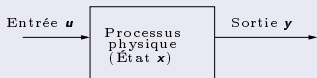


Application de l'homogénéité à la théorie des observateurs non linéaires.

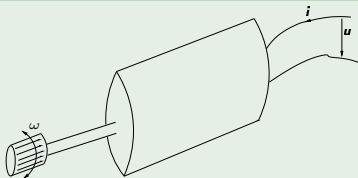
Tomas Ménéard

26 septembre 2011

Modélisation de systèmes

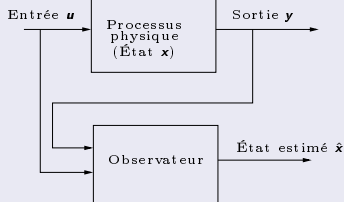


Exemple : moteur à courant continu

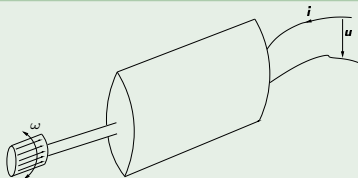


- Entrée : u (tension)
- Sortie : i (intensité)
- État interne : ω (vitesse de rotation) et i

Observateur : estimation des variables non mesurées.



Moteur à courant continu



Estimation de ω en connaissant i et u .

Principales utilisations :

- Commande par retour de sortie
- Surveillance
- Détection de pannes
- ...

Application de l'homogénéité

Temps fini :

- Synchronisation de signaux chaotiques [Nijmeijer et Mareels 1997]
- Robotique humanoïde : marche humaine [Plestan et al. 2003]
- ...

Approximations :

- Système non linéaire parfois trop compliqué
- Approximation suffisante pour résoudre de nombreux problèmes

Plan de la présentation

- 1 Homogénéité et Stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité
- 4 Construction d'un observateur local
- 5 Conclusion et Perspectives

- 1 Homogénéité et Stabilité
 - Définition de l'homogénéité
 - Rappels sur la Stabilité de Lyapunov
 - Application de l'homogénéité à la stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité
- 4 Construction d'un observateur local
- 5 Conclusion et Perspectives

Définition

Fonctions

Soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. La fonction V est homogène de degré $d \in \mathbb{R}$ par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ si

$$V(\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^d V(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0.$$

Champs de vecteurs

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le champ de vecteurs f est homogène de degré $d \in \mathbb{R}$ par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$ si

$$f_i(\lambda^{r_1} x_1, \dots, \lambda^{r_n} x_n) = \lambda^{d+r_i} f_i(x_1, \dots, x_n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda > 0.$$

pour $i = 1, \dots, n$.

Exemples

Exemple (fonction)

La fonction

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^3 + x_2x_3$$

est homogène de degré 3 par rapport aux poids (3, 1, 2).

En effet :

$$V(\lambda^3x_1, \lambda^1x_2, \lambda^2x_3) = \lambda^3(x_1 + x_2^3 + x_2x_3) = \lambda^3V(x_1, x_2, x_3)$$

Exemple (champ de vecteurs)

Le champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = x_2^3 + x_1x_2 \\ f_2(x_1, x_2) = x_1 \end{cases}$$

est homogène de degré 1 par rapport aux poids (2, 1).

Rappels sur la stabilité asymptotique

Définition

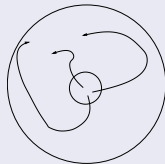
Considérons le système

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

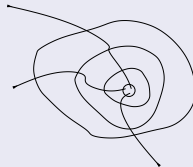
tel que $f(0) = 0$. Ce système est dit asymptotiquement stable à l'origine si :

- il est stable au sens de Lyapunov
- les solutions convergent vers l'origine

Stabilité (Lyapunov)



Attractivité



Rappels sur la stabilité en temps fini

Définition

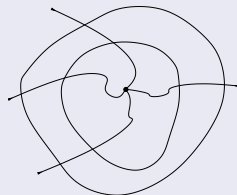
Le système

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

vérifiant $f(0) = 0$, est stable en temps fini si :

- il est stable au sens de Lyapunov
- les solutions convergent en temps fini vers l'origine.

Stabilité (temps fini)



Exemple (Pendule) :



Application de l'homogénéité à la stabilité en temps fini

Théorème (Bhat & Bernstein 1997)

Considérons le système suivant :

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

Si

- f est homogène de degré $d < 0$ par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$
- le système (1) est localement asymptotiquement stable

alors

- le système (1) est globalement stable en temps fini

Application de l'homogénéité pour la construction d'approximation

Théorème (Hermes 1991)

Considérons le système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

tel que :

- f est homogène de degré $d \in \mathbb{R}$ par rapport aux poids $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}_+^n$
- le champ de vecteurs g vérifie

$$g_i(t^{r_1} x_1, \dots, t^{r_n} x_n) / t^{d+r_i} \rightarrow 0$$

uniformément sur S^{n-1} quand $t \rightarrow 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

Si :

- l'origine du système

$$\dot{x} = f(x)$$

est localement asymptotiquement stable.

Alors :

- l'origine du système (2) est localement asymptotiquement stable.

- 1 Homogénéité et Stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini**
 - Rappel des résultats précédents
 - Contributions
 - Exemple
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité
- 4 Construction d'un observateur local
- 5 Conclusion et Perspectives

Résultats précédents

Observateur de Perruquetti & al.

Système considéré :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = 0 \\ y = x_1 \end{array} \right.$$

Observateur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_1} \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 - k_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_2} \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n - k_{n-1} [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{\hat{x}}_n = -k_n [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_n} \end{array} \right.$$

Terme de correction :

$$[x]^\alpha = \text{sign}(x) \cdot |x|^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 0$$

Réglage des gains

Les puissances $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont définies par :

$$\alpha_i = i\alpha - (i - 1), \quad i = 1, \dots, n,$$

avec $\alpha \in]1 - \frac{1}{n}, +\infty[$

Les gains $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont définis de telle façon que la matrice associée au système d'erreur, dans le cas linéaire, soit de Hurwitz.

Théorème

L'observateur précédent est globalement stable en temps fini.

Observateur de Shen & Xia

Le résultat précédent a été étendu pour les systèmes sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 + \sum_{j=1}^m u_j g_{1j}(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_3 + \sum_{j=1}^m u_j g_{2j}(x_1, x_2) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \sum_{j=1}^m u_j g_{(n-1)j}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \dot{x}_n = \varphi(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_{nj}(x) \\ y = x_1 \end{array} \right.$$

où les fonctions φ et g_{ij} , $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ sont globalement Lipschitz et les entrées u_j sont bornées.

Remarque

La classe de systèmes précédente correspond à la classe des systèmes uniformément observables.

Observateur de Shen & Xia

L'observateur proposé par Shen & Xia est de la forme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 &= \hat{x}_2 + \sum_{j=1}^m u_j g_{1j}(\hat{x}_1) - k_1 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_1} \\ \dot{\hat{x}}_2 &= \hat{x}_3 + \sum_{j=1}^m u_j g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - k_2 [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_2} \\ &\vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} &= \hat{x}_n + \sum_{j=1}^m u_j g_{(n-1)j}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) - k_{n-1} [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_{n-1}} \\ \dot{\hat{x}}_n &= \varphi(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m u_j g_{nj}(\hat{x}) - k_n [\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_n} \end{cases}$$

Remarque

- Les puissances $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont les mêmes que pour l'observateur précédent.
- Les gains $(k_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont réglés comme pour un observateur à grand gain classique et dépendent d'un gain θ .

Observateur de Shen & Xia

Théorème (Shen & Xia)

L'observateur précédent est semi-globalement stable en temps fini. C'est-à-dire que pour tout compact K contenant l'origine, il existe un gain $\theta > 0$ assez grand tel que K soit contenu dans le domaine de convergence de l'observateur.

Remarque

Lors de l'initialisation, on doit être sûr d'avoir pris un θ assez grand pour que la condition initiale soit dans le domaine de convergence de l'observateur.

Contributions

Afin d'éviter le problème du choix de la condition initiale, nous voulons obtenir un observateur global. C'est-à-dire que l'on veut fixer le gain une fois pour toutes pour que le domaine de convergence soit l'espace d'état en entier, ce qui correspond ici à \mathbb{R}^n .

Remarque

Nous considérons la même classe de système que pour l'observateur de Shen & Xia.

Observateur global

Afin d'obtenir un observateur globalement convergent, nous modifions l'observateur proposé par Shen & Xia en rajoutant un terme linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 + \sum_{j=1}^m u_j g_{1j}(\hat{x}_1) - k_1([\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_1} + \rho_1(\theta)(\hat{x}_1 - x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_3 + \sum_{j=1}^m u_j g_{2j}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) - k_2([\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_2} + \rho_2(\theta)(\hat{x}_1 - x_1)) \\ \vdots \\ \dot{\hat{x}}_{n-1} = \hat{x}_n + \sum_{j=1}^m u_j g_{(n-1)j}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n-1}) \\ \quad - k_{n-1}([\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_{n-1}} + \rho_{n-1}(\theta)(\hat{x}_1 - x_1)) \\ \dot{\hat{x}}_n = \varphi(\hat{x}) + \sum_{j=1}^m u_j g_{nj}(\hat{x}) - k_n([\hat{x}_1 - x_1]^{\alpha_n} + \rho_n(\theta)(\hat{x}_1 - x_1)) \end{array} \right.$$

Théorème (Ménard & al. IEEE TAC 2010)

L'observateur précédent est globalement stable en temps fini.

Exemple

Nous allons appliquer notre observateur au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Observateur global en temps fini

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1(|e_1|^\alpha + \rho e_1) \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 - k_2(|e_1|^{2\alpha-1} + \rho e_1) \end{cases}$$

avec $e_1 = \hat{x}_1 - x_1$.

Observateur semi-global en temps fini

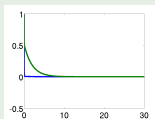
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2 - k_1|e_1|^\alpha \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 - k_2|e_1|^{2\alpha-1} \end{cases}$$

Gains

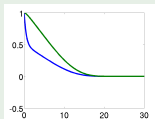
$$k_1 = 2\theta, \quad k_2 = \theta^2, \quad \rho(\theta) = \frac{(81\theta^{\frac{2}{3}} + 1)}{2}$$

Nous obtenons les résultats de simulations suivants, pour $\theta = 1$ et $\alpha = 0.9$:

Erreur Observateur global



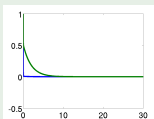
Erreur Observateur semi-global



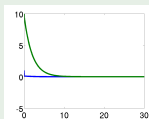
$$(e_1(0), e_2(0)) = (1, 1)$$

Nous obtenons les résultats de simulations suivants, pour $\theta = 1$ et $\alpha = 0.9$:

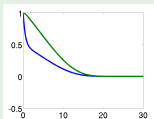
Erreur Observateur global



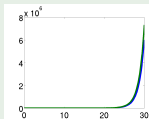
Erreur Observateur global



Erreur Observateur semi-global



Erreur Observateur semi-global



$$(e_1(0), e_2(0)) = (1, 1)$$

$$(e_1(0), e_2(0)) = (1, 10)$$

- 1 Homogénéité et Stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité**
 - Présentation du problème
 - Présentation des résultats
 - Exemple
- 4 Construction d'un observateur local
- 5 Conclusion et Perspectives

Présentation du problème

Nous considérons le système sans entrée suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}^p, \end{cases} \quad (3)$$

où les fonctions f et h sont analytiques et vérifient $f(0) = 0$ et $h(0) = 0$.

On suppose que le système (3) vérifie la condition du rang à l'origine, i.e.

$$\dim d\mathcal{O}(0) = n,$$

où

$$\mathcal{O} = \text{span} \{ \mathcal{L}_f^i h_k, \quad k = 1, \dots, p, i = 0, 1, \dots \}.$$

Le but est de trouver un changement de coordonnées $z = \varphi(x)$, tel que dans les nouvelles coordonnées z , le système s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{z} = f_1(z) + f_2(z) \\ y = h_1(z) + h_2(z) \end{cases}$$

Avec les propriétés suivantes :

- f_1 et h_1 sont homogènes par rapport à des poids (r_1, \dots, r_n) ,
- f_2 et h_2 sont des termes d'ordres supérieurs,
- f_1 et h_1 contiennent exactement les informations de l'espace d'observabilité à l'origine.

Construction du changement de variables

La construction du changement de variables est séparée en quatre étapes :

- (i) Définition d'un drapeau sur l'espace d'observabilité,
- (ii) Définition d'une base de 1-formes du drapeau,
- (iii) Construction d'une base duale de champs de vecteurs,
- (iv) Définition du changement de coordonnées.

Étape (i) : Définition du drapeau

On définit un drapeau sur $d\mathcal{O}$ par :

$$L_j = d \left(\text{span} \left\{ \mathcal{L}_f^i h_k, \quad k = 1, \dots, p, 0 \leq i \leq j-1 \right\} \right) \quad (4)$$

Ce drapeau satisfait les propriétés suivantes :

- $L_j \subset L_{j+1}$,
- $\mathcal{L}_f L_j \subset L_{j+1}$,
- $\bigcup_{j \geq 0} L_j = d\mathcal{O}, j \geq 0$.

Étape (ii) : Définition de la base de 1-formes

On prend $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_{n_1} \in L_1$
 tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_1}(0)$ forment une base de $L_1(0)$

On prend $\bar{\omega}_{n_1+1}, \dots, \bar{\omega}_{n_2} \in L_2$
 tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_2}(0)$ forment une base de $L_2(0)$

⋮

On prend $\bar{\omega}_{n_{d-1}+1}, \dots, \bar{\omega}_{n_d} \in L_d = d\mathcal{O}$
 tels que $\bar{\omega}_1(0), \dots, \bar{\omega}_{n_d}(0)$ forment une base de $L_{n_d}(0)$

$$\left. \begin{array}{l} 1 \\ \vdots \\ n_1 \\ n_1 + 1 \\ \vdots \\ n_2 \\ \vdots \\ n_{d-1} + 1 \\ \vdots \\ n_d = n \end{array} \right\}$$

Remarque

Pour chaque élément de la base $\bar{\omega}_i$, on peut associer de manière unique une fonction réelle \bar{h}_i par $d\bar{h}_i = \bar{\omega}_i$ avec $h_i(0) = 0$.

Étape (iii) : Construction d'une base duale de champs de vecteurs

On cherche une base duale de champs de vecteurs $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- une filtration de V est définie par

$$V_j = \{g \in V : \bar{w}_i(g) = 0, \quad 1 \leq i \leq n_{d-j}\}.$$

où V est l'algèbre de Lie engendrée par f et $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n$.

- $D\bar{h}_i(0) = 0, \forall i = n_j + 1, \dots, n_{j+1}$
 où $D = \mathcal{L}_{g_1} \circ \dots \circ \mathcal{L}_{g_l} : \{g_1, \dots, g_l\} \subset \{\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n\}$
 et $\sum_{k=1}^l w(g_k) \leq j$ avec $w(g) = \min\{i : g \in V_i\}$.
- $\bar{w}_i(\bar{g}_j)(0) = 0,$ pour tout i, j
 tels que $1 \leq i < n_k + 1 \leq j \leq n_d,$ et $1 \leq k \leq d - 1$.

Étape (iv) : Définition du changement de variables

On définit un changement de coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, où $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est donnée par :

$$\varphi(z_1, \dots, z_n) = \exp(z_n \bar{g}_n) \circ \dots \circ \exp(z_1 \bar{g}_1)(0),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, \xi) &\mapsto \exp(tf)(\xi) \end{aligned}$$

la solution de

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = \xi,$$

et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs analytique.

Propriété des nouvelles coordonnées

On définit des poids r_1, \dots, r_n par :

$$r_i = d - j, \quad n_j + 1 \leq i \leq n_{j+1}, \quad j = 0, \dots, d - 1.$$

Théorème (Ménard & al. IFAC WC 2011)

Dans les nouvelles coordonnées $z = \varphi^{-1}(x)$, f et \bar{h}_i , $i = 1, \dots, n$ s'écrivent :

$$f(z) = \sum_{l \geq -1} f_l(z)$$

$$\bar{h}_i(z) = \sum_{l \geq d-j+1} (\bar{h}_i)^l(z), \quad n_{j-1} + 1 \leq i \leq n_j.$$

où chaque f_l et $(\bar{h}_i)^l$ sont homogènes de degré l par rapport aux poids (r_1, \dots, r_n) .

Définition et propriétés de l'approximation

Définition

On définit les approximations \tilde{f} , \tilde{h}_i de f et \bar{h}_i par :

$$\begin{aligned}\tilde{h}_i(z) &= (\bar{h}_i)^{d-j+1}(z), \quad n_{j-1} \leq i \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq d. \\ \tilde{f}(z) &= f_{-1}(z)\end{aligned}$$

Proposition (Ménard & al. IFAC WC 2011)

Si on note \tilde{L}_j le drapeau associé au système approximant, i.e.

$$\tilde{L}_j = d \left(\text{span} \{ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^i \tilde{h}_k : 0 \leq i \leq j, k = 1, \dots, p \} \right),$$

alors, pour chaque $j = 1, \dots, d$, on a l'égalité suivante :

$$L_j(0) = \tilde{L}_j(0).$$

Exemple

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_3 + x_1 x_2 + x_3^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_3 &= x_3^3 + x_1^2 + x_2^3 \\ h_1(x) &= x_1^2 + x_2 \\ h_2(x) &= x_3 \end{cases}$$

pour lequel la condition d'observabilité du rang à l'origine est satisfaite, en effet :

$$dh_1(0) = dx_2,$$

$$dh_2(0) = dx_3,$$

$$d\mathcal{L}_f h_1(0) = dx_1 + dx_2.$$

Drapeau

$$L_1 = \text{span}\{dh_1, dh_2\} = \text{span}\{dx_2, dx_3\},$$

$$L_2 = \text{span}\{dh_1, dh_2, d\mathcal{L}_f h_1, d\mathcal{L}_f h_2\} = \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3\}.$$

Base du drapeau

$$\bar{w}_1 = d\bar{h}_1(x) = dh_1(x),$$

$$\bar{w}_2 = d\bar{h}_2(x) = dh_2(x),$$

$$\bar{w}_3 = d\bar{h}_3(x) = d\mathcal{L}_f h_2.$$

Poids

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1.$$

Base duale de champs de vecteurs

$$\bar{g}_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \bar{g}_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad \bar{g}_3 = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Système dans les nouvelles coordonnées

Dans les nouvelles coordonnées $(z_1, z_2, z_3) = \varphi^{-1}(x_1, x_2, x_3)$, le système est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_1 + z_3 + z_1^3, \\ \dot{z}_2 = -z_1 - z_3 - z_1^3 + (z_1 + z_2)^3 + z_3^2 + z_1^3, \\ \dot{z}_3 = z_1 + z_2 + z_3 z_1 + (z_1 + z_2)^3 + z_1^3, \\ h_1(z_1, z_2, z_3) = z_3^2 + z_1, \\ h_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2. \end{array} \right.$$

Décomposition

Le système peut être décomposé sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_3 + z_1 + z_1^3, \\ \dot{z}_2 = -z_3 - z_1 - z_1^3 + (z_1 + z_2)^3 + z_3^2 + z_1^3, \\ \dot{z}_3 = z_1 + z_2 + z_3 z_1 + (z_1 + z_2)^3 + z_1^3, \\ h_1(z_1, z_2, z_3) = z_3^2 + z_1, \\ h_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2. \end{array} \right.$$

Approximation

Le système approximant est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z}_1 = z_3, \\ \dot{z}_2 = -z_3, \\ \dot{z}_3 = 0 \\ \tilde{h}_1(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_3^2 \\ \tilde{h}_2(z_1, z_2, z_3) = z_1 + z_2 \end{array} \right.$$

Espace d'observabilité du système approximant

$$d\tilde{h}_1(0) = dz_1,$$

$$d\tilde{h}_2(0) = dz_1 + dz_2$$

$$d\mathcal{L}_{\tilde{f}} h_1 = dz_3$$

Drapeau

$$\tilde{L}_1(0) = L_1(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2\}$$

$$\tilde{L}_2(0) = L_2(0) = \text{span}\{dz_1, dz_2, dz_3\}$$

- 1 Homogénéité et Stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité
- 4 **Construction d'un observateur local**
 - Construction de l'observateur
 - Exemple et Simulation
- 5 Conclusion et Perspectives

On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

avec f et h analytiques et qui vérifient :

$$\dim \left(\text{span} \{ d\mathcal{L}_f^k h(0), k = 0, \dots, n-1 \} \right) = n$$

Remarque

Ce système vérifie bien la condition d'observabilité du rang.

Construction de l'observateur par l'approximation homogène

Il existe un changement de variables $z = \varphi^{-1}(x)$ qui transforme le système en :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{f}(z) + R_f(z) \\ y = \tilde{h}(z) + R_h(z) \end{cases}$$

où \tilde{f} et \tilde{h} sont homogènes de degrés respectifs -1 et $n-1$ par rapport aux poids $r_i = n - i$, $i = 1, \dots, n$.

On va donc construire un observateur pour l'approximation :

$$\begin{cases} \dot{z} = \tilde{f}(z) \\ y = \tilde{h}(z) \end{cases}$$

Changement de coordonnées

$$\xi = \Phi_h(z) = \begin{pmatrix} \tilde{h}(z) \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}} \tilde{h}(z) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\tilde{f}}^{n-1} \tilde{h}(z) \end{pmatrix}$$

Système dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = 0 \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

Observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 - k_1(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 - k_2(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} = \hat{\xi}_n - k_{n-1}(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_n = -k_n(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \end{cases}$$

Gains

$$K(\theta) := \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \theta \cdot C_n^1 \\ \theta^2 \cdot C_n^2 \\ \vdots \\ \theta^n \cdot C_n^n \end{bmatrix}$$

où

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Nous obtenons donc l'observateur suivant pour le système complet, dans les coordonnées originales :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \bar{K}_h(\theta, \hat{x}) \cdot (h(\hat{x}) - h(x))$$

où $\bar{K}_h(\theta, \hat{x})$ est donné par

$$\bar{K}_h(\theta, \hat{x}) = \frac{\partial(\varphi \circ \Phi_h^{-1})}{\partial \xi} (\Phi_h \circ \varphi^{-1}(\hat{x})) \cdot K(\theta)$$

Proposition

Supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (5)$$

soit stable à l'origine (au sens de Lyapunov),
alors il existe

- un voisinage \mathcal{U} de l'origine
- un gain $\theta > 0$

tels que l'observateur donné par :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \bar{K}_h(\theta, \hat{x}) \cdot (h(\hat{x}) - h(x)) \quad (6)$$

soit convergent sur \mathcal{U} .

C'est-à-dire, pour tout $x_0, \hat{x}_0 \in \mathcal{U}$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = \hat{x}(t) - x(t) = 0.$$

où $x(t)$ est la solution du système (5) ayant pour condition initiale x_0 et $\hat{x}(t)$ est la solution du système (6) ayant pour condition initiale \hat{x}_0 .

Construction de l'observateur par l'approximation linéaire

Système original

$$\begin{cases} \dot{x} = f_l(x) + R_f^l(x) \\ y = h_l(x) + R_h^l(x) \end{cases}$$

où f_l et h_l parties linéaires de f et h .

Système (nouvelles coordonnées)

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \xi_3 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{n-1} = \xi_n \\ \dot{\xi}_n = r(\xi) \\ y = \xi_1 \end{cases}$$

Changement de coordonnées

$$\xi = \Phi_l(x) = \begin{pmatrix} h_l(x) \\ \mathcal{L}_{f_l} h_l(x) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{f_l}^{n-1} h_l(x) \end{pmatrix}$$

Observateur

$$\begin{cases} \dot{\hat{\xi}}_1 = \hat{\xi}_2 - k_1(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_2 = \hat{\xi}_3 - k_2(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \vdots \\ \dot{\hat{\xi}}_{n-1} = \hat{\xi}_n - k_{n-1}(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \\ \dot{\hat{\xi}}_n = r(\hat{\xi}) - k_n(\hat{\xi}_1 - \xi_1) \end{cases}$$

Convergence de l'observateur

On obtient donc l'observateur suivant pour le système original :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - \bar{K}_l(\theta) \cdot (h(\hat{x}) - h(x)) \quad (7)$$

avec

$$\bar{K}_l(\theta) = \frac{\partial \Phi_l^{-1}}{\partial \xi}(\Phi_l(\hat{x})) \cdot K(\theta) \quad (8)$$

Proposition (Sundarapandian 2002)

Supposons que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}$$

soit stable à l'origine, alors il existe

- un voisinage \mathcal{U} de l'origine
- un gain $\theta > 0$

tels que l'observateur donné par (7) soit convergent sur \mathcal{U} .

Exemple

On considère le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + x_2^2 - x_3^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2 + x_1 - x_3^3 - x_1^5 \\ \dot{x}_3 &= -x_3^5 - x_2^3 \\ y &= h(x) = x_2 + x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2 \end{cases}$$

qui vérifie la condition du rang, en effet :

$$\begin{aligned} dh(0) &= dx_2 \\ d\mathcal{L}_f h(0) &= dx_3 - dx_2 + dx_1 \\ d\mathcal{L}_f^2 h(0) &= -2dx_1 + 2dx_2 - dx_3 \end{aligned}$$

Synthèse des observateurs

Observateur par approximation homogène

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - K_h(\theta, \hat{x})(h(\hat{x}) - h(x))$$

$$\bar{K}_h(\theta, \hat{x}) = \begin{pmatrix} 2\theta - \theta^3 \\ 2\theta + \theta^3 \hat{x}_1 + (2\theta^2 - \theta^3) \hat{x}_3 \\ \theta^3 \end{pmatrix}$$

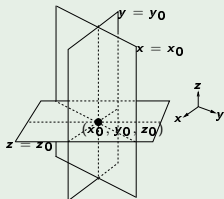
Observateur par approximation linéaire

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}) - K_l(\theta)(h(\hat{x}) - h(x))$$

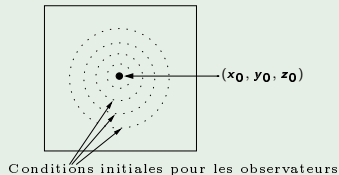
$$\bar{K}_l(\theta) = \begin{pmatrix} 2\theta - 2\theta^2 - \theta^3 \\ 2\theta \\ 2\theta^2 + \theta^3 \end{pmatrix}.$$

Présentation des résultats de simulation

Espace des conditions initiales



Plan considéré

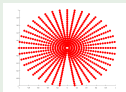


- Points rouges : conditions initiales convergentes
- Points jaunes : conditions initiales non-convergentes

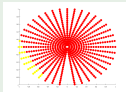
Pour un gain $\theta = 1$:

Homogène

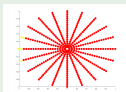
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$

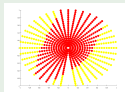


$$z = z_0$$

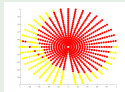


Linéaire

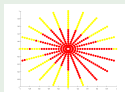
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



$$z = z_0$$

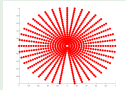


$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$$

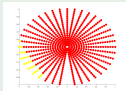
Pour un gain $\theta = 1$:

Homogène

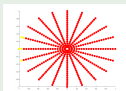
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



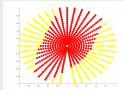
$$z = z_0$$



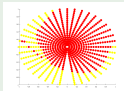
$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$$

Linéaire

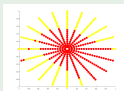
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$

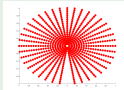


$$z = z_0$$

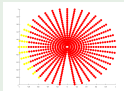


Homogène

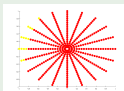
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



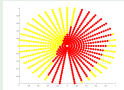
$$z = z_0$$



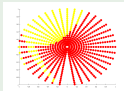
$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$$

Linéaire

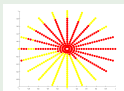
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



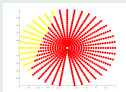
$$z = z_0$$



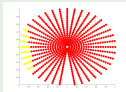
Pour un gain $\theta = 2$:

Homogène

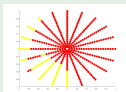
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$

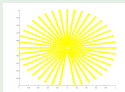


$$z = z_0$$

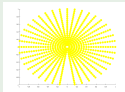


Linéaire

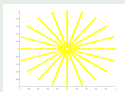
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



$$z = z_0$$

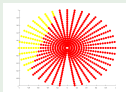


$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$$

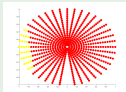
Pour un gain $\theta = 2$:

Homogène

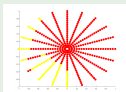
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



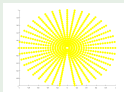
$$z = z_0$$



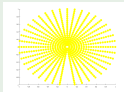
$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.2, 0.25, 0.25)$$

Linéaire

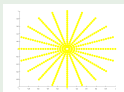
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$

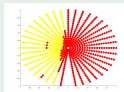


$$z = z_0$$

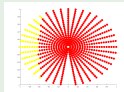


Homogène

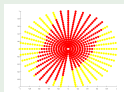
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



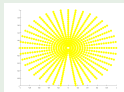
$$z = z_0$$



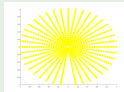
$$(x_0, y_0, z_0) = (-0.6, 0.75, 0.75)$$

Linéaire

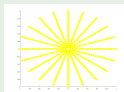
$$x = x_0$$



$$y = y_0$$



$$z = z_0$$



- 1 Homogénéité et Stabilité
- 2 Synthèse d'observateurs en temps fini
- 3 Construction d'approximations pour le problème de l'observabilité
- 4 Construction d'un observateur local
- 5 Conclusion et Perspectives

Publications

- Journal :
 - Tomas Ménard, Emmanuel Moulay, Wilfrid Perruquetti, A global high-gain finite-time observer, IEEE Transactions on Automatic control, 2010.
- Conférences :
 - Tomas Ménard, Emmanuel Moulay, Wilfrid Perruquetti, Global finite-time observers for non linear systems, 48th IEEE Conference on Decision and Control, 2009, Shanghai.
 - Tomas Ménard, Emmanuel Moulay, Wilfrid Perruquetti, Homogeneous approximations for multi-output systems and local observability, 18th IFAC World Congress, 2011, Milan.

Contributions

- Observateur en temps fini
 - amélioration des résultats précédents en construisant un observateur global en temps fini
- Approximations homogènes
 - Construction d'une approximation qui garde seulement les informations importantes
 - La construction est explicite
 - Construction flexible
 - Permet de construire un observateur plus performant qu'avec une approximation linéaire

Perspectives

- Approximations homogènes
 - Construction d'une approximation pour les systèmes avec entrée
 - Considérer des systèmes non uniformément observables
 - Considérer une approximation le long d'une trajectoire

Merci !

Questions ?