 = -\infty$ to t (now). It leads to an integration over space and time

$$N \propto \int_0^\infty 2\pi r_0 n(r_0) dr_0 \int_{-\infty}^t \frac{dt_0}{(t - t_0)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{r_0^2}{4K(t - t_0)} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{t - t_0}{\tau} \right\}$$

in our case, $n(r_0) = 0$ for $r_0 < r_{\text{hole}}$ and $n(r_0) = n_0$ for $r_0 > r_{\text{hole}}$, so that

$$N \propto n_0 \int_{r_{\text{hole}}}^\infty 2\pi r_0 dr_0 \int_{-\infty}^t dt_0 \frac{1}{(t - t_0)^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{r_0^2}{4K(t - t_0)} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{t - t_0}{\tau} \right\}.$$

Integration over r_0 is easily performed

$$N \propto \int_{-\infty}^t \frac{dt_0}{\sqrt{(t - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{r_{\text{hole}}^2}{4K(t - t_0)} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{t - t_0}{\tau} \right\}.$$

Introducing $x = \sqrt{(t - t_0)/\tau}$,

$$N \propto \int_0^\infty dx \exp \left\{ -\frac{r_{\text{hole}}^2}{4K\tau} x^{-2} - x^2 \right\}.$$

This integral is given by

$$\int_0^\infty dx \exp\left\{-\frac{\alpha}{x^2} - x^2\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2\sqrt{\alpha}} \quad (5)$$

so that finally

$$N \propto e^{-r_{\text{hole}}/\sqrt{K\tau}}.$$

The central density due to the full disc would be given by $r_{\text{hole}} = 0$, so that, introducing $l_{\text{rad}} \equiv \sqrt{K\gamma\tau_0}$,

$$N_{r_{\text{hole}}}(r=0) = N_{(r_{\text{hole}}=0)}(r=0) \times e^{-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}}}. \quad (6)$$

We emphasize that in the problem treated here, the time-dependent resolution by means of propagators that we used in this section is equivalent to solving the corresponding stationary equation ($\partial f/\partial t = 0$). This latter approach is more convenient for implementing the physical effects we have neglected here. It will be used in the next sections and as expected, the same behavior will be recovered.

4.2. Analytical solutions without energy losses and reacceleration

We now turn to a more realistic model, namely a cylindrical diffusion box of radius R and half-height L , and a matter disc of half-height h , considered as infinitely thin. The local subdensity has to be represented by a circular hole of radius r_{hole} located at the position of the Sun. Compared to the previous approach, it has the advantage of correctly taking into account the presence of boundaries. It also takes into account destructive spallations and galactic wind. It is actually the model used in Papers I and II, with an additional hole of radius r_{hole} .

To make the problem tractable analytically, we make some simplifying hypotheses. First, to preserve the cylindrical symmetry, we consider that the Sun (and the hole) is located at the center of the disc. Second, we suppose that the density of the parent species is uniform all over the galactic disc, i.e. it does not depend on the spatial coordinate r . The validity of these assumptions relies on the fact that the propagation of radioactive species is a local process. We will discuss further these points in Sect. 4.4.

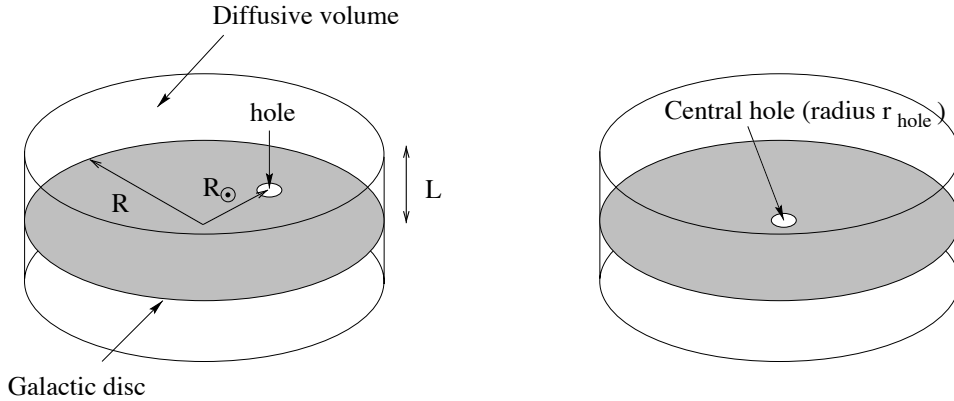


Fig. 3. Schematic representation of the model. Left picture is the actual geometry of the problem, with a hole of radius r_{hole} in the disc, at the position of the Sun. The right picture represents the simplified geometry (cylindrical symmetry is preserved) which is shown to give the same results.

We want to solve the diffusion equation for a radioactive secondary (no primary sources)

$$K\Delta N^{\text{uns}}(r, z) - V_c \frac{\partial N^{\text{uns}}(r, z)}{\partial z} - \Gamma^\beta N^{\text{uns}}(r, z) + 2h\delta(z) [\Gamma^{\text{prod}}(r)N^{\text{par}}(r, 0) - \Gamma^{\text{inel}}(r)N^{\text{uns}}(r, 0)] = 0. \quad (7)$$

To keep notations simple, we consider only one parent nucleus. It would be straightforward to generalize to several parents. Here, N^{uns} denotes the unstable nucleus, N^{par} the parent nucleus and Γ^{prod} , Γ^{inel} and Γ^β denote respectively the production rate (by spallation) of the parent N^{par} into the radioactive nucleus N^{uns} , the destruction rate of N^{uns} by inelastic scattering and its β -disintegration rate. This equation differs from the no-hole case (Eq. (A1) of Paper I) because the terms $\Gamma^{\text{prod}}(r) = n_{\text{LISM}}(r)v\sigma^{\text{prod}}$ and $\Gamma^{\text{inel}}(r) = n_{\text{LISM}}(r)v\sigma^{\text{inel}}$ now depend explicitly on r via the local interstellar density which reads

$$n_{\text{LISM}}(r) = \Theta(r - r_{\text{hole}})n_{\text{ISM}} \quad (8)$$

where Θ is the Heavyside distribution. Thus, we can rewrite Eq. (7) in the form

$$K \Delta N^{\text{uns}}(r, z) - V_c \frac{\partial N^{\text{uns}}(r, z)}{\partial z} - \Gamma^\beta N^{\text{uns}}(r, z) + 2h\delta(z) [\Gamma^{\text{prod}} \Theta(r - r_{\text{hole}}) N^{\text{par}}(r, 0) - \Gamma^{\text{inel}} \Theta(r - r_{\text{hole}}) N^{\text{uns}}(r, 0)] = 0. \quad (9)$$

As for the no-hole model (see Paper I), a solution is found by expanding the density over the Bessel functions $J_0(\zeta_i r/R)$ where the ζ_i are the zeros of J_0 . The unknown quantities $N^{\text{uns}}(r, z)$ are expanded as

$$N^{\text{uns}}(r, z) = \sum_i N_i^{\text{uns}}(z) J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right). \quad (10)$$

The known quantities are also expanded as

$$\Upsilon(r, z) = \sum_i \Upsilon_i(z) J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right) \quad \text{with} \quad \Upsilon_i(z) = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho \Upsilon(\rho, z) J_0(\zeta_i \rho) d\rho$$

where $\rho = r/R$.

We now have to differentiate the case of source spallation from that of destruction. For the first one, we can assume that the density of the parent depends very smoothly on the coordinate r so that we can safely take $N^{\text{par}}(r, 0) = N^{\text{par}}(R_\odot, 0)$; this approximation will be checked in Sect. 4.4. We must compute the Bessel transform of the Heavyside function

$$\Theta_i = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho \Theta\left(\rho - \frac{r_{\text{hole}}}{R}\right) J_0(\zeta_i \rho) d\rho.$$

With the notation $x = \zeta_i \rho$ and using the fact that a primitive of $xJ_0(x)$ is $xJ_1(x)$, it can be shown that

$$\Theta_i = \frac{2}{\zeta_i J_1^2(\zeta_i)} \times \left[J_1(\zeta_i) - \frac{r_{\text{hole}}}{R} J_1\left(\zeta_i \frac{r_{\text{hole}}}{R}\right) \right]. \quad (11)$$

For the destructive spallation term, we have to Bessel develop the function $\Theta(r - r_{\text{hole}}) N^{\text{uns}}(r, 0)$. At variance with the precedent case, the distribution $N^{\text{uns}}(r, 0)$ is expected to vary significantly across the hole so that the previous approximation cannot be made. We thus have

$$\Theta(r - r_{\text{hole}}) N^{\text{uns}}(r, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \Omega_i^{\text{uns}} J_0\left(\zeta_i \frac{r}{R}\right)$$

where

$$\Omega_i^{\text{uns}} \equiv \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \int_0^1 \rho N^{\text{uns}}(\rho, 0) \Theta\left(\rho - \frac{r_{\text{hole}}}{R}\right) J_0(\zeta_i \rho) d\rho.$$

Inserting the Bessel development of $N^{\text{uns}}(r, z = 0)$ into this relation (see Eq. (10)), we find

$$\Omega_i^{\text{uns}} = \frac{2}{J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j=1}^{\infty} N_j^{\text{uns}}(z = 0) \int_{r_{\text{hole}}/R}^1 \rho J_0(\zeta_j \rho) J_0(\zeta_i \rho) d\rho.$$

Using the property

$$\int \rho J_0(\zeta_j \rho) J_0(\zeta_i \rho) d\rho = \begin{cases} \frac{1}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} [-\zeta_i \rho J_0(\zeta_j \rho) J_1(\zeta_i \rho) + \zeta_j \rho J_1(\zeta_j \rho) J_0(\zeta_i \rho)] & \text{for } i \neq j \\ \int \rho J_0^2(\zeta_i \rho) d\rho = \frac{1}{2} \rho^2 [J_0^2(\zeta_i \rho) + J_1^2(\zeta_i \rho)] & \text{else} \end{cases}$$

it follows that

$$\begin{aligned} \Omega_i^{\text{uns}} &= N_i^{\text{uns}}(0) - \frac{r_{\text{hole}}^2}{R^2 J_1^2(\zeta_i)} N_i^{\text{uns}}(0) \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) \right] \\ &+ \frac{2r_{\text{hole}}}{R J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j \neq i} \frac{N_j^{\text{uns}}(0)}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left[\zeta_i J_0\left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R}\right) J_1\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) - \zeta_j J_1\left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R}\right) J_0\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Finally, putting everything altogether, the Bessel transform of Eq. (9) reads

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{V_c}{K} \frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{\zeta_i^2}{R^2} + \frac{\Gamma^\beta}{K} \right) \right] N_i^{\text{uns}}(0) + \frac{2h}{K} \delta(z) [\Theta_i \times \Gamma^{\text{prod}} N^{\text{par}}(R_\odot, 0) - \Omega_i^{\text{uns}} \times \Gamma^{\text{inel}}] = 0 \quad (13)$$

where Θ_i and Ω_i^{uns} are given by Eqs. (11) and (12). This equation is now very similar to Eq. (A6) of Paper I, and resolution proceeds as exposed therein. The solution in the halo is

$$N_i^{\text{uns}}(z) \propto e^{V_c z/2K} \times \sinh \left\{ \frac{S_i(L-z)}{2} \right\}$$

where S_i and A_i were defined in Sect. 3.1.2. The solution in the disc is obtained by integrating Eq. (7) across the disc,

$$2N_i^{\text{uns}'}(0) - 2N_i^{\text{uns}}(0) \frac{V_c}{K} - \frac{2h\Gamma^{\text{inel}}}{K} \Omega_i^{\text{uns}} + \frac{2h\Gamma^{\text{prod}}}{K} \Theta_i N^{\text{par}}(R_\odot, 0) = 0$$

which gives

$$N_i^{\text{uns}}(0) = \Theta_i \times \frac{2h\Gamma^{\text{prod}} N^{\text{par}}(R_\odot, 0)}{A_i} - \frac{2h\Gamma^{\text{inel}}}{A_i} [\Omega_i^{\text{uns}} - N_i^{\text{uns}}]. \quad (14)$$

The first term is very similar to the secondary source contribution of a no-hole model, but with an additional Θ_i factor taking correctly into account the effect of the hole on production spallations. The second term takes into account the effect of the hole on destructive spallations. It is expressed as

$$\begin{aligned} \Omega_i^{\text{uns}} - N_i^{\text{uns}} = & - \frac{r_{\text{hole}}^2}{R^2 J_1^2(\zeta_i)} N_i^{\text{uns}}(0) \left[J_0^2 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) + J_1^2 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) \right] \\ & + \frac{2r_{\text{hole}}}{R J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j \neq i} \frac{N_j^{\text{uns}}(0)}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left[\zeta_i J_0 \left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R} \right) J_1 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) - \zeta_j J_1 \left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R} \right) J_0 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

As this term depends on $N_j^{\text{uns}}(0)$, (14) is a coupled set of equations and may be tricky to solve in practice.

Actually, as the effect of spallations is expected to be small, we use a perturbative method. We first compute the solution of Eq. (14) without the last term of Eq. (15),

$$N_i^{\text{uns},(0)}(0) = \Theta_i \times \frac{2h\Gamma^{\text{prod}} N^{\text{par}}(R_\odot, 0)}{A'_i}$$

with

$$A'_i = A_i + 2h\Gamma^{\text{inel}} \frac{r_{\text{hole}}^2}{R^2 J_1^2(\zeta_i)} \left[J_0^2 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) + J_1^2 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) \right].$$

The term we have neglected can now be taken into account by substituting the $N_j^{\text{uns}}(0)$ in Eq. (15) by these zero-order solutions $N_j^{\text{uns},(0)}$.

$$N_i^{\text{uns},(1)}(0) = N_i^{\text{uns},(0)}(0) + \frac{4h\Gamma^{\text{inel}}}{J_1^2(\zeta_i) A_i} \frac{r_{\text{hole}}}{R} \times \sum_{j \neq i} \frac{N_j^{\text{uns},(0)}(0)}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left[\zeta_i J_0 \left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R} \right) J_1 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) - \zeta_j J_1 \left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R} \right) J_0 \left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R} \right) \right].$$

The new quantities $N_i^{\text{uns},(1)}(0)$ can then be used instead of $N_i^{\text{uns},(0)}(0)$ to estimate the correction at the next order. This procedure is repeated until convergence is reached. In practice, convergence is very quick and we only need to iterate twice.

4.3. Behavior of the solution as a function of the hole radius

A numerical study of this solution (see Fig. 4) shows that the dependence in r_{hole} can be expressed as, with good accuracy,

$$N_i(0) \approx \exp \left(-\frac{r_{\text{hole}}}{l_{\text{rad}}} \right) \quad \text{with} \quad l_{\text{rad}} = \sqrt{K(E)\gamma\tau_0}. \quad (16)$$

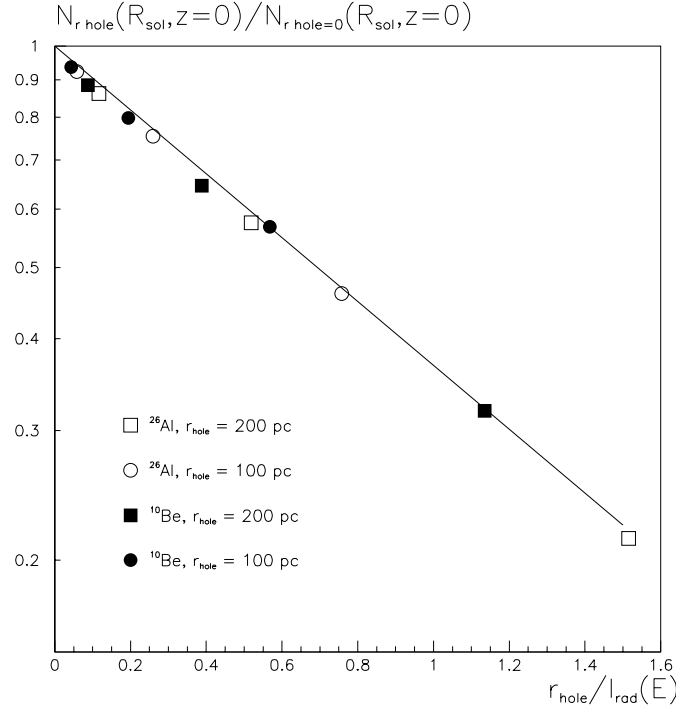
The physical meaning of this dependence is better seen with the first approach (Sect. 4.1). The relevant quantities to compare are the size of the hole and l_{rad} , which represents the typical distance travelled by a radioactive nucleus before it decays. This distance increases with energy, because of time dilation and because high energy nuclei diffuse more efficiently (K grows with energy). For a diffusion coefficient of the form $K = K_0 \beta \mathcal{R}^\delta$, l_{rad} can be expressed as

$$l_{\text{rad}} = \sqrt{K\gamma\tau_0} = \sqrt{K_0\tau_0} \frac{A^{(\delta-1)/4}}{Z^{\delta/2}} (E_{k,\text{nuc}}^2 + 2m_p E_{k,\text{nuc}})^{(\delta+1)/4}. \quad (17)$$

Typical values are given at several energies and for several radioactive nuclei for $K_0 = 0.033 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$ and $\delta = 0.6$ (a good model taken from Paper I) in Table 5.

Table 5. Values of l_{rad} for several radioactive nuclei and energies.

	τ_0 (Myr)	$E_k = 100$ MeV/n	1 GeV/nuc	10 GeV/nuc
^{10}Be	2.17	0.075 kpc	0.22 kpc	0.95 kpc
^{26}Al	1.31	0.037 kpc	0.11 kpc	0.47 kpc
^{36}Cl	0.443	0.019 kpc	0.056 kpc	0.25 kpc

**Fig. 4.** The radioactive flux is computed for ^{26}Al and ^{10}Be , for several energies (corresponding to several values of $l_{\text{rad}}(E)$) and for several hole radii r_{hole} . This plot displays each flux divided by the flux obtained in the homogeneous case ($r_{\text{hole}} = 0$), as a function of $r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}}$. The solid line represents the function $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$.

4.4. Discussion of the validity of the hypotheses

The most a priori questionable assumption is that we located the hole at the center of the galactic disc, though we know that the Sun is at a galactocentric distance of about $R = 8$ kpc. Figure 5 displays the radial distribution of a radioactive species in the disc for several energies. We see this distribution is only perturbed locally by the presence of the hole: at a distance of a few l_{rad} , the flux is no longer affected by the hole. Conversely, the flux at the center of the hole is not affected by the boundaries of the diffusive box if they are farther than a few l_{rad} . We could even consider that the galactic disc is an infinite plane. This means that the same distribution – and the same reduction factor $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$ – is obtained whatever the position of the hole, as long as it is far enough from the edges of the box (compared to l_{rad}), which is the case for us. The density of parent nuclei must obviously be estimated at the position of the Sun (and not at the center of the galaxy!).

We also assumed that the parent has a homogeneous distribution all over the disc, which is known to be wrong: the parent flux is greater around the position of the sources ($r \sim 4$ kpc, see for example Paper I, Sect. 3.5.1 and references therein) and decreases regularly to zero at the edge of the disc ($R = 20$ kpc). However, as the radioactive propagation is a local phenomenon, at the scale of l_{rad} , it is a good approximation as long as the parent distribution does not vary much on the spatial scale of l_{rad} . Actually, even if the parent distribution varies linearly with radius, the approximation remains good. The probability $d\mathcal{P}$ that a radioactive nucleus detected at the center of the hole has been created by a spallation at a distance between r and $r + dr$ can be computed explicitly in the simple model described in Sect. 4.1, and it is found that (see Appendix for the demonstration)

$$d\mathcal{P}(\text{emitted between } r \text{ and } r + dr | \text{detected at center}) \propto \Theta(r - r_{\text{hole}}) N_{\text{parent}}(r) e^{-r/l_{\text{rad}}} dr \quad (18)$$

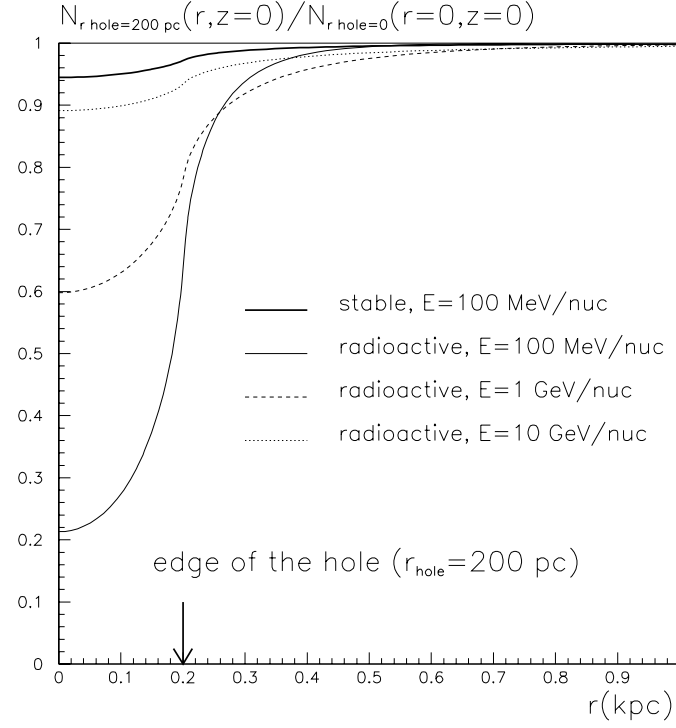


Fig. 5. Radial distribution of a radioactive species in the disc, across the hole, for $r_{\text{hole}} = 200$ pc. Numerical values were taken for ^{26}Al (radioactive) and ^{28}Si (stable). The distribution of radioactive is very sensitive to the presence of the hole. However this effect is local and vanishes at several r_{hole} . On the contrary, the distribution of stable species is not much affected.

so that most of the radioactive nuclei come from a ring extending from the edge of the hole ($r = r_{\text{hole}}$) to a few l_{rad} away. As a result, if the parent nucleus density is not uniform, the spallation rate is determined by the effective density obtained as the average over the disc with the appropriate weight, given in the expression A.1 (see Appendix)

$$N_{\text{parent}}^{\text{effective}} = \frac{\iint d^2\mathbf{r} N_{\text{parent}}^2(\mathbf{r}) \Theta(r - r_{\text{hole}}) \exp(-r/l_{\text{rad}})}{\iint d^2\mathbf{r} N_{\text{parent}}(\mathbf{r}) \Theta(r - r_{\text{hole}}) \exp(-r/l_{\text{rad}})}.$$

We have compared this effective parent density to the actual parent density $N_{\text{parent}}(R_{\odot}, z = 0)$ at the location of the Sun. For hole radii $r_{\text{hole}} < 400$ pc and for $l_{\text{rad}} < 5$ kpc, the difference is less than one percent at 10 GeV/nuc, and is completely negligible for $E \lesssim 1$ GeV/nuc.

4.5. Energy losses and reacceleration

In homogeneous models, the energy changes induced by energy losses and reacceleration are described by the equation (see Paper I and Paper II)

$$A_i N_i + 2h \frac{\partial}{\partial E} \left\{ b(E) N_i(E) - K_{EE} \frac{\partial N_i}{\partial E} \right\} = A_i N_i^{(0)} \quad (19)$$

where N_i is the Bessel transform of the final flux and $N_i^{(0)}$ is the initial flux (before energy losses and reacceleration are applied). Because of the hole, the energy loss term $b(E)$ now has a spatial dependence. It has the same value as above, except in the hole where there is no matter to interact with, so that

$$b(r, E) = \Theta(r - r_{\text{hole}}) b(E).$$

Thus, the Bessel transform of the quantity $\Theta(r - r_{\text{hole}}) N(r, E)$, denoted \mathcal{U}_i , must be introduced. As the spatial dependence of this function is exactly the same as the spallation term of the previous section, it is straightforward to write (see Eq. (12))

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_i(E) = & N_i(E) \left\{ 1 + \frac{r_{\text{hole}}^2}{R^2 J_1^2(\zeta_i)} \left[J_0^2\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) + J_1^2\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) \right] \right\} \\ & - \frac{2r_{\text{hole}}}{R J_1^2(\zeta_i)} \sum_{j \neq i} \frac{N_j}{\zeta_j^2 - \zeta_i^2} \left[-\zeta_i J_0\left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R}\right) J_1\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) + \zeta_j J_1\left(\frac{\zeta_j r_{\text{hole}}}{R}\right) J_0\left(\frac{\zeta_i r_{\text{hole}}}{R}\right) \right], \end{aligned} \quad (20)$$

so that $b(E)N_i(E)$ in (19) has to be replaced by $b(E)\mathcal{U}_i(E)$. It is again a coupled set of equations. The same perturbative approach as before is used: the new quantities $N_i^{(1)}$ affected by energy losses are estimated by replacing N_i by $N_i^{(0)}$. The new set $N_i^{(1)}$ is then inserted instead of $N_i^{(0)}$, etc. until convergence is reached. It is found that even in the presence of energy losses and reacceleration, the dependence on the hole radius is still very well described by (16).

We note that reacceleration has a negligible effect on radioactive propagation, which may be understood as it takes much longer than the lifetime $\gamma\tau_0$ to significantly reaccelerate a nucleus.

4.6. Conclusion and inclusion in the propagation code

The presence of a hole of radius r_{hole} lowers the radioactive flux by a factor given with a good precision by $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$ where l_{rad} is given in (17).

It is not possible in practice to directly use the analytical formulæ described above because the double sums over Bessel indices are far too time consuming. Indeed, the accurate description of the hole requires a development of all functions over at least the $N \gg R/r_{\text{hole}}\pi \sim 100$ first functions $J_0(\zeta_i x)$. We used $N = 5000$, for which a very good convergence of the Bessel series was achieved, and the double summation takes $N^2 = 2.5 \times 10^7$ elemental steps for each iteration and each model. The computation time required to apply these formulæ to all the models would have been too large.

Thus, we preferred to take advantage of the exponential dependence discussed above, and the flux of a given radioactive nucleus in the presence of a hole is obtained from each model with no hole by a multiplication by $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$.

5. Experimental data and configurations of parameter space

We now turn to the more standard diffusion aspects of propagation. The main ingredients of our diffusion model have been widely depicted in Paper I, and we will not be exhaustive about them here. Instead, we simply motivate the choice of configurations that are used in this paper. We also review the experimental data that we compared to our calculations.

5.1. Sets of configurations used for the analysis

Propagation is assumed to be a diffusive process occurring both in the galactic disc and in a halo of thickness L . This process is characterized by an energy-dependent diffusion coefficient of the form $K(E) = K_0\beta\mathcal{R}^\delta$ where K_0 and δ are parameters of the model and \mathcal{R} is the rigidity. Propagation is affected by a galactic wind V_c perpendicular to the galactic plane and by the presence of Alfvén waves of velocity V_a . These are the five parameters of the model. All the sets of parameters consistent with measurements of stable nuclei analysis have been extracted and discussed in Paper I (see this paper for a detailed presentation of the model and more specifically Figs. 7 and 8). These sets of parameters are also consistent with the antiproton spectrum, as shown in Paper II.

Some further cuts in our initial sets of parameters could probably be applied on physical grounds (see for example the discussion on the Alfvénic velocity V_a in Sect. 5.2, Paper II). We adopted a conservative attitude and used the whole set, as the aim of this paper is precisely to explore whether it is possible to obtain further constraints on these parameters from the study of radioactive species.

5.2. The data set we used

Several experiments in the last twenty or thirty years have measured radioactive isotopes in cosmic rays with increasing precision, at energies of a few hundred MeV/nuc. The early data – usually presented as the ratio of the radioactive isotope to its stable companion(s) – were affected by errors of around 25–30%. The latest published data have error bars reduced by a factor of two or three. In the following, we implicitly refer to three satellite experiments, namely Voyager, Ulysses and ACE. Other experiments will sometimes be shown on figures but they will be purely illustrative since their accuracy is far smaller.

The best measured ratio is probably $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ which corresponds to the lowest Z β -radioactive nucleus. Data from Ulysses (Connell 1998) and from ACE (Binns et al. 1999) are consistent, the quoted error bars being smaller for ACE. They are also consistent with the Voyager data point (Lukasiak et al. 1999) for which the quoted error is larger. We do not use the SMILI data, as the possibility that they are due to a statistical fluctuation is not ruled out (Ahlen et al. 2000).

As regards the radioactive chlorine isotope ^{36}Cl , results are usually provided as ^{36}Cl to total Cl ratio. The only available data, to our knowledge, are those from Ulysses (Connell et al. 1998) with a 1σ error of about 35%, and ACE (Binns et al. 1999) whose errors (even taken at 3σ) are completely included in the Ulysses $1-\sigma$ upper error band.

We finally end with the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ ratio. Contrary to other radioactive ratios, the measurements show more problems. Indeed, 1σ data from Ulysses (Simpson & Connell 1998) and ACE (Binns et al. 1999) exclude each other (the ACE central point is much lower than Ulysses'). Enlarging ACE error bars (which are smaller than Ulysses) to 3σ does not improve the compatibility. On the other hand, Ulysses data are fully compatible with 1σ Voyager data (Lukasiak et al. 1994), whose uncertainty is still much greater than for the other two experiments. The possible discrepancy between some of these data will be addressed later.

6. Results

We now present our analysis of the radioactive nuclei abundances. First, in the diffusion model with no hole (hereafter the *homogeneous model*), we can compute the expected flux of radioactive nuclei for each set of diffusion parameters given by the analysis of stable nuclei (Paper I) and compare to the data. Then, the presence of a local underdense region discussed above is tested, and the radius r_{hole} of this region is introduced as an additional parameter. The corresponding models will be called *inhomogeneous models*. As the stable nuclei are almost not affected by the presence of the hole (see Fig. 5), the sets of diffusion parameters given in Paper I are also used in the inhomogeneous case.

To sum up the procedure, the sets of diffusion parameters (K_0 , L , δ , V_a and V_c) given in Paper I are used to compute the radioactive nuclei fluxes, for different hole radii r_{hole} . The special case $r_{\text{hole}} = 0$ corresponds to the homogeneous models.

We proceed as follows. We first focus independently on the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ratios. They are computed for all the sets of diffusion parameters compatible with B/C (given in Paper I) and for several hole radii r_{hole} . The constraints they induce on the parameters are studied. We then analyze simultaneously the two ratios $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ and finally the three ratios $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$, $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ and $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$.

6.1. Constraints from $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$

6.1.1. Comparison to ACE data

To begin with, we consider only the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ratio, for which we have three compatible measurements. This is also the ratio for which an accurate spectrum is likely to be available in a near future (by ISOMAX, AMS, ...). This ratio is computed for each of the 5-parameter sets compatible with B/C given in Paper I, and for several hole radii r_{hole} . The result is compared to the ACE data and the parameters giving a ratio falling out of the 3σ ACE error bars are discarded. We also do the same with a more stringent limit of 1σ , and the results are shown in the left panels of Fig. 6, where the scatter of the configurations is plotted in the plane δ - L for the homogeneous case, and δ - r_{hole} in the inhomogeneous one. For illustrative purpose, we also show on the right panels of Fig. 6 the result of the same procedure with 3σ and 1σ $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE data. The dots in this figure are merely the models obtained in the Paper I analysis.

The upper figure shows that for homogeneous models, the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ratio alone further constrains L to a smaller region of the parameter space. For inhomogeneous models (lower part), the hole radius is constrained to values $r_{\text{hole}} \lesssim 100$ pc. This can be easily understood: the value of $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ in an inhomogeneous model is given by the corresponding value in a homogeneous model, decreased by the exponential factor $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$. As the initial homogeneous parameter sets compatible with B/C give a wide range of $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ values, those which are larger than the data are redeemed in inhomogeneous models. For holes larger than 100 pc, the exponential decrease is too important and theoretical predictions are too low to fit ACE data.

If we do not believe in the presence of the bubble, then our conclusions are similar to previous works: higher values of L are preferred in homogeneous models ($L \gtrsim 4$ kpc). For inhomogeneous models (including $r_{\text{hole}} = 0$), the allowed ranges for the other diffusion parameters are not much affected if compared to the results of the stable nuclei analysis (Paper I). The $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ratio yields similar conclusions.

6.1.2. Discussion

Here we want to discuss qualitatively two other important points: the spectral behaviour and the interrelation of the three radioactive ratios. It will allow a more intuitive grasp of the combined analysis presented in the next section.

We first select all the homogeneous models compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ (1σ and 3σ ACE data). Then, for each point of the resulting subset, the full propagation code is run and for the three radioactive species, maximal and minimal ratios are calculated at all energies and generate an envelope. These envelopes are represented in the upper part of Fig. 7. They contain all the allowed values of the above-mentioned ratios which are "compatible with B/C" and "compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ACE data 1σ ". The same procedure is applied to the inhomogeneous models $r_{\text{hole}} = 80$ pc (this value will be favored in the combined analysis).

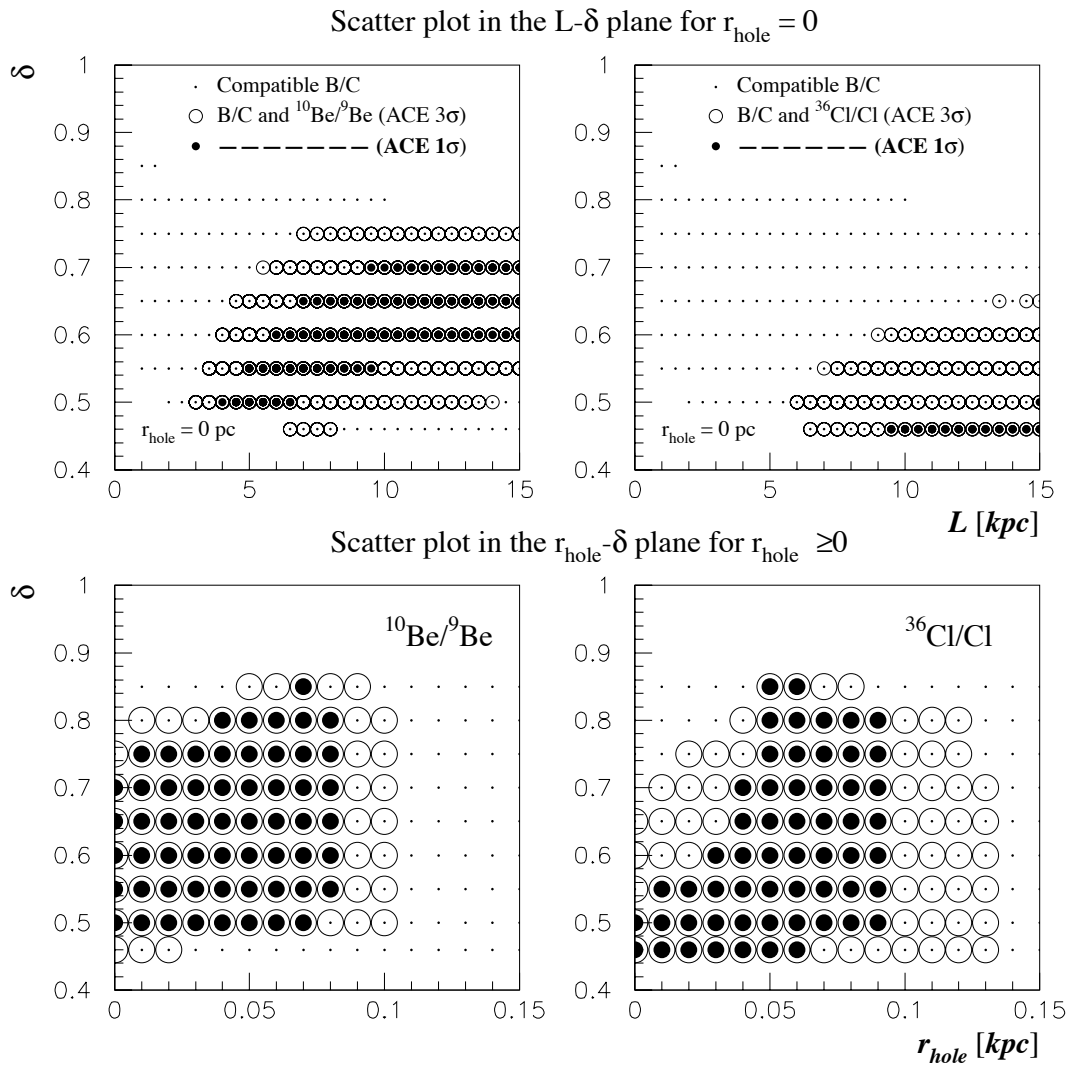


Fig. 6. Representation of the models compatible with combination of B/C (see Paper I) and various radioactive ACE data. See text and notations in the figure. Upper panels display homogeneous models ($r_{\text{hole}} = 0$) in the plane L - δ . Lower panels display inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} \geq 0$) in the plane r_{hole} - δ .

We now want to address the following questions: (i) is it possible, from the radioactive spectra, to experimentally distinguish inhomogeneous from homogeneous models, (ii) is it possible to break the degeneracy in the propagation parameters, and (iii) what would be a clear signature of the presence of the hole?

As regards the first question, the upper left panel ($^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$) clearly shows that the answer is no, as even for extreme models ($r_{\text{hole}} \sim 80$ pc), there is still an overlap between the homogeneous and inhomogeneous envelopes. Concerning question (ii), a partial answer has been given in the previous section: the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ratio is degenerate in the diffusion parameters at the ACE energy. Figure 7 shows that it is actually true for all energies. We finally turn to question (iii). From left to right panels of Fig. 7, the nuclei have smaller and smaller lifetimes, so that the influence of the hole is larger and larger. In particular, the ratio $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ is the most sensitive to r_{hole} , and at low energy, homogeneous and inhomogeneous envelopes (for $r_{\text{hole}} = 80$ pc) do not overlap. We thus expect that the combination of these ratio may break the degeneracy in r_{hole} .

We also show, in the lower part of Fig. 7, the envelopes obtained as above but with the weaker constraint that $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ is in the 3σ ACE error bars. For $r_{\text{hole}} = 80$ pc and at the ACE data energy, the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ is never larger than 0.12, which corresponds to the largest $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ obtained in the homogeneous models, decreased by the corresponding exponential factor. This is not shown in the figures, but for $r_{\text{hole}} = 50$ pc, the lower panel dotted lines would be almost superimposed on the solid lines, whereas for $r_{\text{hole}} = 100$ pc, they would only delimitate a very narrow strip. We also see that inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} = 80$ pc) are favored by the $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ data. On the other hand, all the models compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ clearly fail to reproduce the 3σ ACE $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ data.

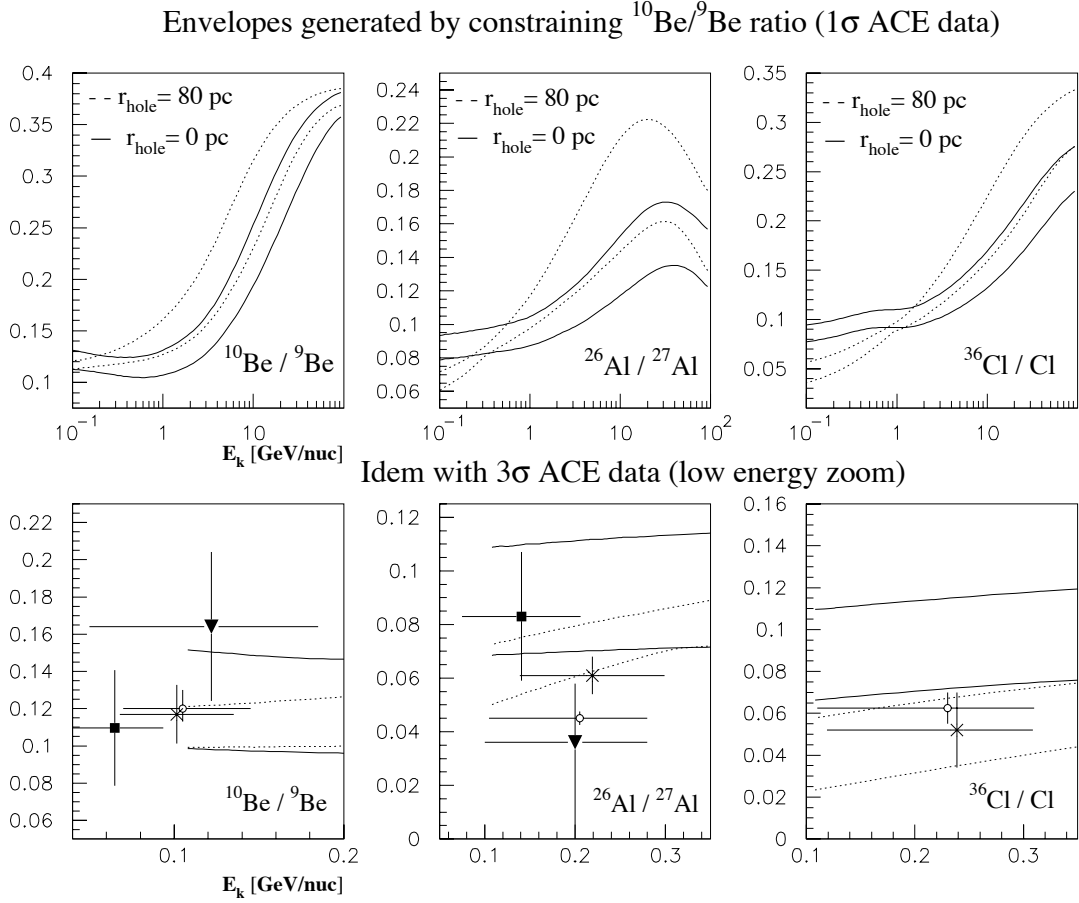


Fig. 7. Envelopes of the spectra obtained with all the models compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ACE 1σ (upper) and 3σ (lower) for the three radioactive species. Solid lines are for homogeneous models ($r_{\text{hole}} = 0$ pc) and dashed lines are for inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} = 80$ pc). Data in the lower panel are from ACE (circles), Ulysses (crosses), Voyager (filled squares) and ISEE (filled triangles, Wiedenbeck 1985).

6.2. Combined analysis of $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$

We now analyze simultaneously the two ratios $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$. From the initial set of parameters compatible with B/C, we select those giving values of $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ in the error bars of ACE (1σ and 3σ). As expected from Fig. 6, there is no homogeneous model which fulfills the above condition at 1σ (the two regions delimited by the filled circles in the left and right panels do not overlap). This can be seen in Fig. 8 which displays the models compatible with ACE at the 1σ (filled circles) and 3σ (empty circles) level. We saw in the previous section that high values of L are independently favored by the two ratios $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ for homogeneous models, and it is natural to recover this trend in the combined analysis, which points towards $L \gtrsim 6$ kpc at the 3σ level. The allowed range for the other parameters are not much changed.

As regards the influence of r_{hole} , we see that the combined analysis naturally favors hole radii $60 \text{ pc} \lesssim r_{\text{hole}} \lesssim 80 \text{ pc}$ (as seen before, values $r_{\text{hole}} \gtrsim 100 \text{ pc}$ are independently excluded at the 3σ level), which is in full agreement with LISM observations. Note that for these particular models, values $L \gtrsim 12$ kpc are excluded at the 1σ level.

6.3. Combined analysis all three radioactive: Problem with data?

The next logical step is to include the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ ratio in the analysis. We first display in Fig. 9 the values of this ratio for the models discussed in the previous section, i.e. compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE data at 3σ . We also show the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ experimental bounds from ACE and Ulysses at 3σ .

The first strong conclusion is that all these models (homogeneous and inhomogeneous) give similar $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ values at $\sim 200 \text{ MeV/nuc}$. Moreover, it is seen that these values are not compatible with ACE data, even at the 6σ level. We will come back to this point later on. As pointed out in Sect. 5.2, other experiments are not compatible with the ACE data for this particular ratio. To consider the possibility that the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ value may be higher than hinted by the ACE measurement; we repeat the previous analysis applying Ulysses data for this ratio.

In Fig. 10, we show the models compatible with the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE 3σ data, plus the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ Ulysses 3σ data (open circles) and 1σ data (filled circles). In the latter case, only inhomogeneous models with $r_{\text{hole}} \approx 100$ pc are consistent with the experimental values for the three ratios. In particular, we emphasize that homogeneous models are excluded.

However, it must be stressed that for these “good” models, the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ratios have the lowest possible value still compatible with 3σ ACE data, whereas the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ ratio has the maximal value compatible with 1σ Ulysses data, so that these ratio are only marginally consistent. In Fig. 11, we also present the envelopes obtained as in the previous section, but with the more stringent condition that the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ratios are within the 1σ ACE error bars.

We did not make the analysis with the Voyager data point instead of Ulysses because the error bars are much larger. However, we notice that the central value provided by this experiment is in better agreement with our derived $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ ratios (see Fig. 7).

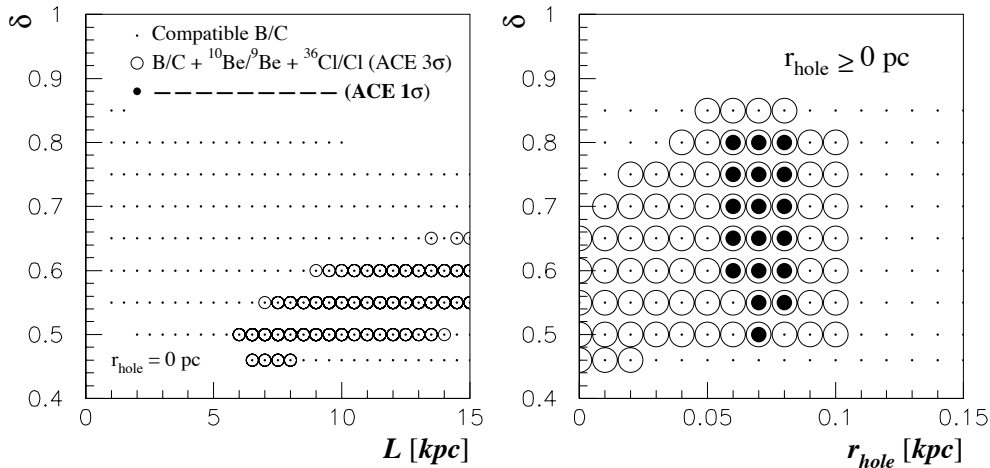


Fig. 8. Representation of the models compatible with B/C plus both $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE 3σ (open circles) and 1σ (filled circles). Left panel displays homogeneous models ($r_{\text{hole}} = 0$) in the plane $L-\delta$. Right panel displays inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} \geq 0$) in the plane $r_{\text{hole}}-\delta$.

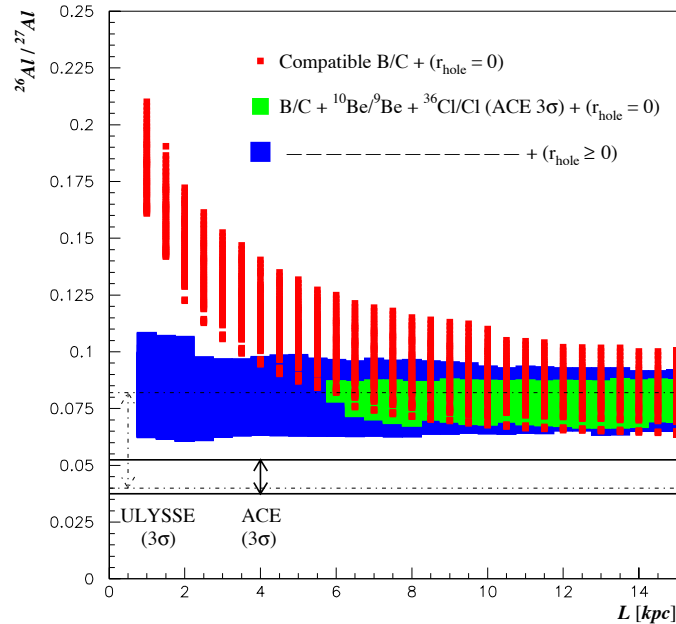


Fig. 9. Representation of the $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ ratio at the ACE energy as a function of L for the models compatible with (i) B/C in homogeneous models (small squares), (ii) B/C plus $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE 3σ (medium squares are for homogeneous models and big squares are for inhomogeneous models). Solid lines represent the 3σ error band from ACE, dashed lines represent the 3σ error band from Ulysses.

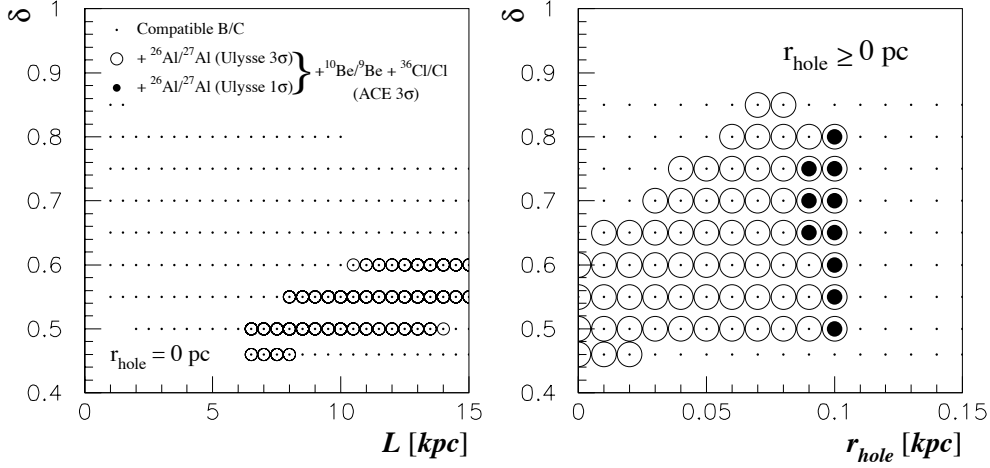


Fig. 10. Representation of the models compatible with B/C plus $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE 3σ plus $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ Ulysses 3σ (open circles) and 1σ (filled circles) data. Left panel displays homogeneous models ($r_{\text{hole}} = 0$) in the plane $L-\delta$. Right panel displays inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} \geq 0$) in the plane $r_{\text{hole}}-\delta$.

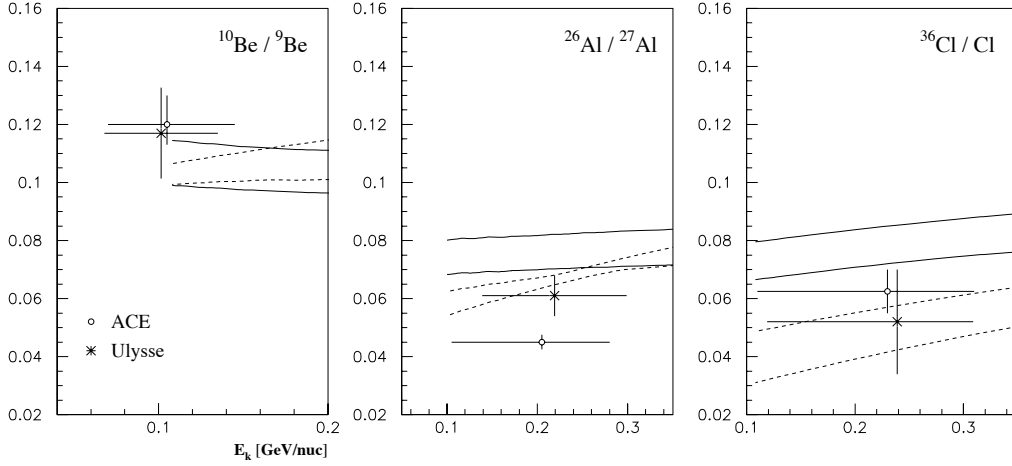


Fig. 11. Envelopes of the spectra obtained with all the models compatible with $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ ACE and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ACE 3σ plus $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ Ulysses 3σ for the three radioactive species. Solid lines are for homogeneous models ($r_{\text{hole}} = 0$) and dashed lines are for inhomogeneous models ($r_{\text{hole}} \geq 0$). Data in the lower panel are from ACE (circles), Ulysses (crosses).

7. Conclusion and discussion

We have presented the analysis of the three radioactive ratios $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$, $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ and $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ in the framework of a diffusion model, taking into account the presence of a local underdensity of radius r_{hole} . We find that the $^{10}\text{Be}/^9\text{Be}$ and $^{36}\text{Cl}/\text{Cl}$ ratios are compatible with ACE data if $r_{\text{hole}} \sim 60-80$ pc, but that no model is simultaneously compatible with the ACE data for the three ratios. However, if we consider other $^{26}\text{Al}/^{27}\text{Al}$ data (Ulysses or Voyager), some models are marginally consistent and the cases $60 \text{ pc} \lesssim r_{\text{hole}} \lesssim 100 \text{ pc}$ are preferred. These values are in agreement with independent estimations of LISM studies. The presence of this hole would also lead to an attenuation of the expected ^{14}C flux of the order of 10^{-4} . Thus, it seems a very difficult task to detect any ^{14}C in cosmic radiation, unless some local source is present. For example, radioactive nuclei could be produced in the very local fluff (with a very low density, see Sect. 3.2.1). This has been more realistically modelled by Ptuskin & Soutoul (1990) and Ptuskin et al. (1997) with a three-layer bubble. It would be straightforward to adapt our model to take into account a multi-shell contribution (as long as the symmetry is preserved). Moreover, all these models assume that the shells have the same center, which is surely wrong, but the generic behaviour in $\exp(-r_{\text{hole}}/l_{\text{rad}})$ is expected to hold even in a more complicated geometry.

We have not yet discussed solar modulation. All the data have slightly different solar modulation parameters. We used the simple force field scheme to modulate our fluxes (as in Papers I and II). We checked that even taking extreme values for the modulation parameters yields about 5% changes in calculated ratio. This does not affect the results of our analysis.

Our results point out an important feature of cosmic rays. Either there is a problem with the Al data, or there is a fundamental problem with the diffusive approach of radioactive nuclei propagation. Alternatively, there could be a problem with cross sections. Other similar studies (see for example Strong & Moskalenko 1998 and further developments) should be able to confirm our results when incorporating a hole in their model.

Acknowledgements. F.D. gratefully acknowledges a fellowship by the Istituto Nazionale di Fisica Nucleare. We also would like to thank the French Programme National de Cosmologie for its financial support.

Appendix A: Demonstration of formula (18)

In this section, we compute the probability $d\mathcal{P}$ that a radioactive nucleus detected at the center of the hole has been created by a spallation at a distance between r and $r + dr$, in the framework of the simple modelling of Sect. 4.1. It is a conditional probability, and as such it can be expressed, using Bayes theorem, by

$$d\mathcal{P} \{ \text{created at } r | \text{detected in } 0 \} = \mathcal{P} \{ \text{detected in } 0 | \text{created at } r \} \times \frac{d\mathcal{P} \{ \text{created at } r \}}{\mathcal{P} \{ \text{detected in } 0 \}} \\ \propto \mathcal{P} \{ \text{detected in } 0 | \text{created at } r \} \times d\mathcal{P} \{ \text{created at } r \}.$$

The first term is given by the expression (4)

$$\mathcal{P} \{ \text{detected in } 0 | \text{created at } r \} \propto \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{r^2}{4Kt} - \frac{t}{\gamma\tau_0} \right\} \frac{dt}{t^{3/2}}$$

and the second term is simply given by

$$d\mathcal{P} \{ \text{created at } r \} = \frac{\Theta(r - r_{\text{hole}}) 2\pi r N(r) dr}{\int 2\pi r N(r) dr} \propto \Theta(r - r_{\text{hole}}) r N(r) dr$$

where $N(r)$ is the density of parent nuclei. This gives

$$d\mathcal{P} \{ \text{created at } r | \text{detected in } 0 \} \propto \Theta(r - r_{\text{hole}}) r N(r) dr \times \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{r^2}{4Kt} - \frac{t}{\gamma\tau_0} \right\} \frac{dt}{t^{3/2}}.$$

Defining $x = r/\sqrt{4Kt}$, the integral is proportional to

$$\int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{r^2}{4K\gamma\tau_0 x^2} - x^2 \right\} dx.$$

The value of this integral is given by (5) which gives

$$d\mathcal{P} \{ \text{created at } r | \text{detected in } 0 \} \propto \Theta(r - r_{\text{hole}}) N(r) e^{-r/l_{\text{rad}}} dr. \quad (\text{A.1})$$

The proportionality coefficient of this relation would easily be obtained by imposing that $\int_{r=0}^\infty d\mathcal{P} = 1$.

References

- Adams, J. H., Silberberg, R., & Tsao, C. H. 1985, ApJS, 114, 365
 Ahlen, S. P., Greene, N. R., Loomba, D., et al. 2000, ApJ, 534, 757
 Audi, G., Bersillon, O., Blachot, J., & Wapstra, A. H. 1997, Nucl. Phys. A, 624, 1
 Binns, W. R., et al. 1999, ICRC 26 Salt Lake City, OG-1.1.06
 Breitschwerdt, D., Freyberg, M. J., & Egger, R. 2000, A&A, 361, 303
 Cassé, M. 1973, ApJ, 180, 623
 Connell, J. J. 1998, ApJ, 501, L59
 Connell, J. J., DuVernois, M. A., & Simpson, J. A. 1998, ApJ, 501, L97
 Cox, D. P. 1997, IAU Colloq. 166, Germany, ed. D. Breitschwerdt, M. J. Freyberg, & J. Truemper, 121
 Cox, D. P., & Reynolds, R. J. 1987, ARA&A, 25, 303
 Donato, F., Maurin, D., Salati, P., et al. 2002, ApJ, 563, 1
 Freier, P. S., Young, J. S., & Waddington, C. J. 1980, ApJ, 240, L53
 Fruscione, A., Hawkins, I., Jelinsky, P., & Wiercigrosh, A. 1994, ApJS, 94, 127
 Garcia-Munoz, M., Mason, G. M., & Simpson, J. A. 1977, ApJ, 217, 859
 Ginzburg, V. L., Khazan, Ya. M., & Ptuskin, V. S. 1980, Ap&SS, 68, 295
 Goldman, D. T. 1982, American Institute of Physics Handbook, third edition
 Hagen, F. A., Fisher, A. J., & Ormes, J. F. 1977, ApJ, 212, 262

- Leske, R. A. 1993, *ApJ*, 405, 567
- Letaw, J. R., Silberberg, R., & Tsao, C. H. 1984, *ApJS*, 56, 369
- Linsky, J. L., Redfield, S., Wood, B. E., & Piskunov, N. 2000, *ApJ*, 528, 756
- Lukasiak, A., McDonald, F. B., & Webber, W. R. 1994, *ApJ*, 430, L69
- Lukasiak, A., McDonald, F. B., & Webber, W. R. 1999, ICRC 26 Salt Lake City, OG-1.1.12
- Lund Fisker, J., Martínez-Pinedo, G., & Langanke, K. 1999, *EPJA*, 5, 269
- Martínez-Pinedo, G., & Vogel, P. 1998, *Phys. Rev. Lett.*, 81, 281
- Maurin, D., Donato, F., Taillet, R., & Salati, P. 2001, *ApJ*, 555, 585 (Paper I)
- McKee, C. F. 1998, IAU Colloq. 166, Germany, ed. D. Breitschwerdt, M. J. Freyberg, & J. Truemper, 565
- Morfill, G. E., & Freyberg, M. J., IAU Colloq. 166, Germany, ed. D. Breitschwerdt, M. J. Freyberg, & J. Truemper, 177
- Osborne, J. L., & Ptuskin, V. S. 1987, *Sov. Astron. Lett.*, 13, 980
- Prishchep, V. L., & Ptuskin, V. S. 1975, *Ap&SS*, 32, 265
- Ptuskin, V. S., & Soutoul, A. 1990, *A&A*, 237, 445
- Ptuskin, V. S., & Soutoul, A. 1998, *A&A*, 337, 859
- Ptuskin, V. S., Jones, F. C., Ormes, J. F., & Soutoul, A. 1997, *Adv. Space Res.*, 19, 787
- Reames, D. V. 1970, *ApJ*, 162, 837
- Sfeir, D. M., Lallement, R., Crifo, F., & Welsh, B. Y. 1999, *A&A*, 346, 785
- Simpson, J. A., & Connell, J. J. 1998, *ApJ*, 497, L88
- Simpson, J. A., & Garcia-Munoz, M. 1987, *Space Sci. Rev.*, 46, 205
- Smith, R. K., & Cox, D. P. 2001, *ApJS*, 134, 283
- Strong, A. W., & Moskalenko, I. V. 1998, *ApJ*, 509, 212
- Tripathi, R. K., Cucinotta, F. A., & Wilson, J. W. 1997a, NASA Technical Paper, 3621
- Tripathi, R. K., Cucinotta, F. A., & Wilson, J. W. 1997b, NASA Technical Paper, 3656
- Tripathi, R. K., Cucinotta, F. A., & Wilson, J. W. 1999, NASA Technical Paper, 209726
- Webber, W. R., Lezniak, J. A., Kish, J. C., & Simpson, G. A. 1977, *Astrophys. Lett.*, 18, 125
- Webber, W. R., Kish, J. C., & Schrier, D. A. 1990, *Phys. Rev. C*, 41, 566
- Webber, W. R., Lee, M. A., & Gupta, M. 1992, *ApJ*, 390, 96
- Webber, W. R., Soutoul, A., Kish, J. C., et al. 1998, *Phys. Rev. C*, 58 3539
- Welsh, B. Y., Craig, N., Vedder, P. W., & Vallerga, J. V. 1994, *ApJ*, 437, 638
- Wiedenbeck, M. E. 1985, ICRC, 19 2, 84

REF

[15]

*Spatial origin of Galactic cosmic rays in diffusion models
I. Standard sources in the Galactic disk*

R. Taillet & D. Maurin

Astronomy and Astrophysics **402** (2003) 971

Spatial origin of Galactic cosmic rays in diffusion models

I. Standard sources in the Galactic disk[★]

R. Taillet^{1,2} and D. Maurin^{1,3}

¹ Laboratoire de Physique Théorique LAPTH, 74941 Annecy-le-Vieux, France

² Université de Savoie, 73011 Chambéry, France

³ Institut d’Astrophysique de Paris, 98bis Bld Arago, 75014 Paris, France

Received 6 December 2002 / Accepted 25 February 2003

Abstract. The propagation of Galactic cosmic ray nuclei having energies between 100 MeV/nuc and several PeV/nuc is strongly believed to be of diffusive nature. The particles emitted by a source located in the disk do not pervade the whole Galaxy, but are rather confined to a smaller region whose spatial extension is related to the height of the diffusive halo, the Galactic wind and the spallation rate. Following the pioneering work of Jones (1978), this paper presents a general study on the *spatial* origin of cosmic rays, with a particular attention to the role of spallations and Galactic wind. This question is different, and to a certain extent disconnected, from that of the *origin* of cosmic rays. We find the regions of the disk from which a given fraction of cosmic rays detected in the solar neighborhood were emitted (*f*-surfaces). After a general study, we apply the results to a realistic source distribution, with the propagation parameters obtained in our previous systematic analysis of the observed secondary-to-primary ratios (Maurin et al. 2002a). The shape and size of these *f*-surfaces depend on the species as well as on the values of the propagation parameters. For some of the models preferred by our previous analysis (i.e. large diffusion slope δ), these *f*-surfaces are small and in some extreme cases only a fraction of a percent of the whole Galactic sources actually contribute to the solar neighborhood cosmic ray flux. Moreover, a very small number of sources may be responsible for more than 15% of the flux detected in the solar neighborhood. This may point towards the necessity to go beyond the approximations of both homogeneity and stationarity. Finally, the observed primary composition is dominated by sources within a few kpc.

Key words. ISM: cosmic rays

1. Introduction

The propagation of charged cosmic ray nuclei, in the energy range going from a few 100 MeV/nuc and a few PeV/nuc, is strongly affected by the Galactic magnetic field. It is a diffusive process, so that the cosmic rays emitted by a single source spread out in time, pervade the whole Galaxy, and can escape the Galaxy when reaching its boundaries. Those coming from a source located far from the Sun have a larger probability of escaping than reaching the solar neighborhood. It is the opposite for nearby sources, so that the cosmic ray fluxes in the solar neighborhood are more sensitive to the properties of the local sources (as opposed to the remote sources). Other effects like spallations and Galactic wind further limit the distance cosmic rays travel before being detected. Some consequences of the Galactic wind were studied in Jones (1978) where convective escape was compared to escape through the top and bottom boundaries of the Galaxy.

The goal of this paper is to go one step beyond by providing a general study on the *spatial* origin of cosmic rays, i.e. to answer the question “from which region of the Galaxy were emitted the cosmic rays detected in the solar neighborhood?”. This question is different, and to a certain extent disconnected, from that of the *origin* of cosmic rays (“What are the astrophysical objects which are responsible for the acceleration of cosmic rays?”) which is still much debated. We believe that it is nevertheless an interesting question, for several reasons. First, we find that the answer may cast some doubt on the validity of the stationary model, upon which most studies on cosmic rays are based. Second, it gives some clues about the spatial range beyond which the cosmic ray studies are blind to the sources. Finally, this study may be of interest to optimize the propagation codes based on Monte-Carlo methods, by focusing the numerical effort on the sources that really contribute to the detected flux.

The reader who does not want to go through the pedagogical progression can go directly from the general presentation of the method in Sect. 2 to its application in realistic cases in Sect. 7. For the others, the effect of escape is studied in Sect. 3 and that of spallations and Galactic wind is studied in Sect. 5.

Send offprint requests to: R. Taillet,
e-mail: taillet@lapp.in2p3.fr

[★] Appendices A–C are only available in electronic form at <http://www.edpsciences.org>

Then, Sect. 6 studies the effect of a realistic source distribution. Finally, the fully realistic case is considered in Sect. 7. The results and the perspectives are discussed in the last section. For convenience, we will use the word f -surfaces to describe the surfaces in the thin disk within which the sources form the fraction f of cosmic rays detected at the observer location.

2. Description of the method

A stationary point source emits particles that diffuse in a given volume. At the boundaries of this volume, the particles are free to escape and the density drops to zero. After a sufficiently long time, the stationary regime is eventually reached and the density profile is established inside the diffusive volume. If several sources are present (or even a continuous distribution of sources), their contributions add linearly at each point.

The question we wish to answer is the following: a cosmic ray being detected at the position \mathbf{r}_o of an observer (in practice, this will be the position of the Sun, and we refer to this position as the *solar neighborhood*), what is the probability density

$$\frac{d\mathcal{P}\{\text{emitted} : \mathbf{r}_s, \mathbf{r}_s + d\mathbf{r}_s | \text{observed} : \mathbf{r}_o\}}{d\mathbf{r}_s} \equiv \frac{d\mathcal{P}\{\mathbf{r}_s | \mathbf{r}_o\}}{d\mathbf{r}_s} \quad (1)$$

that this cosmic ray was emitted from a source located at the position \mathbf{r}_s ? Such a question falls among classical problems of statistics. A rigorous theoretical frame is provided by the Bayes approach that summarizes the proper use of conditional probabilities. A cruder but sufficient (and equivalent) treatment is given by the frequency interpretation. The probability written above is simply given by

$$\frac{d\mathcal{P}\{\mathbf{r}_s | \mathbf{r}_o\}}{d\mathbf{r}_s} = \frac{dN[\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_o] / d\mathbf{r}_s}{N[\rightarrow \mathbf{r}_o]}, \quad (2)$$

where $N[\rightarrow \mathbf{r}_o]$ is the number of paths reaching \mathbf{r}_o and $dN[\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_o] / d\mathbf{r}_s$ is the density of paths going from \mathbf{r}_s to \mathbf{r}_o . We finally notice that the latter number determines the density of cosmic rays that reach the position \mathbf{r}_o , when a source is placed at \mathbf{r}_s . We can thus write

$$\frac{d\mathcal{P}\{\mathbf{r}_s | \mathbf{r}_o\}}{d\mathbf{r}_s} \propto \frac{dN[\mathbf{r}_s \rightarrow \mathbf{r}_o]}{d\mathbf{r}_s} \equiv N_s(\mathbf{r}_o), \quad (3)$$

where the density $N_s(\mathbf{r}_o)$ is the solution of the propagation equation for a point source located at \mathbf{r}_s . The normalization factor in this relation is obtained by imposing that $d\mathcal{P}/d\mathbf{r}_s$ actually is a probability density, i.e. is normalized to unity. We refer to the contours on which the probability density is constant as *isodensity contours*.

If the sources are distributed according to $w(\mathbf{r}_s)$, the probability that a cosmic ray detected at \mathbf{r}_o was emitted from a surface \mathcal{S} is given by

$$\mathcal{P}\{\mathcal{S} | \mathbf{r}_o\} = \frac{\int_{\mathcal{S}} w(\mathbf{r}_s) N_s(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_s}{\int_{\mathcal{S}_{\text{tot}}} w(\mathbf{r}_s) N_s(\mathbf{r}_o) d\mathbf{r}_s}. \quad (4)$$

This probability contains all the physical information about the spatial origin of cosmic rays. We define the f -surfaces, inside which the sources contribute to the fraction f of the detected flux, by the relation $\mathcal{P}\{\mathcal{S} | \mathbf{r}_o\} = f$. Actually, even for a given

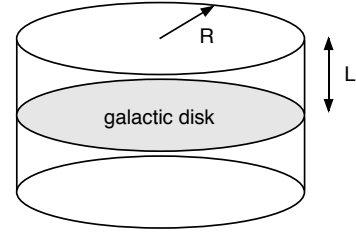


Fig.1. Geometry of the diffusive volume.

value of f , there are many different surfaces, delimited by different closed contours, fulfilling this condition. We focus on the smallest of these surfaces, which is precisely delimited by an isodensity contour. We also use the term r_{lim} -probability for the quantity $\mathcal{P}\{r_s < r_{\text{lim}} | \mathbf{r}_o\}$.

3. The escape through the diffusive volume boundaries

The region in which diffusion occurs is limited by surfaces (hereafter the *boundaries*) beyond which diffusion becomes inefficient at trapping the particles, so that they can freely escape at a velocity close to c . The density outside the diffusive volume is very small, and it is very reasonable to suppose that the boundaries are *absorbers*, i.e. they impose a null density ($N = 0$).

It is well-known that the shape and location of the boundaries play a crucial role for diffusive propagation. This section shows that the cosmic rays emitted from standard sources in the disk are not sensitive to the radial extension of the Galaxy, but only to its top and bottom edge. To this aim, it is sufficient to concentrate on pure diffusion and to neglect spallations, the Galactic wind and reacceleration. Indeed this is a conservative case as these effects can only make the diffusion process even *less* sensitive to the presence of the boundaries (see below). Moreover, we consider the case of a homogeneous source distribution located in the disk $w(\mathbf{r}_s) \propto \delta(z)$, which also leads to a conservative result if compared to a realistic radial distribution of sources.

We first consider the pure diffusion equation with a Dirac source term

$$-K\Delta N(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s). \quad (5)$$

In unbounded space, the solution is given by $N_s(\mathbf{r}_o) = 1/4\pi K \|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s\|$. The influence of the boundaries is estimated by solving this equation in three situations: first we consider only a side boundary, then only a top plus bottom boundary, and finally all the boundaries.

3.1. Boundaries influence

Our Galaxy can be represented as a cylindrical box with radial extension R and height L (see Appendix A for further details). The probability density $d\mathcal{P}_{\text{cyl}}(\mathbf{r}_s | \mathbf{r}_o) / d\mathbf{r}_s$ can be computed for arbitrary source and observer positions \mathbf{r}_s and \mathbf{r}_o , using a Fourier-Bessel decomposition of the density. In our case, the observer is located near the Sun, at a Galactocentric distance

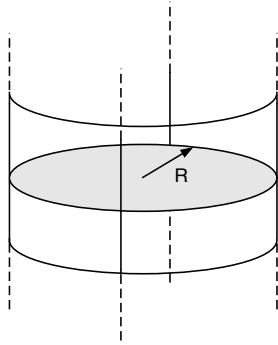


Fig. 2. Geometry of the diffusive volume in the limit $L \rightarrow \infty$.

$R_\odot \sim 8.5$ kpc. Unless the diffusive halo height is very large, the top and bottom boundaries located at $z = \pm L$ are nearer to us than the side boundary located at $R = 20$ kpc. As a result, we expect the effect of the side boundary to be smaller. The first simplified situation we consider is that of an observer located at the center of the Galaxy. (In the case of an infinite disk, i.e. $R \rightarrow \infty$, this amounts to a mere redefinition of the origin of the disk).

With $\mathbf{r}_o = \mathbf{0}$, the solution for a point source in this particular geometry is given in Appendix A. The probability density that a particle reaching the observer was emitted from a point located at a distance r_s from the center is thus given by (with $\rho_s \equiv r_s/R$)

$$d\mathcal{P}_{\text{cyl}}(r_s|O) = \frac{d^2 r_s}{2\pi R^2} \times \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\zeta_i \rho_s)}{\zeta_i J_1^2(\zeta_i)} \times \tanh(\zeta_i L/R) \right\} \times \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tanh(\zeta_i L/R)}{\zeta_i^2 J_1(\zeta_i)} \right\}^{-1}, \quad (6)$$

normalization being obtained by imposing $\int_0^R d\mathcal{P}(r_s|O) = 1$. The r_{lim} -probability is given by

$$\mathcal{P}_{\text{cyl}}(r_s < r_{\text{lim}}|O) = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\zeta_i r_{\text{lim}}/R)}{\zeta_i^2 J_1^2(\zeta_i)} \times \tanh(\zeta_i L/R) \right\} \times \frac{r_{\text{lim}}}{R} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tanh(\zeta_i L/R)}{\zeta_i^2 J_1(\zeta_i)} \right\}^{-1}. \quad (7)$$

This probability is independent of the value of the diffusion coefficient K .

3.1.1. Side boundary

The escape from the side boundary (located at $r = R$) is disentangled from the escape from the $z = \pm L$ boundary by first considering the limit $L \rightarrow \infty$. For the sake of simplicity, we will, as above, only study the effect of this boundary on observations performed at the center of the Galaxy. In the limit $L \rightarrow \infty$, we have $\coth(\zeta_i L/R) \approx 1$ in expression (6). This gives for the r_{lim} -probability,

$$\mathcal{P}_R(r_s < r_{\text{lim}}|O) = \frac{r_{\text{lim}}}{R} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1(\zeta_i r_{\text{lim}}/R)}{\zeta_i^2 J_1^2(\zeta_i)}}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\zeta_i^2 J_1(\zeta_i)}}.$$

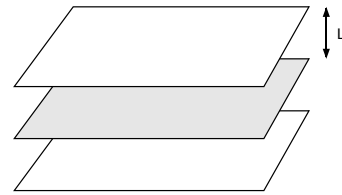


Fig. 3. Geometry of the diffusive volume in the limit $R \rightarrow \infty$.

3.1.2. Top and bottom boundaries

The influence of the $z = \pm L$ boundaries, in the case of an infinite disk ($R \rightarrow \infty$) is now considered. In this limit, the sum over Bessel functions can be replaced by an integral and we obtain (see Appendix B.3)

$$d\mathcal{P}_L(r_s|O) \propto \frac{d^2 r_s}{r_s} \int_0^{\infty} J_0(x) \tanh\left(\frac{xL}{r_s}\right) dx, \quad (8)$$

which allows to compute the r_{lim} -probability $\mathcal{P}_L(r_s < r_{\text{lim}}|O)$ as before, which is a function of r_{lim}/L only. These integrals are somewhat intricate to compute numerically, due to the very slow convergence. In this particular case, the accuracy of the numerical calculation can be checked for $r \gg L$, as a detailed study of the function (8) shows that in this limit

$$N_{(r_s,0)}^L(O) \approx \frac{1}{4\pi K r_s} \times 2 \sqrt{\frac{r_s}{L}} e^{-\pi r_s/2L}. \quad (9)$$

It is also noticeable that the quantity

$$f_{\text{esc}}(r_s) \equiv 1 - \frac{N^L}{N^{L=\infty}} = \int_0^{\infty} J_0(x) \left\{ 1 - \tanh\left(\frac{xL}{r_s}\right) \right\} dx$$

gives the fraction of cosmic rays emitted from a distance r_s that has escaped the diffusive halo before reaching us.

3.2. Summary: The effect of boundaries on primary species

Figure 4 shows the probability density computed above as a function of r_s for unbounded space, for the cylindrical geometry with several halo sizes L , i.e. Eq. (7), and for the two limiting cases corresponding to $L \rightarrow \infty$ or $R \rightarrow \infty$. We also show, in Table 1, the radii of the f -surfaces, in the two cases $R = 20$ kpc and $R \rightarrow \infty$. It can be noticed that even if the source distribution is infinite in extent, the finite size of the halo limits the quantity of cosmic rays that reach a given point. The mean distance from which the cosmic rays reach the center is given by $\langle r_s \rangle = 1.4L$. This effect dominates over the leakage through the side boundary $r_s = R$, and it will be even more negligible in realistic situations, as (i) the source density is small near the edge of the disk, (ii) when the spallations and Galactic wind are considered, most cosmic rays are destroyed or blown out of the disk before they have a chance to reach this side boundary.

An important consequence is that as long as the observer and the sources are not too close to the side boundary, the density only depends on the relative distance to the source in the disk, so that it may be assumed, for numerical convenience, that the observer is either at the center of a finite disk, or in an infinite disk. In all the paper, i.e. for standard sources in the

Table 1. This table indicates the radius r_{lim} inside which a given fraction $f(r_{\text{lim}}) \equiv \mathcal{P}(r_s < r_{\text{lim}}|O)$ of cosmic rays reaching the center were emitted from, for several L and in the case of the infinite disk and $R = 20$ kpc.

	$f(r_{\text{lim}}) = 50\%$		$f(r_{\text{lim}}) = 90\%$		$f(r_{\text{lim}}) = 99\%$	
	$R = \infty$	$R = 20$ kpc	$R = \infty$	$R = 20$ kpc	$R = \infty$	$R = 20$ kpc
$L = \infty$	–	6.2 kpc	–	14.1 kpc	–	18.2 kpc
$L = 20$ kpc	12.6 kpc	6.1 kpc	39 kpc	14 kpc	68 kpc	18.2 kpc
$L = 5$ kpc	3.1 kpc	2.95 kpc	9.5 kpc	8.6 kpc	17 kpc	14.6 kpc
$L = 1$ kpc	0.63 kpc	0.63 kpc	1.9 kpc	1.9 kpc	3.4 kpc	3.4 kpc

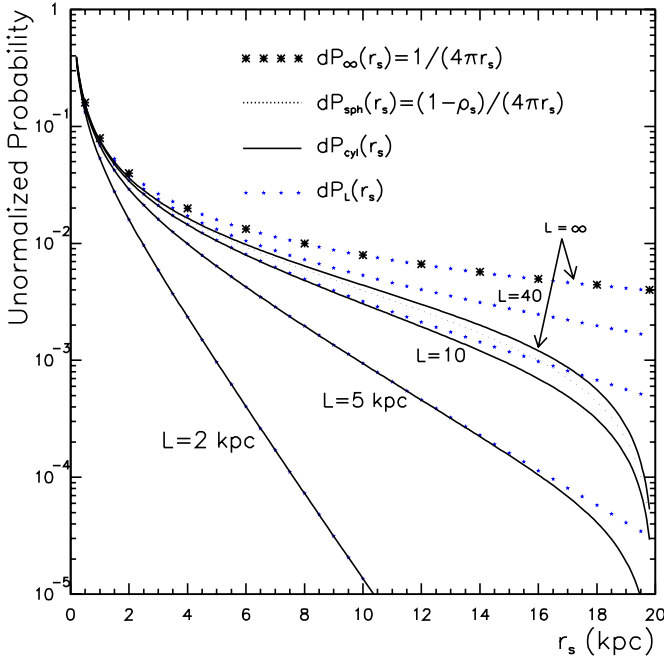


Fig. 4. Cosmic ray probability density as a function of r_s (distance of the $\delta(r_s)$ source in the disk), for several values of L and for a disk of radius $R = 20$ kpc. Big stars are for unbounded model, dotted line is for a spherical boundary at radius R , small stars are for top and bottom boundaries, and solid lines are for cylindrical boundaries.

disk, we will consider the limit $R \rightarrow \infty$, i.e. we use the integral representation described in Appendix B.3.

4. Secondary and radioactive species

4.1. Progenitors of stable secondaries

As can be seen in Appendix A.3, the secondary distribution from point-like primary sources is related very simply to the primary distribution itself. One could find strange to speak about secondaries as we have not, for the moment, included spallations in the model. The right picture is the following: a primary emitted at r_s propagates and from time to time crosses the disk (mostly filled with hydrogen, density n_{ISM}). During this crossing, there is a probability $n_{\text{ISM}} \cdot v \cdot \sigma_{\text{prim} \rightarrow \text{sec}}$ to create a secondary, that in turn propagates in the diffusive volume until it reaches (or not) the experimental setup. This will be taken into account properly in the next section. However, in order to have a compact expression, a crude estimation can be obtained by neglecting the influence of spallations on the primary and

secondary component. This is obtained if one discards Γ_{inel} in the terms A_i^{prim} and A_i^{sec} of Eq. (A.6). The net result will be an overestimation of the distance the secondaries come from since their destruction is discarded two times; once under their primeval primary form and once in their secondary form.

We find, in the case $R \rightarrow \infty$ (see Appendix B.3), and for a homogeneous distribution of sources,

$$\frac{d\mathcal{P}_{\text{sec}}(r_s|R_{\odot})}{d^2r_s} \propto \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{x} \times \tanh^2\left(\frac{xL}{r_s}\right) dx.$$

The resulting integrated probabilities are shown in Table 2. The source of the primary that will give the secondaries observed at a given point is located farther away than the sources of the primary we detect (compare Tables 2 and 1). This may be of importance if for instance the source composition or the source intensity varies with position: in the ubiquitous secondary-to-primary ratio, the numerator is sensitive to sources located on a greater range than the denominator. Moreover, these secondaries set the size of an effective “local” zone outside of which the particles reaching the solar neighborhood have never been. The local observations tell nothing about the propagation conditions outside of this zone. One could object that this conclusion is mainly based on the f -surfaces which refer to the sources contributing to observed CR, but that the cosmic rays reaching us from these sources actually sample (via random walk) a much larger volume. This is actually not the case, as a particle wandering too far has a very small probability to ever come back to us. This point can be made more quantitative, as a simple reasoning shows that the probability $\mathcal{P}[ACB]$ that a particle emitted in A and reaching B has passed through C is given by $\mathcal{P}[AC]\mathcal{P}[CB]$, which is closely related to $N_A(\mathbf{r}_C) \times N_B(\mathbf{r}_C)$. This later quantity is small as soon as C is too far from A or B .

4.2. Radioactive secondaries

In the case of an unstable species with a lifetime τ , formula (A.5) can be written as

$$d\mathcal{P}_{\text{rad}}\{r_s|O\} \propto d\rho_s \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_0(\zeta_i \rho_s)}{\sqrt{R^2 \Gamma_{\text{rad}}/K + \zeta_i^2} J_1^2(\zeta_i)}, \quad (10)$$

where $\Gamma_{\text{rad}} = \tau^{-1} = \gamma^{-1} \tau_0^{-1}$. This expression can be transformed using the identity (Lebedev 1972)

$$\frac{1}{\sqrt{\zeta_i^2 + a^2}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-a\rho}}{\rho} \rho J_0(\zeta_i \rho) d\rho \approx \int_0^1 \frac{e^{-a\rho}}{\rho} \rho J_0(\zeta_i \rho) d\rho.$$

Table 2. This table indicates the radius inside which a given fraction $f(r_{\text{lim}})$ of secondary cosmic rays reaching the center were emitted from, for several L and in the case of a disk of radius $R = 20$ kpc. The last line shows that for small L , the effect of the side boundary is completely negligible.

	$f(r_{\text{lim}}) = 50\%$		$f(r_{\text{lim}}) = 90\%$		$f(r_{\text{lim}}) = 99\%$	
	$R = \infty$	$R = 20$ kpc	$R = \infty$	$R = 20$ kpc	$R = \infty$	$R = 20$ kpc
$L = \infty$	–	8.6 kpc	–	15.3 kpc	–	18.5 kpc
$L = 5$ kpc	5.5 kpc	5.3 kpc	12.5 kpc	12 kpc	25 kpc	17.2 kpc
$L = 1$ kpc	1.1 kpc	1.1 kpc	2.5 kpc	2.5 kpc	4.4 kpc	4.4 kpc

The approximation in the last step is valid if the exponential term decreases with ρ fast enough (i.e. α is large so that the upper limit can be set to 1 in the integral). We then recognize in (10) the Fourier-Bessel transform of $\exp(-\alpha\rho)/\rho$, so that finally the normalized probability reads

$$d\mathcal{P}_{\text{rad}}\{r_s|O\} = \frac{\exp(-r_s/l_{\text{rad}})}{2\pi r_s l_{\text{rad}}} d^2 r_s, \quad (11)$$

where the following typical length has been introduced

$$l_{\text{rad}} = \sqrt{\frac{K}{\Gamma_{\text{rad}}}} = 0.17 \text{ kpc} \times \sqrt{\frac{K}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}} \sqrt{\frac{\tau}{1 \text{ Myr}}}. \quad (12)$$

Indeed, this result can be derived much more straightforwardly starting from the stationary equation $-K\Delta_r N(r) + \Gamma_{\text{rad}} N(r) = 0$ (with a source at the origin) in unbounded space. This is also in full agreement with the expression given in Appendix B (see also Sect. 4.1) of Donato et al. (2002), where we found the same expression starting from the propagator of the non-stationary diffusion equation in unbounded space.

To sum up, Eq. (11) is valid as long as $l_{\text{rad}} \ll R$ and $l_{\text{rad}} \ll L$: the propagation of the unstable species can be then considered as *local*, with a typical scale l_{rad} . This is no longer the case if the lifetime $\tau = \gamma\tau_0$ is large, which is the case at high energy because of the relativistic factor γ , even if the proper lifetime τ_0 is short. The r_{lim} -probability is straightforwardly derived. As on these typical scales, the source distribution can safely taken to be constant, the distance r_{lim} is expressed as

$$r_{\text{lim}} = -l_{\text{rad}} \times \ln(1 - f). \quad (13)$$

It means that the sources that contribute to the fraction $f = (50\text{--}90\text{--}99)\%$ of the radioactive species measured flux are located inside the disk of radius $r_{\text{lim}} = (0.7\text{--}2.3\text{--}4.6) \times l_{\text{rad}}$. The effect of a local underdensity around the Sun is discussed later.

4.3. Electrons and positrons

Cosmic ray sources also emit electrons and positrons. In contrast with the nuclei, these particles are light, so that they are subject to much stronger energy losses, due to synchrotron radiation and inverse Compton. This results in an effective lifetime given by (e.g. Aharonian et al. 1995) $\tau_{\text{loss}} \sim 300 \text{ Myr} \times (1 \text{ GeV}/E)$. The results given in the previous section on radioactive species can be applied to this case, with a scale length

$$r_{\text{loss}} \sim 1 \text{ kpc} \times \sqrt{\frac{1 \text{ GeV}}{E}} \sqrt{\frac{K}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}}.$$

Formulae (11) and (13) can be used with $l_{\text{rad}} \leftrightarrow r_{\text{loss}}$. This effect is discussed by Aharonian et al. (1995) to show that a nearby source may be necessary to explain the high energy electron flux observed on the solar neighborhood.

4.4. Summary: Pure diffusive regime, an upper limit

The important conclusions at this point are that i) most of the stable primary cosmic rays that reach the solar neighborhood were emitted from disk sources located within a distance of the order of L , such that the $R = 20$ kpc boundary can reasonably be discarded ii) the secondary species composition is determined by sources located farther away than those determining the primary composition; iii) radioactive species may come from very close if their lifetime is so short that $\sqrt{K\gamma\tau_0} < L$, high energy electrons and positrons definitely do.

These conclusions are expected to be stronger when spallations, Galactic wind and a realistic source distribution are taken into account. All these effects will limit even more the range that the particles can travel before reaching the solar neighborhood.

5. The effects of spallation and convection

5.1. Pure convection

The diffusion of cosmic rays may be disturbed by the presence of a convective wind of magnitude V_c , directed outwards from the disk. For numerical convenience, a constant wind has been considered, although other possibilities (especially a linear dependence) are probably more justified on theoretical grounds (see discussion in Maurin et al. 2002a). The effect is to blow the particles away from the disk, so that those detected in the solar neighborhood come from closer sources (compared to the no-wind case). With an infinite halo, the probability density in the disk is given by

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{P}_{L \rightarrow \infty}^{\text{wind}}\{r_s|0\}}{d^2 r_s} &\propto \int_0^\infty \frac{k J_0(kr_s) dk}{V_c + K \sqrt{V_c^2/K^2 + 4k^2}} \\ &\propto \frac{1}{r_s} \int_0^\infty \frac{x J_0(x) dx}{r_s/r_w + \sqrt{(r_s/r_w)^2 + x^2}}, \end{aligned} \quad (14)$$

where the characteristic radius $r_w \equiv 2K/V_c$ has been defined. The expression in Eq. (14) is a function of r_s/r_w only. The deviation from a pure $1/r_s$ law, as well as deviations due to escape,

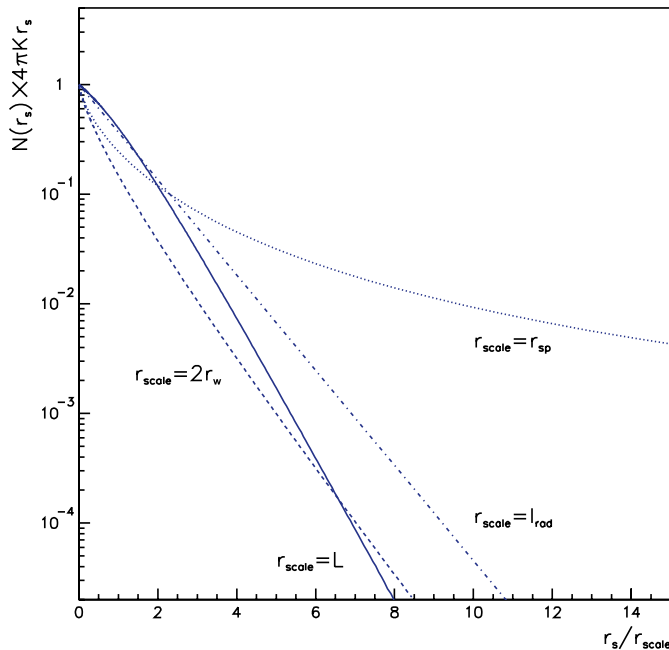


Fig. 5. Deviation from the pure $1/r_s$ density profile, $N(r_s)/(1/4\pi K r_s)$, due to the various effects studied here: escape from the $z = \pm L$ boundaries, spallations and Galactic wind. In this latter case, the choice $r_{\text{scale}} = 2r_w$ has been made to show the similar behavior at large r_s . The case of a radioactive species has also been shown. It should be noticed, however, that in most interesting cases, the scale length l_{rad} is much smaller than the others, so that in this case the propagation is dominated by radioactive decay and spallations and Galactic wind can be safely discarded.

radioactive decay and spallation (see next section), is shown in Fig. 5. The r_{lim} -probability is given by

$$\mathcal{P}_{L \rightarrow \infty}^{\text{wind}}(< r_{\text{lim}}) = \int_0^{\infty} \frac{J_0(x)}{4x} \times \left\{ \frac{r_{\text{lim}}}{r_w} \sqrt{\frac{r_{\text{lim}}^2}{r_w^2} + x^2} - \frac{r_{\text{lim}}^2}{r_w^2} + x^2 \ln \left[\frac{r_{\text{lim}}/r_w + \sqrt{r_{\text{lim}}^2/r_w^2 + x^2}}{x} \right] \right\} dx. \quad (15)$$

Some values are indicated in Table 4 and plotted in Fig. 6.

It is interesting to note that the effect of $2r_w$ is similar (though not rigorously identical) to the effect of L (see Fig. 5). As a matter of fact, this was noticed by Jones (1978) who studied the propagation properties in a dynamical halo and provided a very simple picture (along with a rigorous derivation) of the effect of the wind. Consider a particle initially located at a distance z from the disk. It takes a time $t_{\text{diff}} \approx z^2/K$ to diffuse back in the disk. In the meantime, convection sweeps the particle in a distance $z_w \equiv V_c t_{\text{diff}} \approx V_c z^2/K$. Both processes are in competition and the particle will not reach the disk if $z_w > z$. This defines an effective halo size $L^* \approx K/V_c$. This is our parameter r_w up to a factor 2.

5.2. Pure spallation

The Galactic disk contains interstellar gas mostly made of hydrogen. When cosmic rays cross the disk, they can interact with

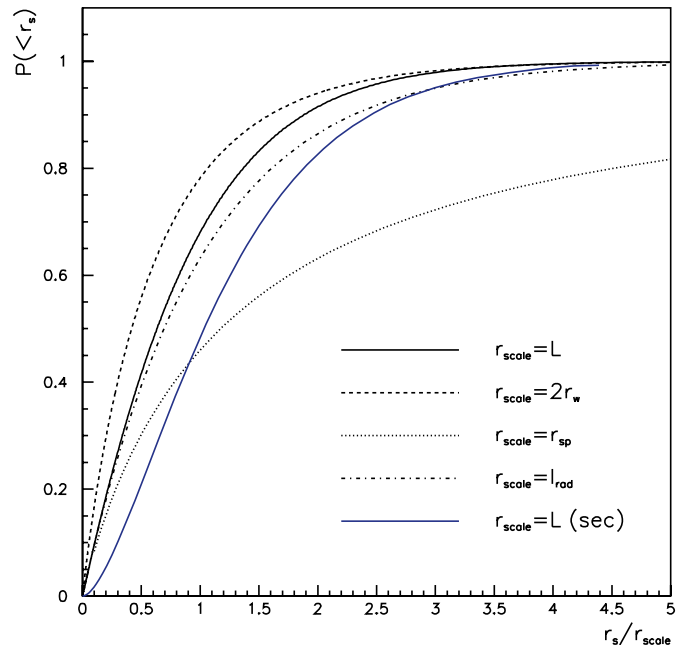


Fig. 6. Integrated probability that a particle detected at the origin was emitted inside the ring of radius r_s , in the three situations considered. The solid dark line is obtained when only the leakage through the $z = \pm L$ boundaries is considered, in which case the radii scale as r/r_{scale} with $r_{\text{scale}} = L$. The dotted, respectively dashed, line is obtained when only the spallations, respectively only the convective wind, are considered. The solid grey line indicates the probability that the primary progenitor of a secondary detected in the solar neighborhood was emitted from within a given distance.

this gas. This interaction may result in a nuclear reaction (spallation), leading to the destruction of the incoming particle and to the creation of a different outgoing particle (secondary). We present two approaches to the problem of diffusion in presence of a spallative disk. When the halo is infinite in extent, the solution may be obtained by using the interpretation of diffusion in terms of random walks. This will be treated in Appendix C. In the general case, the Bessel developments can be used as before. Starting from Eq. (A.5), the expression for the probability density is readily obtained. The limit $L \rightarrow \infty$ is noteworthy, as the resulting expression isolates the influence of spallations:

$$\frac{d\mathcal{P}_{L \rightarrow \infty}^{\text{spal}}\{r_s|0\}}{d^2 r_s} \propto \int_0^{\infty} \frac{k J_0(k r_s)}{2h\Gamma_{\text{inel}} + 2kK} dk = \frac{1}{4\pi K r_s} \int_0^{\infty} \frac{x J_0(x) dx}{r_s/r_{\text{sp}} + x}$$

where the quantity $r_{\text{sp}} \equiv K/(h\Gamma_{\text{inel}})$ has been defined. Would there be no spallation, the $1/r_s$ behavior would be recovered. The term $2h\Gamma_{\text{inel}}$ has the effect to kill the contributions of $k \lesssim k_{\text{sp}}$ in the integral, with $k_{\text{sp}} \equiv h\Gamma_{\text{inel}}/K$. It leads to a decrease of the integral on scales $r > r_{\text{sp}} = 1/k_{\text{sp}}$. Some typical values, for $K = \beta K_0 \mathcal{R}^{\delta}$ (see Sect. 5.5) with $K_0 = 0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}$ and $\delta = 0.6$ are given below at 1 GeV/nuc and 100 GeV/nuc. The heavy species are more sensitive to spallations, so that they come from a shorter distance. This could in principle affect the mean atomic weight of cosmic rays if the composition of the

Table 3. Some values of the inelastic cross section and the associated spallation scale length.

	p	O	Fe
σ (mb)	44	309	760
r_{sp} (kpc), 1 GeV/nuc	10.2	1.45	0.59
r_{sp} (kpc), 100 GeV/nuc	115	16.4	6.7

sources is not homogeneous (see e.g. Maurin et al. 2003a). See Sect. 7.1) for the results with realistic propagation parameters.

For small values of r_s/r_{sp} , the convergence of the previous integral is slow, and other forms obtained by integration by parts, as developed in the Appendix B.3, might be preferred. However, in this particular case, the identity

$$\int_0^\infty x dx J_0(x)/(x + \alpha) = \int_0^\infty y dy e^{-\alpha y} / (1 + y^2)^{3/2}$$

yields the more useful form

$$\frac{d\mathcal{P}_{L \rightarrow \infty}^{\text{spal}}\{r_s|0\}}{d^2 r_s} = \frac{1}{4\pi K r_s} \int_0^\infty \frac{y e^{-y r_s/r_{\text{sp}}}}{(1 + y^2)^{3/2}} dy. \quad (16)$$

This expression is in full agreement with Eq. (C.3) obtained with the random walk approach (see Appendix C). For large values of r_s/r_{sp} , the convergence can be checked by comparing the results to the asymptotic development

$$\int_0^\infty \frac{x J_0(x)}{x + \alpha} dx \approx \frac{1}{\alpha^2} - \frac{9}{\alpha^4} + \frac{225}{\alpha^6} + \dots$$

Finally, the r_{lim} -probability can be computed as before

$$\mathcal{P}_{L \rightarrow \infty}^{\text{spal}}(< r_{\text{lim}}) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^{3/2}} \left[1 - \exp\left\{-x \frac{r_{\text{lim}}}{r_{\text{sp}}}\right\} \right].$$

Some values are indicated in Table 4.

5.3. Comparison and combination of the different effects

To summarize, the effect of spallation and Galactic wind depends on the two parameters:

$$\begin{cases} r_w \equiv \frac{2K}{V_c} \approx 5.87 \text{ kpc} \times \frac{K(E)}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}} \cdot \frac{10 \text{ km s}^{-1}}{V_c}; \\ r_{\text{sp}} \equiv \frac{K}{h\Gamma_{\text{inel}}} \approx 3.17 \text{ kpc} \times \frac{K(E)/\beta}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}} \cdot \frac{100 \text{ mb}}{\sigma}. \end{cases} \quad (17)$$

The r_{lim} -probability is displayed in Fig. 6 as a function of r_{lim} . The effect of the Galactic wind is very similar to that of the top and bottom boundaries, whereas the effect of spallations is quite different. In the latter case, the cutoff in the density is a power law in r_s and decreases much more slowly than the exponential cutoff due to the wind or to escape. As a result, the 99%-surfaces are much larger than the 90%-surfaces. This can also be seen in the first three lines of Table 4.

When all the effects above are considered, Eq. (A.5) gives

$$\frac{d\mathcal{P}\{r_s|0\}}{d^2 r_s} \propto \frac{1}{r_s} \int_0^\infty \frac{x J_0(x) dx}{\rho_{\text{sp}} + \rho_w + \sqrt{\rho_w^2 + x^2} \coth \left\{ \frac{\sqrt{\rho_w^2 + x^2}}{\rho_L} \right\}}$$

where $\rho_{\text{sp}} = r/r_{\text{sp}}$, $\rho_w = r/r_w$ et $\rho_L = r/L$. The smallest of these three numbers indicates the dominant effect. Various r_{lim} -probabilities are shown in Table 4. For a radioactive species, the spallations and the Galactic wind have a negligible effect on propagation as long as l_{rad} (see Sect. 4.2) is smaller than L , r_{sp} and r_w .

5.4. The number of disk-crossings in the general case

Several properties (energy losses, amount of reacceleration, secondary-to-primary ratio) of the cosmic ray flux detected in the solar neighborhood are determined by the number of times a given cosmic ray has crossed the disk since it was created. The distribution of disk-crossings is computed in Appendix C in the case of an infinite diffusive volume and in the absence of Galactic wind. In the most general situation, the mean number of crossings (though not the entire distribution of crossing numbers) can be computed as follows. Each time a particle crosses the disk, it has a probability $p = 2h\sigma_{\text{inel}}n_{\text{ISM}}$ of being destroyed by a spallation. The number $N(r)$ of surviving particles can thus be obtained from $N_0(r)$, the number of particles diffusing without spallations, as

$$N(r) = N_0(r) \times (1 - p)^{n_{\text{cross}}},$$

so that the number of crossing is readily obtained from the densities with and without spallations as

$$n_{\text{cross}}(r) = \frac{\ln(N(r)/N_0(r))}{\ln(1 - p)}. \quad (18)$$

Notice that this expression applied to Eq. (16) leads to Eq. (C.2) when $L \rightarrow \infty$, $V_c = 0$, and when p is small. As the surface density of the disk is $2hn_{\text{ISM}} \sim 10^{-3} \text{ g cm}^{-2}$, the mean column density crossed by the particle (called *grammage*) is given by

$$\Sigma(r_s) = n_{\text{cross}}(r_s) \times 2hn_{\text{ISM}} \sim 20 \text{ g cm}^{-2} \times \frac{n_{\text{cross}}(r_s)}{10^4}.$$

The evolution of the grammage with the distance of the source is displayed in Fig. 7. The effect of escape, spallations and Galactic wind is shown.

As a cross-check, it can be noticed that in this approach, the mean grammage

$$\langle \Sigma \rangle_{\text{spatial}} = \int \Sigma(r_s) \frac{d\mathcal{P}\{r_s|0\}}{d^2 r_s} d^2 r_s$$

yields the right order of magnitude for the usual grammage derived from leaky box analysis ($\sim 9 \text{ g cm}^{-2}$). Moreover, the knowledge of $n_{\text{cross}}(r_s)$ allows to estimate the magnitude of energy losses and reacceleration rates.

Table 4. This table indicates the radius of several f -surfaces, for several values of L , V_c and σ_{inel} . We have introduced $L_{10} \equiv L/10$ kpc, $V_{10} \equiv V_c/10$ km s $^{-1}$ and $\sigma_{100} \equiv \sigma/100$ mb.

L (kpc)	V_c (km s $^{-1}$)	σ_{inel} (mb)	$R_{50\%}$ (kpc)	$R_{90\%}$ (kpc)	$R_{99\%}$ (kpc)
$L_{10} \times 10$	0	0	$6.3 \times L_{10}$	$19 \times L_{10}$	$34 \times L_{10}$
∞	$10 \times V_{10}$	0	$4.9/V_{10}$	$18.6/V_{10}$	$41/V_{10}$
∞	0	$100 \times \sigma_{100}$	$3.7/\sigma_{100}$	$30.8/\sigma_{100}$	$318/\sigma_{100}$
5	0	0	3.1	9.5	17
5	10	50	2.05	6.8	13.1

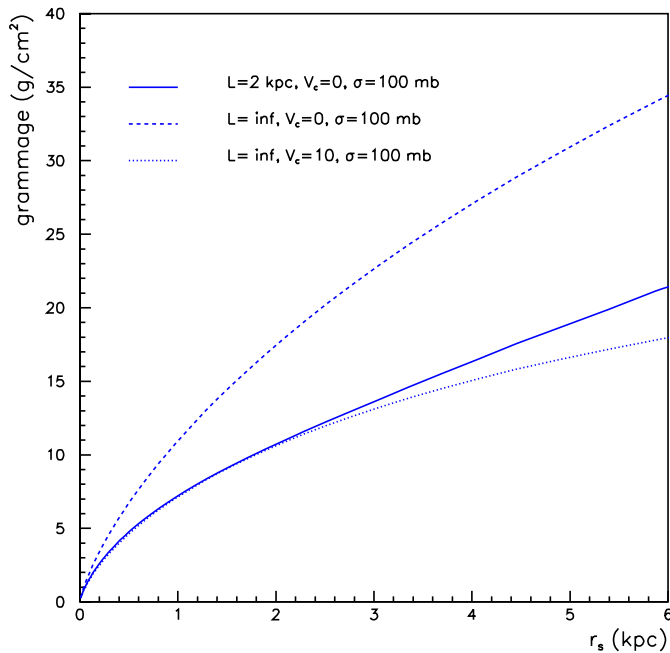


Fig. 7. Grammage crossed as a function of the origin, for some of the models discussed in the text and for a typical value of $K = 0.03$ kpc 2 Myr $^{-1}$.

5.5. The energy dependence

The diffusion coefficient actually depends on energy. A commonly used form (see Maurin et al. 2002b for a discussion) is

$$K = K_0 \beta \left(\frac{\mathcal{R}}{1 \text{ GV}} \right)^\delta$$

where \mathcal{R} stands for the rigidity, $K_0 \sim 0.01\text{--}0.1$ kpc 2 Myr $^{-1}$ and $\delta \sim 0.3\text{--}1$. The previous results were given for $K = 0.03$ kpc 2 Myr $^{-1}$, typical for a proton with an energy of 1 GeV. This implies that the parameters r_w , r_{sp} are larger at higher energy. They eventually become larger than L , so that at high energy escape dominates. At low energy, the relative importance of spallation and convection can be evaluated by comparing r_w and r_{sp} . However, it must be noticed that even when r_w is greater than r_{sp} , the Galactic wind may have a non negligible effect on the cosmic ray spatial origin because the cutoff due to r_w is much sharper (see Fig. 6). Moreover, the influence of the Galactic wind on the spectra is important because of the induced energy changes (adiabatic losses).

6. Realistic source distribution

For the sake of definiteness, we will consider from now on that the cosmic ray sources for stable primaries are located in the disk and that their radial distribution $w(r_s)$ follows that of the pulsars and supernovae remnants, given by

$$w_{\text{SN}}(r_s) = \left(\frac{r_s}{R_\odot} \right)^\alpha \exp \left(-\beta \times \frac{(r_s - R_\odot)}{R_\odot} \right), \quad (19)$$

with $R_\odot = 8.5$ kpc, $\alpha = 2$, $\beta = 3.53$ for Case & Bhattacharya (1998). This distribution is now closer to the distribution adopted by Strong & Moskalenko (1998) ($\alpha = 0.5$ and $\beta = 1$), a flatter distribution designed to reproduce radial γ -ray observations (see Fig. 16). This distribution can be inserted in Eq. (4), which is then used to compute the f -surfaces. These surfaces are displayed in Fig. 8 for three cases ($L = 2$ kpc, $L = 5$ kpc and $L = 10$ kpc). For large halos, the source distribution acts as a cutoff and greatly limits the contributions from peripheral Galactic sources.

The results are not much affected by taking an angular dependence into account. Considering for example the spiral arms modelling of Vallée (2002), Fig. 8 shows that the extension of the f -surfaces is almost not affected by these small scale structures. In the rest of this paper, the purely radial distribution (19) is assumed.

7. Application to the propagation parameters deduced from the observed B/C ratio

The previous sections present a complete description of the origin of cosmic rays in a stationary diffusion model (energy losses and gains are discarded). To each process by which a cosmic ray may disappear before it reaches the solar neighborhood is associated a parameter: L (escape through the top and bottom boundaries), r_w (convection), r_{sp} (destructive spallation). The relative importance of these parameters may be measured by the two quantities $\chi_w \equiv L/r_w$ and $\chi_{\text{sp}} \equiv L/r_{\text{sp}}$. One can distinguish three regimes which determine the diffusion properties of the system: i) the escape through the boundaries dominates for $\chi_w \ll 1$ and $\chi_{\text{sp}} \ll 1$; ii) convection dominates for $\chi_w \gg 1$ and $\chi_w \gtrsim \chi_{\text{sp}}$; iii) spallations dominate for $\chi_{\text{sp}} \gg 1$ and $\chi_w \ll \chi_{\text{sp}}$.

We now use the sets of diffusion parameters consistent with the B/C data given in Maurin et al. (2002a) (hereafter MTD02) to evaluate realistic values for these quantities.

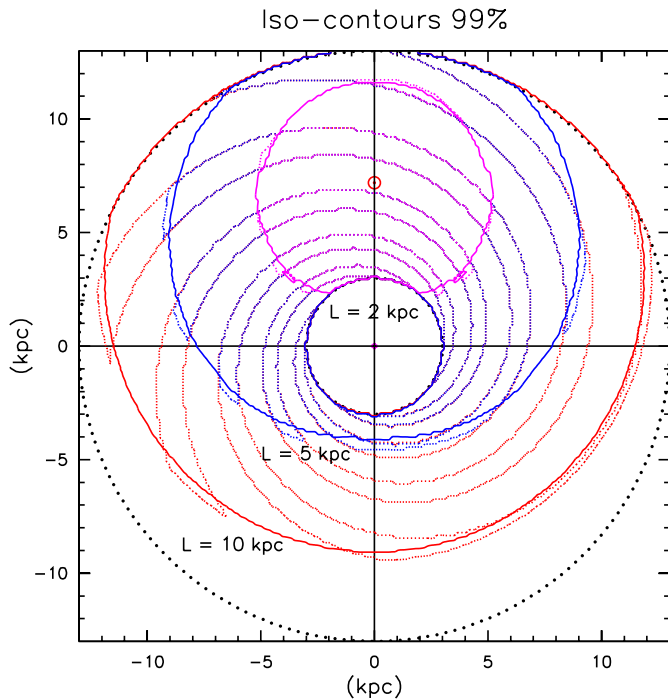


Fig. 8. 99%-surfaces for $R = 20$ kpc and three cases, $L = 2$ kpc, $L = 5$ kpc and $L = 10$ kpc.

7.1. Evolution of χ_w and χ_{sp} with δ

In MTD02, we provide for each configuration α (source spectral index), δ (diffusion spectral index) and L (diffusive halo size) the corresponding K_0 , V_c and V_a (Alfvénic wind responsible for reacceleration) that fit best the ratio B/C. In this study, V_a is not very important since it only changes the energy of the particles: a cosmic ray emitted at 1 GeV/nuc and gaining a few hundreds of MeV/nuc during propagation will be detected at a slightly larger energy, for which the results given here will not be very different. This becomes even more true beyond a few GeV. Reacceleration will be ignored throughout this study, as well as energy losses, for the same reason. Moreover, the values of K_0 , V_c and V_a do not depend much on α (see Fig. 9 of MTD02), so that χ_w and χ_{sp} depend mainly on δ and L . They depend on rigidity, through $K(E)$, as can be seen in Fig. 9 where χ_w and χ_{sp} are displayed as a function of δ for several species, several values of L and several rigidities.

The left panel displays $\chi_w(\delta, L)$ for three rigidities: 1 GV, 10 GV and 100 GV. Up to several tens of GV, convection is in competition with escape; afterwards escape dominates. The noticeable fact is that models corresponding to $\delta \lesssim 0.45$ are escape-dominated, whereas convection dominates only for large δ at low energy. It appears that all other parameters being constant, χ_{wind} is fairly independent of L (indicating a similar relative importance of convection and escape for the models reproducing the B/C ratio, see MTD02). However, the spatial origin does depend on L and r_w and not only on their ratio.

The right panel of Fig. 9 plots $\chi_{sp}(\delta, L)$ for $\mathcal{R} = 100$ GV and 1 GV for various nuclei. Protons are the most abundant species in cosmic rays. Boron and CNO family are important because they allow to constrain the value of the propagation

parameters, e.g. through the B/C ratio. Last, the Fe group provides another test of the secondary production via the sub-Fe/Fe ratio. The evolution of χ_{sp} for these species is conform to what is very well known from earlier leaky box inspired studies: for heavier nuclei, spallation dominates over escape and for this reason, the induced secondary production is particularly sensitive to the low end of the grammage distribution.

To summarize, the left panel shows the evolution from convection-domination to escape-domination as a function of \mathcal{R} and δ , the effect of the wind being negligible above ~ 100 GeV whatever δ ($\chi_w \gtrsim 10$). The right panel gives the evolution from spallation-domination to escape-domination as a function of \mathcal{R} , δ and the species under consideration. The effect of spallation is more important for heavy than for light nuclei, but this difference is too small to produce an evolution of the average logarithmic mass for high energy (\sim TeV) cosmic rays (Maurin et al. 2003a).

7.2. Spatial origin in realistic diffusion models at 1 GeV/nuc

From the previous discussion, it appears that spallations and Galactic wind play a role at low energy. The results will be shown for the particular value 1 GeV/nuc which is interesting for various astrophysical problems. First, once modulated, it corresponds to about the very lowest energy at which experimental set-ups have measured Galactic cosmic rays. Second, the low energy domain is the most favorable window to observe \bar{p} (resp. \bar{d}) from exotic sources (see companion paper Maurin & Taillet 2003), as the background corresponding to secondaries \bar{p} (resp. \bar{d}) is reduced. Last, these energies correspond to that of the enduring problem of the diffuse GeV γ -ray radial distribution. This was first quoted by Stecker & Jones (1977) and further investigated by Jones (1979) taking into account the effect of a Galactic wind.

From the sets of diffusion parameters that fit the B/C ratio, the values of the parameters r_w and r_{sp} are computed (see Table 5) for the four nuclei shown in Fig. 9 and for three values of $\delta = [0.35, 0.6, 0.85]$. From these values, the 50–90–99%-surfaces are derived and displayed in Fig. 10, for protons and Fe nuclei. The effect of δ (Fig. 12), of L (Fig. 13) and of the species (Fig. 11), are considered separately. As regards the first two effects, the f -surfaces are smaller: (i) for greater values of δ , mainly because the effect of the wind is then greater, and (ii) for small values of L , as in this case escape is more important.

As regards the last effect, it can first be seen from Fig. 13 that the heavier species come from a shorter distance (because the spallations are more important). The secondary species can be treated simply by using a source function obtained by multiplying the primary density by the gas density. It would be straightforward to apply the previous techniques to a realistic gas distribution (taking into account, in addition to the fairly flat HI distribution, that of molecular H₂ and ionized HII which are more strongly peaked in the inner parts, see e.g. Strong & Moskalenko 1998 for a summary and references) and to infer the contours inside which the secondaries are created.

Table 5. Values of r_w and r_{sp} for the sets of parameters that, for a given δ , give the best fit to the observed B/C ratio. The mean square value $\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ of the distance to the sources is also shown.

		p, \bar{p}	B-CNO	Sub-Fe, Fe
		$\delta = 0.35/0.6/0.85$	–	–
$L = 10$ kpc	r_w (kpc)	$\infty/5.17/1.6$	$\infty/3.41/0.89$	$\infty/3.26/0.83$
	r_{sp} (kpc)	33.5/10.2/4.0	4.21/1.07/0.35	1.46/0.37/0.12
	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ (kpc)	6.43/4.67/2.50	5.23/2.92/1.11	4.00/2.03/0.57
$L = 6$ kpc	r_w (kpc)	$\infty/3.64/1.15$	$\infty/2.40/0.64$	$\infty/2.30/0.60$
	r_{sp} (kpc)	24.7/7.4/2.9	3.10/0.80/0.26	1.08/0.27/0.09
	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ (kpc)	4.93/3.5/1.88	3.96/2.18/0.82	2.99/1.63/0.54
$L = 2$ kpc	r_w (kpc)	$\infty/1.40/0.46$	$\infty/0.92/0.26$	$\infty/0.88/0.24$
	r_{sp} (kpc)	9.7/2.9/1.2	1.21/0.31/0.10	0.42/0.10/0.03
	$\sqrt{\langle r^2 \rangle}$ (kpc)	2.07/1.44/0.78	1.63/0.87/0.33	1.21/0.57/0.19

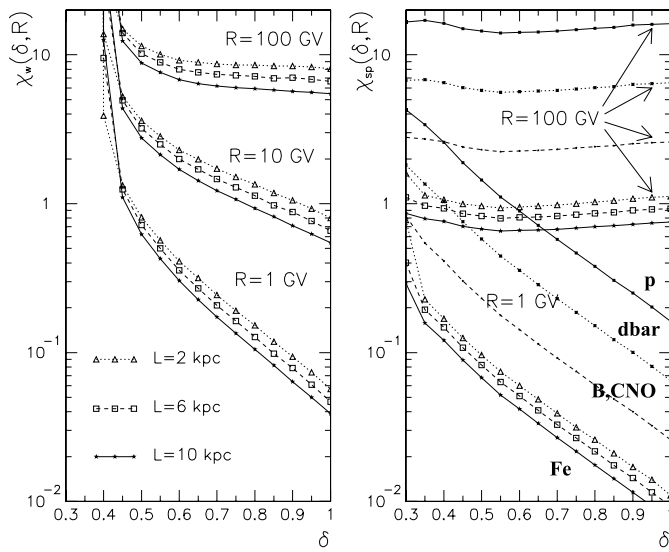


Fig. 9. Left panel: $\chi_w(\delta, \mathcal{R})$ as a function of the diffusion spectral index δ for different rigidities \mathcal{R} ; from top to bottom, $\mathcal{R} = 100$ GV, $\mathcal{R} = 10$ GV and $\mathcal{R} = 1$ GV. The parameter χ_w , as well as χ_{sp} , is not very sensitive to the halo size L . Right panel: $\chi_{sp}(\delta, \mathcal{R})$ as a function of δ for $\mathcal{R} = 100$ GV (upper curves) and $\mathcal{R} = 1$ GV (lower curves) for four species: p ($\sigma \sim 40$ mb), \bar{d} ($\sigma \sim 100$ mb), B-CNO ($\sigma \sim 250$ mb) and Fe ($\sigma \sim 700$ mb). For the latter species we plotted the same three L values as in left panel. The behavior for other species is similar so that we only plotted the case $L = 6$ kpc.

The corresponding f -surfaces are not shown here, as they would be quite similar to those of the primaries (see left panel). What we do display in the right panel are the f -surfaces of the primaries that lead to given secondaries, as these progenitors determine the secondary-to-primary ratios (see Sect. 4.1).

7.3. Effective number of sources

From the previous results, it appears that only a fraction of the sources present in the disk actually contribute to the flux in the solar neighborhood. In this paragraph we present the fraction f_s of the sources which are located inside given f -surfaces.

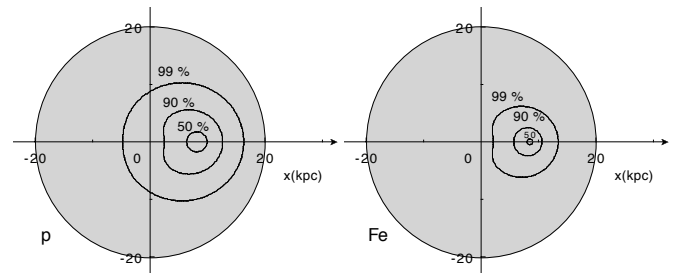


Fig. 10. (50–90–99)%-surfaces (protons and Fe nuclei are considered), in a typical diffusion model with $L = 6$ kpc and $\delta = 0.6$.

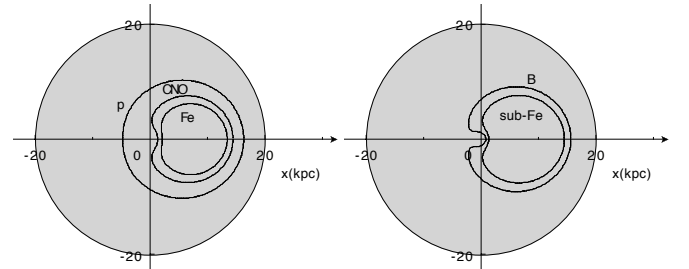


Fig. 11. 99%-surfaces for several species. The left panel corresponds to primary species (protons, CNO and Fe) while the right panel corresponds to the progenitors of secondary species (B and sub-Fe), for $L = 6$ kpc and $\delta = 0.6$.

This fraction is presented in Fig. 14 for the particular model $L = 6$ kpc, $\delta = 0.6$, for protons and Fe nuclei. It can be read that for example, it takes 7.6% (resp. 1.5%) of the Galactic sources to make 90% of the protons (resp. Fe nuclei) reaching the solar neighborhood.

Figure 14 also shows that a very small fraction of sources may contribute to a non negligible fraction of the fluxes. For example, the sphere of radius $r \sim 100$ pc centered on the solar neighborhood contains only 2.5×10^{-5} of the sources but for $L = 6$ kpc and $\delta = 0.6$, it is responsible for about 5% of the proton flux and 18% of the Fe flux. The mean age of the cosmic rays is given by $\langle t \rangle \sim \langle r^2 \rangle / 2K \sim 7\text{--}400$ Myr (see Table 7). For a supernova rate of three per century, the total number of sources responsible for the flux is $\sim 2 \times 10^5\text{--}10^7$. This tells us that in

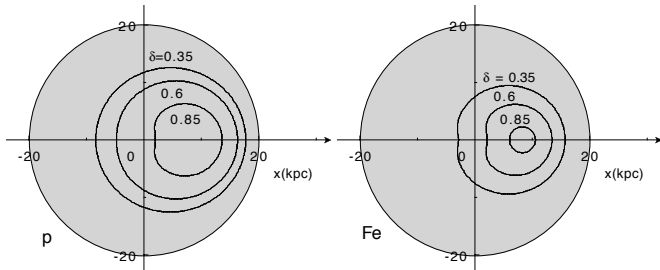


Fig. 12. 99%-surfaces for several δ , in the case $L = 6$ kpc. The left panel corresponds to protons while the right panel corresponds to Fe nuclei.

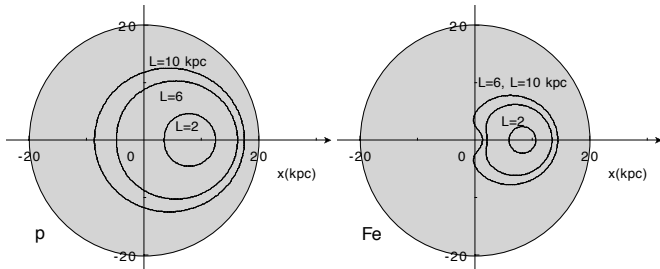


Fig. 13. 99%-surfaces for several L , in the case $\delta = 0.6$. The left panel corresponds to protons while the right panel corresponds Fe nuclei.

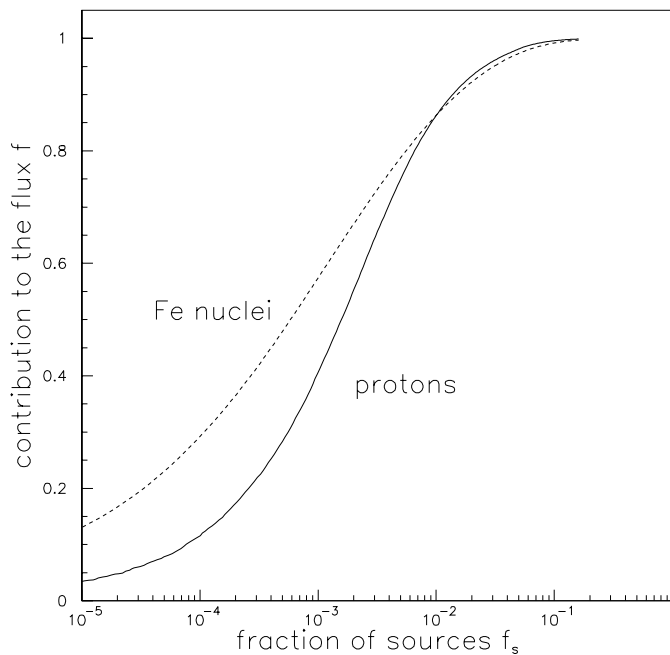


Fig. 14. Fraction f_s (in %) of the Galactic sources contributing to the fraction f of the cosmic ray flux at the solar position, for protons and Fe nuclei, for the particular diffusion model $L = 6$ kpc, $\delta = 0.6$.

models with the largest δ , 18% of the Fe flux can be due to only 5 sources. The approximation of stationarity and of continuous source distribution is likely to break down with such a small number of sources. Conversely, for small values of δ (preferred by many authors), this approximation is probably better.

Table 6. Fraction f_s (in %) of the Galactic sources contributing to a given fraction (90% and 99%) of the cosmic ray flux at the solar position, for protons and Fe nuclei, for the diffusion models studied before.

		p		Fe
		$\delta = 0.35/0.6/0.85$		
$L = 10$ kpc	90%	22.9/13.3/3.9	9.6/2.2/0.24	
	99%	56.7/40.7/16.4	35/14.5/1.77	
$L = 6$ kpc	90%	14.3/7.6/2.3	5.63/1.5/0.17	
	99%	40.9/27/9.6	22.2/9.2/1.48	
$L = 2$ kpc	90%	2.9/1.6/0.83	1.2/0.24/0.025	
	99%	9.3/5.9/3.8	4.7/1.77/0.27	

Table 7. Mean cosmic ray age $\langle t \rangle \sim \langle r^2 \rangle / 2K$ in Myr for the models studied in this paper.

		p		Fe
		$\delta = 0.35/0.6/0.85$		
$L = 10$ kpc		196 / 392 / 332	76 / 74 / 17	
$L = 2$ kpc		72 / 130 / 108	24 / 22 / 7	

7.4. Radioactive species, e^+ and e^- and the local bubble

Donato et al. (2002) emphasized that the existence of a local underdensity ($n \lesssim 0.005 \text{ cm}^{-3}$) around the solar neighborhood greatly affects the interpretation of the flux of radioactive species at low energy (we refer the interested reader to this paper for a deeper discussion and references on the local interstellar medium). The most important effect of this hole is that it exponentially decreases the flux by a factor $\exp(-a/l_{\text{rad}})$ ($a \lesssim 65\text{--}250$ pc is the radius of the local underdense bubble and l_{rad} is given by Eq. (12)). This can be easily understood as there is almost no gas in this region, hence no spallations, leading to no secondary production. The local bubble is obviously not spherical, but this approximation is sufficient at this level. This attenuation factor is straightforwardly recovered starting from the probability density as given in Sect. 4.2, if correctly normalized to unity. To this end, the sources (here spallation of primaries on the interstellar medium) are considered to be uniformly distributed in the disk, except in the empty region $r < a$. The probability density is zero in the hole whereas outside, it is given by

$$d\mathcal{P}_{\text{rad}}^{\text{hole}} = \exp\left(\frac{a}{l_{\text{rad}}}\right) d\mathcal{P}_{\text{rad}} = \frac{\exp(-(r_s - a)/l_{\text{rad}})}{2\pi r_s \cdot l_{\text{rad}}} d^2 r_s. \quad (20)$$

The quantity $\mathcal{P}_{\text{rad}}^{\text{hole}}(r_s < r_{\text{lim}}|O)$ is obtained directly from the no hole case (see Sect. 4.2) by replacing r_{lim} by $r_{\text{lim}}^a = r_{\text{lim}} + a$. It means that the sources that contribute to the fraction $f = (50\text{--}90\text{--}99)\%$ of the flux of the radioactive species are located between a and $r_{\text{lim}}^a = (0.7\text{--}2.3\text{--}4.6) \times l_{\text{rad}} + a$. Hence, the hole only plays a marginal role for the origin of a radioactive species (unless $l_{\text{rad}} \lesssim a$), whereas the result for the flux is dramatically different.

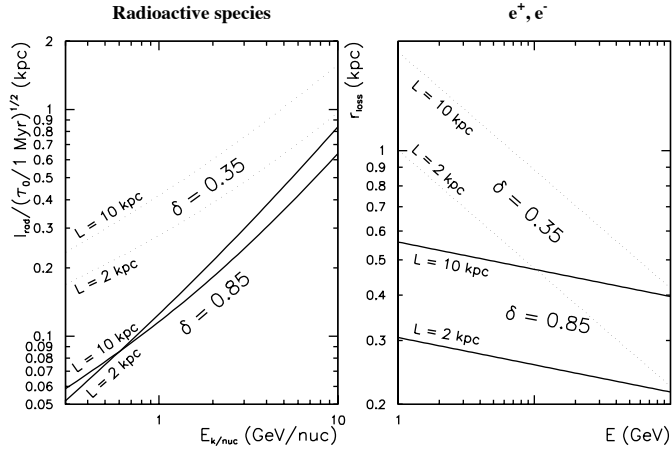


Fig. 15. Realistic values of $l_{\text{rad}}/\sqrt{\tau_0/1 \text{ Myr}}$ and r_{loss} for two extreme halo sizes L and diffusion slope δ . As all results in this section, propagation parameters fit B/C and are taken from MTD02.

We saw in a previous section that the high energy e^+ and e^- behave like unstable species. Their typical length r_{loss} can be compared to l_{rad}

$$\begin{cases} \frac{l_{\text{rad}}(\text{kpc})}{\sqrt{\tau_0/1 \text{ Myr}}} \approx 0.12 \sqrt{\frac{\mathcal{R}}{1 \text{ GV}}} \times \sqrt{\frac{K_0(\mathcal{R}/1 \text{ GV})^\delta}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}}; \\ r_{\text{loss}}(\text{kpc}) \approx \sqrt{\frac{1 \text{ GeV}}{E}} \times \sqrt{\frac{K_0(\mathcal{R}/1 \text{ GV})^\delta}{0.03 \text{ kpc}^2 \text{ Myr}^{-1}}}. \end{cases} \quad (21)$$

The dependence in the propagation model is similar for both expressions and is contained in the last term. There is a big difference, though, as the typical distances travelled by radioactive nuclei scale as $\sqrt{\mathcal{R}}$, whereas they scale as $1/\sqrt{E}$ for electrons and positrons.

Realistic values for l_{rad} and r_{loss} are presented in Fig. 15. At high energy, the Lorentz factor enhances the lifetime of radioactive nuclei, making their origin less local, whereas the energy losses are increased for electrons and positrons, making their origin more local (99–90–50% of 100 GeV e^+e^- come from sources located in a thin disk with radius $r_{\text{lim}}^{e^+e^-} \approx 1.1\text{--}0.55\text{--}0.38 \text{ kpc}$). For 100 GeV e^+ and e^- , all models fitting B/C have the same value for $K_0\mathcal{R}^\delta$, because at 100 GeV/nuc, spallations and convection are negligible (Maurin et al. 2002a). As a consequence, for GeV energies, r_{loss} increases more rapidly for small δ than it does for larger δ . To study the effect of local contributions to the spectra of e^+ and e^- , Aharonian et al. (1995) used the value $\delta = 0.6$ and compared to other works with $\delta = 0$. As these authors noticed, the modelling in the whole energy spectrum is δ dependent, but our study gives the range compatible with B/C studies.

Finally, radioactive nuclei are a very important tool for cosmic ray physics. They come from a few hundreds of parsec, and their fluxes are very sensitive to the presence of a local underdense bubble, through the attenuation factor $\kappa \equiv \exp(-a/l_{\text{rad}})$. For example, for a typical bubble of size $a = 100 \text{ pc}$ and an energy 800 MeV/nuc (interstellar energy), $\kappa_{0.35} \approx \exp(-0.33\sqrt{1 \text{ Myr}/\tau_0})$ if $\delta = 0.35$, whereas $\kappa_{0.85} \approx \exp(-\sqrt{1 \text{ Myr}/\tau_0})$. With $\tau_0^{10\text{Be}} = 2.17 \text{ Myr}$, $\tau_0^{26\text{Al}} = 1.31 \text{ Myr}$

and $\tau_0^{36\text{Cl}} = 0.443 \text{ Myr}$, it leads to $\kappa_{0.35}^{\text{Be, Al, Cl}} \approx 0.80\text{--}0.75\text{--}0.61$ and $\kappa_{0.85}^{\text{Be, Al, Cl}} \approx 0.51\text{--}0.42\text{--}0.22$. For ^{14}C , the attenuation is $\kappa^{14\text{C}} \ll 1$ around 1 GeV/nuc, so that this species is heavily suppressed. However, it should be present around 10–100 GeV/nuc (as $\kappa^{14\text{C}} \sim 1$ at these energies), with the advantage that solar modulation is less important at these energies.

The flux of radioactive species directly characterizes the local diffusion coefficient K_0 if the local environment is specified. This would in turn allow to break the degeneracy in propagation parameters that one can not avoid at present. Last, even though the surviving fraction of a radioactive does depend on the halo size L , we emphasize that it is a very indirect way to derive the propagation parameters. In the forthcoming years, new measurements of radioactive species that do not depend on L (e.g. by PAMELA and AMS) should provide a promising path to update our vision of cosmic ray propagation.

8. Summary, conclusions and perspectives

The question of the source distribution is very present in cosmic ray physics. With the occurrence of the old problem of short pathlengths distribution in leaky box models (see for example Webber et al. 1998), Lezniak & Webber (1979) studied a diffusion model with no-near source in the solar neighborhood. Later, Webber (1993a, b) propagated δ -like sources with diffusion generated by a Monte Carlo random walk for the same purpose. Brunetti & Codino (2000) follow this line but they introduce random walks in a more realistic environment, i.e. circular, elliptical and spiral magnetic field configurations. In a more formal context, Lee (1979) used a statistical treatment of means and fluctuations (see references therein) to characterize amongst others the possibility that nearby recent sources may dominate the flux of primaries. Finally, it is known that the present cosmic ray models are not able to reproduce accurately for example proton-induced γ -rays measurements. To illustrate this point, we plot in Fig. 16 the radial distribution of protons obtained with the same diffusion parameters as used above. None of the models shown match the data. One is left with two alternatives: either modifying the source distribution (for example, the distribution of Strong & Moskalenko 1998 yields a better agreement), or giving up the assumption that the diffusion parameters apply to the Galaxy as a whole (Breitschwerdt et al. 2002). It is thus of importance to understand to what extent the cosmic rays detected on Earth are representative of the distribution of the sources in the whole Galaxy.

We provide an answer to this question under the two important hypotheses that the source distribution is continuous and that we have reached a stationary regime: most of the cosmic rays that reach the solar neighborhood were emitted from sources located in a rather small region of the Galactic disk, centered on our position. The quantitative meaning of “rather small” depends on the species as well as on the values of the diffusion parameters. For the generic values $\delta = 0.6$ and $L = 6 \text{ kpc}$ chosen among the preferred values fitting B/C (see Sect. 7), half of the protons come from sources nearer than 2 kpc, while half of the Fe nuclei come from sources nearer than 500 pc. Another way to present this result is to say that the fraction of the whole Galactic source

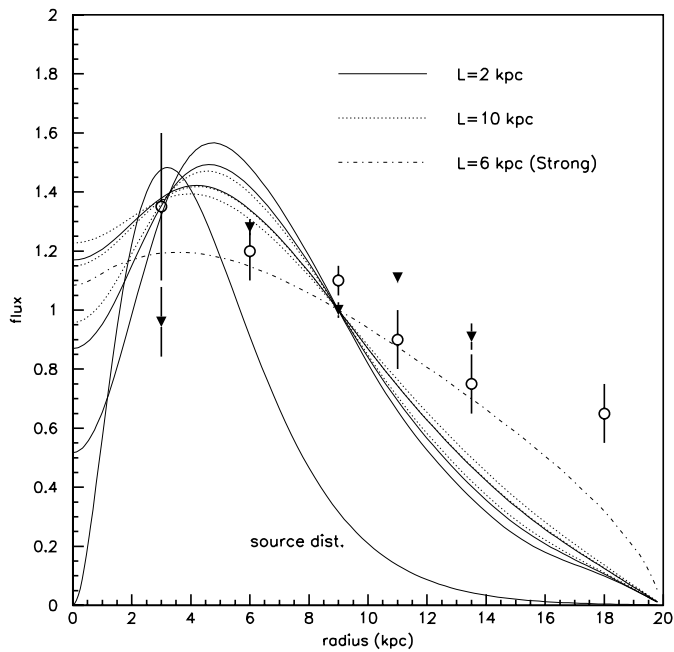


Fig. 16. Radial distribution of the proton flux for the models discussed in this study, compared to the source radial distribution of Case & Bhattacharya (1998) given Eq. (19). For each of the values $L = 2$ kpc and $L = 10$ kpc, the three values $\delta = 0.35, 0.6$ and 0.85 are presented, the flatter distribution corresponding to the lower δ . Also shown is the gamma-ray emissivity per gas atom (COS-B Bloemen 1989), which is proportional to the proton flux, as given by COS-B (open circles, Bloemen 1989) and EGRET (triangles, Strong & Mattox 1996), along with the proton flux obtained with the Strong & Moskalenko (1998) distribution (see Sect. 6).

distribution that actually contributes to the solar neighborhood cosmic ray flux can be rather small. For the generic model just considered, 8% (resp. 1.5%) of the sources are required to account for 90% of the proton (resp. Fe) flux. These fractions are smaller for higher δ and smaller L . To summarize, the observed cosmic ray primary composition may be dominated by sources within a few kpc, so that a particular care should be taken to model these source, spatially as well as temporally (Maurin et al. 2003b).

Independently of all the results, this study could be used as a check for more sophisticated Monte Carlo simulations that will certainly be developed in the future to explore inhomogeneous situations. Several other consequences deserve attention. First, the results may point towards the necessity to go beyond

the approximations of both continuity and stationarity. In particular, it could be that only a dynamical model, with an accurate spatio-temporal description of the nearby sources, provides a correct framework to understand the propagation of Galactic cosmic rays. The contribution from nearby sources would be very different in the low energy (\sim GeV/nuc) or in the high energy regime (\sim PeV) compared to the stationary background. Second, as discussed in Sect. 4.1, the diffusion parameters derived from the observed B/C ratio have only a local validity, and one should be careful before applying them to the whole Galaxy, since the cosmic rays are blind to most of it.

Acknowledgements. This work has benefited from the support of PICS 1076, CNRS and of the PNC (Programme National de Cosmologie). We warmly thank Eric Pilon for his expertise on asymptotic developments. We also thank the anonymous referee for his pertinent suggestions.

References

- Aharonian, F. A., Atoyan, A. M., & Völk, H. J. 1995, *A&A*, 294, L41
 Bloemen, H. 1989, *ARA&A*, 27, 469
 Breitschwerdt, D., Dogiel, V. A., & Völk, H. J. 2002, *A&A*, 385, 216
 Brunetti, M. T., & Codino, A. 2000, *ApJ*, 528, 789
 Case, G. L., & Bhattacharya, D. 1998, *ApJ*, 504, 761
 Donato, F., Maurin, D., & Taillet, R. 2002, *A&A*, 381, 539
 Jones, F. C. 1978, *ApJ*, 222, 1097
 Jones, F. C. 1979, *ApJ*, 229, 747
 Lebedev, N. N. 1972, *Special functions and their applications* (Dover)
 Lee, M. A. 1979, *ApJ*, 229, 424
 Lezniak, J. A., & Webber, W. R. 1979, *Ap&SS*, 63, 35
 Maurin, D., & Taillet, R. 2003, *A&A*, to appear
 Maurin, D., Donato, F., Taillet, R., & Salati, P. 2001, *ApJ*, 555, 585
 Maurin, D., Taillet, R., & Donato, F. 2002a, *A&A*, 394, 1039
 Maurin, D., Taillet, R., Donato, F., et al. 2002b, in *Research Signposts*, to appear
 Maurin, D., Cassé, M., & Vangioni-Flam, E. 2003a, *Astroparticle Phys.*, 18, 471
 Maurin, D., Salati, P., Taillet, R., Vangioni-Flam, E., & Cassé, M. 2003b, in prep.
 Stecker, F. W., & Jones, F. C. 1977, *ApJ*, 217, 843
 Strong, A. W., & Mattox, J. R. 1996, *A&A*, 308, L21
 Strong, A. W., & Moskalenko, I. V. 1998, *ApJ*, 509, 212
 Vallée, J. P. 2002, *ApJ*, 566, 261
 Webber, W. R. 1993a, *ApJ*, 402, 185
 Webber, W. R. 1993b, *ApJ*, 402, 188
 Webber, W. R., Kish, J. C., Rockstroh, J. M., et al. 1998, *ApJ*, 508, 940

REF

[28]

Antiproton and positron signal enhancement in dark matter mini spikes scenarios

P. Brun, G. Bertone, J. Lavallo, P. Salati R. Taillet,

Physical Review **D76** (2007) 083506

Antiproton and positron signal enhancement in dark matter minispikes scenariosPierre Brun,^{1,*} Gianfranco Bertone,^{2,3,†} Julien Lavallo,^{4,‡} Pierre Salati,^{5,§} and Richard Taillet^{5,||}¹*Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique des Particules LAPP, Université de Savoie, CNRS/IN2P3, 74941 Annecy-le-veau, France*²*INFN, Sezione di Padova, Via Marzolo 8, Padova I-35131, Italy*³*Institut d'Astrophysique de Paris, UMR 7095-CNRS, Université Pierre et Marie Curie, 75014 Paris, France*⁴*Centre de Physique des Particules de Marseille CPPM, Université de la Méditerranée, CNRS/IN2P3, 13288 Marseille, France*⁵*Laboratoire d'Annecy-le-Vieux de Physique Théorique LAPTH, Université de Savoie, CNRS/IN2P3, 74941 Annecy-le-veau, France*

(Received 27 April 2007; published 8 October 2007)

The annihilation of dark matter (DM) in the Galaxy could produce specific imprints on the spectra of antimatter species in Galactic cosmic rays, which could be detected by upcoming experiments such as PAMELA and AMS02. Recent studies show that the presence of substructures can enhance the annihilation signal by a “boost factor” that not only depends on energy, but that is intrinsically a statistical property of the distribution of DM substructures inside the Milky Way. We investigate a scenario in which substructures consist of ~ 100 “minispikes” around intermediate-mass black holes. Focusing on primary positrons and antiprotons, we find large boost factors, up to a few thousand, that exhibit a large variance at high energy in the case of positrons and at low energy in the case of antiprotons. As a consequence, an estimate of the DM particle mass based on the observed cutoff in the positron spectrum could lead to a substantial underestimate of its actual value.

DOI: [10.1103/PhysRevD.76.083506](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.76.083506)

PACS numbers: 95.35.+d

I. INTRODUCTION

Many current and upcoming experiments are aimed at detecting the products of annihilation of dark matter (DM) particles in the Milky Way halo, or in external galaxies—see Refs. [1–3] for recent reviews. In fact, the identification of an annihilation signal would not only provide the proof of the particle nature of DM, but it would also open a new window to physics beyond the standard model. Among indirect searches, particular attention has been devoted to the case of photons, since they propagate along straight lines, and they are not significantly absorbed within the Galaxy at energies of order 100 GeV and below. The prospects for detecting gamma rays from DM annihilation with the space telescope GLAST [4] and with air Cherenkov telescopes, such as CANGAROO [5], HESS [6], MAGIC [7], and VERITAS [8], have been extensively discussed in the literature—e.g. [9] and references therein. Alternatively, one may search for neutrino fluxes from DM captured at the center of the sun or of the Earth—see reviews above for further details—with large neutrino telescopes such as IceCube [10] and Antares [11].

One can also focus on other final states of DM annihilation, such as antimatter particles, in particular, positrons [12–20] and antiprotons [21–24]. Unlike photons and neutrinos, these are charged particles that are sensitive to the Galactic magnetic field and suffer energy losses. Their propagation must be described by diffusion, so that the magnetic properties of the Milky Way must be known,

which is not completely true yet. Nevertheless, it is possible to make interesting predictions, which are now particularly relevant, as the recently launched satellite PAMELA [25] and the forthcoming AMS02 [26] experiment are expected to provide new data and test a significant portion of the parameter space of DM particles.

In most cases, the prospects for the detection of antimatter fluxes are not particularly sensitive to the overall shape of the DM profile, but they do depend strongly on the “clumpiness” of the profile. In fact, the annihilation rate being proportional to the square of the number density, the presence of small-scale inhomogeneities leads to larger fluxes for the same value of the average DM density. This is often parametrized by a “boost factor,” which will be defined more precisely below.

Recently, a new scenario has been discussed in the literature, where the formation of intermediate-mass black holes (IMBHs), i.e. black holes with mass M in the range $10^2 \leq M/M_\odot \leq 10^6$, leads to the formation of DM overdensities, called “minispikes,” that might be observed as point sources of gamma rays [27] and neutrinos [28]. Although somewhat speculative, the scenario has the undisputed virtue of making specific predictions on the number and luminosity of these objects, which could be observed or ruled out in the near future with the upcoming generation of space and ground based experiments. Here, we compute the boost factor in minispikes scenarios, and argue that they would lead to a dramatic enhancement of antimatter fluxes, bringing them within the reach of current and upcoming experiments.

The paper is organized as follows: in Sec. II, we review the motivations for the minispoke scenario and derive their density profile and normalization. Section III is devoted to a general discussion of the antimatter cosmic ray signal

*brun@lapp.in2p3.fr

†bertone@iap.fr

‡lavallo@in2p3.fr

§salati@lapp.in2p3.fr

||taillet@lapp.in2p3.fr

generated by minispikes. The average value and the variance of the boost factor at the Earth are defined and special attention is paid to the inner structure and Galactic distribution of the minispikes. Positrons and antiprotons are, respectively, addressed in Secs. IV and V. Results from Monte Carlo simulations are presented and discussed in the light of analytic calculations. The energy dependence of the boost variance turns out to be quite different for positrons and antiprotons. These species have very different modes of propagation inside the Milky Way. A few realistic models for the DM particles are implemented in Sec. VI. The positron and antiproton signals which they yield are featured and illustrate the typical antimatter signatures to be expected should minispikes populate the Galactic halo. We finally conclude in Sec. VII and make a few suggestions for future developments.

II. MINISPIKES AS DM SUBSTRUCTURES

Black holes (BHs) can be broadly divided into three different classes—see e.g. [29] for a review:

- (i) *Stellar mass BHs*, with mass $M \lesssim 100 M_{\odot}$. They are typically remnants of the collapse of massive stars. Recent simulations suggest that the upper limit on the mass of these objects is as low as $\approx 20 M_{\odot}$ [30]. There is *robust* evidence for the existence of these objects, coming from the observation of binary systems with compact members whose mass exceeds the critical mass of neutron stars. For a review of the topic and the discussion of the status of the observational evidence for stellar mass BHs, see e.g. [31] and references therein.
- (ii) *Supermassive BHs (SMBHs)*, with mass $M \gtrsim 10^6 M_{\odot}$ lying at the centers of galaxies, including our own. Their existence is also well established—see e.g. Ref. [32]—and intriguing correlations are observed between the SMBHs mass and the properties of their host galaxies and halos [33–38]. From a theoretical point of view, a population of massive seed black holes could help to explain the origin of SMBHs. In fact, observations of quasars at redshift $z \approx 6$ in the Sloan Digital Survey [39–41] suggest that SMBHs were already in place when the Universe was only ~ 1 Gyr old, a circumstance that can be understood in terms of a rapid growth starting from “massive” seeds—see e.g. Ref. [42]. This leads to the third category:
- (iii) *Intermediate-mass BHs*, with mass $10^2 \lesssim M/M_{\odot} \lesssim 10^6$. Scenarios that seek to explain the properties of the observed supermassive black hole population result in the prediction of a large population of wandering IMBHs. Here, following Ref. [27], we consider two different formation scenarios for IMBHs. In the first scheme (A), IMBHs form in rare, overdense regions at high redshift, $z \sim 20$, as remnants of Population III stars,

and have a characteristic mass scale of a few $10^2 M_{\odot}$ [43]—a similar model was investigated in Refs. [44–46]. In this scenario, these black holes serve as the seeds for the growth of supermassive black holes found in Galactic spheroids [32]. In the second scenario (B), IMBHs form directly out of cold gas in early-forming halos and are typified by a larger mass scale of order $10^5 M_{\odot}$ [38]. During the virialization and collapse of the first halos, gas cools, collapses, and forms pressure-supported disks at the centers of halos that are massive enough to contain a large amount of molecular hydrogen. In halos which do not experience any major mergers over a dynamical time, a protogalactic disk forms and can evolve uninterrupted. At this stage, an effective viscosity due to local gravitational instabilities in the disk leads to an inward mass transfer and outward angular momentum transfer, until supernovae in the first generation of stars heat the disk and terminate this process. By the time the process terminates, a baryonic mass of order $\sim 10^5 M_{\odot}$ loses its angular momentum and is transferred to the center of the halo, leading to the formation of an object that may be briefly pressure supported, but that eventually collapses to form a black hole. In Sec. III we show the distribution of IMBHs in the latter scenario, as obtained in Ref. [28].

The effect of the formation of a central object on the surrounding distribution of matter has been investigated in Refs. [47–50] and for the first time in the framework of DM annihilations in Ref. [51]. It was shown that the *adiabatic* growth of a massive object at the center of a power-law distribution of DM, with index γ , induces a redistribution of matter into a new power-law (dubbed “spike”) with index

$$\gamma_{\text{sp}} = (9 - 2\gamma)/(4 - \gamma). \quad (1)$$

This formula is valid over a region of size $R_{\text{sp}} \approx 0.2r_{\text{BH}}$, where r_{BH} is the radius of gravitational influence of the black hole, defined implicitly as $M(<r_{\text{BH}}) = M_{\text{BH}}$, where $M(<r)$ denotes the mass of the DM distribution within a sphere of radius r , and where M_{BH} is the mass of the black hole [52]. The process of adiabatic growth is, in particular, valid for the SMBH at the Galactic center. A critical assessment of the formation *and survival* of the central spike, over cosmological time scales, is presented in Refs. [9,53]—see also references therein. Adiabatic spikes are rather fragile structures that require fine-tuned conditions to form at the center of Galactic halos [54], and that can be easily destroyed by dynamical processes such as major mergers [55] and gravitational scattering off stars [53,56].

It was recently shown that a $\rho \propto r^{-3/2}$ DM overdensity can be predicted in any halo at the center of any galaxy old

enough to have grown a power-law density cusp *in the stars* via the Bahcall-Wolf mechanism [57]. Collisional generation of these DM “crests”—collisionally regenerated structures—was demonstrated even in the extreme case where the DM density was lowered by slingshot ejection from a binary supermassive black hole. However, the enhancement of the annihilation signal from a DM crest is typically much smaller than for adiabatic spikes [57].

Here we focus our attention on *minispikes* around IMBHs, and we recall their properties, following closely Ref. [27]. The “initial” DM minihalo—that is, the DM distribution prior to black hole formation—can be well approximated with a Navarro, Frenk, and White (NFW) profile [58]

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_{\text{sc}}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{r}{r_{\text{sc}}} \right)^{-2}. \quad (2)$$

The normalization constant ρ_0 , and the scale radius r_{sc} , can be expressed in terms of the virial mass M_{vir} of the halo at the time when the IMBH formed, and of the virial concentration parameter c_{vir} —see Ref. [27] for further details. Alternatively, we could have chosen the more recent parametrization proposed by Navarro *et al.* [59]—see also Refs. [60,61]. However, this profile implies modifications at scales smaller than those we are interested in, where the profile is modified by the presence of the IMBH anyway. We assume that the black holes form over a time scale long enough to guarantee adiabaticity, but short compared to the cosmological evolution of the host halo. In fact, the condition of “adiabaticity,” fundamental to grow minispikes, requires that the formation time of the black hole is much larger than the dynamical time scale at a distance r_{BH} from the black hole, where $r_{\text{BH}} \approx GM_{\text{BH}}/\sigma^2$ is the radius of the sphere of gravitational influence of the black hole, and σ is the velocity dispersion of DM particles at r_{BH} . In practice, r_{BH} is estimated by solving the implicit equation

$$M(<r_{\text{BH}}) \equiv \int_0^{r_{\text{BH}}} \rho_{\text{tot}}(r) 4\pi r^2 dr = 2M_{\text{BH}}. \quad (3)$$

In the following, we only consider the formation scenario B, which leads to higher values for the boost factor. For a representative case in scenario B, with $M_{\text{BH}} = 10^5 M_{\odot}$ and $M_{\text{vir},f} = 10^8 M_{\odot}$, this gives $r_{\text{BH}}/r_{\text{sc}} \approx 0.04$. In scenario B, the black hole formation time is set by the time scale for viscous angular momentum loss and is limited by the evolutionary time scale of the first stars and the gravitational infall time across the gaseous disk, which is of order Myr—see Ref. [62] for a detailed discussion of time scales. The relevant time scale for the mass buildup of the IMBH is then $t_{\text{ev}} \sim 1\text{--}20$ Myr.

III. THE ANTIMATTER COSMIC RAY SIGNAL PRODUCED BY MINISPIKES

A. Fluxes at the Earth

The self-annihilations of the DM particles χ concealed in the Milky Way halo produce positrons and antiprotons, a small fraction of which may reach the Earth. The local production rate of these antimatter cosmic ray species will be generically denoted by

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \delta \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \left\{ \frac{\rho_{\chi}(\mathbf{x})}{m_{\chi}} \right\}^2 g(E_S) \Delta E_S. \quad (4)$$

The factor δ is equal to 1/2 if the DM particles χ are Majorana fermions, whereas it is 1/4 in the case of Dirac species, provided that a perfect matter-antimatter symmetry between χ and $\bar{\chi}$ holds in that case. Until Sec. VI, we will focus our discussion on monoenergetic positrons and antiprotons with energy E_S defined up to an energy bandwidth of ΔE_S . In Kaluza-Klein theories of dark matter particles, the branching ratio into an e^+e^- pair can be as large as $B_{e^{\pm}} \sim 20\%$ [63] and the energy distribution $g(E_S)$ of Eq. (4) is equal to $B_{e^{\pm}} \delta(E_S - m_{\chi})$, where m_{χ} stands for the mass of the DM species. In the case of antiprotons, energy losses may be neglected and we need only to consider a specific value of the initial energy E_S . A continuous injection spectrum will be considered in Sec. VI, as is needed for realistic models of antimatter production.

The probability for a cosmic ray species injected at \mathbf{x} to propagate and reach the Earth with energy E is described by the Green function

$$G(\mathbf{x}) \equiv G(E, \odot \leftarrow E_S, \mathbf{x}). \quad (5)$$

The propagator $G(\mathbf{x})$ has been thoroughly discussed in the literature—see Refs. [17,20] for positrons and Refs. [64,65] for antiprotons. The annihilations of DM particles yield the following flux at the Earth,

$$\phi(E) = \mathcal{S} \int_{\text{DM halo}} G(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\rho_{\chi}(\mathbf{x})}{\rho_0} \right\}^2 d^3 \mathbf{x}, \quad (6)$$

which is expressed in units of $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{sr}^{-1} \text{GeV}^{-1}$. The factor \mathcal{S} encodes information on the specific model selected to describe the DM species χ such as its mass m_{χ} and total annihilation cross section $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle$. It is defined as

$$\mathcal{S} = \frac{\delta}{4\pi} \beta(E) \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \left\{ \frac{\rho_0}{m_{\chi}} \right\}^2 g(E_S) \Delta E_S. \quad (7)$$

The velocity of the cosmic ray particles is denoted by $\beta(E)$, and ρ_0 is a reference density that can be chosen at will, eventually disappearing from the final result. It can be given a physical meaning, as we will see when we define the annihilation volume ξ .

B. The framework of the statistical analysis

In the absence of any substructure, the DM distribution ρ_s is smooth and yields a cosmic ray flux

$$\phi_s(E) = \mathcal{S} \int_{\text{DM halo}} G(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\rho_s(\mathbf{x})}{\rho_0} \right\}^2 d^3\mathbf{x}. \quad (8)$$

In the IMBH scenario, the DM distribution is given by the superposition $\rho = \rho_s + \delta\rho$ where a new component $\delta\rho \gg \rho_s$ accounts now for the DM trapped inside the minispikes. That component contributes for a fraction of $\sim 10^{-5}$ to the Galactic dark matter. As the typical distance over which positrons and antiprotons propagate in the Milky Way is much larger than the average size of the minispikes, the cosmic ray flux—generated by the total density ρ —simplifies into the sum

$$\phi(E) = \phi_s + \left(\phi_r = \sum_i \varphi_i \right), \quad (9)$$

where the contribution from the i th object is $\varphi_i = \mathcal{S} \times G(\mathbf{x}_i) \times \xi_i$. That substructure produces as many positrons and antiprotons as if the entire volume

$$\xi_i = \int_{\text{ith minispike}} \left\{ \frac{\delta\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \right\}^2 d^3\mathbf{x} \quad (10)$$

were filled with the constant DM density ρ_0 . The minispike mass M_i and *intrinsic* boost B_i are related to the annihilation volume ξ_i through

$$\xi_i \equiv \frac{B_i M_i}{\rho_0}. \quad (11)$$

Notice that the exotic flux φ_i has no well-defined dependence on the mass M_i and the intrinsic boost B_i if these quantities are considered individually, since φ_i only depends on the annihilation volume ξ_i .

Should we know the exact location and annihilation volume of each minispike, we would unambiguously derive the cosmic ray flux $\phi(E)$. This is not the case, and for that matter we do not even know the number N_{BH} of these objects. Very different distributions of the minispike population throughout the Galactic halo are possible. The positron and antiproton spectra at the Earth are therefore affected by an uncertainty (which could be called a cosmic variance) related to this lack of knowledge. A whole set of halo realizations has to be considered, and specific semi-analytical tools have been developed [20] to address this issue. The boost factor $B = \phi/\phi_s$ at the Earth is not unique and must be treated as a random variable. To do so, we have built a Monte Carlo simulation nurtured by ~ 200 different realizations of the minispike population which have been obtained in Ref. [27] by evolving an initial distribution of IMBHs orbiting in the Milky Way halo and by allowing the associated DM minihalos to be tidally destroyed during close encounters. The distribution of the number N_{BH} of surviving minispikes is presented in Fig. 1. In our Monte Carlo simulation, N_{BH} is randomly

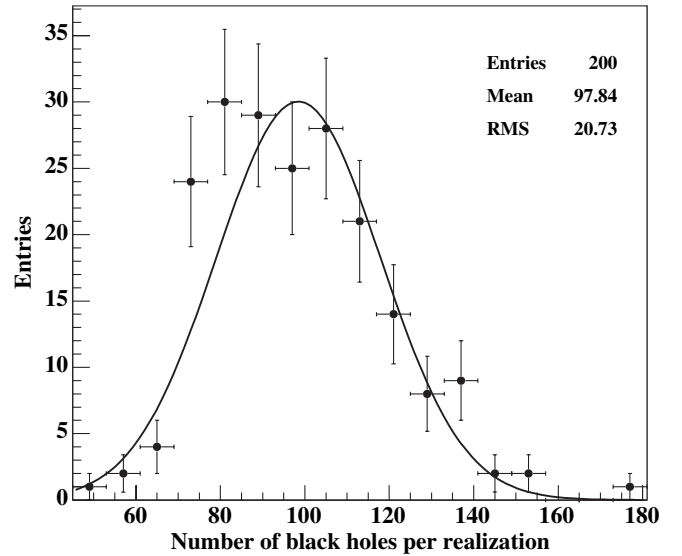


FIG. 1. Distribution of the Monte Carlo realizations of the Galactic minispike population—extracted from Ref. [27]—as a function of the number N_{BH} of objects within a galactocentric radius of 100 kpc.

drawn according to a Gaussian distribution. About 100 objects are expected within a 100 kpc galactocentric radius and ~ 60 of them populate the Galactic diffusive halo.

If we set N_{BH} equal to its mean value, we may derive analytically the average value and the variance of the boost factor B according to the method presented in Ref. [20]. We did not find any significant correlation between the position \mathbf{x} and annihilation volume ξ of the minispikes in the simulations of Ref. [27], so they seem to be distributed independently of the others. We readily infer an average boost factor of

$$B_{\text{eff}} = 1 + \frac{\langle \phi_r \rangle}{\phi_s} = 1 + N_{\text{BH}} \frac{\langle \xi \rangle \langle G \rangle}{I}. \quad (12)$$

The integral I stands for the convolution of the propagator G with the smooth DM distribution ρ_s ,

$$I = \int_{\text{DM halo}} G(\mathbf{x}) \left\{ \frac{\rho_s(\mathbf{x})}{\rho_0} \right\}^2 d^3\mathbf{x}. \quad (13)$$

In the following, a NFW profile is assumed, where a value $\rho_\odot = 0.3 \text{ GeV}/\text{cm}^3$ is considered for the solar dark matter density. The minispike annihilation volume and Galactic position are, respectively, distributed according to the probability functions $q(\xi)$ and $p(\mathbf{x})$ which are presented in Secs. III C and III D. These probability laws allow us to define the average values

$$\langle G^n \rangle = \int_{\text{DM halo}} \{G(\mathbf{x})\}^n p(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \quad (14)$$

and

$$\langle \xi^n \rangle = \int_0^{+\infty} \xi^n q(\xi) d\xi. \quad (15)$$

In practice, we will only be concerned with $n = 1$ and 2. The boost scatter σ_B may be derived from the relation

$$\frac{\sigma_B}{B_{\text{eff}}} = \frac{\sigma_r / \phi_s}{1 + \langle \phi_r \rangle / \phi_s} \simeq \frac{\sigma_r}{\langle \phi_r \rangle}, \quad (16)$$

where the variance σ_r of the random flux component ϕ_r is given by

$$\frac{\sigma_r^2}{\langle \phi_r \rangle^2} = \frac{1}{\langle N_{\text{BH}} \rangle} \left(\frac{\sigma_\xi^2}{\langle \xi \rangle^2} + \frac{\sigma_G^2}{\langle G \rangle^2} + \frac{\sigma_\xi^2 \sigma_G^2}{\langle \xi \rangle^2 \langle G \rangle^2} \right) + \frac{\sigma_N^2}{\langle N_{\text{BH}} \rangle^2}, \quad (17)$$

where σ_ξ , σ_G , and σ_N stand for the variances of the respective distributions. In Secs. IV and V, we will check the consistency of our Monte Carlo results in the light of the analytic expressions (12) and (16).

C. The inner structure of minispikes

In the case where the DM profile *before* the formation of the IMBH follows the commonly adopted NFW distribution [58], the final DM density $\rho(r)$ around the IMBH will be described by a power law $r^{-7/3}$ in a region of size R_{sp} .

At larger distances, the DM distribution has not been modified by the accretion onto the IMBH and the density still falls down as r^{-1} . This envelope does not contribute significantly to the DM annihilation and its associated production of positrons and antiprotons. On the contrary, the DM density steeply increases below R_{sp} and annihilations themselves set an upper limit to it,

$$\rho_{\text{max}} \approx \frac{m_\chi}{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle \tau}, \quad (18)$$

where τ is the time elapsed since the formation of the minispike. We denote by R_c the ‘‘cutoff’’ radius below

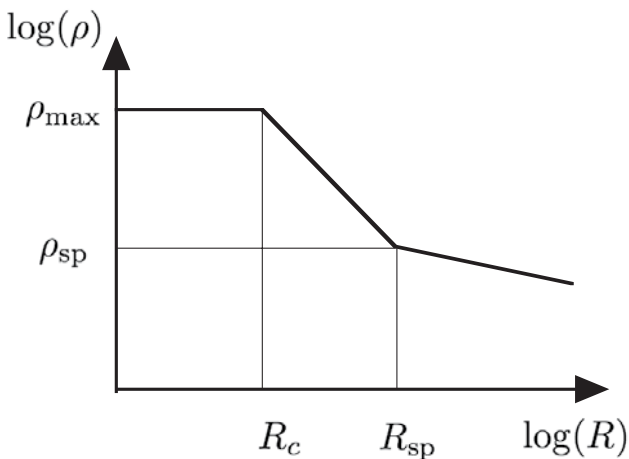


FIG. 2. Schematic representation of the inner structure of a minispike.

which the minispike core extends with uniform density ρ_{max} . This particular dependence of the density with the radius around the IMBHs is sketched in Fig. 2. For a typical value of $\tau = 10$ Gyr, we find

$$\rho_{\text{max}} = 8.752 \times 10^{15} \times \left(\frac{m_\chi}{\text{GeV}} \right) \times \left(\frac{\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle}{10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}} \right)^{-1} M_\odot \text{ kpc}^{-3}. \quad (19)$$

The relative extension of the minispike mantle ($R_c \leq r \leq R_{\text{sp}}$) with respect to the core ($r \leq R_c$) is given by

$$\frac{R_{\text{sp}}}{R_c} = \left\{ \eta \equiv \frac{\rho_{\text{max}}}{\rho_{\text{sp}}} \right\}^{3/7}, \quad (20)$$

where $\rho_{\text{sp}} = \rho(R_{\text{sp}})$ is the DM density at the surface $r = R_{\text{sp}}$ of the mantle. Integrating Eq. (10) over the inner structure of the minispike leads to the annihilation volume

$$\xi = \frac{12}{5} \pi R_{\text{sp}}^3 \left\{ \frac{\rho_{\text{sp}}}{\rho_0} \right\}^2 \left[\frac{14}{9} \eta^{5/7} - 1 \right]. \quad (21)$$

Because of the different minispike features (much less steep DM profile), the case of scenario A leads to much lower annihilation volumes. This case is not mentioned anymore in the following.

We have derived the probability function for ξ from the Monte Carlo results of Ref. [27] where the minispike radius R_{sp} and external density ρ_{sp} are provided for each object. This distribution—featured in Fig. 3—is characterized by very large values of the annihilation volume, with a tail extending up to $\xi \sim 1.2 \times 10^7 \text{ kpc}^3$. On average, with a minispike radius $R_{\text{sp}} = 2.84 \text{ pc}$ and density $\rho_{\text{sp}} = 48.51 M_\odot \text{ pc}^{-3}$, we infer a typical annihilation volume $\xi \sim 3.3 \times 10^6 \text{ kpc}^3$ for a benchmark cross section

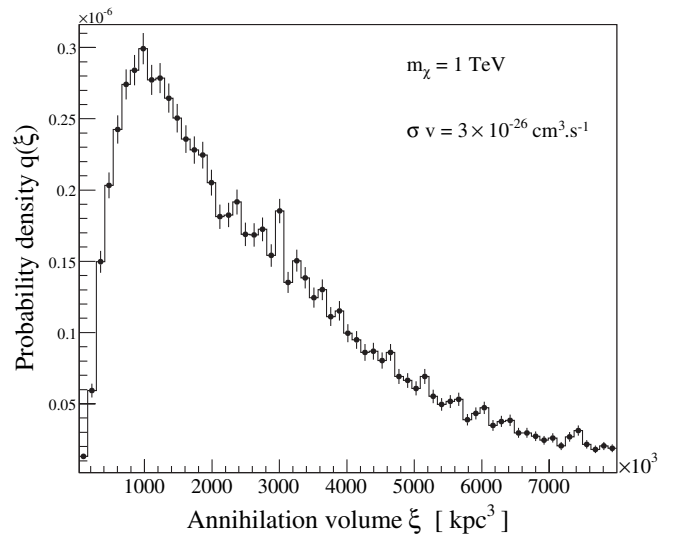


FIG. 3. The probability law $q(\xi)$ for the annihilation volume has been derived from the Monte Carlo results of Ref. [27]. We found no correlation with the minispike position.

$\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle = 3 \times 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$, a mass $m_\chi = 1 \text{ TeV}$, and $\rho_0 \equiv \rho_\odot = 0.3 \text{ GeV cm}^{-3}$. The distribution of ξ happens to be log-normal. In our Monte Carlo program, we simulate a large number of different IMBH halo populations. For each minispikes, the annihilation volume ξ is randomly chosen according to the $q(\xi)$ distribution.

Notice finally that the individual minispikes contribution φ_i scales as the product $\mathcal{S} \times \xi_i$ and is eventually proportional to

$$\varphi_{\text{minispikes}} \propto \langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle^{2/7} m_\chi^{-9/7}. \quad (22)$$

The cosmic ray signal depends weakly on the annihilation cross section since a decrease of the cross section is partially compensated by a higher annihilation volume. This issue is addressed with more details in Sec. VI, where the influence of the injection spectrum $g(E_S)$ will also be considered.

D. The Galactic distribution of minispikes

The Monte Carlo simulation of IMBH formation and evolution is used to derive the distribution function $p(r)$ for the galactocentric radius of each minispikes that has survived tidal disruption. This function gives the probability to find an object at galactocentric distance r within a spherical shell of thickness dr . It is expressed in units of kpc^{-3} and normalized to unity within the inner 100 kpc. This volume distribution is presented in Fig. 4 together with the parametrized function used in the following to estimate the boost factors.

The minispikes number density drops quickly beyond a few hundred parsecs from the Galactic center. This is because encounters and mergers are much more frequent in this region, and they are very efficient in disrupting dark

matter spikes. For those which have survived, the logarithmic slope of the radial profile varies from ~ 1.8 in the inner region to ~ 3.8 outward. This distribution is more peaked than for a typical NFW profile whose corresponding volume probability is also drawn in Fig. 4 for comparison.

IV. RESULTS FOR POSITRONS

This section is devoted to the positron signal. For pedagogical purposes, we first consider a fiducial case in which dark matter consists in $m_\chi = 1 \text{ TeV}$ particles fully annihilating at rest in electron-positron lines. In this very simple frame, we scrutinize the positron flux enhancement that minispikes produce with respect to a single smooth distribution of dark matter in the Galaxy.

The propagator for positrons is given by [20]. The energy at which a positron is detected on Earth depends on its propagation history. It is correlated to the distance over which it has diffused from the source. As a result, the flux at a given (detected) energy depends on the spatial distribution of the sources, i.e. on clumpiness. In this section, we study this effect in a more quantitative way.

A. The Monte Carlo simulation

We have performed Monte Carlo simulations of the minispikes spatial distribution in the halo. Each halo configuration yielded a value for the positron flux $\phi_r = \sum \varphi_i$, from which the average boost factor and the corresponding variance could be computed. The probability density functions for the number N_{BH} of IMBHs, their position \mathbf{x}_i and annihilation volume ξ_i were based on cosmological simulations from Ref. [27]. The corresponding probability laws have been presented in Sec. III. The propagated flux is compared to the flux produced by a smooth NFW profile to determine the boost factor.

B. The numerical results

Monte Carlo simulations involving 10^6 realizations of the IMBH population have been performed. The mean value and the variance of the resulting boost factors (for positron flux) at the Earth are sketched in Fig. 5 as a function of energy. The shaded areas show the region where the boost factor is expected to lie, with a 1σ and 2σ confidence level.

The yellow (gray) areas correspond to the 1σ region, the lighter one being obtained by fixing the annihilation volumes ξ_i to their mean expected value, while the darker one corresponds to the general case for which minispikes have values of ξ_i drawn according to their true probability distribution $q(\xi)$. In both cases, the dot-dashed curves stand for the 1σ contours obtained analytically. These curves are in good agreement with the ones obtained from the Monte Carlo. The small increase of the variance in the Monte Carlo results with respect to the analytical expectation is due to the variation of the number of black

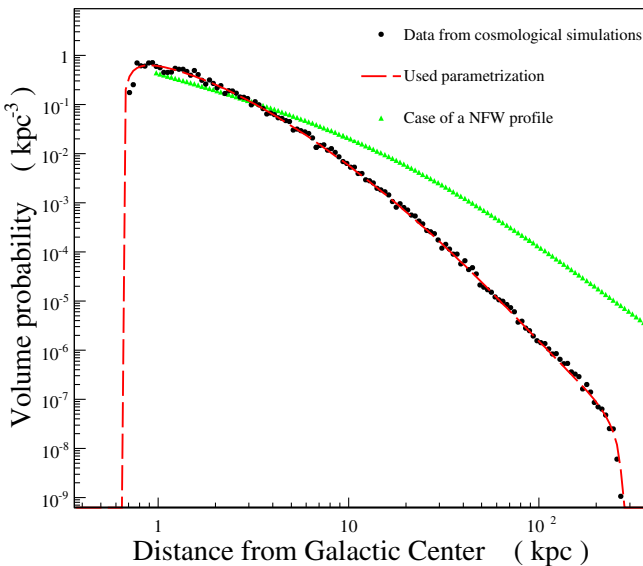


FIG. 4 (color online). Radial distribution of the minispikes, as extracted from the numerical results of Ref. [27].

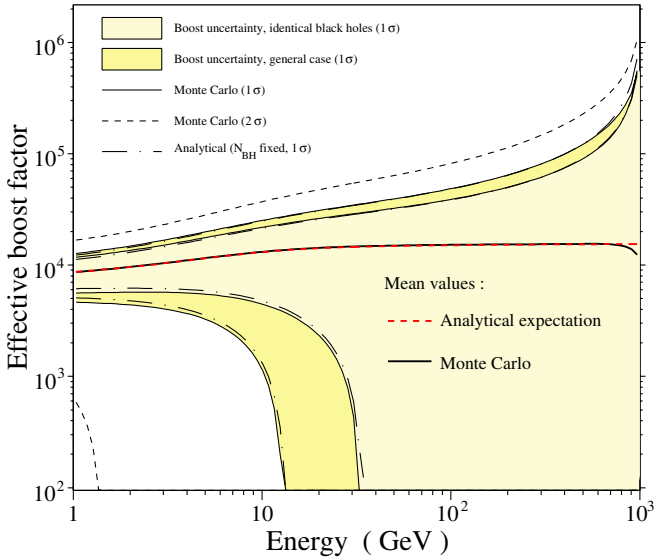


FIG. 5 (color online). Results from the Monte Carlo simulations of the IMBH population inside the Milky Way are compared to the analytical computations of the effective boost factor and its dispersion, for $m_\chi = 1$ TeV.

holes from one Monte Carlo realization to another, while this effect is not implemented in the analytical determination of the boost factor. The fact that these curves are fairly close to each other confirms that the dispersion of the number N_{BH} of IMBHs in the Milky Way poorly influences the final dispersion of the boost. This figure also shows that the boost factor can be very large, the expected value being of order 8000 (for a DM particle mass of 1 TeV).

Figure 5 shows that the variance increases with energy, and becomes very large for $E \gtrsim 20$ GeV. It clearly appears that the boost factor obeys two different statistical regimes. This is because the diffusive range of positrons depends on energy, and a positron emitted with energy E_s loses energy as it propagates outward from the source. The typical propagation scale for a positron injected with energy E_s and detected with energy E is given by

$$\lambda_D \equiv \sqrt{4K_0\tau_E(\epsilon^{\delta-1} - \epsilon_S^{\delta-1})/(1-\delta)}, \quad (23)$$

where K_0 and δ are, respectively, the normalization and the logarithmic slope of the diffusion coefficient, and $\epsilon \equiv (E/1 \text{ GeV})$. We have considered the median parameters given in [22], $K_0 = 0.0112 \text{ kpc}^2 \text{ Gyr}^{-1}$, $L = 4 \text{ kpc}$, $V_c = 12 \text{ km/s}$, and $\delta = 0.7$. The typical time scale for energy loss of 1 GeV positrons is $\tau_E \approx 10^{16} \text{ s}$. For a 1 TeV injected energy, we infer a propagation length $\lambda_D \approx 6.9 \text{ kpc} \times \sqrt{\epsilon^{-0.3} - 0.12}$, which ranges from 0.1 kpc at a detected energy of 990 GeV to 6.4 kpc at 1 GeV.

At high energy, this diffusive range is very short, and positrons will be detected only provided there is a minispikes very close to us. The probability of this event is low at energy close to E_s , but the contribution to the flux is high if it happens. The trade-off between these two trends leads to

a constant expectation value for the boost factor, but a large shotnoiselike variance. Conversely, at low energy the diffusive range is large, and the fluctuations in the number of sources contributing to the flux become relatively small.

The distributions of the boost factor at 1 GeV obtained with Monte Carlo simulations are displayed in the upper panel of Fig. 6. The gray histogram (narrower) corresponds to the case of identical minispikes with fixed annihilation volume. It can be compared to the analytical estimate of the boost factor distribution (dashed curve) in the limiting case where the number of IMBHs is large enough for the central-limit theorem to be valid. If it were so, the distribution of the boost factor would tend to be Gaussian. One

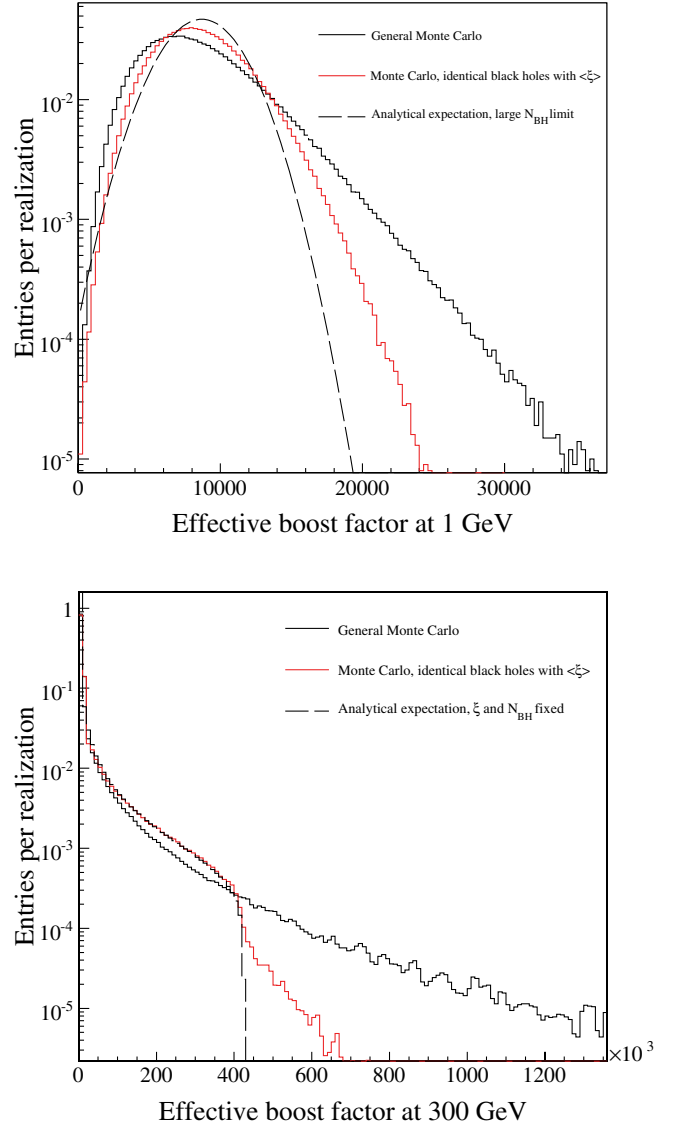


FIG. 6 (color online). Distribution of the boost factors at 1 GeV (upper panel) and 300 GeV (lower panel) obtained with the Monte Carlo simulations, and comparison to analytical expectations (see text for further details). The Gaussian distribution discussed in the text is plotted in the left panel (long-dashed curve).

can see that it is almost the case for identical objects. Though unrealistic, the case in which 10 times more IMBHs populate the Milky Way leads actually to a Gaussian distribution for $B(1 \text{ GeV})$ (not shown here). The statistics obtained in the general case is plotted in black; one can see that the effect of having different annihilation volumes for different minispikes shifts the distribution away from the Gaussian behavior.

The lower panel of Fig. 6 displays the distribution of the boost factor at 300 GeV. Again, the gray histogram (narrower) corresponds to the identical IMBH case and should be compared to the analytical estimate (dashed curve). The latter includes only one IMBH inside the sensitivity volume so that the extra events of the gray curve correspond to the (very) rare situations in which two minispikes contribute to the signal. This feature is not present in the general case, for which the statistics is displayed in black: it is erased by the random choice of ξ .

V. RESULTS FOR ANTIPROTONS

A. Propagator

The propagator of antiprotons has a larger range than for positrons, and the effect of escape at the Galactic boundaries must be considered. Modeling the Galaxy as a cylinder of radius $R \sim 20 \text{ kpc}$ and of unknown height $2L$, in which antiprotons diffuse with an energy-dependent coefficient K , the solution of the diffusion equation can be obtained as a Bessel-Fourier expansion over the r and z variables. It turns out that the side boundaries ($r = R$) can be neglected in most situations, as the $z = \pm L$ boundaries are closer to the solar neighborhood and influence more strongly the measured cosmic ray flux. As a consequence, the problem is essentially two dimensional and the propagator from any source to the Earth can be expressed as a function of r and z only. Moreover, the sources (the minispikes) can be considered as pointlike as far as the propagation over Galactic distances is considered, and special care has to be taken for the singular $1/r$ dependence of $G(r, z)$. This point has been exposed in detail in [65], along with the corresponding analytical expressions for $G(r, z)$. The main difference with the positron case is that the energy losses due to radiative losses are much less important for antiprotons. If the diffusion is supposed to occur at constant energy, then the spatial distribution of antiprotons created in a given minispoke is the same at every energy, and the boost factor should be energy independent (see below). There are actually at least two effects that depend on energy, namely, spallation and Galactic wind. Their influence will be discussed below, along with the results. We have considered the same median parameters as in the positron case.

B. The Monte Carlo simulation

Following the same method as for positrons, we have performed Monte Carlo simulations of the IMBH distribu-

tion, in order to estimate the expected antiproton flux, along with the associated variance. The procedure is exactly the same as before, and this section is devoted to the presentation of the results.

C. Expected values and variance of the boost factor

The average boost factor and its scatter are computed, both by direct evaluation of Eqs. (12) and (16) as well as by the Monte Carlo simulation. Since energy losses are less important for antiprotons than for positrons, we find that when spallation and Galactic wind are neglected, the boost factor does not depend on energy—see Fig. 7. When Galactic wind is considered, propagation becomes energy dependent at low energy, and so does the boost factor—see the dotted line in Fig. 7. The uncertainty band widens significantly below a few GeV. The importance of the Galactic wind can be estimated through the Peclet number defined as $Pe \equiv V_c L / K$, the effect of the wind being negligible for small values of Pe . The diffusion coefficient K is a growing function of energy, so propagation is dominated by diffusion at high energy, whereas the wind has a sizable effect at low energy. As the Galactic wind is directed outward from the disk, it prevents antiprotons from reaching the Earth. As a result, the range of diffusion is lowered and the number of sources actually contributing to the signal is also lowered. This explains the larger variance at low energy.

We see that the uncertainty on the antiproton flux is about 1 order of magnitude in the best case, i.e. with no energy-dependent processes. When both spallation and wind are considered, the prediction of the boost factor becomes meaningless below $\sim 20 \text{ GeV}$. Notice, however,

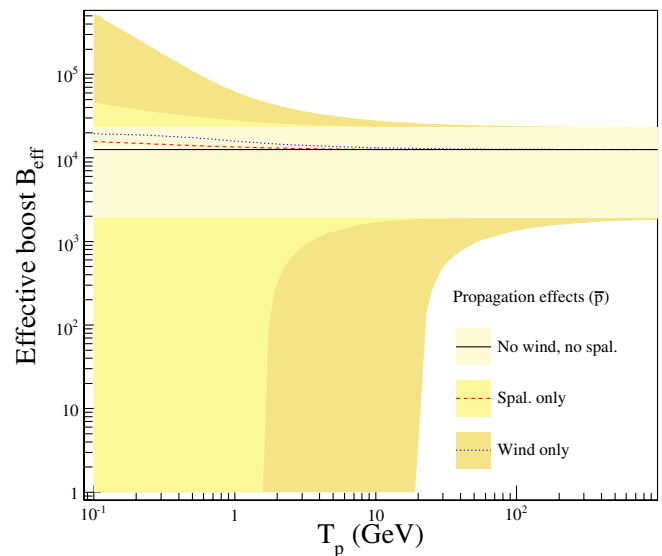


FIG. 7 (color online). Expected value and variance of the boost factor of the antiproton signal as a function of kinetic energy, in the case of a dark matter particle with mass $m_\chi = 1 \text{ TeV}$ and for different \bar{p} propagation configurations.

that when the thickness of the diffusive halo is larger, more minispikes contribute to the signal at the Earth and the variance decreases at all energies.

VI. A FEW REALISTIC MODELS FOR THE DM PARTICLE

We have so far considered a generic case for the DM particle, with a mass of 1 TeV and a typical weak-scale annihilation cross section. This part is devoted to the estimate of the positron and antiproton exotic fluxes within specific particle physics models. We choose four typical DM particle candidates in the frameworks of supersymmetry and extra dimensions.

All of these match the constraints from collider experiments and relic density. The smooth halo is modeled by a NFW profile with a solar dark matter density $\rho_\odot = 0.3 \text{ GeV/cm}^3$. In the previous computations (positronic line, energy-independent diffusion of antiprotons), the energy distribution at the source $g(E_S)$ was not relevant since it canceled in the ratio ϕ_r/ϕ_s . In this section, we make predictions for the flux and we perform the convolution of the propagator with the injection spectrum $g(E_S)$. This is true, in particular, in the case of positrons, for which energy losses are more significant than for antiprotons. The injection spectrum depends on the final states of the DM particle annihilation process. In all the models we considered, these spectra have been computed with PYTHIA [66]. The annihilation cross section plays a significant role as regards the \mathcal{S} factor of Eq. (7) as well as the annihilation volume ξ through the dependence of the maximum density in the core, given by Eq. (19).

In the framework of the minimal supersymmetric standard model (MSSM) with a gravity driven supersymmetry breaking (mSUGRA), we choose two specific sets of parameters leading to two typical DM candidates. The latter are a *b-ino* and a *Higgsino* (respectively referred to as \tilde{B} and \tilde{H} in the following), depending on the field content of the lightest supersymmetric particle. They differ mainly in their couplings to the standard model particles and thus have different annihilation final states. The public code SUSPECT [67] is used to derive the weak-scale parameters

from the mSUGRA inputs by solving the renormalization group equations. The cross sections for the different final states have been determined with the MICROMEGAS [68,69] package.

The first Kaluza-Klein model considers warped extra dimensions with a SO(10) grand unified theory (GUT), as described in [70]. In that context, the DM particle is a right-handed Dirac neutrino. Its stability arises from the conservation of a \mathbf{Z}_3 symmetry—hence its name LZP for lightest Z particle. To fulfill the relic density constraint, we choose $M_{\text{KK}} = 6 \text{ TeV}$ and $m_{\text{LZP}} = 50 \text{ GeV}$, respectively, for the Kaluza-Klein scale and the LZP mass. The second Kaluza-Klein model assumes universal extra dimensions with $R^{-1} = 1 \text{ TeV}$ [71]. Then, the DM particle is the lightest particle with odd K parity, which happens to be the first Kaluza-Klein excitation of the B^0 hypercharge gauge boson, referred to as the $B^{(1)}$ (or LKP) with mass $m_{\text{LKP}} = 1 \text{ TeV}$.

All the relevant particle physics parameters and the inferred values regarding the maximum density and the mean annihilation volume $\langle \xi \rangle$ are summarized in Table I. Monte Carlo simulations are performed in the context of these four models. The LZP being a Dirac particle, one has $\delta = 1/4$ in that case, whereas $\delta = 1/2$ otherwise. The results are presented in Fig. 8 for positrons and in Fig. 9 for antiprotons. The absolute fluxes are featured together with the actual data points. The positron flux measurements are taken from HEAT- e^\pm [72] and HEAT-pbar experiments [73] and two independent analyses of AMS01 data [74,75]. For antiprotons, we borrowed the results from [76–79].

We first discuss the positron case. In Fig. 8, the dashed line is the unboosted, and therefore guaranteed, exotic flux in the framework of the considered models. In each case, the yellow (gray) area represents the flux uncertainty with IMBH minispikes. For clarity, the dark gray contours stand for the $\sigma/2$ level whereas the 1σ contours are indicated by the light gray regions. In the four models we have considered, the positron flux at 10 GeV is in the range between $\sim 6 \times 10^{-6}$ and $\sim 3 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ GeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$. The exotic fluxes generated by IMBH minispikes are fairly insensitive to the annihila-

TABLE I. Relevant parameters for the particle dark matter models discussed in Sec. VI.

	\tilde{B}		\tilde{H}		LZP		LKP	
m	140 GeV		108 GeV		50 GeV		1 TeV	
$\sigma v (\times 10^{-26} \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1})$	0.26		1.9		2.04		1.7	
Final states	$b\bar{b}$	91%	W^+W^-	90%	$q\bar{q}$	74%	$q\bar{q}_{\text{up}}$	11% ($\times 3$)
	$\tau^+\tau^-$	9%	Z^0Z^0	10%	$\nu\bar{\nu}$	17%	$q\bar{q}_{\text{down}}$	1% ($\times 3$)
					$\ell^+\ell^-$	2.88% ($\times 3$)	$\nu\bar{\nu}$	4%
							$\ell^+\ell^-$	20% ($\times 3$)
$\rho_{\text{max}} (\times 10^{17} \text{ M}_\odot \text{ kpc}^{-3})$	47.1		4.97		2.15		51.5	
$\langle \xi \rangle (\times 10^5 \text{ kpc}^3)$	46.6		9.35		5.14		49.6	

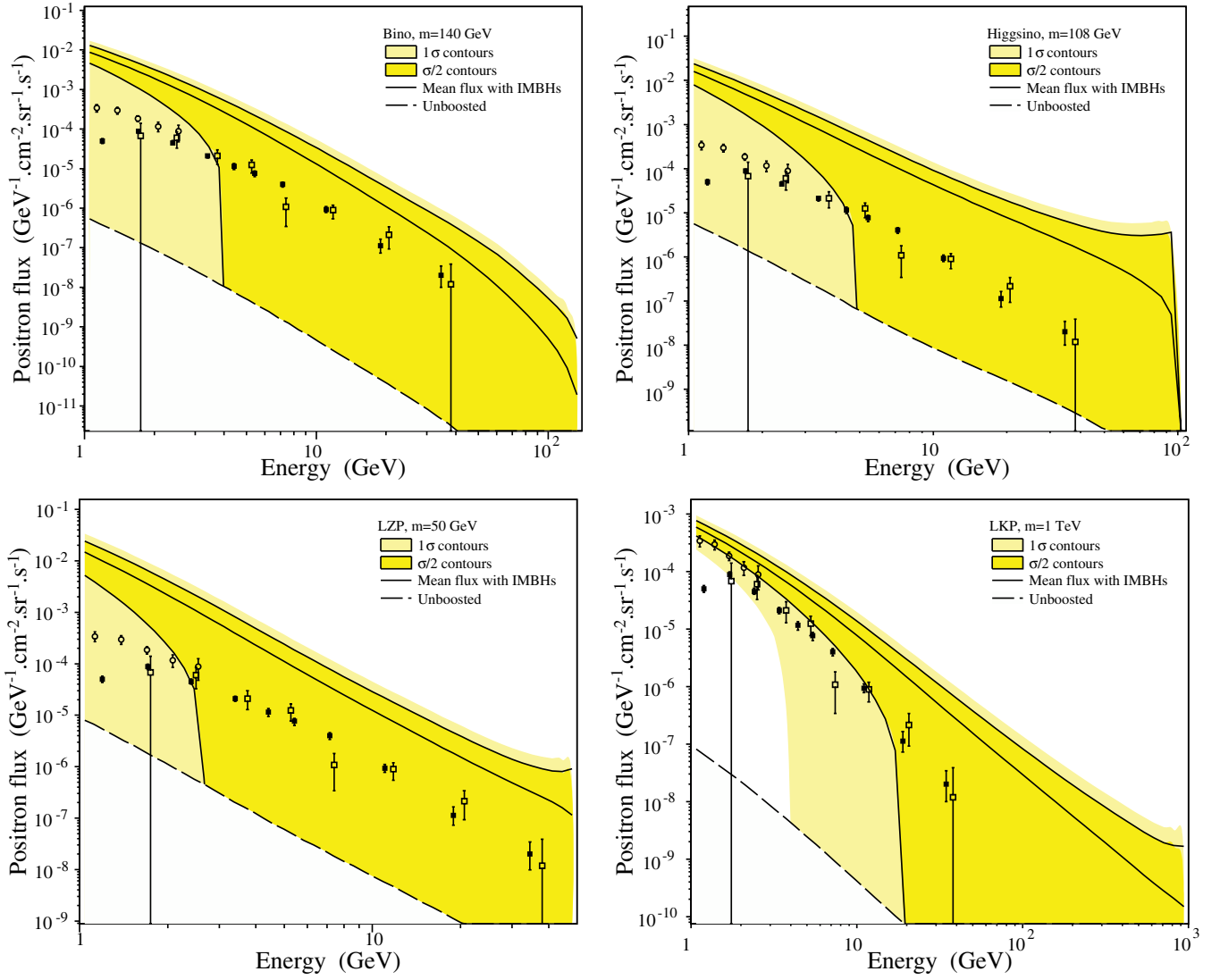


FIG. 8 (color online). Exotic positron fluxes in four particle physics models (top panels: supersymmetric DM; bottom panels: Kaluza-Klein DM) within the IMBH minispikes scenario, and comparison to actual measurements. The dark and light gray areas, respectively, correspond to contours at the $\sigma/2$ and 1σ levels.

tion cross section, as a consequence of Eq. (22). We unexpectedly find that the flux is not very sensitive to the mass. This is because the injection spectrum $g(E_S)$ softens the $m_\chi^{-9/7}$ dependence of the annihilation rate inferred from that relation. In addition, the variance of the flux is significantly smaller in the LKP case. Indeed, the injection spectrum $g(E_S)$ extends up to 1 TeV and has an important high energy contribution. As a consequence, the sensitivity sphere below ~ 10 GeV has a wider spread than for the three other DM candidates. The LKP flux is less sensitive to the shotnoise associated with the random realization of the IMBH population. The other cases feature a higher dispersion, mainly due to the fact that the DM particle mass is lower and the sensitivity sphere smaller.

We now discuss the antiproton case. The results are displayed in Fig. 9, along with the standard flux, for the

same set of propagation parameters as for the positrons (see Sec. IV). In the case of a smooth halo, the exotic contribution is always lower than the flux due to standard processes. When IMBH minispikes are considered, the antiproton flux at 10 GeV is in the range between $\sim 3 \times 10^{-2}$ and $\sim 4 \times 10^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ GeV}^{-1} \text{ sr}^{-1}$ in the four models we have considered. We observe the same delicate interplay between the mass dependence of the annihilation rate and the energy behavior of the injection spectrum $g(E_S)$ —though the latter is less dependent on the final state species than for positrons. As before, the antiproton flux is weakly dependent on the annihilation cross section. This is particularly obvious in the two upper panels, between which $\langle \sigma_{\text{ann}} v \rangle$ varies by a factor ~ 7 . Below ~ 20 GeV, the antiproton primary fluxes have a very large scatter, as explained in Sec. V C.

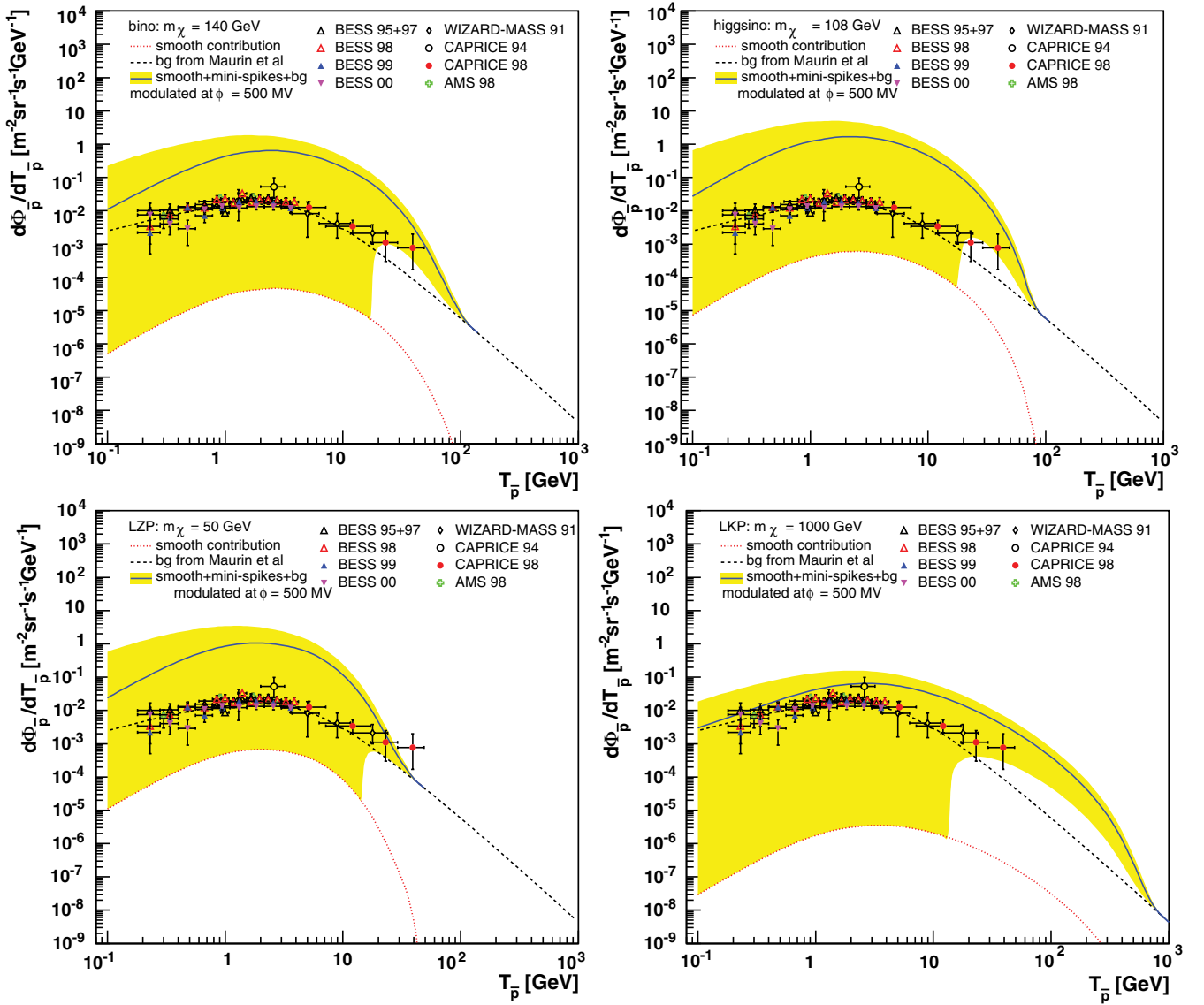


FIG. 9 (color online). Antiproton fluxes as a function of kinetic energy in the case of a b -ino dark matter particle with mass $m_\chi = 140$ GeV. The fluxes were computed without (upper panels) or with (lower panels) wind (with a value $V_c = 12$ km/s), without (left panel) or with (right panel) spallation.

VII. DISCUSSION AND PERSPECTIVES

We have considered a scenario in which the formation of IMBHs generates dramatic enhancements of the DM density in their vicinity. We have computed the expected number of unmerged IMBHs in the Galactic halo, their spatial distribution, and the properties of their associated minispikes. We found high values for the positron and antiproton boost factors, e.g. of order 10^4 for a fiducial DM particle with a 1 TeV mass. For an average minispoke population, the flux of primary positrons and antiprotons turns out to be 1 to 2 orders of magnitude larger than the measured flux, and is fairly insensitive to the specific properties of the DM candidate. In particular, the annihilation cross section has little influence because of the

presence of an annihilation plateau in the cores of minispikes. This interesting feature allows configurations in the particle physics parameter space which are usually disregarded—because of their very low cross sections—to become testable. As the average flux signal exceeds the data points, we could naively conclude that the minispoke scenario is already ruled out by observation. However, because of the small number of objects, the variance associated to the positron and antiproton signal is enormous and no definitive conclusion can be reached. We leave for further investigation the quantitative estimate of the confidence level at which the minispoke scenario agrees with measurements.

Notice finally that this variance is small at low energy for positrons, and, on the contrary, is small at high energy

for antiprotons. Should a cutoff above some specific energy E_c be detected in the positron flux, the natural interpretation would lead to a DM particle mass $m_\chi \sim E_c$. The possible existence of substructures leaves room for more subtle explanations. In particular, if an excess in the antiproton flux were found above E_c , we would conclude that we live in a particular Milky Way realization where substructures are far from the Earth. The farther those substructures, the smaller E_c with respect to m_χ , hence the possibility of a misinterpretation of the data. This illustrates the fact that combining various indirect signals could give information about the spatial distribution of DM.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Andrew Zentner for early collaboration and for making available the numerical realizations of IMBHs in the Milky Way, on which our calculations are based. We thank the French Programme National de Cosmologie (PNC) for its financial support. P.B. wishes to thank Stéphane Ranchon and the H.E.S.S. team of LAPP for providing help and CPU for this project. G.B. acknowledges the support, during the first part of this project, by the Helmholtz Association of National Research Centres. J.L. is grateful to the French GDR SUSY and the CPPM-ANTARES group for having supported this work. We also thank D. Hooper for valuable comments.

-
- [1] L. Bergstrom, Rep. Prog. Phys. **63**, 793 (2000).
 - [2] C. Munoz, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 3093 (2004).
 - [3] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, Phys. Rep. **405**, 279 (2005).
 - [4] <http://www-glast.stanford.edu/>.
 - [5] <http://icrhp9.icrr.u-tokyo.ac.jp/index.html>.
 - [6] <http://www.mpi-hd.mpg.de/hfm/HESS/HESS.html>.
 - [7] <http://hegra1.mppmu.mpg.de/MAGICWeb/>.
 - [8] <http://veritas.sao.arizona.edu/index.html>.
 - [9] G. Bertone and D. Merritt, Mod. Phys. Lett. A **20**, 1021 (2005).
 - [10] J. Ahrens *et al.* (IceCube Collaboration), Nucl. Phys. B, Proc. Suppl. **118**, 371 (2003).
 - [11] E. Aslanides *et al.* (ANTARES Collaboration), arXiv:astro-ph/9907432.
 - [12] G.L. Kane, L. T. Wang, and J. D. Wells, Phys. Rev. D **65**, 057701 (2002).
 - [13] M. Kamionkowski and M.S. Turner, Phys. Rev. D **43**, 1774 (1991).
 - [14] M.S. Turner and F. Wilczek, Phys. Rev. D **42**, 1001 (1990).
 - [15] A. J. Tylka, Phys. Rev. Lett. **63**, 840 (1989).
 - [16] G.L. Kane, L. T. Wang, and T. T. Wang, Phys. Lett. B **536**, 263 (2002).
 - [17] E. A. Baltz and J. Edsjo, Phys. Rev. D **59**, 023511 (1998).
 - [18] E. A. Baltz, J. Edsjo, K. Freese, and P. Gondolo, Phys. Rev. D **65**, 063511 (2002).
 - [19] H.C. Cheng, J.L. Feng, and K.T. Matchev, Phys. Rev. Lett. **89**, 211301 (2002).
 - [20] J. Lavalley, J. Pochon, P. Salati, and R. Taillet, Astron. Astrophys. **462**, 827 (2007).
 - [21] A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and P. Salati, Phys. Rev. D **58**, 123503 (1998).
 - [22] F. Donato, N. Fornengo, D. Maurin, P. Salati, and R. Taillet, Phys. Rev. D **69**, 063501 (2004).
 - [23] L. Bergstrom, J. Edsjo, and P. Ullio, Astrophys. J. **526**, 215 (1999).
 - [24] A.M. Lionetto, A. Morselli, and V. Zdravkovic, J. Cosmol. Astropart. Phys. **09** (2005) 010.
 - [25] P. Picozza *et al.*, Astropart. Phys. **27**, 296 (2007).
 - [26] <http://ams.cern.ch/>.
 - [27] G. Bertone, A. R. Zentner, and J. Silk, Phys. Rev. D **72**, 103517 (2005).
 - [28] G. Bertone, Phys. Rev. D **73**, 103519 (2006).
 - [29] M. C. Miller and E. J. M. Colbert, Int. J. Mod. Phys. D **13**, 1 (2004).
 - [30] C.L. Fryer and V. Kalogera, Astrophys. J. **554**, 548 (2001).
 - [31] R. Narayan, arXiv:astro-ph/0310692.
 - [32] L. Ferrarese and H. Ford, Space Sci. Rev. **116**, 523 (2005).
 - [33] J. Kormendy and D. Richstone, Annu. Rev. Astron. Astrophys. **33**, 581 (1995).
 - [34] L. Ferrarese and D. Merritt, Astrophys. J. **539**, L9 (2000).
 - [35] R. J. McLure and J. S. Dunlop, Mon. Not. R. Astron. Soc. **331**, 795 (2002).
 - [36] K. Gebhardt *et al.*, Astrophys. J. **539**, L13 (2000).
 - [37] S. Tremaine *et al.*, Astrophys. J. **574**, 740 (2002).
 - [38] S.M. Koushiappas, J.S. Bullock, and A. Dekel, Mon. Not. R. Astron. Soc. **354**, 292 (2004).
 - [39] X. Fan *et al.* (SDSS Collaboration), Astron. J. **122**, 2833 (2001).
 - [40] A.J. Barth, P. Martini, C.H. Nelson, and L.C. Ho, Astrophys. Lett. **594**, L95 (2003).
 - [41] C. J. Willott, R. J. McLure, and M. J. Jarvis, Astrophys. J. **587**, L15 (2003).
 - [42] Z. Haiman and A. Loeb, Astrophys. J. **552**, 459 (2001).
 - [43] P. Madau and M.J. Rees, Astrophys. J. Lett. **551**, L27 (2001).
 - [44] H. S. Zhao and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **95**, 011301 (2005).
 - [45] R. Islam, J. Taylor, and J. Silk, Mon. Not. R. Astron. Soc. **354**, 443 (2004).
 - [46] R. Islam, J. Taylor, and J. Silk, Mon. Not. R. Astron. Soc. **354**, 427 (2004).
 - [47] P.J.E. Peebles, Astrophys. J. **178**, 371 (1972).
 - [48] P. Young, Astrophys. J. **242**, 1232 (1980).
 - [49] J. R. Ipser and P. Sikivie, Phys. Rev. D **35**, 3695 (1987).
 - [50] G.D. Quinlan, L. Hernquist, and S. Sigurdsson, Astrophys. J. **440**, 554 (1995).
 - [51] P. Gondolo and J. Silk, Phys. Rev. Lett. **83**, 1719 (1999).
 - [52] D. Merritt, arXiv:astro-ph/0301257.

- [53] G. Bertone and D. Merritt, *Phys. Rev. D* **72**, 103502 (2005).
- [54] P. Ullio, H. Zhao, and M. Kamionkowski, *Phys. Rev. D* **64**, 043504 (2001).
- [55] D. Merritt, M. Milosavljevic, L. Verde, and R. Jimenez, arXiv:astro-ph/0201376.
- [56] D. Merritt, arXiv:astro-ph/0301365.
- [57] D. Merritt, S. Harfst, and G. Bertone, *Phys. Rev. D* **75**, 043517 (2007).
- [58] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **490**, 493 (1997).
- [59] J. F. Navarro *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **349**, 1039 (2004).
- [60] D. Reed *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **357**, 82 (2005).
- [61] D. Merritt, J. Navarro, A. Ludlow, and A. Jenkins, *Astrophys. J.* **624**, L85 (2005).
- [62] S. M. Koushiappas and A. R. Zentner, *Astrophys. J.* **639**, 7 (2006).
- [63] T. Appelquist, H. C. Cheng, and B. A. Dobrescu, *Phys. Rev. D* **64**, 035002 (2001).
- [64] D. Maurin, R. Taillet, and C. Combet, arXiv:astro-ph/0609522.
- [65] T. Bringmann and P. Salati, arXiv:astro-ph/0612514.
- [66] T. Sjöstrand, S. Mrenna, and Peter Skands, *J. High Energy Phys.* **05** (2006) 026.
- [67] A. Djouadi, J. L. Kneur, and G. Moultaka, *Comput. Phys. Commun.* **176**, 426 (2007); <http://www.lpta.univ-montp2.fr/kneur/Suspect>.
- [68] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, *Comput. Phys. Commun.* **149**, 103 (2002).
- [69] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov, *Comput. Phys. Commun.* **174**, 577 (2006).
- [70] K. Agashe and G. Servant, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 231805 (2004).
- [71] G. Servant and T. Tait, *Nucl. Phys.* **B650**, 391 (2003).
- [72] S. Coutu *et al.*, *Astropart. Phys.* **11**, 429 (1999).
- [73] J. J. Beatty *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 241102 (2004).
- [74] J. Alcaraz *et al.* (AMS Collaboration), *Phys. Lett. B* **484**, 10 (2000).
- [75] M. Aguilar *et al.* (AMS Collaboration), *Phys. Lett. B* **646**, 145 (2007).
- [76] S. Orito *et al.* (BESS Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1078 (2000).
- [77] T. Maeno *et al.* (BESS Collaboration), *Astropart. Phys.* **16**, 121 (2001).
- [78] M. Boezio *et al.* (WiZard/CAPRICE Collaboration), *Astrophys. J.* **561**, 787 (2001).
- [79] M. Aguilar *et al.* (AMS Collaboration), *Phys. Rep.* **366**, 331 (2002); **380**, 97 (2003).

REF

[30]

Galactic secondary positron flux at Earth

T. Delahaye, R. Lineros, F. Donato, N. Fornengo, J. Lavallo, P. Salati, R. Taillet,

Astronomy and Astrophysics **501** (2009) 821

Galactic secondary positron flux at the Earth

T. Delahaye^{1,2}, R. Lineros², F. Donato², N. Fornengo², J. Lavalle², P. Salati¹, and R. Taillet¹

¹ LAPTH, Université de Savoie, CNRS, BP 110, 74941 Annecy-le-Vieux Cedex, France

² Dipartimento di Fisica Teorica, Università di Torino & INFN - Sezione di Torino, via P. Giuria 1, 10122 Torino, Italy
e-mail: lineros@to.infn.it

Received 10 October 2008 / Accepted 4 March 2009

ABSTRACT

Context. Secondary positrons are produced by spallation of cosmic rays within the interstellar gas. Measurements have been typically expressed in terms of the positron fraction, which exhibits an increase above 10 GeV. Many scenarios have been proposed to explain this feature, among them some additional primary positrons originating from dark matter annihilation in the Galaxy.

Aims. The PAMELA satellite has provided high quality data that has enabled high accuracy statistical analyses to be made, showing that the increase in the positron fraction extends up to about 100 GeV. It is therefore of paramount importance to constrain theoretically the expected secondary positron flux to interpret the observations in an accurate way.

Methods. We focus on calculating the secondary positron flux by using and comparing different up-to-date nuclear cross-sections and by considering an independent model of cosmic ray propagation. We carefully study the origins of the theoretical uncertainties in the positron flux.

Results. We find the secondary positron flux to be reproduced well by the available observations, and to have theoretical uncertainties that we quantify to be as large as about one order of magnitude. We also discuss the positron fraction issue and find that our predictions may be consistent with the data taken before PAMELA. For PAMELA data, we find that an excess is probably present after considering uncertainties in the positron flux, although its amplitude depends strongly on the assumptions made in relation to the electron flux. By fitting the current electron data, we show that when considering a soft electron spectrum, the amplitude of the excess might be far lower than usually claimed.

Conclusions. We provide fresh insights that may help to explain the positron data with or without new physical model ingredients. PAMELA observations and the forthcoming AMS-02 mission will allow stronger constraints to be placed on the cosmic-ray transport parameters, and are likely to reduce drastically the theoretical uncertainties.

Key words. ISM: cosmic rays

1. Introduction

Among the different particles observed in cosmic rays, positrons still raise unanswered questions. Cosmic positrons are created by spallation reactions of cosmic ray nuclei with interstellar matter and propagate in a diffusive mode, because of their interaction with the turbulent component of the Galactic magnetic field. The expected flux of positrons can be calculated from the observed cosmic ray nuclei fluxes, using the relevant nuclear physics and solving the diffusion equation.

The HEAT experiment ([Barwick et al. 1997](#); [Beatty et al. 2004](#)) showed that the positron fraction (the ratio of the positron to the total electron-positron fluxes) possibly exhibits an unexpected bump in the 10 GeV region of the spectrum. Although this bump could be due to some unknown systematic effect, the HEAT result has triggered many explanations. For instance, [Moskalenko & Strong \(1998\)](#) suggested that an interstellar nucleon spectrum harder than that expected could explain the excess. Many works also focused on the dark matter hypothesis, the bump being due to a primary contribution from the annihilation of dark matter particles. The positron excess expected in this framework is very uncertain, because the nature of dark matter is unknown, and the propagation of positrons involves physical quantities that currently are also not precisely known. The related astrophysical uncertainties were calculated and quantified in [Delahaye et al. \(2008\)](#), where it was shown that they may be significant, especially in the low energy part of the spectrum, a property common also to the antiproton

(e.g. [Donato et al. 2004](#)) and the antideuteron ([Donato et al. 2000, 2008](#)) signals. For positrons, sizeable fluxes from dark matter annihilation are typically possible if dark matter overdensities are locally present, which is usually coded into the so-called “boost factor”. A detailed analysis of the admissible boost factors for positrons and antiprotons was performed by [Lavallo et al. \(2008b\)](#), who showed that boost factors are typically confined to less than about a factor of 10–20. Computing the antimatter fluxes directly in the frame of a cosmological N -body simulation leads to the same conclusions ([Lavallo et al. 2008a](#)).

The PAMELA experiment ([Picozza et al. 2007](#)) has released its first results on the positron fraction for energies ranging from 1.5 GeV to 100 GeV and with a large statistics ([Adriani et al. 2008](#)). The positron fraction is observed to rise steadily for energies above 10 GeV, reinforcing the possibility that an excess is actually present. It is therefore timely and crucial to complete a novel analysis of the positron flux, including a robust estimation of the accuracy of the theoretical determination. The calculation of the uncertainties affecting the standard spallation-induced positron population is especially important when unexpected distortions are observed in experimental data, to address the issue in a more robust way. This and an analysis of the positron signal from dark matter annihilation and its astrophysical uncertainties ([Delahaye et al. 2008](#)), will set the proper basis for discussing in detail the experimental results.

The uncertainties in the positron flux have several origins. First, the cosmic ray nuclei measurements have their

experimental uncertainties, which then affect the predictions of induced secondary fluxes, such as positrons. Second, various modelings of the nuclear cross-sections involved in the positron production mechanism are available, and they are not in complete agreement with each other, implying a range of theoretical variation. Third, the uncertainties in the propagation parameters involved in the diffusion equation were thoroughly studied (Maurin et al. 2001). A detailed analysis of their impact on the secondary positron flux is therefore needed.

In this paper, we therefore study the secondary positron production and transport in the Galaxy, with emphasis on determining the various sources of uncertainties, namely: (i) the nuclear cross-sections; (ii) the effect induced by the primary injection spectra; (iii) the local interstellar medium; and (iv) the propagation modeling; the paper is organized into three main parts. The positron injection spectrum and its uncertainties are derived in Sect. 2. We use up-to-date nuclear cross-sections and show the differences with older parameterizations. The Green functions associated with the positron propagation throughout the Milky Way are discussed in Sect. 3. Our slab model is mostly characterized by energy losses and diffusion caused by magnetic turbulences. The secondary positron flux at the Earth is presented in Sect. 4 with a range of variation that includes the effects discussed throughout the paper. We also confirm that considering the cosmic ray proton and α retro-propagation as well as diffusive reacceleration and convection has little effect on our results above a few GeV. Our results for the positron flux and its uncertainties agree with all the available measurements by different experimental collaborations (we recall that PAMELA does not provide, at the moment, the positron flux, but only the positron fraction). The positron flux, by itself, does not exhibit unusual features and is in basic agreement with the results of Moskalenko & Strong (1998) and Porter et al. (2008). This could imply that both the HEAT excess and the PAMELA rise observed in the positron fraction, originate from dark matter annihilation, but we argue in Sect. 5 that electrons might also play an important role. Depending on the data set used to constrain the electron spectrum, the estimate of the positron fraction can exhibit quite different behaviors, which can affect the interpretation of the positron fraction data. We show that our predictions can indeed be consistent with the existing data of the positron fraction for a soft electron spectrum, compatible with fits to experimental data. Hard electron spectra, instead, definitely point toward the presence of an excess. We finally insist in Sect. 6, as a main result of our analysis, that the current uncertainties in the transport parameters translate into one order of magnitude uncertainties in the secondary positron spectrum.

2. Production of positrons by spallation

Secondary positrons are created by spallation of cosmic ray nuclei (mainly protons and helium nuclei) on interstellar matter (mainly hydrogen and helium). We compute $q_{e^+}(\mathbf{x}, E_e)$, the number of positrons of energy E_e created per unit volume at position \mathbf{x} , per unit time and per GeV. The positron source term reads:

$$q_{e^+}(\mathbf{x}, E_e) = 4\pi \sum_{\text{targ}=\text{H,He}} \sum_{\text{proj}=\text{p},\alpha} n_{\text{targ}}(\mathbf{x}) \times \int \Phi_{\text{proj}}(\mathbf{x}, E_{\text{proj}}) \times dE_{\text{proj}} \times \frac{d\sigma}{dE_e}(E_{\text{proj}} \rightarrow E_e), \quad (1)$$

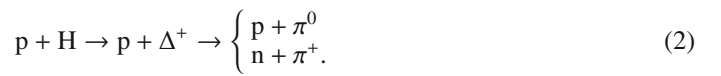
where $\Phi_{\text{proj}}(\mathbf{x}, E_{\text{proj}})$ denotes the cosmic ray nucleon flux at position \mathbf{x} , $n_{\text{targ}}(\mathbf{x})$ the number density of target nuclei, and $d\sigma/dE_e$

the cross-section for the reactions creating positrons. We discuss these quantities this section.

2.1. Spallation cross-sections for $p + p \rightarrow e^+$

We first focus on the differential cross-section for the production of positrons. This production occurs by means of a nuclear reaction between two colliding nuclei, yielding mainly charged pions π^\pm and other mesons, for which positrons are one of the final products of the decay chain. There are four main possible collisions: cosmic ray (CR) proton on interstellar (IS) hydrogen or helium; CR alpha particle on IS proton or helium. For the sake of clarity, we present only the formulae for the proton-proton collisions, but include all four processes in our results on the positron spectra.

At energies below about 3 GeV, the main channel for production of positrons involves the excitation of a Delta resonance, which then decays into pions:



The charged pions decay into muons, which subsequently decay into positrons. At higher energies direct production of charged pions proceeds with the process:



Kaons may also be produced:



and the decay of kaons produces muons (63.44%) and pions (20.92%), which then decay into positrons as final products of their decay chain.

To compute the differential cross-section for the pion-production processes, we need the probability $d\sigma(E_p \rightarrow E_\pi)/dE_\pi$ of a spallation of a proton of energy E_p yielding a pion with energy E_π and the probability $\mathcal{P}(E_\pi \rightarrow E_e)$ of such a pion eventually decaying into a positron of energy E_e . This second quantity can be computed thanks to basic quantum electrodynamics, whereas several parameterizations of the first quantity can be found in Badhwar & Stephens (1977), Tan & Ng (1983) and Kamae et al. (2006). The production cross-section of positrons is then given by:

$$\frac{d\sigma}{dE_e}(E_p \rightarrow \pi^+ \rightarrow E_e) = \int \frac{d\sigma}{dE_\pi}(E_p \rightarrow E_\pi) \times dE_\pi \times \mathcal{P}(E_\pi \rightarrow E_e). \quad (5)$$

Kamae et al. (2006) also provided a direct parameterization of the $p + p \rightarrow e^+$ reaction¹. All the afore mentioned parameterizations differ from each other and have been calibrated with different nuclear data sets. The default choice in our calculations, unless stated otherwise, is the Kamae et al. (2006) parameterization, which includes additional processes (especially resonances other than the Delta at low interaction energies) and has been calibrated with recent data. As stated in the original paper, we nevertheless warn that this parameterization relies on fits to Monte Carlo simulations and may be easily affected by small uncertainties.

¹ A few typos in the published version have been corrected with the kind help of the authors.

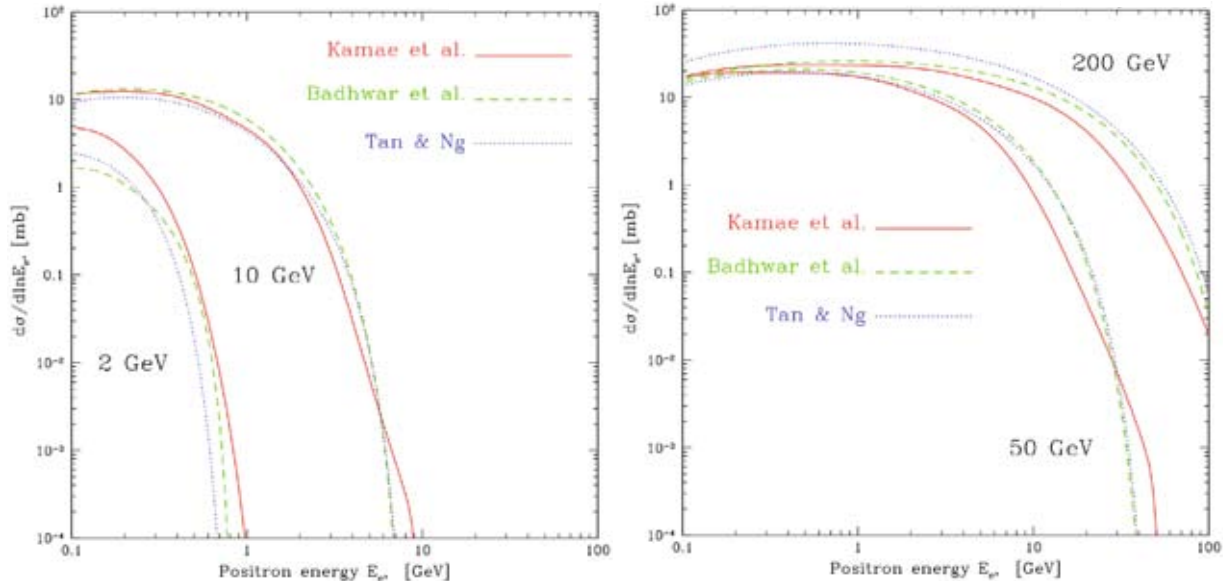


Fig. 1. Comparison between various parameterizations of the positron production cross-section at different incident proton energies.

The cross-section for the process involving kaons can be computed in a similar way to the calculation of direct pion production. The QED expressions for the production of positrons from the kaon are provided e.g. in Appendix D of [Moskalenko & Strong \(1998\)](#).

In [Fig. 1](#), we plot the cross-section for the positron production from the p-H scattering, as a function of positron energy. The incident proton energy is set to 2, 10 (left), 50 and 200 (right) GeV. The three different plots at fixed proton energy correspond to the cross-section parameterizations of [Kamae et al. \(2006\)](#) (solid), [Badhwar & Stephens \(1977\)](#) (dashed) and [Tan & Ng \(1983\)](#) (dotted). The differences between these plots vary with both incident proton and final positron energies. For protons of intermediate energies of 10 and 50 GeV, the flatter part of the cross-section (at low energies) varies only slightly between the different parameterizations. The [Kamae et al. \(2006\)](#) parameterization undershoots and then overshoots the other two models only in the high energy range, while for slow protons (see the 2 GeV case), it provides more positrons. This is because both the multiple baryonic resonances around 1600 MeV and the standard $\Delta(1232)$ state have been added into their model.

2.2. Incident proton flux

The proton flux $\Phi_p(x, E_p)$ has been measured at the location of the Earth $x = x_\odot$ by several experiments. Various parameterizations of these measurements are found in the literature. In this analysis, we adopt the determinations of [Shikaze et al. \(2007\)](#) and [Donato et al. \(2001\)](#). The effect induced on the positron source term in [Eq. \(1\)](#) is displayed in [Fig. 2](#), where we also show the effect arising from the different nuclear physics parameterizations discussed in the previous subsection. The solid lines refer to [Kamae et al. \(2006\)](#), the dashed lines to [Badhwar & Stephens \(1977\)](#), and the dotted lines to [Tan & Ng \(1983\)](#). For each set of curves, the thick lines are obtained for the proton spectrum parameterization of [Donato et al. \(2001\)](#), while the thin lines refer to [Shikaze et al. \(2007\)](#). [Figure 2](#) illustrates that different parameterizations of the incident proton flux cause less significant uncertainty than the nuclear models. At low (1 GeV) and high (10^3 GeV) energies, the [Shikaze et al. \(2007\)](#)

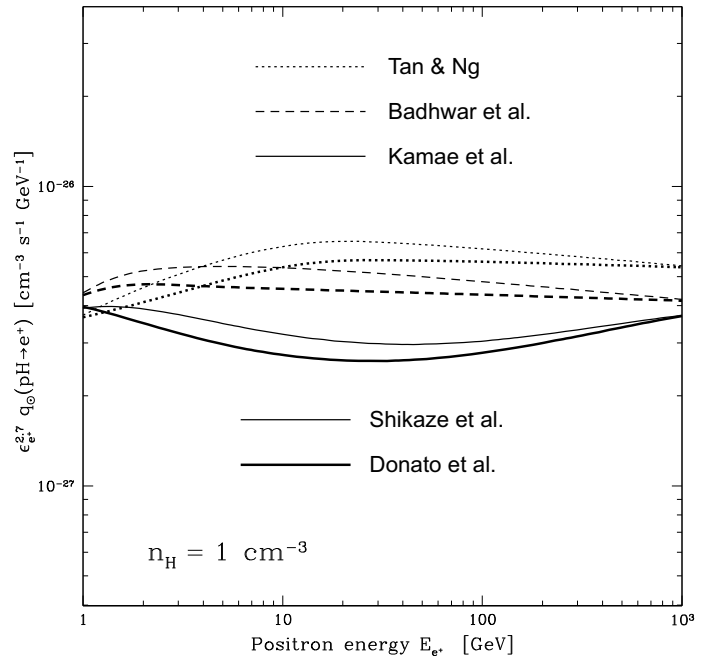


Fig. 2. Comparison of the effect due to different parameterizations for the cosmic ray proton spectra on the positron source term, as a function of the positrons energy. The additional effect induced by the different nuclear physics parameterizations is also shown. The galactic protons density is taken at 1 hydrogen atom per cm^3 .

and [Donato et al. \(2001\)](#) fluxes produce almost identical results on the proton flux, but at intermediate energies the differences are also negligible.

In contrast, the cross-section parameterizations produce more significant variations. [Figure 2](#) shows that the model of [Kamae et al. \(2006\)](#) gives the faintest spectrum in all the energy range (from 1 GeV to 1 TeV), while that of [Tan & Ng \(1983\)](#) corresponds to the maximal spectrum. The most significant difference occurs at 20–30 GeV, of about a factor of two.

The spatial dependence of the proton flux is determined by solving the diffusion equation and normalizing the resulting flux

to the solar value. This procedure will be referred to as retro-propagation in the following. We find that retropropagation is not crucial and that one can safely approximate the proton flux as being homogeneous and equal to the solar value. This is because most positrons detected in the solar neighborhood have been created locally, over a region where the proton flux does not vary significantly. This will be discussed further in the final section.

For the sake of simplicity, we show only the impact of the pH interaction on the determination of the positron spectrum, but we recall that our results in the subsequent sections refer to cosmic ray protons and α interacting with both IS hydrogen and helium with densities of $n_{\text{H}} = 0.9 \text{ cm}^{-3}$ and $n_{\text{He}} = 0.1 \text{ cm}^{-3}$ respectively. These average values for the hydrogen and helium densities are of course approximations based on local estimates, but we do not expect significant changes in the averaging within the kpc scale (Ferrière et al. 2007), which, as we show in the subsequent sections, is the relevant scale for the secondary positron propagation. Cross-sections for heavy nuclei were dealt with in the same way as in Norbury & Townsend (2007).

3. Propagation

In the Galaxy, a charged particle travelling between its source and the solar neighborhood is affected by several processes. Scattering by magnetic fields leads to a random walk in both real space (diffusion) and momentum space (diffusive reacceleration). Particles may also be spatially convected away by the galactic wind (which induces adiabatic losses), and lose energy as they interact with either interstellar matter or the electromagnetic field and radiation of the Galaxy (by synchrotron radiation and inverse Compton processes). Above a few GeV, the propagation of positrons in the Milky Way is dominated by space diffusion and energy losses.

In this paper, the diffusion coefficient is assumed to be homogeneous and isotropic, with a dependence on energy given by $K(E) = \beta K_0 (\mathcal{R}/1 \text{ GV})^\delta$, where the magnetic rigidity \mathcal{R} is related to the momentum p and electric charge Ze by $\mathcal{R} = pc/Ze$. Cosmic rays are confined within a cylindrical diffusive halo of radius $R = 20 \text{ kpc}$ and height $2L$, their density vanishing at the boundaries $N(|z| = L, r) = N(z, r = R) = 0$. As discussed below, the radial boundary has a negligible effect on the density of positrons in the Solar System. In this section, we do not consider the possibility of Galactic convection and diffusive reacceleration. These processes are taken into account in Sect. 4.2, where we demonstrate that they have little effect. The convective wind is assumed to carry cosmic rays away from the Milky Way disk in the z direction at a constant velocity V_c . Diffusive reacceleration depends on the velocity V_a of the Alfvén waves. The free model parameters are therefore the size L of the diffusive halo, both the normalization K_0 and spectral index δ of the diffusion coefficient, the convective wind velocity V_c , and the Alfvén velocity V_a (see Sect. 3.3 for additional details). This model has been consistently used in several studies to constrain the propagation parameters (Maurin et al. 2001, 2002; Donato et al. 2002) and examine their consequences (Taillet & Maurin 2003; Maurin & Taillet 2003) for the standard \bar{p} flux (Donato et al. 2001), the exotic \bar{p} and \bar{d} fluxes (Maurin et al. 2004, 2006; Donato et al. 2004; Barrau et al. 2002, 2005; Bringmann & Salati 2007), and also for positrons (Lavalley et al. 2008b; Delahaye et al. 2008). The reader is referred to Maurin et al. (2001) for a more detailed presentation and motivation of the framework.

3.1. The Green function for positrons

The propagation of positrons differs from that of the nuclei in several respects. Although space diffusion is an essential ingredient common to all cosmic ray species, positrons suffer mostly from inverse Compton and synchrotron energy losses, e.g. Moskalenko & Strong (1998), whereas (anti-)protons are mostly sensitive to the galactic wind and the nuclear interactions as they cross the Milky Way disk. As a result, a positron line at source leads to an extended spectrum after its propagation. This disagrees with studies of most nuclear species for which, as first approximation, energy losses can be neglected. Consequently, the diffusion equation that leads to the positron number density N per unit of volume and energy, with the source term $q_{e^+}(\mathbf{x}, E)$, becomes:

$$-K_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^\delta \Delta N + \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \frac{dE}{dt} N \right\} = q_{e^+}(\mathbf{x}, E). \quad (6)$$

The first term is simply the diffusion coefficient written as $K(\mathcal{R}) \approx K_0 (E/E_0)^\delta$, where $E_0 \equiv 1 \text{ GeV}$ is used to maintain the correct units throughout the paper.

The synchrotron and inverse Compton losses can be written as $dE/dt(E) = -E^2/(E_0 \tau_E)$. Defining a pseudo-time:

$$\hat{t} \equiv \tau_E \frac{(E/E_0)^{\delta-1}}{1-\delta} \quad (7)$$

and applying the following rescaling:

$$\hat{N} \equiv (E/E_0)^2 N \quad \text{and} \quad \hat{q}_{e^+}(\mathbf{x}, E) \equiv (E/E_0)^{2-\delta} q_{e^+}(\mathbf{x}, E),$$

the diffusion equation can be rewritten as:

$$\frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{t}} - K_0 \Delta \hat{N} = \hat{q}_{e^+}(\mathbf{x}, \hat{t}), \quad (8)$$

which is formally identical to the well-known time-dependent diffusion equation (Bulanov & Dogel 1974; Baltz & Edsjö 1999).

It proves convenient to separate diffusion along the radial and vertical directions. Considering a source located at (x, y, z, \hat{t}_{E_S}) and detected at $(R_\odot, 0, 0, \hat{t}_{E_0})$, the corresponding flux depends only on the radial relative distance $r = |\mathbf{r}_S - \mathbf{r}_O|$, the distance of the source from the plane $z = z_S$ and the relative pseudo-time $\hat{\tau} = \hat{t}_{E_0} - \hat{t}_{E_S}$. When the radial boundary is taken into account, one has to use an expansion over Bessel functions (Bulanov & Dogel 1974; Delahaye et al. 2008). However, in most situations it is safe to ignore the radial boundary. The Green function $\hat{\mathcal{G}}_\odot(r, z, \hat{\tau})$ of Eq. (8) is then given by:

$$\hat{\mathcal{G}}_\odot(\hat{\tau}, r, z) = \frac{\theta(\hat{\tau})}{4\pi K_0 \hat{\tau}} \exp\left(-\frac{r^2}{4K_0 \hat{\tau}}\right) \times \mathcal{G}^{1D}(z, \hat{\tau}). \quad (9)$$

The radial behavior of the positron Green function encourages us to define the characteristic diffusion length:

$$\lambda_D \equiv \sqrt{4K_0 \hat{\tau}}. \quad (10)$$

This length defines the scale of the positron sphere, i.e. the region where most of the positrons detected at the Earth are produced. It depends on the injected E_S and detected E_0 positron energies in terms of the pseudo-time difference $\hat{\tau}$. For GeV energies, $\lambda_D \lesssim 5 \text{ kpc}$, typically, which defines the local character of the positron origin. The effect of boundaries along $z = \pm L$ appears in only $\mathcal{G}^{1D}(z, \hat{\tau})$. For convergence properties, two distinct regimes are worth considering (Lavalley et al. 2007)

1. when the extension λ_D of the positron sphere is smaller than the half-thickness L of the diffusive halo, it is most appropriate to use the so-called electrical image formula (e.g. [Baltz & Edsjö 1999](#)):

$$\mathcal{G}^{1D}(z, \hat{\tau}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta(\hat{\tau})}{\sqrt{4\pi K_0 \hat{\tau}}} \exp\left\{-\frac{(z_n - z)^2}{4K_0 \hat{\tau}}\right\}, \quad (11)$$

where $z_n = 2Ln + (-1)^n z$;

2. in the opposite situation, a more suitable expression is based on an analogy with the solution to the Schrödinger equation in an infinitely deep square potential: expansion of the solution over the eigenfunctions of the Laplacian operator:

$$\mathcal{G}^{1D}(z, \hat{\tau}) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-K_0 k_n^2 \hat{\tau}} \phi_n(0) \phi_n(z) + e^{-K_0 k_n'^2 \hat{\tau}} \phi_n'(0) \phi_n'(z) \quad (12)$$

where:

$$\phi_n(z) = \sin[k_n(L - |z|)]; \quad k_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{L} \quad (\text{even})$$

$$\phi_n'(z) = \sin[k_n'(L - z)] \quad \text{and} \quad k_n' = n \frac{\pi}{L} \quad (\text{odd}).$$

The true positron propagator for a monochromatic point source is related to Eq. (9) by

$$\mathcal{G}_{\odot}^{e^+}(E \leftarrow E_S, r, z) = \frac{\tau_E E_0}{E^2} \times \hat{\mathcal{G}}_{\odot}(\hat{\tau} = \hat{t}_E - \hat{t}_{E_S}, r, z). \quad (13)$$

The secondary positron flux at the Earth is then given by (considering the Earth as the origin of the coordinate system):

$$\begin{aligned} \phi_{e^+}^{\odot}(E) &= \frac{\beta c}{4\pi} \int_E dE_S \\ &\times \int_{\text{slab}} d^3 \mathbf{x}_S \mathcal{G}_{\odot}^{e^+}(E \leftarrow E_S, r_S, z_S) q_{e^+}(\mathbf{x}_S, E_S), \end{aligned} \quad (14)$$

where $|\mathbf{x}_S|^2 = r_S^2 + z_S^2$ is the squared distance from the source to the Earth, and β is the positron velocity in units of the velocity of light.

3.2. Analytical solution for a homogeneous source term

The secondary positrons originate from spallation processes of cosmic rays off the interstellar gas, the latter being located mainly inside the galactic disk. If we assume that the cosmic ray fluxes and the gas are homogeneous inside the disk and place the radial boundaries at infinity (see Sect. 3.1), the spatial integral in Eq. (14) can be derived analytically, e.g. by implementing an infinite disk of thickness $[-z_{\max}, z_{\max}]$. The flux at the Earth simplifies into

$$\phi_{e^+}^{\odot}(E) = \frac{\beta c}{4\pi} \int_E dE_S q_{e^+}(E_S) \times \frac{\tau_E E_0}{E^2} \times \eta(\lambda_D), \quad (15)$$

where

$$\eta(\lambda_D) = \int_{-z_{\max}}^{+z_{\max}} d^3 \mathbf{x}_S \hat{\mathcal{G}}_{\odot}(\hat{\tau} = \hat{t}_E - \hat{t}_{E_S}, r, z). \quad (16)$$

This quantity depends only on the characteristic scale λ_D and can be expressed as

$$\eta(\lambda_D) = \left(\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \text{Erf}\left(\frac{z_n^{\max}}{\lambda_D}\right) - \text{Erf}\left(\frac{z_n^{\min}}{\lambda_D}\right) \right\}, \right. \\ \left. \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(k_n(L - z_{\max}))}{k_n} \times e^{-k_n^2 \lambda_D^2 / 4} \right). \quad (17)$$

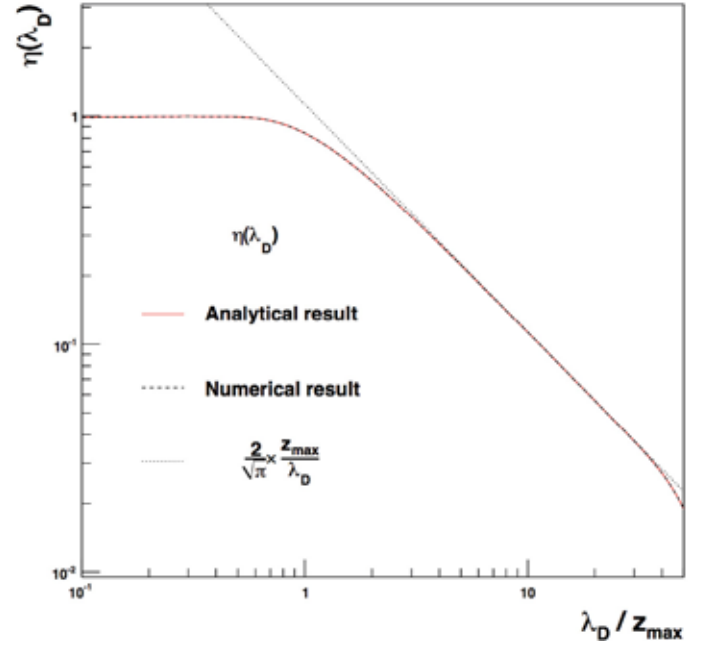


Fig. 3. The integral η is plotted as a function of the ratio λ_D/z_{\max} . Because η can be interpreted as the fraction of the positron sphere intersected by the Galactic disk, we infer that it should be unity for $\lambda_D \ll z_{\max}$. In the converse regime, η is proportional to the ratio z_{\max}/λ_D . See text for further details.

The upper line corresponds to the electrical image solution, while the lower line is obtained by expanding the solution over the eigenfunctions of the Laplacian operator (see Sect. 3.1). Regarding the former case, we define $z_n^{\max} \equiv 2nL + (-1)^n z_{\max}$ and $z_n^{\min} \equiv 2nL - (-1)^n z_{\max}$ where z_{\max} is defined to be 100 pc. The energy dependence of the solutions is hidden in the propagation length λ_D . This simplification is helpful because it can provide an efficient way of checking the numerical spatial integral. Moreover, if the source term is shown to be almost homogeneous in the thin galactic disk, then this solution fully applies. Homogeneity is certainly justified in the energy range considered here but could break down at TeV energies.

In Fig. 3, η is plotted as a function of the propagation length λ_D . This parameter can be interpreted as the ratio of received to produced positrons. In the regime where λ_D is much smaller than the half-thickness L of the diffusive halo, positron propagation occurs as if the diffusive halo were infinite. In this 3D limit, the propagator $\hat{\mathcal{G}}_{\odot}(\hat{\tau} = \hat{t}_E - \hat{t}_{E_S}, r, z)$ describes the probability of a positron detected at Earth originating in the location r and z and as such is normalized to unity. Secondary positrons are produced solely in the disk and η equals by definition the fraction of the positron sphere filled by the disk. We therefore expect this fraction to be close to 1 when λ_D is smaller than z_{\max} as the positron sphere becomes small enough to be embedded entirely inside the Galactic disk. In the converse situation, η decreases approximately as

$$\eta(\lambda_D \gg z_{\max}) \simeq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{z_{\max}}{\lambda_D}. \quad (18)$$

Both behaviors are illustrated in Fig. 3.

3.3. Propagation parameters

The propagation parameters δ , K_0 , L , V_c , and V_a are not measured directly. However, it is possible to determine the parameter

Table 1. Typical combinations of diffusion parameters that are compatible with the B/C analysis (Maurin et al. 2001).

Model	δ	K_0 [kpc ² /Myr]	L [kpc]	V_c [km s ⁻¹]	V_a [km s ⁻¹]
MIN	0.85	0.0016	1	13.5	22.4
MED	0.70	0.0112	4	12	52.9
MAX	0.46	0.0765	15	5	117.6

As shown in Donato et al. (2004), these propagation models correspond respectively to minimal, medium, and maximal primary antiproton fluxes.

sets that are consistent with the observed properties of nuclei cosmic ray spectra, by comparing the observed spectra with the predictions of the diffusion model. In Maurin et al. (2001, 2002), the secondary-to-primary ratio B/C is used to place constraints on the parameter space, and in Donato et al. (2002) the information provided by the cosmic ray radioactive species is studied. For the discussion below, it is convenient to isolate three sets of parameters labeled MIN, MED, and MAX, defined in Table 1. These configurations are named according to the primary antiproton signal yielded by dark matter species annihilating in the Milky Way halo (Barrau et al. 2002; Donato et al. 2004) and filling completely the diffusive halo. The half-thickness L increases from 1 to 15 kpc between models MIN and MAX. Notice that in the B/C analysis of Maurin et al. (2001), L is shown to be correlated with the normalization K_0 . Thick diffusive halos are associated with high diffusion coefficients and hence to high values of λ_D . Inspired by Fig. 3, we anticipate that the secondary positron flux should have its lowest value in the MAX configuration and its highest for the MIN model.

3.4. Energy losses

A detailed analysis including all energy-loss processes is presented in Sect. 4.2. Here, we focus on the main processes for our energy range of interest. At energies higher than about 10 GeV, the most relevant energy losses are those caused by synchrotron radiation and inverse Compton (IC) scattering of the cosmic microwave background (CMB) and stars photons:

$$-b^{\text{loss}}(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{\tau_E} = \frac{\epsilon^2}{\tau_{\text{sync}}} + \frac{\epsilon^2}{\tau_*} + \frac{\epsilon^2}{\tau_{\text{CMB}}}. \quad (19)$$

Each energy-loss timescale τ can be calculated by means of both the Compton cross-section and the corresponding radiation-field energy density, as detailed in detail by Longair (1994). These Compton processes can indeed be computed in the Thomson limit. In the energy domain of interest here for positrons, say 10–100 GeV, the condition $\gamma_{e^+} E_{\text{ph}} < m_e$, where γ_{e^+} is the positron Lorentz factor and E_{ph} is the photon energy, is fulfilled for all relevant frequencies of the considered radiation fields.

By studying Eqs. (7) and (10), we note that τ_E has a significant effect on the positron propagation length: the higher the value of τ_E , the farther is the origin of detected positrons from Earth. Since the Green function has a Gaussian dependence on the propagation scale, the importance of estimating accurately the τ_E parameter is reinforced, even though we expect the effect to be lower for secondaries than for primaries, for which the source term may, in some cases, exhibit a far more pronounced spatial dependency. In the following, we briefly discuss the different contributions to the energy-loss timescale in the high energy range. The CMB contribution is the most straightforward to

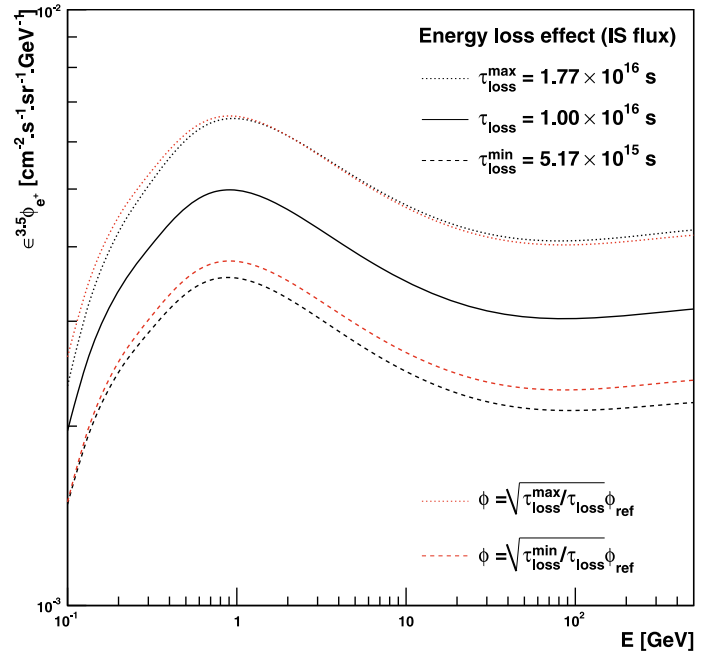


Fig. 4. Interstellar secondary positron flux $E^{3.5} \Phi_{e^+}$ as a function of the energy at Earth, for different values of the energy loss timescale τ_E . The longer the timescale, the larger the flux. The scaling relation $\phi \propto \sqrt{\tau_E}$ is also reported.

compute. Adopting a mean CMB temperature of $T = 2.725$ K, we readily determine $\tau_{\text{CMB}} = 3.77 \times 10^{16}$ s.

For the synchrotron contribution, the local value of the magnetic field, which equals τ_{sync} , remains unknown. As explained in Beck et al. (2003), there are two different methods of measurement. The first relies on the intensity of the synchrotron radiation from cosmic electrons and gives a value of $B \sim 4 \pm 1 \mu\text{G}$ (Prouza & Smida 2003). However, this value depends on the adopted model, particularly in terms of the cosmic ray electron spectrum estimation. The second method uses the Faraday rotation measurements of pulsar polarized emission, and yields $B \sim 1.8 \pm 0.3 \mu\text{G}$ (Han et al. 2006). The two results are inconsistent but Beck et al. (2003) were able to identify further uncertainty in the second method, which, if the thermal electron density is anticorrelated with the magnetic field strength, produces a revised value of $B \in [1.5; 4] \mu\text{G}$, and hence $\tau_{\text{sync}} \in [2.47 \times 10^{16}; 1.76 \times 10^{17}]$ s.

Finally, to evaluate the contribution of IC processes in the interstellar radiation field (ISRF), we rely on the study performed by Strong et al. (2000). They estimated the local value of the ISRF energy density, whose uncertainty can be inferred from its variation in value within the 2 kpc around the solar position. This provides an average local ISRF energy density of $U_{\text{rad}} \sim 2 \pm 1 \text{ eV cm}^{-3}$, hence $\tau_{\text{IC}} \in [6.54 \times 10^{15}; 1.96 \times 10^{16}]$ s.

The leading term caused by IC scattering by the ISRF (star and dust light) is clearly affected by the most significant uncertainty. By combining all the contributions, we derive an uncertainty range for the energy-loss timescale of $\tau_E \in [5.17 \times 10^{15}; 1.77 \times 10^{16}]$ s. As shown in Fig. 4, the uncertainty caused by τ_E does not exhibit a strong energy dependence. This can be understood from the expression of the positron Green function given in Eqs. (9) and (13), and from the fact that the source term of secondaries is close to be homogeneously distributed in the thin Galactic disk. From this, the secondary positron flux roughly scales as $\sqrt{\tau_E}$, as also illustrated in Fig. 4. Since τ_E determines the positron propagation scale, the related

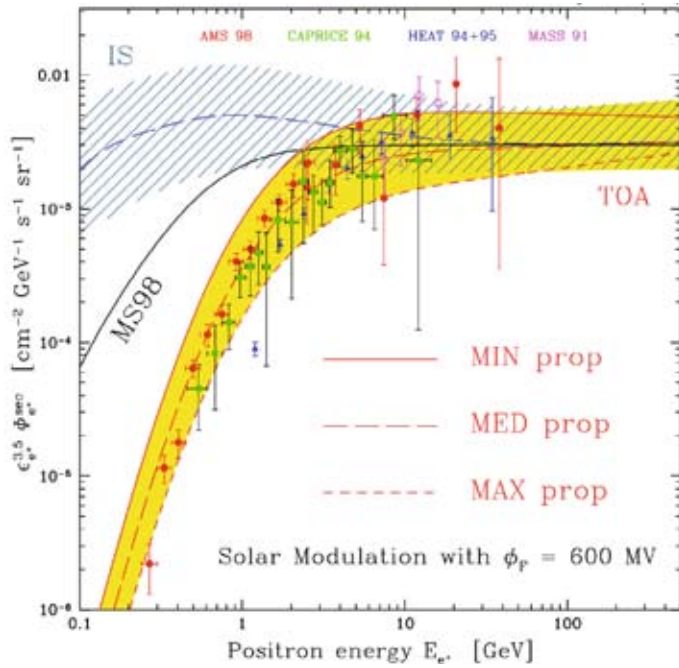


Fig. 5. Secondary positron flux as a function of the positron energy. The blue hatched band corresponds to the CR propagation uncertainty in the IS prediction, whereas the yellow strip refers to TOA fluxes. The long-dashed curves feature our reference model with the Kamae et al. (2006) parameterization of nuclear cross-sections, the Shikaze et al. (2007) injection proton and helium spectra and the MED set of propagation parameters. The MIN, MED and MAX propagation parameters are displayed in Table 1. Data are taken from CAPRICE (Boezio et al. 2000), HEAT (Barwick et al. 1997), AMS (Aguilar et al. 2007; Alcaraz et al. 2000) and MASS (Grimani et al. 2002).

uncertainties should have a far stronger effect on the primary contributions with a far greater spatial (or time) dependency, such as for instance nearby astrophysical or exotic point sources. In the following, we have adopted as a standard the value of $\tau_E = 1 \times 10^{16}$ s.

We note that τ_{sync} and τ_* are not expected to remain constant throughout the entire diffusive halo (Strong et al. 2000). However, as we discuss extensively in Sect. 4.1, most of the positrons detected at Earth with energies greater than a few GeV, are typically of local origin. This is illustrated in Fig. 10, where $\tau_E = 1 \times 10^{16}$ s, for detected positrons of energy higher than 1 GeV: more than 75% of the signal has originated within a distance of 2 kpc; the higher the detected energy, the higher this percentage. Since we are not interested in very low energy positrons, we can safely neglect spatial variations in the magnetic field B and the ISRF energy density U_{rad} discussed above.

4. The positron flux and its uncertainties

Figure 5 displays the calculated secondary positron flux modulated at solar minimum along with the most recent experimental data. We used a Fisk potential $\phi = 600$ MV as applied in Perko (1987). The MIN, MED and MAX cases are illustrated by the red solid, long-dashed and short-dashed lines, respectively, while the yellow area denotes the uncertainty in the propagated flux caused by the uncertainty in the astrophysical parameters. The nuclear cross-section from Kamae et al. (2006) and the Shikaze et al. (2007) proton and helium fluxes were used. We adopted the MED prediction as our reference model. In the same figure, we also plot the interstellar flux. The upper

long-dashed curve corresponds to the MED case whereas the slanted band indicates the uncertainty in the Galactic propagation parameters. The solid line shows the IS flux from Moskalenko & Strong (1998). Below ~ 100 GeV, the yellow uncertainty band is delineated by the MIN and MAX models. As discussed at the end of the previous section, the MIN (MAX) set of parameters yields the highest (lowest respectively) values for the secondary positron flux. Since we considered more than about 1 600 different configurations compatible with the B/C ratio (Maurin et al. 2001), other propagation models become important in determining the extremes of the uncertainty band at higher energies. The maximal flux at energies above 100 GeV does not correspond to any specific set of propagation parameters over the whole range of energies, as already noted in Delahaye et al. (2008), where the case of positrons produced by dark matter annihilation was studied.

From Fig. 5, we see that the variation in the propagation parameters induces an uncertainty in the positron flux, which reaches about one order of magnitude over the entire energy range considered here. It is a factor of 6 at 1 GeV, and smoothly decreases down to a factor of 4 or less for energies higher than 100 GeV. The agreement with experimental data is quite good at all energies within the uncertainty band. The Moskalenko & Strong (1998) prediction of the IS secondary positron flux as parameterized by Baltz & Edsjö (1999) is indicated by the black solid curve, and hardly differs from our reference model (long-dashed curve and MED propagation) above a few GeV. The HEAT data points are in good statistical agreement with this MED model.

The effects induced by different parameterizations of the nuclear production cross-sections and by the variation in the proton injection spectrum are shown in Fig. 6. In the left panel, we present the TOA positron fluxes calculated from the Tan & Ng (1983) (dotted), Badhwar et al. (1977) (dashed), and Kamae et al. (2006) (solid) cross-section models for the MED propagation scheme and the Shikaze et al. (2007) proton and helium injection spectra. The Kamae et al. (2006) model leads systematically to the lowest flux. For positron energies $\lesssim 1$ GeV, the three cross-section parameterizations differ by just a few percent, while the differences are significantly larger at higher energies. Figure 6 translates the uncertainties in the source term q_{e^+} featured in Fig. 2. Consequently, the flux obtained at 10 GeV with the Tan & Ng (1983) or Badhwar et al. (1977) parameterization is a factor of 2 or 1.6, respectively, higher than the reference case (Kamae et al. 2006). This trend is confirmed at higher energies, although the differences between the various models are smaller above 200 GeV.

The uncertainties caused by the proton and helium spectrum parameterizations are the least relevant to this analysis. This is demonstrated in the right panel of Fig. 6, where we compare the positron flux of the reference model (solid lines) with the flux obtained when the Shikaze et al. (2007) parameterization of the incident spectra was replaced by that of Donato et al. (2001). The differences are at most 10–15% around 10 GeV, and are negligible in the lower and higher energy tails.

4.1. Spatial origin of the positrons

At every location in the Galaxy, the positron production by spallation is determined by the local flux of cosmic ray proton and helium projectiles. Their spatial distribution $\Phi(x, E)$ was assumed to be constant and set equal to the value $\Phi_{\odot}(E)$ measured at the Solar System location. However, we note that these CR primaries also diffuse in the Milky Way, so that their flux

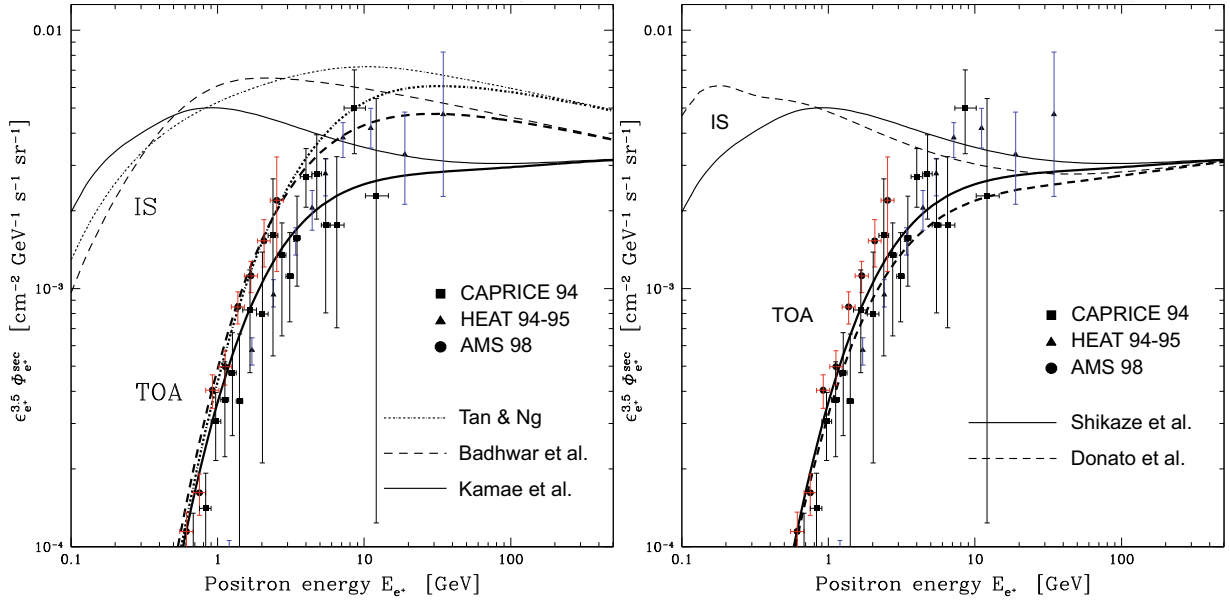


Fig. 6. *Left:* TOA and IS positron spectra for three different nuclear cross-section parameterizations: Kamae (solid), Badhwar (dashed) and Tan & Ng (dotted). *Right:* TOA and IS positron spectra for two different proton fluxes: Shikaze (solid) and Donato (dashed). In all cases, diffusion parameters are set to the MED case of Table 1.

should exhibit a spatial dependence. The positron source term q_{e^+} should vary accordingly inside the Galactic disk. The behavior of the proton and helium fluxes with radius r can be inferred readily from their measured values $\Phi_{\odot}(E)$ once the propagation parameters are selected. This so-called retro-propagation was implemented in the original B/C analysis by Maurin et al. (2001). The radial variation in the proton flux is presented in Fig. 7 for two quite different proton energies, and is found to be significant. This is why we questioned the hypothesis of a homogeneous positron production throughout the disk and found nevertheless that it remains viable in spite of the strong radial dependence of $\Phi(r, E)$.

This is because positrons reaching the Earth were mostly created locally, i.e., in a region in which the proton flux does not differ significantly from the local value $\Phi_{\odot}(E)$. We evaluated the contribution to the total signal from a disk of radius r_{source} surrounding the Earth, which was modeled with the source term

$$q_{\text{source}}(r, E) = q_{e^+}(r, E) \times \Theta(r_{\text{source}} - r), \quad (20)$$

where $\Theta(x)$ is the Heaviside function and r measures the radial distance from the Solar System. The positron flux yielded by q_{source} is $\phi_{e^+}^{\odot}(r_{\text{source}}, E)$, whose contribution to the total signal $\phi_{e^+}^{\odot}(E)$ is plotted in Fig. 8 as a function of r_{source} , for several values of the positron energy E . Most of the positron signal originates at short distances, especially at high energy. At 1 TeV, more than 80% of the positrons are created within 1 kpc while more than half of the 100 MeV positrons come from less than 2 kpc. Energy losses are indeed quite efficient. They reduce the positron horizon strongly as the energy increases. This is why the CR proton and helium fluxes are close to their solar values when averaged over the positron horizon scale. Taking the retro-propagation of projectile spectra into account has therefore little effect on the positron flux, as is clear in Fig. 9.

4.2. Diffusive reacceleration and full energy losses

Space diffusion and energy losses through inverse Compton scattering and synchrotron emission were the only processes that we

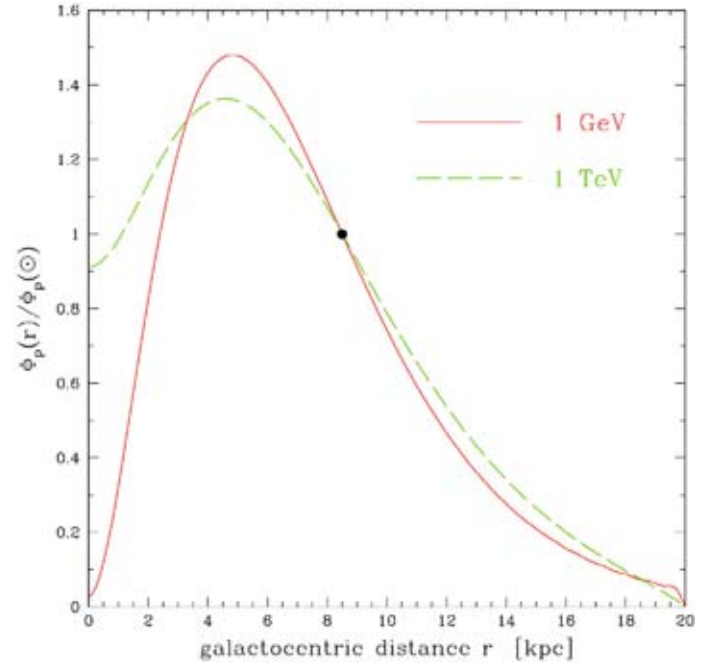


Fig. 7. Ratio of the proton flux at radius r to the solar value from Shikaze et al. (2007). In this plot, retro-propagation has been taken into account, and all propagation effects of the MED configuration (i.e., convective wind, spallation, and diffusion) have been included. The dot refers to the Solar System position in the Galaxy.

had considered. We had neglected many other mechanisms that may also affect positron propagation. Galactic convection can sweep cosmic rays out of the diffusive halo and is associated with adiabatic energy losses. The drift of the magnetic turbulent field with respect to the Galactic frame with velocity V_a induces both a diffusion in energy space and a reacceleration of particles. This so-called diffusive reacceleration was discussed in the original analysis of Moskalenko & Strong (1998), but it does not appear in the fitting formula proposed by Baltz & Edsjö (1999).

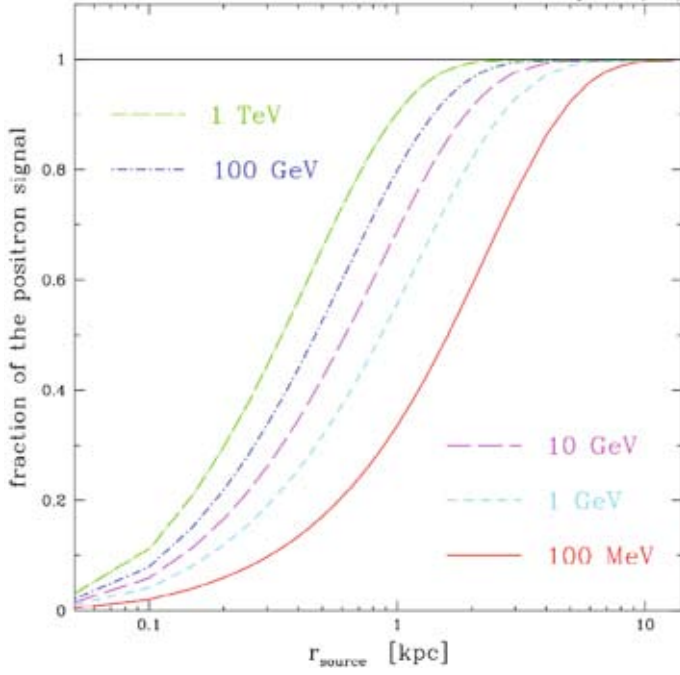


Fig. 8. Fraction of the positrons detected at the Earth which are produced within a disk of radius r_{source} . The larger the energy, the closer the source.

Finally, bremsstrahlung and ionization should come into play at low energies, below ~ 1 GeV.

We note that once all these effects are considered, there is no longer an analytical solution to the diffusion equation, at least none that we know. Synchrotron and IC energy losses occur all over the diffusive halo, whereas the other energy-loss mechanisms as well as diffusive reacceleration are localized within the Galactic plane. A completely numerical approach is always possible of course – dealing for instance with a realistic distribution of gas, magnetic fields, and interstellar radiation fields – but this has never been our philosophy so far. Keeping calculations as analytical as possible has always been our guiding principle. We have therefore derived an approximate solution to the complete diffusion equation where the IC and synchrotron losses have been suitably renormalized and assumed to take place only in the disk. Obviously this is not fully correct, but a close inspection of the left panel of Fig. 10 and its solid curve indicates these values agree closely with the reference model featured in Fig. 5 by the long-dashed blue line. The diffusion equation may now be expressed as:

$$\nabla \cdot \left\{ -K_0 \epsilon^\delta \nabla N + \mathbf{V}_C(z) N \right\} + 2h \delta(z) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ b^{\text{loss}}(\epsilon) N - K_{\epsilon\epsilon} \frac{\partial N}{\partial \epsilon} \right\} = q_{e^+}(\mathbf{x}, \epsilon), \quad (21)$$

where $\epsilon = E/E_0$ and $E_0 = 1$ GeV as defined in Sect. 3.1. The convective wind varies with the vertical coordinate as:

$$\mathbf{V}_C(z) = \begin{cases} V_C \mathbf{u}_z & \text{if } z > 0 \\ -V_C \mathbf{u}_z & \text{if } z < 0. \end{cases} \quad (22)$$

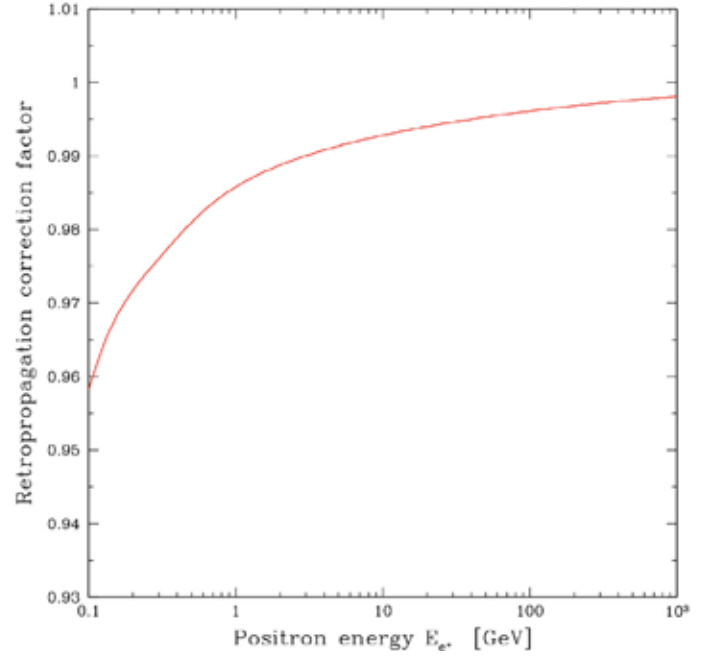


Fig. 9. Ratio of the positron flux computed with and without retropropagation, as a function of positron energy.

The energy-loss term is a combination of several contributions:

$$-b^{\text{loss}}(\epsilon) = \begin{cases} \frac{\epsilon^2}{\tau_E} & \text{inverse Compton and synchrotron} \\ +\nabla \cdot \mathbf{V}_C \frac{p^2}{6h\epsilon} & \text{adiabatic losses} \\ +K_b n_H \epsilon & \text{bremsstrahlung} \\ +K_i n_H \left\{ 3 \ln \left(\frac{E}{m_e} \right) + 19.8 \right\} & \text{ionisation.} \end{cases} \quad (23)$$

The values of the constants K_b and K_i can be found in Longair (1994). Diffusive reacceleration is taken care of by using a coefficient

$$K_{\epsilon\epsilon} = \frac{2}{9} \frac{V_a^2}{K_0} \epsilon^{2-\delta}. \quad (24)$$

The positron density $N(r, z, \epsilon)$ is Bessel expanded. The coefficients $N_i(z, \epsilon)$ are determined all over the diffusive halo except for the normalizations $N_i(0, \epsilon)$. Each of these normalizations satisfies a diffusion equation in energy space, which we solve using a Crank-Nicholson semi-implicit method.

The solid line of Fig. 10 considers only space diffusion and energy losses by IC scattering and synchrotron emission. When these processes are supplemented by diffusive reacceleration, we derive the long-dashed curve with a noticeable bump at ~ 3 GeV. Below that value, positrons are reaccelerated and their energy spectrum is shifted to higher energies. Above a few GeV, IC scattering and synchrotron emission dominate over diffusive reacceleration, inducing a shift in the spectrum towards lower energies. Positrons accumulate in an energy region where energy losses and diffusive reacceleration compensate each other, hence a visible bump which is already present in the analysis by Moskalenko & Strong (1998). The short-dashed line is obtained by replacing diffusive reacceleration by Galactic convection. The wind is active at low energies, where space diffusion is slow. Positrons are drifted away from the Galaxy and their flux at the Earth is depleted. We note that diffusive reacceleration and Galactic convection were included separately by Lionetto et al. (2005) in

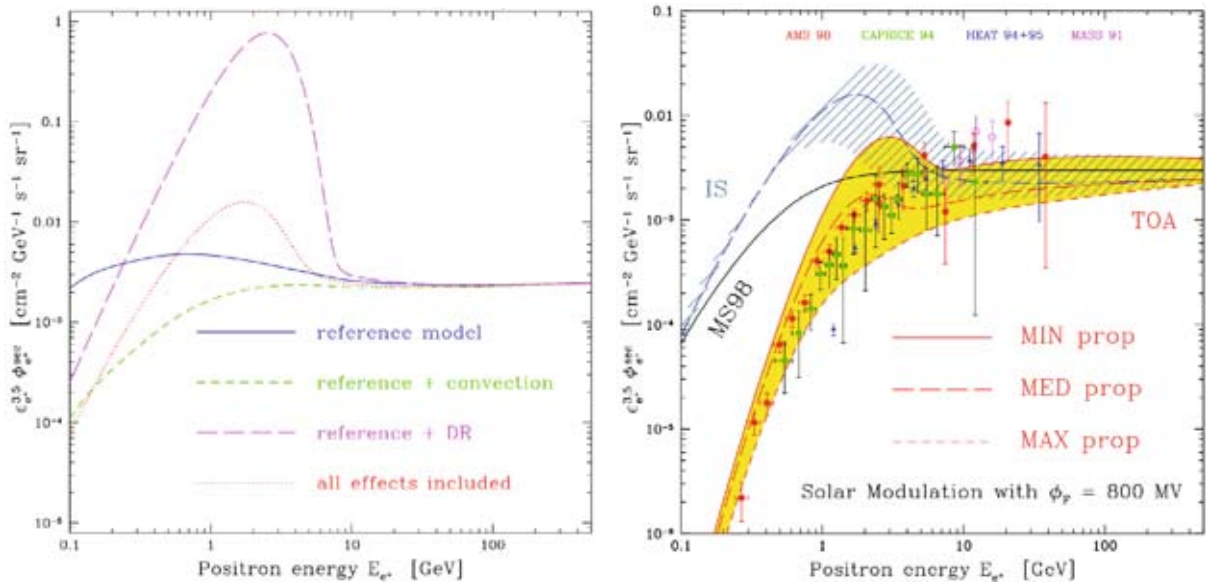


Fig. 10. *Left panel:* the reference model of Sect. 4 is featured here with various effects turned on or off. Space diffusion and energy losses from IC and synchrotron emission lead to the solid curve. When diffusive reacceleration is added, we get the long-dashed line and its spectacular bump around 3 GeV. The short-dashed curve is obtained by replacing diffusive reacceleration by galactic convection. The spectrum becomes depleted at low energies. Including all the processes yield the dotted line. Diffusive reacceleration and convection are both relevant below a few GeV and induce opposite effects. *Right panel:* the hatched blue (IS) and yellow (TOA) regions of Fig. 5 delineated by the MAX and MIN curves are featured here with all the effects included. Above a few GeV, we get the same results as before. Data are taken from CAPRICE (Boezio et al. 2000), HEAT (Barwick et al. 1997), AMS (Aguilar et al. 2007; Alcaraz et al. 2000) and MASS (Grimani et al. 2002).

their prediction of the positron spectrum, with the net result of either overshooting (diffusive reacceleration) or undershooting (galactic convection) the data. If we now incorporate both processes and add the various energy-loss mechanisms, we derive the dotted curve, which also contains a bump, although of far smaller amplitude. The bump cannot be distinguished from the solid line for energies above a few GeV. This is the energy region where dark matter species are expected to distort the secondary spectrum and a calculation based solely on space diffusion and energy losses from IC scattering and synchrotron emission is perfectly safe.

Below a few GeV, the situation becomes more complicated, several effects at stake modifying the blue hatched IS and yellow TOA uncertainty intervals in Fig. 5 as displayed in the right panel of Fig. 10. Reproducing the GeV bump of the IS flux with the data now requires a higher Fisk potential of 850 MV. The agreement seems reasonable below a few GeV, although a more detailed investigation would require a refined solar modulation model.

5. The positron fraction

The question of whether a positron excess is being observed in cosmic ray measurements remains after many years, and is usually addressed in terms of the so-called *positron fraction*, i.e., the quantity $\phi_{e^+}/(\phi_{e^+} + \phi_{e^-})$. This excess was pointed out by Moskalenko & Strong (1998) when they derived their predictions of both the secondary positron flux and the primary plus secondary electron fluxes. This led to many possible interpretations, such e.g., a potential positron injection from dark matter annihilation in the Galaxy (e.g., Baltz & Edsjö 1999) or from pulsars (e.g., Aharonian et al. 1995; Boulares 1989; Grimani 2007).

The PAMELA collaboration reported the positron fraction from 1.5 to 100 GeV with unprecedented statistics quality

(Adriani et al. 2008). The PAMELA data are reported in Fig. 12, which we further explain in this section. Compared to the typical reference prediction by Moskalenko & Strong (1998), a large excess appears. Our new predictions of the secondary positron flux and its theoretical uncertainties allow us to discuss in greater depth the interpretation of the excess positron fraction. We note first that we have shown in the previous sections that our predictions are consistent with the available positron measurements, excluding the PAMELA data since only their positron fraction data have so far become public. From these pre-PAMELA data, we therefore remark that an excess is hardly observed when considering the positron measurements only.

One of two crucial ingredients needed to derive the positron fraction is of course the electron flux. It was already noted by Moskalenko & Strong (1998) that a change in the electron spectrum may affect the existence of an excess in the positron fraction. These authors compared the positron fraction obtained when using their own prediction of the electron spectrum, with that obtained when using the prediction of Protheroe (1982) based on the leaky box propagation model, and hence illustrated the difference due to the electrons. Today, we can attempt to take advantage of the higher quality existing electron data, and complement them with our theoretical calculation of the positron flux and its uncertainties.

It is nevertheless difficult to constrain the electron flux using the existing data, because they are available not only for limited energy ranges but also exhibit some differences in the absolute normalizations as well as the spectral shapes. Furthermore, the measurements available are mainly for energies below ~ 50 GeV. For instance, the AMS electron data points of Aguilar et al. (2007) and Alcaraz et al. (2000), which are known to be among the most precise data sets to date, reach ~ 30 GeV only. Other complications are expected from astrophysical modeling arguments. For instance, it is likely that different spectral contributions are important at different energies, such as secondary

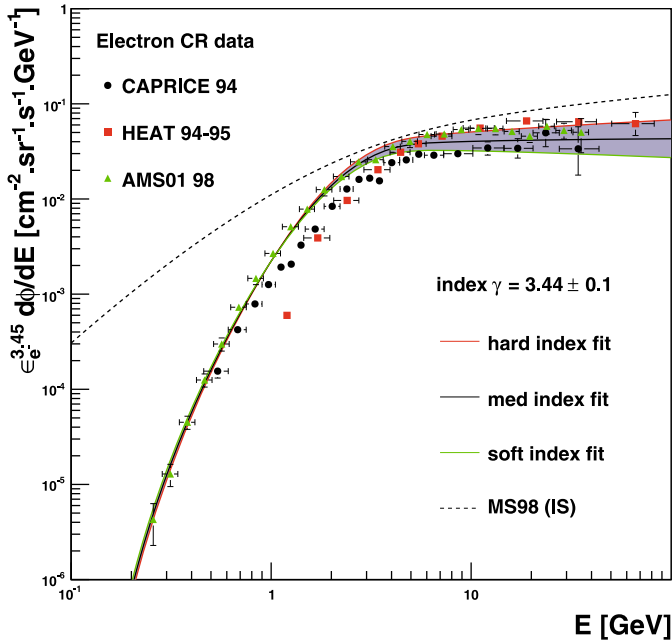


Fig. 11. Electron flux parameterization.

electrons at low energy, and primary electrons from local (distant) astrophysical cosmic ray sources at higher (intermediate, respectively) energies: this may imply that a blind fit to the data is not useful in the absence of any modeling insights. Although accounting for all these subtleties is beyond the scope of this paper, we can illustrate the importance of the electron spectrum by using a simple parameterization that is constrained reasonably up to ~ 100 GeV, i.e., encompassing the PAMELA energy range, which fits the data at lower energies. We emphasize that predicting the electron flux is unnecessary to interpreting the positron contribution to the positron fraction as soon as electron data become available. Using the electron data directly instead of a model is also likely to provide a far more accurate description of any excess.

Making use of the electron data, we have therefore modeled an electron spectrum by a power law $\propto E^{-\gamma}$ at energies above a few GeV and up to 100 GeV, and allowed a scatter in the spectral index to account for the dispersion in the different sets of data. Because the permitted range of spectral indices that provide good fits is significant, we have applied restrictions by taking the central value and variance found by Casadei & Bindi (2004), i.e., $\gamma = 3.44 \pm 0.03$. Thus, an index range defined by $\gamma \pm 3\sigma$ allows to encompass most of the available data below 100 GeV. The normalization of this electron spectrum as well as the low energy part have been adapted to the AMS data, which therefore includes the solar modulation effects. The choice of AMS is motivated by being likely to be the experimental setup least affected by systematic errors, but we emphasize that other setups are possible. Our parameterization of the electron flux is illustrated in Fig. 11, where the data from HEAT, CAPRICE, and AMS are presented. The dispersion observed in the data above a few GeV and below ~ 100 GeV, i.e., over the entire PAMELA energy range, is reproduced well by taking a spectral index of $\gamma = 3.44 \pm 0.1$, as mentioned above. To interpret the positron fraction measurements, we therefore considered two cases for the electron flux, a *soft* spectrum with index 3.54, and a *hard* spectrum with index 3.34. Finally, we note that we have also presented in Fig. 11 the interstellar electron model of Moskalenko & Strong (1998), which, while those authors have

since considerably improved their model, is still widely used as a reference for predicting the positron fraction: we note that this model clearly overshoots the AMS data above a few GeV, and would therefore underestimate the positron fraction, should the electron data of AMS be close to the true flux and unaffected by systematics or unknown transient effects.

In Fig. 12, we show the positron fraction obtained for both the *soft* (left panel) and *hard* (right panel, respectively) electron spectra. For the positrons, we have used the Kamae nuclear cross-sections and the Shikaze proton and alpha injection spectra. The yellow band is bounded from below (above) by the MAX – short dashed curve – (MIN – solid curve –, respectively) set of propagation parameters, while the central long-dashed curve represents the MED configuration. A solar modulation with $\phi = 600$ MV has been applied to the positron flux, which corresponds to the level of solar activity during the data taking of AMS. In the same figure, we also report the positron fraction obtained with the positron flux of Moskalenko & Strong (1998), but with our parameterization of the electron flux.

We see that, in the *hard* index case, a sizeable excess is present in the high energy tail. The MED reference curve is marginally compatible with the HEAT and AMS data above 10–20 GeV, which instead lies closer to the upper border of our predictions, thus favoring the MIN model, which is consistent with our predictions of the secondary positron flux (cf. Fig. 5), should the positron flux be dominated by a single secondary contribution. Therefore, when the theoretical uncertainties are considered, a clear assessment of an excess is not statistically significant on the basis of the HEAT and AMS data alone, apart from the 2σ tension with the AMS data point at 12 GeV. Nevertheless, in the case of the PAMELA data, the MED reference flux is clearly incompatible with the experimental determinations for energies above 10 GeV. Even when theoretical uncertainties in the positron flux are taken into account, an excess is probably present for a hard electron spectrum.

When using the *soft* electron parameterization instead, we see that although an excess might still be apparent, its amplitude has strongly decreased, making it of least statistical relevance. The MED model indeed reproduces all the data-sets well from a few GeV up to 40 GeV and a deviation is present for the last two bins of PAMELA, where the error bars are large due to reduced statistics. The PAMELA data may therefore be indicative of an excess also for a soft electron spectrum and energies above 50 GeV, but once the theoretical uncertainties on secondary positrons and statistical fluctuations in the data are taken into account, the amplitude of this excess is of least relevance. This implies that, for a soft electron spectrum, the secondary positron yield might still represent a very important contribution to the entire cosmic positron flux. We note, however, that below 4 GeV, the MED configuration appears to disagree with the HEAT and AMS data, which would favor the MIN configuration.

Thus, we have attempted to discuss the positron fraction data by considering two different parameterizations for the electron flux, both consistent with the data below 100 GeV. If we had considered other fit parameters that were also consistent with the data, by modifying for instance the normalizations so as to ensure that they remained correlated with the spectral indices², we

² A correlation between the normalization and the spectral index obviously appears in the case of a single power law fit, but this would have absolutely no physical meaning if there actually were different spectral contributions – secondary, far primary, local primary – at different energies to the electron flux. A multi-component fit would break this correlation.

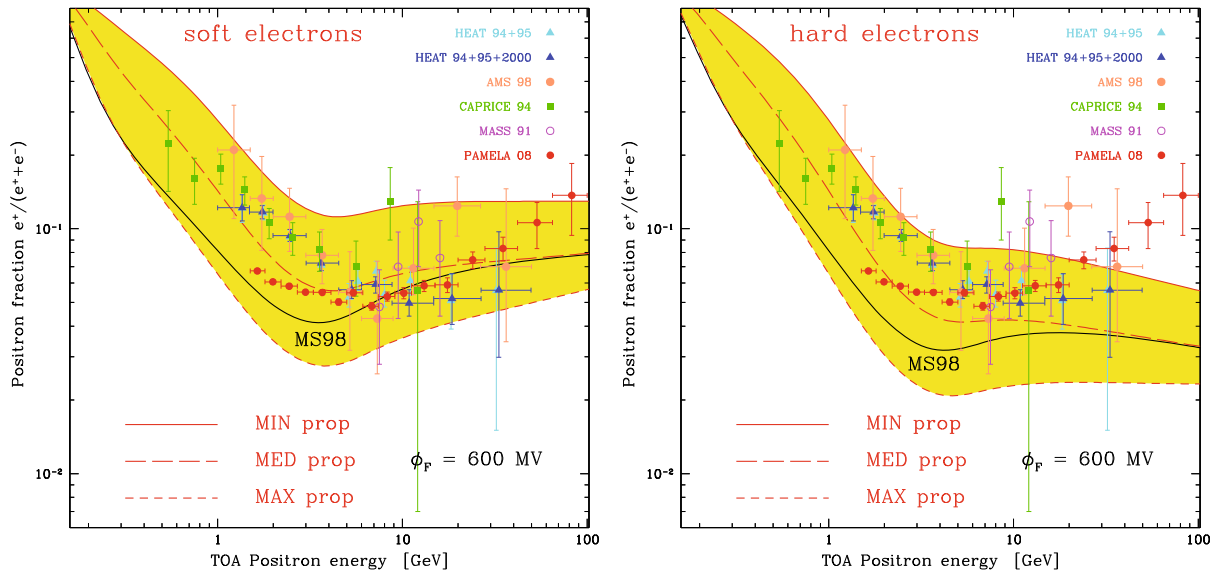


Fig. 12. Positron fraction as a function of the positron energy, for a soft (*left panel*) and hard (*right panel*) electron spectrum. Data are taken from CAPRICE (Boezio et al. 2000), HEAT (Barwick et al. 1997), AMS (Aguilar et al. 2007; Alcaraz et al. 2000), MASS (Grimani et al. 2002) and PAMELA (Adriani et al. 2008).

would have found quite different results opening up more or less the *banana* shape characterizing our predictions in Fig. 12. We therefore emphasize strongly that it is difficult to interpret the origin of the positrons observed in the positron fraction without comparing secondary positron predictions with the positron data, or a precise measurement of the electron flux. This requires access to both the electron and positron data separately, which have not yet been released in the case of PAMELA. With this in mind, it may be potentially unsafe to infer strong statements about the possible nature of any excess, since its amplitude and shape depend strongly on the underlying assumptions, which are not well constrained at the moment.

To conclude this section, we recall that in the previous sections we have shown that our theoretical predictions of the secondary positron flux perfectly agree with the available data (PAMELA data for the electron and positron components separately are not yet available), especially when the theoretical uncertainties are properly taken into consideration. We have shown in this section that the electrons play a very important role in the interpretation of the positron fraction released by the PAMELA collaboration. The scatter in the experimental measurements of the electron flux does not allow us, at the moment, to characterize fully the amplitude and shape of any positron excess with respect to the secondary yield. We have provided a critical illustration of this by using two different parameterizations of the electron flux (*hard* and *soft* cases) that are consistent with the data below 100 GeV, from which we have shown that the amplitude of an excess might be much smaller than expected from the positron/electron model of Moskalenko & Strong (1998). Even if small, this excess could originate from additional astrophysical processes or dark matter annihilation. This implies that it is essential to estimate and understand the theoretical uncertainties affecting the background, as we have attempted in this paper.

6. Conclusions

Our aim has been to compute a correct estimation of the astrophysical positron flux and the corresponding uncertainties.

First, we have compared the various models available for the interstellar secondary positron production. It has been shown that more positrons are expected when the proton flux from Shikaze et al. (2007) is used, as compared to the case proposed by Donato et al. (2001). Moreover, for a given proton flux, the three positron production cross-sections we have considered produce different results: below a few GeV, the parameterization of Badhwar et al. (1977) gives more positrons, whereas above a few GeV, the model of Tan & Ng (1983) predicts a higher positron production. At any energy, the parameterization of Kamae et al. (2006) produces the lowest amount of positrons.

Concerning the propagation of the positrons in the interstellar medium, we have used a Green function approach that led us to disregard convection and diffusive reacceleration: we have specifically included diffusion and energy losses due to inverse Compton scattering on cosmic microwave background photons and synchrotron radiation. Nevertheless, this analytical method allowed us to scan our ~ 1600 sets of propagation parameters compatible with the boron to carbon ratio measurements, and therefore to determine astrophysical uncertainties in the positron flux predictions. We showed that varying the diffusion parameters does not have the same effect as for primary positrons (Delahaye et al. 2008). For exotic positrons created in the Dark Matter halo, the thickness of the slab $2L$ was the most relevant parameter because the increase of the diffusion zone implies the increase of the number of sources, whereas for secondary positrons – which are created in the Galactic disk only – the most relevant parameter is the diffusion constant K_0 . Therefore, we expect the sets of parameters that basically maximize the primary positron flux to minimize the flux of secondary positrons, and vice versa.

We also showed that, because of energy losses during propagation, most of the positrons detected at the Earth have been created in the nearby 2 kpc: this is the reason why we could safely neglect the variation in proton flux in the Galaxy. By solving the complete equation Eq. (22) with a numerical technique, we proved that all the other effects (convection, reacceleration, and other losses) can safely be neglected below 10 GeV and that our method is valid.

Finally, and this is our most important result, our estimation of the positron flux is compatible with all available data. This does not mean that there is no exotic positron contribution, since we have not tried to fit the data with a single diffusion model. However, this shows that one should be cautious before claiming that there is any excess in present data. Regarding a possible excess in the positron fraction, we have also clearly shown that the electron flux plays a role that is as important as that of positrons. This might sound tautological because the positron fraction is no more than a ratio, but so much energy is involved in support to this that we repeat this point. Figure 12 provides compelling visual argument.

The released PAMELA data (Adriani et al. 2008) show a clear increase in the positron fraction for energies above 10 GeV. From our analysis, whose objective is an accurate determination of the positron flux, we derive the conclusion that an excess is clear for a hard electron spectrum, while for a soft electron spectrum the rise in the positron fraction may be explained by the standard secondary production. By considering in turn the various parameters, we find in general that the PAMELA measurements are in excess of what a pure secondary component would yield. Nevertheless, if the electron spectrum is soft, most of the PAMELA data points are aligned with our MED prediction. We note also that, in that case, the two last energy bins feature an increase, but the experimental uncertainties are large there and a presence of an excess is, in this case, currently not statistically significant.

More insight into these issues will therefore require, from the theoretical side, a revised understanding also of the electron flux, including the determination of its uncertainties, and from the experimental side, the separate provision of the electron and positron fluxes, to allow more robust comparison of theoretical predictions with the data. In addition, the upcoming data on cosmic rays above 10 GeV will allow us to reduce considerably the theoretical uncertainties in all cosmic ray fluxes and help us to elucidate the experimental status of the so-called excess in the positron spectrum.

Acknowledgements. Work supported by research grants funded jointly by Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca (MIUR), by Università di Torino (UniTO), by Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN) within the *Astroparticle Physics Project*, by the Italian Space Agency (ASI) under contract N° I/088/06/0 and by the French Programme National de Cosmologie. T.D. also acknowledges the International Doctorate on AstroParticle Physics (IDAPP) program. R.L. acknowledges financial support from the *Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología* (CONICYT) from Chile (Grant N°: BECAS-DOC-BIRF-2005-00) and IDAPP.

References

Adriani, O., et al. 2008, *Nature*, submitted [[arXiv:0810.4995](https://arxiv.org/abs/0810.4995)]
 Aguilar, M., Alcaraz, J., Allaby, J., et al. 2007, *Phys. Lett. B*, 646, 145

- Aharonian, F. A., Atoyan, A. M., & Voelk, H. J. 1995, *A&A*, 294, L41
 Alcaraz, J., Alpat, B., Ambrosi, G., et al. 2000, *Phys. Lett. B*, 484, 10
 Badhwar, G. D. & Stephens, S. A. 1977, in *International Cosmic Ray Conference, International Cosmic Ray Conference*, 1, 398
 Badhwar, G. D., Golden, R. L., & Stephens, S. A. 1977, *Phys. Rev. D*, 15, 820
 Baltz, E. A., & Edsjö, J. 1999, *Phys. Rev. D*, 59, 023511
 Barrau, A., Boudoul, G., Donato, F., et al. 2002, *A&A*, 388, 676
 Barrau, A., Salati, P., Servant, G., et al. 2005, *Phys. Rev. D*, 72, 063507
 Barwick, S. W., Beatty, J. J., Bhattacharyya, A., et al. 1997, *ApJ*, 482, L191
 Beatty, J. J., Bhattacharyya, A., Bower, C., et al. 2004, *Phys. Rev. Lett.*, 93, 241102
 Beck, R., Shukurov, A., Sokoloff, D., & Wielebinski, R. 2003, *A&A*, 411, 99
 Boezio, M., Carlson, P., Francke, T., et al. 2000, *ApJ*, 532, 653
 Boulares, A. 1989, *ApJ*, 342, 807
 Bringmann, T., & Salati, P. 2007, *Phys. Rev. D*, 75, 083006
 Bulanov, S. V., & Dogel, V. A. 1974, *Ap&SS*, 29, 305
 Casadei, D., & Bindi, V. 2004, *ApJ*, 612, 262
 Delahaye, T., Linares, R., Donato, F., Fornengo, N., & Salati, P. 2008, *Phys. Rev. D*, 77, 063527
 Donato, F., Fornengo, N., & Salati, P. 2000, *Phys. Rev. D*, 62, 043003
 Donato, F., Maurin, D., Salati, P., et al. 2001, *ApJ*, 563, 172
 Donato, F., Maurin, D., & Taillet, R. 2002, *A&A*, 381, 539
 Donato, F., Fornengo, N., Maurin, D., Salati, P., & Taillet, R. 2004, *Phys. Rev. D*, 69, 063501
 Donato, F., Fornengo, N., & Maurin, D. 2008, *Phys. Rev. D*, 78, 043506
 Ferrière, K., Gillard, W., & Jean, P. 2007, *A&A*, 467, 611
 Grimani, C. 2007, *A&A*, 474, 339
 Grimani, C., Stephens, S. A., Cafagna, F. S., et al. 2002, *A&A*, 392, 287
 Han, J. L., Manchester, R. N., Lyne, A. G., Qiao, G. J., & van Straten, W. 2006, *ApJ*, 642, 868
 Kamae, T., Karlsson, N., Mizuno, T., Abe, T., & Koi, T. 2006, *ApJ*, 647, 692
 Lavalley, J., Pochon, J., Salati, P., & Taillet, R. 2007, *A&A*, 462, 827
 Lavalley, J., Nezri, E., Ling, F., Athanassoula, L., & Teyssier, R. 2008a, *ArXiv e-prints*
 Lavalley, J., Yuan, Q., Maurin, D., & Bi, X.-J. 2008b, *A&A*, 479, 427
 Lionetto, A. M., Morselli, A., & Zdravkovic, V. 2005, *J. Cosmol. Astro-Part. Phys.*, 9, 10
 Longair, M. S. 1994, *High Energy Astrophysics: Stars, the galaxy and the interstellar medium* 2nd edn. (Cambridge: Cambridge University Press), 2
 Maurin, D., & Taillet, R. 2003, *A&A*, 404, 949
 Maurin, D., Donato, F., Taillet, R., & Salati, P. 2001, *ApJ*, 555, 585
 Maurin, D., Taillet, R., & Donato, F. 2002, *A&A*, 394, 1039
 Maurin, D., Taillet, R., Donato, F., et al. 2004, *Research Signposts, Recent Research Developments in Astronomy and Astrophys.*, 2, 193 [[arXiv:astro-ph/0212111](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0212111)]
 Maurin, D., Taillet, R., & Combet, C. 2006, *ArXiv Astrophysics e-prints*
 Moskalenko, I. V., & Strong, A. W. 1998, *ApJ*, 493, 694
 Norbury, J. W., & Townsend, L. W. 2007, *Nuclear Instrum. Methods Phys. Res. B*, 254, 187
 Perko, J. S. 1987, *A&A*, 184, 119
 Picozza, P., Galper, A. M., Castellini, G., et al. 2007, *Astropart. Phys.*, 27, 296
 Porter, T. A., Moskalenko, I. V., Strong, A. W., Orlando, E., & Bouchet, L. 2008, *ApJ*, 682, 400
 Protheroe, R. J. 1982, *ApJ*, 254, 391
 Prouza, M., & Smida, R. 2003, *A&A* 410, 1
 Shikaze, Y., Haino, S., Abe, K., et al. 2007, *Astropart. Phys.*, 28, 154
 Strong, A. W., Moskalenko, I. V., & Reimer, O. 2000, *ApJ*, 537, 763
 Taillet, R., & Maurin, D. 2003, *A&A*, 402, 971
 Tan, L. C., & Ng, L. K. 1983, *J. Phys. G Nucl. Phys.*, 9, 1289

REF

[S2]

Diffusion in a slab : different approaches

R. Taillet, P. Salati, D. Maurin, E. Pilon

note non publiée

Diffusion in a slab: different approaches

R. Taillet* and P. Salati†

*Laboratoire de Physique Théorique LAPTH, Annecy-le-Vieux, 74941, France and
Université de Savoie, Chambéry, 73011, France*

D. Maurin‡

SAP, CEA, Orme des Merisiers, 91191 Gif-sur-Yvette, France

E. Pilon§

Laboratoire de Physique Théorique LAPTH, Annecy-le-Vieux, 74941, France

(Dated: March 5, 2010)

Different approaches are presented to investigate diffusion from a point source in a slab delimited by two absorbing boundaries consisting of parallel infinite planes. These approaches enable to consider the effect of absorption at the boundaries as well as the possibility that the particles that diffuse react with the diffusive medium.

Keywords: Diffusion

I. INTRODUCTION

The problem of steady-state diffusion from a source $q(\vec{r})$ is described by a quite simple equation

$$K\Delta N(\vec{r}) = -q(\vec{r}) \quad (1)$$

where K is the diffusion coefficient (homogeneous to a surface per unit time). For a point source $q(\vec{r}) \equiv \delta^3(\vec{r})$ embedded in infinite space, the solution is also simple, given by

$$N(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi K|\vec{r}|} \quad (2)$$

For more complicated geometries of the diffusive volume, the solutions lose this simplicity. In some cases, it is helpful to use approaches different from brute-force resolution. We want to illustrate this point for the problem of diffusion in a slab delimited in the z direction by two absorbing boundaries, located at $z = \pm L$ and imposing that $N(z = \pm L) = 0$. We present four approaches, giving identical results when the conditions of validity overlap, taking also into account the possibility that the particles that diffuse can also be destroyed by reacting with the diffusive medium. The equation then reads

$$K\Delta N - \Gamma(\vec{r})N = -q(\vec{r}) \quad (3)$$

where the destruction rate $\Gamma(\vec{r})$ is related to the density $n(\vec{r})$ of the reacting medium, the reaction cross-section σ and the velocity v of the diffusing particle by $\Gamma(\vec{r}) = n(\vec{r})\sigma v$. The authors first encountered this situation when studying the diffusion of cosmic rays emitted from sources in the galactic plane¹. The galactic magnetic field has a stochastic component which is responsible for their diffusion, but also for their confinement in a volume which corresponds approximately to the geometry described above. The destruction term corresponds to the nuclear reactions (spallations) that may occur when these cosmic Rays cross the regions of the galactic disk where the nuclei of interstellar matter are present. This is why we pay a particular attention to the situation where the sources, the measurement and the destruction process are localized in the plane $z = 0$.

II. STEADY-STATE SOLUTION USING FOURIER-BESSEL TRANSFORMS

A. Diffusion equation

Given the geometry of the diffusion volume and the source, it is easier to use cylindrical coordinates. In all the following, the destruction term will not depend on the radial coordinate r , and we have

$$\frac{d^2 N}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dN}{dr} + \frac{d^2 N}{dz^2} - \frac{\Gamma(z)}{K} N = -\frac{q(r, z)}{K} \quad (4)$$

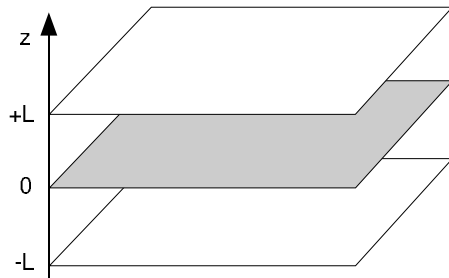


FIG. 1: Geometry of the diffusive slab. The central plane contains the matter on which the diffusing particles can react. The upper and lower planes are absorbing boundaries, imposing a null density.

We develop $N(r, z)$ et $q(r, z)$ over the Bessel functions $J_0(kr)$, i.e.

$$N(r, z) = \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{N}(k, z) \quad (5)$$

with²

$$\tilde{N}(k, z) = \int_0^\infty dr r J_0(kr) N(r, z) \quad (6)$$

The radial dependence is now encoded in the relative weight of the Bessel functions. High values of k correspond to finer details in the radial distribution, much like for usual Fourier transforms. Inserting (5) into (4), and using the fundamental property of Bessel functions

$$J_0''(x) + \frac{1}{x} J_0'(x) = -J_0(x) \quad (7)$$

we obtain

$$- \int_0^\infty dk k^3 J_0(kr) \tilde{N}(k, z) + \int_0^\infty dk k J_0(kr) \left(\frac{d^2 \tilde{N}(k, z)}{dz^2} - \frac{\Gamma(z)}{K} \tilde{N}(k, z) \right) = -\frac{1}{K} \int_0^\infty dk k J_0(kr) \tilde{q}(k, z) \quad (8)$$

Using the property of orthonormalization

$$\int_0^\infty dr r J_0(k_1 r) J_0(k_2 r) = \delta(k_1^2 - k_2^2) \quad (9)$$

we select the equation for each mode k

$$\frac{d^2 \tilde{N}(k, z)}{dz^2} - \left(\frac{\Gamma(z)}{K} + k^2 \right) \tilde{N}(k, z) = -\frac{\tilde{q}(k, z)}{K} \quad (10)$$

B. Solution for a destructive plane

If destruction is confined to the plane $z = 0$, we have $\Gamma(z) = \Gamma \delta(z)$. We also consider a point-like source located in the disk, i.e. $q(r, z) = \delta(z) \delta(\pi r^2)$. The equation to be solved is, for each mode k ,

$$\frac{d^2 \tilde{N}(k, z)}{dz^2} - \left(\frac{\Gamma \delta(z)}{K} + k^2 \right) \tilde{N}(k, z) = -\frac{\delta(z) \tilde{q}(k)}{K} \quad (11)$$

In this expression, the combination $\Gamma/K \equiv 1/r_d$ has the dimension of an inverse length, and the Bessel transform of a point-like source reads

$$\tilde{q}(k) \equiv \int_0^\infty dr r J_0(kr) \delta(\pi r^2) = \frac{1}{2\pi} \quad (12)$$

Outside of the disk ($z \neq 0$), the equation simplifies into

$$\frac{d^2 \tilde{N}(k, z)}{dz^2} - k^2 \tilde{N}(k, z) = 0 \quad (13)$$

The solution has to be even in z and satisfy the boundary conditions $N(k, z = \pm L) = 0$. Therefore, it is given by

$$\tilde{N}(k, z \neq 0) = \tilde{N}_0(k) \frac{\sinh \{k(L - |z|)\}}{\sinh \{kL\}} \quad (14)$$

The integration constant $\tilde{N}_0(k)$ is fixed by examining the solution in the plane $z = 0$. The derivatives of the solution (14) for $z = 0$ are defined only in terms of distributions. The computation may be made easier using the identity

$$\exp |z| = \exp(-z) + 2\Theta(z) \sinh z \quad (15)$$

in the hyperbolic functions, as the derivative of the Heaviside distribution $\Theta(z)$ is the Dirac distribution $\delta(z)$. This yields

$$\tilde{N}(k, z \neq 0) = \tilde{N}_0(k) \frac{\sinh \{k(L - z)\}}{\sinh \{kL\}} - 2\tilde{N}_0(k)\theta(-z) \coth(kL) \sinh(kz) \quad (16)$$

The second derivative reads

$$\frac{d^2 \tilde{N}(k, z)}{dz^2} = k^2 \tilde{N}(k, z) - 2\tilde{N}_0(k)k\delta(z) \coth(kL) \quad (17)$$

Inserting this last expression into (11) yields

$$\tilde{N}_0(k) = \frac{1/2\pi}{\Gamma + 2Kk \coth(kL)} \quad (18)$$

and the final solution is

$$N(r, z) = \int_0^\infty \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi(\Gamma + 2Kk \coth(kL))} \frac{\sinh \{k(L - |z|)\}}{\sinh \{kL\}} \quad (19)$$

The diffusion process acts as a filtering in the Bessel space, the diffused density being related to the source by the transfer function

$$T(k) = \frac{1}{\Gamma + 2Kk \coth(kL)} \quad (20)$$

It is a low-pass filter. Diffusion tends to erase the small scale features. The solution in the disk ($z = 0$) can also be written under a form making apparent the correction to the free diffusion case (2)

$$N(r, z = 0) = \frac{1}{4\pi Kr} \int_0^\infty \frac{kr J_0(kr) d(kr)}{r/2r_d + kr \coth(kL)} \quad (21)$$

This is illustrated in Fig. 2.

C. Alternative formulations for a better convergence

The integral involved in Eq. (21) is of the form

$$I[f] \equiv \int_0^\infty J_0(x) f(x) dx \quad (22)$$

When $f(\infty) = 1$, as is the case up to a normalization in Eq. (21) when $z = 0$, the slow decrease of the oscillations in the integrand makes the numerical computation of $I[f]$ quite tricky. A few examples of manipulations which help to improve the numerical implementation of Eq. (21) are given in the appendix.

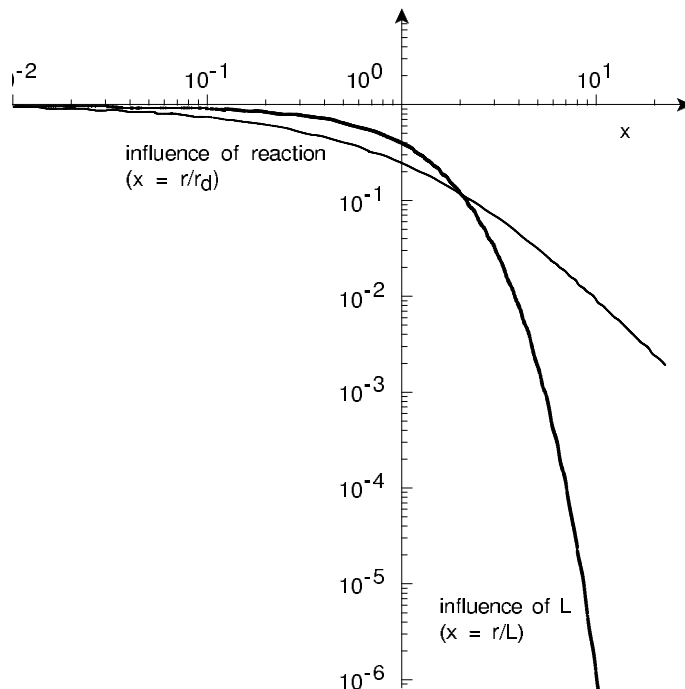


FIG. 2: Deviation from the free diffusion case $1/4\pi Kr$, as a function of r/L for the case without reaction (thick curve: finite L , $\Gamma = 0$) and of r/r_d for the case without boundary (thin curve: $L \rightarrow \infty$, finite Γ).

D. Solution for a short-lived species

The same equation (3) is also relevant to study the diffusion of unstable particles, with a lifetime τ . The destruction rate is then homogeneous inside the diffusive volume, and given by $\Gamma_u = 1/\tau$. It is straightforward to show, using the same procedure as above, that in that case

$$N(r, z = 0) = \frac{1}{4\pi Kr} \int_0^\infty \frac{kr J_0(kr) d(kr)}{r/2r_d + S(k)r \coth(S(k)L)} \quad \text{with } S(k) \equiv \sqrt{k^2 + \frac{\Gamma_u}{K}} \quad (23)$$

III. TIME-DEPENDENT SOLUTION

A more precise description of the diffusion process may be obtained from the time-dependent diffusion equation. This gives another formulation of the steady-state solution, as a series having better convergence properties. It also enables to take differently into account the case of decaying particles.

A. The time-dependent diffusion equation

The time-dependent diffusion equation reads

$$\frac{\partial N}{\partial t} = K \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right\} - \Gamma \delta(z) N \quad (24)$$

We seek the solution at $t > 0$ such that $N(r, z, t = 0) = \delta^3(\vec{r})$. It is convenient to use the typical length $r_d = K/\Gamma$ introduced above, or alternately its reciprocal k_d , so that Eq. 24 may be written as

$$\frac{\partial N}{\partial(Kt)} = \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} \right\} - k_d \delta(z) N \quad (25)$$

The diffusion process in the z direction and in the radial direction are independent. As only pure diffusion occurs in the radial direction, the density can be written as

$$\mathcal{N}(r, z, t) = \frac{1}{4\pi Kt} e^{-r^2/4Kt} N(z, t) \quad (26)$$

where the function $N(z, t)$ satisfies the time dependent diffusion equation along z

$$\frac{\partial N}{\partial(Kt)} = \frac{\partial^2 N}{\partial z^2} - k_d \delta(z) N \quad (27)$$

B. Derivation

First, we seek solutions of the form $N(z, t) = f(z)g(t)$, which separates the diffusion equation into

$$g' = -\alpha g \quad \text{and} \quad -\alpha f = Kf'' - \Gamma\delta(z)f \quad (28)$$

where α must be positive in order to eliminate runaway solutions for g . The equation on f can be solved for $z > 0$ and $z < 0$ with the condition $f(\pm L) = 0$ as

$$f(z) = A \sin \{k(L - |z|)\} \quad (29)$$

where $k = \sqrt{\alpha/K}$. Derivation in the sense of the distribution, as in the previous section, yields

$$Kf''(z) = -\alpha f(z) - 2KkA\delta(z) \cos kL \quad (30)$$

Inserting into (28) gives the condition

$$2k \cotan(kL) = -k_d \quad (31)$$

There is a infinite discrete set of k_n satisfying the above condition, which gives the allowed values $\alpha_n = Kk_n^2$ of α . For example, whit no reaction ($k_d = 0$), $k_n = (2n + 1)\pi/2L$. The general solution reads

$$N(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n t} \sin \{k_n(L - |z|)\} \quad (32)$$

The functions $\sin\{k_n(L - |z|)\}$ form an orthogonal set, and it is found that

$$\int_{-L}^L \sin \{k_n(L - |z|)\} \sin \{k_{n'}(L - |z|)\} dz = \delta_{nn'} c_n \quad (33)$$

with

$$c_n = L - \frac{\sin 2k_n L}{2k_n} \quad (34)$$

The A_n are found by imposing that for $t = 0$, the distribution is a dirac function,

$$\delta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \{k_n(L - |z|)\} \quad (35)$$

Multiplying by $\sin\{k_m(L - |z|)\}$ and integrating over z yields

$$A_m = c_m^{-1} \sin k_m L \quad (36)$$

so that finally

$$N(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-\alpha_n t} \sin(k_n L) \sin \{k_n(L - |z|)\} \quad (37)$$

and

$$\mathcal{N}(r, z, t) = \frac{1}{4\pi Kt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-\alpha_n t} \sin(k_n L) \sin \{k_n(L - |z|)\} \quad (38)$$

The radial distribution in the disk is given by

$$\mathcal{N}(r, z = 0, t) = \frac{1}{4\pi Kt} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right) \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} e^{-k_n^2 Kt} \sin^2(k_n L) \quad (39)$$

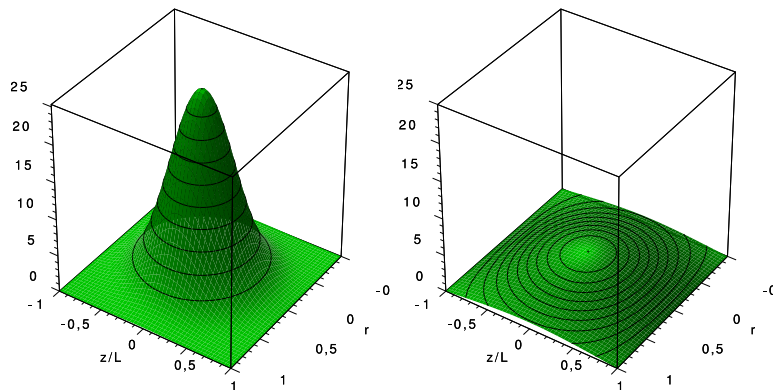


FIG. 3: Particle distribution as a function of z/L and r/L , for $Kt = 0.05L$ and $Kt = 0.2L$. At early times, the distribution is close to the free case, as very few particles had time to reach the boundary. At later times, the effect of absorption are more pronounced.

C. Reformulation of the steady-state model

The stationary regime results from the continuous superposition of solutions for instantaneous sources, so that the corresponding solution is given by

$$\mathcal{N}_{\text{stat}}(r, z) = \int_0^\infty \mathcal{N}(r, z, t) dt \quad (40)$$

Using the identity (Gradshteyn & Ryzhik 1980)

$$\int_0^\infty \frac{dt}{t} e^{-\alpha t - \beta/t} = 2K_0\left(2\sqrt{\alpha\beta}\right) \quad (41)$$

involving the Bessel function of the third kind K_0 , the integration of (38) yields

$$\mathcal{N}_{\text{stat}}(r, z) = \frac{1}{2\pi K} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} K_0(k_n r) \sin(k_n L) \sin\{k_n(L - z)\} \quad (42)$$

where the Bessel function of the third kind K_0 has been introduced. The density in the disk is thus given by

$$\mathcal{N}_{\text{stat}}(r, z = 0) = \frac{1}{2\pi K} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1} K_0(k_n r) \sin^2(k_n L) \quad (43)$$

This expression provides an alternative (but is exactly equivalent) to the usual Fourier Bessel expansion, using the J_0 functions. It is particularly well suited for sources well localized in space, like point-like sources, because the functions over which the development is performed (the K_0) do not oscillate. As a consequence, convergence of the series above is fast and the expression above provides a powerful alternative to compute the density for not too small values of r/L , as illustrated in Fig. (4) for the case $\Gamma = 0$, for which $\sin^2 k_n L = 1$ and $c_n = L$, so that

$$\mathcal{N}_{\text{stat}}(r, z = 0) = \frac{1}{2\pi K L} \sum_{n=1}^{\infty} K_0\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi r}{L}\right) \quad (44)$$

This case is illustrated in Fig. (4).

D. The case of unstable particles

When the particles can decay with a rate $\Gamma_u = 1/\tau$, the previous time-dependent expressions must simply be corrected by a multiplicative factor $\exp(-\Gamma_u t)$, which amounts to make the substitution $\alpha_n \rightarrow \alpha_n + \Gamma_u$ so that finally, the expression (43) is still valid provided the substitution $k_n \rightarrow \sqrt{k_n^2 + \Gamma_u/K}$ is performed.

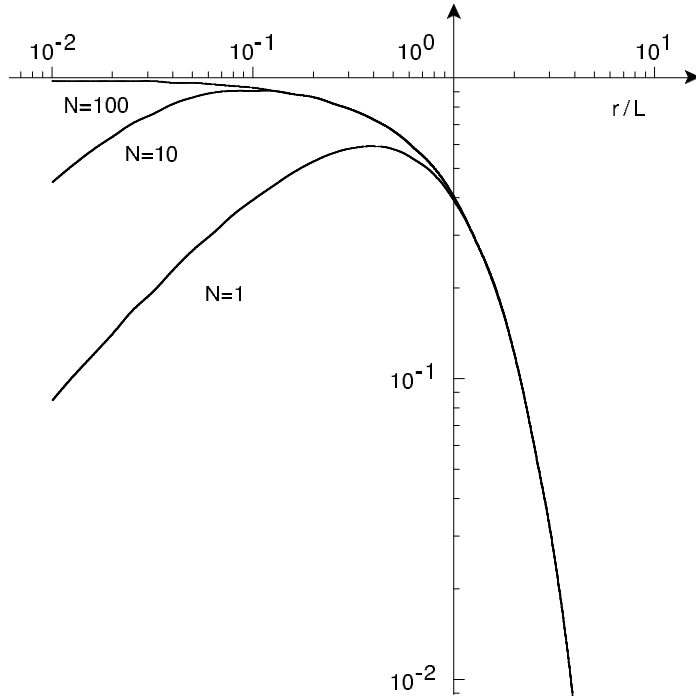


FIG. 4: Values of the correction to the free diffusion case as a function of r/L , for $\Gamma = 0$, computed with the series in K_0 , truncated at different numbers of terms. The first term alone reproduces quite well the profile for $r \gtrsim 2$.

IV. METHOD OF IMAGES

A. Definition and result

In the absence of destruction in the disk, a completely different approach is provided by the elegant method of the images inspired from electrostatics. In infinite space, the solution to our diffusion problem is straightforward and is given by the relation (2) in the case of an initial Dirac distribution at the source S . We furthermore would like to impose the boundary condition according to which the cosmic-ray density N vanishes on the plane $z = +L$ at any time. To do so, we can introduce the virtual source S' that is the image of the real source S with respect to the boundary $z = +L$ acting like a anti-mirror. The cosmic-ray densities which S and its image S' generate are equal up to a relative minus sign that allows both contributions to cancel out exactly on the boundary. In order to impose that the density also vanishes at $z = -L$, we can consider the anti-image S'' of S with respect to that lower boundary. Because two anti-mirrors are now present at $z = +L$ and $z = -L$, an infinite series of multiple images $\{S_n\}$ arises. They are aligned with the real source $S_0 \equiv S$ in the vertical direction and the position of S_n is given by

$$s_n = 2Ln + (-1)^n s. \quad (45)$$

The virtual source S_n results from $|n|$ reflections throughout the mirrors and its production is affected by a sign $(-1)^n$ with respect to the real source S . The distribution of sources within the Galaxy is not perturbed by the presence of their virtual images that are located outside the domain of interest.

We readily infer that in the presence of boundaries, the time-dependent solution (2) is modified into

$$N_s(r, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4\pi Kt)^{3/2}} e^{-[r^2 + (z-s_n)^2]/4Kt}. \quad (46)$$

which can be rewritten, decoupling the diffusion processes along the vertical axis and in the radial direction, as

$$N_s(r, z, t) = \frac{e^{-r^2/4Kt}}{4\pi Kt} \times \left\{ n \{s, 0 \rightarrow z, t\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{4\pi Kt}} e^{-(z-s_n)^2/4Kt} \right\}. \quad (47)$$

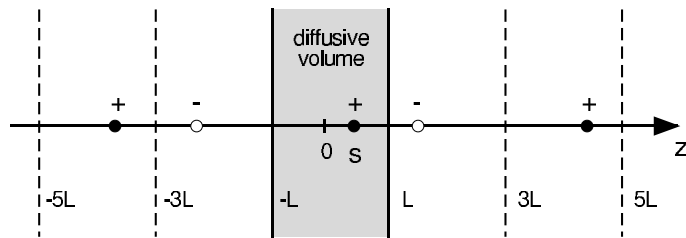


FIG. 5: Position of the virtual sources, images of the real sources through the anti-mirrors at $z = \pm L$. The black dots represent positive sources (they contribute like the real source) and white dots represent negative sources.

The steady-state solutions given by

$$N_s(r, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4\pi K \sqrt{r^2 + (z - s_n)^2}} \quad (48)$$

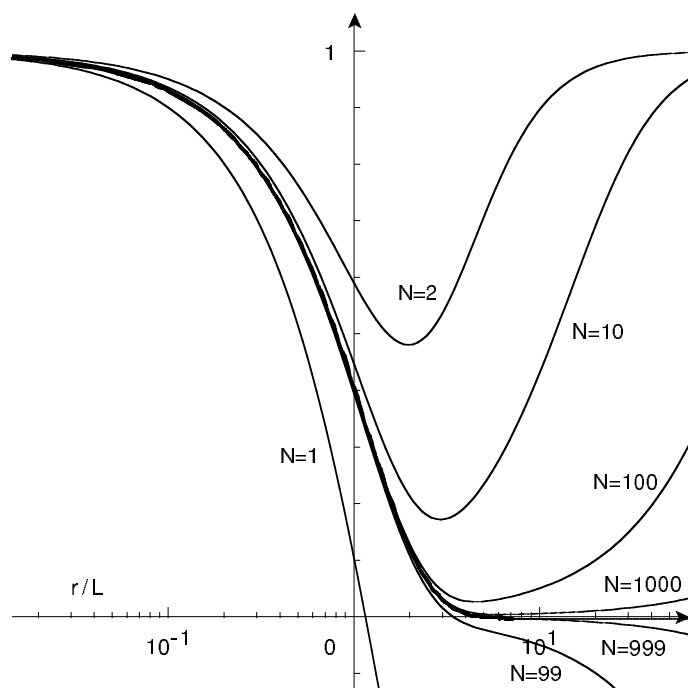


FIG. 6: Density in the plane $z = 0$, as a function of r/L , and normalized to the free diffusion case. The dots represent the exact solution, and the thin lines show the result given by the series of images, for several truncatures of the sum. At very large distances ($r \gg L$) and in the case of a small number of sources, these are felt as a single source (positive or negative, depending on the parity of N), so that the density tends to plus or minus the free diffusion case.

B. Equivalence with the first approach

The expression (21) can be easily transformed into (48), for $z = 0$ in the case $\Gamma = 0$. Indeed, in the expression

$$N(r, z) = \frac{1}{4\pi K r} \int_0^\infty J_0(kr) \tanh(kL) d(kr) \quad (49)$$

using the development

$$\tanh(kL) = (1 - e^{-2kL}) (1 + e^{-2kL})^{-1} = (1 - e^{-2kL}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-2nkL} \quad (50)$$

a few steps lead to

$$N(r, z) = \frac{1}{4\pi Kr} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} J_0(kr) (-1)^n e^{-2nkL} d(kr) \right\} \quad (51)$$

Which finally gives the expression (48), using $\int_0^{\infty} J_0(ax)e^{-bx}dx = (a^2 + b^2)^{-1/2}$.

C. Equivalence with the former approach

The diffusion from the single source S within a slab – on the boundaries of which the cosmic-ray density vanishes – amounts simply to the diffusion in infinite space from the series of sources S_n . Along the vertical direction, the initial distribution is

$$N_s(z, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \delta(z - s_n) . \quad (52)$$

Because that distribution is periodic, its Fourier transform which we define by

$$N(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} n \{s, 0 \rightarrow z, 0\} e^{-ikz} dz , \quad (53)$$

is composed of a discrete series of modes k . It may actually be expressed as

$$N(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-iksn} \equiv \{e^{-iks} - e^{2kL} e^{iks}\} \left\{ \mathcal{S} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-4inkL} \right\} . \quad (54)$$

After some straightforward algebra, very similar to what is done in optics to compute the diffraction from an infinite diffracting grid, the sum \mathcal{S} is transformed into

$$\mathcal{S} = \frac{\pi}{2L} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(k - n\frac{\pi}{2L}\right) . \quad (55)$$

We conclude that the initial vertical distribution $n \{s, 0 \rightarrow z, 0\}$ contains a series of modes with discrete wavevectors $k = n\pi/2L$. Inserting this expression into (54), we see that odd values of $n = 2p - 1$ are associated to modes for which $k_p L = (p - 1/2)\pi$ and contribute a factor

$$N(k_p) = \frac{\pi}{L} \cos k_p s , \quad (56)$$

whereas even values of $n = 2p$ lead to wavevectors k'_p such that $k'_p L = p\pi$ and to

$$N(k'_p) = -i\frac{\pi}{L} \sin k'_p s . \quad (57)$$

The initial cosmic-ray distribution in the vertical direction $n \{s, 0 \rightarrow z, 0\}$ may be expressed as a Fourier series on the various odd and even modes p which we have just scrutinized

$$N_s(z, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{L} \cos(k_p s) \cos(k_p z) + \frac{1}{L} \sin(k'_p s) \sin(k'_p z) \right\} . \quad (58)$$

Because each Fourier mode k exponentially decays in time like $\exp(-Kk^2t)$ as a result of diffusion, the initial distribution subsequently evolves into

$$N_s(z, t) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \frac{e^{-Kk_p^2 t}}{L} \cos(k_p s) \cos(k_p z) + \frac{e^{-Kk_p'^2 t}}{L} \sin(k'_p s) \sin(k'_p z) \right\} . \quad (59)$$

When the source is at the origin ($s = 0$), the density at the origin ($z = 0$) is given by

$$n \{s, 0 \rightarrow z, t\} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-Kk_p^2 t}}{L} \cos(k_p z) . \quad (60)$$

which, when radial diffusion is taken into account, is equivalent to the expression (38) in the case of no reaction (then $\sin k_n L = 1$ and $\cos k_n L = 0$).

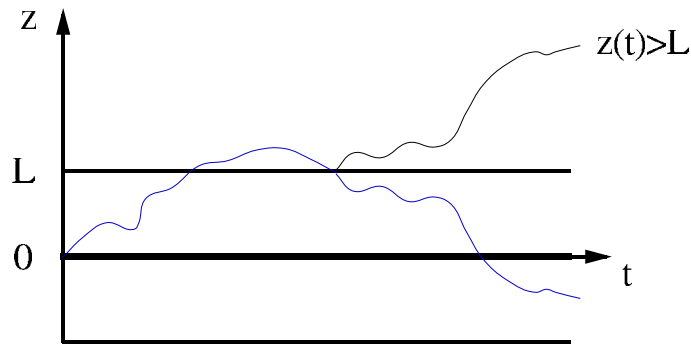


FIG. 7: For each path such that $\max \geq L$, there are two paths, one of which satisfies $z(t) \geq L$ but not the other.

V. RANDOM WALK APPROACH

It is well known that diffusion is closely related to random walks. The density at each point is related to the number of stochastic path which reach this point, from the source. When a boundary is present at $z = \pm L$, the paths that would go beyond this boundary do not contribute anymore to the density and must be discarded. When destruction can occur in the disk, the paths that cross the disk should be attributed a lower weight. In this section, we investigate separately these two effects.

A. Probability of not escaping

We first compute the probability that a particle emitted at time $t = 0$ in the disk has not reached the boundary at a further time t . At this time, position z is given by a random walk of duration t . The probability we seek is given by

$$\mathcal{P}\{(\max < L) \cap (\min > -L)\} = 1 - \mathcal{P}\{(\max \geq L) \cup (\min \leq -L)\} \quad (61)$$

where \max and \min are the maximum and minimum z reached by the random walk. From elementary statistics,

$$\mathcal{P}\{(\max \geq L) \cup (\min \leq -L)\} = \mathcal{P}\{\max \geq L\} + \mathcal{P}\{\min \leq -L\} - \mathcal{P}\{(\max \geq L) \cap (\min \leq -L)\} \quad (62)$$

By symmetry, $\mathcal{P}\{\max \geq L\} = \mathcal{P}\{\min \leq -L\}$. Furthermore, using the principle of reflection, it is straightforward to show that (see figure 7)

$$\mathcal{P}\{\max \geq L\} = 2\mathcal{P}\{z(t) \geq L\} \quad (63)$$

It is also apparent that (see figure 8)

$$\mathcal{P}\{(\max \geq L) \cap (\min \leq -L)\} = \mathcal{P}\{(\max \geq 3L) \cup (\min \leq -3L)\} \quad (64)$$

so that finally

$$\mathcal{P}\{(\max < L) \cap (\min > -L)\} = 1 - 4\mathcal{P}\{z(t) \geq L\} + \mathcal{P}\{(\max \geq 3L) \cup (\min \leq -3L)\} \quad (65)$$

Now, the same reasoning with Eq. (62) applied to the last term yields

$$\mathcal{P}\{(\max < L) \cap (\min > -L)\} = 1 - 4\mathcal{P}\{z(t) \geq L\} + 4\mathcal{P}\{z(t) \geq 3L\} - 4\mathcal{P}\{z(t) \geq 5L\} + \dots \quad (66)$$

B. Probability of not escaping for particles reaching the disk

The problem we addressed in the previous sections was a bit different, though, as we were interested in particles reaching a given point, for example in the disk. The same reasoning as before can be used, and the probability that a particle reaching the disk at time t has not wandered farther than the boundaries is given by

$$\mathcal{P}_d\{(\max < L) \cap (\min > -L)\} = 1 - \mathcal{P}_d\{(\max \geq L) \cup (\min \leq -L)\} \quad (67)$$

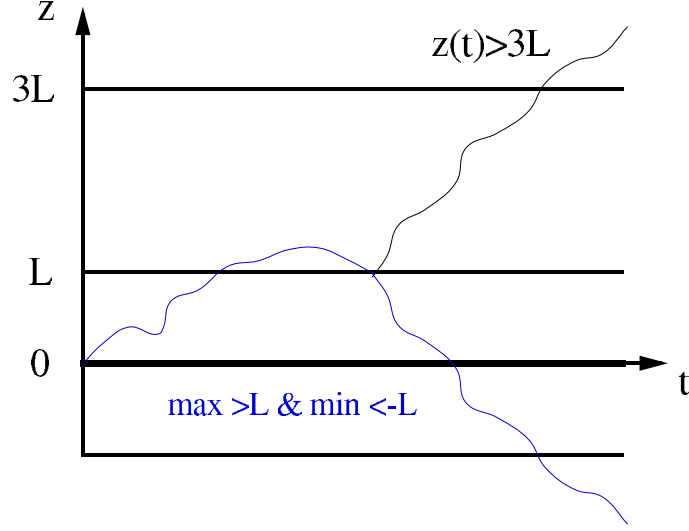


FIG. 8: For each path such that $\max \geq L$ and $\min \leq -L$, there is a symmetric path satisfying $z(t) \geq 3L$.

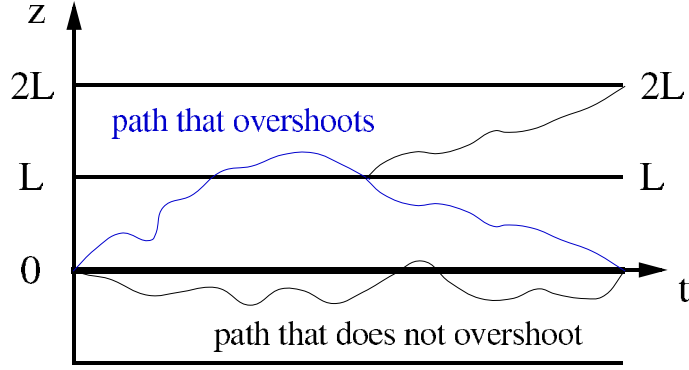


FIG. 9: If a path such that $z(t) = 0$ wanders beyond the upper boundary, then there is a symmetric path that satisfies $z(t) = 2L$. The probability that the path goes beyond this boundary is thus given by the ratio $\mathcal{P}\{z(t) = 2L\} / \mathcal{P}\{z(t) = 0\}$.

where we have used the compact notation for conditional probability

$$\mathcal{P}_d \{\text{event}\} \equiv \mathcal{P} \{\text{event} | z(t) = 0\} \quad (68)$$

Exactly as before, the use of symmetry yields

$$\mathcal{P}_d \{(\max \geq L) \cup (\min \leq -L)\} = 2\mathcal{P}_d \{\max \geq L\} - \mathcal{P}_d \{(\max \geq L) \cap (\min \leq -L)\} \quad (69)$$

Now, the principle of reflection yields a different result for the conditional probability (see figure 9)

$$\mathcal{P} \{\max \geq L | z(t) = 0\} = \frac{\mathcal{P}\{z(t) = 2L\}}{\mathcal{P}\{z(t) = 0\}} \quad (70)$$

As before,

$$\mathcal{P}_d \{(\max \geq L) \cap (\min \leq -L)\} = \mathcal{P}_d \{(\max \geq 3L) \cup (\min \leq -3L)\} \quad (71)$$

so that finally

$$\mathcal{P}_d \{(\max < L) \cap (\min > -L)\} = 1 - 2 \frac{\mathcal{P}\{z(t) = 2L\}}{\mathcal{P}\{z(t) = 0\}} + \mathcal{P}_d \{(\max \geq 3L) \cup (\min \leq -3L)\} \quad (72)$$

The same reasoning, applying equation (69) to the last term, gives

$$\mathcal{P}\{(\max < L) \cap (\min > -L) | z(t) = 0\} = 1 - 2 \frac{\mathcal{P}\{z(t) = 2L\}}{\mathcal{P}\{z(t) = 0\}} + 2 \frac{\mathcal{P}\{z(t) = 4L\}}{\mathcal{P}\{z(t) = 0\}} - 2 \frac{\mathcal{P}\{z(t) = 6L\}}{\mathcal{P}\{z(t) = 0\}} + \dots \quad (73)$$

or

$$\mathcal{P}\{(\max < L) \cap (\min > -L) | z(t) = 0\} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp\left(-\frac{n^2 L^2}{2t}\right) \quad (74)$$

It has the same form as given by the method of images.

C. The effect of destruction in the disk

We now investigate the effect of destruction occurring in the disk, in the simple case where no boundary is present. As before, the steady-state 3-D solution will be obtained from the one-dimensional time-dependent diffusion. We denote p the probability that a particle crossing the disk is destroyed. In the case of a random walk $z = \sum_{i=1}^N z_i$ consisting of $N \equiv t/\tau$ elementary steps of length λ and duration τ , the probability distribution of disk-crossing numbers n is given by (Papoulis 2002)

$$d\mathcal{P}_d(n|t) \equiv d\mathcal{P}(n|t, z(t) = 0) = \frac{2n\tau}{\kappa_2 t} \exp\left(-\frac{n^2 \tau}{\kappa_2 t}\right) dn. \quad (75)$$

In this expression, $\kappa_2 \sim 1$ depends on its statistical properties (for instance, $\kappa_2 = 2$ for elementary steps $z_i = \pm\lambda$ and $\kappa_2 \approx 1.43$ for z_i uniformly distributed in the interval $[-\lambda, \lambda]$). The diffusion coefficient is defined as

$$K \equiv \frac{\langle z^2 \rangle}{2t} = \frac{N \langle (z_i/\lambda)^2 \rangle \lambda^2}{2N} \frac{\lambda^2}{\tau} = \kappa_3 \frac{v^2 \tau}{2}, \quad (76)$$

where $\kappa_3 \equiv \langle (z_i/\lambda)^2 \rangle$ is the variance of the elementary random step (in units of λ) and $v \equiv \lambda/\tau$. We thus finally have,

$$d\mathcal{P}_d(n|t) = \frac{4Kn}{\kappa_2 \kappa_3 v^2 t} \exp\left(-\frac{2Kn^2}{\kappa_2 \kappa_3 v^2 t}\right) dn \quad (77)$$

We are now able to compute the probability distribution of disk crossings for particles emitted from a distance r in the disk as

$$\frac{d\mathcal{P}_d(n|r)}{dn} = \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{P}_d(n|t)}{dn} \mathcal{P}_d(t|r) dt, \quad (78)$$

where the probability that a CR reaching distance r in the disk was emitted at time t is

$$\mathcal{P}_d(t|r) \propto \frac{1}{(Kt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4Kt}\right). \quad (79)$$

The above integral (78) can be performed, yielding the final result

$$\frac{d\mathcal{P}_d(n|r)}{dn} = \frac{r_0^2 n}{r^2} \left(1 + \frac{r_0^2 n^2}{r^2}\right)^{-3/2}, \quad (80)$$

with $r_0^2 \equiv 8K^2/\kappa_2 \kappa_3 v^2 = 2\lambda^2 \kappa_3/\kappa_2$. We can also compute the integrated probability, that more than n_0 crossings have occurred, as

$$\mathcal{P}_d(n > n_0 | r) = \left(1 + \frac{r_0^2 n_0^2}{r^2}\right)^{-3/2}. \quad (81)$$

A particle having crossed n times the disk has the probability $p_n = (1-p)^n \sim \exp(-np)$ of surviving, so that the survival probability at distance r is given by

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{surv}}(r) &= \int_0^{\infty} \frac{d\mathcal{P}(n|r, z(t) = 0)}{dn} e^{-np} dn \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2}} e^{-xrp/r_0}. \end{aligned}$$

The density of Cosmic Rays in the disk is then given by

$$N(r) = \frac{\mathcal{P}_{\text{surv}}(r)}{4\pi Kr} = \frac{1}{4\pi Kr} \int_0^\infty \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/2}} e^{-xrp/r_0}. \quad (82)$$

This form is actually equivalent to (19), with $L \rightarrow \infty$,

$$N(r, z=0) = \int_0^\infty \frac{k J_0(kr) dk}{2\pi(\Gamma + 2Kk)} \quad (83)$$

Indeed, rewriting $1/2\pi(\Gamma + 2Kk)$ as $\int_0^\infty dy \exp(-2\pi(\Gamma + 2Kk)y)$ and reversing the integrations, (21) can be written,

$$N(r, z=0) = \int_0^\infty dy e^{-2\pi\Gamma y} \int_0^\infty k J_0(kr) dk e^{-4\pi Kky} \quad (84)$$

Using the identity (Gradshteyn & Ryzhik 1980)

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y} J_0(\beta y) y dy = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^{3/2}} \quad (85)$$

we finally have, performing the change of variables $4\pi Ky/r \equiv x$,

$$N(r, z=0) = \int_0^\infty dy \frac{4\pi Kry}{(r^2 + (4\pi Ky)^2)^{3/2}} e^{-2\pi\Gamma y} = \frac{1}{4\pi Kr} \int_0^\infty dx \frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} e^{-\Gamma rx/K\pi} \quad (86)$$

This equation has the same form as (82), and relates the microscopic and macroscopic properties of diffusion, as p/r_0 must be equal to $\Gamma/\pi K$. It should also be remarked that this integral is easier to compute than those involving J_0 functions, having a faster convergence as the integrand does not oscillate.

VI. DISCUSSION

The four methods presented in this paper do not all apply in every situation. The first two are valid for arbitrary L and Γ as well as with spontaneous decay of unstable species. The second one contains a richer physical information, as it provides the density as a function of time. The third one is only valid when $\Gamma = 0$, taking only into account the effect of absorption by the boundaries. The fourth one is more general as we have also presented the case $\Gamma \neq 0$. However, it needs to be worked further out in order to consider simultaneously absorption at the boundaries and destruction in the central plane³. Comparison of the method of images and the use of random walk give some complementary insights to the consequences of absorption at a boundary. The paths that wander beyond the boundaries, and that we had to suppress by hand in Sec. V are actually those connecting the point at which the density is sought, to the negative images introduced in Sec. IV. The effect of these negative images is to destroy the paths that would wander out of the diffusive volume. It is important to note that this is different from the path integral interpretation of the Schrodinger equation, in which case the paths are weighted by a complex phase term, whereas in the classical diffusion case we have discussed, the paths have only ± 1 factors.

Acknowledgments

This work has benefited from the support of the PNC (Programme National de Cosmologie).

APPENDIX A: TRANSFORMATIONS OF EQ. (21) FOR AN EASIER NUMERICAL COMPUTATION

a. Substraction Using

$$\int_0^\infty J_0(x) dx = 1 \quad (A1)$$

$I[f]$ may be rewritten

$$I[f] = 1 - \int_0^\infty J_0(x) (1 - f(x)) dx. \quad (A2)$$

The convergence is faster, as $1 - f \rightarrow 0$ when $x \rightarrow \infty$.

b. *Integration by part* Using the identity $(xJ_1)' = xJ_0$ and integrating by parts, one has

$$I[f] = - \lim_{x \rightarrow 0^+} [J_1(x)f(x)] + \int_0^\infty J_1(x) \left(\frac{f(x)}{x} - f'(x) \right) dx. \quad (\text{A3})$$

Using the identity $J_0' = -J_1$ and integrating by parts again,

$$I[f] = - \lim_{x \rightarrow 0^+} [J_1(x)f(x)] + \left[J_0(x) \left(\frac{f(x)}{x} - f'(x) \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty J_0(x) \left(f''(x) - \frac{f'(x)}{x} + \frac{f(x)}{x^2} \right) dx. \quad (\text{A4})$$

These expressions provide several efficient alternatives to evaluate $I[f]$, provided the integrated terms are well defined, i.e. if

$$f(x) = A + Bx \ln x + \mathcal{O}(x) \quad (\text{A5})$$

c. *Comparison to a known function* Part of the difficulty to evaluate numerically the Bessel expansions comes from the fact that the original functions are singular at the source position. As a result, the large k modes continue to be important to reconstruct the solution. We can take advantage of the fact that the singularity is known, as the density is quite close to the free diffusion case $f_{\text{ref}}(r) = 1/4\pi Kr$ for small r . The corresponding Bessel coefficients are given by

$$\tilde{f}_{\text{ref}}(k) = \int_0^\infty r \frac{1}{4\pi Kr} J_0(kr) dr = \frac{1}{4K\pi k} \quad (\text{A6})$$

It is then judicious to write the density as

$$N(r, 0) = f_{\text{ref}}(r) + \int_0^\infty k J_0(kr) \left\{ \tilde{f}(k) - \tilde{f}_{\text{ref}}(k) \right\} dk = \frac{1}{4\pi Kr} + \int_0^\infty J_0(kr) \left\{ k \tilde{f}(k) - \frac{1}{4K\pi} \right\} dk \quad (\text{A7})$$

where the singularity is entirely contained in the first term: the Bessel expansion has been regularized. In the remaining integral to be computed, the convergence is much faster, as the large k modes contribute very little. Other choices of $f_{\text{ref}}(r)$ may be preferred for particular values of L , Γ and r . This method yields a very good and rapid convergence for sources located in the thin disk $z = 0$.

d. *Softening of the source term* Finally, the source term may be spread out on a radius a , by replacing the point source $\delta(\vec{r})$ by a disk source $q(r) = \theta(a-r)/(\pi a^2)$ for which an extra $2J_1(ka)/ka$ term appears in the Bessel transform. With a judicious choice of the parameter a , the solution is very close to the original for $r \gg a$, but convergence is much faster due to the extra $1/k$ factor.

* Electronic address: taillet@lapp.in2p3.fr

† Electronic address: salati@lapp.in2p3.fr

‡ Electronic address: dmaurin@discovery.saclay.cea.fr

§ Electronic address: pilon@lapp.in2p3.fr

¹ R. Taillet and D. Maurin, "Spatial origin of Galactic cosmic rays in diffusion models. I. Standard sources in the Galactic disk", *Astronomy and Astrophysics* **402**, 971-983 (2003).

² These expressions are very similar to those obtained with a circular boundary, as given by Jackson, except that summations over Bessel functions become integrals, and with the substitutions $1/J_1^2(\zeta_i) \rightarrow k\pi R/2$, $\sum_i \rightarrow \int d(Rk/\pi)$ and $\zeta_i/R \rightarrow k$.

³ For example, the probability distribution of disk crossing can be found in Taillet et al., [astro-ph/0308141](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0308141), for a general case taking into account absorption, destruction and convective current

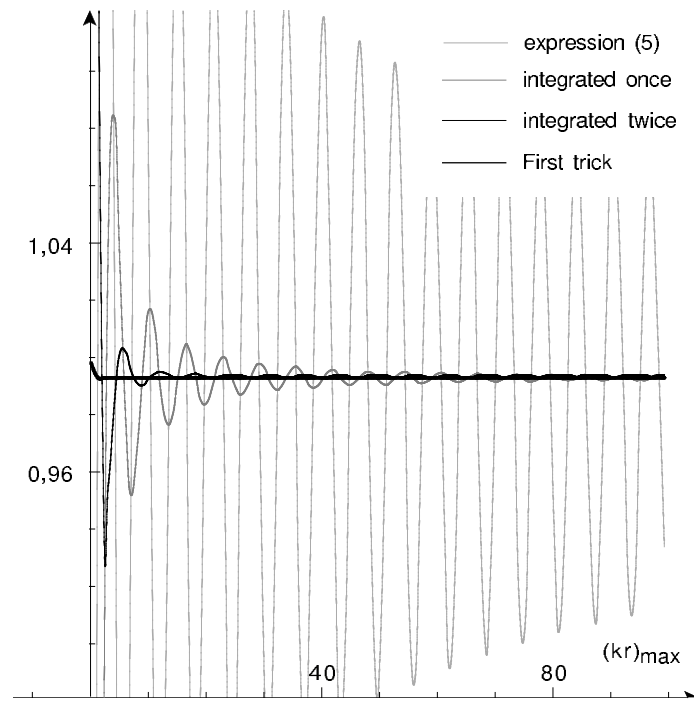


FIG. 10: Values of the correction to the free diffusion case, for $r = 0.01 L$ and $\Gamma = 0$, computed with the different methods described in the text, for different values of the upper boundary in the integral.

