



**HAL**  
open science

# Méthodes variationnelles et séquentielles pour l'étude de la contraction cardiaque

Valérie Moreau-Villéger

► **To cite this version:**

Valérie Moreau-Villéger. Méthodes variationnelles et séquentielles pour l'étude de la contraction cardiaque. Interface homme-machine [cs.HC]. Université Nice Sophia Antipolis, 2005. Français. NNT : 2005NICE4086 . tel-00634169

**HAL Id: tel-00634169**

**<https://theses.hal.science/tel-00634169>**

Submitted on 9 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS – UFR SCIENCES

École doctorale STIC

# THÈSE

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur en SCIENCES

de l'Université de Nice-Sophia Antipolis

[soutenue le 15/12/2005]

par

Valérie MOREAU-VILLÉGER

---

## **Méthodes variationnelles et séquentielles pour l'étude de la contraction cardiaque**

---

[Composition du Jury:

Nicholas Ayache (directeur de thèse)

Hervé Delingette (co-directeur)

P. Clarysse (rapporteur)

A. Frangi (rapporteur)

Rachid Deriche (président)

L. Cohen (examineur)]



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Motivations cliniques . . . . .	5
1.2	Motivations méthodologiques . . . . .	7
1.3	Description du fonctionnement du cœur . . . . .	8
1.4	L'action de recherche ICEMA . . . . .	11
1.5	Organisation du manuscrit . . . . .	12
<b>I</b>	<b>Analyse d'images échocardiographiques avec la modalité Doppler des Tissus (TDI)</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>L'étude de la contraction cardiaque grâce à l'échographie</b>	<b>17</b>
2.1	Caractéristiques de l'image échographique . . . . .	18
2.1.1	Formation de l'image. . . . .	19
2.1.2	Le <i>speckle</i> . . . . .	20
2.1.3	Régularisation des images échographiques . . . . .	22
2.2	Doppler tissulaire . . . . .	25
2.2.1	Principe . . . . .	25
2.2.2	Analyse des images TM (1D) . . . . .	27
2.3	Objectifs et données . . . . .	29
2.3.1	Objectifs . . . . .	29
2.3.2	Données . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Estimation des déformations</b>	<b>33</b>
3.1	Estimation des déformations . . . . .	34
3.1.1	Estimation de déformation : une introduction . . . . .	36
3.1.2	Méthodes différentielles d'évaluation du flot optique . . . . .	37
3.1.3	Méthodes par appariement de blocs ou de régions. . . . .	46
3.1.4	Méthode pour l'estimation de la vitesse utilisant conjointement TDI et flot optique . . . . .	48
3.1.5	Résultats et discussion . . . . .	55
3.1.6	Conclusions partielles et perspectives . . . . .	69
3.2	Analyse de déformations . . . . .	79
3.2.1	Segmentation d'images multidimensionnelles et de champs de vecteurs . . . . .	79
3.2.2	Classification d'images par la méthode de [SAMSON <i>et al.</i> 1999] . . . . .	85
3.2.3	Discussion . . . . .	99
3.3	Conclusions . . . . .	99

<b>II</b>	<b>Estimation de paramètres pour un modèle électrophysiologique du cœur à partir de mesures <i>in vivo</i></b>	<b>101</b>
<b>4</b>	<b>Electrophysiologie cardiaque : mesure et modélisation</b>	<b>103</b>
4.1	Mesure de l'activité électrophysiologique du cœur . . . . .	105
4.1.1	Présentation . . . . .	105
4.1.2	Utilisation de chaussettes d'électrodes (externe) . . . . .	107
4.1.3	Mesures intracavitaires . . . . .	110
4.2	Modélisation de l'activité électrophysiologique du cœur . . . . .	112
4.2.1	Modèles existants et choix des modèles . . . . .	112
4.2.2	Choix du modèle . . . . .	116
4.2.3	Quelques éléments pour l'analyse qualitative 1D des modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov . . . . .	118
4.2.4	La propagation de l'onde de dépolarisation en 2D . . . . .	129
4.2.5	Éléments d'analyse numérique et mise en œuvre . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Estimation des paramètres</b>	<b>143</b>
5.1	Problèmes inverses . . . . .	144
5.1.1	Estimation de paramètres. . . . .	144
5.1.2	Assimilation de données variationnelle . . . . .	145
5.1.3	Assimilation de données séquentielle . . . . .	147
5.1.4	Problèmes inverses pour l'étude de la contraction cardiaque . . . . .	152
5.1.5	Estimation de paramètres pour les modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques . . . . .	154
5.2	Filtrage de Kalman 1D . . . . .	155
5.2.1	Position du problème . . . . .	155
5.2.2	Observabilité des paramètres . . . . .	158
5.2.3	Méthode : filtre de Kalman étendu pour estimer des paramètres . . . . .	159
5.2.4	Limites du filtre de Kalman étendu. Application de contraintes. . . . .	160
5.2.5	Discussion . . . . .	166
5.3	Utilisation des propriétés qualitatives . . . . .	168
5.3.1	Méthode . . . . .	168
5.3.2	Résultats . . . . .	170
5.3.3	Estimation locale et discussion . . . . .	175
5.4	Ajustement local de la conductivité apparente . . . . .	177
5.4.1	Cadre général . . . . .	177
5.4.2	Découpage en zones . . . . .	179
5.4.3	Résolution grâce à une linéarisation . . . . .	181
5.4.4	Minimisation par la méthode de Brent . . . . .	190
5.4.5	Résultats . . . . .	199
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Diffusion</b>	<b>211</b>
A.1	Principe . . . . .	211
A.2	Diffusion anisotrope matricielle . . . . .	212
<b>B</b>	<b>Coercivité du problème de Horn et Schunck</b>	<b>215</b>
<b>C</b>	<b>Assimilation de données et problème inverse dans le cas d'un problème statique</b>	<b>217</b>

<b>D Tutoriel Kalman</b>	<b>219</b>
D.1 Estimation de l'état . . . . .	219
D.2 Estimation des paramètres . . . . .	220



# Introduction

## Sommaire

---

1.1 Motivations cliniques . . . . .	5
1.2 Motivations méthodologiques . . . . .	7
1.3 Description du fonctionnement du cœur . . . . .	8
1.4 L'action de recherche ICEMA . . . . .	11
1.5 Organisation du manuscrit . . . . .	12

---

## 1.1 Motivations cliniques

L'utilisation de l'imagerie médicale et de mesures électrophysiologiques pour l'étude du cœur permet de mieux comprendre son fonctionnement et les pathologies cardiaques et de fournir des outils d'aide au diagnostic et à la planification de thérapies. Nous nous intéressons en particulier :

- aux troubles du rythme cardiaque et aux troubles de la conduction
- à l'insuffisance cardiaque c'est-à-dire à l'inefficacité de la pompe cardiaque en raison de la faiblesse de la contractilité myocardique,
- à l'évaluation des conséquences électriques et mécaniques d'un infarctus.

La première étape face à une série de données est l'analyse qualitative du médecin. Cependant, avec les améliorations des techniques d'imagerie et la multiplication des modalités, l'aide à l'analyse des images devient indispensable. En outre, cette aide permet de fournir au médecin des outils pour localiser la pathologie, quantifier sa gravité et vérifier l'efficacité du traitement.

La quantification en routine clinique n'est pas aisée. Du point de vue de la contractilité, elle passe le plus souvent par des mesures locales de la variation de l'épaisseur de la paroi, et de la fraction d'éjection (pourcentage du sang éjecté par le ventricule lors d'un battement). Lorsqu'un trouble du rythme ou de conduction est détecté, le cardiologue examine les électrocardiogrammes du patient. Il doit ensuite reconstruire mentalement le potentiel sur la surface cardiaque pour retrouver l'origine précise des anomalies repérées sur les électrocardiogrammes. Cette localisation est très importante, en effet la thérapie de choix pour éliminer certains troubles de conduction est de brûler la (ou les) source(s) de l'anomalie par ablation radio-fréquence. Généralement une étude électrophysiologique poussée est mise en œuvre avant et/ou pendant l'intervention. Cette étude électrophysiologique consiste à introduire un système de mesure dans la cavité cardiaque atteinte par l'anomalie. Aujourd'hui de nouveaux systèmes de navigation électro-anatomique sont développés pour faciliter cette reconstruction (Carto-Biosense ou Ensite de Endocardial Solutions par exemple). Ces systèmes permettent d'effectuer l'étude électrophysiologique, de présenter les potentiels cardiaques et de montrer les positions des électrodes pour l'ablation radio fréquence dans un même repère.



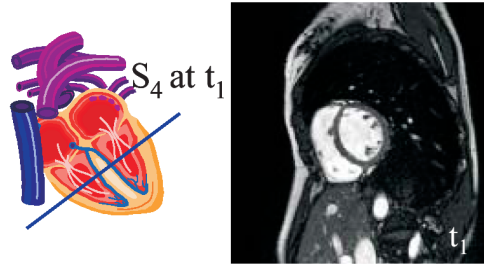


FIG. 1.1 – Exemple de coupe IRM petit axe. Extrait de [HADDAD *et al.*2005]

Nous nous sommes intéressés à l'analyse d'images pour deux aspects de la problématique présentée ci-dessus, l'évaluation de la contractilité grâce à l'imagerie médicale d'une part et l'analyse quantitative des études électrophysiologiques d'autre part. Des états de l'art plus détaillés sont présentés pour chacune des deux problématiques que nous venons de présenter au cours du manuscrit.

### Evaluation de la contractilité grâce à l'imagerie médicale

L'évaluation de la contractilité, c'est-à-dire de la capacité du muscle cardiaque à se contracter, permet d'évaluer une insuffisance cardiaque et de quantifier les dégâts après un infarctus en recherchant les zones ischémiques qui ont perdu leur contractilité. Pour évaluer celle-ci, on s'intéresse généralement à l'évaluation des déformations du muscle, en évaluant la vitesse en plusieurs points ou en effectuant un suivi de différents points.

L'imagerie cardiaque dispose de plusieurs modalités qui permettent de suivre de manière non invasive les déformations des structures. L'imagerie par résonance magnétique permet d'observer les structures à chaque instant de la séquence acquise. Sa bonne résolution en fait la modalité de choix pour observer précisément l'anatomie cardiaque. C'est pourquoi elle est souvent utilisée pour segmenter le myocarde. Les séquences d'IRM permettent aussi d'estimer le mouvement apparent du cœur en comparant les images successives [FRANGI *et al.*2001]. Ainsi, l'article [HADDAD *et al.*2005] propose un modèle de cœur battant construit à partir de séquences d'IRM.

L'imagerie par tomographie par émission mono photoniques (TEMP ou SPECT) est une modalité d'imagerie fonctionnelle et non anatomique qui permet de visualiser la perfusion du myocarde en suivant dans le corps humain l'évolution d'un radio-élément. La résolution spatiale est assez faible et la reconstruction de l'anatomie complète dans cette modalité est difficile car les zones non perfusées ne sont pas visibles. Par exemple, dans [DEBREUVE *et al.*2001], les auteurs proposent un suivi spatio-temporel dans des images TEMP dans le cadre de méthodes par ensembles de niveau dans le but de calculer la fraction d'éjection (c'est-à-dire la fraction de sang éjecté par rapport au volume du ventricule gauche en fin de diastole). Un autre exemple de segmentation est proposé dans [SERMESANT *et al.*2003b] à partir d'un modèle biomécanique.

Alors que la plupart des modalités d'imagerie ne fournissent que le mouvement apparent des structures (i.e. le mouvement dans la direction normale à la surface), l'IRM par marquage tissulaire permet d'obtenir leur mouvement réel. Dans cette modalité, on "marque" magnétiquement une grille de plans. L'extraction de cette grille dans la séquence d'images permet de la suivre grâce à des techniques de recalage [CLARYSSE *et al.*2000, CLARYSSE *et al.*2001, MCVEIGH *et al.*2001, AXEL *et al.*2005, PETITJEAN *et al.*2005, ROUGON *et al.*2005]. L'IRM marquée est la modalité de choix pour la contractilité, le champ de vitesse obtenu est le champ réel et permet donc d'estimer la torsion, la déformation et le taux de déformation. La torsion en particulier n'est pas accessible avec l'IRM anatomique car cette composante de la déformation est tangente à la surface. Cette modalité est cependant coûteuse et pas toujours facilement disponible.

L'imagerie ultrasonore est très répandue, en effet les images sont obtenues rapidement et cette modalité est peu onéreuse. De plus c'est un moyen d'exploration non invasif et indolore qui peut être utilisé aussi fréquemment que nécessaire. En outre, les échographies 3D temps réel, grâce à leurs résolutions tempo-

relle et spatiale, sont adaptées à l'anatomie et à la dynamique des images cardiaques. Elles permettent l'exploration globale des ventricules, l'extraction du volume du ventricule gauche, de la fraction d'éjection [JENKINS *et al.*2005]. Pour toutes ces raisons, c'est une modalité très souvent utilisée en cardiologie. Cependant, à cause des interférences entre les ondes ultrasonores réfléchies, les images sont corrompues par le *speckle*. Ce *speckle* rend l'interprétation des images complexe et demande un apprentissage important. De plus il rend le traitement automatique difficile. Enfin, une modalité de l'échographie, le Doppler tissulaire (TDI) permet d'acquérir des images de la vitesse des tissus dans la direction de la sonde échographique. Nous développerons l'échographie et le TDI dans la suite du manuscrit (Chapitre 2).

### Analyse quantitative des études électrophysiologiques

Les paramètres quantitatifs extraits des études électrophysiologiques sont souvent des paramètres globaux comme la durée du potentiel d'action ou la durée de l'onde de dépolarisation et sont souvent mesurés par les électrocardiogrammes. Plus localement, les isochrones des temps de dépolarisation sur la surface du cœur sont souvent interprétés qualitativement pour localiser l'origine du problème. L'utilité d'une analyse quantitative automatique de mesures électrophysiologiques serait bien sûr de fournir une aide au diagnostic en proposant une détection et une localisation d'anomalies. Au cours de l'analyse quantitative, on peut en particulier détecter les régions qui conduisent moins bien l'onde de dépolarisation car les isochrones y sont plus resserrées.

L'utilisation de modèles numériques du cœur pour analyser les images cardiaques et en extraire des paramètres quantitatifs est une méthode de plus en plus populaire [FRANGI *et al.*2001, PHAM *et al.*2001, SERMESANT2003, KERCKHOFFS *et al.*2005]. Pour tirer le meilleur parti des études électrophysiologiques, nous avons le sentiment que l'estimation de paramètres d'un modèle bien choisi permettrait de donner des cartes de paramètres qui peuvent être interprétés cliniquement, ces paramètres pouvant être des paramètres cachés, c'est-à-dire des paramètres qui ne sont pas directement mesurables. Mais cette approche permet aussi de simuler le comportement du cœur du patient et de simuler les thérapies envisagées.

## 1.2 Motivations méthodologiques

Le concept de problème bien posé ou mal posé a été introduit au début du vingtième siècle par le mathématicien Français Jacques Hadamard (1865-1963), voir par exemple [HADAMARD1902]. Un problème est dit **mal posé au sens d'Hadamard**

- s'il n'admet pas de solution,
- s'il n'admet pas une unique solution,
- ou s'il admet une unique solution mais cette solution ne varie pas continûment en fonction des données initiales. En clair, il s'agit des cas où une petite perturbation des conditions initiales conduit à de très larges perturbations de la solution finale.

En introduisant cette notion, l'intention d'Hadamard était plutôt de mettre en garde les mathématiciens contre ces problèmes pour lesquels une résolution précise ne semble pas possible. En fait, pendant longtemps, ces problèmes ont été considérés comme artificiels et purement formels.

Depuis, de nombreux problèmes mal posés sont apparus naturellement dans différents domaines scientifiques : astronomie, vision par ordinateur, tomographie, biologie, géophysique, etc. Ces problèmes apparaissent en particulier en essayant de résoudre des **problèmes inverses**, c'est-à-dire à chaque fois que l'on cherche à retrouver les paramètres cachés d'un système pour lequel on dispose d'observations partielles. Ces problèmes apparaissent en particulier pour la restauration d'images [BLANC-FÉRAUD2000], en électrocardiographie pour retrouver les potentiels sur la surface cardiaque à partir de potentiels mesurés sur le torse [RUDY2001], en météorologie ou en océanographie où, pour prévoir l'évolution d'un système, l'estimation précise des conditions initiales est indispensable [BRUSDAL *et al.*2003].

Face à ces problèmes mal posés mais cependant issus de problèmes physiques à résoudre, de nombreuses solutions ont été proposées. Le livre [HANSEN1998] propose une revue des méthodes proposées pour le cas des problèmes linéaires. Pour ce qui est du cadre beaucoup plus vaste des problèmes non linéaires, leur traitement est souvent spécialisé en fonction du domaine d'application concerné.

Les deux problématiques que nous avons dégagées plus haut s'inscrivent toutes les deux dans ce cadre.

Pour la première partie concernant l'estimation du champ de vitesse à l'aide de séquences d'images échographiques et TDI, il s'agit bien de retrouver un champ de vitesse à partir de deux observations partielles de ce champ. Nous verrons plus précisément en quoi ce problème est mal posé et nous proposerons une nouvelle formulation, cette fois bien posée, en ajoutant une contrainte de régularité du champ de vitesse recherché. Formulée dans un cadre variationnel, cette contrainte de régularité est imposée via un terme de régularisation de type régularisation de Tikhonov [HANSEN1998].

La deuxième problématique introduite, qui s'intéresse à l'estimation des paramètres d'un modèle électrophysiologique du cœur, se situe dans le cadre des problèmes inverses. C'est un problème cette fois non linéaire, nous évoquerons dans le chapitre 5 quelques méthodes qui permettent de résoudre le problème d'estimation des paramètres pour des modèles dynamiques à partir desquelles nous avons construit une méthode *ad hoc* pour résoudre notre problème.

### 1.3 Description du fonctionnement du cœur

Le cœur est l'organe contractile qui assure la circulation sanguine. Le cœur est principalement constitué d'un muscle appelé myocarde. Ce muscle est délimité à l'intérieur par l'endocarde et à l'extérieur par l'épicarde. Le septum divise le cœur en deux, le cœur droit et le cœur gauche. Le cœur droit assure la circulation pulmonaire et le cœur gauche la circulation dans l'ensemble du corps. Chaque moitié du cœur est séparée en deux cavités, un ventricule et une oreillette (Figure 1.2). À l'oreillette droite arrivent les veines caves qui ramènent le sang issu de tous les organes à l'exception des poumons. Ce sang est transféré au ventricule droit qui l'éjecte vers les poumons via l'artère pulmonaire. Le sang revenant des poumons arrive à l'oreillette gauche par les veines pulmonaires. Il est transféré dans le ventricule gauche puis éjecté vers le reste des organes par l'aorte. Les ventricules sont les chambres de propulsion.

La circulation unidirectionnelle du sang dans le cœur de la manière indiquée est assurée par différentes valves. Les valves auriculo-ventriculaire canalisent le sang de l'oreillette vers le ventricule. Les valves sigmoïdes situées à la jonction entre le ventricule et l'aorte ou l'artère pulmonaire, empêchent le reflux du sang des artères vers les ventricules pendant le remplissage.

Un cycle cardiaque se décompose en quatre phases :

1. la phase de contraction ou la systole. Les ventricules se contractent sous l'effet de l'onde de dépolarisation dont nous parlerons ensuite. Toutes les valves étant fermées, la pression monte alors très rapidement jusqu'à atteindre la pression dans l'aorte pour le ventricule gauche (respectivement de l'artère pulmonaire pour le ventricule droit). Les valves sigmoïdes s'ouvrent alors.
2. la phase d'éjection. Les pressions dans le ventricule gauche et dans l'aorte atteignent un maximum. La plus grande partie du volume systolique est alors expulsée rapidement. Par la suite, l'excitation du myocarde cesse et la pression ventriculaire commence à diminuer jusqu'à devenir inférieure à celle de l'aorte (respectivement de l'artère pulmonaire), ce qui entraîne la fermeture des valves.
3. la phase de relaxation isovolumétrique. Pendant ce temps, les oreillettes se sont à nouveau remplies. La pression ventriculaire chute alors brusquement tandis que la pression auriculaire s'est élevée, ce qui entraîne la réouverture des valves auriculo-ventriculaires.
4. la phase de remplissage ou diastole. Le sang s'écoule alors très rapidement des oreillettes vers les ventricules. Puis le remplissage se ralentit et les oreillettes se contractent permettant la fin du remplissage.

Le cœur comporte des cellules musculaires, organisées en fibres, qui produisent et propagent des impulsions. La réponse à ces impulsions est une contraction. La particularité du cœur est que cette excitation prend naissance dans l'organe lui-même. La propagation de cette excitation dans l'ensemble du cœur est aussi appelée la propagation de l'onde de dépolarisation. Lorsque cette excitation cesse, c'est la repolarisation. L'onde de dépolarisation est initiée dans le nœud sinusal. Le nœud sinusal est un ensemble de cellules auto-excitables et synchronisées d'où part un courant de dépolarisation à destination de toutes les cellules musculaires cardiaques, c'est un "pace-maker" naturel. Les différentes étapes de la propagation

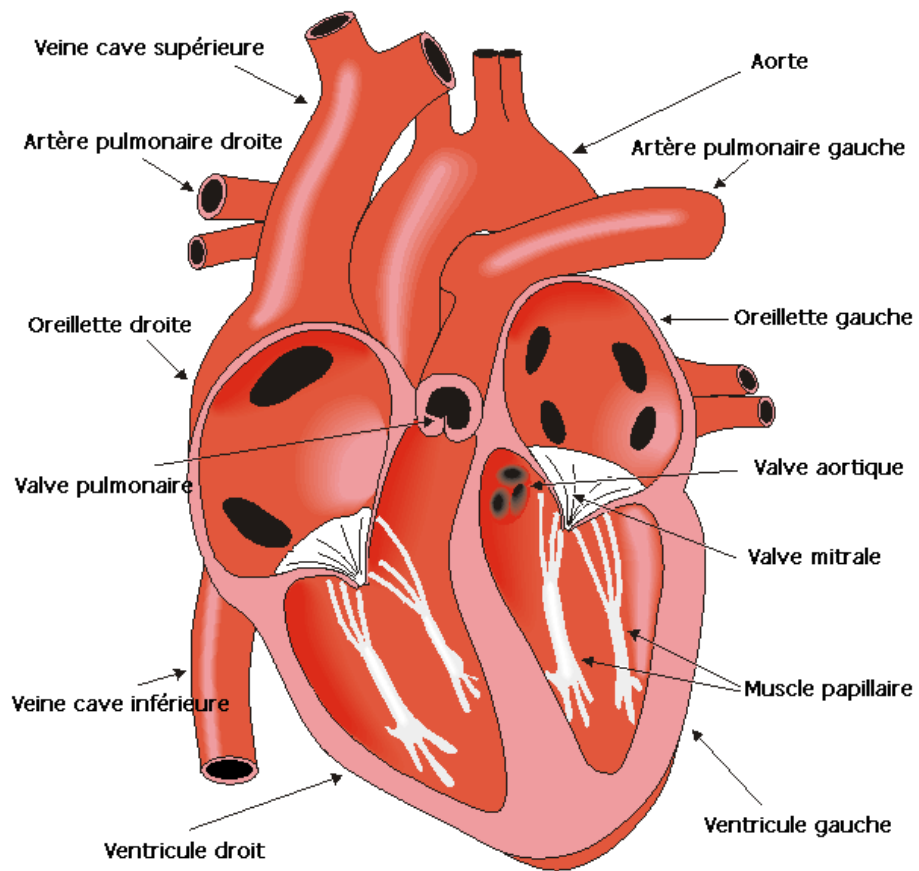


FIG. 1.2 – Principaux éléments d'anatomie cardiaque. Extrait de [MALMIVUO et PLONSEY1995]

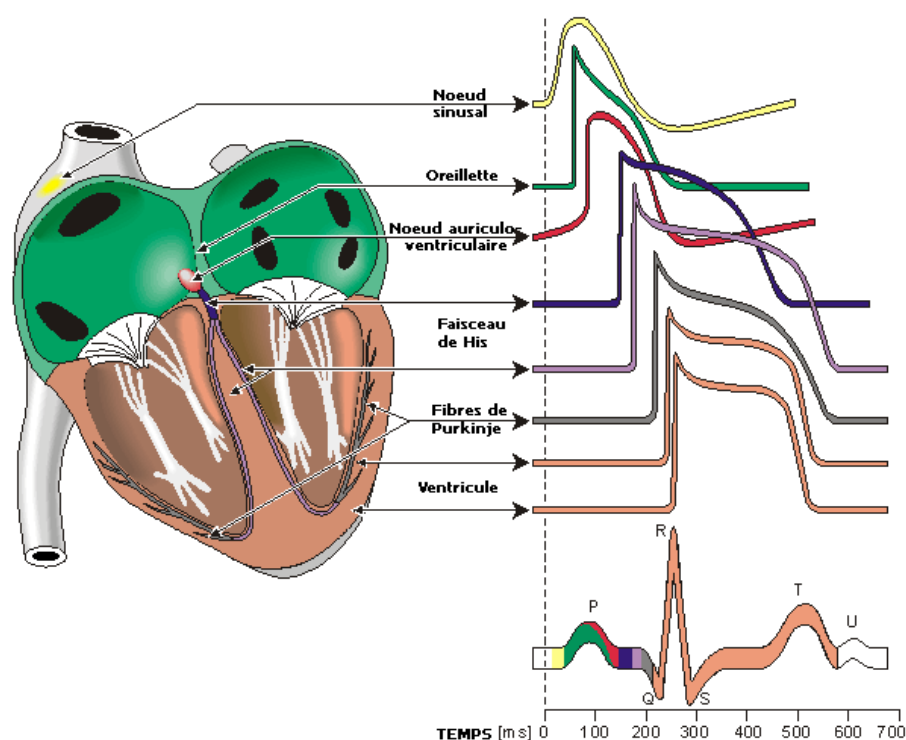


FIG. 1.3 – Propagation de la dépolarisation dans le cœur, forme des potentiels d'action et visualisation des phases de l'électrocardiogramme. Extrait de [MALMIVUO ET PLONSEY1995]

de cette impulsion électrique sont illustrées par la figure 1.3. L'excitation du nœud sinusal déclenche la dépolarisation des oreillettes puis l'excitation se transmet au nœud auriculo-ventriculaire. La propagation de l'onde de dépolarisation ne s'effectue pas continûment entre l'oreillette et le ventricule, mais seulement par le faisceau de His. Ce faisceau permet à la vague de dépolarisation de franchir la paroi non conductrice qui sépare l'oreillette et le ventricule. Le faisceau de His est un câble qui conduit la vague de dépolarisation dans les ventricules dans les fibres de Purkinje. Finalement, les extrémités de ces fibres, appelées extrémités de Purkinje initialisent la dépolarisation des ventricules. Nous présenterons plus en détail les phénomènes électrophysiologiques à l'origine de la propagation de l'onde de dépolarisation dans les ventricules dans la section 4.2.1. Ensuite, les tissus se repolarisent.

L'impulsion électrique qui se propage est un potentiel d'action. La figure 1.3 présente les formes typiques des potentiels d'action en Volts aux différents stades de la propagation. Les potentiels électriques à la surface du cœur se propagent alors dans le thorax. Le potentiel à la surface du torse peut alors être enregistré par des électrodes, c'est l'électrocardiogramme. La figure 1.3 montre les différentes phases de la propagation électrique sur un électrocardiogramme.

Les pathologies que nous évoquons par la suite sont :

- la présence de chemins de conduction anormaux. Ces chemins de conduction peuvent par exemple causer des accélérations du rythme cardiaque.
- les foyers ectopiques. Ce sont des ensembles de cellules dans le ventricule qui deviennent auto-excitables, ce deuxième foyer d'excitation désynchronise la contraction cardiaque.
- les blocs de branche. Le faisceau de His se sépare en deux comme on le voit sur la figure 1.3 pour alimenter le ventricule gauche et le ventricule droit. Si l'un de ces deux faisceaux est endommagé, on a un bloc de branche droit ou gauche. Alors l'excitation et donc la contraction des deux ventricules n'est plus synchronisée.

Les cellules ainsi dépolarisées se contractent dans la direction de leurs fibres, ce qui provoque la contrac-

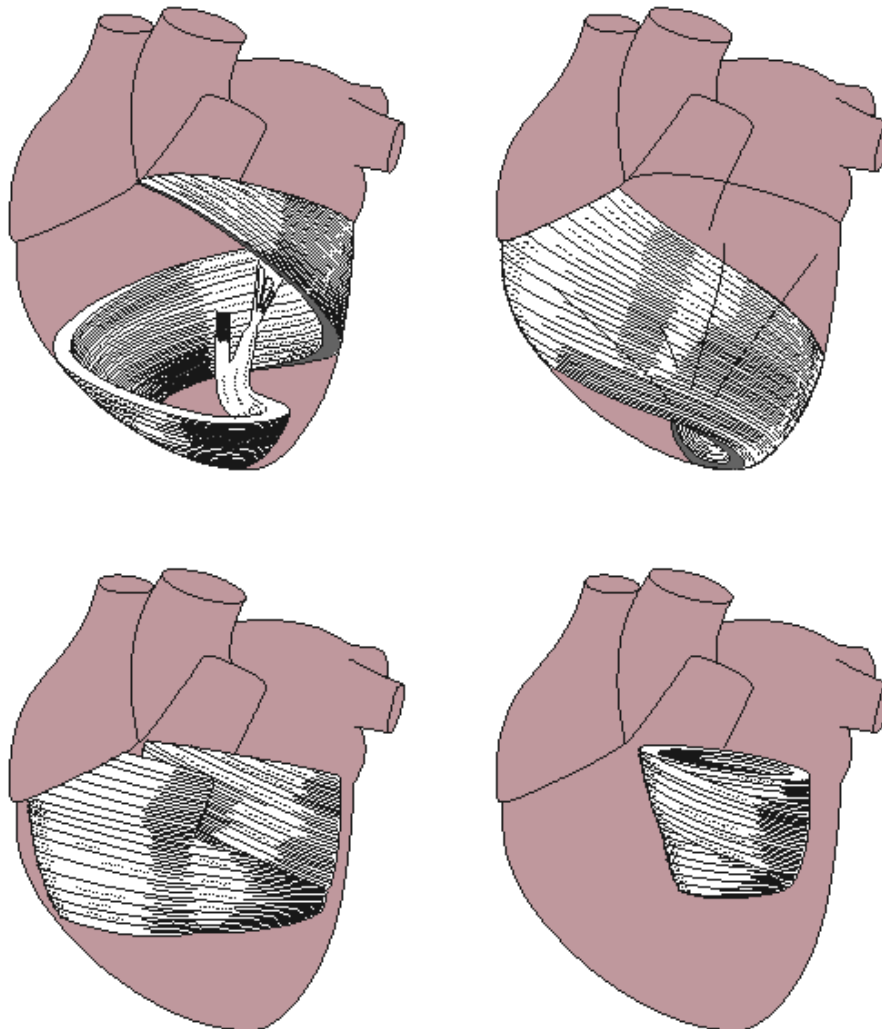


FIG. 1.4 – Enroulement des fibres cardiaques. Les quatre images présentent les différentes couches de l'extérieur (en haut à gauche) à l'endocarde (en bas à droite). Extrait de [MALMIVUO et PLONSEY1995]

tion des fibres et donc l'éjection du sang. Les fibres cardiaques sont disposées en couches et s'enroulent comme le montre la figure 1.4. Cette disposition permet aux ventricules d'avoir un mouvement de torsion qui rend l'éjection du sang plus efficace.

## 1.4 L'action de recherche ICEMA

Cette thèse s'est déroulée en partie dans le cadre de l'action de recherche coopérative ICEMA/ICEMA-2 (Images of the Cardiac Electro-Mechanical Activity, <http://www-rocq.inria.fr/sozzo/icema2/icema2.html>). Le but de cette action était en premier lieu l'introduction d'un modèle électromécanique du cœur prenant en compte :

- l'activité électrique,
- la cinématique,
- et les contraintes dans le muscle cardiaque.

L'enjeu suivant est de mettre en rapport ce modèle et les mesures disponibles pour valider le modèle mais aussi pour être capable d'adapter le modèle aux données d'un patient. Pour cela, l'idée est de concevoir un schéma de rétroaction permettant d'adapter les paramètres du modèle aux données du patient. Cette action a rassemblé plusieurs projets de l'INRIA (CAIMAN, EPIDAURE, MACS, SOSSO) et des partenaires extérieurs industriels (Philips Medical System) et cliniques (King's College, Londres). Elle était coordonnée par Frédérique Clément (projet SOSSO). Cette action de recherche se prolonge actuellement dans l'action CardioSense3D (<http://www-sop.inria.fr/CardioSense3D/>).

## 1.5 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit est organisé en deux grandes parties suivant les deux objectifs que nous avons énoncés.

**La première partie** est consacrée à l'analyse d'images échocardiographiques avec la modalité Doppler tissulaire (TDI). Cette partie s'organise en deux chapitres.

**Le chapitre 2** présente tout d'abord les principes à la base de la formation des images échographiques et des images de vitesse TDI. Dans ce chapitre nous présentons les difficultés d'interprétation des images échographiques et en particulier le *speckle* et des méthodes de régularisation adaptées aux images échographiques. Nous présentons ensuite des travaux existants de traitement des images TDI. Nous terminons ce chapitre par la présentation des objectifs précis et des matériaux dont nous disposons pour cette étude.

**Le chapitre 3** est plus particulièrement consacré à l'estimation de la vitesse dans des images échocardiographiques. Nous avons commencé par présenter les méthodes de la littérature permettant l'estimation de mouvement dans des séquences d'images en général puis dans le cas des séquences échographiques.

**La principale contribution** de ce chapitre est la proposition d'une méthode variationnelle combinant un terme de calcul du flot optique par la méthode de Horn et Schunck, l'information partielle de vitesse fournie par le TDI et un terme de régularisation spatio-temporel pour estimer le champ de vitesse dans chacune des images de la séquence échographique traitée. Cette méthode est décrite dans la section 3.1.4. Les résultats sur des séquences synthétiques d'abord puis sur des séquences réelles sont présentés dans la section 3.1.5. La fin du chapitre est consacrée à l'analyse des résultats obtenus. Nous présentons un ensemble de méthodes de classification et nous avons tenté d'appliquer une méthode de classification par régions actives.

**La deuxième partie** du manuscrit est consacrée à l'estimation des paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov de propagation du potentiel d'action dans les ventricules à partir de mesures électrophysiologiques.

**Le chapitre 4** présente les matières premières de cette étude, c'est-à-dire les mesures électrophysiologiques d'une part et les modèles électrophysiologiques d'autre part. Au cours de la section 4.1, nous présentons différentes modalités de mesure de l'activité électrique du cœur dont les mesures du potentiel électrique sur l'épicarde que nous utilisons par la suite. La section 4.2 est consacrée au choix de la modélisation électrophysiologique adéquate à l'étude des mesures épicaudiques. Après avoir présenté le vaste domaine des modèles existants, nous justifions le choix du modèle d'Aliev et Panfilov. Ce chapitre ne contient pas de contribution majeure si ce n'est un effort de synthèse concernant les principales propriétés du modèle utiles à l'estimation de paramètres.

**Le chapitre 5** traite de l'estimation de paramètres à proprement parler. Nous commençons par une revue des méthodes envisagées pour résoudre ce problème. Malheureusement, aucune de ces méthodes de la littérature n'est directement applicable pour estimer les paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov à partir de ces données. L'idée directrice du chapitre est de comparer les potentiels transmembranaires simulés et les potentiels extracellulaires mesurés en passant par l'intermédiaire des temps de dépolarisation. Nous proposons alors trois voies possibles pour procéder à l'estimation de paramètres. La première, décrite dans la section 5.2, traite du problème unidimensionnel à l'aide du filtre de Kalman étendu. La deuxième possibilité est décrite dans la section 5.3, il s'agit d'utiliser les relations théoriques entre vitesse de propagation de l'onde de dépolarisation et paramètres du système d'Aliev et Panfilov pour estimer les paramètres à partir de la vitesse de propagation calculée sur les mesures.

**La principale contribution** de cette partie est la troisième voie proposée dans la section 5.4. Nous proposons ici une méthode pour estimer les variations locales du coefficient de diffusion de l'équation d'Aliev et Panfilov à partir des temps de dépolarisation mesurés. Le modèle qui est mis en correspondance avec les mesures est un modèle de propagation bidimensionnel sur la surface de l'épicarde. Ce modèle convient aux mesures dont nous disposons qui correspondent à une stimulation artificielle. Nous utilisons la causalité de la propagation de l'onde de dépolarisation pour ramener un problème de minimisation multidimensionnelle à plusieurs problèmes de minimisation unidimensionnels successifs. Les variations du coefficient de diffusion estimé reflètent à la fois les variations de conductivité et les variations des paramètres de réaction. Nous appelons donc le coefficient de diffusion, **conductivité apparente**. Nous terminons en présentant les résultats de cette méthode appliquée à des mesures effectuées sur des cœurs sains et infarctés. Nous apprécions les résultats obtenus en comparant les temps de dépolarisation mesurés et les temps de dépolarisation obtenus par simulation à l'aide des paramètres estimés.

**Enfin** dans le chapitre 6, nous présentons les conclusions et perspectives de ce travail.





Première partie

Analyse d'images  
échocardiographiques avec la  
modalité Doppler des Tissus (TDI)



# Chapitre 2

## L'étude de la contraction cardiaque grâce à l'échographie

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Caractéristiques de l'image échographique</b>	<b>18</b>
2.1.1	Formation de l'image.	19
2.1.2	Le <i>speckle</i>	20
2.1.3	Régularisation des images échographiques	22
<b>2.2</b>	<b>Doppler tissulaire</b>	<b>25</b>
2.2.1	Principe	25
2.2.2	Analyse des images TM (1D)	27
<b>2.3</b>	<b>Objectifs et données</b>	<b>29</b>
2.3.1	Objectifs	29
2.3.2	Données	30

---

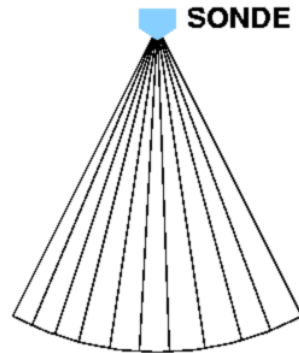


FIG. 2.1 – Pour obtenir une image échographique 2D. Des faisceaux ultrasonores sont envoyés dans différentes directions à partir de la sonde

Cette première partie est consacrée à l'étude de la contraction cardiaque grâce à l'échographie. Comme nous l'avons vu en introduction, l'étude de la contraction du myocarde à partir d'une séquence d'images prend généralement deux formes. D'une part, l'estimation d'un champ de déformation ou de déplacement permet d'estimer la contractilité du muscle. D'autre part le suivi de structures passe généralement par une segmentation de la structure suivie. Cette série de segmentations permet alors de calculer des paramètres cliniques tels la fraction d'éjection ou les modifications de l'épaisseur du mur.

Les images échographiques auxquelles nous nous intéressons pour ce travail ont des caractéristiques particulières qui nécessitent le développement d'outils spécialisés aussi bien pour la segmentation que pour l'estimation de déformations. Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter les principales caractéristiques de l'image échocardiographique et quels types de méthodologie peuvent s'adapter à ces images.

Nous nous sommes intéressés à l'utilisation d'une modalité particulièrement adaptée à l'étude des déformations, le Doppler tissulaire (TDI) [SUTHERLAND *et al.*1994]. Le but de ce travail est de l'utiliser conjointement à l'échographie classique pour obtenir de meilleurs résultats dans l'estimation de déformations. La deuxième partie de ce chapitre sera donc consacrée à la présentation de la modalité Doppler tissulaire. Enfin nous concluons ce chapitre en précisant les matériaux et les objectifs de ce travail.

## 2.1 Caractéristiques de l'image échographique

Lors de l'examen échocardiographique, le médecin déplace la sonde sur la peau du patient en regard de la région à explorer. Grâce à une pièce piézo-électrique mise en vibration par une tension électrique, la sonde génère des ultrasons. Ces ondes acoustiques suivent alors un certain parcours dans le corps du patient et sont plus ou moins réfléchies selon les différences entre les impédances acoustiques des différents milieux traversés. La sonde reçoit alors ces signaux réfléchis ou "échos" et à partir des mesures de ces signaux réfléchis, l'appareil peut alors reconstruire une image anatomique de la région explorée. Pour obtenir une image 2D, des faisceaux ultrasonores sont envoyés dans plusieurs directions à partir de la sonde, ce qui donne une image 2D sectorielle, aussi appelée image B-mode (Figure 2.1).

La reconstruction de l'image échographique est basée sur des hypothèses simplificatrices concernant la trajectoire du faisceau ultrasonore, et ne peut pas prendre en compte toutes les interactions possibles entre le faisceau ultrasonore et les tissus, comme les phénomènes de réfraction, de diffusion ou d'interférence. Nous allons présenter quelques unes de ces interactions dans la section 2.1.1. En conséquence, les images obtenues par échographie ne reflètent pas fidèlement l'anatomie mais présentent aussi des artefacts regroupés sous l'appellation de *speckle* ou chatoiement (Section 2.1.2) qui rendent les images plus difficiles à lire, à interpréter et à traiter. A la fin de la section nous présenterons quelques méthodes de régularisation des images échographiques (section 2.1.3) pour faciliter leur traitement.

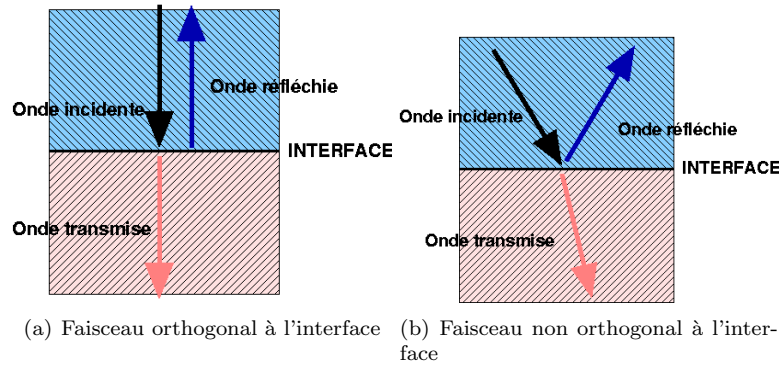


FIG. 2.2 – Réflexion et transmission de l'onde ultrasonore à travers une interface

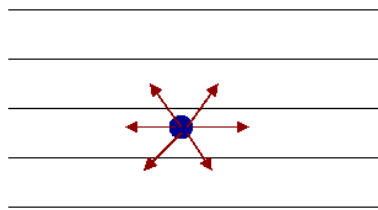


FIG. 2.3 – Diffusion lorsque l'interface est de petite taille par rapport à la longueur d'onde du signal

### 2.1.1 Formation de l'image.

Les ondes ultrasonores interagissent avec la matière qu'elles traversent. Dans le cas idéal, lorsqu'une onde ultrasonore atteint perpendiculairement une interface, une partie de cette énergie est réfléchie, c'est-à-dire renvoyée vers la source (Figure 2.2(a)). C'est la formation d'un écho ultrasonore. L'importance relative de l'intensité de cet écho par rapport à l'onde incidente dépend de la différence d'impédance acoustique entre les deux milieux qui sont en contact à ce niveau. Ainsi l'onde transmise est d'intensité moindre que celle de l'onde incidente. En conséquence, derrière certaines interfaces, il n'y a pratiquement pas d'énergie transmise et l'exploration ultrasonore est impossible, c'est en particulier le cas des interfaces avec les os. Il est donc nécessaire d'utiliser des fenêtres acoustiques libres de structures osseuses par exemple.

Quand l'interface n'est pas perpendiculaire à l'onde ultrasonore (Figure 2.2(b)), l'onde réfléchie ne repart pas vers la source et l'onde transmise est déviée par rapport à l'onde incidente. Si cette déviation est trop importante, l'onde réfléchie n'atteindra pas la sonde et donc la région anatomique concernée n'est pas imagée. Le cas le plus extrême de ce genre de phénomène est celui où le faisceau est tangent aux tissus. Pour l'étude des contours d'un organe, le faisceau doit donc être le plus perpendiculaire possible à ses limites. En fonction de la structure anatomique et de l'angle utilisé, il se peut donc que certaines parties de l'organe exploré ne soient pas imagées.

Lorsque l'interface est de petite taille par rapport à la longueur d'onde du signal, l'onde ultrasonore est réfléchie dans de multiples directions (Figure 2.3). C'est en particulier le cas pour les globules rouges. Ces diffuseurs vont donc produire des ondes réfléchies, dont certaines seront renvoyées vers la sonde produisant alors un signal sur l'image qui ne correspond pas à une structure anatomique réelle.

Les tissus peuvent être assimilés à de multiples diffuseurs distribués de manière aléatoire et entraînant la formation d'ondelettes ultrasonores interférant entre elles. Ces interférences sont constructives (renforcement de l'énergie) ou destructives ou peuvent aboutir à la création d'ondes stationnaires. Ce phénomène d'interférences aléatoires provoque des fluctuations statistiques qui ne reflètent pas réellement la distribution spatiale des diffuseurs dans le tissu. Le chatoiement ou *speckle* ainsi obtenu n'est donc pas la reproduction fidèle des points de diffusion mais s'y ajoute un bruit d'interférence.

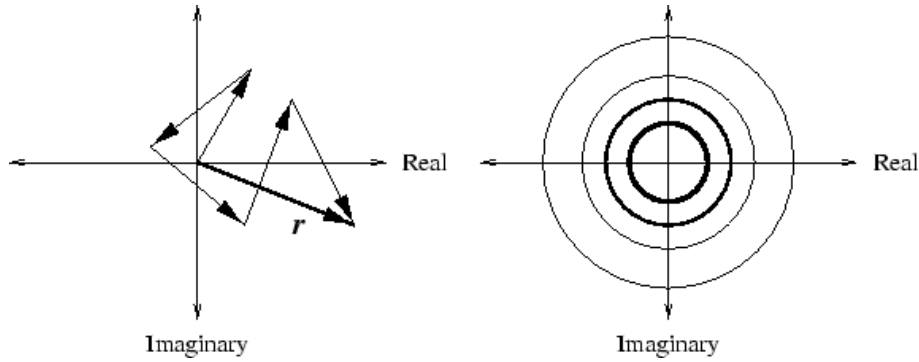


FIG. 2.4 – Extrait de [ANDERSON et TRAHEY2000] (Gauche). Chaque diffuseur contribue à l'écho en ajoutant une étape à la marche aléatoire qui constitue l'écho complexe  $\mathbf{r}$ . (Droite) Ensembles de niveaux de la distribution de probabilité de  $\mathbf{r}$ , une gaussienne complexe 2D centrée à l'origine. Les valeurs du module de  $\mathbf{r}$  suivent alors une loi de Rayleigh (Equation (2.1)).

### 2.1.2 Le speckle

Les interférences qui se produisent lorsque l'on explore une partie du corps humain avec un faisceau ultrasonore sont nombreuses. Une partie de ces interférences est causée par de petits diffuseurs comme les globules rouges qui sont en mouvement et dont on ne peut pas connaître la localisation précise. Il n'est donc pas possible de modéliser de manière déterministe l'ensemble des interférences qui se produisent pour contribuer à la formation de l'image échocardiographique. De la même manière que l'on peut modéliser la diffusion d'un gaz sans chercher à suivre les trajectoires et les collisions des molécules (mouvement brownien), il est possible de développer des modèles statistiques du *speckle* [ANDERSON et TRAHEY2000, CZERWINSKI *et al.*1999, WAGNER *et al.*1983] qui permettent de modéliser la formation d'une image échocardiographique. Ces modèles ont d'abord été développés en optique pour les lasers. Pour obtenir ce type de modèle, on fait l'hypothèse suivante : le parcours d'une onde ultrasonore (comme les photons dans le cas des lasers ou les molécules d'un fluide dans le cas du mouvement brownien) peut être décrite géométriquement comme une marche aléatoire dans le plan complexe.

Soit  $\mathbf{r}$ , l'écho complexe. Lorsqu'un voxel contient de nombreux diffuseurs de petite taille ne produisant pas indépendamment une réflexion significative, on fait l'hypothèse que les changements de directions de  $\mathbf{r}$  (la phase) sont uniformément distribués sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  (Figure 2.4),  $\mathbf{r}$  suit une loi gaussienne complexe centrée en 0. Le module de  $\mathbf{r}$ , qui est détecté par les récepteurs, suit alors une loi de Rayleigh :

$$P_R(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

On peut donc considérer que le "fond" de l'image échographique suit une loi de probabilité de Rayleigh. Une première approximation possible à partir de cette hypothèse est donc de supposer, comme dans [COHEN et DINSTEIN2002], que l'image échographique est une image noir et blanc des structures anatomiques observées (en noir le fond de l'image et en blanc les tissus observés) corrompues par un bruit multiplicatif de Rayleigh.

Ce qui s'exprime ainsi, soit  $s$  l'intensité du pixel de coordonnées  $(x, y)$  sans le bruit, alors l'intensité réelle du pixel est  $\tilde{s} = sx$  où  $x$  est un bruit de Rayleigh multiplicatif, c'est à dire qu'il suit la loi de probabilité (2.1).

Pour décrire plus précisément la nature de l'image obtenue, il faut étudier plus précisément ce qui se passe lorsqu'un voxel contient une cible, i.e. un tissu que l'on veut imager. Dans ces conditions, le signal réfléchi n'effectue pas une marche aléatoire, il est biaisé dans une direction et l'espérance de ce processus aléatoire est donc non nulle. C'est la situation décrite dans la Figure 2.5, extraite de [ANDERSON et TRAHEY2000]. Le module de  $\mathbf{r}$  suit alors une distribution dite de Rice ([ANDERSON et TRAHEY2000]) dont la distribution de Rayleigh est un cas particulier.

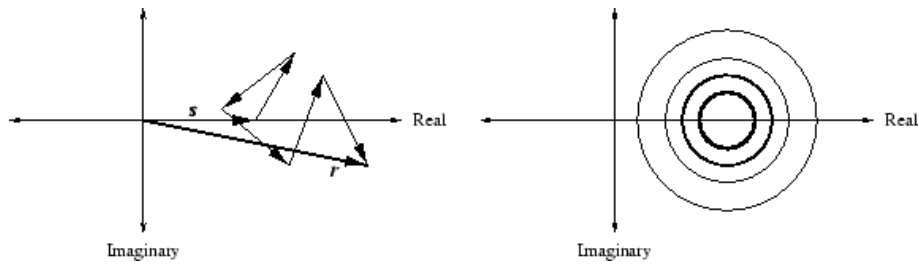


FIG. 2.5 – Extrait de [ANDERSON et TRAHEY2000] (Gauche) Présence d’une composante cohérente dans l’ensemble des diffuseurs, un vecteur constant  $\mathbf{s}$  s’ajoute alors à la marche aléatoire. (Droite) Des ensembles de niveaux de la distribution de probabilité de  $\mathbf{r}$ , une gaussienne complexe centrée à l’extrémité de  $\mathbf{s}$ . Les valeurs du module de  $\mathbf{r}$  pour un  $\mathbf{s}$  donné suivent une loi de probabilité de Rice.

Pour notre application, le suivi et l’estimation de mouvement, les modifications spatiales et temporelles du *speckle* peuvent être quantifiés grâce aux dérivées spatiales et temporelles. En rassemblant les remarques que nous avons faites concernant la formation des images, on constate que la conception d’outils automatiques utilisant ces dérivées va soulever un certain nombre de difficultés. Elles sont décrites en particulier dans [YEUNG *et al.*1998].

1. Les images sont corrompues par un phénomène important, le *speckle*. Le *speckle* ne peut pas être modélisé par un bruit additif gaussien habituel (voir par exemple Equation (2.1)), alors que beaucoup de méthodes classiques pour la segmentation, la régularisation ou le suivi sont basées sur cette hypothèse. En outre le rapport signal sur bruit (SNR) est élevé.
2. Des ambiguïtés surviennent lorsque l’information spatiale est insuffisante, comme par exemple dans les zones saturées, dans les zones de réflexions spéculaires ou enfin les régions homogènes où le signal est faible.
3. Les grandes déformations : les motifs de *speckle* partagent souvent les mêmes caractéristiques. Si le déplacement est grand par rapport à la taille des motifs de *speckle*, le block matching comme le gradient peuvent conduire à de fausses détections.
4. Le *speckle* est le résultat d’interférences destructives et constructives d’échos ultrasonores provenant d’éléments de taille sub-résolution. Un mouvement non uniforme des diffuseurs dans le fond peut causer une décorrélation temporelle du motif de *speckle*.

En ce qui concerne plus précisément l’échocardiographie, [WILSON et GEISER1992], qui recherchent comment détecter automatiquement le centre du ventricule gauche à partir d’images petit axe, décrivent précisément les caractéristiques des images 2D petit axe. Ils présentent en particulier les régions les plus fiables où le faisceau ultrasonore est orthogonal aux tissus. C’est en particulier le cas de l’épicarde le long du mur postérieur, l’épicarde et l’endocarde le long du mur antérieur (Figure 2.6).

Ces caractéristiques sont très spécifiques à l’échographie et entraînent le plus souvent l’échec des méthodes traditionnelles de segmentation ou de suivi de structures. Un exemple qui sera fondamental dans le travail que nous allons présenter est celui de l’hypothèse du flot optique (Equation 3.3), i.e. l’hypothèse que l’intensité lumineuse du point que l’on suit dans une séquence d’images est constante. Cette hypothèse, qui est à la base de méthodes très efficaces pour le suivi ou l’estimation de mouvement [WEICKERT1998], n’est pas strictement respectée dans les séquences d’images échographiques. En effet, les interférences qui forment l’image à un instant donné ne se produiront pas exactement de la même manière à l’instant suivant. Une fois ce constat fait, trois chemins sont possibles :

- mettre en place des méthodes qui sont robustes à ces caractéristiques,
- utiliser directement ces caractéristiques,
- ou plus radicalement essayer de “nettoyer” l’image de ces artefacts pour pouvoir utiliser une méthode classique.

Une des manières d’améliorer la robustesse est d’ajouter à une méthode habituelle de segmentation ou d’estimation de vitesse une régularisation plus importante et/ou plus adaptée. Un exemple de ce type d’ap-



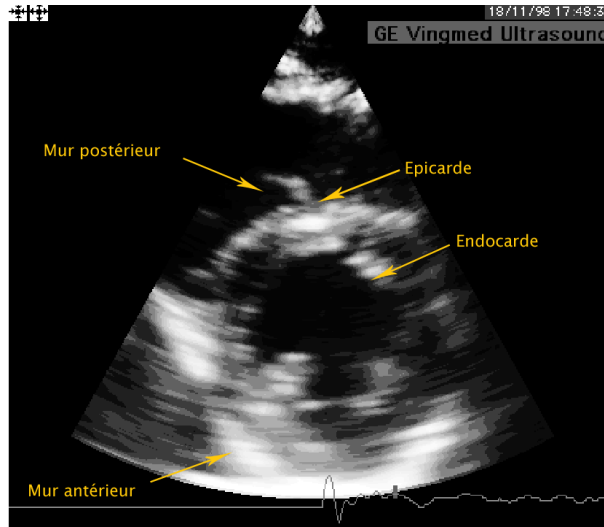


FIG. 2.6 – Exemple d'image échographique petit axe du cœur. Localisation des murs postérieurs et antérieurs, de l'épicarde et de l'endocarde

proche est un modèle de “forme” *a priori* comme les modèles déformables [MONTAGNAT1999] ou les travaux introduisant des *a priori* de formes dans la segmentation utilisant des ensembles de niveau (Section 3.2.1) [PARAGIOS2003]. Ce type de modèle permet en particulier de compenser les régions peu informatives.

L'analyse par ondelettes d'images échographiques permet aussi d'extraire du *speckle* des caractéristiques qui correspondent aux structures imagées. Ces caractéristiques permettent d'aider à la segmentation [LAINE et ZONG1996] et peuvent aussi être suivies pour retrouver les déformations [YEUNG *et al.*1998]. Une autre voie consiste en l'utilisation de modèles statistiques de formation du *speckle*. Ainsi, les auteurs de [CZERWINSKI *et al.*1998] s'intéressent à la détection de lignes et de frontières. [BAILLARD *et al.*2000] proposent une segmentation d'images échocardiographiques basée sur des ensembles de niveau séparant deux régions ayant des statistiques différentes. L'image échographique peut être modélisée comme une mixture de distributions : les zones contenant du tissu sont modélisées par une distribution de Rayleigh translatée et les zones d'ombre sont modélisées par une distribution gaussienne.

L'autre solution est d'essayer de retrouver la “vraie image” en régularisant ou en filtrant l'image échographique. Une fois “débarrassée” du *speckle*, il devient alors possible de traiter l'image avec une méthode classique. Quelques méthodes d'amélioration des images échographiques sont décrites dans la section qui suit.

### 2.1.3 Régularisation des images échographiques

Bien que le *speckle* ne soit pas exactement un bruit, il est possible d'améliorer l'image obtenue pour la rendre plus facile à interpréter et plus facile à traiter par des méthodes usuelles. Les pré-traitements disponibles dans la littérature ont souvent été développés pour la segmentation de structure. Parmi les méthodes possibles, on trouve des méthodes de régularisation par diffusion non linéaire [WEICKERT1997], elles sont par exemple utilisées dans [MONTAGNAT *et al.*2003] pour aider à la segmentation d'images échocardiographiques. D'autres méthodes recourent à un filtrage à base d'ondelettes bien choisies. Les ondelettes doivent être conçues pour séparer les composantes de l'image qui correspondent à des structures anatomiques de celles résultant des différents artefacts et interférences que nous avons décrits. Ainsi les “brushlets” appliquées aux échographies cardiaques [ANGELINI *et al.*2001] permettent d'améliorer grandement la qualité des images, facilitant ainsi la segmentation du ventricule gauche. Enfin, les méthodes présentées dans [CZERWINSKI *et al.*1998] permettent d'améliorer la lisibilité par la détection bayésienne de lignes ou de contours dans les images.

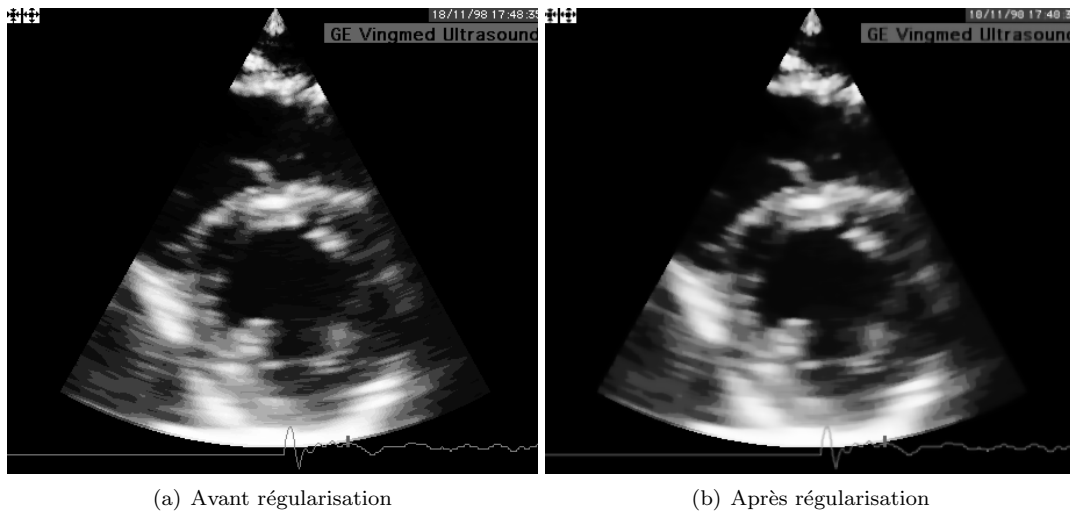


FIG. 2.7 – Diffusion non linéaire appliquée à une image échocardiographique. La fonction utilisée est celle de Perona et Malik (Annexe A), le temps de diffusion est 3 et le gradient utilisé dans la fonction de diffusion est régularisé par une gaussienne de variance 1. Le schéma AOS est utilisé et le résultat est obtenu en quelques secondes.

Nous présentons plus en détail deux méthodes rapides et simples à mettre en œuvre que nous avons eu l'occasion d'utiliser. Les exigences qui sont les nôtres pour estimer le mouvement sont différentes des qualités exigées pour une segmentation. En effet, pour l'estimation du mouvement, une restauration précise des bords des structures n'est pas nécessaire. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 3, nous préférons conserver une texture dans les zones de tissus plutôt que d'obtenir un rendu uniforme. Nous avons retenu deux possibilités, une méthode de diffusion anisotrope et une méthode très simple basée sur une approche bayésienne.

## Diffusion

Nous sommes intéressés par une diffusion non linéaire telle que celle de [PERONA et MALIK1990] :

$$\partial_t I = \operatorname{div}(g(|\nabla I|^2)\nabla I).$$

Ce type d'équation est largement utilisé avec différentes possibilités pour la fonction  $g$ , qui est appelée fonction de diffusion. Le lecteur pourra trouver plus de détails au sujet de la diffusion non linéaire dans l'annexe A.

Ces méthodes sont d'autant plus populaires qu'elles peuvent être associées à des schémas, plus efficaces qu'un schéma explicite, appelés AOS (additive operator scheme [WEICKERT *et al.*1998]). Ce sont des schémas semi-implicites qui permettent d'augmenter considérablement le pas de temps sans perdre en stabilité. Ces schémas sont basés sur une décomposition additive de l'opérateur de diffusion non linéaire.

L'inconvénient de cette méthode est que pour obtenir une bonne qualité de l'image dans les zones d'ombres, nous perdons beaucoup de texture dans les zones d'intérêt qui correspondent aux tissus comme le montre l'exemple présenté figure 2.7. Dans ce cas, la fonction de diffusion choisie est celle de Perona et Malik, le seuil  $\lambda$  qui permet de distinguer les gradients liés à un bord des gradients créés par le bruit de fond est choisi comme la valeur de gradient telle que 80% des points aient un gradient de norme inférieure à cette valeur.

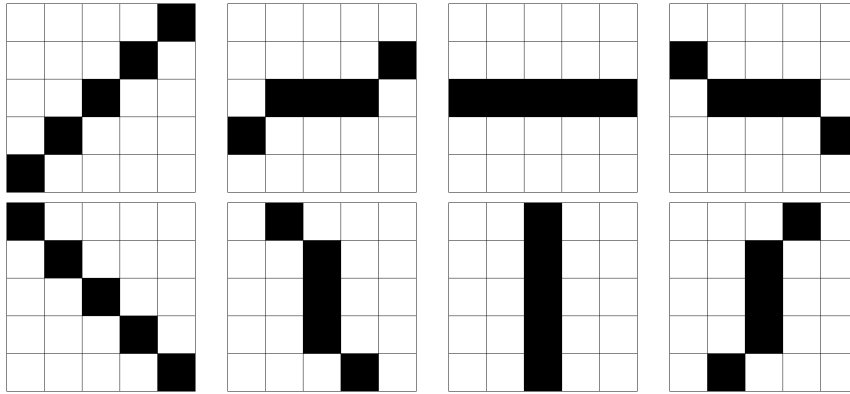


FIG. 2.8 – Orientations possibles des “sticks” de longueur 5

### Une méthode simple et efficace de suppression du *speckle*

Pour mieux estimer le déplacement des parois, nous recherchons une méthode rehaussant les bords cavité/myocarde. Les bords pouvant être approximés par une succession de lignes, nous basons le rehaussement de l'image sur une détection de lignes, comme dans [PATHAK *et al.*1998]. La détection de lignes est celle présentée dans [CZERWINSKI *et al.*1998]. Il s'agit de choisir en chaque point, une ligne de longueur fixée  $l$  qui représente le plus probablement une ligne dans l'image. Pour une longueur donnée  $l$ , on a  $2l - 2$  orientations possibles pour une droite passant par un point donné. La figure 2.8 présente les 8 orientations possibles pour  $l = 5$ . Dans [CZERWINSKI *et al.*1998], le problème complexe de la détection de ligne dans des images ultrasonores est traité avec un modèle statistique complet, mais de plus une méthode linéaire basée sur des hypothèses simplificatrices est proposée. Elle consiste à maximiser sur toutes les orientations possibles, la somme des intensités suivant cette orientation, c'est-à-dire, si  $\omega_i$  est une des orientations, si  $\mathbf{x}$  est un point du plan et  $I$  l'image, trouver le maximum suivant  $\omega_i$  de la fonction  $C(x, \cdot)$  suivante :

$$C(x, \omega_i) = \sum_{y \in \omega_i} I(y)$$

Bien que basée sur des hypothèses très simplificatrices, cette méthode s'est révélée très efficace pour l'amélioration du contraste dans des images échographiques [PATHAK *et al.*1998, CZERWINSKI *et al.*1999]. De plus, ce critère est très facile et très rapide à calculer. Pour finir, la valeur de l'image au point  $\mathbf{x}$  est remplacée par la somme des intensités le long de l'orientation retenue, puis l'image est renormalisée entre 0 et 255.

Si  $l$  est choisi petit, il en résulte une faible réduction du chatoiement. A l'opposé, le choix de segments trop longs contredirait l'anatomie. Cette méthode s'avère particulièrement adaptée dans le cas des images de rats où le myocarde n'est pas très épais. La figure 2.9(a) montre un exemple d'image acquise sur un rat. La figure 2.9(b) est le résultat donné par la méthode proposée avec une longueur  $l = 7$  des segments. On constate déjà un fort renforcement des bords et en particulier de la membrane péricardique. La figure 2.9(c) est le résultat donné par la méthode proposée avec une longueur  $l = 21$  des segments. On constate à ce niveau de détection une réduction très importante du chatoiement. Cependant, la conséquence de l'allongement de la longueur des segments est aussi une diminution de la texture dans l'épaisseur du myocarde et un grand nombre de fausses détections qui donne un effet fibreux dont l'ampleur contredit la réalité anatomique. L'allongement de la longueur des segments peut être intéressantes pour d'autres structures anatomiques [PATHAK *et al.*1998].

Un choix de longueur de l'ordre de  $l = 7$  semble judicieux. En effet, la réduction du bruit est déjà significative et l'épaisseur du myocarde reste bien texturée.

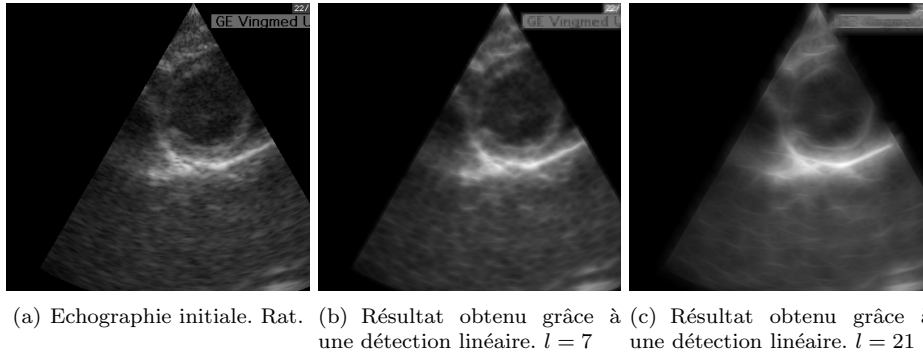


FIG. 2.9 – Régularisation d'une échographie cardiaque par détection linéaire en fonction de la taille  $l$  des segments

## 2.2 Doppler tissulaire

L'effet Doppler [DOPPLER1842] est bien connu de tous, il explique pourquoi la sirène d'une ambulance paraît plus aiguë quand elle se rapproche et plus grave lorsqu'elle s'éloigne. Cet effet a été décrit par Johann Christian Doppler en 1842 et correspond à la variation apparente de la fréquence de l'onde émise par une source mobile par rapport à un observateur immobile. Quand la source se rapproche, la fréquence augmente et lorsqu'elle s'éloigne, elle diminue. Une première expérience est menée pour vérifier cet effet en 1845 pour les ondes sonores par le chercheur néerlandais Ballot en utilisant des musiciens jouant une note calibrée sur un train de la ligne Utrecht-Amsterdam. L'effet Doppler s'applique aux ondes lumineuses, électromagnétiques et bien sûr aux ondes ultrasonores. L'effet Doppler a d'abord été utilisé en échographie pour mesurer la vitesse et la direction de l'écoulement de flux sanguins dans le cœur ou dans d'autres parties du système vasculaire. Cette modalité d'imagerie a été adaptée pour permettre aussi la mesure de la vitesse des tissus [SUTHERLAND *et al.*1994]. Nous rappellerons d'abord brièvement le principe et l'intérêt clinique de l'utilisation de la modalité Doppler tissulaire, puis nous présenterons quelques travaux sur l'analyse d'images 1D obtenues par cette modalité.

### 2.2.1 Principe

Lorsqu'un faisceau ultrasonore émis par une source, traverse des tissus biologiques, il rencontre un certain nombre de cibles ou interfaces fixes. La fréquence réfléchi par ces cibles fixes est identique à la fréquence émise. Si la cible se déplace comme les globules rouges du sang ou les tissus, il se produit une modification de la fréquence du faisceau réfléchi. La différence de fréquence est positive si la cible se rapproche de la source et négative si elle s'en éloigne (Figure 2.10). Si la cible est mobile dans l'axe du faisceau ultrasonore, la différence de fréquence est proportionnelle à la vitesse de déplacement de la cible. Si la cible est mobile dans un axe différent, la vitesse mesurée est une vitesse relative, égale à la projection orthogonale du vecteur vitesse sur l'axe du faisceau ultrasonore. L'échographie en mode Doppler est connue pour l'étude des flux sanguins dans le système vasculaire ou dans le cœur. Les caractéristiques acoustiques du signal Doppler produit par les tissus cardiaques sont très différentes de celles du flux sanguin. C'est pourquoi une modalité d'imagerie spécifique a été développée pour recevoir et interpréter ce signal, le Doppler tissulaire (TDI : Tissue Doppler Imaging).

Dans [SUTHERLAND *et al.*1994, MIYATAKE *et al.*1995], les auteurs montrent que, grâce à la modalité TDI, les vitesses des tissus sont mesurées précisément. La précision de l'estimation de cette vitesse a été établie grâce à des expériences sur des fantômes, sur des animaux et en clinique et en comparant avec les résultats obtenus avec l'échographie classique. De plus les images 2D couleurs ainsi obtenues facilitent l'appréciation de la contractilité du myocarde et en particulier la visualisation de l'ischémie.

[PRICE *et al.*2000, SENGUPTA *et al.*2002] présentent des applications au diagnostic basées sur des profils de vitesse. On enregistre puis on affiche la vitesse d'un point au cours du temps en certains points d'intérêt.

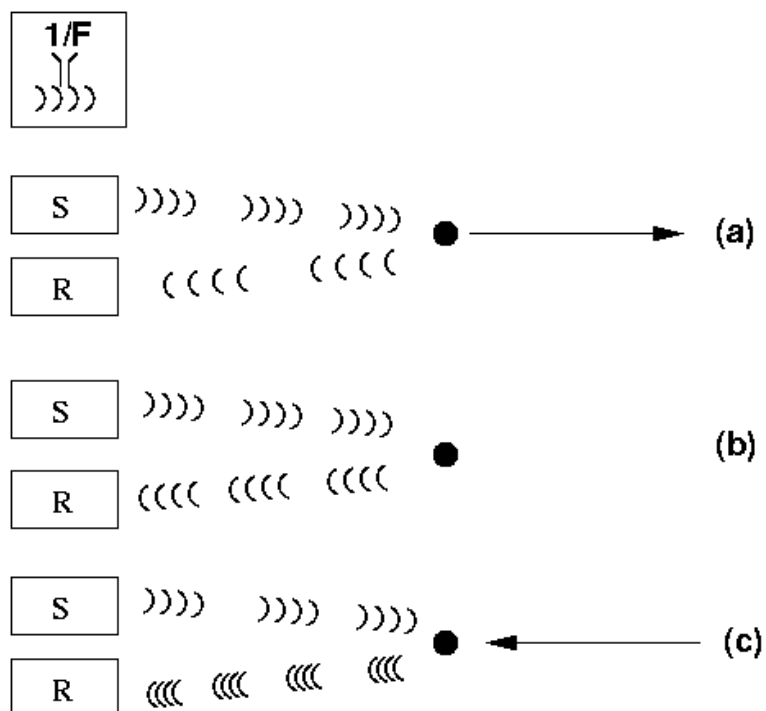


FIG. 2.10 – Effet Doppler. S correspond à la source et R au récepteur. On appelle  $F$  la fréquence du signal et elle est codée par le rapprochement des petits faisceaux dessinés. (a) L'objet s'éloigne de la source, la fréquence du signal diminue. (b) L'objet est immobile, la fréquence reste constante. (c) L'objet se rapproche de la source, la fréquence augmente

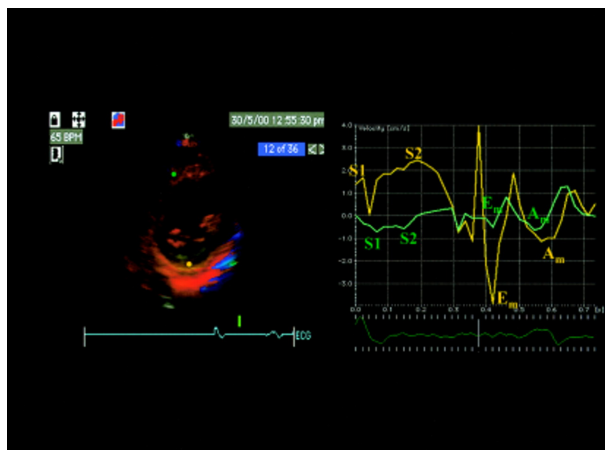


FIG. 2.11 – Extrait de [PRICE *et al.*2000]. A gauche, la vitesse des tissus est visualisée sur une vue parasternale petit axe d'un patient ayant eu récemment un infarctus antero-septal. A droite, la figure présente les profils de vitesses à mi-septum (marqueur et ligne verts) et à mi mur postérieur (marqueur et ligne jaunes). La vitesse maximum de la systole du mur postérieur est normale ( $S2 = 2.4$  cm/s) alors que cette même vitesse au niveau du septum est faible ( $S2 = -0.6$  cm/s), ce qui indique une akinésie.

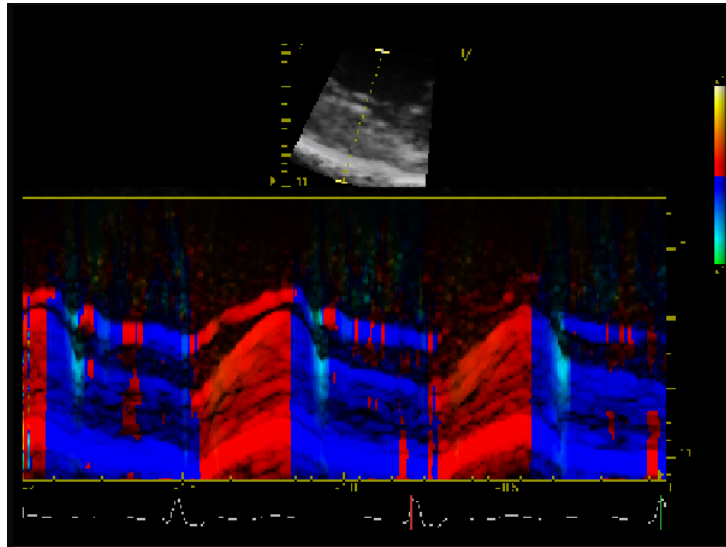


FIG. 2.12 – Exemple d’image TM. Dans le cadran du haut, on voit le segment choisi sur l’image 2D, en bas le suivi et à droite l’échelle de conversion des vitesses.

On obtient ainsi des profils de vitesse que l’on peut comparer aux profils de vitesse normaux. La figure 2.11 montre l’exemple d’un patient ayant eu récemment un infarctus antero-septal. Les profils de vitesse montrent que le profil au niveau du septum est anormal car la vitesse du pic de systole est faible alors que le profil au niveau du mur postérieur est normal. La fonction diastolique peut aussi être évaluée grâce au TDI, ce qui permet souvent une détection plus précoce de l’ischémie. [PELLERIN *et al.*2003] passent en revue des outils de quantification disponibles à partir du TDI (tels que le gradient de vitesse dans l’épaisseur du myocarde) et des applications cliniques.

### 2.2.2 Analyse des images TM (1D)

Les premiers travaux d’analyse quantitative d’images en Doppler tissulaire [COHEN *et al.*1996, MOREAU *et al.*2001, OHYAMA *et al.*2002] se sont intéressés aux enregistrements temporels d’un segment au cours du temps. Un segment dans l’épaisseur du myocarde est sélectionné par le médecin. L’échographie est alors réalisée uniquement pour ce segment. L’image résultante représente l’intensité et la vitesse en fonction du temps. Ces images sont appelées images TM (ou M-mode en anglais) (Figure 2.12). En effet la résolution temporelle de ces séquences était suffisamment élevée pour permettre une analyse alors que la fréquence d’acquisition des séquences 2D était encore trop faible. Ces travaux concernent le suivi de points dans ces séquences. Dans l’exemple de la figure 2.11, nous avons vu qu’une donnée intéressante est le profil des vitesses d’un point donné au cours du temps. On peut améliorer la précision de ce profil en suivant le point dans la séquence. Le médecin peut facilement suivre un point dans l’image TM en traçant manuellement une courbe de suivi. Des méthodes automatiques ont été proposées pour améliorer ce suivi.

Pour trouver la trajectoire d’un point connaissant la vitesse instantanée, il suffit d’intégrer la vitesse. Soit  $y_0$  le point que l’on cherche à suivre. Si on note  $y_k$  la position du point à l’instant  $t_k$ , la position à l’instant suivant est donnée par :

$$y_{k+1} = y_k + v(y_k, t_k)\Delta t_k \quad (2.2)$$

où  $v(y_k, t_k)$  est la vitesse instantanée donnée par le TDI et  $\Delta t_k$  est le pas de temps  $t_{k+1} - t_k$ . Cependant, la précision de la mesure de la vitesse par le TDI est limitée par le fait suivant : la vitesse est aussi mesurée en envoyant un faisceau ultrasonore, les interférences à l’origine du *speckle* affectent donc aussi les vitesses. Par cette méthode naïve de suivi, de petites erreurs sur les vitesses s’accumulent pour finir par donner une position totalement erronée comme le montre l’exemple de la figure 2.13. Le TDI n’est donc pas suffisant.

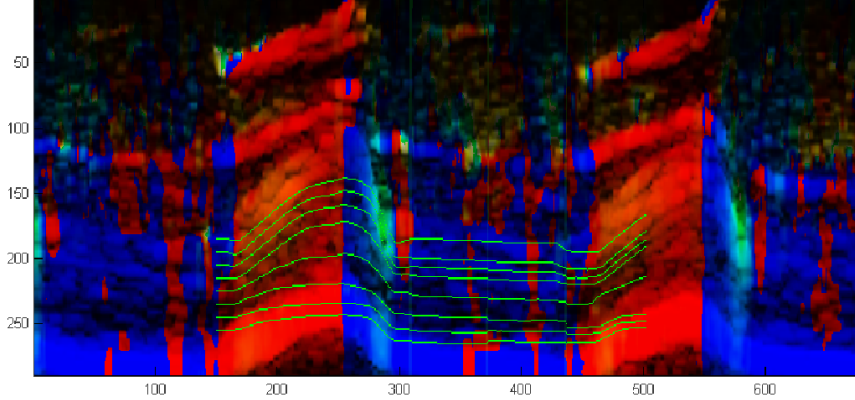


FIG. 2.13 – Exemple de suivi d'une série de points dans une image TM utilisant uniquement la vitesse TDI. Ce suivi est obtenu par l'intégration de la vitesse mesurée en fonction du temps suivant l'équation (2.2). Les courbes de suivi sont présentées en vert. L'image de fond est l'image TM avec l'information TDI

Tout d'abord [COHEN *et al.*1996] propose d'utiliser conjointement échographie classique et TDI pour proposer le suivi automatique d'un point dans l'image TM. Suivre un point dans une image TM, c'est chercher une courbe paramétrée par le temps  $t$ , i.e.  $C(t) = (t, y(t))$ . [COHEN *et al.*1996] propose de trouver cette courbe par la minimisation de la fonctionnelle :

$$E(y) = \int_0^T \omega_1 |y'(t)|^2 + \omega_2 |y''(t)|^2 + P_{bord}(C(t)) + P_{TDI}(C(t)) dt$$

avec  $P_{bord}$  un terme attirant le contour vers les bords de l'image car l'endocarde et l'épicarde se situent aux niveaux des bords de l'image. Le terme  $P_{TDI}$  un terme contraignant  $y'(t)$  à rester proche de la vitesse mesurée par le Doppler tissulaire.

[OHYAMA *et al.*2002, MOREAU *et al.*2001, MOREAU *et al.*2002] proposent le suivi de plusieurs points sur le segment en utilisant une énergie de régularisation élastique entre les différentes courbes de suivi. Il s'agit donc, comme pour l'exemple de la figure 2.13 de suivre le segment sélectionné par le médecin pour acquérir une image TM en répartissant régulièrement une série de points sur ce segment. Dans [OHYAMA *et al.*2002], les auteurs améliorent le suivi en agissant à la fois sur l'erreur commise sur la vitesse et sur l'accumulation d'erreurs. Tout d'abord, avant le suivi, l'erreur commise sur la vitesse mesurée par le TDI est diminuée en calculant la moyenne des vitesses pondérées par un coefficient de corrélation. Ensuite, pour limiter l'accumulation d'erreurs, les auteurs utilisent l'élasticité de la paroi cardiaque pour imposer une régularité aux déformations possibles du segment suivi. Dans [MOREAU *et al.*2001, MOREAU *et al.*2002], les auteurs imposent aussi une régularité des déformations, et comme dans [COHEN *et al.*1996], utilisent l'image échographique classique pour guider le suivi. La série de points qui est suivie au cours du temps est modélisée comme une grille 2D de la forme  $Y = (y_i(t))_{\{i,t\}}$ , c'est à dire qu'aucune déformation de la grille dans la direction des temps n'est autorisée. Le suivi s'effectue alors en minimisant la fonctionnelle :

$$E(Y) = E_{reg}(Y) + E_{gris}(Y) + E_{vitesse}(Y)$$

où

$$\begin{aligned} E_{reg}(Y) = & \sum_{(s,t)} \alpha((y(t+1, s) - y(t, s))^2 + (y(t, s+1) - y(t, s))^2) \\ & + \beta((y(t+2, s) + y(t, s) - 2y(t+1, s))^2 + (y(t, s+2) + y(t, s) - 2y(t, s+1))^2) \\ & + 2(y(t+1, s+1) + y(t, s) - y(t+1, s) - y(t, s+1))^2 \end{aligned}$$

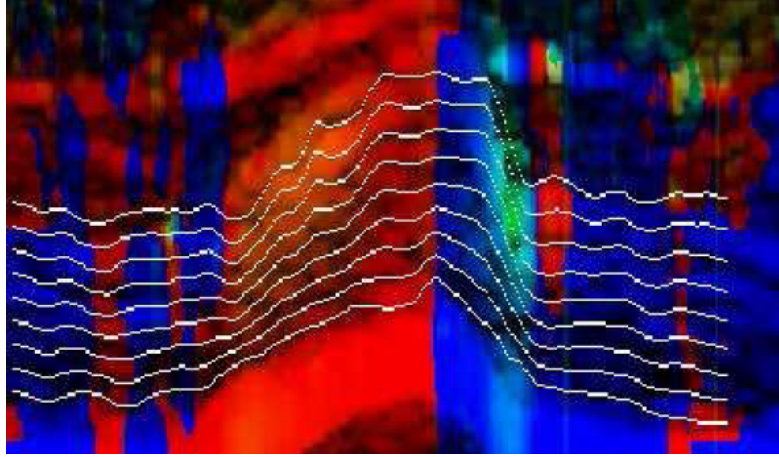


FIG. 2.14 – Exemple du suivi utilisant conjointement TDI et échographie classique

$$E_{\text{vitesse}}(Y) = \sum_{s,t} (y(t+1, s) - y(t, s) - v(t, y(t, s)))^2$$

et

$$E_{\text{gris}}(Y) = \sum_{s,t} \sum_{k=-2}^2 (\text{gris}(t, y(t, s) + k) - \text{gris}(1, y(1, s) + k))^2$$

Le résultat d'un tel suivi est présenté Figure fig :TMres.

La principale limitation de cette modalité est que le segment sélectionné au départ se déplace et se déforme au cours du suivi (on est même sûr que ce n'est pas le cas), c'est pourquoi [MALPICA *et al.*2003] proposent d'améliorer le TM en suivant le segment sélectionné au cours du temps grâce à un modèle de contour actif et à l'utilisation conjointe de l'image ultrasonore classique du TDI. Il est alors possible de simuler une image TM à partir d'une séquence 2D. Ceci est aussi rendu possible par les fréquences d'acquisition aujourd'hui suffisantes, même pour les séquences 2D.

## 2.3 Objectifs et données

### 2.3.1 Objectifs

Nous avons vu que des méthodes de suivi ont été développées dans les images TM. La résolution temporelle des séquences 2D acquises depuis quelques années est maintenant suffisante pour être analysée quantitativement. L'objectif de ce travail est d'aider à l'exploration de la fonction ventriculaire à partir d'examen TDI en proposant une estimation quantitative du mouvement des ventricules à partir de séquences 2D acquises dans cette modalité.

Nous avons vu, que déjà pour les images 1D, l'image de vitesses TDI n'est pas suffisante pour suivre précisément un point dans les images TM. La seule composante de la vitesse que l'imagerie par Doppler tissulaire mesure est la vitesse dans la direction de la sonde. Dans le cas des séquences 1D, cela ne pose pas de problèmes car il est seulement possible d'observer les déplacements dans la direction de la sonde. Dans le cas de séquences 2D (et peut-être à plus long terme 3D), il manque donc la composante de la vitesse dans la (les) direction(s) orthogonale(s) à la sonde. De plus, on retrouve en 2D le problème qui se produit pour la formation de l'image ultrasonore classique, lorsque la direction du faisceau est proche de la direction tangente aux tissus, la sonde ne reçoit pas le signal réfléchi.

Dans le cas de séquences 2D, le suivi de points est plus délicat car le choix des points ne se présente pas aussi naturellement que dans le cas du suivi d'un segment. C'est pourquoi nous avons plutôt fait le choix de



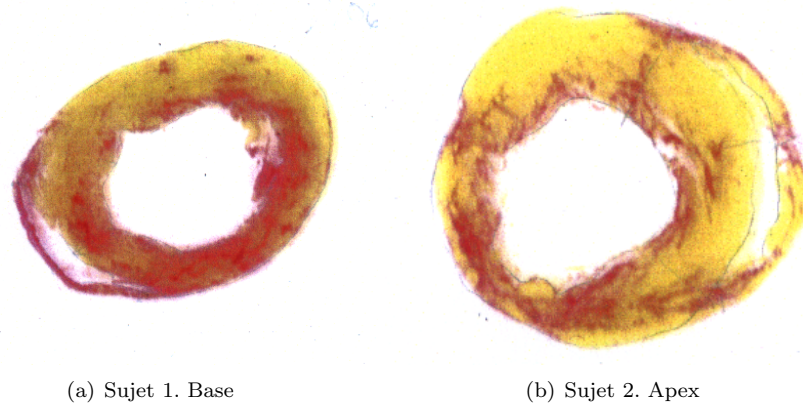


FIG. 2.15 – Coupes histologiques montrant la fibrose en rose et le tissu sain en jaune sur deux sujets

l'estimation d'un champ dense de vitesse. L'idée de ce travail est comme pour [COHEN *et al.*1996] d'utiliser l'information apportée par l'échographie classique, qui est acquise en même temps que le TDI pour guider l'estimation de mouvement.

### 2.3.2 Données

#### Les séquences utilisées

Nous avons étudié des séquences 2D+T petit axe du ventricule gauche représentant un cycle cardiaque complet. Une des séquences a été acquise sur un sujet sain et nous avons pu tester nos algorithmes sur des séquences provenant d'exams effectués sur des patients du service de cardiologie de l'hôpital de Kremlin Bicêtre. Ces séquences nous ont été fournies par les professeurs Pellerin et Veyrat du service de cardiologie de Kremlin Bicêtre. Nous avons aussi pu utiliser des acquisitions effectuées dans le cadre d'une étude du Professeur Pellerin sur des rats auxquels on a provoqué des infarctus. Après l'acquisition de séquences TDI, l'animal est sacrifié et une étude histologique permet de mettre en évidence les zones de fibrose où les cellules musculaires sont mortes. Trois coupes du cœur sont effectuées, une au niveau de la base, une au niveau des piliers et une au niveau de l'apex. Les zones de fibrose sont marquées en rose et les zones saines en jaune (Figure 2.15).

#### Extraction de la vitesse

Au cours de ce travail, nous n'avons disposé que de l'image numérique sortie de l'appareil. L'information de vitesse donnée par le Doppler se présente comme une image couleur en surimpression sur l'image classique. Il est donc nécessaire d'extraire la vitesse à partir de l'image de sortie (Figure 2.16). Ce traitement dépend de l'appareil ultrason utilisé.

La figure 2.16 est un exemple d'image obtenue par Doppler des tissus en 2D. À droite l'échelle de couleurs permet à partir de la couleur d'un point de connaître la vitesse en mètre par seconde de ce point et l'intensité en niveau de gris de l'écho classique. L'image de la figure 2.16 est une image fixe, elle ne fait pas partie d'une séquence, en conséquence elle possède une résolution spatiale plus fine que celle d'une image extraite d'une séquence.

Dans notre cas, la traduction des images se fait grâce à l'échelle de la figure 2.17. Chaque couleur de l'image correspond à un unique point de l'échelle. L'ordonnée de ce point donne la vitesse et l'abscisse donne le niveau de gris correspondant. La vitesse est échantillonnée sur une centaine de valeurs. Comme nous n'avons pas eu la possibilité d'accéder directement à l'image des vitesses, nous avons donc une erreur sur la vitesse mesurée par le TDI liée à l'échantillonnage de l'échelle de traduction. Comme on le voit,

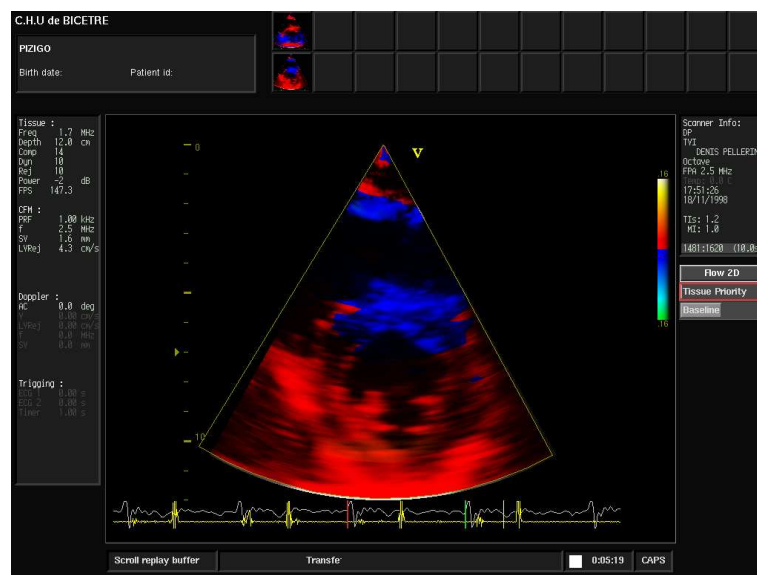


FIG. 2.16 – Exemple d’image 2D avec la modalité TDI. A droite l’échelle de couleur permet de convertir l’information de vitesse en mètre par seconde.

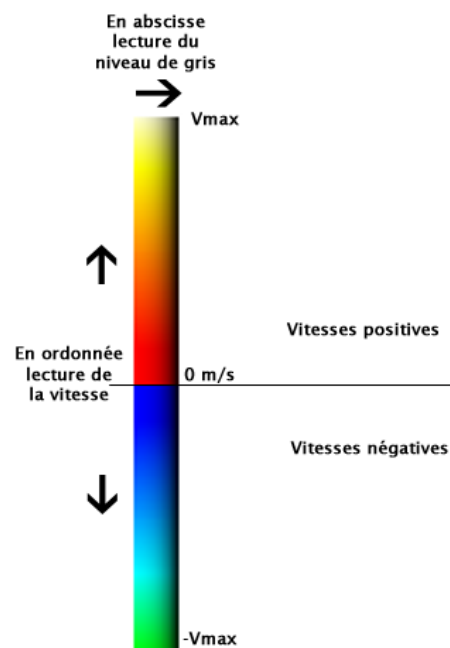


FIG. 2.17 – Echelle pour la traduction des images TDI en vitesse

l'abscisse ne donne un niveau de gris qu'échantillonné sur 20 valeurs, ce qui n'est pas suffisant pour utiliser précisément l'image en niveau de gris. Une séquence d'images classiques est enregistrée simultanément à la séquence TDI. On utilise cette séquence qui est échantillonnée plus finement. Le médecin choisit la vitesse maximale  $V_{\max}$  pour que la précision soit suffisante pour détecter les faibles mouvements et pour éviter la saturation du signal lorsque la vitesse est importante (en particulier pendant la systole).

# Chapitre 3

## Estimation des déformations du myocarde

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Estimation des déformations . . . . .</b>	<b>34</b>
3.1.1	Estimation de déformation : une introduction . . . . .	36
3.1.2	Méthodes différentielles d'évaluation du flot optique . . . . .	37
3.1.3	Méthodes par appariement de blocs ou de régions. . . . .	46
3.1.4	Méthode pour l'estimation de la vitesse utilisant conjointement TDI et flot optique	48
3.1.5	Résultats et discussion . . . . .	55
3.1.6	Conclusions partielles et perspectives . . . . .	69
<b>3.2</b>	<b>Analyse de déformations . . . . .</b>	<b>79</b>
3.2.1	Segmentation d'images multidimensionnelles et de champs de vecteurs . . . . .	79
3.2.2	Classification d'images par la méthode de [SAMSON <i>et al.</i> 1999] . . . . .	85
3.2.3	Discussion . . . . .	99
<b>3.3</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>99</b>

---

L'objet de ce chapitre est de proposer une estimation des déformations du myocarde à partir d'une séquence d'images 2D acquises en modalité TDI. Le TDI donne la projection de la vitesse des tissus dans la direction de la sonde. Pour pouvoir utiliser conjointement TDI et échographie classique, nous nous sommes placés dans le cadre de méthodes basées sur la comparaison d'images successives.

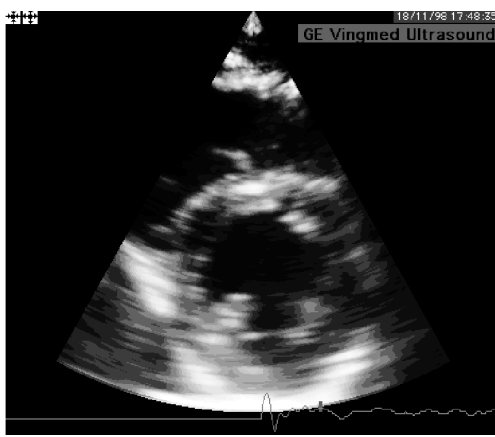
Il existe d'autres manières d'analyser les séquences d'images échographiques. Ainsi, une autre méthode pour estimer la déformation des parois du ventricule gauche à partir d'images échographiques est d'étudier l'intensité du signal en un pixel au cours du temps [FROUIN *et al.*2002, RUIZ-DOMINGUEZ *et al.*2003]. Cette approche a le grand avantage de fournir directement à l'utilisateur une description des déformations d'un point du myocarde en quelques paramètres significatifs, comme par exemple l'instant de la diastole et l'instant de la systole [RUIZ-DOMINGUEZ *et al.*2003]. L'idée à la base de ces méthodes est de discriminer différentes structures spatiales en fonction de l'allure des courbes obtenues en suivant l'intensité. L'hypothèse principale sous-jacente est que la cause principale des variations de l'intensité du signal en un point est le mouvement du ventricule, ce qui peut nécessiter un recalage préalable pour limiter l'influence du déplacement global du cœur comme le mouvement respiratoire. Le type d'information que l'on peut extraire de cette manière n'est pas facilement comparable au type d'information apporté par le TDI. C'est pourquoi nous ne nous sommes pas intéressés à ce type d'approche.

### 3.1 Estimation des déformations

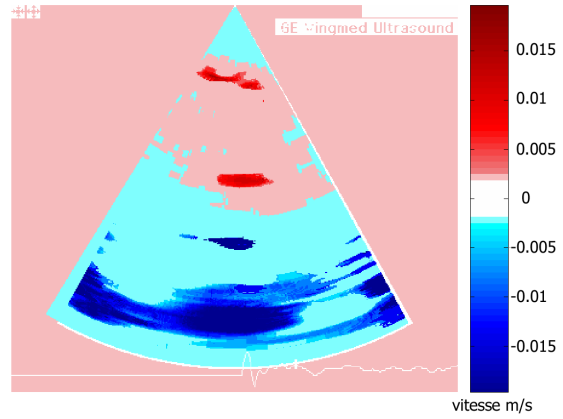
L'objectif de ce travail est d'estimer un champ dense de vitesses dans l'épaisseur du myocarde au cours d'un cycle cardiaque à l'aide d'une séquence d'images échocardiographiques classiques et de la vitesse des tissus mesurée grâce à la modalité TDI. La figure 3.1 montre deux extraits d'une séquence où l'image échographique classique et l'image des vitesses sont montrées séparément. Comme nous l'avons présenté section 2.3, nous avons travaillé exclusivement sur des séquences 2D petit axe. Les séquences d'échocardiographies 2D et 3D sont disponibles depuis longtemps et de nombreuses recherches se sont intéressées à l'estimation des déformations cardiaques à partir de ces séquences. La séquence d'images échographiques seule est difficile à traiter pour toutes les raisons que nous avons évoquées dans la section 2.1. Nous espérons que l'utilisation conjointe des deux modalités permettra d'obtenir plus facilement une bonne estimation du mouvement. Comme on peut le voir avec la figure 3.1, les images de vitesses obtenues grâce au TDI semblent plutôt régulières et nous espérons que cette régularité pourra contribuer à la régularité du champ de vitesses que nous allons estimer.

Il existe plusieurs manières de représenter le mouvement dans une séquence. La première représentation est le **déplacement**. Soit  $\mathbf{P}$  un des points que l'on observe, si l'on note  $\mathbf{P}_i$  sa position à l'instant  $i$  et  $\mathbf{P}_{i+1}$  sa position à l'instant suivant  $i + 1$ , l'estimation du déplacement entre les instants  $i$  et  $i + 1$  correspond à l'estimation du vecteur  $\mathbf{u} = \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$ . Quand on parle d'estimation de déformation, cela signifie que l'on recherche la fonction  $f$  telle que  $\mathbf{P}_{i+1} = f(\mathbf{P}_i)$ . Pour finir, on peut aussi parler de vitesse. Ce sont trois représentations différentes du même mouvement et il est aisé de passer de l'une à l'autre de ces représentations. Ainsi le vecteur vitesse  $\mathbf{v}$  est relié au vecteur déplacement  $\mathbf{u}$  par la relation  $\mathbf{u} = dt\mathbf{v}$  où  $dt$  est l'intervalle de temps entre deux images successives. Pour passer d'un déplacement  $\mathbf{u}$  à une déformation  $f$ , il suffit de constater que  $f(\mathbf{P}_i) = \mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_i + \mathbf{u}$ .

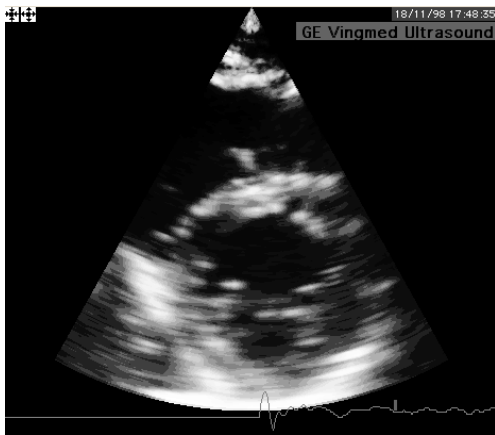
L'estimation d'un champ dense de déformations à partir d'images échographiques est un problème qui a déjà reçu un certain nombre de réponses que nous allons évoquer dans les premières sections (sections 3.1.1, 3.1.2 et 3.1.3). Nous décrivons deux grandes classes de méthodes, les méthodes dites différentielles et les méthodes par appariement de blocs. Ces méthodes ont été appliquées aux images échographiques en donnant des résultats plutôt satisfaisants, notre démarche a donc consisté à introduire l'information de vitesse dans la direction de la sonde apportée par le TDI dans une méthode d'estimation de déplacements/déformations existante. Nous avons choisi de partir de la méthode de Horn et Schunck car l'information de Doppler s'insère facilement dans cette formulation. Nous obtenons ainsi la méthode d'estimation de la déformation que nous présentons dans la section 3.1.4. Pour finir, nous présentons les résultats (section 3.1.5), d'abord sur des séquences synthétiques puis sur des images réelles. Pour finir, nous discuterons les résultats obtenus (section 3.1.6).



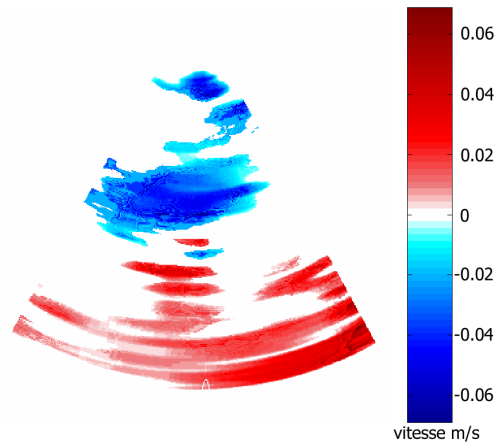
(a) Image extraite de la séquence classique (B-mode) durant la systole (contraction)



(b) Image extraite de la séquence Doppler tissulaire durant la systole (contraction)



(c) Image extraite de la séquence classique (B-mode) durant la diastole (relaxation)



(d) Image extraite de la séquence Doppler tissulaire durant la diastole (relaxation)

FIG. 3.1 – Pour l'estimation de la déformation du myocarde, nous disposons de deux types de données, l'image échographique classique (a) et (c) et l'image des vitesses obtenues par Doppler tissulaire (b) et (d). La vitesse est codée en couleur de la manière standard suivante. Quand la couleur est rouge, le tissu s'éloigne de la sonde et quand la couleur est bleue, le tissu se rapproche de la sonde.

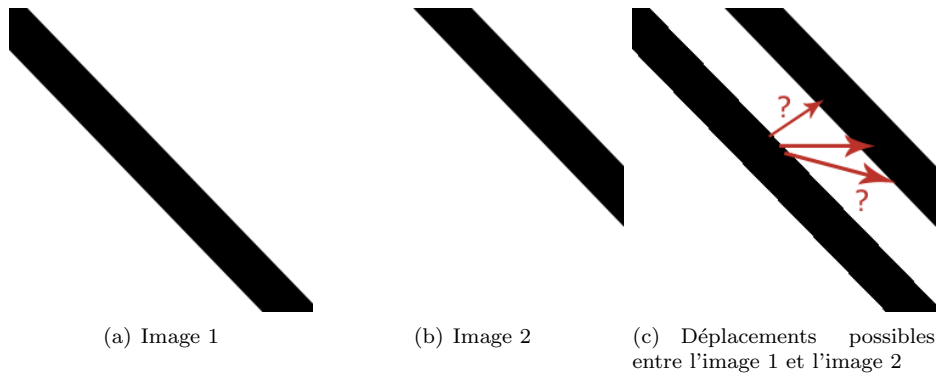


FIG. 3.2 – Problème d'ouverture du flot optique.

### 3.1.1 Estimation de déformation : une introduction

L'estimation de mouvement à partir d'une séquence d'images est une problématique bien étudiée ([BARRON *et al.*1994]) dans le cadre général du traitement d'images. Dans ce cadre plus général, le mouvement dans une série d'images est souvent appelé **flot optique**. Le calcul du flot optique est basé sur l'hypothèse qu'un point  $(x(t), y(t))$  est d'intensité constante quand on le suit au cours du temps  $t$  dans la série d'images  $I$ . Cette hypothèse s'exprime par

$$I(x(t), y(t), t) = \text{cste.} \quad (3.1)$$

Les méthodes d'estimation du flot optique sont souvent classifiées en deux grandes catégories comme dans la revue des méthodes d'estimation de flot optique de [BARRON *et al.*1994], des méthodes différentielles d'estimation du flot optique et des méthodes par appariements de blocs aussi appelées méthodes intégrales.

Les méthodes différentielles sont basées sur la différentiation de l'équation (3.1) par rapport au temps. On obtient alors la contrainte du flot optique :

$$\frac{\partial I}{\partial x}(x, y, t)x'(t) + \frac{\partial I}{\partial y}(x, y, t)y'(t) + \frac{\partial I}{\partial t}(x, y, t) = 0. \quad (3.2)$$

Par la suite, nous notons  $\mathbf{v} = (x'(t), y'(t))$  la vitesse au temps  $t$  et au point  $(x(t), y(t))$ ,  $\nabla I$  le gradient spatial de l'image et  $I_t$  le gradient temporel de l'image. L'équation (3.2) du flot optique s'écrit alors plus simplement :

$$\nabla I \cdot \mathbf{v} + I_t = 0 \quad (3.3)$$

Les méthodes basées sur cette contrainte sont appelées méthodes différentielles car elles s'appuient sur l'estimation des dérivées spatiales et temporelles des images. La contrainte du flot optique (Equation (3.3)) ne donne la vitesse que dans la direction du gradient (la vitesse apparente), c'est ce qu'on appelle le **problème d'ouverture**. Ainsi, entre les images (a) et (b) de la figure 3.2, plusieurs déplacements ont pu se produire comme le montre (c). L'estimation d'un champ de vecteurs dont on connaît uniquement la projection dans une direction est un **problème mal posé** car il n'admet pas une unique solution, i.e. plusieurs champs de vecteurs ont la même projection. En outre, lorsque le gradient de l'image est nul (zones uniformes), la direction du gradient n'est pas définie. Là aussi le problème est mal posé, il n'y a plus aucune contrainte et n'importe quel champ de vitesses est une solution du problème.

Pourtant, comme le montre l'exemple très simple de la figure 3.3, le déplacement le plus plausible du carré noir représenté entre l'image (a) et l'image (b) est une translation. En regardant la différence entre les deux images (c), on réalise que sur une grande partie de la zone d'intérêt, les gradients spatiaux et temporels sont nuls et donc une méthode ne calculant que le flot optique échouera. En ajoutant des informations *a priori* sur le mouvement (translation, mouvement rigide, ...) ou en appliquant des contraintes sur ce mouvement,

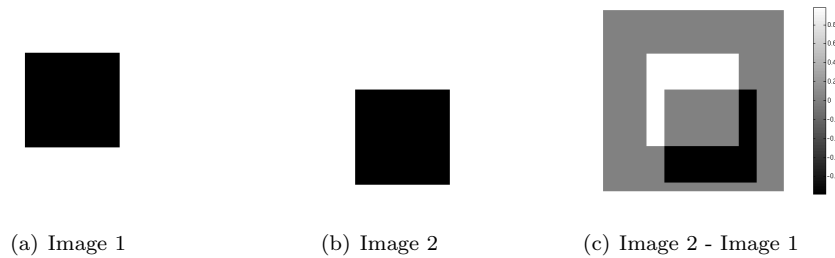


FIG. 3.3 – Absence d’information dans le cas d’absence de texture. (a) et (b) deux images successives d’une séquence représentant un carré qui se suit une translation. Image 2 - Image 1 montrent que le gradient temporel de la séquence est nul dans une bonne partie du carré (gris dans (c)).

il est donc possible de formuler ce problème de sorte que la solution soit unique. Le principe des différentes méthodes différentielles est donc d’ajouter des contraintes sur le champ de vecteurs recherché pour obtenir un problème bien posé. Pour les méthodes que nous présentons ci-dessous, les contraintes ajoutées sont des contraintes de régularité du champ de vitesses recherché.

L’autre classe de méthodes, l’appariement de régions, consiste à rechercher les déplacements donnant la meilleure correspondance possible entre les régions de l’image aux différents instants. Cette bonne correspondance est obtenue en maximisant une fonction de similitude bien choisie [SINGH1992, LAMBERTI *et al.*1993, YEUNG *et al.*1998, LEDESMA-CARBAYO *et al.*2002].

Les différentes méthodes d’estimation de mouvement dans les images échographiques dont nous allons donner un aperçu ont souvent été développées à partir de l’une ou l’autre de ces méthodes classiques d’estimation du mouvement. Nous allons donc présenter quelques unes de ces méthodes emblématiques, des méthodes différentielles d’abord, puis des méthodes par appariement de blocs. Chaque fois que cela est possible, nous présentons les travaux spécifiques aux images échographiques qui se sont basés sur ces méthodes.

### 3.1.2 Méthodes différentielles d’évaluation du flot optique

Dans [BARALDI *et al.*1996], les auteurs évaluent différentes techniques de calcul de flot optique par des méthodes différentielles pour l’échographie. Les trois méthodes évaluées sont la méthode de Horn et Schunck [HORN et SCHUNCK1981], la méthode de Lucas et Kanade [LUCAS et KANADE1981] et la méthode de Nagel [NAGEL1987]. Ces trois méthodes sont évaluées sur des images échographiques simulées. Deux types de séquences sont simulées. Le premier type consiste en la simulation d’une image 2D à laquelle on applique ensuite les déformations souhaitées. Ce type de séquence respecte complètement la contrainte du flot optique. Le deuxième type de séquence consiste en l’application de la déformation souhaitée à l’objet avant de simuler l’échographie. Ainsi le *speckle* est décorrélié temporellement comme dans une séquence réelle. Les difficultés qui émergent lors du traitement de cette séquence sont celles des séquences réelles.

#### La méthode de Horn et Schunk

Horn et Schunck ([HORN et SCHUNCK1981]) combinent la contrainte du flot optique (équation (3.3)) avec une contrainte de régularité globale pour estimer le champ de vitesses  $\mathbf{u}(x, y) = (u_1(x, y), u_2(x, y))$  qui minimise la fonctionnelle :

$$E_{\text{HS}}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \alpha (|\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) + (I_x u_1 + I_y u_2 + I_t)^2 dx dy. \quad (3.4)$$

où  $\Omega$  est le domaine de l’image et  $\alpha$  est une constante positive déterminant l’importance de la régularisation par rapport à la contrainte du flot optique.

Nous allons préciser la définition de “problème bien posé” que nous allons utiliser dans ce chapitre :



**Définition 3.1** Problème bien posé

Un problème est dit bien posé si étant fixées les données initiales, il existe une unique solution et cette solution dépend continûment de la donnée initiale [HADAMARD1902].

La méthode de Horn et Schunck pour l'estimation du flot optique est cette fois un problème bien posé si on l'exprime dans le cadre fonctionnel suivant. Le cadre fonctionnel choisi est celui des espaces de Sobolev.

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid D^\alpha u \in L^2(\Omega) \mid |\alpha| \leq 1\}$$

Cet espace est muni de son produit scalaire naturel :

$$(u, v)_1 = \sum_{|\alpha| \leq 1} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0$$

(où  $(*, *)_0$  est le produit scalaire usuel de  $L^2(\Omega)$ ) est un espace de Hilbert. La méthode de Horn et Schunck est un problème bien posé. Pour le démontrer, nous allons démontrer la proposition suivante :

**Proposition 3.1** *La minimisation de la fonctionnelle 3.4 sur l'espace produit :  $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(u, v)_V = (u, v)_1 = (u_1, v_1)_1 + (u_2, v_2)_1$  est un problème bien posé.*

Nous reprenons ici la démonstration présentée dans [SCHNÖRR1991]. Cette preuve est basée sur le théorème de Lax-Milgram (Théorème 3.1) et la proposition complémentaire (3.2). Ces résultats peuvent être retrouvés par exemple dans [BREZIS1983].

**Théorème 3.1** Théorème de Lax-Milgram

Soit  $V$  un espace de Hilbert, soient  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue symétrique et coercive ( $\exists C > 0$  tel que  $\forall v \in V, a(v, v) \geq C|v|_V$ ) et  $f(v)$  une forme linéaire sur  $V$ . Alors  $J(v) = 1/2 a(v, v) - f(v)$  admet un unique minimum dans  $V$  et ce minimum  $u$  vérifie  $a(u, v) = f(v), \forall v \in V$ .

**Proposition 3.2** *Dans les conditions du théorème de Lax-Milgram, la solution  $u$  de la minimisation de  $J$  dépend continûment de la donnée initiale.*

Pour utiliser ces outils, on remarque que

$$E_{\text{HS}}(\mathbf{u}) = \alpha \int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla u_1) + (\nabla u_2 \cdot \nabla u_2) dx dy + \int_{\Omega} I_x^2 u_1 u_1 + I_y^2 u_2 u_2 + I_x I_y u_1 u_2 + I_x I_y u_2 u_1 + 2I_x I_t u_1 + 2I_y I_t u_2 + I_t^2 dx dy.$$

Chercher le minimum de  $E_{\text{HS}}$  est donc équivalent à chercher le minimum de  $1/2 a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f_{\text{HS}}(\mathbf{u})$  avec  $a_{\text{HS}}$  et  $f_{\text{HS}}$  bien choisis. On pose pour cela :

$$1/2 a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \alpha \int_{\Omega} [(\nabla u_1 \cdot \nabla v_1) + (\nabla u_2 \cdot \nabla v_2)] dx dy + \int_{\Omega} [I_x^2 u_1 v_1 + I_y^2 u_2 v_2 + I_x I_y u_1 v_2 + I_x I_y u_2 v_1] dx dy$$

$$f_{\text{HS}}(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} [2I_x I_t u_1 + 2I_y I_t u_2] dx dy$$

$$c_{\text{HS}} = \int_{\Omega} I_t^2 dx dy.$$

on a  $E_{\text{HS}}(\mathbf{u}) = 1/2 a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f_{\text{HS}}(\mathbf{u}) + c$ . Comme  $c$  est une constante, la minimisation de  $E_{\text{HS}}$  est équivalente à la minimisation de  $1/2 a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - f_{\text{HS}}(\mathbf{u})$ .  $f_{\text{HS}}$  est bien une forme linéaire. Il faut vérifier que  $a_{\text{HS}}$  est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive. La forme  $a_{\text{HS}}$  est bilinéaire et elle est aussi symétrique car  $a_{\text{HS}}(u, v) = a_{\text{HS}}(v, u)$ . Les deux propriétés à démontrer sont donc la continuité et la coercivité de  $a_{\text{HS}}$ .

### 1. La continuité :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \int_{\Omega} \alpha [(\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) \right. \\ &\quad \left. + ((I_x)^2 u_1 \cdot v_1 + I_x \cdot I_y u_1 \cdot v_2 + I_x \cdot I_y u_2 \cdot v_1 + (I_y)^2 u_2 \cdot v_2) dx dy \right| \\ &\leq \alpha (|\nabla u_1, \nabla v_1|_0 + |\nabla u_2, \nabla v_2|_0) + |((\nabla I \cdot \mathbf{u}), (\nabla I \cdot \mathbf{v}))_0| \\ &\leq \alpha (|\nabla u_1, \nabla v_1|_0 + |\nabla u_2, \nabla v_2|_0) + |\nabla I \cdot \mathbf{u}|_0 |\nabla I \cdot \mathbf{v}|_0. \end{aligned}$$

Or  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  et donc

$$|\nabla I \cdot \mathbf{u}|_0 \leq \sqrt{2 \int_{\Omega} (I_x^2 u_1^2 + I_y^2 u_2^2) dx dy} \leq \sqrt{2 \max(\|I_x\|_{\infty}, \|I_y\|_{\infty})} |\mathbf{u}|_0.$$

Donc

$$\frac{1}{2} |a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_1 (|\mathbf{u}|_0 |\mathbf{v}|_0 + |\nabla u_1|_0 |\nabla v_1|_0 + |\nabla u_2|_0 |\nabla v_2|_0) \quad (3.5)$$

où  $C_1 = \max(2\|I_x\|_{\infty}, 2\|I_y\|_{\infty}, \alpha)$ . Pour finir,

$$\frac{1}{2} |a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_1 (|\mathbf{u}|_0^2 + |\nabla u_1|_0^2 + |\nabla u_2|_0^2)^{\frac{1}{2}} (|\mathbf{v}|_0^2 + |\nabla v_1|_0^2 + |\nabla v_2|_0^2)^{\frac{1}{2}}$$

Soit

$$\frac{1}{2} |a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C_1 |u|_1 |v|_1. \quad (3.6)$$

La forme  $a_{\text{HS}}$  est donc continue en 0, comme elle est bilinéaire, elle est continue partout.

### 2. La coercivité :

#### **Proposition 3.3** Coercivité

La forme bilinéaire  $a$  est coercive, i.e. il existe une constante  $C$  telle que  $\forall \mathbf{v} \in V$ ,

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C |\mathbf{v}|_V.$$

Pour cette preuve, nous renvoyons le lecteur à [SCHNÖRR1991] ou à l'annexe B.

La minimisation de la fonctionnelle de Horn et Schunck dans l'espace  $V$  est donc un problème bien posé. Pour minimiser  $E$ , on calcule la dérivée de  $E$  par rapport à la première coordonnée  $u_1$ ,  $\partial E / \partial u_1$  et par rapport à la deuxième coordonnée  $u_2$ ,  $\partial E / \partial u_2$ . Pour cela, on utilise la linéarisation de  $E$  au voisinage d'un élément  $\mathbf{u}$  donné :

$$\begin{aligned} E(u_1 + tv_1, u_2) &= E(u_1, u_2) + t \left( \frac{\partial E}{\partial u_1}, v_1 \right)_0 + o(t) \\ E(u_1, u_2 + tv_2) &= E(u_1, u_2) + t \left( \frac{\partial E}{\partial u_2}, v_2 \right)_0 + o(t) \end{aligned}$$

Il suffit alors d'effectuer un développement limité à l'ordre 1 de  $E(u_1 + tv_1, u_2)$  et de  $E(u_1, u_2 + tv_2)$ .

$$\begin{aligned}
E(u_1 + tv_1, u_2) &= \int_{\Omega} |\nabla(u_1 + tv_1)|^2 + |\nabla u_2|^2 + (I_x(u_1 + tv_1) + I_y u_2 - I_t)^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega} (\nabla(u_1 + tv_1), \nabla(u_1 + tv_1)) + \nabla(u_1 + tv_1) + (I_x u_1 + I_y u_2 - I_t + I_x tv_1)^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla u_1) + 2t(\nabla u_1, t\nabla v_1) + t^2(\nabla v_1, \nabla v_1) + (I_x u_1 + I_y u_2 - I_t)^2 \\
&\quad + 2I_x tv_1(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t) + t^2(I_x v_1)^2 dx dy \\
&= E(u_1, v_1) + 2t \int_{\Omega} (\nabla u_1, \nabla v_1) dx dy + 2t \int_{\Omega} I_x v_1(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t) dx dy + o(t) \\
&= E(u_1, v_1) - 2t \int_{\Omega} \Delta u_1 v_1 dx dy + 2t \int_{\Omega} I_x(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t) v_1 dx dy + o(t) \\
&= E(u_1, v_1) + t(-2\Delta u_1 + 2I_x(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t), v_1)_0 + o(t)
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial E}{\partial u_1}(\mathbf{u}) = -2\Delta u_1 + 2I_x(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t)$$

et de la même façon,

$$\frac{\partial E}{\partial u_2}(\mathbf{u}) = -2\Delta u_2 + 2I_y(I_x u_1 + I_y u_2 - I_t)$$

La résolution numérique proposée par [HORN et SCHUNCK1981] est le schéma itératif semi-implicite suivant :

$$\begin{aligned}
u_1^{k+1} &= \bar{u}_1^k - \frac{I_x(I_x \bar{u}_1^k + I_y \bar{u}_2^k + I_t)}{\alpha + I_x^2 + I_y^2} \\
u_2^{k+1} &= \bar{u}_2^k - \frac{I_x(I_x \bar{u}_2^k + I_y \bar{u}_1^k + I_t)}{\alpha + I_x^2 + I_y^2}
\end{aligned}$$

où  $\bar{u}_i$  désigne la moyenne sur son voisinage de taille 4 de  $u_i$ .

### La méthode de Nagel

Dans la méthode de Nagel([NAGEL1987]), le terme de régularisation dépend directement du gradient de l'image car on régularise dans la direction du gradient, ce qui donne :

$$E(\mathbf{u}) = \int_D (\nabla I^T \mathbf{u} + I_t)^2 + \frac{\alpha^2}{\|\nabla I\|_2^2 + 2\delta} (\|\nabla \mathbf{u} \cdot \nabla I^\perp\|^2 + \delta(\|\nabla \mathbf{u}\|)^2) \quad (3.7)$$

avec  $\nabla \mathbf{u}$  la jacobienne de  $\mathbf{u}$  et  $\nabla I^\perp$  le vecteur de coordonnées  $(I_y, -I_x)$

Ainsi, dans les régions correspondant à un contour, le flot optique domine et dans les régions homogènes, c'est la diffusion qui domine. [SCHNÖRR1991] montre comme pour Horn et Schunck que la recherche du minimum de cette fonctionnelle est un problème bien posé dans  $V = H^1\Omega \times H^1\Omega$ . En procédant comme pour la méthode de Horn et Schunck, on est amené à calculer le gradient de  $E$  par rapport aux coordonnées  $u_1$  et  $u_2$ . Pour effectuer le développement limité de  $E$  suivant la première coordonnée, on est amené à

calculer, entre autres, le développement limité :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} (I_y \partial(u_1 + tv_1)/\partial x - I_x \partial(u_1 + tv_1)/\partial y)^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega} (I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y + t(I_y \partial v_1/\partial x - I_x \partial v_1/\partial y))^2 dx dy \\
&= \int_{\Omega} (I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y)^2 + 2t(I_y \partial v_1/\partial x - I_x \partial v_1/\partial y)(I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y) \\
&+ t^2(I_y \partial v_1/\partial x - I_x \partial v_1/\partial y) dx dy \\
&= \int_{\Omega} (I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y)^2 dx dy + 2t \int_{\Omega} (I_y(I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y) \frac{\partial v_1}{\partial x} \\
&+ \int_{\Omega} I_x(I_y(I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y) \frac{\partial v_1}{\partial y} + o(t) \\
&= \int_{\Omega} (I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y)^2 dx dy + 2t \int_{\Omega} \frac{\partial(I_y(I_y \partial u_1/\partial x - I_x \partial u_1/\partial y))}{\partial x} v_1 \dots
\end{aligned}$$

Sans écrire le développement limité dans sa totalité, on voit dès cette étape qu'il faut alors intervenir les dérivées à l'ordre de 2 de l'image,  $I_{xx}$ ,  $I_{xy}$  et  $I_{yy}$ . En utilisant un schéma de Gauss-Seidel comme dans [BARRON *et al.*1994], la résolution numérique nécessite alors l'estimation des dérivées secondes de  $I$ .

### La méthode de Lucas et Kanade

Dans [LUCAS et KANADE1981], Lucas et Kanade utilisent des moindres carrés pondérés pour trouver un champ de vitesses respectant la contrainte du flot optique (équation (3.3)). L'hypothèse faite pour rendre un problème bien posé est :

“Sur un voisinage  $\mathcal{V}$  du point, la vitesse  $\mathbf{u}$  est constante”.

C'est une hypothèse de régularité du champ. On recherche  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  minimisant

$$\sum_{x \in \mathcal{V}} W^2(x) (\nabla I(x, t) \mathbf{u} + I_t(x, t))^2 \quad (3.8)$$

où  $W(x)$  est une fonction qui donne plus d'importance aux contraintes au centre du voisinage. La solution de la minimisation de (3.8) est donnée par

$$\mathbf{A}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{b}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= [\nabla I(x_1) \dots \nabla I(x_n)]^T \\
\mathbf{W} &= \text{diag}(W(x_1) \dots W(x_n)) \\
\mathbf{b} &= -(I_t(x_1) \dots I_t(x_n))^T
\end{aligned}$$

avec  $x_i \in \mathcal{V}$  au temps  $t$ . De plus la fiabilité du champ estimé est connue grâce aux valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}^T \mathbf{W}^2 \mathbf{A}$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Plus elles sont élevées, plus la fiabilité du champ est élevée.

### Utilisation d'un terme de régularisation non linéaire

La méthode originale de Horn et Schunck conduit à une pénalisation excessive des gradients élevés et donc à un lissage trop important. De nombreux travaux se sont donc intéressés aux moyens de régulariser le flot optique tout en préservant les discontinuités du champ en utilisant les idées de la diffusion non linéaire développée pour les images (Annexe A, [ORKISZ et CLARYSSE1996]). L'idée est alors de remplacer le terme de régularisation de l'équation (3.4)

$$\int_{\Omega} \|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2 dx dy$$

par le terme

$$\int_{\Omega} \psi(\|\nabla u_1\|^2 + \|\nabla u_2\|^2) dx dy \quad (3.9)$$

où  $\psi$  est une fonction qui permet de lisser les zones homogènes (à faible gradient) sans pénaliser fortement les grandes valeurs de gradient (qui correspondent au bord). De nombreuses fonctions  $\psi$  ont été proposées. Ce type de fonction est aussi appelé estimateur robuste. Nous présentons ci-dessous deux exemples qui ont été proposés spécifiquement pour le flot optique :

Dans [WEICKERT1998], Weickert propose la fonction

$$\psi(s) = \lambda^2 \sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}$$

qui donne la fonction de diffusion (les notations sont les mêmes que dans l'annexe A)

$$g(s^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}}.$$

Cette nouvelle fonctionnelle à minimiser peut de plus être associée à un schéma de discrétisation temporelle semi-implicite efficace, AOS (Additive Operator Splitting).

Dans [AUBERT *et al.*2000], les auteurs se placent dans le cadre des fonctions à variations bornées et exhibent les propriétés dont doit être dotée la fonction  $\psi$  pour que la régularisation préserve les bords et proposent un algorithme de minimisation qui converge dans l'espace des fonctions à variations bornées.

La fonctionnelle proposée est :

$$E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\mathbf{u} \cdot \nabla I| dx dy + \alpha^r \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \Psi(|\nabla u_j|) dx dy + \alpha^h \int_{\Omega} c(|\nabla u|) |\mathbf{u}|^2 dx dy$$

avec une fonction  $\Psi$  de diffusion telle que les discontinuités soient préservées et le dernier terme permet de traduire le fait que les zones homogènes (de gradient faible) n'apportent aucune information, donc dans ces zones la régularisation doit être plus importante.

### Application à des échographies

Les méthodes différentielles d'estimation du mouvement s'appuient sur la contrainte du flot optique (Equation (3.1)). Dans une série d'images échographiques, on peut toujours suivre approximativement les structures en fonction de leur intensité (claire pour les tissus et sombre pour les cavités). Cependant, comme le *speckle* qui caractérise les images échographiques est temporellement décorrélé (Chapitre 2), cette contrainte n'est pas strictement respectée dans les séquences d'images échographiques. Pour obtenir à partir de la contrainte du flot optique des problèmes bien posés, les méthodes différentielles n'exigent généralement pas que la contrainte du flot optique soit strictement respectée. En effet, le champ recherché est un compromis entre flot optique et régularité obtenu en minimisant une fonctionnelle combinant la contrainte de l'équation (3.2) et une contrainte de régularité (Equations (3.4), (3.7), (3.8) et (3.9)). C'est cette régularisation qui doit permettre aux méthodes différentielles de donner une estimation de la vitesse malgré la décorrélation temporelle du *speckle*.

[BARALDI *et al.*1996] ont étudié les performances de différentes méthodes différentielles d'estimation du mouvement sur des séquences échographiques 2D simulées. Les trois méthodes évaluées sont Horn et Schunck [HORN et SCHUNCK1981], Lucas et Kanade [LUCAS et KANADE1981] et Nagel [NAGEL1987]. Les auteurs ont utilisé deux types de séquences échographiques simulées. Dans les deux cas, les auteurs simulent la séquence d'images obtenue en observant un objet synthétique, ici une couronne qui se contracte. Pour le premier type de séquences, ils ont simulé la formation d'une image échographique fixe avant de la déformer suivant un champ de déformation donné schématisant une contraction. Ce type de séquence respecte la

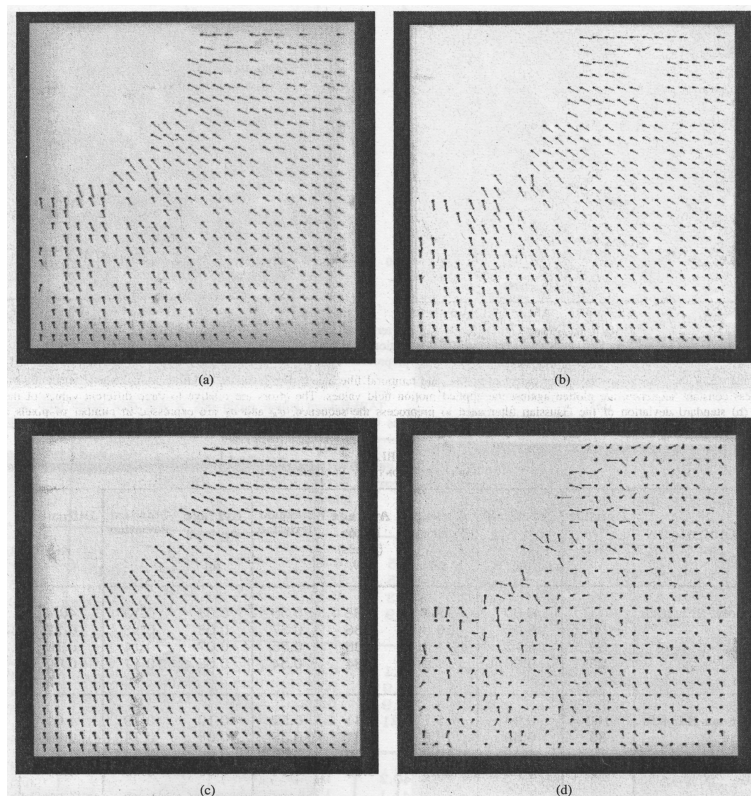
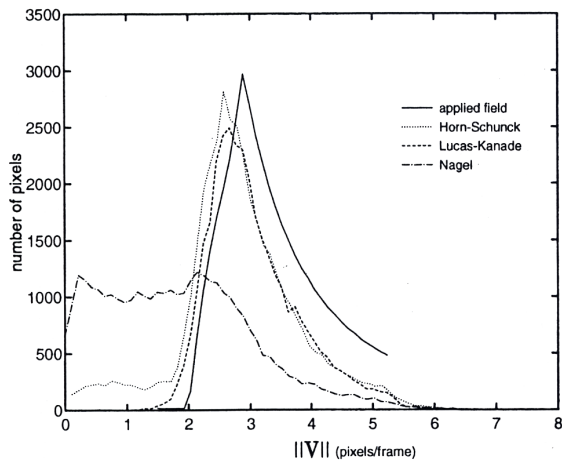


FIG. 3.4 – Comparaison de méthodes différentielles d'estimation du flot optique pour l'échographie par [BARALDI *et al.*1996]. Estimation de la vitesse pour la séquence respectant la contrainte du flot optique. (a) Déplacement imposé. (b) Vitesse obtenue par Lucas et Kanade . (c) Vitesse obtenue par Horn et Schunck (d) Vitesse obtenue par Nagel. *Extrait de [BARALDI et al.1996]*

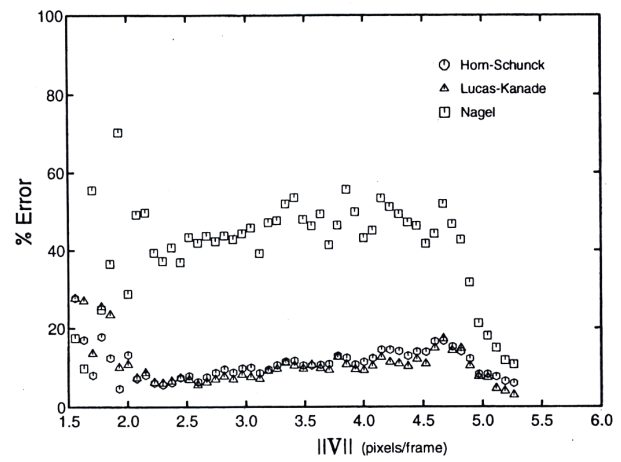
contrainte du flot optique, car l'intensité d'un point est constante au cours de la séquence, mais manque de réalisme car la décorrélation temporelle du signal n'est pas prise en compte. Les auteurs proposent donc aussi une évaluation sur une séquence plus réaliste où le cylindre est déformé suivant la contraction avant de simuler une image échographique indépendamment pour chaque instant de la séquence à partir du cylindre déformé.

Nous reproduisons ici quelques résultats significatifs de cette étude. Les figures 3.4 et 3.5 concernent la séquence respectant la contrainte du flot optique. Cette comparaison montre tout d'abord que la méthode de Nagel mettant en jeu les dérivées secondes de l'image ne convient pas pour les échographies. Ceci est visible aussi bien dans l'aspect du champ estimé (figure 3.4) qu'en regardant l'erreur commise. Le calcul de dérivées secondes sur des images échographiques pose en effet un problème numérique. Les méthodes de Lucas et Kanade d'une part et de Horn et Schunck d'autre part donnent de bons résultats avec un léger avantage pour la méthode de Horn et Schunck. Par contre, les résultats sont médiocres (figure 3.6) pour toutes les méthodes dans le cas de la séquence plus réaliste où le chatolement n'est pas corrélé avec un léger avantage visuel pour Horn et Schunck. Même si l'estimation n'est pas globalement de bonne qualité, le champ estimé est assez fidèle au niveau des bords de l'image comme on le voit figure 3.7. Dans ce cadre, les résultats obtenus sur une séquence synthétique ainsi que sur une séquence réelle montrent que les méthodes différentielles peuvent bien être utilisées pour l'estimation de la vitesse dans des séquences échocardiographiques.

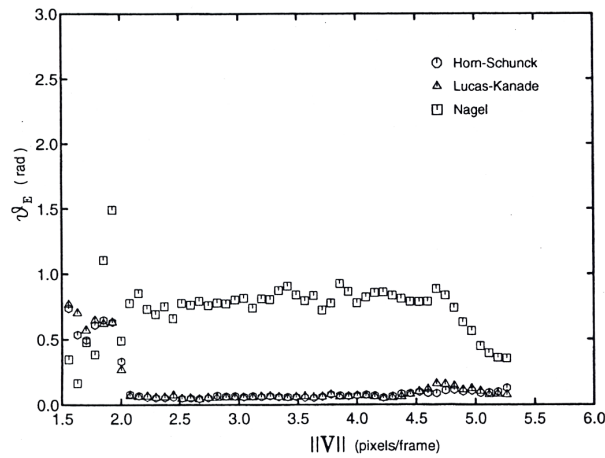
Bien que la constance de l'intensité d'un point au cours du temps soit parfois mise en défaut dans les images échocardiographiques, il est donc possible d'utiliser des méthodes différentielles d'estimation du



(a) Histogramme de la norme de la vitesse



(b) Erreur commise sur la norme en pixels par intervalle de temps



(c)

(c) Erreur angulaire en radians

FIG. 3.5 – Comparaison de méthodes différentielles d'estimation du flot optique pour l'échographie par [BARALDI *et al.*1996]. Erreur commise avec les différentes méthodes dans le cas de la séquence respectant la contrainte du flot optique. *Extrait de [BARALDI et al.1996]*

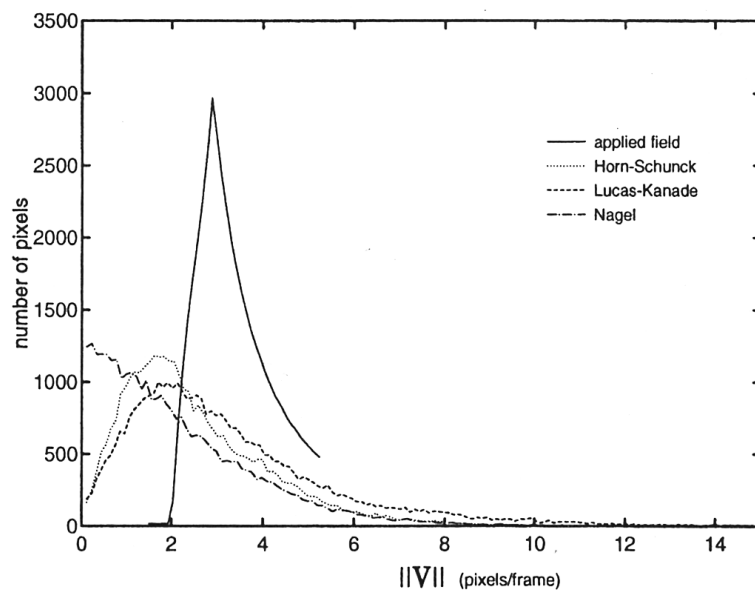


FIG. 3.6 – Comparaison de méthodes différentielles d'estimation du flot optique pour l'échographie par [BARALDI *et al.*1996]. Histogramme de la norme de la vitesse, pour le champ de déformation imposé (traits pleins) et pour les différentes méthodes testées, en pointillés). *Extrait de [BARALDI et al.1996]*

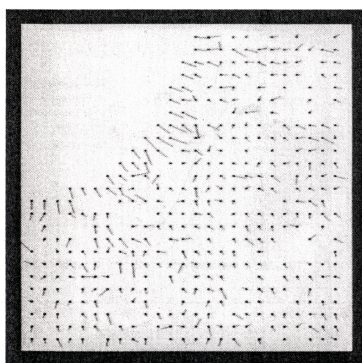


FIG. 3.7 – Comparaison de méthodes différentielles d'estimation du flot optique pour l'échographie par [BARALDI *et al.*1996]. Déplacement obtenu par la méthode de Horn et Schunck pour la séquence réaliste *Extrait de [BARALDI et al.1996]*



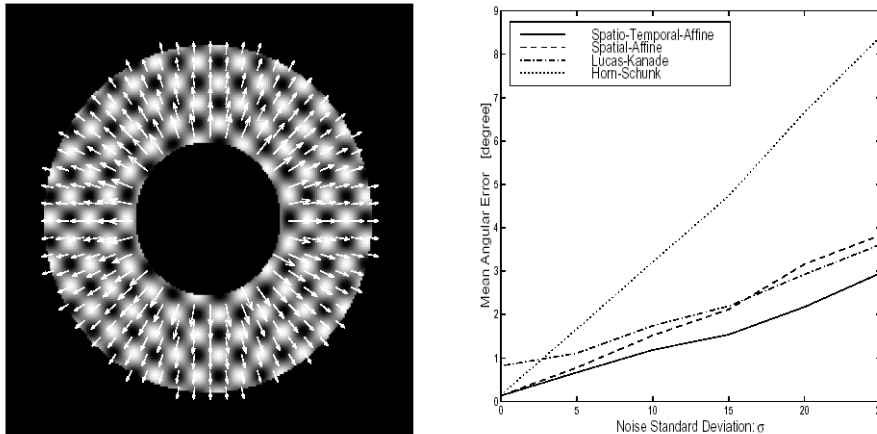


FIG. 3.8 – Image synthétique utilisée dans [SÜHLING *et al.*2002] à gauche et erreur angulaire moyenne en fonction de la variance du bruit blanc pour Horn et Schunck et pour les méthodes proposées à droite. *Extrait de [SÜHLING et al.2002]*

flot optique pour estimer le champ de vitesses du myocarde à partir d'une échographie. Ceci est possible grâce à la régularisation associée à la minimisation de la contrainte. Nous avons vu que dans le cas de l'échographie, les dérivées mises en jeu doivent être d'ordre au plus 1 pour pouvoir s'adapter à la qualité des images ultrasonores.

A partir de ces méthodes de base, plusieurs auteurs se sont intéressés aux moyens de construire au mieux des méthodes différentielles qui soient plus spécifiquement adaptées à l'échographie. Nous présentons ici deux exemples d'utilisation de méthodes différentielles en échographie.

Le premier exemple se place dans le cadre de l'estimation du déplacement du cerveau au cours d'une opération pratiquée sous guidage ultrasonore. Ainsi, dans [PRATIKAKIS *et al.*2001], les auteurs proposent une modification de la fonctionnelle de Horn et Schunck en remplaçant les fonctions de coût quadratique par des estimateurs robustes non seulement pour le terme de régularisation mais aussi pour le terme concernant la contrainte du flot optique. La minimisation de la fonctionnelle obtenue est effectuée dans un cadre multi-résolution et permet d'estimer de grands déplacements et d'obtenir un champ régulier.

Un autre exemple cette fois en échocardiographie est la méthode proposée dans [SÜHLING *et al.*2002]. Les auteurs proposent ici une variante de Lucas et Kanade avec les améliorations suivantes :

- Au lieu de faire l'hypothèse d'un mouvement localement constant, l'hypothèse est faite d'un mouvement localement affine plus adapté aux mouvements de dilatation/contraction observés dans le cœur. Les auteurs proposent d'ajouter éventuellement un modèle temporel de mouvement.
- Les transformations sont recherchées sous la forme de B-Splines.
- Le problème est traité dans un cadre multirésolution pour améliorer la robustesse et autoriser l'estimation de grands déplacements.

Les résultats obtenus sur des images synthétiques (figure 3.8) sont satisfaisants et le calcul de l'erreur montre que l'introduction d'un modèle de mouvement localement affine au lieu de localement constant permet d'améliorer le champ estimé. Enfin les résultats obtenus sur une vraie séquence (figure 3.9) montrent que la méthode proposée donne un champ de vitesses plus régulier et plus cohérent que la méthode de Horn et Schunck.

### 3.1.3 Méthodes par appariement de blocs ou de régions.

Les méthodes par appariement de blocs ou de régions [SINGH1992] sont basées sur la constance de certaines caractéristiques d'un bloc ou d'une région au cours du temps. La recherche d'appariements, consiste à rechercher dans l'image suivante, le bloc le plus ressemblant au bloc considéré (Figure 3.10).

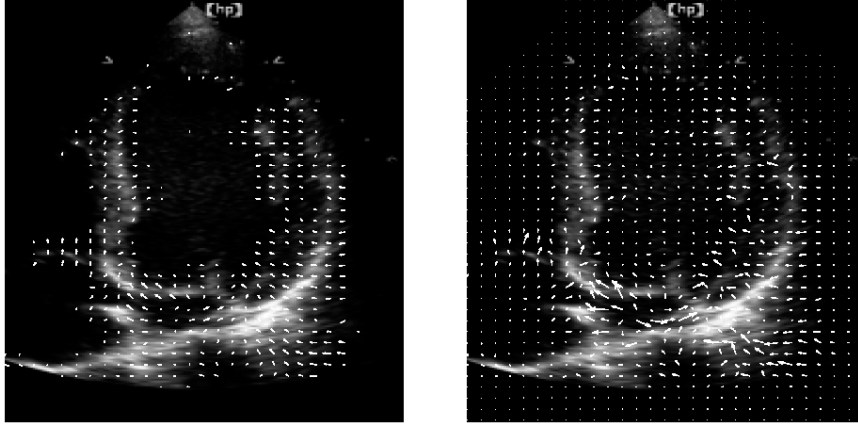


FIG. 3.9 – Résultats obtenus sur une image réelle par la méthode proposée dans [SÜHLING *et al.*2002] à gauche et par Horn et Schunck à droite. *Extrait de [SÜHLING et al.2002]*

Une fois les appariements de blocs déterminés, il faut trouver une transformation qui respecte aux mieux ces appariements. Pour que la transformation trouvée soit réaliste, il est généralement bon de chercher cette transformation parmi une classe de transformations bien choisie. Les différentes méthodes varient en fonction du critère de ressemblance utilisé pour l'appariement et des classes de transformations choisies. Etant donnée une séquence d'images  $I(\mathbf{x}, t)$ , le but est d'estimer un déplacement  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ . Soit  $\mathcal{B}$  un bloc. Les deux principaux critères utilisés sont la somme des différences aux carrés et le coefficient de corrélation. La somme des différences aux carrés s'exprime de la manière suivante :

$$E(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} (I(i, j, 1) - I(i + x, j + y, 2))^2. \quad (3.10)$$

avec  $I(x, y, 1)$  l'image à l'instant 1 et  $I(x, y, 2)$  l'image à l'instant 2 et  $\mathcal{B}$ , le bloc considéré.

Avec les mêmes notations, le coefficient de corrélation est donné par :

$$C(x, y) = \frac{\sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} I(i, j, 1)I(i + x, j + y, 2)}{\sqrt{\sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} I(i, j, 1)^2 \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} I(i + x, j + y, 2)^2}} \quad (3.11)$$

Dans [LEDESMA-CARBAYO *et al.*2002], les auteurs utilisent la somme des différences au carré (équation (3.10)) pour des blocs de taille 1. Le modèle de mouvement utilise des B-splines. Après une validation sur des images synthétiques, les auteurs ont appliqué leur méthode à la comparaison d'un patient ischémique avec un patient en bonne santé. La comparaison des deux champs estimés permet de retrouver l'hypokinésie du myocarde du patient ischémié.

Le coefficient de corrélation a été utilisé avec succès pour des images échographiques comme par exemple dans [LAMBERTI *et al.*1993, YEUNG *et al.*1998]. [LAMBERTI *et al.*1993] propose une comparaison entre le coefficient de corrélation et la différence des sommes au carré, ils concluent à la supériorité du coefficient de corrélation dans la plupart des cas (Figure 3.11).

[COHEN et DINSTEIN2002] ont proposé plus récemment un critère adapté aux images échographiques dans le cadre d'un maximum de vraisemblance. Comme le montrent [BOUKERROUI *et al.*2003], cette approche peut aussi être formulée comme une méthode par appariement de blocs utilisant le critère suivant :

$$F(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{B}} (\ln(I(i, j, 1)) - \ln(I(i + x, j + y, 2)) - \ln(\exp(2(\ln(I(i, j, 1)) - \ln(I(i + x, j + y, 2)))) + 1))$$

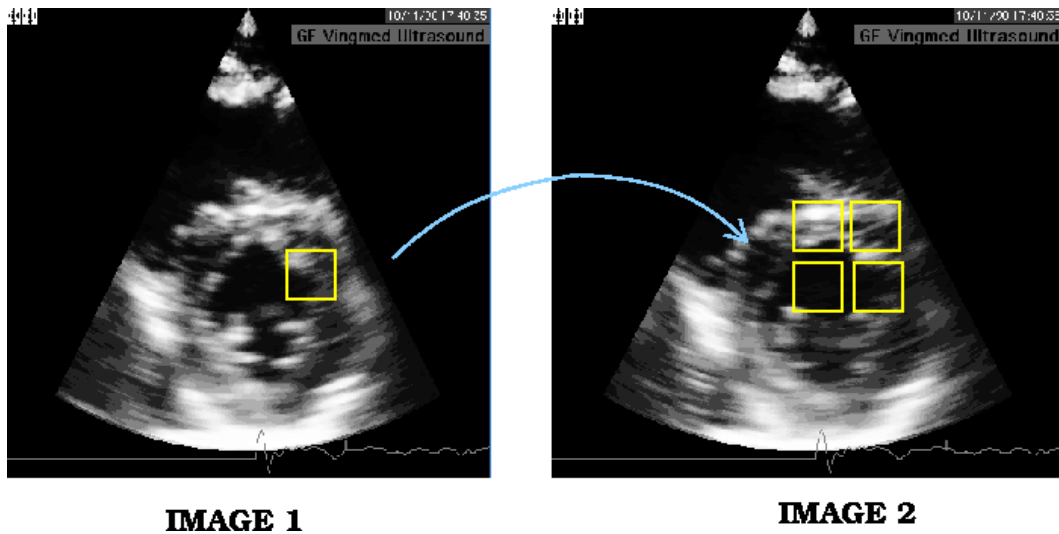


FIG. 3.10 – Principe de l'appariement de blocs entre deux images : **IMAGE 1** et **IMAGE 2**. On cherche dans l'image 2, le bloc qui ressemble le plus au bloc jaune de l'**IMAGE 1**

Ce critère est plus spécifiquement adapté aux images échographiques que les deux critères classiques (SSD et coefficient de corrélation) car il utilise la statistique du bruit des images échographiques qui est souvent modélisé comme un bruit de Rayleigh multiplicatif (Chapitre 2). [BOUKERROUI *et al.*2003] obtiennent ainsi un champ de déformation de bonne qualité que les auteurs utilisent pour le suivi de structures (mur de l'endocarde, tumeur du sein).

Dans [PAPADEMETRIS *et al.*2001], les auteurs ne mettent pas directement en correspondance les niveaux de gris mais passent par l'intermédiaire de surfaces extraites des images et utilisent une minimisation de la somme des carrés des différences de courbures principales entre les deux surfaces. Ces appariements sont combinés avec un modèle mécanique passif du myocarde pour obtenir la déformation du myocarde. Ces résultats ont été validés grâce à des données *in vivo*.

### 3.1.4 Méthode pour l'estimation de la vitesse utilisant conjointement TDI et flot optique

#### Choix de la méthode

L'objectif de la recherche présentée dans cette section est d'utiliser la modalité d'imagerie par TDI pour estimer un champ dense de vitesses. Nous avons choisi d'utiliser l'échographie classique pour guider cette estimation puisque de nombreux travaux, que nous avons présentés ci-dessus, ont déjà été consacrés au problème de l'estimation de déformations à partir de la seule séquence échocardiographique.

Pour compléter l'image des vitesses obtenue par la modalité TDI, nous avons utilisé le flot optique entre deux images, qui est aussi une vitesse. Le Doppler tissulaire fournit la vitesse des tissus dans la direction de la sonde, c'est-à-dire la projection du déplacement dans la direction de la sonde. Le flot optique donne une projection du déplacement dans la direction du gradient. Les deux modalités (classique et TDI) apportent donc une information en terme de projection de la vitesse dans une direction donnée, celle du gradient de l'image d'une part et celle de la sonde d'autre part, ce qui rend leur utilisation conjointe naturelle. Ainsi, nous disposons en chaque point de l'image d'une composante de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  dans deux directions : la direction de la sonde et la direction du gradient de l'image (figure 3.12).

La figure 3.13 montre sur une coupe stylisée petit axe la direction du champ DTI et la "direction idéale" du gradient. On voit que ces deux directions ne sont pas toujours distinctes. De plus, la direction du gradient n'est pas bien définie lorsque le gradient est nul ou faible, c'est-à-dire dans les zones uniformes (ce qui arrive

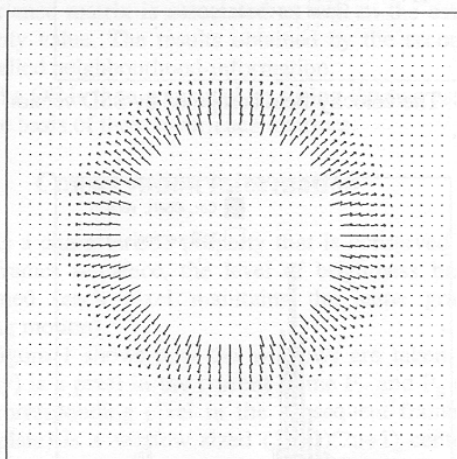
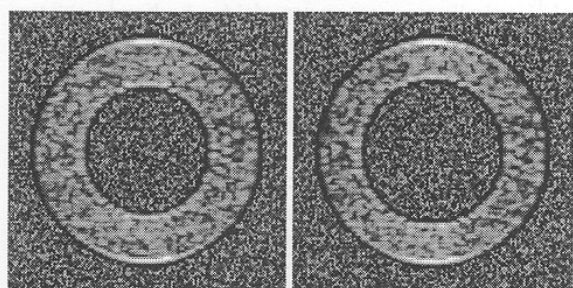


Figure 2. Upper: a couple of frames from the synthesized sequence. Lower: the imposed velocity field.

(a) Séquence utilisée

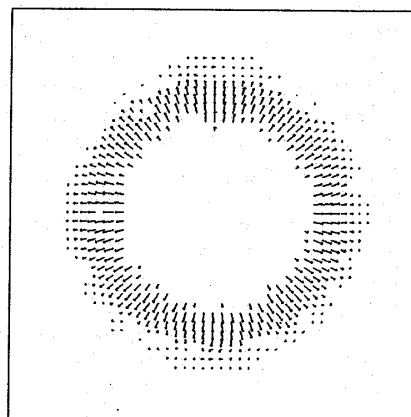


Figure 3. The velocity field computed by Corr. Coeff. version algorithm.

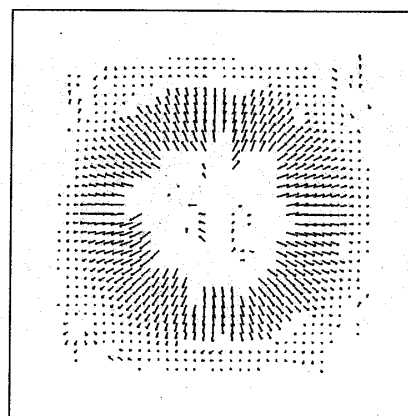


Figure 4. The velocity field computed by SSD version algorithm.

(b) Résultats obtenus par les deux méthodes

FIG. 3.11 – Figures extraites de [LAMBERTI *et al.*1993] présentant la séquence utilisée et les résultats obtenus avec le coefficient de corrélation et la différence des sommes au carré.

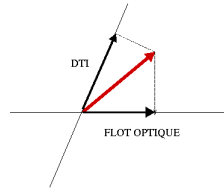


FIG. 3.12 – Contributions du flot optique et Doppler tissulaire au déplacement

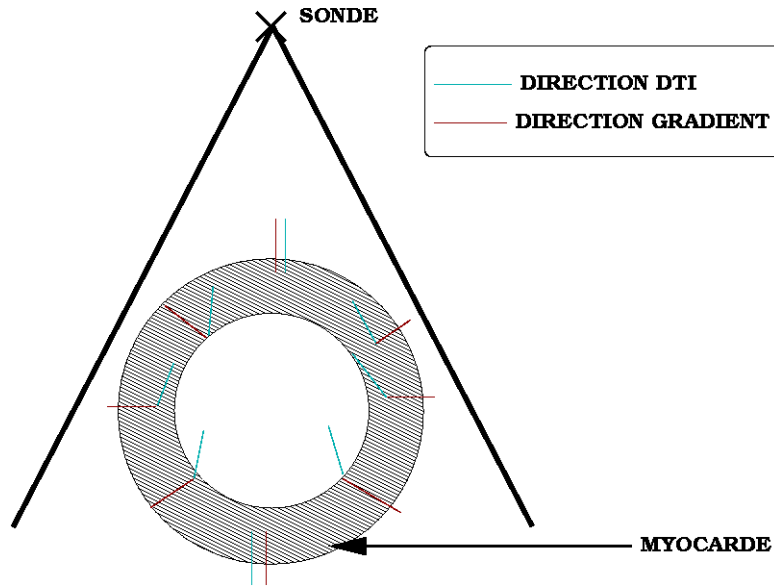


FIG. 3.13 – Direction du gradient et de la vitesse TDI sur une coupe petit axe.

en particulier dans les zones où le signal est saturé). Le vecteur  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  ne peut donc pas être déterminé par la simple résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

Le problème reste donc globalement mal posé. Les deux informations étant de type projection de la vitesse, le cadre des méthodes différentielles apparaît donc comme le cadre le plus simple pour introduire la projection de la vitesse dans une direction supplémentaire.

L'inconvénient majeur de cette méthode est l'utilisation de la contrainte du flot optique. Il faut donc veiller à utiliser une régularisation suffisante et adaptée. En outre, nous pouvons utiliser un des pré-traitements proposés section 2.1.3 pour lisser la séquence et la rendre plus conforme à l'hypothèse du flot optique.

Nous avons fait le choix de nous placer dans le cadre des déformations libres comme pour la méthode de Horn et Schunck pour l'estimation du flot optique. Nous parlons de déformations libres puisque nous recherchons un champ de vecteurs vitesse sur la grille de l'image, indépendamment les uns des autres, et non un morphisme appartenant à un espace de transformations donné. Nous avons choisi ce cadre peu contraint pour la raison suivante : comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, l'imagerie par Doppler tissulaire fournit un champ de vitesses très régulier, nous attendons donc un effet régularisant de son utilisation conjointe avec le flot optique.

### Algorithme d'estimation d'un champ de vitesses dense utilisant l'information Doppler et l'échographie classique

Nous recherchons donc un champ dense de vitesses  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  "régulier" qui respecte au mieux la contrainte du flot optique et celle imposée par la vitesse mesurée par TDI. Si on appelle  $\mathbf{u}_{\text{TDI}}(x_{\text{TDI}}, y_{\text{TDI}})$  la direction

de la sonde en chaque point, l'information donnée par le TDI se traduit par la donnée de la projection  $v_{\text{TDI}}$  de la déformation recherchée  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  dans la direction  $\mathbf{u}_{\text{TDI}}$  :

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{\text{TDI}}) = v_{\text{TDI}} \quad (3.12)$$

En notant  $I(\mathbf{x}, t)$  l'intensité de l'image en un point  $\mathbf{x}$  à un instant  $t$ ,  $I_t$  la dérivée de  $I$  en fonction du temps et  $\nabla I$  le gradient spatial de l'image, l'image classique donne la contrainte suivante sur la vitesse :

$$(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I) = -I_t \quad (3.13)$$

Comme dans [HORN et SCHUNCK1981], nous intégrons ces deux informations avec une régularisation dans une fonctionnelle à minimiser pour chaque instant  $t$  de la séquence TDI :

$$E^t(\mathbf{v}) = E_{\text{fo}}^t(\mathbf{v}) + \alpha E_{\text{reg}}^t(\mathbf{v}) + \beta E_{\text{TDI}}^t(\mathbf{v}) \quad (3.14)$$

Les trois termes sont définis comme suit. Soit  $D$  le domaine de définition de l'image.

– Le terme de flot optique : en reprenant la contrainte de l'équation 3.13,

$$E_{\text{fo}}^t(\mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla I + I_t)^2 dx \quad (3.15)$$

– Classiquement, la régularité du champ peut être obtenue en minimisant le terme de régularisation isotrope :

$$E_{\text{reg}}^t(\mathbf{v}) = \int_D \|\nabla v_1(\mathbf{x}, t)\|^2 + \|\nabla v_2(\mathbf{x}, t)\|^2 dx \quad (3.16)$$

où  $v_1$  et  $v_2$  sont les deux composantes de  $\mathbf{v}$ .

– Enfin pour imposer la contrainte de l'équation 3.12, on utilise :

$$E_{\text{TDI}}^t(\mathbf{v}) = \int_D (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{\text{TDI}} - v_{\text{TDI}})^2 dx \quad (3.17)$$

On suppose que le champ de déformations  $\mathbf{v}$  est un élément de  $V = H^1(D) \times H^1(D)$ .  $E^t$  est continue et strictement convexe sur  $V$ , en effet  $E^t$  est une somme de termes quadratiques. De plus

$$\lim_{\|\mathbf{v}\| \rightarrow \infty} E^t(\mathbf{v}) = +\infty.$$

Donc la fonctionnelle  $E^t$  admet un unique minimum sur  $V$ .

De plus, la minimisation de  $E^t$  reste un problème bien posé lorsqu'on ajoute le terme  $E_{\text{TDI}}^t$  à la fonctionnelle de Horn et Schunck. En effet, en reprenant les notations introduites à partir de la proposition 3.1 pour le problème de Horn et Schunck. On définit la forme bilinéaire symétrique  $a_{\text{TDI}}$ , la forme linéaire  $f_{\text{TDI}}$  et la constante  $c_{\text{TDI}}$  grâce aux équations 3.18, 3.19 et 3.20 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_{\text{TDI}}(u, v) = & \alpha \int_{\Omega} (\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) + \\ & (I_x^2 u_1 \cdot v_1 + I_x \cdot I_y u_1 \cdot v_2 + I_x \cdot I_y u_2 \cdot v_1 + I_y^2 u_2 \cdot v_2) + \\ & \beta (x_{\text{TDI}}^2 u_1 \cdot v_1 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_1 \cdot v_2 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_2 \cdot v_1 + y_{\text{TDI}}^2 u_2 \cdot v_2), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$f_{\text{TDI}}(v) = \int_{\Omega} 2(I_x I_t v_1 + I_y I_t v_2) - 2\beta (x_{\text{TDI}} v_{\text{TDI}} v_1 + y_{\text{TDI}} v_{\text{TDI}} v_2) dx dy, \quad (3.19)$$

$$c_{\text{TDI}} = \int_{\Omega} I_t^2 + \mu v_{\text{TDI}}^2 dx dy. \quad (3.20)$$

Minimiser la fonctionnelle  $E^t(\mathbf{v}) = 1/2 a_{\text{TDI}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f_{\text{TDI}}(\mathbf{v}) + c_{\text{TDI}}$  est donc équivalent à minimiser  $1/2 a_{\text{TDI}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - f_{\text{TDI}}(\mathbf{v})$ . On reprend la démonstration proposée pour Horn et Schunck. On souhaite appliquer le théorème de Lax-Milgram (Théorème 3.1) et la proposition complémentaire 3.2. Il faut donc montrer que  $a_{\text{TDI}}$  est une forme bilinéaire symétrique continue et coercive.

**Proposition 3.4** Continuité

Soit la forme bilinéaire  $a_{\text{TDI}}$  définie par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a_{\text{TDI}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & \int_{\Omega} \alpha(\nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2) + \\ & ((I_x)^2 u_1 \cdot v_1 + I_x \cdot I_y u_1 \cdot v_2 + I_x \cdot I_y u_2 \cdot v_1 + (I_y)^2 u_2 \cdot v_2) dx dy + \\ & \beta(x_{\text{TDI}}^2 u_1 \cdot v_1 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_1 \cdot v_2 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_2 \cdot v_1 + y_{\text{TDI}}^2 u_2 \cdot v_2) \end{aligned}$$

Alors  $a_{\text{TDI}}$  est continue

Pour le démontrer, on utilise la propriété déjà montrée pour le problème de Horn et Schunck (équation 3.5). En effet,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |a_{\text{TDI}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| & \leq |a_{\text{HS}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ & + |\mu \int_{\Omega} (x_{\text{TDI}}^2 u_1 \cdot v_1 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_1 \cdot v_2 + x_{\text{TDI}} \cdot y_{\text{TDI}} u_2 \cdot v_1 + y_{\text{TDI}}^2 u_2 \cdot v_2) dx dy| \\ & \leq C_1 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 + \beta \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u}_{\text{TDI}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u} (\mathbf{v}_{\text{TDI}} \cdot \mathbf{u}) \right| \\ & \leq C_1 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 + \beta |(\mathbf{u}_{\text{TDI}} \cdot \mathbf{u}) (\mathbf{v}_{\text{TDI}} \cdot \mathbf{v})|_0 \\ & \leq C_1 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 + 2\beta \max(\|x_{\text{TDI}}\|_{\infty}, \|y_{\text{TDI}}\|_{\infty}) |\mathbf{u}|_0 |\mathbf{v}|_0 \\ & \leq C_1 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 + C_2 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1 \end{aligned}$$

avec  $C_2 = 2\beta$ .

Donc  $a_{\text{TDI}}$  est continue. De plus

$$a_{\text{TDI}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = a_{\text{HS}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \beta \int_{\Omega} (x_{\text{TDI}} v_1 + y_{\text{TDI}} v_2)^2 dx dy \geq a_{\text{HS}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}). \quad (3.21)$$

Comme  $a_{\text{HS}}$  est coercive,  $a_{\text{TDI}}$  est coercive. La minimisation de  $E^t$  est donc un problème bien posé. Pour trouver le minimum, on résout classiquement les équations d'Euler associées.

$$\alpha \Delta v_1 - I_x(I_x v_1 + I_y v_2 + I_t) - \beta x_{\text{TDI}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{\text{TDI}} - v_{\text{TDI}}) = 0 \quad (3.22)$$

$$\alpha \Delta v_2 - I_y(I_x v_1 + I_y v_2 + I_t) - \beta y_{\text{TDI}}(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_{\text{TDI}} - v_{\text{TDI}}) = 0 \quad (3.23)$$

Pour cela, nous effectuons une descente de gradient. On introduit un temps artificiel  $\tau$ , et on résout :

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} = - \frac{\partial E^t}{\partial v_1}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} = - \frac{\partial E^t}{\partial v_2}, \quad (3.25)$$

avec

$$\frac{\partial E}{\partial v_1} = -(\alpha^2 \Delta v_1 - I_x(I_x v_1 + I_y v_2 + I_t) - \beta^2 x_{\text{TDI}}(v \cdot \frac{v_{\text{TDI}}}{\|v_{\text{TDI}}\|} - \|v_{\text{TDI}}\|)), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v_2} = -(\alpha^2 \Delta v_2 - I_y(I_x v_1 + I_y v_2 + I_t) - \beta^2 y_{\text{TDI}}(v \cdot \frac{v_{\text{TDI}}}{\|v_{\text{TDI}}\|} - \|v_{\text{TDI}}\|)). \quad (3.27)$$

Les gradients en temps et en espace de l'image sont nécessaires. Ils peuvent être calculés une fois pour toutes, aucune nouvelle estimation n'est nécessaire au cours de l'estimation du champ. Nous proposons ici d'utiliser un schéma aux différences finies centrées pour calculer le gradient spatial. Pour le gradient temporel, il est nécessaire d'avoir les images précédentes ou suivantes, nous calculons ici le gradient temporel de l'image par un schéma aux différences finies centrées grâce à l'image suivante et à l'image précédente dans la séquence. Pour la discrétisation du système 3.24, on utilise un schéma numérique explicite en temps et des différences finies centrées en espace. On obtient l'algorithme 3.1.

---

**Algorithme 3.1** Estimation du champ de déformation

---

```

1: procédure CHAMP( $I_x, I_y, I_t, \mathbf{v}_{\text{TDI}}, x_{\text{TDI}}, y_{\text{TDI}}, \alpha, \beta, \text{itmax}, \text{dt}$  )
2:    $[M, N] = \text{size}(I)$ 
3:    $v_1$  et  $v_2$  sont des matrices nulles de taille  $M \times N$ 
4:   for it=0..itmax-1 do
5:     for j=0..N-1 do
6:       for i=0..M-1 do
7:          $\text{mean}_1 = (v_1(i+1, j) + v_1(i-1, j) + v_1(i, j+1) + v_1(i, j-1))/4$ 
8:          $\text{mean}_2 = (v_2(i+1, j) + v_2(i-1, j) + v_2(i, j+1) + v_2(i, j-1))/4$ 
9:          $v_1(i, j) = v_1(i, j) - \text{dt}[I_x(i, j) * (v_1(i, j)I_x(i, j) + v_2(i, j)I_y(i, j) + I_t(i, j)) + \alpha(v_1(i, j) -$ 
10:           $\text{mean}_1) + \beta x_{\text{TDI}}(i, j)(x_{\text{TDI}}(i, j)v_1(i, j) + y_{\text{TDI}}(i, j)v_2(i, j) - v_{\text{TDI}}(i, j))]$ 
11:          $v_2(i, j) = v_2(i, j) - \text{dt}[I_y(i, j) * (v_1(i, j)I_x(i, j) + v_2(i, j)I_y(i, j) + I_t(i, j)) + \alpha(v_2(i, j) -$ 
12:           $\text{mean}_2) + \beta y_{\text{TDI}}(i, j)(x_{\text{TDI}}(i, j)v_1(i, j) + y_{\text{TDI}}(i, j)v_2(i, j) - v_{\text{TDI}}(i, j))]$ 
13:       end for
14:     end for
15:   end for
16:   return( $[v_1, v_2]$ )
17: end procédure

```

---

### Régularisation spatio-temporelle

Contrairement au portrait idéaliste dressé dans la figure 3.13, la réalité des images échographiques ne permet pas d'obtenir ce gradient idéal. On retrouve alors l'influence des principales caractéristiques des images petit axe du ventricule gauche ([WILSON et GEISER1992] et section 2.1.2). D'une part, les zones latérales mises en avant dans la figure 3.14 sont des zones où l'onde ultrasonore est tangente aux tissus et donc on récolte peu d'information sur le tissu dans ces zones. D'autre part, puisqu'on travaille seulement avec une vue, le tissu est représenté par une texture composée de taches horizontales (orthogonales au faisceau d'ultrasons), le gradient n'est donc pas exactement dans la direction attendue et surtout, il est nul dans certaines parties du myocarde comme le montre la figure 3.15. Par contre, le fait que l'épaisseur du myocarde soit texturée permet d'obtenir un gradient dans toute l'épaisseur du myocarde et pas seulement au niveau des bords. De plus, deux régions de l'image sont très fiables car le signal ultrasonore est orthogonal aux parois dans ces deux zones : l'épicarde le long du mur postérieur d'une part et le muscle cardiaque entre l'endocarde et l'épicarde le long du mur antérieur.

Pour compenser le manque d'informations à un instant donné, l'idée est de suivre les idées proposées dans [WEICKERT et SCHNORR2001] pour le flot optique et de remplacer la régularisation spatiale par une régularisation spatio-temporelle. Ainsi, les zones ne contenant aucune information pourront utiliser le champ



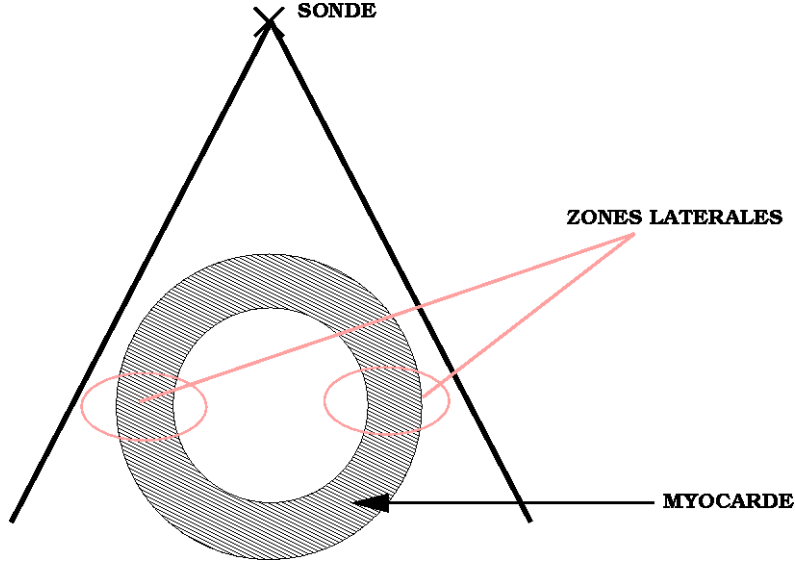


FIG. 3.14 – Zones peu échogènes sur une coupe petit axe.

calculé dans les images précédentes et suivantes. En conséquence, on est amené à traiter toute la séquence en une fois pour minimiser :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \int_{[0,T]} (I_x v_1 + I_y v_2 + I_t)^2 + \alpha (\|\nabla^t v_1\|^2 + \|\nabla^t v_2\|^2) + \beta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{\text{TDI}} - v_{\text{TDI}})^2 dt dx dy. \quad (3.28)$$

Les gradients  $\nabla v_1$  et  $\nabla v_2$  sont ici des gradients spatio-temporels, i.e.

$$\nabla^t v_1 = \begin{pmatrix} \partial v_1 / \partial x \\ \partial v_1 / \partial y \\ \partial v_1 / \partial t \end{pmatrix}.$$

Ainsi, des interactions sont possibles entre les différents moments de la séquence. Pour minimiser cette fonctionnelle, nous procédons encore en utilisant une descente de gradient. Nous utilisons un schéma temporel explicite légèrement modifié. Soient  $i = (i_1, i_2, i_3)$  les coordonnées en espace et en temps du point courant,  $\mathcal{N}(i)$  le voisinage spatio-temporel de  $i$ ,  $k$  l'itération en cours et  $\tau$  le pas de temps.

$$\begin{aligned} v_1(i)^{k+1} &= \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\alpha^2} I_x(i)^2} \left( v_1(i)^k + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (v_1(j)^k - v_1(i)^k) \right) - \frac{\tau}{\alpha^2} I_x(i) (I_y(i) v_2(i)^k + I_t(i)) \\ &\quad - \frac{\tau \beta}{\alpha^2} x_{\text{TDI}} (x_{\text{TDI}} v_1(i)^k + y_{\text{TDI}} v_1(i)^k - v_{\text{TDI}}) \\ v_2(i)^{k+1} &= \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\alpha^2} I_y(i)^2} \left( v_2(i)^k + \tau \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (v_2(j)^k - v_2(i)^k) \right) - \frac{\tau}{\alpha^2} I_y(i) (I_x(i) v_1(i)^k + I_t(i)) \\ &\quad - \frac{\tau \beta}{\alpha^2} y_{\text{TDI}} (x_{\text{TDI}} v_1(i)^k + y_{\text{TDI}} v_2(i)^k - v_{\text{TDI}}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

La taille du voisinage  $\mathcal{N}(i)$  peut être choisie en fonction de la régularisation souhaitée. L'intensité de la régularisation temporelle peut être choisie indépendamment de la régularisation spatiale.

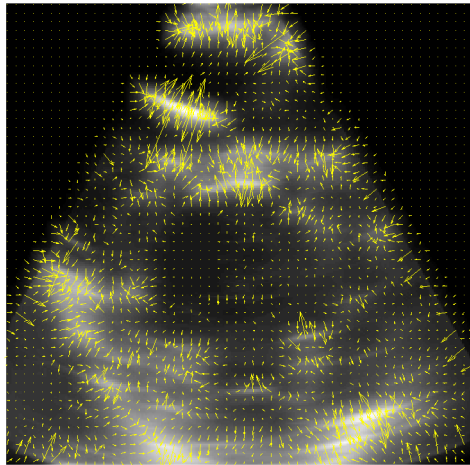


FIG. 3.15 – Exemple du gradient sur une image régularisée extraite d’une séquence 2D

### 3.1.5 Résultats et discussion

#### Validation sur des images synthétiques

Une première série de validations a été effectuée sur des images entièrement synthétiques constituées de cercles concentriques en dégradé (figure 3.16). On applique à cette image des translations successives. On construit ainsi une séquence d’une vingtaine d’images.

Le champ de vitesses TDI est simulé en plaçant simplement une “sonde virtuelle” sur l’image (figure 3.17). On simule ensuite un champ TDI en projetant le champ appliqué dans la direction de la sonde (figure 3.17). Le champ ainsi simulé ne prend pas en compte la formation physique du TDI (section 2.2.1) et sera donc plus régulier qu’une image de vitesse réelle. Les images synthétiques utilisées sont ensuite régularisées par convolution avec un noyau gaussien de faible écart-type ( $\sigma = 1$ ).

Le champ de vitesses imposé est constant dans le temps. Nous présentons donc les résultats pour la dixième image de la séquence, les champs de vitesses estimés pour les autres images de la séquence étant très similaires. La figure 3.18 présente les vitesses obtenues après une estimation du flot optique par la méthode de Horn et Schunck complétée par une régularisation spatio-temporelle. Le résultat présenté est obtenu après 5000 itérations avec un pas de temps artificiel  $\tau = 0.1$  et un poids affecté à la régularisation  $\alpha = 3$  plutôt élevé. Dans les cadrans en haut à gauche et en bas à droite, on obtient un champ visuellement satisfaisant. C’est normal puisque dans ces deux zones, le champ de déplacement imposé a la même direction que le gradient de l’image. Les zones en bas à gauche et en haut à droite sont au contraire dans la situation où le gradient est orthogonal au champ de déplacement, ainsi, le flot optique est nul dans cette zone, le déplacement obtenu est obtenu par régularisation spatiale et se rapproche du champ véritable car nous sommes dans le cas d’un déplacement théorique constant. Le poids de la régularisation est plutôt élevé dans cet exemple ( $\alpha = 3$ ). Lorsqu’on diminue ce poids, on ne retrouve quasiment aucune composante de déplacement dans cette zone.

La figure 3.19 présente le champ obtenu en combinant le flot optique et le champ TDI simulé grâce à l’algorithme présenté dans la section 3.1.4. Le champ a été obtenu avec les mêmes paramètres que pour l’estimation du flot optique. Le paramètre supplémentaire nécessaire  $\beta$  règle le poids accordé au TDI. Nous avons réglé ce poids de telle sorte que les termes  $E_{fo}$  et  $E_{TDI}$  soient du même ordre de grandeur,  $\beta = 4$ . Une simple comparaison visuelle entre les figures 3.18 et 3.19 montre que le champ TDI simulé permet de récupérer un champ de déplacement dans les deux zones où le flot optique ne donne aucune information.

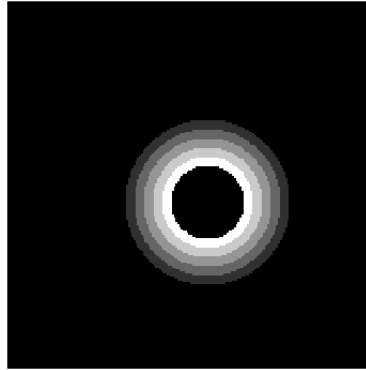


FIG. 3.16 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Image 10 extraite de la séquence.

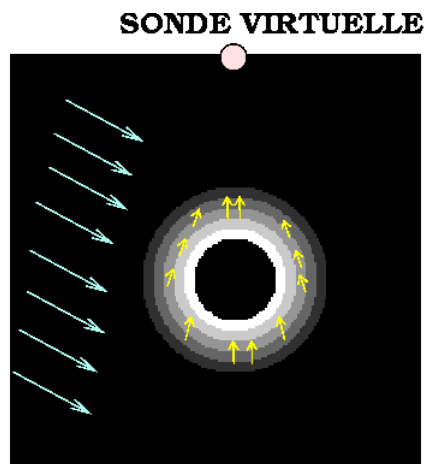


FIG. 3.17 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Déplacement imposé et simulation du TDI. Les flèches bleues représentent le champ de vitesses imposé qui est ici une translation constante. Pour simuler le TDI, nous avons placé une sonde virtuelle dessinée en rose. Les flèches jaunes montrent en quelques points la direction du champ TDI simulé.

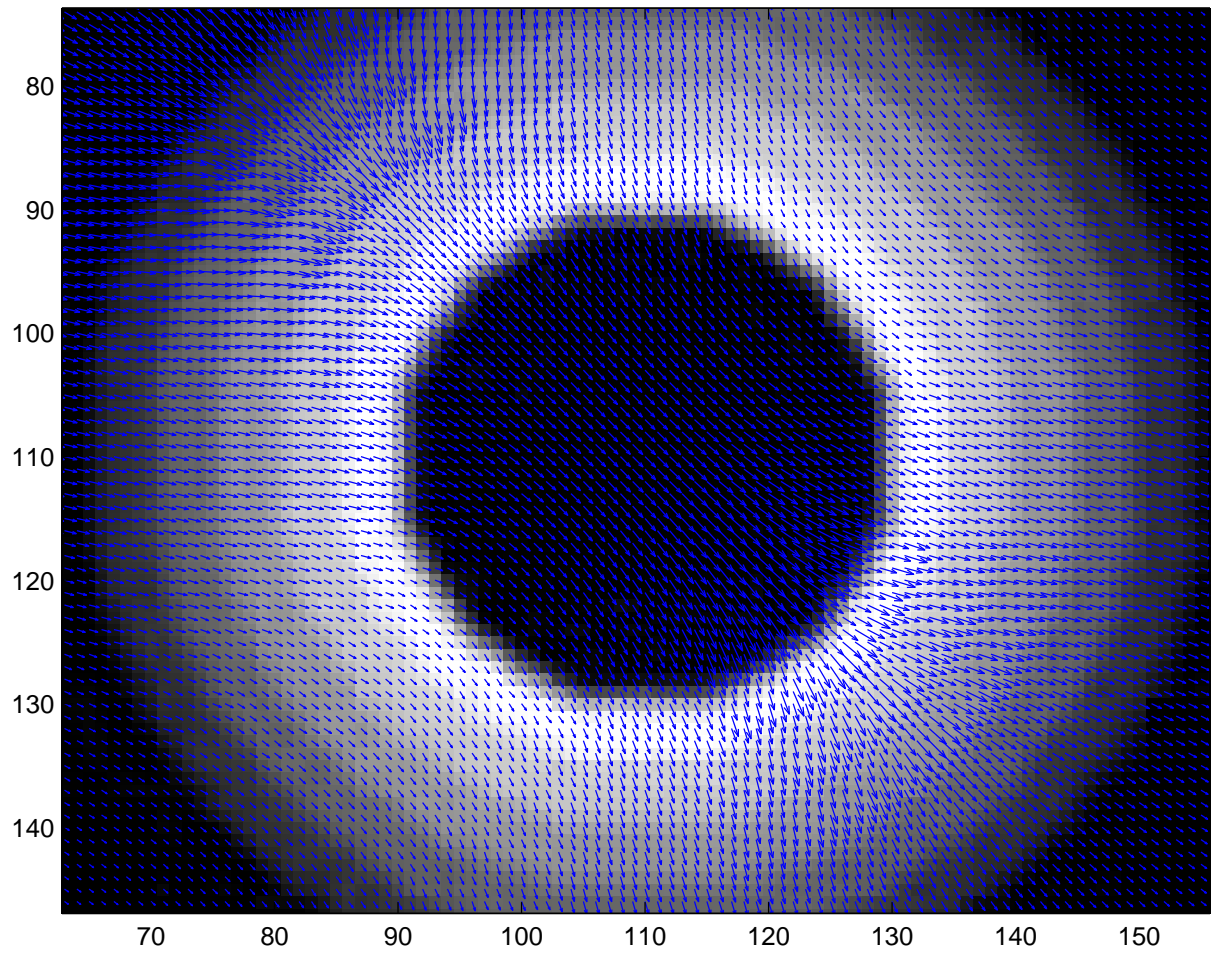


FIG. 3.18 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Champ de vitesses obtenu par le calcul du flot optique par la méthode de Horn et Schunck augmentée d'une régularisation spatio-temporelle. Le poids de la régularisation est  $\alpha = 3$ . Image 10 de la séquence. Plan rapproché.

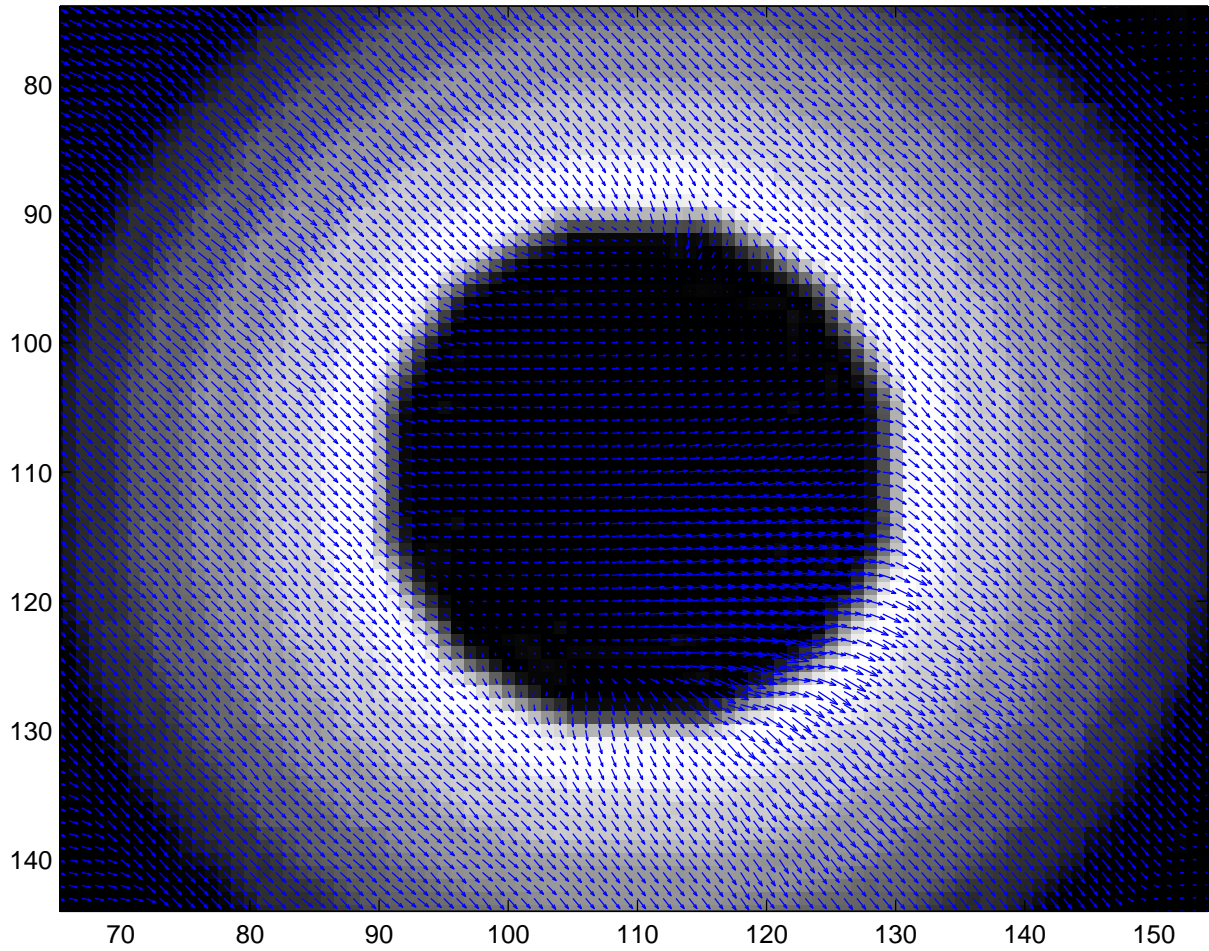


FIG. 3.19 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Champ de vitesses total obtenu par la méthode que nous proposons.  $\alpha = 3$  et  $\beta = 4$ . Image 10 de la séquence. Plan rapproché.

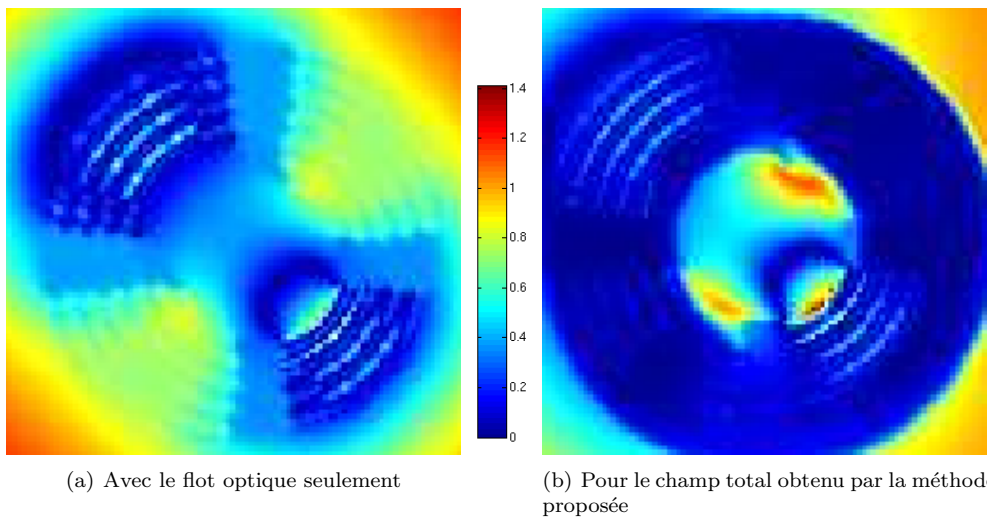


FIG. 3.20 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Erreur commise sur la norme du vecteur déplacement.

Cette comparaison visuelle est confirmée par le calcul de l'erreur, c'est-à-dire de la différence entre le champ de déplacement imposé et le champ de déplacement estimé. La figure 3.20 présente l'erreur sur la norme avec le flot optique seul et avec l'estimation utilisant l'ensemble des informations. Nous ne nous sommes pas intéressés à ce qui se passe dans le fond de l'image et nous n'avons simulé un champ TDI que sur la couronne. Si nous comparons les erreurs sur la couronne entre le flot optique seul et la combinaison du flot optique et du TDI, l'erreur pour le flot optique seul est élevée dès qu'on s'éloigne des deux zones où le déplacement théorique est dans la même direction que le gradient de l'image. L'image synthétique que nous considérons possède des zones homogènes. Dans ces zones, le flot optique n'apporte aucune contribution, le champ est obtenu par régularisation, ce qui introduit une légère différence. Au contraire, dans le cas du champ complet, on constate une erreur faible sur toute la couronne. La figure 3.21 présente quant à elle les différences angulaires, l'amélioration apportée par le Doppler tissulaire concerne aussi la direction du champ.

Sur cette image synthétique très simple, on a donc remarqué des zones où la coopération entre TDI et flot optique est optimale car les deux directions sont orthogonales (zones A de la figure 3.22). On remarque que l'erreur est un peu plus élevée quand on s'éloigne de ces zones, l'angle entre les deux directions est faible et donc l'information entre TDI et flot optique est redondante (zones B de la figure 3.22)

La deuxième série de validation proposée a pour but de tester la robustesse de la méthode sur des images ayant le même aspect qu'une échographie. Nous sommes donc partis d'une image échographique 2D extraite d'une des séquences que nous avons présentées dans la section 2.3. Nous avons ensuite appliqué un champ de vitesses donné à cette image pour créer une séquence de 20 images. Nous présentons ici deux types de champ de vitesses :

- un mouvement de relaxation dont l'amplitude est proportionnelle à la distance au centre, simulant une relaxation simplifiée

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \lambda(x - x_0) \\ u_2(x, y) &= \lambda(y - y_0) \end{aligned}$$

où  $\lambda$  est un coefficient donné et  $(x_0, y_0)$  un centre théorique du cœur placé approximativement dans l'image.

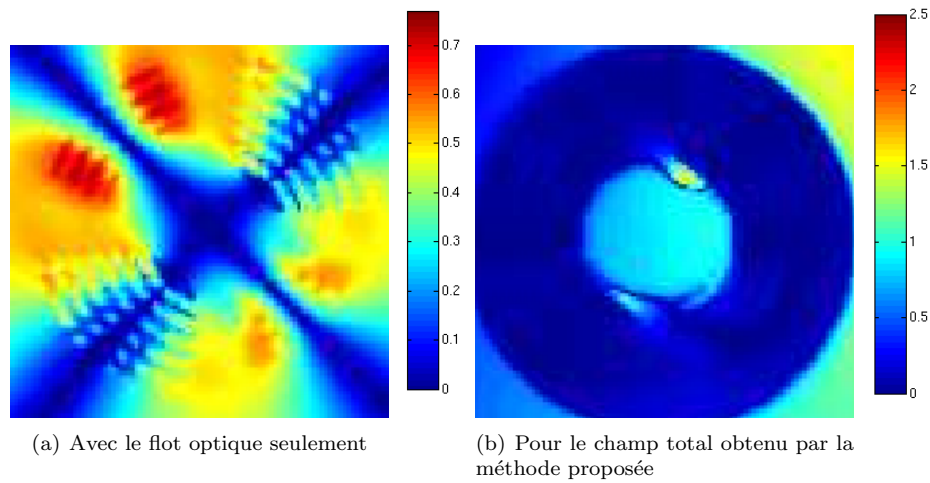


FIG. 3.21 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Erreur commise sur la direction du vecteur déplacement exprimée en radians.

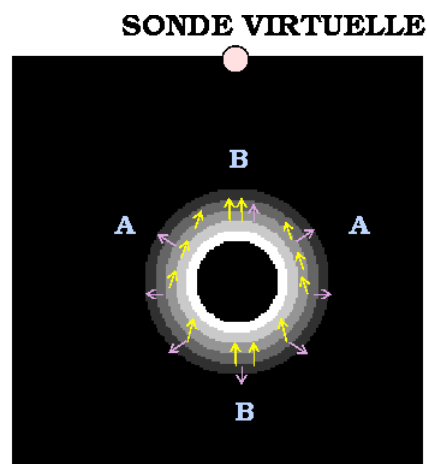


FIG. 3.22 – Expérience 1 : séquence totalement synthétique. Avec les mêmes légendes que celles de la figure 3.17, repérages des zones (A) où l'angle entre les deux directions (TDI et gradient) est optimal pour obtenir une estimation fiable et des zones (B) où les deux directions donnent une information redondante.

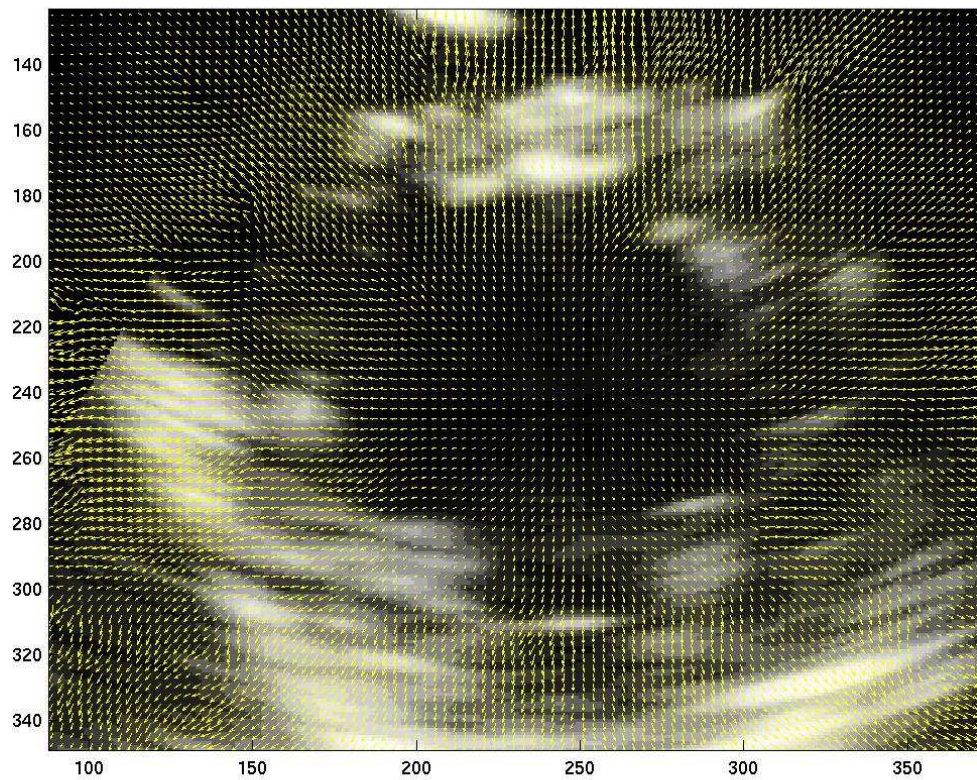


FIG. 3.23 – Expérience 2 : image réelle déformée par un champ de vitesses synthétique imitant une relaxation. Flot optique obtenu avec une régularisation spatio-temporelle.



– un mouvement de translation

$$u_1(x, y) = x + 2$$

$$u_2(x, y) = y + 1$$

La figure 3.23 présente le champ de déplacement obtenu en utilisant la méthode de Horn et Schunck modifiée pour prendre en compte une régularité temporelle. Il s’agit donc d’une estimation basée uniquement sur le flot optique. La figure 3.23 présente un champ dont la direction semble correspondre à la direction imposée. Cette impression est confirmée par la figure 3.24(b) qui présente l’erreur angulaire entre le champ estimé et le champ imposé. L’estimation effectuée n’a de sens que dans l’épaisseur du myocarde et sur cette zone, on constate une erreur plutôt faible. Cette bonne estimation de la direction du champ grâce au flot optique est attendue puisque la direction du gradient correspond à la direction du déplacement imposé. La figure 3.24(a) présente quant à elle la différence en norme entre les champs estimés et imposés. Le critère d’erreur basé sur la norme est plus faible sur les zones correspondant à l’épicarde le long du mur postérieur et au myocarde entre l’endocarde et l’épicarde le long du mur antérieur. A l’opposé dans les zones latérales, peu d’information est disponible et donc la seule contribution à l’estimation est la régularisation. Faute d’une régularisation beaucoup plus forte qui dégraderait le reste du champ, la norme du champ estimé dans cette zone reste faible. Pour ce type de déplacement à direction radiale, le flot optique donne déjà de bons résultats car la direction du déplacement recherché est proche de la direction du gradient de l’image.

La troisième série de tests est effectuée à partir de translations. Nous avons utilisé un champ de vitesses constant. Le champ de vitesses n’est donc pas partout dans la même direction que celle du gradient. Nous allons voir comment le Doppler tissulaire permet d’améliorer l’estimation dans ce cas. La figure 3.25 représente la translation qu’on applique à l’image. A partir de ce déplacement, on simule un champ TDI en projetant le déplacement dans la direction de la sonde, ce qui donne le champ représenté figure 3.26.

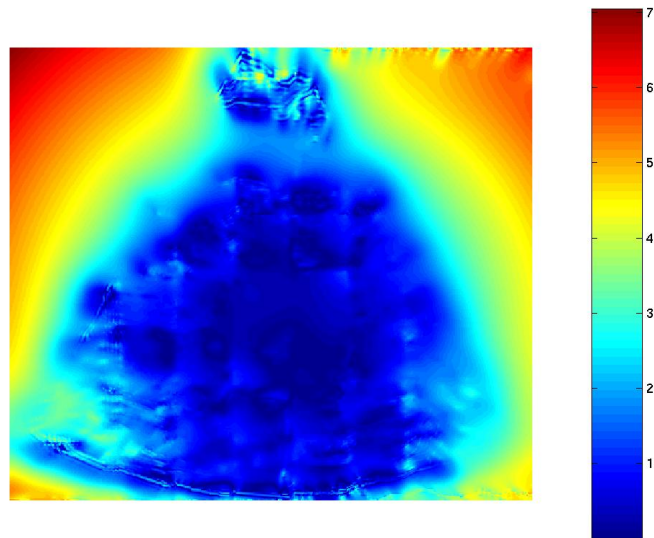
Le champ estimé en utilisant seulement le flot optique (figure 3.27) a une direction peu régulière et on retrouve dans la forme du champ la texture de l’image, c’est à dire des tâches elliptiques qui constituent l’image du myocarde dans les zones latérales. De plus le déplacement des zones latérales n’est pas estimé correctement puisque la norme de la vitesse obtenue est plus petite dans ces zones. En ajoutant l’information de Doppler tissulaire, on obtient le champ présenté figure 3.28. Ce champ est plus régulier car le TDI, lui même très régulier, introduit une régularisation supplémentaire. On obtient une direction plus proche de la direction recherchée. Cependant, si la composante verticale du déplacement est estimée fidèlement, ce n’est pas le cas de la composante horizontale. En effet, autour de l’axe vertical, la direction du gradient et la direction de la sonde sont très proches. L’amélioration apportée par le Doppler tissulaire est aussi quantitative. La figure 3.29 montre l’erreur commise avec le flot optique seul et avec l’utilisation simultanée du flot optique et du Doppler. Aussi bien pour l’erreur angulaire (figures 3.29(c) et 3.29(d)) que pour l’erreur en norme (figures 3.29(a) et 3.29(b)), l’utilisation du Doppler apporte à la fois une diminution de l’erreur commise mais aussi, une distribution plus homogène de cette erreur.

Ces exemples synthétiques constitués à partir d’images réelles déformées suivant un déplacement fixé permettent d’identifier les difficultés inhérentes à l’utilisation de l’échographie pour l’estimation de la déformation. La comparaison du premier exemple totalement synthétique (figures 3.21 à 3.19) et de l’exemple précédent montre l’influence du *speckle* dans l’estimation du déplacement, influence en partie compensée par l’utilisation du TDI. L’exemple de la translation montre aussi les limites de l’approche. En effet, certaines composantes de la déformation sont difficiles à estimer car elles ne sont ni dans la direction du gradient, ni dans la direction de la sonde. Nous avons montré qu’un mouvement radial sera bien estimé. Par contre, la composante de torsion, présente lors de la contraction cardiaque sera plus difficile à estimer à partir de l’imagerie seule car elle est tangente au myocarde.

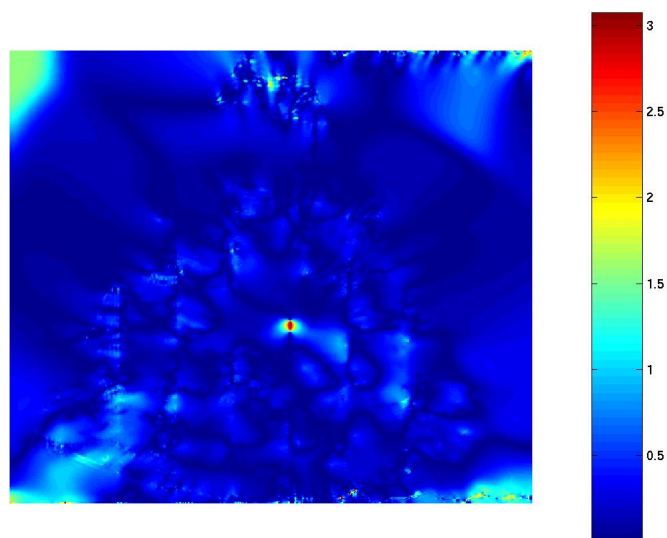
## Résultats sur des séquences réelles

L’algorithme présenté a été testé sur des séquences acquises sur des sujets humains (2 séquences) et des séquences acquises sur des rats (6 séquences) dans le cadre de la série de données présentée dans la section 2.3. Les deux principales difficultés qui s’ajoutent dans le cas réel sont

– le fait que la contrainte du flot optique n’est plus respectée



(a) Différence en norme en pixels par intervalle de temps



(b) Différence angulaire entre la direction du champ estimé et du champ en radians

FIG. 3.24 – Expérience 2 : image réelle déformée par un champ de vitesses synthétique imitant une relaxation. Erreur absolue commise entre l'estimation et le champ de déformation imposé.

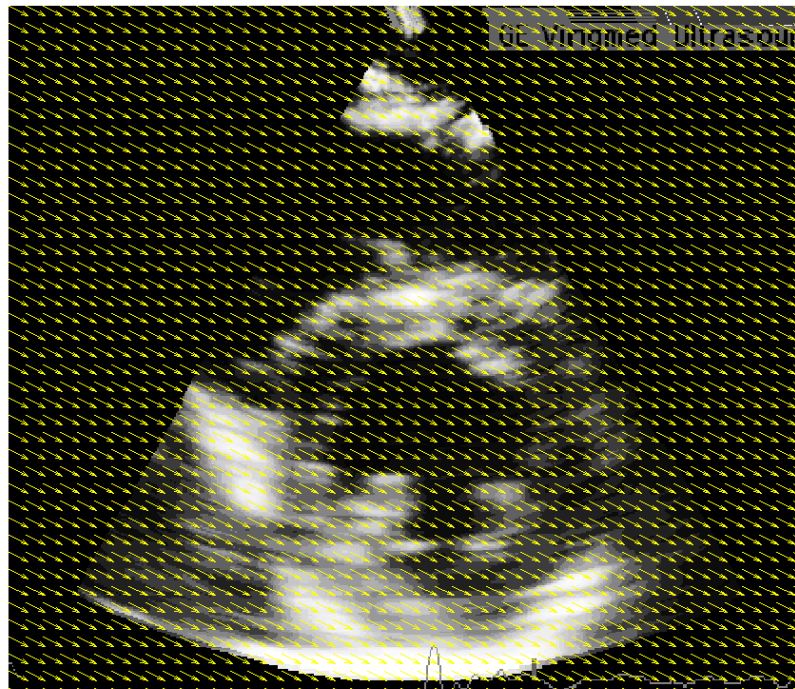


FIG. 3.25 – Expérience 3 : Image réelle et champ de vitesses synthétique, cas d'une translation. Champ de déformation imposé pour élaborer la série d'images, une translation de vecteur  $(2, 1)$ .

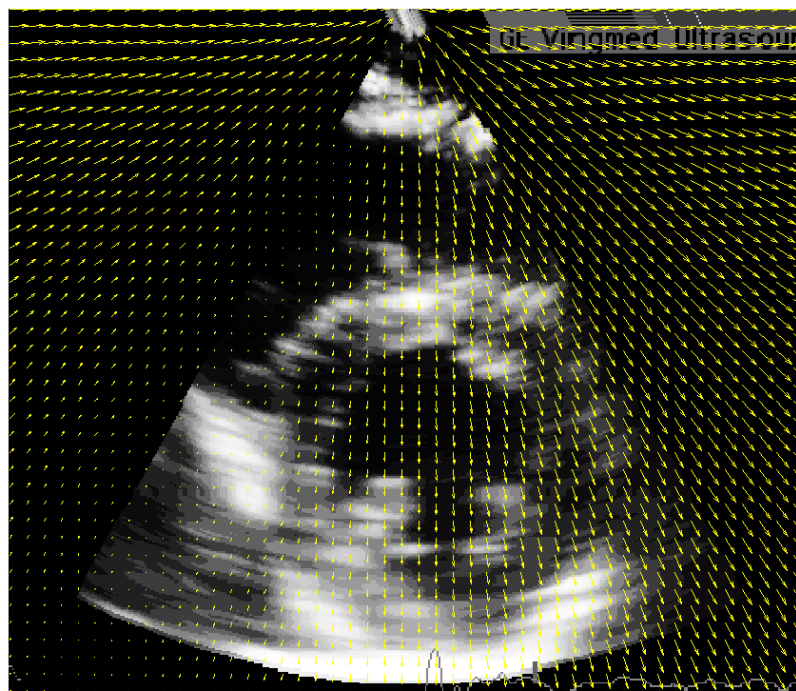


FIG. 3.26 – Expérience 3 : Image réelle et champ de vitesses synthétique, cas d'une translation. Champ de vitesses TDI simulé à partir du champ de la figure 3.25. La sonde virtuelle est placée comme la sonde réelle.

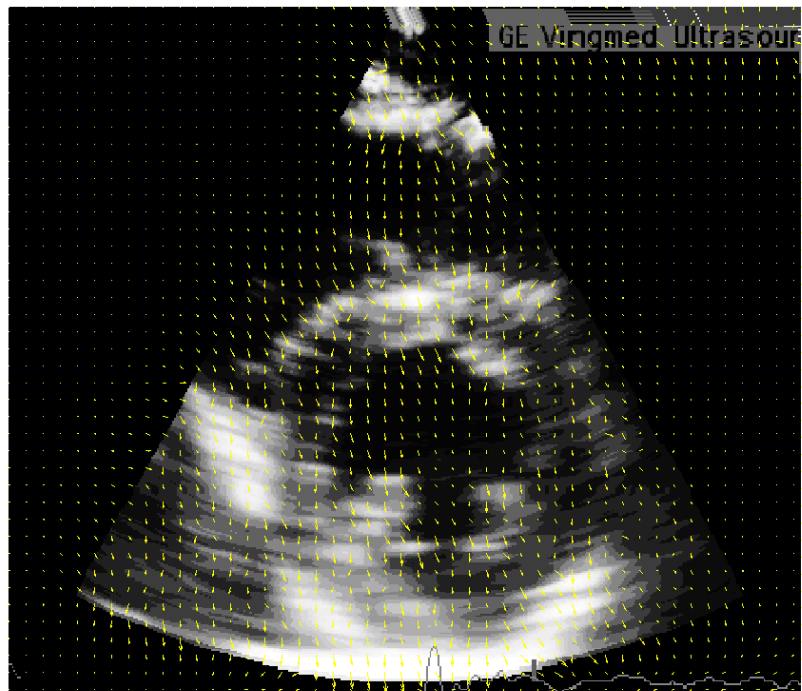


FIG. 3.27 – Expérience 3 : Image réelle et champ de vitesses synthétique, cas d'une translation. Champ de vitesses estimé grâce au flot optique

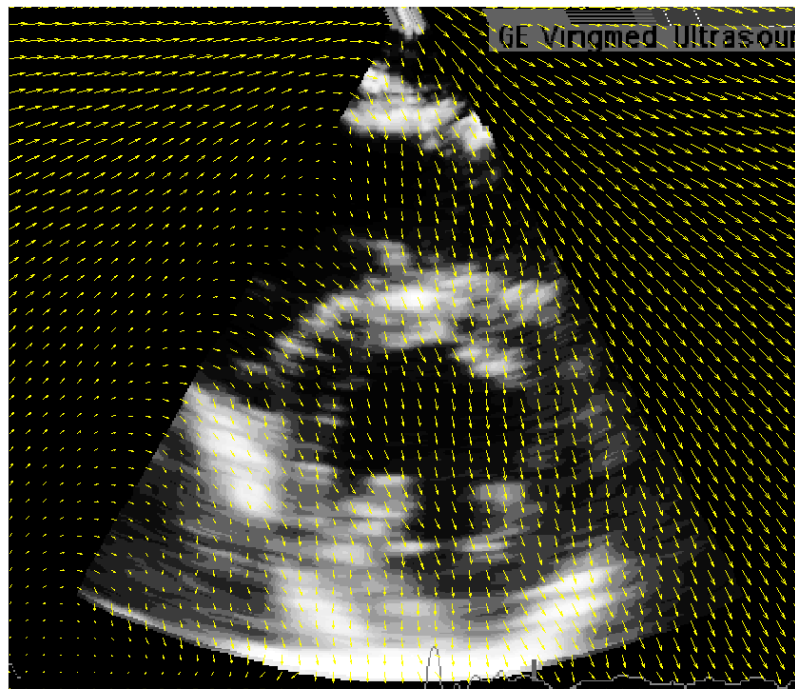
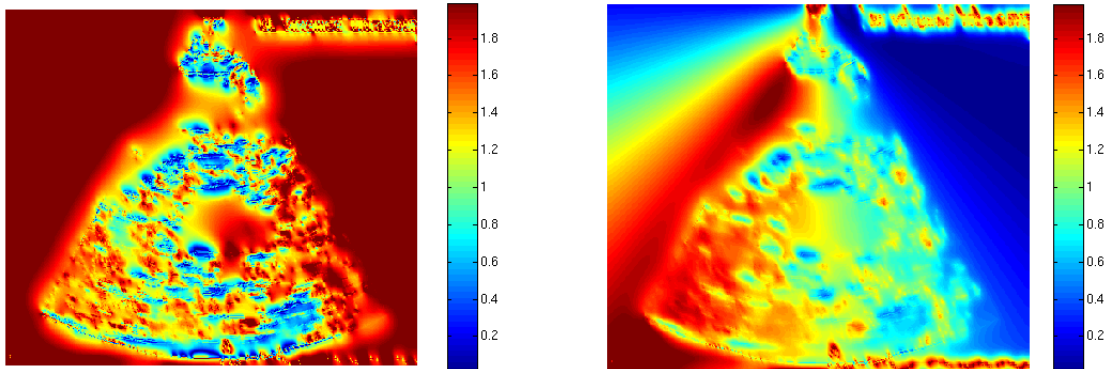
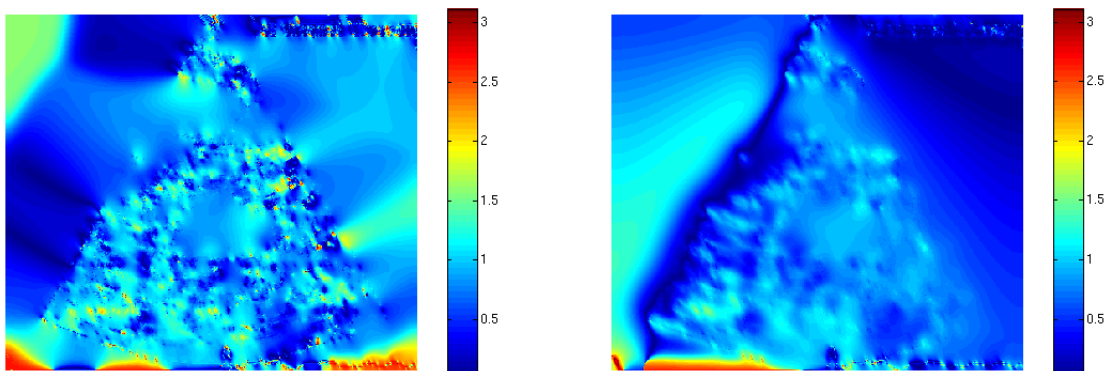


FIG. 3.28 – Expérience 3 : Image réelle et champ de vitesses synthétique, cas d'une translation. Champ de vitesses final obtenu par la méthode présentée



(a) Erreur sur la norme en pixels par intervalle de temps. Cas du flot optique. Figure 3.27. (b) Erreur sur la norme en pixels par intervalle de temps. Cas de l'estimation complète. Figure 3.28.



(c) Erreur angulaire en radians. Cas du flot optique. Figure 3.27. (d) Erreur angulaire angulaore. Cas de l'estimation complète. Figure 3.28.

FIG. 3.29 – Expérience 3 : Image réelle et champ de vitesses synthétique, cas d'une translation. Erreur absolue entre le déplacement théorique et le déplacement estimé

- le champ TDI réel n'est pas aussi régulier que ceux que nous avons simulés (cet aspect a été présenté section 2.1.3)

Nous présentons un extrait représentatif d'une séquence issue d'un sujet humain normal durant la systole. La figure 3.30 montre le flot optique seul, calculé par la méthode de Horn et Schunck. La figure 3.31 présente le résultat de l'estimation du déplacement intégrant le Doppler tissulaire. Alors que le poids de la régularisation (i.e. le coefficient  $\alpha$  dans l'équation (3.29)) est le même pour ces deux expériences (Figures 3.30 et 3.31), on constate que le champ obtenu en utilisant conjointement l'échographie classique et le Doppler des tissus est plus régulier que le champ obtenu avec le flot optique seul. Le Doppler tissulaire imageant de manière assez régulière la vitesse, il produit un champ beaucoup plus régulier que la dérivée à l'ordre 1 d'un signal de faible qualité.

Comme nous le souhaitons, le Doppler tissulaire a donc un effet régularisant sur le champ de vitesses estimé. Cette régularisation est plus intéressante que celle que l'on peut obtenir en augmentant le poids de la régularisation car elle apporte en même temps une information valable. Le champ estimé sur les zones latérales reste très faible et bruité. En effet, le TDI est aussi de faible qualité car le faisceau d'ultrasons est tangent à la surface du myocarde, ce qui handicape à la fois l'échographie classique et le signal Doppler. L'ajout du terme de régularisation spatio-temporelle permet cependant d'estimer un champ plus cohérent dans ces zones grâce à l'utilisation des images suivantes et précédentes dans la séquence comme on le voit en comparant les figures 3.32(b) et 3.31(b).

Le flot optique calculé par la méthode de Horn et Schunck sur des séquences réelles montrent des motifs dans le champ de vitesses. Ces motifs sont dus à la direction du gradient de l'image. En effet, on a vu dans la section 2.1.1 que les parois du myocarde apparaissent comme des tâches de forme elliptique orthogonales au faisceau d'ultrason. Le gradient de l'image autour de ces tâches est donc radial et on retrouve ce motif dans le champ de déformation estimé par le flot optique. On le retrouve aussi en utilisant le Doppler tissulaire, uniquement dans les régions où la contribution du Doppler est faible. Grâce à la fois à la régularisation spatio-temporelle et à la régularité du champ de vitesses TDI, on constate que l'influence du *speckle* diminue, c'est à dire que l'on perçoit moins les motifs de champ de vitesses liés aux motifs dus au *speckle*. Au final, on obtient un champ assez régulier qui correspond au mouvement observé et il semble que l'on récupère assez bien la composante radiale de la vitesses.

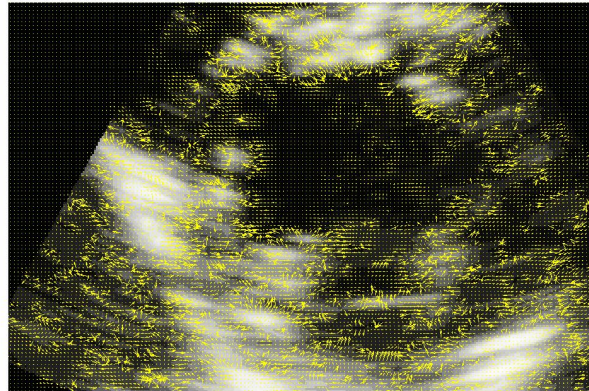
Les séquences de rats, issues de l'étude présentée dans la section 2.3, présentent certaines difficultés supplémentaires. En effet, le rythme cardiaque du rat est plus élevé et la taille du cœur est plus petite. La fréquence d'acquisition ne peut pas être augmentée suffisamment pour compenser la différence de rythme cardiaque, le problème est plus difficile car les déplacements que nous cherchons à estimer peuvent être de **grands déplacements**, ce qui pose problème à notre système d'estimation. De plus le Doppler tissulaire mesure une vitesse instantanée alors que le flot optique représente un déplacement entre deux images successives. Plus la fréquence d'acquisition est faible par rapport au rythme cardiaque du sujet, moins l'utilisation de ces deux quantités sur un pied d'égalité est légitime. Le champ estimé par la méthode proposée reste difficile à interpréter (figure 3.33). Nous utilisons donc pour ces séquences une pré-régularisation par la méthode de détection de lignes présentée section 2.1.3 (figure 2.9). Le champ obtenu (figure 3.34) est ainsi plus lisible.

### 3.1.6 Conclusions partielles et perspectives

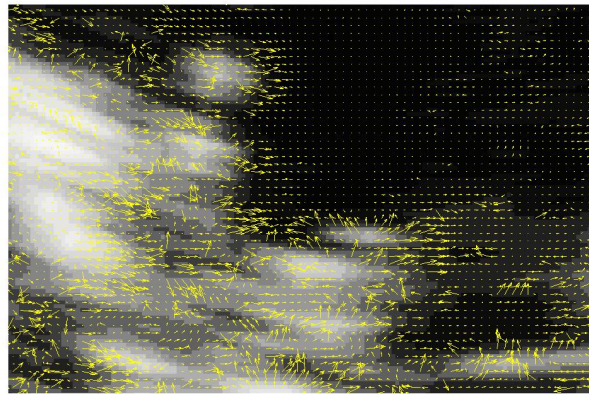
#### Résultats obtenus

Nous avons proposé une méthode pour intégrer dans une estimation de déformation basée sur le flot optique l'information supplémentaire apportée par la modalité TDI. Nous avons montré sur des exemples totalement synthétiques et des exemples plus réalistes, avec un déplacement contrôlé, l'efficacité de cette approche et ses limites. En particulier, les mouvements tangentiels (la torsion) qui ne sont pas dans la direction du gradient de l'image (qui est généralement radial) ne pourront être estimés par ce moyen que s'ils sont dans la direction de la sonde. Les résultats présentés au cours de la section 3.1.5 montrent qu'en ajoutant l'information de Doppler tissulaire au simple flot optique, on obtient un champ de déplacement cohérent et qui rend compte des déplacements que l'on observe en regardant la séquence. Malgré tout, les zones latérales restent encore un problème dans le cas des séquences réelles. En effet, le faisceau ultrasonore



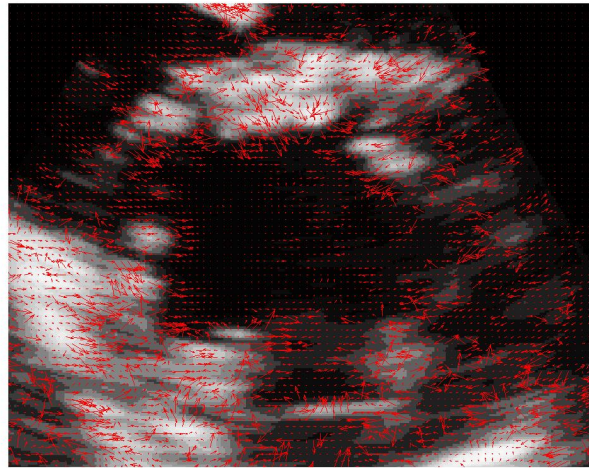


(a) Flot optique estimé

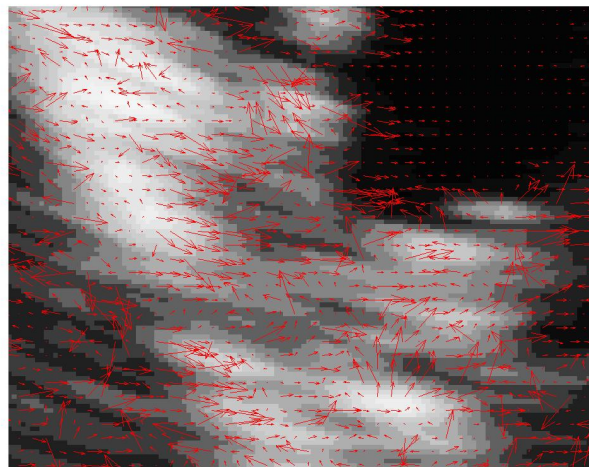


(b) Détail

FIG. 3.30 – Séquence réelle 1. Cas d'un sujet humain normal. Flot optique estimé en cours de systole.

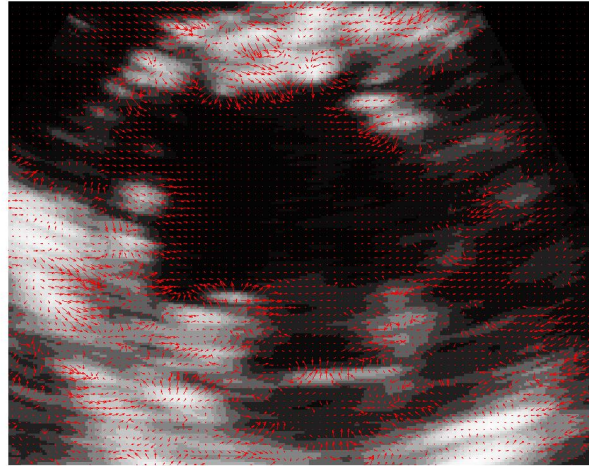


(a) Champ de vitesses estimé.

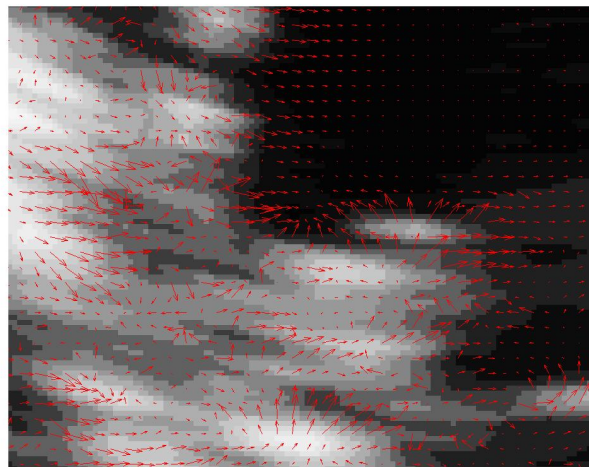


(b) Détail

FIG. 3.31 – Séquence réelle 1. Cas d'un sujet humain normal. Estimation du champ de déplacement utilisant Doppler tissulaire et flot optique sans régularisation spatio-temporelle. Champ de vitesses extrait de la séquence en cours de systole, au même instant que pour la figure 3.30.

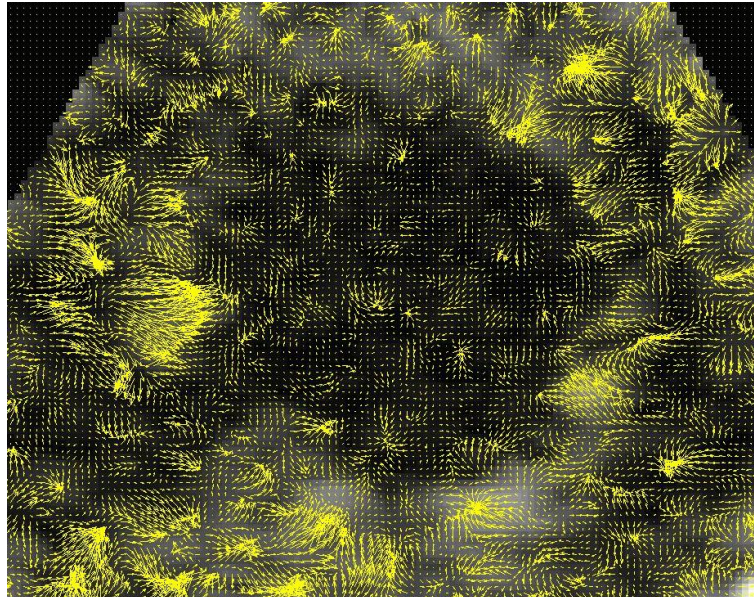


(a) Champ de vitesses estimé.

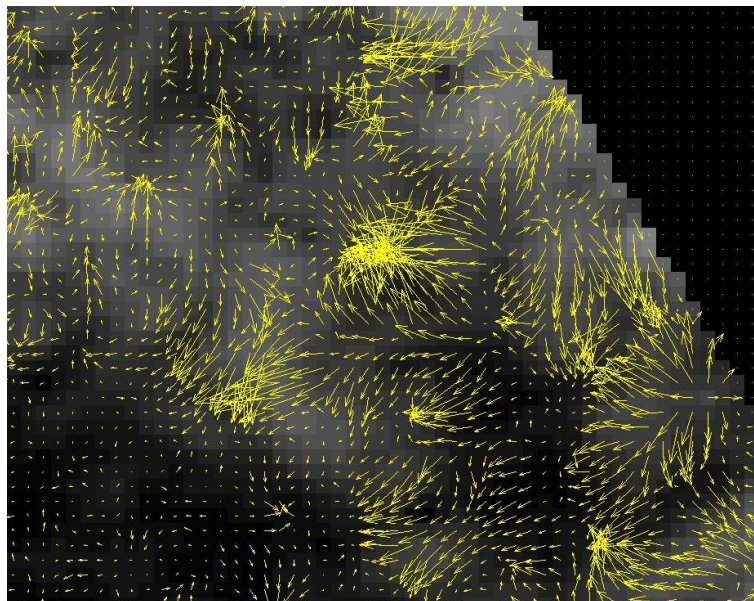


(b) Détail

FIG. 3.32 – Séquence réelle 1. Cas d'un sujet humain normal. Estimation du champ de déplacement utilisant Doppler tissulaire et flot optique avec régularisation spatio-temporelle. Champ de vitesses extrait de la séquence en cours de systole, au même instant que pour les figures 3.30 et 3.31.

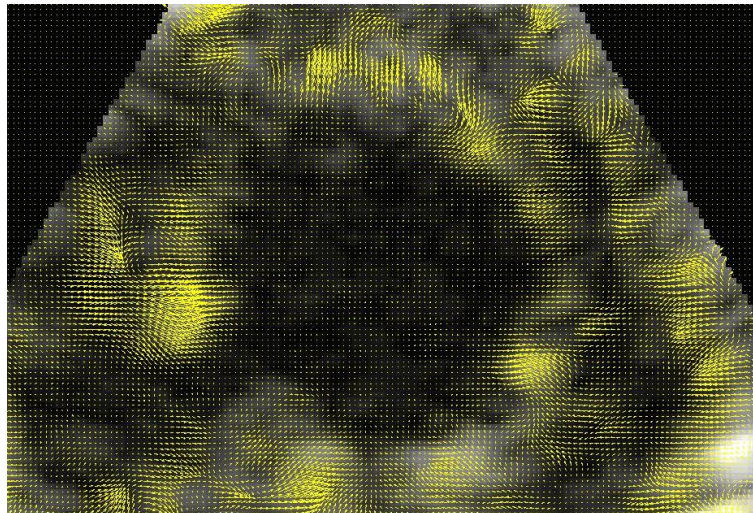


(a) Champ de déplacement estimé.

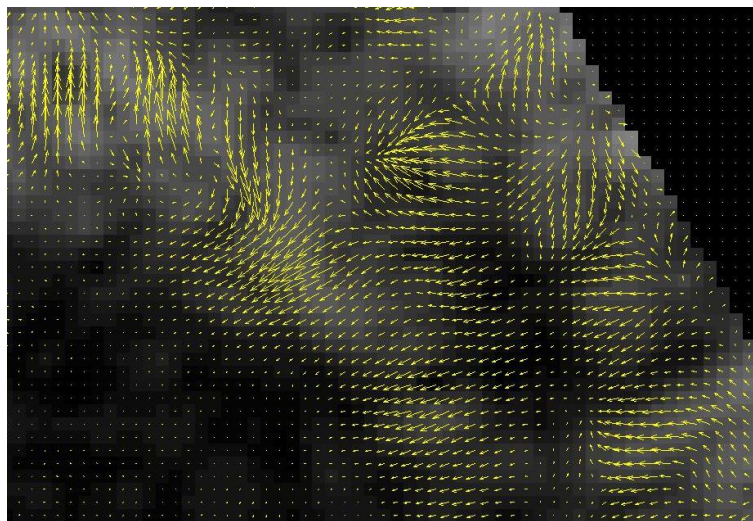


(b) Détail

FIG. 3.33 – Séquence réelle 2. Cas d'un rat sain. Estimation du champ de déplacement utilisant Doppler tissulaire et flot optique avec régularisation spatio-temporelle du champ de vitesses. Champ de vitesses extrait de la séquence en cours de systole.

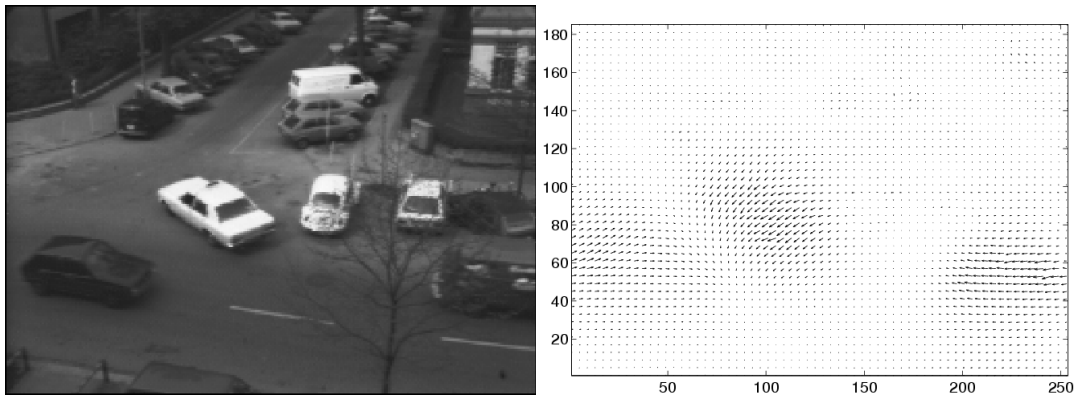


(a) Champ de déplacement en cours de systole.

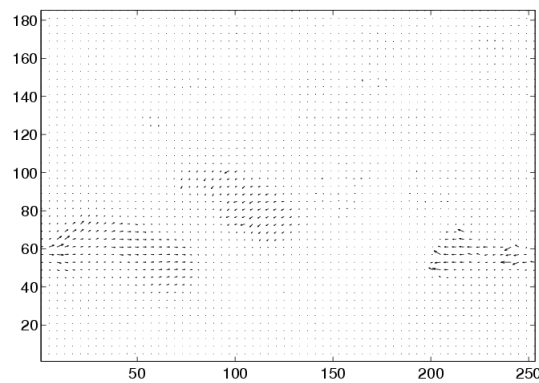


(b) Détail

FIG. 3.34 – Séquence réelle 2. Cas d'un rat sain. Estimation du champ de déplacement utilisant Doppler tissulaire et flot optique avec régularisation spatio-temporelle du champ de vitesses **avec une régularisation de l'image initiale**. Champ de vitesses extrait de la séquence en cours de systole.



(a) Extrait de la séquence bien connue du taxi de (b) Flot optique estimé par la méthode de Horn et  
Hambourg Schunck



(c) Flot optique estimé avec une régularisation non linéaire

FIG. 3.35 – Effet de l'utilisation d'un terme de régularisation non linéaire sur une scène composée de plusieurs objets en mouvement. Résultats extraits de [WEICKERT1998] sur la séquence du taxi de Hambourg

étant tangent aux tissus, l'information récoltée est faible et de plus, la direction de la sonde ne permet pas au TDI de donner une estimation du déplacement radial.

### Adapter le terme de régularisation

Pour faciliter l'interprétation qualitative comme quantitative des champs de vitesses obtenus, le principal obstacle semble être la régularité du champ estimé. En effet, nous serions tentés d'effectuer une régularisation plus forte pour obtenir un champ plus régulier et en particulier pour compléter le champ estimé dans les zones latérales ainsi que nous l'avons fait dans le premier cas d'images synthétiques (figures 3.16 à 3.19). La conséquence de cette régularisation très forte est de diffuser de l'information aussi dans les zones où le champ est correctement estimé, mais où le déplacement est faible, ce qui est le cas dans les régions d'akinésie liées par exemple à un infarctus. Une des applications possibles de l'estimation que nous proposons serait de rendre possible la détection de zones du myocarde ischémiées où aucune contraction active ne se produit. Le champ de déplacement attendu est donc de nature différente dans ces zones et une régularisation trop forte pourrait faire disparaître ces variations. La méthode employée pour la régularisation du champ et le poids à accorder à cette régularisation sont donc des questions centrales pour améliorer cette estimation.

Une première possibilité serait d'utiliser un terme de régularisation non linéaire (Annexe A et section 3.1.2), ce qui autorise les champs de déplacement discontinus. La régularisation non linéaire correspond

à remplacer dans l'équation (3.26), le terme de diffusion linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \Delta \mathbf{v} \quad (3.30)$$

par un terme de diffusion non linéaire :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla \mathbf{v}|^2) \nabla \mathbf{v}) \quad (3.31)$$

où  $g$  est une fonction de diffusion, par exemple une de celles de la table A.1. Ce type de régularisation est très bien adapté pour estimer le mouvement de différents objets dans une scène comme le montre l'exemple de la figure 3.35 extraite de [WEICKERT1998]. Cette séquence montre une scène de rue avec différentes voitures en mouvement. La régularisation linéaire donne un champ de vitesses lisse, mais les bords entre le fond (immobile) et les objets en mouvement ne sont pas nets. Au contraire, avec la régularisation non linéaire, on identifie clairement chaque objet en mouvement. Cependant, ce type de régularisation ne permettra pas de compléter des zones où on ne dispose pas d'informations fiables. Au contraire une discontinuité sera créée entre les deux.

L'approche que nous avons proposée est une approche de type purement "traitement d'images". A partir des remarques précédentes, il semble indispensable d'utiliser de l'information *a priori* pour améliorer l'estimation du déplacement. Une telle information *a priori* peut être introduite grâce à une diffusion non homogène :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla \mathbf{v}|^2, I, x, y, \dots) \nabla \mathbf{v}) \quad (3.32)$$

où  $g$  ne dépend pas forcément du gradient de  $v$  mais des informations dont on dispose au point considéré.

Pour pouvoir utiliser une telle diffusion, il faudrait que la fonction  $g$  choisie dépende entre autres de la "confiance" que l'on fait dans l'estimation donnée par la combinaison du flot optique et du TDI. En rassemblant les remarques précédentes, un tel indice de confiance devrait prendre en compte les caractéristiques suivantes :

- le gradient régularisé de l'image. Si le gradient est presque nul, l'information fournie par le flot optique est peu fiable. La méthode de Lucas et Kanade par exemple fournit un indice de fiabilité du flot estimé qui pourrait être utilisé [LUCAS et KANADE1981].
- l'angle entre le gradient de l'image et la direction du champ TDI. Lorsque que les deux directions sont proches, on a perdu l'information dans la direction tangentielle.
- une information anatomique provenant par exemple d'une présegmentation permettant d'éviter la diffusion du champ en dehors du muscle myocardique.

Quelques soient les améliorations possibles, on ne pourra qu'interpoler ce qui se passe dans les zones où le tissu est tangent au faisceau ultrasonore. Il n'est pas possible de récupérer une information qui n'est pas là. Pour compenser ce problème, il faudrait utiliser un autre point de vue pour observer la même coupe. En prenant un autre point de vue, pour lequel les zones latérales seraient mieux placées par rapport à la sonde. Cependant, nous n'avons pas pu disposer de telles données au cours de ce travail.

### Utilisation de méthodes plus contraintes

L'irrégularité du champ de déplacement est aussi dû au fait que le nombre de degrés de liberté laissé au champ de déformation est probablement trop grand par rapport à l'interprétation et à l'analyse que l'on peut et que l'on souhaite en faire. Une régularisation importante serait apportée par un champ de transformation plus contraint. Contraindre le champ de déformation, c'est le modéliser. Il serait par exemple possible d'utiliser un modèle de mouvement comme celui de [ALLOUCHE *et al.*2001]. Une autre possibilité est de se placer dans le cadre des modèles déformables [PAPADEMETRIS *et al.*2001, MONTAGNAT *et al.*2003]. A notre connaissance, aucune de ces méthodes n'a été combinée avec du TDI. Dans [SÜHLING *et al.*2004], les auteurs ont utilisé un modèle de transformations localement affines à base de B-Splines dans le cadre de la méthode de Lucas et Kanade pour utiliser conjointement l'échographie classique et le TDI.

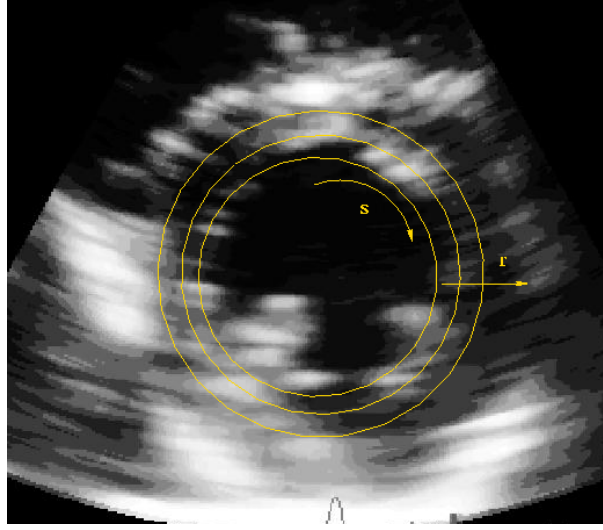


FIG. 3.36 – Paramétrisation possible d'une grille déformable pour le suivi dans une séquence d'échographie TDI.

Une approche plus simple pourrait aussi être envisagée, évitant une présegmentation ou des contraintes trop fortes sur les déformations, se plaçant dans une problématique de grille déformable. Cela revient à chercher à étendre une méthode de suivi dans les images TM [COHEN *et al.*1996, OHYAMA *et al.*2002, MOREAU *et al.*2001] aux séquences 2D+T. Pour étendre le suivi de  $n$  points d'un segment au cours de temps, on peut choisir quelques points répartis sur  $m$  courbes concentriques dans l'épaisseur du myocarde. On n'a alors pas besoin d'une segmentation très précise du myocarde qui n'est pas facile à obtenir dans les images échographiques. Les points peuvent alors être suivis comme dans les travaux sur les images TM (section 2.2.2) en imposant une régularité entre voisins. L'avantage par rapport au flot optique est tout d'abord un nombre de degrés de liberté moindre, mais aussi une régularisation plus forte et qui prend en compte du matériau suivi i.e. un tissu mou. Cependant, ce type d'approche pose le problème du choix des points suivis.

Un tel suivi pourrait se présenter de la manière suivante (Figure 3.36). Les courbes sont indexées par  $r$  variant de 1 à  $m$ , chacune est paramétrée de la même manière par le paramètre  $s$ . Elles sont suivies au cours du temps ( $1 \leq t \leq T$ ). Il faudrait faire évoluer le volume actif :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} x(r, s, t) \\ y(r, s, t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Une fonctionnelle prenant en compte un terme de régularité et deux termes d'attache aux données (constance de l'intensité dans l'image classique et TDI) tels que ceux proposés ci-dessous :

- Un terme de régularisation classique :

$$\begin{aligned} E_{reg}(\mathbf{Z}) = & \int \int \int \alpha (\|\mathbf{Z}_r(r, s, t)\|^2 + \|\mathbf{Z}_s(r, s, t)\|^2 + \|\mathbf{Z}_t(r, s, t)\|^2) \\ & + \beta (\|\mathbf{Z}_{rr}(r, s, t)\|^2 + \|\mathbf{Z}_{ss}(r, s, t)\|^2 + \|\mathbf{Z}_{tt}(r, s, t)\|^2 \\ & + 2\|\mathbf{Z}_{rs}(r, s, t)\|^2 + 2\|\mathbf{Z}_{rt}(r, s, t)\|^2 + 2\|\mathbf{Z}_{st}(r, s, t)\|^2). \end{aligned}$$

- Un premier terme d'attache aux données, la projection de la vitesse dans la direction de la sonde doit être égale à la vitesse donnée par l'image de Doppler tissulaire.

$$E_{TDI}(Y) = \int \int \int ((\mathbf{Z}(r, s, t+1) - \mathbf{Z}(r, s, t)) \cdot \frac{\vec{v}_{TDI}}{\|\vec{v}_{TDI}\|} (\mathbf{Z}(r, s, t)) - v_{TDI}(\mathbf{Z}(r, s, t)))^2.$$



- Enfin un terme d’attache à l’image échographique classique. L’intensité doit être à peu près constante le long de la courbe de suivi.

$$E_{gris}(Y) = \int \int \int \sum_{\vec{k} \in V_5} (I(\mathbf{Z}(r, s, t + 1) + \vec{k}, t) - I(\mathbf{Z}(r, s, t) + \vec{k}, t))^2$$

où  $V_5 = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times \{-2, -1, 0, 1, 2\} \times 0$ .

### Bilan et perspectives

Nous avons proposé une manière d’intégrer le Doppler tissulaire dans la méthode de Horn et Schunck pour l’estimation de la déformation cardiaque. Les résultats obtenus montrent l’effet régularisant du TDI mais montrent aussi que certains des inconvénients d’une méthode différentielle de calcul du flot optique sont toujours présents. En parallèle de notre approche, d’autres travaux ont aussi incorporé le TDI dans des méthodes de flot optique, pour l’estimation de vitesse et pour le suivi, [SÜHLING *et al.*2004], mais aussi par exemple [MALPICA *et al.*2003]. Dans ce dernier cas, la problématique est différente, il s’agit d’améliorer la modalité TM (1D) en effectuant le suivi du segment sélectionné au départ par le médecin, cependant la méthodologie est la même. Les auteurs allient TDI et image classique dans le cadre de l’estimation du flot optique de [COHEN et DINSTEIN2002].

Les séquences 2D sont acquises dans un plan fixé. Les mouvements de translation et de rotation dans la direction de la sonde ne sont donc pas perçus dans cette modalité. Pour pouvoir prétendre à une étude exhaustive du mouvement le cadre idéal est une image tridimensionnelle (quadrimensionnelle si on prend en compte la dimension temporelle). Jusqu’à récemment, les échographies tridimensionnelles n’étaient obtenues que par reconstruction à partir d’une série d’images 2D. Pour obtenir la troisième dimension, on peut soit effectuer une translation (le plus souvent en main libre), soit une rotation autour d’un axe (sonde rotationnelle) ou balayage (sonde éventail). Quel que soit le mode utilisé, il y a toujours besoin de faire une interpolation pour obtenir une image en coordonnées cartésiennes [SERMESANT2003, MONTAGNAT *et al.*2003] et la densité des mesures à partir desquelles cette interpolation est effectuée n’est pas constante dans l’image. De plus, le temps d’acquisition d’une coupe est de l’ordre de quelques millisecondes, le cœur peut être supposé immobile pendant ce laps de temps. Mais pour obtenir une image 3D, il faut acquérir au moins une vingtaine de coupes, ce qui prend quasiment une seconde en prenant en compte le temps de rotation de la sonde. Sur une telle durée, le mouvement du cœur n’est plus négligeable. L’acquisition se déroule alors sur plusieurs cycles et les saisies sont synchronisées sur l’électrocardiogramme. Depuis novembre 2002, Philips Medical System<sup>1</sup> a commercialisé une sonde basée non plus sur une barrette de capteur mais sur une matrice qui permet d’obtenir une échographie 3D en temps réel [JENKINS *et al.*2005]. De nombreuses études récentes ont comparé les échographie 3D temps réel et les échographies 2D [GUTIÉRREZ-CHICO *et al.*2005, MATSUMURA *et al.*2005]. Ainsi [GUTIÉRREZ-CHICO *et al.*2005] compare le calcul du volume du ventricule gauche et de la fraction d’éjection à partir d’échocardiographies 2D, d’IRM et d’échocardiographies 3D. Les auteurs de [GUTIÉRREZ-CHICO *et al.*2005] obtiennent avec l’échocardiographie 3D une précision comparable à celle obtenue par les IRM tandis que les mesures effectuées à partir d’échographies 2D étaient biaisées. L’échographie 3D temps réel permet alors d’obtenir plus rapidement (sur un seul cycle et sans reconstruction) des séquences 3D.

La plupart des travaux concernant l’estimation de la déformation cardiaque à partir d’échographie classique que nous avons décrits dans les sections 3.1.1 à 3.1.3 ont été appliqués en dimension 3. Nous n’avons pas pu étendre la méthode que nous avons présentée en dimension 3 car le TDI en dimension 3 n’était pas encore disponible. L’extension de telles approches en 3 dimensions sera donc indispensable quand le TDI en 3D sera disponible.

En combinant la méthode de Horn et Schunck pour l’estimation de la déformation de la paroi cardiaque avec le TDI, nous avons proposé une approche de type “traitement d’image” uniquement. Nous pensons que pour aller plus loin, il est nécessaire d’incorporer des informations *a priori* sur l’anatomie et sur les déformations recherchées. Nous avons donné quelques exemples au début de cette section. Ainsi, nous avons

<sup>1</sup>[http://www.medical.philips.com/main/products/ultrasound/products/technology/live\\_3d.html](http://www.medical.philips.com/main/products/ultrasound/products/technology/live_3d.html)

suggéré un indice de confiance qui rende compte de la complémentarité ou non des champs de vecteurs TDI et flot optique. De plus, utiliser des informations anatomiques est indispensable pour distinguer les zones où le tissu réfléchit mal le faisceau ultrasonore des cavités. Enfin, il serait intéressant de restreindre la classe de déformations estimées pour que ces déformations correspondent bien à des déformations plausibles du muscle cardiaque. Ces deux dernières informations sont très naturellement utilisées dans les méthodes utilisant des modèles déformables, que ce soient des modèles passifs ([PAPADEMETRIS *et al.*2001]) ou des modèles actifs ([SERMESANT2003]).

## 3.2 Analyse de déformations

Les résultats de la section 3.1 montrent qu'il est difficile d'analyser qualitativement une série temporelle de champ de vitesses. Dans cette section, nous nous intéressons à la segmentation ou classification du myocarde en fonction du champ de vitesses estimé. Dans la première partie (section 3.2.1), nous décrivons quelques méthodes existantes de segmentation d'images multidimensionnelles et en particulier des méthodes utilisées pour segmenter des champs de vecteurs. Dans la deuxième partie, nous nous intéresserons à l'application d'une de ces méthodes, utilisant une méthode de segmentation par ensembles de niveau, aux champs obtenus section 3.1.

### 3.2.1 Segmentation d'images multidimensionnelles et de champs de vecteurs

Segmenter une image, c'est la décomposer en régions homogènes dans un sens précisé par l'application envisagée. Les problématiques de la segmentation d'objets dans une image peuvent être associées au problème de la détection de contours lorsque ces contours sont des courbes ou des surfaces séparant des régions homogènes. Les problématiques de la segmentation d'objets dans une image peuvent être associées au problème de la détection de contours lorsque ces contours sont des courbes ou des surfaces séparant des régions homogènes. Avant de présenter des méthodes permettant de segmenter des images multidimensionnelles et des champs de vecteurs, nous présentons quelques méthodes de segmentation d'images qui en sont à l'origine.

Les modèles déformables, dont la première étape fut les "snakes" de [KASS *et al.*1988], consistent à déformer des contours pour qu'ils se positionnent aux frontières des objets que l'on cherche à identifier. Dans sa thèse, [MONTAGNAT1999] présente et classe ce type de modèles. Après les contours explicites (les "snakes"), des modèles paramétrés (utilisant des splines ou des superquadriques [BARDINET *et al.*1996]) et discrets (triangulation, maillages simplexes [DELINGETTE1999]) ont été appliqués avec succès à la segmentation de structures ou d'objets. Les méthodes par ensembles de niveau introduites par [OSHER et SETHIAN1988] passent par une représentation implicite des contours, supprimant l'influence de la paramétrisation des contours et permettant des changements de topologie pendant l'évolution du contour.

Une autre classe de méthodes, que nous n'avons pas utilisées pour ce travail est basée sur des détecteurs de bords (calcul de dérivées) comme le filtre de Canny[CANNY1983] ou le filtre de Canny-Deriche [DERICHE1987] ou des seuillages. Les contours obtenus ne sont généralement pas fins et les contours d'un objet ne forment pas une courbe fermée et connexe. Par seuillage, on n'obtient généralement pas une composante connexe par objet. Il faut ensuite appliquer des opérations de morphologie mathématique ou de chaînages des contours comme par exemple dans la méthode de segmentation d'images présentée dans [NITZBERG *et al.*1993]).

### Contours actifs et Modèles déformables

Historiquement, les premiers modèles déformables proposés sont les "snakes" introduits dans les travaux de [KASS *et al.*1988]. Dans ces travaux, un "snake" est une courbe plane  $\mathcal{C}$  paramétrée :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ r &\longrightarrow \mathbf{v}(r) = (x(r), y(r)) \end{aligned}$$

Cette courbe est ensuite déformée pour se rapprocher des contours des objets à détecter. Cette déformation est obtenue en minimisant une fonctionnelle bien choisie aussi appelée énergie de déformation. Cette fonctionnelle est composée de deux termes, un terme contrôlant certaines caractéristiques de la courbe elle-même (sa régularité par exemple) et un terme attirant la courbe vers les bords des objets (détectés par exemple par un filtre de Canny). Ce qui donne avec une énergie de régularisation d'ordre 2 :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} w_1 |\mathbf{v}'(r)|^2 + w_2 |\mathbf{v}''(r)|^2 + P(\mathbf{v}(r)) dr$$

où  $P$  désigne le terme d'attraction aux données. Dans [KASS *et al.*1988], le terme d'attraction aux bords proposé est

$$P(\mathbf{v}) = -|\nabla I(\mathbf{v})|^2. \quad (3.33)$$

L'énergie proposée possède plusieurs minima locaux. La minimisation est effectuée en résolvant les équations d'Euler-Lagrange associée. On pose  $F(\mathbf{v}) = -\nabla P(\mathbf{v})$ ,  $F$  est appelée force image. Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$-(w_1 \mathbf{v}')' + (w_2 \mathbf{v}'')'' = F(\mathbf{v})$$

Si l'on note  $F_{\text{int}}(\mathbf{v}) = -(w_1 \mathbf{v}')' + (w_2 \mathbf{v}'')''$  les forces "internes" du contour, il s'agit de résoudre l'équation d'équilibre

$$F_{\text{int}}(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}) = 0$$

Pour résoudre ce type d'équations, la stratégie utilisée est d'introduire un temps artificiel  $t$  et de faire évoluer un contour suivant l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = F_{\text{int}}(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}) \quad (3.34)$$

Avec une minimisation par descente de gradient comme celle-ci, le contour peut se retrouver piégé dans un minimum local. Le résultat est donc fortement dépendant de l'initialisation du contour actif. En outre, l'utilisation de la force image proposée par [KASS *et al.*1988] (équation (3.33)) impose le choix d'un contour suffisamment proche du contour recherché. En effet, lorsque le potentiel  $P$  est nul, le contour actif se rétracte sur lui-même. [COHEN1991] propose une force appelée force ballon. Il s'agit de remplacer la force image  $F$  de l'équation (3.34) par la force suivante :

$$F(v) = k_1 \mathbf{n}(r) - k \frac{\nabla P}{|\nabla P|}$$

où  $k$  et  $k_1$  sont deux coefficients positifs,  $\mathbf{n}$  le vecteur normal à la courbe unitaire. L'ajout du terme  $k_1 \mathbf{n}$  permet au contour actif de se dilater jusqu'à ce qu'il rencontre un bord de l'image. Dans ce cas, le contour qui constitue l'initialisation doit se trouver entièrement à l'intérieur de l'objet que l'on cherche à segmenter et les coefficients  $k_1$  et  $k$  doivent être choisis du même ordre de grandeur avec  $k$  légèrement supérieur à  $k_1$  pour permettre aux bords de l'image d'arrêter le contour actif.

Une autre option est considérée par les auteurs de [XU et PRINCE1998]. Ils proposent de remplacer la force externe  $F$  par un champ  $\mathbf{v}$  appelé "gradient vector flow" (GVF)<sup>2</sup>. Le GVF est un champ de vecteur  $\mathbf{v}(x, y) = (v^1(x, y), v^2(x, y))$  minimisant la fonctionnelle :

$$\mathcal{E}(\mathbf{v}) = \int \int \mu((v_x^1)^2 + (v_y^1)^2 + (v_x^2)^2 + (v_y^2)^2) + \|\nabla \mathbf{I}\|^2 \|\mathbf{v} - \nabla \mathbf{I}\|^2 dx dy$$

La fonctionnelle  $\mathcal{E}$  comprend un terme de régularisation et un terme d'attache aux données  $\|\nabla \mathbf{I}\|^2 \|\mathbf{v} - \nabla \mathbf{I}\|^2$ . Le terme  $\|\mathbf{v} - \nabla \mathbf{I}\|^2$  signifie que le champ  $\mathbf{v}$  est proche du gradient de l'image. Le terme  $\|\nabla \mathbf{I}\|^2$  ne dépend pas

<sup>2</sup><http://iacl.ece.jhu.edu/projects/gvf/>

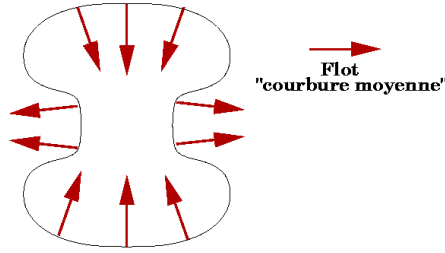


FIG. 3.37 – Exemple de l'évolution d'une courbe par le mouvement par courbure moyenne. Les flèches rouges indiquent la direction du mouvement par courbure moyenne.

de  $\mathbf{v}$ , c'est donc plutôt un terme de pondération entre le terme de régularisation et le terme d'attache aux données, et ce terme de pondération dépend du gradient de l'image. Lorsque le gradient est important, c'est le terme d'attache aux données qui est le plus important alors que dans les zones d'intensité constante ou presque, le gradient est faible et le terme de régularisation est alors prépondérant. Ainsi le GVF correspond à peu près au gradient de l'image au niveau des bords. Et plutôt que d'avoir un champ de vecteurs nuls dans les zones unies, la diminution du poids du terme d'attache aux données permet d'obtenir un champ qui attire le contour actif vers les bords, même loin de ceux ci. L'utilisation du GVF donne alors une très grande flexibilité pour l'initialisation. Enfin, le contour actif converge vers les bords de l'image même lorsque le bord présente des zones convexes et des zones concaves. Au contraire des snakes classiques, la force image appelée GVF ne peut pas se mettre sous la forme de la dérivée d'un potentiel.

L'utilisation pour la recherche de contours d'une équation aux dérivées partielles du type :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = F \mathbf{n}$$

(où  $\mathcal{C}$  représente la courbe,  $F$  la force qui fait évoluer la courbe et  $\mathbf{n}$  le vecteur unitaire normal intérieur à la courbe) a été introduite entre autre dans [CASELLES *et al.*1993].

L'un des exemples les plus simples de fonction  $F$  que l'on peut prendre est  $F = \kappa$  où  $\kappa$  désigne la courbure de  $\mathcal{C}$ . L'équation d'évolution

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = \kappa \mathbf{n} \quad (3.35)$$

décrit alors ce qu'on appelle le mouvement par courbure moyenne plus connu sous son appellation anglaise, *mean curvature flow*. L'effet sur une courbe de ce mouvement est de déplacer chaque point de la courbe dans la direction normale à la courbe dans un sens qui dépend du signe de la courbure. Ce mouvement est illustré par la figure 3.37 et consiste à régulariser la courbe, la rapprochant ainsi d'un cercle qui se rétracte.

Pour attirer des contours vers les bords d'une image, la force d'évolution  $F$  est généralement composée d'un terme de régularisation (équation (3.35)) et d'un terme d'attraction aux bords. Ainsi, dans [CASELLES *et al.*1997], les auteurs proposent les contours actifs géodésiques. Les auteurs démontrent que le minimum de l'énergie classique des contours actifs

$$E(\mathcal{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(r)|^2 dr - \lambda \int_0^1 g(|\nabla I(\mathcal{C}(r))|) dr$$

( $g$  désigne un détecteur de bord comme ceux décrits dans l'annexe A) est donné par une courbe géodésique dans un espace Riemannien induit par l'image  $I$ . Le contour actif géodésiques doit alors suivre l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = g(I) \kappa \mathbf{n} - (\nabla g \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (3.36)$$

avec  $\kappa$  la courbure euclidienne de la courbe et  $\mathbf{n}$  la normale unitaire intérieure à  $\mathcal{C}$  comme ci-dessus.

### Ensembles de niveau

La résolution d'équation d'évolution de courbes par ensembles de niveau, plus connus sous le nom de level sets a été introduite en premier lieu par Sethian [OSHER et SETHIAN1988] dans le cadre de l'étude d'évolution d'interfaces. Pour avoir une vue d'ensemble des méthodes par ensembles de niveau, le lecteur pourra se référer à [SETHIAN1997, SETHIAN1999].

On considère une courbe  $\mathcal{C}$  qui évolue dans la direction normale à la courbe avec la vitesse  $F$ . L'idée de Sethian est de considérer que le contour qui évolue  $\mathcal{C}(t)$  est l'ensemble de niveau 0 d'une fonction  $\varphi$ . Ainsi,

$$\varphi(\mathcal{C}(t), t) = 0 \quad (3.37)$$

La figure 3.38 illustre le passage du problème d'évolution de courbe au problème de l'évolution d'une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Dans le cas de la figure 3.38, la fonction  $\varphi$  est la distance signée au contour  $\mathcal{C}$ .

En dérivant l'équation (3.37) par rapport au temps, on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{C}(t)}{\partial t} \nabla \varphi(\mathcal{C}(t), t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathcal{C}(t), t) = 0 \quad (3.38)$$

Or la normale  $\mathbf{n}$  est donnée par  $\nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ ; de plus  $F$  est la vitesse d'évolution du front dans la direction normale, donc

$$\frac{\partial \mathcal{C}(t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} = F \quad (3.39)$$

ce qui donne, en remplaçant dans l'équation (3.38), l'équation sur la fonction  $\varphi$  des ensembles de niveau :

$$\varphi_t + F |\nabla \varphi| = 0 \quad (3.40)$$

étant donnée la condition initiale  $\varphi(\mathbf{x}, 0)$ . L'équation (3.40) est bien définie uniquement sur la courbe  $\mathcal{C}$ . Pour que l'équation (3.40) permette réellement de faire évoluer la fonction  $\varphi$ , il faut donc étendre  $F$  sur tout l'espace où la courbe peut évoluer.

Dans le cas du mouvement par courbure moyenne (équation (3.35)), il est facile de trouver un moyen de généraliser la force  $F = \kappa$ . En effet, la courbure  $\kappa$  est donnée par  $\kappa = \text{div}(\nabla \varphi / |\nabla \varphi|)$ . Ce qui donne l'équation d'évolution

$$\varphi_t = \text{div} \left( \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) |\nabla \varphi|$$

Quand  $F$  dépend uniquement de la courbure, étendre la fonction  $F$  est facile

Un deuxième exemple est celui des contours actifs géodésiques [CASELLES *et al.*1997] (Equation (3.36)) qui dans le cadre des ensembles de niveau donne pour la fonction  $\varphi$  l'équation d'évolution :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = |\nabla \varphi| \text{div} \left( g(I) \frac{\nabla \varphi}{|\nabla \varphi|} \right) + cg(I) |\nabla \varphi|$$

Le problème général de l'extension de la force  $F$  n'a pas toujours une solution naturelle et dans ce cas, il s'avère difficile. On trouvera quelques solutions à ce problème dans [ADALSTEINSSON et SETHIAN1999].

Utiliser les fonctions d'ensembles de niveau a l'avantage d'être indépendant de toute paramétrisation par une représentation implicite, la courbe de niveau à un instant  $t$  est donnée par l'ensemble de niveau 0 de  $\varphi : \mathcal{C}(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 | \varphi(\mathbf{x}, t) = 0\}$ . Cette formulation est aussi souvent utilisée car elle permet de gérer de manière robuste les changements de topologie de la courbe comme le montre la figure 3.39 extraite de [SETHIAN1997]. Passer d'un contour à deux composantes connexes à un contour constitué d'une seule composante connexe n'engendre aucune complication complémentaire, ce qui n'est pas possible avec des contours actifs habituels. Grâce à cette propriété, l'utilisation des méthodes par ensembles de niveau permet une gestion satisfaisante et stable des collisions de fronts. Enfin, l'utilisation de fonctions "level sets" est aussi possible pour suivre en dimension 3 l'évolution d'une surface.

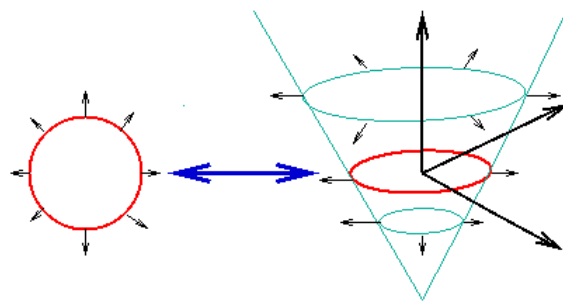


FIG. 3.38 – Transformation du problème d'évolution d'une courbe en un problème d'ensembles de niveau. A gauche de la figure un cercle qui évolue suivant les flèches noires. A droite, une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant l'équation (3.37). Le cercle est son ensemble de niveau 0. Extrait de <http://math.berkeley.edu/sethian/>

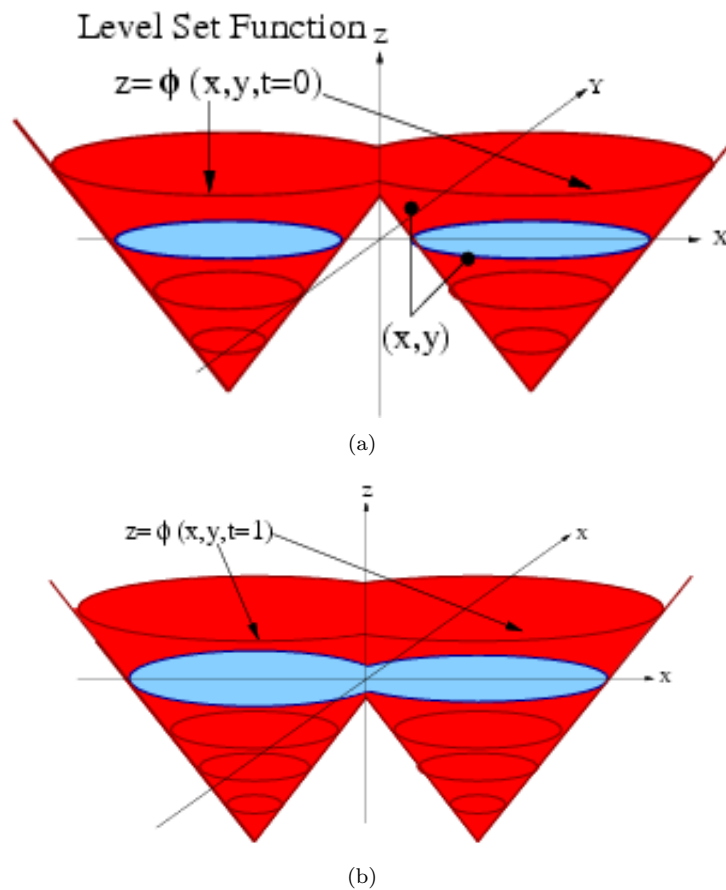


FIG. 3.39 – Robustesse des méthodes par ensembles de niveau aux changements de topologie du front. Extrait de l'article de l'American Scientist [SETHIAN1997]

Le passage d'un problème d'évolution d'une courbe 1D à l'évolution d'une surface 2D semble un prix à payer très lourd en temps de calcul. Ce qui rend ces méthodes très efficaces, c'est qu'il est possible de réduire la complexité du problème en se restreignant au suivi des ensembles de niveau proche du niveau 0, qui est celui qui nous intéresse. Cette méthode, analysée en détail dans [ADALSTEINSSON et SETHIAN1995], est appelée "narrow band".

### Méthodes de segmentation et de classification à base de régions

Les méthodes proposées jusque là sont basées sur les contours et sur des informations de bord liés au gradient de l'image.

Dans une classe de méthode on peut rassembler les méthodes par croissance ou fusion de régions. Le but est de diviser un domaine  $\Omega$  en  $K$  régions qui constituent une partition de  $\Omega$  et telles que l'image soit homogène sur chacune de ces régions. Les méthodes par fusion de régions fonctionnent en combinant des régions plus petites suivant un test statistique de similarité. Les méthodes par croissance de régions peuvent être considérées comme un cas particulier de la méthode précédente où on ajoute à la région en train de croître un pixel à la fois.

Des méthodes basées à la fois sur les contours et l'homogénéité des régions permettent d'utiliser ces deux types d'information, comme la minimisation de la fonctionnelle de Mumford et Shah. L'idée de Mumford et Shah [MUMFORD et SHAH1989] est d'effectuer simultanément une segmentation et une restauration de l'image. Soit  $I$  l'image étudiée, l'idée est de chercher une fonction  $u$  continue par morceaux qui approxime au mieux l'image  $I$ . En autorisant les discontinuités de  $u$ , on s'autorise des bords dans l'image. La fonctionnelle définie par Mumford et Shah prend en argument non seulement la fonction  $u$ , mais aussi l'ensemble des discontinuités  $\Gamma$  de la fonction  $u$ , c'est-à-dire les bords de l'image. La fonctionnelle de Mumford et Shah est alors :

$$E_{MS}(u, \Gamma) = \underbrace{\mu \int_{\Omega} (u - I)^2 dx dy}_{\text{ATTACHE AUX DONNEES}} + \underbrace{\int_{\Omega \setminus \Gamma} |\nabla u|^2 dx dy}_{\text{REGULARITE EN DEHORS DES DISCONTINUITES}} + \underbrace{\alpha \mathcal{H}^1(\Gamma)}_{\text{REGULARITE DES FRONTIERES}} \quad (3.41)$$

où  $\mu$  et  $\alpha$  sont des coefficients positifs, et  $\mathcal{H}^1(\Gamma)$  désigne la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de l'ensemble  $\Gamma$  des singularités. Pour simplifier les notations, nous noterons  $|\Gamma| = \mathcal{H}^1(\Gamma)$ . Une fonctionnelle équivalente est proposée dans [BLAKE et ZISSERMAN1987] (the weak membrane model).

Une simplification de la fonctionnelle (3.41) est possible lorsqu'on s'intéresse uniquement au problème de segmentation. On considère pour cela que l'on recherche une fonction  $u$  constante par morceaux. La régularité en dehors des discontinuités est alors vérifiée par construction. La fonction  $u$  est alors constante par morceaux. Appelons  $R_i$  ces morceaux et  $u_i$  les valeurs de  $u$  sur chacune de ces régions. Alors, l'énergie de Mumford et Shah (équation(3.41)) devient :

$$E_{MS}(u_1, \dots, u_K, \Gamma) = \mu \sum_{i=1}^K \int_{R_i} (u_i - I)^2 dx dy + \nu |\Gamma| \quad (3.42)$$

Pour  $\Gamma$  fixé, on voit que  $E_{MS}$  est minimum lorsque

$$u_i = \text{moy}_{R_i} I$$

Ce qui permet de réduire la minimisation de  $E_{MS}(u_1, \dots, u_K, \Gamma)$  à une minimisation en fonction des bords  $\Gamma$  des régions. La minimisation de telles fonctionnelles peut s'avérer difficile en pratique.

A partir de cette fonctionnelle, différents travaux ont proposé des méthodes pour trouver le minimum de ce type de fonctionnelles issues du problème de Mumford et Shah en utilisant les ensembles de niveau. Les

premières propositions se sont intéressée en une segmentation en deux régions, le plus souvent une région d'intérêt et un fond [CHAN et VESE1999, PARAGIOS et DERICHE1999, AMADIEU *et al.*2000]

La méthode de [CHAN et VESE1999] intitulée contours actifs sans bords se présente de la manière suivante. Il s'agit de segmenter un objet sur un fond. Les auteurs partent donc dans le cadre de Mumford et Shah simplifié ci-dessus. Ils recherchent une fonction constante par morceaux avec deux morceaux différents et donc une frontière  $\mathcal{C}$  entre les deux régions. On recherche donc  $c_1$  et  $c_2$  les deux valeurs constantes et la frontière  $\mathcal{C}$  entre les deux régions minimisant :

$$F(\mathcal{C}, c_1, c_2) = \lambda_1 \int_{\text{int}(\mathcal{C})} |I - c_1|^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\text{ext}(\mathcal{C})} |I - c_2|^2 dx dy + \mu \text{longueur}(\mathcal{C}) + \nu \text{aire}(\text{int}(\mathcal{C}))$$

Les auteurs introduisent alors la fonction  $\varphi$  associée à la courbe  $\mathcal{C}$  telles que  $\mathcal{C} = \{(x, y) \in \Omega | \varphi(x, y) = 0\}$ , que  $\varphi$  soit positive à l'intérieur de  $\mathcal{C}$  et négative à l'extérieur. On note  $\delta$  et  $H$  (Figure 3.41) respectivement les distributions de Dirac et Heaviside en 0 :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la distribution de Dirac  $\delta$  est la dérivée au sens des distributions de la fonction de Heaviside. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{longueur}(\mathcal{C}) &= \int_{\Omega} \delta(\varphi) |\nabla \varphi| dx dy \\ \text{aire}(\text{int}(\mathcal{C})) &= \int_{\Omega} H(\varphi) dx dy \\ \int_{\text{int}(\mathcal{C})} |I - c_1|^2 dx dy &= \int_{\Omega} H(\varphi) |I - c_1|^2 dx dy \\ \int_{\text{ext}(\mathcal{C})} |I - c_2|^2 dx dy &= \int_{\Omega} (1 - H(\varphi)) |I - c_2|^2 dx dy \end{aligned}$$

Alors l'énergie  $F(\mathcal{C}, c_1, c_2)$  devient :

$$\begin{aligned} F(\varphi, c_1, c_2) &= \lambda_1 \int_{\Omega} H(\varphi) |I - c_1|^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\Omega} (1 - H(\varphi)) |I - c_2|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega} \delta(\varphi) |\nabla \varphi| dx dy \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} H(\varphi) dx dy \end{aligned}$$

La minimisation est effectuée

1. selon  $c_1$  et  $c_2$  à  $\varphi$  fixé
2. puis selon  $\varphi$  à  $c_1$  et  $c_2$  fixés

La première partie de la minimisation s'effectue en moyennant  $u_0$  sur  $\{\varphi \geq 0\}$  pour  $c_1$  et sur  $\{\varphi \leq 0\}$  pour  $c_2$ . Pour la deuxième partie,  $H$  et  $\delta$  sont tout d'abord remplacés par des approximations  $C^\infty$ . Puis, l'équation d'Euler-Lagrange est écrite et un temps artificiel est introduit pour résoudre itérativement l'équation obtenue.

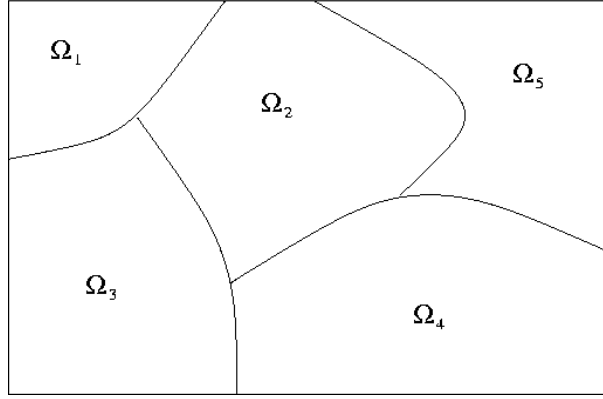
La segmentation en plus de deux régions pose un sérieux problème de représentation des régions par des fonctions ensembles de niveau. L'idée la plus naturelle est de choisir une fonction par région recherchée, mais il faut alors gérer les intersections [SAMSON *et al.*2000b, PARAGIOS et DERICHE2000]. D'autres approches proposent d'utiliser une représentation par ensembles de niveau où les niveaux sont naturellement disjoints, par exemple dans [YEZZI *et al.*2002], mais les auteurs se limitent à trois régions et [VESE et CHAN2002].

### 3.2.2 Classification d'images par la méthode de [Samson *et al.*1999]

Soit  $I$  une image :

$$I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



FIG. 3.40 – Partition d'un ensemble  $\Omega$ 

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est le domaine de définition de l'image  $I$ . L'objectif de [SAMSON *et al.*1999, SAMSON *et al.*2000b] est de décomposer le domaine  $\Omega$  de l'image en  $K$  régions homogènes au sens que sur une région  $R$  fixée,

$$I|_R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

où  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  est une loi normale de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ .

### Images unidimensionnelles : $n = 1$

Soit  $I$  une image :

$$I : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

Le but de [SAMSON *et al.*1999, SAMSON *et al.*2000b] est donc de partitionner le domaine  $\Omega$  de l'image en  $K$  régions  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq K}$  vérifiant les propriétés suivantes :

1. Bien évidemment, elles doivent former une partition :

$$\Omega = \cup_{i=1}^k \Omega_i \tag{3.43}$$

et

$$\forall i, \mathring{\Omega}_i \cap_{i \neq j} \mathring{\Omega}_j = \emptyset. \tag{3.44}$$

2. Les régions doivent être homogènes i.e.

$$I|_{\Omega_i} \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i) \tag{3.45}$$

3. Enfin, la partition doit être régulière. Cette régularité peut être obtenue en recherchant des bords des régions  $\Omega_i$  de longueur minimale et parfois aussi en recherchant la maximisation de l'aire des régions. Notons alors la frontière d'une région  $\Omega_i$ ,  $\partial\Omega_i$ . Pour un ensemble  $\Gamma$ , on note  $|\Gamma| = \mathcal{H}^1(\Gamma)$ , la mesure de Hausdorff unidimensionnelle de cet ensemble. Avec ces notations, la régularité de la partition est obtenue par la minimisation de

$$\sum_i |\partial\Omega_i| \tag{3.46}$$

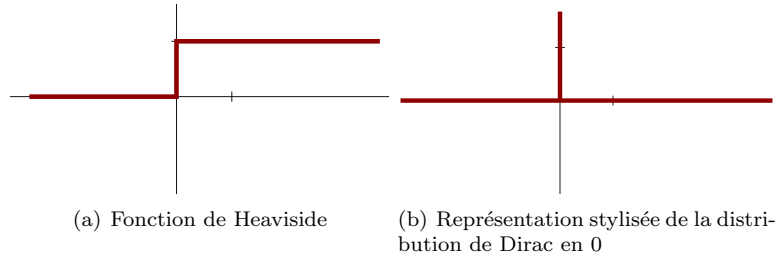


FIG. 3.41 – Représentation de la fonction de Heaviside et de la distribution de Dirac

Il s'agit maintenant de formuler le problème par ensembles de niveau. A chaque région  $\Omega_i$  de la partition, on associe une fonction  $\varphi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi_i(x) \begin{cases} > 0 & \text{si } x \in \Omega_i, \\ = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega_i, \\ < 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors :

$$\Omega_i = \{x \in \Omega \mid H(\varphi_i(x, y)) = 1\} \quad (3.47)$$

$$\partial\Omega_i = \{x \in \Omega \mid \delta(\varphi_i(x, y)) = 0\} \quad (3.48)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} H(\varphi_i) f(x, y) dx dy &= \int_{\Omega_i} f(x, y) dx dy \\ \int_{\Omega} \delta(\varphi_i) f(x, y) dx dy &= \int_{\Gamma_i} f(x, y) dx dy \\ \int_{\Omega} \delta(\varphi_i) |\nabla \varphi_i| dx dy &= |\partial\Omega_i| \end{aligned} \quad (3.49)$$

Les conditions ci-dessus (équations (3.43), (3.44), (3.45), (3.46)) peuvent alors se traduire chacune par la minimisation d'une énergie.

1. En utilisant la relation (3.49), minimiser la somme (3.46) est équivalent à minimiser :

$$F^1(\varphi_1, \dots, \varphi_K) = \sum_{i=1}^K \int_{\Omega} \delta(\varphi_i) |\nabla \varphi_i| dx dy \quad (3.50)$$

2. Pour exprimer l'équation (3.45), il est classique d'utiliser la minimisation de :

$$\sum_{i=1}^K \int_{\Omega_i} \frac{(I - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx dy$$

Ce qui en utilisant la fonction de Heaviside s'écrit :

$$F^2(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H(\varphi_i) \frac{(I - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx dy \quad (3.51)$$

Les coefficients  $e_i$  permettent alors si nécessaire de donner des poids différents pour les différentes régions de la partition.

3. Pour finir, il faut garantir que  $(\Omega_i)_{1 \leq i \leq K}$  est bien une partition. Pour cela, [SAMSON *et al.*1999, SAMSON *et al.*2000b] proposent la fonctionnelle suivante :

$$F^3(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^K H(\varphi_i) - 1 \right)^2 dx dy \quad (3.52)$$

La minimisation de la fonctionnelle (3.52) permet de pénaliser les points non classifiés et le chevauchement de régions. En effet, si un point  $(x, y)$  n'appartient à aucune région,  $(\sum_{i=1}^K H(\varphi_i) - 1)^2 = 1$ . Si  $(x, y)$  appartient à plus d'une région,  $\sum_{i=1}^K H(\varphi_i) \geq 2$  et donc  $(\sum_{i=1}^K H(\varphi_i) - 1)^2 \geq 1$ . Par contre, si le point  $x$  n'appartient qu'à une seule région,  $(\sum_{i=1}^K H(\varphi_i) - 1)^2 = 0$ . Ainsi, en minimisant  $F^3$ , on pénalise les points non classifiés et le chevauchement de régions mais on ne peut pas garantir que les  $\Omega_i$  forment strictement une partition.

Bien sûr, il n'est pas possible de minimiser directement l'énergie  $F = F^1 + F^2 + F^3$  avec les méthodes connues à cause de l'apparition de la distribution de Dirac et de la fonction de Heaviside. La solution adoptée généralement est alors d'utiliser des approximations comme c'est aussi le cas dans [CHAN et VESE1999].

L'approximation choisie pour la masse de Dirac est une fonction continue à support compact :

$$\delta_{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}(1 + \cos(\frac{\pi s}{\alpha})) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |s| > \alpha \end{cases}$$

Pour la fonction de Heaviside, l'approximation choisie est la fonction  $\mathcal{C}^1$  à support compact :

$$H_{\alpha}(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \frac{s}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin(\frac{\pi s}{\alpha})) & \text{si } |s| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } s > \alpha \\ 0 & \text{si } s < -\alpha \end{cases}$$

Ces deux approximations sont représentées Figure 3.42 pour quelques valeurs de  $\alpha$ . On remarque que ces approximations ont été choisies de telle sorte que la dérivée de la fonction  $H_{\alpha}$  est la dérivée de l'approximation de la distribution de Dirac  $\delta_{\alpha}$ . De plus, lorsque  $\alpha$  tend vers  $0^+$ ,  $\delta_{\alpha}$  tend, au sens des distributions, vers la distribution de Dirac et de même  $H_{\alpha}$  tend, au sens des distributions, vers la fonction de Heaviside. En conséquence,

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \{x \in \Omega \mid \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} H_{\alpha}(\varphi_i(x, y)) = 1\} \\ \partial\Omega_i &= \{x \in \Omega \mid \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \delta_{\alpha}(\varphi_i(x, y)) = 0\} \end{aligned}$$

**Proposition 3.5** *Avec les notations ci-dessus,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\varphi_i) |\nabla \varphi_i| dx dy = |\partial\Omega_i|.$$

Cette proposition est un corollaire de la formule de la Coaire [EVANS et GARIEPY1992] et est démontré précisément dans [SAMSON *et al.*1999].

**Théorème 3.2** Formule de la Coaire

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne et  $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} g(\mathbf{x}) |\nabla f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}} \left[ \int_{f=\rho} g(x) ds \right] d\rho$$

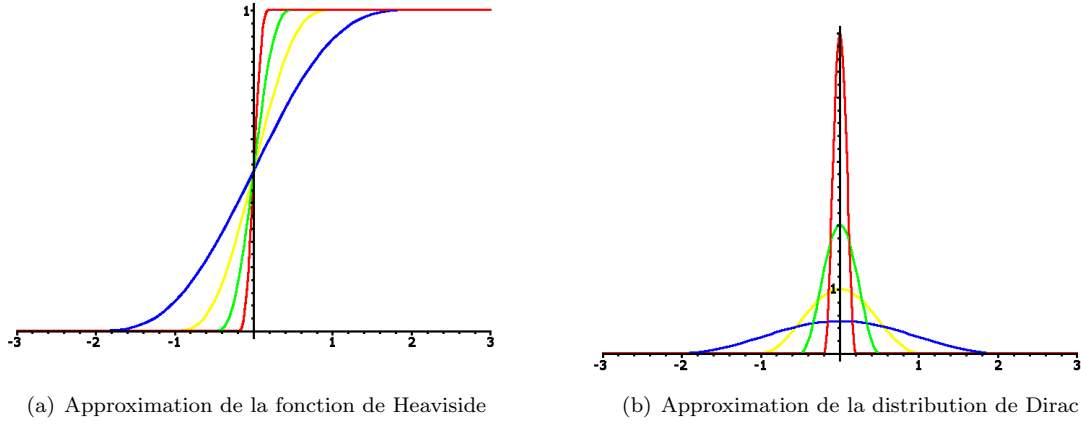


FIG. 3.42 – Représentation graphique des fonctions  $H_\alpha$  et  $\delta_\alpha$  pour différentes valeurs de  $\alpha$ .  $\alpha = 2$  (en bleu),  $\alpha = 1$  (en jaune);  $\alpha = 0.5$  (en vert) et  $\alpha = 0.2$  (en rouge).

En remplaçant  $H$  par  $H_\alpha$  et  $\delta$  par  $\delta_\alpha$  dans les fonctionnelles (3.50), (3.51) et (3.52) et en les rassemblant, on obtient la fonctionnelle globale à minimiser :

$$\begin{aligned}
 F_\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_K) = & \underbrace{\gamma \sum_{i=1}^K \int_{\Omega} \delta(\varphi_i) |\nabla \varphi_i| dx dy}_{\text{REGULARITE}} + \underbrace{\sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H(\varphi_i) \frac{(I - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} dx dy}_{\text{ATTACHE AUX DONNEES}} \\
 & + \underbrace{\frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^K H(\varphi_i) - 1 \right)^2 dx dy}_{\text{PARTITION}} \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

Quand  $\alpha$  tend vers  $0^+$ , les fonctions  $(\varphi_1, \dots, \varphi_K)$  minimisant  $F_\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_K)$ , si elles existent définissent (par leur ensemble de niveau 0) une classification en classes homogènes séparées par des interfaces régulières.

Si les fonctions  $(\varphi_1, \dots, \varphi_K)$  minimisent  $F_\alpha(\varphi_1, \dots, \varphi_K)$ , alors

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varphi_i} = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq K$$

En reprenant les résultats du calcul de dérivée présenté dans l'annexe de [SAMSON *et al.*1999], les dérivées de  $F_\alpha$  par rapport aux  $\varphi_i$  s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \varphi_i} = \delta_\alpha(\varphi_i) \left[ e_i \frac{(u_0 - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \gamma \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_i}{|\nabla \varphi_i|} \right) + \lambda \left( \sum_{j=1}^k H_\alpha(\varphi_j) - 1 \right) \right] \quad (3.54)$$

En utilisant un schéma temporel explicite, on obtient le système de  $K$  équations couplées suivant :

$$\varphi_i^{t+1} = \varphi_i^t - dt \delta_\alpha(\varphi_i) \left[ e_i \frac{(u_0 - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} - \gamma \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_i}{|\nabla \varphi_i|} \right) + \lambda \left( \sum_{j=1}^k H_\alpha(\varphi_j) - 1 \right) \right] \quad (3.55)$$

où  $dt$  est le pas de temps. Le couplage des équations est obtenu grâce au terme issu de la condition de partition :

$$\lambda \left( \sum_{j=1}^k H_\alpha(\varphi_j) - 1 \right).$$

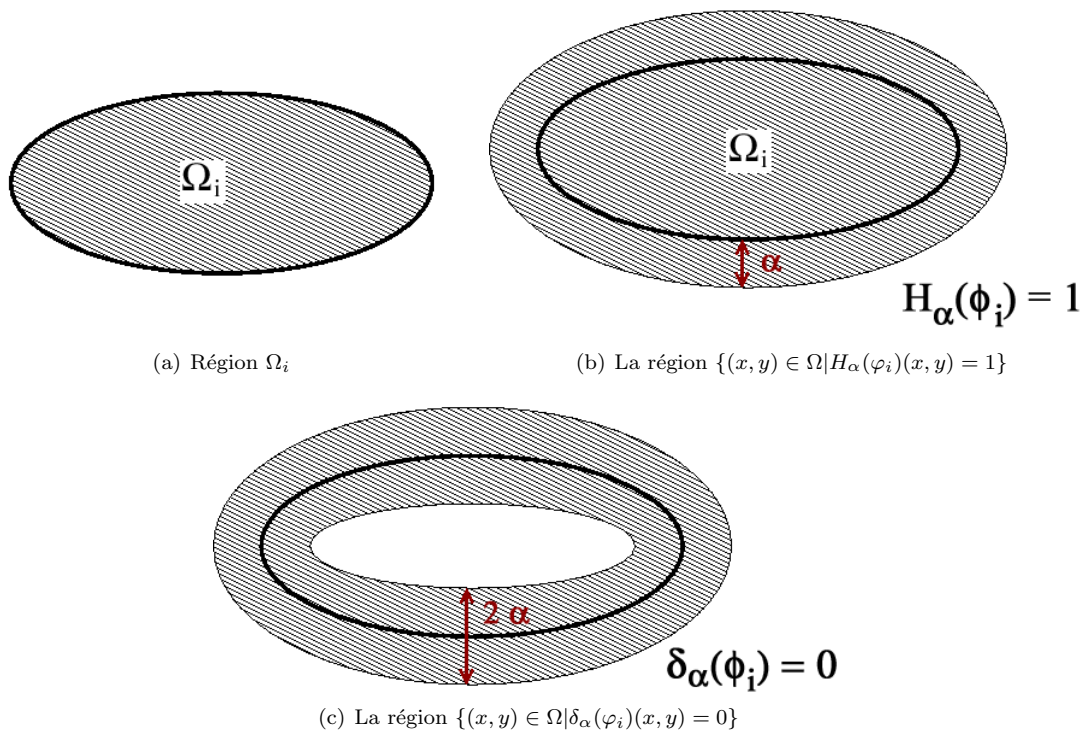


FIG. 3.43 – En remplaçant  $H$  et  $\delta$  par  $H_\alpha$  et  $\delta_\alpha$ , les relations (3.47) ne sont plus exactes. La région  $\{(x, y) \in \Omega | H_\alpha(\varphi_i)(x, y) = 1\}$  est la région  $\Omega_i$  augmentée d'une bande de largeur  $\alpha$ . La région  $\{(x, y) \in \Omega | \delta_\alpha(\varphi_i)(x, y) = 0\}$  est une bande de taille  $2\alpha$  centrée autour de  $\partial\Omega_i$ .

C'est ce couplage entre les différentes fonctions de niveau représentant les différentes régions qui est un des points clés pour effectuer une segmentation en plus de deux régions. En effet, comme nous l'avons vu section 3.2.1, il faut absolument faire évoluer les différentes fonctions de sorte que leurs ensembles de niveau 0 ne s'intersectent pas et pour éviter les pixels non classifiés. Et la fonctionnelle proposée par [SAMSON *et al.*1999] (Equation (3.43)) permet donc de coupler ces équations naturellement.

En outre, la présence du terme  $\delta_\alpha(\varphi_i)$  en facteur de la dérivée de l'équation (3.54) implique que la fonction  $\varphi_i$  n'est mise à jour par l'équation (3.55) que sur l'ensemble  $\{(x, y) \in \Omega \mid \delta_\alpha(\varphi_i)(x, y) = 0\}$ , c'est à dire sur une bande de taille  $2\alpha + 1$  pixels centrée autour de  $\partial\Omega_i$  (Figure 3.43). Cette équation d'évolution place donc le problème naturellement dans la situation de l'algorithme des "Narrow bands" évoqué section 3.2.1.

Les auteurs ne proposent pas de faire tendre  $\alpha$  vers 0, mais de prendre directement une valeur de  $\alpha$  petite, en pratique,  $\alpha = 2$  ou  $3$  pour que la bande  $\{(x, y) \in \Omega \mid \delta_\alpha(\varphi_i)(x, y) = 0\}$  contienne suffisamment de points.

Enfin, l'équation d'évolution (3.55), ne permet pas d'assurer que les gradients des fonctions  $\varphi_i$ ,  $|\nabla\varphi_i|$  restent bornés et en pratique, on constate bien que  $|\nabla\varphi_i|$  augmente à chaque itération de l'équation d'évolution. Le problème est théorique, car alors les fonctions  $\varphi_i$  ne sont plus à variations bornées, mais aussi pratique car lorsque  $|\nabla\varphi_i|$  augmente, la vitesse d'évolution du front diminue voire devient nulle. C'est un problème bien connu auquel on peut remédier de plusieurs manières (voir par exemple [GOMES et FAUGERAS2000]). En particulier, certains auteurs s'attachent à proposer une force de déformation de contours qui conserve la quantité  $|\nabla\varphi_i|$ . Une autre solution très répandue est de réinitialiser régulièrement les fonctions  $\varphi_i$  [AUJOL et AUBERT2002]. Le but est que  $\varphi_i$  se rapproche d'une fonction distance signée par rapport aux contours. C'est la solution adoptée dans [SAMSON *et al.*1999]. Cette réinitialisation est généralement faite grâce à l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} = \text{sign}(\varphi_i)(1 - |\nabla\varphi_i|) \quad (3.56)$$

L'algorithme de [SAMSON *et al.*1999] est donc le suivant :

---

**Algorithme 3.2** Algorithme pour segmenter une image en  $K$  régions

---

```

1: procédure SEGMENTE( $I, K, (\mu_i)_{1 \leq i \leq K}, (\sigma_i)_{1 \leq i \leq K}, \lambda, \gamma, (e_i)_{1 \leq i \leq K}, dt, itmax, N$ )
2:   Initialisation des contours puis des fonctions  $\varphi_1^0, \dots, \varphi_K^0$ .
3:   for it=1 .. itmax do
4:     Appliquer les  $K$  équations d'évolution (3.55)  $\rightarrow \varphi_1^{it}, \dots, \varphi_K^{it}$ 
5:     if it  $\equiv 0[N]$  then
6:       Régulariser les fonctions  $\varphi_1^{it}, \dots, \varphi_K^{it}$  grâce à l'équation (3.56).
7:     end if
8:   end for
9: end procédure

```

---

La figure 3.44 présente un extrait des résultats présentés dans [SAMSON *et al.*1999]. C'est une segmentation en trois régions correspondant aux trois niveaux de gris présents dans l'image test.

### Choix de l'initialisation

Le choix de l'initialisation se décompose en deux problèmes

- La détermination du nombre de régions et de leurs paramètres (moyenne et variance).
- L'initialisation des fonctions  $\varphi_i$ . Plus précisément, il s'agit d'initialiser les contours. A partir de ces contours initiaux, les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_K$  sont initialisées comme la distance signée par rapport aux contours.

Le nombre de régions et leurs paramètres sont parfois déterminés par le problème à résoudre. Une analyse visuelle de l'histogramme de l'image peut aussi permettre de déterminer le nombre de régions et leurs moyennes. Ainsi, dans le cas de la figure 3.47, à partir de l'histogramme (Figure 3.47(c)), nous avons choisi de segmenter en 5 régions, une région (la région 4) pour le premier pic de l'histogramme, au niveau 0, une

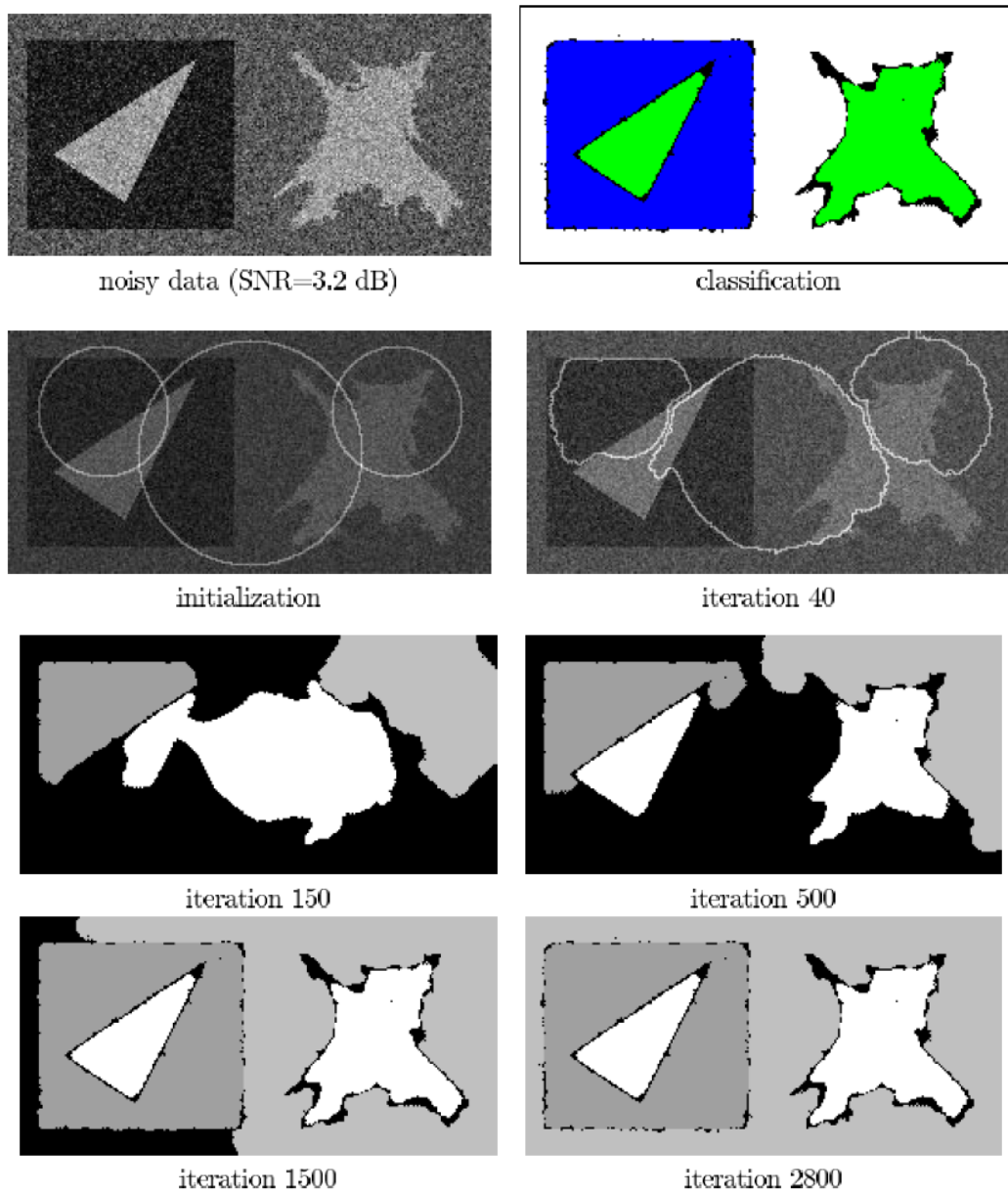


FIG. 3.44 – Extrait de [SAMSON *et al.*1999]. Segmentation d’une image synthétique. L’initialisation et l’itération 40 sont présentées sous forme de contours et les suivantes sous forme de régions. Le résultat de la classification (en haut à droite) est présenté en fausses couleurs.

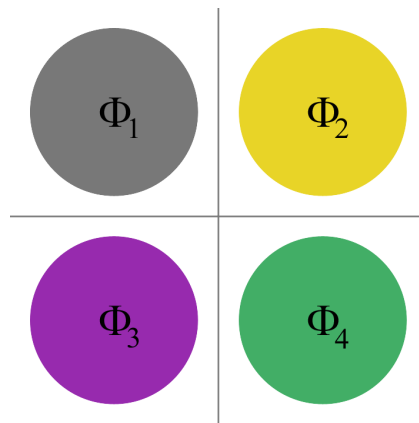


FIG. 3.45 – Initialisation de la segmentation.

région pour chacun des pics centraux aux niveaux 110 et 180 (les régions 3 et 2) et deux régions pour les deux pics secondaires correspondant aux niveaux 35 et 245 (régions 1 et 5).

Pour trouver les moyennes de chacune des régions, l'analyse automatique de l'histogramme peut se faire par exemple par un algorithme de clustering comme les  $k$ -means ou le fuzzy  $c$ -means. Il s'agit de partitionner un ensemble de  $N$  points  $(x_n)_{1 \leq n \leq N}$  en  $K$  classes disjointes  $(S_j)_{1 \leq j \leq K}$  de moyenne respective  $\mu_j$ .

$$\sum_{1 \leq j \leq K} \sum_{x \in S_j} |x - \mu_j|^2$$

Pour minimiser cette fonctionnelle, on alterne entre une étape de labélisation, à  $\mu_j$  fixé où chaque point de l'ensemble est affecté à la classe correspondant au paramètre  $\mu_j$  le plus proche et une étape où de nouveaux paramètres  $\mu_j$  sont calculés en faisant la moyenne des points qui ont été classifiés dans la  $j^{\text{ème}}$  classe. La méthode des “fuzzy  $c$ -means” est la généralisation en logique floue de la méthode des  $k$ -means, voir par exemple [LORETTE *et al.*1998]. Certaines variantes permettent aussi d'estimer le nombre de régions (croissances de régions).

Pour ce qui est des variances, nous ne les avons pas estimées automatiquement. Nous les fixons manuellement car nous considérons un petit nombre de classes. Pour ce qui est de l'initialisation des contours, le résultat de la figure 3.44 montre que le résultat final est peu sensible à l'initialisation. En effet, les contours initiaux choisis dans l'exemple de la figure 3.44 sont très loin des régions recherchées. Mais la convergence est obtenue en 2120 itérations. Cependant, [SAMSON *et al.*1999] proposent une initialisation automatique plus proche des contours recherchés. L'image est découpée en petites fenêtres de taille  $5 \times 5$ . La moyenne de l'intensité sur une des fenêtres permet de décider à quelle région la fenêtre doit être attribuée. Si la région  $i$  est choisie, à la fonction  $\varphi_i$ , on ajoute la fonction distance signée à un cercle de rayon 2 centrée au centre de la fenêtre. Le procédé d'initialisation est représenté schématiquement figure 3.45, et nous donnons un exemple figure 3.46.

### Exemples de résultats obtenus

Nous avons effectué par cette méthode, la segmentation de l'image test de la figure 3.46. L'image test utilisée présente plusieurs difficultés. En premier lieu, l'image associe des objets à bords réguliers (droite et cercle) et un objet à bord découpé. La topologie des régions recherchées est elle facilement gérée grâce aux “level sets”. Enfin l'objet en haut à droite contient un dégradé. A partir de l'initialisation décrite ci-dessus, les “graines” évoluent rapidement vers les contours.

La figure 3.47 montre des résultats obtenus sur une image réelle.



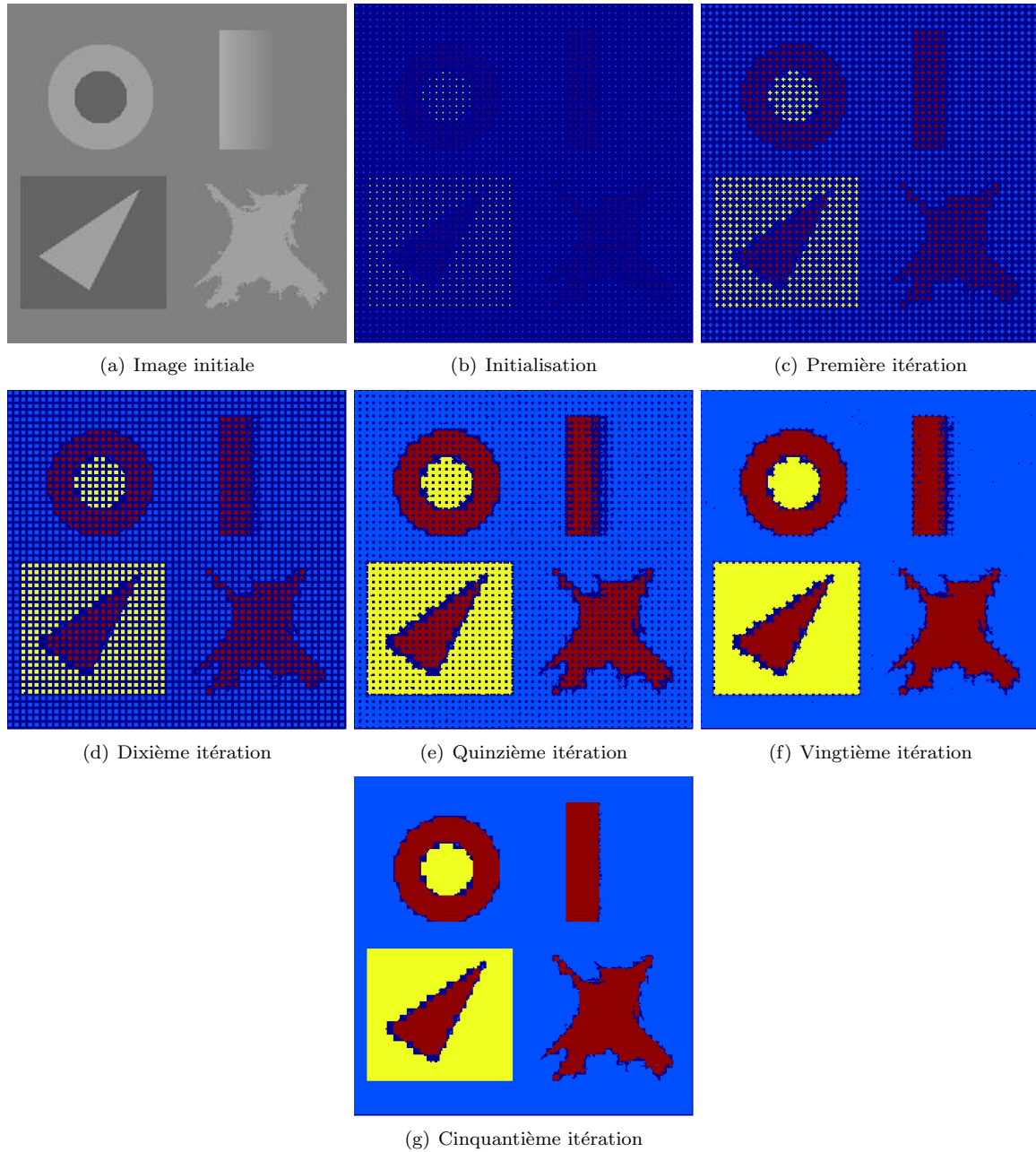


FIG. 3.46 – Segmentation de l'image (a). Initialisation (b) et quelques itérations avant le résultat final (g). Cette image est difficile à segmenter car elle présente un dégradé et une région dont les bords (en bas à droite) sont très peu réguliers.

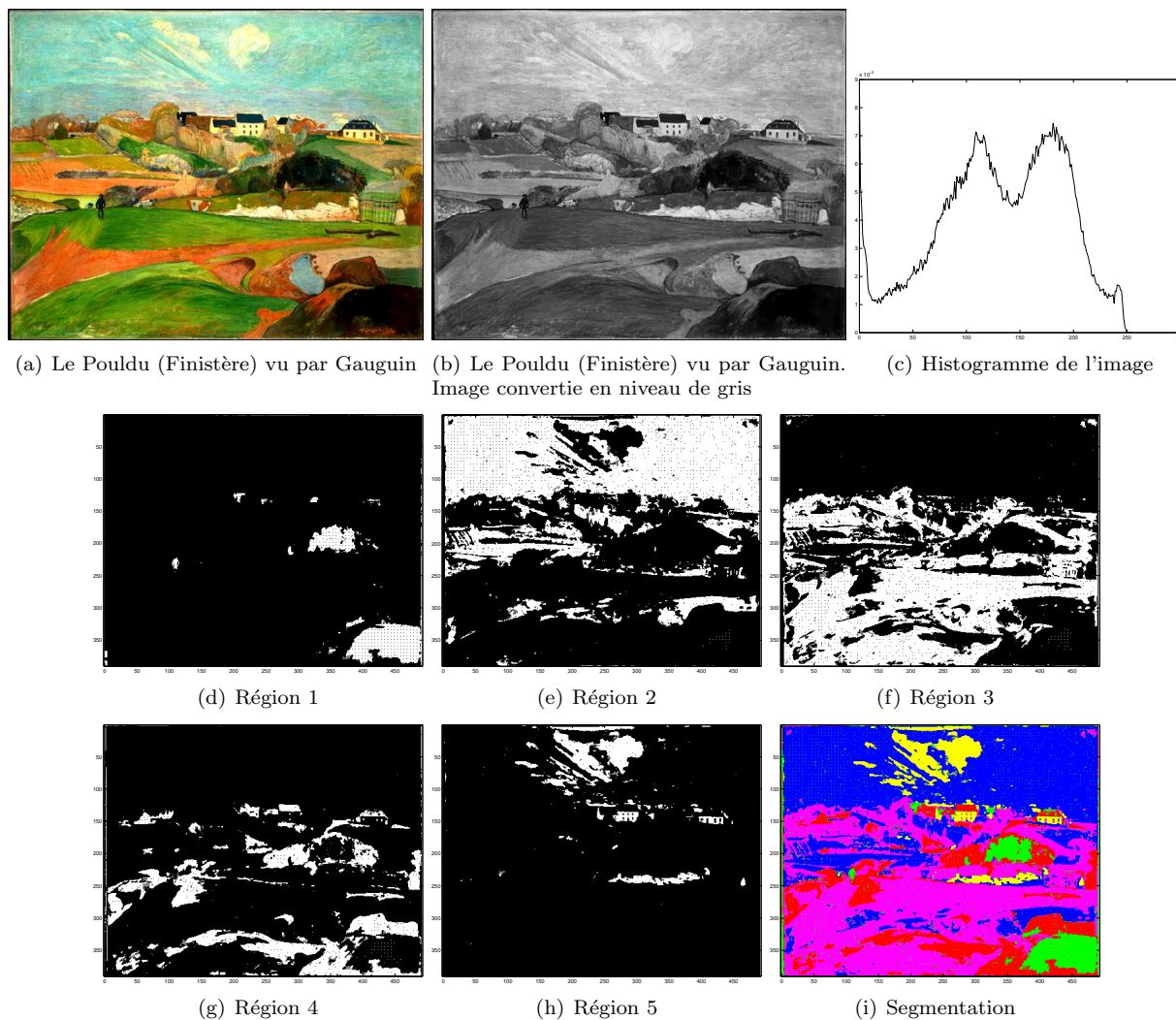


FIG. 3.47 – Segmentation de l'image (b). L'histogramme de l'image (c) à partir duquel ont été choisis le nombre de classes (5) et leurs paramètres. (d), (e), (f), (g) et (h) : les 5 régions obtenues. (i) La segmentation totale.

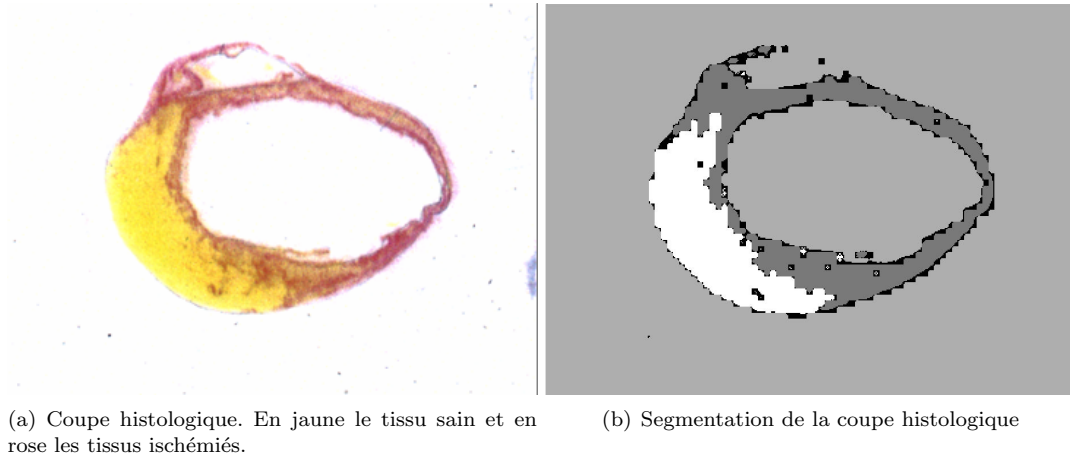


FIG. 3.48 – Segmentation de la coupe histologique (a) en trois régions, le tissu sain, le tissu ischémié et le fond.

### Application aux images multidimensionnelles (couleurs, champs de vecteurs)

La méthode de [SAMSON *et al.*1999] s'étend facilement à des images multidimensionnelles (couleurs, champ de vecteurs). Cette extension est proposée dans [SAMSON *et al.*2000a]. En effet, il suffit de modifier le terme d'attache aux données de l'équation (3.51) de la manière suivante :

$$F^2(\varphi_1, \dots, \varphi_k) = \sum_{i=1}^K e_i \int_{\Omega} H(\varphi_i) (\vec{I} - \vec{\mu}_i)^T \Sigma^{-1} (\vec{I} - \vec{\mu}_i) dx dy \quad (3.57)$$

où on appelle  $\vec{I}$  l'image vectorielle. On remplace le paramètre scalaire  $\mu_i$  par un paramètre vectoriel  $\vec{\mu}_i$  et les variances  $\sigma_i$  par la matrice de covariance  $\Sigma$ .

La figure 3.48 présente un exemple d'utilisation dans le cas d'images couleur. Il s'agit de segmenter les images d'histologie présentées dans la section 2.3. Dans ces images la couleur jaune correspond à un tissu sain et la couleur rose correspond à la fibrose. Pour aider à connaître le pourcentage de fibrose, c'est à dire l'état du muscle, il est utile de segmenter ces images. Nous avons choisi 3 régions : le fond, le tissu normal et la fibrose. Nous avons estimé les moyennes des trois classes par l'algorithme de k-means. Et nous avons obtenu la segmentation de la figure 3.48.

### Applications aux champs de déformation du myocarde

Pour classifier le champ de vitesses estimé dans une coupe 2D du myocarde, l'extension très simple de la méthode de segmentation proposée ci-dessus n'est pas satisfaisante. En effet, les caractéristiques suivant lesquelles nous souhaitons regrouper les points ne sont pas les deux composantes des champs de vitesse. Nous souhaitons plutôt classifier en fonction des deux questions suivantes :

- Le mouvement en un point correspond-il ou non à un mouvement d'un point du muscle cardiaque ?
- Est-ce que ce mouvement est normal ou pathologique (faible amplitude par exemple) ?

Nous avons d'abord tenté de répondre à la première de ces deux questions. Pour séparer le muscle des autres tissus et du fond, nous avons cherché à détecter les points dont le mouvement était caractéristique du fonctionnement du muscle cardiaque. Pour choisir le critère de regroupement, nous avons tenu compte des résultats obtenus pour l'estimation du champ de vitesse. Comme nous l'avons remarqué dans la discussion de la section 3.1, nous n'avons pas pu détecter la composante tangentielle du mouvement mais seulement la composante radiale. Nous avons donc choisi comme premier critère de regrouper les points où la vitesse estimée est dans la direction du centre du ventricule gauche pendant la systole. Nous avons donc sélectionné

une image pendant la systole pour faire cette segmentation.

Soit  $O$  le centre du ventricule gauche. La segmentation idéale que nous recherchons serait la suivante. On cherche une partition de  $\Omega$  en deux parties  $A$  et  $B$  telles que

1.  $\{A, B\}$  constitue une partition de  $\Omega$ , i.e.  $\Omega = A \cup B$  et  $A \cap B = \emptyset$ .
2. Le terme d'attache aux données pour la région  $A$  découle de la définition de  $A$  suivante :

$$A = \{M \in \Omega \mid \frac{(\vec{MO}, \vec{v}(M))}{|\vec{MO}| \cdot |\vec{v}(M)|} \approx 1\}$$

Pour la région  $B$ , nous souhaitons simplement réunir tous les autres points, donc nous n'ajoutons pas de terme d'attache aux données.

3. La partition est régulière au sens de la méthode de [SAMSON *et al.*1999].

A la manière précédemment décrite, on associe à chacune de ces régions ( $A$  et  $B$ ) une fonction ( $\varphi_A$  et  $\varphi_B$ ) telle que

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \Omega \mid \varphi_A(x, y) \geq 0\} \\ B &= \{(x, y) \in \Omega \mid \varphi_B(x, y) \geq 0\}. \end{aligned}$$

On associe ensuite à chacun des critères ci-dessus une fonctionnelle :

1. La régularité :

$$F^1(\varphi_A, \varphi_B) \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\varphi_A) |\nabla \varphi_A| dx dy + \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\varphi_B) |\nabla \varphi_B| dx dy$$

2. L'attache aux données (pour  $A$ ) :

$$\int_{\Omega} H_{\alpha}(\varphi_A) \left( \frac{|\vec{MO}, \vec{v}(M)|}{|\vec{MO}| \cdot |\vec{v}|} - (1 - \epsilon) \right)^2 dM$$

3. La contrainte de partition :

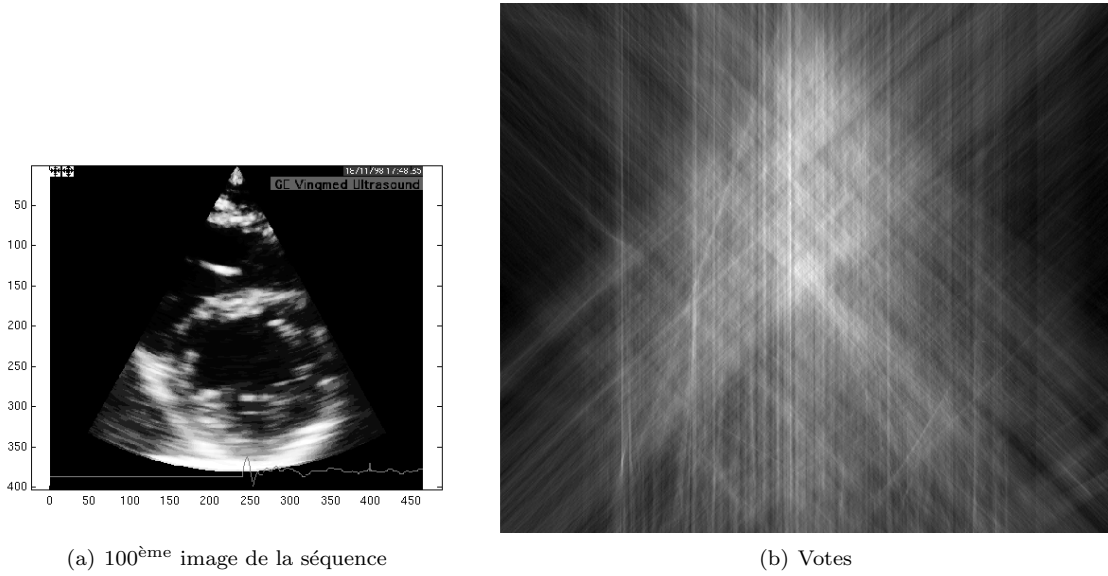
$$\int_{\Omega} (H_{\alpha}(\varphi_A) + H_{\alpha}(\varphi_B) - 1)^2 dx dy.$$

Ce qui en rassemblant les termes donne :

$$\begin{aligned} F(\varphi_A, \varphi_B) &= \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (H_{\alpha}(\varphi_A) + H_{\alpha}(\varphi_B) - 1)^2 dx dy + \gamma \int_{\Omega} H_{\alpha}(\varphi_A) \left( \frac{|\vec{MO}, \vec{v}(M)|}{|\vec{MO}| \cdot |\vec{v}(M)|} - (1 - \epsilon) \right)^2 dM \\ &\quad + \mu_A \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\varphi_A) |\nabla \varphi_A| dx dy + \mu_B \int_{\Omega} \delta_{\alpha}(\varphi_B) |\nabla \varphi_B| dx dy. \end{aligned}$$

On détermine alors les équations d'Euler-Lagrange et on détermine les équations d'évolution suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_A^{t+1} &= \varphi_A^t - dt \delta_{\alpha}(\varphi_A) \left( \gamma \left( \frac{|\vec{MO}, \vec{v}(M)|}{|\vec{MO}| \cdot |\vec{v}(M)|} - (1 - \epsilon) \right)^2 - \mu_A \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_A}{|\nabla \varphi_A|} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda (H_{\alpha}(\varphi_A) + H_{\alpha}(\varphi_B) - 1) \right) \\ \varphi_B^{t+1} &= \varphi_B^t - dt \delta_{\alpha}(\varphi_B) \left( -\mu_B \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \varphi_B}{|\nabla \varphi_B|} \right) + \lambda (H_{\alpha}(\varphi_A) + H_{\alpha}(\varphi_B) - 1) \right) \end{aligned}$$

FIG. 3.49 – Résultat des votes sur la 100<sup>ème</sup> image de la séquence

On découpe l'image en carrés de taille  $5 \times 5$ . Dans chaque carré on regarde si un point vérifie la caractéristique de la région  $A$ . Soit  $(i_0, j_0)$ , les coordonnées du centre de ce carré. Si oui on ajoute à  $\varphi_A^0$  la fonction  $1 - \sqrt{(x - i_0)^2 + (y - j_0)^2}$  restreinte au carré centré en  $(i_0, j_0)$ . Sinon on ajoute à  $\varphi_B$  cette même fonction.

Pour rendre possible l'application des équations d'évolution dans le cas où la vitesse en un point est nulle, nous avons décomposé la région  $B$  en deux régions, une région correspondant à une vitesse nulle et une région pour contenir le reste des points de la région  $B$ .

Enfin, le dernier point est la détermination du centre  $O$  du ventricule gauche. Nous avons utilisé pour cela une méthode semi-automatique.

Pour trouver ce point, nous avons commencé par effectuer un vote. Les votes attribués à un point  $P$  sont donnés par

$$v(P) = \text{card}\{M \in \Omega | \vec{g}(M) \wedge \overrightarrow{MO} \approx 0\}$$

où  $\vec{g}(M)$  est le gradient régularisé par un filtre de Deriche récursif de l'image ultrasonore en  $M$ . Autrement dit, pour chaque point de l'image nous comptons le nombre de vecteurs gradients pointant dans un voisinage carré de ce point. Plutôt que de compter uniquement sur la direction des gradients pour identifier le centre, nous avons aussi utilisé les niveaux de gris de l'image. En effet les votes qui nous intéressent sont ceux des zones de tissus et donc les zones de niveau de gris élevé. Nous avons donc choisi de pondérer les votes par les niveaux de gris des points votants. Le résultat obtenu est présenté figure 3.49 pour une image extraite d'une séquence acquise sur un sujet humain sain.

Comme le champ de gradient est très bruité, le centre n'est pas nécessairement le maximum global de la fonction  $v$ , mais c'est tout de même un des plus grands maxima locaux comme on le voit dans l'exemple de la figure 3.49. Nous avons donc recherché les maxima locaux et nous les avons classés dans l'ordre décroissant. On va alors supposer que le centre se trouve parmi les 10 plus grands maxima locaux.

Parmi ces dix valeurs de centres possibles, nous avons commencé par éliminer tous les points dont l'intensité pour l'image ultrasonore classique est élevée. En effet, le centre du ventricule gauche se trouve dans la cavité, qui est remplie de sang et donc l'intensité de ce point doit être faible. Parmi les points restants, nous avons sélectionné le centre manuellement en fonction de la localisation des points ayant voté pour chacun de ces centres. Nous avons choisi le point pour lequel le plus de votants se situaient bien dans le ventricule gauche.

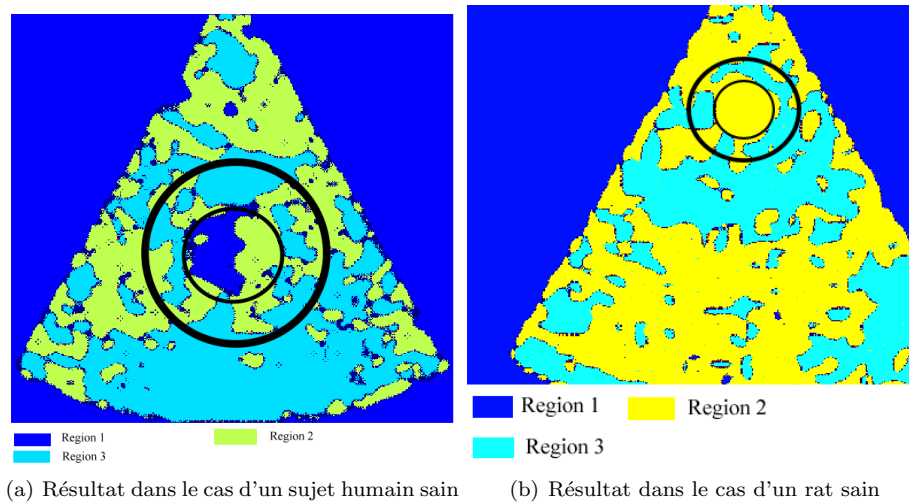


FIG. 3.50 – Classifications obtenues. En bleu turquoise les zones classifiées dans la zone d'intérêt. Les deux cercles noirs sur chaque figure symbolisent l'endocarde et la frontière extérieure du ventricule gauche.

Les résultats de cette classification sont présentés figure 3.50. La classification a été appliquée à un champ de vitesses estimé sur une image réalisée durant la diastole. Les résultats de la figure 3.50(a) ont été obtenus à partir du champ de vitesse présenté sur la figure 3.32 et les résultats de la figure 3.50(b) ont été obtenus à partir du champ de vitesse présenté sur la figure 3.34. En comparant les zones classifiées et les régions attendues (entre les deux cercles noirs), on constate tout d'abord qu'une bonne partie du ventricule est classifiée correctement. Les quelques trous correspondent aux régions où l'estimation des champs de déformation est délicate. Le plus gros problème des classifications obtenues est le nombre élevé de fausses détections, i.e. le nombre de points classifiés dans la zone d'intérêt alors qu'ils appartiennent pour la plupart à d'autres tissus.

### 3.2.3 Discussion

Pour améliorer les résultats obtenus, il serait nécessaire d'utiliser plusieurs extraits de la séquence, voire la séquence entière. En effet, en étudiant l'ensemble du cycle, il est plus facile de distinguer les comportements pathologiques. Ainsi, dans [RUIZ-DOMINGUEZ *et al.*2005], les auteurs peuvent obtenir une classification du myocarde à partir d'images paramétriques calculées grâce aux courbes d'intensité d'un point au cours du cycle cardiaque.

Il n'y a pas de manières faciles de combiner les classifications que nous obtenons. Il faudrait de plus ajouter un suivi pour avoir des correspondances entre les images successives de la séquence. Notre méthode d'estimation estime bien la déformation entre deux images successives mais les erreurs commises à chaque étape s'ajoutent lorsqu'on tente de suivre le point. Contrairement à des méthodes comme celle proposée par [LEDESMA-CARBAYO *et al.*2002], notre méthode n'a pas la robustesse nécessaire pour permettre un suivi précis pendant tout le cycle cardiaque.

Une autre piste est de trouver des critères plus discriminants, comme par exemple le jacobien du morphisme associé au champ de vitesse pour savoir s'il y a bien contraction ou dilatation du muscle.

## 3.3 Conclusions

Les mauvais résultats de la classification proposée sont en partie liés à la qualité des champs de vitesse estimé. En effet, si celle-ci est suffisante pour une observation qualitative elle ne permet pas d'obtenir un champ suffisamment régulier pour être utilisable dans un algorithme de classification. On retrouve dans

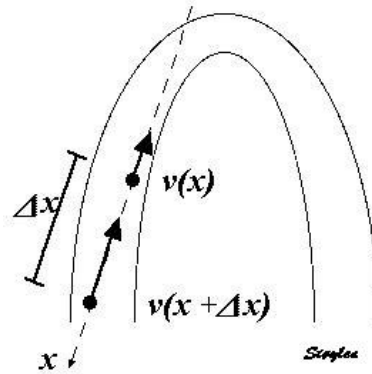


FIG. 3.51 – Figure extraite de <http://www.ntnu.no/stoylen/strainrate/> expliquant le lien entre la modalité strain rate et la modalité TDI.  $v$  désigne la vitesse.

les classifications obtenues des caractéristiques qui apparaissent déjà dans le champ de vitesse estimé : des taches horizontales orthogonales au faisceau ultrasonore, qui sont dues au speckle. A l'issue de ces deux étapes, une autre possibilité apparaît, celle de coupler l'estimation et la segmentation en utilisant la classification obtenue pour améliorer par exemple la régularisation.

En outre, nous rencontrons ici les limites de l'approche purement traitement du signal que nous avons explorée dans ce travail. En effet, pour être capable de retrouver des zones pathologiques, il serait nécessaire d'utiliser de *a priori* sur les déformations normales ou anormales aux instants du cycle considérés, à travers un apprentissage ou bien à travers l'utilisation d'un modèle biomécanique de la contraction du myocarde [BESTEL *et al.*2001, AYACHE *et al.*2001, COSTA *et al.*2001, HUNTER *et al.*2003, SERMESANT2003, CHAPELLE *et al.*2004, KERCKHOFFS *et al.*2005].

Enfin, il faut aussi remarquer que la vitesse n'est pas forcément la modalité qui permet le plus facilement une telle classification. En effet, dans le cas d'un infarctus où une région du myocarde ne se contracte plus. Si cette région est assez réduite, sa vitesse n'est pas nulle ou faible car les tissus suivent le mouvement des tissus environnants. D'autres modalités d'imagerie, bien que moins répandues, seraient peut-être de meilleurs points de départ pour effectuer une classification. Ainsi, s'intéresser à l'image des déformations (strain et strain rate imaging) plutôt que directement aux vitesses des tissus [D'HOOGHE *et al.*2001, PELLERIN *et al.*2003] permettrait d'éliminer ce type de mouvement. Le taux de déformation (strain rate, i.e. déformation par pas de temps) peut être relié facilement à la vitesse. Avec les notations de la figure 3.51, le taux de déformation  $SR$  peut s'exprimer comme suit :

$$SR = \frac{v(x) - v(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

La stratégie à privilégier semble donc être d'intégrer modèles et mesures. Pour adapter le modèle aux mesures, il faut estimer les paramètres du modèle qui correspondent le mieux aux mesures du patient. Les modèles biomécaniques du cœur évoqués plus haut sont pour la plupart composés d'une partie électrique et d'une partie mécanique. La partie suivante de cette thèse sera consacrée à une étude de ce type pour le problème électrique.

## Deuxième partie

# Estimation de paramètres pour un modèle électrophysiologique du cœur à partir de mesures *in vivo*





# Chapitre 4

## Electrophysiologie cardiaque : mesure et modélisation

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Mesure de l'activité électrophysiologique du cœur</b>	<b>105</b>
4.1.1	Présentation	105
4.1.2	Utilisation de chaussettes d'électrodes (externe)	107
4.1.3	Mesures intracavitaires	110
<b>4.2</b>	<b>Modélisation de l'activité électrophysiologique du cœur</b>	<b>112</b>
4.2.1	Modèles existants et choix des modèles	112
4.2.2	Choix du modèle	116
4.2.3	Quelques éléments pour l'analyse qualitative 1D des modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov	118
4.2.4	La propagation de l'onde de dépolarisation en 2D	129
4.2.5	Eléments d'analyse numérique et mise en œuvre	134

---

Les arythmies (ou troubles du rythme) cardiaques sont des causes de mortalité importantes. Les tachycardies (accélération anormale du rythme cardiaque) sont parfois causées par des foyers ectopiques ou des chemins de conduction anormaux dans le myocarde. De plus, certains patients ayant souffert d'un infarctus ont gardé des zones de cicatrice où la conduction de l'onde électrique est ralentie voire stoppée, ils risquent alors une contraction des ventricules asynchrone.

L'électrocardiogramme (ECG) est la méthode traditionnelle non invasive pour évaluer l'état électrophysiologique du cœur. Cependant, ces mesures en surface ne donnent que des informations limitées sur la localisation du problème. Dans les années 50, des micro-électrodes ont été développées pour permettre l'enregistrement du potentiel membranaire d'une cellule. La technique de "patch-clamp" permettant d'étudier indépendamment les canaux ioniques a permis de grandes avancées dans la compréhension et la modélisation de l'activité électrique du cœur [NOBLE et RUDY2001].

Des méthodes ont été développées pour mener des études électrophysiologiques plus poussées. Une classe de méthodes, plutôt invasives, consiste à introduire des électrodes de mesures au contact ou à proximité du myocarde pour enregistrer le potentiel électrique. Les électrodes sont introduites par un cathéter dans la cavité étudiée et les systèmes avec contact s'avèrent très invasifs. Elles sont maintenant couplées avec des acquisitions d'images anatomiques (IRM, XMR) et des observations du mouvement cardiaque (IRM marquée), ce qui permet de localiser précisément les mesures, par exemple pour guider une intervention et d'observer le couplage électro-mécanique. L'observation des déplacements est un indicateur important pour la resynchronisation ventriculaire.

L'imagerie électrocardiographique (ou ECGI) [OSTER *et al.*1997] est une méthode non invasive utilisant la résolution d'un problème inverse pour retrouver les potentiels à la surface du cœur à partir de potentiels mesurés en de nombreux points sur le thorax et de l'anatomie du patient (obtenue par une autre modalité, IRM ou scanner CT par exemple). Pour mener à bien une telle reconstruction, une connaissance très précise de l'anatomie du patient est indispensable.

Ces données sont ensuite utilisées pour diagnostiquer et localiser l'origine de l'arythmie, puis pour planifier le traitement. Le traitement chirurgical de la tachycardie est l'ablation par radio fréquence. Le foyer ou le chemin de conduction anormal est alors supprimé grâce à l'énergie thermique apportée par les ondes radio-fréquence. Pour les asynchronies ventriculaires, le traitement habituel est une stimulation biventriculaire grâce à des électrodes d'excitation insérées directement dans le cœur. Pour déterminer les zones qui doivent être traitées, une étude électrophysiologique poussée doit être menée au cours de laquelle de nombreuses mesures sont recueillies.

Un enjeu important est alors l'exploitation de ces nombreuses données, très riches et obtenues à partir de protocoles parfois très invasifs pour fournir une aide à la localisation précise des sources de problèmes. Nous proposons d'utiliser pour cela un modèle électrophysiologique du cœur du patient. Le modèle que nous utiliserons pour ce travail est le modèle d'Aliev et Panfilov [ALIEV et PANFILOV1996]. Pour personnaliser un modèle générique pour un patient, nous proposons d'estimer les paramètres du modèle choisi à partir de mesures électrophysiologiques. Certains des paramètres du modèle ont une interprétation clinique, la carte des paramètres estimés fournira une aide à la localisation des origines de l'arythmie. Une telle estimation permet de plus de reproduire, par la simulation d'un modèle, l'activité électrophysiologique d'un patient, ce qui donne ensuite la possibilité de simuler l'intervention envisagée.

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord présenter les données électrophysiologiques dont nous avons disposé et qui ont dicté le choix du modèle et l'estimation de paramètres qui va suivre. Nous présenterons plus particulièrement les caractéristiques de ces mesures. La deuxième partie du chapitre sera consacrée au choix des modèles qui conviennent le mieux pour aider à interpréter ces mesures. Dans cette deuxième partie, nous détaillerons aussi quelques propriétés de ces modèles adaptées à l'estimation de paramètres et pour finir nous décrirons leur mise en œuvre pratique.

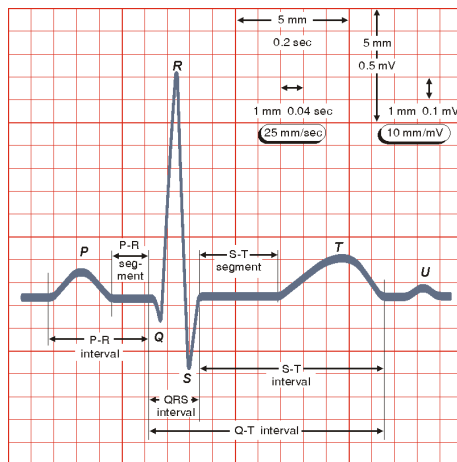


FIG. 4.1 – ECG. L'onde P est la trace de la dépolarisation des oreillettes. Le complexe QRS correspond à la dépolarisation des ventricules et l'onde T et la trace de la repolarisation des ventricules

## 4.1 Mesure de l'activité électrophysiologique du cœur

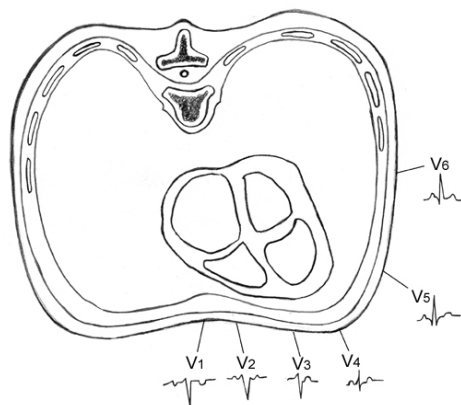
### 4.1.1 Présentation

La mesure de l'activité électrique du cœur est un champ de recherche avancé et de nombreuses techniques sont disponibles.

Il existe en premier lieu un certain nombre de modalités externes comme l'électrocardiographie ou la magnétocardiographie (chapitres 15 et 20 de [MALMIVUO et PLONSEY1995]). L'électrocardiogramme ou ECG consiste à recueillir les modifications du champ électrique induites par la dépolarisation et la repolarisation du myocarde, à la surface du corps. Un tel enregistrement est obtenu grâce à des électrodes placées sur le thorax du patient. La figure 4.1 montre un tel enregistrement. L'ECG se décompose en trois principales étapes. Tout d'abord l'onde P montre la dépolarisation des oreillettes, ensuite le complexe QRS est la trace de la dépolarisation des ventricules et enfin lorsque la repolarisation des ventricules se produit, on observe l'onde T. La repolarisation des oreillettes n'est pas visible car son signal est caché par le complexe QRS. Le cardiologue utilise plusieurs électrodes aussi appelées dérivations qui lui permettent de reconstruire mentalement les séquences d'activation. L'examen est le plus souvent effectué avec 12 électrodes dont les positions sont normalisées. La figure 4.2 montre sur une coupe transverse du thorax la position de six des électrodes, celles qui sont appelées électrodes précordiales ainsi que la forme du signal enregistré par chacune d'elles. La figure 4.3 montre un exemple d'enregistrement sur les 12 électrodes dans un cas normal. Une autre modalité est la magnétocardiographie ou MCG qui enregistre le champ magnétique produit par l'activité électrique du myocarde.

Pour obtenir des mesures de l'activité électrique du myocarde lui même, il faut des mesures internes obtenues par des électrodes introduites, grâce à un cathéter, dans la cavité souhaitée [MCVEIGH *et al.*2001, FARIS *et al.*2003, RHODE *et al.*2004, SERMESANT *et al.*2004] ou par des techniques optiques telles celles décrites dans [SUNG *et al.*2000, MCCULLOCH *et al.*2001]. Pour éviter des interventions très invasives, des techniques de reconstruction de potentiels sur la surface de l'épicaarde à partir de potentiels mesurés à la surface du torse ont été développées [OSTER *et al.*1997, RUDY2001, RUDY2003]. Ces techniques, appelées imagerie électrocardiographique, nécessitent une connaissance très précise de l'anatomie du patient qui peut être obtenue par une image RM ou un scanner CT. Pour mener à bien une telle reconstruction, les 12 dérivations classiques de l'ECG ne sont pas suffisantes, l'équipe de Rudy [RUDY2003] utilise 250 électrodes qui sont placées sur une veste portée par le patient. Nous aurons l'occasion de donner les idées de la méthode de [RUDY2003] dans la section 5.1.4.

Les méthodes les plus invasives, consistant à introduire des électrodes de mesures au contact ou proche



E

FIG. 4.2 – Position des 6 électrodes précordiales et forme du complexe P-QRS-T pour chacune d'elles

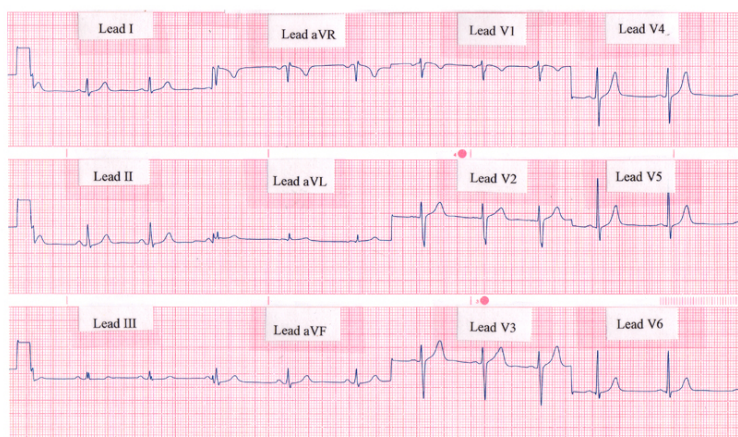


FIG. 4.3 – Enregistrement de l'ECG pour les 12 dérivation classiques dans un cas normal

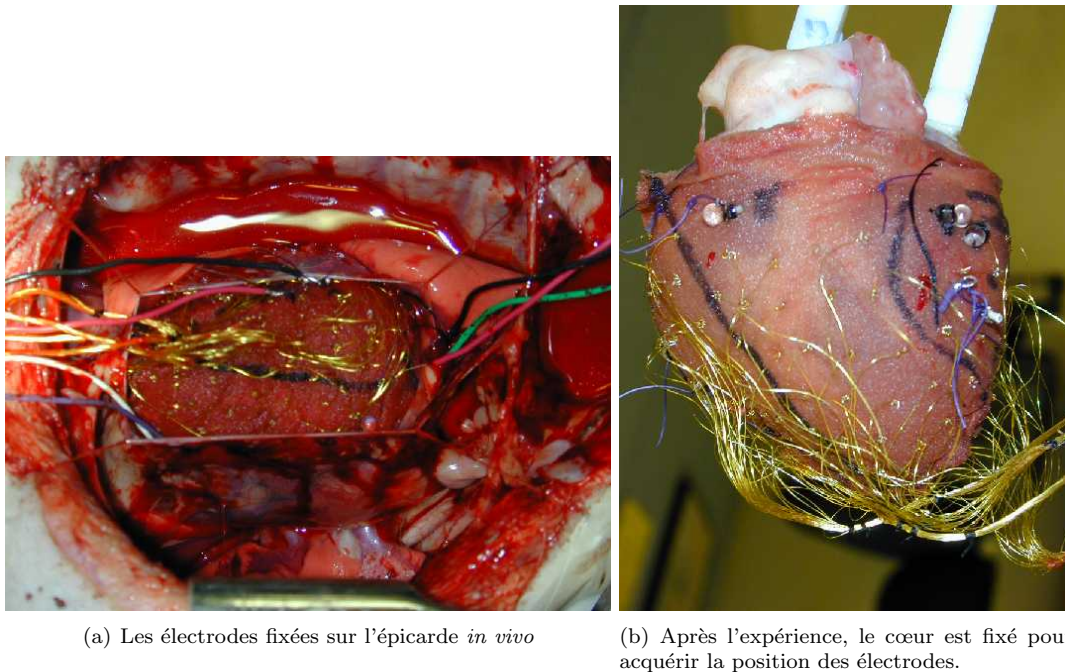


FIG. 4.4 – Électrodes fixées sur l'épicaire pour l'enregistrement de l'activité électrophysiologique. Images fournies par E. McVeigh, Laboratory of cardiac energetics, National Heart Lung and Blood Institute, NIH.

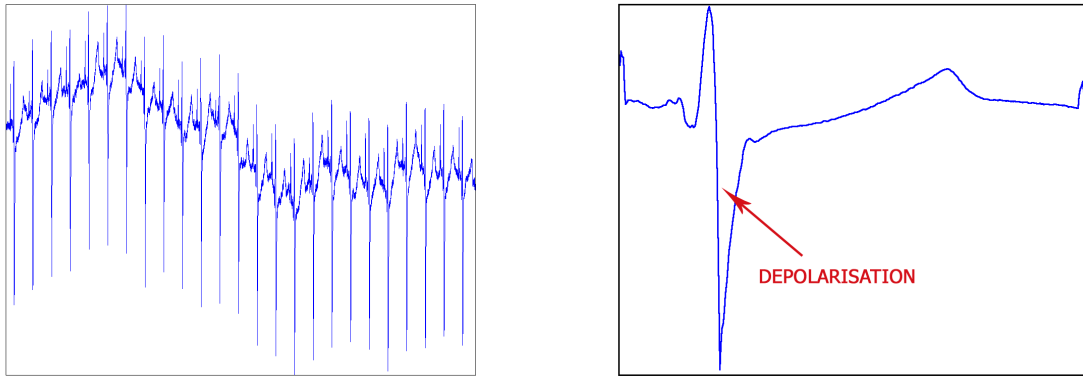
des parois cardiaques, sont cependant très intéressantes car elles ne dépendent pas d'une méthode de reconstruction du potentiel. Nous allons présenter ci-dessous les deux types de données que nous avons pu utiliser au cours de cette thèse. Les deux dispositifs correspondent à des électrodes introduites dans des cavités ou au contact de l'épicaire et sont compatibles avec l'IRM permettant ainsi l'enregistrement de données anatomiques et de déformations pour le même cœur. Ces méthodes sont invasives mais donnent une observation directe de l'activité électrophysiologique. Cependant, les solutions utilisant des gilets constitués de nombreuses électrodes avec une reconstruction des potentiels sur l'épicaire à partir des potentiels sur le thorax [OSTER *et al.*1997, RUDY2001, RUDY2003] ont été validées pour la détection de différentes pathologies [OSTER *et al.*1998, RUDY et BURNES1999, BURNES *et al.*2000, GHANEM *et al.*2001] et pourront ensuite constituer d'autres sources de données.

#### 4.1.2 Utilisation de chaussettes d'électrodes (externe)

Les mesures que nous présentons dans cette section sont effectuées grâce à une chaussette constituée d'électrodes de mesures que l'on place sur l'enveloppe externe du cœur dans le cadre d'une étude sur des cœurs de chiens. L'équipe de E. McVeigh (Laboratory of Cardiac Energetics, National Heart Lung and Blood Institute, NIH) a mis au point le protocole d'acquisition [MCVEIGH *et al.*2001, FARIS *et al.*2003] que nous rappelons ci-dessous et nous ont procuré les données qui suivent. Les données présentées ci-dessous ont été acquises sur le cœur d'un chien mâle adulte.

Le sternum du chien est ouvert et est maintenu ouvert pendant le protocole d'acquisition. La chaussette est placée sur l'épicaire ventriculaire (Figure 4.4(a)). Sept électrodes bipolaires de stimulation sont placées sur l'oreillette droite et sept autres sur la paroi libre du ventricule droit. Enfin une électrode de référence est placée à la racine de l'aorte. Toutes ces électrodes sont fixées solidement grâce à des sutures. L'ensemble de ce protocole, qui est compatible avec l'IRM, est présenté de manière détaillé dans [MCVEIGH *et al.*2001, FARIS *et al.*2003].

La stimulation du ventricule droit est effectuée à une fréquence comprise entre 110 et 125 battements



(a) Potentiel enregistré par une électrode au cours de l'acquisition. (b) Potentiel moyen obtenu à partir de l'enregistrement de la figure 4.5(a).

FIG. 4.5 – Potentiel électrique enregistré sur l'épicaarde.

par minute, ce qui correspond à une fréquence 10 à 20 % supérieure à la fréquence naturelle de stimulation. L'acquisition des potentiels sur le ventricule se fait à une fréquence entre 1000 et 1450 Hz pendant environ 10 s. Une fois que l'ensemble des mesures est effectué, le chien est sacrifié et son cœur est fixé (Figure 4.4(b)) dans une position correspondant à la fin de la diastole. Les positions des différentes électrodes, ainsi que quelques marques anatomiques sont alors acquises grâce à un numériseur 3D.

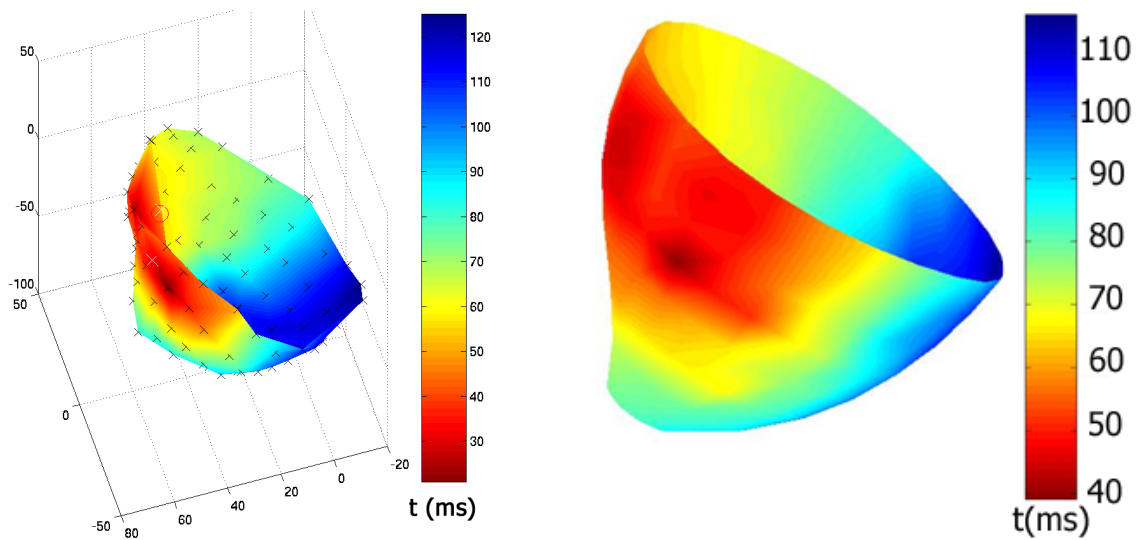
La figure 4.5(a) montre le résultat de l'enregistrement effectué par une électrode. Pendant l'expérience, 25 cycles ont été enregistrés. Le signal enregistré peut s'avérer corrompu par un bruit important, il est alors possible de moyenner le signal obtenu sur ces différents cycles pour obtenir un enregistrement moyen sur un cycle. Pour cela, il faut détecter les différents cycles et ramener chaque signal autour d'un même potentiel de référence pour les rendre comparables et donc pour pouvoir en calculer la moyenne (Figure 4.5(b)).

Le temps de dépolarisation est alors détecté pour chaque électrode. Ce temps de dépolarisation est une des caractéristiques principales du potentiel mesuré car c'est cette dépolarisation qui déclenche la contraction cardiaque. La carte des temps de dépolarisation est donc un des outils importants utilisé par le médecin pour détecter et localiser infarctus, bloc de branches, foyers ectopiques, etc. pendant l'examen électrophysiologique. Pour détecter le temps de dépolarisation en chaque électrode, nous ne considérons pas les premières mesures du cycle car elles ne rendent compte que de la stimulation. Dans le reste de l'enregistrement, le temps de dépolarisation est détecté comme l'instant où la dérivée du signal est la plus négative. La dérivée est calculée grâce au schéma aux différences finies centrées suivant :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{12\Delta t} (-v(t + 2\Delta t) + 8v(t + \Delta t) - 8v(t - \Delta t) + v(t - 2\Delta t))$$

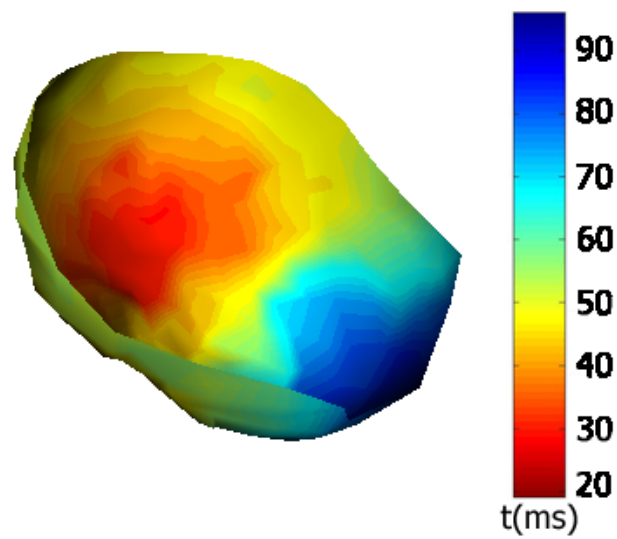
où  $v$  est le potentiel de l'électrode et  $\Delta t$  le pas de temps entre deux mesures.

Les temps de dépolarisation ainsi calculés sont présentés sur la surface constituée des électrodes sur la figure 4.6(a). La surface obtenue à partir des électrodes est irrégulière et comporte peu de sommets. C'est pourquoi nous disposons aussi des temps d'activation sur une surface interpolée et régularisée fournie par O. Faris (Figure 4.6(b)). Les dernières mesures que nous avons utilisées ont été acquises grâce à un système de 247 électrodes (Figure 4.6(c)).



(a) Sur la surface constituée par les électrodes. Les  $\times$  représentent la position des électrodes. Les  $\times$  blanches et entourées correspondent aux électrodes de stimulation.

(b) Sur une surface interpolée et régularisée à partir de la surface définie par les électrodes (Figure 4.6(a))



(c) Obtenus avec le système comprenant plus d'électrodes. Merci à H. Ashikaga

FIG. 4.6 – Temps de dépolarisation en ms.



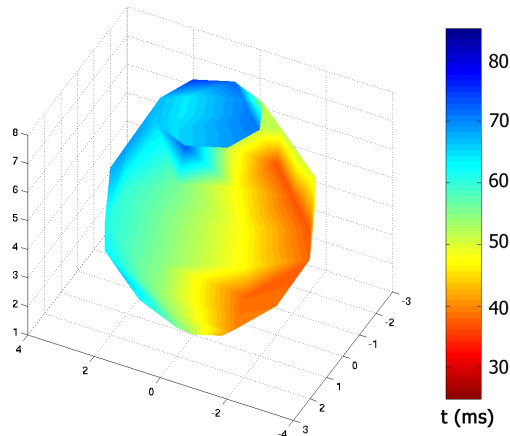


FIG. 4.7 – Isochrones obtenues par un système par contact. Les mesures électriques et les coordonnées des électrodes nous ont été fournies par O. Faris et E. McVeigh, Laboratory of Cardiac Energetics, National Heart Lung and Blood Institute, NIH.

### 4.1.3 Mesures intracavitaires

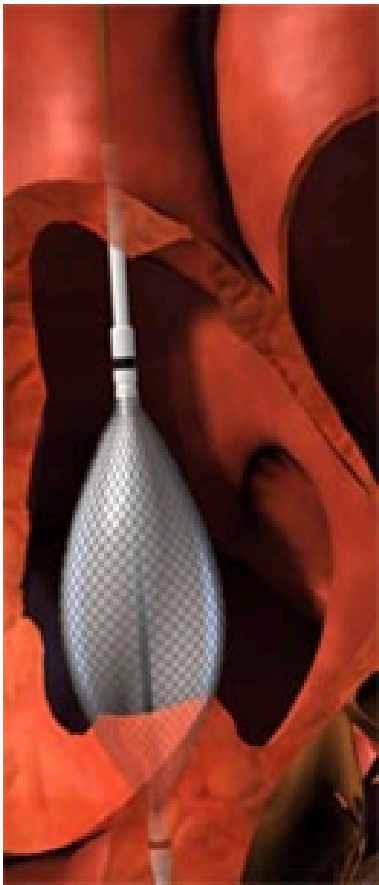
#### Système pour l'endocarde avec contact

Le panier d'électrodes avec contact est constitué de 8 arcs. Le long de chacun de ces arcs sont placées 8 électrodes, ce qui fait un total de 64 électrodes. Les arcs sont flexibles et le panier est initialement replié dans un cathéter et se déploie. Les arcs s'adaptent à la surface de l'endocarde et se déforment pour faire contact avec l'endocarde pendant tout le cycle cardiaque. De la même manière que pour les mesures épicaudiques de la section 4.1.2, les potentiels mesurés sont analysés pour donner les temps de dépolarisation (Figure 4.7). Ces données endocardiques sont moins riches que les données épicaudiques (64 électrodes seulement) et nous ne disposons pas pour ces données de la localisation anatomique précise des électrodes.

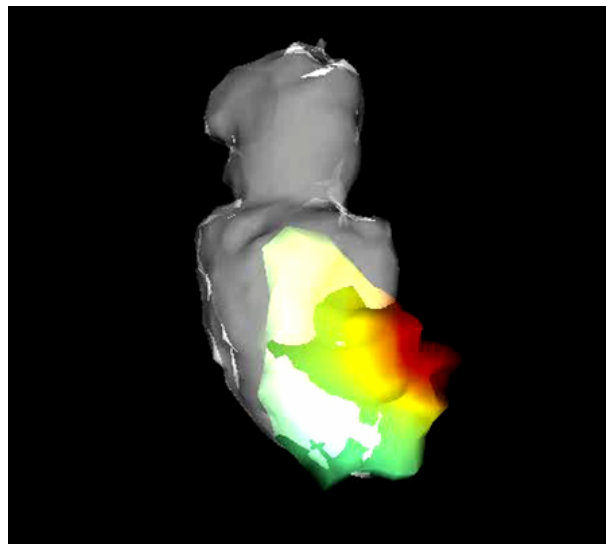
#### Système endocardique sans contact

Les systèmes avec contact avec l'endocarde sont invasifs et risquent de modifier la fonction cardiaque du patient. Des systèmes sans contact comme le système Ensite d'Endocardial Solutions permettent d'acquérir des mesures électrophysiologiques grâce à un cathéter contenant un ballon flexible constitué d'un réseau d'électrodes (figure 4.8(a)). Ce ballon flotte dans la chambre cardiaque que l'on désire explorer et n'est pas en contact avec l'endocarde. Un deuxième cathéter est alors introduit et émet un signal radio-fréquence à son extrémité qui est détecté par le ballon. Ce cathéter permet de localiser l'endocarde. L'activité électrique mesurée par le ballon est alors extrapolée sur cette surface (Figure 4.8(b)).

Le système Ensite produit une surface représentant l'endocarde. En recalant cette surface avec l'anatomie obtenue avec le système XMR, il apparaît que la correspondance n'est pas exacte probablement à cause des mouvements et déformations du cœur au cours de la mesure qui ne sont pas pris en compte. Les auteurs de [RHODE *et al.*2004, SERMESANT *et al.*2004] corrigent cette surface en faisant évoluer un modèle déformable qui évolue sous l'influence de forces liées à l'image. Ainsi, il est possible d'avoir une information anatomique précise et des mesures électrophysiologiques dans le même référentiel. Cependant, la correspondance point à point entre la surface ESI et la surface obtenue grâce à l'IRM anatomique n'est pas précisément garantie.



(a) La sonde du système Ensite de Endocardial Solutions



(b) Potentiel électrique mesuré.

FIG. 4.8 – Mesures électrophysiologiques du Cardiac MR Research Group du King's College/Guy's hospital de Londres. Dr R. Razavi.

## 4.2 Modélisation de l'activité électrophysiologique du cœur

La modélisation de l'activité électrophysiologique du cœur est un domaine de recherche très avancé et très riche. Chacun suivant leur point de vue, les articles [NOBLE et RUDY2001, BELIK et MCCULLOCH2004, NOBLE2002, KRINSKI *et al.*2004, HUNTER2004] donneront au lecteur une vue d'ensemble et une idée de la variété et de l'évolution de cette modélisation. Les mesures que nous avons présentées dans la section précédente (section 4.1) reflètent la propagation électrique dans les ventricules à partir d'une stimulation artificielle ou des extrémités de Purkinje (dans le cas d'une stimulation naturelle), nous nous sommes donc intéressés exclusivement à la modélisation de cette partie de la propagation.

Nous présenterons quelques modèles marquants et justifierons le choix d'utiliser des modèles phénoménologiques et macroscopiques, comme ceux de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov pour l'estimation de paramètres à partir de données macroscopiques. Nous présenterons ensuite quelques propriétés qualitatives importantes des modèles de FitzHugh-Nagumo et Aliev et Panfilov. Nous terminerons cette section en présentant la mise en œuvre de la simulation de l'activité électrique des ventricules et les schémas numériques choisis.

### 4.2.1 Modèles existants et choix des modèles

Le cadre de ce travail est la comparaison de mesures électrophysiologiques effectuées à l'intérieur ou à l'extérieur des ventricules. Nous nous intéressons donc à la modélisation du fonctionnement des cellules ventriculaires ainsi qu'à la modélisation de la propagation du potentiel d'action dans les ventricules à partir des extrémités de Purkinje ou d'une stimulation artificielle. Nous n'aborderons donc pas ici la modélisation du nœud sinusal, des oreillettes, ni de la propagation dans les faisceaux de His.

Au niveau cellulaire [ZIPES et JALIFE2004], les principales étapes sont les suivantes. La membrane cellulaire autorise une différence de potentiel électrique entre les domaines intracellulaire et extracellulaire qu'elle sépare. Les potentiels à l'intérieur et à l'extérieur d'une cellule sont dus aux concentrations des différents ions présents, principalement  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Mg}^{2+}$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ,  $\text{H}^+$  et  $\text{Cl}^-$ . Cette différence de potentiel entre les milieux extracellulaires et intracellulaires crée un potentiel transmembranaire appelé potentiel de repos. En fonction des circonstances et des stimuli extérieurs, des ions peuvent traverser les parois de la cellule, autrement dit des canaux ioniques peuvent se former entre le milieu intracellulaire et le milieu extracellulaire. Ainsi les concentrations ioniques se modifient, ce qui entraîne la modification du potentiel transmembranaire. Il se forme alors un potentiel d'action.

L'apparition du potentiel d'action puis le retour à l'équilibre sont résumés par la figure 4.9. Nous ne présentons ici que les principaux courants ioniques. A l'étape 1, la cellule reçoit un stimulus extérieur. Si ce stimulus est supérieur à un certain seuil, la cellule se dépolarise principalement grâce à un canal d'ion sodium entrant dans la cellule (Figure 4.9 : entre 2 et 3). La dépolarisation est très rapide. En réaction, des ions principalement potassium et calcium migrent à travers la membrane de la cellule, permettant un retour progressif vers le potentiel d'équilibre, c'est à dire la repolarisation (étape 4).

Un modèle du comportement électrophysiologique d'une cellule vérifie les caractéristiques de base suivantes :

- une cellule est activée seulement si elle reçoit une stimulation supérieure à un certain seuil.
- la forme du potentiel d'action ne dépend pas de la forme de la stimulation mais des caractéristiques de la cellule (et donc du modèle choisi pour celle-ci).
- il existe une période réfractaire durant laquelle la cellule ne peut être excitée.

Au niveau cellulaire, la modélisation consiste en l'étude de la relation entre les courants ioniques transmembranaires et les potentiels intracellulaires et extracellulaires. Les modèles cellulaires sont d'autant plus complets qu'ils prennent en compte plus de courants ioniques et plus de phénomènes cellulaires [BARDOU *et al.*1996, NOBLE et RUDY2001]. Les plus anciens modèles du transport des ions à travers la membrane de la cellule ont été proposés par [HODGKIN et HUXLEY1952] sur la base de mesures expérimentales effectuées sur des cellules nerveuses.

On note  $I$  le courant sortant de la cellule. Le courant  $I(t)$  à un instant  $t$  est dû aux ions qui passent à

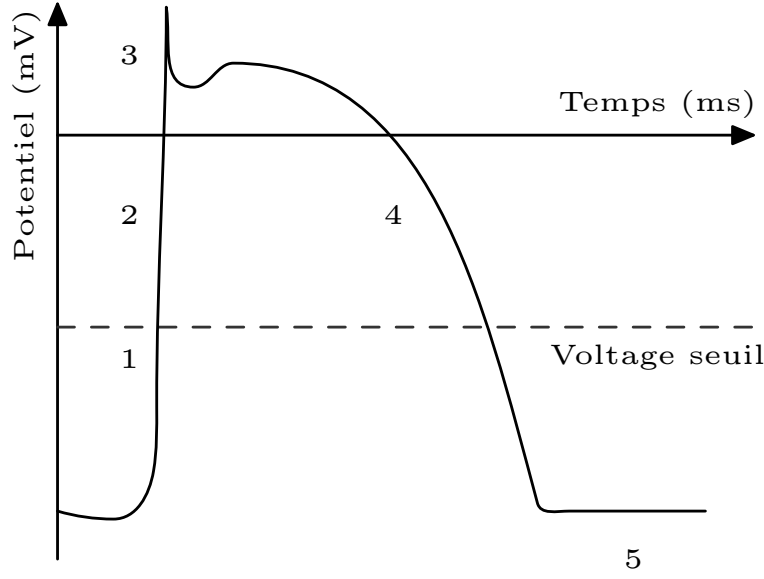


FIG. 4.9 – Potentiel d'action au niveau d'une cellule.

travers la membrane et à la variation temporelle du potentiel membranaire  $V$ . Ce qui donne :

$$I(t) = C \frac{dV}{dt} + I_i \quad (4.1)$$

où  $C$  est la capacité de la membrane. Sur la base de données expérimentales, [HODGKIN et HUXLEY1952] ont proposé :

$$I_i = I_{Na} + I_K + I_L = g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) + g_K n^4 (V - V_K) + g_L (V - V_L) \quad (4.2)$$

où  $V$  est le potentiel,  $I_{Na}$ ,  $I_K$  et  $I_L$  sont respectivement les courants de sodium, de potassium et la contribution du reste de ions. Les  $g$  sont des conductances constantes et  $V_{Na}$ ,  $V_K$  et  $V_L$  sont des constantes représentant les potentiels d'équilibres. Les fonctions  $m$ ,  $n$  et  $h$  sont à valeurs entre 0 et 1 et sont déterminées par les équations différentielles suivantes :

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V)(1 - m) - b_m(V)m \quad (4.3)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V)(1 - n) - b_n(V)n \quad (4.4)$$

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V)(1 - h) - b_h(V)h \quad (4.5)$$

Les fonctions  $\alpha_m$ ,  $\alpha_n$ ,  $\alpha_h$ ,  $b_m$ ,  $b_n$  and  $b_h$  ont été déterminées empiriquement en ajustant les résultats avec les données.

En utilisant l'équation (4.2) pour préciser  $I_i$  dans l'équation (4.1), on obtient :

$$C \frac{dV}{dt} = -g_{Na} m^3 h (V - V_{Na}) - g_K n^4 (V - V_K) - g_L (V - V_L) \quad (4.6)$$

Les équations (4.3) à (4.6) constituent un modèle 0D de 4 équations différentielles à 4 variables.

Dans [HODGKIN et HUXLEY1952], les auteurs proposent la modélisation du potentiel d'action d'une cellule nerveuse. Il se présente sous la forme d'une courte impulsion. Au contraire, le potentiel d'action des cellules cardiaques est caractérisé par un long plateau entre la dépolarisation et la repolarisation et une repolarisation plus progressive. Les premiers travaux traitant de la modélisation des cellules cardiaques ont consisté

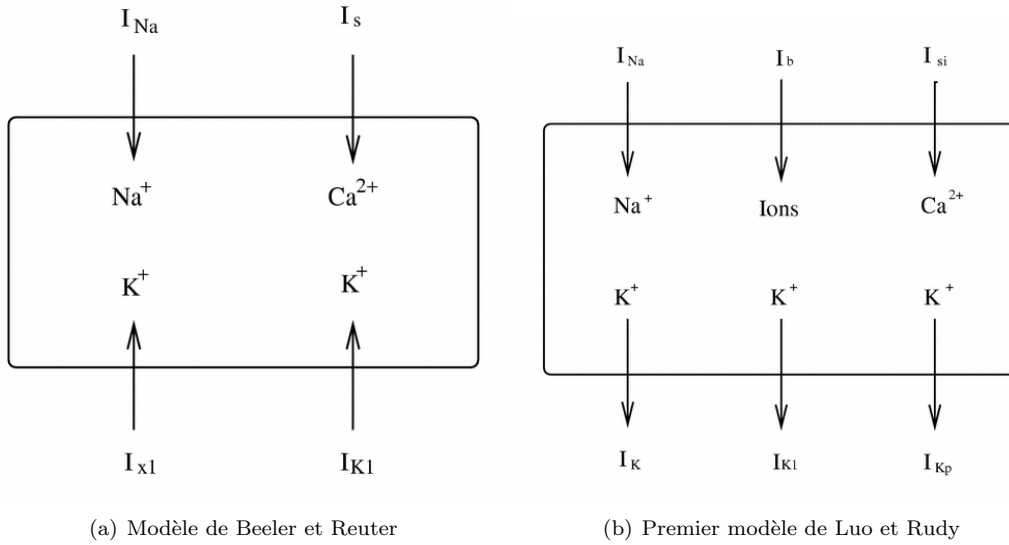


FIG. 4.10 – Représentation schématique des modèles de Beeler et Reuter et de Luo et Rudy. <http://www.cellml.org/>

à montrer qu'il était possible de modifier le modèle proposé par [HODGKIN et HUXLEY1952] pour modéliser un potentiel d'action avec un long plateau comme dans les modèles proposés dans [FITZHUGH1960, NOBLE1960]. [NOBLE et RUDY2001] retracent précisément l'évolution de la modélisation de cellules cardiaques et le rôle des mesures expérimentales dans les progrès de modélisation. [BEELER et REUTER1977] ont été les premiers à formuler un modèle du potentiel d'action pour les cellules cardiaques des ventricules pour les mammifères en utilisant les équations du type [HODGKIN et HUXLEY1952]. Ce modèle, basé sur des mesures, prend en compte 4 courants ioniques (un courant sodique, un courant d'ions calcium et deux courants de potassium). Le modèle obtenu est un modèle à 8 variables (Figure 4.10(a)). Le progrès des mesures électrophysiologiques a permis à Luo et Rudy de proposer un modèle plus complet toujours basé sur des équations à la Hodgkin et Huxley [LUO et RUDY1991] (Figure 4.10(b)). Ce modèle a ensuite été amélioré en incorporant une description plus précise de la régulation de la concentration de calcium intracellulaire et les mouvements d'ions à travers la membrane cellulaire et vers le réticulum sarcoplasmique [LUO et RUDY1994, FABER et RUDY2000]. La figure 4.11 montre le nombre de phénomènes pris en compte dans la version la plus évoluée du modèle [FABER et RUDY2000]. [PRIEBE et BEUCKELMANN1998] ont proposé une extension des modèles de Luo et Rudy spécifiques aux cellules ventriculaires humaines.

La complexité des modèles détaillant les différents courants ioniques a amené à l'élaboration de modèles phénoménologiques plus simples, capturant les principales caractéristiques des courants ioniques. L'un des plus connus est le système de FitzHugh-Nagumo [FITZHUGH1961, NAGUMO *et al.*1962]. Cette simplification, expliquée par exemple dans [MURRAY2002, FRANÇOISE2003], est basée sur la constatation que les échelles de temps des variations de  $m$ ,  $n$  et  $h$  sont différentes. En effet, les variations de  $m$  sont beaucoup plus rapides que les deux autres. Le modèle de FitzHugh-Nagumo suppose que la variation est suffisamment rapide pour que  $m$  se relaxe presque instantanément vers sa valeur d'équilibre correspondant à  $dm/dt = 0$ . En supposant en plus que  $h$  est constante, on montre qu'on obtient alors un système de la forme (voir [FRANÇOISE2003] pour plus de détails) :

$$\frac{dv}{dt} = f(v) - w \quad (4.7)$$

$$\frac{dw}{dt} = bv - \gamma w \quad (4.8)$$

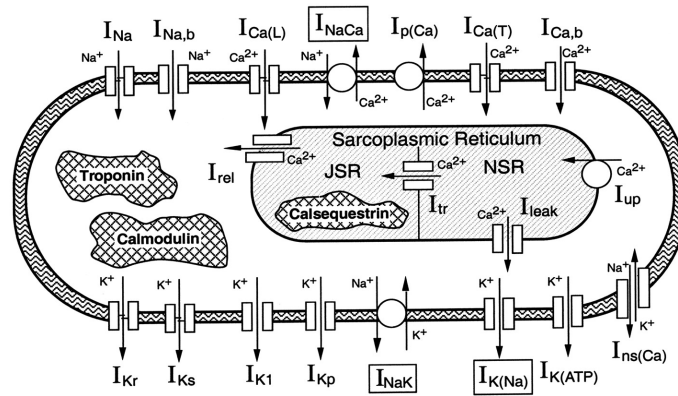


FIG. 4.11 – Modèle de fonctionnement d'une cellule ventriculaire de Luo et Rudy, extrait de [FABER et RUDY2000].

avec  $f(v) = v(a - v)(v - 1)$  et  $0 < a < 1$ .

Dans des conditions normales, les cellules du myocarde sont électriquement couplées entre elles, ce qui permet la propagation d'un potentiel d'action dans le ventricule. Une première classe de modèles macroscopiques s'obtient en ajoutant à un modèle cellulaire donné une modélisation de l'interaction entre cellules. La propagation dans le volume du myocarde est introduite naturellement en ajoutant un terme de diffusion. De cette manière, on transforme le modèle cellulaire de FitzHugh-Nagumo (équations 4.8) en un modèle de propagation :

$$\frac{dv}{dt} = \operatorname{div}(D\nabla v) + f(v) - w \quad (4.9)$$

$$\frac{dw}{dt} = bw - \gamma w \quad (4.10)$$

Dans le cadre d'un milieu anisotrope,  $D$  est une matrice reflétant l'anisotropie de la conduction dans le milieu. Les modèles plus précis, comme Luo et Rudy [LUO et RUDY1991, LUO et RUDY1994] et les suivants [PRIEBE et BEUCKELMANN1998] posent plus de problèmes quand on les étend à un niveau macroscopique. Il est plus difficile de garantir leur stabilité et le nombre de variables très important les rend coûteux à mettre en œuvre. Des modèles intermédiaires ont été développés, à partir des modèles complets, ne retenant pas tous les détails de tous les courants ioniques connus [FENTON et KARMA1998, BERNUS *et al.*2002]. Ainsi, [BERNUS *et al.*2002] proposent une réduction du modèle de cellule ventriculaire humaine de [PRIEBE et BEUCKELMANN1998] à un système de 6 variables.

Les modèles bidomains [GESELOWITZ et MILLER.1983] pour la description électrophysiologique des tissus cardiaques considèrent le tissu cardiaque comme deux domaines séparés et continus qui occupent l'espace occupé par le tissu. Ces deux domaines représentent les espaces intracellulaire et extracellulaire. On appelle  $u_e$  le potentiel extracellulaire et  $u_i$  le potentiel intracellulaire. Alors le potentiel transmembranaire  $u$  correspond à  $u = u_i - u_e$ . Ces modèles se sont révélés utiles par exemple pour la compréhension du phénomène de défibrillation. Ces modèles sont délicats à implémenter (schémas numériques spécifiques [PENNACHIO2004]) et possèdent de nombreux paramètres.

Le moment de la dépolarisation peut être étudiée grâce à des méthodes par perturbations singulières [KEENER1991, COLLI-FRAZONE et GUERRI1993], ce qui permet d'obtenir un modèle mathématique de l'onde de dépolarisation. L'équation obtenue est une équation eikonale-courbure. Si on note  $t$ , le temps de dépolarisation,  $c_0$  la vitesse de propagation et si  $\mathbf{M}$  désigne une matrice reflétant l'anisotropie due aux fibres, [KEENER1991] a obtenu l'équation parabolique eikonale-courbure suivante :

$$c_0 \sqrt{\nabla t \cdot \mathbf{M} \nabla t} - \sqrt{\nabla t \cdot \mathbf{M} \nabla t} \operatorname{div} \left( \frac{\mathbf{M} \nabla t}{\sqrt{\nabla t \cdot \mathbf{M} \nabla t}} \right) = 1 \quad (4.11)$$

et [COLLI-FRAZONE et GUERRI1993] ont obtenu l'équation eikonale-diffusion elliptique suivante :

$$c_0\sqrt{\nabla t \cdot \mathbf{M} \nabla t} - \operatorname{div}(\mathbf{M} \nabla t) = 1 \quad (4.12)$$

Ces deux équations ont en commun le terme d'une équation eikonale anisotrope :

$$c_0\sqrt{\nabla t \cdot \mathbf{M} \nabla t} = 1 \quad (4.13)$$

La matrice  $\mathbf{M}$  permet de prendre en compte la direction des fibres. Dans le cas isotrope ( $\mathbf{M} = Id$ ), l'équation eikonale est :

$$c_0|\nabla t| = 1$$

et c'est l'équation d'un front qui se propage à une vitesse  $c_0$  donnée [SETHIAN1999].

A cette équation eikonale, s'ajoute un terme de courbure pour l'équation (4.11) et un terme de diffusion pour l'équation (4.12). Ce point sera abordé en détail pour l'équation eikonale-courbure dans la section 4.2.4. Un schéma spécifique basé sur des éléments finis est proposé dans [TOMLINSON *et al.*2002]. Ce qui permet aux auteurs de [KERCKHOFFS *et al.*2003] de comparer des simulations obtenues avec les temps de dépolarisation mesurés.

### 4.2.2 Choix du modèle

Les données que nous avons décrites dans la section 4.1 sont des évolutions temporelles de potentiels extracellulaires dont sont extraits des temps de dépolarisation. De plus le nombre de mesures effectuées est limité (128 à 250 électrodes pour les données du NIH), ce qui ne permet d'estimer qu'un nombre limité de paramètres. Comme nous le verrons au cours de la section 5.1, l'estimation de paramètres nécessite dans le plupart des cas d'effectuer de nombreuses simulations. Nous avons donc préféré utiliser un modèle monodomaine qu'un modèle bidomaine dont la simulation est plus complexe. En contrepartie, nous ne disposons pas d'un potentiel extracellulaire simulé mais seulement du potentiel transmembranaire ou des temps de dépolarisation.

Il n'existe pas de relation analytique entre un potentiel transmembranaire et un potentiel extracellulaire. En conséquence, nous ne pourrions baser notre comparaison que sur la comparaison de caractéristiques qu'il est possible d'extraire du potentiel extracellulaire et du potentiel transmembranaire, tels que les temps de dépolarisation et les temps de repolarisation lorsqu'il est possible de les extraire. Les données de notre problème sont donc des temps de dépolarisation et éventuellement de repolarisation. Ainsi, les modèles décrivant très précisément les courants ioniques sont probablement trop sophistiqués pour notre application car ils sont beaucoup plus précis que ce que nous pouvons observer.

En outre, en estimant les paramètres d'un modèle comportant beaucoup de variables ou de paramètres, nous serions vite confrontés à des problèmes de stabilité et au faible nombre de données disponibles. Nous devons donc utiliser un modèle phénoménologique avec peu de variables permettant de simuler facilement les temps de dépolarisation et éventuellement les temps de repolarisation. Deux types de modèles répondent à ces exigences, les modèles de réaction-diffusion avec peu de variables comme le modèle de FitzHugh-Nagumo et les modèles utilisant des équations eikonales [KEENER1991, COLLI-FRAZONE et GUERRI1993]. Nous avons choisi un modèle du type FitzHugh-Nagumo [FITZHUGH1961]. Il suffit à satisfaire les exigences ci-dessus, permet d'effectuer des simulations (2D et 3D) en un temps raisonnable, et pourra aussi, si nécessaire, nous permettre de simuler la repolarisation. Aliev et Panfilov ont développé une version modifiée du modèle de FitzHugh-Nagumo adaptée aux potentiels d'action cardiaque [ALIEV et PANFILOV1996] :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \operatorname{div}(D\nabla(u)) + ku(1-u)(u-a) - uz \\ \partial_t z &= -\varepsilon(u, z)(ku(u-a-1) + z) \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon(u, z) = \varepsilon_0 + \mu_1 z / (u + \mu_2)$ . Le terme " $\mu_1 z / (u + \mu_2)$ " n'intervient que pour mieux modéliser la relation fréquence-durée du potentiel d'action (APD). Nous nous intéressons à l'étude d'un seul cycle cardiaque à la fois. Comme dans [SERMESANT2003], nous simplifions donc la deuxième équation en négligeant le

terme  $\mu_1 z / (u + \mu_2)$ . Ainsi le paramètre  $\varepsilon$  est un paramètre constant, indépendant de  $u$  et de  $z$ . Pour simplifier l'analyse des dynamiques lentes et des dynamiques rapides de ce système ainsi que pour simplifier l'expression des conditions de stabilité et de propagation, nous avons effectué le changement de variable d'adimensionnement suivant :

$$t \rightarrow \varepsilon t$$

$$x \rightarrow \varepsilon x$$

Nous obtenons alors le système d'équations aux dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_t u &= \varepsilon^2 \operatorname{div}(D \nabla(u)) + ku(1-u)(u-a) - uz & (4.14.a) \\ \partial_t z &= -(ku(u-a-1) + z) & (4.14.b) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Dans ce cadre, la variable spatiale  $x$  est normalisée entre 0 et 1, le temps de l'équation (4.14) est aussi un temps adimensionné qui ne correspond pas au temps d'une propagation réelle. Nous nous sommes ramenés à un temps physiologique par le changement d'échelle temporel  $\tau = 0.26t$ , (avec  $\tau$  le temps réel et  $t$  le temps de l'équation) de sorte que la durée du potentiel d'action soit autour du tiers de la durée du cycle. La variable  $u$  est un potentiel d'action normalisé entre 0 et 1, nous nous ramenons à un potentiel d'action physiologique par un changement d'échelle, le potentiel  $U$  en millivolts est obtenu à partir du potentiel adimensionné par la relation  $U = 100 - 80u$ . La variable  $z$  est une variable modélisant globalement les courants ioniques initiant la repolarisation. Le paramètre  $k$  contrôle la repolarisation,  $\varepsilon$  contrôle le couplage entre la dépolarisation et la repolarisation et  $a$  est un paramètre du phénomène de réaction.

L'anisotropie de la conduction qui suit la direction des fibres peut être prise en compte via la matrice  $D$ . En un point  $\mathbf{x}$ , on se place dans un repère orthonormé  $\mathcal{R}$  construit de telle sorte que le premier vecteur soit dans la direction de la fibre au point considéré. Dans ce repère, la matrice d'anisotropie  $D$  devient la matrice

$$c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$$

Le coefficient de diffusion  $c$  correspond à une conductivité et  $r$  est un nombre compris entre 0 et 1 qui désigne le rapport d'anisotropie. Il suffit alors de revenir dans le repère cartésien pour obtenir la matrice d'anisotropie  $D$ .

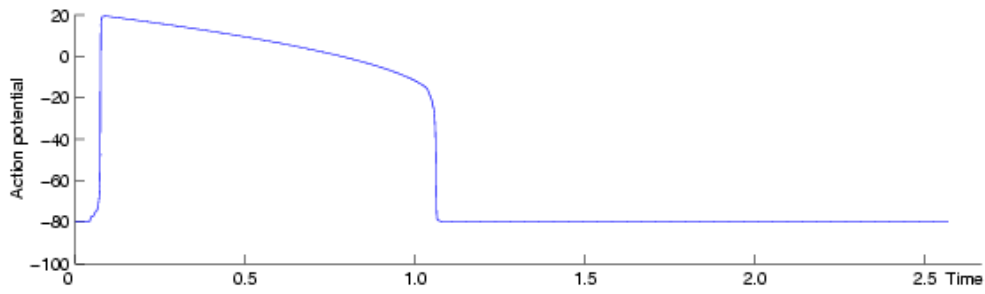
Lorsque les directions des fibres sont mal connues, nous nous contentons d'un modèle isotrope, c'est à dire que la matrice  $D$  s'écrit  $D = d Id$  où  $d$  est un scalaire que nous appellerons **coefficient de diffusion** et  $Id$  est la matrice identité. Le terme de diffusion de l'équation (4.14.a) s'écrit alors plus simplement  $\varepsilon^2 \operatorname{div}(d \nabla u)$ . Plutôt que d'utiliser une matrice  $D$ , nous n'avons plus qu'un simple paramètre scalaire  $d$  à fixer.

Des valeurs usuelles de ces paramètres peuvent être trouvées dans [ALIEV et PANFILOV1996]. Ce modèle permet de simuler quelques pathologies des ventricules comme des foyers ectopiques, des défauts ou des diminutions de conductivité (par exemple dues à une cicatrice).

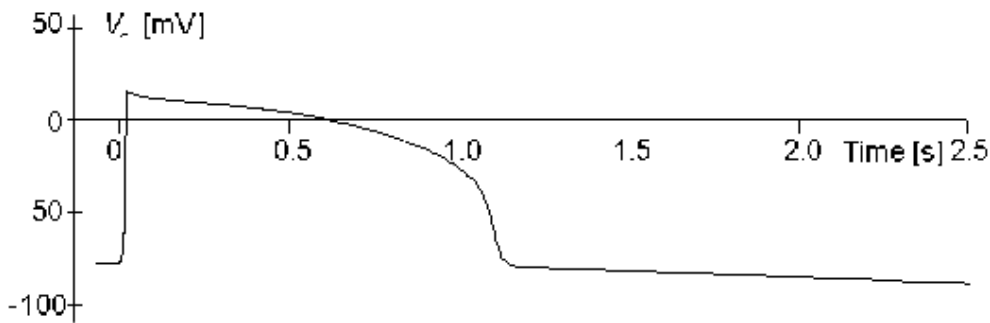
Le potentiel d'action simulé avec le système d'Aliev et Panfilov est similaire à celui observé dans le cas de mesures de potentiels d'action cardiaques mesurés sur des cellules animales ou humaines. La figure 4.12 montre la comparaison avec une cellule de grenouille [RUCH et PATTON1982]. Un modèle anisotrope 3D basé sur le modèle d'Aliev et Panfilov a été développé dans le cadre de l'action ICEMA/ICEMA-2<sup>1</sup> [AYACHE *et al.*2001, SERMESANT *et al.*2002, CHAPELLE *et al.*2001, SERMESANT2003]. Au cours de cette action, le modèle a été validé par une comparaison qualitative avec diverses données disponibles comme par exemple avec les mesures de Durrer [DURRER *et al.*1970] ou avec les mesures *in vivo* présentées dans la section 4.1. Ces comparaisons ont montré que ce modèle permettait de reproduire qualitativement la propagation de l'onde de dépolarisation dans le myocarde [SERMESANT *et al.*2003a].

<sup>1</sup>ICEMA/ICEMA-2 <http://www-rocq.inria.fr/sosso/icema2/icema2.html>





(a) Potentiel d'action simulé grâce au système d'équations aux dérivées partielles d'Aliev et Panfilov.



(b) Potentiel d'action mesuré sur une cellule cardiaque de grenouille [RUCH et PATTON1982].

FIG. 4.12 – Comparaison entre la forme d'un potentiel d'action simulé et d'un potentiel d'action mesuré sur une cellule cardiaque de grenouille [RUCH et PATTON1982].

### 4.2.3 Quelques éléments pour l'analyse qualitative 1D des modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov

Les modèles de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov sont des modèles de type réaction-diffusion. C'est à dire qu'ils allient un terme de diffusion isotrope homogène ( $\Delta u$ ), non homogène ( $\text{div}(d\nabla u)$ ) ou anisotrope ( $\text{div}(D\nabla u)$ ) et un terme de réaction,  $f(u)$  (ici un polynôme de degré 3). Le terme de réaction modélise la réaction chimique qui permet la dépolarisation ou la repolarisation. Le terme de diffusion quant à lui modélise la propagation de cette réaction de cellule en cellule. Les modèles de type réaction-diffusion interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes biologiques et chimiques. Le lecteur intéressé trouvera de nombreux exemples en chimie, épidémiologie ou dynamique des populations dans l'ouvrage suivant [MURRAY2001]. En outre ces systèmes partagent certaines propriétés et surtout une méthode d'analyse mathématique [FIFE1979]. Nous allons donner dans cette section quelques éléments d'analyse qualitative des modèles de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov en dimension 1. Des démonstrations détaillées des propriétés que nous allons évoquer dépasseraient le cadre de cette thèse et peuvent être lues dans l'une des très complètes références qui suivent [FIFE1979, KEENER1986a, BRITTON1986, KEENER1988, TYSON et KEENER1988, KEENER1991, MURRAY2002].

Les propriétés qui nous intéressent concernent les solutions de type propagation de fronts d'onde (Figure 4.13(a)) ou de potentiel d'action (Figure 4.13(b)). Pour cela nous allons expliquer le principe d'analyse des dynamiques lentes et rapides de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov. Nous verrons alors pourquoi FitzHugh-Nagumo et Aliev et Panfilov admettent des solutions de ce type. Grâce à cette analyse, nous pourrons donner des indications sur la vitesse à laquelle ces potentiels d'action se propagent et sur la durée des potentiels d'action (APD).

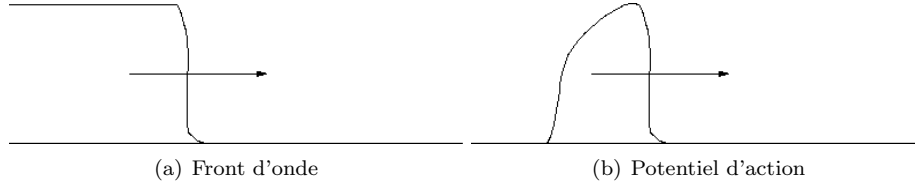


FIG. 4.13 – Solutions recherchées pour les équations de Nagumo et FitzHugh-Nagumo dans un domaine 1D. Le potentiel est représenté schématiquement en fonction de la position. La flèche désigne le sens de la propagation.

### La dynamique lente-rapide du système de FitzHugh-Nagumo.

On associe au système d'équations aux dérivées partielles de FitzHugh-Nagumo

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda u(1-u)(u-a) - z \\ \frac{\partial z}{\partial t} = ku - z \end{cases} \quad (4.15)$$

le système 0D associé qui modélise le comportement d'une seule cellule et qui s'obtient en enlevant le terme de diffusion qui assure la propagation. Le système 0D est :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda u(1-u)(u-a) - z \\ \frac{\partial z}{\partial t} = ku - z \end{cases} \quad (4.16)$$

On se place sur  $\mathbb{R}$  tout entier. On considère une condition initiale de type fonction de Heaviside. Soit  $H^a$  la fonction de Heaviside au point  $a$ , les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} u(x, 0) = H^a(x) \\ z(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

On suppose de plus que les conditions suivantes sur les paramètres sont respectées :

$$d > 0, \lambda > 0 \quad (4.18a)$$

$$0 < a < 0.5 \quad (4.18b)$$

$$k > \lambda \left( \frac{1-a}{2} \right)^2 \quad (4.18c)$$

$$\varepsilon > 0 \quad (4.18d)$$

Si les conditions (4.17) et (4.18) sont respectées, le système de FitzHugh-Nagumo admet des solutions de type équation des ondes, c'est-à-dire qu'elles sont de la forme :

$$\begin{cases} u(x, t) = U(x - ct) \\ z(x, t) = Z(x - ct) \end{cases} \quad (4.19a)$$

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} U(y) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} Z(y) = 0 \quad (4.19b)$$

Ce type de solution se présente comme sur la figure 4.13(b).

Pour l'analyse de ce système  $2 \times 2$ , il est habituel de s'intéresser à son portrait de phase. Cette étude commence par la recherche de points singuliers, c'est à dire la recherche des points où les dérivées  $\partial u / \partial t$

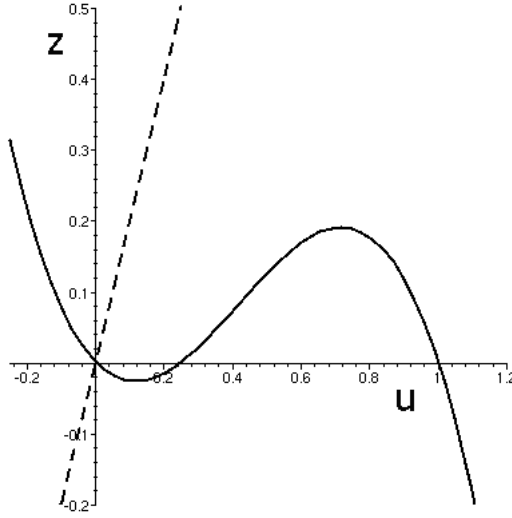


FIG. 4.14 – Isoclines du système de FitzHugh-Nagumo. La ligne pleine correspond à la première équation. La ligne discontinue correspond à la deuxième équation.

et  $\partial z/\partial t$  sont nulles simultanément. Pour cela, on étudie les isoclines nulles  $\partial u/\partial t = 0$  et  $\partial z/\partial t = 0$  et on recherche leurs points d'intersection.

$$\begin{cases} \lambda u(u-a)(1-u) - z = 0 \\ ku - z = 0 \end{cases}$$

La première isocline nulle est une cubique et la deuxième est une droite. En fonction des paramètres  $a$  et  $k$ , les deux isoclines nulles peuvent avoir un, deux ou trois points d'intersection. Les points d'intersection des deux isoclines nulles ont pour abscisse les solutions de l'équation de degré 3 :

$$\begin{aligned} & \lambda u(1-u)(u-a) - ku = 0 \\ \Leftrightarrow & u(-\lambda u^2 + \lambda(1+a)u - (\lambda a + k)) = 0 \\ \Leftrightarrow & u = 0 \text{ ou } -\lambda u^2 + \lambda(1+a)u - (\lambda a + k) = 0 \end{aligned}$$

Le polynôme  $-\lambda u^2 + \lambda(1+a)u - (\lambda a + k)$  a pour discriminant  $\Delta = \lambda^2(1+a)^2 - 4\lambda(\lambda a + k)$ . Sachant que  $\lambda > 0$ ,  $0 < a < 0.5$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow k > \lambda \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$$

Lorsque  $\Delta < 0$ , le seul point singulier (i.e. point d'intersection entre les isoclines nulles) est le point de coordonnées  $(0,0)$ . Ce cas est celui présenté par la figure 4.14. On peut montrer que si la condition (4.18c) n'est pas respectée, il n'y a pas de solution de type onde. On retrouve ainsi une des conditions nécessaires à l'existence d'une solution de type onde, la condition (4.18c).

On suppose toutes les conditions (4.18) vérifiées. Le point  $(0,0)$  est le seul point singulier. Ce point singulier est un point attractif. En effet, le système linéarisé autour du point d'équilibre ( $u = 0, z = 0$ ) est :

$$\begin{cases} -\lambda a u - z = 0 \\ ku - z = 0 \end{cases}$$

Grâce à la classification des points singuliers des systèmes linéaires, on se ramène à étudier les valeurs propres de la matrice :

$$\begin{bmatrix} -\lambda a & -1 \\ k & -1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice a deux valeurs propres distinctes,  $\nu_1$  et  $\nu_2$  :

$$\nu_1 = \frac{-(\lambda a + 1) - \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4k}}{2} \quad (4.20a)$$

$$\nu_2 = \frac{-(\lambda a + 1) + \sqrt{(\lambda - 1)^2 - 4k}}{2} \quad (4.20b)$$

Ces deux valeurs propres sont négatives. C'est pourquoi le point singulier  $(0, 0)$  est attractif. Les petites perturbations autour de cet état de repos se relaxent rapidement vers le point  $(0, 0)$ . Ce qui signifie que si la stimulation est trop faible, aucun potentiel d'action ne se forme et la cellule ne s'active donc pas. Par contre, si la perturbation dépasse un certain seuil, l'état du système va effectuer un long trajet avant de revenir finalement vers  $(0, 0)$ . Maintenant nous allons suivre ce trajet.

Pour identifier les différentes étapes de la formation du potentiel d'action, nous avons besoin de l'étude des dynamiques lentes-rapides du système de FitzHugh-Nagumo. Le cours de J.P. Françoise présente ce type d'analyse [FRANÇOISE2003]. Cette analyse est basée sur les remarques suivantes. La variable  $u$ , le potentiel d'action, est une variable dite rapide car elle est soumise à des variations rapides aux moments de la dépolarisation et de la repolarisation du matériau. Au contraire, la variable  $z$  est dite lente car elle n'a à aucun moment de variations brutales. L'analyse lente-rapide est basée sur la séparation des moments à évolution rapide (dépolarisation, repolarisation) et des moments à variations lentes.

1. **Les variations lentes.** Comme  $\varepsilon$  est petit, et que les variations de  $u$  sont faibles,  $\varepsilon \partial u / \partial t$ , est négligeable devant les autres termes. La première équation du système peut donc être approchée par :

$$ku(1 - u)(u - a) - z = 0$$

C'est une équation algébrique en  $u$  et  $z$  ne faisant plus intervenir de dérivées partielles. On retrouve l'équation de la première isocline nulle du système de FitzHugh-Nagumo représentée en trait pleins figure 4.14. Au moment des variations lentes, on suit donc l'isocline nulle cubique et la solution du système vérifie le système :

$$\begin{cases} 0 & = \lambda u(1 - u)(u - a) - z \\ \frac{\partial z}{\partial t} & = ku - z \end{cases} \quad (4.21)$$

2. **Les variations rapides.** Quand  $u$  est à variations rapides, alors on peut faire l'approximation que la variable  $z$ , qui est une variable lente, est constante. Le système peut alors être approché par l'équation sur  $u$  :

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \lambda u(1 - u)(u - a) - z_{\text{cst}} \quad (4.22)$$

Cette équation est appelée équation de Nagumo et son étude est classique. Pour cela, on se référera par exemple au chapitre 4 de [FIFE1979].

Suivons maintenant la trajectoire de la solution dans le plan de phase lorsque l'initialisation  $u_0$  est suffisante pour qu'un potentiel d'action se forme. Prenons par exemple la condition initiale  $A = (u_0, 0)$  représentée sur la figure 4.15. Suivons alors sa trajectoire (ABCDO) sur la figure 4.15.

- La dépolarisation est une phase rapide. Le potentiel  $u$  augmente rapidement en suivant l'équation de Nagumo pour atteindre la valeur 1 alors que  $z$ , la variable lente reste quasiment constante, proche de 0. On arrive alors au point  $B$ .

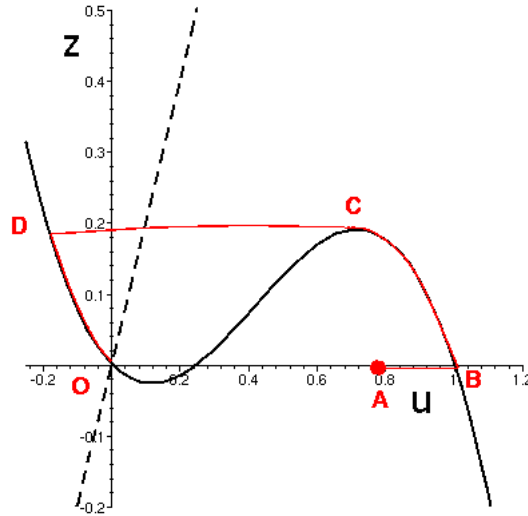


FIG. 4.15 – Solution du système de FitzHugh-Nagumo représentée schématiquement dans le plan de phase.

- En  $B$ , la trajectoire rencontre l'isocline nulle correspondant à  $\partial u/\partial t = 0$ . Puisque  $\partial u/\partial t$  s'approche de 0, on passe alors dans une situation de dynamique lente à laquelle on peut appliquer le raisonnement ci-dessus (équation 4.21). La trajectoire suit alors l'isocline nulle  $\partial u/\partial t = 0$ .
- Entre le point  $B$  et le point  $C$ ,  $z$  croît lentement et  $u$  décroît lentement. Mais ceci n'est possible que jusqu'au point  $C$ . En effet, si on veut continuer à suivre l'isocline nulle après  $C$ ,  $z$  doit décroître. Or on se situe en dessous de la deuxième isocline nulle. Donc, dans ce domaine,  $\partial z/\partial t \geq 0$ . La trajectoire décroche donc de l'isocline nulle. Entre les points  $B$  et  $C$  se trouve le plateau, c'est-à-dire le laps de temps durant lequel la cellule est dépolarisée.
- Que se passe-t-il si l'isocline nulle  $\partial z/\partial t$  intersecte l'isocline nulle  $\partial u/\partial t$  ailleurs qu'à l'origine ? Comme le montre la figure 4.16, la solution se comporte de la même façon au début. Il y a problème quand la trajectoire s'apprête à intersecter l'isocline nulle  $\partial z/\partial t = 0$ , en effet à ce moment là  $\partial z/\partial t$  change de signe, et donc  $z$  doit décroître. La trajectoire ne peut donc pas continuer à suivre l'isocline nulle  $\partial u/\partial t = 0$  jusqu'au point  $C$ .
- A partir du point  $C$ , en s'éloignant de l'isocline nulle  $\partial u/\partial t = 0$ , on retrouve des variations rapides de  $u$  suivant l'équation de Nagumo tandis que  $z$  est quasiment constant.
- Au point  $D$ , la trajectoire intersecte à nouveau l'isocline nulle cubique  $\partial u/\partial t = 0$ . La dynamique du système est à nouveau lente et le point rejoint ensuite l'état d'équilibre  $O=(0,0)$  en suivant l'isocline nulle. En  $D$ , la trajectoire a croisé l'isocline nulle  $\partial z/\partial t = 0$ .  $z$  doit maintenant décroître.

### Vitesse de propagation et durée de plateau pour le modèle de FitzHugh-Nagumo.

Grâce aux éléments du paragraphe ci-dessus, il est possible de déterminer la vitesse de propagation de l'onde de dépolarisation et la durée du plateau en fonction des paramètres du système. Pour déterminer la vitesse de l'onde de dépolarisation, il faut s'intéresser à la partie rapide c'est-à-dire à l'équation de Nagumo (4.22). On néglige la repolarisation et on obtient l'équation de Nagumo sans terme constant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(d\nabla u) + \lambda f(u) \quad (4.23)$$

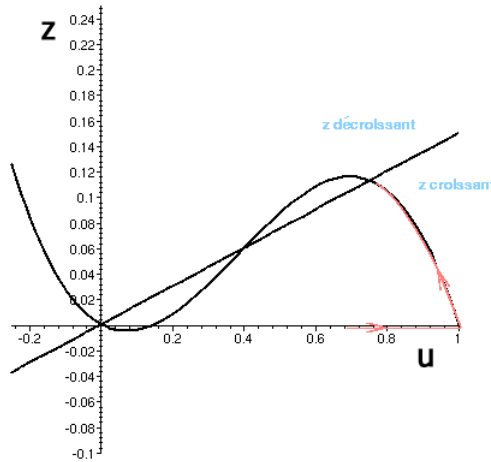


FIG. 4.16 – Première phase de la solution du système de FitzHugh-Nagumo représentée schématiquement dans le plan de phase quand  $k \leq \left(\frac{1-a}{2}\right)^2$ .

avec  $f(u) = u(1-u)(u-a)$ . Les solutions des équations de réaction-diffusion sous cette forme sont déterminées et étudiées de manière détaillée dans [FIFE1979]. Il existe des solutions de type front d'onde à l'équation de Nagumo et il est même possible de trouver une solution explicite [MURRAY2002]. En effet, dire qu'il existe des solutions de la forme front d'onde est équivalent à supposer qu'on peut trouver des solutions sous la forme :

$$u(x, t) = U(z), z = x - ct,$$

avec les conditions aux limites :

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = 1. \quad (4.24)$$

Alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cU'(z), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = U''(z). \quad (4.25)$$

En remplaçant (4.25) dans l'équation de Nagumo (4.23), on obtient l'équation différentielle :

$$U'' + cU' + \lambda U(1-U)(U-a) = 0 \quad (4.26)$$

Cette équation différentielle peut être résolue explicitement. Pour cela, on commence par résoudre l'équation différentielle intermédiaire très facile :

$$U' = \alpha U(U-1) \quad (4.27)$$

avec  $\alpha$  un paramètre strictement positif. Les solutions de cette équation sont de la forme :

$$U(z) = \frac{1}{1 + \gamma \exp(\alpha z)} \quad (4.28)$$

et vérifient les deux conditions aux limites (4.24).

On recherche maintenant les solutions de l'équation (4.27) qui sont aussi solution de (4.26). On introduit donc l'équation (4.27) dans l'équation (4.26), ce qui donne :

$$d\alpha^2 U(U-1)(2U-1) + c\alpha U(U-1) - \lambda U(U-1)(U-a) = 0 \quad (4.29)$$

$$\Leftrightarrow U(U-1)[d\alpha^2(2U-1) + c\alpha - \lambda(U-a)] = 0 \quad (4.30)$$

$$\Leftrightarrow U(U-1)[(2d\alpha^2 - \lambda) - (d\alpha^2 - c\alpha - a\lambda)] = 0 \quad (4.31)$$

Les solutions constantes  $U \equiv 0$  et  $U \equiv 1$  ne sont pas de type front d'onde car elles ne vérifient pas les conditions limites (4.25). Donc une condition nécessaire et suffisante pour que (4.29) soit vérifiée est

$$2d\alpha^2 - \lambda = 0 \quad \text{et} \quad d\alpha^2 - c\alpha - a\lambda = 0$$

soit

$$\alpha = \sqrt{\frac{\lambda}{2d}} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2\lambda d}(0.5 - a) \quad (4.32)$$

En remplaçant  $\alpha$  par sa valeur dans (4.28), on obtient des solutions de la forme

$$U(z) = \frac{1}{1 + \gamma \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2d}} z\right)}$$

$\gamma$  est une constante qui est définie à partir des conditions initiales.

Par la même occasion, nous avons donc obtenu la vitesse de propagation de l'onde solution de l'équation de Nagumo :

$$\boxed{c = \sqrt{2\lambda d}(0.5 - a)}. \quad (4.33)$$

En négligeant la repolarisation dans l'équation (4.22) modélisant la dépolarisation, on obtient l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \left( \operatorname{div}(d\nabla u) + \frac{\lambda}{\varepsilon} f(u) \right)$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda/\varepsilon$  et  $d$  par  $\varepsilon d$  la vitesse de l'onde de dépolarisation est donnée par :

$$c = \sqrt{2\frac{\lambda}{\varepsilon}\varepsilon d}(0.5 - a) = \sqrt{2\lambda d}(0.5 - a).$$

et ne dépend pas de  $\varepsilon$ .

Le calcul de la durée du potentiel d'action correspond à la durée du plateau entre dépolarisation et repolarisation. Au début de la propagation, le front de repolarisation se propage (à une vitesse  $c_R$ ) plus rapidement que l'onde de dépolarisation, puis  $c_R$  diminue et tend vers la vitesse  $c$  de l'onde de dépolarisation. En conséquence, la durée du potentiel d'action (APD) diminue et tend vers une valeur asymptotique. Nous recherchons cette valeur asymptotique. Pour cela nous allons faire le raisonnement heuristique suivant :

En regardant le problème ponctuel, on trouve :

$$APD = \int_{t_0}^{t_1} dt$$

où  $t_0$  correspond au temps de dépolarisation et  $t_1$  au temps de repolarisation, ce qui correspond à ce qu'il se passe entre les points  $B$  et  $C$  de la figure 4.15. Pendant le plateau, nous nous trouvons dans le cas d'une dynamique lente, c'est-à-dire de l'équation (4.21). De (4.21), nous pouvons tirer que

$$dt = \frac{dz}{ku - z} \quad (4.34)$$

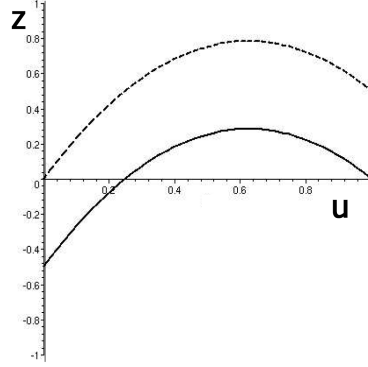


FIG. 4.17 – Isoclines du système d'Aliev-Panfilov. La ligne pleine correspond à la première équation. La ligne discontinue correspond à la deuxième équation.

Nous utilisons la relation (4.34) pour faire un changement de variable dans le calcul de l'intégrale. Ce qui donne :

$$APD = \int_0^{f(u_2)} \frac{dz}{kh(z) - z}$$

où  $u_2$  désigne le maximum local de  $f$  et  $h$  désigne la fonction inverse de  $f$  sur l'intervalle  $[u_2; +\infty]$ . Pour conclure, on peut montrer que  $u_2 = (2 - a)/3$  et donc quand  $t \rightarrow +\infty$ , la durée du potentiel d'action est :

$$APD = \int_0^{f(\frac{2-a}{3})} \frac{dz}{kh(z) - z}$$

### Cas d'Aliev et Panfilov

Une bonne partie de l'analyse du système de FitzHugh-Nagumo que nous venons de décrire peut être adaptée au modèle d'Aliev et Panfilov :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} (d \frac{\partial u}{\partial x}) + ku(1-u)(u-a) - uz \\ \frac{\partial z}{\partial t} = (-z - ku(u-a-1)) \end{cases} \quad (4.35)$$

Comme pour le système de FitzHugh-Nagumo, ce système modélise l'évolution d'une onde. Les isoclines nulles du système (4.35) sont données par

$$\begin{aligned} u[k(1-u)(u-a) - z] &= 0 \\ -z - ku(u-a-1) &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \{u = 0\} \cup \{z = k(1-u)(u-a)\} \\ \{z = -ku(u-a-1)\} \end{aligned}$$

Ces deux isoclines nulles sont représentées figure 4.17, la première, formée de deux composantes, en traits pleins et la deuxième, qui est parallèle à la composante quadratique de la première, en pointillés.

Les isoclines nulles du système (4.35) sont assez différentes de celles de FitzHugh-Nagumo mais partagent avec celles ci quelques caractéristiques fondamentales. Comme dans le système de FitzHugh-Nagumo, le



point  $(0, 0)$  est un point singulier. En linéarisant le système et en utilisant la classification des points singuliers des systèmes linéaires, on démontre que ce point est aussi un point d'équilibre stable. C'est un nœud attractif.

Le système d'Aliev-Panfilov sous la forme (4.35) permet aussi une analyse du système selon une dynamique dite lente-rapide. De même que pour le système de FitzHugh-Nagumo, on distingue deux types de moments :

1. Quand  $u$  varie peu. Comme  $\varepsilon$  est petit, et que les variations de  $u$  sont faibles, la première équation du système peut être approchée par :

$$0 = ku(1 - u)(u - a) - uz.$$

C'est une équation algébrique en  $u$  et  $z$ . Dans ce cas, on résout le système :

$$\begin{cases} 0 &= ku(1 - u)(u - a) - uz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -z - ku(u - a - 1) \end{cases} \quad (4.36)$$

On peut alors remplacer  $z$  dans le deuxième membre de la deuxième équation par son expression en fonction de  $u$ , ce qui permet d'obtenir le système suivant :

$$\begin{cases} 0 &= ku(1 - u)(u - a) - uz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -k(1 - u)(u - a) - ku(u - a - 1) \end{cases} \quad (4.37)$$

que nous allons utiliser ultérieurement.

2. Quand  $u$  est à variations rapides, alors on peut considérer que la variable  $z$  est constante. Le système peut alors être approché par l'équation sur  $u$  :

$$\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( d \frac{\partial u}{\partial x} \right) + ku(1 - u)(u - a) - uz_{\text{cst}} \quad (4.38)$$

Cette équation (4.38) est proche de l'équation de Nagumo, si on néglige la repolarisation ( $z = 0$ ), on obtient exactement l'équation de Nagumo (4.23).

On suit maintenant la trajectoire d'un point dans le plan de phase. Les conditions initiales sont dans notre cas :

$$\begin{cases} u(0) &= u_0, \quad u_0 \in [0; 1] \\ z(0) &= 0 \end{cases}$$

Comme pour FitzHugh-Nagumo, le point  $(0,0)$  est un point singulier attractif et si l'initialisation  $u$  est d'une amplitude trop faible, la solution est tout de suite attirée par le point d'équilibre stable et  $u$  diminue lentement jusqu'à atteindre 0. Il n'y a alors pas d'activation de la cellule et donc pas de formation d'un potentiel d'action. C'est le cas pour le point  $A$  de l'exemple de la figure 4.18. Suivons sa trajectoire (ABCDO) sur la figure 4.18.

- Le potentiel  $u$  augmente rapidement pour atteindre la valeur 1 alors que  $z$ , la variable lente reste quasiment constante, proche de 0. On arrive au point B.
- En  $B$ , la trajectoire rencontre l'isocline nulle correspondant à  $\partial u / \partial t = 0$ . La situation est alors la même que pour le système de FitzHugh-Nagumo et la solution suit alors approximativement les équations (4.36) et (4.37). La trajectoire suit alors l'isocline nulle  $\partial u / \partial t = 0$ .
- Entre le point  $B$  et le point  $C$ ,  $z$  croît lentement et  $u$  décroît lentement. Mais ceci n'est possible que jusqu'au point  $C$  pour les mêmes raisons que pour le système de FitzHugh-Nagumo. La trajectoire décroche de l'isocline nulle. Entre les points B et C se trouve le plateau.
- A partir du point  $C$ , on se retrouve à nouveau dans une dynamique rapide. La variable  $u$  varie alors très rapidement alors que  $z$  est quasiment constant.

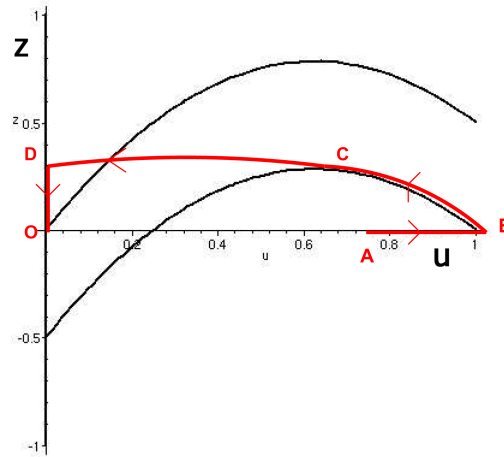


FIG. 4.18 – Solution du système d'Aliev-Panfilov représentée schématiquement dans le plan de phase.

- Au point  $D$ , la trajectoire rejoint la partie  $u = 0$  de l'isocline nulle  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ . Le point rejoint ensuite l'état d'équilibre  $O=(0,0)$  en suivant l'isocline nulle.

On remarque alors que la forme particulière des isoclines nulles permet de garantir un potentiel entre 0 et 1 pour des conditions initiales correctes, ce qui est plus en accord avec les potentiels d'action cardiaques (Figure 4.12).

Pour confirmer le raisonnement heuristique ci-dessus que nous avons adapté à partir de l'étude des équations de FitzHugh-Nagumo, nous avons comparé la forme théorique de la trajectoire dans le plan de phase à une trajectoire observée sur une simulation 1D (voir la section 4.2.5 pour les détails de la mise en œuvre). Cette comparaison est présentée figure 4.19. En bleu, on peut voir le portrait de phase obtenu grâce à cette simulation qui est très proche de la courbe en rouge qui représente l'équation  $f(u, z) = 0$  avec  $f(u, z) = k(u - a)(1 - u) - z$ . Nous avons représenté les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sur la solution représentée dans l'espace des trajectoires sur la figure 4.20. On constate alors aisément que les variations de  $z$  sont lentes et celles de  $u$  rapides. Au moment de la dépolarisation, les points  $A$  et  $B$  sont confondus. De même, au moment de la repolarisation  $C$  et  $D$  sont confondus.

En raisonnant comme pour les équations de FitzHugh-Nagumo, on peut, grâce à l'équation (4.37) calculer la durée du plateau. Pour cela on procède comme pour FitzHugh-Nagumo.

$$APD = \int_{t_0}^{t_1} dt$$

Le changement de variable est déterminé par l'équation du système en dynamique lente (4.37)

$$dt = \frac{dz}{-z - k(u - a - 1)}.$$

Les bornes deviennent alors

$$\begin{aligned} t_0 &\rightarrow z = 0 \text{ (en B),} \\ t_1 &\rightarrow z = f\left(\frac{1+a}{2}\right) \text{ (en C).} \end{aligned}$$

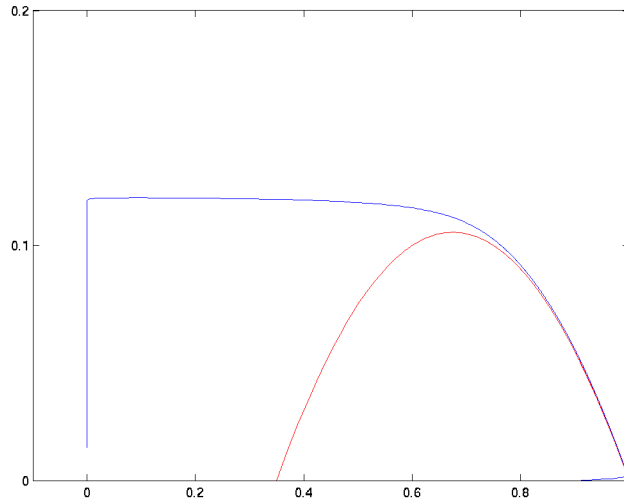


FIG. 4.19 – Solution du système d’Aliev-Panfilov issue d’une simulation représentée dans le plan de phase. Comparaison avec la composante quadratique de la première isocline nulle  $\partial u/\partial t = 0$

Ce qui donne

$$APD = \int_0^{f(\frac{1+a}{2})} \frac{dz}{-z - k(u - a - 1)}$$

Il est plus commode de faire un changement de variable pour intégrer en  $u$ .

$$APD = \int_{u=\frac{1+a}{2}}^{u=1} \frac{h'(u)}{h(u) - ku(u - a - 1)} du$$

avec  $h(u) = k(1 - u)(u - a)$ . Cette intégrale se calcule évidemment explicitement et donne :

$$\boxed{APD = \frac{1}{4} \frac{a^2 + 1 - 2a}{a}} \quad (4.39)$$

Très élégamment, les  $k$  se simplifient, ce qui donne une formule beaucoup plus simple que celle obtenue pour le système de FitzHugh-Nagumo où la durée du plateau ou durée du potentiel d’action (APD) ne dépend que d’un seul paramètre  $a$ .

Si on néglige la repolarisation ( $z = 0$ ), les systèmes de FitzHugh-Nagumo et d’Aliev et Panfilov sont identiques au nom des paramètres près. Ce qui nous donne aussi la vitesse de l’onde de dépolarisation. Au final nous connaissons en fonction des paramètres les deux caractéristiques du potentiel d’action suivantes :

- La durée du potentiel d’action :

$$APD = \frac{1}{4} \frac{a^2 + 1 - 2a}{a}.$$

- La vitesse de propagation de l’onde de dépolarisation :

$$\sqrt{2kd} \left( \frac{1}{2} - a \right)$$

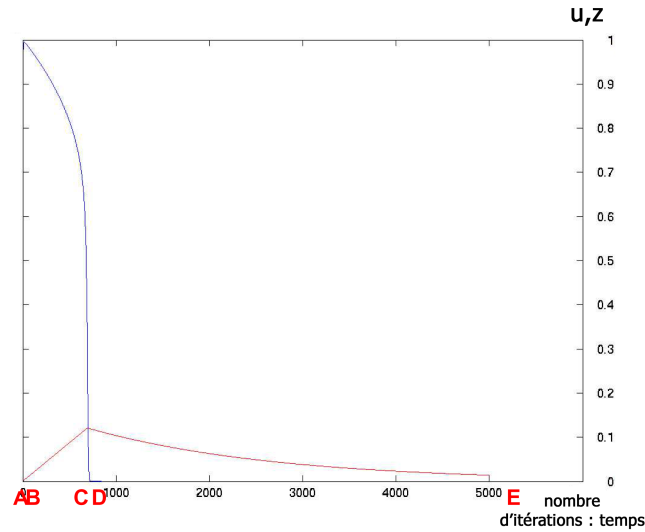


FIG. 4.20 – Solution du système d’Aliev-Panfilov issue d’une simulation représentée dans l’espace des trajectoires. En rouge  $z$  et en bleu le potentiel  $u$  en fonction du temps sur l’axe des abscisses

#### 4.2.4 La propagation de l’onde de dépolarisation en 2D

L’objectif de cette section est de donner une idée de la forme des fronts d’onde qui peuvent survenir dans le cas de la propagation de l’onde de dépolarisation sur une surface. Cette étude permet entre autre d’obtenir l’équation eikonale-courbure (Equation (4.11)). Dans un souci de clarté nous nous contenterons ici de la dimension 2 mais le raisonnement de [KEENER1991, KEENER et SNEYD1998] que nous présentons est aussi valable en dimension 3. On peut trouver un raisonnement similaire dans [COLLI-FRAZONE et GUERRI1993] qui ont obtenu une équation légèrement différente, l’équation eikonale diffusion (Equation (4.12)).

Le problème en une dimension était simple (Section 4.2.3). La recherche d’une solution à l’équation de Nagumo (Equation (4.23)) sous la forme d’un front d’onde nous amène à l’étude d’une équation différentielle de la forme

$$\Phi'' + c_0 \Phi' + f(\Phi) = 0. \quad (4.40)$$

Dans le cas de l’équation de Nagumo,  $f$  est le polynôme de degré 3 :  $f(\Phi) = \Phi(1 - \Phi)(\Phi - a)$ . Comme il est prouvé dans [FIFE1979], il existe un unique  $c_0$  tel qu’il existe une solution de type front d’onde, i.e. une solution  $\Phi$  monotone décroissante avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 1$ . La fonction solution  $u$  représente alors un front de potentiel d’action qui se déplace faisant la transition entre le potentiel de repos 0 et le potentiel d’excitation 1. Comme on l’a vu au cours de la section 4.2.3, pour  $f(\Phi) = \Phi(1 - \Phi)(\Phi - a)$ , on a  $c_0 = 0.5 - a$ .

On s’intéresse aux solutions en 2D de l’équation de réaction-diffusion gouvernant la dépolarisation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(D \nabla u) + k f(u) \quad (4.41)$$

$u$  représente un potentiel,

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, \mathbf{x}) &\longrightarrow u(t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

la matrice  $D$  représente la conductivité et  $k$  est le paramètre qui donne le poids entre le terme de réaction et le terme de diffusion. La fonction  $f$  est la fonction de réaction.

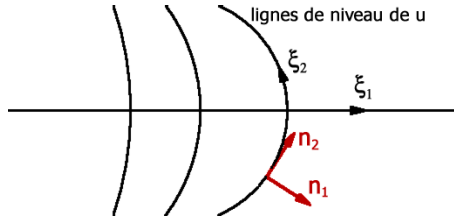


FIG. 4.21 – Changement de repère  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\tau, \xi)$  et  $t = \tau$ . Explication des notations de la section 4.2.4. On se place au niveau du front,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  sont les nouvelles coordonnées spatiales.  $\mathbf{n}_1$  est un vecteur normal au front et  $\mathbf{n}_2$  un vecteur tangent

En dimension 2, les ondes dont le comportement est le plus proche du problème 1D sont les ondes planes. Nous sommes donc dans un premier temps à la recherche d'une onde plane qui se propage dans  $\mathbb{R}^2$  à la vitesse  $c$  dans la direction  $\mathbf{n}$ . On suppose alors que  $u$  est en fait fonction d'une seule variable :  $\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct$ , c'est à dire qu'il existe une fonction  $U$  telle que  $u(x, t) = U(\xi)$ . En procédant de la même manière que dans le cas de la dimension 1 (Equations (4.25) et (4.26)), on obtient alors une équation différentielle ordinaire sur  $U$  :

$$(\mathbf{n}D\mathbf{n})U'' + cU' + kf(U) = 0 \quad (4.42)$$

A un changement d'échelle près, nous retrouvons l'équation bistable (4.40). En effet, soit  $\varphi$  la solution de (4.40), on pose alors

$$u(t, \mathbf{x}) = \varphi\left(\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct}{\lambda}\right) \quad \text{avec } \lambda = \sqrt{\frac{\mathbf{n}^t D\mathbf{n}}{k}}$$

$u$  est alors solution de (4.41).

### Repère mobile suivant le front

En dimension 2, les ondes ne sont pas toutes des ondes planes. Elles sont généralement initiées en quelques points spécifiques, les fronts d'onde sont alors plutôt de forme circulaire. De plus le médium n'est pas nécessairement homogène et sa géométrie n'est pas nécessairement simple. Pour toutes ces raisons, les fronts d'onde sont généralement courbés. Cette influence peut se comprendre sur un exemple simple. Dans le cas d'un front d'onde circulaire se rétractant, différents points du front travaillent pour exciter un même point, la région abordée par le front doit donc être excitée plus vite que dans le cas d'un front parfaitement planaire. De la même façon, dans le cas d'un front circulaire en expansion, les voisins du front sont plus dispersés, il faut donc plus d'efforts pour exciter la région suivant le front que dans le cas d'un front parfaitement planaire.

L'idée de [KEENER et SNEYD1998] est donc de se placer dans un nouveau repère. Ce nouveau repère est choisi de telle sorte que le potentiel  $u$  au niveau du front soit approximativement dirigé par une équation de la forme de l'équation type (4.40). On considère un changement de repère. On note les coordonnées dans ce nouveau repère  $(\tau, \xi)$  avec  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\tau, \xi)$  et  $t = \tau$ . Le front d'onde est inconnu dans ce cas général, on va donc suivre un repère qui suit le front (Figure 4.21). Ce changement de repère peut se comprendre comme une généralisation du changement de variable  $\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct$ ,  $t = \tau$  dans le cas d'une onde plane. Alors  $\partial_\tau X = -c$  nous donne la vitesse de l'onde de dépolarisation. Dans le cas général, la différence et la complexité viennent du fait que la vitesse n'est pas constante.

Précisons le changement de coordonnées choisi. Soit  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . A un instant  $\tau$  fixé,  $\xi_1$  est désigné comme la coordonnée dans la direction normale au front et  $\xi_2$  désigne alors la coordonnée sur la ligne de niveau de  $u$ .

Par la règle du "chain rule", on obtient les dérivées par rapport aux nouvelles coordonnées :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i} = \frac{\partial X_1}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \xi_i} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial x_2} \quad (4.44)$$

Matriciellement, cela donne

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \tau} & \frac{\partial X_2}{\partial \tau} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix}$$

On pose

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} & 0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial \tau} & \frac{\partial X_2}{\partial \tau} & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$$

Avec

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit  $A$  la sous matrice extraite de  $B^{-1}$  :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

La matrice  $A$  est l'inverse de la matrice Jacobienne du changement de coordonnées spatiales à l'instant  $t$  :  $\partial_{\xi_i}(\mathbf{X}_j)$ . Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = a_{i1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + a_{i2} \frac{\partial}{\partial \xi_2}. \quad (4.46)$$

En outre

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \quad (4.47)$$

Les coefficients  $a_{ij}$  sont calculables explicitement en utilisant les règles de Cramer [KEENER et SNEYD1998].

$$A = \frac{1}{\partial_{\xi_1} X_1 \partial_{\xi_2} X_2 - \partial_{\xi_1} X_2 \partial_{\xi_2} X_1} \begin{pmatrix} \partial_{\xi_2} X_2 & -\partial_{\xi_1} X_2 \\ -\partial_{\xi_2} X_1 & \partial_{\xi_1} X_1 \end{pmatrix}.$$

On pose  $\mathbf{n}_1 = (\partial_{\xi_2} X_2, -\partial_{\xi_2} X_1)$  et  $\mathbf{n}_2 = (-\partial_{\xi_1} X_2, \partial_{\xi_1} X_1)$ . Soient  $\mathbf{r}_1$  le vecteur tangent au front  $(\partial_{\xi_1} X_1, \partial_{\xi_1} X_2)$  et le vecteur normal au front  $\mathbf{r}_2 = (\partial_{\xi_2} X_1, \partial_{\xi_2} X_2)$  alors l'angle  $(\widehat{\mathbf{r}_1, \mathbf{n}_2}) = \pi/2$  et l'angle  $(\widehat{\mathbf{r}_2, \mathbf{n}_1}) = \pi/2$  et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

où  $n_{11}$  et  $n_{12}$  sont les coordonnées du vecteur  $\mathbf{n}_1$  et  $n_{21}$  et  $n_{22}$  sont les coordonnées du vecteur  $\mathbf{n}_2$ .

Les coefficients  $\beta_j$  sont des fonctions de coefficients  $a_{ij}$ . En effet, en remplaçant  $\partial_{x_j}$  dans (4.43) par la formule (4.46), on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial X_j}{\partial \tau} \sum_{k=1}^2 a_{ij} \frac{\partial}{\partial \xi_k}$$

On peut donc écrire l'équation (4.41) dans le nouveau système de coordonnées  $(\xi, \tau)$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial X_1}{\partial \tau} \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) - \frac{\partial X_2}{\partial \tau} \left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= a_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= a_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= a_{11} \left( a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) + a_{12} \left( a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= a_{21} \left( a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) + a_{22} \left( a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} \right) + \frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \end{aligned}$$

L'équation (4.41) devient donc dans le cas où  $D$  est scalaire :

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau} - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial X_i}{\partial \tau} \sum_{j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} = D \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 a_{ij} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_j \partial \xi_k} + D \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} + kf(u)} \quad (4.49)$$

### Approximation et comparaison avec les ondes planes

[KEENER et SNEYD1998] proposent alors deux approximations possibles pour obtenir une équation de la forme souhaitée (Equation (4.40)).

1.  $a_{i2}$  est négligeable devant  $a_{i1}$ , i.e.  $a_{i1} \gg a_{i2}$ . C'est à dire que les variations spatiales dans la direction  $\xi_1$  sont prépondérantes par rapport aux variations dans l'autre direction.
2. En première approximation  $u$  ne dépend pas de  $\xi_2$  ni de  $\tau$ .

Ces deux hypothèses permettent de proposer une équation différentielle plus simple, de la forme désirée, qui est approximativement vérifiée par le potentiel  $u$  au voisinage du front de dépolarisation.

$$\left[ \sum_{i=1}^2 \frac{\partial X_i}{\partial \tau} a_{i1} \right] \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + D \left[ \sum_{i=1}^2 a_{i1}^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + D \sum_{i=1}^2 \frac{\partial a_{i1}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + kf(u) = 0 \quad (4.50)$$

On pose alors

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{r}_2} \mathbf{n}_1$$

Le vecteur  $\alpha$  est donc un vecteur normal au front et est dans la direction d'avancement du front. Cette notation permet alors de réécrire plus simplement (4.50) :

$$\boxed{D|\alpha|^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + (D\nabla\alpha + \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \alpha) \frac{\partial u}{\partial \xi_1} + kf(u) = 0} \quad (4.51)$$

Il s'agit pour finir de comparer (4.51) avec l'équation différentielle correspondant à la propagation d'une onde plane dans la direction  $\alpha$  à une vitesse  $c$  donnée. En utilisant ce que l'on a montré au début de cette section (Equation (4.42)), on obtient les équations qui déterminent le changement de repère :

- la première relation  $D|\alpha|^2 = k$  donne l'échelle des coordonnées normales au front d'onde.
- la deuxième relation

$$\partial_\tau X \cdot \alpha + D\nabla \cdot \alpha = kc_0 \quad (4.52)$$

décrit le mouvement du repère mobile. On a choisi un repère de coordonnées qui suit le front. Donc, à un facteur d'échelle près,  $\partial_\tau X \cdot \alpha$  représente la vitesse du front dans la direction normale.

### Obtention de l'équation eikonale-courbure

L'équation (4.52) qui décrit la trajectoire du repère mobile est appelée équation eikonale-courbure mais ce révèle difficile à interpréter ou à mettre en œuvre numériquement. Puisque l'objectif est de suivre le front de dépolarisation, on introduit une fonction ensemble de niveau  $S(x, t)$  dont la ligne de niveau 0 est le front que nous cherchons à suivre. Nous choisissons de rechercher une fonction  $S(x, t)$  telle que  $S(x, t)$  est positive là où le tissu a été activé et négative lorsque le tissu est encore au repos. Alors  $-\nabla S/|\nabla S|$  est la normale unitaire au front dans le sens de l'avancement du front. Le vecteur  $\alpha$  est dans la direction normale au front dans le sens de l'avancement. En utilisant la relation d'échelle  $D|\alpha|^2 = k$ , on obtient

$$\alpha = -\sqrt{\frac{k}{D}} \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$$

Par ailleurs, le long du front, la fonction  $S$  est égale à 0. Donc pour tout  $x$  sur le front,  $S(x, t) = 0$ . On effectue alors le changement de variable, ce qui donne  $S(X(\xi, \tau), \tau) = 0$ . En dérivant, on obtient alors l'équation classique sur la fonction  $S$  :  $\nabla S \partial_t X + \partial_t S = 0$ . Cette équation est vraie au niveau du front de dépolarisation. Alors

$$\partial_t X \cdot \alpha = \sqrt{\frac{k}{d}} \frac{\partial_t S}{|\nabla S|}.$$

Ce qui en reprenant (4.52) donne :

$$\sqrt{\frac{k}{d}} \frac{\partial_t S}{|\nabla S|} - D \sqrt{\frac{k}{d}} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \right) = kc_0$$

d'où

$$D|\nabla S| \nabla \cdot \left( \frac{\nabla S}{|\nabla S|} \right) + c_0 \sqrt{kD} |\nabla S| = \partial_t S \quad (4.53)$$

Dans le cas de l'équation de Nagumo,  $c_0 = 0.5 - a$  (s'obtient comme (4.33)).

La vitesse du front correspond à  $\partial_t S/|\nabla S|$  ce qui donne donc :

$$\boxed{c = \sqrt{kD}(0.5 - a) - D\kappa} \quad (4.54)$$

où  $\kappa$  est la courbure du front.

On obtient alors très facilement l'équation eikonale-courbure sur les temps de dépolarisation en prenant pour la fonction  $S$ ,  $S(x, t) = t - T(x)$  où  $T(x)$  est l'instant de dépolarisation du point  $x$  [TOMLINSON *et al.* 2002]. Alors  $\nabla S = -\nabla T$  et  $\partial_t S = 1$ . On obtient alors la classique :

$$\boxed{-D|\nabla T| \nabla \cdot \frac{\nabla T}{|\nabla T|} + c_0 \sqrt{kD} |\nabla T| = 1} \quad (4.55)$$



### 4.2.5 Eléments d'analyse numérique et mise en œuvre

Dans cette section, nous allons présenter la mise en œuvre numérique des simulations que nous utiliserons dans le chapitre suivant. Nous donnerons par la même occasion quelques éléments d'analyse numérique pour ces systèmes qui sont pertinents dans le cadre de la problématique qui nous intéresse : l'estimation des paramètres. Dans le cadre de l'estimation de paramètres à partir de mesures électrophysiologiques, nous allons utiliser des simulations du modèle en dimension 1 et en dimension 2. Les simulations en dimension 1 nous seront utiles pour tester la faisabilité des méthodes envisagées sur des problèmes moins volumineux comme par exemple pour le filtre de Kalman, ce que nous ferons au cours de la section 5.2. La simulation en dimension 2 nous permettra de comparer facilement modèle et mesures, qui sont surfaciques. Nous verrons cette approche au cours des sections 5.3 et 5.4.

#### Simulation en dimension 1

Les simulations en dimension 1 nous permettent de tester la validité des expressions reliant la durée du potentiel d'action et la vitesse de dépolarisation avec les paramètres des équations de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov.

Nous avons utilisé un schéma aux différences finies centrées pour la discrétisation spatiale et un schéma explicite en temps. Les conditions au bord du domaine sont des conditions de Neumann homogènes. Ainsi, pour le système de FitzHugh-Nagumo, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u_j^{t+\Delta t} &= u_j^t + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^t - 2u_j^t + u_{j-1}^t) + \frac{\lambda}{\varepsilon} (u_j^t (u_j^t - a)(1 - u_j^t)) - \frac{1}{\varepsilon} z_j^t \\ z_j^{t+\Delta t} &= z_j^t + \Delta t (k u_j^t - z_j^t) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ce schéma numérique est stable lorsque les deux conditions ci-dessous sont respectées.

$$\Delta t < \frac{\Delta x^2}{\varepsilon d} \quad (4.57)$$

$$\Delta t < \frac{\varepsilon}{1 - a} \quad (4.58)$$

On effectue la même discrétisation pour le système d'Aliev et Panfilov :

$$\begin{aligned} u_j^{t+\Delta t} &= u_j^t + \frac{\varepsilon \Delta t}{\Delta x^2} (u_{j+1}^t - 2u_j^t + u_{j-1}^t) + \frac{k}{\varepsilon} (u_j^t (u_j^t - a)(1 - u_j^t) - u_j^t z_j^t) \\ z_j^{t+\Delta t} &= z_j^t + \Delta t (-k u_j^t (u_j^t - a - 1) - z_j^t) \end{aligned} \quad (4.59)$$

L'équation de Nagumo discrétisée, que l'on retrouve dans l'équation de dépolarisation de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov, ne conserve pas toutes les propriétés de l'équation continue. Les propriétés d'existence, d'unicité et de stabilité des solutions peuvent être préservées sous réserve de respecter des conditions classiques. Cependant, l'existence d'une solution ne garantit pas l'existence d'un front d'onde. L'existence ou non de solutions de type front d'onde dépend alors du pas en espace  $\Delta x$  : il faut que la discrétisation spatiale soit suffisamment fine pour qu'une onde puisse encore se propager [KEENER1986b, ZINNER1992]. De plus, dans ces conditions, la vitesse de l'onde solution du problème discrétisé n'est pas nécessairement égale à la vitesse de l'équation continue, elle s'en rapproche quand la discrétisation spatiale se raffine. Nous avons utilisé ces simulations 1D pour tester la pertinence des formules proposées dans la section 4.2.3 pour la durée du potentiel d'action et la vitesse de dépolarisation.

Pour cela, nous avons calculé la durée du potentiel d'action et la vitesse de dépolarisation à partir des simulations de la manière suivante. Le calcul théorique est basé sur l'hypothèse que si les paramètres sont constants dans l'espace, la durée du potentiel d'action et la vitesse de dépolarisation sont constantes sur l'ensemble du segment utilisé. Cette hypothèse est parfaitement vérifiée sur les simulations 1D que nous avons effectuées. A l'issue d'une simulation, on calcule facilement les temps de dépolarisation et de repolarisation en chaque point du segment où on a effectué la simulation. Ce calcul est aisé et précis car les variations du potentiel d'action au moment de la dépolarisation et de la repolarisation sont des variations

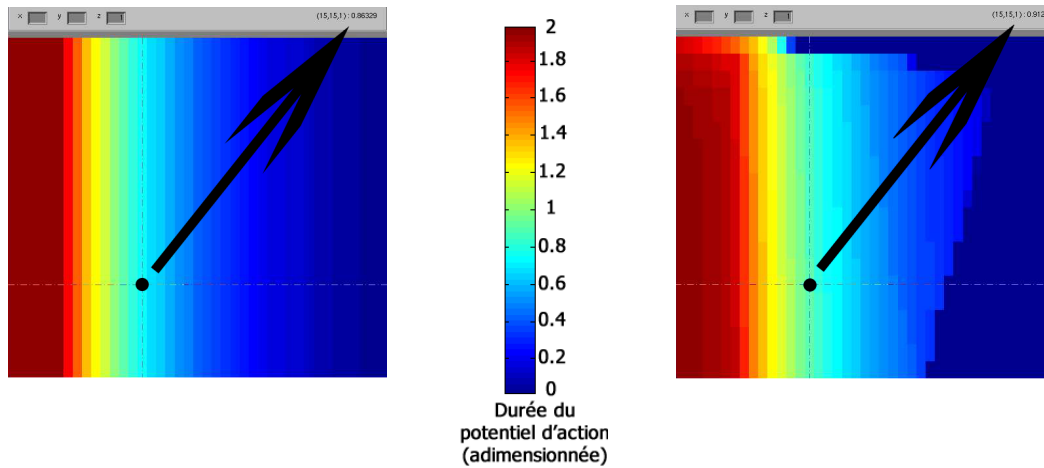


FIG. 4.22 – Durée du potentiel d'action pour différentes valeurs des paramètres  $a$  et  $\varepsilon$ . En abscisse différentes valeurs de  $a$  de 0.05 à 0.45. En ordonnée différentes valeurs de  $\varepsilon$  de 0.0005 à 0.01. Les couleurs représentent la durée du potentiel d'action. A gauche, le résultat de la formule théorique, à droite le résultat obtenu à partir de simulations.

	Sans repolarisation Equation de Nagumo	Avec repolarisation Système d'Aliev-Panfilov
Erreur sur la vitesse	0.1%	1.61%

TAB. 4.1 – Erreur sur la vitesse de dépolarisation. Influence de la variable de dépolarisation pour un jeu de paramètre fixé.

rapides. On obtient ainsi une fonction  $t^d(x)$  pour les instants de dépolarisation et une fonction  $t^r(x)$  pour la repolarisation. La fonction  $t^d - t^r$  est une fonction constante et cette constante nous donne la durée du potentiel d'action. La fonction  $t^d$  est théoriquement une fonction affine car la vitesse de propagation est constante. On peut donc calculer la pente de cette droite :  $\partial t^d / \partial x$ . La vitesse de propagation est alors égale à l'inverse de cette pente.

La figure 4.22 montre la durée du potentiel d'action en fonction des paramètres  $a$  et  $\varepsilon$  calculée théoriquement (à gauche) et calculée à partir d'une simulation. Nous avons fait des simulations à pas de discrétisation spatial et temporel égaux. Puisque les conditions de stabilité (équations (4.57)) dépendent des paramètres et puisque les conditions de formation d'un potentiel d'action dépendent elles aussi des paramètres, la simulation numérique n'a pas donné une solution du type potentiel d'action pour tous les jeux de paramètres. Nous n'avons donc pas obtenu une durée de potentiel d'action pour tous les couples  $(a, \varepsilon)$ . Les couples n'ayant pas donné de résultats sont colorés en bleu marine dans l'image de droite. Lorsqu'on exclut ces cas, l'erreur moyenne commise entre la simulation et la théorie est de 4.9 %. De la même manière que pour la durée du potentiel d'action, nous comparons la vitesse de dépolarisation expérimentalement obtenue avec la vitesse théorique. De la même manière, nous avons procédé à pas de discrétisation fixés ; certains jeux de paramètres n'ont donc pas abouti à la propagation d'un potentiel d'action. En excluant ces points, la figure 4.23 montre une bonne correspondance entre les deux.

Pour finir, nous avons étudié l'influence sur la validité des formules donnant vitesse de dépolarisation et durée du potentiel d'action en fonction :

- du pas de discrétisation spatial,
- de la présence ou non de la repolarisation (équation de Nagumo seul et équations de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov).

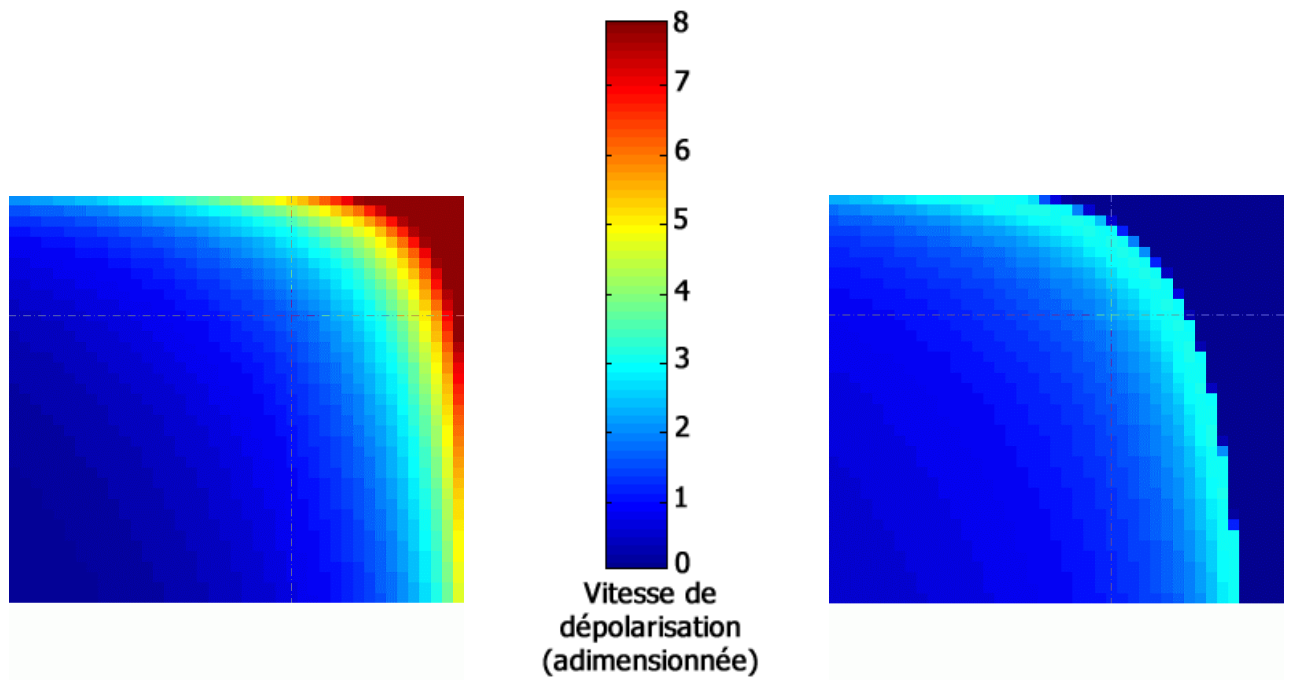


FIG. 4.23 – Vitesse de dépolarisation pour différentes valeurs des paramètres  $a$  et  $k$ . En abscisse différentes valeurs de  $a$  de 0.05 à 0.45. En ordonnée différentes valeurs de  $k$  de 1 à 20. Les couleurs représentent la vitesse de dépolarisation. A gauche, le résultat de la formule théorique, à droite le résultat obtenu à partir de simulations.

	Erreur
$dx = 1/1000$	4%
$dx = 1/500$	8.5%

TAB. 4.2 – Erreur sur la vitesse de dépolarisation. Influence de la précision du schéma temporel et de la discrétisation spatiale pour un jeu de paramètres fixé.

Comme le montre le tableau 4.1, l'introduction de la repolarisation modifie légèrement la vitesse de dépolarisation.

La deuxième source d'erreur est la discrétisation spatiale car, comme nous l'avons signalé, la vitesse de propagation du potentiel d'action discret peut être diminuée par rapport à la vitesse de propagation du potentiel d'action continu si le pas spatial est trop grossier.

Le tableau 4.2 qui rassemble les résultats de quelques expériences montre l'erreur causée par la discrétisation spatiale et l'erreur causée par le choix du schéma. On constate déjà qu'en divisant par deux le pas spatial optimal de  $dx = 1/1000$ , l'erreur augmente très sensiblement. Or dans le cadre de simulations en dimension 2 ou 3, nous ne pouvons pas utiliser un maillage aussi fin que désiré pour conserver des temps de calculs suffisamment raisonnables pour faire de l'estimation de paramètres. C'est donc cette contrainte qui va le plus altérer nos résultats. L'erreur due à l'introduction de la repolarisation est négligeable par rapport aux erreurs dues aux contraintes de discrétisation. L'amélioration apportée par le choix d'un schéma plus précis comme le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 n'est pas significative lorsque le pas de discrétisation spatiale est grossier alors que les temps de calculs seraient augmentés. En outre, les schémas de type Runge-Kutta se prêtent moins facilement aux méthodes d'estimation de paramètres que nous avons choisies, comme nous le verrons dans le chapitre suivant (section 5.1).

## Simulation en dimension 2

Notre préoccupation est de proposer un modèle facile à comparer aux données dont nous disposons. Les mesures électrophysiologiques sont disponibles sur les surfaces endocardiques et/ou épicaudiques et nous n'avons pas accès à ce qui se passe dans l'épaisseur du myocarde. Nous proposons d'utiliser la même surface que celle fournie avec les mesures pour effectuer l'estimation de paramètres. Il s'agit bien sûr d'une simplification très brutale de la propagation. Cette propagation est en effet tri-dimensionnelle. Cependant, traiter ce problème constitue une première étape indispensable. Il s'agit tout d'abord d'une étape indispensable pour choisir la méthode et tester la faisabilité de l'estimation de paramètres, le modèle 3D étant très lourd à mettre en œuvre en terme de temps de calcul. De plus n'ayant aucun moyen de valider les paramètres estimés (qui ne sont pas mesurés ou mesurables), il apparaît difficile de valider ce qui se passe dans l'épaisseur du myocarde, là où nous ne disposons pas de données.

L'initialisation de la propagation d'un potentiel d'action suivant le modèle de FitzHugh-Nagumo ou d'Aliev et Panfilov s'effectue en appliquant pendant un court intervalle de temps  $[\theta_0; \theta_1]$  un potentiel  $U_0(t)$  dans les régions que l'on souhaite stimuler. Le potentiel d'action se propage ensuite dans tous les ventricules. Les modèles de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov ne sont pas très sensibles à la forme du potentiel utilisé pour l'initialisation. Il suffit que la stimulation soit suffisante, ce qui signifie que l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1} U_0(t) dt$$

doit dépasser un certain seuil [ONIBONI2001]. Nous avons donc choisi d'utiliser des fonctions créneau pour initialiser la propagation du potentiel d'action. Par contre, la localisation de l'excitation est un paramètre crucial. Dans le cas d'un cœur normal, la propagation de l'onde électrique dans les ventricules est initialisée au niveau du réseau de Purkinje, qui se situe à l'intérieur des ventricules. Dans le cas d'une stimulation naturelle, il est donc très difficile d'établir une initialisation sur un épicaudique. Cette difficulté est bien visible en regardant les temps de dépolarisation mesurés sur l'épicaudique pour un chien atteint d'un infarctus stimulé naturellement comme dans l'exemple de la figure 4.24, il apparaît clairement que l'activation de l'épicaudique

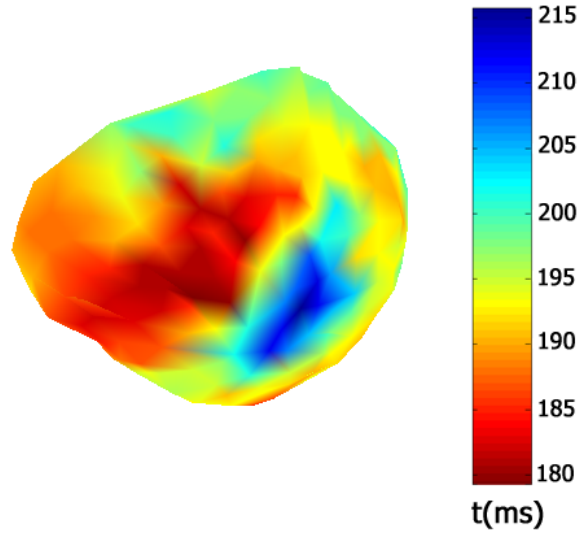


FIG. 4.24 – Temps de dépolarisation mesurés sur l'épicaarde d'un chien atteint d'un infarctus. La stimulation naturelle du chien a été préservée.

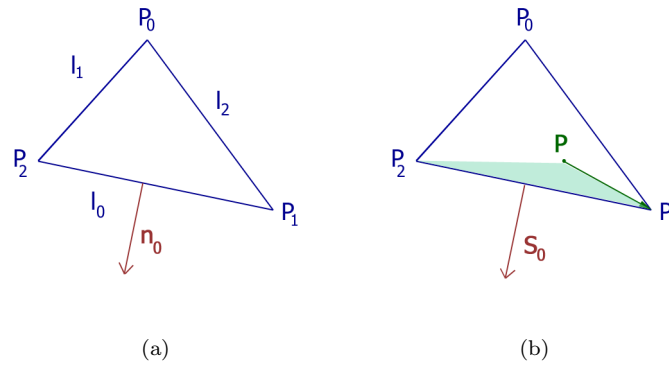


FIG. 4.25 – Triangle  $(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2)$ . Explication des notations.  $\varphi_0(\mathbf{P}) = \mathcal{A}(PP_1P_2)$ .

vient de l'endocarde et apparaît à plusieurs endroits en même temps et les temps de dépolarisation observés ne peuvent être approximés par une propagation surfacique. C'est pourquoi nous n'utilisons que des données épicaardiques issues d'expérimentations où la stimulation est artificielle, ce qui permet une identification simple de la région à initialiser et l'hypothèse d'une propagation surfacique est adéquate. Une fois qu'une région de stimulation est sélectionnée, l'initialisation utilisée est une fonction créneau (de minimum 0 et de maximum 1) dans cette région et 0 ailleurs, ce qui revient à envoyer une stimulation d'un voltage fixé pendant un laps de temps fixé dans une région.

La principale difficulté pour la discrétisation en dimension 2 du système d'Aliev et Panfilov lorsqu'on ne travaille pas sur une grille régulière est le terme de diffusion :  $\text{div}(d\nabla u)$ . Dans un souci de clarté, nous présenterons la discrétisation spatiale sur un domaine ouvert  $\Omega$  pour l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \quad (4.60)$$

avec des conditions de Neumann au bord du domaine. Pour résoudre cette équation, on transforme la

résolution de l'équation (4.60) en un problème variationnel équivalent [BREZIS1983] :

$$\forall \psi \in \mathcal{V} = H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \partial_t u \psi = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi \quad (4.61)$$

en gardant des conditions au bord de Neumann. La résolution de ce problème par la méthode des éléments finis consiste à rechercher une solution du problème dans un espace vectoriel  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  de dimension finie approchant  $\mathcal{V}$ .

Nous utilisons ici des éléments finis linéaires avec des éléments triangulaires pour lesquels nous avons des formules explicites comme nous allons le voir. Pour le potentiel d'action  $u$ , cela signifie que pour tout point  $\mathbf{P}$  de la surface :

$$u(\mathbf{P}) = \sum_{i=0}^{N-1} \varphi_i(\mathbf{P}) u_i \quad (4.62)$$

où  $u_i$  est la valeur du potentiel au sommet  $i$  et  $\varphi_i$  est la fonction de base associée au sommet  $i$ . Nous avons choisi des éléments finis linéaires, donc, dans chaque triangle, la valeur de  $u$  est interpolée entre les trois sommets du triangle, ce qui s'exprime comme suit. Soit  $\mathbf{P}$  un point du triangle  $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$ , pour plus de clarté nous appelons encore,  $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq 2}$ , les fonctions de bases associées aux points  $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1$  et  $\mathbf{P}_2$

$$u(\mathbf{P}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_i(\mathbf{P}) u(\mathbf{P}_i). \quad (4.63)$$

Les valeurs  $(\varphi_i(\mathbf{P}))_{0 \leq i \leq 2}$  sont alors les coordonnées barycentriques du point  $\mathbf{P}$  dans le repère  $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$ . On remarque donc que  $\varphi_i(\mathbf{P})$  est aussi le rapport entre l'aire du triangle  $(\mathbf{P} \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$  et l'aire du triangle  $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$  (Figure 4.25). Pour plus de commodité, nous allons poser  $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_0$  et  $\mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_1$ . Notons alors  $l_i$  la longueur du segment  $\mathbf{P}_{i+1} \mathbf{P}_{i+2}$ ,  $\mathbf{n}_i$  la normale extérieure à ce segment,  $\mathcal{A}$  l'aire du triangle  $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$ , et  $\mathbf{S}_i = l_i \mathbf{n}_i$ . Ces notations sont rassemblées figure 4.25. Avec ces notations, on obtient l'expression explicite suivante pour les fonctions de base :

$$\varphi_i(\mathbf{P}) = -\frac{\mathbf{S}_i}{2\mathcal{A}} \cdot (\mathbf{P} - \mathbf{P}_{i+1}). \quad (4.64)$$

Comme on le voit avec l'équation (4.64), les fonctions de base sont linéaires sur chaque triangle, leur gradient est donc constant sur chaque triangle. De l'expression explicite (4.64), on déduit l'expression du gradient :

$$\nabla \varphi_i(\mathbf{P}) = -\frac{\mathbf{S}_i}{2\mathcal{A}}$$

En conséquence, il est possible de calculer le gradient d'une fonction sur une surface triangulée. En effet, soit  $\theta$  une fonction définie sur la surface, alors

$$\theta(\mathbf{P}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_i(\mathbf{P}) \theta(\mathbf{P}_i)$$

Le gradient spatial  $\nabla \theta(\mathbf{P})$  pour chaque point  $\mathbf{P}$  dans le triangle  $(\mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2)$  se déduit donc facilement :

$$\nabla \theta(\mathbf{P}) = \sum_{i=0}^2 \nabla \varphi_i \theta(\mathbf{P}_i) \quad (4.65)$$

et ne dépend que des gradients des fonctions de base  $\nabla \varphi_i$ .

En effectuant une intégration par parties de l'équation variationnelle (4.61) et en utilisant les conditions de Neumann, on obtient

$$\forall \psi \in \mathcal{V}, \quad \partial_t \int_{\Omega} u \psi = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla \psi$$

En remplaçant  $u$  par son approximation (équation (4.62)) et en appliquant ce résultat à  $\psi = \varphi_j$ , on obtient

$$\partial_t \sum_i u_i \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j = - \sum_i u_i \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j$$

Nous notons alors  $\mathcal{M}$  la matrice de masse et  $\mathcal{K}$  la matrice de rigidité définies ci dessous :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \\ \mathcal{K}_{ij} &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \end{cases} \quad (4.66)$$

Soit  $u_h$  le vecteur des coordonnées de  $u$  dans la base  $(\varphi_0, \dots, \varphi_{N-1})$ .  $u_h$  est donc solution du problème discret suivant :

$$\mathcal{M}u_h = -\mathcal{K}u_h$$

Appliquons maintenant ces résultats au système complet d'Aliev et Panfilov. Le système d'Aliev et Panfilov tel que présenté équation (4.14) était spatialement adimensionné sur un segment de taille 1. Soit  $l$  le diamètre de la surface sur laquelle on souhaite simuler la propagation du potentiel d'action, le système redimensionné spatialement est donc

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -l^2 \varepsilon \operatorname{div}(d \nabla u) + \frac{k}{\varepsilon} u(1-u)(u-a) - \frac{1}{\varepsilon} uz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -ku(u-a-1) - z \end{cases}$$

Pour discrétiser le terme de diffusion  $\operatorname{div}(d \nabla u)$  grâce aux éléments finis ci-dessus, nous attribuons à chaque triangle une valeur pour le coefficient de diffusion  $d$ . Nous modifions  $\mathcal{M}$  la matrice de masse et  $\mathcal{K}$  la matrice de rigidité définies ci dessus pour l'opérateur Laplacien (équation (4.66)) pour prendre en compte le coefficient de diffusion :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{ij} &= \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j \\ \mathcal{K}_{ij} &= \int_{\Omega} d \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \end{cases} \quad (4.67)$$

La matrice de masse  $\mathcal{M}$  est par la suite approximée par une matrice diagonale. Ainsi, la masse de chaque sommet est égale à un tiers de la somme des aires des triangles qui contiennent ce sommet. La matrice de rigidité  $\mathcal{K}$  se calcule facilement. Soit  $\mathcal{SH}(i, j)$  l'enveloppe du segment  $(i, j)$ , i.e. l'ensemble des triangles auxquels ce segment appartient.

$$\mathcal{K}_{ij} = \sum_{\operatorname{tr} \in \mathcal{SH}(i, j)} d(\operatorname{tr}) \nabla \varphi_i(\operatorname{tr}) \nabla \varphi_j(\operatorname{tr}).$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= -l^2 \varepsilon \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}u + \frac{k}{\varepsilon} u(1-u)(u-a) - \frac{1}{\varepsilon} uz \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -ku(u-a-1) - z \end{cases}$$

L'intégration temporelle du système de Aliev et Panfilov (Equation (4.14)) est faite simplement grâce à un schéma d'Euler explicite, comme dans [SERMESANT2003].

$$\begin{cases} u^{t+\Delta t} &= u^t + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [-l^2 \varepsilon^2 \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}u^t + ku^t(1-u^t)(u^t-a) - u^t z^t] \\ z^{t+\Delta t} &= z^t + \Delta t [-ku^t(u^t-a-1) - z^t] \end{cases} \quad (4.68)$$

Alors pour chaque sommet  $i$ ,

$$\begin{cases} u_i^{t+\Delta t} &= u_i^t + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [-l^2 \varepsilon^2 \mathcal{M}_{ii}^{-1} \sum_{j \in J} \mathcal{K}_{ij} u_j^t + ku_i^t(1-u_i^t)(u_i^t-a) - u_i^t z_i^t] \\ z_i^{t+\Delta t} &= z_i^t + \Delta t [-ku_i^t(u_i^t-a-1) - z_i^t] \end{cases} \quad (4.69)$$

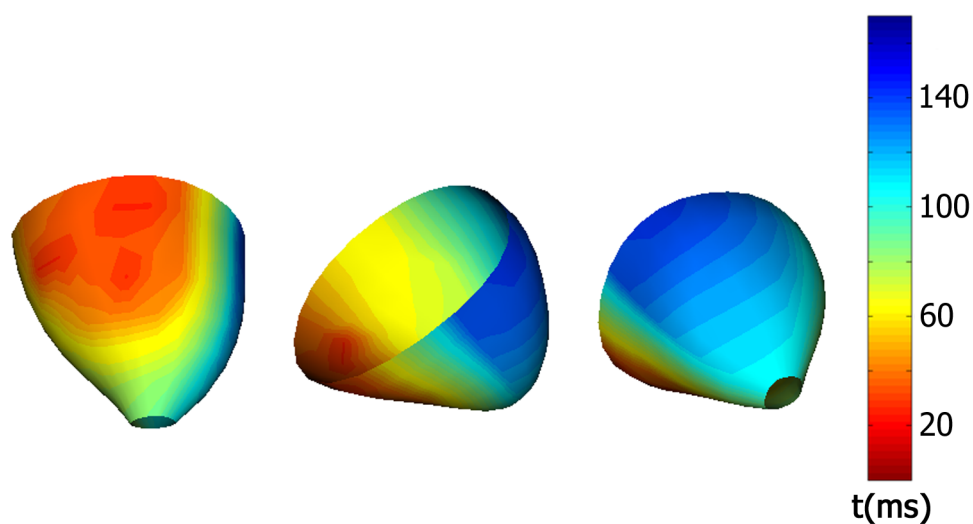


FIG. 4.26 – Une surface triangulée d'un épicaide. Les temps de dépolarisation (codés par la couleur) sont calculées pour chaque sommet après une simulation du potentiel transmembranaire grâce aux équations de Aliev et Panfilov.

où  $J$  est l'ensemble des indices des voisins du sommet  $i$  (y compris le sommet  $i$ ).

A partir des potentiels transmembranaires, les temps de dépolarisation sont calculés par un simple seuillage du potentiel :

$$t(\mathbf{x}) = \min_t \{u(t) = 0.5\}$$

Ce calcul est très précis et n'est pas sensible au choix du seuil car la dépolarisation correspond à une variation très rapide du potentiel. La figure 4.26 présente un exemple de temps de dépolarisation obtenus de cette manière.





# Chapitre 5

## Estimation de paramètres pour les modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov.

### Sommaire

---

<b>5.1 Problèmes inverses</b>	<b>144</b>
5.1.1 Estimation de paramètres	144
5.1.2 Assimilation de données variationnelle	145
5.1.3 Assimilation de données séquentielle	147
5.1.4 Problèmes inverses pour l'étude de la contraction cardiaque	152
5.1.5 Estimation de paramètres pour les modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques	154
<b>5.2 Filtrage de Kalman 1D</b>	<b>155</b>
5.2.1 Position du problème	155
5.2.2 Observabilité des paramètres	158
5.2.3 Méthode : filtre de Kalman étendu pour estimer des paramètres	159
5.2.4 Limites du filtre de Kalman étendu. Application de contraintes	160
5.2.5 Discussion	166
<b>5.3 Utilisation des propriétés qualitatives</b>	<b>168</b>
5.3.1 Méthode	168
5.3.2 Résultats	170
5.3.3 Estimation locale et discussion	175
<b>5.4 Ajustement local de la conductivité apparente</b>	<b>177</b>
5.4.1 Cadre général	177
5.4.2 Découpage en zones	179
5.4.3 Résolution grâce à une linéarisation	181
5.4.4 Minimisation par la méthode de Brent	190
5.4.5 Résultats	199

---

Au cours du chapitre précédent, nous avons choisi le modèle et présenté les données disponibles. L'objet de ce chapitre est de trouver une méthode d'estimation des paramètres qui convienne au modèle choisi et qui puisse utiliser facilement les mesures électriques disponibles. Pour ce qui est des mesures électriques que nous avons utilisées, nous nous sommes concentrés sur les mesures épicaudiques. En effet, ces mesures présentaient l'avantage d'une localisation très précise des électrodes. En outre, les mesures ayant été effectuées sur des chiens dans le cadre de travaux de recherche, nous avons pu disposer de données où la stimulation du cœur est entièrement artificielle, ce qui facilite l'ajustement des conditions initiales du modèle. Le modèle choisi est le modèle d'Aliev et Panfilov. Notre objectif est alors d'estimer les paramètres du système d'Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques effectuées sur un patient. Nous allons donc dans un premier temps présenter les solutions existantes au problème général suivant : **estimer les paramètres d'un modèle dynamique à partir d'observations du modèle**. Nous présenterons ensuite les caractéristiques du problème à résoudre qui permettront de guider le choix de la méthode d'estimation. Enfin nous présenterons trois possibilités pour atteindre l'objectif proposé.

## 5.1 Problèmes inverses

### 5.1.1 Estimation de paramètres.

Le cadre que nous avons choisi englobe l'estimation de paramètres mais permet d'aller plus loin, il s'agit de l'assimilation de données. Les méthodes d'assimilation ont pour but d'intégrer des modèles dynamiques et des mesures pour améliorer la connaissance du système étudié. L'idée sous-jacente est que ni les mesures (nécessairement en nombre fini et bruitées), ni le modèle ne sont en mesure de fournir une description fidèle et complète du système étudié. Le terme d'assimilation de données est surtout utilisé en météorologie et en océanographie [BERTINO *et al.*2003] mais ce type de technique est utilisé dans de nombreux domaines où des modèles doivent être ajustés comme par exemple les mathématiques financières, la chimie, la vision par ordinateur ou les modèles biomécaniques [KELLERHALS2001, KANO *et al.*2001, SHI et LIU2002, CLÉMENT *et al.*2004].

Pour la plupart des méthodes, la démarche est la suivante. Après discrétisation en espace, on appelle  $\mathbf{X}(t)$  le vecteur décrivant l'état du système à un instant  $t$  donné, de taille  $N$ . Ce vecteur contient toutes les variables nécessaires à la description du système à un instant donné, ce qui correspond généralement aux variables d'état du modèle. Après discrétisation en espace, le modèle dynamique peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} &= \mathcal{F}(\mathbf{X}, U) \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

où  $U$  désigne le vecteur des paramètres que l'on veut estimer. Les paramètres  $U$  peuvent aussi comprendre les paramètres conditions initiales ou des conditions limites du système.

Nous discrétisons l'équation (5.1) en temps. Avec  $F$  la version discrétisée de la fonction d'évolution  $\mathcal{F}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_k) &= F(\mathbf{X}(t_{k-1}), U) \\ \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

On dispose aussi, à certains instants, d'un ensemble de mesures que l'on note  $\mathbf{Y}(t)$ . Nous appelons alors  $\mathcal{H}$  la fonction dite d'observation qui permet d'exprimer les quantités mesurées ou observées en fonction du vecteur d'état  $\mathbf{X}$ .

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) \quad (5.3)$$

L'idée est alors de trouver, pour chaque instant, le meilleur jeu de paramètres possible pour obtenir la meilleure prédiction possible et le meilleur compromis possible entre la prédiction utilisant le modèle

(équation (5.2)) et les mesures (équation (5.3)) et/ou d'optimiser le choix des paramètres pour minimiser l'écart entre la prédiction par le modèle et les observations.

Le problème de l'estimation de l'état et des paramètres connaissant les données fournies peut s'envisager de deux manières selon qu'on prend en compte les mesures au fur et à mesure qu'elles deviennent disponibles ou globalement à l'issue d'un temps fixé.

- Les premières sont les méthodes dites **séquentielles**. Elles consistent à mettre à jour l'état du système à chaque fois que des mesures sont disponibles, c'est à dire qu'il s'agit de traiter un problème statique à chacun de ces instants. Le problème statique est présenté dans l'annexe C. A chaque fois qu'une mesure est disponible, il faut donc minimiser la fonctionnelle (C.1) (voir page 217), qui comprend un terme d'attache aux observations et un terme d'attache à la prédiction par le modèle.
- Les secondes sont appelées **méthodes variationnelles**. Nous avons qualifié plus haut ces méthodes de globales car elles permettent de traiter un certain nombre de mesures effectuées au cours d'un intervalle de temps fixé :  $[0; T]$ . Les méthodes variationnelles sont donc les méthodes qui permettent de minimiser l'écart entre le modèle et les données :

$$\|\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{[0;T]}^2.$$

Pour minimiser cette fonctionnelle, nous avons plusieurs variables disponibles, l'état du système  $\mathbf{X}$  et l'ensemble des paramètres, conditions aux limites, conditions initiales. Le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  étant généralement de grande taille, on ne cherche pas par ces méthodes à estimer le vecteur  $\mathbf{X}$  à chaque instant. Cela signifie que l'état  $\mathbf{X}$  du système est complètement déterminé par le modèle et que la minimisation s'effectue en fonction des paramètres du système ou des conditions initiales, ce qui est généralement le cas dans le domaine de l'océanographie comme par exemple dans [KALNAY *et al.*2000].

### 5.1.2 Assimilation de données variationnelle

Les origines des méthodes variationnelles se trouvent dans le cadre du contrôle optimal dont l'ouvrage de référence est [LIONS1968]. Les conditions initiales des équations de FitzHugh-Nagumo ou d'Aliev et Panfilov sont en fait assez simples à fixer (section 4.2.5), nous nous intéressons donc plus spécifiquement à l'estimation de paramètres. La base théorique de l'estimation de paramètres par des méthodes variationnelles se trouve entre autres dans les travaux de G. Chavent [CHAVENT1974].

L'idée est en fait de minimiser

$$J(U) = \|\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{[0;T]}^2. \quad (5.4)$$

sous la contrainte que  $\mathbf{X}$  suive le modèle du système (équation (5.2)). Le problème est posé de manière globale et nécessite de connaître toutes les observations avant de commencer. La contrainte peut être appliquée de manière forte en imposant l'égalité (5.2), comme nous allons le voir. Il est aussi possible d'assouplir cette contrainte en autorisant des erreurs de modélisation [EVENSEN *et al.*1998].

Le minimum  $\hat{U}$  de  $J$  vérifie alors  $dJ(\hat{U}) = 0$  où  $dJ$  est la différentielle de  $J$ . On calcule donc la différentielle de  $J$ .

On note  $\langle *, * \rangle$  le produit scalaire dans  $\mathcal{L}^2([0; T])$ . Avec cette notation,  $J$  s'exprime de la manière suivante :

$$J(U) = \|\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_{[0;T]}^2 = \int_0^T \langle \mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}, \mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y} \rangle dt.$$

En conséquence

$$dJ(U) = \int_0^T \langle \mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}, \mathcal{H}d_U\mathbf{X} \rangle dt = \int_0^T \langle \mathcal{H}^T(\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}), d_U\mathbf{X} \rangle dt$$

Le point crucial et difficile de la différentiation de  $J$  est donc de calculer la différentielle de l'état  $\mathbf{X}$  du système par rapport aux paramètres  $U$ . Or en différentiant l'équation du modèle (Equation (5.1)) par

rapport à  $\mathbf{X}$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}d_U\mathbf{X} = d_{\mathbf{X}}\mathcal{F} \circ d_U\mathbf{X} + d_U\mathcal{F} \\ d_U\mathbf{X}(0) = 0 \end{cases}$$

où  $d_{\mathbf{X}}\mathcal{F}$  est la différentielle de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $\mathbf{X}$ ,  $d_U\mathcal{F}$  la différentielle de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $U$  et  $d_U\mathbf{X}$  la différentielle de  $\mathbf{X}$  par rapport à  $U$ .

### Méthode de l'état adjoint

L'idée est alors d'introduire une variable  $P$  telle que

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} + (d_{\mathbf{X}}\mathcal{F})^T P = \mathcal{H}^T(\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ P(T) = 0 \end{cases} \quad (5.5)$$

L'utilisation de la variable intermédiaire  $P$  appelée variable adjointe permet de mettre la différentielle de  $J$  sous la forme

$$\begin{aligned} dJ(U) &= \int_0^T \left\langle \frac{dP}{dt} + (d_{\mathbf{X}}\mathcal{F})^T P, d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle \frac{dP}{dt}, d_U\mathbf{X} \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle (d_{\mathbf{X}}\mathcal{F})^T P, d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &= \left\langle P(T), d_U\mathbf{X}(T) \right\rangle - \left\langle P(0), d_U\mathbf{X}(0) \right\rangle - \int_0^T \left\langle P, \frac{d}{dt}d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &\quad + \int_0^T \left\langle P, d_{\mathbf{X}}\mathcal{F}d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties. Comme  $P(T) = 0$  par définition de  $P$  et  $d_U\mathbf{X}(0)$  car la condition initiale  $\mathbf{X}_0$  ne dépend pas des paramètres  $U$ , on obtient alors

$$\begin{aligned} dJ(U) &= - \int_0^T \left\langle P, \frac{d}{dt}d_U\mathbf{X} \right\rangle dt + \int_0^T \left\langle P, d_{\mathbf{X}}\mathcal{F} \circ d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle P, -\frac{d}{dt}d_U\mathbf{X} + d_{\mathbf{X}}\mathcal{F} \circ d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle P, -(d_{\mathbf{X}}\mathcal{F} \circ d_U\mathbf{X} + d_U\mathcal{F}) + d_{\mathbf{X}}\mathcal{F} \circ d_U\mathbf{X} \right\rangle dt \\ &= \int_0^T \left\langle P, -d_U\mathcal{F} \right\rangle dt \end{aligned}$$

Ce même raisonnement dans le cadre discret se présente de la manière suivante. On dispose d'un nombre fini d'observations aux instants  $(t_k)_{1 \leq k \leq K}$ . La fonctionnelle  $J(U)$  s'écrit alors :

$$J(U) = \sum_{k=1}^K \left\langle \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{Y}(t_k), \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{Y}(t_k) \right\rangle$$

La différentielle  $dJ$  s'exprime alors :

$$dJ(U) = \sum_{k=1}^K \left\langle \mathcal{H}^T(\mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{Y}(t_k)), d_U\mathbf{X}(t_k) \right\rangle$$

avec

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} d_U \mathbf{X}(t_{k+1}) = d_{\mathbf{X}} F \circ d_U \mathbf{X}(t_k) + d_U F \\ d_U \mathbf{X}(t_1) = 0 \end{cases}$$

L'équation adjointe s'écrit alors

$$\begin{cases} P(t_{k-1}) = (d_{\mathbf{X}} F)^T P(t_k) + \mathcal{H}^T(\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \\ P(t_K) = 0 \end{cases}$$

Et donc la différentielle s'écrit :

$$dJ(U) = \sum_{k=1}^K - \langle P(t_k), d_U F \rangle$$

### Mise en œuvre pratique

Pour calculer le gradient de  $J$  au voisinage de  $U_0$ , un vecteur de paramètres initial, l'idée est alors la suivante. On fait une première simulation du modèle direct avec  $U_0$  comme vecteur de paramètre. Une fois l'état  $\mathbf{X}$  du système calculé sur l'intervalle  $[0; T]$ , on résout le système adjoint (équation (5.5)). Pour finir, on utilise la forme obtenue ci-dessus pour la différentielle :

$$dJ(U) = \int_0^T \langle P, -d_U F \rangle dt \quad (5.6)$$

Cette méthode de calcul de la différentielle peut alors être utilisée dans le cadre d'un algorithme de descente de gradient ou de gradient conjugué pour minimiser la fonctionnelle  $J$ . Ce qui donne l'algorithme type 5.1.

---

**Algorithme 5.1** Estimation de paramètres par la méthode de l'état adjoint

---

```

1: procédure ESTIMERPARAM( $F, \mathbf{X}_0, \mathbf{Y}$ )
2:   Initialisation du vecteur de paramètre  $U = U_0$ .
3:    $i \leftarrow 0$ 
4:   while Le critère d'arrêt n'est pas satisfait do
5:     Propagation du modèle direct avec ce vecteur de paramètres.
6:     Calcul de la variable adjointe  $P$  vérifiant l'équation (5.5).
7:     Calcul de  $dJ(U)$  grâce à l'équation (5.6).
8:     Mise à jour des paramètres en utilisant l'itération de l'algorithme de descente de gradient choisi
            $\rightarrow U_{i+1}$ 
9:      $i + 1 \rightarrow i$ 
10:  end while
11: end procédure

```

---

### 5.1.3 Assimilation de données séquentielle

Les approches séquentielles consistent à minimiser la fonctionnelle

$$J^t(\mathbf{X}, U) = \int_0^t \|\mathcal{H}\mathbf{X}(s) - \mathbf{Y}(s)\|^2 ds$$

à chaque instant  $t$  où une mesure est disponible. Cette idée s'exprime plus aisément dans le cadre du problème discret. Soit  $(t_k)_{1 \leq k \leq K}$  les instants où des mesures sont disponibles. On considère alors le problème

suisant. On cherche à minimiser :

$$J^t(\mathbf{X}, U) = \sum_{\{k|t_k \leq t\}} \|\mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{Y}(t_k)\|^2$$

avec  $\mathbf{X}$  suivant le modèle. Imposer à  $\mathbf{X}$  de suivre le modèle est une contrainte forte. Elle peut être assouplie, comme dans le cadre des méthodes variationnelles, de la manière suivante :

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = F(\mathbf{X}(t_k), U) + \varepsilon_k$$

où  $\varepsilon_k$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $Q_k$ . Le problème est alors équivalent à rechercher  $\mathbf{X}$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t_{k+1}) = F(\mathbf{X}(t_k), U) + \varepsilon_k \\ \mathbf{Y}(t_{k+1}) = \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) + \eta_k \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

où  $\eta_k$  est le bruit de mesure, un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance  $R_k$ . Le plus souvent on considère un bruit de mesure constant dans le temps, i.e.  $R = R_k, \forall k$ . Le bruit de modèle  $Q_k$  est très délicat à estimer car évidemment, on ne connaît pas l'écart du modèle choisi à la réalité. Nous ne conservons donc dans la suite que le bruit de mesure de matrice de covariance  $R$ . Enfin, la méthode est séquentielle, ce qui signifie que l'on minimise  $J(t_k)$  après avoir minimisé  $J(t_i)$  pour tous les  $i$  tels que  $1 \leq i \leq k-1$ .

Ces méthodes sont basées sur une approche du type prédiction/correction dont la plus classique est le **filtre de Kalman** [KALMAN1960]. Pour plus de détails sur le filtre de Kalman et ses dérivés, on pourra consulter des ouvrages de référence comme [MAYBECK1979, JAZWINSKI1970].

Le filtrage de Kalman se décompose en deux étapes :

- Une phase de prédiction grâce au modèle.
- Une phase de correction ou d'analyse à partir des observations disponibles à l'instant considéré. Lors de cette phase, on minimise l'écart aux moindres carrés entre la prédiction et les mesures. Pour minimiser cet écart, il est possible de modifier l'état du système ou les paramètres.

Nous allons commencer par présenter le filtre de Kalman dans son aspect estimateur d'état uniquement. Nous donnerons ensuite la méthode à utiliser pour estimer des paramètres.

Le filtre de Kalman est optimal (au sens des moindres carrés) dans le cas d'un opérateur linéaire. Dans ce cas, le filtre de Kalman fournit à chaque pas de temps l'estimateur optimal de l'état connaissant les observations jusqu'à cet instant, mais aussi la matrice de covariance de l'erreur d'estimation.

### Filtre de Kalman dans le cas linéaire.

Pour traiter le cas linéaire, nous adoptons des notations matricielles. On note donc  $A$  la matrice correspondant au modèle permettant de prédire l'état  $\mathbf{X}(t_k)$  à partir de l'état  $\mathbf{X}(t_{k-1})$ . Le système discrétisé devient alors :

$$\mathbf{X}(t_k) = A\mathbf{X}(t_{k-1}) \tag{5.7}$$

Dans le cas du filtre de Kalman, on considère aussi l'erreur commise sur l'estimation de l'état  $\mathbf{X}$  en propageant aussi la matrice de covariance de cette erreur. Soit  $\mathbf{P}$  cette matrice de covariance.

#### 1. Initialisation.

Choix de l'initialisation du vecteur d'état  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$  et de la matrice de covariance  $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0$ . L'initialisation est considérée comme la toute première étape d'analyse, nous posons donc  $\mathbf{X}^a(t_0) = \mathbf{X}(t_0)$  et  $\mathbf{P}^a(t_0) = \mathbf{P}(t_0)$ .

#### 2. Prédiction.

L'étape  $k - 1$  est supposée accomplie. Soient  $\mathbf{X}_{k-1}^a(t_0)$  et  $\mathbf{P}_{k-1}^a(t_0)$  le vecteur d'état et la matrice de covariance obtenus à l'étape  $k - 1$ . Le modèle est appliqué. Le nouvel état prédit  $\mathbf{X}^p(t_k)$  est alors :

$$\mathbf{X}^p(t_k) = \mathbf{A}\mathbf{X}^a(t_{k-1}). \quad (5.8)$$

La matrice de covariance est aussi mise à jour :

$$\mathbf{P}^p(t_k) = \mathbf{A}\mathbf{P}^a(t_{k-1})\mathbf{A}^T \quad (5.9)$$

3. **Analyse.** Dans la deuxième étape, on cherche l'état  $\mathbf{X}^a$  donnant le meilleur compromis entre les mesures disponibles au temps  $t_k$  et la prédiction ci-dessus. Ce qui correspond à minimiser :

$$J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}[\mathbf{X} - \mathbf{X}^p(t_k)]^T (\mathbf{P}^p)^{-1} [\mathbf{X} - \mathbf{X}^p(t_k)] + \frac{1}{2}[\mathbf{Y}(t_k) - \mathcal{H}\mathbf{X}]^T R^{-1} [\mathbf{Y}(t_k) - \mathcal{H}\mathbf{X}]. \quad (5.10)$$

Tout se passe donc comme si l'on résolvait à l'instant  $t_k$  le problème statique présenté dans l'annexe C. Le nouvel état aussi appelé état analysé se présente sous la forme :

$$\mathbf{X}^a(t_k) = \mathbf{X}^p(t_k) + K_k[\mathbf{Y}(t_k) - \mathcal{H}\mathbf{X}^p(t_k)] \quad (5.11)$$

où  $K_k$ , appelée gain, est donné par

$$K_k = \mathbf{P}^p(t_k)\mathcal{H}^T[\mathcal{H}\mathbf{P}^p(t_k)\mathcal{H}^T + R]^{-1}. \quad (5.12)$$

pour garantir l'optimalité du choix du compromis entre prédiction et données. Finalement, la matrice de covariance est mise à jour suivant :

$$\mathbf{P}^a(t_k) = \mathbf{P}^p(t_k) - K_k\mathcal{H}\mathbf{P}^p(t_k) \quad (5.13)$$

Le choix de l'initialisation de l'état n'est pas un problème spécifique au filtrage de Kalman. En fonction des applications envisagées, l'évolution du modèle peut y être ou non très sensible. Ainsi, dans le cadre de l'océanographie ou de la météorologie, les équations de type Navier-Stokes qui sont utilisées sont très sensibles aux conditions initiales. Dans ce cas, il est utile de commencer par estimer les conditions initiales par une méthode d'assimilation de données variationnelles. Pour quelques exemples et d'autres références, le lecteur pourra se référer par exemple à [AUROUX et BLUM2005]. Comme on l'a vu au cours de la section 4.2.5, le modèle d'Aliev et Panfilov dont nous voulons estimer les paramètres ne nécessite pas une connaissance précise de l'initialisation mais seulement de la localisation. Ce qui nous permettra de choisir très simplement une initialisation. Par contre la matrice de covariance doit être initialisée, cette matrice représente l'erreur commise sur l'état initial. Si l'on dispose d'un ensemble empirique de vecteurs d'état, on peut prendre pour  $\mathbf{P}(t_0)$  la matrice de covariance de cet ensemble. Sinon, on peut prendre pour l'initialisation une matrice de covariance diagonale dont chaque terme diagonal est fixé en fonction de l'amplitude des variations réalistes de chacune des variables prises indépendamment.

Le filtre de Kalman que nous venons de présenter est un estimateur d'état. Pour estimer des paramètres, il faut ajouter aux vecteurs d'état les paramètres que l'on souhaite estimer. Ce qui donne le nouveau vecteur d'état  $\bar{\mathbf{X}}$  :

$$\bar{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ U \end{pmatrix}$$

Il faut alors prolonger la fonction  $F$  décrivant le modèle. La mise à jour des paramètres ne peut provenir que de la comparaison aux données, i.e. de la phase d'analyse. La nouvelle fonction décrivant le modèle  $\bar{F}$  est donc donnée tout simplement par :

$$\bar{F}(\bar{\mathbf{X}}) = \begin{pmatrix} F(\mathbf{X}, U) \\ U \end{pmatrix}.$$

La matrice de covariance peut alors s'écrire par blocs :

Cependant, à part dans le cas très particulier de modèles de la forme :

$$F(\mathbf{X}, U) = \mathbf{A}\mathbf{X} + BU$$

l'introduction des paramètres dans le vecteur d'état conduit à un modèle non linéaire. C'est déjà le cas dans le système masse-ressort très simple présenté dans l'annexe D.



### Filtre de Kalman étendu

L'extension la plus naturelle du filtre de Kalman à des problèmes non linéaires est le filtre de Kalman étendu proposé dans [LJUNG1979]. Il s'agit de linéariser le modèle autour de l'état courant puis d'appliquer le filtre de Kalman classique au système linéarisé.

Considérons le modèle décrit par les équations (5.2) et les observations reliées au vecteur d'état par l'équation (5.3) dans le cas non linéaire, i.e.  $F$  et  $\mathcal{H}$  peuvent être des fonctions non linéaires.

$$\mathbf{X}(t_k) = F(\mathbf{X}(t_{k-1}), U) \quad (5.14)$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$$

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathcal{H}(\mathbf{X}(t_k)) + \varepsilon_k \quad (5.15)$$

où  $\varepsilon_k$  désigne le bruit de mesure. On linéarise les deux équations (5.14) et (5.15) autour de l'état courant  $\mathbf{X}^a(t_{k-1})$  ce qui donne le système linéarisé

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^p(t_k) &= d_{\mathbf{X}}F(\mathbf{X}^a(t_{k-1}))(\mathbf{X}(t_{k-1}) - \mathbf{X}^a(t_{k-1})) \\ \mathbf{Y}(t_k) - \mathcal{H}(\mathbf{X}^p(t_k)) &= d_{\mathbf{X}}\mathcal{H}(\mathbf{X}^p(t_k)) \cdot (\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^p(t_k)) + \varepsilon_k \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $d_{\mathbf{X}}F(\mathbf{X}^a(t_{k-1}))$  est la différentielle de  $F$  par rapport à  $\mathbf{X}$  au point  $\mathbf{X}^a(t_{k-1})$  et  $d_{\mathbf{X}}\mathcal{H}(\mathbf{X}^p(t_k))$  est la différentielle de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $\mathbf{X}$  au point  $\mathbf{X}^p(t_k)$ . Il suffit alors d'appliquer le filtre de Kalman à ce nouveau modèle linéaire dont l'état est  $\mathbf{X}(t_k) - \mathbf{X}^p(t_k)$ . On note alors  $\mathbf{A}_k$  la différentielle de  $F$  prise en  $\mathbf{X}^a(t_{k-1})$ ,  $d_{\mathbf{X}}F(\mathbf{X}^a(t_{k-1}))$  et  $\mathbf{H}_k$  la différentielle de  $\mathcal{H}$  prise en  $\mathbf{X}^p(t_k)$ ,  $d_{\mathbf{X}}\mathcal{H}(\mathbf{X}^p(t_k))$ .

On obtient alors l'algorithme du filtre de Kalman étendu (EKF : extended Kalman filter).

#### 1. Initialisation.

Choix de l'initialisation du vecteur d'état  $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^a(t_0) = \mathbf{X}_0$  et de la matrice de covariance  $\mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}^a(t_0) = \mathbf{P}_0$ .

#### 2. Prédiction.

L'étape  $k-1$  est supposée accomplie. Soient  $\mathbf{X}_{k-1}^a(t_0)$  et  $\mathbf{P}_{k-1}^a(t_0)$  le vecteur d'état et la matrice de covariance obtenus à l'étape  $k-1$ . L'étape qui suit est l'application du modèle direct. Pour cette étape, l'utilisation de la linéarisée n'est pas nécessaire comme le montre l'équation (5.17). L'approximation linéaire n'est utilisée que pour mettre à jour la matrice de covariance (Equation 5.18). Le nouvel état prédit  $\mathbf{X}^p(t_k)$  et la nouvelle matrice de covariance  $\mathbf{P}^p(t_k)$  sont alors :

$$\mathbf{X}^p(t_k) = F(\mathbf{X}^a(t_{k-1}), U) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{P}^p(t_k) = \mathbf{A}_k \mathbf{P}^a(t_{k-1}) \mathbf{A}_k^T \quad (5.18)$$

#### 3. Analyse.

En appliquant l'étape d'analyse au problème linéarisé (Equations 5.11), on obtient le nouvel état analysé  $\mathbf{X}^a(t_k)$

$$\mathbf{X}^a(t_k) = \mathbf{X}^p(t_k) + K_k [\mathbf{Y}(t_k) - \mathcal{H}(\mathbf{X}^p(t_k))]$$

où le gain  $K_k$  est donné par

$$K_k = \mathbf{P}^p(t_k) \mathbf{H}_k^T [\mathbf{H}_k \mathbf{P}^p(t_k) \mathbf{H}_k^T + R]^{-1}.$$

Finalement, la matrice de covariance est mise à jour suivant :

$$\mathbf{P}^a(t_k) = \mathbf{P}^p(t_k) - K_k \mathbf{H}_k \mathbf{P}^p(t_k) \quad (5.19)$$

Au final, les équations du filtre de Kalman étendu correspondent aux équations du filtre linéaire (Equations (5.8) à (5.13)) où les linéarisées de la fonction décrivant le modèle et de la fonction d'observation remplacent les opérateurs linéaires. La linéarisation fait perdre son caractère optimal au filtre de Kalman.

Ce filtre fournit des résultats satisfaisants lorsqu'il est appliqué à des problèmes faiblement non linéaires mais il peut diverger en cas de forte non linéarité [EVENSEN1992].

En outre, la mise en œuvre directe du filtre de Kalman étendu pour des problèmes de grande taille pose rapidement un problème de mémoire et de temps de calcul à cause de la matrice de covariance  $\mathbf{P}$ . Cette matrice carrée a pour taille celle du vecteur d'état, c'est à dire le nombre de variables et de paramètres à estimer et la matrice de covariance n'est pas une matrice creuse.

Pour s'adapter à des problèmes fortement non linéaire et/ou de grandes tailles, des solutions ont été trouvées. Nous présentons ici trois types d'approche qui cherchent à régler ces problèmes. L'idée est de remarquer que dans les problèmes étudiés, après une éventuelle période transitoire, la trajectoire du modèle se retrouve attirée vers une sous variété de l'espace d'état de dimension beaucoup plus faible.

Les méthodes appelées filtres de Kalman réduits proposent de sélectionner les directions où il est plus intéressant de corriger l'erreur en analysant la matrice de covariance [HOTEIT2001]. Certaines méthodes sont basées sur la décomposition en valeurs singulières (SVD) ou en valeurs propres [COHN et TODLING1995, VERLAAN et HEEMINK1995, COHN et TODLING1996]. Ainsi, dans [COHN et TODLING1995] et dans [COHN et TODLING1996], les auteurs proposent une décomposition en valeurs singulières de la matrice de propagation  $\mathbf{A}_k$  ou en valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}_k \mathbf{P}^a(t_{k-1}) \mathbf{A}_k^T$ . L'opération de mise à jour de la matrice de covariance après application du modèle (Equation (5.18)) étant très coûteuse, il s'agit de remplacer la matrice  $\mathbf{A}_k$  par une matrice de rang plus faible. Ainsi, dans [COHN et TODLING1995, COHN et TODLING1996] la matrice de propagation  $\mathbf{A}$  est décomposée en valeurs singulières :

$$\mathbf{A} = \mathbf{V} \mathbf{D} \mathbf{W}^T$$

où la matrice  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{W}$  sont des matrices orthogonales unitaires. Comme la matrice de covariance  $\mathbf{P}$  est symétrique positive, les valeurs singulières de  $\mathbf{P}$  qui forment la diagonale de  $\mathbf{D}$  sont toutes positives ou nulles. L'idée est alors de sélectionner les  $L$  plus grandes valeurs singulières et de ne modifier la matrice de covariance que dans les directions singulières associées à ces valeurs. Soit  $\mathbf{D}_L$  la matrice diagonale où les valeurs singulières sauf les  $L$  plus grandes sont remplacées par 0 et soient  $\mathbf{V}_L$  et  $\mathbf{W}_L$  les matrices constituées des vecteurs singuliers associés aux  $L$  plus grandes valeurs singulières. La matrice  $\mathbf{A}$  est alors remplacée par la matrice  $\mathbf{A}_L$  :

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{V}_L \mathbf{D}_L \mathbf{W}_L^T$$

Les auteurs remplacent alors  $\mathbf{A}$  par son approximation de rang plus faible  $\mathbf{A}_L$  dans l'équation (5.18). Cette approche a l'inconvénient de nécessiter une décomposition en valeurs singulières à chaque itération. Dans l'autre approche [VERLAAN et HEEMINK1995], la décomposition en valeur singulière est cette fois appliquée à la matrice de covariance n'est effectuée qu'une seule fois. Plus récemment, le filtre SEEK (Singular Evolutive Extended Kalman Filter) [PHAM *et al.*1998] considère dès l'initialisation une matrice de covariance de rang réduit et le filtre proposé permet de conserver le rang.

L'idée sous jacente aux deux méthodes que nous présentons pour finir est la suivante :

*Il est plus facile d'approximer une distribution gaussienne que d'approximer une fonction non linéaire quelconque* [JULIER et UHLMANN1997]

La première méthode consiste alors en l'utilisation de méthodes de Monte-Carlo pour gérer les problèmes fortement non linéaires. Introduites en 1994 en océanographie par G. Evensen [EVENSEN1994] sous le nom d'*Ensemble Kalman filter* mais aussi appelées méthodes particulières, leur principe est d'éviter la linéarisation de l'équation du modèle nécessaire à la propagation de la matrice de covariance dans le filtre de Kalman étendu (équations (5.18) et (5.19)) en utilisant des méthodes de Monte Carlo pour propager ces matrices. Le lecteur pourra consulter [EVENSEN2003] pour une référence complète. Pour propager la matrice de covariance de l'étape  $k - 1$  à l'étape  $k$ , on considère un ensemble d'états possibles pour le système à l'instant  $t_{k-1}$ . Cet ensemble ou nuage d'états doit avoir pour moyenne  $\mathbf{X}^a(t_{k-1})$  et pour matrice de covariance  $\mathbf{P}^a(t_{k-1})$ , la figure 5.1(a) montre de manière stylisée en 2D l'allure d'un tel nuage, bien sûr dans la pratique ce nuage vit dans un espace dont la dimension est égale à la taille du vecteur d'état. Ensuite, le modèle direct complet non linéaire est appliqué à chacun des points du nuage. Un nouveau nuage est obtenu dont la moyenne constitue l'état prédit  $\mathbf{X}^p(t_k)$  et dont la matrice de covariance constitue

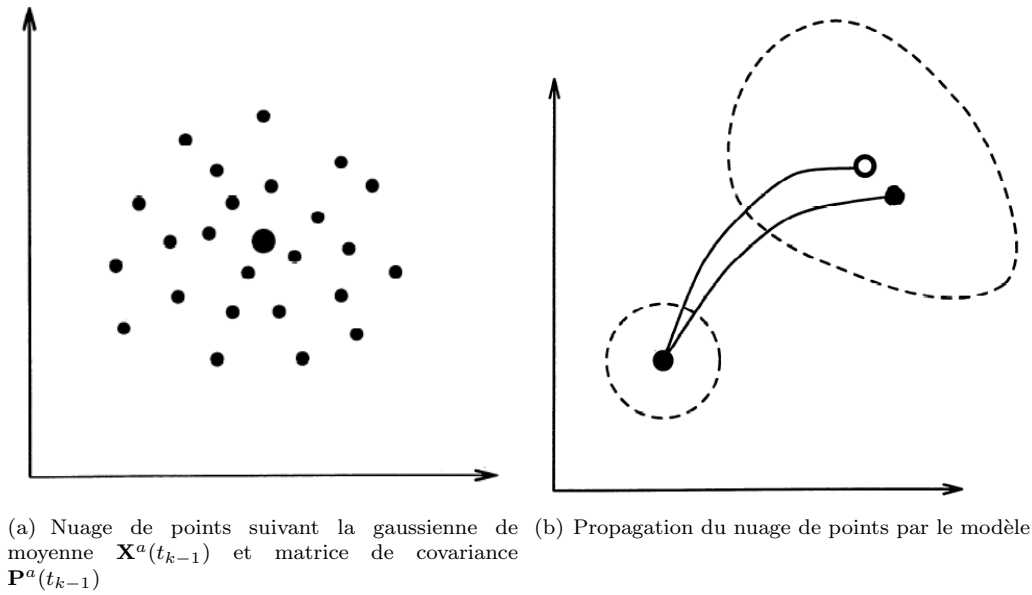


FIG. 5.1 – Schémas en 2D illustrant l'évolution de l'ensemble (entouré par le contour en pointillés) par le modèle en utilisant la méthode de Monte Carlo, extrait de [EVENSEN1994]

la nouvelle matrice  $\mathbf{P}^p(t_{k-1})$ , comme le montre le schéma de la figure 5.1(b). Plus le nuage de points choisi initialement est grand, plus le filtre produit un résultat précis mais plus la méthode est coûteuse.

La méthode UKF (Unscented Kalman Filtering) [JULIER et UHLMANN1997] propose une alternative déterministe aux méthodes de Monte Carlo en proposant de partir d'un certain nombre de points fixés de manière déterministe à partir de la moyenne et de la matrice de covariance plutôt que de procéder à des tirages aléatoires. Pour traiter un système de taille  $N$ , les auteurs proposent une méthode pour déterminer, à partir de  $\mathbf{X}^a(t_{k-1})$  et de  $\mathbf{P}^a(t_{k-1})$ ,  $2N + 1$  points appelés sigma points à propager pour obtenir le nouvel état et la nouvelle matrice de covariance comme le montre la figure 5.2.

#### 5.1.4 Problèmes inverses pour l'étude de la contraction cardiaque

Deux grands types de problèmes inverses ont été traités en électrophysiologie. Le problème le plus populaire est le problème inverse cœur/torse. En effet, l'électrocardiographie permet l'enregistrement des potentiels électriques au niveau du torse, cette modalité étant utilisée depuis longtemps pour explorer la fonction cardiaque. En fonction du nombre et du positionnement de ces électrodes, il est possible pour le médecin de comprendre et de localiser différentes pathologies. L'idée, développée en particulier dans [RUDY2001, RUDY2003], est qu'avec un nombre suffisant d'électrodes placées sur le torse, on peut reconstruire le potentiel à la surface du cœur. Les potentiels enregistrés à la surface du thorax sont le résultat de la conduction à travers le thorax de l'activité électrique qui se déroule au niveau du cœur. Cette conduction à travers le thorax est modélisée comme un problème quasi-statique, c'est à dire comme une succession de problèmes statiques indépendants. A un instant donné, la distribution de potentiels dans le thorax satisfait une équation de Poisson. Un modèle direct linéaire et statique permet donc de passer des potentiels sur l'épicaarde aux potentiels sur le torse. Le torse n'est pas un volume homogène et certaines régions ont des conductivités différentes, en particulier, les poumons sont peu conducteurs. Une fois discrétisée, l'équation de Laplace se traduit par une relation linéaire entre les potentiels sur le torse et les potentiels sur l'épicaarde :

$$V_T = AV_E \quad (5.20)$$

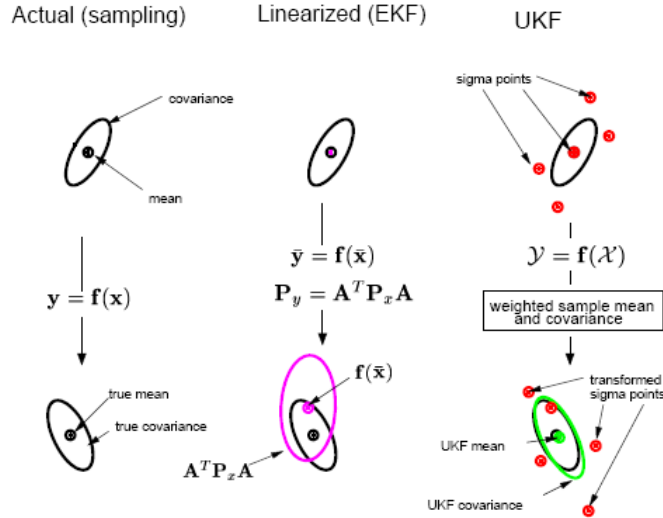


FIG. 5.2 – UKF (extrait de [VAN DER MERWE et WAN2001]) : exemple de moyenne et covariance en réalité, avec l'EKF et avec l'UKF (de gauche à droite).

avec  $V_T$  le vecteur des potentiels sur le torse et  $V_E$  le vecteur des potentiels sur l'épicarde.  $A$  est une matrice qui dépend de la géométrie du thorax.

Ce qui devient intéressant, c'est d'obtenir les potentiels sur l'épicarde à partir des potentiels sur le torse qui peuvent être mesurés sans aucune procédure chirurgicale complexe ou invasive. A première vue, le problème semble simple il suffit d'inverser la relation (5.20) :  $V_E = A^{-1}V_T$ . Une manière plus robuste de calculer l'inverse s'obtient grâce à la minimisation du problème aux moindres carrés :

$$\min_{V_E} \|AV_E - V_T\|^2 \quad (5.21)$$

Malheureusement,  $A$  est de grande taille, ce qui rend le problème de l'inversion de  $A$  comme de la résolution du problème de minimisation 5.21 mal posés [HANSEN1998, RUDY2001]. En outre cette matrice  $A$  est plus généralement mal conditionnée, ce qui implique que de faibles erreurs de mesures sur  $V_T$  peuvent devenir très importantes au niveau de  $V_E$ . Le caractère linéaire et statique du problème permet d'utiliser une des techniques classiques pour résoudre ce type de problèmes mal posés : la régularisation de Tikhonov (voir [HANSEN1998] pour une revue de ces techniques). Le principe de la régularisation de Tikhonov est le même que celui appliqué dans le cas de l'estimation du flot optique (Section 3.1.1), il s'agit d'ajouter au terme de moindres carrés un terme de régularisation, ce qui donne le nouveau problème de minimisation :

$$\min_{V_E} [\|AV_E - V_T\|^2 + t\|RV_E\|^2]$$

où  $R$  est un opérateur de régularisation et  $t$  contrôle la contrainte. Il est raisonnable d'imposer une contrainte de régularité puisque le potentiel  $V_E$  calculé doit être non seulement solution du problème aux moindres carrés mais aussi réaliste physiologiquement. Grâce à ce type de régularisation, Rudy a développé une modalité appelée ECGI (ElectroCardioGraphic Imaging) qui permet à partir de potentiels sur le torse et de la connaissance de la géométrie du thorax (obtenue par exemple par IRM ou scan CT) de retrouver les potentiels sur l'épicarde [RUDY2001, RUDY2003]. La méthode a été validée et appliquée à des cas cliniques [RUDY2003].

Un deuxième problème inverse qui se présente est l'estimation de paramètres pour les modèles électrophysiologiques cellulaires (Section 4.2.1). En effet, ces modèles très fins reposent souvent sur de nombreux paramètres qui sont déterminés grâce à des mesures très fines des courants ioniques de la cellule étudiée [BEELER et REUTER1977, LUO et RUDY1991, LUO et RUDY1994]. Dans [DOKOS et LOVELL2004], Dokos

et Lovell proposent une estimation de ces paramètres par minimisation d'un critère aux moindres carrés. Les auteurs appliquent leur méthode au modèle de Beeler et Reuter [BEELER et REUTER1977]. Les auteurs ont étudié l'identifiabilité des paramètres pour ce problème, ils ont ensuite approché la fonctionnelle à minimiser par une fonctionnelle quadratique qu'ils ont optimisée par une "descente de gradient curviligne".

L'assimilation de données et l'estimation de paramètres sont donc de plus en plus utilisées en électrophysiologie. En outre, des travaux ont été effectués dans ce sens en ce qui concerne le fonctionnement mécanique du cœur. En effet, l'IRM marquée, qui permet d'extraire les déformations du muscle cardiaque, produit des données idéales pour s'intéresser à l'estimation de paramètres de modèles mécaniques du cœur. Dans [SHI et LIU2003], les auteurs présentent une approche basée sur un filtre de Kalman étendu pour estimer à la fois des paramètres mécaniques (module de Young et rapport de Poisson) et les variables décrivant l'état du myocarde aux instants considérés à partir des déplacements obtenus à partir d'IRM par contraste de phase. Le modèle utilisé dans [SHI et LIU2003] est un modèle linéaire isotrope passif du myocarde, les variables qui sont estimées et observées sont les vecteurs de déplacement. Cette estimation est validée par les auteurs sur des cas synthétiques. Appliquée à des cas de cœurs de chiens infarctés, l'estimation de l'état et des paramètres montre des zones d'akinésie correspondant à la zone infarctée, les propriétés du tissu myocardique sont aussi fortement modifiées dans la zone infarctée. D'autres travaux commencent à s'intéresser à l'assimilation de données pour des modèles électromécaniques du cœur. Ainsi, dans [SAINTE-MARIE *et al.*2003, SERMESANT *et al.*2005b], les auteurs proposent des méthodes variationnelles comme séquentielles pour estimer les paramètres d'un modèle électromécanique du cœur. Dans le cadre de ces travaux, le modèle est un modèle actif. Les paramètres estimés sont donc directement reliés à l'état fonctionnel du tissu cardiaque. Le modèle mécanique utilisé est celui de [BESTEL *et al.*2001] et les auteurs proposent des résultats d'estimation de paramètres (par exemple la contractilité) sur des maillages à partir de données synthétiques.

### 5.1.5 Estimation de paramètres pour les modèles de FitzHugh-Nagumo et de Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques

Les méthodes d'assimilation de données, présentées dans la section précédente, passent toutes par le même objectif. En conservant les notations de la section 5.1.1, l'idée est de minimiser l'écart quadratique entre les données et l'état du système :

$$\min \int_0^T \|\mathcal{H}\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|^2$$

Dans tout les cas, la fonction  $F$  définissant l'évolution du modèle et la fonction  $\mathcal{H}$  sont des fonctions linéaires dans le cas optimal, mais dans tous les cas au moins explicite. Ce n'est pas notre cas.

En effet, les mesures électriques *in vivo* disponibles sont des potentiels extracellulaires et non des potentiels transmembranaires. Par contre la classe de modèle choisie (FitzHugh-Nagumo et Aliev et Panfilov) comprend un potentiel transmembranaire et une variable auxiliaire rassemblant différents canaux ioniques qui n'est pas observable. Il existe des modèles donnant des informations sur le milieu extracellulaire et le milieu intracellulaire. Ce sont les modèles bidomains que nous avons évoqué plus haut. Ces modèles nécessitent cependant des schémas numériques (voir par exemple [FRANZONE *et al.*1998, PENNACHIO2004]) délicats à manier et comportent de nombreux paramètres et variables qui seront alors à estimer à partir des mêmes données.

Nous sommes donc amenés à comparer le potentiel transmembranaire et le potentiel extracellulaire mesuré. Nous ne connaissons pas le potentiel intracellulaire, il n'est donc pas possible de relier analytiquement potentiel transmembranaire et potentiel mesuré. C'est pourquoi les méthodes classiques décrites dans la section précédente ne sont pas directement applicables ici.

Nous proposons donc de passer par l'intermédiaire de caractéristiques de la vague électrique qui sont à la fois observables à partir du potentiel d'action et du potentiel mesuré comme les temps marquants de la vague, le temps de dépolarisation et le temps de repolarisation (Figure 5.3). Nous avons vu que le temps de dépolarisation est facile à déterminer aussi bien à partir du modèle qu'à partir des mesures car les variations de potentiel à cet instant sont très rapides. A partir des temps de dépolarisation, nous sommes de plus en

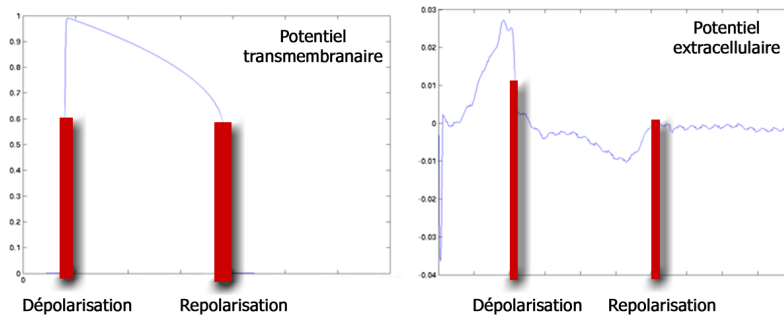


FIG. 5.3 – Comparaison d’un potentiel d’action (à gauche) et d’un potentiel extra-cellulaire (à droite) en un point donné, au cours du temps. Identification des temps de dépolarisation et de repolarisation dans les deux cas.

mesure de calculer la vitesse de propagation de l’onde. L’instant de repolarisation est aussi un moment que l’on peut repérer. Pour le calculer à partir du potentiel d’action, nous avons donné une définition précise de cet instant en calculant théoriquement la durée du potentiel d’action. Cependant, comme la repolarisation est un phénomène plus lent, l’instant de repolarisation est plus difficile à détecter précisément à partir du potentiel mesuré, en particulier loin de la zone de stimulation. C’est en particulier le cas pour le potentiel représenté sur la figure 5.4.

Comme les temps de dépolarisation font l’objet d’un consensus sur le moyen de les détecter, nous présenterons par la suite des méthodes essentiellement conçues pour utiliser les temps de dépolarisation. Si les mesures sont les temps de dépolarisation, nous ne sommes toujours pas dans un cadre idéal. En effet, le temps de dépolarisation est obtenu par seuillage à partir du potentiel d’action :

$$t(\mathbf{x}) = \min_t \{t | u(t) = 0.5\}.$$

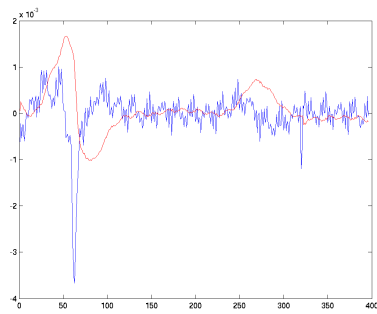
C’est pourquoi on ne peut pas avoir une fonction de modèle  $F$  et une fonction d’observation  $H$  qui soient toutes les deux explicites.

Dans la suite de ce chapitre, nous proposons trois stratégies d’assimilation de données pour la problématique que nous venons d’introduire. Une première section présente l’utilisation du filtre de Kalman étendu dans le cas unidimensionnel. Dans la deuxième section, nous proposons d’utiliser directement les relations entre paramètres du modèle et caractéristiques observables que nous avons décrites section 4.2.3 pour donner une estimation des paramètres du modèle. Cette tactique sera finalement adoptée pour proposer une estimation globale de paramètres. Cette estimation globale permettra d’initialiser l’estimation locale que nous présentons finalement dans la dernière section. Dans cette dernière section, la tactique adoptée est d’utiliser la causalité de la propagation de l’onde de dépolarisation pour ramener l’écart aux moindres carrés entre données et modèles à un série de minimisations unidimensionnelles successives par la méthode de Brent.

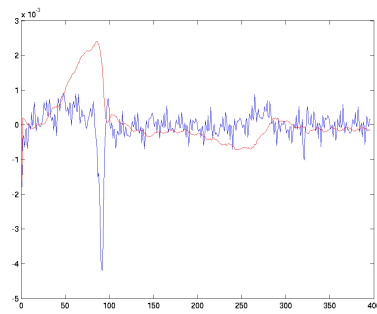
## 5.2 Filtrage de Kalman appliqué à des données 1D.

### 5.2.1 Position du problème

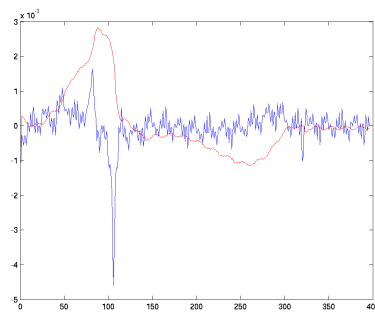
La comparaison directe de mesures surfaciques avec le modèle tridimensionnel est un problème de grande taille car un maillage tridimensionnel des ventricules doit être suffisamment fin pour permettre la propagation du potentiel d’action comme nous l’avons vu dans la section 4.2.5. Nous nous intéressons donc dans un premier temps au problème simplifié dans un espace unidimensionnel. Le nombre d’observations et la taille du maillage sont alors réduits. En dimension 1, il n’y a qu’une seule direction de propagation



(a) Cas facile. Le temps de repolarisation correspond au maximum local du signal dans la deuxième moitié du cycle



(b) Cas litigieux 1



(c) Cas litigieux 2

FIG. 5.4 – Détection du temps de repolarisation. Loin de la zone de stimulation, le temps de repolarisation n'est pas nettement visible. Le signal électrique mesuré est représenté en rouge et en bleu on peut voir la dérivée du signal. La dépolarisation correspond clairement à la valeur la plus négative de la dérivée.

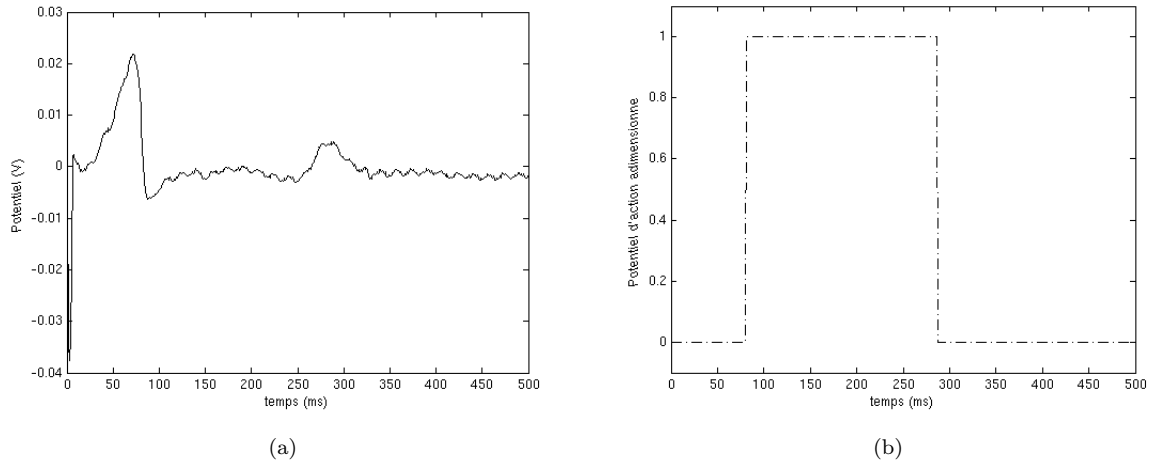


FIG. 5.5 – Le potentiel extra-cellulaire mesuré en une électrode et le potentiel d’action simplifié en pointillés construit à partir du potentiel extra-cellulaire

possible, la forme des solutions des systèmes de FitzHugh-Nagumo et d’Aliev et Panfilov est donc très simple.

Comme nous l’avons montré sur la figure 5.3, nous souhaitons effectuer la comparaison entre potentiel d’action et potentiel extracellulaire en passant par l’intermédiaire des temps de dépolarisation et de repolarisation. La première idée est de considérer les temps de dépolarisation et de repolarisation comme les mesures. Cependant, les différentes méthodes décrites dans la section 5.1 s’appliquent à des situations où l’observation est une fonction explicite des sorties du modèle. Les temps de dépolarisation s’expriment à partir du potentiel d’action comme l’instant où le potentiel d’action passe par une valeur donnée, cette fonction n’est pas explicite. Pour tenter l’application d’une méthode classique, nous décidons de fabriquer, à partir des mesures, un potentiel transmembranaire simplifié. Si le temps de dépolarisation  $\theta_d$  et le temps de repolarisation  $\theta_r$  sont disponibles, on pose :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t > \theta_r \text{ ou } t < \theta_d, \\ 1 & \text{si } \theta_d \leq t \leq \theta_r. \end{cases}$$

La fonction  $u(t)$  est alors le potentiel simplifié que l’on propose (figure 5.5).

La propagation d’un potentiel d’action est un phénomène causal, c’est à dire que ce qui se passe à l’instant  $t_k$  ne dépend que de ce qui s’est passé avant l’instant  $t_k$ . Nous avons donc choisi d’utiliser cet avantage pour utiliser une méthode séquentielle, plus économique en mémoire et en temps de calcul. L’approche choisie est un filtre de Kalman étendu. Pour démontrer la faisabilité, la robustesse et la validité de l’approche proposée, nous allons utiliser des potentiels d’action obtenus par simulation des modèles de FitzHugh-Nagumo et d’Aliev et Panfilov en 1D. Dans un souci de réalisme, nous sous-échantillons en espace et en temps les potentiels d’action simulés pour constituer une série de mesures. Dans le formalisme de l’assimilation de données présenté à la section 5.1, on note  $\mathbf{Y}(t_k) = (Y_j(t_k))_{0 \leq j \leq M-1}^T$  les mesures éventuellement disponibles à l’instant  $t_k$ . Le nombre  $M$  de mesures disponibles à un instant donné est entre 10 et 15 dans le cas des données réelles. Dans le cas des potentiels simulés, nous essayons de nous rapprocher de cette densité de mesures en sous-échantonnant régulièrement la grille spatiale utilisée pour la simulation.

Dans ce cadre, nous avons travaillé avec deux modèles de potentiel d’action de type réaction-diffusion, le modèle de FitzHugh-Nagumo et le modèle d’Aliev et Panfilov. Ces deux modèles sont des modèles non linéaires de part leur terme de réaction qui est un polynôme de degré 3.

Soit une discrétisation temporelle  $(t_k)_k$  de l’intervalle  $[0; T]$  et une discrétisation spatiale  $(x_i)_{0 \leq i \leq n-1}$  de l’intervalle  $[0; 1]$ . On note  $u_j(t_k)$  et  $z_j(t_k)$  les valeurs des variables  $u$  et  $z$  en  $x_j$  à l’instant  $t_k$ .



Le système de FitzHugh-Nagumo discrétisé grâce à un schéma explicite en temps et aux différences finies centrées en espace est décrit dans la section 4.2.5 par le système (4.56) et le système d'Aliev et Panfilov discrétisé grâce à un schéma explicite en temps et aux différences finies centrées en espace est décrit dans la section 4.2.5 par l'équation (4.59).

Dans le formalisme de l'assimilation de données, nous définissons le vecteur d'état à l'instant  $t_k$ ,  $\mathbf{X}(t_k)$  grâce à l'équation (5.22) :

$$\mathbf{X}(t_k) = (u_0(t_k), \dots, u_{n-1}(t_k), z_0(t_k), \dots, z_{n-1}(t_k))^T \quad (5.22)$$

Les deux systèmes (Equations eq4.56 et eq4.59) peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = F(\mathbf{X}(t_k)) \quad (5.23)$$

Le vecteur d'état ainsi obtenu est de taille  $N = 2n$ .

Décrivons maintenant la fonction  $\mathcal{H}$  d'observation. Soient  $N$  la taille du vecteur d'état et  $M$  le nombre de mesures disponibles à un instant donné. La fonction d'observation est la fonction qui relie le vecteur d'état obtenu par le modèle  $(X_i(t_k))_{0 \leq i \leq N-1}$  et les mesures  $(Y_j(t_k))_{0 \leq j \leq M-1}$ . Les mesures sont des potentiels d'action, la fonction d'observation est donc une simple projection, c'est une fonction linéaire que l'on représente par la matrice  $\mathcal{H}$

$$\mathbf{Y}(t_k) = \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) \quad (5.24)$$

où  $\mathcal{H}$  est une matrice de taille  $M \times N$  avec  $\mathcal{H}(i, j) = 1$  si  $\mathbf{Y}_j$  est la mesure du potentiel au point  $x_i$  et 0 sinon.

## 5.2.2 Observabilité des paramètres

Avant toute estimation des paramètres, il faut se demander quels paramètres il est possible d'estimer à partir des données disponibles. Ainsi, dans l'exemple trivial de l'annexe D.2, la masse  $m$  et la raideur  $k$  du système masse-ressort ne peuvent être estimés tous les deux puisqu'ils interviennent sous la forme du rapport  $k/m$ . Un modèle est dit globalement identifiable quant à ses paramètres si, étant données des mesures expérimentales acceptables, il existe un unique ensemble de paramètres permettant de reproduire ces données. Autrement dit, la fonction qui aux paramètres associe les mesures est-elle injective ?

Dans le cas très simple que nous considérons, l'estimation d'une valeur de paramètres pour tout le segment considéré, la question de l'identifiabilité devient une question d'indépendance des paramètres. Comme nous utilisons une version adimensionnée et simplifiée du système, il ne reste aucun paramètre redondant. Chacun des paramètres restant correspond à une caractéristique du potentiel d'action.

Cependant, dans le cas de mesures réelles, nous ne disposons pas d'un potentiel d'action complet, mais seulement d'un temps de dépolarisation et éventuellement d'un temps de repolarisation. Cette fois, le système n'est plus complètement identifiable. En effet, d'après la section 4.2.3, nous savons que pour le système de FitzHugh-Nagumo, nous avons la vitesse de dépolarisation  $c = \sqrt{2kd}(0.5 - a)$  et nous savons qu'il est possible d'exprimer la durée du potentiel d'action en fonction des paramètres. De même pour le système d'Aliev et Panfilov, nous avons la vitesse de dépolarisation  $c = \sqrt{2kd}(0.5 - a)$  et la durée du potentiel d'action  $APD = (a^2 + 1 - 2a)/(4a)$  (Section 4.2.3). Le temps de dépolarisation en un point  $x$  est donc égal à  $t_1(x) = t_0 + cx$  et le temps de repolarisation vaut  $t_2(x) = t_1(x) + APD$ . Ainsi connaître la vitesse est équivalent à connaître les temps de dépolarisation. La connaissance des temps de dépolarisation et des durées de potentiel d'action donne seulement 2 relations mettant en jeu trois des paramètres du système. Etant donné un temps de dépolarisation et un temps de repolarisation, il existe plusieurs paramètres permettant de retrouver ces deux mesures. En outre, le paramètre  $\varepsilon$  n'intervient pas, il ne sera donc pas identifiable. Enfin, nous ne disposerons généralement que des temps de dépolarisation. La figure 5.6 montre un exemple où deux jeux de paramètres différents donnent les mêmes temps de dépolarisation.

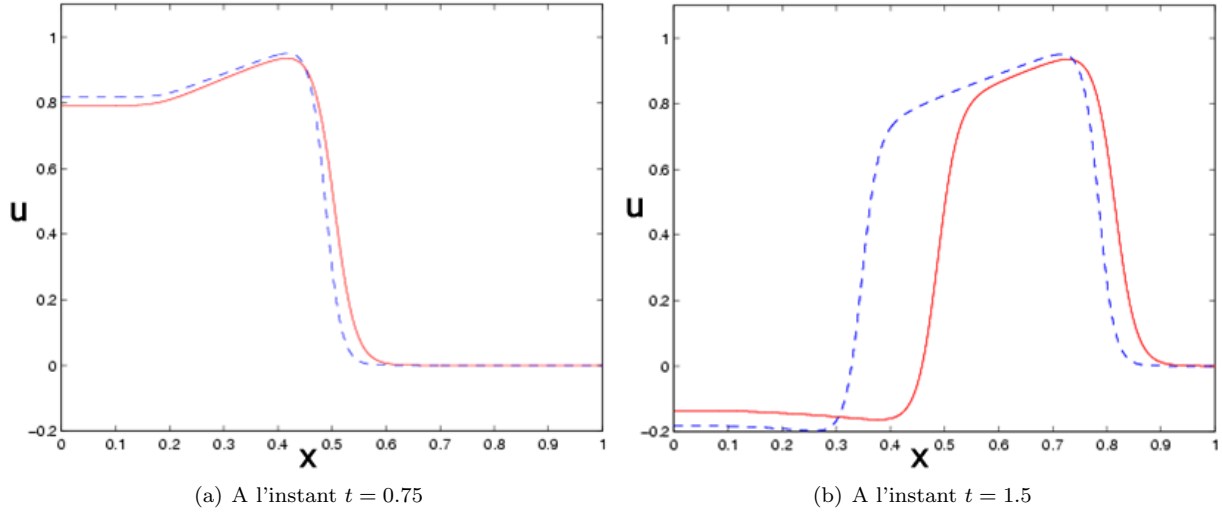


FIG. 5.6 – Deux jeux de paramètres donnant approximativement les mêmes temps de dépolariation. En pointillés, le résultat obtenu avec  $d = 1$  et  $a = 0.2$  et en traits pleins le résultat obtenu avec  $d = 75$  et  $a = 0.25$

Nous pouvons maintenant choisir la méthode à employer. Nous présenterons ensuite les résultats sur des images simulées et sur des images réalistes. Enfin nous discuterons les résultats obtenus, nous aborderons entre autre l'influence de la discrétisation dans le cadre de l'assimilation de données, l'opportunité et les problèmes posés par l'extension d'une telle méthode en dimension supérieure.

### 5.2.3 Méthode : filtre de Kalman étendu pour estimer des paramètres

Le problème tel que nous venons de le poser peut se résumer par le système suivant :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t_k) &= F(\mathbf{X}(t_{k-1})) \\ \mathbf{Y}(t_k) &= \mathcal{H}\mathbf{X}(t_k) + \mathbf{w}_k\end{aligned}$$

où  $\mathbf{w}_k$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance donnée  $\mathbf{R}$ .

Pour appliquer le filtre de Kalman étendu, il faut maintenant linéariser la fonction  $F$ . On peut décomposer la fonction de modèle  $F$  en une partie linéaire qui correspond à la diffusion et une partie non linéaire correspondant à la réaction.

$$F(\mathbf{X}(t_k)) = \mathbf{F}\mathbf{L}_k\mathbf{X}(t_k) + \mathbf{FNL}(\mathbf{X}(t_k))$$

La fonction d'observation  $\mathcal{H}$  est une matrice de projection, elle est linéaire. Pour mettre à jour la matrice de covariance dans le filtre de Kalman étendu, il faut remplacer la fonction non linéaire  $F$  par sa linéarisée que l'on notera  $\mathbf{A}$ . On applique alors le filtre de Kalman étendu tel que décrit dans la section 5.1.

#### Application du filtre de Kalman à l'estimation de paramètres

Pour permettre au filtre de Kalman d'estimer non seulement les variables mais aussi les paramètres du système, les paramètres à estimer doivent être ajoutés au vecteur d'état. Ainsi, pour estimer les valeurs du paramètre  $a$  et du paramètre  $k$ , le nouveau vecteur d'état choisi à un instant  $t_l$  est donné par :

$$\mathbf{X}(t_l) = (u_1(t_l), u_2(t_l), \dots, u_n(t_l), z_1(t_l), z_2(t_l), \dots, z_n(t_l), a, k)^T \quad (5.25)$$

Suivant les remarques faites quant à l'observabilité des paramètres, nous nous contentons d'estimer un ou deux paramètres, ici  $a$  et  $k$ . Il faut alors ajouter aux équations d'évolution  $a^{k+1} = a^k$  pour le paramètre  $a$  et de même pour les autres paramètres. Comme c'est souvent le cas, les paramètres des systèmes de FitzHugh-Nagumo et Aliev et Panfilov interviennent de façon non linéaire, les dérivées de la fonction  $F$  par rapport aux paramètres permettent de compléter la linéarisée de  $F$ .

### Initialisation du filtre de Kalman

Pour mettre en œuvre un filtre de Kalman, il faut initialiser d'une part le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  et la matrice de covariance  $\mathbf{P}$ .

Le vecteur d'état comprend l'état initial du système qu'il faut estimer comme pour simuler le modèle direct. Le vecteur d'état comprend aussi les paramètres du modèle que l'on estime.

L'initialisation de la matrice de covariance est plus spécifique à l'estimation de paramètres. Il s'agit de donner une estimation de la covariance de l'erreur commise sur le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  à l'initialisation. C'est plutôt délicat car en général peu d'informations *a priori* sont disponibles. En particulier, la covariance entre les paramètres à estimer et les variables observables du système (le potentiel d'action) n'est pas connue.

Comme la distribution des paramètres n'est pas connue et influence sensiblement les résultats, nous ne pouvons pas utiliser de méthodes basées sur l'analyse d'observations empiriques [PHAM *et al.*1998].

Cependant, dans le cas particulier d'un système linéaire autonome, Hager et Horowitz ont démontré que quelque soit l'initialisation de la matrice de covariance, l'équation de Riccati qui gouverne la mise à jour de la matrice de covariance conduit toujours au même résultat final [HAGER et HOROWITZ1976]. Ce résultat ne s'applique pas directement aux systèmes de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov puisque ces systèmes sont non linéaires. Cependant, en l'absence d'information suffisante sur la distribution des paramètres, il semble raisonnable de se contenter d'une matrice de covariance initiale très simple. On prend donc  $\mathbf{P}$  la matrice diagonale suivante :

$$\mathbf{P}^0 = \text{diag}(\sigma_u, \dots, \sigma_u, \sigma_z, \dots, \sigma_z, \sigma, \dots, \sigma).$$

Les relations entre les différentes variables apparaissent au cours de l'estimation comme on le voit sur l'exemple très simple détaillé en annexe D.

Les conditions initiales étant mal connues, il est possible d'utiliser la périodicité du système pour itérer le filtre de Kalman. Ainsi, à la deuxième itération, les conditions initiales et en particulier les valeurs initiales des paramètres sont meilleures et en quelques itérations, la valeur estimée se stabilise et le filtre de Kalman converge.

#### 5.2.4 Limites du filtre de Kalman étendu. Application de contraintes.

##### Résultats de l'application directe du filtre de Kalman étendu.

Le paramètre  $a$  que nous estimons dans ces exemples intervient théoriquement aussi bien dans la vitesse du front de dépolarisation que dans la durée de plateau (section 4.2.1). Pour commencer par un cas simple, nous nous intéressons au cas où l'on annule la repolarisation. Cette situation correspond au cas où on ne dispose que des temps de dépolarisation.

La figure 5.7 montre que l'estimation du paramètre  $a$  se fait sans problème en l'absence de repolarisation. L'initialisation  $a = 0.25$  est supérieure à la valeur réelle. On constate au début de l'estimation (Figure 5.7(a)) que le potentiel estimé est en retard sur le potentiel mesuré. Ensuite, lorsque le paramètre se stabilise (Figure 5.7(b)), on constate que les potentiels mesurés et estimés sont synchrones.

Par contre, lorsque la repolarisation est introduite (Figure 5.8), l'estimation de  $a$  se passe mal. Tant que la repolarisation n'a pas commencé, tout se passe comme dans le premier cas (Figure 5.8(a)). En effet, au moment de la repolarisation, la valeur estimée de  $a$  sort du domaine de validité de  $a$  ( $0 < a < 0.5$ ). Et le processus d'estimation échoue (Figure 5.8(b)).

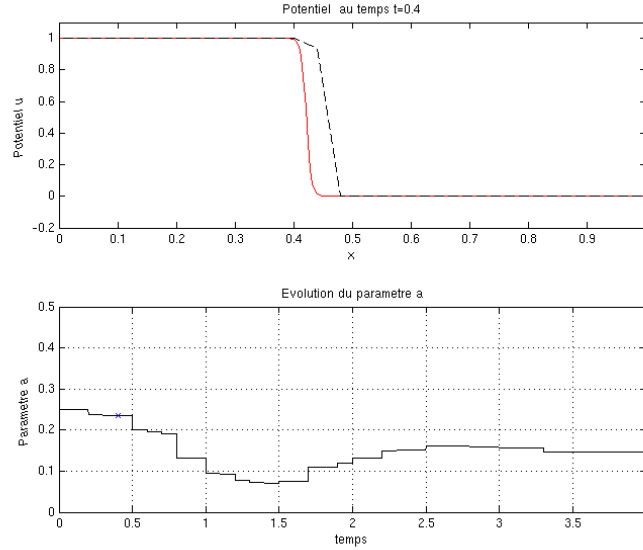
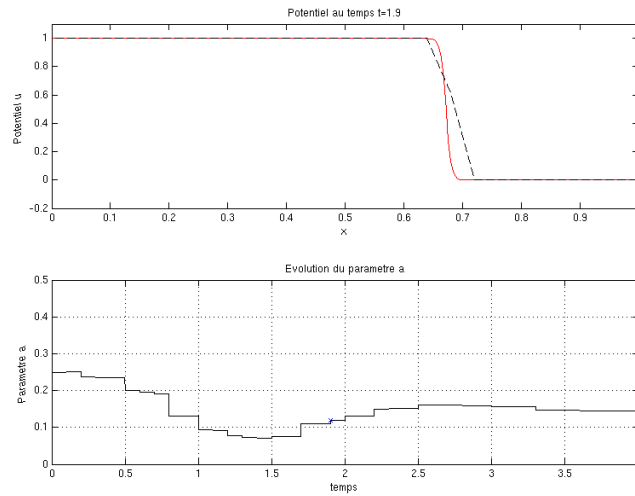
(a) A l'instant  $t = 0.4$ .(b) A l'instant  $t = 1.9$ .

FIG. 5.7 – Estimation du paramètre  $a$  dans le cas simplifié du système de FitzHugh-Nagumo sans repolarisation. Les figures (a) et (b) illustrent l'estimation à deux instants différents. Pour chacune de ces deux figures, la première ligne correspond au potentiel d'action à un instant donné, en traits pleins, le potentiel estimé et en pointillés la mesure fournie au même moment. La deuxième ligne montre l'évolution du paramètre  $a$  au cours de son estimation. L'instant présenté au dessus est indiqué par une croix.

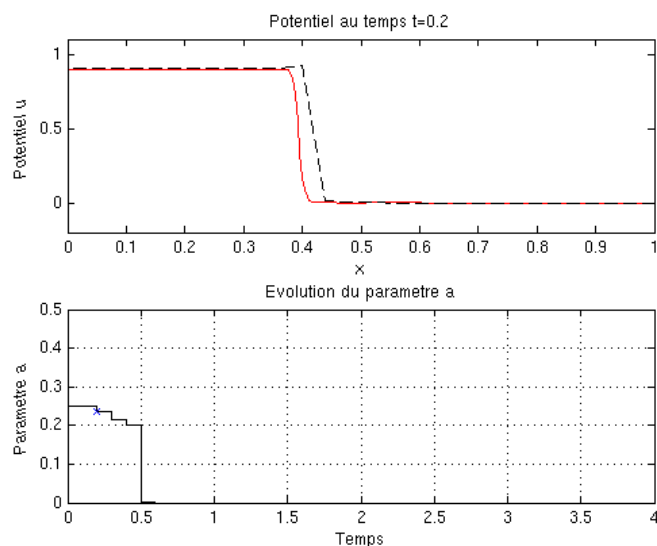
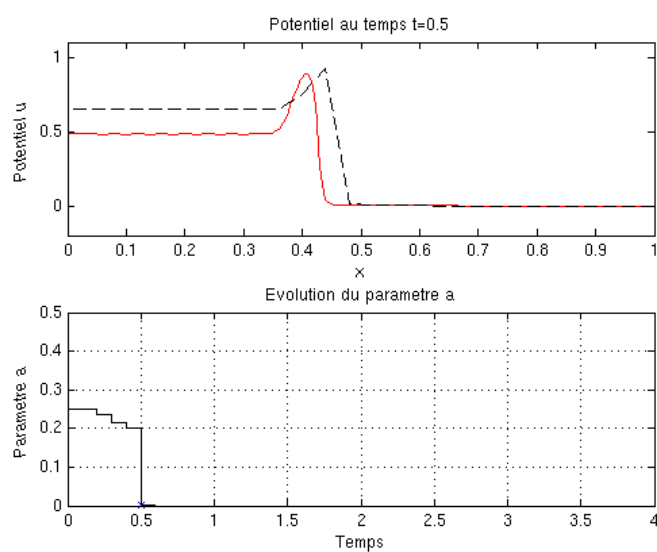
(a) A l'instant  $t = 0.2$ (b) A l'instant  $t = 0.5$ 

FIG. 5.8 – Estimation du paramètre  $a$  dans le cas du système de FitzHugh-Nagumo. Les figures (a) et (b) illustrent l'estimation à deux instants différents. Pour chacune de ces deux figures, la première ligne correspond au potentiel d'action à un instant donné, en traits pleins, le potentiel estimé et en pointillés la mesure fournie au même moment. La deuxième ligne montre l'évolution du paramètre  $a$  au cours de son estimation. L'instant présenté au dessus est indiqué par une croix.

### Prise en compte des contraintes sur les variables ou les paramètres

Les résultats intermédiaires présentés ci-dessus montrent que, si aucune information *a priori* sur le domaine de validité des paramètres n'est introduite dans le filtre de Kalman, les paramètres sortent de leur domaine de validité. Deux types de contraintes doivent être imposées aux paramètres :

1. des contraintes d'ordre théorique. En effet, les systèmes de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov admettent plusieurs types de solution en fonction des paramètres choisis et des conditions initiales. La propagation d'une impulsion n'a lieu que si les paramètres respectent certaines conditions (Section 4.2.1). Dans les autres cas, la propagation n'a pas lieu et le signal s'atténue jusqu'à ce que le potentiel soit nul. Si au cours de l'estimation, on passe du premier cas au deuxième, la propagation constatée sur les données n'est plus présente dans le modèle, et en conséquence, l'assimilation de données et donc l'estimation de paramètres échouent.
2. des contraintes d'ordre numérique. Les conditions de stabilité du schéma de discrétisation employé, présentées dans la section 4.2.1, dépendent des paramètres (Equation 4.57). Si l'on ne contraint pas les paramètres pour que les conditions de stabilité soient toujours respectées au cours de l'estimation, le système n'est plus stable et explose au cours de l'estimation, ce qui n'est pas souhaitable.

Pour ces deux raisons, nous sommes amenés à imposer des contraintes sur les paramètres au cours de l'estimation. Ainsi, pour l'estimation de  $a$  que nous avons présentée ci-dessus, il est nécessaire d'imposer la contrainte  $0 < a < 0.5$

Deux solutions théoriquement justifiées existent pour imposer des contraintes à un filtre de Kalman. La première consiste à construire un espace de solutions où cette contrainte est respectée. La deuxième solution est une minimisation sous contrainte. Elle consiste à minimiser la fonctionnelle suivante

$$J(t) = E \left[ \left( \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) \right)^T \left( \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t) \right) \right] + \lambda (\sigma_0 - \hat{\sigma}_0)^2$$

au lieu de la fonctionnelle qui mène au filtre de Kalman classique (Appendice C, équation (C.1)). La difficulté est dans les deux cas d'établir des équations explicites et calculables de mise à jour de l'état  $\mathbf{X}$  et de la covariance  $\mathbf{P}$ . De plus, nous cherchons à imposer des inégalités, ce qui s'exprime difficilement de manière fonctionnelle.

Une méthode pragmatique mais sans aucune justification théorique consiste en une application directe et brutale de la contrainte : supposons que la quantité  $V$  doit respecter la contrainte  $V_{min} \leq V \leq V_{max}$ . Alors, on teste au cours de l'algorithme si  $V$  sort du domaine imposé, et si cela arrive, on impose directement  $V = (V_{min} + V_{max})/2$ .

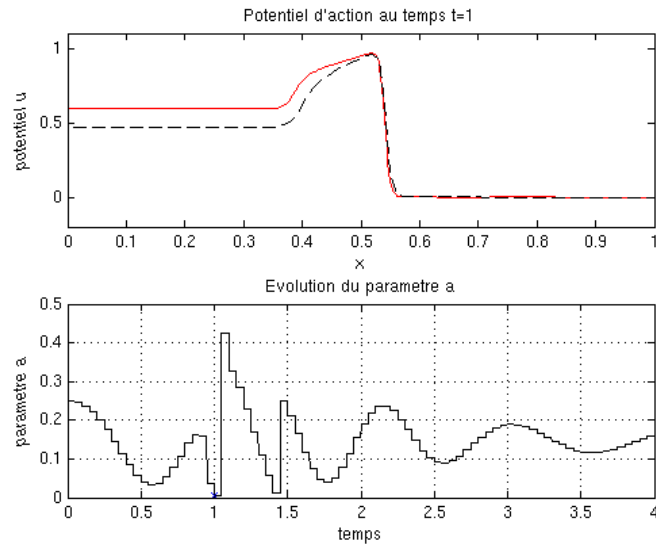
Avec cette méthode facile à appliquer, le paramètre revient tout de suite dans son domaine de validité et retrouve une évolution normale. Aucune instabilité ne se produit et le potentiel d'action continue à se propager normalement. La figure 5.9 présente un exemple où une telle contrainte a été imposée. Nous remarquons bien les discontinuités dans la courbe représentant le paramètre au cours du temps aux moments où la contrainte est imposée. Le potentiel présenté Figure 5.9(a) est le potentiel juste avant la modification brutale de  $a$ , nous voyons qu'avec la repolarisation, le potentiel estimé s'éloigne du potentiel donné comme mesure. Nous constatons avec la figure 5.9(b) qu'après application de la contrainte, l'estimation se passe bien, le paramètre se stabilise autour de la valeur attendue et on arrive finalement à une estimation de  $a = 0.1577$  très proche de la valeur de référence ( $a = 0.15$ ) utilisée pour simuler les mesures.

Pour finir, nous présentons un exemple de l'estimation simultanée des paramètres  $a$  et  $k$  dans le cas du modèle d'Aliev et Panfilov. Pour l'exemple de la figure 5.10, les valeurs de paramètres attendues sont  $a = 0.15$  et  $k = 8$ .

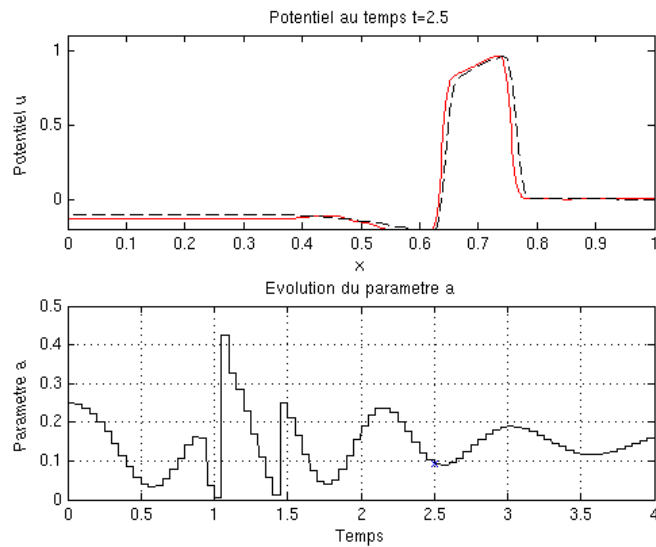
### Sensibilité à la densité des données, au bruit et aux conditions initiales

Nous avons diminué progressivement la densité des données, aussi bien spatialement que temporellement. L'estimation continue à s'effectuer sans problème.

Le filtre de Kalman est basé sur un *a priori* très fort sur le vecteur d'état puisqu'il doit suivre le modèle. Ainsi l'estimation des paramètres est peu sensible à un bruit additif gaussien.



(a) Au temps t=1.0



(b) Au temps t=2.5

FIG. 5.9 – Estimation du paramètre  $a$  dans le cas du système de FitzHugh-Nagumo en imposant une contrainte sur  $a$ . Les figures (a) et (b) illustrent l'estimation à deux instants différents. Pour chacune de ces deux figures, la première ligne correspond au potentiel d'action à un instant donné, en traits pleins, le potentiel estimé et en pointillés la mesure fournie au même moment. La deuxième ligne montre l'évolution du paramètre  $a$  au cours de son estimation. L'instant présenté au dessus est indiqué par une croix

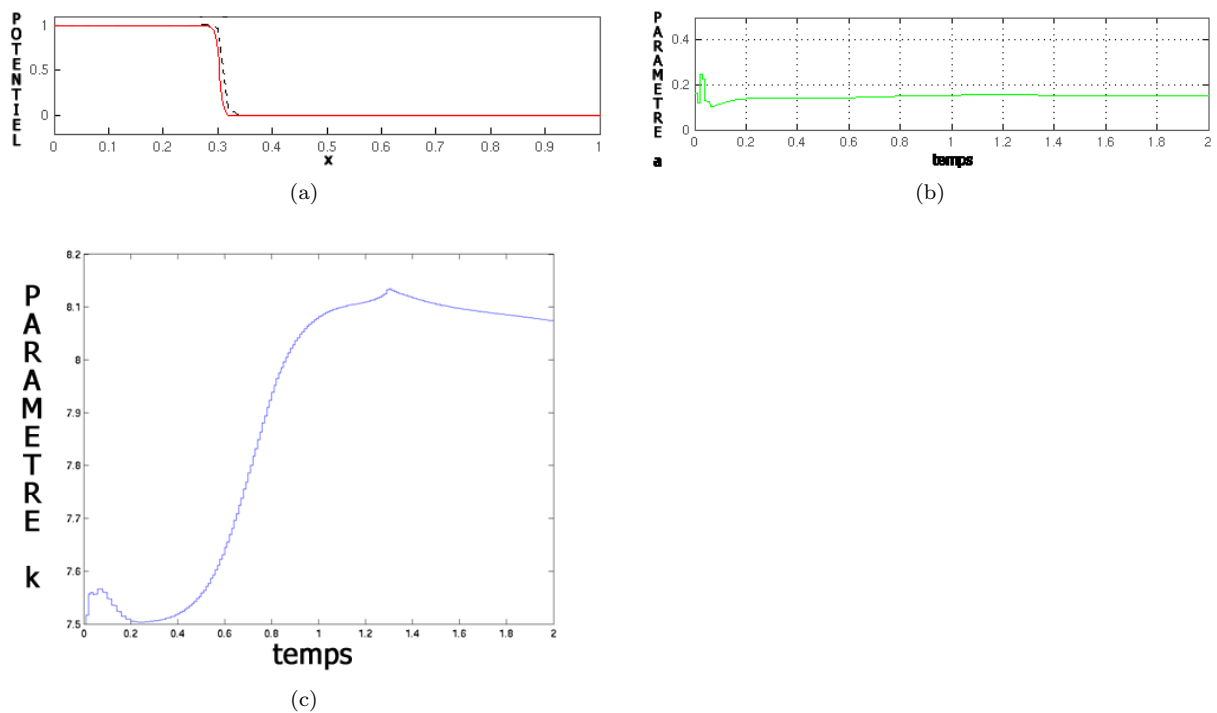


FIG. 5.10 – Estimation des paramètres  $a$  et  $k$  dans le cas du système d’Aliev et Panfilov. La première ligne de la figure (a) présente le potentiel estimé à un instant donné en lignes pleines et la mesure fournie au même moment est tracée en pointillés. La figure (b) montre l’évolution du paramètre  $a$  au cours de son estimation. Enfin la figure (c) montre l’évolution du paramètre  $k$  au cours de son estimation.



Les conditions initiales sont en fait décomposables en deux parties. D'une part, les conditions initiales du système qui sont les mêmes que celles du système direct. Comme pour le modèle direct, l'estimation de paramètre est peu sensible à la forme de l'initialisation mais est très sensible à sa localisation. En effet, si l'initialisation est mal localisée, un décalage se produit entre les mesures et la simulation qui est rattrapée par l'estimation du paramètre. Si le décalage est trop important, le paramètre estimé rend plus compte de ce décalage que des caractéristiques des mesures. Encore plus que pour le modèle, l'initialisation du potentiel d'action doit être localisée le plus précisément possible. Les conditions initiales comprennent aussi l'initialisation du filtre de Kalman, que nous avons déjà discutée plus haut.

### 5.2.5 Discussion

#### Comment appliquer le filtre de Kalman à des mesures *in vivo*

Il serait possible d'appliquer cette approche à des données réelles. Pour cela il faut extraire des informations sur un segment à partir des données réelles surfaciques présentées en section 4.1 et ces données extraites doivent pouvoir être modélisées par la propagation unidimensionnelle d'un potentiel d'action. Pour cela, on sélectionne manuellement une "ligne de conduction", c'est à dire une dizaine de points sur la surface en partant de la zone d'excitation et en suivant visuellement le gradient des isochrones. La figure 5.11 présente une ligne de conduction possible. Pour que la ligne obtenue convienne, il faut que les points choisis se succèdent dans l'ordre donné par la propagation. C'est le cas pour la ligne proposée figure 5.11. Ainsi, on assiste bien à une propagation le long de la ligne considérée. En redressant la ligne et en normalisant la répartition des points entre 0 et 1, on se ramène à la propagation d'un potentiel électrique sur un segment de longueur 1. Le potentiel ainsi obtenu montre bien une dépolarisation puis une repolarisation du segment, ainsi la figure 5.12 présente un extrait de la séquence de potentiel obtenue après normalisation à un instant donné. Cependant, le nombre d'observations dont nous disposons ne permet pas de suivre aussi précisément qu'on le souhaiterait une ligne de conduction. En conséquence, le modèle de FitzHugh-Nagumo ou le modèle d'Aliev et Panfilov avec des paramètres constants ne sont pas suffisants pour décrire le phénomène unidimensionnel ainsi extrait.

#### Discussion

Le filtre de Kalman proposé fonctionne très bien sur les données simulées et permet d'estimer sans problèmes deux paramètres. Ce cadre permet aussi d'estimer une valeur spatialement variable de ces deux paramètres. Le problème sera toujours identifiable, mais la taille du vecteur d'état augmente et les opérations matricielles sont plus coûteuses.

#### Discrétisation numérique et assimilation de données

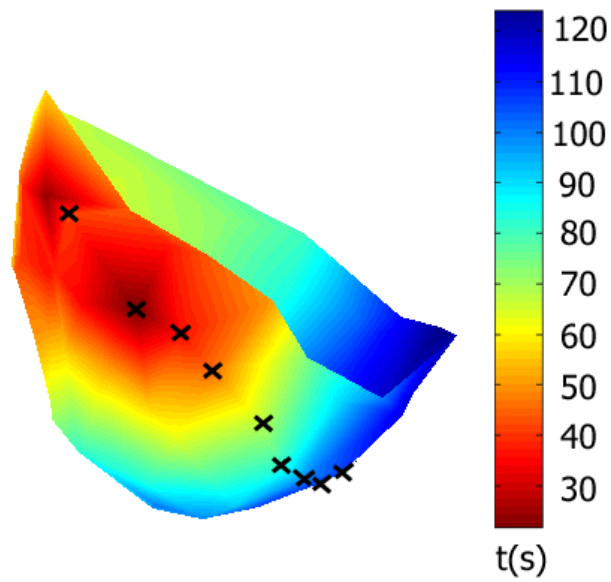
Le choix d'un pas spatial suffisamment fin est crucial pour que la propagation obtenue par le modèle discrétisé soit conforme à la propagation modélisée.

On peut le constater à partir d'estimations effectuées dans le cas unidimensionnel ci-dessus. En effet, la discrétisation spatiale varie de  $dx = 1/50$  à  $dx = 1/1000$ . Pour  $dx = 1/50$ , on a déjà propagation d'un potentiel d'action, mais l'estimation obtenue n'est pas aussi précise qu'avec le pas plus fin.

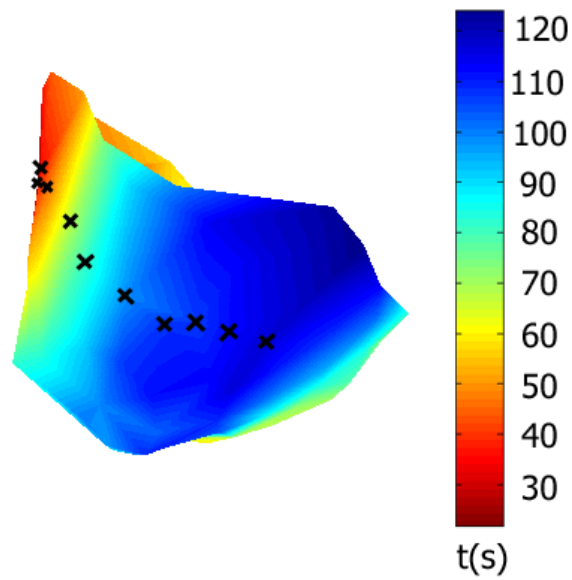
Dans le cas tridimensionnel ou surfacique, nous ne maîtrisons pas totalement la finesse de la discrétisation, car le maillage est issu des mesures. D'autre part si le maillage est trop raffiné, les tailles des vecteurs d'état et matrices à manipuler rendent les calculs très longs. Par conséquent, nous ne pouvons pas garantir que les conditions de stabilité sont bien respectées. Il est donc possible que l'onde électrique simulée soit plus lente que l'onde électrique solution de l'équation continue.

#### Extension à une dimension supérieure

Une tentative directe d'extension d'un filtre de Kalman étendu pour un maillage surfacique ou tridimensionnel des ventricules n'est pas envisageable. En effet, les matrices à manipuler sont d'une taille rédhibitoire. Ainsi, la matrice de covariance  $\mathbf{P}$  est une matrice carrée non creuse de taille  $(2n+p) \times (2n+p)$



(a) Vue 1. En rouge la zone d'excitation



(b) Vue 2

FIG. 5.11 – Electrodes choisies pour extraire des données 1D. Les électrodes sont représentées par des croix noires. La couleur correspond aux temps de dépolarisation en millisecondes

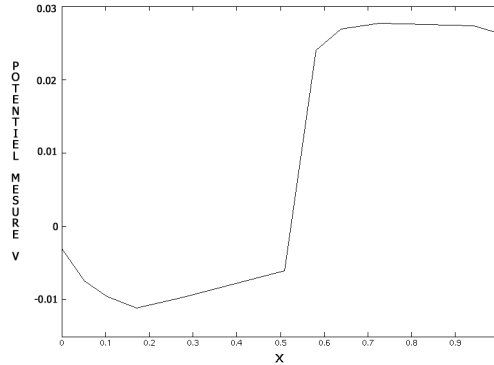


FIG. 5.12 – Potentiel à un instant donné le long de la ligne extraite, renormalisée entre 0 et 1

où  $n$  est le nombre de nœud du maillage et  $p$  le nombre de paramètres à estimer. Pour un maillage volumique relativement modeste de 7500 nœuds, le remplissage et la multiplication de telles matrices posent déjà problème (1h30 pour une propagation de la matrice de covariance sur un PC biprocesseur 1 GHz). Il est donc nécessaire de réduire la taille du problème. Des méthodes telles que celles présentées dans la section 5.1, le filtre SEEK ou le filtrage particulière sont des réponses à ce type de problème. Cependant, pour ces types de méthodes, la réduction se fait en fonction de la matrice de covariance initiale. De plus, ces filtres réduits ne partagent pas la propriété d'invariance par rapport à l'initialisation de  $\mathbf{P}$  qui est vraie pour le filtre linéaire non réduit. La difficulté à l'initialiser due à l'introduction des paramètres se pose à nouveau et cette fois, l'influence de l'initialisation ne peut être négligée.

L'opportunité de traiter ainsi un problème de cette taille est d'autant plus discutable que l'introduction du potentiel d'action simplifié donne artificiellement aux mesures une taille importante qu'elles n'ont pas intrinsèquement. En effet, on remplace deux mesures par électrode en tout et pour tout (l'instant de dépolarisation et l'instant de repolarisation) par une mesure par électrode et par instant de discrétisation. Cette manière de comparer potentiel d'action et potentiel extra-cellulaire n'est donc plus adaptée lorsque des problèmes cruciaux de taille du problème se posent comme c'est le cas en dimension supérieure.

### 5.3 Utilisation des propriétés qualitatives du système pour une estimation de paramètres

Les propriétés qualitatives des systèmes d'équations aux dérivées partielles de FitzHugh-Nagumo et d'Aliev et Panfilov décrites dans le chapitre 4 donnent des relations entre les paramètres du système et certaines caractéristiques de l'onde électrique. Certaines de ces quantités sont mesurables sur des données. C'est le cas en particulier de la vitesse de propagation de l'onde de dépolarisation. Nous proposons d'utiliser ces relations qui mettent en correspondance des paramètres du système d'une part et des caractéristiques observables de l'onde étudiée d'autre part pour faire une estimation des paramètres du modèle.

#### 5.3.1 Méthode

##### Mesure de la vitesse de propagation à partir des données

Les données sont des temps de dépolarisation et sont disponibles sur une surface (endocarde ou épicaire). Une approximation de la vitesse apparente de l'onde de dépolarisation sur cette surface peut-être calculée à partir des données.

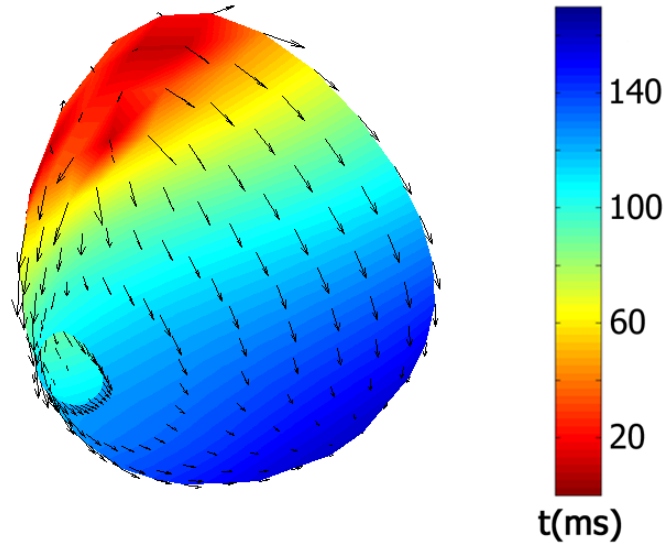


FIG. 5.13 – Gradient d’une carte de temps de dépolarisation simulés, calculé en chaque sommet du maillage surfacique. La couleur représente les temps de dépolarisation et les flèches représentent  $\nabla_x t$ .

En effet, si on note  $c$  la vitesse (en norme) de l’onde de dépolarisation en un point et  $\nabla_x t$  le gradient spatial des temps de dépolarisation au même point, l’équation (5.26) est valide.

$$\frac{1}{c} = \|\nabla_x t\|. \quad (5.26)$$

Or, puisque nous connaissons le temps de dépolarisation en chaque sommet du maillage surfacique considéré, nous pouvons calculer son gradient comme nous l’avons montré dans la section 4.2.5. L’équation (4.65) permet de calculer le gradient du temps de dépolarisation sur un triangle  $\text{trng}$  donné :

$$\nabla_x t(\text{trng}) = - \sum_{i=0}^2 \frac{\mathbf{S}_i}{2\mathcal{A}} t(\mathbf{P}_i).$$

On obtient le gradient en un sommet en effectuant la moyenne des vecteurs obtenus sur chacun des triangles contenant le sommet pondérée par l’aire de chacun des triangles. En notant  $\mathcal{SH}(v)$  l’enveloppe d’un sommet  $v$ , c’est-à-dire l’ensemble des triangles auxquels  $v$  appartient, le gradient  $\nabla_x t$  est donné par :

$$\nabla_x t(v) = \frac{\sum_{\text{trng} \in \mathcal{SH}(v)} \nabla_x t(\text{trng}) \mathcal{A}(\text{trng})}{\sum_{\text{trng} \in \mathcal{SH}(v)} \mathcal{A}(\text{trng})}$$

La figure 5.13 présente un exemple de calcul de gradient du temps de dépolarisation pour des temps de dépolarisation obtenus par une simulation. Nous avons utilisé pour cette simulation une distribution du coefficient de diffusion  $d$  non homogène de moyenne 1.

A partir des temps de dépolarisation en chaque sommet de la surface, nous sommes donc capables d’estimer un gradient en chaque triangle et en chaque point du maillage surfacique.

### Utilisation de la vitesse de propagation pour l’estimation de paramètres.

La propagation de l’onde cardiaque se déroule dans un espace tridimensionnel. Nous disposons de mesures de la vitesse uniquement sur une surface. Une simple mise en correspondance d’une vitesse théorique

et d'une vitesse mesurée ne permet pas d'obtenir plus que des indications des paramètres sur la surface mesurée. Nous utilisons donc une propagation surfacique.

Nous proposons donc d'utiliser directement l'équation (5.27) présentée dans le chapitre 4 et rappelée ci-dessous.

$$c(a, k, d) = \sqrt{2kd}(0.5 - a) \quad (5.27)$$

Cette estimation de la vitesse est valable pour une propagation sur un segment unidimensionnel. Dans le cas de la propagation sur une surface, il a été prouvé que la vitesse doit être corrigée en ajoutant un terme proportionnel à la courbure.

Dans un premier temps, nous allons utiliser cette relation pour faire une estimation globale et non point par point d'un paramètre. C'est pourquoi nous allons considérer cette relation globalement, en prenant la médiane de la vitesse apparente estimée de l'onde de dépolarisation :

$$\text{median}(\|\nabla_{\mathbf{x}}t\|)^{-1} = \sqrt{2kd}(0.5 - a). \quad (5.28)$$

Nous disposons d'une seule équation sur les paramètres. Dans cette première approche très grossière, nous ne pouvons donc estimer qu'un seul des trois paramètres  $a$ ,  $k$  et  $d$ . Le paramètre  $a$  est le seul paramètre intervenant aussi dans la durée du potentiel d'action. Le paramètre  $d$  est le coefficient de diffusion, il est proportionnel à une conductivité. C'est celui que nous allons faire varier localement par la suite. Reste donc le paramètre  $k$ . Dans la suite nous estimons une valeur globale de  $k$ . Une fois  $a$  et  $d$  fixés, il ne reste plus qu'à inverser la relation (5.28).

Cependant, un calcul direct du paramètre  $k$  à partir de la vitesse  $c$  et des paramètres  $k$  et  $d$  fixés en utilisant la relation (5.28) reviendrait à comparer une vitesse théorique 1D ne tenant aucun compte de la géométrie considérée et une vitesse apparente estimée sur la surface. C'est pourquoi, nous préférons utiliser une vitesse de référence  $c^s$  estimée à partir d'une valeur du paramètre  $k$  donnée  $k^s$ . L'équation (5.27) se ramène alors à énoncer que la vitesse de propagation est proportionnelle à  $1/\sqrt{k}$ . Donc nous obtenons :

$$\frac{\text{median} \|\nabla_{\mathbf{x}}t^m\|}{\text{median} \|\nabla_{\mathbf{x}}t^s\|} = \frac{c^s}{c^m} \approx \frac{\sqrt{k^s}}{\sqrt{k^m}}.$$

où  $t^m$  (respectivement  $t^s$ ) est le temps de repolarisation mesuré (respectivement simulé),  $c^m$  la vitesse de dépolarisation médiane mesurée et  $k^m$  la valeur du paramètre  $k$  sous jacente aux temps de dépolarisation mesurés. Ainsi  $k^m$  est calculé grâce à :

$$k^m = k^s \left( \frac{\text{median} \|\nabla_{\mathbf{x}}t^s\|}{\text{median} \|\nabla_{\mathbf{x}}t^m\|} \right)^2 \quad (5.29)$$

### 5.3.2 Résultats

#### Données simulées

Nous avons évalué les performances de cette méthode en premier lieu sur des données simulées. Nous avons utilisé comme mesure des temps de dépolarisation obtenus par simulation du modèle d'Aliev et Panfilov avec les paramètres suivants,  $k = 12$ ,  $a = 0.15$ ,  $\varepsilon = 0.1$  et en choisissant une distribution du coefficient  $d$  non homogène spatialement, avec une valeur moyenne de 1. Les temps de dépolarisation obtenus sont présentés figure 5.14.

Nous avons appliqué l'équation 5.29 pour obtenir une estimation de  $k$ . Nous avons obtenu une valeur  $k^m = 12.51$  en partant de la valeur de référence  $k^s = 8$ . Les paramètres  $a$  et  $\varepsilon$  ont été fixées aux valeurs initiales choisies plus haut et le coefficient de diffusion  $d$  à 1. Ainsi, nous obtenons une valeur  $k^m$  proche de la valeur utilisée dans la simulation. Dans le cas réel, les paramètres  $a$ ,  $\varepsilon$  et  $d$  ne sont pas connus au moment

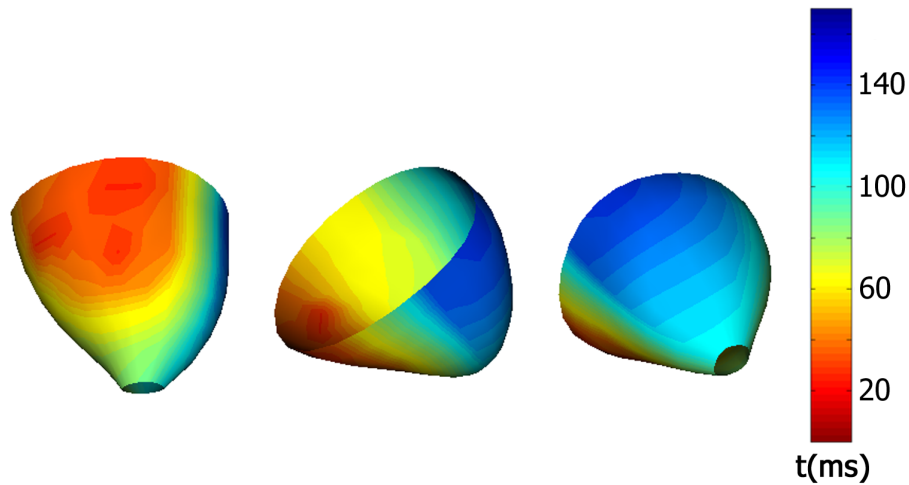


FIG. 5.14 – Temps de dépolarisation simulés utilisés en tant que mesures pour l'estimation globale du paramètre  $k$ .

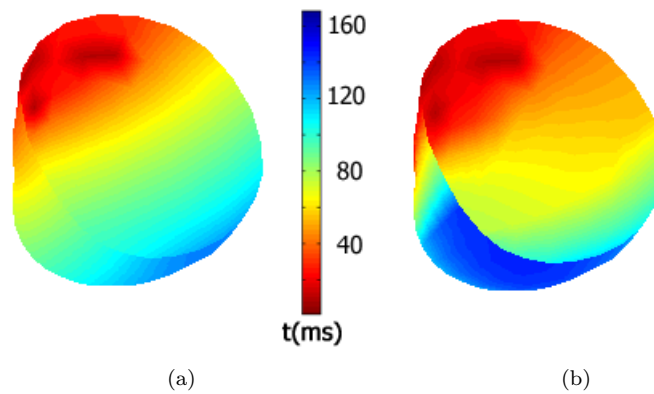


FIG. 5.15 – Temps de dépolarisation après un ajustement global (a) et temps de dépolarisation utilisé comme mesure (b)

de l'estimation de  $k^m$ , de plus ce paramètre n'a pas d'interprétation physiologique directe. C'est pourquoi nous ne jugeons pas la qualité de notre estimation sur la valeur du paramètre elle-même mais directement au niveau des temps de dépolarisation. La figure 5.15 présente les temps de dépolarisation obtenus par une nouvelle estimation utilisant le paramètre estimé en comparaison des mesures. Les temps de dépolarisation obtenus montrent que la propagation se déroule à la bonne échelle, en temps et en espace.

Si l'on s'intéresse à l'erreur absolue moyenne commise, de 25.3 ms avec la valeur de référence  $k^s = 8$ , l'erreur tombe à 14.7 ms avec la valeur estimée. Comme nous pouvons le voir sur la figure 5.16 présentant l'erreur absolue commise sur les temps de dépolarisation avec la valeur de référence et avec la valeur estimée, les régions où l'erreur est importante sont d'étendue plus réduite avec la valeur estimée. L'erreur obtenue après ajustement global est faible près des zones de stimulation, mais devient de plus en plus importante au fur et à mesure que l'on s'en éloigne. Cette différence est due au fait que le contrôle est effectué sur les vitesses, c'est-à-dire les dérivées des temps, ainsi une faible erreur au niveau des vitesses se propage et s'accumule au fur et à mesure de la propagation. A la fin de la propagation, l'erreur est donc plus importante.

L'erreur commise sur les vitesses est plus faible et n'est pas liée à l'éloignement par rapport à la

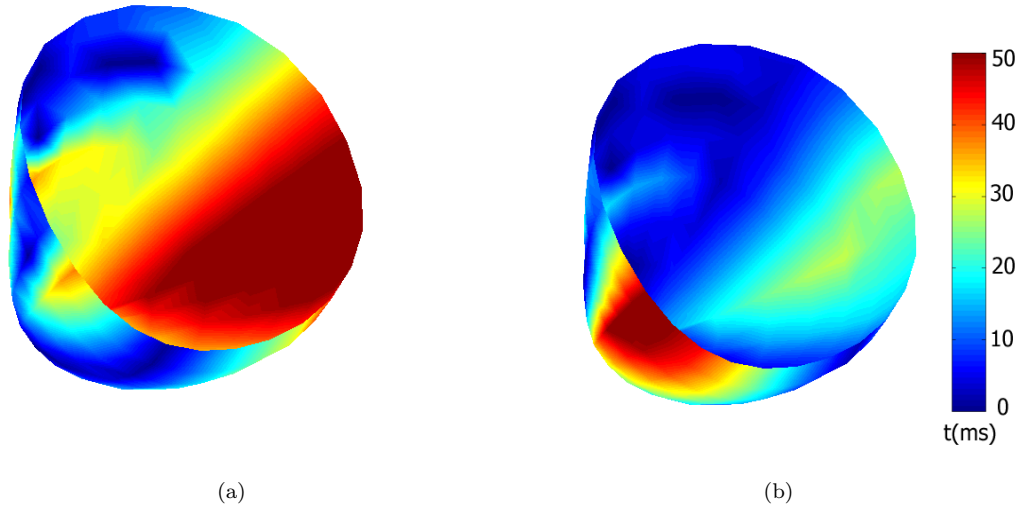


FIG. 5.16 – Erreur absolue sur les temps de dépolarisation entre les mesures et les temps de dépolarisation obtenus par simulation avec une valeur de référence (a) et avec la valeur globale estimée automatiquement (b).

source d'excitation. Pour vérifier cela, nous nous sommes intéressés au logarithme du rapport entre la vitesse mesurée et la vitesse simulée.

$$EV(x) = \ln\left(\frac{\|\nabla t^m\|}{\|\nabla t^s\|}\right) \quad (5.30)$$

où  $t^m$  représente les temps de dépolarisation mesurés et  $t^s$  les temps de dépolarisation obtenus par simulation avec la valeur de  $k$  estimée. La moyenne de ce critère d'erreur est faible :  $-0.0575$  (cf. figure 5.17).

### Données réelles

Nous procédons de même pour les données réelles. Ces données sont des temps de dépolarisation mesurés sur l'épicarde d'un chien sain par le protocole décrit dans la section 4.1.2 et sont présentés figure 5.18. Dans le cas des données réelles, il est indispensable de retrouver précisément les conditions initiales. L'initialisation du système d'Aliev et Panfilov n'a pas besoin d'être précise dans la forme du potentiel, mais la localisation de l'excitation doit être la plus précise possible (section 4.2.3). Cette initialisation est encore plus importante pour l'estimation de paramètres que pour la simulation du modèle direct. Pour cela nous avons sélectionné trois zones de stimulation correspondant aux temps de dépolarisation les plus faibles. Ensuite, le délai entre le début de l'enregistrement et la stimulation est donné par le plus petit temps de dépolarisation. Les zones sélectionnées sont présentées figure 5.19.

Nous calculons le gradient comme expliqué dans la section 5.3.1 (figure 5.20). En appliquant le calcul du paramètre  $k$  (Equation (5.29)), nous obtenons  $k^m = 25.2$  en partant d'un paramètre de référence  $k^s = 8$ .

La figure 5.21 présente les temps de dépolarisation obtenus avant et après l'estimation automatique du paramètre  $k$ . Une comparaison visuelle des figures 5.21(b) et 5.18 montre déjà que la propagation simulée grâce au paramètre estimé se déroule à la bonne échelle temporelle. Cette impression est confirmée par le calcul de l'erreur absolue entre les temps de dépolarisation mesurés et les temps de dépolarisation simulés. La figure 5.22 montre les erreurs absolues en chaque point avant et après l'estimation du paramètre  $k$ . Avant (Figure 5.22(a)), la moyenne de l'erreur est de 20.6 ms. Grâce à l'estimation automatique, l'erreur est divisée par 2 et tombe à 10 ms. Pour comparaison, la durée totale de passage de la vague est d'environ 120 ms.

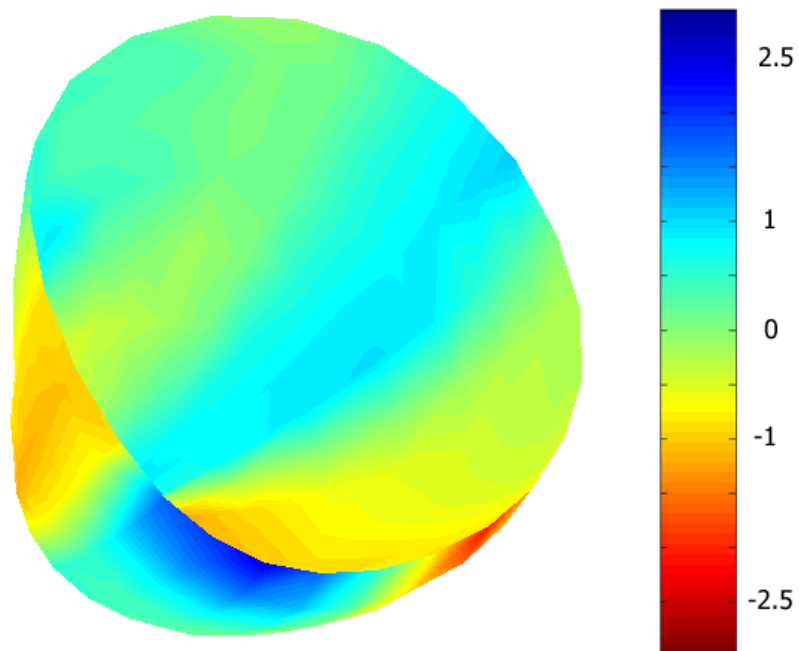


FIG. 5.17 – Erreur commise sur la vitesse avec l'estimée globale du paramètre  $k$ . Même angle de vue que la figure 5.15

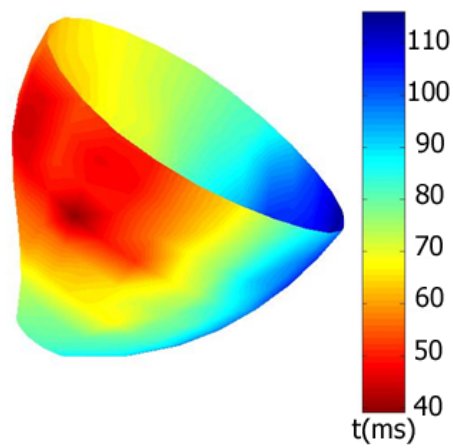


FIG. 5.18 – Temps de dépolarisation mesurés sur l'épicaarde d'un chien sain.



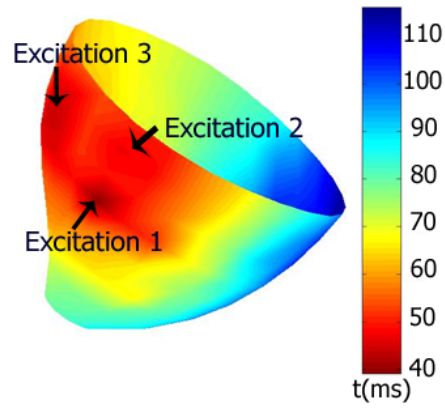


FIG. 5.19 – Régions de stimulation choisies pour initier la simulation. La couleur représente le temps de dépolarisation en ms.

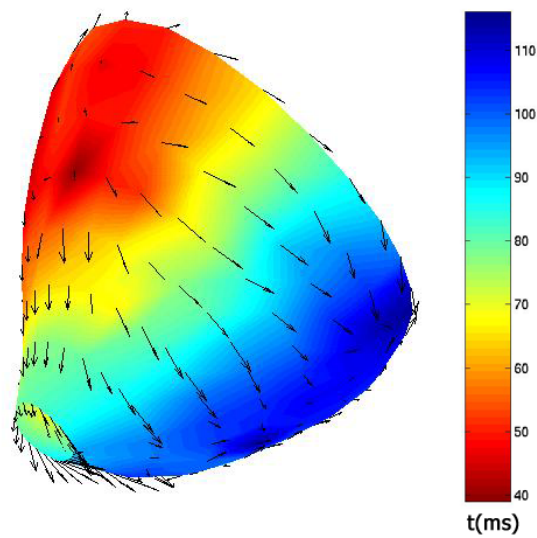


FIG. 5.20 – Gradient des temps de dépolarisation calculé en chaque sommet. La couleur représente le temps de dépolarisation en ms et les flèches représentent  $\nabla_{\mathbf{x}} t$ .

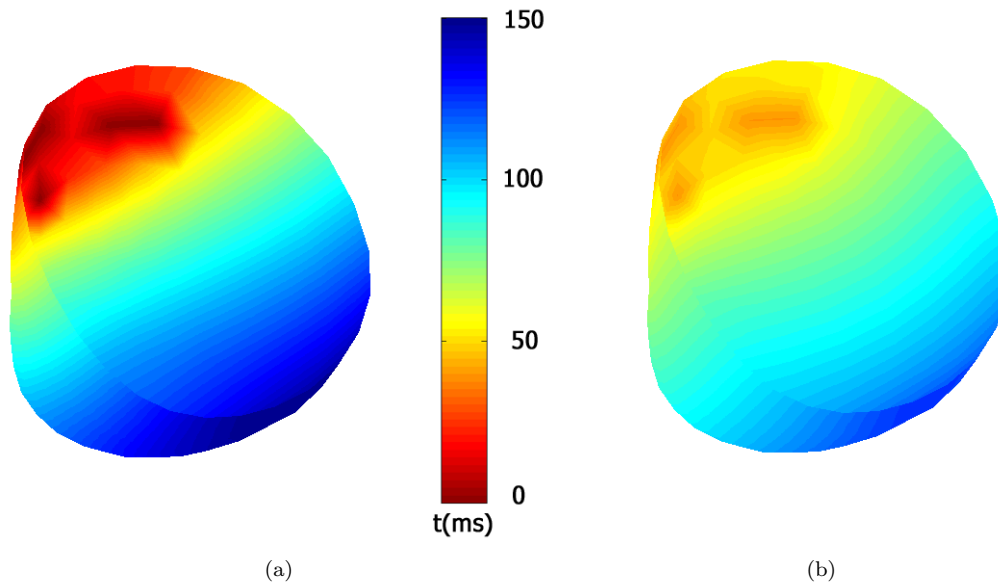


FIG. 5.21 – Temps de dépolarisation avant (a) et après (b) l’ajustement global.

En regardant la distribution spatiale de l’erreur (Figure 5.22(b)), nous constatons comme dans le cas des mesures simulées que l’erreur n’est pas distribuée de manière homogène, au contraire. Pour les raisons que nous avons données ci-dessus, l’erreur est d’autant plus importante qu’on s’éloigne de la zone de stimulation.

### 5.3.3 Estimation locale et discussion

Nous avons présenté une manière d’utiliser les propriétés qualitatives du système d’Aliev et Panfilov pour donner une estimation globale du paramètre  $k$ . Bien que nous nous soyons contentés d’une relation très simple dont la validité n’est garantie qu’en une dimension, nous avons été capables de trouver pour ce paramètre une valeur globale permettant de diminuer sensiblement l’erreur commise sur les temps de dépolarisation. Si nous disposions également de la durée précise du potentiel d’action en chaque électrode, il serait possible d’utiliser la relation très simple entre la durée du potentiel d’action et le paramètre  $a$  pour donner de la même manière une estimation de ce paramètre à partir de mesures.

En outre, les premiers résultats obtenus ci-dessus nous montrent que des paramètres constants spatialement ne sont pas suffisants pour expliquer les temps de dépolarisation mesurés, même sur le sujet sain présenté ici. Nous sommes donc amenés à raffiner l’estimation de paramètres pour une estimation locale.

Nous donnons ici un exemple de l’estimation locale d’un paramètre utilisant la relation (5.29) mais cette fois triangle par triangle. Nous proposons une estimation locale du coefficient de diffusion  $d$  triangle par triangle. La figure 5.23 montre les valeurs de  $d$  ainsi obtenues. Comme l’estimation n’est basée que sur le triangle courant, cette estimation est peu robuste. En conséquence des valeurs de  $d$  très élevées ou très faibles sont obtenues. Nous restreignons les valeurs de  $d$  en 0.2 et 5. Seules 10 valeurs ne se trouvaient pas dans cet intervalle.

Cependant, en effectuant une simulation avec ces nouvelles valeurs pour le paramètre  $d$ , l’amélioration obtenue sur la précision des temps de dépolarisation n’est pas évidente bien que la précision sur les vitesses soit meilleure.

La vitesse est égale à l’inverse du gradient spatial du temps de dépolarisation. Ainsi, les petites erreurs qui apparaissent sur l’estimation des vitesses se cumulent au fur et à mesure de la propagation pour donner une erreur importante sur les temps de dépolarisation.

L’utilisation de la vitesse de propagation de l’onde en 1D produit un certain nombre de ces petites erreurs car l’approximation que nous avons faite globalement n’est pas valide localement. En effet,

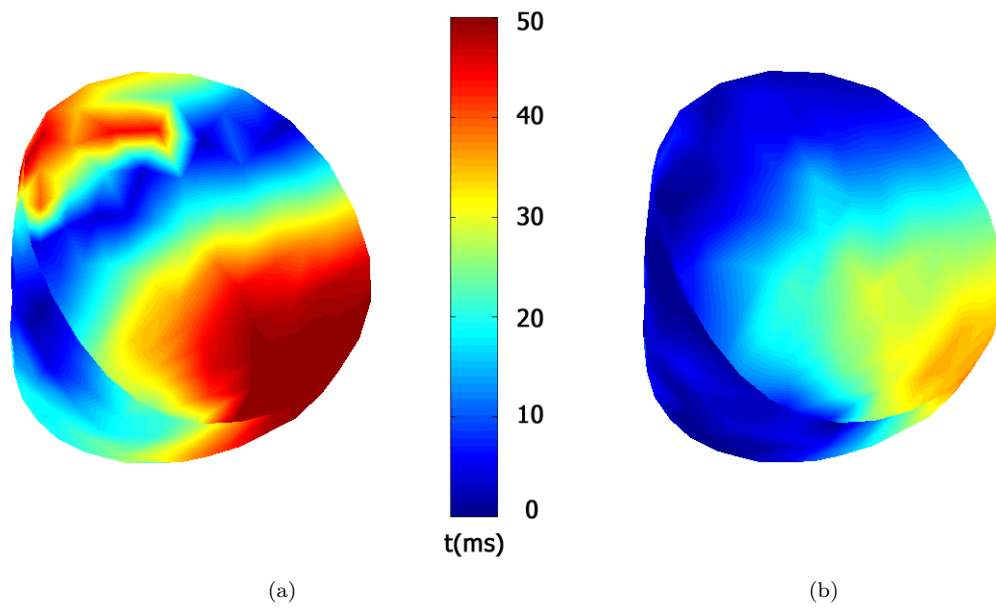


FIG. 5.22 – Erreur absolue sur les temps de dépolarisation entre mesures et simulations avant (a) et après (b) l'ajustement global.

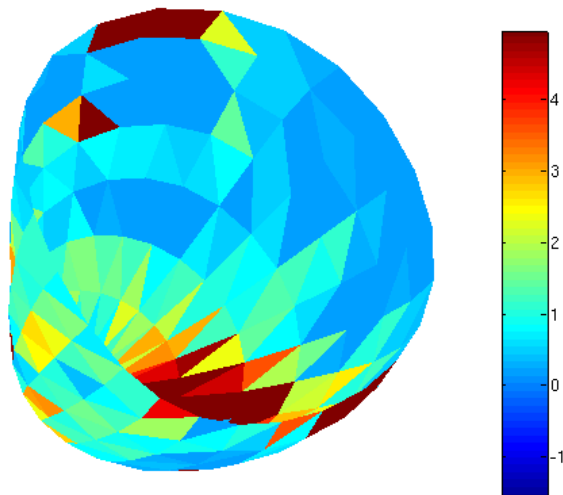


FIG. 5.23 – Coefficient de diffusion obtenu grâce à la mesure de la vitesse de propagation.

$$\frac{c^m}{c^s} = \frac{\sqrt{2kd^m}(0.5 - a) + \lambda(\kappa)}{\sqrt{2kd^s}(0.5 - a) + \lambda(\kappa)} \neq \frac{\sqrt{2kd^m}(0.5 - a)}{\sqrt{2kd^s}(0.5 - a)}$$

avec  $\lambda(\kappa)$  la correction dépendant de la courbure  $\kappa$  du front d'onde.

A partir des résultats présentés et discutés ci-dessus, il est clair que le contrôle des paramètres à partir de la vitesse est source d'imprécisions trop importantes, nous serons donc amenés dans la prochaine section à nous efforcer d'effectuer le contrôle directement sur les temps de dépolarisation pour éviter de propager les petites erreurs commises en chaque point. La section suivante est donc consacrée à l'estimation des variations locales du coefficient  $d$  en minimisant l'écart entre les temps de dépolarisation mesurés et les temps de dépolarisation simulés.

## 5.4 Ajustement local de la conductivité apparente

### 5.4.1 Cadre général

#### Formulation de l'estimation de paramètres comme un problème de moindres carrés

Notre but est ici de montrer la possibilité d'estimer un paramètre spatialement variable. Pour le modèle d'Aliev et Panfilov que nous avons utilisé pour ce travail, nous avons choisi de faire varier spatialement le coefficient de diffusion  $d$ . Puisque nous n'observons pas le potentiel complet mais seulement les temps de dépolarisation, nous ne sommes pas en mesure d'estimer plus de paramètres à la fois. En effet, une fois les conditions initiales fixées, les temps de dépolarisation ne dépendent que de la vitesse  $c$  de propagation. Or la vitesse  $c$  dépend du produit  $\sqrt{kd}(0.5 - a)$ . On ne peut donc pas avoir une estimation absolue des valeurs du paramètre  $k$  ou du coefficient de diffusion  $d$ . Cependant, la propagation n'est pas homogène dans le myocarde, il est donc intéressant d'en repérer les variations locales. Nous faisons donc le choix d'estimer les variations locales du coefficient de diffusion  $d$ . Puisque les variations de ce paramètre reflètent à la fois les variations de la conductivité à proprement parler mais aussi des coefficients de réaction, nous l'appelons **conductivité apparente** dans le reste du manuscrit.

On note  $\mathcal{S}$  la surface triangulée avec  $N$  sommets et  $L$  triangles. On appelle  $\mathcal{V}$  l'ensemble des sommets et  $\mathcal{T}$  l'ensemble des triangles. Les mesures nous fournissent un temps de dépolarisation par sommet. Dans le modèle discrétisé décrit dans la section 4.2.5, une valeur de conductivité apparente est attribuée à chaque triangle. Nous recherchons donc une carte de conductivité apparente  $(\mathbf{d}) = (d_j)_{0 \leq j \leq L-1}$  qui minimise la somme des carrés de l'erreur entre le modèle et les mesures :

$$C(\mathbf{d}) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (t_v^m - t_v(d_0, \dots, d_{L-1}))^2 \quad (5.31)$$

où  $t_v^m$  est le temps de dépolarisation mesuré au sommet  $v$  et  $t_v(d_0, \dots, d_{L-1})$  le temps de dépolarisation au sommet  $v$  obtenu grâce à la simulation du modèle avec les valeurs de conductivité apparente  $(d_0, \dots, d_{L-1})$ .

Nous recherchons une estimation robuste de la conductivité apparente. Nous divisons donc la surface en régions connexes et estimons une valeur de conductivité apparente pour chaque région. Soit  $(R_k)_{0 \leq k \leq K-1}$  une partition de la surface en  $K$  régions. Pour chaque région  $R_k$ ,  $d_j = d_{R_k}$  pour tout  $j$  tel que le  $j^{\text{eme}}$  triangle de la surface soit dans la région  $R_k$ .

Le critère à minimiser devient donc une fonction avec seulement  $K$  variables. Il faut trouver  $(\mathbf{d}) = (d_{R_k})_{0 \leq k \leq K-1}$  qui minimise

$$C(\mathbf{d}) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (t_v^m - t_v(d_{R_0}, \dots, d_{R_{K-1}}))^2 \quad (5.32)$$

La minimisation de  $C(\mathbf{d})$  est un problème à  $K$  variables. Comme la dépolarisation est un phénomène causal, la modification de la conductivité apparente en une région n'influence pas les régions qui sont situées

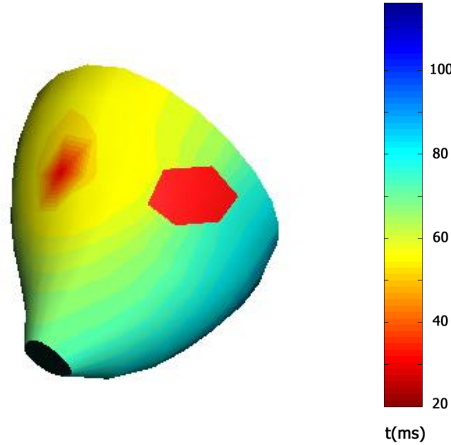


FIG. 5.24 – Région  $R$  utilisée pour l'exemple suivant. La région est représentée en rouge avec en fond les temps de dépolarisation en ms.

en amont en terme d'ordre de dépolarisation. Nous allons donc procéder à une minimisation pour chaque région successivement **en suivant l'ordre de la dépolarisation**. Nous transformons ainsi en utilisant les particularités du problème traité une minimisation  $K$ -dimensionnelle en  $K$  problèmes successifs de minimisation unidimensionnels faciles.

$$C(d_R) = \sum_{v \in \mathcal{V}} (t_v^m - t_v(d_R))^2 \quad (5.33)$$

### Influence de la modification de la conductivité apparente sur les temps de dépolarisation.

Le calcul du critère d'erreur  $C(d)$  nécessite de connaître les temps de dépolarisation en tout point. Pour connaître ces temps de dépolarisation, il est nécessaire d'effectuer une simulation. Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'influence de la modification de la conductivité apparente d'une région sur les temps de dépolarisation. Nous serons ainsi à même de sélectionner les sommets où les variations sont les plus significatives pour estimer les paramètres. Pour exhiber les propriétés intéressantes, nous utilisons un exemple simulé. Nous montrons ce qui se passe pour la région  $R$  présentée figure 5.24. Nous la présentons en rouge avec en fond les temps de dépolarisation pour mieux la situer par rapport à la zone de stimulation. On note  $d_R$  la conductivité apparente attribuée à la région  $R$ .

Le temps de dépolarisation n'est pas une fonction explicite de la conductivité apparente  $d$ . Pour obtenir ces informations, nous avons donc calculé une estimation grossière de la dérivée du temps de dépolarisation par rapport à la conductivité apparente sur  $R$ ,  $\partial t / \partial d_R$ , grâce à des différences finies centrées. Pour chaque sommet  $v \in \mathcal{V}$ ,

$$\frac{\partial t_v}{\partial d_R} \approx \frac{t_v(d_R + \Delta d) - t_v(d_R - \Delta d)}{2\Delta d}$$

Les temps de dépolarisation en chaque sommet pour les valeurs de conductivité apparente  $d_R + \Delta d$  et  $d_R - \Delta d$  sont calculés en modifiant la valeur de conductivité apparente attribuée à la région  $R$ , puis en effectuant une nouvelle simulation. Deux simulations supplémentaires sont donc calculées pour estimer  $\partial t_v / \partial d_R$ .

La figure 5.25 nous donne cette dérivée calculée en tout sommet pour la région  $R$  présentée figure 5.24. La première caractéristique de cette dérivée est que les variations de conductivité apparente sur  $R$  ont des répercussions principalement sur les sommets qui suivent  $R$  dans l'ordre de la propagation de l'onde de

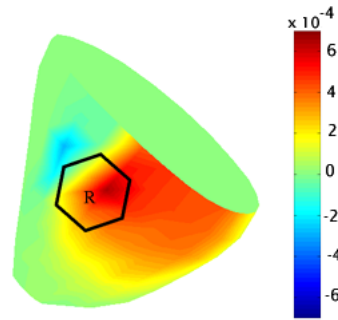


FIG. 5.25 – La dérivée du temps de dépolarisation par rapport à une variation de la conductivité apparente sur la région  $R$  de la figure 5.24. La dérivée est calculée en tout sommet par différences finies centrées. Les régions bleues correspondent à une dérivée fortement négative, les régions vertes correspondent à une dérivée nulle. Pour finir, en rouge les valeurs positives.

dépolarisation, ce qui est la traduction de la causalité de la propagation de l'onde de dépolarisation. Seuls ces sommets fournissent donc une contribution significative au critère d'erreur  $C(\mathbf{d})$ .

Lorsqu'elle est non nulle, la dérivée est négative puisque la vitesse de l'onde augmente avec la conductivité apparente. Cependant, on constate sur la figure 5.25 que juste avant la région  $R$ , la dérivée est positive (avec de faibles valeurs), ce qui signifie que l'onde ralentit légèrement avant d'aborder  $R$ . Ce phénomène est probablement lié au fait que le modèle que nous utilisons n'intègre pas explicitement la nature causale de la propagation.

La figure 5.26(a) présente l'allure de la fonction  $t(d_R)$  pour les 7 sommets de la région  $R$ , alors que la figure 5.26(b) présente les dérivées de ces 7 fonctions.

Notre objectif est de réduire le nombre de sommets nécessaires pour calculer le critère d'erreur  $C(d_R)$  après une modification de la conductivité apparente afin d'éviter autant que possible de calculer des simulations complètes du modèle à chaque modification de conductivité apparente. Nous avons déjà vu que les sommets éloignés de  $R$  qui ne suivent pas  $R$  dans l'ordre de la dépolarisation ne dépendent pas de  $d_R$ . Nous constatons aussi que l'influence de  $d_R$  est déjà très significative dans le voisinage immédiat de  $R$ . Nous proposons donc de réduire le nombre de sommets sur lesquels la différence  $t_v^m - t_v(d_R)$  est prise en compte dans l'erreur au voisinage immédiat de  $R$ . Nous précisons pour chacune des expériences décrites dans la suite le voisinage exact choisi.

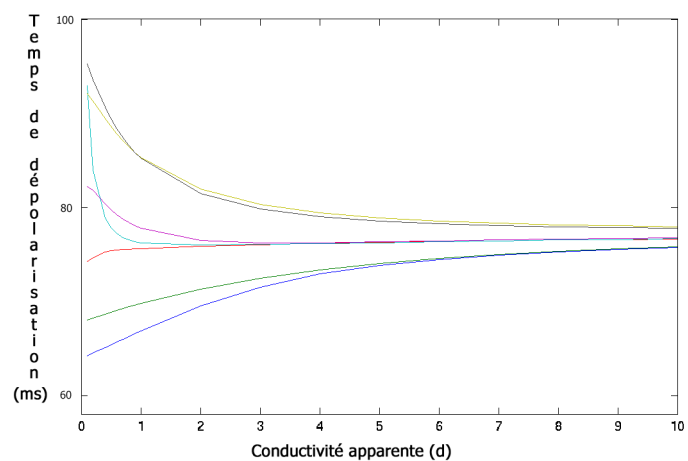
Grâce à la figure 5.26, nous remarquons aussi que les valeurs absolues des dérivés du temps par rapport à la conductivité apparente sont faibles, c'est-à-dire qu'une modification importante de la conductivité apparente est nécessaire pour obtenir une modification perceptible des temps de dépolarisation. Cette remarque est d'autant plus vraie que l'on considère une petite région. Cette remarque justifie donc *a posteriori* le choix de découper la surface en régions plutôt que d'estimer une conductivité apparente triangle par triangle. Plus important encore, nous venons de rencontrer une limitation intrinsèque de la précision que nous pouvons atteindre pour l'estimation de la conductivité apparente à partir de temps de dépolarisation.

La figure 5.26(b) montre aussi que la dérivée du temps est beaucoup plus élevée pour les petites valeurs de conductivité apparente ( $d < 1$ ) que pour les valeurs élevées. L'erreur commise sur les petites valeurs sera donc plus petite que lorsqu'on cherchera des valeurs de conductivité apparente élevées.

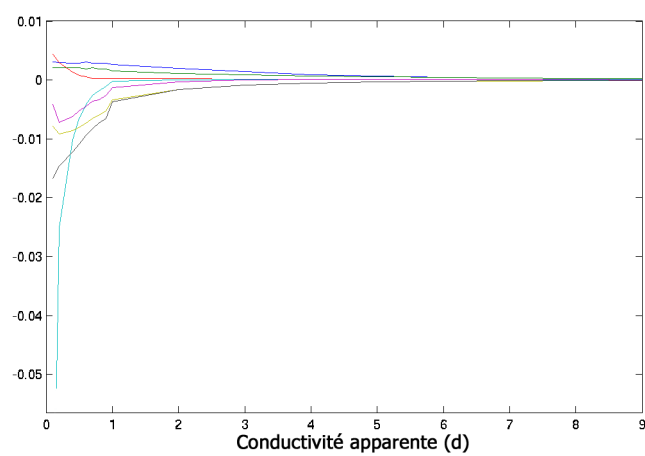
### 5.4.2 Découpage en zones

Le découpage en zones est effectué pour l'instant de manière manuelle en essayant de respecter au mieux l'ordre de la dépolarisation donnée par les temps de dépolarisation mesurés.

Deux autres découpages pourront être envisagés par la suite. Le découpage standard du ventricule gauche correspondant aux zones d'irrigation du cœur. C'est utilisable pour des données d'endocarde de



(a) Temps de dépolariation en fonction de la conductivité apparente :  $\Theta(d)$



(b) Dérivée de la fonction  $\Theta(d)$  pour chaque sommet de la région  $R$

FIG. 5.26 – Évolution des temps de dépolariation pour chaque sommet de la région  $R$  en fonction de la conductivité apparente. Chaque courbe correspond à un sommet.

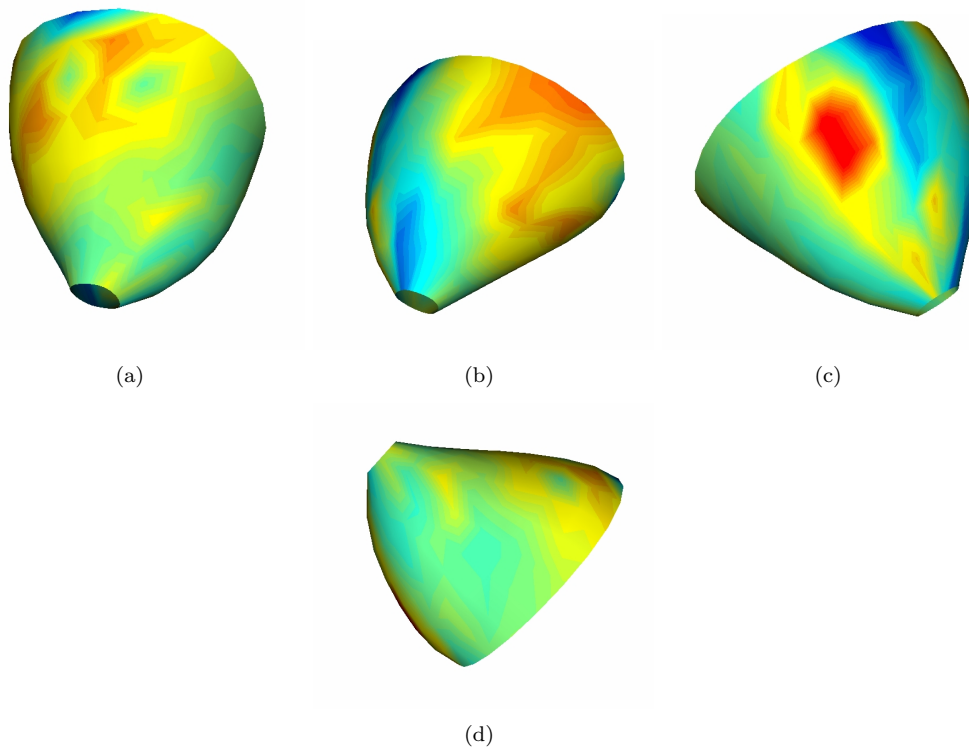


FIG. 5.27 – Visualisation de  $\ln(V_m/V_s)$  où  $V_m$  est la vitesse mesurée et  $V_s$  la vitesse obtenue par une simulation avec conductivité apparente homogène

ventricule gauche. Pour les données d'épicaarde que nous utilisons dans cette section, il nous faudrait une extension de cette segmentation à l'épicaarde.

Enfin un autre découpage minimisant le nombre de régions pourrait provenir de l'écart entre les mesures et une simulation obtenue à partir d'une conductivité apparente homogène. Nous avons vu lors des expériences précédentes que lorsqu'une anomalie (diminution de la conductivité apparente) apparaît au cours de la propagation, les temps de dépolarisation sont modifiés non seulement à l'origine du problème mais aussi dans la suite de la propagation. L'erreur sur les temps de dépolarisation n'est pas le bon critère pour détecter les régions qui ont besoin d'une conductivité apparente différente. Nous revenons donc encore une fois aux vitesses de propagation, car elles sont proportionnelles, en première approximation, à la conductivité apparente. Si l'on note  $V_m$  (respectivement  $V_s$ ) la norme de la vitesse calculée à partir des mesures (respectivement de la simulation obtenue avec une conductivité apparente homogène), la quantité :

$$\ln\left(\frac{V_m}{V_s}\right)$$

semble bien adaptée pour distinguer les régions qui nécessitent l'estimation d'une conductivité apparente différente (Figure 5.27). Les régions ayant une anomalie de conductivité apparente auront une valeur non nulle. En effet, on trouve de larges régions où ce critère est presque nul, donc se contentant a priori de la valeur de conductivité apparente prise au départ. Quelques zones se distinguent par des valeurs particulièrement élevées ou faibles.

### 5.4.3 Résolution grâce à une linéarisation

Dans cette section, nous utiliserons pour estimer la conductivité apparente d'une région  $R$  les temps de dépolarisation aux sommets de la région  $R$  et à leurs voisins directs. Nous noterons l'ensemble de ces



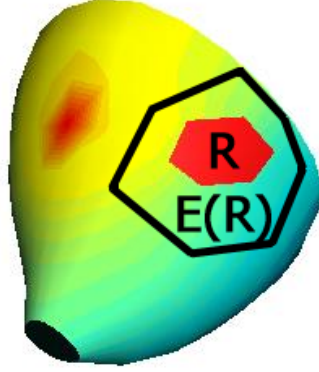


FIG. 5.28 – La région d'intérêt  $R$  et l'ensemble des sommets voisins  $E(R)$  que nous choisissons d'utiliser pour estimer  $d_R$ .

sommets  $E(R)$  (figure 5.28). Le critère à minimiser est donc le suivant :

$$\mathcal{C}(\delta d_R) = \sum_{v \in E(R)} |t_v^m - t_v(d_R)|^2 \quad (5.34)$$

Nous allons présenter la méthode à partir d'un exemple obtenu par simulation avec la région  $R$  de la figure 5.28. Dans un deuxième temps, nous montrerons l'application à des mesures sur l'ensemble de l'épicaarde.

### Méthode

**La linéarisation** Pour chaque sommet  $v \in E(R)$ , la fonction  $t_v$  est une fonction non linéaire de la conductivité apparente  $d_R$ . Dans le cas d'une fonction linéaire, le problème des moindres carrés admet une unique solution. Soient  $n$  et  $p$  deux entiers avec  $n \geq p$ . On recherche le minimum :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} \|\mathbf{A}x - b\|_2^2 \quad (5.35)$$

avec  $\mathbf{A}$  une matrice de taille  $n \times p$  et  $b$  un vecteur de taille  $n$ . La solution de ce problème de minimisation s'obtient grâce à la pseudo-inverse de la matrice  $\mathbf{A}$  :

$$x_{\min} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b$$

Notons  $\mathbf{t} = (t_v)_{v \in \mathcal{V}}$ . Pour se ramener au problème des moindres carrés, nous linéarisons la fonction  $\mathbf{t}$  au voisinage de la valeur de conductivité apparente courante,  $d_R^0$ . On note  $\mathbf{t}^0 = (t_v^0)_{v \in \mathcal{V}}$  les temps de dépolarisation obtenus par simulation à partir de la valeur courante. Lorsque l'on perturbe faiblement la conductivité apparente  $d_R^0$ , l'approximation au premier ordre des nouveaux temps de dépolarisation est donnée pour tout sommet  $v \in E(R)$  par :

$$t_v(d_R^0 + \delta d_R) = t_v^0 + \frac{\partial t_v}{\partial d_R}(d_R^0) \delta d_R \quad (5.36)$$

En remplaçant  $t_v$  par sa version linéarisée dans le critère (5.34), on obtient le critère

$$\mathcal{C}^0(\delta d_R) = \sum_{v \in E(R)} |t_v^m - t_v^0 - \frac{\partial t_v}{\partial d_R} \delta d_R|^2 \quad (5.37)$$

On prenant pour  $\mathbf{A}$  la matrice constituée des  $[\partial t_v / \partial d_R]_{v \in E(R)}$  et pour  $b$  le vecteur des temps de dépolarisation sur  $E(R)$ , nous nous sommes ramenés au problème des moindres carrés (Equation (5.35)). Nous trouvons donc la valeur de conductivité apparente optimale par :

$$\delta d_R = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b$$

soit :

$$d_R = d_R^0 + (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T b \quad (5.38)$$

La dernière inconnue du problème est le calcul de la dérivée.  $t_v$  n'est pas une fonction explicite de la conductivité apparente. Dans le cadre du modèle dynamique, deux méthodes sont possibles pour estimer la dérivée. L'idée la plus simple est d'utiliser un schéma de discrétisation et de calculer la dérivée en fonction des valeurs des temps pour des valeurs de conductivité apparente voisines. Cependant ces méthodes sont coûteuses car elles nécessitent de nombreuses simulations. Les méthodes adjointes fournissent un outil plus sophistiqué et plus précis pour estimer des dérivées dans le cas de modèles dynamiques (Section 5.1.2). Cependant, pour utiliser cette méthode, il est nécessaire d'avoir une relation entre les observations et le résultat du modèle qui puisse s'écrire sous la forme d'une équation explicite, ce que nous ne pouvons pas fournir ici.

Chaque estimation du temps pour une conductivité apparente différente nécessite de simuler le modèle. Nous choisissons donc un schéma de discrétisation pour la dérivée nécessitant un minimum de points de discrétisation, les différences finies centrées. Pour chaque sommet  $v \in \mathcal{V}$  :

$$\frac{\partial t_v}{\partial d_R} \approx \frac{t_v(d_R + \Delta d) - t_v(d_R - \Delta d)}{2\Delta d} \quad (5.39)$$

Nous donnons ici (Table 5.1) quelques exemples d'estimations effectuées à partir de l'exemple de la figure 5.28. Nous avons fixé tous les paramètres du modèle sauf la conductivité apparente sur la région  $R$ . Pour obtenir des mesures simulées, nous avons modifié la conductivité apparente de la région  $R$  à une valeur  $d^m$ . Nous effectuons une simulation pour calculer les temps de dépolarisation en tout sommet de la surface. Puis nous essayons de retrouver cette valeur grâce à l'équation (5.38). Le tableau 5.1 présente la conductivité apparente obtenue pour différentes valeurs de  $\Delta d$  et pour différentes valeurs de conductivité apparente à estimer. Lorsque  $\Delta d$  est grand, la valeur approchée de la dérivée est peu précise, c'est pourquoi l'estimation de la conductivité apparente obtenue par linéarisation est peu précise. Cependant les grandes valeurs de  $\Delta d$  permettent aussi de retrouver de grandes déformations. Lorsque le pas de discrétisation utilisé pour estimer la dérivée  $\Delta d$  est diminué, la valeur de dérivée est plus précise, par contre, il n'est plus possible de retrouver de grandes déformations comme le montrent les expériences correspondant à  $\Delta d = 0.01$ .

**L'algorithme** Nous souhaitons estimer précisément les valeurs de conductivité apparente, même celles qui constituent de grandes perturbations par rapport à la valeur initiale. Nous souhaitons donc garder  $\Delta d$  petit. Nous proposons donc un algorithme itératif. Pour cela, nous posons

$$\mathbf{M}^0 = \left[ \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial d_R}(d_R^0) \right] = \left[ \frac{\partial t_v}{\partial d_R}(d_R^0) \right]_{v \in \mathcal{V}}$$

Notons  $\mathbf{t}^0$  le vecteur  $(t_v(d_R^0))_{v \in \mathcal{V}}$  puis  $\mathbf{t}^m$  le vecteur  $(t_v^m)_{v \in \mathcal{V}}$ . L'approximation linéaire (5.36) peut s'exprimer matriciellement :

$$\mathbf{t}(d_R^0 + \delta d) = \mathbf{t}^0 + \mathbf{M}^0 \delta d \quad (5.40)$$

Ce qui donne les moindres carrés suivant :

$$\mathcal{C}^0(\delta d_R) = \sum_{v \in E(R)} \left| t_v^m - t_v^0 - \frac{\partial t_v}{\partial d_R} \delta d_R \right|^2 = \|\mathbf{t}^m - \mathbf{t}^0 - \mathbf{M}^0 \delta d_R\|^2 \quad (5.41)$$

Pas de discrétisation : $\Delta d$	conductivité apparente utilisée $d^m$	conductivité apparente $d_R$ estimée
0.2	0.9	0.9854
0.2	0.75	0.7325
0.2	0.5	0.414
0.05	0.9	0.909
0.05	0.75	0.7455
0.05	0.5	0.448
0.01	0.9	0.955
0.01	0.75	0.88
0.01	0.5	0.735

TAB. 5.1 – Résultat de l'estimation de la conductivité apparente grâce à (5.38) pour différentes valeurs de  $\Delta d$ , et  $d^m$ . Pour chaque exemple, on part de  $d_0 = 1$

La minimisation de  $\mathcal{C}^0$  donne la solution :

$$\delta d_R = ((\mathbf{M}^0)^T (\mathbf{M}^0))^{-1} (\mathbf{M}^0)^T \delta \mathbf{t}^0 \quad (5.42)$$

avec  $\delta \mathbf{t}^0 = \mathbf{t}^m - \mathbf{t}^0$ . On obtient ainsi la nouvelle valeur de la conductivité apparente :

$$d_R^1 = d_R^0 + ((\mathbf{M}^0)^T (\mathbf{M}^0))^{-1} (\mathbf{M}^0)^T \delta \mathbf{t}^0 \quad (5.43)$$

Cette valeur obtenue est plus proche de la vraie valeur que la valeur initiale. Nous procédons donc à la linéarisation du critère (5.33) au voisinage de la nouvelle valeur de conductivité apparente  $d_R^1$ . Pour cela nous avons besoin de la fonction  $\mathbf{t}(d_R^1)$ , c'est-à-dire des temps de dépolarisation aux sommets de  $E(R)$  pour une valeur de conductivité apparente dans la région  $R$  de  $d_R^1$ . Ces temps sont obtenus en simulant la propagation de la vague électrique jusqu'à ce que tous les sommets de  $E(R)$  soient dépolarisés. On note

$$\mathbf{M}^1 = \left[ \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial d_R} (d_R^1) \right] = \left[ \frac{\partial t_v}{\partial d_R} (d_R^1) \right]_{v \in \mathcal{V}}$$

Le critère (5.33) linéarisé au voisinage de  $d_R^1$  est donc :

$$\mathcal{C}^1(\delta d_R) = \sum_{v \in E(R)} |t_v^m - t_v^1 - \frac{\partial t_v}{\partial d_R} (d_R^1) \delta d_R|^2 = \|\mathbf{t}^m - \mathbf{t}^1 - \mathbf{M}^1 \delta d_R\|^2$$

qui a pour minimum :

$$\delta d_R = ((\mathbf{M}^1)^T (\mathbf{M}^1))^{-1} (\mathbf{M}^1)^T \delta \mathbf{t}^1$$

La nouvelle valeur de la conductivité apparente est donc :

$$d_R^2 = d_R^1 + ((\mathbf{M}^1)^T (\mathbf{M}^1))^{-1} (\mathbf{M}^1)^T \delta \mathbf{t}^1$$

Nous proposons donc un algorithme itératif alternant une linéarisation du critère (Equation (5.40)) et une minimisation du critère obtenu (Equation (5.42)). Nous avons vu comment le processus est initialisé. À l'itération  $k$ , on appelle  $d_R^k$  la conductivité apparente courante à cette étape,  $\mathbf{t}^k$  le vecteur des temps de dépolarisation à cette étape. Le critère linéarisé au voisinage de  $d_R^k$  est alors :

$$\mathcal{C}^k(\delta d_R) = \sum_{v \in \mathcal{E}(\mathcal{R})} |t_v^m - t_v^k - \frac{\partial t_v}{\partial d_R} (d_R^k) \delta d_R|^2 = \|\mathbf{t}^m - \mathbf{t}^k - \mathbf{M}^k \delta d_R\|^2$$

qui a pour minimum :

$$\delta d_R = ((\mathbf{M}^k)^T (\mathbf{M}^k))^{-1} (\mathbf{M}^k)^T \delta \mathbf{t}^k$$

La conductivité apparente estimée à cette étape,  $d_R^{k+1}$  est donc :

$$d_R^{k+1} = d_R^k + ((\mathbf{M}^k)^T (\mathbf{M}^k))^{-1} (\mathbf{M}^k)^T \delta \mathbf{t}^k \quad (5.44)$$

L'algorithme est le suivant :

---

**Algorithme 5.2** Estimation régionale de la conductivité apparente

---

```

1: procedure ESTIMERCONDUCT(it,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathbf{d}^0 = 1.0$ )
2:   for  $R \in \mathcal{R}$  do
3:     Initialisation  $d_R^0 = 1.0$ 
4:     for  $k = 0 \rightarrow it$  do
5:       Effectuer une simulation du modèle jusqu'à ce que les sommets de  $E(R)$  soient dépolarisés.
6:       Calcul des temps de dépolarisation courants  $\mathbf{t}^k$  aux sommets de  $E(R)$ .
7:       Estimation de la matrice jacobienne  $\mathbf{M}^k$ 
8:       Minimisation :  $\delta d_R^k = ((\mathbf{M}^k)^T (\mathbf{M}^k))^{-1} (\mathbf{M}^k)^T \delta \mathbf{t}^k$ 
9:       Mise à jour de la conductivité apparente  $d_R^{k+1} = d_R^k + \delta d_R^k$  sur tous les triangles de  $R$ .
10:    end for
11:  end for
12: end procedure

```

---

### Résultats sur des données simulées

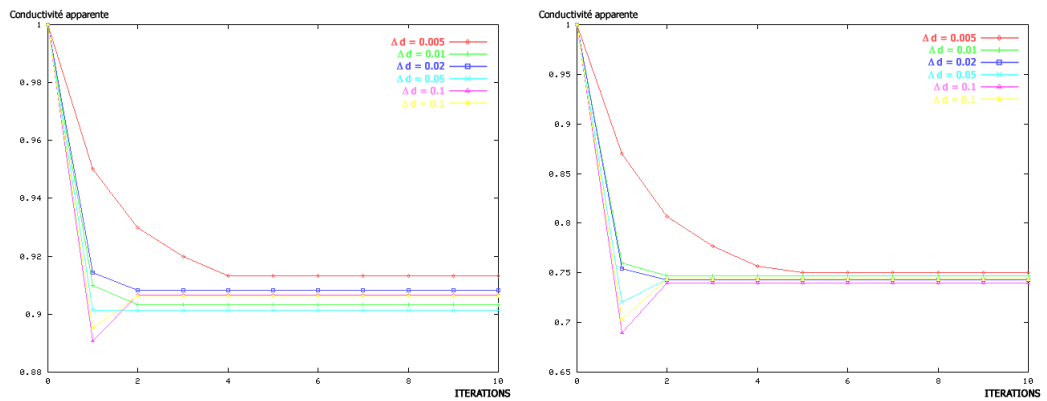
Nous avons testé l'algorithme proposé (Algorithme 5.2) sur des données simulées. Nous n'avons utilisé qu'une seule région pour ces tests, celle de la figure 5.28. Nous avons effectué des simulations avec différentes valeurs de conductivité apparente pour la région  $R$  alors que tous les autres paramètres du modèle numérique sont constants. Nous avons ensuite utilisé l'algorithme 5.2 pour estimer la conductivité apparente d'une seule région, la région  $R$ .

**Exemple 1 : Estimation pour de petites perturbations par rapport à l'initialisation** Les valeurs de conductivité apparente de référence utilisées pour cet exemple sont  $d_R^m \in \{0.5, 0.75, 0.9, 2.0\}$ . Nous avons utilisé différentes valeurs pour la discrétisation  $\Delta d$  de la conductivité apparente.

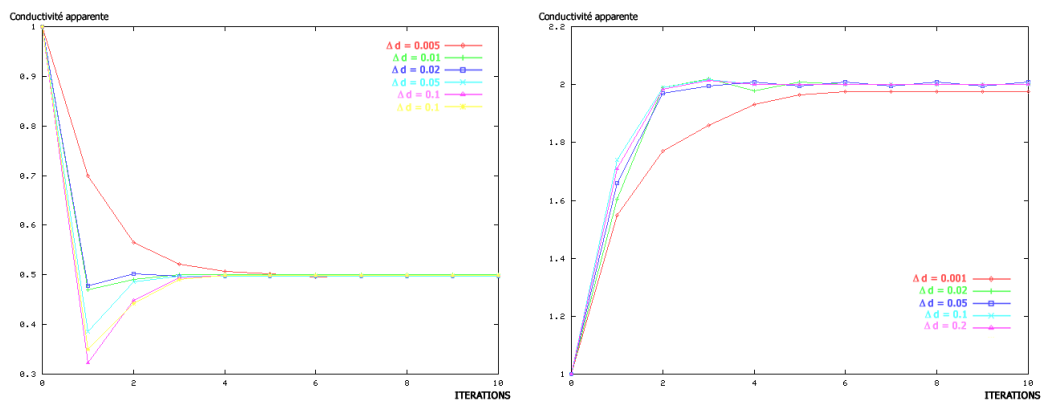
La figure 5.29 montre l'évolution de la conductivité apparente durant l'algorithme 5.2 pour ces quatre valeurs de conductivité apparente. A chaque fois, seules quelques itérations sont nécessaires pour que la conductivité apparente estimée soit proche de la valeur attendue, quel que soit  $\Delta d$ . De plus, nous constatons que la conductivité apparente se stabilise rapidement à une valeur donnée. A convergence, la différence entre temps de dépolarisation mesurés et temps de dépolarisation simulés est si faible que la conductivité apparente n'est plus modifiée par l'équation (5.44).

En conséquence, différentes valeurs de  $\Delta d$  conduisent à différentes valeurs de conductivité apparente, toutes proches de la valeur attendue. Cependant, un  $\Delta d$  plus petit ne garantit pas une approximation plus proche car dès qu'une valeur de conductivité apparente donnant une très faible erreur sur les temps de dépolarisation est atteinte, la conductivité apparente n'est plus modifiée. Ainsi, pour  $d_R^m = 0.9$  (cf. Figure 5.29(a)), les différentes valeurs de  $\Delta d$  donnent une valeur de conductivité apparente comprise entre 0.9 et 0.91. Comme nous l'avons prédit au cours de la section 5.4.1, nous ne pouvons pas obtenir une précision arbitraire pour l'estimation de la conductivité apparente à partir des temps de dépolarisation. L'erreur commise sur la conductivité apparente reste quand même raisonnable puisqu'elle ne dépasse pas 2%. De plus, l'erreur maximum sur les temps de dépolarisation est inférieure à  $10^{-12}$  s quel que soit  $\Delta d$ .

Les résultats de convergence présentés Figure 5.29 montrent cependant le rôle de  $\Delta d$ . En effet, un  $\Delta d$  petit ne permet pas d'obtenir une valeur plus précise de la conductivité apparente, par contre il implique une convergence en plus d'itérations. Cette apparente perte en temps de calcul est en fait compensée par une meilleure stabilité. En effet, à chaque étape, nous restons dans le cadre de petites déformations, la linéarisation reste donc légitime. Nous allons voir l'importance de cette stabilité dans les exemples qui suivent.



(a) Valeur attendue pour la conductivité apparente  $d_R^m = 0.9$  (b) Valeur attendue pour la conductivité apparente  $d_R^m = 0.75$



(c) Valeur attendue pour la conductivité apparente  $d_R^m = 0.5$  (d) Valeur attendue pour la conductivité apparente  $d_R^m = 2.0$

FIG. 5.29 – Estimation de la conductivité apparente pour différentes valeurs  $d_R^m$ . Pour chaque expérience, la figure présente la conductivité apparente en fonction du nombre d'itérations pour différentes valeurs de  $\Delta d$  de 0.005 à 0.2.

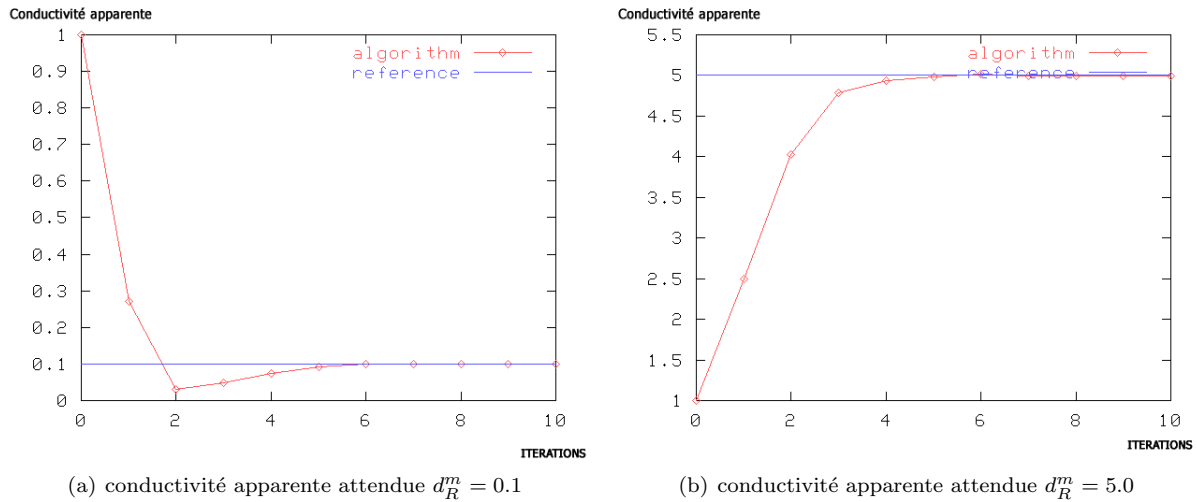


FIG. 5.30 – Convergence de l'estimation de la conductivité apparente pour  $d_R^m = 0.1$  et  $d_R^m = 5.0$ .

**Exemple 2 : Estimation d'une conductivité apparente dans le cas d'une grande perturbation** Nous présentons maintenant deux exemples où le rapport  $d_R^0/d_R^m$  est très loin de 1 :  $d_R^m = 0.1$  et  $d_R^m = 5.0$ . L'exemple d'une conductivité apparente plus faible est intéressant car il peut correspondre à ce qui se produit réellement dans le cas d'une cicatrice. Ce cas est aussi intéressant d'un point de vue technique car la conductivité apparente recherchée est proche de 0. Pour que le système fonctionne, il faut que  $d_R$  reste strictement positif. En effet, si  $d_R$  s'annule, la région  $R$  ne sera jamais entièrement dépolarisée, ce qui va gêner notre algorithme qui est basé sur la comparaison de temps de dépolarisation. De plus, si on estime une valeur de conductivité apparente négative, ce n'est pas physiologiquement cohérent et le modèle d'Aliev et Panfilov n'est pas dans le bon régime si la conductivité apparente est négative. Donc l'algorithme doit aussi garder la conductivité apparente positive.

L'exemple avec une conductivité apparente plus élevée est indispensable pour valider l'estimation. En effet, comme dans un premier temps nous effectuons une estimation du paramètre  $k$  à partir de la vitesse de propagation médiane, il y aura nécessairement des régions où la vitesse de propagation est plus élevée que la médiane, ce qui signifie que la conductivité apparente de ces régions est plus élevée. De plus, nous avons vu dans la section 5.4.1 que la précision de l'estimation devait être moindre pour les grandes valeurs de conductivité apparente que pour les valeurs inférieures à 1. Nous voulons donc voir ce qu'il en est.

Dans ces exemples, nous avons choisi des valeurs de  $\Delta d$  suffisamment petites. Lorsque  $\Delta d$  est trop grand, la différence de conductivité apparente est généralement surestimée. Cette surestimation pose problème dans les deux exemples que nous traitons. La conductivité apparente peut devenir très faible voir négative et donc la dépolarisation n'a plus lieu dans la région considérée, on n'a donc plus de temps de dépolarisation à comparer. La conductivité apparente peut aussi devenir très élevée, rendant les pas en temps ou en espace inadaptés car les conditions de stabilité dépendent des paramètres. Dans les deux cas, le modèle d'Aliev et Panfilov ne produit plus un potentiel d'action.

La figure 5.30 présente l'évolution de la valeur de conductivité apparente estimée par l'algorithme pour ces deux exemples. La figure 5.31 présente quelques temps de dépolarisation intermédiaires obtenus pendant l'estimation de la conductivité apparente dans le cas  $d_R^m = 0.1$ .

L'algorithme d'estimation de la conductivité apparente converge comme on peut le voir figure 5.30 vers une valeur de conductivité apparente qui correspond à la valeur réelle.

En ce qui concerne les temps de dépolarisation, en quelques itérations, la différence entre les temps de dépolarisation simulés et les mesures est visuellement imperceptible, même sur une vue rapprochée de la région  $R$  (figure 5.31). L'erreur maximale sur les temps de dépolarisation est déjà inférieure à  $10^{-5}$  s.

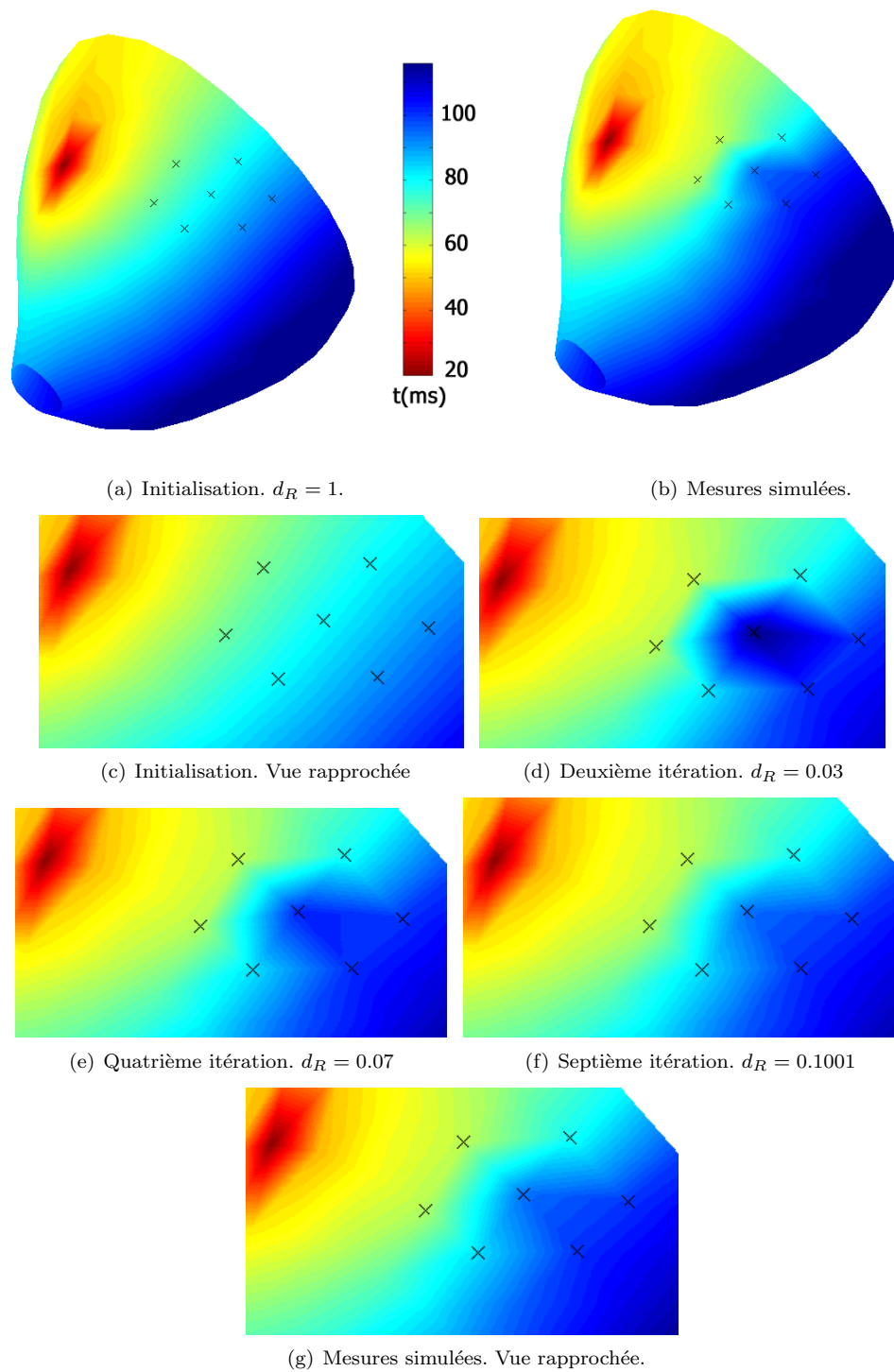


FIG. 5.31 – Convergence des isochrones au cours de l'estimation pour  $d_R^m = 0.1$ . Les isochrones des simulations sont très rapidement indistinguables visuellement des mesures.

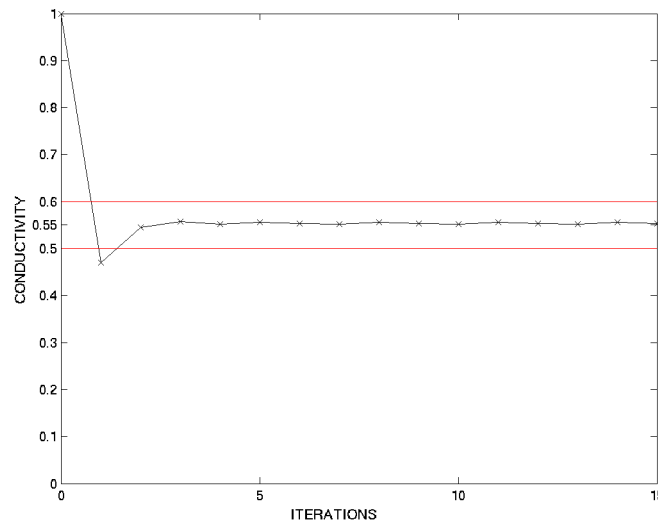


FIG. 5.32 – Evolution de la conductivité apparente. Cas d’une conductivité apparente non homogène sur une région. conductivité apparente attendue  $\approx 0.55$ .

**Exemple 3 : Estimation d’une seule valeur de conductivité apparente pour une région non homogène** Dans le cas de mesures réelles, nous ne pouvons garantir, par aucun des découpages de l’épicaire suggérés en section 5.4.2, que la région sur laquelle nous estimons une conductivité apparente est en fait une région où la conductivité apparente est homogène. Pour tester ce type de cas de figure, nous proposons un dernier exemple où une valeur de conductivité apparente différente est attribuée à chaque triangle de la région  $R$ . Nous avons utilisé 6 valeurs entre 0.5 et 0.63 pour les 6 triangles de  $R$  (figure 5.24).

Nous avons à nouveau appliqué l’algorithme 5.2 pour estimer une valeur de la conductivité apparente pour la région  $R$ . Nous présentons les valeurs de conductivité apparente obtenues successivement pour chaque itération sur la figure 5.32. En quelques itérations, la conductivité apparente estimée est entre 0.5 et 0.63. A la différence des exemples précédents, on observe des oscillations autour d’une valeur moyenne d’environ 0.55, mais ces oscillations sont de faible amplitude (inférieure à  $10^{-4}$ ).

**Bilan** La méthode présentée (cf. Algorithm 5.2) permet d’estimer la conductivité apparente électrique région par région. Cette méthode s’est révélée très précise pour des données simulées que nous avons testées, avec des valeurs de conductivité apparente assez éloignées de la valeur de départ. Nous avons expliqué l’influence du paramètre  $\Delta d$  sur la stabilité de l’estimation. En effet,  $\Delta d$  doit être choisi le plus petit possible avec une limite : la différence entre les temps de dépolarisation  $\mathbf{t}(d_R - \Delta d)$  et  $\mathbf{t}(d_R + \Delta d)$  doit rester visible (d’un point de vue numérique).

Le temps de calcul pour cette méthode réside presque exclusivement dans le temps passé à effectuer des simulations. Pour chaque itération, on a besoin de :

- deux simulations pour l’estimation de la dérivée.
- une nouvelle simulation avec la conductivité apparente courante

Grâce aux différentes simplifications que nous avons faites (estimer la conductivité apparente sur une seule région à la fois, estimer seulement le paramètre au lieu de l’état du modèle, utiliser un nombre réduit de mesures), les opérations matricielles que nous effectuons ne concernent que des matrices de petites tailles et la seule inversion que nous avons à faire est scalaire. Deux minutes sont nécessaires pour estimer la conductivité apparente d’une région sur un PC Pentium biprocesseur 1 GHz.



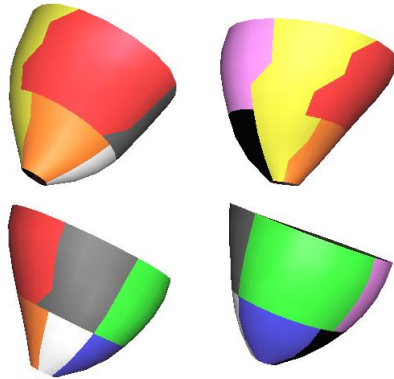


FIG. 5.33 – Les neuf régions choisies suivant la propagation de l’onde de dépolarisation vues sous différents angles. La région représentée en rouge contient les électrodes de stimulations.

### Résultats sur un cas réel

Nous appliquons maintenant l’algorithme 5.2 pour estimer une carte de conductivité apparente à partir des temps de dépolarisation mesurés sur l’épicarde d’un cœur sain. Pour cela nous avons effectué une partition manuelle de la surface de l’épicarde en 9 régions en suivant la vague de propagation. Le but de cette partition est que lorsqu’une région est traitée, tous les triangles dépolarisés avant ont une valeur de conductivité apparente estimée.

En pratique, nous avons d’abord suivi les isochrones, autant que possible vue la résolution du maillage. Ces régions étant très larges, nous les avons découpées orthogonalement au front. Sur la figure 5.33, chaque région est représentés par une couleur.

Nous avons classé ces régions dans l’ordre de leur dépolarisation et nous avons appliqué l’algorithme 5.2. La convergence sur chacune des régions est présentée sur la figure 5.34. L’algorithme converge bien aussi dans le cas de mesures réelles. On constate cependant, pour la valeur la plus élevée de conductivité apparente, des oscillations. La raison de ces oscillations est la faible valeur de  $\partial t / \partial d$  pour les valeurs élevées de conductivité apparente (Section 5.4.1). Comme nous l’avions prévu, les grandes valeurs de conductivité apparente sont estimées moins précisément. Malgré tout, l’amplitude des oscillations est suffisamment faible pour ne pas influencer significativement les temps de dépolarisation.

La figure 5.35 présente la carte de conductivités apparentes. Comme le montrent les figures 5.34 et 5.35, les valeurs de conductivité apparente obtenues sont proches de 1 dans la majorité des régions. Un tel résultat était prévisible car le cas présenté est celui d’un sujet normal. Nous constatons seulement quelques valeurs sensiblement plus élevées ou plus faibles que la moyenne. Nous n’avons pas de valeurs de conductivité apparente à comparer avec cette estimation. Nous avons donc évalué la précision de notre estimation en comparant les temps de dépolarisation mesurés et les temps de dépolarisation calculés à partir de la simulation du modèle utilisant la carte de conductivité apparente estimée.

Les figures 5.36, 5.37 et 5.38 présentent les temps de dépolarisation avant et après l’estimation locale comparés aux mesures. Nous constatons une amélioration visuelle, la forme du front de dépolarisation est beaucoup plus fidèle, en particulier nous reproduisons une anisotropie présente dans les données et la forme lorsque les deux fronts se rencontrent. Pour quantifier cette amélioration nous avons calculé l’erreur absolue entre temps de dépolarisation mesurés et temps de dépolarisation simulés (Figure 5.39). Non seulement l’erreur maximale a diminué grâce à l’ajustement local de la conductivité apparente, mais de plus l’erreur est répartie de manière plus homogène grâce au contrôle effectué sur les temps de dépolarisation.

#### 5.4.4 Minimisation par la méthode de Brent

La méthode que nous venons de proposer donne une conductivité apparente plausible et une erreur très faible sur les temps de dépolarisation. Il reste cependant un paramètre difficile à régler, le pas de

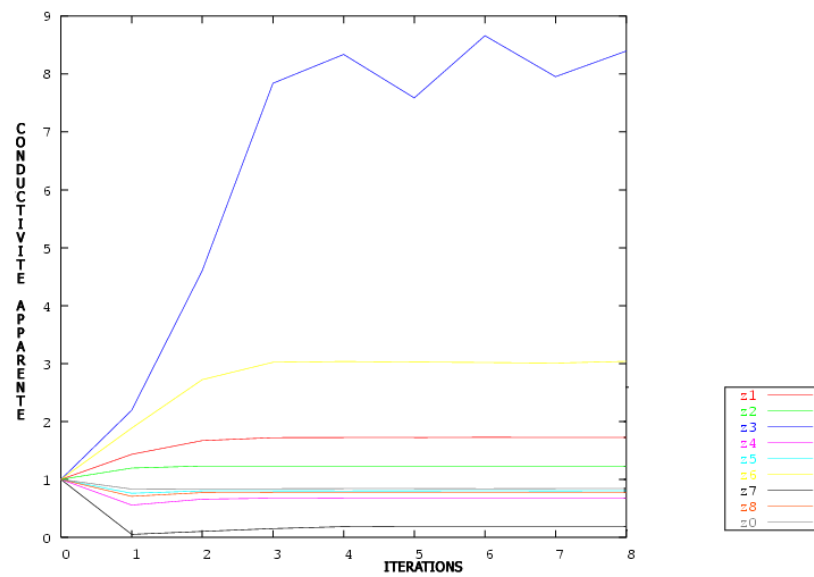


FIG. 5.34 – Chaque courbe représente la convergence de la conductivité apparente pour une région donnée

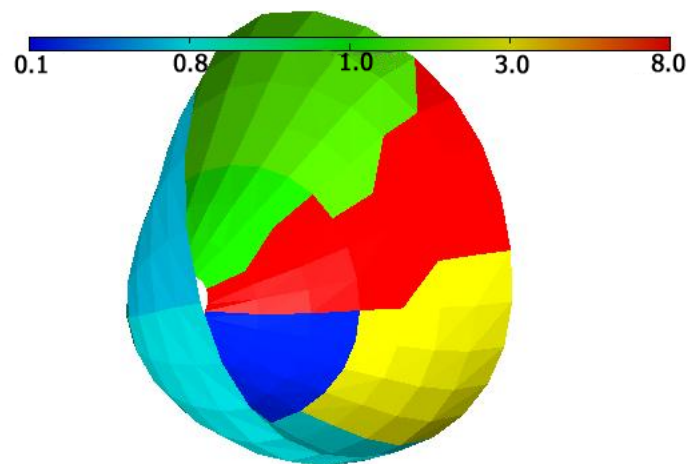


FIG. 5.35 – Carte de conductivité apparente. La couleur représente la conductivité apparente du bleu (conductivité apparente faible) au rouge (conductivité apparente élevée).

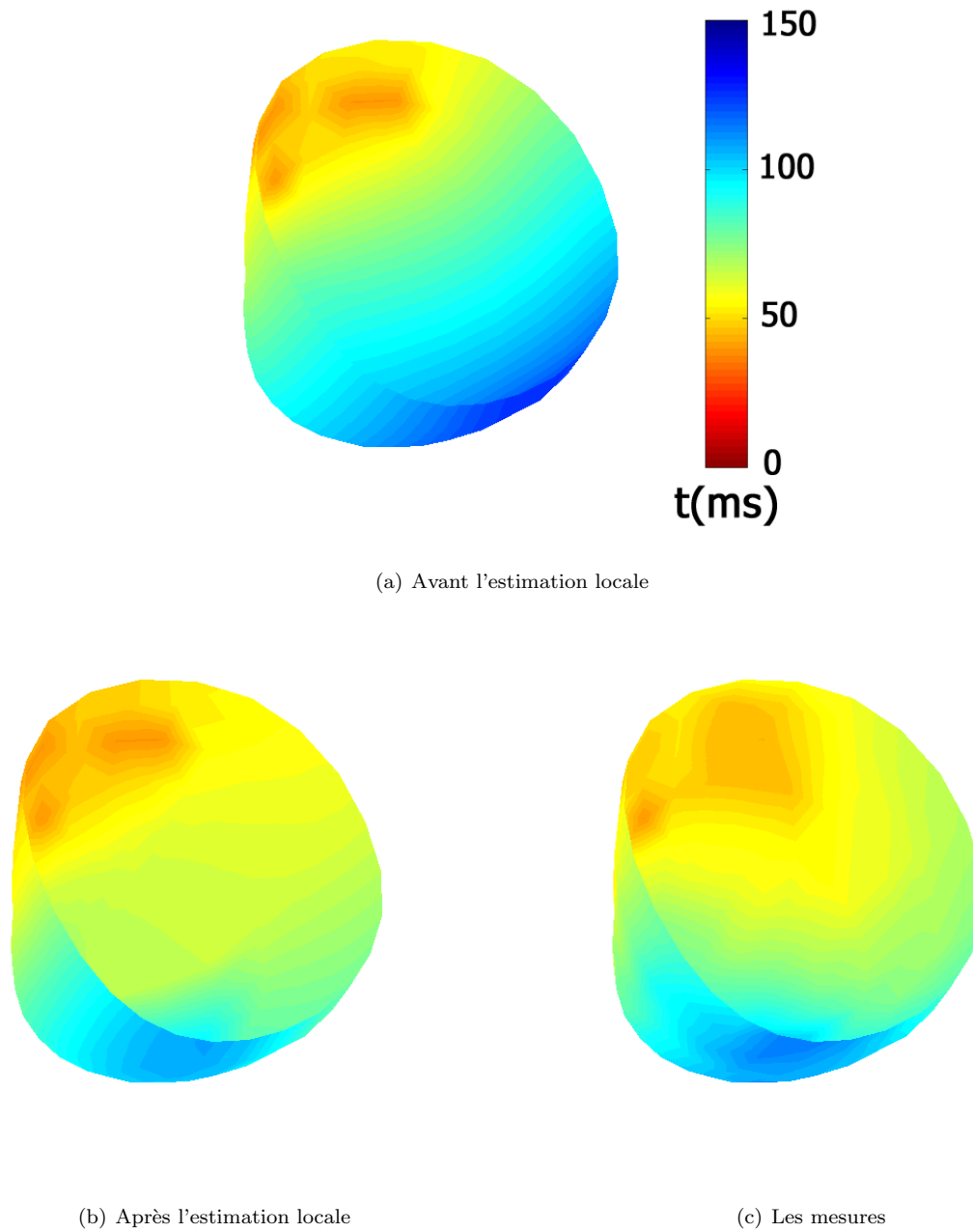
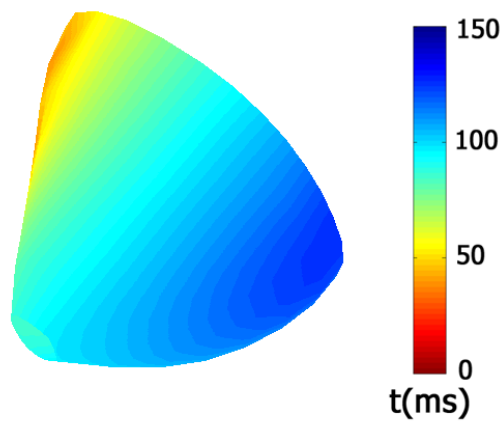
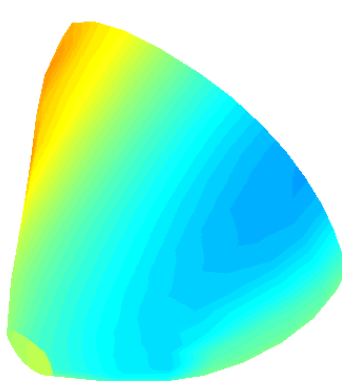


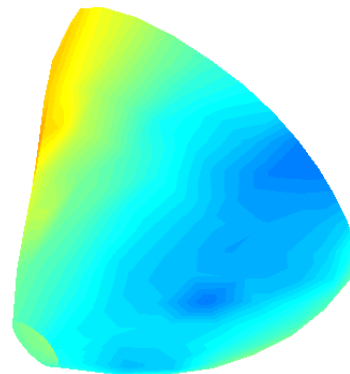
FIG. 5.36 – Les résultats de l'estimation locale de la conductivité apparente. Visualisation des temps de dépolarisation en millisecondes.



(a) Avant l'estimation locale



(b) Après l'estimation locale



(c) Les mesures

FIG. 5.37 – Les résultats de l'estimation locale de la conductivité apparente. Visualisation des temps de dépolarisation en millisecondes. Vues sous un autre angle.

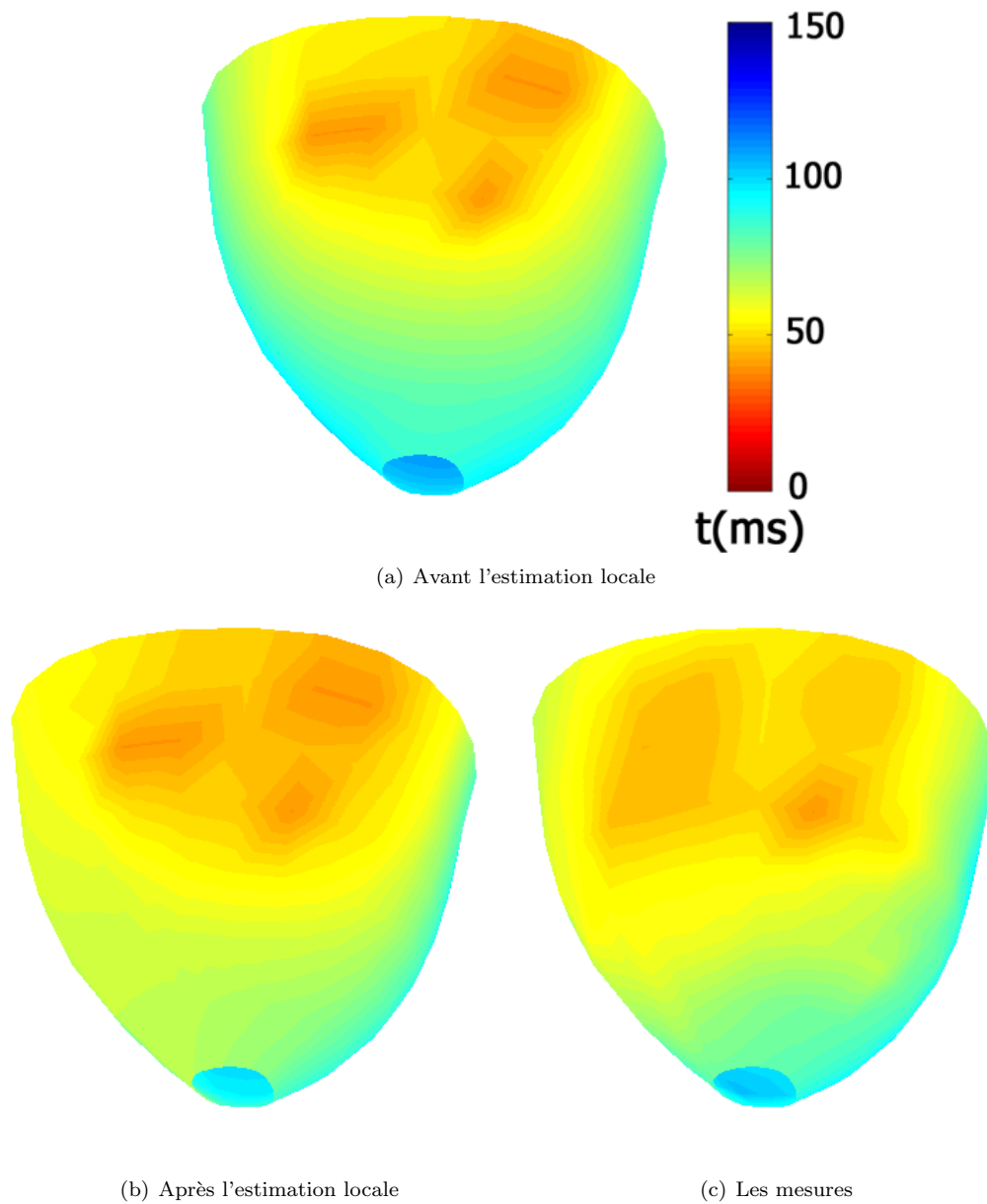


FIG. 5.38 – Les résultats de l'estimation locale de la conductivité apparente. Visualisation des temps de dépolarisation en millisecondes. Vues sur les zones de stimulation

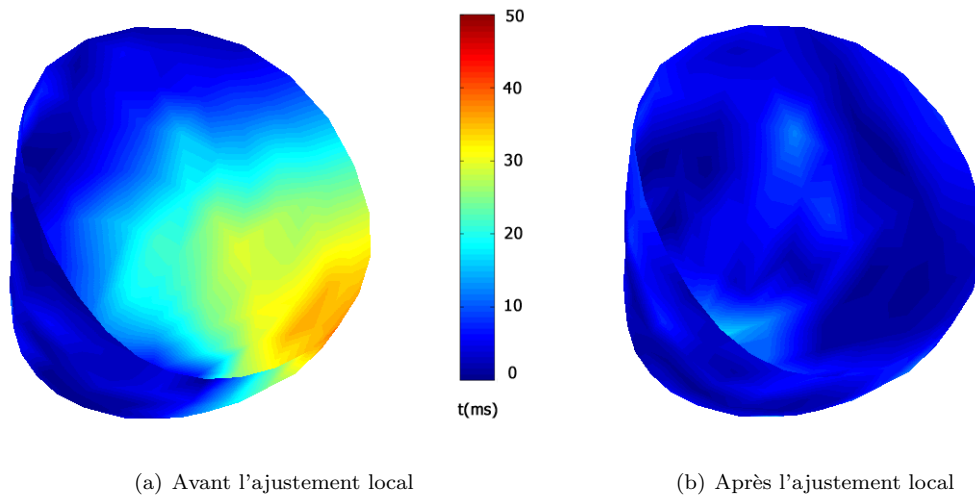


FIG. 5.39 – Les résultats de l'estimation locale de la conductivité apparente. Visualisation de l'erreur absolue sur les temps de dépolarisation.

discrétisation de la conductivité apparente pour calculer la dérivée du temps par rapport à la conductivité apparente. De plus, cette dérivée n'est pas accessible facilement et est coûteuse à calculer. Pour améliorer les performances de l'algorithme, nous proposons de nous en passer pour effectuer la minimisation.

Nous rappelons la fonctionnelle unidimensionnelle que nous avons à minimiser.

$$\mathcal{C}(d_R) = \sum_{v \in \mathcal{V}, v \in R} (t_v^m - t_v(d_R))^2 \quad (5.45)$$

Pour déterminer la technique de minimisation, nous nous intéressons aux propriétés de la fonction à minimiser. Ce qui nous intéresse, ce sont des propriétés éventuelles de convexité, de minima locaux, de régularité. Pour nous faire une idée de ce problème, nous utilisons encore la même région  $R$  (Figure 5.24). Les fonctions  $t_v(d_R)$  sont calculées pour quelques valeurs de  $d_R$  ( $d_R \in \{0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1, 2, \dots, 9\}$ ). A partir de ces valeurs, nous obtenons une bonne approximation des fonctions recherchées par interpolation. Pour valider la minimisation que nous allons proposer, nous utilisons dans un premier temps des mesures simulées à partir d'une carte de conductivité apparente constante égale à 1 sauf pour la région  $R$  où la conductivité apparente vaut une valeur  $d_R^m$  donnée.

La figure 5.40 montre l'allure du critère pour les valeurs de  $d_R^m$  0.75 et 4. Grâce à un nombre réduit d'électrodes retenues, le critère obtenu est régulier, avec un unique minimum global. Nous retrouvons ici les différences de précision à attendre entre valeurs de conductivité apparente faibles et valeurs de conductivité apparente élevées. En effet, le minimum est beaucoup plus prononcé pour  $d_R^m = 0.75$  (Figure 5.40(b)), alors que pour  $d_R^m = 4$  (figure 5.40(b)), la fonction est beaucoup plus plate au voisinage du minimum, ce qui rend une identification précise du minimum plus difficile. Dans les deux cas, le minimum de la fonctionnelle correspond bien à la valeur réelle de la conductivité apparente  $d_R^m$ .

Pour vérifier la régularité du critère et la présence de minima locaux, nous avons fait la même expérience à partir des mesures issues du cœur de chien, sur la même région  $R$ . Le critère à minimiser (Figure 5.41) est toujours régulier avec un unique minimum et pas de minima locaux.

En l'absence de minima locaux et vue la régularité de la fonction obtenue, il est donc inutile de développer une méthode complexe de minimisation. Nous voulons utiliser une méthode très simple, qui n'exige aucun calcul de dérivées, seulement des évaluations de la fonction. Nous avons donc choisi de procéder par interpolation parabolique, ce qui correspond en fait à une simplification de la méthode de Brent [BRENT1973, PRESS *et al.*1991]. Comme son nom l'indique, l'idée de base est de remplacer la fonction à minimiser par une parabole bien choisie. Le minimum de la parabole est alors calculable analytiquement. L'idée sous-jacente est qu'au voisinage du minimum, la fonction à minimiser est proche d'une parabole.

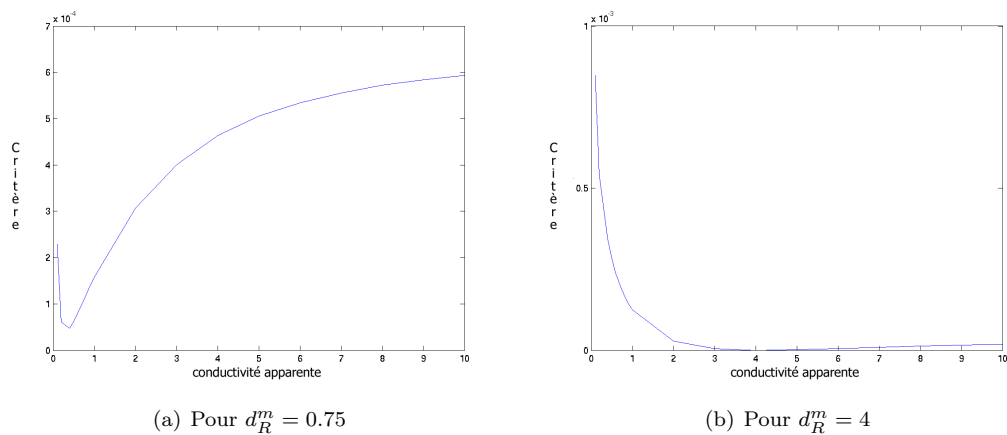
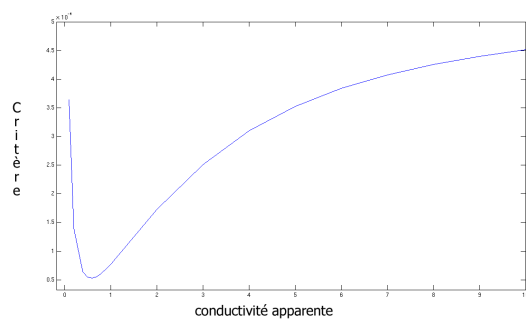
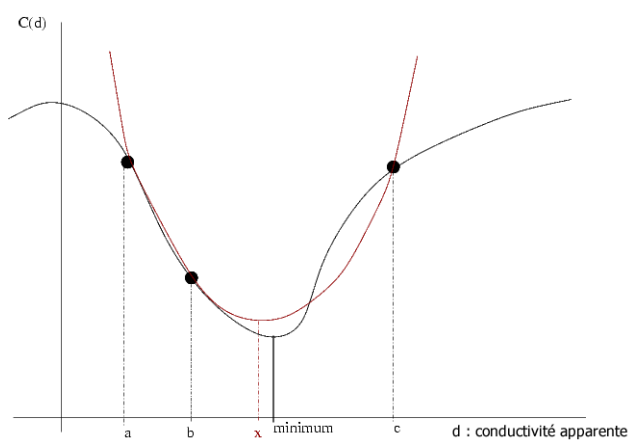
FIG. 5.40 – La fonction  $\mathcal{C}(d_R)$  pour deux valeurs de  $d_R^m$  différentesFIG. 5.41 – La fonction  $\mathcal{C}(d_R)$  dans le cas des mesures

FIG. 5.42 – Schéma de la minimisation par interpolation parabolique.

L'algorithme commence avec trois points de la courbe représentative de  $\mathcal{C}$  ( $d_a, \mathcal{C}(d_a)$ ), ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) et ( $d_c, \mathcal{C}(d_c)$ ) tels que :

$$\begin{aligned} d_a &< d_b < d_c \\ \mathcal{C}(d_a) &> \mathcal{C}(d_b) \\ \mathcal{C}(d_c) &> \mathcal{C}(d_b) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Il existe alors une unique parabole de la forme  $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  passant par ces trois points avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d_a \mathcal{C}(d_c) - d_a \mathcal{C}(d_b) + d_c \mathcal{C}(d_b) - d_b \mathcal{C}(d_c) - d_c \mathcal{C}(d_a) + d_b \mathcal{C}(d_a)}{-d_a^2 d_c + d_a^2 d_b - d_a d_b^2 + d_a d_c^2 - d_b d_c^2 + d_c d_b^2} \\ \beta &= -\frac{-d_b^2 \mathcal{C}(d_c) + d_b^2 \mathcal{C}(d_a) - d_c^2 \mathcal{C}(d_a) - d_a^2 \mathcal{C}(d_b) + d_a^2 \mathcal{C}(d_c) + d_c^2 \mathcal{C}(d_b)}{-d_a^2 d_c + d_a^2 d_b - d_a d_b^2 + d_a d_c^2 - d_b d_c^2 + d_c d_b^2} \\ \delta &= \frac{d_a^2 d_b \mathcal{C}(d_c) - d_c^2 \mathcal{C}(d_b) - d_b^2 d_a \mathcal{C}(d_c) + d_c^2 d_a \mathcal{C}(d_b) + d_b^2 d_c \mathcal{C}(d_a) - d_c^2 d_b \mathcal{C}(d_a)}{-d_a^2 d_c + d_a^2 d_b - d_a d_b^2 + d_a d_c^2 - d_b d_c^2 + d_c d_b^2} \end{aligned}$$

Le minimum de la parabole d'équation  $f$  est atteint au point d'abscisse  $x$  :

$$x = d_b - \frac{1}{2} \frac{(d_b - d_a)^2 (\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_c)) - (d_b - d_c)^2 (\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_a))}{(d_b - d_a)(\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_c)) - (d_b - d_c)(\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_a))} \quad (5.47)$$

A partir de cette étape, nous construisons un algorithme itératif qui est une version simplifiée de la méthode de Brent [BRENT1973, PRESS *et al.*1991] qui trouve le minimum de  $\mathcal{C}$  à partir d'un "encadrement initial" du minimum. Nous appelons ici encadrement du minimum trois points de la courbe représentative de  $\mathcal{C}$ , ( $d_a, \mathcal{C}(d_a)$ ), ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) et ( $d_c, \mathcal{C}(d_c)$ ) vérifiant les conditions (5.46). Lorsqu'on dispose d'un tel encadrement, il existe nécessairement un minimum de  $\mathcal{C}$  entre  $d_a$  et  $d_c$ . Nous effectuons l'interpolation parabolique pour trouver le minimum  $x$  de la parabole passant par les trois points de l'encadrement. On peut alors évaluer la fonction  $\mathcal{C}$  en  $x$ . Nous disposons maintenant de 4 points de la courbe représentative de  $\mathcal{C}$  et nous voulons construire un encadrement plus précis du minimum.

Plusieurs cas se présentent :

1. Si  $\mathcal{C}(x) < \mathcal{C}(d_b)$ , alors, nous avons trouvé une valeur de  $\mathcal{C}$  plus petite que les valeurs qui étaient déjà estimées.
  - (a) Si  $d_a < x < d_b$ , alors ( $d_a, \mathcal{C}(d_a)$ ), ( $x, \mathcal{C}(x)$ ) et ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) constituent un encadrement plus précis du minimum.
  - (b) Si  $d_b < x < d_c$ , alors ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ), ( $x, \mathcal{C}(x)$ ) et ( $d_c, \mathcal{C}(d_c)$ ) constituent un encadrement plus précis du minimum.
2. Si  $\mathcal{C}(x) > \mathcal{C}(d_b)$ , alors, ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) reste la plus petite des valeurs estimées. Cependant comme  $x \in ]d_a; d_c[$ , on peut quand même construire un encadrement plus précis.
  - (a) Si  $d_a < x < d_b$ , alors ( $x, \mathcal{C}(x)$ ), ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) et ( $d_c, \mathcal{C}(d_c)$ ) constituent un encadrement plus précis du minimum.
  - (b) Si  $d_b < x < d_c$ , alors ( $d_a, \mathcal{C}(d_a)$ ), ( $d_b, \mathcal{C}(d_b)$ ) et ( $x, \mathcal{C}(x)$ ) constituent un encadrement plus précis du minimum.

Nous pouvons alors itérer l'interpolation parabolique. Notons  $d^k$  la valeur de conductivité apparente estimée à l'itération  $k$ . Nous définissons comme critère d'arrêt de l'algorithme le moment où la conductivité apparente est modifiée de moins d'une précision  $p$ , c'est-à-dire que  $|d^{k+1} - d^k| < p$ . L'algorithme entier est le suivant :

La méthode de Brent complète inclut différents tests pour détecter quand l'interpolation parabolique n'est pas valide ou devient instable. Nous avons vu (Figures 5.40 et 5.41) que la fonction minimisée est très régulière, nous ne nous retrouvons donc jamais dans une des situations citées et nous allons le vérifier dans les exemples ci-dessous.



---

**Algorithme 5.3** Minimisation par la méthode de Brent pour l'estimation de la conductivité apparente
 

---

```

1: procedure BRENT( $\mathcal{C}, d_a, d_b, d_c, precision, itmax$ )
2:    $k = 0$ 
3:    $d^k = b$ 
4:   while ( $|d^k - d^{k-1}| < precision$ ) & ( $k \leq itmax$ ) do
5:      $d^{k+1} = d_b - \frac{1}{2} \frac{(d_b - d_a)^2 (\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_c)) - (d_b - d_c)^2 (\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_a))}{(d_b - d_a)(\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_c)) - (d_b - d_c)(\mathcal{C}(d_b) - \mathcal{C}(d_a))}$ 
6:     Evaluation de  $\mathcal{C}(d^{k+1})$ 
7:     if ( $\mathcal{C}(d^{k+1}) < \mathcal{C}(d_b)$ ) & ( $d_a < d^{k+1} < d_b$ ) then
8:        $d_b \leftarrow d^{k+1}$ 
9:        $d_c \leftarrow d_b$ 
10:    else if ( $\mathcal{C}(d^{k+1}) < \mathcal{C}(d_b)$ ) & ( $d_b \leq d^{k+1} < d_c$ ) then
11:       $d_a \leftarrow d_b$ 
12:       $d_b \leftarrow d^{k+1}$ 
13:    else if ( $\mathcal{C}(d^{k+1}) \geq \mathcal{C}(d_b)$ ) & ( $a \leq d^{k+1} < d_b$ ) then
14:       $d_a \leftarrow d^{k+1}$ 
15:    else
16:       $d_c \leftarrow d^{k+1}$ 
17:    end if
18:     $k \leftarrow k + 1$ 
19:  end while
20:  return  $d^k$ 
21: end procedure

```

---

## Résultats sur des exemples synthétiques

Dans un premier temps, nous appliquons l'algorithme 5.3 au cas de données simulées. Nous utilisons la même région test  $R$  que plus haut (Figure 5.24) où la conductivité apparente est modifiée à une valeur donnée  $d_R^m$ . Nous procédons comme dans la section 5.4.3. Nous présentons ici deux exemples avec  $d_R^m = 0.5$  et  $d_R^m = 5$ .

Le premier exemple correspond à une conductivité apparente de  $d_R^m = 0.5$ . Nous choisissons un encadrement initial suffisamment large pour être sûr qu'il comprend la valeur recherchée :  $d_a = 0.1$ ,  $d_b = 2.0$  et  $d_c = 9.0$ . Nous avons appliqué l'algorithme de minimisation itératif jusqu'à ce que la conductivité apparente soit modifiée de moins de  $10^{-3}$  à chaque itération. 33 itérations ont été nécessaires et la conductivité apparente estimée est  $d_R = 0.501$ . La figure 5.43(a) présente la conductivité apparente obtenue à chaque itération. La valeur de conductivité apparente se rapproche très vite de la valeur attendue, il faut attendre un peu plus pour obtenir vraiment la convergence.

Le deuxième exemple correspond à une conductivité apparente de  $d_R^m = 5.0$ . Ce cas est plus difficile car la précision attendue sur les valeurs de conductivité apparente est plus faible pour les valeurs de conductivité apparente très supérieure à 1. Nous avons donc choisi une précision moins fine à atteindre pour cet exemple  $p = 0.01$ . Nous avons aussi choisi un encadrement initial un peu plus précis,  $d_a = 2.0$ ,  $d_b = 6.5$  et  $d_c = 9.0$ . Dans ces conditions 17 itérations sont nécessaires et la conductivité apparente obtenue est  $d_R = 5.02$ . Il est à noter que l'algorithme converge aussi dans ce cas avec les mêmes conditions initiales que pour l'exemple ci-dessus et la même précision est obtenue. Cependant, il nécessite plus d'itérations. En effet,  $\mathcal{C}(d_R)$  étant plus plate au voisinage du minimum, la conductivité apparente estimée se rapproche plus lentement du minimum, mais le résultat final est équivalent. Il faut 166 itérations pour obtenir  $d_R = 5.0015$  à partir de  $d_a = 0.1$ ,  $d_b = 8.0$  et  $d_c = 9.0$  et le point  $d_b$  doit être modifié pour avoir  $\mathcal{C}(d_b) < \mathcal{C}(d_c)$ . La figure 5.43(b) présente les valeurs de conductivité apparente estimées successivement au cours de la minimisation

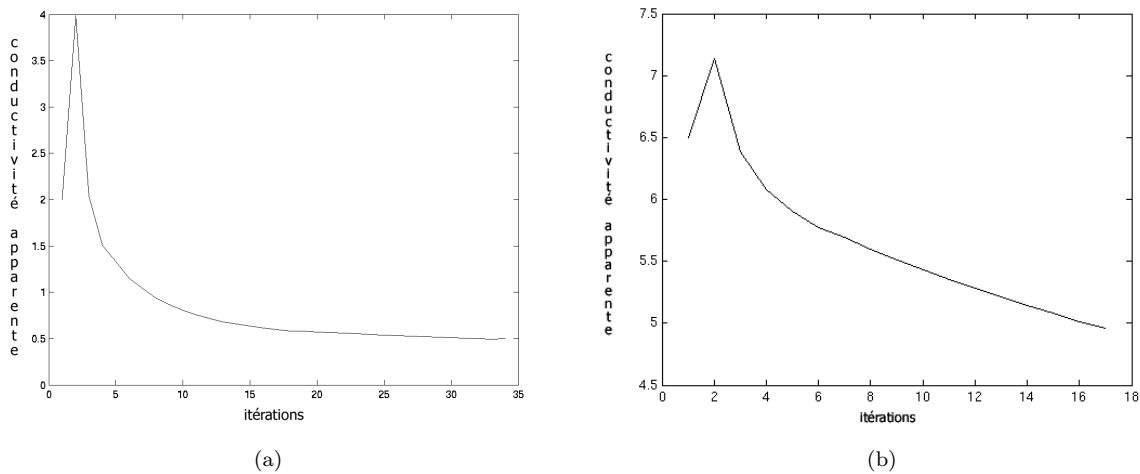


FIG. 5.43 – Evolution de la conductivité apparente estimée durant l’estimation. (a) :  $d_R^m = 0.5$ ,  $p = 10^{-3}$ . (b) :  $d_R^m = 5.0$ ,  $p = 10^{-2}$ .

### Choix et influence des paramètres

Nous avons étudié grâce à des exemples simulés du type de ceux présentés plus haut l’influence de l’encadrement initial sur la vitesse de convergence. Sans surprise, plus l’encadrement  $[d_a; d_c]$  est fin, plus la convergence est rapide. Par contre  $d_b$  a peu d’influence.

Cette méthode de minimisation a pour avantage de comporter peu de paramètres : l’initialisation et la précision recherchée. De plus ces paramètres sont simples à régler. Pour fixer le critère d’arrêt, nous avons constaté qu’avec  $p = 0.01$ , la valeur de conductivité apparente est stabilisée, nous pouvons sans problème tolérer une erreur allant jusqu’à 5%.

Pour l’encadrement initial, nous ne prenons en compte aucune information *a priori* dans un premier temps. Nous avons vu que l’encadrement initial joue plus sur le nombre d’itérations nécessaires pour satisfaire le critère d’arrêt que sur la justesse du résultat. De plus, cet encadrement initial permet d’imposer naturellement la contrainte  $d > 0$  que l’on devait imposer brutalement dans les autres méthodes.

Nous prenons pour  $d_a$  une valeur proche de 0 :  $d_a = 0.05$ . La conductivité apparente des équations d’Aliev et Panfilov et de FitzHugh-Nagumo n’a pas de valeur maximum intrinsèque, ce paramètre varie comme le carré de la vitesse de propagation, nous supposons donc que la valeur de ce paramètre reste inférieure à 10.

De plus, on peut appliquer cette méthode simplifiée avec des données extraites des données réelles en minimisant l’erreur représentée sur la figure 5.41. On obtient ainsi avec l’encadrement initial le plus large possible  $d_a = 0.1$ ,  $d_b = 2.0$  et  $d_c = 9$ .

- Pour  $p = 10^{-3}$ ,  $d_R = 0.6007$  en 29 itérations
- Pour  $p = 5.10^{-3}$ ,  $d_R = 0.5995$  en 28 itérations
- Pour  $p = 10^{-2}$ ,  $d_R = 0.6699$  en 17 itérations

### 5.4.5 Résultats

Pour commencer, nous avons appliqué l’algorithme 5.3 à la même partition que pour la méthode avec linéarisation présentée section 5.4.3. Les valeurs obtenues sont très proches comme le montre le tableau comparatif 5.2.

Pour finir cette comparaison entre les deux méthodes de minimisation, nous avons comparé la vitesse d’exécution. Dans les deux cas, le temps d’exécution est principalement utilisé lors des simulations. Nous avons donc comparé les deux méthodes en terme de nombre de simulations nécessaires.

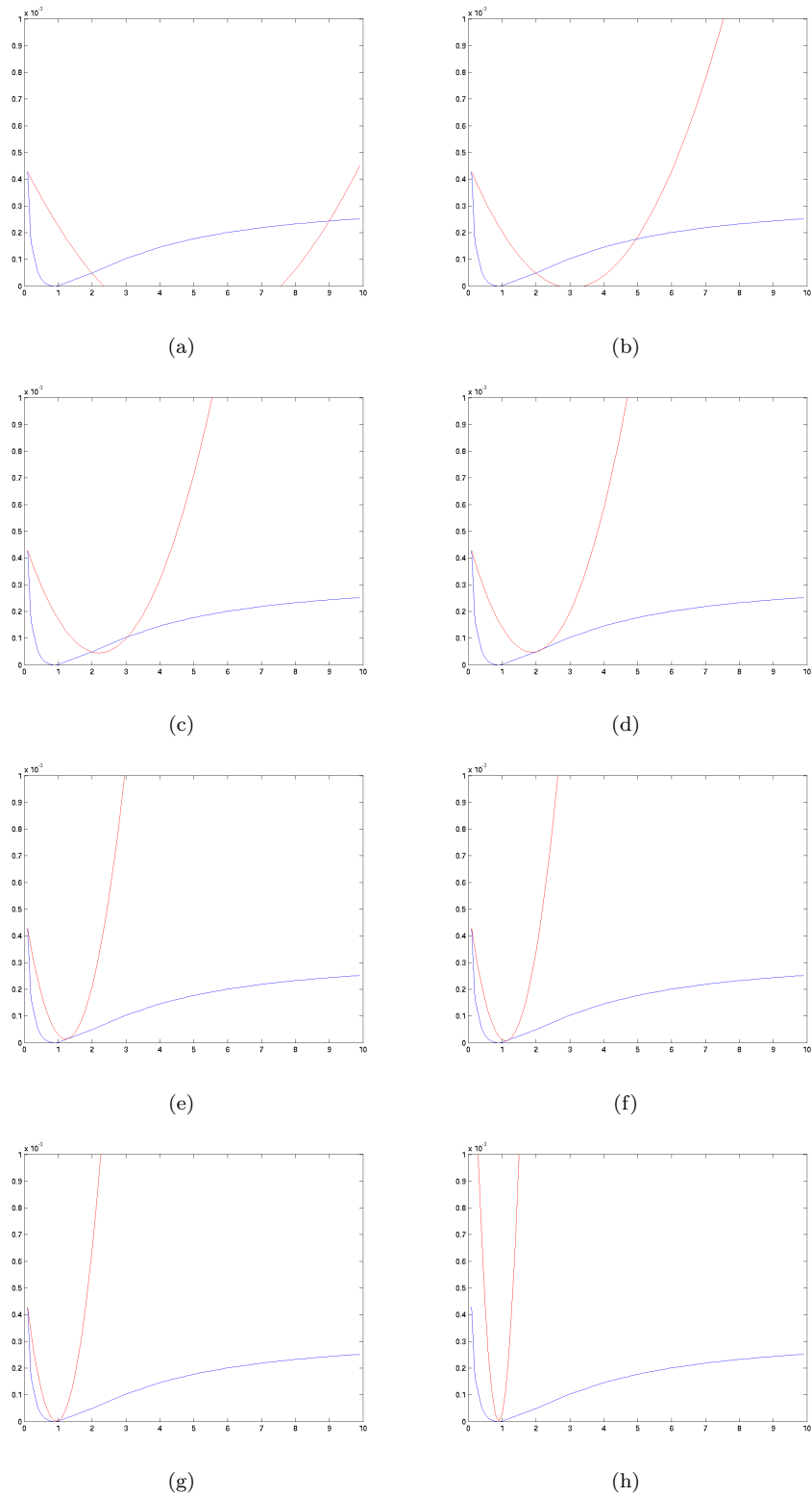


FIG. 5.44 – Evolution de la parabole de Brent au cours du processus de minimisation. La parabole est tracée en rouge et la fonctionnelle à minimiser en bleu.

Zone	méthode par linéarisation	méthode de Brent
1	1.7258	1.7518
2	1.2324	1.2274
3	8.9317	6.1791
4	0.6782	0.6950
5	0.8004	0.8746
6	2.9914	3.1478
7	0.1915	0.2061
8	0.7811	0.8073
9	0.8443	0.7844

TAB. 5.2 – Comparaison des conductivités apparentes obtenues par les deux méthodes de minimisation proposées

Si l'on va jusqu'à la convergence, il faut compter une dizaine d'itérations avec la linéarisée, alors qu'au plus 20 sont nécessaires pour la méthode de Brent. Pour chaque itération, il faut 3 simulations en passant par la linéarisation alors que chaque itération de la méthode de Brent ne nécessite qu'une seule estimation. Ce qui fait une vingtaine de simulations par région pour la méthode de Brent et une trentaine en passant par la linéarisation.

D'autres arguments sont en faveur de la méthode de Brent. La convergence étant plus régulière pour la méthode de Brent il est plus facile d'arrêter l'algorithme avant convergence. De plus les paramètres sont moins nombreux et plus simples à déterminer en utilisant la méthode de Brent. Pour la suite de ce travail, nous utiliserons la méthode de Brent.

L'estimation locale de la conductivité nécessite une initialisation précise. Pour que les conditions de stabilité du schéma numérique restent respectées pendant toute l'estimation, nous utilisons pour initialiser l'estimation locale l'estimation globale présentée section 5.3.1. Cette étape fournit une bonne initialisation et des valeurs globales pour les paramètres de sorte que la propagation se fasse dans le même laps de temps que pour les mesures. Ces conditions constituent une bonne initialisation pour l'estimation locale.

Pour pouvoir utiliser le modèle de propagation surfacique sur l'épicarde, nous devons utiliser uniquement des cas avec stimulation artificielle. En effet, si la stimulation naturelle est conservée, la vague de propagation atteint l'épicarde en différents endroits en même temps. Avec différentes sources qui ne se trouvent pas sur l'épicarde, ce qui est observé sur l'épicarde ne peut être modélisé comme une propagation d'un potentiel d'action sur la surface de l'épicarde.

Nous allons présenter parmi les exemples que nous avons traités un exemple sur un sujet sain et un exemple sur un cas pathologique.

### Sujet normal

Nous avons utilisé une subdivision un peu plus fine, en prenant des régions plus petites là où les isochrones nous ont semblé plus éloignées des mesures. La partition choisie est présentée figure 5.45. La figure 5.46 présente la convergence de la conductivité apparente au cours de l'estimation. Enfin, la figure 5.47 présente les conductivités apparentes obtenues sur la surface.

Puisque nous utilisons une conductivité apparente liée au modèle d'Aliev et Panfilov, qui prend aussi en compte les variations locales des paramètres de réaction, nous ne pouvons pas comparer nos résultats à des mesures de la littérature. Nous avons cependant vérifié que les conductivités apparentes obtenues étaient en accord avec les mesures.

Nous nous intéressons d'abord à la première région, celle qui comprend les zones de stimulation. Dans cette zone, une conductivité apparente homogène ne permettait pas de reproduire la dépolarisation plus rapide de cette région. Grâce à l'estimation locale de la conductivité apparente, une conductivité apparente supérieure à 1 a été attribuée à cette région, produisant une dépolarisation plus rapide, en accord avec l'expérience.

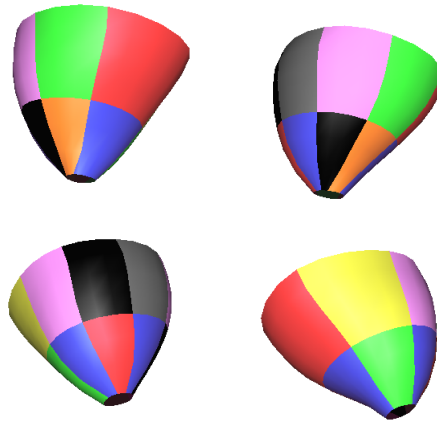


FIG. 5.45 – Les 14 régions choisies sur l'épicaarde en suivant la propagation de la dépolarisation. Vues sous différents angles. La région rouge étendue comprend les électrodes de stimulation.

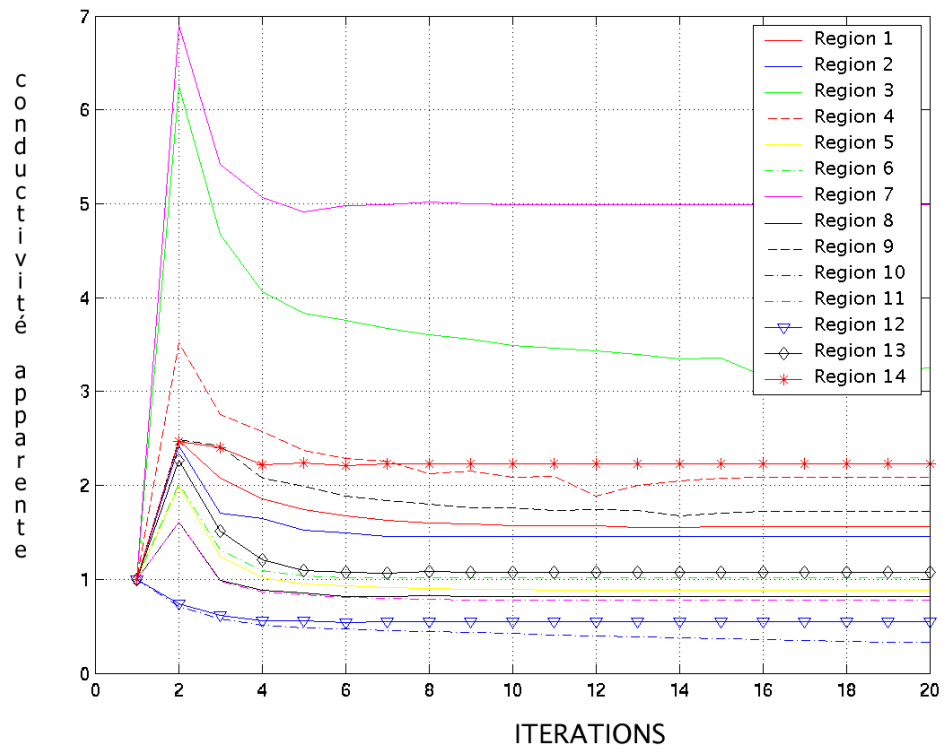


FIG. 5.46 – Convergence de la conductivité apparente pour les 14 régions représentées figure 5.45.

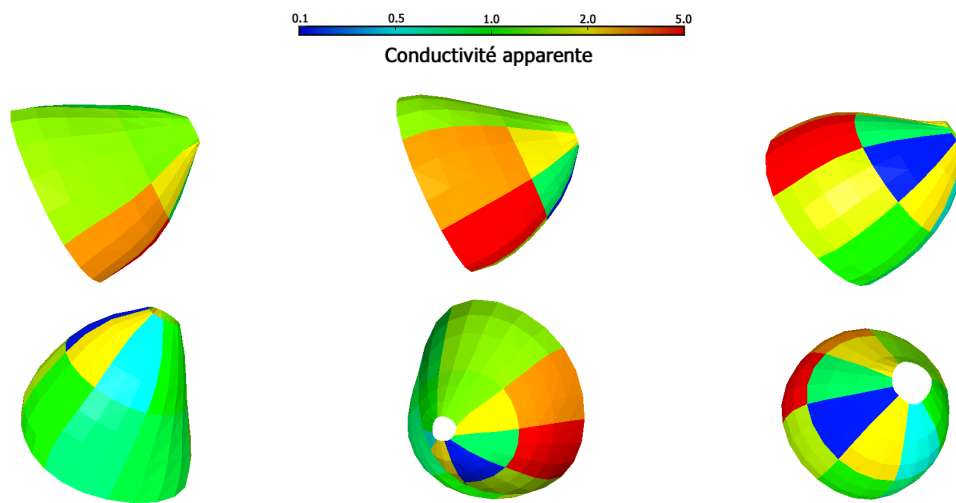


FIG. 5.47 – Carte des valeurs de conductivité apparente obtenue. Différents points de vue.

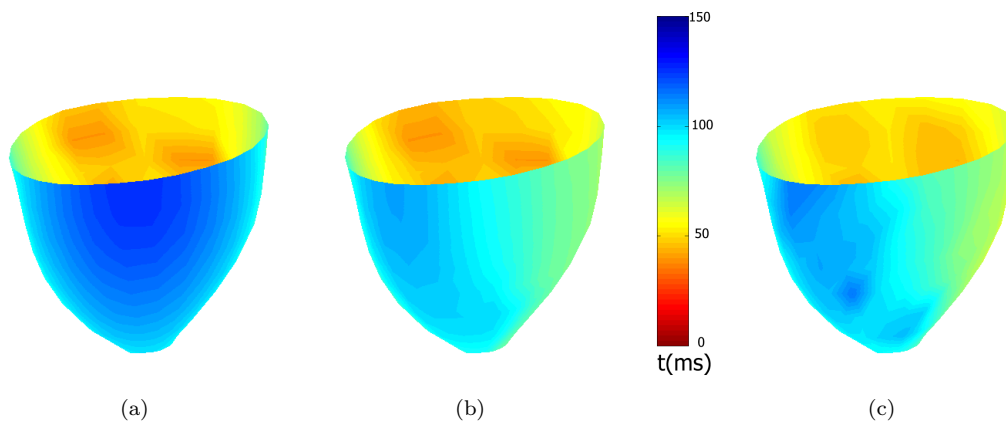


FIG. 5.48 – Temps de dépolarisation avant (a) et après (b) l'estimation locale comparés aux mesures (c).

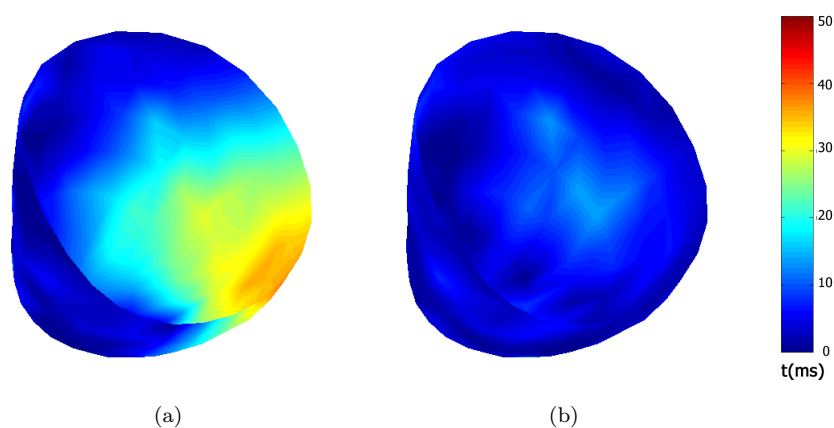


FIG. 5.49 – Erreur absolue sur les temps de dépolarisation avant (a) et après (b) l'estimation locale de la conductivité apparente.

	Erreur moyenne sur les temps de dépolarisation
Par un ajustement manuel	0.0206 s
Avec un ajustement global	0.0109 s
Après l'ajustement global puis local	0.0049 s

TAB. 5.3 – Erreur entre les temps de dépolarisation mesurés et les temps de dépolarisation calculés à partir de la simulation utilisant les paramètres estimés.

De plus nous retrouvons dans la conductivité apparente estimée une dissymétrie présente dans les mesures. La vague se propage plus rapidement d'un côté que de l'autre. Cette dissymétrie a probablement pour origine l'anisotropie de la propagation, conséquence de la distribution des fibres. Nous avons utilisé un modèle simplifié isotrope. Donc l'anisotropie de la propagation doit se refléter sur la carte de conductivité apparente obtenue. Ce qui est bien le cas comme le montre la figure 5.47 : à gauche la conductivité apparente estimée est d'environ 0.9 et à droite de 5.

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section 5.4.3, c'est en comparant les temps de dépolarisation obtenus avec cette nouvelle carte de conductivité apparente aux temps de dépolarisation mesurés que nous pouvons évaluer la qualité de notre estimation. Les temps de dépolarisation ainsi obtenus sont présentés figure 5.48 et comparés au temps de dépolarisation obtenus avec une conductivité apparente constante et avec les temps de dépolarisation mesurés. Nous constatons alors que les formes des isochrones de temps de dépolarisation obtenues sont plutôt proches des isochrones mesurées. La figure 5.49 montre l'erreur absolue sur les temps de dépolarisation avant et après l'estimation locale. Nous constatons une erreur plus faible et mieux répartie sur la surface étudiée.

Le tableau 5.3 résume les erreurs sur les temps de dépolarisation à chaque étape de l'estimation. On constate que l'erreur absolue diminue sensiblement aussi bien après l'ajustement global qu'après l'estimation locale. Pour mieux juger l'amélioration obtenue, nous présentons Figure 5.50 l'histogramme de l'erreur absolue avant et après l'estimation locale de la conductivité apparente. Les erreurs sont plus resserrées autour de 0 après l'estimation locale.

### Cas du cœur infarci

Nous avons ensuite appliqué l'estimation de la conductivité apparente au cas d'un infarctus du mur antérieur. Ce cœur est stimulé artificiellement comme dans le cas du cœur sain présenté ci-dessus. Les temps de dépolarisation mesurés sont présentés Figure 5.51(a). La conduction paraît plus lente dans la région de l'infarctus à cause des modifications locales des propriétés des cellules et de la conductivité du milieu. En conséquence, nous espérons retrouver une conductivité apparente plus faible dans la région infarctée. Les valeurs de conductivité apparente estimées grâce à la méthode proposée sont présentées figure 5.51(b). Les cercles clairs indiquent la localisation de l'infarctus. Les points marqués d'une étoile noire indiquent la région de stimulation. Les temps de dépolarisation calculés après simulation de la propagation du potentiel d'action avec cette nouvelle carte de conductivité apparente sont représentés Figure 5.51(c). Dans la région infarctée, la forme du front de dépolarisation reproduit bien la forme du front de dépolarisation mesuré (Figure 5.51(a)).

Sur la figure 5.51(b), une large portion de l'infarctus est incluse dans les deux régions où la conductivité apparente la plus faible a été estimée. Cependant, on constate qu'une partie de l'infarctus n'est pas détectée de cette manière. La géométrie hétérogène de l'infarctus dans l'épaisseur de la paroi peut expliquer cette observation. En effet un infarctus peut être transmural (i.e. s'étendre de l'endocarde à l'épicarde) ou non (i.e. s'étendre seulement de l'endocarde à quelque part dans l'épaisseur de la paroi). Lorsque nous considérons des points de l'épicarde où l'infarctus n'est pas transmural, la conductivité apparente peut paraître normale. En outre, une faible conductivité apparente est estimée dans certaines régions qui sont pourtant saines. Comme nous l'avons vu dans le premier cas, ceci est probablement dû au modèle isotrope que nous utilisons.

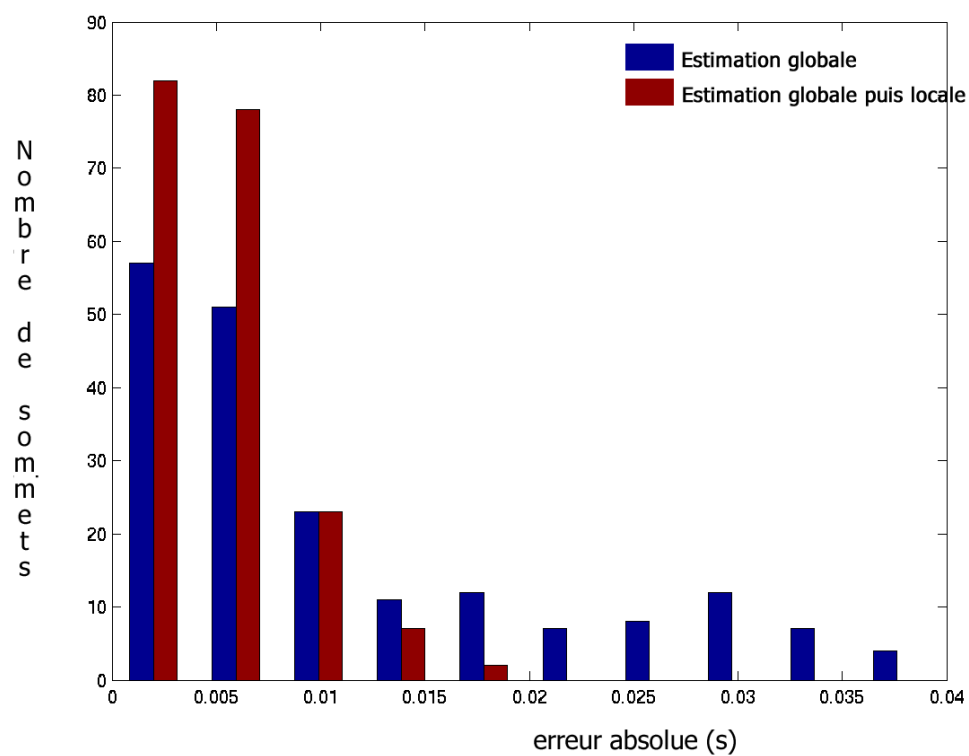


FIG. 5.50 – Histogramme de l'erreur absolue sur les temps de dépolariation. L'erreur obtenue avec l'ajustement global est représentée en bleu et celle obtenue après l'estimation locale est représentée en rouge.



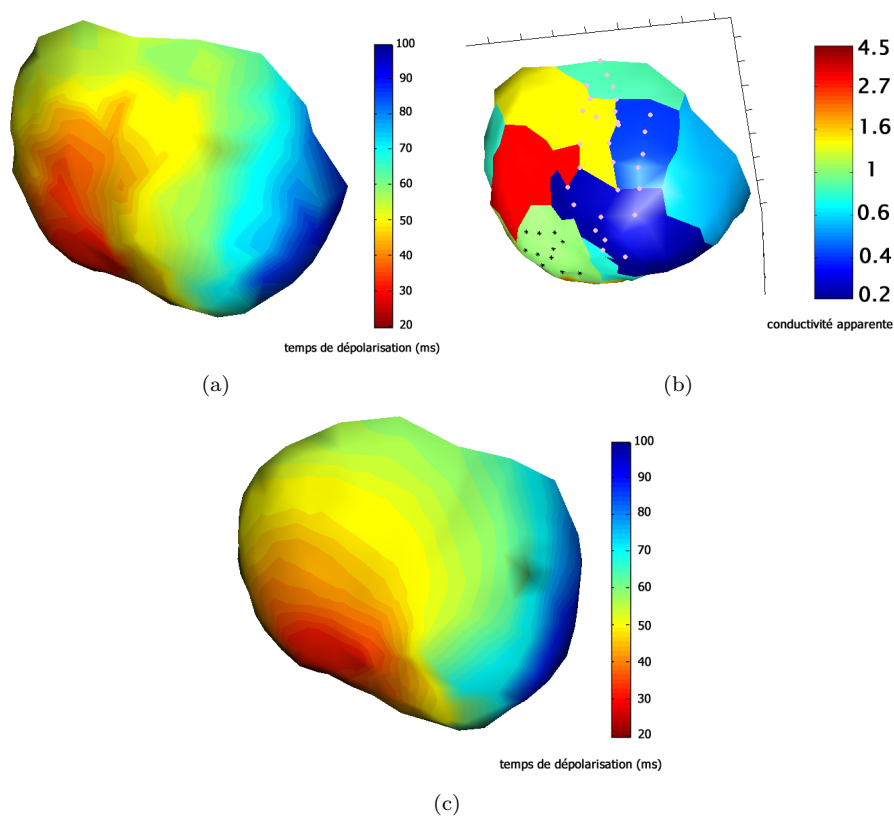


FIG. 5.51 – Estimation de la conductivité apparente dans le cas d'un infarctus antérieur. (a) Temps de dépolarisation mesurés sur l'épicaide d'un cœur de chien ayant subi un infarctus. (b) Conductivité apparente estimée. Les cercles clairs indiquent la localisation de l'infarctus. Les points marqués d'une étoile noire indiquent la région de stimulation. Les temps de dépolarisation calculés grâce à cette nouvelle conductivité apparente sont présentés en (c). Merci au Dr. Ashikaga pour ces données.

## Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse était consacré à l'étude de la contraction cardiaque sous deux angles différents, l'analyse d'images échographiques en modalité TDI d'une part et l'étude de mesures électrophysiologiques en utilisant un modèle électrophysiologique du cœur d'autre part.

Dans la première partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'analyse d'images échocardiographiques pour lesquelles nous disposons en outre d'images de vitesses partielles mesurées par la modalité TDI. Notre objectif était alors de proposer une méthode d'estimation d'un champ de vitesse complet combinant l'information apportée par le TDI et l'information apportée par la séquence échographique classique. Dans un premier temps, nous avons présenté, au cours du chapitre 2, les principes de formation des images échographiques et des images par Doppler tissulaire. Nous avons en particulier décrit la principale caractéristique et difficulté des images ultrasonores, le *speckle*, résultat des différentes interférences entre les échos ultrasonores.

Comme nous l'avons présenté au cours des sections 3.1.1 à 3.1.3, l'état de l'art pour l'estimation de vitesses dans des séquences d'images et en particulier dans des séquences d'images échocardiographiques classiques est déjà riche. Nous avons donc proposé une méthode variationnelle combinant le flot optique calculé par la méthode de Horn et Schunck sur la séquence échographique classique, le TDI et un terme de régularisation spatio-temporelle.

Nous avons ensuite testé cette méthode sur des séquences synthétiques où la vitesse est contrôlée. Nous avons montré sur ces images l'intérêt d'utiliser l'information partielle de vitesse mesurée grâce au TDI. Nous avons ensuite appliqué cette méthode à de vraies séquences. Sur ces séquences, nous avons obtenu des champs de vitesses cohérents avec ce que nous observons dans les images. Nous avons constaté que l'utilisation du TDI et du terme de régularisation spatio-temporelle permet d'obtenir un champ de vitesse plus régulier et plus lisible que le champ obtenu par une simple méthode différentielle de calcul du flot optique.

Dans la dernière partie du chapitre 3, nous nous sommes intéressés aux moyens possibles d'analyser ces résultats. Pour interpréter les champs de vitesses obtenus pour chaque image de la séquence, nous avons choisi d'essayer de classifier le champ de vitesse obtenu pour un ou deux instants significatifs de la séquence, par exemple un instant pendant la systole et un pendant la diastole. Nous nous sommes donc intéressés aux méthodes de segmentation et de classification qui peuvent s'appliquer à un champ de vitesses. Nous avons donc présenté un ensemble de méthodes de classification. Nous avons ensuite tenté une classification d'un champ de vitesse en utilisant la méthode de [SAMSON *et al.*1999] appliquée à la direction du champ de vitesse.

Dans cette première partie, nous avons testé les limites de méthodes d'analyse d'images cardiaques sans utiliser d'information *a priori*. Pour aller plus loin, il est nécessaire d'utiliser des informations *a priori* sur l'anatomie et sur les déformations recherchées. Ces deux types d'informations *a priori* peuvent être introduits naturellement par l'utilisation de modèles biomécaniques du cœur [FRANGI *et al.*2001]. Deux

voies sont envisageables pour utiliser des modèles. La première consiste à utiliser le modèle biomécanique déformable pour segmenter une séquence d'images afin d'en extraire des paramètres quantitatifs de la fonction cardiaque [SERMESANT *et al.*2003b]. La deuxième possibilité est de déformer le modèle pour qu'il corresponde à l'image au premier instant de la séquence puis d'estimer les paramètres du modèle qui permettent au modèle de reproduire l'observation faite sur le patient. L'estimation des paramètres d'un modèle complet qui prend en compte l'activation électrique comme la déformation mécanique est difficile. En effet, le nombre de paramètres à estimer est alors important, tous les paramètres, électriques et mécaniques ne sont pas observables en même temps. Une première étape doit donc nécessairement passer par l'étude du problème électrique et du problème mécanique indépendamment.

**Dans la deuxième partie**, nous nous sommes donc intéressés à l'estimation des paramètres d'un modèle de l'activité électrique des ventricules, le modèle d'Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques. Dans le chapitre 4, nous commençons par présenter le matériel disponible pour effectuer cette étude, c'est-à-dire d'une part les mesures électrophysiologiques disponibles et d'autre part des modèles électrophysiologiques cardiaques qui peuvent être comparés à ces mesures. Nous justifions dans ce chapitre le choix de mesures de potentiels électriques sur l'épicarde et du modèle d'Aliev et Panfilov pour modéliser la propagation du potentiel d'action dans les ventricules. Dans les sections 4.2.3 et 4.2.4, nous avons rassemblé parmi les propriétés qualitatives du modèle d'Aliev et Panfilov celles qui sont utiles pour l'estimation de paramètres. Enfin, nous avons présenté les détails de la mise en œuvre dans la section 4.2.5.

Le chapitre 5 est consacré à l'estimation des paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov. Les méthodes d'assimilation de données présentées en introduction dans la section 5.1 sont toutes basées sur la minimisation de l'écart quadratique entre le modèle et les données. La comparaison du potentiel transmembranaire modélisé par le modèle d'Aliev et Panfilov et du potentiel extracellulaire mesuré n'est pas aisée. Nous avons donc choisi de passer par l'intermédiaire d'une comparaison des temps de dépolarisation et si possible des temps de repolarisation. Nous avons ensuite proposé trois stratégies possibles pour estimer des paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov.

La première stratégie proposée, dans la section 5.2, est l'adaptation du filtre de Kalman étendu au modèle d'Aliev et Panfilov en dimension 1. Pour appliquer cette stratégie, il faut synthétiser un potentiel d'action à partir des temps de dépolarisation et de repolarisation mesurés. L'inconvénient est que l'on traite alors un problème de taille importante, qui s'étend difficilement en dimension supérieure, alors qu'en réalité, on ne compare que les temps de dépolarisation.

La deuxième stratégie proposée, dans la section 5.3, consiste à utiliser les relations entre les paramètres du modèle et la vitesse de propagation ou la durée du potentiel d'action décrites dans la section 4.2. Après avoir calculé la vitesse de propagation à partir des mesures, nous pouvons donc estimer un des paramètres du modèle en dimension 2, les autres étant fixés. Cette méthode s'est révélée efficace pour estimer une valeur de paramètre globale mais n'est pas assez stable pour effectuer une estimation des variations locales des paramètres.

C'est pourquoi nous proposons dans la section 5.4, une minimisation directement de la différence entre les temps de dépolarisation simulés et les temps de dépolarisation mesurés. Pour minimiser cette différence, nous faisons varier localement le coefficient de diffusion. Pour effectuer cette minimisation, en utilisant la causalité de la propagation d'un potentiel d'action sur la surface des ventricules, nous ramenons le problème à des problèmes de minimisation unidimensionnels successifs. Chacune de ces minimisations est ensuite effectuée grâce à la méthode qui évite de calculer la dérivée du temps de dépolarisation en fonction du coefficient de diffusion. Nous appelons le coefficient de diffusion, conductivité apparente car ce coefficient reflète à la fois les variations de conductivité et des paramètres de réaction.

Au final, nous disposons donc d'une estimation d'une carte de conductivité apparente locale surfacique à partir des temps de dépolarisation mesurés. Cette procédure d'estimation est initialisée en utilisant l'estimation globale de la section précédente. Les temps de dépolarisation simulés à l'aide de la nouvelle carte de conductivité apparente estimée se révèlent très proche des temps de dépolarisation mesurés comme nous l'avons montré dans la section 5.3.2. En outre, en testant cette estimation dans le cas d'un cœur infarcté, nous avons trouvé une forte corrélation entre l'infarctus et la région où la conductivité apparente estimée est faible.

**Les principales contributions** de cette thèse ont donc consisté à proposer des solutions à deux problèmes mal posés. Dans la première partie, nous avons montré qu'il est possible d'améliorer les résultats d'estimation de champs de vitesses à partir de séquences échographiques en utilisant la modalité TDI. Nous avons proposé une méthode variationnelle combinant un calcul de flot optique par la méthode Horn et Schunck, la vitesse TDI et une régularisation spatio-temporelle. Cette méthode et les résultats ont donné lieu à deux publications :

- V. Moreau, L. Cohen et D. Pellerin. Deformation field estimation for the cardiac wall using Doppler tissue imaging. Dans T. Katila, I. Magnin, P. Clarysse, J. Montagnat et N. J. (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, Helsinki, Finland, tome 2230 de LNCS, p. 53-60. Springer, 2001.
- V. Moreau, L. Cohen et D. Pellerin. Estimation and analysis of the deformation of the cardiac wall using Doppler tissue imaging. Dans *International Conference on Pattern Recognition*, 2002.

Dans la deuxième partie, nous avons proposé une méthode pour estimer des paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov à partir de mesures électrophysiologiques. Cette estimation se décompose en une phase d'ajustement global puis une phase d'estimation locale. Une première minimisation effectuée grâce à une linéarisation de la fonctionnelle à minimiser a donné lieu à la publication d'un rapport de recherche :

- V. Moreau-Villéger, H. Delingette, M. Sermesant, O. Faris, E. McVeigh et N. Ayache. Global and local parameter estimation of a model of the electrical activity of the heart. Research Report 5269, INRIA, 2004. URL <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5269.html>.

La deuxième méthode de minimisation proposée en utilisant la méthode de Brent, plus efficace et plus stable a donné lieu à deux publications :

- V. Moreau-Villéger, H. Delingette, M. Sermesant, H. Ashikaga, O. Faris, E. McVeigh et N. Ayache. Estimating local apparent conductivity with a 2-D electrophysiological model of the heart. Dans *Proc. of Functional Imaging and Modeling of the Heart 2005 (FIMH'05)*, tome 3504 de LNCS, p. 256-266. Springer, 2005.
- V. Moreau-Villéger, H. Delingette, M. Sermesant, H. Ashikaga, O. Faris, E. McVeigh et N. Ayache. Building maps of local apparent conductivity of the epicardium with a 2D electrophysiological model of the heart. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* [2005]. Accepté.

**Nous présentons maintenant les perspectives** de ce travail. Au cours de la section 3.1.6, nous avons déjà présenté les améliorations possibles de la méthode d'estimation de vitesse proposée en première partie. Il est aussi envisageable d'améliorer l'estimation en combinant la modalité TDI avec des méthodes d'estimation du mouvement plus sophistiquées. Ainsi, les travaux de [MALPICA *et al.*2003] utilisent le TDI dans le cadre de la méthode d'estimation du flot optique de Cohen et Dinstein et les travaux de [SÜHLING *et al.*2004] procèdent de manière similaire avec la méthode de Lucas et Kanade. Estimer les vraies déformations du myocarde ne peut se faire que sur des coupes 2D seulement, il sera nécessaire d'appliquer le même algorithme sur des séquences d'images tridimensionnelles dès que le TDI tridimensionnel sera disponible.

Pour la deuxième partie de la thèse concernant l'estimation des paramètres du modèle d'Aliev et Panfilov, deux extensions sont directement envisageables. L'introduction de l'anisotropie de la propagation, en premier lieu, sera indispensable pour discriminer plus facilement les zones pathologiques. En effet les variations de conductivité apparente sont pour l'instant explicables soit par les pathologies, soit par l'anisotropie. Pour introduire l'anisotropie, on doit introduire la direction des fibres cardiaques. La direction des fibres peut être obtenue par des données de dissection. C'est le cas de celles mesurées par le laboratoire de bioingénierie de l'Université d'Auckland. Ces données ont ensuite été interpolées par l'équipe de A. McCulloch, Université de Californie, San Diego (UCSD) comme celles utilisées dans le modèle de [SERMESANT2003]. Une autre source de donnée est l'imagerie par tenseur de diffusion (Diffu-

sion Tensor Imaging, DTI) [HSU et HENRIQUEZ2001]. Certaines propriétés géométriques ont été observées sur la direction des fibres, ce qui a permis de développer des modèles mathématiques de la direction des fibres [MOURAD *et al.*2001].

En outre, nous nous sommes pour l'instant contentés d'un modèle de propagation surfacique. Il est maintenant nécessaire d'estimer les paramètres d'un modèle de propagation tridimensionnel [SERMESANT2003]. Dans le cadre de ce modèle, la prise en compte de l'anisotropie prendra tout son sens et il ne sera plus nécessaire de se limiter à des cas de stimulation artificielle, ce qui permet en particulier de traiter le cas de patients. Enfin, il sera possible d'utiliser des mesures à la fois sur l'épicarde et sur l'endocarde. Pour effectuer cette extension, il sera nécessaire de disposer d'images anatomiques telles que des IRM pour recaler les surfaces d'électrodes sur un modèle tridimensionnel. La difficulté supplémentaire introduite en dimension 3 sera la répartition des mesures qui n'est pas régulière dans le volume 3D car les mesures sont exclusivement surfaciques.

Une autre direction à poursuivre est l'estimation d'un paramètre supplémentaire en utilisant les temps de repolarisation lorsqu'ils sont disponibles. Cependant, nous ne pouvons plus utiliser la causalité de la propagation directement. La minimisation de l'écart entre le modèle et les mesures est alors plus complexe à effectuer car multidimensionnelle.

Les deux méthodes que nous avons proposé pour minimiser, en fonction d'un paramètre qui varie localement, l'écart quadratique entre modèle et mesures ne nécessitent que des simulations du modèle direct. Un peu à la manière des filtres particuliers (Section 5.1.3), le modèle peut être considéré comme une boîte noire. Les méthodes proposées devraient donc pouvoir s'étendre à des modèles plus complexes de l'activité cardiaque. Ainsi, comme nous ne disposons que de temps de dépolarisation, une piste intéressante serait de procéder à une estimation de paramètres pour des modèles de type équation eikonale. De premiers résultats d'estimation de paramètres, avec des simulations utilisant la méthode de "Fast Marching" ont été publiés dans [SERMESANT *et al.*2005a]. Enfin, puisqu'on mesure des potentiels extracellulaires, l'estimation des paramètres d'un modèle bidomaine permettrait d'utiliser des méthodes classiques.

Pour rendre plus largement utilisable la méthode que nous proposons, nous devons la mettre en œuvre sur des données acquises de manière moins invasive et en particulier sur des mesures endocardiques acquises grâce à des systèmes intracavitaires avec et même sans contact. Une perspective à plus long terme serait d'utiliser des mesures absolument non invasives telles que des électrocardiogrammes. Ceci pourrait se faire en utilisant les potentiels obtenus par l'inversion de la propagation dans le thorax comme par exemple par la méthode proposée par [RUDY2003].

Pour terminer, l'objectif final du travail présenté est d'être capable d'estimer les paramètres d'un modèle complet comprenant à la fois la partie électrique et la partie mécanique. Pour cela, l'étape suivante est l'étude de la partie mécanique. Dans [SHI et LIU2003], les auteurs s'intéressent à l'estimation des paramètres d'un modèle passif du cœur. Dans [SAINTE-MARIE *et al.*2003, CHAPPELLE *et al.*2004, SERMESANT *et al.*2005b] les auteurs s'intéressent aux moyens d'estimer les paramètres d'un modèle électromécanique actif du cœur à partir d'images de déplacements comme les IRM marquées. A long terme, on peut espérer parvenir à estimer la séquence d'activation électrique à partir d'images de déplacements, séquence d'activation à laquelle nous pourrions appliquer la méthode proposée.

# Diffusion

## A.1 Principe

Aussi bien pour la régularisation d'images que pour la régularisation de champ de vecteurs, nous avons été amenés à nous intéresser à la diffusion. La diffusion correspond à la minimisation d'un terme de la forme

$$J(u) = \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 \tag{A.1}$$

où  $u$  désigne la quantité à minimiser. Ce critère est minimum lorsque le gradient de  $J$  par rapport à  $u$  est nul. L'équation d'Euler-Lagrange est :

$$\nabla J(u) = 0$$

$\nabla J$  désigne la dérivée au sens de Gâteaux de la fonctionnelle  $J$ . Pour déterminer cette dérivée, on doit calculer la quantité

$$J(u + tv) - J(u)$$

avec  $v$  un vecteur et  $t$  un nombre réel.

$$\begin{aligned} J(u + tv) &= \int_{\Omega} \|\nabla(u + tv)\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla u + t\nabla v\|^2 \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 + 2t\nabla u \cdot \nabla v + o(t) \\ &= J(\nabla u) - 2t \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u)v + o(t) \end{aligned}$$

Ce qui donne  $\nabla J(u) = -2 \operatorname{div}(\nabla u) = -2\Delta u$ . La minimisation de la norme  $L^2$  du gradient est donc équivalente à la résolution de  $\Delta u = 0$ . L'opérateur laplacien est connu pour rendre détruire des caractéristiques importantes de l'image comme les bords en un temps de diffusion très court.

L'idée proposée à l'origine dans [PERONA et MALIK1990] est d'introduire une rétroaction dans le processus qui permet d'adapter la diffusion au gradient de l'image à l'instant  $t$ . L'équation  $\Delta u = 0$  devient alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(g(|\nabla u|^2)\nabla u) \tag{A.2}$$

méthode	fonction de diffusion $g(s^2)$	potentiel $\Psi(s)$
Diffusion linéaire	$g(s^2) = 1$	$\Psi(s) = \frac{s^2}{2}$
Perona-Malik [PERONA et MALIK1990]	$g(s^2) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}$	$\Psi(s) = \frac{\lambda^2}{2} \ln(1 + \frac{s^2}{\lambda^2})$
Charbonnier [CHARBONNIER <i>et al.</i> 1994]	$g(s^2) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}}$	$\Psi(s) = \sqrt{\lambda^4 + \lambda^2 s^2} - \lambda^2$
Variation totale	$g(s^2) = \frac{1}{s}$	$\Psi(s) = s$

TAB. A.1 – Fonctions de diffusion

avec

$$g(s^2) = \frac{1}{1 + \frac{s^2}{\lambda^2}}$$

L'équation (A.2) peut aussi se traduire sous la forme d'un problème de minimisation comme (A.1).

$$\min_u \int_{\Omega} \Psi(|\nabla u|) dx dy$$

avec une fonction  $\Psi$  bien choisie appelée potentiel.

[WEICKERT1997] présente un certain nombre de fonctions de diffusion. Nous en présentons quelques unes dans le tableau A.1. La figure A.1 montre les différents effets de ces fonctions de diffusion.

## A.2 Diffusion anisotrope matricielle

La diffusion du type "Perona Malik" (Equation (A.2)) est une diffusion non linéaire car le terme  $g(s^2)$  est un scalaire. Elle permet de régulariser différemment en différents points de l'image mais la régularisation est la même dans toutes les directions. Lorsqu'une image est bruitée, on obtient alors des bords dans l'image qui restent marqués par le bruit. Dans [WEICKERT1997], Weickert propose une régularisation privilégiée dans la direction du bord de l'image. On construit alors le tenseur de diffusion  $D$  ayant pour vecteurs propres  $v_1$  et  $v_2$  avec  $v_1$  parallèle au gradient régularisé de l'image  $\nabla I_{\sigma}$  et  $v_2$  dans la direction orthogonale. Pour obtenir une régularisation privilégiée dans la direction du gradient, les valeurs propres associées  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  peuvent être prises de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= g(|\nabla I_{\sigma}|^2) \\ \lambda_2 &= 1 \end{aligned}$$

où on note  $\nabla I_{\sigma}$  le gradient régularisé par une convolution avec une gaussienne d'écart type  $\sigma$  de l'image  $I$  et  $g$  une fonction de diffusion. Nous pouvons voir l'effet régularisant sur les contours dans l'exemple de la figure A.2.

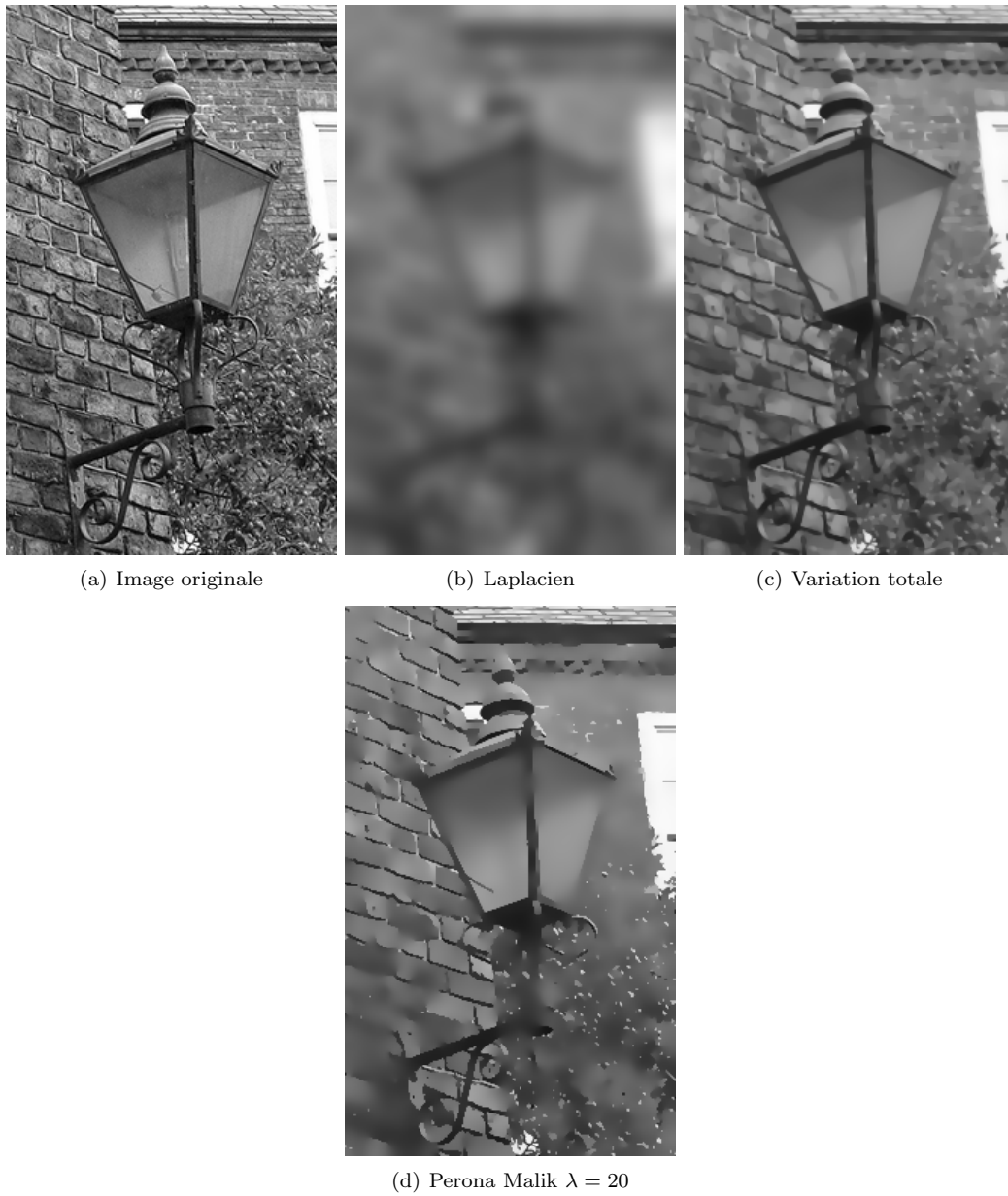


FIG. A.1 – Effet de différentes fonctions de diffusion  $g$ . Pas de temps 0.3, 100 itérations



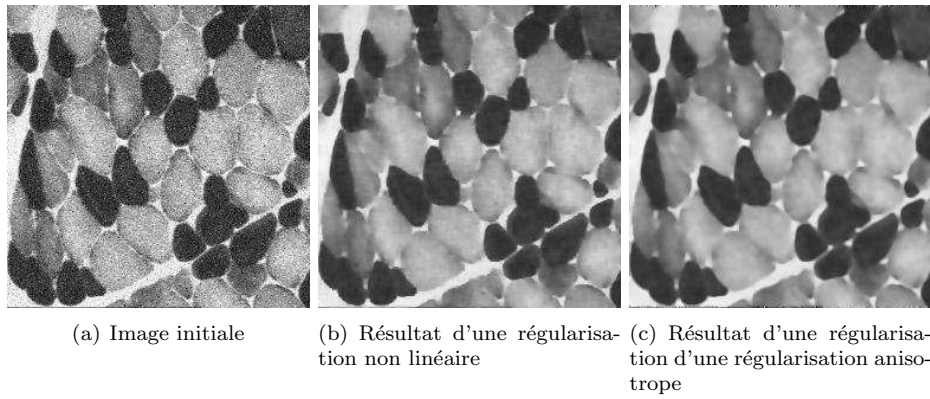


FIG. A.2 – Comparaison des régularisations non linéaire scalaire et anisotrope matricielle sur une image représentant des cellules musculaires. Alors que dans l'image régularisée (b) les contours des cellules sont encore bruités, dans l'image régularisée avec le tenseur de diffusion (c), les bords aussi sont régularisés.

## Démonstration de la coercivité de la forme bilinéaire associée au problème de Horn et Schunck

La coercivité de la fonctionnelle de Horn et Schunck ( $a_{HS}$  de la section 3.1.2) est démontré dans [SCHNÖRR1991] dans le cas d'un domaine  $\Omega$  de forme quelconque et donc éventuellement irrégulière. Cette démonstration est basée sur une proposition qui constitue une sorte d'inégalité de Poincaré ([BREZIS1983]). Reprenant les notations de la section 3.1.2,  $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ . ([BREZIS1983]). Reprenant les notations de la section 3.1.2,  $V = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

**Proposition B.1** *Il existe une constante  $C(\Omega)$  telle que  $\forall u = (u^1, u^2) \in V$ ,  $\int_{\Omega} (u(x) - \mu)^2 dx \leq C(\Omega) \int_{\Omega} |\nabla u|^2$  où  $|\Omega| = \int_{\Omega} dx$  et  $\mu = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) dx$*

La démonstration de cette proposition est en annexe dans [SCHNÖRR1991].

A partir de cette proposition, on peut démontrer par l'absurde que la forme bilinéaire  $a_{HS}$  est coercive.

Supposons donc que la forme ne soit pas coercive, alors il existe une suite  $(u_n)_n$  dans  $V$  dont les éléments ont pour norme  $L^2$  1 et telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a(u_n, u_n) = 0$ . On note  $u_n^1$  et  $u_n^2$  les deux coordonnées de  $u_n$ . Mais alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx = 0$  et donc d'après la proposition B.1,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_n^1(x) - \mu_n^1)^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (u_n^2(x) - \mu_n^2)^2 dx = 0$  où

$$\mu_n^i = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u_n^i(x) dx$$

pour  $i \in \{1, 2\}$ .

Or

$$\int_{\Omega} \beta(I_x u^1 + I_y u^2)^2 dx \leq 2\|\beta I_x\|_{\infty} \int_{\Omega} (u^1)^2 dx + 2\|\beta I_y\|_{\infty} \int_{\Omega} (u^2)^2 dx$$

donc

$$\int_{\Omega} \beta(I_x(u_n^1 - \mu_n^1) + I_y(u_n^2 - \mu_n^2))^2 dx \leq 2\|\beta I_x\|_{\infty} \int_{\Omega} (u_n^1 - \mu_n^1)^2 dx + 2\|\beta I_y\|_{\infty} \int_{\Omega} (u_n^2 - \mu_n^2)^2 dx$$

et tend donc vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Donc

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1 + I_y \mu_n^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \int_{\Omega} \beta(I_x u_n^1 + I_y u_n^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} \beta(I_x(\mu_n^1 - u_n^1) + I_y(\mu_n^2 - u_n^2))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (a(u_n, u_n))^{\frac{1}{2}} + \left( \int_{\Omega} \beta(I_x(\mu_n^1 - u_n^1) + I_y(\mu_n^2 - u_n^2))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donc tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Mais

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1 + I_y \mu_n^2)^2 dx &= \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx + \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx + 2(\beta I_x \mu_n^1, I_y \mu_n^2)_0 \\
&\geq \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx + \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \\
&\quad - 2 \left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \frac{|(\beta I_x \mu_n^1, I_y \mu_n^2)_0|}{\left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} \\
&\geq \left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx + \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \right) \times \left( 1 - \frac{|(\beta I_x \mu_n^1, I_y \mu_n^2)_0|}{\left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \\
&= \left( \int_{\Omega} \beta(I_x \mu_n^1)^2 dx + \int_{\Omega} \beta(I_y \mu_n^2)^2 dx \right) \times \left( 1 - \frac{|(\sqrt{\beta} I_x, \sqrt{\beta} I_y)_0|}{\left( \int_{\Omega} \beta(I_x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \beta(I_y)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} \right)
\end{aligned}$$

Par le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz,  $|(u, v)| = |u||v|$  si et seulement si  $u$  et  $v$  sont colinéaires.

On fait l'hypothèse que  $\sqrt{\beta} I_x$  et  $\sqrt{\beta} I_y$  ne sont pas colinéaires. (Cette hypothèse est valide dans le cas des mouvements naturels, les deux vecteurs ne sont colinéaires que dans des cas géométriques très particuliers)

Donc

$$\left( 1 - \frac{|(\sqrt{\beta} I_x, \sqrt{\beta} I_y)_0|}{\left( \int_{\Omega} \beta(I_x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} \beta(I_y)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} \right) > 0$$

et ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n^1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_n^2 = 0$ .

Ce qui conduit à une contradiction car  $|u_n|_1 \leq |u_n - \mu_n|_1 + |\mu_n|_1 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

## Assimilation de données et problème inverse dans le cas d'un problème statique

Dans cette annexe nous présentons le problème d'assimilation de données statiques, i.e. trouver le meilleur compromis possible entre une observation et une prédiction à un même instant fixé de l'état d'un système. Au cours de cette présentation nous introduirons au fur et à mesure le vocabulaire de l'assimilation de données.

- Soit  $\mathbf{X}$  l'état du système étudié à un instant fixé. On suppose que l'on dispose
- d'une observation  $\mathbf{Y}$  du système à cet instant,
  - et d'une prédiction  $\mathbf{X}^p$  de l'état du système à cet instant

L'observation est reliée à l'état réel du système par **un opérateur d'observation**  $\mathcal{H}$  qui, dans le cas idéal, est linéaire. De plus l'observation, qui est issue d'un appareil de mesure, est bruitée. On suppose que ce bruit est un bruit gaussien de moyenne nulle et de matrice de covariance connue  $\mathbf{R}$ . Ce qui donne la relation

$$\mathbf{Y} = \mathcal{H}\mathbf{X} + \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est une réalisation de la gaussienne modélisant le bruit de mesure. L'estimateur optimal  $\mathbf{X}^a$  de l'état du système correspond à l'état minimisant la somme d'une distance aux observations et d'une distance à la prévision, i.e.

$$J(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}[\mathbf{X} - \mathbf{X}^p]^T (\mathbf{P}^p)^{-1} [\mathbf{X} - \mathbf{X}^p] + \frac{1}{2}[\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{X}]^T \mathbf{R}^{-1} [\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{X}] \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{P}^p$  désigne la **matrice de covariance de l'erreur commise sur l'estimation de l'état  $\mathbf{X}$  par  $\mathbf{X}^p$** .

On démontre alors que le minimum de  $J$  est obtenu en ajoutant à l'état estimé une modification dépendant de l'écart entre l'état estimé et les observations,  $\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{X}^p$  :

$$\mathbf{X}^a = \mathbf{X}^p + \mathbf{K}[\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{X}^p]$$

où  $\mathbf{K}$  est une matrice appelée gain.  $\mathbf{X}^a$  est alors appelé **état analysé**. Le terme  $\mathbf{K}[\mathbf{Y} - \mathcal{H}\mathbf{X}^p]$  est appelé innovation. Le gain  $\mathbf{K}$  est calculé pour optimiser la fonctionnelle  $J$ . Pour minimiser la fonctionnelle (C.1), le gain  $\mathbf{K}$  est :

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^p \mathcal{H}^T (\mathcal{H} \mathbf{P}^p \mathcal{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (\text{C.2})$$

La nouvelle matrice de covariance de l'erreur commise sur l'estimation de l'état  $\mathbf{X}$  par l'état analysé  $\mathbf{X}^a$  est donnée par

$$\mathbf{P}^a = \mathbf{P}^p + \mathbf{K} \mathcal{H} \mathbf{P}^p$$

Pour une démonstration détaillée de ces résultats, le lecteur pourra consulter les ouvrages de référence [MAYBECK1979, JAZWINSKI1970]. L'optimalité de cette estimation n'est garantie que pour le cas où l'observation  $\mathcal{H}$  est bien linéaire. En outre, l'expression donnant l'état analysé peut paraître assez simple mais peut devenir très coûteuse pour un vecteur d'état de taille importante.

# Tutoriel Kalman

Grâce à l'exemple d'un système ponctuel très simple, nous allons montrer comment fonctionne un filtre de Kalman. Soit une masse  $m$  suspendue à un ressort de raideur  $k$ . On dispose d'un modèle du système :

$$\begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ m\ddot{x} + kx &= 0 \end{aligned}$$

On mesure la position de la masse à différents instants  $(\theta_l)_{0 \leq l \leq L-1}$ , ce qui donne les mesures suivantes :  $\{x(\theta_l)\}_{0 \leq l \leq L-1}$

L'objectif est d'estimer l'état de ce système à chaque instant et les paramètres  $(m, k)$  à partir des mesures et du modèle.

## D.1 Estimation de l'état

Pour présenter le fonctionnement d'un filtre de Kalman linéaire, on s'intéresse d'abord à l'estimation de l'état. Le vecteur d'état est :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Avec ces notations, les équations régissant le système masse-ressort s'écrivent :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{B}\mathbf{X}$$

où

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit  $(t_k)_k$ , une discrétisation de l'intervalle  $[0; T]$ . Une fois discrétisé en temps par un schéma Euler explicite, le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t_0) &= \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}(t_k) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t_{k-1}) \end{aligned}$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & dt \\ -\omega^2 dt & 1 \end{bmatrix}$$

Les observations sont les positions, la matrice d'observation  $\mathbf{H}$  est donc la matrice de projection  $\mathbf{H} = [1, 0]$ . On applique alors le filtre de Kalman classique (section 5.1.3).

On considère un coefficient  $\omega = k/m = 0.75$ . La réponse théorique du système masse-ressort avec une position initiale de 0 et une vitesse initiale de  $\omega$  est présentée sur la figure D.1(a). On a bruité ce signal avec un bruit gaussien de variance  $\sigma^2 = 0.2^2$  pour simuler le bruit d'un capteur (Figure D.1(b)). On suppose la fréquence du signal connue. Dans cet exemple, une mesure est disponible pour chaque instant  $t_k$  de la discrétisation,  $T = 20$  et  $dt = 0.01$ . Les conditions initiales sont :

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2 \end{bmatrix}$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

On connaît la variance du bruit d'observation que l'on a introduit, on peut donc prendre  $R = [\sigma^2]$ . Plus généralement,  $R$  joue le rôle de régulateur entre modèle et mesures et peut être fixé arbitrairement pour donner un poids plus important aux données ou au modèle en fonction de la confiance que l'on a en chacun d'eux. La figure D.2 montre que quand  $R$  augmente, l'état se rapproche du modèle au bout d'un temps plus long.

## D.2 Estimation des paramètres

Pour estimer des paramètres, la première question à poser est celle de leur observabilité. Dans ce cas, une simple observation du modèle montre que  $m$  et  $k$  ne sont pas estimables simultanément. En effet, l'équation

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

est équivalente à l'équation

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Nous estimons donc  $\omega = \frac{k}{m}$ . Le paramètre estimé est introduit dans le vecteur d'état :

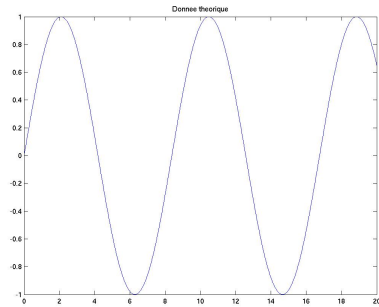
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

L'équation du modèle doit être complétée par une équation d'évolution du paramètre. Le paramètre ne doit pas être modifié pendant la prédiction, donc  $\omega^{k+1} = \omega^k$ . L'opérateur  $M$  devient donc

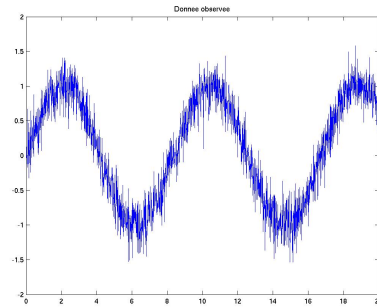
$$M : \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x + dt\dot{x} \\ dtx\omega^2 + \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

La fonction  $M$  est non linéaire, il faut donc utiliser un filtre de Kalman étendu, c'est-à-dire qu'il faut remplacer  $M$  par sa linéarisée en l'état courant dans les équations de mise à jour de la matrice de covariance. La linéarisée  $\mathbf{M}_k$  de  $M$  en  $\mathbf{X}(t_k)$  est donnée par :

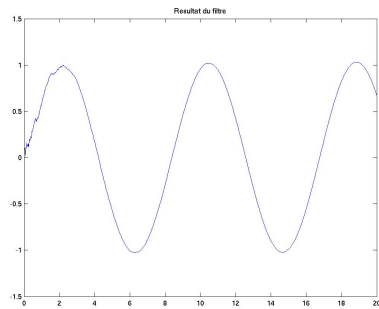
$$\mathbf{M}_k \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & dt & 0 \\ \omega^2 dt & 1 & 2\omega dt x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$



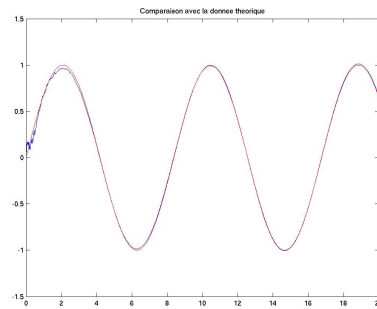
(a) Signal théorique



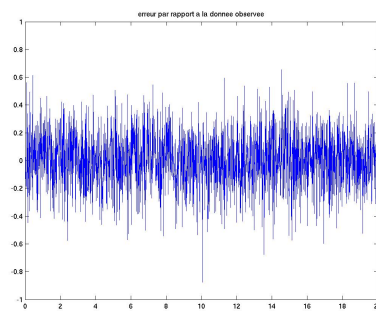
(b) Signal observé



(c) Résultat du filtre de Kalman avec des paramètres optimaux



(d) Comparaison entre le signal retrouvé et le signal théorique. En rouge le signal théorique et en bleu le signal estimé.



(e) Différence entre le signal bruité "observé" et le signal retrouvé

FIG. D.1 – Application du filtre de Kalman au système masse-ressort.



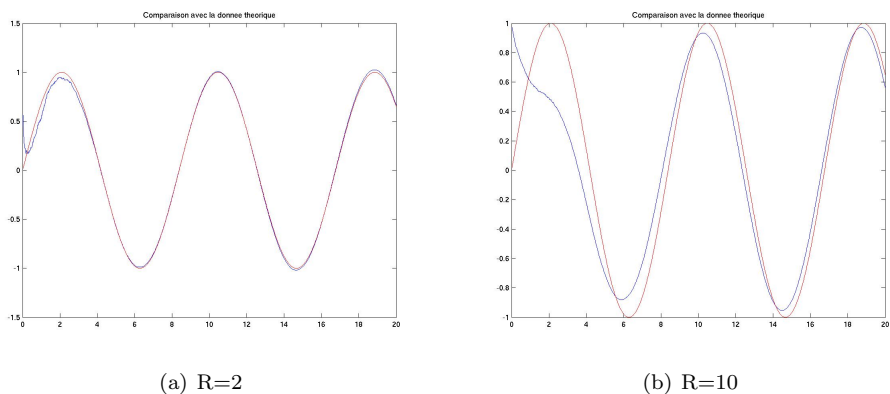


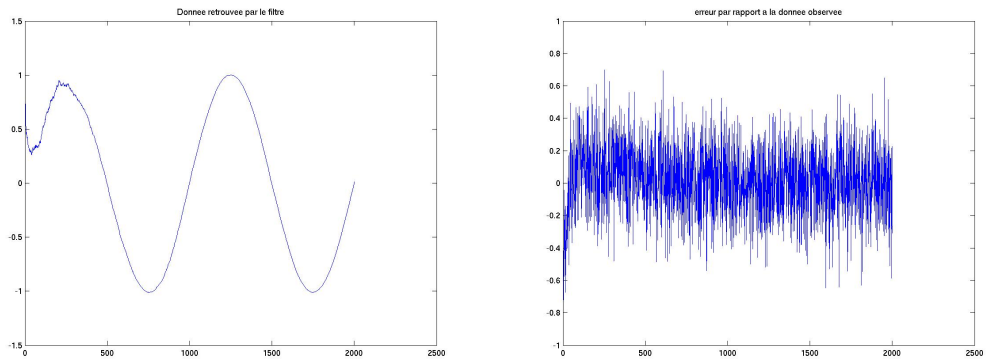
FIG. D.2 – Signal obtenu pour deux valeurs différentes de  $R$ . En rouge le signal théorique et en bleu le signal estimé.

L'opérateur d'observation est  $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

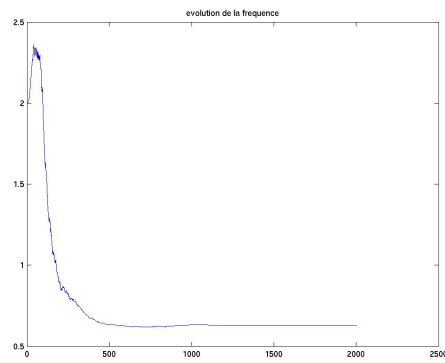
On doit choisir un vecteur initial  $\mathbf{X}_0$ , et une matrice de covariance initiale

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Pour la mise en œuvre pratique, les paramètres sont les suivants. Les données sont les mêmes que dans la section précédente. Les conditions initiales  $x_0 = 1$ ,  $\dot{x}_0 = 2$  et  $\omega_0 = 2$ .  $P_0$  est la matrice diagonale de diagonale [155] et  $R = 2^2$ . La figure D.3(a) montre le résultat du filtre et la figure D.3(b) montre l'erreur par rapport aux observations. Enfin, la figure D.3(c) montre l'évolution du paramètre  $\omega$  au cours de l'évolution du filtre.



(a) Résultat du filtrage de Kalman avec estimation de paramètres  
 (b) Erreur du filtrage de Kalman avec estimation de paramètres par rapport au signal observé



(c) Evolution du paramètre au cours du filtrage



# Bibliographie

- [ADALSTEINSSON et SETHIAN1995] D. ADALSTEINSSON et J. SETHIAN. A fast level set method for propagating interfaces. *Journal of Computational Physics*, 118(2) : p. 269–277 [1995].
- [ADALSTEINSSON et SETHIAN1999] D. ADALSTEINSSON et J. SETHIAN. The fast construction of extension velocities in level set methods. *Journal of Computational Physics*, 148(1) : p. 2–22 [1999].
- [ALIEV et PANFILOV1996] R. ALIEV et A. PANFILOV. A simple two-variables model of cardiac excitation. *Chaos, Soliton and Fractals*, 7(3) : p. 293–301 [1996].
- [ALLOUCHE *et al.*2001] C. ALLOUCHE, S. MAKRAM, N. AYACHE et H. DELINGETTE. A new kinetic modeling scheme for the human left ventricle wall motion with mr-tagging imaging. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 61–68. Springer [2001].
- [AMADIEU *et al.*2000] O. AMADIEU, E. DEBREUVE, M. BARLAUD et G. AUBERT. Segmentation par contours actifs déformables. approche bidirectionnelle. Dans *12ème Congrès francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'00)* [2000].
- [ANDERSON et TRAHEY2000] M. ANDERSON et G. TRAHEY. A seminar on  $k$ -space applied to medical ultrasound [2000]. URL <http://dukemil.egr.duke.edu/Ultrasound/k-space/bme265.htm>.
- [ANGELINI *et al.*2001] E. ANGELINI, A. LAINE, S. TAKUMA, J. HOLMES et S. HOMMA. Lv volume quantification via spatiotemporal analysis of real-time 3-d echocardiography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(6) : p. 457–469 [2001].
- [AUBERT *et al.*2000] G. AUBERT, R. DERICHE et P. KORNPBST. Computing optical flow via variational techniques. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 60(1) : p. 156–182 [2000].
- [AUJOL et AUBERT2002] J. AUJOL et G. AUBERT. Signed distance functions and viscosity solutions of discontinuous hamilton-jacobi equations. Rapport de recherche 4507, INRIA [2002].
- [AUROUX et BLUM2005] D. AUROUX et J. BLUM. Data assimilation methods for an oceanographic problem. Dans V. CAPASSO et J. PÉRIAUX (Rédacteurs), *Multidisciplinary Methods for Analysis, Optimization and Control of Complex Systems*, tome 6 de *Mathematics in Industry*, p. 179–194. Springer [2005].
- [AXEL *et al.*2005] L. AXEL, A. MONTILLO et D. KIM. Tagged magnetic resonance imaging of the heart : a survey. *Medical Image Analysis*, 9(4) : p. 376–393 [2005].
- [AYACHE *et al.*2001] N. AYACHE, D. CHAPPELLE, F. CLÉMENT, Y. COUDIÈRE, H. DELINGETTE, J. DÉSIDÉRI, M. SERMESANT, M. SORINE et J. URQUIZA. Towards model-based estimation of the cardiac electro-mechanical activity from ECG signals and ultrasound images. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 120–127. Springer [2001].

- [BAILLARD *et al.*2000] C. BAILLARD, C. BARILLOT et P. BOUTHEMY. Robust adaptative segmentation of 3d medical images with level sets. Dans *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'00)*, tome 1935 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 236–245. Springer [2000].
- [BARALDI *et al.*1996] P. BARALDI, A. SARTI, C. LAMBERTI, A. PRANDINI et F. SGALLARI. Evaluation of differential optical flow techniques on synthesized echo images. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 43(3) : p. 259–272 [1996].
- [BARDINET *et al.*1996] E. BARDINET, L. COHEN et N. AYACHE. Tracking and motion analysis of the left ventricle with deformable superquadrics. *Medical Image Analysis*, 1(2) [1996].
- [BARDOU *et al.*1996] A. L. BARDOU, P. M. AUGER, P. J. BIRKUI et J.-L. CHASSÉ. Modeling of cardiac electrophysiological mechanisms : from action potential genesis to its propagation in myocardium. *Critical Reviews in Biomedical Engineering*, 24 : p. 141–221 [1996].
- [BARRON *et al.*1994] J. BARRON, D. FLEET et S. BEACHEMIN. Performance of optical flow techniques. *International Journal of Computer Vision*, 12 : p. 43–77 [1994].
- [BEELER et REUTER1977] G. BEELER et H. REUTER. Reconstruction of the action potential of ventricular myocardial fibres. *Journal of Physiology*, 268(1) : p. 177–210 [1977].
- [BELIK et MCCULLOCH2004] M. BELIK et A. MCCULLOCH. Computational methods for cardiac electrophysiology. Dans N. AYACHE (Rédacteur), *Computational Models for the Human Body*, Handbook of Numerical Analysis. Elsevier [2004].
- [BERNUS *et al.*2002] O. BERNUS, R. WILDERS, C. ZEMLIN, H. VERSCHELDE et A. PANFILOV. A computationally efficient electrophysiological model of human ventricle cells. *American Journal of Physiology. Heart and Circulation Physiology*, 282(6) : p. 2296–2308 [2002].
- [BERTINO *et al.*2003] L. BERTINO, G. EVENSEN et H. WACKERNAGEL. Sequential data assimilation techniques in oceanography. *International Statistical Review*, 71 : p. 223–241 [2003].
- [BESTEL *et al.*2001] J. BESTEL, F. CLÉMENT et M. SORINE. A biomechanical model of muscle contraction. Dans W. NIESSEN et M. VIERGEVER (Rédacteurs), *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'01)*, tome 2208 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 83–90. Springer [2001].
- [BLAKE et ZISSERMAN1987] A. BLAKE et A. ZISSERMAN. *Visual Reconstruction*. MIT Press [1987].
- [BLANC-FÉRAUD2000] L. BLANC-FÉRAUD. Sur quelques problèmes inverses en traitement d'image. Habilitation à diriger des recherches (HDR) [2000].
- [BOUKERROU *et al.*2003] D. BOUKERROU, J. NOBLE et M. BRADY. Velocity estimation in ultrasound images : a block matching approach. Dans C. TAYLOR et J. NOBLE (Rédacteurs), *Information Processing in Medical Imaging (IPMI'03)*, numéro 2732 dans *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 586–598. Springer [2003].
- [BRENT1973] R. BRENT. *Algorithms for minimization without derivatives*. London Academic Press [1973].
- [BREZIS1983] H. BREZIS. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson [1983].
- [BRITTON1986] N. BRITTON. *Reaction-diffusion system and their applications to biology*. Academic Press [1986].
- [BRUSDAL *et al.*2003] K. BRUSDAL, J. BRANKART, G. HALBERSTADT, G. EVENSEN, P. BRASSEUR, P. VAN LEEUWEN, E. DOMBROWSKI et J. VERRON. A demonstration of ensemble based assimilation methods with a layered OGCM from the perspective of operational ocean forecasting systems. *Journal of Marine Systems*, 40-41 : p. 253–289 [2003].
- [BURNES *et al.*2000] J. BURNES, B. TACCARDI et Y. RUDY. A noninvasive imaging modality for cardiac arrhythmias. *Circulation*, 102 : p. 2152–2158 [2000].
- [CANNY1983] J. CANNY. Finding edges and lines in images. Rapport technique AI-TR-720, Artificial Intelligence Laboratory, MIT [1983].

- [CASELLES *et al.*1993] V. CASELLES, F. CATTE, T. COLL et F. DIBOS. A geometric model for active contours. *Numerische Mathematik*, 66 : p. 1–31 [1993].
- [CASELLES *et al.*1997] V. CASELLES, R. KIMMEL et G. SAPIRO. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1) : p. 61–79 [1997].
- [CHAN et VESE1999] T. CHAN et L. VESE. An active contour model without edge. Dans *International Conference Scale-Space Theories in Computer Vision* [1999].
- [CHAPELLE *et al.*2001] D. CHAPELLE, F. CLÉMENT, F. GÉNOT, P. LE TALLEC, M. SORINE et J. URQUIZA. A physiologically-based model for the active cardiac muscle contraction. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 128–133. Springer [2001].
- [CHAPELLE *et al.*2004] D. CHAPELLE, J. SAINTE-MARIE et R. CIMRMAN. Modeling and estimation of the cardiac electromechanical activity. Dans *Fourth European Congress on Computational Methods in Applied Sciences (ECCOMAS'04)* [2004].
- [CHARBONNIER *et al.*1994] P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et M. BARLAUD. Two deterministic half-quadratic regularization algorithms for computed imaging. Dans *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'94)*, p. 168–172 [1994].
- [CHAVENT1974] G. CHAVENT. Identification of functional parameters in partial differential equations. Dans R. E. GOODSON et M. POLIS (Rédacteurs), *Identification of Parameters in Distributed Systems*, p. 31–48. ASME, New York [1974].
- [CLARYSSE *et al.*2001] P. CLARYSSE, P. CROISILLE, L. BRACOUUD et I. MAGNIN. Integrated quantitative analysis of tagged magnetic resonance images. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et N. J. (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, tome 2230 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer [2001].
- [CLARYSSE *et al.*2000] P. CLARYSSE, C. B. L. KHOUAS, P. CROISILLE, D. FRIBOULET, C. ODET et I. MAGNIN. 2d spatial and temporal displacement and deformation field fitting from cardiac MR tagging. *Medical Image Analysis*, 4 : p. 253–268 [2000].
- [CLÉMENT *et al.*2004] F. CLÉMENT, N. KHVOENKOVA, A. CARTALADE et P. MONTARNAL. Analyse de sensibilité et estimation de paramètres de transport pour une équation de diffusion, approche par état adjoint. Rapport de recherche 5132, INRIA [2004].
- [COHEN et DINSTEIN2002] B. COHEN et I. DINSTEIN. New maximum likelihood motion estimation schemes for noisy ultrasound images. *Pattern recognition*, 35(2) : p. 455–463 [2002].
- [COHEN1991] L. COHEN. On active contour models and balloons. *Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 53(2) : p. 211–218 [1991].
- [COHEN *et al.*1996] L. COHEN, F. PAJANY, C. VEYRAT et D. PELLERIN. Cardiac wall tracking using doppler tissue imaging. Dans *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'96)*, tome 3, p. 295–298 [1996].
- [COHN et TODLING1995] S. COHN et R. TODLING. Approximate kalman filters for unstable dynamics. Dans *2nd International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography*, p. 241–246 [1995].
- [COHN et TODLING1996] S. COHN et R. TODLING. Approximate data assimilation schemes for stable and unstable dynamics. *Journal of the Meteorological Society of Japan*, 74 : p. 63–75 [1996].
- [COLLI-FRAZONE et GUERRI1993] P. COLLI-FRAZONE et L. GUERRI. Spreading of excitation in 3d models of anisotropic cardiac tissue : I. validation of the eikonal model. *Mathematical Bioscience*, 113 : p. 145–209 [1993].
- [COSTA *et al.*2001] K. COSTA, J. HOLMES et A. MCCULLOCH. Modeling cardiac mechanical properties in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 359 : p. 1233–1250 [2001].

- [CZERWINSKI *et al.*1998] R. CZERWINSKI, D. JONES et W. O'BRIEN. Line and boundary detection in speckle images. *IEEE Transaction on Image Processing*, 7(12) : p. 1700–1714 [1998].
- [CZERWINSKI *et al.*1999] R. CZERWINSKI, D. JONES et W. O'BRIEN. Detection of lines and boundaries in speckle images. application to medical ultrasounds. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 18(2) : p. 126–136 [1999].
- [DEBREUVE *et al.*2001] E. DEBREUVE, M. BARLAUD, G. AUBERT, I. LAURETTE et J. DARCOURT. Space time segmentation using levelset active contours applied to myocardial gated SPECT. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(7) : p. 643–659 [2001].
- [DELINGETTE1999] H. DELINGETTE. General object reconstruction based on simplex meshes. *International Journal of Computer Vision*, 32(2) : p. 111–146 [1999].
- [DERICHE1987] R. DERICHE. Using canny's criteria to derive a recursively implementation optimal edge detector. *International Journal of Computer Vision*, 1(2) : p. 167–187 [1987].
- [D'HOOGHE *et al.*2001] J. D'HOOGHE, F. JAMAL, B. BIJNENS, J. THOEN, F. V. DE WERF, G. SUTHERLAND et P. SUETENS. Two-dimensional ultrasonic strain rate measurement of the human heart in vivo. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 47–52. Springer [2001].
- [DOKOS et LOVELL2004] S. DOKOS et N. LOVELL. Parameter estimation in cardiac ionic models. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 85 : p. 407–431 [2004].
- [DOPPLER1842] C. DOPPLER. Über das farbige licht der doppelsterne und einiger anderer gestirne des himmels. *Abhandlungen der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften*, 2 : p. 465–482 [1842].
- [DURRER *et al.*1970] D. DURRER, R. VAN DAM, G. FREUD, M. JANSE, F. MEIJLER et R. ARZABAECHER. Total excitation of the isolated human heart. *Circulation*, 41(6) : p. 899–912 [1970].
- [EVANS et GARIEPY1992] L. C. EVANS et R. F. GARIEPY. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press [1992].
- [EVENSEN1992] G. EVENSEN. Using the extended kalman filter with a multilayer quasi-geostrophic ocean model. *Journal of Geophysical Research*, 97 : p. 17905–17924 [1992].
- [EVENSEN1994] G. EVENSEN. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using monte carlo methods to forecast error statistics. *Journal of Geophysical Research*, 99 : p. 10143–10162 [1994].
- [EVENSEN2003] G. EVENSEN. The ensemble kalman filter : Theoretical formulation and practical implementation. *Ocean Dynamics*, 53 : p. 343–367 [2003].
- [EVENSEN *et al.*1998] G. EVENSEN, D. DEE et J. SCHRÖTER. Parameter estimation in dynamical models. Dans E. P. CHASSIGNET et J. VERRON (Rédacteurs), *Ocean Modeling and Parameterizations*, p. 373–398 [1998].
- [FABER et RUDY2000] G. FABER et Y. RUDY. Action potential and contractility changes in  $Ca^{2+}$  overloaded cardiac myocytes : A simulation study. *Biophysical Journal*, 78(5) : p. 2392–2404 [2000].
- [FARIS *et al.*2003] O. FARIS, F. EVANS, D. ENNIS, P. HELM, J. TAYLOR, A. CHESNIK, M. GUTTMAN, C. OZTURK et E. MCVEIGH. A novel technique for cardiac electromechanical mapping with MRI tagging and an epicardial electrode sock. *Annals in Biomedical Engineering*, 31(4) : p. 430–440 [2003].
- [FENTON et KARMA1998] F. FENTON et A. KARMA. Vortex dynamics in three-dimensional continuous myocardium with fiber rotation-filament instability and fibrillation. *Chaos*, 8 : p. 20–47 [1998].
- [FIFE1979] P. FIFE. *Mathematical aspects of Reacting and Diffusion Systems*. Numéro 28 dans Lecture Notes in Biomathematics. Springer [1979].
- [FITZHUGH1960] R. FITZHUGH. Thresholds and plateaus in the hodgkin-huxley nerve equations. *Journal of General Physiology*, 43 : p. 867–896 [1960].
- [FITZHUGH1961] R. FITZHUGH. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*, 1 : p. 445–466 [1961].

- [FRANGI *et al.*2001] A. FRANGI, W. NIESSEN et M. VIERGEVER. Three-dimensional modeling for functional analysis of cardiac images : a review. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(1) : p. 2–25 [2001].
- [FRANÇOISE2003] J. FRANÇOISE. Cours de modélisation mathématique de l'électrophysiologie cardiaque. Rapport de recherche, Ecole doctorale de mathématique de Paris-Centre. Université Pierre et Marie Curie, Paris VI [2003].
- [FRANZONE *et al.*1998] P. C. FRANZONE, L. GUERRI, M. PENNACHIO et B. TACCARDI. Spread of excitation in 3-d models of the anisotropic cardiac tissue. ii. effects of fiber architecture and ventricular geometry. *Bioscience*, 147(2) : p. 131–171 [1998].
- [FROUIN *et al.*2002] F. FROUIN, A. DELOUCHE, E. ABERGEL, H. RAFFOUL, H. DIEBOLD et B. BIEBOLD. Factor analysis of left ventricular contraction disorders at echocardiography. *Journal of Radiology*, 83 : p. 1835–1841 [2002].
- [GESELOWITZ et MILLER.1983] D. GESELOWITZ et W. MILLER. A bidomain model for anisotropic cardiac muscle. *Annals in Biomedical Engineering*, 3-4 : p. 191–206 [1983].
- [GHANEM *et al.*2001] R. GHANEM, J. BURNES, A. WALDO et Y. RUDY. Imaging dispersion of myocardial repolarization, ii noninvasive reconstruction of epicardial measures. *Circulation*, 104 : p. 1306–1312 [2001].
- [GOMES et FAUGERAS2000] J. GOMES et O. D. FAUGERAS. Reconciling distance functions and level sets. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 11 : p. 209–223 [2000].
- [GUTIÉRREZ-CHICO *et al.*2005] J. GUTIÉRREZ-CHICO, J. ZAMORANO, L. P. DE ISLA, M. OREJAS, C. ALMERÍA, J. RODRIGO, J. FERREIRÓS, V. SERRA et C. MACAYA. Comparison of left ventricular volumes and ejection fractions measures by three-dimensional echocardiography and cardiac magnetic resonance in patients with various cardiomyopathies. *American Journal of Cardiology*, 95 : p. 809–813 [2005].
- [HADAMARD1902] J. HADAMARD. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique [1902].
- [HADDAD *et al.*2005] R. HADDAD, P. CLARYSSE, M. ORKISZ, P. CROISILLE, D. REVEL et I. MAGNIN. A realistic antropomorphic numerical model of the beating heart. Dans *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'05)*, tome 3504 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 384–393 [2005].
- [HAGER et HOROWITZ1976] W. HAGER et L. HOROWITZ. Convergence and stability property of the discrete riccati operator equation and the associated optimal control and filtering problem. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 14(2) : p. 295–312 [1976].
- [HANSEN1998] P. C. HANSEN. *Rank-deficient and discrete ill-posed problems : numerical aspects of linear inversion*. SIAM [1998].
- [HODGKIN et HUXLEY1952] A. HODGKIN et A. HUXLEY. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *Journal of Physiology*, 117 : p. 500–544 [1952].
- [HORN et SCHUNCK1981] B. K. P. HORN et B. G. SCHUNCK. Determining optical flow. *Artificial Intelligence* [1981].
- [HOTEIT2001] I. HOTEIT. *Filtres de Kalman réduits et efficaces pour l'assimilation de données en océanographie*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier - Grenoble I [2001].
- [HSU et HENRIQUEZ2001] E. HSU et C. HENRIQUEZ. Myocardial fiber orientation mapping using reduced encoding diffusion tensor imaging. *Journal of Cardiovascular Magnetic Resonance*, 3 : p. 325–333 [2001].
- [HUNTER2004] P. HUNTER. The IUPS physiome project : a framework for computational physiology. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 85(2-3) : p. 551–569 [2004].
- [HUNTER *et al.*2003] P. HUNTER, A. PULLAN et B. SMALLL. Modeling of the total heart function. *Annual Review of Biomedical Engineering*, 5 : p. 147–177 [2003].



- [JAZWINSKI1970] A. JAZWINSKI. *Stochastic processes and filtering theory*, tome 64 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press [1970].
- [JENKINS et al.2005] C. JENKINS, K. BRICKNELL, L. HANEKOM et T. MARWICK. Reproducibility and accuracy of echocardiographic measurements of left ventricular parameters using real-time three-dimensional echocardiography. *Journal of American College of Cardiology*, 44 : p. 878–886 [2005].
- [JULIER et UHLMANN1997] S. JULIER et J. UHLMANN. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. Dans *International Symposium on Aerospace/Defense Sensing, Simulations and Controls* [1997].
- [KALMAN1960] R. KALMAN. A new approach to linear filtering and prediction problems. *ASME Transactions. Journal of Basic Engineering*, 82 : p. 35–45 [1960].
- [KALNAY et al.2000] E. KALNAY, S. K. PARK, Z.-X. PU et J. GAO. Application of the quasi-inverse method to data assimilation. *Monthly Weather Review*, 864–875 : p. 864–875 [2000].
- [KANO et al.2001] H. KANO, B. GHOSH et H. KANAI. Single camera based motion and shape estimation using extended Kalman filtering. *Mathematical and Computer Modelling*, 34(5-6) : p. 511–525 [2001].
- [KASS et al.1988] M. KASS, A. WITKIN et D. TERZOPOULOS. Snakes : active contours models. *International Journal of Computer Vision*, 1 : p. 321–332 [1988].
- [KEENER1986a] J. KEENER. A geometry theory for spiral waves in excitable media. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 46(6) : p. 1039–1056 [1986a].
- [KEENER1986b] J. KEENER. Propagation and its failure in the discrete nagumo equation. Dans *Conference on Ordinary and Partial Differential Equations*, p. 95–112 [1986b].
- [KEENER1988] J. KEENER. *Principles of applied mathematics. Transformation and Approximation*. Addison-Wesley [1988].
- [KEENER et SNEYD1998] J. KEENER et J. SNEYD. *Mathematical Physiology*, chapitre 10. Wave propagation in higher dimension. Springer [1998].
- [KEENER1991] J. P. KEENER. An eikonal-curvature equation for action potential propagation in myocardium. *Journal of Mathematical biology*, 29 : p. 629–651 [1991].
- [KELLERHALS2001] B. KELLERHALS. Financial pricing models in continuous time and Kalman filtering. *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems* [2001].
- [KERCKHOFFS et al.2003] R. KERCKHOFFS, O. FARIS, P. BOVENDEERD, F. PRINZEN, K. SMITS, E. MC-VEIGH et T. ARTS. Timing of depolarization and contraction in the canine paced ventricle : model and experiment. *Journal of Cardiovascular Electrophysiology*, 14 : p. 188–195 [2003].
- [KERCKHOFFS et al.2005] R. KERCKHOFFS, O. FARIS, P. BOVENDEERD, F. PRINZEN, K. SMITS, E. MC-VEIGH et T. ARTS. Electromechanics of the paced left ventricle simulated by a straightforward mathematical model : comparison with experiments. *American journal of Physiology* [2005]. A paraître.
- [KRINSKI et al.2004] V. KRINSKI, A. PUMIR et I. EFIMOV. Cardiac muscle models. Dans A. SCOTT (Rédacteur), *Encyclopedia of nonlinear science*. Routledge [2004].
- [LAINE et ZONG1996] A. LAINE et X. ZONG. Border identification of echocardiograms via multiscale edge detection and shape modeling. Dans *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP'96)* [1996].
- [LAMBERTI et al.1993] C. LAMBERTI, P. BOTTAZZI et A. SARTI. Region based matching for velocity field computation in 2-d echocardiography. Dans *Computers in Cardiology*, p. 739–742 [1993].
- [LEDESMA-CARBAYO et al.2002] M. LEDESMA-CARBAYO, J. KYBIC, M. SÜHLING, P. HUNZIKER, M. DECO, A. SANTOS et M. UNSER. Cardiac ultrasound motion detection by elastic registration exploiting temporal coherence. Dans *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI'02)*, p. 585–588 [2002].
- [LIONS1968] J. L. LIONS. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod [1968].

- [LJUNG1979] L. LJUNG. Asymptotic behavior of the extended kalman filter as a parameter estimator for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-24(1) : p. 36–50 [1979].
- [LORETTE *et al.*1998] A. LORETTE, X. DESCOMBES et J. ZERUBIA. Extraction des zones urbaines fondée sur une analyse de la texture par modélisation markovienne. Rapport de recherche 3423, INRIA [1998]. URL <http://www.inria.fr/rrrt/rr-3423.html>.
- [LUCAS et KANADE1981] B. LUCAS et T. KANADE. An iterative image registration technique with an application to stereo vision. Dans *7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, p. 674–679 [1981].
- [LUO et RUDY1991] C. LUO et Y. RUDY. A model of the ventricular cardiac action potential. Depolarization, repolarization and their interaction. *Circulation Research*, 68(6) : p. 1501–1526 [1991].
- [LUO et RUDY1994] C. LUO et Y. RUDY. A dynamic model of the cardiac ventricular action potential - simulations of ionic currents and concentration changes. *Circulation Research*, 74(6) : p. 1071–1097 [1994].
- [MALMIVUO et PLONSEY1995] J. MALMIVUO et R. PLONSEY. *Bioelectromagnetism. Principles and Applications of Bioelectric and Biomagnetic Fields*. Oxford University Press [1995].
- [MALPICA *et al.*2003] N. MALPICA, A. SANTOS, E. PÉREZ, M. GARICÍA-FERNÁNDEZ et M. DESCO. A snake model for anatomic m-mode tracking in echocardiography. Dans *3rd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, p. 722–726 [2003].
- [MATSUMURA *et al.*2005] Y. MATSUMURA, T. HOZUMI, K. ARAI, K. SUGIOKA, K. UJINO, Y. TAKEMOTO, H. YAMAGISHI, M. YOSHIYAMA et J. YOSHIKAWA. Non-invasive assessment of myocardial ischaemia using new real-time three-dimensional dobutamine stress echocardiography : comparison with conventional two-dimensional methods. *European Heart Journal* [2005]. À paraître.
- [MAYBECK1979] P. MAYBECK. *Stochastic models and control. Volume 1*, tome 141 de *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press [1979].
- [McCULLOCH *et al.*2001] A. McCULLOCH, D. SUNG, M. THOMAS et A. MICHAILOVA. Experimental and computational modeling of cardiac electromechanical coupling. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 113–119. Springer [2001].
- [McVEIGH *et al.*2001] E. McVEIGH, O. FARIS, D. ENNIS, P. HELM et F. EVANS. Measurement of ventricular wall motion, epicardial electrical mapping, and myocardial fiber angles in the same heart. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 76–82. Springer [2001].
- [MIYATAKE *et al.*1995] K. MIYATAKE, M. YAMAGISHI, N. TANAKA, M. UEMATSU, N. YAMAZAKI, Y. MINE, A. SANO et M. HIRAMA. New method for evaluating left ventricular wall motion by color-coded tissue doppler imaging : in vitro and in vivo studies. *Journal of American College of Cardiology*, 25 : p. 717–724 [1995].
- [MONTAGNAT1999] J. MONTAGNAT. *Modèles déformables pour la segmentation et la modélisation d'images médicales 3D et 4D*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis [1999].
- [MONTAGNAT *et al.*2003] J. MONTAGNAT, M. SERMESANT, H. DELINGETTE, G. MALANDAIN et N. AYACHE. Anisotropic filtering for model-based segmentation of 4d cylindrical echocardiographic images. *Pattern Recognition Letters*, 24(4-5) : p. 815–828 [2003]. URL <http://www-sop.inria.fr/epidaure/personnel/Maxime.Sermesant/pr1/pr1.php>. Special Issue on Ultrasonic Image Processing and Analysis.
- [MOREAU *et al.*2001] V. MOREAU, L. COHEN et D. PELLERIN. Deformation field estimation for the cardiac wall using doppler tissue imaging. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 53–60. Springer [2001].

- [MOREAU *et al.*2002] V. MOREAU, L. COHEN et D. PELLERIN. Estimation and analysis of the deformation of the cardiac wall using doppler tissue imaging. Dans *International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02)* [2002].
- [MOURAD *et al.*2001] A. MOURAD, L. BIARD, D. CAILLERIE, P. JOUK, A. RAOULT, N. SZAFRAN et Y. US-SON. Geometrical modeling of the fiber organization in the human left ventricle. Dans T. KATILA, I. MAGNIN, P. CLARYSSE, J. MONTAGNAT et J. NENONEN (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'01)*, numéro 2230 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 32–38. Springer [2001].
- [MUMFORD et SHAH1989] D. MUMFORD et J. SHAH. Optimal approximations by piecewise smooth function and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42 : p. 577–684 [1989].
- [MURRAY2002] J. MURRAY. *Mathematical biology, 1 : an introduction*. Springer [2002].
- [MURRAY2001] J. D. MURRAY. *Mathematical Biology*. Springer [2001].
- [NAGEL1987] H. NAGEL. On the estimation of optical flow : Relation between different approaches. *Artificial Intelligence*, 33 : p. 299–324 [1987].
- [NAGUMO *et al.*1962] J. NAGUMO, S. ARIMOTO et S. YOSHIKAWA. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceedings of Institute of Radio Engineers*, 50 : p. 2061–2070 [1962].
- [NITZBERG *et al.*1993] M. NITZBERG, D. MUMFORD et T. SHIOTA. *Filtering, Segmentation and depth*. Numéro 662 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS). Springer [1993].
- [NOBLE1960] D. NOBLE. Cardiac action and pacemaker potentials based on the hodgkin-huxley equations. *Nature*, 188 : p. 495–497 [1960].
- [NOBLE2002] D. NOBLE. Modeling the heart from genes to cells to the whole organ. *Science*, 295 : p. 1678–1682 [2002].
- [NOBLE et RUDY2001] D. NOBLE et Y. RUDY. Models of cardiac ventricular action potentials : iterative interaction between experiment and simulation. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, p. 1127–1142 [2001].
- [OHYAMA *et al.*2002] W. OHYAMA, T. WAKABAYASHI, K. SEKIOKA, F. KIMURA et S. TSURUOKA. Automatic tracking of local myocardial motion by correlation weighted velocity method. Dans *International Conference on Pattern Recognition (ICPR'02)*, tome 1, p. 711–714 [2002].
- [ONIBONI2001] J. ONIBONI. Modélisation et simulation numérique de l'influx cardiaque. Rapport de recherche 4245, INRIA [2001].
- [ORKISZ et CLARYSSE1996] M. ORKISZ et P. CLARYSSE. Estimation du flot optique en présence de discontinuités : une revue. *Traitement du Signal*, 13(5) : p. 489–513 [1996].
- [OSHER et SETHIAN1988] S. OSHER et J. SETHIAN. Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79 : p. 12–49 [1988].
- [OSTER *et al.*1997] H. OSTER, B. TACCARDI, R. LUX, P. ERSHLERN et Y. RUDY. Noninvasive electrocardiographic imaging. reconstruction of epicardial potentials, electrocardiograms, and isochrones and localization of single and multiple electrocardiac events. *Circulation*, 96 : p. 1012–1024 [1997].
- [OSTER *et al.*1998] H. OSTER, B. TACCARDI, R. LUX, P. ERSHLERN et Y. RUDY. Electrocardiographic imaging. non invasive characterization of intramural myocardial activation from inverse-reconstructed epicardial potentials and electrogram. *Circulation*, 97 : p. 1496–1507 [1998].
- [PAPADEMETRIS *et al.*2001] X. PAPADEMETRIS, A. SINUSAS, D. DIONE et J. DUNCAN. Estimation of 3d left ventricular deformation from echocardiography. *Medical Image Analysis*, 5(1) : p. 17–28 [2001].
- [PARAGIOS2003] N. PARAGIOS. A level set approach for shape-driven segmentation and tracking of the left ventricle. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 22(6) : p. 773–776 [2003].

- [PARAGIOS et DERICHE1999] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Geodesic active regions for supervised texture segmentation. Dans *IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV'99)*, tome 2. IEEE Computer Society, Washington, DC, USA [1999].
- [PARAGIOS et DERICHE2000] N. PARAGIOS et R. DERICHE. Coupled geodesic active regions for image segmentation : A level set approach. Dans *European Conference on Computer Vision (ECCV'00)*, p. 224–240. Springer-Verlag [2000].
- [PATHAK et al.1998] S. PATHAK, P. GRIMM, V. CHALANA et Y. KIM. Pubic arch detection in transrectal ultrasound guided prostate cancer therapy. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(5) : p. 762–771 [1998].
- [PELLERIN et al.2003] D. PELLERIN, R.SHARMA, P. ELLIOT et C. VEYRAT. Tissue doppler, strain and strain rate echocardiography for the assessment of left and right ventricular function. *Heart*, 89(Supplement 3) : p. 9–17 [2003].
- [PENNACHIO2004] M. PENNACHIO. The mortar finite element methode for the cardiac “bidomain” model of extracellular potential. *Journal of Scientific Computing*, 20(2) : p. 191–211 [2004].
- [PERONA et MALIK1990] P. PERONA et J. MALIK. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12 : p. 629–639 [1990].
- [PETITJEAN et al.2005] C. PETITJEAN, N. ROUGON, P. CLUZEL, F. PRÊTEUX et P. GRENIER. Quantification of myocardial function using tagged mr and cine mr images. *International Journal of Cardiovascular Imaging*, 20(6) : p. 497–508 [2005].
- [PHAM et al.1998] D. PHAM, J.VERRON et M. ROUBAUD. Singular evolutive extended Kalman filter for data assimilation in oceanography. *Journal of Marine Systems*, 16 : p. 323–340 [1998].
- [PHAM et al.2001] Q. PHAM, F. VINCENT, P. CLARYSSE, P. CROISILLE et I. MAGNIN. A FEM-based model for the 3D segmentation and tracking of the heart in cardiac mri. Dans *Image and Signal Processing and Analysis (ISAP'01)* [2001].
- [PRATIKAKIS et al.2001] I. PRATIKAKIS, C. BARILLOT et P. HELLIER. Robust multi-scale non-rigid registration of 3d ultrasound images. Dans M. KERCKHOVE (Rédacteur), *Scale-Space'01*, numéro 2106 dans Lecture Notes in Computer Science (LNCS), p. 389–397. Springer [2001].
- [PRESS et al.1991] W. PRESS, B. FLANNERY, S. TEUKOLSKY et W. VETTERLING. *Numerical Recipes in C*, chapitre Minimization or Maximization of Functions, p. 290–352. Cambridge University Press [1991].
- [PRICE et al.2000] D. PRICE, D. WALLBRIDGE et M. STEWART. Tissue doppler imaging : current and potential clinical applications. *Heart*, 84 [2000].
- [PRIEBE et BEUCKELMANN1998] L. PRIEBE et D. BEUCKELMANN. Simulation study of cellular electric properties in heart failure. *Circulation Research*, 82 : p. 1206–1223 [1998].
- [RHODE et al.2004] K. RHODE, M. SERMESANT, G. SANCHEZ-ORTIZ, S. HEGDE, D. RUECKERT, D. HILL et R. RAZAVI. XMR guided cardiac electrophysiology study and radio frequency ablation. Dans A. AMINI (Rédacteur), *SPIE Medical Imaging* [2004].
- [ROUGON et al.2005] N. ROUGON, C. PETITJEAN, F. PRÊTEUX, P. CLUZEL et P. GRENIER. A non-rigid registration approach for quantifying myocardial contraction in tagged mri using generalized information measures. *Medical Image Analysis*, 9(4) : p. 353–375 [2005].
- [RUCH et PATTON1982] T. RUCH et H. PATTON (Rédacteurs). *Physiology and Biophysics*. W. B. Saunders, 20th édition [1982].
- [RUDY2001] Y. RUDY. *Heart Physiology and Pathophysiology*, chapitre Electrocardiogram and Cardiac Excitation, p. 133–148. Academic Press [2001].
- [RUDY2003] Y. RUDY. Inverse computation of epicardial potentials. *International Journal of Bioelectromagnetism*, 5(1) : p. 218–220 [2003].
- [RUDY et BURNES1999] Y. RUDY et J. BURNES. Noninvasive electrocardiographic imaging. *Annals of Noninvasive Electrocardiology*, 4(3) : p. 340–359 [1999].

- [RUIZ-DOMINGUEZ *et al.*2003] C. RUIZ-DOMINGUEZ, F. FROUIN, O. GÉRARD, P. LIM, B. DIEBOLD et A. HERMENT. Parametric analysis of main motion to study the regional wall motion of the left ventricle in echocardiography. Dans I. MAGNIN, J. MONTAGNAT, P. CLARYSSE, J. NENONEN et T. KATILA (Rédacteurs), *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'03)*, numéro 2675 dans *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 173–183. Springer [2003].
- [RUIZ-DOMINGUEZ *et al.*2005] C. RUIZ-DOMINGUEZ, N. KACHENOURA, S. MULÉ, A. TENENHAUS, A. DELOUCHE, O. NARDI, O. GÉRARD, B. DIEBOLD, A. HERMENT et F. FROUIN. Classification of segmental wall motion in echocardiography using quantified parametric images. Dans *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'05)*, tome 3504 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 477–486 [2005].
- [SAINTE-MARIE *et al.*2003] J. SAINTE-MARIE, D. CHAPELLE et M. SORINE. Data assimilation for an electromechanical model of the myocardium. Dans *2nd MIT Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics*, p. 1801–1804 [2003].
- [SAMSON *et al.*1999] C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et J. ZERUBIA. Multiphase evolution and variational image classification. Rapport de recherche 3662, INRIA [1999].
- [SAMSON *et al.*2000a] C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et J. ZERUBIA. Classification d'images multibandes par modèles variationnels. Rapport de recherche 4010, INRIA [2000a].
- [SAMSON *et al.*2000b] C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et J. ZERUBIA. Une approche variationnelle pour la classification d'images par régions actives. Dans *12ème Congrès francophone de Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle (RFIA'00)* [2000b].
- [SCHNÖRR1991] C. SCHNÖRR. Determining optical flow for irregular domains by minimizing quadratic functionals of a certain class. *International Journal of Computer Vision*, 6 : p. 25–38 [1991].
- [SENGUPTA *et al.*2002] P. SENGUPTA, J. MOHAN et N. PANDIAN. Tissue doppler echocardiography : principles and applications. *Indian Heart Journal*, 54 : p. 368–378 [2002].
- [SERMESANT2003] M. SERMESANT. *Modèle électromécanique du coeur pour l'analyse d'image et la simulation (Electromechanical Model of the Heart for Image Analysis and Simulation)*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis [2003].
- [SERMESANT *et al.*2005a] M. SERMESANT, Y. COUDIÈRE, V. MOREAU-VILLÉGER, K. RHODE, D. HILL et R. RAVAZI. A fast-marching approach to cardiac electrophysiology simulation for XMR interventional imaging. Dans J. DUNCAN et G. GERIG (Rédacteurs), *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'05)*, *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*. Springer Verlag [2005a].
- [SERMESANT *et al.*2003a] M. SERMESANT, O. FARIS, F. EVANS, E. MCVEIGH, Y. COUDIÈRE, H. DELINGETTE et N. AYACHE. Preliminary validation using in vivo measures of a macroscopic electrical model of the heart. Dans N. AYACHE et H. DELINGETTE (Rédacteurs), *International Symposium on Surgery Simulation and Soft Tissue Modeling (IS4TM'03)*, tome 2673, p. 230–243. INRIA Sophia Antipolis, Springer-Verlag [2003a].
- [SERMESANT *et al.*2002] M. SERMESANT, C. FOREST, X. PENNEC, H. DELINGETTE et N. AYACHE. Biomechanical model construction from different modalities : Application to cardiac images. Dans T. DOHI et R. KIKINIS (Rédacteurs), *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'02)*, tome 2488 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 714–721. Springer, Tokyo [2002].
- [SERMESANT *et al.*2003b] M. SERMESANT, C. FOREST, X. PENNEC, H. DELINGETTE et N. AYACHE. Deformable biomechanical models : Application to 4d cardiac image analysis. *Medical Image Analysis*, 7(4) : p. 475–488 [2003b].
- [SERMESANT *et al.*2005b] M. SERMESANT, P. MOIREAU, O. CAMARA, J. SAINTE-MARIE, R. ANDRIANT-SIMIAVONA, R. CIMRMAN, D. HILL, D. CHAPELLE et R. RAZAVI. Cardiac function estimation from MRI using a heart model and data assimilation : advances and difficulties. Dans *Functional Imaging and Modeling of the Heart (FIMH'05)*, tome 3504 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)* [2005b].

- [SERMESANT *et al.*2004] M. SERMESANT, K. RHODE, A. ANJORIN, S. HEDGE, G. SANCHEZ-ORTIZ, D. RUECKERT, P. LAMBIASE, C. BUCKNALL, D. HILL et R. RAZAV. Simulation of the electro-mechanical activity of the heart using xmr interventional imaging. Dans *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'04)*, p. 786–794 [2004].
- [SETHIAN1997] J. SETHIAN. Tracking interfaces with level sets. *American Scientist*, 85(3) : p. 254–263 [1997].
- [SETHIAN1999] J. SETHIAN. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge University Press [1999].
- [SHI et LIU2002] P. SHI et H. LIU. Stochastic finite element framework for cardiac kinematics function and material property analysis. Dans T. DOHI et R. KIKINIS (Rédacteurs), *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention (MICCAI'02)* [2002].
- [SHI et LIU2003] P. SHI et H. LIU. Stochastic finite element framework for joint estimation of cardiac kinematic functions and material parameters. *Medical Image Analysis*, 7(4) : p. 445–464 [2003].
- [SÜHLING *et al.*2002] M. SÜHLING, M. ARIGOVINDAM, P. HUNZIKER et M. UNSER. Motion analysis of echocardiograms using local-affinr, spatio-temporal model. Dans *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI'02)*, p. 573–576 [2002].
- [SÜHLING *et al.*2004] M. SÜHLING, M. ARIGOVINDAN, M. UNSER, C. P. JANSEN et P. R. HUNZIKER. Bimodal myocardial motion analysis from b-mode and tissue doppler ultrasound. Dans *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI'04)*, p. 308–311 [2004].
- [SINGH1992] A. SINGH. Image-flow computation : An estimation-theoretic framework and unified perspective. *Computer Vision, Graphics and Image Processing : Image Understanding*, 65(2) : p. 152–177 [1992].
- [SUNG *et al.*2000] D. SUNG, J. OMENS et A. MCCULLOCH. Model-based analysis of optically mapped epicardial activation patterns and conduction velocity. *Annals in Biomedical Engineering*, 28(9) : p. 1085–1092 [2000].
- [SUTHERLAND *et al.*1994] G. SUTHERLAND, M. STEWART, K. GROUNDSTROEM, C. MORAN, A. FLEMING, F.J.GUELL-PERIS, R. RIEMERSMA, L. FENN, K. FOX et W. MCDICKEN. Color doppler myocardial imaging : a new technique for the assessment of myocardial function. *Journal of the American Society of Echocardiography*, 7(5) : p. 441–458 [1994].
- [TOMLINSON *et al.*2002] K. TOMLINSON, P. HUNTER et A. PULLAN. A finite element method for an eikonal equation model of myocardial excitation wavefront propagation. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 63(1) : p. 324–350 [2002].
- [TYSON et KEENER1988] J. TYSON et J. KEENER. Singular perturbation theory of traveling waves in excitable media (a review). *Physica D*, 32 : p. 327–361 [1988].
- [VAN DER MERWE et WAN2001] R. VAN DER MERWE et E. WAN. The square root unscented Kalman filter for state and parameters estimation. Dans *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'01)* [2001].
- [VERLAAN et HEEMINK1995] M. VERLAAN et A. HEEMINK. Reduced rank square root filters for large scale data assimilation problems. Dans *2nd International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography*, p. 247–252 [1995].
- [VESE et CHAN2002] L. VESE et T. CHAN. A multiphase level set framework for image segmentation using the mumford and shah model. *International Journal of Computer Vision*, 50(3) : p. 271–293 [2002].
- [WAGNER *et al.*1983] R. WAGNER, S. SMITH, J. SANDRIK et H. LOPEZ. Statistics of speckle in ultrasound b-scans. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 30(3) : p. 156–163 [1983].
- [WEICKERT1997] J. WEICKERT. A review of nonlinear diffusion filtering. Dans B. TER HAAR ROMENY, L. FLORACK, J. KOENDERINK et M. VIERGEVER (Rédacteurs), *Scale-Space Theory in Computer Vision*, tome 1252 de *Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, p. 3–28. Springer [1997].

- [WEICKERT1998] J. WEICKERT. On discontinuity preserving optic flow. Dans S. ORPHANOUDAKIS, P. TRAHANIAS, J. CROWLEY et N. KATEVAS (Rédacteurs), *Computer Vision and Mobile Robotics Workshop (CVMR'98)*, p. 115–122 [1998].
- [WEICKERT et SCHNORR2001] J. WEICKERT et C. SCHNORR. Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14(3) : p. 245–255 [2001].
- [WEICKERT *et al.*1998] J. WEICKERT, B. M. TER HAAR ROMENY et M. A. VIERGEVER. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering. *IEEE Transaction on Image Processing*, 7(3) : p. 398–410 [1998].
- [WILSON et GEISER1992] D. WILSON et E. GEISER. Automatic center point determination in two-dimensional short-axis echocardiographic images. *Pattern recognition*, 25(9) : p. 893–900 [1992].
- [XU et PRINCE1998] C. XU et J. L. PRINCE. Snakes, shapes, and gradient vector flow. *IEEE Transaction on Image Processing*, 7(3) : p. 359–369 [1998].
- [YEUNG *et al.*1998] F. YEUNG, F. LEVINSON, D. FU et K. PARKER. Feature-adaptative motion tracking of ultrasound image sequences using a deformable mesh. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 17(6) : p. 945–956 [1998].
- [YEZZI *et al.*2002] A. YEZZI, A. TSAI et A. WILLSKY. A fully global approach to image segmentation via coupled curve evolution equations. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13(1/2) : p. 195–216 [2002].
- [ZINNER1992] B. ZINNER. Existence of traveling wavefront solutions of the discrete nagumo equation. *Journal of Differential Equations*, 96 : p. 1–27 [1992].
- [ZIPES et JALIFE2004] D. ZIPES et J. JALIFE (Rédacteurs). *Cardiac Electrophysiology. From cell to bedside*. Saunders, 4ème édition [2004].