



HAL
open science

Microscopie holographique numérique : modélisation et développement de méthodes pour l'étude d'écoulements canalisés et microcanalisés

Nicolas Verrier

► **To cite this version:**

Nicolas Verrier. Microscopie holographique numérique : modélisation et développement de méthodes pour l'étude d'écoulements canalisés et microcanalisés. Physique [physics]. Université de Rouen, 2009. Français. NNT : . tel-00634672

HAL Id: tel-00634672

<https://theses.hal.science/tel-00634672>

Submitted on 21 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Présentée à la

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE ROUEN

En vue de l'obtention du titre de

Docteur de l'Université de Rouen

Discipline : PHYSIQUE

Spécialité : OPTIQUE

Par

Nicolas VERRIER

**MICROSCOPIE HOLOGRAPHIQUE NUMÉRIQUE :
MODÉLISATION ET DÉVELOPPEMENT DE MÉTHODES
POUR L'ÉTUDE D'ÉCOULEMENTS CANALISÉS ET
MICROCANALISÉS**

Soutenue le 22 10 2009

Composition du jury :

Pascal PICART , Professeur à l'ENSIM et au LAUM, Le Mans	Rapporteur
Michel STANISLAS , Professeur à l'UMR 8107-LML, Lille	Rapporteur
Denis LEBRUN , Professeur à l'Université de Rouen	Directeur de Thèse
Marc BRUNEL , Professeur à l'Université de Rouen	Examineur
Sébastien COËTMELLE , Maître de Conférences à l'Université de Rouen	Examineur
Didier FRÉCHOU , Ingénieur de recherche au Bassin d'essai des Carènes	Examineur

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué au sein du Groupe d'Optique et d'Optoélectronique (G2O) de l'UMR 6614-CORIA d'octobre 2006 à octobre 2009.

Je tiens tout d'abord à remercier Messieurs Denis Lebrun, Professeur à l'Université de Rouen et Sébastien Coëtmellec, Maître de Conférences à l'Université de Rouen, d'avoir conjointement accepté de diriger et encadrer cette thèse. Tout au long de ces trois années, vos conseils et votre bienveillance m'ont permis de mener à bien ces travaux. Je tiens de plus à vous remercier de la confiance que vous m'avez accordé en m'offrant la possibilité de modifier quelque peu les orientations initiales des recherches menées au cours de cette Thèse.

Je remercie également Monsieur Pascal Picart, Professeur à l'Université du Mans et Monsieur Michel Stanislas, Directeur du laboratoire de mécanique de Lille d'avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit. De même, que Monsieur Didier Fréchou, Ingénieur de Recherches au Bassin d'Essai des Carènes et Monsieur Marc Brunel, Professeur à l'Université de Rouen, soient remerciés d'avoir accepté le rôle d'examineur lors de la soutenance de ma Thèse.

De nombreuses personnes ont rythmé mes journées au long de ces trois années de thèse. Un grand merci à Jean Mouard, ex figure de proue du bâtiment, pour sa bonne humeur, ses "poignées de main" viriles et les longues discussions que nous avons pu avoir sur l'historique du laboratoire. Bien que tu sois maintenant à la retraite, tu as accepté de venir me soutenir en cette journée un peu particulière, et je t'en suis extrêmement reconnaissant. Merci également aux "gars de l'atelier" avec qui j'ai coutume de partager ma première dose de caféine de la journée : Toutinette, Thierry, mon Nono, Ludo (l'gars d'Saint Ouen) et Carole (tu n'es pas de l'atelier, mais ta bonne humeur et ton rire communicatif permettent de démarrer la journée sur de bons rails). Merci également à tous les autres : Benjamin, Jacky, Yves, Manu, Michel ... et j'en oublie sans doute. Je ne m'en suis pas souvent remis à votre savoir faire technique, mais vos qualités humaines sont indéniables ! Un merci aux membres du service informatique ; les permanents : Olivier, Guillaume et Henry (mon voisinou), et les anciens stagiaires : Sébastien (le K-Marou du labo), Hugues (le chasseur). J'ai toujours été accueilli avec sympathie et bonne humeur et ce fût un plaisir d'être un de vos "bêta-testeur".

Avant d'aller plus loin, je tiens à remercier tout spécialement ma p'tite Mélie. Merci pour ton soutien lors de la rédaction de ce manuscrit, merci de supporter mes sautes d'humeur et mon caractère de ... Merci, Merci, Merci !

Merci aux Piliers du PMU : l'Père Gazon et l'Père Grout, aux membres féminins :

Nebya et Amélie, et à la relève : Carlos et Junior¹. Merci pour les moments de détente, les expéditions diverses et variées ainsi que les discussions philosophiques qui ont le don de faire retomber la pression en fin de journée.

Merci aussi à tous ceux qui ont jalonné mon parcours depuis mon arrivée sur le site du Madrillet ; pèle-mêle : Auriane, Karine, Chacal, Vincent, Damien, Kamal, et tous les potes du DUT mesures physique promo 2003.

Enfin, je conclurai ces quelques lignes en remerciant tous les membres de ma famille qui m'ont soutenu indéfectiblement tout au long de mon cursus universitaire. Merci pour tout, je n'en serais sûrement pas là sans vous ...

1. N'oublions pas les invités tels que Didier qui donne sans compter ou Rodolphe ébéniste hors pair

Table des matières

1	Introduction générale	1
2	Holographie en lumière gaussienne, elliptique et astigmat	9
2.1	Introduction	9
2.1.1	Holographie en lumière gaussienne, elliptique et astigmat	10
2.1.2	Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{R} de l'onde de référence	11
2.1.3	Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{O} de l'onde diffractée	12
2.1.4	Distribution d'intensité	13
2.2	Cas des particules décentrées	14
2.2.1	Distribution d'amplitude du faisceau diffracté	15
2.2.2	Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur	16
2.2.3	Analyse des hologrammes par transformation de Fourier fractionnaire	19
2.2.4	Application de la TF fractionnaire aux hologrammes simulés et expérimentaux	22
2.3	Décomposition de la fonction de distribution d'amplitude de la particule sur une base de fonctions gaussiennes : application à la simulation d'hologrammes	24
2.3.1	Réécriture de la fonction de transfert des particules	24
2.3.2	Distribution d'amplitude du faisceau diffracté \mathcal{O}	27
2.3.3	Distribution d'intensité et comparaison des deux méthodes	29
2.3.4	Analyse des hologrammes par TF fractionnaire	30
2.4	Conclusion	31
3	Simulation d'hologrammes dans une canalisation	33
3.1	Introduction	33
3.1.1	Problèmes liés à l'imagerie dans les canalisations	33
3.1.2	Caractéristiques de la canalisation étudiée	34
3.2	Modélisation de la canalisation : approche lentilles minces	36
3.2.1	Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur	37
3.2.2	Limites de la modélisation lentilles minces : restitution des hologrammes	39
3.3	Modélisation de la canalisation : approche lentilles épaisses	42
3.3.1	Holographie en ligne dans des canalisations épaisses : distribution d'intensité dans le plan du capteur CCD	43

3.3.2	Influence des paramètres expérimentaux sur la distribution d'intensité enregistrée	48
3.3.3	Restitution des hologrammes obtenus	50
3.4	Conclusion	54
4	Détermination de régions d'intérêt 3D par observation des hologrammes	57
4.1	Introduction	57
4.1.1	Localisation axiale des objets en holographie	57
4.1.2	Utilisation de l'holographie à référence astigmatique : isolement tout optique d'une région d'intérêt	58
4.2	Étude numérique de faisabilité	60
4.2.1	Prise en compte de la lentille mince	60
4.2.2	Simulations numériques : enregistrement de figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme	61
4.2.3	Modification de la taille et de la position de la région d'intérêt	64
4.3	Isolement de la région d'intérêt tridimensionnelle à partir d'hologrammes expérimentaux	68
4.3.1	Principe de l'étude et enregistrement d'hologrammes dans la région d'intérêt	68
4.3.2	Résultats obtenus	70
4.4	Conclusion	73
5	Holographie numérique dans les microcanaux	77
5.1	Introduction	77
5.2	Validation de l'approche ABCD pour la simulation d'hologrammes en microcanalisations	79
5.2.1	Caractéristiques de la canalisation étudiée	79
5.2.2	Confrontation des résultats théoriques et expérimentaux	80
5.3	Visualisation et restitution d'images de particules dans des écoulements microcanalisés	86
5.3.1	Enregistrement des hologrammes	86
5.3.2	Restitution des hologrammes par TF fractionnaire	87
5.3.3	Application à la visualisation d'une région d'intérêt tridimensionnelle	88
5.4	Conclusion	91
6	Conclusion générale et perspectives	93
A	Cas des particules décentrées : expression de \mathcal{O}	97
B	Définition de s_p	99
C	Simulation d'hologrammes dans une canalisation : approche lentille mince	101
C.1	Propagation du point source jusqu'à la première lentille	101

C.2	Propagation jusqu'à la particule	102
C.2.1	Prise en compte de la première lentille	102
C.2.2	Distribution d'amplitude dans le plan de la particule	102
C.3	De la particule jusqu'à la seconde lentille	103
C.3.1	Propagation du faisceau de référence	104
C.3.2	Propagation du faisceau diffracté	104
C.4	Dans le plan du capteur	105
C.4.1	Prise en compte de la seconde lentille cylindrique	105
C.4.2	Distribution d'amplitude du faisceau de référence $\mathcal{R}(x, y)$	106
C.4.3	Distribution d'amplitude du faisceau diffracté $\mathcal{O}(x, y)$	106
D	Canalisation ABCD	109
D.1	Construction du premier système ABCD : $M_1^{x,y}$	109
D.2	Construction du second système ABCD : $M_2^{x,y}$	111
E	Distribution d'amplitude $G_2(x, y)$	113
E.1	Distribution d'amplitude de l'onde de référence $\mathcal{R}(x, y)$	113
E.2	Distribution d'amplitude de l'onde diffractée $\mathcal{O}(x, y)$	113
F	Publications de l'auteur	115

Table des figures

1.1	Principe de l'enregistrement holographique selon Gabor	1
1.2	Montage d'holographie numérique	2
1.3	Représentation de l'enregistrement holographique comme un système linéaire	3
1.4	Exemple de restitution d'un hologramme	4
1.5	Profils de corrélation de la distribution d'intensité (a) avec l'ondelette modifiée (b) avec l'ondelette proposée par Malek <i>et al.</i> (c) Profil de la fonction de distribution de l'objet	5
1.6	Représentation de la distribution d'intensité d'un faisceau laser après focalisation dans une microcanalisation (fausses couleurs)	6
2.1	Schéma de principe de l'holographie en lumière AEG	10
2.2	(a) Hologramme simulé pour $\delta = 250 \text{ mm}$ et $z = 100 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $\delta = 150 \text{ mm}$ et $z = 100 \text{ mm}$	13
2.3	Montage numérique et expérimental	14
2.4	Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = 50 \text{ mm}$, $d = 150 \mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 250 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$	17
2.5	Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = -50 \text{ mm}$, $d = 150 \mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 150 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$	18
2.6	(a) TF fractionnaire de l'hologramme de la figure 2.4 avec $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = -0,850$. (b) TF fractionnaire de l'hologramme de la figure 2.5 avec $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = 0,664$	22
2.7	(a) Figure de diffraction du mot "ELECTRO". (b) TF fractionnaire de l'hologramme de la figure 2.7 avec $a_x^{opt} = 0,505$ et $a_y^{opt} = -0,785$	23
2.8	Représentation schématique de l'ouverture elliptique	25
2.9	Comparaison entre une fonction circ et la décomposition sur une base de fonctions gaussiennes	26
2.10	(a) Particule circulaire $2b = 200 \mu\text{m}$ (b) Particule elliptique $2b = 200 \mu\text{m}$, $2a = 400 \mu\text{m}$, et $\theta = \pi/4$ (c) Fibre $2b = 30 \mu\text{m}$	27

2.11	(a) Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = 50 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ }\mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 250 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$, (b) Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = -50 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ }\mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 150 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$	29
2.12	(a) Comparaison des deux méthodes pour des figures de diffraction elliptiques. (b) Comparaison des deux méthodes pour des figures de diffraction hyperboliques	30
2.13	Représentation du terme $\Re \{ \overline{\mathcal{R}\mathcal{O}} \}$ et illustration de la modulation par la somme de fonctions gaussiennes	31
2.14	(a) TF fractionnaire de l'hologramme figure 2.11(a) avec $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = -0,850$. (b) TF fractionnaire de l'hologramme figure 2.11(b) avec $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = 0,664$	32
3.1	Exemple d'hologramme de particules enregistré dans une canalisation transparente	34
3.2	Dimensions de la canalisation simulée	35
3.3	Paramètres de calcul de la distance focale de la lentille	36
3.4	Représentation schématique de la canalisation d'un point de vue lentille mince	37
3.5	Représentation du terme $\Re \{ \overline{\mathcal{R}\mathcal{O}} \}$ et illustration de la modulation par la somme de fonctions gaussiennes	38
3.6	Hologramme simulé pour $z_p = 250 \text{ mm}$, $\delta = 18 \text{ mm}$ et $z = 23 \text{ mm}$	39
3.7	Hologramme restitué pour $\alpha_x^{opt} = 0,419$ et $\alpha_y^{opt} = 0,361$	40
3.8	(a) Hologramme expérimental de billes de latex de $100 \text{ }\mu\text{m}$ de diamètre enregistré dans la canalisation. (b) Restitution de l'hologramme avec les paramètres optimaux prévus par la théorie ($\delta = 20 \text{ mm}$). (c) Restitution de l'hologramme pour $\delta = 8 \text{ mm}$	41
3.9	Illustration de l'influence de l'épaisseur de la lentille sur la distribution d'intensité simulée ($e = 0,2 \text{ mm}$)	42
3.10	(a) Représentation schématique du dispositif optique de l'étude. (b) Représentation lentilles épaisses	43
3.11	Hologramme simulé d'une fibre opaque de $51,8 \text{ }\mu\text{m}$ parallèle à l'axe de la canalisation. $n_2 = 1,33$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 23 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$	46
3.12	Hologramme expérimental d'une fibre opaque de $51,8 \text{ }\mu\text{m}$ "parallèle" à l'axe de la canalisation. $n_2 = 1,33$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 23 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$	47
3.13	(a) Comparaison des distributions d'intensité simulées et expérimentales. (b) Comparaison des distributions d'intensité obtenues par les deux approches	48
3.14	Evolution de la distribution d'intensité en fonction de la distance de propagation avant la canalisation	49
3.15	Evolution de la distribution d'intensité en fonction de la distance de l'indice du milieu contenu dans la canalisation	50

3.16	Restitution de l'hologramme de la figure 3.11 pour $a_x^{opt} = 0,337$ et $a_y^{opt} = 0,273$	51
3.17	Restitution de l'hologramme de la figure 3.12 pour $a_x^{opt} = 0,33$ et $a_y^{opt} = 0,27$	52
3.18	Comparaison entre les ordres fractionnaires théoriques et les ordres fractionnaires estimés à partir d'hologrammes expérimentaux	53
3.19	Evolution de l'erreur sur l'estimation de la position de restitution Δz , en fonction de z , pour différentes erreurs d'estimation des ordres fractionnaires	54
3.20	Restitution de l'hologramme 3.8 avec les paramètres optimaux prévus par le modèle ABCD : $\delta = 20 \text{ mm}$	55
4.1	(a) Illustration de l'enregistrement de l'hologramme d'un spray. (b) Exemple d'hologramme obtenu	59
4.2	Schéma de montage d'holographie pour l'isolement de région d'intérêt 3D dans une canalisation	60
4.3	Comparaison des profils d'intensité théorique et expérimentale	61
4.4	(a) Evolution des rayons du faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour $z_p = 200 \text{ mm}$ et $z_l = 30 \text{ mm}$. (b) Évolution des rayons du faisceau $R_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour les mêmes valeurs	62
4.5	(a) Evolution des rayons du faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour $z_p = 200 \text{ mm}$ et $z_l = 45 \text{ mm}$. (b) Évolution des rayons du faisceau $R_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour les mêmes valeurs	63
4.6	(a) Hologramme simulé pour $z_l = 1 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $z_l = 6 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$. (c) Hologramme simulé pour $z_l = 20 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$. (d) Hologramme simulé pour $z_l = 30 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$. (e) Hologramme simulé pour $z_l = 35 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$	64
4.7	(a) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 1 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 27 \text{ mm}$. (c) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 31 \text{ mm}$. (d) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 34 \text{ mm}$. (e) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$	65
4.8	Influence de la position de la lentille sur les paramètres de la zone d'intérêt. (a) $z_l = 45 \text{ mm}$. (b) $z_l = 50 \text{ mm}$. (c) $z_l = 55 \text{ mm}$	66
4.9	Influence de l'indice n_2 sur la taille de la région d'intérêt pour $z_p = 200 \text{ mm}$ et $z_l = 45 \text{ mm}$. (a) Cas de l'air. (b) Cas de l'huile. (c) Cas d'un milieu d'indice 1,5	67
4.10	Schéma du dispositif expérimental	68
4.11	(a) Evolution de ω_ξ et ω_η en fonction de δ pour $z_l = 37 \text{ mm}$. (b) Evolution de R_ξ et R_η en fonction de δ	69
4.12	Evolution de la surface de la région d'intérêt	70
4.13	(a) Bruit de fond dû à la canalisation. (b) Hologramme enregistré dans la canalisation.	71

4.14	Comparaison des profils de niveaux de gris de deux hologrammes restitués par TF fractionnaire	72
4.15	Hologramme de la figure 4.13 après division	73
4.16	Hologramme illustrant l'isolement de région d'intérêt 3D	74
4.17	Restitution de l'hologramme de la figure 4.16. (a) Particule 1 : $a_x = 0,71$ et $a_y = -0,8$. (b) Particule 2 : $a_x = 0,61$ et $a_y = -0,88$	74
5.1	Exemple de jonctions rencontrées en microfluidique. (a) Jonction en T. (b) Jonction en Y	78
5.2	Section de la microcanalisation étudiée	79
5.3	Configuration de simulation et d'enregistrement des hologrammes	80
5.4	(a) Evolution des rayons de courbure du front d'onde dans la canalisation. (b) Hologramme simulé pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$, $z = 18 \text{ mm}$. La particule opaque a un diamètre $d = 5 \mu\text{m}$ et est positionnée à $\delta = 10 \mu\text{m}$ de la paroi du capillaire.	81
5.5	(a) Evolution des rayons de courbure du front d'onde dans la canalisation. (b) Hologramme simulé pour $z_p = 13 \text{ mm}$, $z_l = 1 \text{ mm}$, $z = 18 \text{ mm}$. La particule opaque a un diamètre $d = 5 \mu\text{m}$ et est positionnée à $\delta = 90 \mu\text{m}$ de la paroi du capillaire.	82
5.6	(a) Evolution des rayons de courbure dans le capillaire. (b) Hologramme simulé pour $\delta = 1 \mu\text{m}$. (c) Hologramme simulé pour $\delta = 99 \mu\text{m}$	83
5.7	Hologramme enregistré pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$	84
5.8	Hologramme enregistré pour $z_p = 13 \text{ mm}$, $z_l = 1 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$	85
5.9	Hologramme enregistré pour $z_p = 12 \text{ mm}$, $z_l = 2 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$	86
5.10	Séquence d'hologrammes enregistrée pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$. Chaque image est séparée de la précédente par $20 \mu\text{s}$	87
5.11	Restitution par TF fractionnaire de la séquence d'hologrammes pour $\delta = 50 \mu\text{m}$	87
5.12	Configuration d'enregistrement des hologrammes utilisée pour la distinction de régions d'intérêt tridimensionnelles	88
5.13	Evolution des rayons de courbure du front d'onde dans le capillaire	89
5.14	Hologramme enregistré dans la configuration de la figure 5.12	90
5.15	Restitution de l'hologramme de la figure 5.14 pour $a_x^{opt} = 0,46$ et $a_y^{opt} = -0,05$	91
6.1	(a) Simulation d'un hologramme dans une approche non paraxiale. (b) TF fractionnaire de l'hologramme avec les ordres prévus par la théorie scalaire	94
D.1	Montage d'holographie pour l'étude d'écoulements canalisés	109
D.2	Décomposition de la canalisation en systèmes optiques simples (réfractions et propagations)	110

Chapitre 1

Introduction générale

L'holographie est une méthode de diagnostic optique reconnue et communément utilisée pour la caractérisation de milieux fluides transparents. Cette méthode est une excellente candidate pour ce type d'études. En effet, l'enregistrement d'un seul hologramme renferme une information tridimensionnelle sur le milieu à étudier. Par exemple en mécanique des fluides [1, 2, 3] où les écoulements sont ensemenés dans le but d'obtenir les composantes tridimensionnelles de vitesse ou en biologie [4, 5] pour l'imagerie de micros organismes.

On doit l'holographie "moderne" à Dennis Gabor [6]. Ces travaux, inspirés par ceux de Bragg [7], visaient à améliorer la résolution de la microscopie électronique [8, 9]. Le processus holographique est alors décomposé en deux étapes : l'enregistrement holographique et la restitution holographique. Le principe de l'enregistrement holographique est

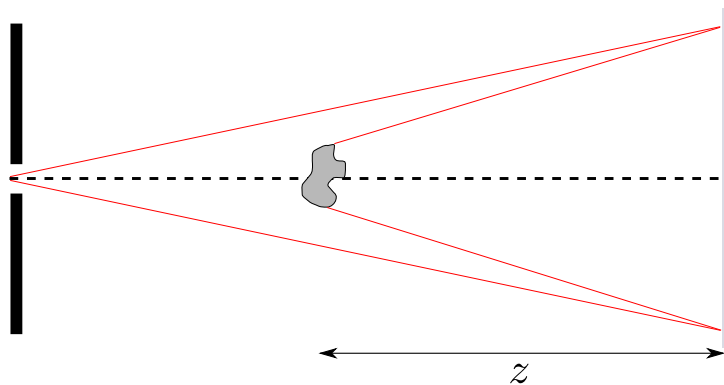


FIGURE 1.1 – Principe de l'enregistrement holographique selon Gabor

illustré figure 1.1. Sur une plaque holographique (similaire à un plaque photographique mais avec une résolution supérieure), les interférences entre le faisceau de référence (la partie du faisceau qui n'interagit pas avec l'objet) et le faisceau diffracté par l'objet qui est situé à une distance z de la plaque photographique sont enregistrées. Les informations relatives à l'amplitude et à la phase sont ici conservées offrant ainsi la possibilité d'accéder à une information tridimensionnelle. La possibilité d'obtenir une information tridimensionnelle a permis de généraliser l'étude de l'holographie dans le domaine de la mécanique des fluides. Ainsi, les premières études menées par Thompson *et al.* [10] ont permis de mesurer des diamètres de particules situées dans un volume d'étude. Par la

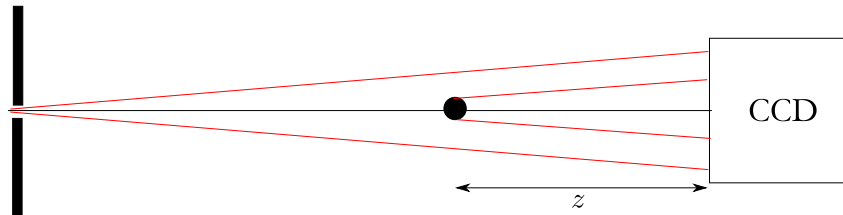


FIGURE 1.2 – Montage d'holographie numérique

suite, des études d'écoulements dynamiques [11] tels que des brouillards [12] ou des aérosols [13] ont été menées. Néanmoins, la lourdeur du processus de développement et de reconstruction de la plaque holographique rend cette méthode difficile à mettre en œuvre. Menzel *et al.* proposèrent une méthode permettant d'analyser les hologrammes sans avoir à restituer les plaques. Cette méthode avait pour but de mesurer les diamètres des franges d'interférences au moyen de microdensimètres [14].

Le développement et l'amélioration des capteurs CCD associés à la démocratisation des moyens informatiques ont permis de faire un bond en avant dans le traitement des hologrammes. En effet, il devient dès lors possible de restituer l'hologramme non plus de manière optique, mais de manière numérique [15, 16]. La suppression de la phase de développement de l'hologramme viendra par la suite lorsque les capteurs CCD ont été utilisés pour enregistrer directement les hologrammes [17, 18]. On parle alors d'holographie numérique.

Dès lors, il est possible de localiser des particules dans un volume d'étude [19]. De plus, l'utilisation de sources impulsionnelles permet de remonter aux vitesses des particules dans l'écoulement [11, 20, 21, 22, 23, 24] et ainsi d'obtenir des trajectoires tridimensionnelles de particules dans un écoulement [25, 26]. De nombreuses applications sont également proposées en biologie. En effet la possibilité de suivre dans l'espace et le temps des objets a permis d'étendre l'utilisation de l'holographie à l'étude de micro-organismes tels que le plancton [4, 5, 27, 28].

Le passage de l'holographie classique à l'holographie numérique a permis le développement de méthodes de simulation et de restitution des hologrammes. Un exemple de montage d'holographie numérique est proposé figure 1.2. Ici, les interférences entre l'onde de référence et la partie de l'onde diffractée par l'objet situé à la distance z sont enregistrées sur un capteur CCD dépourvu d'objectif. La plupart des simulations d'hologrammes se basent sur l'intégrale de propagation d'Huygens-Fresnel [29, 30]. En effet, dans l'approximation paraxiale, cette intégrale peut s'écrire comme un produit de convolution. L'utilisation de l'algorithme de transformation de Fourier rapide (fast Fourier transform : FFT) permet un calcul numérique rapide de ces produits. Ainsi, Onural proposa de considérer la simulation (et la restitution) des hologrammes comme un système linéaire de réponse impulsionnelle h_z [15, 16]. Cette réponse impulsionnelle est le noyau de Fresnel qui est donné par : $h_z = \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right]$ (z est la distance de propagation entre le plan de l'objet et le support d'enregistrement de l'hologramme, λ correspond à la longueur d'onde du faisceau de référence utilisé pour enregistrer l'hologramme). La représentation

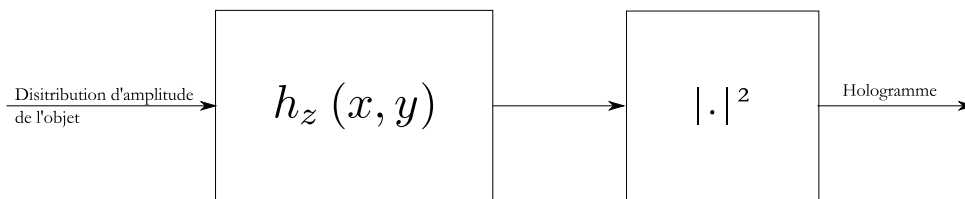


FIGURE 1.3 – Représentation de l'enregistrement holographique comme un système linéaire

du processus d'enregistrement des hologrammes comme un système linéaire est proposé figure 1.3. Ces développements ont en outre permis de déterminer les conditions optimales d'enregistrement d'hologrammes sur les capteurs CCD [31, 32]. De plus, l'étude numérique de l'influence de paramètres expérimentaux liés à l'architecture du capteur CCD, ou aux aberrations du faisceau de référence sur l'hologramme a permis de comprendre les processus d'imagerie en holographie numérique [33]. D'autres approches ont été envisagées pour la simulation des hologrammes. Par exemple, en 1993, Onural proposa une interprétation de l'intégrale de propagation comme une transformation en ondelettes [34]. Ici la famille d'ondelettes utilisées contient un paramètre d'échelle lié à la distance de propagation z . Plus récemment, une interprétation de l'intégrale d'Huygens-Fresnel comme une transformation de Fourier fractionnaire [35, 36] a été envisagée, ouvrant ainsi la voie à de nouvelles méthodes de simulation des hologrammes [37, 38]. Ces méthodes de simulation sont également applicables à la restitution numérique des hologrammes. La restitution d'un hologramme consiste à repropager numériquement le faisceau de référence (faisceau qui a permis d'enregistrer l'hologramme) jusqu'au plan où était situé l'objet à restituer.

Onural proposa la restitution des hologrammes en utilisant la transformation de Fresnel [15, 16]. La restitution de l'hologramme d'un objet situé à la distance z du capteur est réalisée en calculant la propagation, par convolution avec le noyau de Fresnel, de la distribution d'intensité enregistrée sur la distance $-z$. Un exemple de restitution numérique d'un hologramme est présenté figure 1.4. Ici, l'image de la particule restituée est superposée à des franges d'interférences. Ces franges sont connues sous le nom d'images jumelles. Elles sont dues au fait qu'un capteur CCD enregistre la distribution d'intensité des interférences entre le faisceau de référence et le faisceau diffracté. Lors de la restitution, il est impossible de dissocier les informations relatives à l'amplitude et à la phase de l'hologramme. Dans le but d'atténuer ces images jumelles, des méthodes numériques existent [39, 40, 41]. Néanmoins, elles sont soit itératives et alourdissent le traitement des hologrammes, soit elles nécessitent des connaissances *a priori* sur les objets à traiter.

L'analyse des figures d'interférences par transformation en ondelettes (TO) a été initiée au laboratoire en 1997 et appliquée à la restitution de fibres opaques [42, 43]. L'application de la TO à la restitution des hologrammes de particules a été proposée par Buraga-Lefebvre *et al.* [19] et appliquée avec succès à l'étude de volumes de particules [23]. Afin de restituer l'hologramme, la corrélation de la distribution d'intensité enregistrée avec une ondelette est calculée. Pour des objets à distribution d'amplitude réelle et à symétrie de révolution (ce qui est notamment le cas si l'on considère des particules opaques), cette corrélation est équivalente à une convolution. Ainsi, Malek *et al.* ont pu décrire l'enre-

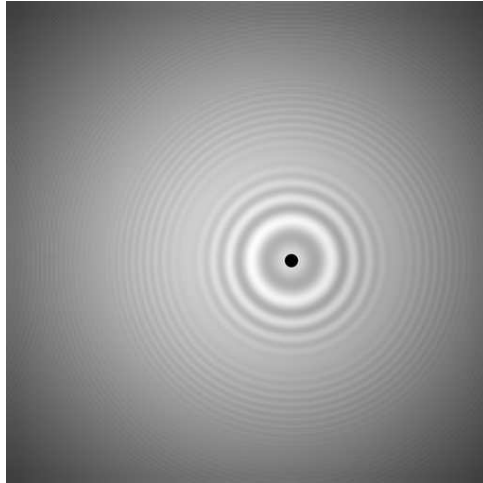


FIGURE 1.4 – Exemple de restitution d'un hologramme

gistroement et la restitution des hologrammes comme un système linéaire [3]. L'utilisation d'une ondelette gaussienne a de plus permis aux auteurs de limiter les moirés d'échantillonnage des figures d'interférences. Néanmoins cette description n'était faite que dans le cas où la position de l'objet par rapport au capteur était parfaitement connue. Une généralisation de ce formalisme hors du plan de mise au point est proposée par Coëtmellec *et al.* [44] (article soumis). Il est ici démontré que l'ondelette utilisée pour caractériser les figures d'interférences est une fonction divergente. De plus, la base d'ondelettes utilisée pour restituer les hologrammes n'est pas orthogonale. Pour pallier ces limitations une nouvelle expression de l'ondelette utilisée pour la restitution a été proposée. L'expression de la base d'ondelettes obtenue est proche de celle du noyau de la transformation de Fourier fractionnaire. La figure 1.5 illustre les résultats de la corrélation entre la distribution d'intensité enregistrée et les deux ondelettes proposées. Ces résultats sont comparés à la fonction de distribution de la particule. Les bénéfices de la nouvelle expression de l'ondelette de restitution sont ici clairement mis en évidence.

La transformation de Fourier fractionnaire (TF fractionnaire) peut également être utilisée pour restituer les hologrammes. Les premiers algorithmes permettant de calculer de manière numérique la transformation de Fourier fractionnaire sont basés sur la transformation de Fourier rapide [45]. Néanmoins, ce type d'algorithme ne conserve pas les propriétés de composition de la TF fractionnaire. L'utilisation d'algorithmes matriciels permet de passer outre ces limitations [46]. L'implémentation de la TF fractionnaire, comme opérateur de restitution, au CORIA a été réalisée par Sébastien Coëtmellec dans le cadre de sa Thèse de Doctorat [47]. Ainsi, l'analyse de la distribution d'intensité des figures de diffraction enregistrées par TF fractionnaire a été proposée [48] et appliquée avec succès à l'étude de champs de particules [49].

Le principal avantage de la TF fractionnaire est qu'elle est particulièrement adaptée au traitement de signaux bidimensionnels, à dérive linéaire de fréquence et dont le comportement est différent dans les deux directions. En effet, la généralisation de la TF fractionnaire au cas où les ordres de restitution sont différents dans les deux directions a

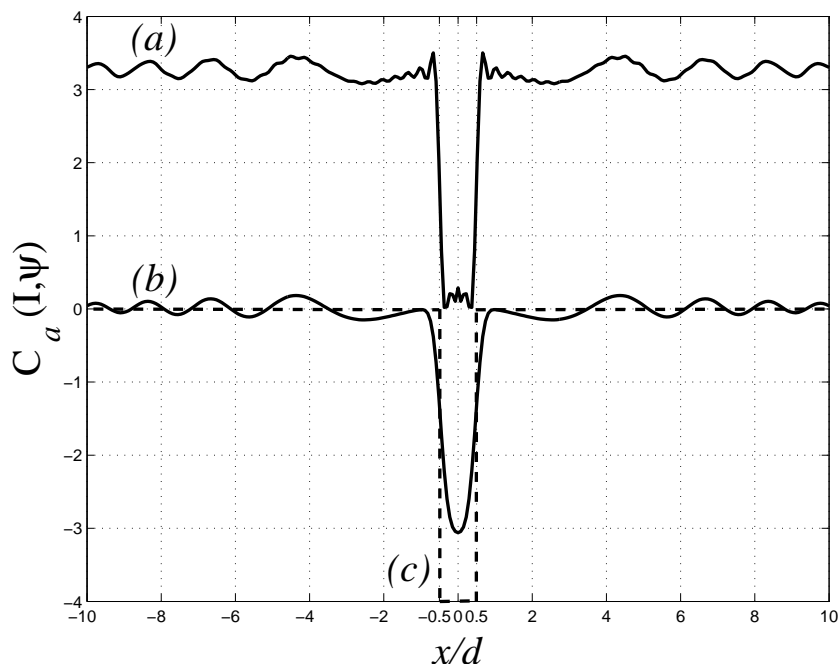


FIGURE 1.5 – Profils de corrélation de la distribution d'intensité (a) avec l'ondelette modifiée (b) avec l'ondelette proposée par Malek *et al.* (c) Profil de la fonction de distribution de l'objet

été proposée par Sahin *et al.* [50, 51, 52]. Ce type de situation est rencontré, par exemple, lorsque l'on cherche à restituer un hologramme entaché d'astigmatisme. D'autres méthodes de restitution telles que la TO ne sont pas adaptées à cette situation. Ainsi, la restitution d'hologrammes enregistrés en lumière gaussienne elliptique et astigmatique a été proposée [53]. L'utilisation de la TF fractionnaire permet ici de restituer une image des particules en s'affranchissant de l'astigmatisme présent lors de l'enregistrement de l'hologramme.

La microfluidique a trait à l'étude d'écoulements de très faibles dimensions. Elle trouve de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'aérospatiale [54], le refroidissement de composants électroniques [55] et l'impression de documents [56]. Dans son article de revue Sinton dressait l'état de l'art des diagnostics optiques appliqués à la visualisation d'écoulements de très faibles dimensions [57]. Ainsi, la micro-vélocimétrie par image de particules (μ PIV) a été utilisée pour caractériser les systèmes microfluidiques [58]. L'application de l'holographie numérique en microfluidique permet d'étudier les micros-écoulements dans leurs trois dimensions. Ainsi, Dubois *et al.* ont démontré la possibilité d'obtenir les composantes tridimensionnelles des vitesses de particules contenues dans un écoulement [59]. De même, les études de micros-écoulements laminaires [60] et d'écoulement de Dean [61] ont été menées. La possibilité d'obtenir des cartographies de vitesses tridimensionnelles au sein de microcanalisations de différentes sections a été abordée par Satake *et al.* [62, 63, 64, 65, 66]. Néanmoins, de nouvelles contraintes sont rencontrées lorsque l'on s'intéresse à l'étude d'écoulements canalisés. En effet, la géométrie cylindrique des canalisations introduit de l'astigmatisme dans le dispositif optique [67]. La possibilité de compenser cet astigmatisme de manière expérimentale a été abordée dans

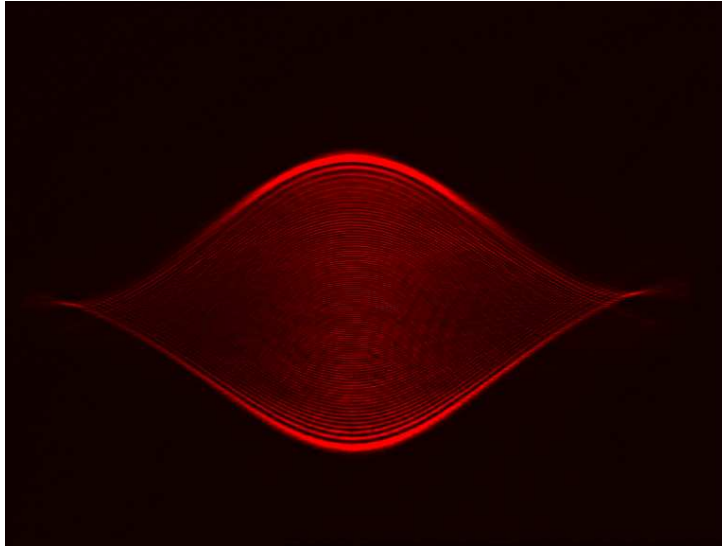


FIGURE 1.6 – Représentation de la distribution d'intensité d'un faisceau laser après focalisation dans une microcanalisation (fausses couleurs)

le cadre de l'étude de micro-particules contenues dans des ampoules de verre [68]. Ici les auteurs ont proposé d'utiliser une méthode dite "d'adaptation d'indice" (*index matching*) pour compenser les déformations dues à la géométrie cylindrique de l'ampoule de verre. La compensation numérique de cet astigmatisme a également été envisagée [69, 70, 71]. Ici, la compensation est réalisée en traitant l'hologramme de manière différente dans les deux directions du plan image.

Les déformations dues aux aberrations telles que l'astigmatisme sont d'autant plus pénalisantes lorsqu'on s'intéresse à l'étude d'écoulements dans des microcanaux. En effet, la faible dimension des dispositifs fait que les faisceaux utilisés pour imager sont fortement focalisés et les déformations qu'ils subissent sont amplifiées. La figure 1.6 illustre ce point. L'intensité du faisceau enregistrée après focalisation et propagation dans un microcanal est représentée. Le faisceau est très fortement déformé.

C'est dans ce contexte que s'inscrivent les travaux présentés dans ce manuscrit. Notre but est de proposer des outils, aussi bien numériques qu'expérimentaux, pour pouvoir appliquer l'holographie numérique à l'étude d'écoulements canalisés puis généraliser ces études en vue d'une application au domaine des écoulements microcanalisés. Ainsi, ce manuscrit s'organisera en quatre parties. La première partie sera consacrée à la généralisation des modèles d'holographie en faisceaux gaussiens, elliptiques et astigmatiques (AEG) au cas de particules non nécessairement situées sur l'axe optique. De plus, une méthode alternative, permettant d'étendre la simulation des hologrammes aux particules non nécessairement circulaires, sera présentée. Ces nouvelles considérations mèneront à la simulation des écoulements canalisés. Deux approches seront ici confrontées : une approche lentille mince et une approche plus générale, basée sur le formalisme des matrices ABCD, qui permettra de prendre en compte les aspects géométriques de la canalisation. Les modèles proposés précédemment seront confrontés aux données expérimentales acquises dans des conditions similaires. Les aspects théoriques et numériques développés se verront ainsi

validés. Une application de l'étude des écoulements canalisés sera présentée en troisième partie. L'astigmatisme du faisceau sera utilisé afin d'isoler des zones d'intérêt tridimensionnelles, dans un écoulement canalisé, par simple observation de la forme des figures de diffraction. Enfin, la dernière partie de ce manuscrit sera consacrée aux premières études menées dans le cadre de l'imagerie dans les microcanalisations. La validité des modèles développés dans ce cas sera vérifiée et l'étude d'hologrammes d'écoulements enregistrés dans une microcanalisation cylindrique sera proposée. De plus, au travers de deux configurations optiques différentes, la possibilité d'isoler des régions d'intérêt tridimensionnelles dans une microcanalisation sera démontrée.

Chapitre 2

Holographie en lumière gaussienne, elliptique et astigmatique

Sommaire

2.1	Introduction	9
2.1.1	Holographie en lumière gaussienne, elliptique et astigmatique	10
2.1.2	Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{R} de l'onde de référence	11
2.1.3	Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{O} de l'onde diffractée	12
2.1.4	Distribution d'intensité	13
2.2	Cas des particules décentrées	14
2.2.1	Distribution d'amplitude du faisceau diffracté	15
2.2.2	Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur	16
2.2.3	Analyse des hologrammes par transformation de Fourier fractionnaire	19
2.2.3.1	Détermination des ordres fractionnaires théoriques de restitution	20
2.2.3.2	Détermination des ordres fractionnaires optimaux de restitution d'un hologramme expérimental	21
2.2.4	Application de la TF fractionnaire aux hologrammes simulés et expérimentaux	22
2.3	Décomposition de la fonction de distribution d'amplitude de la particule sur une base de fonctions gaussiennes : application à la simulation d'hologrammes	24
2.3.1	Réécriture de la fonction de transfert des particules	24
2.3.2	Distribution d'amplitude du faisceau diffracté \mathcal{O}	27
2.3.3	Distribution d'intensité et comparaison des deux méthodes	29
2.3.4	Analyse des hologrammes par TF fractionnaire	30
2.4	Conclusion	31

2.1 Introduction

Beaucoup d'études réalisées en holographie dans l'axe utilisent l'approximation onde plane collimatée pour l'enregistrement des hologrammes [67]. Dans ces conditions, la distribution d'intensité notée $I(x, y)$ du champ d'interférences obtenue dans le plan du capteur pour une particule opaque, vaut :

$$I(x, y) = 1 - \frac{2}{\lambda z} \sin \left[\frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] F(x, y) + \frac{1}{(\lambda z)^2} F^2(x, y). \quad (2.1)$$

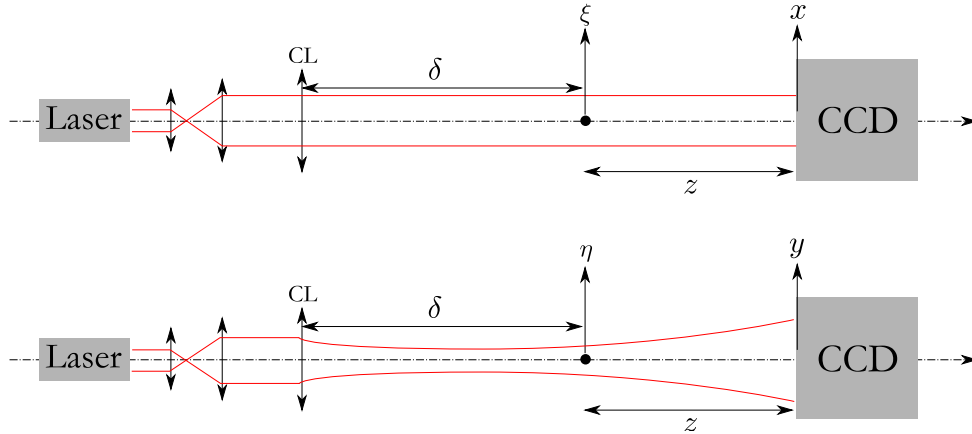


FIGURE 2.1 – Schéma de principe de l'holographie en lumière AEG

Cette relation est obtenue dans le cadre de l'approximation champ lointain. La fonction $F(x, y)$ est la transformée de Fourier d'un disque opaque et s'écrit :

$$F(x, y) = \frac{\pi d^2}{2} \frac{J_1\left(\frac{\pi d \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi d \sqrt{x^2 + y^2}}{\lambda z}}, \quad (2.2)$$

avec λ la longueur d'onde de la source, d le diamètre de la particule et z sa distance par rapport au capteur CCD.

Compte tenu de l'astigmatisme engendré par les canalisations utilisées, ce formalisme n'est plus valable. L'introduction des faisceaux gaussiens elliptiques et astigmatés dans les modèles d'holographie dans l'axe a été étudiée par Nicolas *et al.* [53]. Rappelons quelques résultats.

2.1.1 Holographie en lumière gaussienne, elliptique et astigmat

Une illustration du montage holographique en lumière gaussienne, elliptique et astigmaté est proposée figure 2.1. Le faisceau issu d'un laser He-Ne est collimaté puis focalisé au moyen d'une lentille cylindrique (notée CL) de distances focales $f_x \rightarrow \infty$ et $f_y = 200 \text{ mm}$. Ainsi le faisceau est focalisé dans la direction y et reste inchangé dans la direction x . La particule opaque de diamètre d , assimilée à un disque opaque de même diamètre et centrée sur l'axe optique du système, est située à la distance δ de la lentille cylindrique et à la distance z du capteur CCD. Dans cette configuration, la propagation de la lumière sur la distance z est donnée, dans l'approximation de Fresnel, par l'intégrale d'Huygens-Fresnel :

$$A(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) [1 - T(\xi, \eta)] \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right\} d\xi d\eta, \quad (2.3)$$

avec $E(\xi, \eta)$ la distribution d'amplitude du faisceau dans le plan de la particule et $[1 - T(\xi, \eta)]$ la fonction de transfert associée à la particule circulaire et opaque. L'expression de la distribution d'amplitude du faisceau dans le plan de la particule est déterminée

en calculant la propagation d'un point source gaussien au travers du système proposé figure 2.1. Elle s'écrit :

$$E(\xi, \eta) = \exp \left[- \left(\frac{\xi^2}{\omega_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\omega_\eta^2} \right) \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\xi^2}{R_\xi} + \frac{\eta^2}{R_\eta} \right) \right], \quad (2.4)$$

$\omega_{q=\xi,\eta}$ sont les largeurs du faisceau à $1/e$ dans le plan de la particule et $R_{q=\xi,\eta}$ sont les rayons de courbure du front d'onde dans le même plan. La fonction de transfert de la particule de diamètre d est, quant à elle, donnée par :

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \frac{d}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{d}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de l'équation (2.3), il est possible de séparer $A(x, y)$ en deux intégrales de telle sorte que :

$$A(x, y) = \frac{\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} z \right)}{i} [\mathcal{R}(x, y) - \mathcal{O}(x, y)]. \quad (2.6)$$

L'intégrale $\mathcal{R}(x, y)$ est associée à la propagation de l'onde de référence et s'écrit :

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (2.7)$$

L'intégrale $\mathcal{O}(x, y)$ correspond à l'onde diffractée par la particule :

$$\mathcal{O}(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (2.8)$$

La difficulté de l'estimation de $A(x, y)$ vient du calcul de l'intégrale $\mathcal{O}(x, y)$. En effet, cette dernière est bornée par la fonction $T(\xi, \eta)$ et ne présente pas de solution analytique.

2.1.2 Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{R} de l'onde de référence

Les développements théoriques de l'équation (2.7) conduisent à l'expression suivante :

$$\mathcal{R}(x, y) = K(\omega_\xi, R_\xi) K(\omega_\eta, R_\eta) \exp \left(-\frac{\pi}{\lambda z} \mathbf{r}^T N \mathbf{r} \right) \exp \left(i \frac{\pi}{\lambda z} \mathbf{r}^T M \mathbf{r} \right), \quad (2.9)$$

où \mathbf{r} correspond au vecteur (x, y) et les coefficients $K(\omega_{q=\xi,\eta}, R_{q=\xi,\eta})$ sont donnés par :

$$K(\omega_{q=\xi,\eta}, R_{q=\xi,\eta}) = \left[\frac{\frac{\pi \omega_q^2}{\lambda z}}{1 + i \frac{\pi \omega_q^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_q} - 1 \right)} \right]^{1/2}. \quad (2.10)$$

Les matrices diagonales M et N ont été introduites pour alléger les notations. Elles sont telles que :

$$N = \begin{pmatrix} N_\xi & 0 \\ 0 & N_\eta \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} M_\xi & 0 \\ 0 & M_\eta \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

avec

$$N_q = \frac{\pi}{\lambda z} \frac{\omega_q^2}{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2 z^2} \omega_q^4 \left(\frac{z}{R_q} - 1 \right)^2}, \quad (2.12)$$

et

$$M_q = 1 + \frac{\pi}{\lambda z} \frac{\omega_q^4 \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_q} - 1 \right)}{1 + \frac{\pi^2}{\lambda^2 z^2} \omega_q^4 \left(\frac{z}{R_q} - 1 \right)^2}. \quad (2.13)$$

2.1.3 Expression de la distribution d'amplitude \mathcal{O} de l'onde diffractée

Le calcul de l'intégrale \mathcal{O} (voir équation (2.8)) peut être développé au moyen de la théorie de Nijboer-Zernike et de la théorie de la diffraction en présence d'aberrations [30]. Pour mener à bien ce développement, il est plus pratique d'écrire \mathcal{O} en coordonnées cylindriques telles que $\xi = d\sigma \cos(\varphi)/2$, $\eta = d\sigma \sin(\varphi)/2$ dans le plan de la particule et $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ dans le plan du capteur. L'expression de \mathcal{O} devient alors :

$$\mathcal{O} = \frac{d^2}{4} \exp\left(i \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right) \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp(-a\sigma^2 + b\sigma^2 \cos(2\varphi)) \exp\left(-i \frac{\pi d}{\lambda z} r \sigma \cos(\varphi - \theta)\right) \times \sigma d\sigma d\varphi, \quad (2.14)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{d^2}{4} \left[a_1 + i\pi \left(b_1 - \frac{1}{\lambda z} \right) \right], \quad b = \frac{d^2}{4} [a_2 + i\pi b_2], \\ a_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_\xi^2} + \frac{1}{\omega_\eta^2} \right), \quad a_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\omega_\xi^2} - \frac{1}{\omega_\eta^2} \right), \\ b_1 &= \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{R_\xi} + \frac{1}{R_\eta} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2\lambda} \left(\frac{1}{R_\xi} - \frac{1}{R_\eta} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Enfin, il est possible, après calcul, de réécrire \mathcal{O} comme la somme discrète suivante [30, 72] :

$$\mathcal{O} = \pi d^2 \exp\left(i \frac{\pi r^2}{\lambda z}\right) \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \varepsilon_k T_k(r) \cos(2k\theta), \quad (2.16)$$

où $T_k(r)$ est donné, sous sa forme discrète par :

$$T_k(r) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2k+2p}^{2k}(\gamma_2) V_{2k+2p}^{2k}(r, u). \quad (2.17)$$

Les coefficients u et γ_2 sont liés à l'astigmatisme du système et s'expriment comme :

$$u = \frac{\pi d^2}{2\lambda z} (-1 + \lambda z b_1) - i a_1 \frac{d^2}{2}, \quad (2.18)$$

et

$$\gamma_2 = \frac{d^2}{4} (-\pi b_2 + i a_2). \quad (2.19)$$

Davantage de détails sur le calcul de $T_k(r)$ et des différents coefficients mis en jeu dans le calcul de \mathcal{O} peuvent être trouvés en annexe de la référence [53] et dans les travaux de J. J. M. Braat et A. J. E. M. Janssen [73, 74, 75].

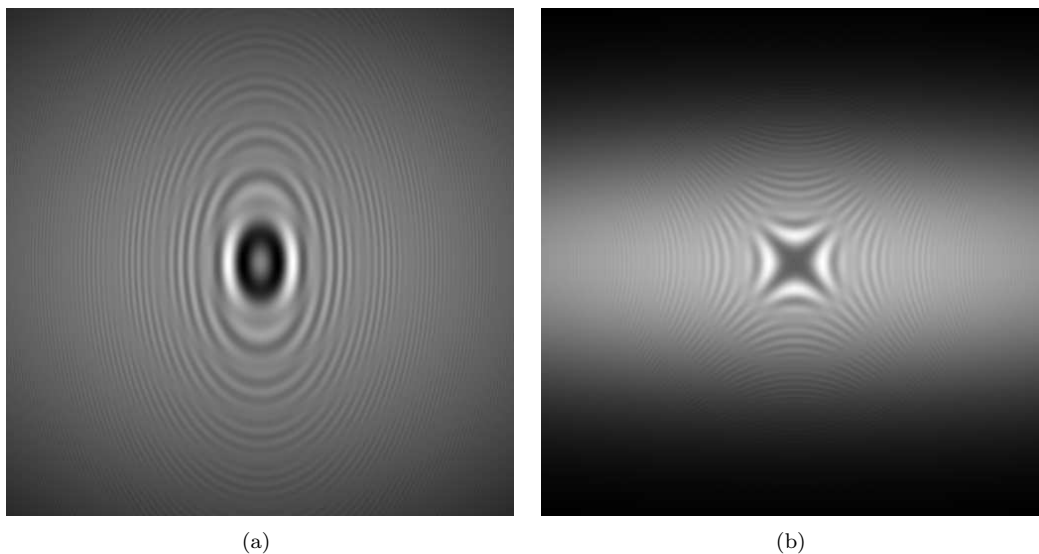


FIGURE 2.2 – (a) Hologramme simulé pour $\delta = 250 \text{ mm}$ et $z = 100 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $\delta = 150 \text{ mm}$ et $z = 100 \text{ mm}$

2.1.4 Distribution d'intensité

Un capteur CCD donne une représentation en intensité des hologrammes enregistrés. Connaissant les expressions de la distribution d'amplitude \mathcal{R} de la propagation du faisceau de référence et celle du faisceau diffracté par la particule \mathcal{O} , il est possible de déterminer l'intensité $I(x, y)$ dans le plan du capteur par :

$$I(x, y) = A(x, y) \bar{A}(x, y) = \kappa [|\mathcal{R}(x, y)|^2 + |\mathcal{O}(x, y)|^2] - 2\kappa \text{Re} \{ \mathcal{R}(x, y) \bar{\mathcal{O}}(x, y) \}. \quad (2.20)$$

La barre de surlignement est associée aux valeurs conjuguées et $\kappa = 1/(\lambda z)^2$ est une constante dépendant de la longueur d'onde de la source et de la distance d'enregistrement. Deux exemples d'hologrammes simulés par cette méthode sont proposés figure 2.2. La lentille cylindrique considérée est de distances focales $f_x \rightarrow \infty$ et $f_y = 200 \text{ mm}$. Ces hologrammes sont discrétisés sur 512×512 pixels de dimension $9 \mu\text{m}$. Deux cas de figures sont à considérer : le cas (a), où la figure d'interférences est elliptique. Dans cette configuration, la particule et le "capteur CCD" sont situés du même côté du waist. Dans le second cas (b), la figure d'interférences est hyperbolique. En effet, dans ce cas, les rayons de courbure du front d'onde dans la direction x et dans la direction y sont de signes opposés.

Cette modélisation permet de prendre en compte l'astigmatisme du faisceau. Elle offre, en outre, la possibilité, suivant les paramètres expérimentaux, d'obtenir deux types de figures d'interférences. Néanmoins, ce modèle ne prend pas en compte les objets décentrés des quantités (ξ_0, η_0) par rapport à l'origine des coordonnées. Introduire dans le modèle des objets décalés va permettre d'indiquer si le décalage introduit des phases quadratiques ou si, réciproquement la phase du front d'onde est la même quelque soit la position de l'objet.

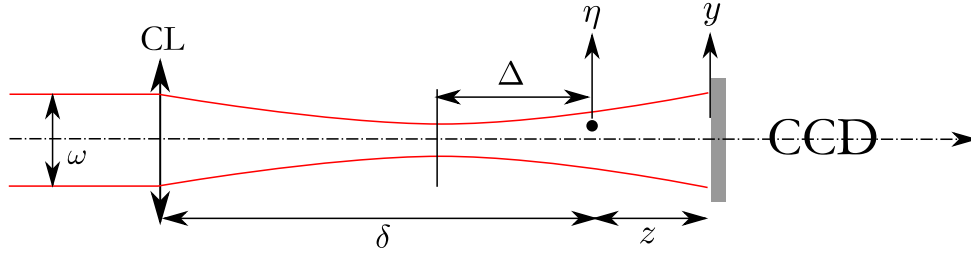


FIGURE 2.3 – Montage numérique et expérimental

2.2 Cas des particules décentrées

En utilisant les résultats de la section 2.1, nous proposerons une expression de la distribution d'intensité enregistrée pour une particule opaque, éclairée par un faisceau AEG et non nécessairement centrée sur l'axe optique du système. Le montage utilisé pour les simulations numériques et les expériences est proposé figure 2.3. Un faisceau gaussien, de rayon noté ω , arrive sur une lentille cylindrique plan-convexe (CL) de distances focales $f_x \rightarrow \infty$ et $f_y = 200 \text{ mm}$. Après propagation en espace libre, le faisceau gaussien elliptique et astigmat (AEG) généré par la lentille éclaire une particule opaque décentrée des quantités (ξ_0, η_0) par rapport à l'axe optique du système. Dans le plan de cette dernière, les largeurs à $1/e$ du faisceau sont notées ω_ξ et ω_η , les rayons de courbure du front d'onde sont, quant à eux, notés R_ξ et R_η . La position de la particule est repérée par sa distance à la lentille cylindrique δ et sa distance au capteur z . On notera de plus que la particule est située à une distance Δ du waist du faisceau.

Pour décrire la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur, l'intégrale d'Huygens-Fresnel est utilisée. Son expression a été donnée par l'équation (2.3). La distribution d'amplitude A dans le plan du capteur est donnée par :

$$A(x, y) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}z)}{i\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E_T(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{i\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right\} d\xi d\eta, \quad (2.21)$$

où $E_T(\xi, \eta)$ est le produit entre l'amplitude du faisceau dans le plan de la particule et la fonction de transfert de cette dernière. Dans le cas d'une particule de diamètre d , éclairée par un faisceau AEG, $E_T(\xi, \eta)$ s'écrit :

$$E_T(\xi, \eta) = \underbrace{\exp[c_\xi \xi^2 + c_\eta \eta^2]}_{=E(\xi, \eta)} \cdot \underbrace{[1 - T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)]}_{\text{Objet translaté}}. \quad (2.22)$$

Les coefficients c_ξ et c_η tiennent compte de la largeur à $1/e$ du faisceau et du rayon de courbure du front d'onde dans le plan de la particule. Ils sont donnés par :

$$c_\xi = -\frac{1}{\omega_\xi^2} - i\frac{\pi}{\lambda R_\xi}, \quad c_\eta = -\frac{1}{\omega_\eta^2} - i\frac{\pi}{\lambda R_\eta}. \quad (2.23)$$

Comme dans le cas de la particule centrée sur l'axe optique, l'équation (2.21) peut être divisée en deux intégrales de telle sorte que :

$$A(x, y) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}z)}{i} [\mathcal{R}(x, y) - \mathcal{O}(x, y)], \quad (2.24)$$

L'expression de la distribution d'amplitude \mathcal{R} est donnée par l'équation 2.9.

2.2.1 Distribution d'amplitude du faisceau diffracté

L'intégrale \mathcal{O} est donnée par :

$$\mathcal{O}(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (2.25)$$

Il y a ici peu de différences par rapport à l'intégrale définissant le faisceau diffracté dans le cas d'une particule centrée sur l'axe optique du système (équation (2.8)). La principale nuance réside dans le fait que la fonction de transfert de la particule a été translatée. Pour pouvoir mener les développements de l'équation (2.25), il est nécessaire de réaliser un changement de variables : $\xi \leftarrow \xi + \xi_0$, $\eta \leftarrow \eta + \eta_0$. Après le passage en coordonnées cylindriques et les développements des calculs (présentés Annexe A), \mathcal{O} devient [76] :

$$\mathcal{O} = \frac{\pi D^2}{\lambda z} \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \cdot \exp(i c_z [(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \varepsilon_k T_k(r, \gamma) \cos(2k\theta), \quad (2.26)$$

avec

$$T_k(r, \gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2k+2p}^{2k}(\delta) V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma), \quad (2.27)$$

et

$$V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma) = \exp(i\gamma/2) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m j_m(\gamma/2) \times \sum_{l=\max(0, m-2k-p, p-m)}^{m+p} (-1)^l \omega_{ml} \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r}. \quad (2.28)$$

Ici, du fait de la sommation des fonctions T_k , \mathcal{O} est une solution semi-analytique de l'équation (2.25). Les valeurs des coefficients ω_{ml} peuvent être retrouvées dans les références [53] et [75]. La valeur de $\Phi(\xi_0, \eta_0)$ est définie Annexe A.

Les équations (2.26) et (2.28) dépendent de la sommation d'une infinité de termes sur k (pour l'équation (2.26)) et sur p (pour l'équation (2.28)). Pour obtenir une bonne précision dans l'estimation de \mathcal{O} , le nombre de termes à sommer dans l'équation (2.26) et dans l'équation (2.28) doit être déterminé. Ainsi, la contribution des $V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma)$ en fonction des valeurs de k et de p doit être déterminée. Donnons dans un premier temps une estimation de γ . Son expression est la suivante :

$$\gamma = \frac{d^2}{4} c_z - i \frac{d^2}{8} (c_\xi + c_\eta) \quad (2.29)$$

Considérons les configurations étudiées dans la référence [53]. Les particules utilisées pour ensemençer les écoulements ont un diamètre $d \approx 100 \mu m$. Dans le cas des hologrammes proposés figure 2.2, la source utilisée est un laser He-Ne, sa longueur d'onde est approximativement de $\lambda \approx 1 \mu m$. Les particules considérées sont situées à $50 mm$ du waist du

faisceau et à $z \approx 100 \text{ mm}$ du capteur CCD. Dans ces conditions, le rayon de courbure du front d'onde dans le plan des particules est $R_q \approx 50 \text{ mm}$. Ainsi, en considérant ces approximations¹, la valeur de γ est estimée à $\gamma \approx 0,785 \times 10^{-1} + 0,816 \times 10^{-3}i$. La première quantité qu'il est important d'estimer est [73, 74, 75] :

$$\left| j_m \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{(2m+1)^{1/2}} \min \left(1, \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{|\gamma/4|^m}{m!} \right). \quad (2.30)$$

Pour la valeur de γ considérée ce terme est inférieur à $0,142 \times 10^{-1}$ dès lors que l'on considère $m \geq 1$. Appliquons le même traitement au terme en $J_{2k+2l+1}(r)$. Les coefficients ω_{ml} sont tels que $\omega_{ml} \geq 0$ et $\sum_l \omega_{ml} = 1$. Ils sont donc sans influence sur le terme contenant les fonctions de Bessel. D'après [77], on a :

$$\left| \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r} \right| \leq \min \left(1, \frac{1}{2} \frac{|r|^{2k+2l} \exp(|r|^2)}{(2k+2l+1)!} \right). \quad (2.31)$$

Pour estimer avec la meilleure précision A_2 , le terme déterminant est le produit des membres de gauche des relations (2.30) et (2.31) :

$$\left| j_m \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right| \left| \frac{J_{2k+2(m+p)+1}(r)}{r} \right|. \quad (2.32)$$

Ici, ce terme est inférieur à $0,142 \times 10^{-1}$ pour $(k, p, m) \geq 1$. Ainsi, il est possible d'obtenir une bonne approximation de \mathcal{O} pour $k = p = m = 0$. Dans ce cas les $V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma)$ se résument à $V_0^0(r, \gamma)$ dont l'expression est donnée par :

$$V_0^0(r, \gamma) \simeq \exp(i\gamma/2) j_0(\gamma/2) \frac{J_1(r)}{r}. \quad (2.33)$$

Sous ces conditions, la distribution d'amplitude du faisceau diffracté par une particule décentrée vaut :

$$\mathcal{O} = \frac{\pi D^2}{2\lambda z} \beta_0^0(\delta) \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \exp(ic_z [(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]) \cdot V_0^0(r, \gamma). \quad (2.34)$$

2.2.2 Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur

La distribution d'intensité I dans le plan du capteur CCD peut être déterminée à partir des relations (2.7) et (2.34). Elle s'écrit :

$$I = A\bar{A} = [|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{O}|^2] - 2\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}. \quad (2.35)$$

A partir de l'expression de I , on remarque que les termes $|\mathcal{R}|^2$ et $|\mathcal{O}|^2$ ne génèrent pas d'interférences dans le plan du capteur. En revanche, le troisième terme de l'équation (2.35) présente une phase composée d'un terme constant et d'une dérive de fréquence instantanée linéaire. En reprenant l'équation (2.35), nous pouvons écrire :

$$\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}} = |\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}| \exp[i \arg(\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}})], \quad (2.36)$$

1. Si l'on considère des particules de diamètre plus faible situées plus loin du waist et du capteur CCD, la valeur de γ sera inférieure

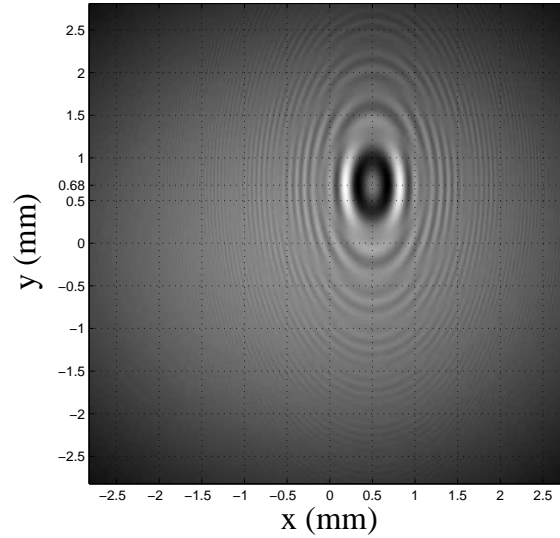


FIGURE 2.4 – Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = 50 \text{ mm}$, $d = 150 \mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 250 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$

où $\arg(\overline{\mathcal{R}\mathcal{O}}) = \phi - \phi_0$ avec

$$\phi = c_z (x^2(M_x - 1) + y^2(M_y - 1)) + 2c_z (x\xi_0 + y\eta_0) - \arg\left(\frac{J_1(r)}{r}\right), \quad (2.37)$$

et

$$\phi_0 = \frac{\Re(\gamma)}{2} + \Im(\Phi(\xi_0, \eta_0)) + \arg\left(j_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) + \arg(\beta_0^0(\delta)) - \arg(K_\xi K_\eta). \quad (2.38)$$

Le premier terme de l'équation (2.37) correspond à une phase quadratique² alors que le second est une phase linéaire.

Pour illustrer l'intérêt de cette nouvelle écriture de l'intégrale \mathcal{O} , deux hologrammes sont simulés. Dans un premier temps, une particule de diamètre $d = 150 \mu\text{m}$ située à $\delta = 250 \text{ mm}$ de la lentille cylindrique et $z = 120 \text{ mm}$ du capteur CCD est considérée. Dans ces conditions, les largeurs à $1/e$ du faisceau dans le plan de la particule sont $(\omega_\xi = 7 \text{ mm}, \omega_\eta = 1,75 \text{ mm})$ et les rayons de courbures du front d'onde dans le même plan sont $(R_\xi \rightarrow \infty, R_\eta = 50 \text{ mm})$. L'ensemble est éclairé par un laser de longueur d'onde $\lambda = 632,8 \text{ nm}$. La particule est translatée des quantités $(\xi_0 = 0,5 \text{ mm}, \eta_0 = 0,2 \text{ mm})$ par rapport à l'axe optique du système. La figure de diffraction obtenue dans ces conditions est représentée figure 2.4. Nous pouvons remarquer que le décalage (x_0, y_0) de la figure de diffraction dans le plan du capteur n'est pas le même que le décalage (ξ_0, η_0) dans le plan de la particule. Si l'on considère que l'on est assez loin du waist, la relation entre les deux décalages est la suivante :

$$y_0 = \frac{|\Delta| \pm z}{|\Delta|} \eta_0, \quad (2.39)$$

où Δ correspond à la position de la particule par rapport au waist du faisceau. Le signe de z dépendra de la position de la particule par rapport au waist du faisceau : si la particule

2. Nous verrons par la suite que la TF fractionnaire est particulièrement bien adaptée au traitement des signaux comportant des phases quadratiques

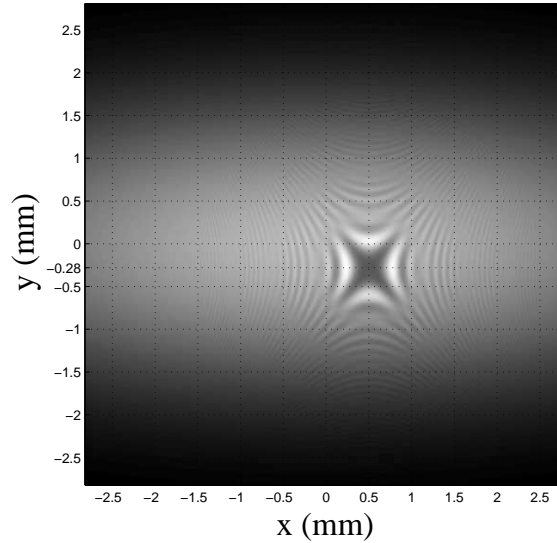


FIGURE 2.5 – Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = -50 \text{ mm}$, $d = 150 \mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 150 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$

est après le waïst le signe de z sera positif ; à l'inverse si la particule est avant le waïst le signe précédant z sera négatif. Étant donné que la focalisation n'intervient que dans la direction y , le paramètre Δ sera infini dans la direction x . Ainsi, $x_0 = \xi_0 = 0,5 \text{ mm}$. En revanche dans la direction y , $\Delta = 50 \text{ mm}$. On obtient alors $y_0 = 0,68 \text{ mm}$.

Considérons maintenant le cas d'une particule de diamètre $d = 150 \mu\text{m}$ située à $\delta = 150 \text{ mm}$ de la lentille cylindrique et $z = 120 \text{ mm}$ du capteur CCD. Les rayons à $1/e$ du faisceau dans le plan de la particule sont ($\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$) et les rayons de courbures du front d'onde dans le même plan sont ($R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = -50 \text{ mm}$). La particule est déplacée de la même quantité, par rapport à l'axe optique du système, que dans le cas précédent. L'hologramme ainsi obtenu est illustré figure 2.5. Les franges d'interférences présentent un aspect hyperbolique. Cette figure de franges est due au fait que les signes des rayons de courbure du faisceau dans le plan de la particule sont opposés. La relation (2.39) est utilisée pour déterminer le décalage de la figure de diffraction dans le plan du capteur. Le couple ($x_0 = 0,5 \text{ mm}$, $y_0 = -0,28 \text{ mm}$) est obtenu. Ces valeurs correspondent bien à celles déterminées sur l'hologramme simulé.

Dans le cadre de l'étude menée par Nicolas *et al.* [53], l'utilisation de la TF fractionnaire permet de restituer l'hologramme d'une particule centrée sur l'axe optique et éclairée par un faisceau AEG. La complexité des expressions mathématiques de l'intensité diffractée dans le plan du capteur ne permettait pas d'affirmer que la restitution par TF fractionnaire correspond réellement à une remise au point sur les particules. De plus la détermination des ordres fractionnaires n'est développée que dans le cas où la particule est centrée. Les valeurs des ordres fractionnaires optimaux peuvent être affectées par ce décalage. Il est donc nécessaire de déterminer les valeurs des ordres fractionnaires de restitution à appliquer aux hologrammes lorsque les particules sont décentrées par rapport à l'axe optique du système.

Dans la suite, compte tenu des simplifications apportées à l'expression de \mathcal{O} , la preuve

théorique que la restitution de l'hologramme redonne effectivement la particule est apportée. De plus, nous montrerons que quelque soit la position transversale de la particule, il est possible de la restituer avec le même couple d'ordres fractionnaires.

2.2.3 Analyse des hologrammes par transformation de Fourier fractionnaire

La TF fractionnaire est un opérateur intégral communément utilisé en traitement du signal et en traitement des images [78, 79]. Son expression mathématique est disponible dans les références [80, 81]. La TF fractionnaire bidimensionnelle d'ordres $\alpha_x = a_x\pi/2$ et $\alpha_y = a_y\pi/2$ d'une fonction I est donnée par :

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)](x_a, y_a) = \int_{\mathbb{R}^2} N_{\alpha_x}(x, x_a) N_{\alpha_y}(y, y_a) I(x, y) dx dy, \quad (2.40)$$

où le noyau de la transformation est donné par

$$N_{\alpha_p}(x, x_a) = C(\alpha_p) \exp\left(i\pi \frac{x^2 + x_a^2}{s_p^2 \tan \alpha_p}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi x_a x}{s_p^2 \sin \alpha_p}\right), \quad (2.41)$$

avec

$$C(\alpha_p) = \frac{\exp(-i(\frac{\pi}{4} \text{sign}(\sin \alpha_p) - \frac{\alpha_p}{2}))}{|s_p^2 \sin \alpha_p|^{1/2}}. \quad (2.42)$$

Le coefficient $C(\alpha_p)$ assure la conservation de l'énergie dans les espaces fractionnaires. Ici $p = x, y$. De manière générale, le coefficient s_p est considéré comme une constante de normalisation³. Elle peut donc, en théorie, prendre n'importe quelle valeur. Cependant, il est possible de lier sa valeur aux paramètres physiques de l'expérience. Ainsi, la valeur de s_p telle que [38] :

$$s_p^2 = N_p \cdot \delta_p^2, \quad (2.43)$$

avec N_p le nombre de points d'échantillonnage dans les directions x et y dans le domaine spatial et les domaines fractionnaires. La période d'échantillonnage est donnée par δ_p . Les calculs menant à la détermination de s_p sont donnés en annexe B. Dans la suite, pour les développements théoriques, le nombre d'échantillons et la période d'échantillonnage seront identiques dans les deux directions.

Le principal intérêt de la TF fractionnaire réside dans sa capacité à transformer les fonctions à dérive de fréquence linéaire en impulsion de Dirac [82]. Considérons $g(x) = \exp(i\pi\chi x^2)$ une fonction à dérive linéaire de fréquence. En considérant $1/\chi = -\tan \alpha$ et en utilisant le fait que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{i\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{i\varepsilon}\right) = \delta(x), \quad (2.44)$$

la TF fractionnaire d'ordre optimal α de $g(x)$ est :

$$\mathcal{F}_\alpha[g(x)] = \delta(x_a). \quad (2.45)$$

Ainsi, en choisissant la bonne valeur de l'ordre fractionnaire de la TF fractionnaire, il est possible d'identifier clairement des fonctions à dérive linéaire de fréquence.

3. Cette constante est introduite pour appliquer la TF fractionnaire (définie mathématiquement) à des grandeurs physiques

2.2.3.1 Détermination des ordres fractionnaires théoriques de restitution

Pour restituer l'image de la particule, la TF fractionnaire est appliquée à la distribution d'intensité de l'hologramme (équation (2.35)) :

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I] = \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|\mathcal{R}|^2] - \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[2|\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}| \cos(\phi - \phi_0)] + \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|\mathcal{O}|^2] \quad (2.46)$$

Les termes $|\mathcal{R}|^2$ et $|\mathcal{O}|^2$ ne produisent pas de dérive de fréquence linéaire. Ils n'ont donc pas de conséquence sur la valeur des ordres fractionnaires à déterminer. En revanche, le second terme produit une dérive de fréquence. C'est sur ce terme que porteront les discussions quant à la détermination de la valeur des ordres fractionnaires optimaux de restitution. A partir de la relation (2.46) et en considérant que $2 \cos(\phi - \phi_0) = \exp(-i(\phi - \phi_0)) + \exp(i(\phi - \phi_0))$, alors le second terme s'écrit comme :

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[2|\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}| \cos(\phi - \phi_0)] = \exp\left(i\pi \frac{x_a^2}{s^2 \tan \alpha_x}\right) \exp\left(i\pi \frac{y_a^2}{s^2 \tan \alpha_y}\right) \{I_- + I_+\} \quad (2.47)$$

avec

$$I_{\pm} = C(\alpha_x)C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}| \exp[i(\phi_a \pm (\phi - \phi_0))] \exp\left[-\frac{2i\pi}{s^2} \left(\frac{x_a x}{\sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{\sin \alpha_y}\right)\right] dx dy. \quad (2.48)$$

La phase quadratique du noyau de la TF fractionnaire est notée $\phi_a = \frac{\pi}{s^2}(x^2 \cot \alpha_x + y^2 \cot \alpha_y)$. La restitution de l'hologramme est possible lorsque la valeur de l'ordre fractionnaire est telle que la phase quadratique de la TF fractionnaire annule celle de l'hologramme : $\phi_a \pm \phi = 0$. Dans ces conditions, les ordres optimaux vérifient la relation suivante :

$$\frac{\pi \cot \alpha_x^{opt}}{s^2} = c_z(M_x - 1), \quad \frac{\pi \cot \alpha_y^{opt}}{s^2} = c_z(M_y - 1). \quad (2.49)$$

En appliquant les ordres de restitution optimaux à I_- , sa TF fractionnaire n'est autre qu'une transformation de Fourier classique :

$$I_- = \chi \cdot \mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda z} \rho^T N \rho\right) \right] (u, v), \quad (2.50)$$

avec

$$\chi = \frac{\pi D^2}{2\lambda z} C(\alpha_x)C(\alpha_y) K_{\xi} K_{\eta} \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \beta_0^0(\delta) \exp\left(i\frac{\gamma}{2}\right) j_0\left(\frac{\gamma}{2}\right). \quad (2.51)$$

L'opérateur \mathcal{F} est une transformation de Fourier bidimensionnelle. Ici, les fréquences spatiales u et v sont données par :

$$u = \frac{x_a}{s^2 \sin(\alpha_x^{opt})} + \frac{c_z \xi_0}{\pi} \quad v = \frac{y_a}{s^2 \sin(\alpha_y^{opt})} + \frac{c_z \eta_0}{\pi}. \quad (2.52)$$

L'équation (2.50) est la transformation de Fourier (TF) du produit de deux fonctions. Les propriétés de la TF permettent de réécrire cette relation comme le produit de convolution des TF des deux fonctions :

$$I_- = \chi \cdot \mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] * \mathcal{F} \left[\exp\left(-\frac{\pi}{\lambda z} \rho^T N \rho\right) \right]. \quad (2.53)$$

Les variables r et ρ sont associées aux mêmes variables (x, y) . L'utilisation du théorème de translation de la TF, de la transformation de Hankel et de l'intégrale discontinu de Weber-Schafheitlin [77] nous permet d'écrire :

$$\mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] = 2\pi \left(\frac{\lambda z}{\pi d} \right)^2 \exp[-i2\pi(uX_0 + vY_0)] \times \begin{cases} 1, & 0 < \sqrt{u^2 + v^2} < \frac{d/2}{\lambda z}, \\ 1/2, & 0 < \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{d/2}{\lambda z}, \\ 0, & \sqrt{u^2 + v^2} > \frac{d/2}{\lambda z} > 0, \end{cases} \quad (2.54)$$

avec $X_0 = \xi_0(1 - ic_\xi/c_z)$ et $Y_0 = \eta_0(1 - ic_\eta/c_z)$. La fonction du membre de droite de l'équation (2.54), de coordonnées spatiales (x_a, y_a) correspond à une fonction *circ*() dont le diamètre d est celui de la particule opaque. Ceci montre que la restitution par une TF fractionnaire d'ordre optimal conduit bien à la restitution de l'objet. Cependant, comme le faisceau de référence est gaussien, la fonction objet est convoluée avec la TF d'une fonction gaussienne bidimensionnelle (second terme de l'équation (2.53)). Si la largeur de cette gaussienne tend vers l'infini, sa TF sera un pic de Dirac. Le pic de Dirac étant l'élément neutre du produit de convolution, nous remettrons effectivement bien au point sur l'image de la particule. De plus cet ordre ne dépend pas de la position de la particule dans le champ. Ce résultat est important dans le cas de l'étude de champs de particules car un seul couple d'ordres fractionnaires permet d'extraire l'information d'un plan de restitution. Pour déterminer le décalage des figures de diffraction dans un plan fractionnaire (x_a, y_a) il faut considérer le changement de coordonnées suivant :

$$(u, v) \rightarrow \left(s^2 \left(u - \frac{c_z \xi_0}{\pi} \right) \tan \alpha_x^{opt}, s^2 \left(v - \frac{c_z \eta_0}{\pi} \right) \tan \alpha_y^{opt} \right). \quad (2.55)$$

Cette correction est nécessaire car la TF fractionnaire n'est pas invariante par translation. Un décalage dans le domaine spatial mène à un décalage en fréquence et en phase dans le domaine fractionnaire.

2.2.3.2 Détermination des ordres fractionnaires optimaux de restitution d'un hologramme expérimental

Les expressions théoriques des ordres fractionnaires de restitution données par l'équation (2.49) sont particulièrement adaptées à la restitution d'hologrammes simulés. En effet, dans ce cas, les paramètres de simulation tels que la position δ de la particule par rapport à la lentille cylindrique (et les paramètres du faisceau qui en résultent ω_q et R_q) ou la position $z + \delta$ du capteur CCD par rapport à la lentille, sont connus avec précision. Dans le cas d'un hologramme réel (obtenu expérimentalement), il n'est pas possible, dans la majeure partie des cas, de connaître les paramètres d'enregistrement avec la même exactitude. Néanmoins, en prenant en compte les incertitudes liées à la mesure des différentes positions, l'équation (2.49) permet de déterminer une gamme de valeurs possibles des ordres fractionnaires de restitution. En ajustant la valeur des ordres fractionnaires, dans cette gamme, jusqu'à obtenir le meilleur contraste entre l'image de l'objet et le bruit de fond, il est possible de traiter le cas des hologrammes réels.

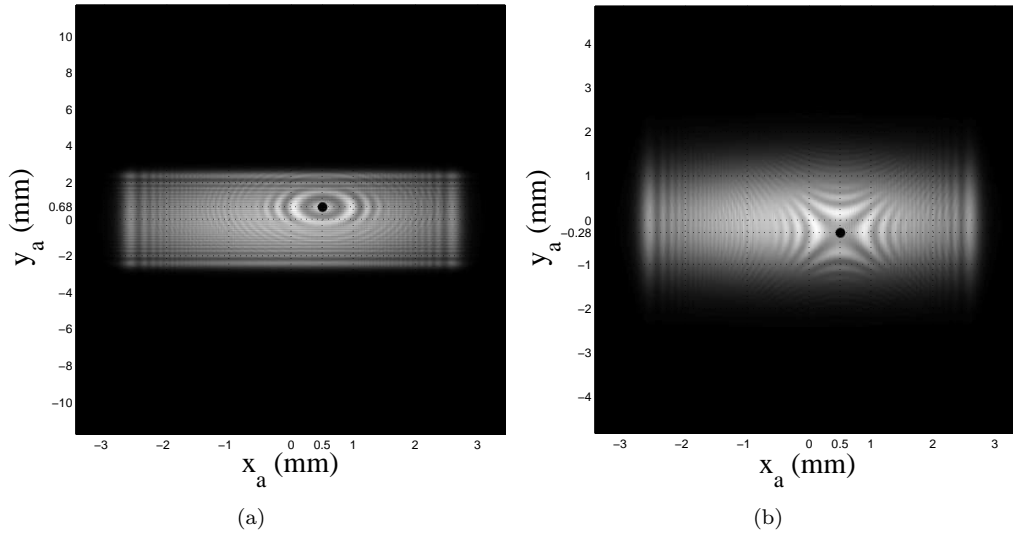


FIGURE 2.6 – (a) TF fractionnaire de l’hologramme de la figure 2.4 avec $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = -0,850$. (b) TF fractionnaire de l’hologramme de la figure 2.5 avec $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = 0,664$

La preuve théorique des capacités de la TF fractionnaire à remettre au point sur l’image d’objet translaté a été apportée. De plus, il est montré que le décalage de la particule n’affecte pas la valeur de l’ordre fractionnaire à appliquer à l’hologramme. Dans la suite, la TF fractionnaire sera appliquée à la restitution d’hologrammes simulés et d’hologrammes expérimentaux.

2.2.4 Application de la TF fractionnaire aux hologrammes simulés et expérimentaux

La simulation d’hologramme de particules est présentée figures 2.4 et 2.5. Les figures proposées sont discrétisées sur 512×512 pixels avec un pas de $11 \mu m \times 11 \mu m$. Dans un premier temps, le cas de la figure de diffraction proposée figure 2.4 sera traité. Rappelons qu’elle est générée par une particule opaque de diamètre $d = 150 \mu m$ située à $z = 120 mm$ du capteur. Compte tenu des paramètres de simulation, les ordres fractionnaires optimaux de restitution, obtenus à partir de la relation (2.49), sont $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = -0,850$. La restitution de l’hologramme est présentée figure 2.6 (a). Ici le module au carré de la TF fractionnaire $|\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}|^2$ est représenté. La forme de la particule restituée n’a pas été modifiée : en effet, la largeur de la fonction gaussienne dont la TF est convoluée à l’image de l’objet restitué (Cf. équation (2.53)) est très supérieure au diamètre d de la particule (les dimensions de la gaussienne sont d’approximativement $680 \mu m$ dans la direction x et $490 \mu m$ dans la direction y). La TF fractionnaire est maintenant appliquée à la restitution de l’hologramme de la figure 2.5. Les paramètres de simulation utilisés imposent les ordres fractionnaires optimaux de restitution suivants : $a_x^{opt} = -0,564$ et $a_y^{opt} = 0,664$. La restitution est proposée figure 2.6 (b). Une nouvelle fois, la TF fractionnaire permet de retrouver l’image de l’objet sans déformation.

La restitution d’hologrammes de particules non centrées sur l’axe optique du système a été réalisée avec succès. De plus les définitions des ordres fractionnaires sont les mêmes

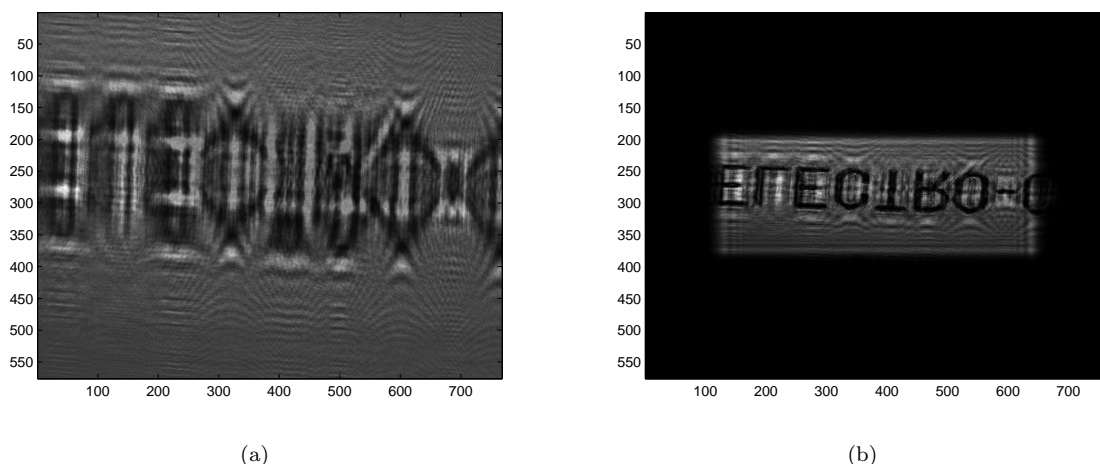


FIGURE 2.7 – (a) Figure de diffraction du mot “ELECTRO”. (b) TF fractionnaire de l’hologramme de la figure 2.7 avec $a_x^{opt} = 0,505$ et $a_y^{opt} = -0,785$

que dans le cas de particules centrées. Pour illustrer l’indépendance de la valeur des ordres fractionnaires vis à vis de la position axiale des objets, la restitution d’un objet qui s’étend sur tout le champ image est abordée. L’hologramme d’un réticule Malvern RS-3 a été enregistré. Ce réticule est en verre de qualité optique et le mot “ELECTRO” est déposé sur sa surface. Ce mot fait une largeur de $6,5 \text{ mm}$. Le réticule est positionné à une distance $\delta \approx 156 \text{ mm}$ de la lentille cylindrique et à une distance $z \approx 117 \text{ mm}$ du capteur CCD. L’hologramme associé à cette expérience est proposé figure 2.7 (a). Ce dernier a été enregistré sur un capteur CCD de 768×576 pixels de $11 \mu\text{m} \times 11 \mu\text{m}$ de pas. La TF fractionnaire est appliquée à cet hologramme. Les paramètres expérimentaux n’étant pas connus avec précision, les ordres fractionnaires sont ajustés de telle sorte que le contraste entre l’image du mot “ELECTRO” et le bruit de fond soit le meilleur possible. Ainsi le couple d’ordres $a_x^{opt} = 0,505$ et $a_y^{opt} = -0,785$ est obtenu. La figure 2.7 (b) illustre la restitution. Un seul couple d’ordres fractionnaires est nécessaire pour remettre au point sur tout le mot “ELECTRO”. Notons que le mot “ELECTRO” est retourné. Ceci est dû au déphasage de Gouy que subit un faisceau gaussien, se propageant de $-\infty$ à $+\infty$ et en passant par un point focal. Ce déphasage vaut π .

Un modèle permettant de simuler les hologrammes de particules décentrées par rapport à l’axe optique du système et éclairées par un faisceau AEG a été proposé. Ces développements peuvent, dès lors, être appliqués à la simulation des hologrammes d’écoulements enregistrés en lumière astigmat. De plus, il a été montré que la valeur des ordres fractionnaires de restitution étaient les mêmes que dans le cas où les particules étaient centrées sur l’axe optique du système. En effet, la restitution d’un objet étendu a été proposée et réalisée avec succès. Néanmoins, le modèle proposé ne permet de traiter que le seul cas où les objets considérés sont des particules circulaires. Dans la suite, une méthode permettant d’étendre ces simulations au cas d’objets elliptiques sera proposée.

2.3 Décomposition de la fonction de distribution d'amplitude de la particule sur une base de fonctions gaussiennes : application à la simulation d'hologrammes

Une méthode de simulation qui permet de traiter des hologrammes enregistrés en lumière AEG, et dans le cas où les particules sont décentrées a été proposée dans la partie précédente. Néanmoins, la complexité des développements analytiques de \mathcal{O} , limite cette méthode au cas de particules dont la surface projetée est circulaire. La possibilité de généraliser ces études au cas de particules ellipsoïdes ou de fibres peut être intéressante, notamment dans le cadre des études microfluidiques. En effet, compte tenu des très faibles dimensions des milieux étudiés, il est possible que les objets se voient déformés, notamment si l'étude de bulles est considérée. Dans la suite, l'utilisation d'une méthode de calcul simplifiée, permettra de généraliser le modèle de simulation et de restitution holographique en lumière AEG, au cas où les objets ne sont pas à surface projetée circulaire.

2.3.1 Réécriture de la fonction de transfert des particules

Habituellement, la fonction de transfert d'une particule est exprimée par la fonction $circ()$ telle que :

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < \frac{d}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{si } \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{d}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.56)$$

Celle-ci limite la simulation au cas des particules circulaires. De plus cette dernière n'est à valeur non nulle que sur un domaine borné, limité par le diamètre de la particule. C'est cet aspect qui rend le calcul de l'intégrale \mathcal{O} (associée à la partie diffractée du faisceau) compliqué. Dans leurs travaux sur l'étude de la diffraction des champs acoustiques, J. J. Wen et M. Breazeale ont proposé une réécriture du champ diffracté comme une somme de fonctions gaussiennes [83, 84]. Ces études ont ensuite été utilisées en optique pour étudier la propagation de faisceaux gaussiens et elliptiques au travers de systèmes décentrés ou présentant des ouvertures annulaires ou elliptiques [85, 86, 87, 88]. La fonction de transfert $T(\xi, \eta)$ des particules sera donc décomposée sur cette base.

Une représentation schématique dans le plan (ξ, η) , d'une ouverture elliptique est proposée figure 2.8. Elle est caractérisée par le rayon de son grand axe a , le rayon de son petit axe b et l'angle θ que son grand axe fait par rapport à l'axe ξ .

L'expression de la fonction de transfert de la particule $T(\xi, \eta)$ sur la base de fonctions gaussiennes est donnée par :

$$T(r) = \sum_{k=1}^N A_k \exp(-r^T R^T P_k R r), \quad (2.57)$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

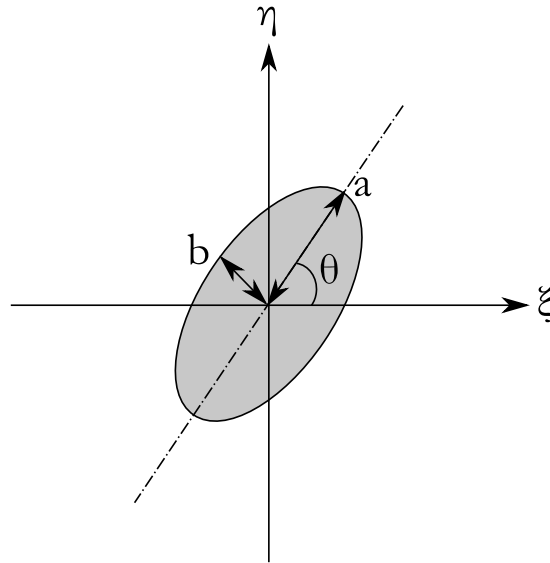


FIGURE 2.8 – Représentation schématique de l'ouverture elliptique

et

$$P_k = \begin{pmatrix} \frac{B_k}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{B_k}{b^2} \end{pmatrix}. \tag{2.59}$$

Les coefficients A_k et B_k sont déterminés par une résolution numérique de l'équation de Kirchhoff [84]. Le nombre de termes A_k et B_k est imposé au moment de la résolution de l'équation de Kirchhoff. Les valeurs des coefficients A_k et B_k , regroupées dans le tableau

k	A_k	B_k
1	11,428 + 0,95175i	4,0697 + 0,22726i
2	0,06002 - 0,08013i	1,1531 - 20,933i
3	-4,2743 - 8,5562i	4,4608 + 5,1268i
4	1,6576 + 2,7015i	4,3521 + 14,997i
5	-5,0418 + 3,2488i	4,5443 + 10,003i
6	1,1227 - 0,68854i	3,8478 + 20,078i
7	-1,0106 - 0,26955i	2,5280 - 10,310i
8	-2,5974 + 3,2202i	3,3197 - 4,8008i
9	-0,14840 - 0,31193i	1,9002 - 15,820i
10	-0,20850 - 0,23851i	2,6340 + 25,009i

Tableaux 2.1 – Valeurs des coefficients A_k et B_k pour la décomposition sur une base de dix fonctions gaussiennes [84]

2.1, sont données dans le cas où l'on considère la décomposition de la fonction $T(\xi, \eta)$ sur une base de dix gaussiennes. Les coefficients A_k et B_k calculés pour une décomposition sur une base de quinze fonctions gaussiennes ont été proposés par les mêmes auteurs [83].

La décomposition sur une base de fonctions gaussiennes présente l'avantage d'étendre les études précédentes au cas de particules à surface projetée elliptique. Néanmoins, il convient de vérifier que cette méthode permet de traiter le cas de particules circulaires. Pour s'assurer que cette décomposition mène bien à la représentation de la fonction de

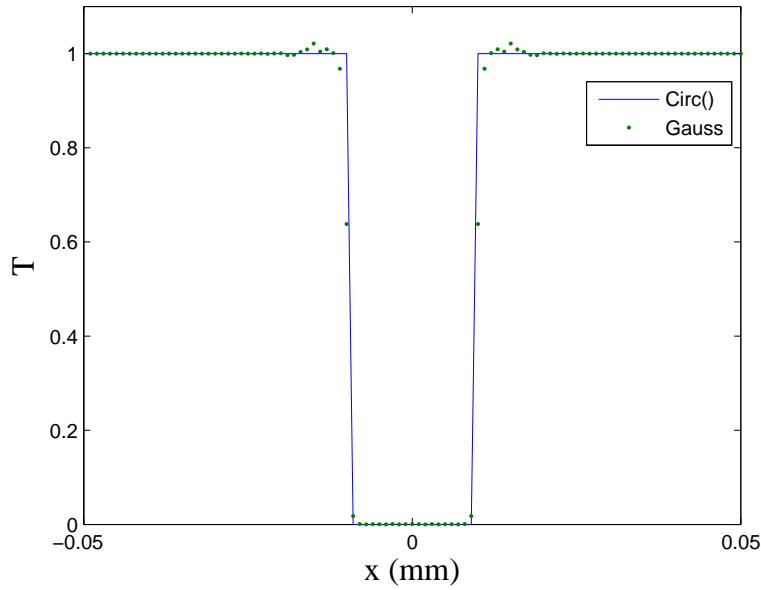


FIGURE 2.9 – Comparaison entre une fonction circ et la décomposition sur une base de fonctions gaussiennes

transfert d'une particule circulaire $[1 - T(\xi, \eta)]$, les résultats obtenus par décomposition sont comparés à ceux donnés par la fonction $circ()$. Le cas d'une particule circulaire de $d = 20 \mu m$ de diamètre est considéré. Les profils d'intensité des fonctions de transfert obtenus sont représentés figure 2.9. La fonction de transfert calculée en utilisant une fonction $circ()$ est représentée en trait plein et la fonction obtenue par sommation de fonctions gaussiennes par des points. Les deux courbes sont très proches l'une de l'autre. Néanmoins, un léger décalage est perceptible au moment du passage de la valeur 1 à la valeur 0. Il s'agit d'un phénomène de Gibbs visible dès lors que l'on cherche à décrire une discontinuité sur une base de fonctions continues (ici une base de fonctions gaussiennes). Cependant, la décomposition sur une base de fonctions gaussiennes donne une bonne représentation de la fonction de transfert d'une particule circulaire. L'intérêt de cette méthode réside dans la possibilité de pouvoir considérer des particules à surface projetée non nécessairement circulaire. En effet, cette approche prend en compte deux rayons a et b , et permet de traiter des ouvertures elliptiques. Quelques cas d'ouvertures sont proposés figure 2.10. La figure 2.10 (a) propose la représentation d'une particule circulaire et opaque de diamètre $2b = 200 \mu m$, la figure 2.10 (b) est une particule opaque à surface projetée elliptique de rayons $a = 400 \mu m$ et $b = 200 \mu m$. L'angle fait entre le grand axe de la particule et la direction ξ est de $\theta = \pi/4$. Enfin, la figure 2.10 (c) propose un cas limite dans lequel $a \rightarrow \infty$: dans ce cas, une fibre opaque dont l'orientation dépend de l'angle θ est obtenue. Le rapport d'ellipticité des particules est noté $R_{ell} = b/a$. Une particule circulaire correspond à une valeur d'ellipticité de $R_{ell} = 1$, une particule elliptique est, quant à elle, caractérisée par $R_{ell} \neq 1$. Enfin, une fibre est obtenue en considérant $R_{ell} \rightarrow 0-$.

Dans la suite, la valeur de θ sera fixée à $\theta = \pi/2$. Dans ces conditions, $T(\xi, \eta)$ s'écrit

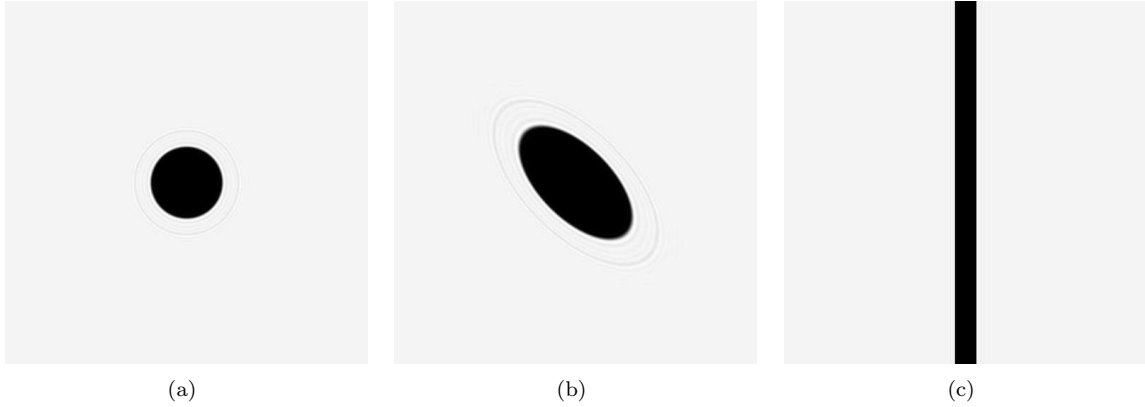


FIGURE 2.10 – (a) Particule circulaire $2b = 200 \mu m$ (b) Particule elliptique $2b = 200 \mu m$, $2a = 400 \mu m$, et $\theta = \pi/4$ (c) Fibre $2b = 30 \mu m$

comme :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N A_k \exp \left[-\frac{B_k}{b^2} (\xi^2 + R_{ell}^2 \eta^2) \right]. \quad (2.60)$$

La relation (2.60) caractérisant $T(\xi, \eta)$ sera utilisée pour réaliser le calcul de la distribution d'intensité enregistrée avec un faisceau AEG.

2.3.2 Distribution d'amplitude du faisceau diffracté \mathcal{O}

L'expression de la distribution d'amplitude du faisceau de référence est toujours la même que celle donnée par l'équation (2.7) :

$$\mathcal{O} = \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta, \quad (2.61)$$

En réalisant le changement de variables $\xi \leftarrow \xi + \xi_0$, $\eta \leftarrow \eta + \eta_0$ et en remplaçant l'expression de $T(\xi, \eta)$, \mathcal{O} s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = C_0 \sum_{k=1}^{10} \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi_{eq}}} - 1 \right) \right] \xi^2 \right\} \exp \left[- \left(i \frac{2\pi}{\lambda z} x + b_{\xi} \right) \xi \right] d\xi \\ \times \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{\omega_{\eta_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\eta_{eq}}} - 1 \right) \right] \eta^2 \right\} \exp \left[- \left(i \frac{2\pi}{\lambda z} x + b_{\eta} \right) \eta \right] d\eta, \end{aligned} \quad (2.62)$$

où

$$C_0 = E(\xi_0, \eta_0) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi_0^2 + \eta_0^2) \right] \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (\xi_0 x + \eta_0 y) \right]. \quad (2.63)$$

Les largeurs équivalentes $\omega_{\xi, \eta_{eq}}$ et rayons de courbure équivalents $R_{\xi, \eta_{eq}}$

$$\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} = \frac{1}{\omega_{\xi}^2} + \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad \frac{1}{\omega_{\eta_{eq}}^2} = \frac{1}{\omega_{\eta}^2} + R_{ell}^2 \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad (2.64)$$

et

$$\frac{1}{R_{\xi_{eq}}} = \frac{1}{R_{\xi}} + \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2}, \quad \frac{1}{R_{\eta_{eq}}} = \frac{1}{R_{\eta}} + R_{ell}^2 \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2}, \quad (2.65)$$

ont été introduits pour simplifier les notations. Les coefficients b_ξ et b_η sont associés au décalage de l'objet et sont donnés par

$$b_\xi = 2 \left(\frac{1}{\omega_\xi^2} - i \frac{\pi}{\lambda z} \right) \xi_0, \quad b_\eta = 2 \left(\frac{1}{\omega_\eta^2} - i \frac{\pi}{\lambda z} \right) \eta_0. \quad (2.66)$$

Lorsque la particule considérée est centrée sur l'axe optique ($\xi_0 = \eta_0 = 0$), les termes C_0 , b_ξ et b_η sont nuls. Les deux intégrales présentes dans l'équation (2.62) ont la même structure. Ainsi, dans la suite, les calculs ne seront développés que pour l'une d'elles. On pose

$$I_\xi = \int_{\mathbb{R}} \exp \left\{ - \left[\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi_{eq}}} - 1 \right) \right] \xi^2 \right\} \exp \left[- \left(i \frac{2\pi}{\lambda z} x + b_\xi \right) \xi \right] d\xi. \quad (2.67)$$

En sachant que [82]

$$\int_{\mathbb{R}} \exp [- (ax^2 + bx + c)] dx = \left(\frac{\pi}{a} \right)^{1/2} \exp \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right), \quad (2.68)$$

alors I_ξ devient :

$$I_\xi = \left[\frac{\pi \omega_{\xi_{eq}}^2}{1 + i \frac{\pi \omega_{\xi_{eq}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi_{eq}}} - 1 \right)} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{\left(i \frac{2\pi}{\lambda z} x + b_\xi \right)^2}{4 \left[\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi_{eq}}} - 1 \right) \right]} \right\}. \quad (2.69)$$

Il est possible de réaliser les mêmes développements pour la seconde intégrale de l'équation (2.62). Ainsi, l'expression de \mathcal{O} devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{O} = C_0 \sum_{k=1}^{10} K_{\xi_{eq}} K_{\eta_{eq}} \exp \left[- \frac{\pi}{\lambda z} (N_{\xi_{eq}} x^2 + N_{\eta_{eq}} y^2) \right] \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (M_{\xi_{eq}} x^2 + M_{\eta_{eq}} y^2) \right] \\ \times \exp \left\{ \frac{b_\xi (b_\xi + i \frac{2\pi}{\lambda z} x)}{4 \left[\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi_{eq}}} - 1 \right) \right]} \right\} \exp \left\{ \frac{b_\eta (b_\eta + i \frac{2\pi}{\lambda z} y)}{4 \left[\frac{1}{\omega_{\eta_{eq}}^2} + i \frac{\pi}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\eta_{eq}}} - 1 \right) \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (2.70)$$

où

$$M_{\xi, \eta_{eq}} = \frac{\left(\frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{R_{\xi, \eta_{eq}}} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{R_{\xi, \eta_{eq}}} - 1 \right)^2}, \quad N_{\xi, \eta_{eq}} = \frac{\frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{\lambda z}}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{R_{\xi, \eta_{eq}}} - 1 \right)^2}, \quad (2.71)$$

et

$$K_{\xi, \eta_{eq}} = \left[\frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{1 + i \frac{\pi \omega_{\xi, \eta_{eq}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_{\xi, \eta_{eq}}} - 1 \right)} \right]^{1/2}. \quad (2.72)$$

Les résultats obtenus par la méthode de décomposition de $T(\xi, \eta)$ sur une base de fonctions gaussiennes seront confrontés aux résultats obtenus par décomposition sur une base de fonctions de Nijboer-Zernike.

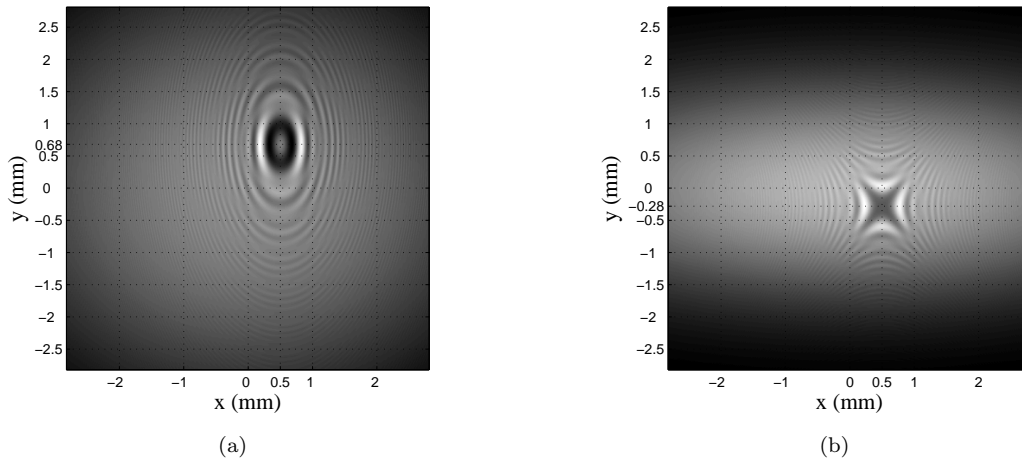


FIGURE 2.11 – (a) Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = 50 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ }\mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 250 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$, (b) Figure de diffraction obtenue pour $\omega_\xi = 7 \text{ mm}$, $\omega_\eta = 1,75 \text{ mm}$, $R_\xi \rightarrow \infty$, $R_\eta = -50 \text{ mm}$, $d = 150 \text{ }\mu\text{m}$, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$, $z = 120 \text{ mm}$, $\delta = 150 \text{ mm}$, $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$

2.3.3 Distribution d'intensité et comparaison des deux méthodes

La distribution d'intensité des figures d'interférences est obtenue en utilisant l'équation (2.35). L'expression de la distribution d'amplitude du faisceau de référence \mathcal{R} est donnée par la relation (2.7). La méthode de simulation par décomposition de la fonction de transfert de la particule sur une base de fonctions gaussiennes est appliquée dans les mêmes conditions que pour le modèle précédent. Dans un premier temps, la particule est située à $\delta = 250 \text{ mm}$ de la lentille cylindrique de distances focales $f_x \rightarrow \infty$ et $f_y = 200 \text{ mm}$ et à $z = 120 \text{ mm}$ du capteur CCD. La particule est décalée des quantités $\xi_0 = 0,5 \text{ mm}$ et de $\eta_0 = 0,2 \text{ mm}$ par rapport à l'axe optique du système. Les hologrammes obtenus sont représentés figure 2.11. Le décalage de la particule est pris en compte de manière similaire au cas précédent (figure 2.4). Le second cas de figure est maintenant considéré. La particule est située à $\delta = 150 \text{ mm}$ de la lentille cylindrique. Sa position par rapport au capteur et son décalage par rapport à l'axe optique restent conservés. Les résultats de simulation associés à ces paramètres sont proposés figure 2.11(b). Dans ce cas, la figure de diffraction a une allure hyperbolique. Ceci est dû au fait que les rayons de courbure du front d'onde dans le plan de la particule sont de signes opposés. D'un point de vue qualitatif, les deux méthodes donnent des résultats similaires. Pour comparer les deux méthodes d'un point de vue quantitatif, les profils d'intensité calculés par les deux méthodes et dans les deux configurations sont tracés. Les résultats sont proposés figure 2.12. Les profils donnés par la méthode "Bessel-Bessel" sont représentés en traits pleins alors que ceux obtenus par sommation de fonctions gaussiennes sont représentés par des points. Nous pouvons constater que dans les deux cas, les courbes se superposent parfaitement. Les deux méthodes donnent donc des résultats équivalents. De plus, il est à noter que le temps de calcul pour simuler un hologramme en utilisant la décomposition sur une base de fonctions gaussiennes est d'environ 50% inférieur par rapport à la simulation

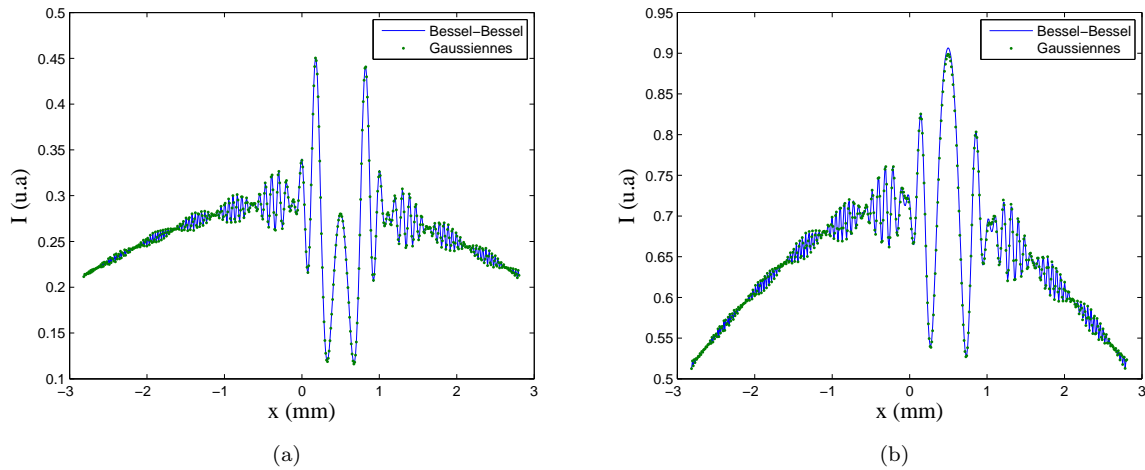


FIGURE 2.12 – (a) Comparaison des deux méthodes pour des figures de diffraction elliptiques. (b) Comparaison des deux méthodes pour des figures de diffraction hyperboliques

d'un hologramme simulé au moyen des fonctions de Nijboer-Zernike. En effet, le nombre de termes à estimer pour obtenir la base de fonctions gaussiennes est plus faible. Une nouvelle méthode de simulation des hologrammes enregistrés en lumière AEG a été proposée. Cette méthode permet de généraliser les calculs au cas de particules non centrées sur l'axe optique et permet de plus de traiter le cas où les particules ne sont pas à surface projetée circulaire. Les hologrammes ainsi obtenus peuvent être traités par TF fractionnaire.

2.3.4 Analyse des hologrammes par TF fractionnaire

L'expression de la distribution d'intensité dans le plan du capteur est :

$$I = A\bar{A} = [|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{O}|^2] - 2\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}. \quad (2.73)$$

Comme démontré précédemment, les dérivées de fréquence à traiter sont contenues dans le terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$. Dans le cas de la théorie présentée dans la section 2.2, ce terme présentait une dérive en fréquence modulée par une fonction de Bessel. Ces fonctions de Bessel étaient apportées par l'expression de \mathcal{O} (plus précisément par la fonction V_0^0). Cependant, la méthode de décomposition sur une base de fonctions gaussiennes ne fait pas intervenir, explicitement, de fonctions de Bessel. Dès lors, rien ne prouve qu'ici le terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ dispose du contenu nécessaire pour restituer correctement l'hologramme. Afin de s'assurer de ce fait, l'évolution de $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ est étudiée sur un profil. La figure 2.13, illustre les résultats obtenus. Ici le terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ et la somme des fonctions gaussiennes sont représentés sur un profil. La somme de gaussiennes est bien une enveloppe du terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$. Elle joue donc le même rôle que les fonctions de Bessel présentes dans l'expression de \mathcal{O} proposée équation (2.34), les deux méthodes mènent donc bien aux mêmes résultats. Ainsi, le calcul des ordres fractionnaires optimaux de restitution proposé dans la section 2.2 demeure le même. Les ordres fractionnaires optimaux sont alors donnés par la relation (2.49). Ces résultats sont appliqués aux hologrammes proposés figures 2.11(a) et 2.11(b). La restitution des deux hologrammes précédents est proposée figure 2.14. Compte tenu des paramètres

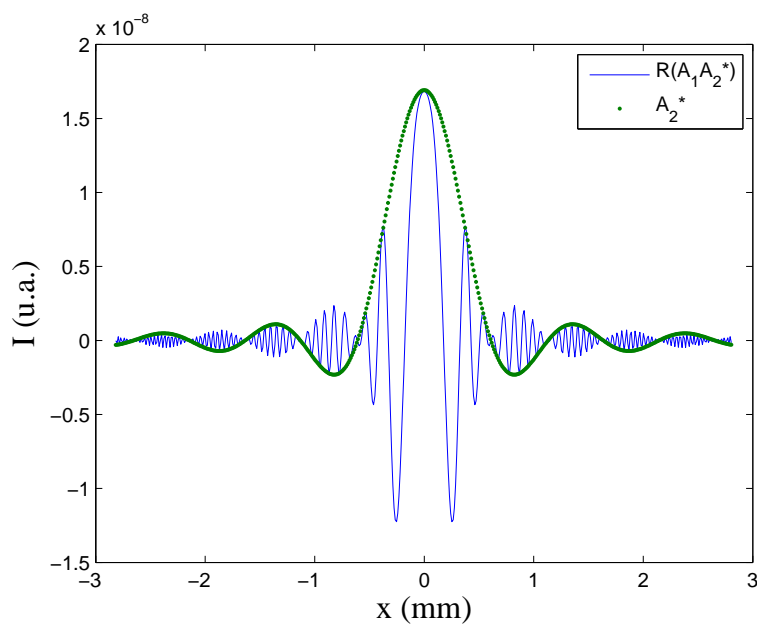


FIGURE 2.13 – Représentation du terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ et illustration de la modulation par la somme de fonctions gaussiennes

de simulation, les ordres fractionnaires optimaux pour chacun des hologrammes sont respectivement $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = -0,850$ et $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = 0,664$. Dans les deux cas, il est possible de remettre au point sur l'image de la particule.

2.4 Conclusion

Les premières études de Nicolas *et al.* [53] présentaient les développements analytiques de l'expression de la distribution d'intensité d'un hologramme enregistré en lumière AEG. Dans ce cas les particules considérées étaient opaques et circulaires. Cependant, cette méthode était limitée au cas de particules centrées sur l'axe optique. En l'état, ce modèle n'était pas applicable à notre étude. De plus, la complexité de cette approche, ne permettait pas, sans simplifications préalables, de démontrer que la restitution des hologrammes redonnait effectivement bien l'image de la particule. C'est pourquoi dans la suite deux nouvelles approches permettant de passer outre ces limitations ont été proposées.

La première approche a permis de généraliser le modèle de simulation en lumière AEG au cas où les particules n'étaient pas nécessairement centrées sur l'axe optique. En analysant l'influence des différents termes présents dans l'expression mathématique de la distribution d'amplitude du faisceau diffracté, il a été possible de proposer une expression simplifiée de la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur. L'analyse des hologrammes par TF fractionnaire liée à ces simplifications a permis, d'une part de montrer que la restitution de l'hologramme par TF fractionnaire menait effectivement à l'image de l'objet enregistré et, d'autre part que la valeur des ordres fractionnaires optimaux ne dépendait pas de la position de la particule par rapport à l'axe optique. Pour valider ce dernier point, la restitution de l'hologramme d'un objet étendu (le mot

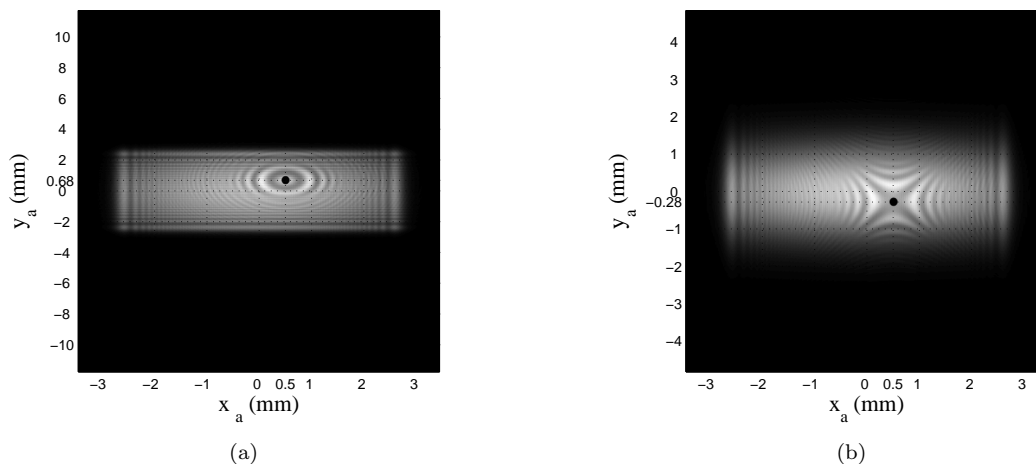


FIGURE 2.14 – (a) TF fractionnaire de l’hologramme figure 2.11(a) avec $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = -0,850$.
 (b) TF fractionnaire de l’hologramme figure 2.11(b) avec $\alpha_x^{opt} = -0,564$, $\alpha_y^{opt} = 0,664$

“ELECTRO”), enregistré en lumière AEG a été démontrée.

La seconde approche considérée consistait à décomposer la fonction de transfert de la particule sur une base de fonctions gaussiennes. L’un des principaux intérêts de cette méthode réside dans le fait que les particules utilisées ne doivent plus nécessairement être à surface projetée circulaire. Ainsi, cette nouvelle approche permet de considérer des particules elliptiques et des fibres opaques (il est bien évidemment possible de considérer des particules circulaires). Ce formalisme permet également de déterminer, plus simplement, l’expression de la composante diffractée du faisceau : l’intégration de fonctions gaussiennes ne pose aucun problème contrairement au cas où l’on considère une fonction $circ()$. L’expression de la distribution d’intensité dans le plan du capteur a ainsi pu être déterminée et ces deux méthodes semi-analytiques ont été confrontées. Les résultats donnés par ces deux modèles sont similaires dans le cas d’une particule opaque circulaire. De plus, il a été montré que ces deux approches donnaient les mêmes résultats lors de l’analyse par TF fractionnaire des hologrammes.

La seconde méthode permettant de traiter un plus grand nombre de cas de figure, et ce au prix d’un temps de calcul bien plus faible (de l’ordre de 50%), c’est elle qui sera retenue par la suite. Cette méthode de décomposition sera appliquée à l’étude des écoulements canalisés. Dans un premier temps, une approche lentille, permettant de traiter des cas simples de canalisations, sera proposée. Ensuite, une méthode basée sur le formalisme ABCD permettra de traiter des canalisations plus épaisses. Les résultats obtenus par les deux méthodes seront discutés et confrontés à des résultats expérimentaux.

Chapitre 3

Simulation d'hologrammes dans une canalisation

Sommaire

3.1	Introduction	33
3.1.1	Problèmes liés à l'imagerie dans les canalisations	33
3.1.2	Caractéristiques de la canalisation étudiée	34
3.2	Modélisation de la canalisation : approche lentilles minces	36
3.2.1	Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur	37
3.2.2	Limites de la modélisation lentilles minces : restitution des hologrammes	39
3.3	Modélisation de la canalisation : approche lentilles épaisses	42
3.3.1	Holographie en ligne dans des canalisations épaisses : distribution d'intensité dans le plan du capteur CCD	43
3.3.1.1	Du point source jusqu'au plan de la particule	44
3.3.1.2	Du plan de la particule au plan du capteur CCD	45
3.3.2	Influence des paramètres expérimentaux sur la distribution d'intensité enregistrée	48
3.3.2.1	Influence de la distance de propagation avant la canalisation	48
3.3.2.2	Influence de l'indice du milieu contenu dans la canalisation	49
3.3.3	Restitution des hologrammes obtenus	50
3.3.3.1	Calcul des ordres fractionnaires optimaux de restitution	50
3.3.3.2	Application à la restitution d'hologrammes simulés et expérimentaux	52
3.4	Conclusion	54

3.1 Introduction

3.1.1 Problèmes liés à l'imagerie dans les canalisations

L'étude des écoulements se fait de manière générale dans des milieux confinés (canalisations, bassins, ...). Cependant, la géométrie de ces milieux peut compliquer l'étude du signal optique permettant de caractériser les écoulements qu'ils contiennent. La figure 3.1 illustre une des problématiques liée à un écoulement canalisé. Ici, nous pouvons observer l'hologramme de particules de latex en suspension dans l'eau. Remarquons que les figures d'interférences sont elliptiques. Ces résultats sont similaires à ceux présentés dans le chapitre 2. En effet, les canalisations cylindriques sont des milieux qui apportent de l'astigmatisme [67]. Bien que pénalisant, cet astigmatisme n'empêche pas l'étude des écoulements. Dans leurs études sur les contaminants, Crane *et al.* se sont penchés sur

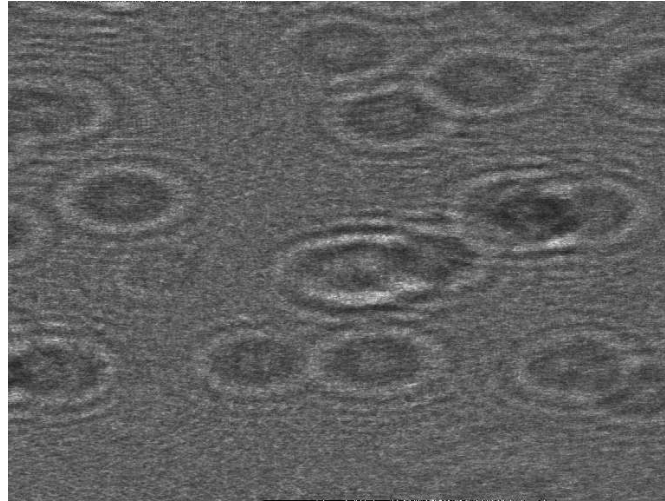


FIGURE 3.1 – Exemple d'hologramme de particules enregistré dans une canalisation transparente

les effets qu'avaient l'ampoule contenant les contaminants sur le système d'imagerie [68]. L'utilisation d'un modèle basé sur les lentilles minces, a permis aux auteurs de déterminer les paramètres optimaux d'*index matching* permettant de compenser l'astigmatisme. De leur côté, Zhang *et al.* ont mené des études sur les écoulements dans des canalisations à faces planes [89]. L'astigmatisme est ici minimisé au prix d'une modification de la géométrie de la canalisation et donc, dans une moindre mesure, de la modification des propriétés de l'écoulement à étudier. Pour ne pas perturber les écoulements, des méthodes alternatives ont été proposées. Par exemple, Chang *et al.* ont utilisé le signal de diffusion pour enregistrer leurs hologrammes. La compensation de l'astigmatisme est ensuite réalisée par conjugaison de phase. Cependant, la configuration hors axe utilisée, limite la résolution des images. Une dernière possibilité, à mi-chemin entre les travaux de Crane [68] et Zhang [89], consiste à utiliser des canalisations fabriquées dans un matériau dont l'indice est proche de celui de l'eau¹. Ces canalisations sont immergées dans de l'eau, et contiennent également de l'eau [60]. Ainsi, la courbure des faces de la canalisation est totalement compensée : tout se passe comme si l'on étudiait un écoulement dans une canalisation à faces planes d'indice $n \approx 1,33$.

Il existe donc un certain nombre de méthodes qui permettent de compenser, en amont, l'astigmatisme que pouvaient introduire les canalisations. Néanmoins peu d'études ont été menées afin de prendre en compte cet astigmatisme aussi bien d'un point de vue simulation que du point de vue de la restitution des hologrammes.

3.1.2 Caractéristiques de la canalisation étudiée

Dans cette partie, l'étude du processus d'imagerie au travers de canalisations est présentée. Dans ce but, des outils permettant de simuler les hologrammes enregistrés au travers de canalisations seront développés. La canalisation peut-être vue comme l'association de deux lentilles plan-concaves épaisses. Cette étude sera menée dans l'approximation

1. Il s'agit ici du FEP dont l'indice de réfraction est de $n = 1,338$.

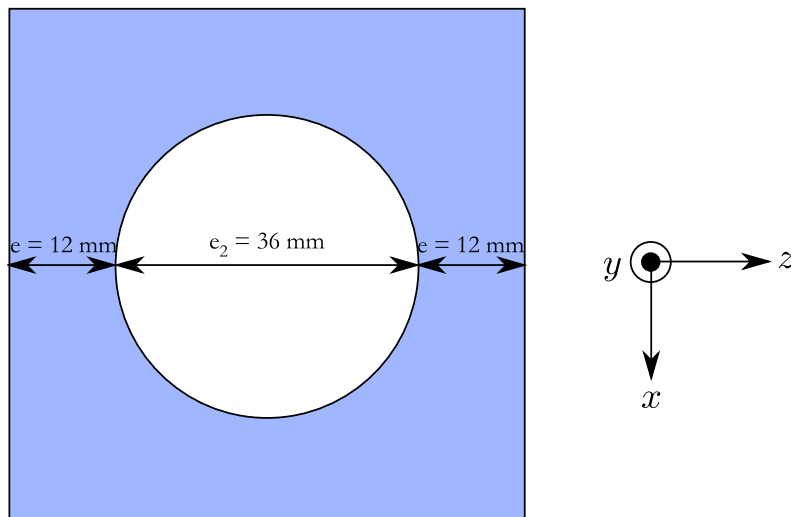


FIGURE 3.2 – Dimensions de la canalisation simulée

paraxiale. Dans cette situation, l'épaisseur des parois de plexiglass est de $e = 12 \text{ mm}$ et le diamètre interne de la canalisation est de $e_2 = 36 \text{ mm}$. L'ensemble des paramètres liés à la canalisation est reporté figure 3.2. Compte tenu des dimensions et de la symétrie de révolution de la canalisation, nous pouvons estimer les rayons de courbures des différentes faces qui la composent. Les rayons de courbures seront positifs lorsque le dioptre rencontré sera concave. La face d'entrée est un dioptre plan. Ainsi les rayons de courbure dans les deux directions sont identiques et sont tels que $R_{1,x,y} \rightarrow \infty$. Après propagation, sur la distance e , dans le plexiglass, nous rencontrons la première face interne. Elle se présente comme un dioptre cylindrique. Compte tenu de son orientation, le rayon de courbure de ce dioptre dans la direction y est $R_{2,y} \rightarrow \infty$. La canalisation a un diamètre interne $e_2 = 36 \text{ mm}$, compte tenu de sa symétrie nous pouvons estimer le rayon de courbure dans la direction x . Ainsi, nous obtenons $R_{2,x} = e_2/2 = 18 \text{ mm}$. En raison de la symétrie du système, les courbures du premier dioptre de sortie de la canalisation notées $R_{3,x,y}$ valent $R_{3,x,y} = -R_{2,x,y}$, soit $R_{3,y} \rightarrow \infty$ et $R_{3,x} = -18 \text{ mm}$. De même, les rayons de courbure de la face de sortie de la canalisation sont donnés par $R_{4,x,y} = -R_{1,x,y}$. Ainsi $R_{4,x,y} \rightarrow \infty$.

Dans la suite de ce chapitre, deux méthodes permettant de simuler les hologrammes enregistrés au travers d'une canalisation sont proposées. La première méthode sera basée sur une approche lentilles minces. En effet, la grande majorité des études ayant trait aux écoulements canalisés reposent sur ce formalisme. Les faces d'entrée et de sortie de la canalisation seront considérées comme deux lentilles cylindriques minces. Une seconde approche permettra de considérer la canalisation comme un système ABCD. Ainsi, la forme et l'épaisseur de la canalisation pourront être prises en compte. La restitution des hologrammes par TF fractionnaire sera également abordée et de nouvelles expressions des ordres fractionnaires optimaux, dépendant des paramètres géométriques de la canalisation, seront calculées. Les résultats obtenus seront appliqués à des hologrammes simulés dans les deux approches ainsi qu'à des hologrammes expérimentaux. Il sera alors possible de confronter les résultats de simulation obtenus aux données expérimentales enregistrées.

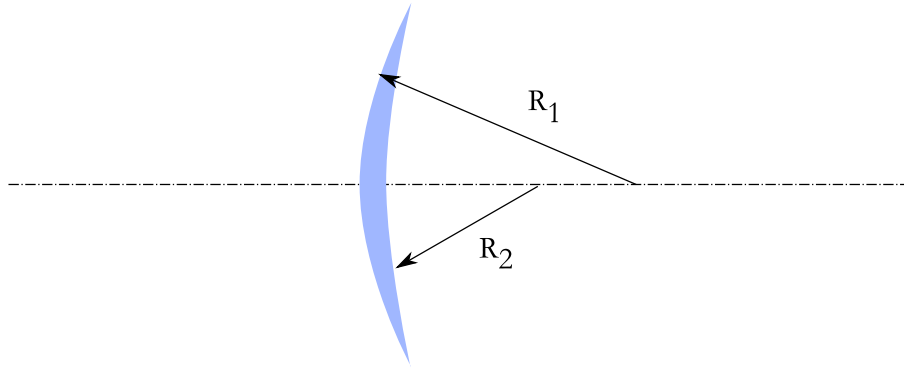


FIGURE 3.3 – Paramètres de calcul de la distance focale de la lentille

3.2 Modélisation de la canalisation : approche lentilles minces

La canalisation sera, dans un premier temps, considérée, comme l'association de deux lentilles cylindriques minces. En effet, cette approche est communément utilisée pour l'étude de milieux canalisés [67, 68]. Les lentilles cylindriques sont caractérisées par deux distances focales f_x et f_y . Ces dernières font intervenir les dimensions de la canalisation à étudier. Les distances focales sont liées aux paramètres physiques de la lentille tels que les rayons de courbures de ses faces et l'indice de réfraction du milieu traversé². Les distances focales de la lentille sont alors données par :

$$\frac{-1}{f_{1x,y}} = \frac{n_1 - n_2}{R_{2x,y}} + \frac{n_0 - n_1}{R_{1x,y}}, \quad \frac{-1}{f_{2x,y}} = \frac{n_2 - n_1}{R_{3x,y}} + \frac{n_1 - n_0}{R_{4x,y}}, \quad (3.1)$$

où n_1 est l'indice de réfraction de la lentille (ici $n_1 \approx 1,5$) et n_2 l'indice de réfraction du milieu contenu dans la canalisation. Compte tenu des valeurs proposées dans la section 3.1.2, les distances focales obtenues sont $f_{1x} \rightarrow \infty$, $f_{1y} = -106 \text{ mm}$, $f_{2x} \rightarrow \infty$, $f_{2y} = -106 \text{ mm}$. Les valeurs de $f_{1,2y}$ sont négatives : les lentilles minces équivalentes à la canalisation sont donc des lentilles divergentes. Pour cette étude, le montage schématisé par la figure 3.4 sera utilisé. La propagation d'un point source gaussien de largeur à $1/e$ notée ω_0 sera considérée. Après propagation en air libre ($n_0 = 1$) sur une distance z_p , le faisceau arrive dans le plan de la première lentille cylindrique (L_1), dans ce plan, les coordonnées spatiales seront notées (x_{l_1}, y_{l_1}) . L'indice du milieu dans la canalisation sera noté n_2 . Le faisceau se propage ensuite, jusqu'à la particule, sur une distance δ . Dans ce plan, le système de coordonnées spatiales est noté (ξ, η) . Après la particule, le faisceau arrive dans le plan de la lentille (L_2) situé à la distance z_i de la particule. Les coordonnées spatiales dans ce plan sont notées (x_{l_2}, y_{l_2}) . Enfin, après passage de la seconde lentille, les interférences entre le faisceau de référence et le faisceau diffracté par la particule sont enregistrées sur un capteur CCD situé à la distance z de la seconde lentille. Cette propagation se fait en air libre ($n_0 = 1$)

Quatre étapes sont nécessaires pour réaliser la simulation des hologrammes : dans un premier temps, la propagation du point source jusqu'à la lentille sera développée. Ensuite,

². Nous nous sommes placés dans l'approximation lentille mince, l'épaisseur de la lentille n'intervient donc pas dans le calcul de sa distance focale.

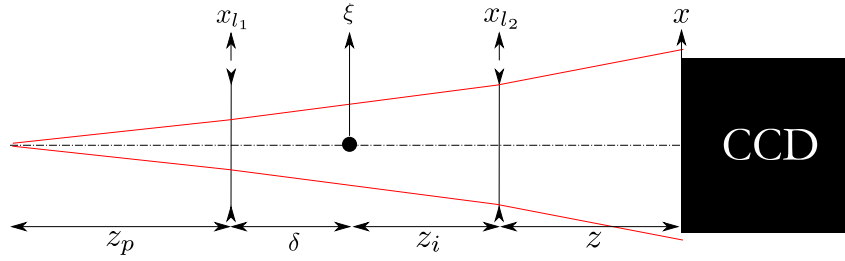


FIGURE 3.4 – Représentation schématique de la canalisation d'un point de vue lentille mince

après prise en compte de l'effet de la lentille, la propagation du faisceau entre la lentille et la particule sera traitée. La troisième étape permettra d'étudier la propagation du faisceau de référence et du faisceau diffracté par la particule jusqu'à la seconde lentille. Enfin, la distribution d'intensité de l'hologramme dans le plan du capteur sera déduite des calculs précédents. La TF fractionnaire sera, de plus, appliquée aux hologrammes ainsi obtenus. Pour ce faire, les valeurs des ordres fractionnaire de restitution optimaux seront déterminées en fonction des paramètres du montage.

3.2.1 Distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur

L'expression mathématique du point source gaussien $G_0(\mu, \nu)$ est :

$$G_0(\mu, \nu) = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \nu^2}{\omega_0^2}\right). \quad (3.2)$$

Dans l'approximation paraxiale, la propagation de $G_0(\mu, \nu)$, au travers du système proposé figure 3.4, est donnée par l'intégrale d'Huygens Fresnel. Les différentes étapes de la propagation du point source G_0 sont détaillées Annexe C. La distribution d'intensité $I(x, y)$ dans le plan du capteur est alors donnée par :

$$I(x, y) = [|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{O}|^2] - 2\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}. \quad (3.3)$$

La fonction \mathcal{R} est associée au faisceau de référence. Elle est telle que :

$$\mathcal{R}(x, y) \propto K_x K_y \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda z} (N_x x^2 + N_y y^2)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z} (M_x x^2 + M_y y^2)\right], \quad (3.4)$$

où

$$K_{x,y} = K_{l_{2x,y}} \left[\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1\right)} \right]^{1/2}. \quad (3.5)$$

Les coefficients $N_{x,y}$ et $M_{x,y}$ renferment les informations liées au rayon du faisceau et à sa courbure dans le plan du capteur CCD. Ils sont donnés par :

$$N_{x,y} = \frac{\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1\right)^2}, \quad M_{x,y} = 1 + \frac{\left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1\right)^2}. \quad (3.6)$$

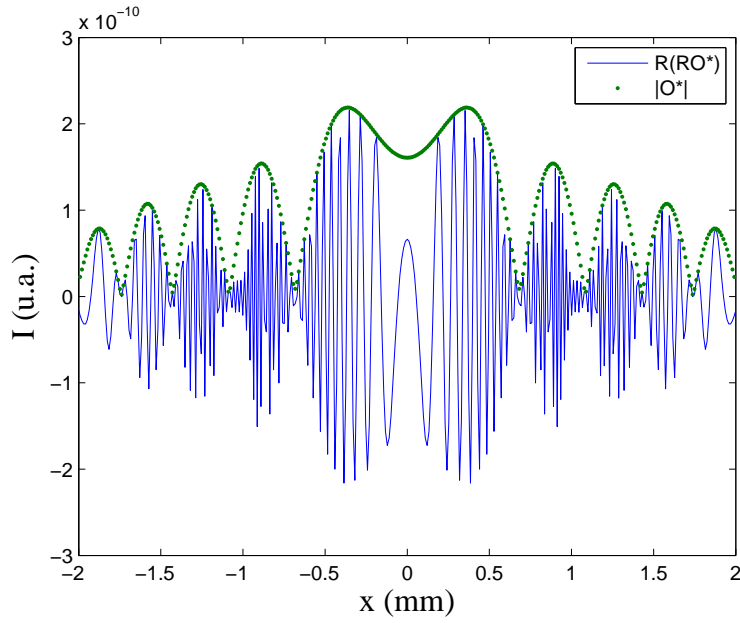


FIGURE 3.5 – Représentation du terme $\Re\{\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}\}$ et illustration de la modulation par la somme de fonctions gaussiennes

Les distances focales $f_{ref(x,y)}$ ont été introduites pour alléger les notations. Elles sont données par :

$$\frac{1}{f_{ref(x,y)}} = \frac{1}{f_{2x,y}} + \frac{1}{R_{l_{2x,y}}}. \quad (3.7)$$

La fonction \mathcal{O} est associée au faisceau diffracté par la particule. Son expression mathématique est :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x,y) &\propto \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right] \\ &\times \sum_{k=1}^{10} A_k K_{x_{eq}} K_{y_{eq}} \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda z}(N_{x_{eq}}x^2 + N_{y_{eq}}y^2)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z}(M_{x_{eq}}x^2 + M_{y_{eq}}y^2)\right], \end{aligned} \quad (3.8)$$

où

$$K_{x,y_{eq}} = K_{l_{2x,y_{eq}}} \left[\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{f_{diff(x,y)}} - 1\right)} \right]^{1/2}. \quad (3.9)$$

Les coefficients $N_{x,y_{eq}}$ et $M_{x,y_{eq}}$ renferment les informations liées au rayon du faisceau diffracté et à sa courbure dans le plan du capteur. Ils sont donnés par :

$$N_{x,y_{eq}} = \frac{\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff(x,y)}} - 1\right)^2}, \quad M_{x,y_{eq}} = \frac{\left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff(x,y)}} - 1\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z}\right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff(x,y)}} - 1\right)^2}, \quad (3.10)$$

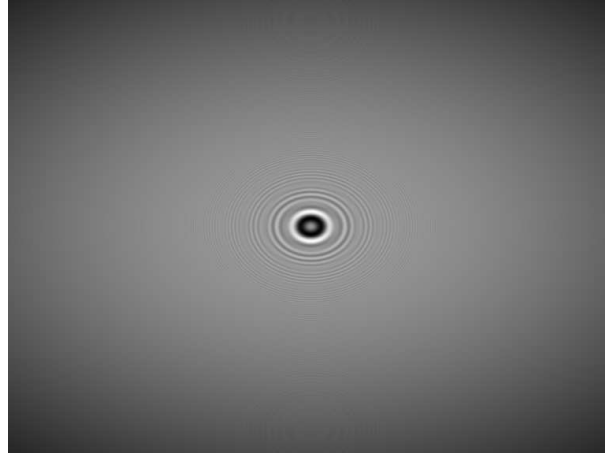


FIGURE 3.6 – Hologramme simulé pour $z_p = 250 \text{ mm}$, $\delta = 18 \text{ mm}$ et $z = 23 \text{ mm}$

avec

$$\frac{1}{f_{diff(x,y)}} = \frac{1}{f_{2x,y}} + \frac{1}{Rl_{2x,yeq}}. \quad (3.11)$$

Les termes $|\mathcal{R}|^2$ et $|\mathcal{O}|^2$ ne produisent pas d'interférences dans le plan du capteur. Seul le troisième terme de l'équation (3.3) conduit à des dérivés linéaires de fréquence. Dans la suite, ce terme sera utilisé pour la restitution des hologrammes par TF fractionnaire. Les dérivés linéaires de fréquence instantanée contenues dans $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ sont visibles dans les équations (3.4) et (3.8). De plus, une dérive de fréquence est présente dans la sommation proposée équation (3.8). Cependant, cette dérive ne sera pas traitée par TF fractionnaire. En effet, cette sommation constitue l'enveloppe de modulation de nos franges d'interférences. Ce point est illustré sur le graphique de la figure 3.5. Ici, le terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ (en trait plein) et la sommation sont représentés sur un profil. La modulation de $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ par la sommation de gaussienne est ici clairement mise en évidence. Les résultats de simulation sont basés sur les caractéristiques géométriques de la canalisation présentée figure 3.2. Néanmoins, comme la canalisation est considérée comme un assemblage de lentilles cylindriques minces, l'épaisseur e des faces est nulle. Ici, la canalisation sera remplie d'eau ($n_2 = 1,33$), une particule opaque de $100 \mu\text{m}$ de diamètre est positionnée à $\delta = 18 \text{ mm}$ de la première lentille cylindrique. Le capteur de 768×576 pixels de pas $11 \mu\text{m}$ est situé à $z = 23 \text{ mm}$ de la seconde lentille cylindrique. L'hologramme obtenu dans ces conditions est représenté figure 3.6. L'aspect elliptique des figures d'interférences qui étaient observées figure 3.1 est retrouvé.

Ce modèle permet de s'intéresser à l'étude d'écoulements canalisés. La restitution des hologrammes sera abordée par la suite et les résultats obtenus seront confrontés à un hologramme d'écoulement réel montrant les limites de l'approche lentilles minces.

3.2.2 Limites de la modélisation lentilles minces : restitution des hologrammes

La distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur CCD est donnée par l'équation (3.3). Rappelons que seul le terme $\Re\{\mathcal{R}\bar{\mathcal{O}}\}$ contient des phases quadratiques

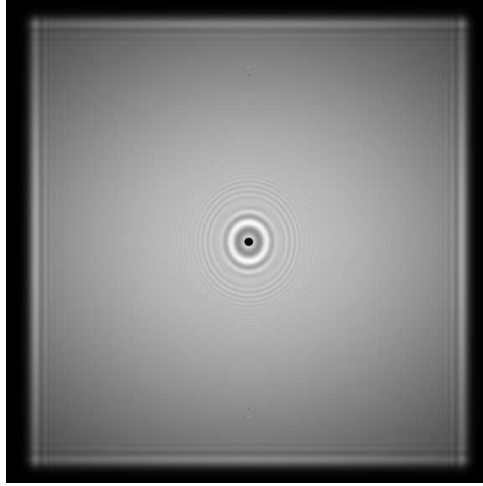


FIGURE 3.7 – Hologramme restitué pour $\alpha_x^{opt} = 0,419$ et $\alpha_y^{opt} = 0,361$

bidimensionnelles. Soit $\phi(x, y)$ cette phase, elle est donnée par :

$$\phi(x, y) = \frac{\pi}{\lambda z} [(M_x - 1)x^2 + (M_y - 1)y^2]. \quad (3.12)$$

La phase quadratique 2D contenue dans le noyau de la TF fractionnaire est donnée par :

$$\phi_a(x, y) = \pi \left(\frac{\cot \alpha_x}{s_x^2} x^2 + \frac{\cot \alpha_y}{s_y^2} y^2 \right), \quad (3.13)$$

avec, $s_{p=x,y}$ le coefficient d'échelle dont la valeur dépend des paramètres d'enregistrement de l'hologramme (Cf équation (2.43) et Annexe B). L'image de la particule est restituée lorsque les phases quadratiques de la TF fractionnaire compensent celles présentes dans l'hologramme. Dans ce cas :

$$\phi_a \pm \phi = 0. \quad (3.14)$$

Ainsi, en utilisant les relations (3.12), (3.13) et (3.14), les ordres fractionnaires optimaux de restitution sont :

$$\alpha_x^{opt} = \arctan \left[\mp \frac{\lambda z}{s_x^2 (M_x - 1)} \right], \quad \alpha_y^{opt} = \arctan \left[\mp \frac{\lambda z}{s_y^2 (M_y - 1)} \right]. \quad (3.15)$$

Ces résultats sont appliqués à l'hologramme de la figure 3.6. Compte tenu des paramètres de simulation, et en utilisant la relation (2.49), les ordres optimaux de restitution sont :

$$\alpha_x^{opt} = 0,419, \quad \alpha_y^{opt} = 0,361. \quad (3.16)$$

La restitution de l'hologramme de la figure 3.6 est représentée figure 3.7. Comme le montre cette figure, la restitution de l'image de la particule dans la canalisation est possible. Cette technique pourra donc être étendue au cas des écoulements canalisés ensemencés par des particules opaques. Appliquons maintenant cette étude au cas d'un hologramme expérimental. L'hologramme obtenu est proposé figure 3.8 (a). Il s'agit de l'hologramme d'un écoulement de billes de latex de $100\mu m$ de diamètre situées dans la canalisation remplie d'eau ($n_2 = 1,33$). La distance de propagation avant la canalisation est fixée

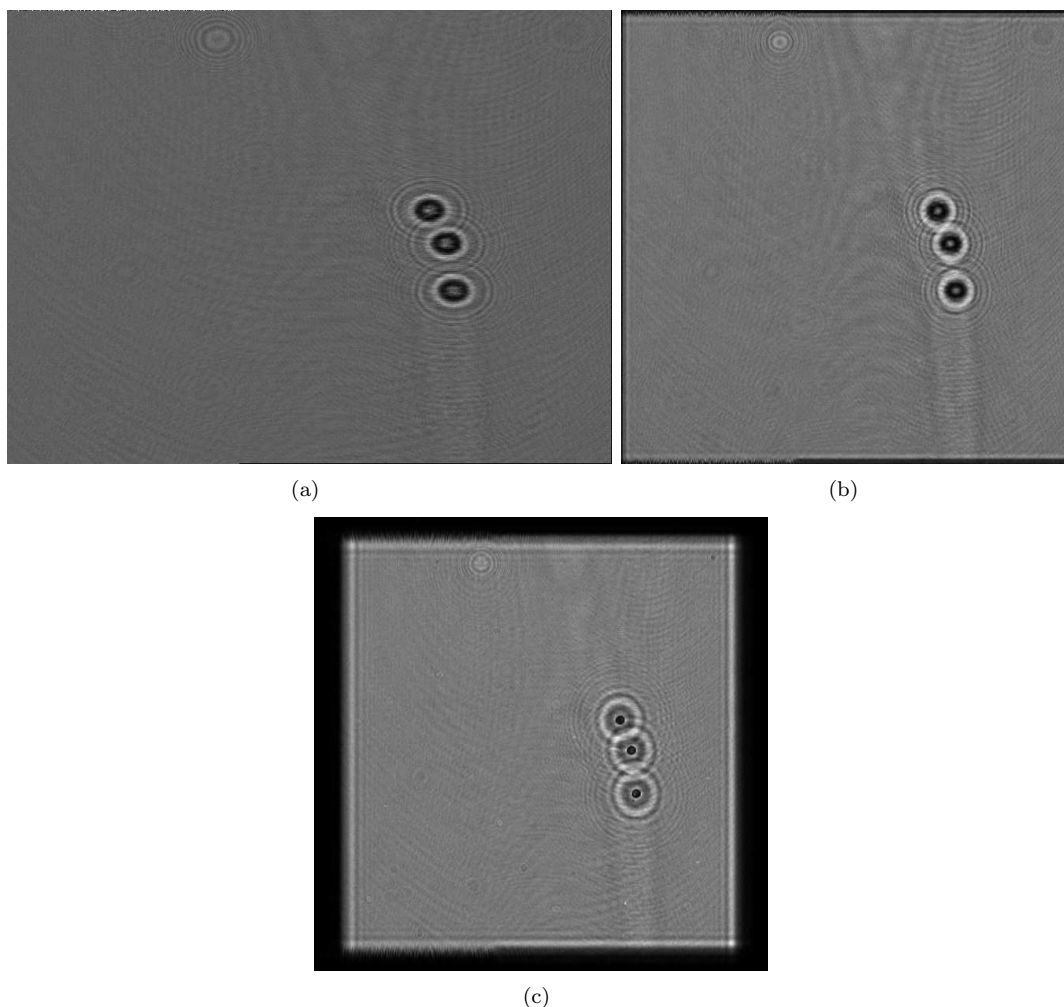


FIGURE 3.8 – (a) Hologramme expérimental de billes de latex de $100 \mu m$ de diamètre enregistré dans la canalisation. (b) Restitution de l'hologramme avec les paramètres optimaux prévus par la théorie ($\delta = 20 mm$). (c) Restitution de l'hologramme pour $\delta = 8 mm$.

à $z_p = 325 mm$ et le capteur CCD de 768×576 pixels de $11 \mu m$ est positionné à $z = 23 mm$ de la canalisation. Afin de confronter le modèle aux données expérimentales, une restitution, par TF fractionnaire, de cet hologramme est réalisée. Tous les paramètres expérimentaux sont connus hormis la position de la particule δ . En effet, les particules ont été injectées à proximité du centre de la canalisation, mais leurs positions exactes ne sont pas connues. La restitution de l'hologramme est donc réalisée pour δ allant de 0 à $36 mm$. A chaque valeur de δ correspond un couple d'ordres fractionnaires défini au moyen de l'équation (3.15). La figure 3.8 (b) montre l'impossibilité de remettre au point sur les particules introduites dans la canalisation. Le plan de mise au point obtenu (représenté figure 3.8 (c)) est situé bien avant la position d'injection des particules. L'approximation lentilles minces n'est donc pas adaptée à cette situation. Le principal problème est lié à l'épaisseur de la canalisation qui n'est pas prise en compte dans le modèle. La canalisation étant épaisse de $12 mm$, la prise en compte de ce paramètre est importante. Ceci est illustré par la figure 3.9 : les distributions d'intensités obtenues dans l'approximation lentille

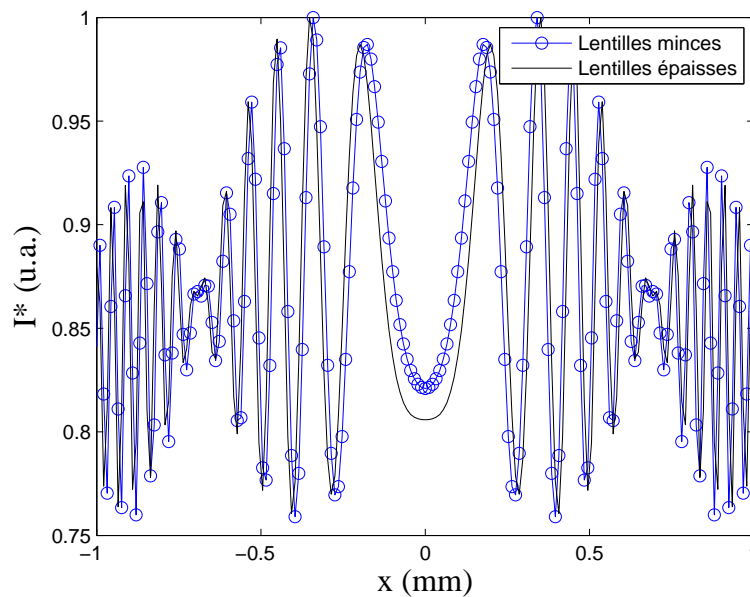


FIGURE 3.9 – Illustration de l’influence de l’épaisseur de la lentille sur la distribution d’intensité simulée ($e = 0,2 \text{ mm}$)

mince et en considérant deux lentilles de $e = 0,2 \text{ mm}$ sont comparées³. Le décalage des distributions d’intensité est ici bien visible alors que l’épaisseur de la lentille considérée est faible.

C’est pourquoi, dans la suite, une nouvelle approche qui permet de prendre en compte l’épaisseur de la canalisation sera présentée.

3.3 Modélisation de la canalisation : approche lentilles épaisses

Dans la section 3.1.2 une méthode, basée sur l’approximation des lentilles minces, qui permet de traiter les hologrammes d’écoulements canalisés a été présentée. Cependant, comme illustré par la figure 3.9, cette méthode n’est pas valable pour des canalisations dont l’épaisseur est importante. L’étude de la modélisation par lentilles minces sera donc étendue au cas des lentilles épaisses. Il sera également fait usage de la décomposition de la transmittance $T(\xi, \eta)$, des objets, sur une base de fonctions gaussiennes chirpées linéairement. La propagation sera décrite au moyen de l’intégrale de Fresnel généralisée [90]. Cette intégrale fait intervenir la méthode des matrices ABCD. La décomposition sur bases de fonctions gaussiennes et l’intégrale de Fresnel généralisée permettront enfin de proposer une description fine des interférences enregistrées par le capteur CCD. Ensuite, la TF fractionnaire sera appliquée aux hologrammes obtenus aussi bien numériquement qu’expérimentalement. Ainsi, les résultats de ce nouveau modèle seront confrontés aux données expérimentales.

3. Le formalisme des lentilles épaisses est présenté par la suite

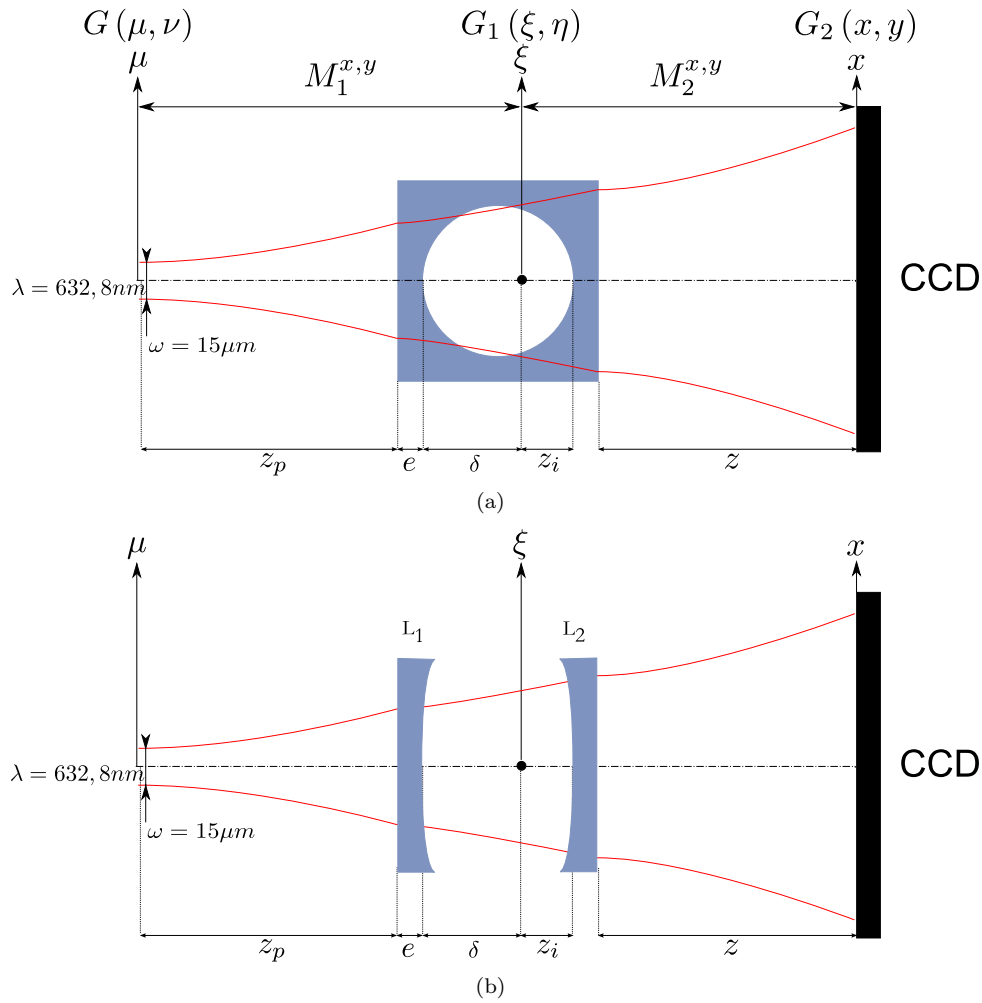


FIGURE 3.10 – (a) Représentation schématique du dispositif optique de l'étude. (b) Représentation lentilles épaisses

3.3.1 Holographie en ligne dans des canalisations épaisses : distribution d'intensité dans le plan du capteur CCD

Le dispositif qui nous servira de base pour les simulations numériques et l'enregistrement d'hologrammes expérimentaux est présenté figure 3.10 (a). La propagation d'un point source gaussien dans le système est considérée. Son expression mathématique est :

$$G(\mu, \nu) = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \nu^2}{\omega^2}\right), \quad (3.17)$$

où ω est le rayon du point source et (μ, ν) sont les coordonnées spatiales. Ce point source illumine la canalisation après propagation en air libre sur une distance z_p . La canalisation est ici considérée comme l'assemblage de deux lentilles d'épaisseur e . Une particule opaque est située à une distance δ de la première lentille et à une distance z_i de la seconde. Le capteur CCD est situé à une distance z de la sortie de la canalisation. Une représentation schématique du dispositif d'un point de vue lentilles épaisses est proposée figure 3.10 (b).

L'étude de la propagation du faisceau jusqu'au capteur CCD sera divisée en deux

étapes. La première étape traitera de la propagation du point source jusqu'au plan de la particule et la seconde traitera de la propagation du faisceau entre le plan de la particule et le capteur CCD.

3.3.1.1 Du point source jusqu'au plan de la particule

La distribution d'amplitude dans le plan de la particule $G_1(\xi, \eta)$ sera calculée en utilisant l'intégrale de Fresnel généralisée [90, 91, 92, 93] :

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} \int_{\mathbb{R}^2} G(\mu, \nu) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^x} (A_1^x \mu^2 - 2\xi\mu + D_1^x \xi^2)\right] \\ \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^y} (A_1^y \nu^2 - 2\eta\nu + D_1^y \eta^2)\right] d\mu d\nu. \quad (3.18)$$

Ici les paramètres $A_1^{x,y}$, $B_1^{x,y}$, et $D_1^{x,y}$ sont donnés par la matrice $M_1^{x,y}$ dont l'expression est donnée dans l'annexe D et dans la référence [94]. La distance $E_1 = z_p + e + \delta$ est la distance entre le point source et la particule.

La relation (3.18) est une transformation canonique linéaire [82]. Dans notre cas, cette transformation canonique est une transformation de Fresnel. L'équation (3.18) montre que ces paramètres sont différents dans les deux directions (μ, ν) . Ceci est dû à l'astigmatisme introduit par la canalisation.

Après un développement théorique, l'expression de la distribution d'amplitude dans le plan de la particule est donnée par :

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{\omega_{1x}^2} + \frac{\eta^2}{\omega_{1y}^2}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi^2}{R_{1x}} + \frac{\eta^2}{R_{1y}}\right)\right], \quad (3.19)$$

où

$$K_1^{x,y} = \left(\frac{\pi\omega^2}{1 - iA_1^{x,y}\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}}\right)^{1/2}. \quad (3.20)$$

Les rayons du faisceau à $1/e$ dans le plan de la particule et les rayons de courbure du front d'onde dans le même plan sont :

$$\omega_{1x,y} = \left(\frac{\lambda B_1^{x,y}}{\pi\omega}\right) \left[1 + \left(A_1^{x,y}\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2\right]^{1/2}, \quad R_{1x,y} = -\frac{B_1^{x,y}}{D_1^{x,y} - \frac{A_1^{x,y}\left(\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2}{1 + \left(A_1^{x,y}\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2}}. \quad (3.21)$$

Intéressons nous maintenant à la propagation du faisceau au travers du second système ABCD.

3.3.1.2 Du plan de la particule au plan du capteur CCD

La distribution d'amplitude $G_2(x, y)$ dans le plan du capteur CCD est donnée par :

$$G_2(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_2\right)}{i\lambda\sqrt{B_2^x B_2^y}} \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) [1 - T(\xi, \eta)] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2)\right] \\ \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2)\right] d\xi d\eta, \quad (3.22)$$

où les coefficients $A_2^{x,y}$, $B_2^{x,y}$, et $D_2^{x,y}$ sont donnés par l'équation (D.12). La distance $E_2 = z_i + e + z$ correspond à la distance entre la particule et le capteur CCD. La fonction de transmission de l'objet $[1 - T(\xi, \eta)]$ est décomposée sur une base de fonctions gaussiennes chirpées linéairement [84]. Rappelons que $T(\xi, \eta)$ s'exprime par :

$$T(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{10} A_k \exp\left[-\frac{B_k}{b^2} (\xi^2 + R_{ell}^2 \eta^2)\right]. \quad (3.23)$$

Cette décomposition permet de simuler les hologrammes d'objets opaques tridimensionnels dont la projection 2D est elliptique ou circulaire [95]. En ajustant la valeur de R_{ell} , il est possible de considérer plusieurs formes d'objets : pour $R_{ell} = 1$, les particules sont circulaires, pour $R_{ell} \neq 1$ les particules sont elliptiques. Enfin, lorsque $R_{ell} \rightarrow 0$ la particule devient une fibre opaque.

En introduisant l'équation (3.23) dans (3.22), l'expression de $G_2(x, y)$ peut être séparée en deux intégrales : la première, notée $\mathcal{R}(x, y)$, est associée à l'onde de référence et la seconde, notée $\mathcal{O}(x, y)$, est associée à la partie diffractée de l'onde. Ainsi,

$$G_2(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_2\right)}{i\lambda\sqrt{B_2^x B_2^y}} [\mathcal{R}(x, y) - \mathcal{O}(x, y)], \quad (3.24)$$

où

$$\mathcal{R}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2)\right] \\ \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2)\right] d\xi d\eta, \quad (3.25)$$

et

$$\mathcal{O}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2)\right] \\ \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2)\right] d\xi d\eta. \quad (3.26)$$

Les développements analytiques de ces deux intégrales sont proposés annexe E. Les expressions finales des distributions d'amplitude de l'onde de référence et de l'onde diffractée

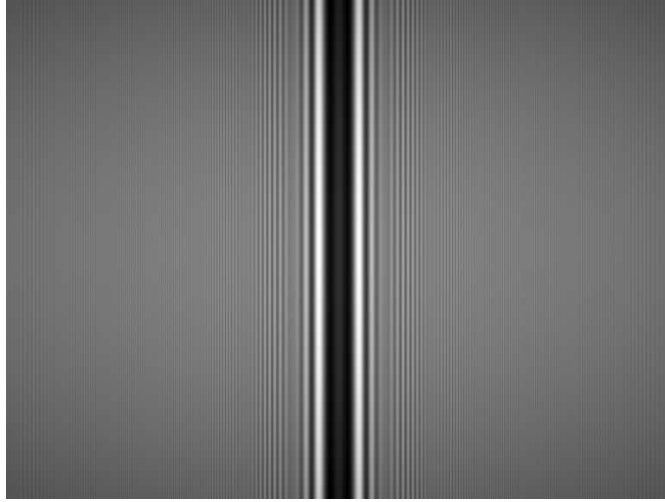


FIGURE 3.11 – Hologramme simulé d'une fibre opaque de $51,8 \mu m$ parallèle à l'axe de la canalisation. $n_2 = 1,33$, $\lambda = 632,8 nm$, $z = 23 mm$ et $\delta = 18 mm$

s'écrivent :

$$\mathcal{R}(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y K_2^x K_2^y \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{N_x}{B_2^x}x^2 + \frac{N_y}{B_2^y}y^2\right)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{M_x}{B_2^x}x^2 + \frac{M_y}{B_2^y}y^2\right)\right], \quad (3.27)$$

et

$$\mathcal{O}(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{D_2^x}{B_2^x}x^2 + \frac{D_2^y}{B_2^y}y^2\right)\right] \sum_{k=1}^{10} A_k K_2^{x_{eq}} K_2^{y_{eq}} \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{N_{x_{eq}}}{B_2^x}x^2 + \frac{N_{y_{eq}}}{B_2^y}y^2\right)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{M_{x_{eq}}}{B_2^x}x^2 + \frac{M_{y_{eq}}}{B_2^y}y^2\right)\right]. \quad (3.28)$$

La distribution d'intensité $I(x, y)$ s'exprime alors par :

$$I(x, y) = G_2(x, y) \overline{G_2}(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 B_2^x B_2^y} (|\mathcal{R}|^2 - 2\Re\{\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}\} + |\mathcal{O}|^2), \quad (3.29)$$

Pour illustrer les résultats obtenus le montage présenté figure 3.10 est utilisé. Les simulations des figures d'interférences sont réalisées pour une fibre opaque parallèle à l'axe de symétrie de la canalisation. En utilisant la méthode de décomposition sur une base de fonctions gaussiennes proposée équation (3.23), la fibre opaque est obtenue en considérant $R_{ell} \rightarrow 0$.

La fibre a une largeur $2b = 51,8 \mu m$ (compte tenu de l'ellipticité d'une fibre, $a \rightarrow \infty$) est considérée et la canalisation d'indice de réfraction $n_1 = 1,5$ est remplie d'eau ($n_2 = 1,33$). La distance de propagation z_p du faisceau avant la canalisation vaut $325 mm$ et le capteur est situé à la distance $z = 23 mm$ de la canalisation. La fibre étudiée est positionnée de telle sorte que $\delta = 18 mm$. L'hologramme ainsi simulé est proposé figure 3.11. Cet hologramme est composé de 768×576 pixels de $11 \mu m$ de côté. L'hologramme obtenu

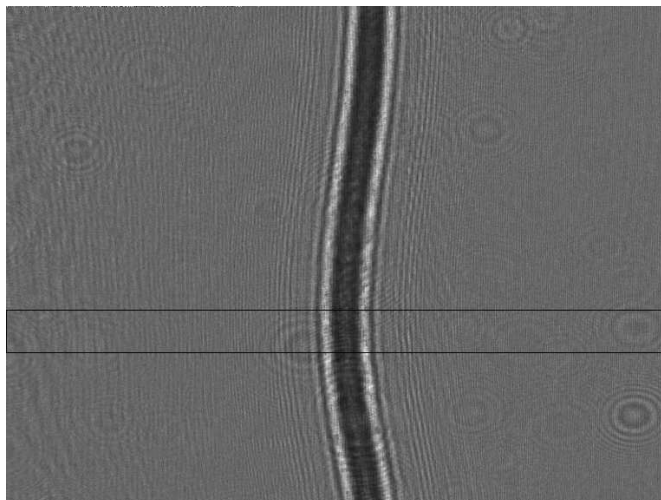
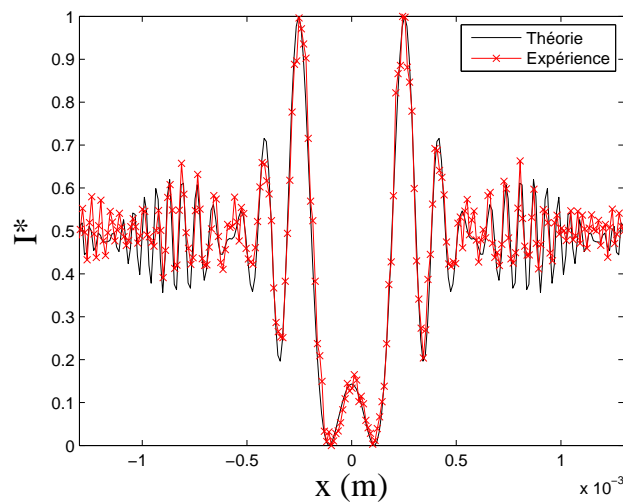


FIGURE 3.12 – Hologramme expérimental d'une fibre opaque de $51,8 \mu m$ "parallèle" à l'axe de la canalisation. $n_2 = 1,33$, $\lambda = 632,8 nm$, $z = 23 mm$ et $\delta = 18 mm$

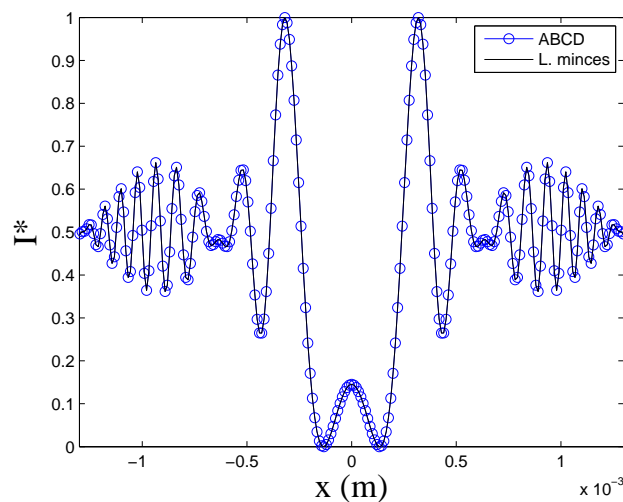
expérimentalement est représenté figure 3.12. Les résultats obtenus expérimentalement sont comparables à ceux des simulations. La figure 3.13 (a) représente la superposition des profils théoriques et expérimentaux. Le profil théorique est normalisé suivant x afin d'obtenir des amplitudes comparables entre la théorie et l'expérience. Le profil expérimental est calculé en moyennant les valeurs des niveaux de gris de chaque pixel sur 50 lignes. Ces 50 lignes sont représentées par la sélection rectangulaire visible figure 3.12. Pour compenser le mauvais centrage de la fibre expérimentale, sa distribution d'intensité a été translatée de $75 \mu m$ selon l'axe x . La figure 3.13 (a) montre le bon accord entre les profils d'intensité théoriques et expérimentaux. Le modèle est donc validé. Seul un léger décalage subsiste sur les lobes secondaires. Ce décalage peut être dû au fait que la fibre expérimentale n'est pas parfaitement rectiligne. De plus, l'image théorique est exempte de bruit, ce qui n'est bien évidemment pas le cas de l'image obtenue expérimentalement [33].

Dans la section 3.1.2, un modèle permettant de traiter les canalisations comme un assemblage de lentilles minces a été proposé. Afin de montrer la continuité existant entre les deux approches, l'épaisseur de la canalisation e est fixée à 0 dans le modèle lentilles épaisses. Pour cette expérience, $2b = 51.8 \mu m$, $a \rightarrow \infty$, $z_p = 325 mm$, $n_2 = 1$, $\delta = 18 mm$ et $z = 23 mm$. La figure 3.13 (b) montre que les profils d'intensité se superposent parfaitement. Ainsi, le modèle lentilles minces présenté auparavant est un cas limite du modèle basé sur les matrices ABCD.

Un nouveau modèle permettant de prendre en compte l'épaisseur de la canalisation lors de la simulation d'un écoulement canalisé a été présenté. Les résultats obtenus par cette méthode ont été confrontés à des enregistrements expérimentaux prouvant la robustesse de cette approche. Dans la suite, l'influence de paramètres expérimentaux tels que la distance de propagation avant la canalisation z_p ou l'indice du milieu n_2 , sur la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur, sera étudiée.



(a)



(b)

FIGURE 3.13 – (a) Comparaison des distributions d'intensité simulées et expérimentales. (b) Comparaison des distributions d'intensité obtenues par les deux approches

3.3.2 Influence des paramètres expérimentaux sur la distribution d'intensité enregistrée

3.3.2.1 Influence de la distance de propagation avant la canalisation

Dans un premier temps les effets de la distance de propagation avant la canalisation z_p sur la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur seront considérés. Les profils d'intensité calculés pour trois distances $z_p = 200 \text{ mm}$, $z_p = 250 \text{ mm}$ et $z_p = 300 \text{ mm}$ sont tracés. Pour cette étude, tous les autres paramètres resteront fixes ($\delta = 18 \text{ mm}$, $z = 23 \text{ mm}$, $n_2 = 1,33$).

Les résultats obtenus sont représentés figure 3.14. Les effets de la distance de propagation avant la canalisation ne sont pas négligeables : plus la distance de propagation z_p est grande et moins le contraste des franges dans le plan du capteur est important. En

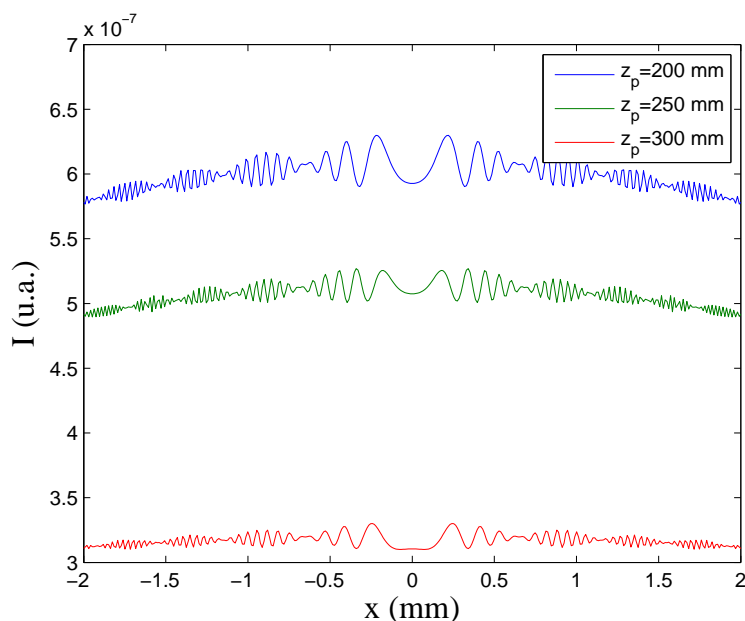


FIGURE 3.14 – Evolution de la distribution d'intensité en fonction de la distance de propagation avant la canalisation

effet, plus la distance z_p est importante, et plus le faisceau diverge avant la canalisation devenant pour le coup moins énergétique dans le plan de la particule. Jusqu'ici, seul le cas où la canalisation était remplie d'eau ($n_2 = 1,33$) a été abordé. L'approche de simulation basée sur le modèle ABCD permet de considérer des canalisations remplies de différents liquides. Cette information est accessible *via* le paramètre n_2 . L'étude de l'influence de n_2 sur la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur permettra de juger de l'effet qu'a le liquide contenu dans la canalisation sur les franges d'interférences enregistrées.

3.3.2.2 Influence de l'indice du milieu contenu dans la canalisation

L'effet qu'a l'indice de réfraction n_2 du milieu contenu dans la canalisation sur la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur est étudié. Tous les autres paramètres ont été fixés ($\delta = 18 \text{ mm}$, $z = 23 \text{ mm}$, $z_p = 250 \text{ mm}$) et les profils d'intensité enregistrés dans le plan du capteur sont tracés pour trois milieux : de l'air $n_2 = 1$, de l'eau $n_2 = 1,33$, et du verre $n_2 = 1,5$. Les résultats obtenus sont résumés sur la figure 3.15. Plus la valeur de l'indice est élevée, meilleur est le contraste des franges. Dans le cas extrême ($n_2 = 1,5$) la canalisation peut être vue comme une lame à faces parallèles de verre le faisceau ne présentera plus d'astigmatisme ni d'ellipticité. Dans le cas où la canalisation est vide ($n_2 = 1$), le faisceau subit une réfraction entre le verre de la lentille et l'air de la canalisation, la divergence du faisceau augmente. Comme dans le cas précédant, le contraste des franges enregistrées dans le plan du capteur s'en voit diminué.

La restitution des hologrammes par TF fractionnaire sera proposée dans la suite. Ainsi, de nouvelles expressions des ordres fractionnaires, tenant compte des paramètres géomé-

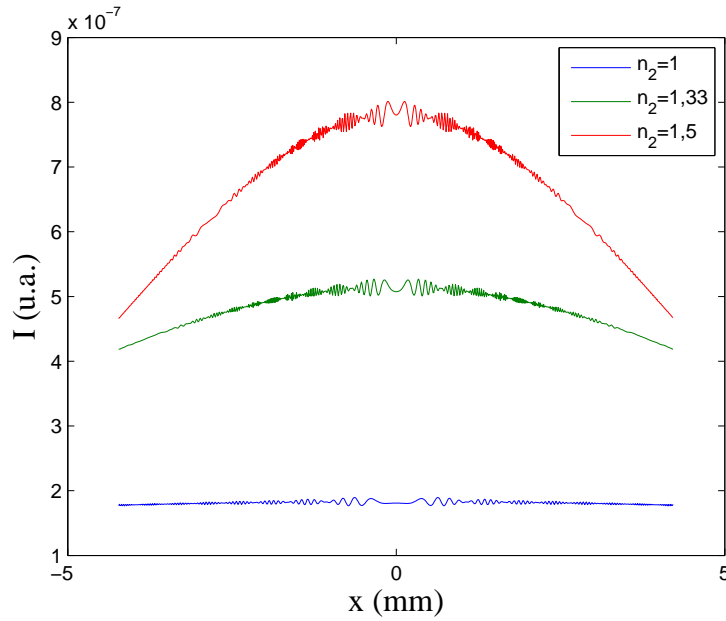


FIGURE 3.15 – Evolution de la distribution d'intensité en fonction de la distance de l'indice du milieu contenu dans la canalisation

triques et de l'épaisseur de la canalisation seront proposées.

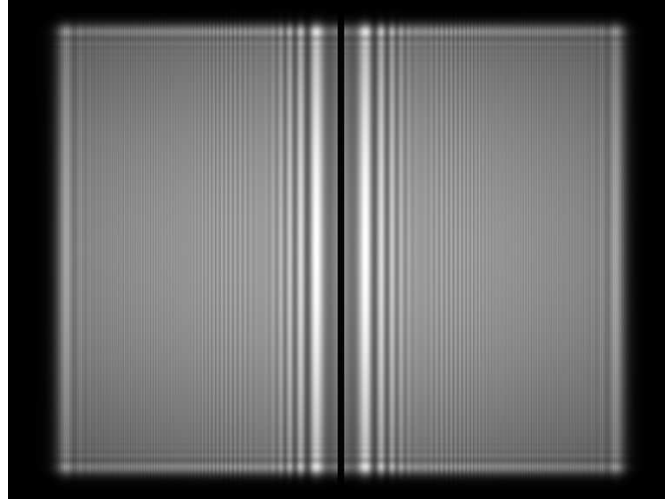
3.3.3 Restitution des hologrammes obtenus

La définition de la TF fractionnaire a été rappelée section 2.2.3. Nous chercherons ici à déterminer les ordres fractionnaires optimaux de restitution à appliquer pour traiter les hologrammes enregistrés au travers de canalisations épaisses.

3.3.3.1 Calcul des ordres fractionnaires optimaux de restitution

Le chapitre précédent a prouvé, que la restitution par la TF fractionnaire correspondait effectivement à une refocalisation numérique sur l'image de l'objet [76]. La distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur (3.29) est composée de trois termes : les termes $|\mathcal{R}|^2$ et $|\mathcal{O}|^2$ associés au faisceau de référence et au faisceau diffracté et le terme $\Re\{\mathcal{R}\overline{\mathcal{O}}\}$ qui est associé à des dérivées de fréquences linéaires modulées par une fonction de Bessel. L'information sur la distance de la particule par rapport au capteur est contenue dans ces dérivées de fréquences linéaires. La fonction de modulation nous renseigne sur le diamètre de l'objet diffractant. La restitution d'un hologramme par TF fractionnaire est possible lorsque les termes de phase quadratique présents dans la distribution d'intensité sont compensés. Les phases quadratiques enregistrées dans le plan du capteur peuvent être déterminées à partir des équations (3.27) et (3.28) :

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{M_x - D_2^x}{B_2^x} \right) x^2 + \left(\frac{M_y - D_2^y}{B_2^y} \right) y^2 \right]. \quad (3.30)$$


 FIGURE 3.16 – Restitution de l'hologramme de la figure 3.11 pour $\alpha_x^{opt} = 0,337$ et $\alpha_y^{opt} = 0,273$

Nous pouvons donc réécrire $\Re \{ \overline{\mathcal{R}\mathcal{O}} \}$ comme :

$$\Re \{ \overline{\mathcal{R}\mathcal{O}} \} = |\overline{\mathcal{R}\mathcal{O}}| \cos(\varphi). \quad (3.31)$$

Les phases quadratiques φ_a contenues dans le noyau de la TF fractionnaire sont données par :

$$\varphi_a = \pi \left(\frac{\cot \alpha_x}{s_x^2} x^2 + \frac{\cot \alpha_y}{s_y^2} y^2 \right). \quad (3.32)$$

Pour restituer l'hologramme, une TF fractionnaire est appliquée sur la distribution d'intensité donnée par l'équation (3.29) telle que :

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] \propto \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{O}|^2] - 2\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|\overline{\mathcal{R}\mathcal{O}}| \cos \varphi]. \quad (3.33)$$

Les termes $|\mathcal{R}|^2$ et $|\mathcal{O}|^2$ n'auront aucune influence sur la valeur des ordres optimaux à déterminer. Seul le second terme sera à traiter pour parvenir à restituer l'hologramme. En remarquant que $2 \cos \varphi = \exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)$, l'équation (3.33) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] &\propto \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|\mathcal{R}|^2 + |\mathcal{O}|^2] \\ &- C(\alpha_x) C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\mathcal{R}\mathcal{O}}| \exp[i(\varphi_a - \varphi)] \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_y} \right) \right] dx dy \\ &- C(\alpha_x) C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |\overline{\mathcal{R}\mathcal{O}}| \exp[i(\varphi_a + \varphi)] \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_y} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.34)$$

La restitution de l'hologramme est réalisée lorsque les phases quadratiques de la distribution d'intensité sont compensées par celles de la TF fractionnaire. Dans ce cas,

$$\varphi_a \pm \varphi = 0. \quad (3.35)$$

Ainsi, en utilisant les relations (3.30), (3.32) et (3.35), les valeurs optimales des ordres fractionnaires sont :

$$\alpha_x^{opt} = \arctan \left[\mp \frac{B_2^x \lambda}{s_x^2 (M_x - D_2^x)} \right], \quad \alpha_y^{opt} = \arctan \left[\mp \frac{B_2^y \lambda}{s_y^2 (M_y - D_2^y)} \right]. \quad (3.36)$$

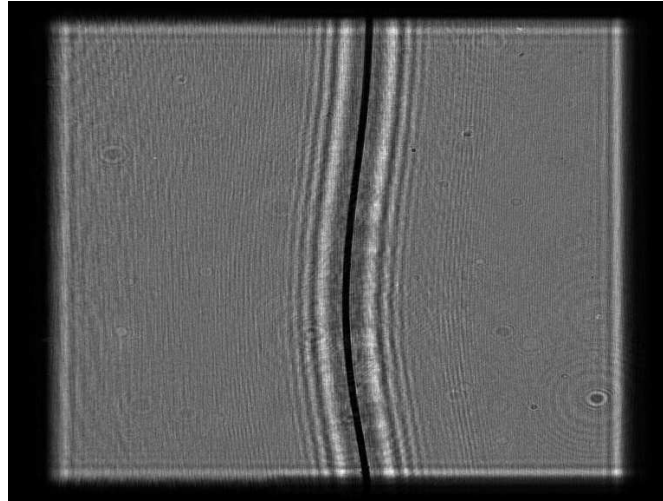


FIGURE 3.17 – Restitution de l'hologramme de la figure 3.12 pour $a_x^{opt} = 0,33$ et $a_y^{opt} = 0,27$

Pour ces ordres fractionnaires, la TF fractionnaire permettra de restituer l'image de l'objet.

3.3.3.2 Application à la restitution d'hologrammes simulés et expérimentaux

Reprenons l'hologramme simulé figure 3.11. Il s'agissait ici de l'hologramme d'une fibre opaque ($R_{ell} \rightarrow 0$) de largeur $2b = 51,8 \mu m$. La canalisation simulée était remplie d'eau. Les distances δ et z étaient choisies de telle sorte que $\delta = 18 mm$ et $z = 23 mm$. Dans ces conditions, et en utilisant les relations de l'équation (3.36), les ordres fractionnaires optimaux de restitution ont pour valeur numérique⁴ :

$$a_x^{opt} = 0,337, \quad a_y^{opt} = 0,273. \quad (3.37)$$

La restitution de l'hologramme de la figure 3.11, pour ces ordres est illustrée figure 3.16. Nous pouvons constater qu'il est possible de remettre au point sur l'image de la fibre enregistrée.

Validation expérimentale de la valeur des ordres fractionnaires de restitution

Intéressons nous maintenant à des hologrammes expérimentaux. Dans un premier temps, la TF fractionnaire est appliquée à l'hologramme de la figure 3.12. Cet hologramme, enregistré sur un capteur CCD de 768×576 pixels de $11 \mu m$ de côté, a été obtenu dans les mêmes conditions que celui proposé figure 3.11. Pour réaliser la restitution de cet hologramme, un balayage des valeurs des ordres fractionnaires a_x et a_y par pas de 10^{-2} est réalisé et une TF fractionnaire est calculée pour chaque couple de valeur obtenu. La discrétisation du noyau de la TF fractionnaire est réalisée grâce à la méthode de projection orthogonale proposée par Pei *et al.* [46] et implémentée numériquement au laboratoire dans les travaux de thèse de F. Nicolas [96]. La fibre est considérée restituée lorsque le contraste entre l'image de la fibre et le fond est maximal. En utilisant cette

4. rappelons que $\alpha_{x,y} = \pi/2a_{x,y}$

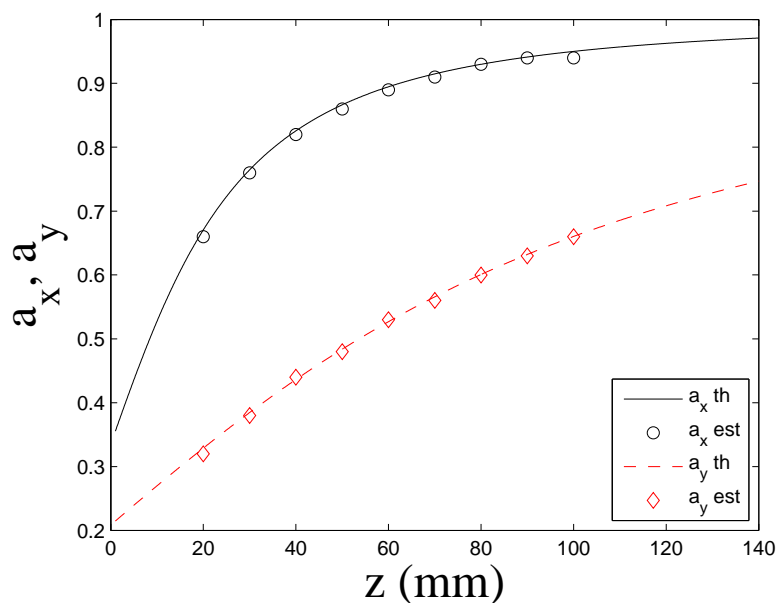


FIGURE 3.18 – Comparaison entre les ordres fractionnaires théoriques et les ordres fractionnaires estimés à partir d'hologrammes expérimentaux

méthode, nous obtenons $a_x^{opt} = 0,33$ et $a_y^{opt} = 0,27$. Ces valeurs sont très proches des valeurs théoriques de l'équation (3.37). L'hologramme ainsi restitué est représenté figure 3.17. Le bon accord entre les valeurs théoriques et expérimentales des ordres fractionnaires est illustré par la courbe proposée figure 3.18. Ici, pour différentes valeurs de z allant de 0 mm à 140 mm , les hologrammes d'une fibre opaque située dans une canalisation remplie d'air ont été enregistrés. La fibre est positionnée à $\delta = 10 \text{ mm}$ de la première lentille épaisse constituant la canalisation. Nous pouvons remarquer sur ce graphique que lorsque $z = 0 \text{ mm}$ les valeurs des ordres fractionnaires ne sont pas nulles. Ceci est dû au fait que la distance z est la distance entre le capteur et la canalisation et non pas la distance entre la particule et le capteur (comme c'est le cas dans les références [53, 48, 97] par exemple). Ici, les valeurs théoriques de a_x et a_y sont tracées en trait plein et en trait pointillé respectivement. Les valeurs expérimentales sont, quant à elles, représentées par des cercles pour a_x et des diamants pour a_y . Les valeurs théoriques et expérimentales montrent un très bon accord. Le modèle de restitution est donc adapté à l'étude d'hologrammes expérimentaux enregistrés au travers de canalisations épaisses. Pour confirmer ce point, l'hologramme présenté 3.8 est restitué. L'approche lentilles minces présentée auparavant ne permettait pas de restituer correctement cet hologramme : en effet, l'épaisseur de la canalisation n'était pas prise en compte. Tous les paramètres expérimentaux liés à l'enregistrement de cet hologramme sont connus à l'exception de δ . Pour le restituer, des TF fractionnaires d'ordres optimaux (calculés par la relation (3.36)) sont réalisées pour des valeurs de δ comprises entre 0 et 36 mm . Ainsi, il est possible de déterminer la position δ des particules dans la canalisation. La restitution de l'hologramme est proposée figure 3.20. Contrairement au cas précédent, l'image des particules situées dans la canalisation est restituée à la position $\delta = 20 \text{ mm}$ prévue expérimentalement.

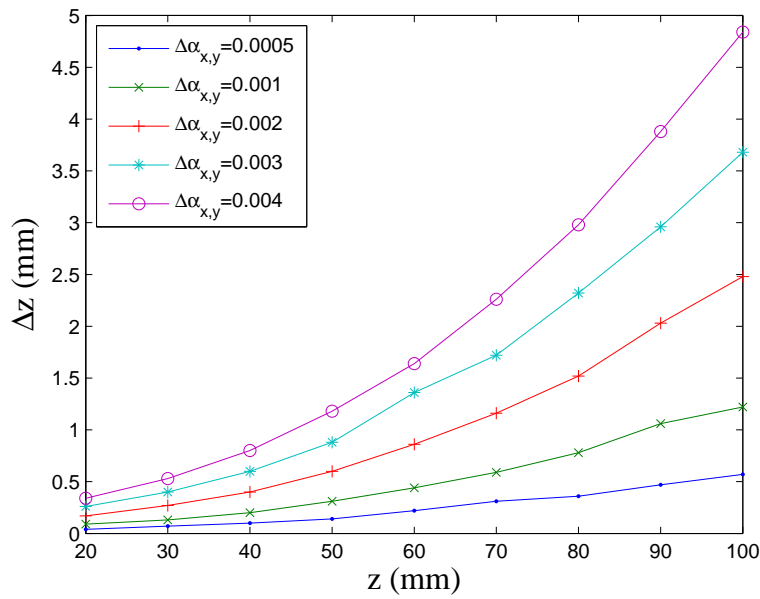


FIGURE 3.19 – Evolution de l'erreur sur l'estimation de la position de restitution Δz , en fonction de z , pour différentes erreurs d'estimation des ordres fractionnaires

Sensibilité à une erreur sur les ordres fractionnaires

Comme le prouvent les figures 3.18 et 3.20, les développements théoriques présentés jusqu'ici sont adaptés à la restitution d'hologrammes expérimentaux enregistrés dans une canalisation. Cependant, comme le montre la section 2.2.3.2, il est rarement possible de déterminer la valeur exacte du couple d'ordres fractionnaires de restitution dans le cas d'hologrammes expérimentaux. Il est donc nécessaire d'estimer l'influence qu'aurait une erreur d'estimation du couple d'ordres fractionnaires de restitution sur la détermination de la distance de restitution de l'hologramme. Ainsi, en utilisant les résultats théoriques présentés figure 3.18 et en imposant une erreur d'estimation des ordres allant de $\Delta\alpha_{x,y} = \pm 5 \times 10^{-4}$ à $\Delta\alpha_{x,y} = \pm 5 \times 10^{-3}$, il est possible d'estimer l'erreur commise sur la valeur de la distance de restitution Δz . Cette estimation est réalisée pour des valeurs des distances entre la canalisation et le capteur allant de $z = 20 \text{ mm}$ à $z = 100 \text{ mm}$. L'évolution de l'erreur sur la position Δz , en fonction de z , pour différentes valeurs d'erreur d'ordre $\Delta\alpha_{x,y}$ est proposée figure 3.19. Il apparaît ici clairement que plus la valeur de $\Delta\alpha_{x,y}$ est faible, plus l'estimation de z est précise. Cependant, plus on diminue la valeur de $\Delta\alpha_{x,y}$, plus le temps de calcul alloué à la restitution d'un hologramme est important. De même plus la distance z est faible et moins l'erreur sur la position Δz est basse. Néanmoins, les développements théoriques présentés sont valables dans l'approximation champ lointain. Il n'est donc pas envisageable d'approcher davantage le capteur CCD de la canalisation.

3.4 Conclusion

Dans le chapitre 2, les principes de base liés à l'étude des écoulements par holographie à référence AEG ont été posés. Ces résultats sont ici utilisés dans le cas de l'étude

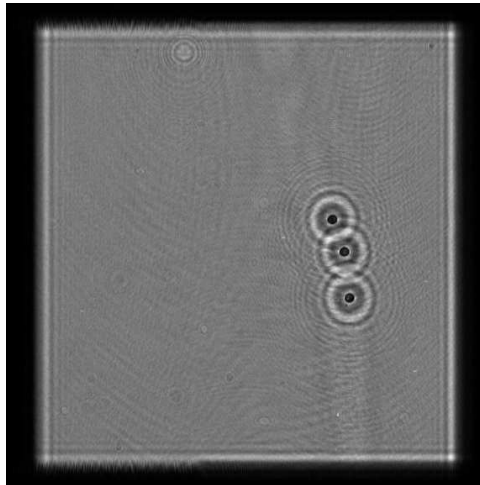


FIGURE 3.20 – Restitution de l'hologramme 3.8 avec les paramètres optimaux prévus par le modèle ABCD : $\delta = 20 \text{ mm}$

des écoulements canalisés. En effet, les canalisations sont des milieux qui contiennent de l'astigmatisme. Peu d'outils permettent de traiter ce type de situations. C'est pourquoi l'enregistrement des hologrammes obtenus dans ces conditions devait être modélisé. Ainsi, deux approches permettant de mettre en œuvre la simulation de tels hologrammes ont été considérées. Dans un premier temps, les deux faces de la canalisation ont été modélisées comme l'association de deux lentilles minces. Cette approche est en fait une généralisation du modèle précédent qui permettait de simuler les hologrammes enregistrés en lumière AEG. Ainsi, en considérant l'effet qu'avaient les deux lentilles cylindriques minces sur le faisceau de référence et le faisceau diffracté par la particule, la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur a été simulée. Après avoir établi les valeurs des ordres optimaux de restitution et les avoir appliquées avec succès à la restitution d'hologrammes simulés, le modèle lentilles minces a été confronté à des données expérimentales. Cette approche ne permettait cependant pas de traiter des hologrammes expérimentaux : en effet, l'épaisseur de la canalisation n'est pas prise en compte par une approche lentilles minces ce qui conduit à des distances de restitution erronées.

Afin de pouvoir prendre en compte l'épaisseur de la canalisation, une seconde approche a été considérée. Cette fois ci, la canalisation n'est plus vue comme l'assemblage de deux lentilles minces, mais comme l'association de deux lentilles épaisses. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de représenter des opérations optiques simples (réfraction, propagation ...) par une seule matrice 2×2 . En associant ces matrices à l'intégrale de Fresnel, il est possible de traiter la propagation au travers d'un tel système. Ainsi un modèle de simulation des écoulements canalisés permettant de simuler les hologrammes enregistrés au travers d'une canalisation optiquement épaisse a été présenté. Les résultats simulés au moyen de cette approche ont été confrontés à des résultats obtenus expérimentalement dans les mêmes conditions montrant ainsi un très bon accord. L'influence des paramètres expérimentaux sur la distribution d'intensité enregistrée dans la plan du capteur a permis de mettre en évidence l'importance du choix de la distance de propagation

z_p et de l'indice du milieu contenu dans la canalisation n_2 . L'analyse de tels hologrammes par TF fractionnaire a permis de déterminer les valeurs optimales des ordres fractionnaires à appliquer pour la restitution. Ces valeurs ont été validées sur des hologrammes expérimentaux et ensuite ont été appliquées, avec succès, à l'hologramme que l'approche lentilles minces ne permettait pas de traiter.

L'approche lentilles épaisses permet de simuler les hologrammes enregistrés au travers d'une canalisation et montre un bon accord avec la théorie. Néanmoins, la qualité des restitutions dépend de la finesse de l'estimation des ordres fractionnaires optimaux. Le temps de calcul alloué au traitement de l'hologramme d'un volume complet devient alors important. Dans la suite, une mise en application du modèle d'écoulements canalisés et du modèle d'écoulements astigmatés sera présentée. Nous chercherons ici à isoler des zones d'intérêt tridimensionnelles dans les canalisations. Cette détermination sera faite directement sur les hologrammes. Pour ce faire, les effets de l'astigmatisme présentés chapitre 2 combinés aux effets des canalisations optiquement épaisses présentées dans ce chapitre seront considérés. Dans un premier temps, la faisabilité de cette étude sera abordée d'un point de vue numérique puis les résultats expérimentaux montrant la séparation d'hologrammes en régions d'intérêt seront présentés.

Chapitre 4

Détermination de régions d'intérêt 3D par observation des hologrammes

Sommaire

4.1	Introduction	57
4.1.1	Localisation axiale des objets en holographie	57
4.1.2	Utilisation de l'holographie à référence astigmatique : isolement tout optique d'une région d'intérêt	58
4.2	Étude numérique de faisabilité	60
4.2.1	Prise en compte de la lentille mince	60
4.2.2	Simulations numériques : enregistrement de figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme	61
4.2.2.1	Evolution de $\omega_{\xi,\eta}$ et $R_{\xi,\eta}$ dans la canalisation	62
4.2.2.2	Hologrammes simulés	63
4.2.3	Modification de la taille et de la position de la région d'intérêt	64
4.2.3.1	Influence de la position de la lentille sur les paramètres de la zone d'intérêt	65
4.2.3.2	Influence de l'indice du milieu contenu dans la canalisation sur le volume de la région d'intérêt	65
4.3	Isolement de la région d'intérêt tridimensionnelle à partir d'hologrammes expérimentaux	68
4.3.1	Principe de l'étude et enregistrement d'hologrammes dans la région d'intérêt	68
4.3.2	Résultats obtenus	70
4.3.2.1	Protocole expérimental	70
4.3.2.2	Hologramme obtenu	71
4.4	Conclusion	73

4.1 Introduction

4.1.1 Localisation axiale des objets en holographie

Les données tridimensionnelles (positions, vitesses ...) que renferment un hologramme sont très appréciées dans des domaines tels que la mécanique des fluides et permettent de renseigner sur les modifications de géométrie des écoulements [26]. Cependant, sa grande profondeur de champ, rend plus compliquée une localisation précise des objets selon l'axe optique par holographie. La localisation des objets selon l'axe optique est difficile sans avoir recours à des processus numériques lourds. Si la profondeur de champ est réduite,

alors il devient possible de déterminer plus finement la position des objets. Par exemple, la possibilité de réduire la profondeur de champ dans le cas d'hologrammes de champs de particules a été démontrée [98]. La méthode est basée sur l'utilisation d'un filtre fréquentiel dont le but est d'améliorer la visibilité des franges d'interférences. Néanmoins, dans ce cas, des connaissances *a priori* sur le diamètre des particules à traiter étaient nécessaires. Réaliser la mise au point sur des objets contenus dans un volume d'étude reste un problème ouvert.

Des procédures automatisées existent pour déterminer les positions des objets situés dans un volume d'étude. Il est, par exemple, possible de déterminer la meilleure mise au point en se basant sur la signature spectrale, complexe ou en amplitude des objets [99, 100, 101]. En se basant sur ces considérations, il devient possible de réaliser un traitement totalement automatique des hologrammes [102]. Cependant, toutes ces procédures impliquent un temps de calcul important. En effet, il est nécessaire de restituer l'hologramme sur une multitude de plans pour pouvoir obtenir l'information la plus précise possible. Ce point est particulièrement pénalisant pour de grands volumes de mesures ou lorsque l'on désire une très grande précision sur la localisation axiale d'un objet. Des informations sur la taille ou la position de particules peuvent être obtenues par analyse directe des hologrammes, en s'affranchissant de l'étape de restitution [103, 104]. Dans le premier cas, le contenu de l'hologramme est extrait au moyen de la fonction de distribution de Wigner. L'utilisation de cette méthode permet d'obtenir la position tridimensionnelle ainsi que le diamètre des objets. Néanmoins, la représentation d'un signal bidimensionnel dans l'espace de Wigner est très compliquée. En effet, la représentation de Wigner d'un signal bidimensionnel est quadridimensionnelle. Dans le second cas [104], la restitution de l'hologramme n'est pas nécessaire mais seule une information moyenne concernant les diamètres des particules peut être extraite. Il n'est en aucun cas possible de localiser les objets. Un moyen pour limiter la quantité d'information à traiter est de restituer une zone restreinte de l'hologramme.

4.1.2 Utilisation de l'holographie à référence astigmatique : isolement tout optique d'une région d'intérêt

Afin de localiser au mieux les particules et limiter la quantité de données à traiter, il apparaît intéressant de pouvoir sélectionner une région d'intérêt tridimensionnelle. L'hologramme ne sera traité que dans cette zone. Li *et al.* ont proposé une méthode numérique d'extraction de régions d'intérêt tridimensionnelles à partir d'hologrammes [105]. En utilisant un algorithme de détection rapide de la mise au point permettant de calculer un noyau de restitution contenant les informations sur les distances de mise au point détectées et en segmentant l'hologramme, les auteurs de [105] sont parvenus à extraire l'information d'une région d'intérêt tridimensionnelle sans restituer complètement l'hologramme. Cette méthode comporte cependant de nombreuses étapes numériques qui alourdissent le traitement de l'hologramme.

Dans la suite, une méthode de détermination de la région d'intérêt directement à partir de l'hologramme, sans aucune étape numérique sera proposée. Pour comprendre l'intérêt

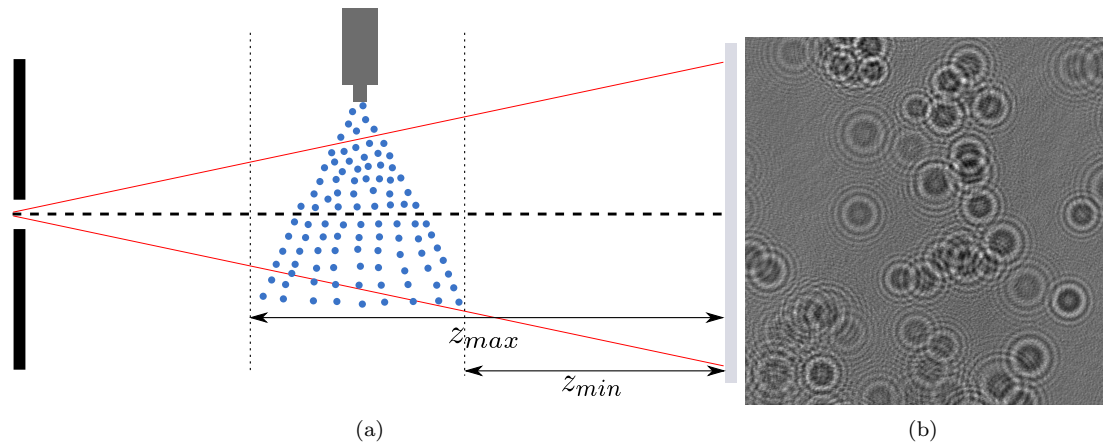


FIGURE 4.1 – (a) Illustration de l'enregistrement de l'hologramme d'un spray. (b) Exemple d'hologramme obtenu

et le fonctionnement de la méthode, le schéma de la figure 4.1 (a) est considéré. Il s'agit d'un montage d'holographie permettant l'enregistrement de l'hologramme d'un spray. La figure 4.1 (b) représente l'hologramme du spray qui s'étend entre les distances z_{min} et z_{max} . Les figures d'interférences générées par les particules sont toutes circulaires. Seul le contraste et l'espacement des franges peuvent nous renseigner sur la position des gouttes dans le volume. La zone d'intérêt n'est pas clairement mise en évidence sur l'hologramme. Néanmoins, il est possible, lorsque l'on éclaire une particule au moyen d'un faisceau AEG, de connaître sa position par rapport au waist. En effet, si celle-ci est positionnée avant le waist du faisceau, les figures d'interférences obtenues dans le plan du capteur seront hyperboliques. En revanche, si la particule est située après le waist du faisceau, elle génère des figures d'interférences elliptiques.

Il apparait dès lors envisageable de sélectionner une zone du spray à traiter en fonction de la position des waists pour générer des interférences elliptiques ou hyperboliques. Ici, les particules sont considérées dans la région d'intérêt si leur figure d'interférences présente un aspect hyperbolique. Le modèle présenté dans le chapitre 2 est valide, mais limite l'application au cas d'écoulements non canalisés (c'est par exemple le cas pour un spray). Au contraire, le modèle présenté dans le chapitre 3 permet d'étudier les écoulements canalisés mais ne permet pas d'isoler des régions d'intérêt. En effet, la canalisation, bien que présentant de l'astigmatisme, fait uniquement diverger le faisceau. Ainsi, la présence d'un waist dans la canalisation n'est, en théorie, pas possible. Il n'y a donc aucune raison d'enregistrer des figures d'interférences hyperboliques. Afin de pouvoir isoler des régions d'intérêt tridimensionnelles dans notre canalisation, il faut donc opter pour une approche intermédiaire entre celle proposée chapitre 2 et celle proposée chapitre 3. C'est pourquoi le faisceau sera focalisé, au moyen d'une lentille sphérique, dans la canalisation. L'astigmatisme sera apporté par la canalisation et son contrôle sera possible grâce à la lentille sphérique.

Dans cette partie, la possibilité d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans une canalisation est envisagée. Compte tenu du nombre de degrés de liberté dont dispose le

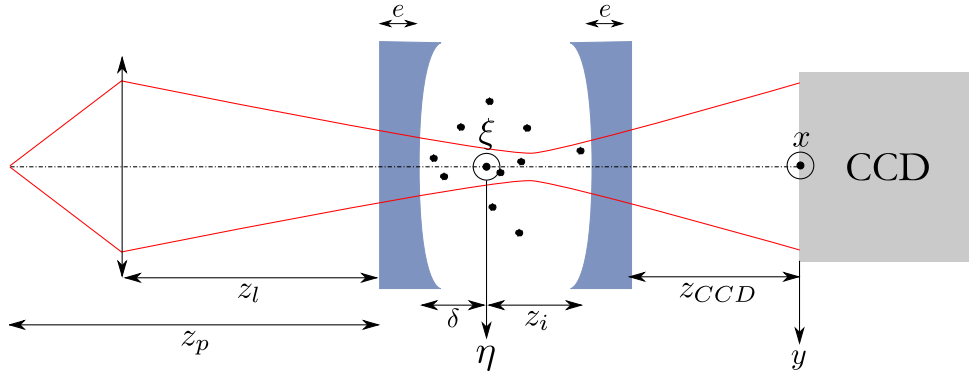


FIGURE 4.2 – Schéma de montage d'holographie pour l'isolement de région d'intérêt 3D dans une canalisation

montage (position de la lentille, distance entre la source et la canalisation, indice du milieu contenu dans la canalisation . . .), la possibilité de visualiser une zone d'intérêt sera vérifiée d'un point de vue numérique. En effet, dans le chapitre 3, un modèle, basé sur les matrices ABCD a été présenté. Les résultats donnés par cette approche ont été confrontés aux données obtenues expérimentalement et ont montré un excellent accord avec ces dernières. Il est donc possible de se baser sur ces résultats afin de déterminer les meilleurs paramètres expérimentaux pour visualiser la région d'intérêt. Une fois ces paramètres déterminés, les résultats expérimentaux prouveront les capacités de l'holographie en lumière astigmatique à isoler des zones d'intérêt tridimensionnelles dans le cas d'écoulements faiblement encemésés.

4.2 Étude numérique de faisabilité

Les simulations numériques sont basées sur le dispositif expérimental présenté figure 4.2. Le faisceau issu du point source de rayon ω se propage sur une distance $z_p - z_l$ avant de rencontrer une lentille mince de distance focale $f = 50 \text{ mm}$. Après propagation dans l'air sur une distance z_l , le faisceau entre dans la canalisation. Les figures d'interférences sont enregistrées sur un capteur CCD situé à une distance z de la canalisation. Les effets de la lentille mince dans le modèle proposé au chapitre 3 doivent être pris en compte dans notre modèle.

4.2.1 Prise en compte de la lentille mince

Le modèle ABCD dont nous disposons présente ici un avantage non négligeable : pour prendre en compte la lentille, il suffit d'ajouter une matrice ABCD associée à la lentille mince, et une matrice ABCD pour la propagation en air libre après cette dernière. Ainsi, il nous suffit d'ajouter, dans le premier système ABCD, noté $M_1^{x,y}$ et dont l'expression est proposée annexe D, les deux matrices suivantes :

$$M_{L_m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_0}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{z_l} = \begin{pmatrix} 1 & z_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

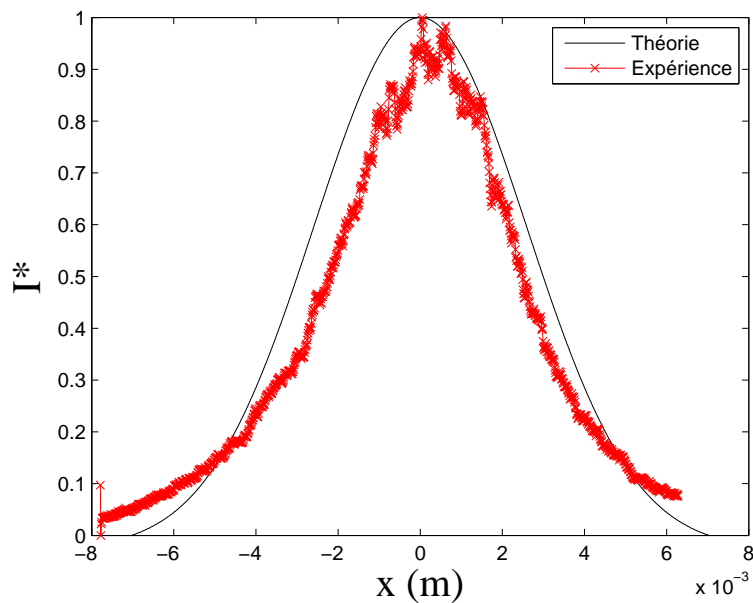


FIGURE 4.3 – Comparaison des profils d'intensité théorique et expérimentale

Seul le premier système ABCD noté $M_1^{x,y}$ est affecté par ce changement, le système $M_2^{x,y}$ reste inchangé. En effet, le second système est associé à la propagation du faisceau du plan de la particule au plan du capteur. Dans le but de vérifier si l'ajout de la lentille mince n'affecte pas les résultats obtenus par le modèle, la distribution d'intensité du faisceau après traversée du système proposé figure 4.2 est enregistrée. La distance de propagation entre le point source et la canalisation est fixée à $z_p = 200 \text{ mm}$ et la distance entre la canalisation et la lentille à $z_l = 45 \text{ mm}$. La canalisation est remplie d'eau et le capteur est situé à une distance de $z_{CCD} = 18 \text{ mm}$ de celle-ci. Pour comparer les deux résultats, les profils d'intensité normalisée I^* sont tracés figure 4.3. Un bon accord est obtenu entre le fond obtenu expérimentalement et le fond théorique. Dans la suite, il sera donc possible d'utiliser ce modèle pour essayer de déterminer les paramètres expérimentaux pour lesquels l'isolement d'une région d'intérêt tridimensionnelle est envisageable.

4.2.2 Simulations numériques : enregistrement de figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme

Le modèle proposé permet de simuler les hologrammes pour lesquels le faisceau de référence est focalisé dans la canalisation. Le but de cette étude est de prouver qu'il est possible d'enregistrer, sur le même hologramme, des figures de diffraction elliptiques et hyperboliques. Les valeurs de z_l et z_p , représentées sur le dispositif expérimental de la figure 4.2, ont un impact sur la détermination ou la non détermination d'une région d'intérêt. Le nombre de couples de valeurs (z_l, z_p) étant important, une étude numérique est réalisée au préalable. Ainsi, les couples (z_p, z_l) de valeurs permettant d'obtenir des figures elliptiques et hyperboliques sur le même hologramme seront déterminés. Dans un premier temps, la valeur de la distance de propagation entre le point source et la canalisation z_p est fixée.

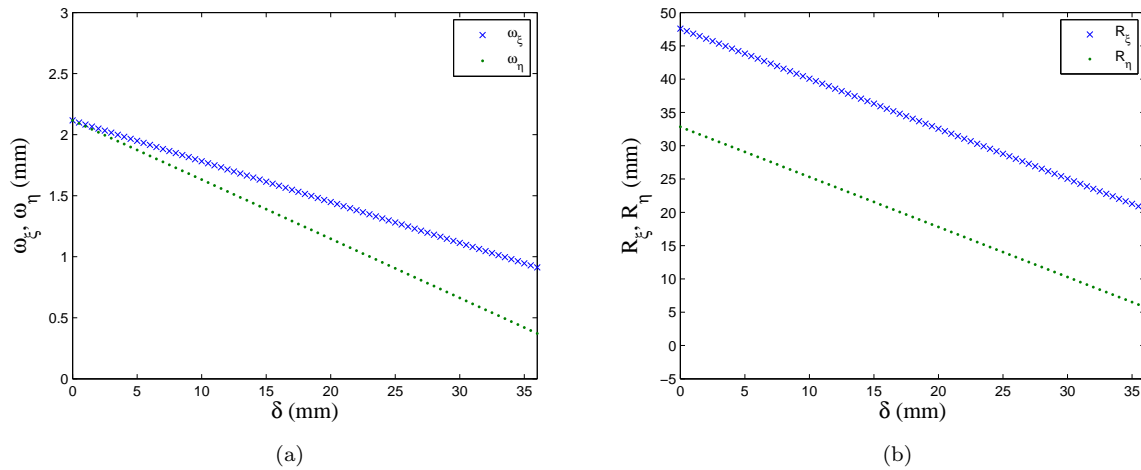


FIGURE 4.4 – (a) Evolution des rayons du faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour $z_p = 200 \text{ mm}$ et $z_l = 30 \text{ mm}$. (b) Évolution des rayons du faisceau $R_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour les mêmes valeurs

Ensuite, pour des valeurs de la position de la lentille par rapport à la canalisation z_l comprises entre 1 mm et $z_p - 1$, les hologrammes sont simulés pour toutes les positions δ de la particule dans la canalisation. Ces simulations sont réalisées pour des valeurs de z_p allant de 100 mm à 325 mm . Comme le montre le chapitre 2, la forme des figures d'inférences est liée aux signes des rayons de courbure du front d'onde dans le plan de la particule. Ces changements de signe se produisent lorsque le faisceau présente un ou plusieurs cols.

4.2.2.1 Evolution de $\omega_{\xi,\eta}$ et $R_{\xi,\eta}$ dans la canalisation

L'allure des figures d'interférences est liée aux valeurs de $\omega_{\xi,\eta}$ et $R_{\xi,\eta}$. En effet, les franges d'interférences seront hyperboliques lorsque les rayons de courbure du front d'onde dans le plan de la particule seront de signes opposés. Le changement de signe des rayons de courbure est lié à la présence d'un col dans le faisceau et se traduit par le passage par un minimum des valeurs de $\omega_{\xi,\eta}$. Les expressions de $\omega_{\xi,\eta}$ et $R_{\xi,\eta}$ sont données par :

$$\omega_{\xi,\eta} = \left(\frac{\lambda B_1^{x,y}}{\pi \omega} \right) \left[1 + \left(A_1^{x,y} \frac{\pi \omega^2}{\lambda B_1^{x,y}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad R_{\xi,\eta} = - \frac{B_1^{x,y}}{D_1^{x,y} - \frac{A_1^{x,y} \left(\frac{\pi \omega^2}{\lambda B_1^{x,y}} \right)^2}{1 + \left(A_1^{x,y} \frac{\pi \omega^2}{\lambda B_1^{x,y}} \right)^2}}. \quad (4.2)$$

Les coefficients $A_1^{x,y}$, $B_1^{x,y}$ et $D_1^{x,y}$ contiennent les caractéristiques géométriques de la canalisation et de la lentille.

La valeur de z_p est fixée à 200 mm et la lentille est positionnée à $z_l = 30 \text{ mm}$ de la canalisation. Dans cette configuration, il n'est pas possible d'obtenir des franges d'interférences elliptiques et hyperboliques. La figure 4.4 donne l'évolution des largeurs $\omega_{\xi,\eta}$ du faisceau (figure 4.4 (a)) et l'évolution des rayons de courbure du front d'onde $R_{\xi,\eta}$ (figure 4.4 (b)) en fonction de δ . L'évolution des largeurs du faisceau dans la canalisation

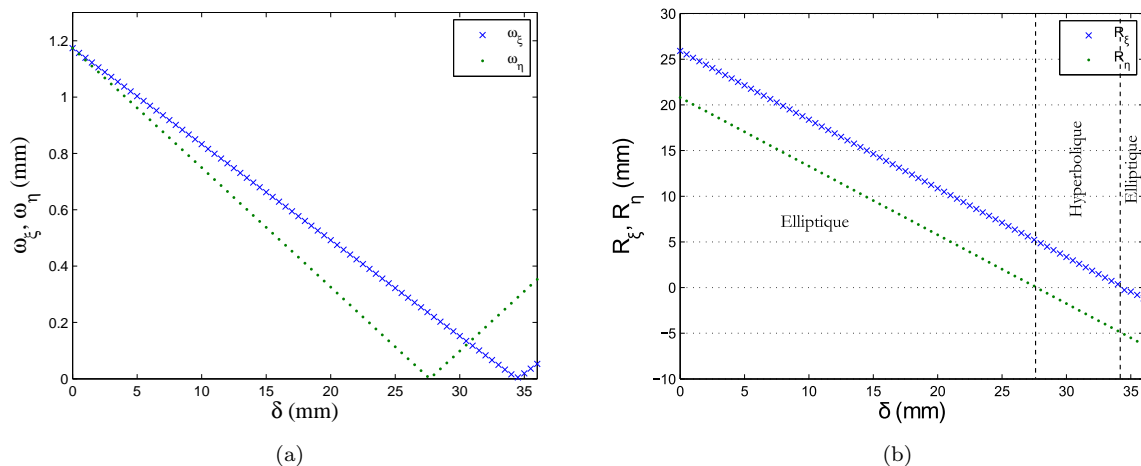


FIGURE 4.5 – (a) Evolution des rayons du faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour $z_p = 200$ mm et $z_l = 45$ mm. (b) Évolution des rayons du faisceau $R_{\xi,\eta}$ en fonction de la position de la particule δ pour les mêmes valeurs

est strictement décroissante, les courbes ne présentent pas de minimum : il n'y a pas de waist dans la canalisation. Les rayons de courbures du front d'onde dans la canalisation sont tous les deux de même signe. Par conséquent, il ne sera pas possible d'obtenir des figures d'interférences hyperboliques. Cette valeur de z_p permet néanmoins de visualiser les deux types de figures d'interférences sur le même hologramme. Pour ce faire, la lentille est positionnée à la distance $z_l = 45$ mm. La figure 4.5 rend compte de l'évolution des largeurs du faisceau et des rayons de courbure du front d'onde en fonction de la position d'observation dans la canalisation. Les variations des largeurs du faisceau en fonction de la position d'observation dans la canalisation sont représentées figure 4.5. Les valeurs de ω_η et ω_ξ passent successivement par un minimum pour $\delta = 27$ mm et $\delta = 34$ mm respectivement. Il y a donc deux waists dans la canalisation. L'évolution des rayons de courbure du front d'onde en fonction de δ est représentée figure 4.5 (b). Pour δ compris entre 27 mm et 34 mm, R_ξ et R_η sont de signes opposés. Les figures d'interférences générées par des particules situées dans cette zone seront hyperboliques. En dehors de cette zone, R_ξ et R_η sont de mêmes signes.

Les deux cols du faisceau dans la canalisation définissent les limites de la zone d'intérêt tridimensionnelle. Les figures d'interférences générées par les objets présents dans cette région seront hyperboliques. Pour vérifier ces considérations, les hologrammes simulés pour $z_p = 200$ mm sont présentés.

4.2.2.2 Hologrammes simulés

Les hologrammes obtenus dans le cadre de l'expérience numérique proposée figure 4.2 sont présentés. Les résultats obtenus pour les différentes valeurs des paramètres z_p et z_l sont discutés. Afin de confirmer les résultats obtenus dans la section 4.2.2.1, les hologrammes simulés pour $z_p = 200$ mm sont présentés.

Les simulations sont réalisées en faisant varier la position z_l de la lentille par rapport

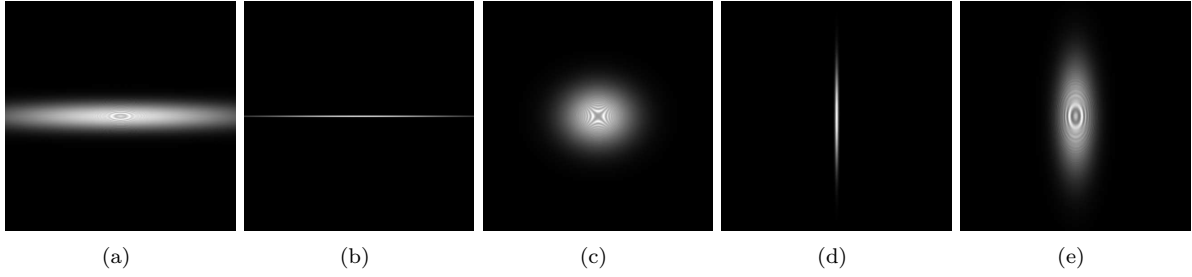


FIGURE 4.6 – (a) Hologramme simulé pour $z_l = 1 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $z_l = 6 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$. (c) Hologramme simulé pour $z_l = 20 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$. (d) Hologramme simulé pour $z_l = 30 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$. (e) Hologramme simulé pour $z_l = 35 \text{ mm}$ et $\delta = 18 \text{ mm}$

à la canalisation. Les résultats obtenus pour des valeurs de z_l comprises entre 1 mm et 35 mm sont représentés figure 4.6. Le fait que le faisceau présente deux waists est clairement visible. En effet, comme le montrent les figures 4.6 (b) et (d), ces derniers sont dans le plan du capteur CCD (situé à $z_{CCD} = 18 \text{ mm}$ de la canalisation) pour $z_l = 6 \text{ mm}$ et $z_l = 30 \text{ mm}$. Pour des valeurs de z_l comprises entre 6 mm et 30 mm , les figures d'interférences enregistrées sont hyperboliques dans toute la canalisation. De part et d'autre de ces deux valeurs, les figures d'interférences sont elliptiques.

La figure 4.6 (c) montre qu'il est possible d'enregistrer des figures d'interférences hyperboliques. Cependant, il n'est pas possible d'enregistrer les deux types de franges sur le même hologramme. Ces configurations ne permettent pas d'isoler de région d'intérêt. En effet les waists du faisceau restent en dehors de la canalisation. Afin de visualiser une région d'intérêt, la distance z_l est maintenant fixée à 45 mm . Les hologrammes simulés dans ces conditions sont représentés figure 4.7. Dans cette configuration les deux waists sont situés dans la canalisation aux distances $\delta = 27 \text{ mm}$ et $\delta = 34 \text{ mm}$. Ceci est illustré par les figures 4.7 (b) et (d). Pour des valeurs de δ comprises entre 27 mm et 34 mm les figures d'interférences sont hyperboliques. En effet, dans cette zone, comme l'illustre la figure 4.5 (b), les rayons de courbure du front d'onde sont de signes opposés. Pour des valeurs de δ inférieures à 27 mm ou supérieures à 34 mm , les franges d'interférences sont elliptiques (voir figures 4.7 (a) et (e)). En effet, pour ces positions, les rayons de courbure du front d'onde sont de mêmes signes. L'observation de franges d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme est possible pour des valeurs de z_l allant jusqu'à 72 mm . Dans la suite, l'influence des paramètres du montage sur la position et la taille de la région d'intérêt est abordée.

4.2.3 Modification de la taille et de la position de la région d'intérêt

La position et la taille de la région d'intérêt sont liées aux paramètres du faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ et $R_{\xi,\eta}$ dans la canalisation. Dans la suite, l'influence de la distance z_l entre la canalisation et la lentille et l'influence de l'indice du liquide contenu dans la canalisation sont étudiées.

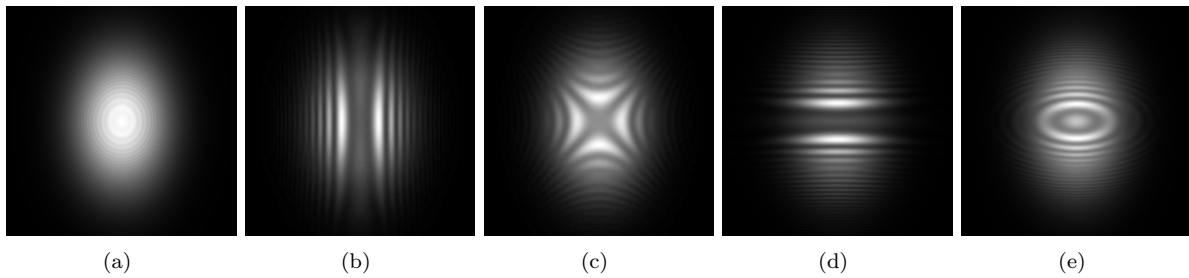


FIGURE 4.7 – (a) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 1 \text{ mm}$. (b) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 27 \text{ mm}$. (c) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 31 \text{ mm}$. (d) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 34 \text{ mm}$. (e) Hologramme simulé pour $z_l = 45 \text{ mm}$ et $\delta = 36 \text{ mm}$

4.2.3.1 Influence de la position de la lentille sur les paramètres de la zone d'intérêt

La taille et la position de la région d'intérêt dépendent de la courbure du front d'onde dans la canalisation. Cette dernière est liée aux paramètres expérimentaux du montage. Afin d'agir sur la région d'intérêt, des simulations ont été réalisées en modifiant la valeur de la position de la lentille par rapport à la canalisation. La distance entre le point source et la canalisation est maintenue à $z_p = 200 \text{ mm}$. Pour visualiser l'influence de z_l , les largeurs de faisceau $\omega_{\xi,\eta}$ sont tracées en fonction de la position d'observation δ dans la canalisation. Les résultats obtenus sont regroupés figure 4.8. Ici, trois valeurs de z_l sont considérées : $z_l = 45 \text{ mm}$ (figure 4.8 (a)), $z_l = 50 \text{ mm}$ (figure 4.8 (b)) et $z_l = 55 \text{ mm}$ (figure 4.8 (c)). Pour $z_l = 45 \text{ mm}$, la région d'intérêt est présente pour des valeurs de δ allant de 27 mm à 34 mm . Si la lentille est éloignée de la canalisation jusqu'à $z_l = 50 \text{ mm}$, la région d'intérêt est déplacée vers la gauche et sa taille diminue : elle s'étend entre $\delta = 23 \text{ mm}$ et $\delta = 28 \text{ mm}$. Enfin, si l'on fixe $z_l = 55 \text{ mm}$, la région d'intérêt est une nouvelle fois déplacée et réduite. Le domaine d'étude est alors réduit aux valeurs de δ comprises entre 18 mm et 20 mm .

Il est ainsi possible de déplacer la zone d'intérêt au sein de la canalisation et donc de sonder différentes zones dans l'écoulement à étudier. Dans la suite, l'influence du liquide contenu dans la canalisation sur les paramètres de la région d'intérêt sera présentée.

4.2.3.2 Influence de l'indice du milieu contenu dans la canalisation sur le volume de la région d'intérêt

Dans la partie précédente, les paramètres expérimentaux qui permettent d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans un écoulement canalisé par lecture directe de l'hologramme ont été établis. La position et le volume de cette zone sont fortement dépendants de la position de la lentille ainsi que de la distance de propagation entre la source et la canalisation. Selon les études réalisées, le fluide contenu dans la canalisation peut varier. Par exemple, dans le cas de l'étude de bulles de cavitation, le fluide considéré est, en général, de l'eau. Mais il est également possible de s'intéresser au comportement d'autres fluides tels que l'huile. L'indice de réfraction du fluide étudié aura une influence sur les paramètres pour lesquels une région d'intérêt existe dans la canalisation. Nous nous proposons ici de regarder l'influence qu'a l'indice de réfraction n_2 du milieu contenu dans la canalisation

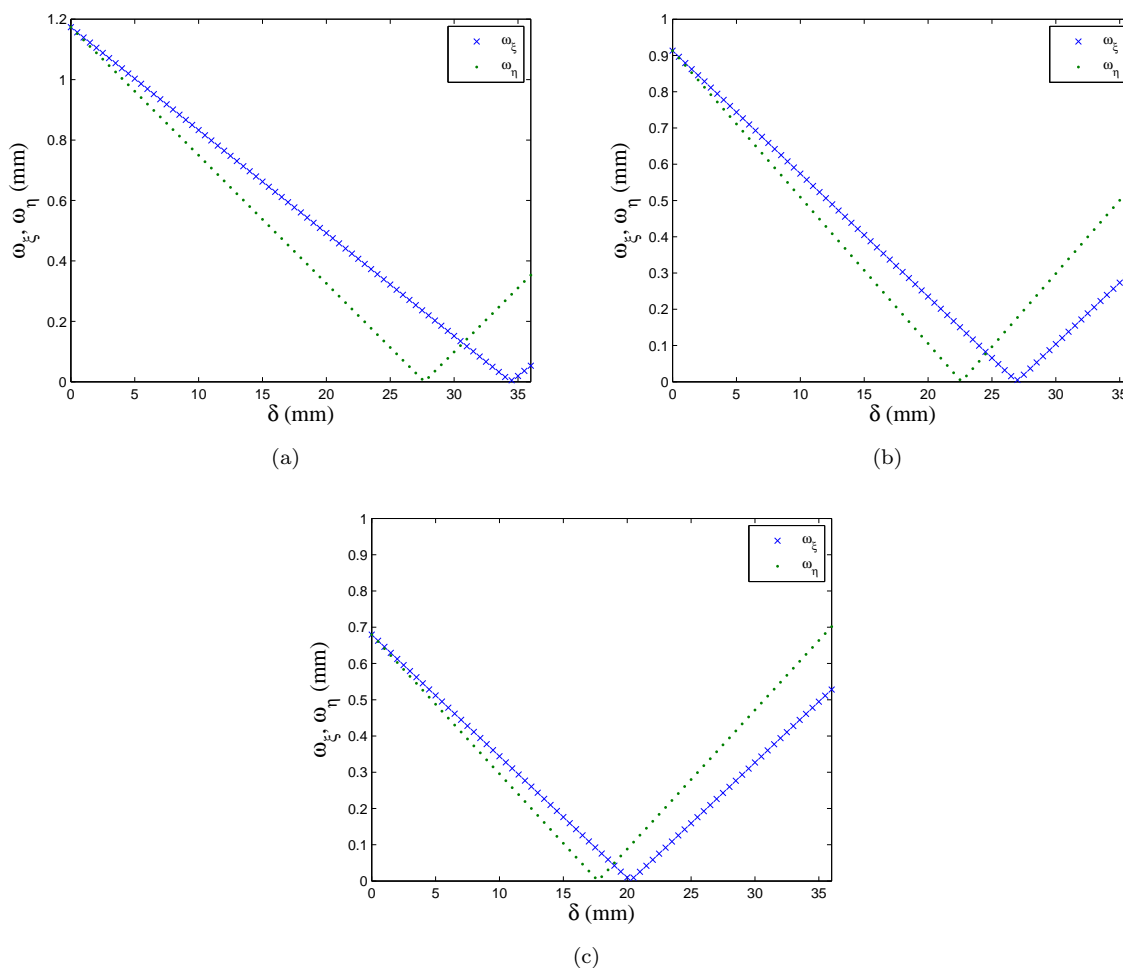


FIGURE 4.8 – Influence de la position de la lentille sur les paramètres de la zone d'intérêt. (a) $z_l = 45$ mm. (b) $z_l = 50$ mm. (c) $z_l = 55$ mm

sur la région d'intérêt. Les conditions qui avaient permis de tracer les graphiques de la figure 4.5 sont utilisées. Ces tracés avaient été réalisés pour $z_p = 200$ mm, $z_l = 45$ mm et $n_2 = 1,33$. Trois cas seront considérés : un écoulement d'air ($n_2 = 1$), un écoulement d'huile ($n_2 \approx 1,46$) et enfin le cas limite où la canalisation est remplie d'un milieu d'indice de réfraction égal à celui du verre ($n_2 = 1,5$). L'évolution des rayons $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de δ pour les trois valeurs d'indices de réfraction sont tracées figure 4.9. Les résultats obtenus dans le cas où la canalisation était remplie d'eau peuvent être retrouvés figure 4.5 (a). Le changement d'indice de réfraction du liquide contenu dans la canalisation a pour effet de déplacer et de réduire la zone d'intérêt. Dans le cas d'une canalisation remplie d'air (figure 4.9 (a)), un seul waist est présent dans la canalisation pour $\delta \approx 21$ mm. Pour des valeurs de δ supérieures, les particules seront situées dans la zone d'intérêt. Le cas d'une canalisation remplie d'huile ($n_2 \approx 1,46$) est maintenant considéré. Le graphique de la figure 4.9 (b), met en évidence la présence de deux waists dans la canalisation pour $\delta \approx 31$ mm et $\delta \approx 33$ mm. La zone d'intérêt est située entre ces deux waists. La taille de la zone d'étude a fortement diminué. En effet, l'indice de réfraction de l'huile est relati-

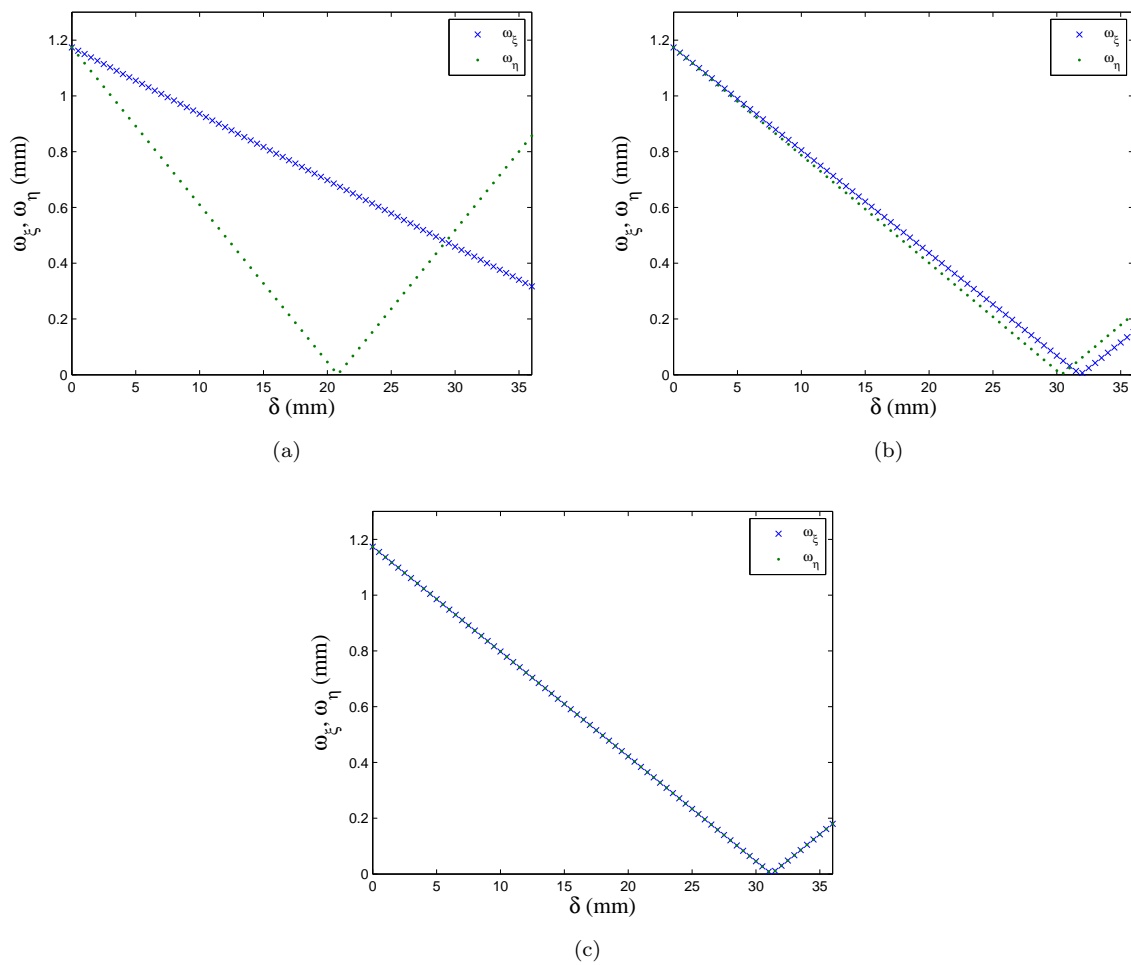


FIGURE 4.9 – Influence de l'indice n_2 sur la taille de la région d'intérêt pour $z_p = 200 \text{ mm}$ et $z_l = 45 \text{ mm}$. (a) Cas de l'air. (b) Cas de l'huile. (c) Cas d'un milieu d'indice 1,5

vement proche de celui des parois de la canalisation. Lorsque l'indice de réfraction n_2 est proche de celui du verre des parois, la canalisation peut-être vue comme une lame à faces parallèles. Ce point est confirmé par la figure 4.9 (c). La canalisation est remplie d'un liquide d'indice de réfraction $n_2 = 1,5$. Les courbes d'évolution de ω_ξ et ω_η en fonction de δ sont parfaitement superposées. Il n'y a plus qu'un waist dans la canalisation, mais ici les valeurs des largeurs du faisceau et des rayons de courbure du front d'onde sont identiques dans les deux directions. Tout se passe comme si la zone d'intérêt était de volume nul.

Dans la suite, les résultats expérimentaux obtenus dans le cadre de cette étude sont présentés. Ainsi, en se plaçant dans les conditions prévues par l'étude numérique, la possibilité d'isoler une zone d'intérêt tridimensionnelle dans l'hologramme d'un écoulement canalisé réel sera démontrée.

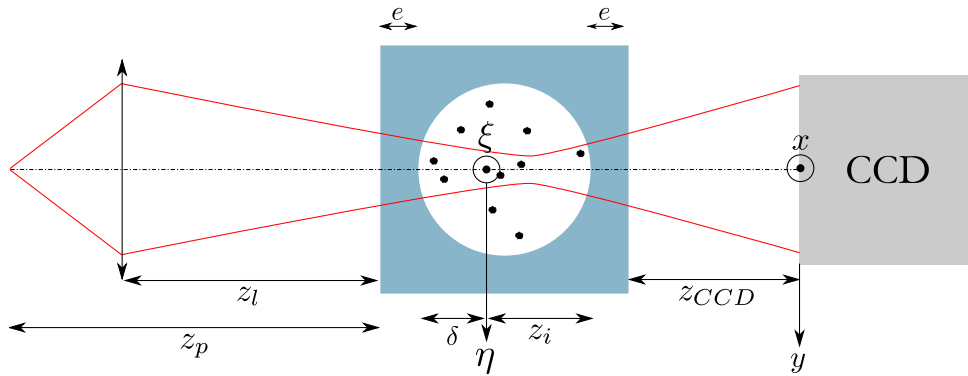


FIGURE 4.10 – Schéma du dispositif expérimental

4.3 Isolement de la région d'intérêt tridimensionnelle à partir d'hologrammes expérimentaux

4.3.1 Principe de l'étude et enregistrement d'hologrammes dans la région d'intérêt

Le montage expérimental de l'étude est présenté figure 4.10. Notons z_p la distance entre le point source et la canalisation. Après passage de la lentille mince de distance focale $f = 50 \text{ mm}$, le faisceau se propage sur une distance z_l avant d'arriver jusqu'à la canalisation. Rappelons que la canalisation considérée peut être vue comme l'assemblage de deux lentilles plano-concaves d'épaisseur e . Les objets contenus dans la canalisation sont situés à la distance δ de la première lentille épaisse et à la distance z_i de la seconde. Les hologrammes seront enregistrés sur un capteur CCD de 1280×1024 pixels situé à la distance z_{CCD} de la canalisation. Le pas des pixels est de $6,7 \mu\text{m}$. La distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur est donnée par l'intégrale d'Huygens-Fresnel [94]. Les développements théoriques associés sont proposés équations (3.27), (3.28) et (3.29). Dans le montage proposé figure 4.10, l'astigmatisme est créé par la géométrie cylindrique de la canalisation. En effet, elle fait diverger le faisceau de manière différente dans les directions ξ et η . Son contrôle est réalisé par la lentille sphérique.

Pour enregistrer les hologrammes, la distance entre le point source et la canalisation est fixée à $z_p = 250 \text{ mm}$. La distance entre la canalisation et la lentille vaut $z_l = 37 \text{ mm}$ ¹. Dans ces conditions, l'évolution des largeurs à $1/e$ du faisceau dans la canalisation est donnée par la figure 4.11 (a). Il existe deux waists dans la canalisation : chacun d'eux correspond au minimum de la courbe d'évolution de $\omega_{\xi,\eta}$ en fonction de δ . Il est à remarquer que les valeurs de $\omega_{\xi,\eta}$ en présence d'un col sont faibles par rapport à celles observées partout ailleurs. Néanmoins, contrairement à ce que peut laisser à penser la figure 4.11 (a), $\omega_{\xi,\eta}$ ne sont pas nuls. Les nappes focales sont ici situées à $\delta = 27 \text{ mm}$ et $\delta = 33 \text{ mm}$ respectivement. Pour $\delta = 30 \text{ mm}$, les deux courbes se croisent. Les valeurs des rayons ω_ξ et ω_η sont égales : le faisceau n'est plus elliptique mais il conserve son astigmatisme. Ceci est illustré par la figure 4.11 (b). Pour $\delta = 30 \text{ mm}$ les rayons de courbure de front d'onde

1. Cette valeur correspond à la première position de la lentille pour laquelle la visualisation d'une région d'intérêt est possible

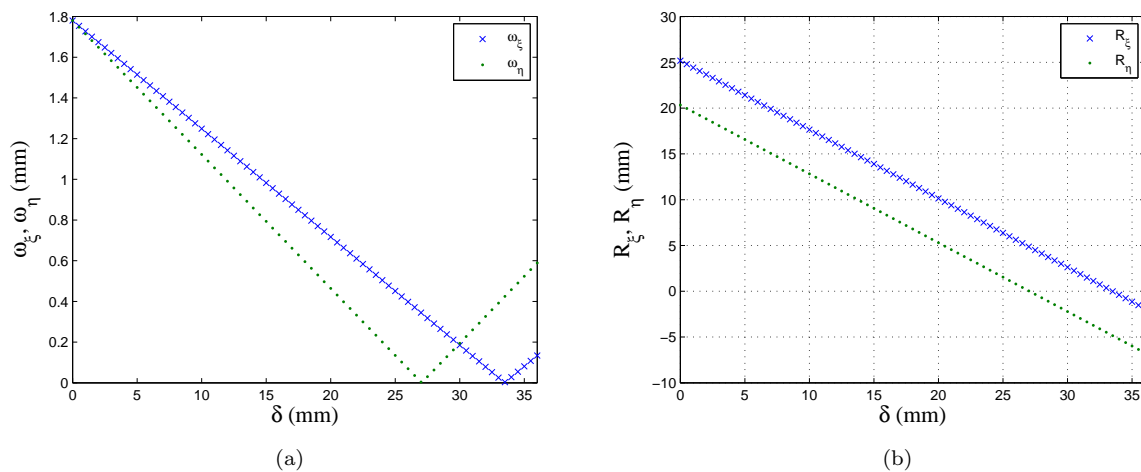


FIGURE 4.11 – (a) Evolution de ω_ξ et ω_η en fonction de δ pour $z_l = 37$ mm. (b) Evolution de R_ξ et R_η en fonction de δ

dans le plan de la particule sont de signes opposés. Entre ces deux waists, les rayons de courbure du front d'onde $R_{\xi,\eta}$ sont de signes opposés. Ainsi, les particules situées dans cette zone produiront des figures de diffraction hyperboliques. Les particules situées de part et d'autre de ces deux waists produiront des figures d'interférences elliptiques. Il devient alors possible de distinguer les particules situées entre les deux waists des autres : les particules situées entre les deux nappes focales seront dans la région d'intérêt et les particules situées de part et d'autre ne seront pas traitées. Connaissant la position de la zone d'intérêt, il est possible d'estimer le volume occupé par le faisceau gaussien dans cette région. Compte tenu de l'ellipticité du faisceau, la surface, perpendiculaire à l'axe optique, de la région d'intérêt peut s'écrire :

$$\mathcal{S} = \pi\omega_\xi\omega_\eta \quad (4.3)$$

L'évolution de la surface occupée par le faisceau dans la région d'intérêt est représentée figure 4.12. Cette courbe passe par un maximum correspondant au point où $\omega_\xi = \omega_\eta$. Les deux passages par un minimum sont eux associés aux deux nappes focales. A partir de la courbe présentée figure 4.12, le volume de la région d'intérêt peut être déterminé : il s'agit de l'aire délimitée par la courbe d'évolution de \mathcal{S} en fonction de δ . Ainsi, en utilisant la méthode des trapèzes, nous obtenons une région d'intérêt de volume noté \mathcal{V}_{ROI} égal à $3,7$ mm³. En utilisant la même méthode, le volume d'étude complet peut être estimé. Il correspond à la quantité de fluide éclairée par le faisceau de référence et il est estimé à $\mathcal{V}_{tot} \approx 884$ mm³. Dans la partie précédente l'influence des paramètres du faisceau (largeurs et rayons de courbure du front d'onde) sur le positionnement de la région d'intérêt dans la canalisation a été démontrée. Il est alors possible d'ajuster la valeur de \mathcal{V}_{ROI} en fonction de l'étude que l'on souhaite mener.

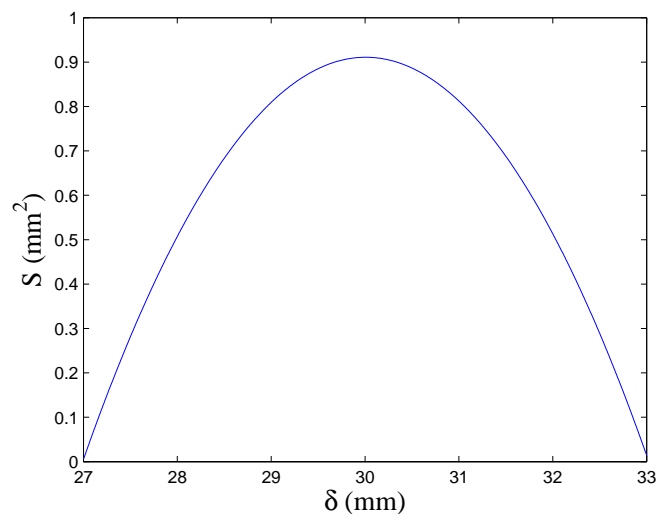


FIGURE 4.12 – Evolution de la surface de la région d'intérêt

4.3.2 Résultats obtenus

4.3.2.1 Protocole expérimental

La distance entre le trou de filtrage de $15 \mu m$ et la canalisation est de $z_p = 250 mm$ et la lentille de distance focale $f = 50 mm$ est positionnée à $z_l = 37 mm$ de la canalisation. La canalisation est remplie d'eau ($n_2 \approx 1,33$) et éclairée au moyen d'un laser He-Ne ($\lambda = 632,8 nm$). Des billes de latex calibrées de $50 \mu m$ de diamètre seront injectées dans la région d'intérêt et la distribution d'intensité produite est enregistrée sur un capteur CCD, dépourvu d'objectif, situé à une distance $z_{CCD} = 18 mm$ de la canalisation. Compte tenu des paramètres expérimentaux, la région d'intérêt s'étend entre $\delta = 27 mm$ et $\delta = 33 mm$.

La taille réduite du champ objet dans cette zone, impose de régler l'obturation du capteur CCD à sa valeur la plus basse ($20 \mu s$). La faible taille du champ limite également la quantité de billes de latex injectée. Cette méthode sera donc applicable pour des écoulements faiblement ensemencés.

Un exemple d'hologramme enregistré dans le cadre de cette étude est proposé figure 4.13 (b). L'image enregistrée est très bruitée. Ceci est en partie dû à l'état de surface de la canalisation ainsi qu'à la présence d'impuretés dans l'eau. Pour faire en sorte de diminuer le bruit de fond des hologrammes, la méthode suivante sera appliquée : avant l'enregistrement des hologrammes, un fond sera enregistré. Il s'agit en fait de l'enregistrement de la distribution d'intensité du faisceau avant injection des billes de latex. Ensuite, les séquences d'hologrammes seront enregistrées. Enfin, tous les hologrammes enregistrés seront divisés par le fond acquis au préalable. En suivant cette procédure, l'influence que peut avoir l'état de surface de la canalisation sur les hologrammes enregistrés est fortement réduite. La figure 4.15 illustre l'intérêt de procéder à une division des hologrammes par le fond. L'hologramme présenté figure 4.13 (b) est considéré. L'enregistrement du fond est présenté figure 4.13 (a), l'hologramme obtenu par division est proposé figure 4.15. Il est beaucoup moins bruité que celui de la figure 4.13 (b). Cette division permet de supprimer

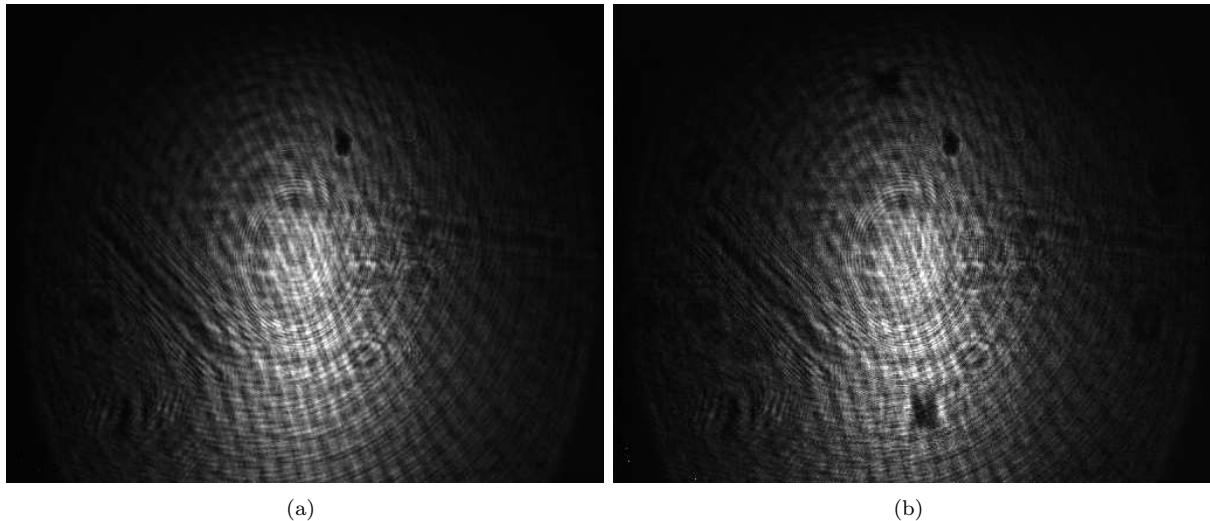


FIGURE 4.13 – (a) Bruit de fond dû à la canalisation. (b) Hologramme enregistré dans la canalisation.

les effets de l'état de surface de la canalisation sur l'hologramme enregistré.

La division des hologrammes par le fond a également un effet sur les hologrammes restitués. Pour illustrer ce point, un hologramme non traité et un hologramme divisé par le fond sont restitués. L'influence de la division de l'hologramme par le fond, sur l'image restituée, est mise en évidence figure 4.14. Ici, les profils de niveaux de gris des hologrammes restitués, moyennés sur 20 pixels, sont représentés. La courbe noire correspond à la restitution par TF fractionnaire d'un hologramme non divisé par le fond alors que la courbe rouge est associée aux résultats après division. Le profil issu de l'image divisée par le fond présente une meilleure dynamique. Pour quantifier cet aspect, il est possible de calculer le rapport image sur bruit (SNR) des deux images. Il est donné par :

$$\text{SNR (dB)} = 10 \log \left(\frac{\text{Signal}}{\text{Bruit}} \right). \quad (4.4)$$

Les définitions du signal et du bruit sont proposées figure 4.14. En utilisant l'équation (4.4) sur les deux profils de la figure 4.14, les valeurs des SNR sont estimées à :

$$\text{SNR}_{\text{sans div}} = 2,1 \text{ dB}, \quad \text{SNR}_{\text{avec div}} = 4,7 \text{ dB}. \quad (4.5)$$

La division de l'image par le fond permet donc d'augmenter de manière significative le SNR des hologrammes restitués par TF fractionnaire.

4.3.2.2 Hologramme obtenu

Les conditions sont données section 4.3.2. La distribution d'intensité obtenue après division par le fond est représentée figure 4.16. L'hologramme présente simultanément des figures de diffraction elliptiques et hyperboliques. Les figures de diffraction elliptiques sont dues à des particules situées en dehors de la région d'intérêt, c'est-à-dire pour des positions δ inférieures à 27 mm et supérieures à 33 mm. Les figures de diffraction hyperboliques sont dues à des particules situées dans la région d'intérêt de l'écoulement, à savoir δ compris entre 27 mm et 33 mm.

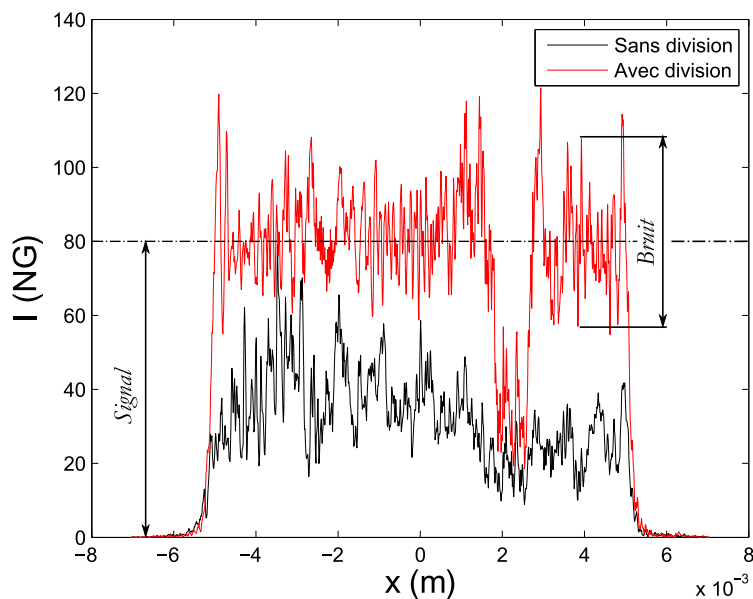


FIGURE 4.14 – Comparaison des profils de niveaux de gris de deux hologrammes restitués par TF fractionnaire

En observant l'hologramme de la figure 4.16 il est possible de distinguer deux particules (notées “1” et “2”) situées dans la région d'intérêt. Pour retrouver les informations relatives à ces deux particules, l'hologramme sera restitué uniquement dans la région d'intérêt. La quantité de plans de restitution et le temps de calcul alloué à l'hologramme sont fortement diminués.

La restitution de l'hologramme sera réalisée par TF fractionnaire. Afin de remettre au point sur l'image de la particule, les valeurs des ordres fractionnaires de restitution sont ajustées, dans la gamme donnée par la position de la région d'intérêt, jusqu'à obtenir le meilleur contraste entre la particule et le bruit de fond. La restitution de la particule “1” est proposée figure 4.17 (a). Les ordres fractionnaires pour lesquels la meilleure image de la particule a été obtenue sont $a_x = 0,71$ et $a_y = -0,8$. Les ordres fractionnaires sont de signes opposés. Ceci est dû au fait qu'au sein de la région d'intérêt, les rayons de courbure du front d'onde sont de signes opposés. En utilisant la même méthode, la particule notée “2” est restituée (voir figure 4.17 (b)). Les ordres fractionnaires de restitution optimaux sont ici $a_x = 0,61$ et $a_y = -0,88$.

La possibilité d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans un écoulement canalisé a été démontrée. Ainsi, le volume \mathcal{V}_{ROI} à traiter ne représentait que 0,5% du volume d'étude total éclairé par le faisceau de référence, \mathcal{V}_{tot} . Les objets contenus dans la région d'intérêt ont été restitués avec succès par l'utilisation de la TF fractionnaire sur un nombre réduit de plans.

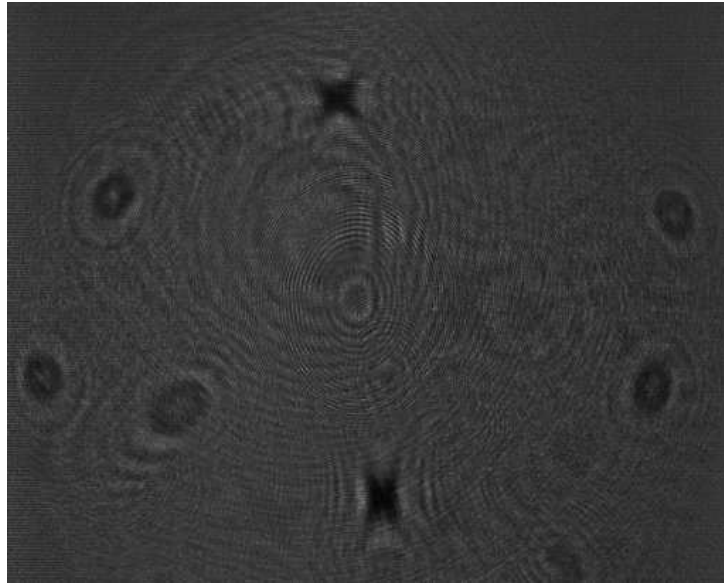


FIGURE 4.15 – Hologramme de la figure 4.13 après division

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, une méthode permettant d'isoler, de manière optique, des régions d'intérêt tridimensionnelles au sein d'un écoulement canalisé a été proposée. Cette méthode se base sur les résultats présentés dans les chapitres 2 et 3. Le chapitre 2 avait permis de poser les bases théoriques de l'enregistrement d'hologrammes d'objets éclairés en lumière astigmatique. L'astigmatisme était ici contrôlé par une lentille cylindrique et la position des particules par rapport au waist du faisceau pouvait être déterminée par la forme des figures d'interférences obtenues. Dans le chapitre 3, l'étude des effets que peut avoir une canalisation sur l'enregistrement des hologrammes a été menée. Ainsi, en prenant en compte l'astigmatisme apporté par la canalisation, un modèle permettant de simuler et de restituer les hologrammes d'écoulements canalisés a été développé. Cet astigmatisme dépend uniquement de la canalisation et tend à faire diverger le faisceau. En combinant les résultats de ces deux études, nous disposons d'un moyen de rendre notre faisceau astigmatique (la canalisation est intrinsèquement astigmatique) et de contrôler son astigmatisme par le biais d'une lentille. Dès lors, il est envisageable d'isoler des zones dans la canalisation en faisant en sorte de focaliser le faisceau dans cette dernière. En effet, la canalisation étant astigmatique, le faisceau focalisé présente deux waists entre lesquels les figures d'interférences sont hyperboliques.

Afin de s'assurer que cette distinction était envisageable, une étude numérique a été réalisée. En effet le nombre de paramètres qui peuvent influencer sur la possibilité de focaliser le faisceau dans la canalisation est important. C'est pourquoi, après validation du modèle, un grand nombre d'hologrammes a été simulé, en faisant varier successivement l'ensemble des paramètres, jusqu'à parvenir à prouver qu'il était possible d'enregistrer des figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme. Il a été ainsi possible de visualiser les paramètres du faisceau (largeur et rayon de courbure) dans la

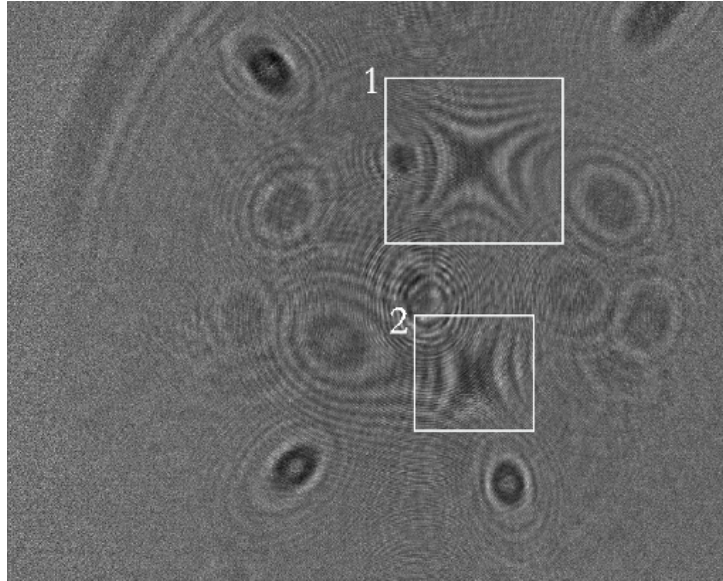
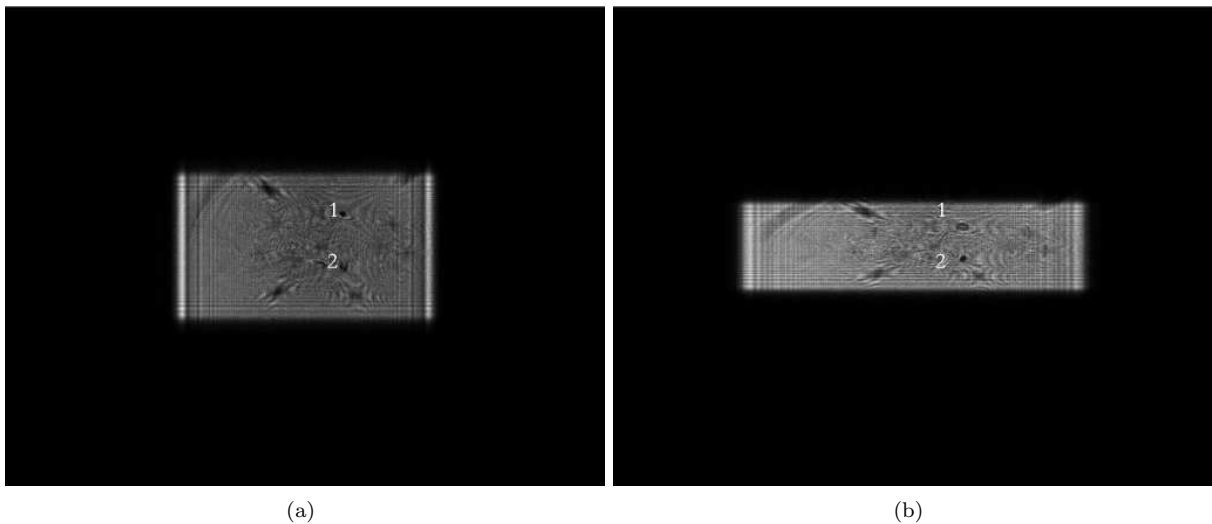


FIGURE 4.16 – Hologramme illustrant l'isolement de région d'intérêt 3D

FIGURE 4.17 – Restitution de l'hologramme de la figure 4.16. (a) Particule 1 : $a_x = 0,71$ et $a_y = -0,8$. (b) Particule 2 : $a_x = 0,61$ et $a_y = -0,88$.

canalisation lorsqu'une région d'intérêt existait dans la canalisation. L'influence de différents paramètres sur sa position et son volume \mathcal{V}_{ROI} a été étudiée. Dans la suite, une démonstration expérimentale de visualisation de région d'intérêt a été proposée. En utilisant les conditions prévues par le modèle, des hologrammes de particules montrant la présence d'une région d'intérêt dans la canalisation ont été enregistrés. Cette distinction peut être faite directement en observant l'hologramme : les particules qui sont dans la région d'intérêt génèrent des figures d'interférences hyperboliques alors que celles qui sont en dehors de cette zone génèrent des figures elliptiques. Un volume de $\mathcal{V}_{ROI} \approx 3,7 \text{ mm}^3$ sur un volume d'étude total de $\mathcal{V}_{tot} \approx 884 \text{ mm}^3$ a pu être isolé. L'utilisation de la TF fractionnaire a, de plus, permis de restituer l'hologramme dans cette zone.

Une méthode simple pour isoler des régions d'intérêt tridimensionnelles dans un écoulement canalisé a été présentée. Le principal intérêt de cette méthode est qu'elle ne nécessite aucun traitement numérique lourd : la sélection est réalisée expérimentalement en utilisant les propriétés d'astigmatisme de la canalisation. Travailler dans une zone de taille réduite est un bon moyen de réduire la quantité de données à traiter ou de raffiner le traitement de l'hologramme dans un plus petit volume. De plus, la position et le volume de la région d'intérêt étant ajustables, il apparait possible de l'utiliser pour sonder différentes zones de l'écoulement, y compris les plus proches des parois de la canalisation.

Dans ce chapitre, la possibilité de sélectionner un volume d'étude dans un écoulement canalisé a été démontrée. Ce volume dépend des paramètres du faisceau et peut être ajusté à des valeurs très faibles (de l'ordre de $\mathcal{V}_{ROI} \approx 0,01 \text{ mm}^3$) ouvrant ainsi la voie à des études d'écoulements de très faibles dimensions. C'est pourquoi dans la suite, les modèles d'écoulements canalisés présentés dans ce manuscrit seront appliqués au cas de l'étude de micro-écoulements. La validité de l'approche lentille épaisse sera démontrée, puis après quelques études préliminaires les premiers résultats de l'étude d'écoulements micro-canalisisés seront présentés.

Chapitre 5

Holographie numérique dans les microcanaux

Sommaire

5.1	Introduction	77
5.2	Validation de l’approche ABCD pour la simulation d’hogrammes en microcanalisations	79
5.2.1	Caractéristiques de la canalisation étudiée	79
5.2.2	Confrontation des résultats théoriques et expérimentaux	80
5.2.2.1	Simulations numériques	80
5.2.2.2	Hogrammes expérimentaux	84
5.3	Visualisation et restitution d’images de particules dans des écoulements microcanalisés	86
5.3.1	Enregistrement des hogrammes	86
5.3.2	Restitution des hogrammes par TF fractionnaire	87
5.3.3	Application à la visualisation d’une région d’intérêt tridimensionnelle	88
5.3.3.1	Optimisation du montage expérimental	89
5.3.3.2	Isolement d’une région d’intérêt tridimensionnelle	89
5.4	Conclusion	91

5.1 Introduction

La microfluidique vise à manipuler de très petites quantités de liquide (de l’ordre du nanolitre) dans des canaux de dimensions micrométriques. Ces possibilités de micro-manipulation sont très prisées dans des domaines tels que la biotechnologie [106], pour la manipulation des molécules d’ADN, et l’analyse chimique [107] où la microfluidique offre la possibilité d’utiliser de très petites quantités de réactifs, limitant ainsi le temps d’analyse [108]. L’utilisation de pompes à seringues permet d’imposer un débit de fluide constant au sein du canal.

La possibilité de produire des gouttes et de contrôler leur déplacement au sein d’un micro-canal a été démontrée [109]. Ainsi, en focalisant le faisceau issu d’un laser dans le canal, les auteurs sont parvenus à influencer sur le mouvement de gouttes dans le canal. L’utilisation de la pression de radiation du faisceau focalisé permet alors de bloquer, trier, fusionner ou diviser des gouttes au sein d’un canal [110]. Il est dès lors envisageable de créer des puces microfluidiques de réaliser toutes ces fonctions sans pour autant nécessiter la

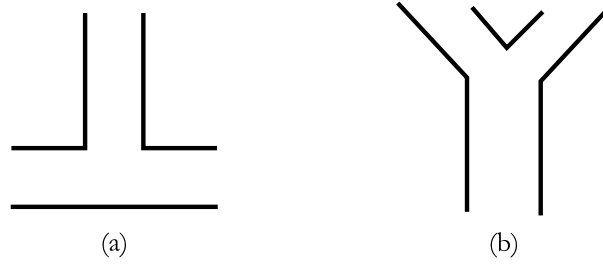


FIGURE 5.1 – Exemple de jonctions rencontrées en microfluidique. (a) Jonction en T. (b) Jonction en Y

microfabrication de valves ou de pompes. [111]. Le nombre des applications industrielles de la microfluidique (aérospatiale [54], refroidissement de composants électroniques [55] et impression de documents [56] par exemple) va grandissant mais les comportements des fluides à une telle échelle sont mal connus. Il devient donc nécessaire de mettre au point des techniques permettant d'avoir accès aux vitesses des écoulements dans ces canaux. Les méthodes de diagnostics optiques utilisées pour le diagnostic d'écoulements macroscopiques peuvent être appliquées à ce type de configuration.

L'utilisation de l'Anémométrie Doppler Laser (ADL) en microfluidique passe par une importante réduction du volume sonde. Ainsi, Tieu *et al.* [112] sont parvenus à mesurer les vitesses, dans un volume sonde de $10\ \mu\text{m}$, d'un écoulement à $18\ \mu\text{m}$ des parois d'un micro-canal de $175\ \mu\text{m}$ de diamètre. De la même manière, la Vélocimétrie par Imagerie de Particules (PIV) a été généralisée à l'étude de micros écoulements (μ -PIV). Néanmoins, les différences existant entre la PIV et la μ -PIV sont plus nombreuses que lorsque l'on considère le cas de l'ADL. En effet, contrairement à la PIV classique, l'écoulement n'est plus éclairé par une nappe laser et de plus, compte tenu des diamètres de particules nécessaires à l'ensemencement de l'écoulement (typiquement de l'ordre que quelques centaines de nanomètres [113]), l'utilisation du signal de diffusion de la lumière par les particules n'est pas adapté. En effet, les diamètres de particules sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde des sources utilisées. Il convient alors d'utiliser des particules fluorescentes pour réaliser les mesures de vitesses. L'étude de l'écoulement, ensemencé de particules de $300\ \text{nm}$ de diamètre, autour d'un obstacle cylindrique a ainsi été réalisée [114]. Ces techniques permettent, grâce à l'utilisation de nappes épaisses, d'accéder aux trois composantes des vecteurs vitesses.

L'utilisation de l'holographie numérique permet d'accéder aux trois composantes de vitesse des particules comprises dans le volume d'étude [59]. L'application de l'holographie à l'étude d'écoulements canalisés a été proposée pour des canaux à section rectangulaire [63], à section circulaire [64] et à l'étude d'une jonction en Y [66]. Ce type de jonction est utilisé dans la conception de dispositifs microfluidiques. Deux exemples de jonctions sont proposés figure 5.1. Dans chacune de ces études, les auteurs sont parvenus à obtenir les composantes tridimensionnelles des vitesses des écoulements étudiés. Pour limiter les effets d'astigmatisme introduits par les microcanaux, les auteurs ont utilisé des dispositifs dont l'indice de réfraction est proche de celui de l'eau. Ces derniers sont remplis et entourés d'eau.

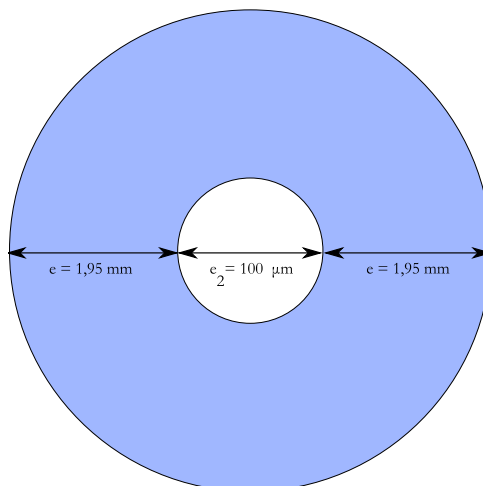


FIGURE 5.2 – Section de la microcanalisation étudiée

Dans le chapitre 3, un modèle permettant de simuler et de restituer les hologrammes enregistrés au travers d'une canalisation optiquement épaisse a été présenté. Ce modèle permet de prendre en compte l'astigmatisme de la canalisation sans avoir à modifier le montage optique utilisé pour enregistrer les hologrammes. Dans la suite, ce modèle sera appliqué à la simulation d'hologrammes enregistrés dans une microcanalisation à section circulaire. Les résultats obtenus par simulation seront confrontés à des hologrammes expérimentaux afin de juger de la validité de l'approche. Enfin, la possibilité d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans un écoulement microcanalisé sera étudiée et appliquée au cas d'un micro-écoulement réel.

5.2 Validation de l'approche ABCD pour la simulation d'hologrammes en microcanalisations

5.2.1 Caractéristiques de la canalisation étudiée

La microcanalisation étudiée est proposée figure 5.2. Il s'agit d'une canalisation en verre ($n_1 \approx 1,5$) de diamètre externe 4 mm . La canalisation est percée d'un capillaire creux de diamètre interne $100\ \mu\text{m}$. Les rayons de courbure des différentes faces de la canalisation sont estimés à partir de ses dimensions. Les rayons de courbure sont considérés positifs lorsque le dioptre rencontré est concave. Ainsi, en considérant que l'axe de la micro-canalisation est horizontal, les courbures de la face d'entrée sont : $R_{1_x} \rightarrow \infty$ et $R_{1_y} = 2\text{ mm}$. Après propagation dans le verre sur une épaisseur e , le faisceau rencontre la face d'entrée du capillaire. Ses courbures sont : $R_{2_x} \rightarrow \infty$ et $R_{2_y} = 50\ \mu\text{m}$. En raison de la symétrie de la microcanalisation, les rayons de courbures des dioptres de sortie peuvent être déduits. Ainsi, $R_{3_x} \rightarrow \infty$ et $R_{3_y} = -50\ \mu\text{m}$ pour le dioptre de sortie du capillaire et $R_{4_x} \rightarrow \infty$ et $R_{4_y} = -2\text{ mm}$ pour le dioptre de sortie de la canalisation.

Afin de vérifier les résultats obtenus par le modèle présenté chapitre 3 pour des microcanalisations, deux configurations seront explorées. Les allures des figures d'interférences simulées seront confrontées à celles obtenues expérimentalement.

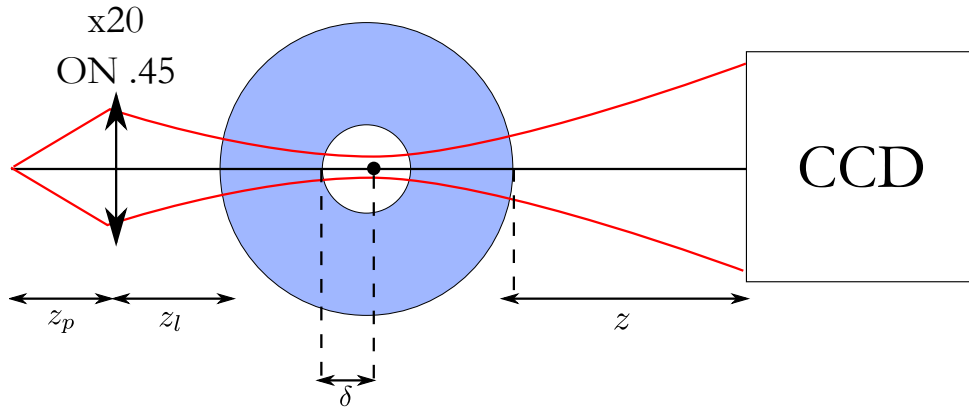


FIGURE 5.3 – Configuration de simulation et d'enregistrement des hologrammes

5.2.2 Confrontation des résultats théoriques et expérimentaux

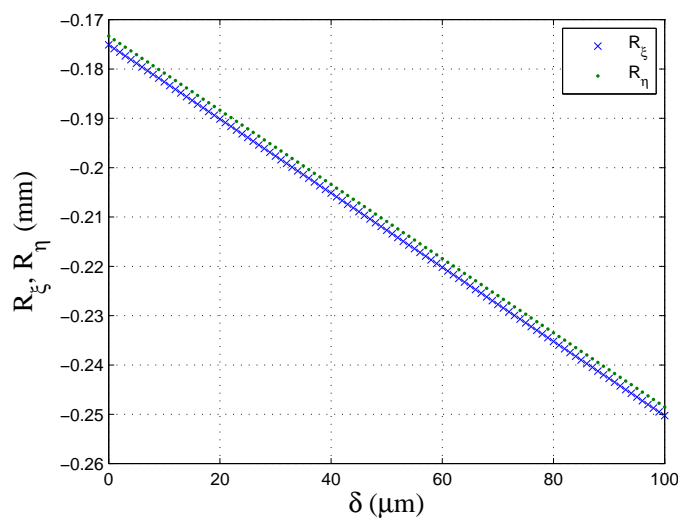
Compte tenu des dimensions du capillaire, il est nécessaire de focaliser le faisceau. La focalisation du faisceau associée à la géométrie cylindrique de la canalisation a pour effet de générer de l'astigmatisme (voir chapitre 4). Ainsi, en fonction des paramètres du montage, il est possible de générer des figures d'interférences elliptiques ou hyperboliques.

5.2.2.1 Simulations numériques

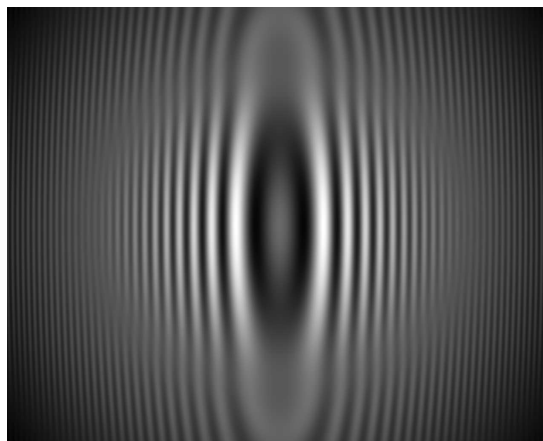
La configuration expérimentale considérée pour cette expérience est schématisée figure 5.3. Ici, le faisceau issu d'une diode laser fibrée de longueur d'onde $\lambda = 635 \text{ nm}$ est focalisé, après propagation sur une distance z_p , au moyen d'un objectif de microscope de grandissement $\times 20$, dans la microcanalisation située à la distance z_l . Dans le capillaire, une particule opaque de diamètre d est située à la distance δ du dioptré d'entrée. Les figures d'interférences sont enregistrées sur un capteur CCD situé à la distance z du microcanal. Comme le montrent les chapitres 2 et 3, il est possible d'obtenir, lorsque le faisceau de référence présente de l'astigmatisme, des figures d'interférences hyperboliques et elliptiques. L'allure des franges d'interférences est liée aux valeurs des rayons de courbure du front d'onde dans le plan de la particule. Si les deux rayons de courbure sont de mêmes signes, les franges seront elliptiques. Sinon elles seront hyperboliques.

Afin d'obtenir l'une ou l'autre des allures de franges, différentes configurations sont testées. Dans un premier temps, la distance entre la source et l'objectif de microscope est fixée à $z_p = 11 \text{ mm}$. L'objectif de microscope est situé à $z_l = 3 \text{ mm}$ de la canalisation. Le capteur CCD est positionné à la distance $z = 18 \text{ mm}$ de la canalisation. Pour prédire l'allure des figures d'interférences obtenues dans ce cas, la valeur des rayons de courbure dans la canalisation est estimée. L'expression des rayons de courbure du faisceau est proposée équation (3.21).

La figure 5.4 (a) présente l'évolution des rayons de courbure dans le capillaire. Les rayons de courbure obtenus sont du même signe dans les deux directions sur tout le diamètre du capillaire. Les figures d'interférences obtenues dans ces conditions seront donc elliptiques. Pour visualiser ces franges, un hologramme est simulé en utilisant les



(a)

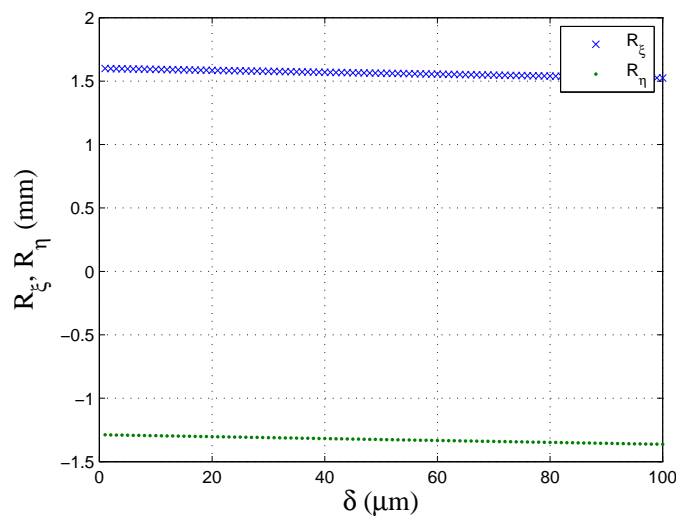


(b)

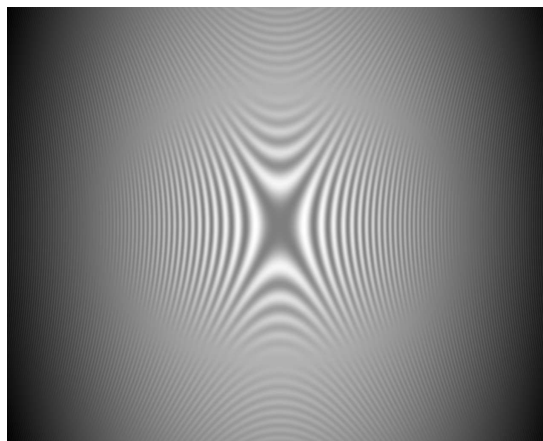
FIGURE 5.4 – (a) Evolution des rayons de courbure du front d’onde dans la canalisation. (b) Hologramme simulé pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$, $z = 18 \text{ mm}$. La particule opaque a un diamètre $d = 5 \mu\text{m}$ et est positionnée à $\delta = 10 \mu\text{m}$ de la paroi du capillaire.

valeurs de z_p , z_l et z proposées. Une particule opaque de diamètre $d = 5 \mu\text{m}$ située à la distance $\delta = 10 \mu\text{m}$ de la paroi d’entrée du capillaire est considérée. L’hologramme obtenu est proposé figure 5.4 (b). L’image est simulée sur 1280×1024 points avec un pas d’échantillonnage de $6,7 \mu\text{m}$. Comme le laissait entendre l’évolution des rayons de courbure dans le capillaire, les figures d’interférences obtenues dans cette configuration sont elliptiques.

Pour obtenir des figures d’interférences hyperboliques, l’objectif de microscope est déplacé. La distance entre la source et l’objectif est maintenant de $z_p = 13 \text{ mm}$ et la distance entre l’objectif et la canalisation est fixée à $z_l = 1 \text{ mm}$. La position du capteur CCD par rapport à la sortie de la microcanalisation n’est pas modifiée. L’évolution des rayons de courbure du faisceau dans le capillaire est représentée figure 5.5 (a). Les rayons de courbure sont de signes opposés quelque soit la position d’observation dans le capillaire. Dans



(a)

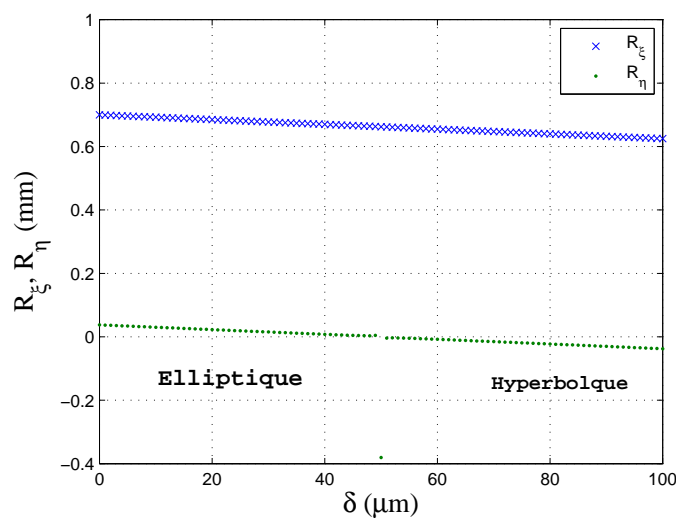


(b)

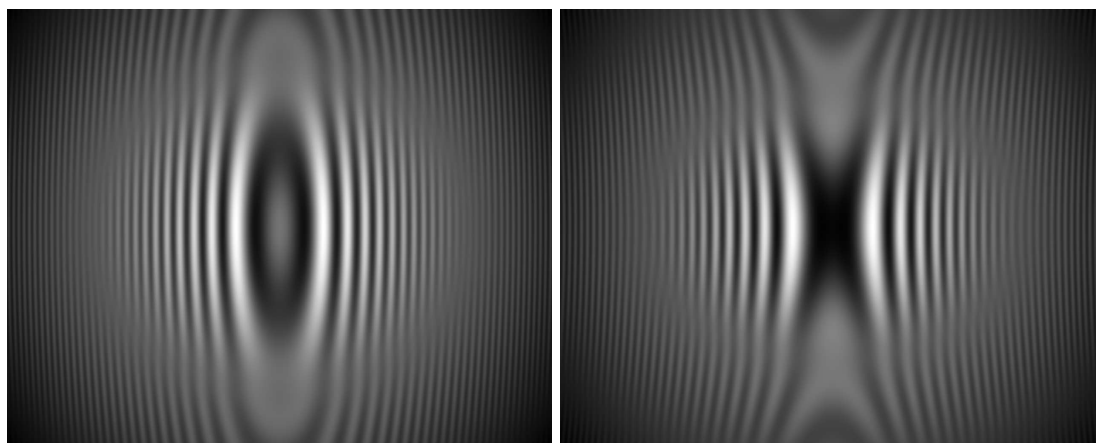
FIGURE 5.5 – (a) Evolution des rayons de courbure du front d'onde dans la canalisation. (b) Hologramme simulé pour $z_p = 13 \text{ mm}$, $z_l = 1 \text{ mm}$, $z = 18 \text{ mm}$. La particule opaque a un diamètre $d = 5 \mu\text{m}$ et est positionnée à $\delta = 90 \mu\text{m}$ de la paroi du capillaire.

cette configuration, les figures d'interférences enregistrées seront hyperboliques. L'hologramme de la figure 5.5 illustre cet aspect. Ici l'hologramme d'une particule opaque située à $\delta = 90 \text{ mm}$ de la paroi d'entrée du capillaire est simulé pour les valeurs de z_p et z_l fixées. Les figures d'interférences obtenues sont hyperboliques. Pour la première position de l'objectif de microscope, des figures d'interférences elliptiques étaient obtenues. Dans cette position de l'objectif, les franges sont hyperboliques. Il existe donc une position de l'objectif de microscope intermédiaire permettant d'obtenir les deux types de figures d'interférences.

Dans le chapitre 4, la possibilité d'enregistrer à la fois des figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme a été abordée. Cette étude permettait d'isoler des régions d'intérêt tridimensionnelles dans une canalisation macroscopique. La possibilité d'obtenir les deux allures de figures d'interférences sur le même hologramme



(a)



(b)

(c)

FIGURE 5.6 – (a) Evolution des rayons de courbure dans le capillaire. (b) Hologramme simulé pour $\delta = 1 \mu m$. (c) Hologramme simulé pour $\delta = 99 \mu m$

dans le cas d'une microcanalisation est discutée. La distance entre l'objectif et la source est maintenant fixée à $z_p = 12 \text{ mm}$ et l'objectif est situé à $z_l = 2 \text{ mm}$ du microcanal. La position du capteur CCD par rapport à la sortie du canal est conservée. S'il est possible d'observer les deux types de franges d'interférences, deux cas de figure seront rencontrés. Dans le premier cas, les signes des rayons de courbure du faisceau seront identiques. Dans le second cas, les signes des rayons de courbure seront opposés. La figure 5.6 (a) illustre l'évolution des rayons de courbure du front d'onde dans le capillaire. Dans la première partie du capillaire, pour des valeurs de δ inférieures à $50 \mu m$, les rayons de courbure sont du même signe. Les figures d'interférences obtenues ici seront elliptiques. Pour des valeurs de δ supérieures, les rayons de courbure sont de signes opposés. Les figures d'interférences visualisées seront hyperboliques. Les hologrammes proposés figure 5.6 (b) et 5.6 (c) montrent la possibilité d'obtenir les deux types de franges. Dans le cas (b), une particule opaque de diamètre $d = 5 \mu m$ et située à $\delta = 1 \mu m$ est considérée. La figure

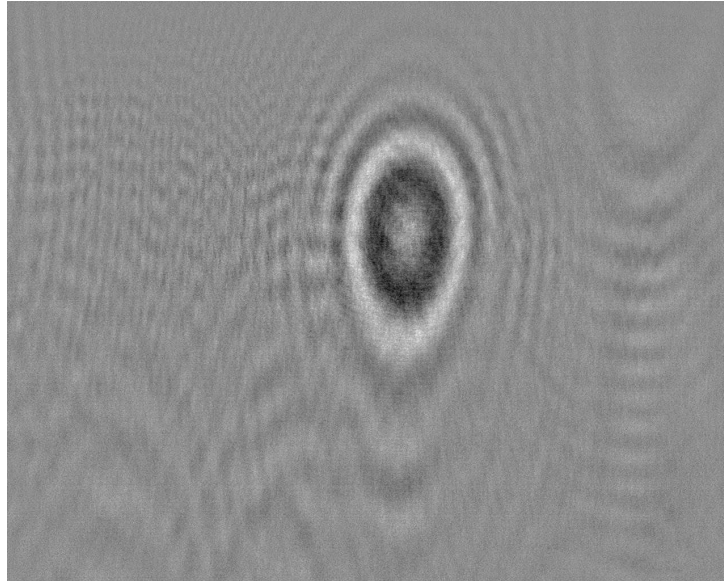


FIGURE 5.7 – Hologramme enregistré pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$

d'interférences obtenue est elliptique. L'hologramme du cas (c) est obtenu en positionnant la particule à $\delta = 99 \mu\text{m}$. Les franges d'interférences présentent un aspect hyperbolique. Afin de juger de la validité du modèle ABCD pour la simulation des hologrammes enregistrés dans une microcanalisation, les hologrammes simulés sont comparés aux hologrammes enregistrés dans les mêmes conditions.

5.2.2.2 Hologrammes expérimentaux

Pour cette étude, le montage expérimental présenté figure 5.3 est considéré. Au moyen d'une seringue, des billes de latex de $5 \mu\text{m}$ de diamètre en suspension dans de l'eau, sont injectées dans le microcanal proposé figure 5.2.

Dans un premier temps, la configuration pour laquelle le modèle prévoit des figures d'interférences elliptiques est considéré. L'hologramme enregistré pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$ est proposé figure 5.7. La figure d'interférences enregistrée présente bien un aspect elliptique. Néanmoins, son étendue dans le plan du capteur est plus faible que pour l'image simulée. La position de la particule est bien maîtrisée dans le cas de l'hologramme simulé figure 5.4 ($\delta = 10 \mu\text{m}$). En revanche, dans le cas de l'hologramme enregistré, des billes de latex ont été injectées dans la canalisation. Leur position exacte n'est *a priori* pas connue. Ainsi la figure d'interférences enregistrée pourrait être due à une bille de latex située à une position δ plus grande que celle de l'hologramme simulé. Néanmoins, aucun des hologrammes simulés de part et d'autre de la canalisation ne présentait cet aspect. De plus, le modèle utilisé ici a été développé dans le cadre de l'approximation paraxiale. Le faisceau utilisé pour enregistrer les hologrammes est fortement focalisé au moyen d'un objectif de microscope. Le modèle paraxial ne prend pas en compte l'ouverture numérique de ce dernier. Ainsi, des décalages entre les résultats de simulation et les hologrammes expérimentaux peuvent exister.

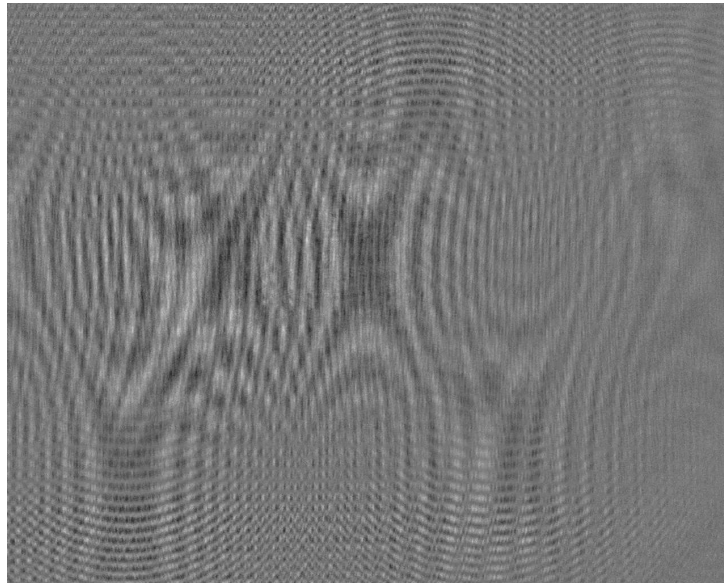


FIGURE 5.8 – Hologramme enregistré pour $z_p = 13 \text{ mm}$, $z_l = 1 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$

Dans le second cas de figure, les figures d'interférences simulées présentaient un aspect hyperbolique (voir Fig. 5.5). L'hologramme obtenu pour $z_p = 13 \text{ mm}$, $z_l = 1 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$ est proposé figure 5.8. Les figures d'interférences obtenues sont, comme le prévoyait le modèle, hyperboliques. Il n'y a pas qu'une seule figure d'interférences dans le champ. En effet, les billes de latex utilisées pour ensemercer le fluide ont tendance à s'agglomérer entre elles. Néanmoins, en regardant le réseau de franges d'inférences le plus proche du centre de l'hologramme et en le comparant à la figure 5.5, on peut remarquer un bon accord entre l'image simulée et l'image expérimentale.

La figure 5.6 (a) montre la possibilité d'enregistrer sur un même hologramme des franges d'interférences hyperboliques et elliptiques. Ceci est illustré par les figures 5.6 (b) et (c). Cependant, compte tenu de l'étendue des franges d'interférences dans la plan du capteur, cette configuration ne pourra pas être utilisée pour réaliser cette étude expérimentalement. Il est nécessaire de modifier le montage afin de réduire la taille des franges d'interférences dans le plan du capteur. Cet aspect est illustré figure 5.9. L'image enregistrée pour $z_p = 12 \text{ mm}$, $z_l = 2 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$ est ici proposée. Il est possible de visualiser des figures de diffraction hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme. La figure d'interférences elliptiques obtenue est comparable à celle illustrée figure 5.6 (b). En revanche la position de la figure de diffraction hyperbolique ne permet pas de se prononcer. Néanmoins, la prédiction réalisée au moyen du modèle basé sur les matrices ABCD est vérifiée : la visualisation de figures d'interférences hyperboliques et elliptiques sur le même hologramme est possible au travers d'une microcanalisation.

Dans la suite, les résultats expérimentaux relatifs à l'enregistrement d'hologrammes d'écoulements contenus dans un microcanal sont proposés. L'utilisation de la TF fractionnaire permettra de remettre au point sur l'image des objets contenus dans le capillaire. De plus, l'enregistrement de séquences d'hologrammes offrira la possibilité de visualiser le mouvement des particules dans le canal. Enfin, après optimisation du montage expéri-

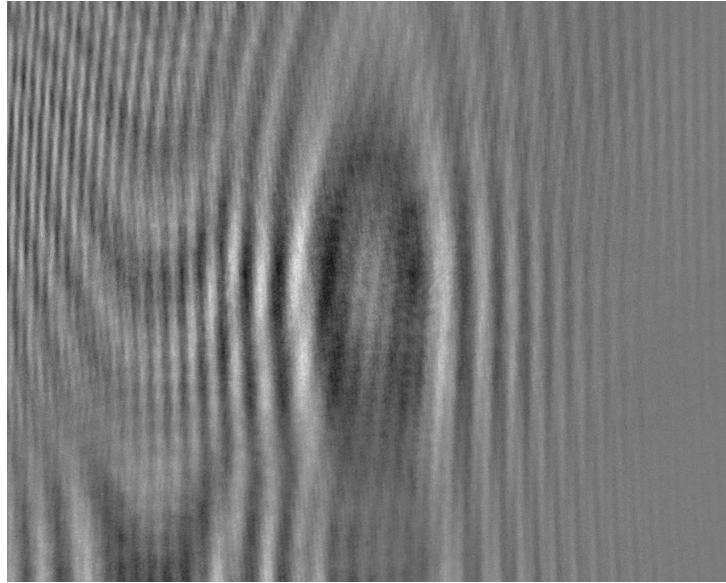


FIGURE 5.9 – Hologramme enregistré pour $z_p = 12 \text{ mm}$, $z_l = 2 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$

mental de la figure 5.3, la possibilité d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans un microcanal sera discutée.

5.3 Visualisation et restitution d'images de particules dans des écoulements microcanalisés

5.3.1 Enregistrement des hologrammes

Pour visualiser les écoulements dans le microcanal, la configuration utilisée pour simuler l'hologramme simulé figure 5.4 est considérée. Des billes de latex de $5 \mu\text{m}$ de diamètre sont utilisées pour ensemençer l'écoulement. L'eau et les billes de latex sont injectées dans le microcanal au moyen d'une seringue. L'ensemble est éclairé au moyen d'une diode laser fibrée de longueur d'onde $\lambda = 635 \text{ nm}$. Afin de pouvoir suivre le mouvement des billes dans le capillaire, des séquences d'hologrammes sont enregistrées. Pour ce faire, l'obturateur du capteur CCD est utilisé. Il permet d'enregistrer une image toutes les $20 \mu\text{s}$. Après avoir enregistré un fond (obtenu en injectant dans le canal de l'eau dans laquelle il n'y a pas de billes de latex), une séquence d'hologrammes est enregistrée. Afin de s'affranchir de l'effet de l'état de surface de la canalisation, chaque hologramme enregistré est divisé par le fond. Deux hologrammes de la séquence sont représentés figure 5.10. Les hologrammes sont séparés de $20 \mu\text{s}$. La possibilité de suivre le mouvement des figures d'interférences est ici mise en évidence.

Afin de pouvoir visualiser l'image des particules dans le microcanal, la restitution des hologrammes par TF est abordée par la suite.

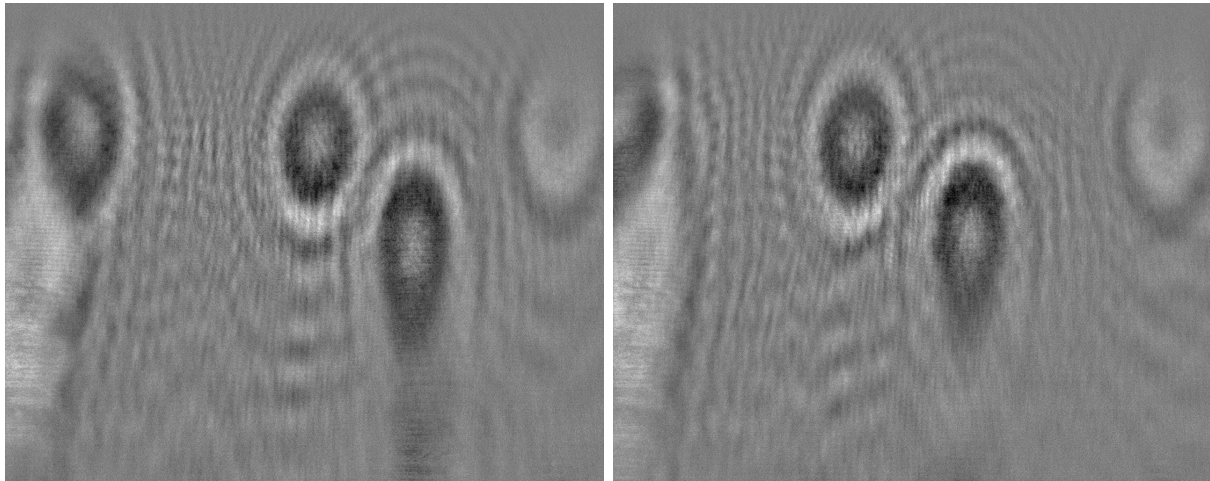


FIGURE 5.10 – Séquence d’hologrammes enregistrée pour $z_p = 11 \text{ mm}$, $z_l = 3 \text{ mm}$ et $z = 18 \text{ mm}$. Chaque image est séparée de la précédente par $20 \mu\text{s}$

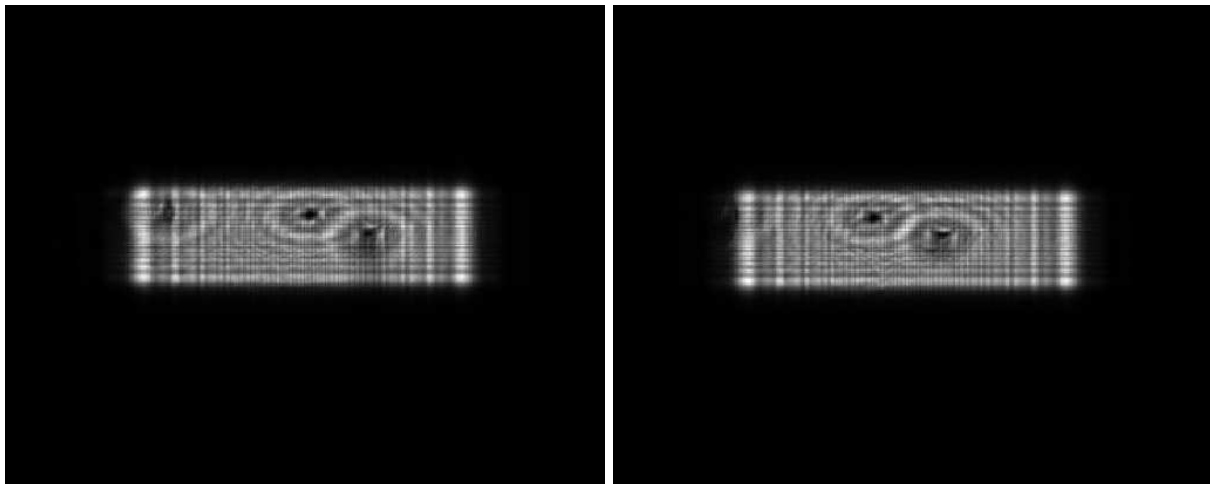


FIGURE 5.11 – Restitution par TF fractionnaire de la séquence d’hologrammes pour $\delta = 50 \mu\text{m}$

5.3.2 Restitution des hologrammes par TF fractionnaire

L’enregistrement de séquences d’hologrammes permet de suivre le déplacement des figures d’interférences dans le canal. Dans le chapitre 3, il a été montré que l’utilisation de la TF fractionnaire permettait de remettre au point sur les images des objets présents dans une canalisation macroscopique. Dans ce cas, les ordres fractionnaires optimaux de restitution sont donnés par l’équation (3.36). La validité du modèle ABCD pour la simulation des hologrammes enregistrés au travers d’une microcanalisation a été démontrée section 5.2.2.2. Il est donc possible d’utiliser les valeurs d’ordres fractionnaires de l’équation (3.36) pour restituer les hologrammes de la séquence proposée figure 5.10.

Afin de pouvoir suivre l’ensemble des particules présentes dans l’écoulement, la restitution sera réalisée pour $\delta = 50 \mu\text{m}$. Il sera ainsi possible de mettre en évidence le mouvement des billes de latex dans les trois dimensions de la canalisation. Les valeurs des

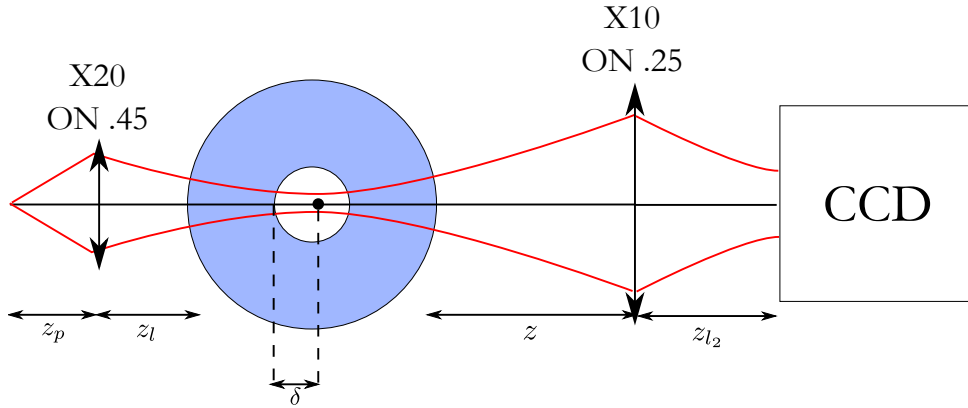


FIGURE 5.12 – Configuration d’enregistrement des hologrammes utilisée pour la distinction de régions d’intérêt tridimensionnelles

ordres fractionnaires optimaux calculées dans cette configuration sont :

$$a_x^{opt} = 0,967, \quad a_y^{opt} = 0,972. \quad (5.1)$$

Les valeurs des ordres fractionnaires optimaux obtenues sont proches de 1. Rappelons qu’une TF fractionnaire d’ordre 1 est équivalente à une TF classique [115]. Le faisceau utilisé pour enregistrer les hologrammes est focalisé dans le canal, les particules sont donc proches du point focal du faisceau.

Pour restituer la séquence d’hologrammes, la TF fractionnaire d’ordres $a_x^{opt} = 0,967$, $a_y^{opt} = 0,972$ est calculée pour chacun des hologrammes présenté figure 5.10. Les résultats obtenus sont résumés figure 5.11. Compte tenu des valeurs d’ordres fractionnaires, la taille du champ objet est réduite. Néanmoins, il est possible de distinguer le déplacement des particules dans le capillaire. Les billes de latex passant dans le plan de mise au point présentent un mouvement rectiligne. En effet, en microfluidique, compte tenu des dimensions des écoulements, ces derniers sont laminaires [108]. De plus, certaines particules passent en dehors du plan de mise au point. En réalisant la restitution de la séquence d’hologrammes pour toutes les valeurs de δ comprises entre 0 et $100 \mu m$, il est possible de restituer l’ensemble des particules présentes dans l’écoulement au moment de l’acquisition.

5.3.3 Application à la visualisation d’une région d’intérêt tridimensionnelle

La possibilité d’isoler une région d’intérêt tridimensionnelle dans une canalisation a été présentée chapitre 4. Les propriétés d’astigmatisme des canalisations associées à la focalisation du faisceau de référence dans la canalisation permettaient d’isoler une région d’intérêt en se basant sur la forme des franges d’interférences enregistrées [116] (article soumis). Pour enregistrer les hologrammes au travers d’une microcanalisation, le faisceau de référence est focalisé dans le capillaire. La géométrie cylindrique de la microcanalisation en fait un milieu astigmatique. Ainsi, comme dans le cas de canalisations macroscopiques, le microcanal apporte de l’astigmatisme dans le montage, et la lentille permet de le contrôler. Il est donc en théorie possible d’isoler une région d’intérêt tridimensionnelle dans une

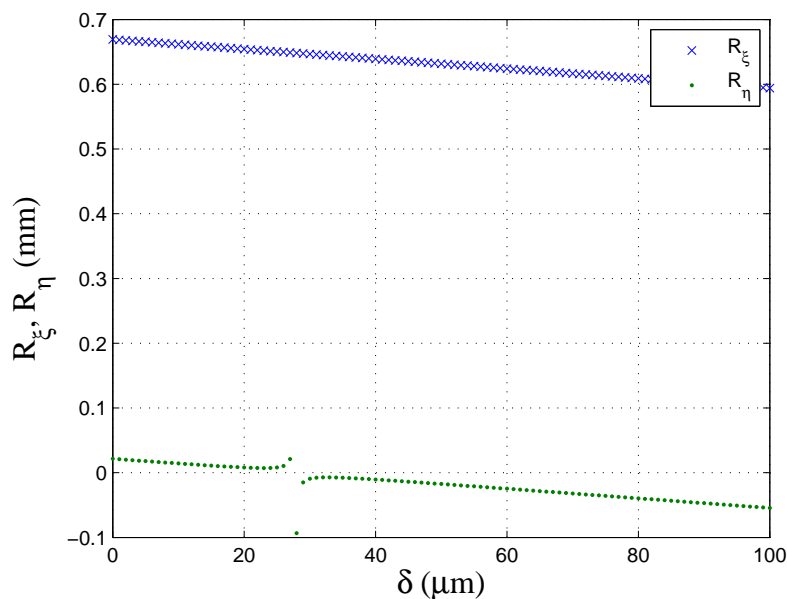


FIGURE 5.13 – Evolution des rayons de courbure du front d’onde dans le capillaire

microcanalisation. Cette possibilité a été évoquée dans la section 5.2.2.2. Cependant, comme le montre la figure 5.9, les hologrammes obtenus dans cette configuration ne sont pas exploitables. En effet, la taille des figures d’interférences est trop importante par rapport à la taille du champ image. Le montage présenté figure 5.3 doit donc être optimisé.

5.3.3.1 Optimisation du montage expérimental

Afin de pouvoir isoler des régions d’intérêt tridimensionnelles dans de bonnes conditions, la taille des figures d’interférences dans le plan du capteur CCD doit être diminuée. Dans ce but, un objectif de microscope est ajouté en sortie de la microcanalisation. Cette nouvelle configuration est présentée figure 5.12. Le montage est identique au montage précédent (figure 5.3) jusqu’à la sortie de la canalisation. Un objectif de microscope $\times 10$ est positionné à la distance z_{l_2} de la sortie de la canalisation. Les figures d’interférences sont enregistrées sur un capteur CCD de 1624×1234 pixels de largeur $4,4 \mu\text{m}$ situé à la distance z de l’objectif de microscope. Cette configuration est utilisée par la suite pour réaliser la séparation de régions d’intérêt.

5.3.3.2 Isolement d’une région d’intérêt tridimensionnelle

Le montage expérimental proposé figure 5.12 est utilisé. La distance de propagation entre la source et le premier objectif de microscope est $z_p = 20 \text{ mm}$. L’objectif de microscope est situé à $z_p = 0,5 \text{ mm}$ de la canalisation. Le second objectif de microscope est placé immédiatement après la sortie de la canalisation à une distance $z_{l_2} \approx 0 \text{ mm}$. Dans cette configuration, l’objectif de microscope réalise un filtrage spatial de type passe bas. Ce filtrage permet de limiter les effets dus aux aberrations d’ordres supérieurs telles que l’aberration de sphéricité ou la côme. Ces aberrations sont à l’origine des déformations du

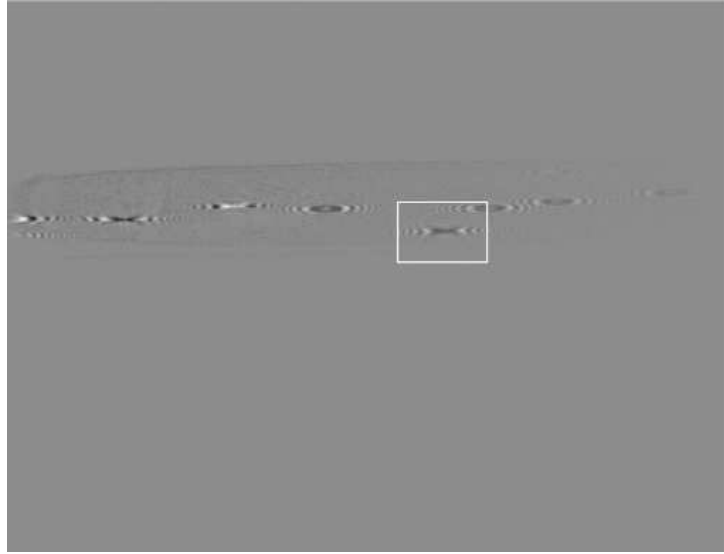


FIGURE 5.14 – Hologramme enregistré dans la configuration de la figure 5.12

faisceau présenté figure 1.6. Enfin, le capteur CCD, dépourvu d'objectif, est positionné à la distance $z = 120 \text{ mm}$ du second objectif de microscope. L'écoulement étudié est ensemené de billes de latex de $5 \mu\text{m}$ de diamètre. L'évolution des rayons de courbure du front d'onde dans le capillaire est représentée figure 5.13. Pour des valeurs de δ inférieures à $27 \mu\text{m}$, les rayons de courbure sont du même signe dans les deux directions. Les figures d'interférences enregistrées seront elliptiques. Au contraire, pour des valeurs de δ supérieures à $27 \mu\text{m}$, les rayons de courbure du front d'onde sont de signes opposés. Les franges d'interférences obtenues dans ce cas seront hyperboliques. La courbe de la figure 5.13 présente une discontinuité lors du passage des valeurs de R_η positives aux valeurs de R_η négatives. Les franges d'interférences enregistrées dans ce cas seront rectilignes. En utilisant la méthode présentée chapitre 4, il est possible d'estimer le volume de la région d'intérêt \mathcal{V}_{ROI} . En utilisant l'équation (4.3), le volume de la région d'intérêt est estimé à $\mathcal{V}_{ROI} = 0,06 \text{ mm}^3$.

Un exemple d'hologramme obtenu dans ces conditions est présenté figure 5.14. La figure d'interférences située dans l'encadré blanc correspond à une particule située dans la région d'intérêt. En effet, les franges qu'elle génère sont hyperboliques. D'autres particules génèrent des franges hyperboliques, mais elles ne seront pas traitées. De plus, une figure d'interférences présente un contraste inversé. Il s'agit en fait des franges d'interférences dues à une particule qui était sur l'enregistrement du fond et qui n'était pas sur l'hologramme. Seule la particule, située dans la sélection de la figure 5.14, sera restituée par TF fractionnaire. Ainsi, la gamme de valeurs des ordres fractionnaires optimaux de restitution est calculée, grâce à l'équation (3.36), pour des valeurs de δ allant de 27 à $100 \mu\text{m}$. La particule est restituée en balayant sur ces valeurs d'ordres jusqu'à ce que le meilleur contraste entre l'image de la particule et le bruit de fond soit obtenu. En procédant de cette manière, l'image de la particule est au point pour les valeurs d'ordres

$$a_x^{opt} = 0,46, \quad a_y^{opt} = -0,05. \quad (5.2)$$

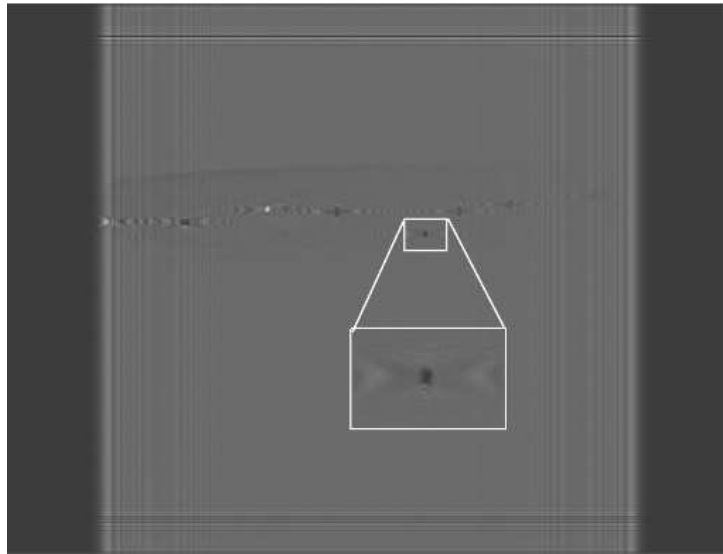


FIGURE 5.15 – Restitution de l'hologramme de la figure 5.14 pour $a_x^{opt} = 0,46$ et $a_y^{opt} = -0,05$

Les valeurs des ordres fractionnaires obtenues sont de signes opposés. En effet, les figures d'interférences sont hyperboliques lorsque les rayons de courbure du front d'onde sont de signes opposés dans les deux directions. Ainsi, en utilisant des valeurs d'ordres fractionnaires de signes opposés, seules les particules étant à l'origine de franges d'interférences hyperboliques sont traitées.

La restitution de l'hologramme de la figure 5.14 est illustrée figure 5.15. L'image de la particule située dans la zone d'intérêt (dans l'encart blanc) est retrouvée. L'utilisation des propriétés d'astigmatisme des microcanalisations pour isoler des régions d'intérêt est donc envisageable.

5.4 Conclusion

Dans un premier temps, en utilisant le modèle, basé sur les matrices ABCD, présenté au chapitre 3 des hologrammes ont été simulés. Ainsi, les conditions permettant d'obtenir des figures d'interférences hyperboliques ou elliptiques ont été déterminées. Afin de vérifier les résultats de simulation obtenus, des hologrammes ont été enregistrés. Les allures des franges d'interférences prévues par le modèle ont été retrouvées. Le modèle peut donc être étendu à l'étude d'écoulements microcanalisés. L'application de la TF fractionnaire à la restitution d'une séquence d'hologrammes expérimentaux a été réalisée offrant la possibilité de suivre le déplacement de billes de latex dans un microcanal.

Les faibles dimensions des microcanaux imposent de focaliser le faisceau afin de pouvoir enregistrer les hologrammes. La géométrie cylindrique des microcanalisations fait qu'elles introduisent des aberrations dans le système d'imagerie. La figure 1.6 illustre ce point. Ici des aberrations de type aberration de sphéricité, côme et astigmatisme sont visibles. L'utilisation d'un filtrage passe bas en sortie de canal permet de limiter l'étude à l'astigmatisme du microcanal. La focalisation de faisceau en présence d'astigmatisme a été utilisée

dans le chapitre 4 pour isoler des régions d'intérêt tridimensionnelles. La configuration expérimentale utilisée pour enregistrer les hologrammes fait qu'il est, en théorie, possible d'isoler une région d'intérêt tridimensionnelle dans les écoulements microcanalisés. Cette vérification a été apportée de manière numérique. Néanmoins, dans la configuration utilisée, l'étendue des figures d'interférences était telle qu'il était impossible d'exploiter les hologrammes obtenus. Ainsi, une nouvelle configuration expérimentale a été proposée et l'enregistrement d'un hologramme montrant une particule dans la région d'intérêt a été réalisé. Enfin, l'utilisation de la TF fractionnaire a permis de restituer la particule isolée.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

Le comportement de fluides canalisés ou microcanalisés est du plus grand intérêt que ce soit dans le domaine académique ou dans le domaine industriel. La réalisation d'études granulométriques de bulles en veine expérimentale ainsi que l'étude du comportement d'écoulements proches paroi nécessitent la mise en place d'une métrologie non invasive. La compréhension des phénomènes mis en jeu dans de tels milieux passe par l'obtention de données tridimensionnelles telles que la position ou les composantes de vitesse des traceurs utilisés pour ensemencher l'écoulement. De nombreuses méthodes optiques permettent d'accéder à ce type d'information (Holographie numérique, PIV stéréoscopique, ADL-3D . . .). Néanmoins, les canalisations dans lesquelles les fluides à étudier sont confinés compliquent les diagnostics. En effet, leur symétrie cylindrique fait qu'elles introduisent de l'astigmatisme dans le dispositif d'imagerie. Pour pallier ces difficultés, il est possible d'utiliser des fenêtres de visualisation planes. Cependant, les propriétés de l'écoulement à étudier s'en retrouvent modifiées.

C'est dans ce contexte que se sont inscrits les travaux présentés dans ce manuscrit. Ce travail de thèse avait pour but de modéliser et de développer des méthodes permettant d'appliquer la microscopie holographique numérique à l'étude des écoulements canalisés et microcanalisés.

Les milieux canalisés étant source d'astigmatisme, les premières études ont porté sur la modélisation des processus d'enregistrement et de restitution des hologrammes obtenus au moyen d'une source gaussienne, elliptique et astigmatique. Ces travaux ont été initiés au CORIA dans le cadre de la thèse d'Elie Nicolas soutenue en 2007. L'expression semi-analytique de la distribution d'intensité de l'hologramme d'une particule opaque centrée sur l'axe optique était ici proposée. Deux aspects rendent ce formalisme inapplicable à notre étude. Dans un premier temps, cette approche ne permet pas de prendre en compte des particules qui ne sont pas centrées sur l'axe optique. De plus, les particules considérées sont nécessairement à surface projetée circulaire. Si on s'intéresse à l'étude de bulles, il est possible que ces dernières soient déformées. Ainsi, le modèle existant a été optimisé, permettant de traiter le cas de particules non centrées. L'utilisation d'une méthode de décomposition de la fonction de transfert de la particule sur une base de fonctions gaussiennes a permis de traiter différentes formes de particule tout en réduisant le temps alloué au calcul de la distribution d'intensité simulée.

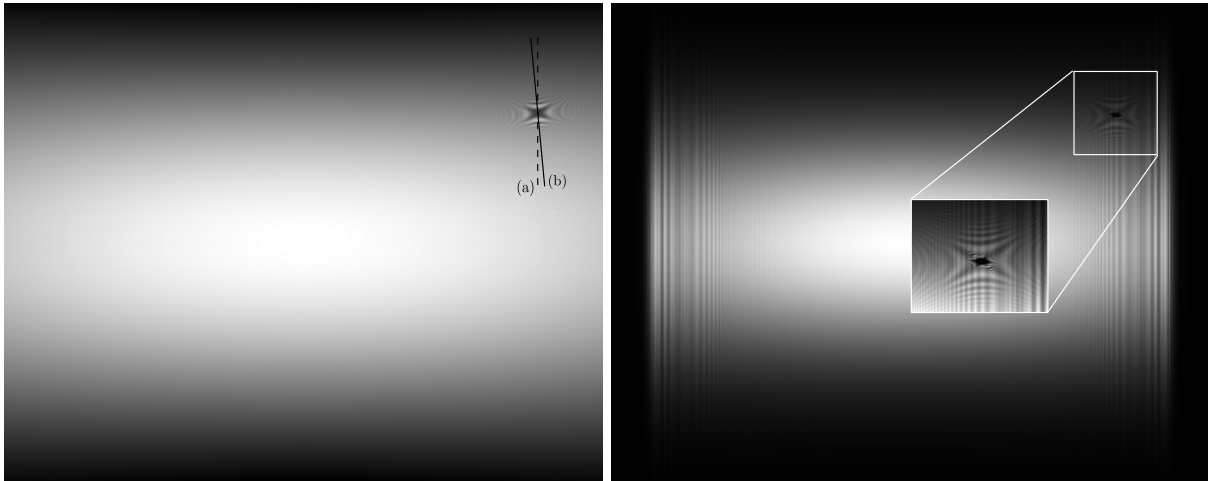


FIGURE 6.1 – (a) Simulation d'un hologramme dans une approche non paraxiale. (b) TF fractionnaire de l'hologramme avec les ordres prévus par la théorie scalaire

La restitution des hologrammes est réalisée au moyen de la transformation de Fourier fractionnaire. En effet, cet opérateur est particulièrement adapté à la restitution d'hologrammes présentant de l'astigmatisme. Il a également été ici montré que, dans l'approximation paraxiale, la valeur des ordres fractionnaires de restitution ne dépendait pas de la position latérale de la particule. Cet aspect est très intéressant dans le cas de la restitution d'hologramme de champs de particules par exemple. Néanmoins, ce résultat n'est valable que dans le cas de l'approximation paraxiale. Pour des systèmes à grande ouverture numérique et pour des objets fortement décentrés, la valeur des ordres fractionnaires de restitution n'est plus invariante. La figure 6.1 illustre ce point. L'hologramme de la figure 6.1 (a) est obtenu, en utilisant la configuration expérimentale de la figure 2.3 et un modèle de simulation vectoriel non paraxial [117]. Le segment (a) représente l'axe de la figure d'interférences obtenue avec un modèle scalaire paraxial. L'axe des franges d'interférences est différent lorsque l'on considère un modèle non paraxial (segment (b)). La figure 6.1 (b) montre qu'il est impossible de restituer correctement l'image de la particule en utilisant les ordres fractionnaires prévus par la théorie scalaire. Dans ce cas, les ordres fractionnaires dépendent du décalage de la particule.

La modélisation du processus d'holographie numérique appliqué à l'étude d'écoulements canalisés nécessite la mise en place de méthodes de calculs permettant de prendre en compte la géométrie de la canalisation au travers de laquelle les hologrammes sont enregistrés. Ainsi, l'utilisation du formalisme des matrices ABCD a permis de modéliser la canalisation comme la succession de propagations et de réfractions. Une matrice de dimension 2×2 suffit ainsi à représenter le système optique. L'utilisation de l'intégrale de Fresnel généralisée permet enfin de calculer la propagation d'un point source gaussien de part et d'autre de la canalisation. Les distributions d'intensité obtenues présentent un très bon accord avec les données acquises expérimentalement dans les mêmes conditions. Cette approche permet donc de rendre compte des effets d'astigmatisme introduits par une canalisation. Ce modèle a également été confronté aux hologrammes enregistrés au tra-

vers d'une microcanalisation. Les allures de figures d'interférences prédites par le modèle étaient retrouvées expérimentalement. Cependant, cette modélisation n'est possible que dans les limites imposées par l'approximation paraxiale. De plus, les modèles considérés reposent sur des approches scalaires. Les effets tels que la polarisation ou la biréfringence ne sont pas pris en compte. La canalisation étudiée étant en plexiglass, la qualité des résultats de simulation bénéficieraient de l'utilisation d'une approche vectorielle.

De telles considérations sont à prendre en compte dans le cadre des études de microécoulements. En effet, les faisceaux utilisés sont très fortement focalisés et les modèles paraxiaux ne sont plus adaptés. Il serait donc nécessaire d'étendre le modèle de simulation vectoriel non paraxial à la simulation d'hologrammes d'objets canalisés et microcanalisés.

Les études présentées au début de ce manuscrit montraient qu'en présence d'astigmatisme, deux types de figures d'interférences pouvaient être enregistrées : des figures d'interférences hyperboliques ou des figures d'interférences elliptiques. L'allure des franges dépend de la position de la particule par rapport au col du faisceau. En effet, de la position de la particule dépendent les rayons de courbure du front d'onde. Deux rayons de courbure de signes opposés conduisent à des figures d'interférences hyperboliques, alors que deux rayons de courbure de mêmes signes sont associés à des franges d'interférences elliptiques. L'astigmatisme était ici apporté et contrôlé par une lentille cylindrique.

Les canalisations sont des milieux intrinsèquement astigmatiques. Néanmoins, cet astigmatisme étant lié aux caractéristiques géométriques de la canalisation, il n'est *a priori* pas possible de le contrôler. Ce contrôle peut être apporté au moyen d'une lentille sphérique. En effet, en focalisant un faisceau dans un système optique comportant de l'astigmatisme, il est possible de générer deux cols perpendiculaires l'un à l'autre. L'utilisation du modèle basé sur les matrices ABCD permet de montrer que, sous certaines conditions, il est possible d'obtenir ces deux cols. L'étude des paramètres du faisceau dans la canalisation montre qu'entre ces deux cols, les rayons de courbure du front d'onde sont de signes opposés et que de part et d'autre, ils sont de mêmes signes. En d'autres termes, une particule située entre les deux cols génère des figures d'interférences hyperboliques. En revanche si elle n'est pas située entre les deux cols, elle génère des franges elliptiques. Les particules peuvent donc être triées en fonction de l'allure de leur figure d'interférences : une région d'intérêt tridimensionnelle est alors délimitée. La réalisation expérimentale de ce principe a été appliquée avec succès, permettant de ne restituer l'hologramme que pour les particules présentes entre les deux cols. La possibilité d'appliquer ce principe dans le cas de l'étude d'écoulements microcanalisés a été prouvée numériquement et expérimentalement.

Cette méthode est d'un grand intérêt. En effet, elle permet d'isoler, de manière optique, des régions d'intérêt de volume et de position variables. Outre le fait qu'il est possible de réduire de manière drastique la quantité de données à traiter pour restituer l'hologramme (et de réduire d'autant le temps de calcul consacré à l'hologramme), il est envisageable de sonder différentes portions de l'écoulement.

Ces résultats pourraient, par exemple, permettre de concevoir, de manière analogue au cas de l'ADL, une sonde d'anémométrie holographique avec tous les avantages que présentent l'holographie (mesures tridimensionnelles, simplicité et coût du montage optique).

Pour l'heure, cette méthode est uniquement appliquée aux écoulements canalisés. Il serait intéressant de généraliser l'application de cette méthode à tous types d'écoulements, qu'ils soient canalisés ou non.

Annexe A

Cas des particules décentrées : expression de \mathcal{O}

Pour calculer l'intégrale \mathcal{O} proposée équation (2.25), ξ est remplacé par $\xi + \xi_0$ et η par $\eta + \eta_0$. Ainsi l'équation (2.25) devient :

$$\mathcal{O} = \frac{\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right]}{\lambda z} \int_{\mathcal{D}} E(\xi + \xi_0, \eta + \eta_0) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}((\xi + \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2)\right] \\ \times \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x(\xi + \xi_0) + y(\eta + \eta_0))\right] d\xi d\eta. \quad (\text{A.1})$$

Le domaine \mathcal{D} est défini comme un disque centré sur l'origine et de diamètre d . En considérant que $c_z = \pi/(\lambda z)$ et en réécrivant \mathcal{O} en coordonnées cylindriques de telle sorte que $\xi = d\sigma \cos(\varphi)/2$ et $\eta = d\sigma \sin(\varphi)/2$, \mathcal{O} s'écrit :

$$\mathcal{O} = \frac{d^2}{4\lambda z} \exp\left[c_\xi \xi_0^2 + c_\eta \eta_0^2 + ic_z [(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]\right] \\ \times \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[i\gamma\sigma^2] \exp[i\delta\sigma^2 \cos(2\varphi)] \exp[ia\sigma \cos\varphi + ib\sigma \sin\varphi] \sigma d\sigma d\varphi \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\gamma = \frac{d^2}{4} c_z - i\frac{d^2}{8} (c_\xi + c_\eta), \quad \delta = i\frac{d^2}{8} (c_\eta - c_\xi), \\ a = dc_z [\xi_0 (1 - ic_\xi/c_z) - x], \quad b = dc_z [\eta_0 (1 - ic_\eta/c_z) - y]. \quad (\text{A.3})$$

Nous pouvons écrire

$$a \cos\varphi + b \sin\varphi = r \cos(\varphi - \theta) \quad (\text{A.4})$$

à condition que

$$a = r \cos\theta, \quad b = r \sin\theta \quad (\text{A.5})$$

où $r, \theta \in \mathbb{C}^2$.

En utilisant les deux égalités suivantes [77] :

$$\exp[i\delta\sigma^2 \cos(2\varphi + 2\theta)] = J_0(\delta\sigma^2) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} i^k J_k(\delta\sigma^2) \cos 2k(\varphi + \theta), \quad (\text{A.6})$$

et

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\theta) \exp[ix \cos \theta] d\theta = i^n J_n(x), \quad (\text{A.7})$$

nous pouvons réécrire \mathcal{O} comme

$$\mathcal{O} = \frac{\pi D^2}{\lambda z} \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \cdot \exp(ic_z [(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \varepsilon_k T_k(r, \gamma) \cos(2k\theta), \quad (\text{A.8})$$

avec $\varepsilon_k = 1/2$ if $k = 0$ ou 1 sinon. Le paramètre $\Phi(\xi_0, \eta_0)$ est égal à $[c_\xi \xi_0^2 + c_\eta \eta_0^2]$, et les fonctions $T_k(r, 2\gamma)$ sont définies par :

$$T_k(r, \gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2k+2p}^{2k}(\delta) V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma). \quad (\text{A.9})$$

Les coefficients β_{2k+2p}^{2k} sont explicités dans la référence [53]. Les fonctions $V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma)$ sont données par :

$$V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma) = \exp(i\gamma/2) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m j_m(\gamma/2) \cdot \sum_{l=\max(0, m-2k-p, p-m)}^{m+p} (-1)^l \omega_{ml} \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r}, \quad (\text{A.10})$$

avec ω_{ml} définit dans [53].

Annexe B

Définition de s_p

La démarche permettant de lier la valeur de s_p aux paramètres d'enregistrement des hologrammes est mise en évidence. Le cas particulier d'une TF fractionnaire 1D d'ordre $\alpha = \pi/2$ est considéré :

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(x)](x_a) = C(\pi/2) \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \exp\left(-i2\pi \frac{xx_a}{s^2}\right) dx. \quad (\text{B.1})$$

Dans ce cas, la TF fractionnaire est une transformation de Fourier classique. L'équation (B.1) est réécrite sous forme discrète. Son expression devient alors

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(m)](k) = C(\pi/2) \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} I(m) \exp\left(-i2\pi \frac{m\delta_x k\delta_{x_a}}{s^2}\right) \delta_x, \quad (\text{B.2})$$

avec δ_x et δ_{x_a} les périodes d'échantillonnage de $I(x)$ et de sa TF fractionnaire respectivement. Le nombre d'échantillons ici considéré est N .

La TF fractionnaire d'ordre $\alpha = \pi/2$ d'une fonction correspond à sa transformation de Fourier. Ainsi, (B.2) est réécrite comme :

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(m)](k) = C(\pi/2) \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} I(m) \exp\left(-i2\pi \frac{mk}{N}\right) \delta_x. \quad (\text{B.3})$$

En identifiant les relations (B.2) et (B.3) :

$$\frac{\delta_x \delta_{x_a}}{s^2} = \frac{1}{N} \quad \text{soit} \quad s^2 = N\delta_x \delta_{x_a} = N\delta_x^2. \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, dans le cas de fonctions bidimensionnelles, $s_p^2 = N_p \delta_p^2$ avec $p = \xi, \eta$.

Annexe C

Simulation d'hologrammes dans une canalisation : approche lentille mince

C.1 Propagation du point source jusqu'à la première lentille

Dans cette partie, la propagation d'un point source gaussien $G_0(\mu, \nu)$ de rayon à $1/e$ noté ω_0 jusqu'à la première lentille est détaillée. L'expression mathématique de $G_0(\mu, \nu)$ est :

$$G_0(\mu, \nu) = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \nu^2}{\omega_0^2}\right). \quad (\text{C.1})$$

Dans l'approximation paraxiale, la propagation en air libre jusqu'à la lentille (sur une distance z_p) est donnée par l'intégrale d'Huygens Fresnel :

$$G_e(x_{l_1}, y_{l_1}) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z_p\right)}{i\lambda z_p} \int_{\mathbb{R}^2} G_0(\mu, \nu) \exp\left\{i\frac{\pi}{\lambda z_p} [(x_{l_1} - \mu)^2 + (y_{l_1} - \nu)^2]\right\} d\mu d\nu. \quad (\text{C.2})$$

En remplaçant l'expression du point source (équation (C.1)) dans (C.2) et en séparant les variables spatiales de l'intégrale, nous pouvons écrire :

$$G_e(x_{l_1}, y_{l_1}) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z_p\right)}{i\lambda z_p} \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda z_p} (x_{l_1}^2 + y_{l_1}^2)\right] \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\left[\frac{1}{\omega_0^2} - i\frac{\pi}{\lambda z_p}\right] \mu^2 - i\frac{2\pi}{\lambda z_p} x_{l_1} \mu\right\} d\mu \\ \times \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\left[\frac{1}{\omega_0^2} - i\frac{\pi}{\lambda z_p}\right] \nu^2 - i\frac{2\pi}{\lambda z_p} y_{l_1} \nu\right\} d\nu. \quad (\text{C.3})$$

Les intégrales de l'équation (C.3) sont indépendantes l'une de l'autre. Ainsi, les calculs ne seront développés que pour l'une d'entre elles. Notons $G_{e_{x_{l_1}}}$ l'une de ces intégrales :

$$G_{e_{x_{l_1}}} = \exp\left(i\frac{\pi}{\lambda z_p} x_{l_1}^2\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left\{-\left[\frac{1}{\omega_0^2} - i\frac{\pi}{\lambda z_p}\right] \mu^2 - i\frac{2\pi}{\lambda z_p} x_{l_1} \mu\right\} d\mu. \quad (\text{C.4})$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}} \exp[-(ax^2 + bx + c)] dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, la distribution d'amplitude du faisceau, dans le plan de la première lentille, s'écrit comme :

$$G_e(x_{l_1}, y_{l_1}) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z_p\right)}{i\lambda z_p} K_e^2 \exp\left(-\frac{x_{l_1}^2 + y_{l_1}^2}{w_e^2}\right) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_1}^2 + y_{l_1}^2}{R_e}\right)\right], \quad (\text{C.5})$$

où

$$K_e = \left(\frac{\pi\omega_0^2}{1 - i\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z_p}} \right)^{1/2}. \quad (\text{C.6})$$

Le rayon du faisceau à $1/e$ noté ω_e et le rayon de courbure du front d'onde dans le plan de la première lentille sont donnés par :

$$\omega_e = \left(\frac{\lambda z_p}{\pi\omega_0} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z_p} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad R_e = -\frac{z_p}{1 - \frac{\left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z_p} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi\omega_0^2}{\lambda z_p} \right)^2}}. \quad (\text{C.7})$$

Après avoir pris en compte l'effet du passage de la lentille cylindrique, les paramètres du faisceau dans le plan (ξ, η) de la particule sont déterminés.

C.2 Propagation jusqu'à la particule

C.2.1 Prise en compte de la première lentille

L'expression de la distribution d'amplitude du faisceau dans le plan de la première lentille $G_e(x_{l_1}, y_{l_1})$ a été établie. La lentille cylindrique constituant la face d'entrée de la canalisation est caractérisée par ses distances focales $f_{1x,y}$ données équation (3.1).

Dans l'approximation paraxiale, le passage d'une lentille mince peut être vu comme une transformation de phase du faisceau incident [29]. Cette transformation de phase est liée aux distances focales de la lentille par :

$$\phi_1(x_{l_1}, y_{l_1}) = \exp \left[-i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_1}^2}{f_{1x}} + \frac{y_{l_1}^2}{f_{1y}} \right) \right]. \quad (\text{C.8})$$

Ainsi, immédiatement après la lentille, la distribution d'amplitude est donnée par :

$$G_{l_1}(x_{l_1}, y_{l_1}) = G_e(x_{l_1}, y_{l_1}) \exp \left[-i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_1}^2}{f_{1x}} + \frac{y_{l_1}^2}{f_{1y}} \right) \right] \quad (\text{C.9})$$

La propagation de $G_{l_1}(x_{l_1}, y_{l_1})$ jusqu'à la particule est maintenant détaillée.

C.2.2 Distribution d'amplitude dans le plan de la particule

Pour arriver jusqu'à la particule, le faisceau se propage, dans un milieu d'indice de réfraction n_2 , sur une distance δ . Dans ces conditions, la distribution d'amplitude dans le plan de la particule est donnée par :

$$G_p(\xi, \eta) = \frac{\exp \left(i\frac{2\pi n_2}{\lambda} \delta \right)}{i\frac{\lambda}{n_2} \delta} \int_{\mathbb{R}^2} G_{l_1}(x_{l_1}, y_{l_1}) \exp \left\{ i\frac{\pi n_2}{\lambda \delta} [(\xi - x_{l_1})^2 + (\eta - y_{l_1})^2] \right\} dx_{l_1} dy_{l_1}. \quad (\text{C.10})$$

En remplaçant $G_{l_1}(x_{l_1}, y_{l_1})$ dans l'équation (C.10) et en considérant deux distances focales équivalentes $f_{1x_{eq}}$ et $f_{1y_{eq}}$ telles que :

$$\frac{1}{f_{1q=x,y_{eq}}} = \frac{1}{f_{1q}} + \frac{1}{R_e}, \quad (\text{C.11})$$

les rayons à $1/e$ du faisceau dans le plan de la particule $\omega_{\xi,\eta}$ et les rayons de courbure du front d'onde dans le même plan $R_{\xi,\eta}$ sont déterminés, de manière analogue au cas précédent. Ils sont donnés par :

$$\omega_{q=\xi,\eta} = \left(\frac{\lambda\delta}{\pi n_2 \omega_e} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi n_2 \omega_e^2}{\lambda\delta} \right)^2 \left(\frac{\delta}{n_2 f_{1x,yeq}} - 1 \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$R_{q=\xi,\eta} = - \frac{\delta/n_2}{1 + \frac{\left(\frac{\pi n_2 \omega_e^2}{\lambda\delta} \right)^2 \left(\frac{\delta}{f_{1x,yeq} n_2} \right)}{\left(\frac{\pi n_2 \omega_e^2}{\lambda\delta} \right)^2 \left(\frac{\delta}{f_{1x,yeq} n_2} \right)^2}}. \quad (\text{C.12})$$

La distribution d'amplitude du faisceau dans le plan de la particule est :

$$G_p(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z_p\right) \exp\left(i\frac{2\pi n_2}{\lambda}\delta\right)}{i\lambda z_p \quad i\frac{\lambda}{n_2}\delta} K_\xi K_\eta \exp\left(-\frac{\xi^2}{w_\xi^2} + \frac{\eta^2}{w_\eta^2}\right) \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi^2}{R_\xi} + \frac{\eta^2}{R_\eta}\right)\right], \quad (\text{C.13})$$

où

$$K_{\xi,\eta} = K_e \left[\frac{\pi\omega_e^2}{1 + i\frac{\pi n_2 \omega_e^2}{\lambda\delta} \left(\frac{\delta}{f_{1x,yeq} n_2} \right)} \right]^{1/2} \quad (\text{C.14})$$

C.3 De la particule jusqu'à la seconde lentille

Dans cette partie, la propagation du faisceau jusqu'au plan de la seconde lentille (x_{l_2}, y_{l_2}) est développée. Pour simplifier les expressions mathématiques, le cas d'une particule centrée sur l'axe optique est considéré. Néanmoins, la distribution d'amplitude dans le cas où la particule n'est pas centrée peut être facilement déduite (Cf partie 2.3).

La propagation du plan de la particule à la seconde lentille est donnée par :

$$G_{l_2}(x_{l_2}, y_{l_2}) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi n_2}{\lambda}z_i\right)}{i\frac{\lambda}{n_2}z_i} \int_{\mathbb{R}^2} G_p(\xi, \eta) [1 - T(\xi, \eta)] \times \exp\left\{i\frac{\pi n_2}{\lambda z_i} [(x_{l_2} - \xi)^2 + (y_{l_2} - \eta)^2]\right\} d\xi d\eta. \quad (\text{C.15})$$

Ici, $G_{l_2}(x_{l_2}, y_{l_2})$ peut être séparée en deux intégrales de telle sorte que :

$$G_{l_2}(x_{l_2}, y_{l_2}) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi n_2}{\lambda}z_i\right)}{i\frac{\lambda}{n_2}z_i} (A_1 - A_2), \quad (\text{C.16})$$

où l'intégrale A_1 est associée au faisceau de référence et l'intégrale A_2 au faisceau diffracté.

C.3.1 Propagation du faisceau de référence

La propagation du faisceau de référence dans le plan de la seconde lentille est développée dans un premier temps. La distribution d'amplitude est donnée par :

$$A_1(x_{l_2}, y_{l_2}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_p(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{\pi n_2}{\lambda z_i} [(x_{l_2} - \xi)^2 + (y_{l_2} - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (\text{C.17})$$

Dans la suite les termes en $\frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}z_p)}{i\lambda z_p}$ contenus dans $G_p(\xi, \eta)$ seront omis. Ils seront néanmoins bien pris en compte dans le calcul final de la distribution d'intensité enregistrée dans le plan du capteur. Ainsi, en procédant à un développement analytique similaire à ceux menés jusqu'ici, la distribution d'amplitude, du faisceau de référence, dans le plan de la seconde lentille est donnée par :

$$A_1(x_{l_2}, y_{l_2}) \propto K_{l_{2x}} K_{l_{2y}} \exp \left[- \left(\frac{x_{l_2}^2}{\omega_{l_{2x}}^2} + \frac{y_{l_2}^2}{\omega_{l_{2y}}^2} \right) \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{R_{l_{2x}}} + \frac{y_{l_2}^2}{R_{l_{2y}}} \right) \right], \quad (\text{C.18})$$

où

$$K_{l_{2x,y}} = K_{\xi,\eta} \left[\frac{\pi \omega_{\xi,\eta}^2}{1 + i \frac{\pi n_2 \omega_{\xi,\eta}^2}{\lambda z_i} \left(\frac{z_i}{R_{\xi,\eta} n_2} \right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{C.19})$$

Les rayons à $1/e$ du faisceau et les rayons de courbure du front d'onde dans le plan de la particule sont eux donnés par :

$$\omega_{l_{2x,y}} = \left(\frac{\lambda z_i}{\pi n_2 \omega_{\xi,\eta}} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi,\eta}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi,\eta}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$R_{l_{2x,y}} = - \frac{(z_i/n_2)}{1 + \frac{\left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi,\eta}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi,\eta}} \right)}{1 + \left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi,\eta}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi,\eta}} \right)^2}} \quad (\text{C.20})$$

C.3.2 Propagation du faisceau diffracté

La distribution d'amplitude du faisceau réfracté dans le plan de la seconde lentille s'écrit comme :

$$A_2(x_{l_2}, y_{l_2}) = \int_{\mathbb{R}^2} G_p(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \exp \left\{ i \frac{\pi n_2}{\lambda z_i} [(x_{l_2} - \xi)^2 + (y_{l_2} - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (\text{C.21})$$

La fonction $T(\xi, \eta)$ est la fonction de transfert de la particule. Pour traiter le faisceau diffracté, la méthode de décomposition de $T(\xi, \eta)$ sur une base de fonctions gaussiennes présentée section 2.3 est utilisée. Afin de ne pas alourdir les expressions mathématiques, le cas d'une particule centrée sur l'axe optique est considéré. Ces résultats peuvent néanmoins être relativement facilement étendus au cas où la particule est décentrée. En remplaçant les expressions de $T(\xi, \eta)$ (équation (2.57)) et de $G_p(\xi, \eta)$ (équation (C.10)), les

rayons équivalents à $1/e$ du faisceau, dans le plan de la particule sont définis comme :

$$\frac{1}{\omega_{\xi_{eq}}^2} = \frac{1}{\omega_{\xi}^2} + \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad \frac{1}{\omega_{\eta_{eq}}^2} = \frac{1}{\omega_{\eta}^2} + R_{ell}^2 \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad (C.22)$$

ainsi que les rayons de courbure équivalents, du front d'onde dans le même plan,

$$\frac{1}{R_{\xi_{eq}}} = \frac{1}{R_{\xi}} + \frac{\lambda \Im\{B_k\}}{\pi b^2}, \quad \frac{1}{R_{\eta_{eq}}} = \frac{1}{R_{\eta}} + R_{ell}^2 \frac{\lambda \Im\{B_k\}}{\pi b^2}. \quad (C.23)$$

L'expression de la distribution d'amplitude du faisceau diffracté s'écrit :

$$A_2(x_{l_2}, y_{l_2}) \propto \sum_{k=1}^{10} A_k K_{l_{2x_{eq}}} K_{l_{2y_{eq}}} \exp \left[- \left(\frac{x_{l_2}^2}{\omega_{l_{2x_{eq}}}^2} + \frac{y_{l_2}^2}{\omega_{l_{2y_{eq}}}^2} \right) \right] \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{R_{l_{2x_{eq}}}} + \frac{y_{l_2}^2}{R_{l_{2y_{eq}}}} \right) \right], \quad (C.24)$$

avec

$$K_{l_{2x,y_{eq}}} = K_{\xi,\eta} \left[\frac{\pi \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}^2}{1 + i \frac{\pi n_2 \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}^2}{\lambda z_i} \left(\frac{z_i}{R_{\xi_{eq},\eta_{eq}} n_2} \right)} \right]^{1/2}. \quad (C.25)$$

Les largeurs du faisceau et les rayons de courbures associés au faisceau diffracté sont définis par :

$$\omega_{l_{2x,y_{eq}}} = \left(\frac{\lambda z_i}{\pi n_2 \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}} \right) \left[1 + \left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi_{eq},\eta_{eq}}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$R_{l_{2x,y_{eq}}} = - \frac{(z_i/n_2)}{1 + \frac{\left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi_{eq},\eta_{eq}}} \right)^2}{1 + \left(\frac{\pi n_2 \omega_{\xi_{eq},\eta_{eq}}^2}{\lambda z_i} \right)^2 \left(\frac{z_i}{n_2 R_{\xi_{eq},\eta_{eq}}} \right)^2}}. \quad (C.26)$$

Après avoir pris en compte l'effet de la seconde lentille cylindrique sur le faisceau, la distribution d'intensité enregistrée par le capteur CCD sera calculée.

C.4 Dans le plan du capteur

C.4.1 Prise en compte de la seconde lentille cylindrique

La seconde lentille génère un déphasage de l'onde incidente. Ce déphasage peut être exprimé en fonction des distances focales de la lentille comme :

$$\phi_2(x_{l_2}, y_{l_2}) = \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{f_{2x}} + \frac{y_{l_2}^2}{f_{2y}} \right) \right]. \quad (C.27)$$

Ainsi, immédiatement après la lentille, la distribution d'amplitude du faisceau devient :

$$G_s(x_{l_2}, y_{l_2}) = G_{l_2}(x_{l_2}, y_{l_2}) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{f_{2x}} + \frac{y_{l_2}^2}{f_{2y}} \right) \right]. \quad (C.28)$$

La fonction $G_s(x_{l_2}, y_{l_2})$ contient les informations relatives au faisceau de référence et au faisceau diffracté. Sa propagation jusqu'au capteur sera donc traitée en deux temps.

C.4.2 Distribution d'amplitude du faisceau de référence $\mathcal{R}(x, y)$

Pour arriver jusqu'au capteur CCD, le faisceau se propage en air libre sur une distance z . Cette propagation est donnée par¹ :

$$\mathcal{R}(x, y) \propto \int_{\mathbb{R}^2} A_1(x_{l_2}, y_{l_2}) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{f_{2x}} + \frac{y_{l_2}^2}{f_{2y}} \right) \right] \times \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_{l_2})^2 + (y - y_{l_2})^2] \right\} dx_{l_2} dy_{l_2}. \quad (\text{C.29})$$

Deux distances focales équivalentes $f_{ref(x,y)}$ telles que :

$$\frac{1}{f_{ref(x,y)}} = \frac{1}{f_{2x,y}} + \frac{1}{R_{l_{2x,y}}}, \quad (\text{C.30})$$

sont définies. Après développement théorique, l'expression de $\mathcal{R}(x, y)$ devient :

$$\mathcal{R}(x, y) \propto K_x K_y \exp \left[-\frac{\pi}{\lambda z} (N_x x^2 + N_y y^2) \right] \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (M_x x^2 + M_y y^2) \right], \quad (\text{C.31})$$

où

$$K_{x,y} = K_{l_{2x,y}} \left[\frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{1 + i \frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1 \right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{C.32})$$

Les coefficients $N_{x,y}$ et $M_{x,y}$ renferment les informations liées au rayon du faisceau et à sa courbure dans le plan de la particule. Ils sont donnés par :

$$N_{x,y} = \frac{\frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z}}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1 \right)^2}, \quad M_{x,y} = 1 + \frac{\left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{ref(x,y)}} - 1 \right)^2} \quad (\text{C.33})$$

C.4.3 Distribution d'amplitude du faisceau diffracté $\mathcal{O}(x, y)$

La propagation du faisceau diffracté est une nouvelle fois donnée par l'intégrale de Fresnel :

$$\mathcal{O}(x, y) \propto \int_{\mathbb{R}^2} A_2(x_{l_2}, y_{l_2}) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_{l_2}^2}{f_{2x}} + \frac{y_{l_2}^2}{f_{2y}} \right) \right] \times \exp \left\{ i \frac{\pi}{\lambda z} [(x - x_{l_2})^2 + (y - y_{l_2})^2] \right\} dx_{l_2} dy_{l_2} \quad (\text{C.34})$$

Deux distances focales équivalentes associées à la partie réfractée du faisceau sont définies. Elles sont données par :

$$\frac{1}{f_{diff(x,y)}} = \frac{1}{f_{2x,y}} + \frac{1}{R_{l_{2x,y}eq}}. \quad (\text{C.35})$$

1. Les termes constants de l'intégrale ont été une nouvelle fois omis pour alléger les expressions. Ils seront bien pris en compte lors des simulations.

En procédant de la même manière que pour les propagations précédentes, l'expression de la distribution d'amplitude de la partie réfractée du faisceau $\mathcal{O}(x, y)$, dans le plan du capteur CCD est donnée par :

$$\mathcal{O}(x, y) \propto \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \times \sum_{k=1}^{10} A_k K_{x_{eq}} K_{y_{eq}} \exp \left[-\frac{\pi}{\lambda z} (N_{x_{eq}} x^2 + N_{y_{eq}} y^2) \right] \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda z} (M_{x_{eq}} x^2 + M_{y_{eq}} y^2) \right], \quad (\text{C.36})$$

où

$$K_{x,y_{eq}} = K_{l_{2x,y_{eq}}} \left[\frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{1 + i \frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{f_{diff}(x,y)} - 1 \right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{C.37})$$

Les coefficients $N_{x,y_{eq}}$ et $M_{x,y_{eq}}$ renferment les informations liées au rayon du faisceau et à sa courbure dans le plan de la particule. Ils sont donnés par :

$$N_{x,y_{eq}} = \frac{\frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z}}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff}(x,y)} - 1 \right)^2}, \quad M_{x,y_{eq}} = \frac{\left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff}(x,y)} - 1 \right)}{1 + \left(\frac{\pi \omega_{l_{2x,y_{eq}}}^2}{\lambda z} \right)^2 \left(\frac{z}{f_{diff}(x,y)} - 1 \right)^2}. \quad (\text{C.38})$$

Annexe D

Canalisation ABCD

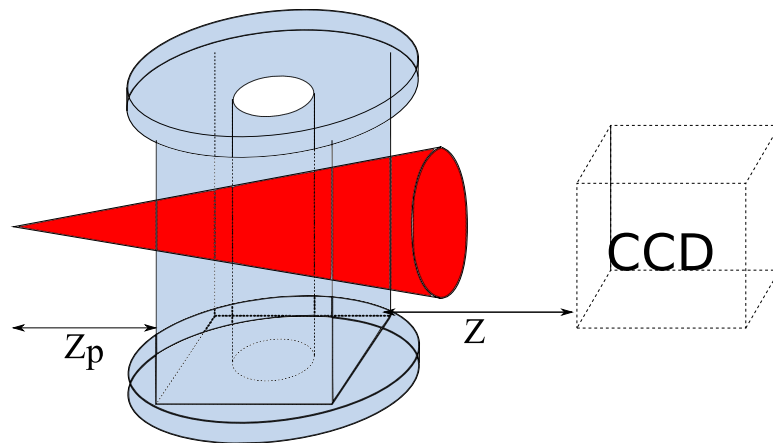


FIGURE D.1 – Montage d’holographie pour l’étude d’écoulements canalisés

La propagation au travers du système optique proposé figure D.1 est présentée comme la propagation au travers d’un système ABCD. Cette décomposition permet de représenter les systèmes optiques linéaires (réfraction, propagation ...) par des matrices 2×2 dites matrices ABCD. La propagation au travers de la canalisation sera considérée comme la propagation au travers de deux systèmes ABCD notés $M_1^{x,y}$ et $M_2^{x,y}$. Le premier système sera associé à la propagation du faisceau avant la particule alors que le second sera associé à la propagation après la particule. La décomposition de la canalisation comme un assemblage de réfractions et propagations est présentée figure D.2. De cette manière, il est possible de construire deux systèmes ABCD qui permettront de traiter la propagation au travers d’une canalisation optiquement épaisse.

D.1 Construction du premier système ABCD : $M_1^{x,y}$

Les différentes étapes permettant de “construire” le premier système ABCD sont détaillées. Ce dernier traite la propagation du point source jusqu’au plan de la particule.

Avant d’arriver jusqu’à la canalisation, le faisceau se propage en air libre sur une

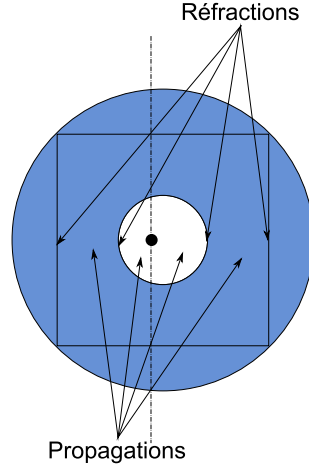


FIGURE D.2 – Décomposition de la canalisation en systèmes optiques simples (réfractions et propagations)

distance z_p . La matrice associée à cette étape est notée M_{z_p} et s'écrit :

$$M_{z_p} = \begin{pmatrix} 1 & z_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Ensuite, le faisceau subit une réfraction, au niveau de la face d'entrée de la canalisation, entre un milieu d'indice de réfraction n_0 et un milieu d'indice de réfraction n_1 . Les rayons de courbure du dioptre sont notés R_{x_1} et R_{y_1} . Les matrices associées au passage de ce dioptre sont notées $M_{R_{1_x}}$ et $M_{R_{1_y}}$:

$$M_{R_{1_x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0-n_1}{R_{x_1}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_{1_y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0-n_1}{R_{y_1}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.2})$$

Le faisceau se propage ensuite dans la canalisation, d'indice de réfraction n_1 , sur une distance e . La matrice M_e rend compte de cette étape :

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Avant d'arriver dans la canalisation, le faisceau subit une nouvelle réfraction entre le milieu d'indice n_1 et le milieu contenu dans la canalisation n_2 . Les rayons de courbure associés au dioptre sont notés R_{x_2} et R_{y_2} . Les matrices $M_{R_{2_x}}$ et $M_{R_{2_y}}$ sont données par :

$$M_{R_{2_x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R_{x_2}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_{2_y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{R_{y_2}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.4})$$

La dernière étape à traiter est la propagation dans le milieu d'indice n_2 jusqu'au plan de la particule (distance δ).

$$M_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Le premier système ABCD a été intégralement décrit. Les matrices $M_1^{x,y}$ qui régiront le premier système sont données par :

$$M_1^{x,y} = M_\delta \times M_{R_{x,y_2}} \times M_e \times M_{R_{x,y_1}} \times M_{z_p} = \begin{pmatrix} A_1^{x,y} & B_1^{x,y} \\ C_1^{x,y} & D_1^{x,y} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.6})$$

La propagation du faisceau avant la particule a été décrite. La propagation du faisceau du plan de la particule jusqu'au capteur CCD est maintenant considérée.

D.2 Construction du second système ABCD : $M_2^{x,y}$

La propagation du faisceau jusqu'au plan du capteur CCD est étudiée. Pour sortir de la canalisation, le faisceau se propage sur une distance z_i dans le milieu d'indice de réfraction n_2 . Cette étape est donnée par la matrice M_{z_i} :

$$M_{z_i} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z_i}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.7})$$

Le faisceau subit ensuite une réfraction à l'interface entre le milieu d'indice de réfraction n_2 et la canalisation d'indice de réfraction n_1 . Les rayons de courbure de ce dioptre sont notés R_{x,y_3} . Les matrices associées sont données par :

$$M_{R_{3x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R_{3x}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_{3y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R_{3y}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

Avant d'arriver dans le plan de la face de sortie de la canalisation, le faisceau se propage, dans le milieu d'indice n_1 , sur une distance e :

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

et subit une réfraction à l'interface entre la canalisation et l'air libre :

$$M_{R_{4x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_0}{R_{4x}} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{R_{4y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_0}{R_{4y}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.10})$$

Enfin, pour arriver jusqu'au capteur CCD, le faisceau se propage en air libre sur une distance z :

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.11})$$

Le second système ABCD est maintenant décrit. Les matrices $M_2^{x,y}$ associées à cette étape sont telles que :

$$M_2^{x,y} = M_z \times M_{R_{x,y_4}} \times M_e \times M_{R_{x,y_3}} \times M_{z_i} = \begin{pmatrix} A_2^{x,y} & B_2^{x,y} \\ C_2^{x,y} & D_2^{x,y} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Annexe E

Distribution d'amplitude $G_2(x, y)$

La propagation jusqu'au capteur CCD est donnée par l'intégrale de Fresnel généralisée (Cf équation (3.22)).

E.1 Distribution d'amplitude de l'onde de référence $\mathcal{R}(x, y)$

$\mathcal{R}(x, y)$ est associé à la propagation de l'onde de référence. Après développements analytiques, nous obtenons

$$R(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^xB_1^y}} K_1^x K_1^y K_2^x K_2^y \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{N_x}{B_2^x}x^2 + \frac{N_y}{B_2^y}y^2\right)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{M_x}{B_2^x}x^2 + \frac{M_y}{B_2^y}y^2\right)\right], \quad (\text{E.1})$$

où,

$$M_{x,y} = D_2^{x,y} + \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \quad N_{x,y} = \frac{\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \quad (\text{E.2})$$

et

$$K_2^{x,y} = \left[\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}} \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{E.3})$$

E.2 Distribution d'amplitude de l'onde diffractée $\mathcal{O}(x, y)$

$\mathcal{O}(x, y)$ est associée à la partie diffractée du faisceau. Définissons $\omega_{1x,yeq}$ and $R_{1x,yeq}$ tels que :

$$\frac{1}{\omega_{1x,eq}^2} = \frac{1}{\omega_{1x}^2} + \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad \frac{1}{\omega_{1y,eq}^2} = \frac{1}{\omega_{1y}^2} + R_{ell}^2 \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad (\text{E.4})$$

et

$$\frac{1}{R_{1_{xeq}}} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2}, \quad \frac{1}{R_{1_{yeq}}} = \frac{1}{R_{1_y}} + R_{ell}^2 \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2}. \quad (\text{E.5})$$

Ces grandeurs sont introduites pour alléger les notations. Après développements, $O(x, y)$ devient :

$$O(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{D_2^x}{B_2^x}x^2 + \frac{D_2^y}{B_2^y}y^2\right)\right] \sum_{k=1}^N A_k K_2^{x_{eq}} K_2^{y_{eq}} \\ \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{N_{xeq}}{B_2^x}x^2 + \frac{N_{yeq}}{B_2^y}y^2\right)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{M_{xeq}}{B_2^x}x^2 + \frac{M_{yeq}}{B_2^y}y^2\right)\right], \quad (\text{E.6})$$

avec

$$M_{x,y_{eq}} = \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1,x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1,x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \\ N_{x,y_{eq}} = \frac{\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1,x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \quad (\text{E.7})$$

et

$$K_2^{x,y_{eq}} = \left[\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{1,x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}} \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1,x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{E.8})$$

Annexe F

Publications de l'auteur

Publications dans des revues scientifiques à comité de lecture

- N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, A. J. E. M. Janssen, "Digital in-line holography with an elliptical, astigmatic Gaussian beam : wide angle reconstruction," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1459-1466, (2008).
- N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, "Digital in-line holography in thick optical systems : application to visualization in pipes," *Appl. Opt.* **47**, 4147-4157, (2008).
- N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, "Determination of 3D-region of interest using digital in-line holography with astigmatic Gaussian beams," *JEOS :RP*, **4**, 09038, (2009)
- S. Coëtmellec, N. Verrier, M. Brunel, D. Lebrun, "General formulation of digital in-line holography from correlation with a chirplet function," *Soumis à Opt. Commun.*, (2009)

Communications dans des congrès internationaux avec actes et comité de lecture

- D. Lebrun, N. Salah, N. Verrier, S. Coëtmellec, G. Godard, D. Allano, "Digital reconstruction of in-line holograms, application in flow measurements," *Digital holographic reconstruction and optical tomography for engineering applications*, Loughborough, (2007)
- N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, "Application of digital in-line holography to pipe flow visualization," *International conference on Advanced Model Measurement Technology for EU Maritime Industry (AMT'09)*, Nantes, (2009)

Communication dans des congrès nationaux avec actes et comité de lecture

- N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, "Holographie numérique en ligne. Application à l'étude des écoulements canalisés," *Colloque interdisciplinaire en instrumentation (C2I 2010)*, Le Mans, (2010)

Digital in-line holography with an elliptical, astigmatic Gaussian beam: wide-angle reconstruction

Nicolas Verrier,¹ Sébastien Coëtmellec,^{1,*} Marc Brunel,¹ Denis Lebrun,¹ and Augustus J. E. M Janssen²

¹Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Avenue de l'Université,
76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

²Philips Research Laboratories, Building WO-02, Prof. Holstlaan 4, 5656 AE Eindhoven, The Netherlands

*Corresponding author: coetmellec@coria.fr

Received December 3, 2007; revised March 26, 2008; accepted April 1, 2008;
posted April 4, 2008 (Doc. ID 90198); published May 30, 2008

We demonstrate that the effect of object shift in an elliptical, astigmatic Gaussian beam does not affect the optimal fractional orders used to reconstruct the holographic image of a particle or another opaque object in the field. Simulations and experimental results are presented. © 2008 Optical Society of America
OCIS codes: 090.0090, 070.0070.

1. INTRODUCTION

Digital in-line holography (DIH) is widely used in microscopy for biological applications [1,2], in 3D holographic particle image velocimetry (HPIV) for fluid mechanics studies [3], and in refractometry [4]. In most theoretical DIH studies, the optical systems or the objects used, for example, particles, are considered to be centered on the optical axis [5,6]. Nevertheless, in many practical applications, the systems and objects are not necessarily centered. This is not a problem under plane-wave illumination. But more and more studies involve a diverging beam or astigmatic beams directly obtained at the output of fibered laser diodes or astigmatic laser diodes. The position of the object in the beam becomes particularly relevant. To reconstruct the image of an object, a reconstruction parameter must be determined in order to find the best focus plane. For wavelet transformation, the parameter is the scale factor [7]. For Fresnel transformation, the parameter is the distance z from the object to the quadratic sensor plane [8], and for the fractional Fourier transformation (FRFT), the parameters are the fractional orders [9,10]. It is considered here that the same parameter can be used for all positions of the object. Recently, an analytical solution of scalar diffraction of an elliptical and astigmatic Gaussian beam (EAGB) by a centered opaque disk under Fresnel approximation has been proposed. By using the FRFT, a good particle image reconstruction is obtained [11]. However, there are no recent publications in DIH theory demonstrating that the reconstruction parameter is constant for all transverse positions of the object in the field of the beam. This is, however, particularly important if we want to develop wide-angle metrologies.

In this publication, the aim is to demonstrate that the same fractional orders can be used to reconstruct an image of the particle whatever its position in the field of the beam. We exhibit the effect of the Gaussian beam on the reconstructed image. In the first part of this publication,

the model of the analytical solution of scalar diffraction of an EAGB by a centered opaque disk is revisited to take into account a decentered object. In the second part, the definition of the FRFT is recalled, and this transformation is used to reconstruct the image of the particle. It is in this part that we demonstrate that the same orders can be used. Finally, we illustrate our results by simulations and experimental results.

2. IN-LINE HOLOGRAPHY WITH AN ELLIPTICAL AND ASTIGMATIC GAUSSIAN BEAM

The basic idea in DIH is to record by a CCD camera the intensity distribution of the diffraction pattern of an object illuminated by a continuous or pulsed wave [12]. Figure 1 represents the numerical and experimental setup in which all parameters are identified. The incident Gaussian beam of diameter ω crosses a plano-convex cylindrical lens. This cylindrical lens acts only in the η axis. Its focal length is equal to $f_\eta = 200$ mm. After propagation in free space, the EAGB illuminates an opaque particle. In the plane of the object, the beam widths along the ξ axis and η axis are defined by ω_ξ and ω_η , respectively. The wavefront curvatures of the astigmatic beam are denoted by R_q with $q = \xi, \eta$. The CCD camera is located at a distance z from the opaque particle.

The basic model to describe the intensity distribution of the diffracted beam by an object recorded by the CCD camera is the integral of Kirchhoff–Fresnel, given by the scalar integral for the complex amplitude A in the quadratic sensor plane:

$$A = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}z\right)}{i\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E_T(\xi, \eta) \exp\left(\frac{i\pi}{\lambda z} [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]\right) d\xi d\eta, \quad (1)$$

in which $E_T(\xi, \eta)$ is the product of the optical incident beam, denoted $E(\xi, \eta)$, by the spatial transmittance of the

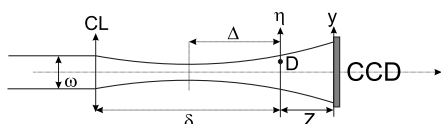


Fig. 1. Numerical and experimental optical set-up.

shifted opaque 2D object, denoted $1 - T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$. The quadratic sensor records the intensity defined by $|A|^2$. If we consider that the function E_T is the product of an EAGB by an opaque disk of diameter D , then

$$E_T(\xi, \eta) = \underbrace{\exp[c_\xi \xi^2 + c_\eta \eta^2]}_{=E(\xi, \eta)} \cdot \underbrace{[1 - T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)]}_{\text{shifted object}}. \quad (2)$$

The complex coefficients c_ξ and c_η are

$$c_\xi = -\frac{1}{\omega_\xi^2} - i \frac{\pi}{\lambda R_\xi}, \quad c_\eta = -\frac{1}{\omega_\eta^2} - i \frac{\pi}{\lambda R_\eta}. \quad (3)$$

For an opaque disk centered at the origin O , the transmittance function $T(\xi, \eta)$ in the object plane is

$$T(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & 0 < \sqrt{\xi^2 + \eta^2} < D/2, \\ 1/2, & 0 < \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = D/2, \\ 0, & \sqrt{\xi^2 + \eta^2} > D/2 > 0. \end{cases} \quad (4)$$

From Eqs. (1) and (2), the expression for $A(x, y)$ can be split into two integral terms, denoted A_1 and A_2 , so that

$$A(x, y) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} z)}{i} [A_1 - A_2]. \quad (5)$$

The expression of these two terms is given in Appendix A. The complex amplitude A_1 represents the propagation of the incident beam without diffraction by the particle, and A_2 contains the diffraction by a pinhole of diameter D . After some development detailed in Appendix A, the expression of A_2 becomes

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{\lambda z} \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \cdot \exp(ic_z[(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \varepsilon_k T_k(r, \gamma) \cos(2k\theta), \quad (6)$$

with

$$T_k(r, \gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2k+2p}^{2k}(\delta) V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma), \quad (7)$$

and

$$V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma) = \exp(i\gamma/2) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m j_m \times (\gamma/2) \cdot \sum_{l=\max(0, m-2k-p, p-m)}^{m+p} (-1)^l \omega_{ml} \times \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r}. \quad (8)$$

The coefficients ω_{ml} are given explicitly in [11,13]. Finally,

the expression of A_1 contains only the characteristics of the incident beam, and A_2 contains a shifted linear chirp function linked to the object shift in the EAGB. The previous function is modulated by a series of Bessel functions, which constitutes the envelope of the amplitude distribution of A_2 .

A similar expression has been established in [11] for a particle located on the axis of the beam, i.e., $\xi_0=0$ and $\eta_0=0$. This last expression is more general and can be applied to a particle located everywhere in the field of the beam.

In our previous study, we demonstrated that a FRFT allows a particle located on the axis of the beam to be reconstructed [11]. Unfortunately, the expression of the diffraction pattern (and particularly A_2) is so complex that it cannot be proved theoretically that a digital (or optical) reconstruction leads effectively to an opaque disk function. The demonstration is empirical. In addition, nothing proves that the fractional orders used for the reconstruction would be appropriate if the object were shifted transversely.

In the next developments, we will thus prove theoretically that the reconstruction leads effectively to the object. We will then demonstrate that the reconstruction process is successful whatever the transverse position of the particle in the field of the beam. In addition, we show that the same fractional orders have to be applied. We will thus be able to conclude that reconstruction is possible for a whole wide-field object or wide particle field in such a beam.

Now, to obtain the desired accuracy, we should analyze the number of terms necessary in the series over k in Eq. (6) and over p in Eq. (7). The series that should be analyzed is in Eq. (8). The first upper bound that is relevant here is [13–15]

$$\left| j_m \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{(2m+1)^{1/2}} \min \left(1, \left(\frac{\pi}{2} \right)^{1/2} \frac{|\gamma/4|^m}{m!} \right). \quad (9)$$

The coefficients ω_{ml} verify $\omega_{ml} \geq 0$ and $\sum_l \omega_{ml} = 1$, so the ω 's are completely innocent. Using the bound (9) for the function $|j_m(\gamma/2)|$ requires a rough estimate of the variable γ . In practical experiments, we have $D \approx 10^{-4} m$, $\lambda \approx 10^{-6} m$, $z \approx 10^{-1} m$, $R_q \approx 0.5 \times 10^{-1}$, and then $\gamma \approx 0.785 \times 10^{-1} + 0.816 \times 10^{-3} i$. The right-hand side of Eq. (9) is less than 0.142×10^{-1} for $m \geq 1$. The second upper bound we use concerns the Bessel functions $J_{2k+2l+1}$. From [16], 9.1.62 on p. 362, and [13], we obtain

$$\left| \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r} \right| \leq \min \left(1, \frac{1}{2} \frac{|r|^{2k+2l} \exp(|r|^2)}{(2k+2l+1)!} \right). \quad (10)$$

The evaluation of the accuracy concerns the product of the left-hand side of Eqs. (9) and (10):

$$\left| j_m \left(\frac{\gamma}{2} \right) \right| \left| \frac{J_{2k+2(m+p)+1}(r)}{r} \right|. \quad (11)$$

With the previous values, all the quantities in expression (11) are less than 0.142×10^{-1} for all $(k, p, m) \geq 1$. Thus, we consider only the case where $k=p=m=0$. In conclusion, the function $V_0^0(r, \gamma)$ is given with good accuracy by

$$V_0^0(r, \gamma) \simeq \exp(i\gamma/2)j_0(\gamma/2)\frac{J_1(r)}{r}. \quad (12)$$

Note that this result is true if the object is far from the beam waist. The amplitude A_2 then becomes

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{2\lambda z} \beta_0^0(\delta) \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \exp(ic_z[(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2]) \cdot V_0^0(r, \gamma). \quad (13)$$

Intensity distribution of the diffraction pattern. The intensity distribution of the diffraction pattern in the quadratic sensor plane, denoted I , is evaluated from Eqs. (5), (13), and (A1) in the following way:

$$I = A\bar{A} = [A_1 - A_2][\bar{A}_1 - \bar{A}_2] = [|A_1|^2 + |A_2|^2 - 2\Re\{A_1\bar{A}_2\}], \quad (14)$$

where the overhead bar denotes the complex conjugate and \Re denotes the real part. Thus, the intensity distribution recorded by the CCD sensor is described by Eq. (14). As one sees from the form of I , the first and second terms, i.e., $|A_1|^2$ and $|A_2|^2$, do not generate interference fringes with a linear instantaneous frequency, denoted $f_i(x)$, in the CCD plane, i.e., [17]:

$$f_i(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \arg(|A_{1,2}|)}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

But the third term exhibits a phase that is composed of a constant and a linear instantaneous frequency. This fact is important because the FRFT is an effective operator for analyzing a signal containing a linear instantaneous frequency (linear chirp functions). From Eq. (14) we write

$$A_1\bar{A}_2 = |A_1\bar{A}_2| \exp[i \arg(A_1\bar{A}_2)], \quad (16)$$

where $\arg(A_1\bar{A}_2) = \phi - \phi_0$ with

$$\begin{aligned} \phi = c_z(x^2(M_\xi - 1) + y^2(M_\eta - 1)) + 2c_z(x\xi_0 + y\eta_0) \\ - \arg\left(\frac{J_1(r)}{r}\right), \end{aligned} \quad (17)$$

and

$$\begin{aligned} \phi_0 = \frac{\Re(\gamma)}{2} + \Im(\Phi(\xi_0, \eta_0)) + \arg\left(j_0\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right) \\ + \arg(\beta_0^0(\delta)) - \arg(K_\xi K_\eta), \end{aligned} \quad (18)$$

where \Im represent the imaginary part of a complex number. The first term in Eq. (17) yields a quadratic phase, and the second term yields a linear phase. Remember that the aim of the reconstruction by means of FRFT is precisely to analyze a linear chirp.

To give two different examples, it is necessary to fix the values of the parameters $(\omega_\xi, \omega_\eta)$, (R_ξ, R_η) , and (D, λ, z) .

In the first case, the values are defined by (7 mm, 1.75 mm) for the beam waists, on $(-\infty, -50$ mm) for the wave's curvatures; the diameter D of the particle is equal to 150 μ m and is located 120 mm from the CCD sensor. The wavelength of the laser beam is 632.8 nm. The distance between the cylindrical lens and the particle is

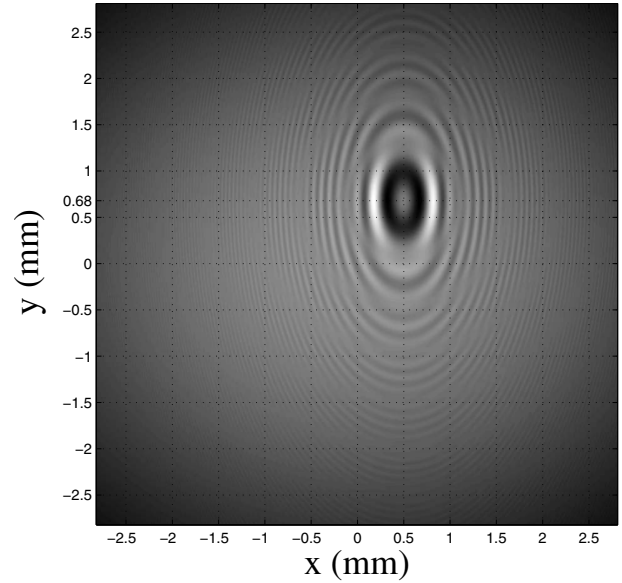


Fig. 2. Diffraction pattern with $\omega_\xi=7$ mm, $\omega_\eta=1.75$ mm, $R_\xi=\infty$, $R_\eta=-50$ mm, $D=150$ μ m, $\lambda=632.8$ nm, $z=120$ mm, $\delta=250$ mm, $\xi_0=0.5$ mm, and $\eta_0=0.2$ mm.

$\delta=250$ mm. The particle is shifted from the origin by $(\xi_0, \eta_0)=(0.5$ mm, 0.2 mm). Figure 2 illustrates the diffraction pattern that is recorded by the camera. Note that the shift of the diffraction pattern (x_0, y_0) observed in the camera plane is not equal to the object shift (ξ_0, η_0) . If the particle is considered far from the beam waist, then we have the formula

$$y_0 = \frac{|\Delta| \pm z}{|\Delta|} \eta_0. \quad (19)$$

The sign of z depends on the position of the particle compared with the position of the waist. If the particle is after

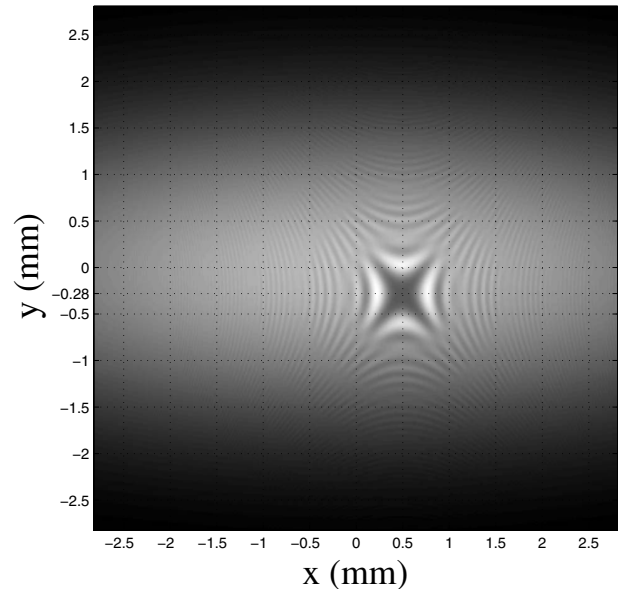


Fig. 3. Diffraction pattern with $\omega_\xi=7$ mm, $\omega_\eta=1.75$ mm, $R_\xi=\infty$, $R_\eta=-50$ mm, $D=150$ μ m, $\lambda=632.8$ nm, $z=120$ mm, $\delta=150$ mm, $\xi_0=0.5$ mm, and $\eta_0=0.2$ mm.

the waist, the sign is positive. If it is in front of the waist, the sign is negative. Along the x axis, the parameter Δ is infinite so that in the plane of the camera $x_0 = \xi_0 = 0.5$ mm; along the y axis, $\Delta = 50$ mm so that $y_0 = 0.68$ mm.

Now, in the second case, the values are defined by (7 mm, 1.75 mm) for the beam waists and $(-\infty, 50$ mm) for the wave's curvatures; the diameter D of the particle is equal to 150 μ m and is located at $z = 120$ mm from the CCD sensor. The distance between the cylindrical lens and the particle is $\delta = 150$ mm. The particle is shifted from the origin by $(\xi_0, \eta_0) = (0.5$ mm, 0.2 mm). Figure 3 illustrates the diffraction pattern that is recorded by the camera. In the plane of the camera, $x_0 = \xi_0 = 0.5$ mm, and $\Delta = 50$ mm; thus, from Eq. (19), this leads to $y_0 = -0.28$ mm. The diffraction pattern changes from elliptical fringes to hyperbolic fringes. These diffraction patterns will be used to reconstruct the image of the particle by FRFT.

3. FRACTIONAL FOURIER TRANSFORMATION ANALYSIS OF IN-LINE HOLOGRAMS

A. Two-Dimensional Fractional Fourier Transformation
FRFT is an integral operator that has various applications in signal and image processing. Its mathematical definition is given in [18–20]. Two-dimensional FRFT of order α_x for the x cross section and α_y for the y cross section with $0 \leq |\alpha_x| \leq \pi/2$ and $0 \leq |\alpha_y| \leq \pi/2$, respectively, of a 2D-function $I(x, y)$ is defined as (with $\alpha_p = a_p \pi/2$)

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)](x_a, y_a) = \int_{\mathbb{R}^2} N_{\alpha_x}(x, x_a) N_{\alpha_y}(y, y_a) I(x, y) dx dy, \tag{20}$$

where the kernel of the fractional operator is defined by

$$N_{\alpha_p}(x, x_a) = C(\alpha_p) \exp\left(i \pi \frac{x^2 + x_a^2}{s_p^2 \tan \alpha_p}\right) \exp\left(-\frac{i 2 \pi x x_a}{s_p^2 \sin \alpha_p}\right), \tag{21}$$

and

$$C(\alpha_p) = \frac{\exp\left\{-i \left[\frac{\pi}{4} \text{sign}(\sin \alpha_p) - \frac{\alpha_p}{2}\right]\right\}}{|s_p^2 \sin \alpha_p|^{1/2}}. \tag{22}$$

Here $p = x, y$. Generally, the parameter s_p is considered as a normalization constant. It can take any value. In our case, its value is defined from the experimental setup according to [21]

$$s_p^2 = N_p \cdot \delta_p^2. \tag{23}$$

This definition is presented in Appendix C. Here N_p is the number of samples along the x and y axes in both spatial $I(x, y)$ and fractional domains. The constant δ_p is the sampling period along the two previous axes of the image. In our case the number of samples and the sampling period are the same along both axes so that the parameters s_p are equal to s . The energy-conservation law is ensured by the coefficient $C(\alpha_p)$, which is a function of the fractional order. One of the most important FRFT features is its

ability to transform a linear chirp into a Dirac impulse [22]. Let $g(x) = \exp(i \pi \chi x^2)$ the chirp function to be analyzed. If we consider $1/\chi = -\tan \alpha$ and use the fact that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{i \pi \varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{i \varepsilon}\right) = \delta(x), \tag{24}$$

then the FRFT of optimal order α of $g(x)$ can be written as

$$\mathcal{F}_\alpha[g(x)] = \delta(x_\alpha). \tag{25}$$

Finally, by choosing the adequate value of the fractional order, a pure linear chirp function can be transformed into a delta Dirac distribution.

B. Reconstruction: Optimal Fractional Orders

To reconstruct the image of the particle, the FRFT of the diffraction pattern [Eq. (14)] must be calculated:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I] &= \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|A_1|^2] - \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[2|A_1 \overline{A_2}| \cos(\phi - \phi_0)] \\ &\quad + \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|A_2|^2]. \end{aligned} \tag{26}$$

The terms $|A_1|^2$ and $|A_2|^2$ do not contain a linear chirp, so they do not have any effect on the optimal fractional order to be determined. But the second term, denoted S_t , contains a linear chirp. It will be considered for the image reconstruction of the particle. By noting that $2 \cos(\phi - \phi_0) = \exp(-i(\phi - \phi_0)) + \exp(i(\phi - \phi_0))$, the second term of Eq. (26) becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[2|A_1 \overline{A_2}| \cos(\phi - \phi_0)] &= \exp\left(i \pi \frac{x_a^2}{s^2 \tan \alpha_x}\right) \\ &\quad \times \exp\left(i \pi \frac{y_a^2}{s^2 \tan \alpha_y}\right) \{I_- + I_+\}, \end{aligned} \tag{27}$$

with

$$\begin{aligned} I_\pm &= C(\alpha_x) C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |A_1 \overline{A_2}| \exp[i(\phi_a \pm (\phi - \phi_0))] \\ &\quad \times \exp\left[-\frac{2i \pi}{s^2} \left(\frac{x_a x}{\sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{\sin \alpha_y}\right)\right] dx dy. \end{aligned} \tag{28}$$

The quadratic phase term of the FRFT is denoted by $\phi_a = \pi / s^2 (x^2 \cot \alpha_x + y^2 \cot \alpha_y)$. Let us recall that the FRFT allows us to analyze a linear chirp. Thus, if the fractional orders check the following conditions,

$$\frac{\pi \cot \alpha_x^{opt}}{s^2} = c_z(M_x - 1), \quad \frac{\pi \cot \alpha_y^{opt}}{s^2} = c_z(M_y - 1), \tag{29}$$

then the FRFT of I_- is no more than a classical Fourier transformation according to

$$I_- = \chi \cdot \mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda z} \rho^T N \rho\right) \right] (u, v), \tag{30}$$

with $\chi = (\pi D^2 / 2 \lambda z) C(\alpha_x) C(\alpha_y) K_\xi K_\eta \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \beta_0^0(\delta) \times \exp(i \gamma / 2) j_0(\gamma / 2)$. The operator \mathcal{F} is the 2D Fourier transformation. The spatial frequencies u and v are equal to

$$u = \frac{x_a}{s^2 \sin(\alpha_x^{opt})} + \frac{c_z \xi_0}{\pi}, \quad v = \frac{y_a}{s^2 \sin(\alpha_y^{opt})} + \frac{c_z \eta_0}{\pi}. \quad (31)$$

As the Fourier transform of the product of two functions is equal to the convolution of their transforms, then

$$I_- = \chi \cdot \mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] * \mathcal{F} \left[\exp \left(-\frac{\pi}{\lambda z} \rho^T N \rho \right) \right]. \quad (32)$$

Remember here that the variables ρ and r pertain to the same coordinates (x, y) . With the shift theorem for the Fourier transform, the Hankel transform, and the discontinuous Weber–Schafheitlin integral in [16], 11.4.42 on p. 487, we have

$$\mathcal{F} \left[\frac{J_1(r)}{r} \right] = 2\pi \left(\frac{\lambda z}{\pi D} \right)^2 \exp[-i2\pi(uX_0 + vY_0)] \times \begin{cases} 1, & 0 < \sqrt{u^2 + v^2} < \frac{D/2}{\lambda z}, \\ 1/2, & 0 < \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{D/2}{\lambda z}, \\ 0, & \sqrt{u^2 + v^2} > \frac{D/2}{\lambda z} > 0, \end{cases} \quad (33)$$

with $X_0 = \xi_0(1 - ic_\xi/c_z)$ and $Y_0 = \eta_0(1 - ic_\eta/c_z)$. The function defined by the right-hand side of Eq. (33), with a spatial coordinates (x_a, y_a) , has the aperture of the pinhole with a diameter equal to the diameter D of the opaque particle. We have thus demonstrated our result: Reconstruction with a FRFT leads exactly to the object. In addition, shifting the object does not modify the fractional order. This point is important because, in the case of a particle field, a single fractional-order couple along the x axis and y axis is necessary to reconstruct the particle image. If one wishes to determine the shift of the diffraction patterns in the (x_a, y_a) plane, the coordinates that should be considered are

$$\left(s^2 \left(u - \frac{c_z \xi_0}{\pi} \right) \tan \alpha_x^{opt}, s^2 \left(v - \frac{c_z \eta_0}{\pi} \right) \tan \alpha_y^{opt} \right). \quad (34)$$

This correction is necessary because the FRFT is not invariant by translation: A space shift in the spatial domain will lead to both frequency shift and phase shift in the FRFT domain. The shift rule of the FRFT is expressed as

$$\mathcal{F}_\alpha[f(x - b)](u) = \exp(i\pi b^2 \sin \alpha \cos \alpha) \exp(-i2\pi b u \sin \alpha) \times \mathcal{F}_\alpha[f(x)](u - b \cos \alpha). \quad (35)$$

Note that the nature of the Gaussian beam implies that the reconstructed image of the object is convolved by a 2D Gaussian function. The sign of the object function (opaque object with a luminous background) is retrieved by applying an inversion of I_- that is realized by the minus in front of the second term of Eq. (26).

C. Numerical Experiments

The simulations of the particle image reconstruction are realized from the diffraction patterns illustrated by Figs. 2 and 3. The diffraction patterns consist of a 512

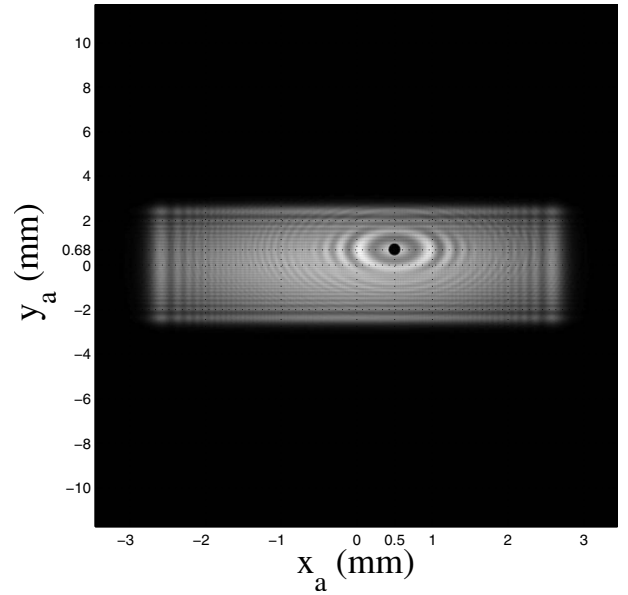


Fig. 4. FRFT of the diffraction pattern with $\alpha_x^{opt} = -0.564$ and $\alpha_y^{opt} = -0.850$.

$\times 512$ array of $11 \mu\text{m} \times 11 \mu\text{m}$ size pixels. Consider the diffraction pattern presented in Fig. 2 and produced by a particle of $D = 150 \mu\text{m}$ in diameter located at $z = 120 \text{ mm}$. The optimal fractional orders obtained from Eq. (29) are $\alpha_x^{opt} = -0.564$ and $\alpha_y^{opt} = -0.850$. The image of the reconstructed image is shown in Fig. 4. In this representation, the squared modulus of the FRFT, i.e., $|\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I]|^2$, is taken. The shape of the particle image is not modified: The width of the Gaussian function in Eq. (32) is greater than the diameter D of the particle (typically $679 \mu\text{m}$ along the x cross axis and $490 \mu\text{m}$ along the y cross axis). Now, the reconstruction of the particle image from the diffraction pattern illustrated by Fig. 3, is realized by a FRFT of optimal orders $\alpha_x^{opt} = -0.564$ and $\alpha_y^{opt} = 0.664$.

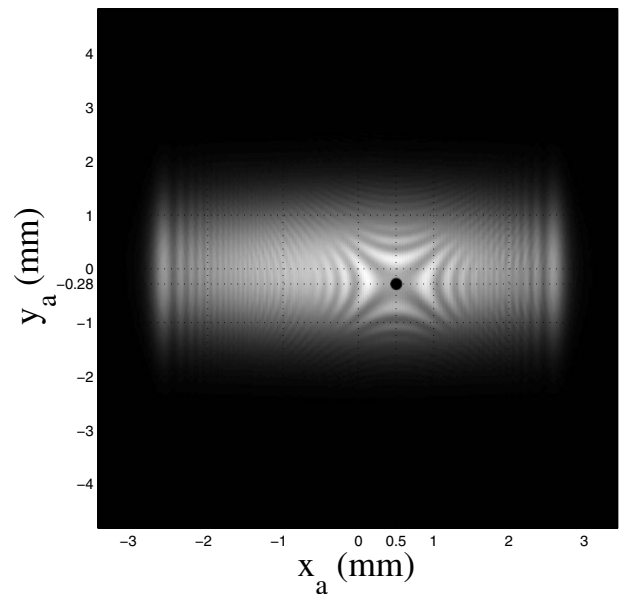


Fig. 5. FRFT the diffraction pattern with $\alpha_x^{opt} = -0.564$ and $\alpha_y^{opt} = 0.664$.

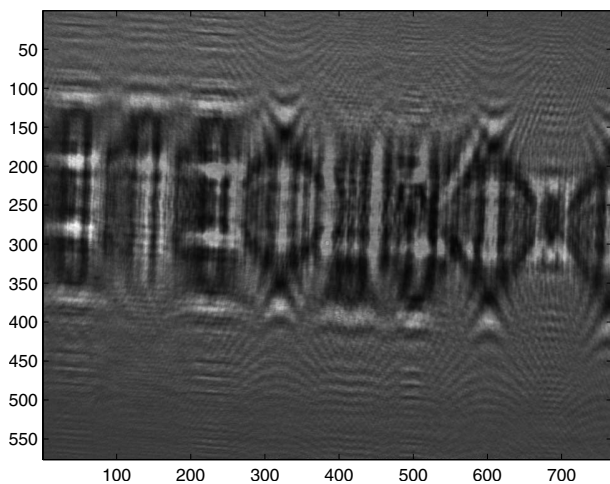


Fig. 6. Diffraction pattern of the word “ELECTRO.”

Figure 5 illustrates the result of the reconstruction. In both cases (Figs. 4 and 5) reconstruction by FRFT is successful. Note that we have checked that the apertures resulting from Eq. (32) and the image of the reconstructed particle give the same diameter D .

D. Experimental Results

As the reconstruction process is successful whatever the transversal position of the particle in the field of the beam, for the same fractional orders we can now carry out a reconstruction for a wide-field object.

The previous theoretical developments and numerical experiments have been tested by using an RS-3 standard reticle (Malvern Equipment). This reticle is an optical glass plate with a pattern of the word “ELECTRO” photographically deposited on the surface. The word “ELECTRO” is spread over 6.5 mm. The reticle is located at $\delta \approx 156$ mm from the cylindrical lens (CL). The distance z between the CCD camera and the reticle is approximately equal to 117 mm. The opaque word “ELECTRO” is in front of the waist of the beam. The intensity distribution of the EAGB diffracted by the word “ELECTRO” is shown in Fig. 6. The image of the word “ELECTRO” is re-

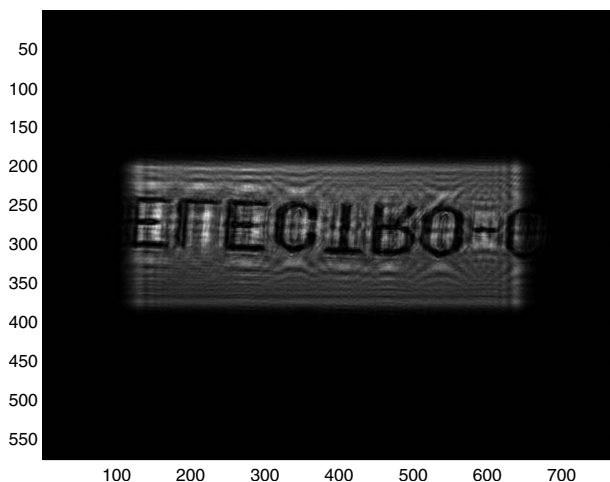


Fig. 7. FRFT of the diffraction pattern with $\alpha_x^{opt}=0.505$ and $\alpha_y^{opt}=-0.785$.

constructed by FRFT. Fractional orders have been adjusted to obtain the best contrast between the reconstructed word “ELECTRO” and the background. In so doing, the approximate orders are $\alpha_x^{opt}=0.505$ and $\alpha_y^{opt}=-0.785$. The image of Fig. 7 shows that two previous orders allow all parts of the object image to be reconstructed. Note that the word is reversed along the y axis. This is due to the Gouy phase shift of a Gaussian beam that propagates from $-\infty$ to $+\infty$ through the focus point. In this case, the phase shift predicted is π .

4. CONCLUSION

The effect of a transverse object shift in an EAGB does not affect the optimal fractional orders required to reconstruct the image of a particle or any other opaque object in the field. In this publication an analytical model has been developed to prove this. In this development, an opaque particle is considered. Experimental results presented by the recording and reconstruction of the word “ELECTRO” show that our method works, even when the object is spread out over the whole image field.

APPENDIX A: EXPRESSION OF THE TERMS A_1 AND A_2

1. Expression for the Amplitude Distribution A_1

The development of integral A_1 has been given in a previous paper [11] as

$$A_1 = K_\xi K_\eta \exp\left(-\frac{\pi}{\lambda z} \rho^T N \rho\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} \rho^T M \rho\right), \quad (A1)$$

where ρ^T represents the vector $(x \ y)$ and the factors K_q with $q = \xi, \eta$ in Eq. (A1) are defined by

$$K_q = \left[\frac{\frac{\pi \omega_q^2}{\lambda z}}{1 + i \frac{\pi \omega_q^2}{\lambda z} \left(\frac{z}{R_q} - 1\right)} \right]^{1/2} \quad (A2)$$

and the diagonal matrices N and M by

$$N = \begin{pmatrix} N_x & 0 \\ 0 & N_y \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} M_x & 0 \\ 0 & M_y \end{pmatrix}, \quad (A3)$$

with

$$N_q = \pi \frac{\frac{\omega_q^2}{\lambda z}}{1 + \pi^2 \frac{\omega_q^4}{(\lambda z)^2} \left(\frac{z}{R_q} - 1\right)^2}, \quad (A4)$$

$$M_q = 1 + \pi^2 \frac{\frac{\omega_q^4}{(\lambda z)^2} \left(\frac{z}{R_q} - 1\right)}{1 + \pi^2 \frac{\omega_q^4}{(\lambda z)^2} \left(\frac{z}{R_q} - 1\right)^2}.$$

2. Expression for the Amplitude Distribution A_2

To develop the second integral of A_2 , involving the product of $E(\xi, \eta)$ and $T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0)$, i.e.,

$$A_2 = \frac{\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right]}{\lambda z} \int_{\mathbb{R}^2} E(\xi, \eta) T(\xi - \xi_0, \eta - \eta_0) \\ \times \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(\xi^2 + \eta^2)\right] \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x\xi + y\eta)\right] d\xi d\eta, \quad (\text{A5})$$

we first replace ξ with $\xi + \xi_0$ and η with $\eta + \eta_0$ and get

$$A_2 = \frac{\exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}(x^2 + y^2)\right]}{\lambda z} \int_D E(\xi + \xi_0, \eta + \eta_0) \exp\left[\frac{i\pi}{\lambda z}((\xi + \xi_0)^2 + (\eta + \eta_0)^2)\right] \\ \exp\left[-i\frac{2\pi}{\lambda z}(x(\xi + \xi_0) + y(\eta + \eta_0))\right] d\xi d\eta. \quad (\text{A6})$$

The domain D must be defined as the disk with center 0 and diameter D . By considering that $c_z = \pi/(\lambda z)$ and by restating A_2 in cylindrical coordinates as $\xi = D\sigma \cos(\varphi)/2$ and $\eta = D\sigma \sin(\varphi)/2$ for the object plane, we obtain

$$A_2 = \frac{D^2}{4\lambda z} \exp[c_\xi \xi_0^2 + c_\eta \eta_0^2 + ic_z(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2] \\ \cdot \int_0^1 \int_0^{2\pi} \exp[i\gamma\sigma^2] \exp[i\delta\sigma^2 \cos(2\varphi)] \\ \times \exp[ia\sigma \cos \varphi + ib\sigma \sin \varphi] \sigma d\sigma d\varphi, \quad (\text{A7})$$

with

$$\gamma = \frac{D^2}{4} c_z - i \frac{D^2}{8} (c_\xi + c_\eta), \quad \delta = i \frac{D^2}{8} (c_\eta - c_\xi),$$

$$a = Dc_z[\xi_0(1 - ic_z/c_z) - x], \quad b = Dc_z[\eta_0(1 - ic_z/c_z) - y]. \quad (\text{A8})$$

We can write

$$a \cos \varphi + b \sin \varphi = r \cos(\varphi - \theta), \quad (\text{A9})$$

for which we have the condition

$$a = r \cos \theta, \quad b = r \sin \theta \quad (\text{A10})$$

with complex r and θ . This representation is discussed in some detail in Appendix B. By means of the following equalities in [16], 9.1.41–9.1.45,

$$\exp[i\delta\sigma^2 \cos(2\varphi + 2\theta)] \\ = J_0(\delta\sigma^2) + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} i^k J_k(\delta\sigma^2) \cos 2k(\varphi + \theta), \quad (\text{A11})$$

and

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(in\theta) \exp[ix \cos \theta] d\theta = i^n J_n(x), \quad (\text{A12})$$

the expression of A_2 becomes

$$A_2 = \frac{\pi D^2}{\lambda z} \exp[\Phi(\xi_0, \eta_0)] \cdot \exp[ic_z(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2] \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-i)^k \varepsilon_k T_k(r, \gamma) \cos(2k\theta), \quad (\text{A13})$$

with $\varepsilon_k = 1/2$ if $k=0$ and 1 otherwise. The parameter denoted $\Phi(\xi_0, \eta_0)$ is equal to $[c_\xi \xi_0^2 + c_\eta \eta_0^2]$. The function $T_k(r, 2\gamma)$ is defined as

$$T_k(r, \gamma) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta_{2k+2p}^{2k}(\delta) V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma), \quad (\text{A14})$$

where the coefficients β_{2k+2p}^{2k} are given by the analytical development of T_k in Appendix A of [11]. Recall here that the expression of $V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma)$ is

$$V_{2k+2p}^{2k}(r, \gamma) = \exp(i\gamma/2) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) i^m j_m \\ \times (\gamma/2) \cdot \sum_{l=\max(0, m-2k-p, p-m)}^{m+p} (-1)^l \omega_{ml} \\ \times \frac{J_{2k+2l+1}(r)}{r}. \quad (\text{A15})$$

The coefficient ω_{ml} is given explicitly in [11,13].

APPENDIX B: ELABORATION OF CONDITION (A10)

With $u = a + ib$, $v = a - ib$, we should find τ and $\omega = \exp(i\theta)$ such that

$$\tau\omega = u, \quad \pi\omega = v. \quad (\text{B1})$$

Assume that $u \neq 0$, $v \neq 0$, and write $u = r \exp(i\alpha)$, $v = s \exp(i\beta)$ with $r, s > 0$ and $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Then we see that $\omega = \exp(i\theta)$ given by

$$\tau = (rs)^{1/2} \exp(i(\alpha + \beta)/2),$$

$$\omega = \exp(i\theta) = (r/s)^{1/2} \exp(i(\alpha - \beta)/2) \quad (\text{B2})$$

to satisfy relations (B1). This does not work in the case where $u=0$ or $v=0$. Indeed, when $a=1$, $b=i$, we get from (A10) and $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ that $r = a + ib = 0$, *i.e.*, $r=0$.

APPENDIX C: DEFINITION OF S_p

To determine the value of s_p , it is necessary to write the definition of the 1D FRFT in the particular case of $\alpha = \pi/2$:

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(x)](x_a) = C(\pi/2) \int_{-\infty}^{+\infty} I(x) \exp\left(-i2\pi \frac{xx_a}{s^2}\right) dx. \quad (\text{C1})$$

Its discrete version is

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(m)](k) = C(\pi/2) \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} I(m) \exp\left(-i2\pi \frac{m\delta_x k \delta_{x_a}}{s^2}\right) \delta_x, \quad (\text{C2})$$

where δ_x and δ_{x_a} are the sampling periods of $I(x)$ and its transform. The sampling periods are equal to δ_x , and N is the number of samples of $I(x)$ and its transform. Relation (C2) can be written as the discrete Fourier transformation of $I(m)$ according to

$$\mathcal{F}_{\pi/2}[I(m)](k) = C(\pi/2) \sum_{m=-N/2}^{N/2-1} I(m) \exp\left(-i2\pi \frac{mk}{N}\right) \delta_x. \quad (\text{C3})$$

By identification of Eqs. (C3) and (C2), one obtains

$$\frac{\delta_x \delta_{x_a}}{s^2} = \frac{1}{N} \quad \text{so} \quad s^2 = N \delta_x \delta_{x_a} = N \delta_x^2. \quad (\text{C4})$$

In the case of a 2D function, one finally has $s_p^2 = N_p \cdot \delta_p^2$ with $p = \xi, \eta$.

REFERENCES

- W. Xu, M. H. Jericho, H. J. Kreuzer, and I. A. Meinertzhagen, "Tracking particles in four dimensions with in-line holographic microscopy," *Opt. Lett.* **28**, 164–166 (2003).
- F. Dubois, L. Joannes, and J.-C. Legros, "Improved three-dimensional imaging with a digital holography microscope using a partial spatial coherent source," *Appl. Opt.* **38**, 7085–7094 (1999).
- B. Skarman, K. Wozniac, and J. Becker, "Simultaneous 3D-PIV and temperature measurement using a new CCD based holographic interferometer," *Flow Meas. Instrum.* **7**, 1–6 (1996).
- M. Sebesta and M. Gustafsson, "Object characterization with refractometric digital Fourier holography," *Opt. Lett.* **30**, 471–473 (2005).
- U. Schnars, "Direct phase determination in hologram interferometry with use of digitally recorded holograms," *J. Opt. Soc. Am. A* **11**, 2011–2015 (1994).
- G. Shen and R. Wei, "Digital holography particle image velocimetry for the measurement of 3Dt-3c flows," *Opt. Lasers Eng.* **43**, 1039–1055 (2002).
- L. Onural, "Diffraction from a wavelet point of view," *Opt. Lett.* **18**, 846–848 (1993).
- L. Onural and P. D. Scott, "Digital decoding of in-line holograms," *Opt. Eng. (Bellingham)* **26**, 1124–1132 (1987).
- E. Fogret and P. Pellat-Finet, "Agreement of fractional Fourier optics with the Huygens–Fresnel principle," *Opt. Commun.* **272**, 281–288 (2007).
- S. Coëtmelec, D. Lebrun, and C. Özkul, "Characterization of diffraction patterns directly from in-line holograms with the fractional Fourier transform," *Appl. Opt.* **41**, 312–319 (2002).
- F. Nicolas, S. Coëtmelec, M. Brunel, D. Allano, D. Lebrun, and A. J. Janssen, "Application of the fractional Fourier transformation to digital holography recorded by an elliptical, astigmatic Gaussian beam," *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2569–2577 (2005).
- F. Nicolas, S. Coëtmelec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography with a sub-picosecond laser beam," *Opt. Commun.* **268**, 27–33 (2006).
- A. J. E. M. Janssen, J. J. M. Braat, and P. Dirksen, "On the computation of the Nijboer–Zernike aberration integrals at arbitrary defocus," *J. Mod. Opt.* **51**, 687–703 (2004).
- J. J. M. Braat, P. Dirksen, and A. J. E. M. Janssen, "Assessment of an extended Nijboer–Zernike approach for the computation of optical point-spread functions," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 858–870 (2002).
- A. J. E. M. Janssen, "Extended Nijboer–Zernike approach for the computation of optical point-spread functions," *J. Opt. Soc. Am. A* **19**, 849–857 (2002).
- M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, 1970).
- W. Mecklenbräuker and F. Hlawatsch, *The Wigner Distribution. Theory and Applications in Signal Processing* (Elsevier, 1997), pp. 59–83.
- A. C. McBride and F. H. Kerr, "On Namias's fractional Fourier transforms," *IMA J. Appl. Math.* **39**, 159–175 (1987).
- V. Namias, "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics," *J. Inst. Math. Appl.* **25**, 241–265 (1980).
- A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2181–2186 (1993).
- D. Mas, J. Pérez, C. Hernández, C. Vázquez, J. J. Miret, and C. Illueca, "Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems," *Opt. Commun.* **227**, 245–258 (2003).
- H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform: With Applications in Optics and Signal Processing* (Wiley, 2001).

Digital in-line holography in thick optical systems: application to visualization in pipes

Nicolas Verrier, Sébastien Coëtmellec,* Marc Brunel, and Denis Lebrun

Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Avenue de l'Université,
76801 Saint-Etienne du Rouvray Cedex, France

*Corresponding author: coetmellec@coria.fr, verrier@coria.fr

Received 13 March 2008; revised 1 July 2008; accepted 1 July 2008;
posted 2 July 2008 (Doc. ID 93843); published 29 July 2008

We apply digital in-line holography to image opaque objects through a thick plano-concave pipe. Opaque fibers and opaque particles are considered. Analytical expression of the intensity distribution in the CCD sensor plane is derived using a generalized Fresnel transform. The proposed model has the ability to deal with various pipe shapes and thicknesses and compensates for the lack of versatility of classical digital in-line holography models. Holograms obtained with a 12 mm thick plano-concave pipe are then reconstructed using a fractional Fourier transform. This method allows us to get rid of astigmatism. Numerical and experimental results are presented. © 2008 Optical Society of America

OCIS codes: 090.0090, 070.0070, 100.0100.

1. Introduction

Digital in-line holography (DIH) is a recognized optical technique for flow measurements in transparent liquid media. This method is widely used in various domains such as fluid mechanics [1,2], where the flow is seeded with small particles, or in the biological microscopic imaging field [3,4]. Nevertheless, a transparent pipe can be viewed as an optical system that can introduce aberrations such as astigmatism [5]. These aberrations make it difficult to image objects in the pipe. Compensation for these unwanted effects has been widely investigated. De Nicola *et al.* [6] proposed a numerical method to compensate for anamorphism. By modifying the chirp function and the spatial frequency term of the Fresnel integral the authors managed to compensate for a severe anamorphism brought by a reflection diffraction grating. Numerical methods for astigmatism compensation have been proposed in Refs. [6–8]. There the authors used a modified chirp function where two different propagation distances were considered. Astigmatism can also be compensated for by optical means. For in-

stance, the authors of [9] used index matching to minimize astigmatism: the thin lenslike effect of an ampule filled with contaminants was investigated to determine index matching parameters for astigmatism compensation. However, the pipe used to carry a flow must be considered as a thick and cylindrical optical system. Recently, an analytical solution of the scalar diffraction produced by an opaque disk illuminated by an elliptical, astigmatic, and Gaussian beam under Fresnel approximation has been proposed [10]. In this publication, the astigmatism was introduced and controlled by using a thin plano-convex cylindrical lens. Using fractional Fourier transformation (FRFT), authors managed to retrieve a correct image of an opaque disk from an astigmatic hologram. It was shown that FRFT is therefore well suited for these studies where classical methods such as Fresnel transforms [11] or wavelet transforms [12] fail. The astigmatism introduced by thin lenses is thus well controlled. However, these DIH models cannot be applied to hugger pipes. As a matter of fact, the optical thickness of these pipes has to be taken into account.

Here we aim to apply DIH to thick pipe systems. In the first part of the paper the intensity distribution in the CCD plane of the diffracted field produced by an opaque object located in a pipe is calculated. A

method of Gaussian functions superposition is used to describe the object function. In the second part, the definition of the FRFT is recalled, and we demonstrate its ability to reconstruct holograms recorded in such systems. Finally simulations and experiments are performed to illustrate our results.

2. In-Line Holography through Pipes

Holography aims to record, on a CCD camera without an objective lens, the intensity distribution of the diffraction pattern of an object illuminated by a monochromatic continuous wave [13]. The numerical and experimental setup is represented in Fig. 1. The incident Gaussian beam propagates in free space over a distance z_p and illuminates the pipe. Here, the pipe is modeled as two thick lenses. Their thickness is denoted by e . The opaque object is located between these two lenses: at a distance δ from the first thick lens and at a distance z_i from the second lens. The CCD sensor is located at distance z next to the pipe and records the intensity distribution of the diffraction pattern.

A. Intensity Distribution in the CCD Sensor Plane

We now consider the propagation of a Gaussian beam through our optical system. In the beam waist plane, located at a distance $-z_p$ from the pipe, the Gaussian beam denoted G , is defined by

$$G(\mu, \nu) = \exp\left(-\frac{\mu^2 + \nu^2}{w^2}\right), \quad (1)$$

where w is the waist width and (μ, ν) are the coordinates in the beam waist plane. The propagation of

the Gaussian beam through the pipe to the CCD sensor is decomposed into two steps. The first step is the propagation of the illuminating beam [i.e. $G(\mu, \nu)$] from the beam waist plane to the front of the opaque object. Using the generalized Huygens–Fresnel integral [14–16], the amplitude of the field in the pipe, denoted G_1 , is defined by

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} \int_{R^2} G(\mu, \nu) \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^x}(A_1^x \mu^2 - 2\xi\mu + D_1^x \xi^2)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^y}(A_1^y \nu^2 - 2\eta\nu + D_1^y \eta^2)\right] d\mu d\nu, \quad (2)$$

where $A_1^{x,y}$, $B_1^{x,y}$, and $D_1^{x,y}$ are given by $M_1^{x,y}$ matrices of Eq. (B1) in Appendix B. To obtain the relation of the intensity distribution, the linear canonical transformation is used. For the basic definitions and properties of the linear canonical transformation, we refer to [17]. This transformation is a parameterized integral operator of parameters A , B , C , and D . Each parameter represents a coefficient of a transfer matrix denoted M (see Appendix A). In our case the Fresnel transform is considered [18,19]. It should be noted that the values of the coefficients are different in both the ξ and the η directions. This is due to the cylindrical geometry of the pipe. The distance $E_1 = z_p + e + \delta$ corresponds to the waist–object distance. Using the same formalism, the amplitude in the CCD plane, denoted $G_2(x, y)$, can be written as

$$G_2(x, y) = \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_2\right)}{i\lambda\sqrt{B_2^x B_2^y}} \int_{R^2} G_1(\xi, \eta) [1 - T(\xi, \eta)] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^x}(A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^y}(A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y \eta^2)\right] d\xi d\eta, \quad (3)$$

where the parameters $A_2^{x,y}$, $B_2^{x,y}$, and $D_2^{x,y}$ are given by the $M_2^{x,y}$ matrices of Eq. (B2). The distance $E_2 = z_i + e + z$ is the distance between the object and the CCD sensor.

The spatial transmittance of the opaque 2D object is defined by $[1 - T(\xi, \eta)]$. Here $T(\xi, \eta)$ can be expressed as a superposition of Gaussian functions [20,21], such as

$$T(r) = \sum_{k=1}^N A_k \exp(-r^T R^T P_k R r), \quad (4)$$

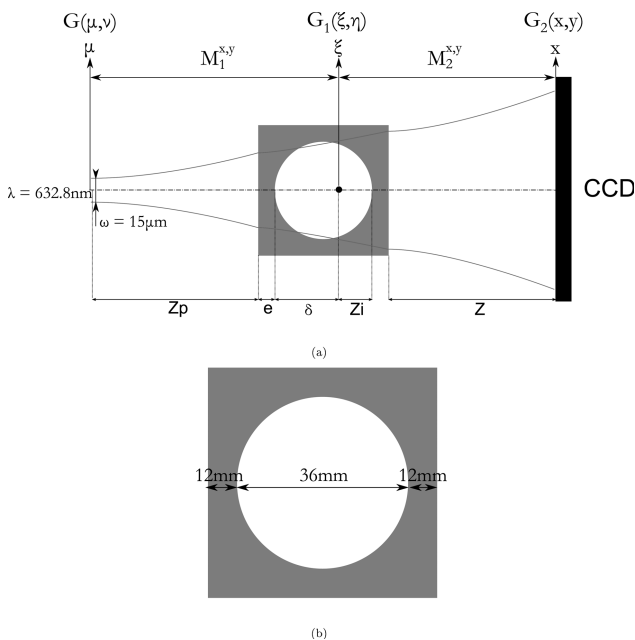


Fig. 1. (a) Schematic representation of the optical setup (not to scale). Definition of the numerical and experimental parameters. (b) Close-up of the pipe used in the simulations and experiments.

with

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$P_k = \begin{pmatrix} \frac{B_k}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{B_k}{b^2} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

This expression permits us to deal with nonsymmetrical optical systems and elliptical opaque objects [22–25]. This Gaussian decomposition is very convenient; as a matter of fact it allows us to establish an analytical expression of the diffracted pattern in the CCD plane. It also allows us to simulate holograms of 3D opaque objects whose 2D projection is elliptical or circular [26] (e.g., spheroids, fibers).

The object parameters are illustrated in Fig. 2. The coefficients a and b are the object radius within the η and ξ axis, respectively, θ is the angle between the elliptical aperture principal axis and the ξ axis. The A_k and B_k coefficients are determined by numerical resolution of the Kirchhoff equation [21]. Let $R_{\text{ell}} = b/a$ represent the particle ellipticity, where $R_{\text{ell}} = 1$ leads to the simulation of a circular particle, and $R_{\text{ell}} \neq 1$ is used to simulate elliptical particles. The particular case of the opaque fiber parallel to the pipe axis is obtained when $R_{\text{ell}} \rightarrow 0$.

In further developments, θ will be considered to be $\pi/2$. With this assumption $T(\xi, \eta)$ becomes

$$T(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^N A_k \exp \left[-\frac{B_k}{b^2} (\xi^2 + R_{\text{ell}}^2 \eta^2) \right]. \quad (7)$$

To simulate our opaque objects, N is fixed at 10. From Eq. (3), $G_2(x, y)$ is split into two integrals denoted $R(x, y)$ for the reference beam and $O(x, y)$ for the object beam so that

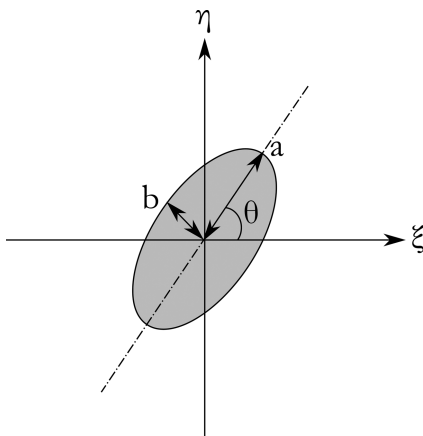


Fig. 2. Schematic representation of the object.

$$G_2(x, y) = \frac{\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} E_2 \right)}{i\lambda \sqrt{B_2^x B_2^y}} [R(x, y) - O(x, y)], \quad (8)$$

with

$$R(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2) \right] d\xi d\eta, \quad (9)$$

$$O(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2) \right] d\xi d\eta. \quad (10)$$

The functions $R(x, y)$ and $O(x, y)$ are, respectively, given by

$$R(x, y) = \frac{\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} E_1 \right)}{i\lambda \sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y K_2^x K_2^y \times \exp \left[-\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{N_x}{B_2^x} x^2 + \frac{N_y}{B_2^y} y^2 \right) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{M_x}{B_2^x} x^2 + \frac{M_y}{B_2^y} y^2 \right) \right], \quad (11)$$

$$O(x, y) = \frac{\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} E_1 \right)}{i\lambda \sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{D_2^x}{B_2^x} x^2 + \frac{D_2^y}{B_2^y} y^2 \right) \right] \sum_{k=1}^N A_k K_2^{x_{\text{eq}}} K_2^{y_{\text{eq}}} \times \exp \left[-\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{N_{x_{\text{eq}}}}{B_2^x} x^2 + \frac{N_{y_{\text{eq}}}}{B_2^y} y^2 \right) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{M_{x_{\text{eq}}}}{B_2^x} x^2 + \frac{M_{y_{\text{eq}}}}{B_2^y} y^2 \right) \right]. \quad (12)$$

The values of the different parameters of Eqs. (11) and (12) are defined in Appendix B.

After theoretical developments the intensity distribution, denoted $I(x, y)$, recorded by the CCD sensor is

$$I(x, y) = G_2(x, y) \overline{G_2(x, y)} = \frac{1}{\lambda^2 B_2^x B_2^y} (|R|^2 - 2\Re\{R\bar{O}\} + |O|^2), \quad (13)$$

where the upper bar denotes the complex conjugate and \Re is the real part. The square modulus $|R|^2$ corresponds to the directly transmitted beam, whereas $|O|^2$ is associated with the diffracted part of the beam.

To illustrate Eq. (13), the optical setup given in Fig. 1 is considered. We investigate the diffraction pattern obtained with an opaque fiber parallel to the pipe axis. From the Gaussian decomposition of the object function, opaque fibers, parallel to the pipe axis, can be obtained by taking $R_{\text{ell}} \rightarrow 0$. The value of the opaque fiber diameter is $2b = 51.8 \mu\text{m}$ and $a \rightarrow \infty$. The glass ($n_1 = 1.5$) pipe is filled with water of refractive index $n_2 = 1.33$. The beam propagates in free space over $z_p = 325 \text{ mm}$. The dimensions δ and z are fixed to 18 and 23 mm, respectively.

The image of Fig. 3 illustrates the intensity distribution of the diffracted field. The simulation is carried out by calculating the gray level of each pixel using Eq. (13). The size of the hologram is 768×576 pixels, and the pixel pitch is $11 \mu\text{m}$. To validate our simulation, an experiment that consisted of placing an opaque fiber in the pipe was performed. The hologram in Fig. 4 represents the intensity of the diffraction recorded with the CCD sensor using the same parameters as previously. This illustration reveals a good accordance between numerical and experimental diffraction patterns. To confirm this point, the transverse intensity profiles obtained from Figs. 3 and 4 are presented in Fig. 5. Here the normalized intensity I^* is plotted against the x axis. The intensity profiles are calculated by averaging the gray level value of each pixel along the η axis (direction of the fiber) over 50 rows, which are figured out by use of the rectangular selection in Fig. 4. The diffraction pattern in Fig. 4 was shifted by $75 \mu\text{m}$ along the x axis so that numerical and experimental results can be compared. This figure shows the good agreement between numerical and experimental data.

B. Case of the Thin Lenses

We have proposed a theoretical model allowing us to deal with propagation of a laser beam through a

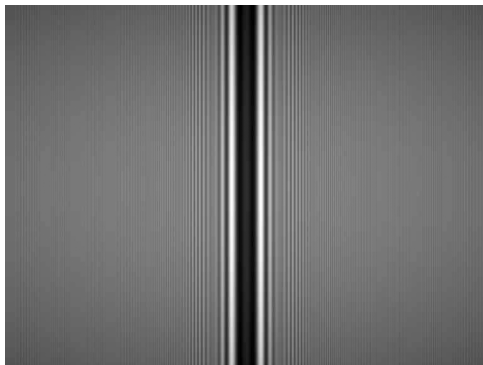


Fig. 3. Simulation of the diffraction pattern of a $51.8 \mu\text{m}$ opaque fiber parallel to the axis of a glass pipe, with $n_2 = 1.33$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $z = 23 \text{ mm}$, and $\delta = 18 \text{ mm}$.

thick pipe. In a former study, the effect of cylindrical lenses on the diffraction pattern of a particle was investigated in detail, leading to the expression of the intensity distribution in the CCD plane [10]. Using this approach we have a great opportunity to confirm our pipe model results.

In the following developments we aim to compare our thick and cylindrical pipe model with a thin cylindrical lens approach. The phase transformation due to a thin lens is [10,18]

$$\Phi(x_l, y_l) = \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{x_l^2}{f_x} + \frac{y_l^2}{f_y} \right) \right]. \quad (14)$$

Here (x_l, y_l) are the coordinates in the lens plane and $f_{x,y}$ are the focal lengths of the lens in both directions. Using the Huygens–Fresnel integral [18], the intensity distribution in the sensor plane is

$$I_{\text{thin}}(x, y) = \left| \frac{\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} E_2 \right)}{i\lambda E_2} [R_{\text{thin}}(x, y) - O_{\text{thin}}(x, y)] \right|^2. \quad (15)$$

Here, R_{thin} and O_{thin} can be expressed in a form quite similar to the amplitude distributions given in Eqs. (11) and (12).

The transverse intensity distribution profile presented in Fig. 6 shows

$$\lim_{e \rightarrow 0} I(x, y) = I_{\text{thin}}(x, y), \quad (16)$$

remembering that e represents the glass thickness. This term is contained in matrices $M_1^{x,y}$ and $M_2^{x,y}$ [see Eqs. (B1) and (B2)].

For this example $2b = 51.8 \mu\text{m}$, $a \rightarrow \infty$, $z_p = 325 \text{ mm}$, $n_2 = 1$, $\delta = 18 \text{ mm}$, and $z = 23 \text{ mm}$.

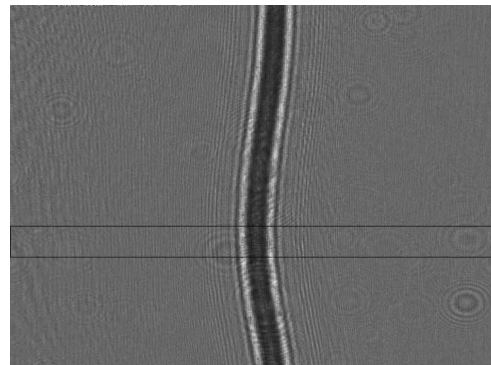


Fig. 4. Experimental diffraction pattern of a $51.8 \mu\text{m}$ opaque fiber parallel to the axis of a glass pipe, with $n_2 = 1.33$, $\lambda = 632.8 \text{ nm}$, $z = 23 \text{ mm}$, and $\delta = 18 \text{ mm}$.

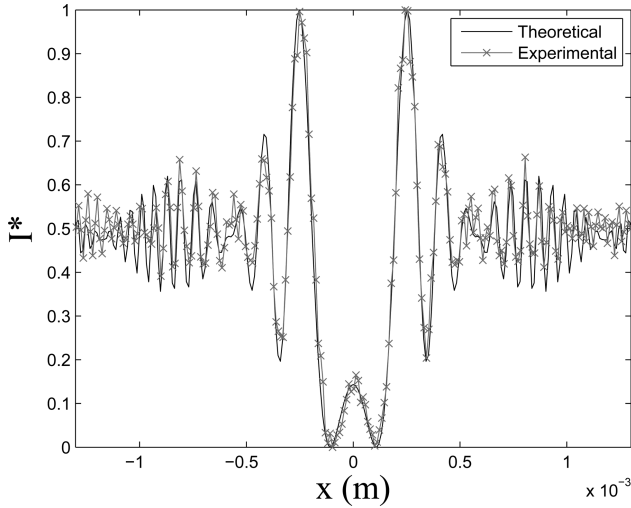


Fig. 5. Comparison of the simulated and the experimental intensity distributions.

The comparison with other parameter values leads to the same conclusion. As a result, we can consider that our results are consistent with those of Ref. [10] and that our model is versatile enough to deal with various pipe shapes and thicknesses.

We have presented a numerical model that allows us to treat thick optical systems. We now aim to reconstruct the image of the object by means of a FRFT from the calculated intensity distribution of the diffraction pattern in Eq. (13). In Section 3, the mathematical definition of the FRFT is recalled, leading to the reconstruction of holograms recorded in pipe systems.

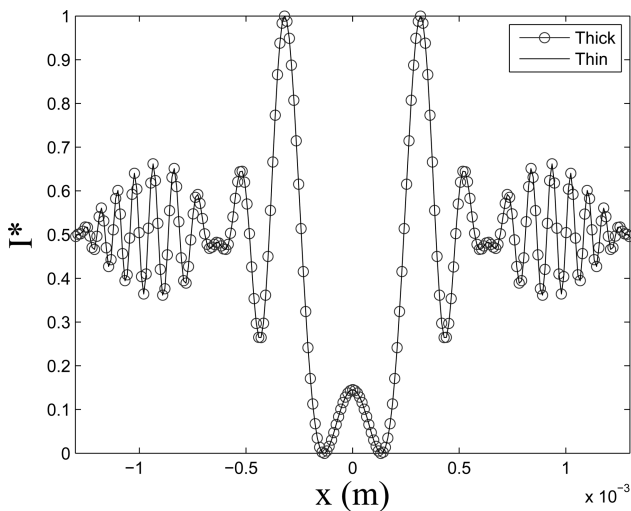


Fig. 6. Normalized intensity distribution recorded by the CCD: comparison of the thin lens and thick lens models with $e = 0$ mm. Simulation parameters are $2b = 51.8 \mu\text{m}$, $a \rightarrow \infty$, $z_p = 325$ mm, $n_2 = 1$, $\delta = 18$ mm, and $z = 23$ mm.

3. Fractional Fourier Transformation Analysis of In-Line Holograms

A. Two-Dimensional Fractional Fourier Transform

The FRFT is a generalization of the classical Fourier transform. This integral operator has numerous applications in signal processing [17]. Its mathematical expression is the following [27–29]: the FRFT of order $\alpha_x = (2\alpha_x)/\pi$ and $\alpha_y = (2\alpha_y)/\pi$ (for the x and y cross section, respectively), with $0 \leq |\alpha_x| \leq \pi/2$ and $0 \leq |\alpha_y| \leq \pi/2$, of a 2D function $I(x, y)$ is

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)](x_a, y_a) = \int_{\mathbb{R}^2} N_{\alpha_x}(x, x_a) N_{\alpha_y}(y, y_a) I(x, y) dx dy, \quad (17)$$

where the kernel of the fractional operator is defined by

$$N_{\alpha_p}(x, x_a) = C(\alpha_p) \exp\left(i\pi \frac{x^2 + x_a^2}{s_p^2 \tan \alpha_p}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi x x_a}{s_p^2 \sin \alpha_p}\right), \quad (18)$$

$$C(\alpha_p) = \frac{\exp\left(-i\left(\frac{\pi}{4} \text{sign}(\sin \alpha_p) - \frac{\alpha_p}{2}\right)\right)}{|s_p^2 \sin \alpha_p|^{1/2}}. \quad (19)$$

Here $p = x, y$. Generally, the parameter s_p is considered as a normalization constant. In our case, its value is defined from the experimental setup according to [30] $s_p^2 = N_p^{px} \cdot \delta_p^2$. The number of samples is N_p^{px} in both intensity distribution $I(x, y)$ and fractional domain. δ_p is the sampling period along the two axes of the image. $C(\alpha_p)$, which is a function of the fractional order, ensures that the energy conservation law is valid. Discretization of the FRFT kernel is performed using an orthogonal projection method proposed by Pei *et al.* [31].

B. Optimal Fractional Orders to Refocus Numerically over the Object

In our case, the numerical reconstruction can be considered as a numerical refocusing over the object [32]. To do that, the quadratic phase, denoted $\varphi = \arg(\bar{R}\bar{O})$ and contained in the term $2\Re\{R\bar{O}\}$ of Eq. (7), must be evaluated. This term is composed of a linear chirp modulated by a sum of complex Gaussian functions. Information about the distance between the CCD sensor and the object is carried by the linear chirp (B_{2xy}), whereas information about object size is carried by the modulation ($M_{x,y_{\text{eq}}}$ and $N_{x,y_{\text{eq}}}$). The optimal reconstruction of the image consists of compensating the quadratic phase terms of the intensity distribution [10].

The quadratic phase can be determined from Eqs. (11) and (12):

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{M_x - D_2^x}{B_2^x} \right) x^2 + \left(\frac{M_y - D_2^y}{B_2^y} \right) y^2 \right], \quad (20)$$

thus $\Re\{R\bar{O}\}$ can be written as

$$\Re\{R\bar{O}\} = |R\bar{O}| \cos(i\varphi). \quad (21)$$

The quadratic phase term contained in the FRFT kernel denoted φ_a is given by

$$\varphi_a = \pi \left(\frac{\cot \alpha_x}{s_x^2} x^2 + \frac{\cot \alpha_y}{s_y^2} y^2 \right). \quad (22)$$

The image reconstruction is obtained by applying the FRFT to the intensity distribution of Eq. (13):

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] \propto \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|R|^2 + |O|^2] - 2\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|R\bar{O}| \cos \varphi]. \quad (23)$$

The terms $|R|^2$ and $|O|^2$ contain no linear chirps, thus they do not influence the optimal fractional orders of reconstruction to be determined. Only the second term is useful for image reconstruction. By noting that $2 \cos \varphi = \exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)$, Eq. (23) becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] \propto & \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[|R|^2 + |O|^2] - C(\alpha_x)C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |R\bar{O}| \exp[i(\phi_a - \phi)] \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_x} \right) \right] dx dy \\ & - C(\alpha_x)C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |R\bar{O}| \exp[i(\phi_a + \phi)] \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_x} \right) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

The best hologram reconstruction is reached when one of the quadratic phase terms is brought to zero. Thus reconstruction is performed if

$$\varphi_a \pm \varphi = 0. \quad (25)$$

The optimal fractional orders α_x^{opt} and α_y^{opt} are defined from Eqs. (20), (22), and (25) and take the values

$$\begin{aligned} \alpha_x^{\text{opt}} &= \arctan \left[\mp \frac{B_2^x \lambda}{s_x^2 (M_x - D_2^x)} \right], \\ \alpha_y^{\text{opt}} &= \arctan \left[\mp \frac{B_2^y \lambda}{s_y^2 (M_y - D_2^y)} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

It should be noted that we have checked that if we consider $M_{2_{x,y}}$ to be free space propagation, leading to $B_2^{x,y} = z_i + e + z$ and $D_2^{x,y} = 1$, the expression of the optimal fractional order of Ref. [10] is recovered.

C. Numerical Simulations

The experimental setup shown in Fig. 1 is used to perform the simulations. An application of the model is illustrated in Fig. 3. Recall that we consider an opaque fiber ($R_{\text{ell}} \rightarrow 0$) $2b = 51.8 \mu\text{m}$ in width. The glass pipe is filled with water ($n_2 = 1.33$). δ and z are set to 18 and 23 mm, respectively. $Rx_1, Ry_1, Ry_2 \rightarrow \infty$ and $Rx_2 = 18 \text{ mm}$ are the first thick lens curvatures along the x and y axes. The curvature radii of the second thick lens have the same values but opposite signs. With these parameters and owing to Eq. (26), the optimal fractional orders within this configuration are

$$\alpha_x^{\text{opt}} = 0.337, \quad \alpha_y^{\text{opt}} = 0.273. \quad (27)$$

The reconstruction of the fiber with the FRFT can be seen in Fig. 7. As we can see in Fig. 7, the reconstructed image is disturbed by background fringes. This effect is due to the in-line configuration and is commonly known as the twin image effect [33].

D. Experimental Results

Since now, we have presented a method to simulate holograms in thick optical systems. Reconstruction

has been successfully performed thanks to the FRFT. In order to validate the theoretical developments and simulations, a glass pipe with curvatures $Rx_1, Ry_1, Ry_2 \rightarrow \infty$ and $Rx_2 = 18 \text{ mm}$ has been used for the experiments. Curvatures on the other side of the pipe are deduced from Rx_1, Ry_1, Rx_2 , and Ry_2 by taking negative values.

The image in Fig. 4 represents the intensity of the diffraction pattern recorded with a 768×576 pixel² CCD sensor with an $11 \mu\text{m}$ pitch. The object is a $2b = 51.8 \mu\text{m}$ opaque fiber, δ and z are approximately and respectively equal to 18 and 23 mm. Theoretical orders associated with this experiment are given by Eq. (27). To perform a FRFT on this experimental image, the FRFT orders have been adjusted to obtain

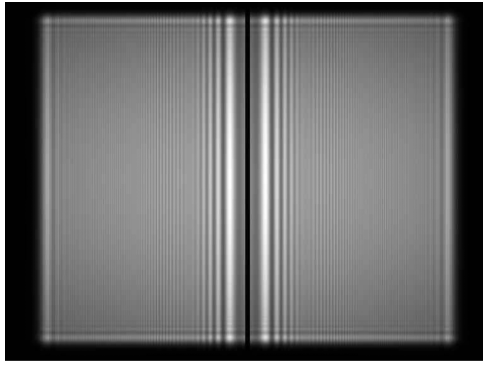


Fig. 7. Reconstruction of the fiber image from the diffraction pattern of Fig. 3 by FRFT with $a_x^{\text{opt}} = 0.337$ and $a_y^{\text{opt}} = 0.273$.

the best image of the fiber, i.e., the best contrast between the reconstructed fiber and the background. Thus, the accuracy of the fractional order is approximately 10^{-2} . The reconstruction is presented in Fig. 8, and the estimated optimal fractional orders are $a_x = 0.33$ and $a_y = 0.27$. These values are very close to the theoretical ones.

This good accordance is confirmed by the curves in Fig. 9. Here theoretical values of a_x^{opt} (solid curve) and a_y^{opt} (dashed curve) are plotted versus the distance between the pipe and the CCD sensor. Theoretical values correspond to an air-filled glass pipe, δ is fixed to 10 mm, and z varies from 0 to 140 mm. Note that, when $z = 0$, $a_{x,y} \neq 0$; this is due to the fact that, in this case, z represents the distance between the pipe and the CCD sensor instead of the distance between the object and the CCD sensor, which is considered in [10]. Experiments performed with this configuration allow us to plot estimated values of a_x^{opt} (circles) and a_y^{opt} (diamonds) on the same graph. As shown in Fig. 9, the estimated and theoretical values are closely linked. The theoretical representation presented here is therefore well adapted to these optical systems.

Up to now, we have performed reconstruction with objects for which the positions are well known. We now apply our formalism to reconstruct a hologram of latex beads. The intensity distribution of the diffracted field is represented in Fig. 10. Here, $100\ \mu\text{m}$ diameter latex beads are used, $z_p = 325\ \text{mm}$ (i.e., the propagation distance between the

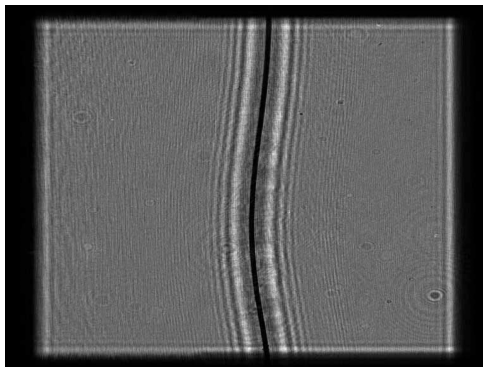


Fig. 8. Reconstruction of the fiber image from the diffraction pattern of Fig. 4 by FRFT with $a_x^{\text{opt}} = 0.33$ and $a_y^{\text{opt}} = 0.27$.

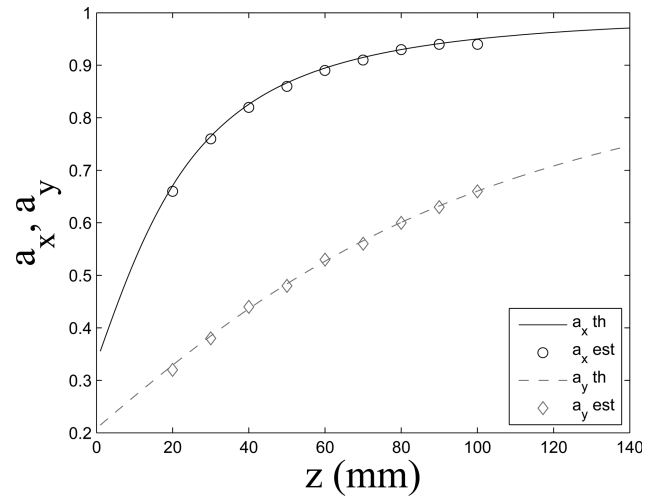


Fig. 9. Comparison between theoretical fractional orders and optimal fractional orders estimated from the experimental holograms.

source and the pipe) and $z = 23\ \text{mm}$ (i.e., the distance between the pipe and the CCD sensor). This study gives us the opportunity to compare reconstruction using our novel approach with reconstruction using a thin lens approach. As far as every parameter of the experimental setup is known, except for δ , the reconstruction process is the following: for $\delta \in [0, 36\ \text{mm}]$ we calculate the optimal FRFT orders using Eq. (26). Doing so, we are able to refocus on the particles that are in the pipe.

In Fig. 6, it is shown that when the pipe thickness e is close to zero, the two approaches are equivalent. Thus, to reconstruct the hologram of Fig. 10 with the thin lens approach, we only need to use the orders given in Eq. (26) with $e = 0$.

Comparison of the two reconstruction methods can be made with Fig. 11. Here, the reconstruction is realized with the same value of δ in both cases. We note that refocusing on the particle is impossible with the thin lens approach, whereas our thick lens approach allows for good reconstruction of the image of particles. Therefore, the thick lens formalism is well adapted to pipe flow studies: as we are able to refocus on particles in a pipe, metrologies of particle diameter are possible.

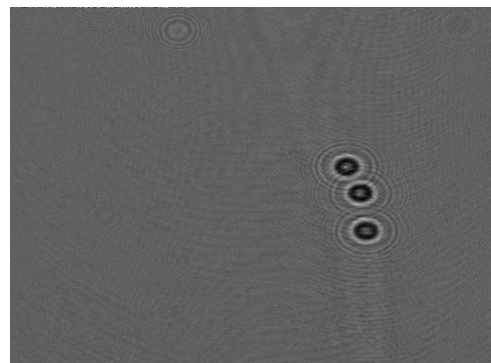


Fig. 10. Experimental diffraction pattern of $100\ \mu\text{m}$ latex beads. $z_p = 325\ \text{mm}$, $z = 23\ \text{mm}$.

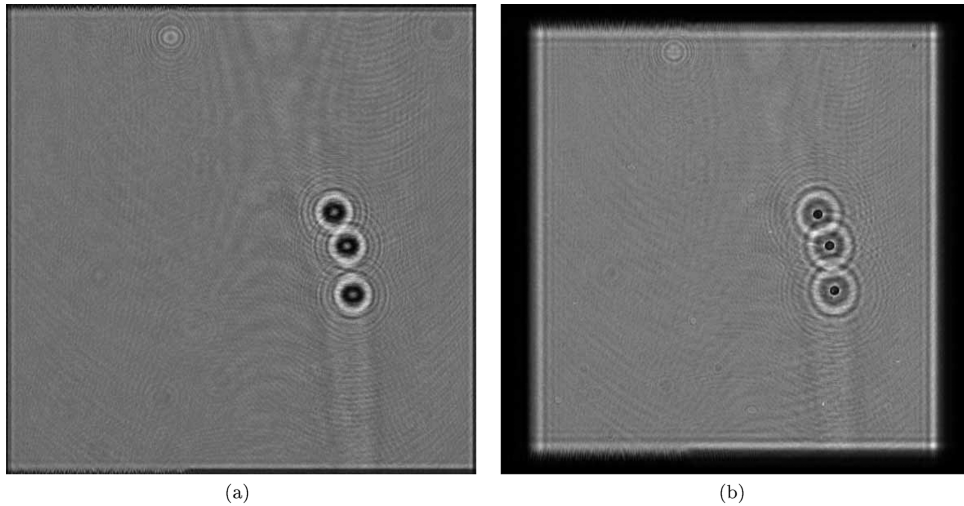


Fig. 11. Reconstruction of the image of the latex beads (a) with thin lens parameters and (b) using the thick lens approach.

4. Conclusion

We have derived an analytical expression of the scalar diffraction under Fresnel approximations in thick optical systems such as pipes. As such optical systems reveal astigmatism, the FRFT is a reliable tool to perform hologram reconstruction. Optimal fractional orders have been calculated, leading to a satisfactory reconstruction of either numerical or experimental images. Numerical experiments have been performed showing good agreement with experimental results. A comparison of thin lens and thick lens approaches has been performed, showing that the thin lens formalism is not well adapted to the study of pipe flows.

Appendix A: Transfer Matrices of the Optical System

Each part of an optical system can be represented by a matrix. Using this principle, we can build a set of matrices corresponding to our experiments (Fig. 1). After the beam-shaping step, the beam propagates in free space over a distance z_p . The associated M_{z_p} matrix is

$$M_{z_p} = \begin{pmatrix} 1 & z_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A1})$$

Then the beam is refracted at the interface between free space and glass ($n_1 = 1.5$). The curvatures along both directions are Rx_1 and Ry_1 . The M_{Rx_1} and M_{Ry_1} matrices along the x and y axes are

$$M_{Rx_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0-n_1}{Rx_1} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{Ry_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0-n_1}{Ry_1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A2})$$

After refraction, the beam propagates in glass ($n_1 = 1.5$). For this step

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A3})$$

The next step is the refraction of the beam at the interface between the glass and the medium inside the pipe (refractive index n_2). The curvature is given by Rx_2 and Ry_2 in the x and y directions, respectively,

$$M_{Rx_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{Rx_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{Ry_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{Ry_2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A4})$$

We are now in the pipe. To reach the object, we have to propagate over δ :

$$M_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A5})$$

Doing the same over z_i permits us to obtain the output of the pipe:

$$M_{z_i} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z_i}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A6})$$

After refraction at the interface (curvature Rx_3 and Ry_3) between the medium with refractive index n_2 and glass,

$$M_{Rx_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{Rx_3} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{Ry_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{Ry_3} & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A7})$$

a propagation in glass ($n_1 = 1.5$),

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A8})$$

a refraction at the interface (curvature Rx_4 and Ry_4) between glass ($n_1 = 1.5$) and free space,

$$M_{Rx_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_0}{Rx_4} & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{Ry_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1-n_0}{Ry_4} & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A9})$$

and free space propagation over z ,

$$M_z = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A10})$$

the whole ABCD system is described.

Appendix B: Amplitude Distributions $R(x,y)$ and $O(x,y)$

In Appendix A each part of our optical system has been represented with transfer matrices. Using this formalism allows us, under paraxial conditions, to deal with propagation of a Gaussian point source through the pipe. The intensity distribution of the diffraction pattern in the CCD sensor plane is determined by considering two matrix systems: $M_1^{x,y}$ and $M_2^{x,y}$.

$M_1^{x,y}$ is composed of three steps: propagation in free space over z_p , propagation through the first thick lens, and propagation in a medium of refractive index n_2 over δ . It is characterized by two transfer matrices:

$$M_1^{x,y} = M_\delta \times M_{L_1}^{x,y} \times M_{z_p} = \begin{pmatrix} A_1^{x,y} & B_1^{x,y} \\ C_1^{x,y} & D_1^{x,y} \end{pmatrix}. \quad (\text{B1})$$

$M_2^{x,y}$ is also composed of three steps: propagation in a medium of refractive index n_2 over z_i , propagation through the second thick lens, and propagation in free space over δ . The transfer matrices for this system are

$$M_2^{x,y} = M_z \times M_{L_2}^{x,y} \times M_{z_i} = \begin{pmatrix} A_2^{x,y} & B_2^{x,y} \\ C_2^{x,y} & D_2^{x,y} \end{pmatrix}. \quad (\text{B2})$$

Thanks to Eqs. (A2)–(A4), one can build the transfer matrices of the first thick lens:

$$\begin{aligned} M_{L_1}^x &= M_{R_{x_2}} \times M_e \times M_{R_{x_1}}, \\ M_{L_1}^y &= M_{R_{y_2}} \times M_e \times M_{R_{y_1}}. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

By using the same method for the second lens, we obtain

$$\begin{aligned} M_{L_2}^x &= M_{R_{x_4}} \times M_e \times M_{R_{x_3}}, \\ M_{L_2}^y &= M_{R_{y_4}} \times M_e \times M_{R_{y_3}}. \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

1. Propagation through $M_1^{x,y}$

After analytical developments of Eq. (2), the complex amplitude distribution in the object plane is

$$\begin{aligned} G_1(\xi, \eta) &= \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{\omega_{1_x}^2} + \frac{\eta^2}{\omega_{1_y}^2}\right)\right] \\ &\times \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{\xi^2}{R_{1_x}} + \frac{\eta^2}{R_{1_y}}\right)\right], \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

with $K_1^{x,y}$ given by

$$K_1^{x,y} = \left(\frac{\pi\omega^2}{1 - iA_1^{x,y}\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}}\right)^{1/2}, \quad (\text{B6})$$

where $\omega_{1_{x,y}}$ and $R_{1_{x,y}}$ are, respectively, the beam radii and the wavefront curvature in the particle plane. Their mathematical expressions are

$$\begin{aligned} \omega_{1_{x,y}} &= \left(\frac{\lambda B_1^{x,y}}{\pi\omega}\right) \left[1 + \left(A_1^{x,y}\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2\right]^{1/2}, \\ R_{1_{x,y}} &= -\frac{B_1^{x,y}}{A_1^{x,y} - \frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}}. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

2. Propagation through $M_2^{x,y}$

Propagation to the CCD sensor plane is calculated thanks to the generalized Huygens–Fresnel integral [see Eq. (3)].

3. Amplitude Distribution $R(x,y)$

R is associated with the reference wave. After analytical developments of Eq. (9), the amplitude distribution R is

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \frac{\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1\right)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y K_2^x K_2^y \\ &\times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{N_x}{B_2^x}x^2 + \frac{N_y}{B_2^y}y^2\right)\right] \\ &\times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda}\left(\frac{M_x}{B_2^x}x^2 + \frac{M_y}{B_2^y}y^2\right)\right], \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

where

$$\begin{aligned} M_{x,y} &= D_2^{x,y} + \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y}}} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y}}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \\ N_{x,y} &= \frac{\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y}}} - A_2^{x,y}\right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

$$K_2^{x,y} = \left[\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{1_{x,y}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y}}} - A_2^{x,y}\right)}\right]^{1/2}. \quad (\text{B10})$$

4. Amplitude Distribution $O(x,y)$

O is the amplitude of the diffracted wave. We define $\omega_{1_{x,y\text{eq}}}$ and $R_{1_{x,y\text{eq}}}$ as

$$\frac{1}{\omega_{1_{x\text{eq}}}^2} = \frac{1}{\omega_{1_x}^2} + \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad \frac{1}{\omega_{1_{y\text{eq}}}^2} = \frac{1}{\omega_{1_y}^2} + R_{\text{ell}}^2 \frac{\Re\{B_k\}}{b^2}, \quad (\text{B11})$$

$$\frac{1}{R_{1_{x\text{eq}}}} = \frac{1}{R_{1_x}} + \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2}, \quad \frac{1}{R_{1_{y\text{eq}}}} = \frac{1}{R_{1_y}} + R_{\text{ell}}^2 \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2} \quad (\text{B12})$$

to simplify notations. It should be noted that \Re and \Im stand for the real and the imaginary part, respectively. Thus O becomes

$$O(x, y) = \frac{\exp\left(\frac{i2\pi}{\lambda} E_1\right)}{i\lambda \sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{D_2^x}{B_2^x} x^2 + \frac{D_2^y}{B_2^y} y^2\right)\right] \sum_{k=1}^N A_k K_2^{x_{\text{eq}}} K_2^{y_{\text{eq}}} \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{N_{x_{\text{eq}}}}{B_2^x} x^2 + \frac{N_{y_{\text{eq}}}}{B_2^y} y^2\right)\right] \times \exp\left[i \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{M_{x_{\text{eq}}}}{B_2^x} x^2 + \frac{M_{y_{\text{eq}}}}{B_2^y} y^2\right)\right], \quad (\text{B13})$$

with

$$M_{x,y_{\text{eq}}} = \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y\text{eq}}}^2} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y\text{eq}}}^2} - A_2^{x,y}\right)^2}, \quad N_{x,y_{\text{eq}}} = \frac{\frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y\text{eq}}}^2} - A_2^{x,y}\right)^2}, \quad (\text{B14})$$

$$K_2^{x,y_{\text{eq}}} = \left[\frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{1 + i \frac{\pi\omega_{1_{x,y\text{eq}}}^2}{\lambda B_2^{x,y}} \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1_{x,y\text{eq}}}^2} - A_2^{x,y}\right)} \right]^{1/2}. \quad (\text{B15})$$

This work is within the scope of the Hydro-Testing Alliance (HTA) with the support of the European Commission's Sixth Framework Programme under Directorate General Research.

References

1. G. Pan and H. Meng, "Digital holography of particle fields: reconstruction by use of complex amplitude," *Appl. Opt.* **42**, 827–833 (2003).
2. M. Malek, D. Allano, S. Coëtmelec, C. Özkul, and D. Lebrun, "Digital in-line holography for three-dimensional-two-components particle tracking velocimetry," *Meas. Sci. Technol.* **15**, 699–705 (2004).

3. E. Malkiel, J. Sheng, J. Katz, and J. Strickler, "The three-dimensional flow field generated by a feeding calanoid copepod measured using digital holography," *J. Exp. Biol.* **206**, 3657–3666 (2003).
4. J. Garcia-Sucerquia, W. Xu, S. Jericho, P. Klages, M. Jericho, and H. Kreuzer, "Digital in-line holographic microscopy," *Appl. Opt.* **45**, 836–850 (2006).
5. C. S. Vikram, "Particle field holography," in *Cambridge Studies in Modern Optics* (Cambridge U. Press, 1992).
6. S. De Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, and G. Pierattini, "Correct-image reconstruction in the presence of severe anamorphism by means of digital holography," *Opt. Lett.* **26**, 974–976 (2001).
7. S. Grilli, P. Ferraro, S. De Nicola, A. Finizio, G. Pierattini, and R. Meucci, "Whole optical wavefields reconstruction by digital holography," *Opt. Express* **9**, 294–302 (2001).
8. S. De Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, and G. Pierattini, "Wave front reconstruction of Fresnel off-axis holograms with compensation of aberrations by means of phase-shifting digital holography," *Opt. Lasers Eng.* **37**, 331–340 (2002).
9. J. S. Crane, P. Dunn, B. J. Thompson, J. Z. Knapp, and J. Zeiss, "Far-field holography of ampule contaminants," *Appl. Opt.* **21**, 2548–2553 (1982).
10. F. Nicolas, S. Coëtmelec, M. Brunel, D. Allano, D. Lebrun, and A. J. Janssen, "Application of the fractional Fourier transformation to digital holography recorded by an elliptical, astigmatic Gaussian beam," *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2569–2577 (2005).
11. L. Onural and P. Scott, "Digital decoding of in-line holograms," *Opt. Eng.* **26**, 1124–1132 (1987).
12. L. Onural, "Diffraction from a wavelet point of view," *Opt. Lett.* **18**, 846–848 (1993).
13. F. Nicolas, S. Coëtmelec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography with a sub-picosecond laser beam," *Opt. Commun.* **268**, 27–33 (2006).
14. C. Palma and V. Bagini, "Extension of the Fresnel transform to ABCD systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **14**, 1774–1779 (1997).
15. A. J. Lambert and D. Fraser, "Linear systems approach to simulation of optical diffraction," *Appl. Opt.* **37**, 7933–7939 (1998).
16. H. T. Yura and S. G. Hanson, "Optical beam wave propagation through complex optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 1931–1948 (1987).
17. H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing* (Wiley, 2001).
18. J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, 3rd ed. (Roberts and Company, 2005).
19. A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, 1986).
20. J. J. Wen and M. Breazeale, "Gaussian beam functions as a base function set for acoustical field calculations," *Proc. IEEE Ultrason. Symp.* 1137–1140 (1987).
21. J. J. Wen and M. Breazeale, "A diffraction beam expressed as the superposition of Gaussian beams," *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 1752–1756 (1988).
22. C. Zheng, D. Zhao, and X. Du, "Analytical expression of elliptical Gaussian beams through nonsymmetric systems with an elliptical aperture," *Optik (Jena)* **117**, 296–298 (2006).
23. X. Du and D. Zhao, "Propagation of centered elliptical Gaussian beams in apertured and nonsymmetrical optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 625–631 (2006).
24. X. Du and D. Zhao, "Propagation of elliptical Gaussian beams in apertured and misaligned optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A* **23**, 1946–1950 (2006).
25. X. Du and D. Zhao, "Propagation of elliptical Gaussian beams modulated by an elliptical annular aperture," *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 444–450 (2007).

26. F. Slimani, G. Grehan, G. Gouesbet, and D. Allano, "Near-field Lorenz–Mie theory and its application to microholography," *Appl. Opt.* **23**, 4140–4148 (1984).
27. A. C. McBride and F. H. Kerr, "On Namias's fractional Fourier transforms," *IMA J. Appl. Math.* **39**, 159–175 (1987).
28. V. Namias, "The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics," *J. Inst. Math. Appl.* **25**, 241–265 (1980).
29. A. W. Lohmann, "Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 2181–2186 (1993).
30. D. Mas, J. Pérez, C. Hernández, C. Vázquez, J. J. Miret, and C. Illueca, "Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems," *Opt. Commun.* **227**, 245–258 (2003).
31. S.-C. Pei, M.-H. Yeh, and C.-C. Tseng, "Discrete fractional Fourier transform based on orthogonal projections," *IEEE Trans. Signal Process.* **47**, 1335–1348 (1999).
32. N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, and A. J. E. M. Janssen, "Digital in-line holography with an elliptical, astigmatic Gaussian beam: wide-angle reconstruction," *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1459–1466 (2008).
33. D. Gabor, "Microscopy by reconstructed wave-fronts," *Proc. R. Soc. London Ser. A* **197**, 454–487 (1949).

Determination of 3D-region of interest using digital in-line holography with astigmatic Gaussian beams

N. Verrier

verrier@coria.fr

S. Coëtmellec

coetmellec@coria.fr

M. Brunel

D. Lebrun

Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Av. de l'Université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Av. de l'Université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Av. de l'Université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

Groupe d'Optique et d'Optoélectronique, UMR-6614 CORIA, Av. de l'Université, 76801 Saint-Etienne du Rouvray cedex, France

An experimental method to visualize a 3D-region of interest (ROI) by means of an astigmatic Gaussian beam is proposed. This method allows to reduce the amount of image planes to be reconstructed thus saving computational time. ROI determination is performed without any computational step: particles that are located in the ROI can be distinguished from the others according to the hyperbolic shape of their diffraction pattern. Theoretical location of the ROI is determined by using the ABCD approach proposed in a previous paper [1]. Experimental results are presented. [DOI: 10.2971/jeos.2009.09038]

Keywords: digital holography, astigmatic Gaussian beams, region of interest

1 INTRODUCTION

Digital holography is a recognized optical technique used in a wide range of experiments. For instance fluid mechanics domain benefits from the 3D information given by a digital hologram [2]. Theoretical concepts governing image formation (e.g. influence of pixel mapping, influence of focus, etc.) are now well understood [3]. However, due to its large depth of field, this technique makes it difficult to accurately locate the object along the optical axis without tedious numerical calculation. Depth of focus reduction has been successfully performed in particle field holography [4]. Nevertheless *a priori* knowledge on the particle diameter is needed. Bringing objects to focus is therefore a challenging problem. Automated procedures based on the object spectral, complex or amplitude [5]–[7] signature allow to determine the best focus, making fully automatic hologram treatment possible [8]. Nonetheless these procedures involve heavy calculation (mainly because of the hologram reconstruction) that might be a severe handicap when dealing with a large amount of objects in the volumes. Information about the size and position of objects within the studied volume can be obtained without hologram reconstruction [9, 10], but these methods are either limited by the object density in the sample or give a mean information. One way to overcome this problem is to select only a limited zone to be treated in the total volume. Li et al. propose a numerical method to extract 3D-ROI from digital holograms [11]. By using a fast focus detection algorithm, summing reconstruction kernels at focus positions and segmenting the resulting hologram, the authors manage to extract 3D-ROI information without bulk hologram reconstruction.

Here, we suggest to use digital in-line holography with astigmatic Gaussian beams to select a 3D-ROI, in a pipe flow, directly from the hologram, without any computational step. Recently, an analytical solution of the scalar diffraction produced by an opaque disk, centered on the optical axis, under elliptical astigmatic Gaussian illumination, within the framework of Fresnel approximation, has been proposed [12]. Astigmatism is controlled using a plano-convex cylindrical lens, and particle-to-beam waist position can be determined using the produced diffraction pattern shape. Information about the diffracting object is then easily retrieved using the fractional Fourier transformation (FRFT). These calculations remain valid when we consider an object which not centered on the optical axis [13], making it possible to study flows under astigmatic illumination. Flow study in presence of astigmatism has been successfully performed [1]. Astigmatism is here brought by a cylindrical plano-concave glass pipe. Using Fresnel integral combined with an ABCD formalism, the authors managed to simulate holograms with a good agreement with experimental data. Therefore, it may be possible to control astigmatism within the pipe and above all, to select particles to be reconstructed according to their diffraction pattern shape [1, 12, 13].

2 THEORETICAL LOCATION OF ROI

To perform the particle selection, let us consider the experimental set-up of Figure 1. The distance between the pinhole and the pipe is denoted by z_p . After passing through the clas-

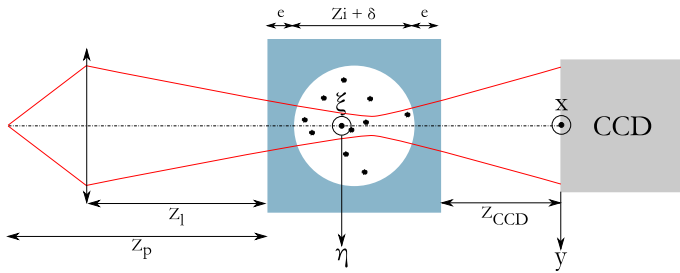


FIG. 1 Schematic representation of the optical set-up (not to scale). Definition of the numerical and experimental parameters.

sical 50 mm focal length lens, the incident beam propagates to the pipe over a distance denoted z_l . The pipe is modeled as two thick lenses. Their thickness is denoted by e . The opaque objects are located between these two lenses: at a distance δ from the first thick lens and at a distance z_i from the second lens. The 1280×1024 CCD sensor, with a $6.7 \mu\text{m}$ pixel pitch, is located at a distance z_{CCD} from the pipe and records the intensity distribution of the diffraction pattern. Using the generalized Huygens-Fresnel integral, the intensity distribution in the CCD sensor plane is found to be [1]

$$I(x, y) = \frac{1}{\lambda^2 B_2^x B_2^y} \left(|R|^2 - 2\Re\{R\bar{O}\} + |O|^2 \right). \quad (1)$$

Here, R is associated with the reference beam and O with the diffracted part of the beam. Their mathematical expressions are

$$R(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^x} \left(A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2 \right) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^y} \left(A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2 \right) \right] d\xi d\eta \quad (2)$$

and

$$O(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) T(\xi, \eta) \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^x} \left(A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2 \right) \right] \times \exp \left[i \frac{\pi}{\lambda B_2^y} \left(A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2 \right) \right] d\xi d\eta. \quad (3)$$

Here, $G_1(\xi, \eta)$ denotes the amplitude distribution in the object plane and $T(\xi, \eta)$ is the transfer function of the object. Further explanations about $A_2^{x,y}$, $B_2^{x,y}$, $D_2^{x,y}$, and $I(x, y)$ are given in [1] and in Appendices A and B.

In the set-up of Figure 1, the astigmatism is brought by the cylindrical shape of the pipe. In this case, divergence of the beam is different along ξ - and η -direction. In order to control the astigmatism of the experimental set-up, the beam is focalized in the pipe. Due to the pipe geometry, the beam is successively focused in two waists in the studied volume; one waist along ξ -direction and the other along η -direction. The graph of Figure 2 illustrates this fact. Here, the evolution of the $1/e$ beam width in both directions $\omega_{\xi, \eta}$ is plotted versus the depth position δ in the pipe. Simulation parameters are the following: $z_p = 250$ mm, $z_l = 37$ mm. The pipe considered is a glass made ($n_1 = 1.5$) plano-concave cylinder and is $z_i + \delta = 36$ mm in internal diameter. Its thickness along the optical axis is

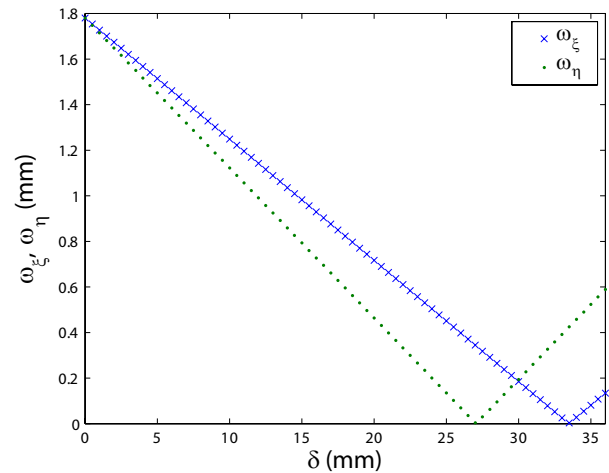


FIG. 2 Evolution of the beam width against position in the pipe. The ROI is located between the beam waists.

$e = 12$ mm and it is filled with water ($n_2 = 1.33$). The fact that the beam presents two waists in the pipe is clearly observable from Figure 2; each waist corresponds to a minimum of the $\omega_{\xi, \eta}$ against δ curve. The sagittal and tangential foci are located at $\delta = 28$ mm and $\delta = 33$ mm respectively. For $\delta = 30$ mm the two curves intersect, this is the medial focus. It should be noticed that between the sagittal and tangential foci, the wavefront curvature radii exhibit opposite signs in both directions. Thus objects located within this zone will lead to hyperbolic shaped diffraction patterns, whereas particles located apart from these foci will produce elliptical shaped diffraction patterns [12]. It is hereby possible to distinguish objects located between the two beam waists of objects located elsewhere. In other words, objects located between sagittal and tangential focus will belong to the ROI, whereas other objects will not be processed. Therefore, knowing the $1/e$ beam radii ($\omega_{\xi, \eta}$) within the pipe, it is therefore easy to estimate the ROI volume. The ROI spread over 3.7 mm^3 whereas the recorded volume, which corresponds to the amount of fluid which is illuminated by the beam, is approximately 884 mm^3 . We would like to draw attention on the fact that adjusting parameters of the beam within the pipe will modify the ROI volume or the ROI position. For instance, modifying the lens position or focal distance will result in modifying size and position of the ROI.

Theoretical aspects about the ROI determination have been presented. Using the beam astigmatism gives the opportunity to select a small region within which the hologram will be reconstructed. As we aim to reconstruct holograms in the presence of astigmatism, the fractional Fourier transform (FRFT) will be applied to the intensity distribution given in Eq. (1). As a matter of fact, this operator is well adapted to this situation [13]. In Section 3, mathematical expression of the FRFT is recalled and optimal reconstruction parameters are derived.

3 FRACTIONAL FOURIER TRANSFORM ANALYSIS OF THE RECORDED HOLOGRAMS

3.1 Two-dimensional Fractional Fourier Transform

The FRFT is a generalization of the classical Fourier transform. This integral operator is widely applied in signal processing [14]. The FRFT of order $a_x = (2\alpha_x)/\pi$ and $a_y = (2\alpha_y)/\pi$ (for x and y cross section respectively), with $0 \leq |\alpha_x| \leq \pi/2$ and $0 \leq |\alpha_y| \leq \pi/2$, of a two dimensional function $I(x, y)$ is given by,

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)](x_a, y_a) = \int_{\mathbb{R}^2} N_{\alpha_x}(x, x_a) N_{\alpha_y}(y, y_a) I(x, y) dx dy \quad (4)$$

where the kernel of the fractional operator is defined by

$$N_{\alpha_p}(x, x_a) = C(\alpha_p) \exp\left(i\pi \frac{x^2 + x_a^2}{s_p^2 \tan \alpha_p}\right) \exp\left(-\frac{i2\pi x_a x}{s_p^2 \sin \alpha_p}\right) \quad (5)$$

and

$$C(\alpha_p) = \frac{\exp(-i(\frac{\pi}{4} \text{sign}(\sin \alpha_p) - \frac{\alpha_p}{2}))}{|s_p^2 \sin \alpha_p|^{1/2}}. \quad (6)$$

Here, $p = x, y$. The coefficient $C(\alpha_p)$ ensure the energy conservation in every fractional domains. Generally, s_p is considered as a normalization constant, but its value can be linked to the experimental set-up [13]. In this case, $s_p^2 = N_p^{px} \times \delta_p^2$. The number of samples is N_p^{px} in both intensity distribution $I(x, y)$ and fractional domain. δ_p is the sampling period along the two axes of the image.

3.2 Optimal fractional orders

FRFT reconstruction consists in canceling quadratic phases contained by the intensity distribution of the hologram. The intensity distribution is given Eq. (1). We can notice that the terms $|R|^2$ and $|O|^2$ do not contain any quadratic phases. Thus, they will not be treated by FRFT. The quadratic phases to be analyzed are contained in $\Re\{R\bar{O}\}$. As revealed by Eqs. (35) and (40), this term is composed of a linear chirp modulated by a sum of complex Gaussian functions. Compensating this chirp will result in reconstructing the hologram.

The quadratic phases can be determined from Eqs. (35) and (40),

$$\varphi = \frac{\pi}{\lambda} \left[\left(\frac{M_x - D_2^x}{B_2^x} \right) x^2 + \left(\frac{M_y - D_2^y}{B_2^y} \right) y^2 \right] \quad (7)$$

thus $\Re\{R\bar{O}\}$ can be written as

$$\Re\{R\bar{O}\} = |R\bar{O}| \cos(\varphi). \quad (8)$$

The quadratic phase term contained in the FRFT kernel, denoted φ_a , is given by

$$\varphi_a = \pi \left(\frac{\cot \alpha_x}{s_x^2} x^2 + \frac{\cot \alpha_y}{s_y^2} y^2 \right) \quad (9)$$

To reconstruct the hologram, the FRFT is applied to the intensity distribution given Eq. (1),

$$\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] \propto \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y} \left[|R|^2 + |O|^2 \right] - 2\mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y} \left[|R\bar{O}| \cos \varphi \right]. \quad (10)$$

We would like to draw attention on the fact that the terms $|R|^2$ and $|O|^2$ contain no linear chirps. They will not influence the optimal orders to be determined. Only the second term will be useful for image reconstruction.

By noting that $2 \cos \varphi = \exp(-i\varphi) + \exp(i\varphi)$, Eq. (10) becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y}[I(x, y)] \propto & \mathcal{F}_{\alpha_x, \alpha_y} \left[|R|^2 + |O|^2 \right] \\ & - \left\{ C(\alpha_x) C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |R\bar{O}| \exp[i(\varphi_a - \varphi)] \right. \\ & \times \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_y} \right) \right] dx dy \left. \right\} \\ & - \left\{ C(\alpha_x) C(\alpha_y) \int_{\mathbb{R}^2} |R\bar{O}| \exp[i(\varphi_a + \varphi)] \right. \\ & \times \exp \left[-i2\pi \left(\frac{x_a x}{s_x^2 \sin \alpha_x} + \frac{y_a y}{s_y^2 \sin \alpha_y} \right) \right] dx dy \left. \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Reconstruction of the hologram is performed when one of the quadratic phase terms is brought to zero. In this case,

$$\varphi_a \pm \varphi = 0. \quad (12)$$

Thus, the optimal fractional orders α_x^{opt} and α_y^{opt} defined from Eqs. (7), (9) and (12) take the values

$$\begin{aligned} \alpha_x^{opt} &= \arctan \left[\mp \frac{B_2^x \lambda}{s_x^2 (M_x - D_2^x)} \right] \\ \alpha_y^{opt} &= \arctan \left[\mp \frac{B_2^y \lambda}{s_y^2 (M_y - D_2^y)} \right]. \quad (13) \end{aligned}$$

4 EXPERIMENTAL RESULTS

To illustrate the interest of our idea, an experimental hologram is recorded. The optical set-up of Figure 1 is considered. The distance between the 15 μm pinhole and the pipe is fixed to $z_p = 250$ mm and a 50 mm focal length lens is positioned $z_l = 37$ mm before the pipe. The glass made pipe is filled with water and illuminated with an He-Ne laser ($\lambda = 632.8$ nm). 50 μm in diameter latex beads are injected in the ROI and the intensity distribution produced by these is recorded on a CCD sensor without objective lens. Distance between the CCD sensor and the pipe is $z_{CCD} = 18$ mm. According to the experimental parameters, the ROI will be located between $\delta = 28$ mm and $\delta = 33$ mm (position of the sagittal and tangential focus respectively). The intensity distribution obtained under these conditions is presented in Figure 3. We can realize from the hologram that elliptical and hyperbolic fringe patterns are simultaneously observed. Elliptical patterns are due to particles that are located outside the ROI, i.e. $\delta \in [0 \text{ mm}; 28 \text{ mm}[\cap] 33 \text{ mm}; 36 \text{ mm}]$, whereas hyperbolic

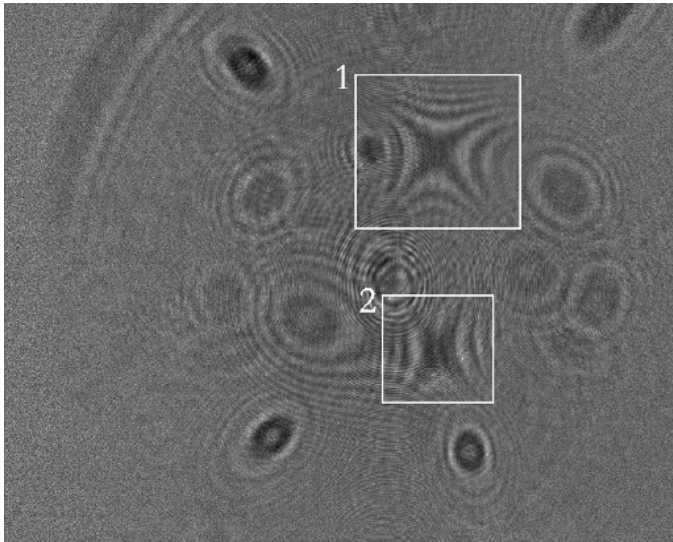


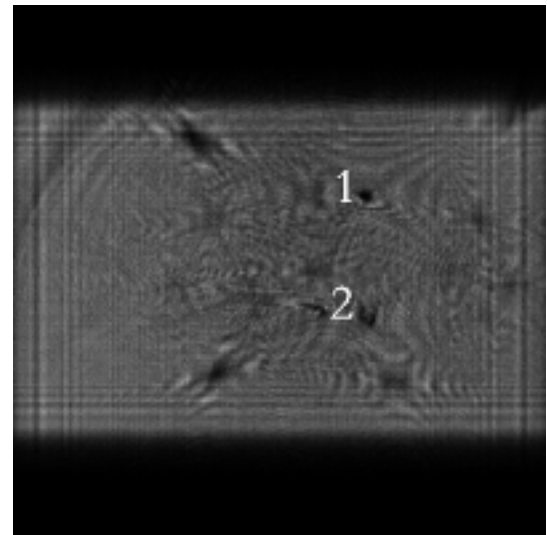
FIG. 3 Experimental hologram of $50\ \mu\text{m}$ latex beads recorded with $z_p = 250\ \text{mm}$, $z_l = 37\ \text{mm}$, and $z_{\text{CCD}} = 18\ \text{mm}$. Two particles are in the ROI.

shaped diffraction patterns are due to particles that are in the ROI, i.e $\delta \in [28\ \text{mm}; 33\ \text{mm}]$. Thus by simply looking at the hologram of Figure 3, without using complex shape recognition procedure, we can notice that two particles (labeled "1" and "2") are located in the ROI. Information about these two particles can be retrieved by reconstructing the hologram only in the ROI, thus reducing the amount of data to be processed.

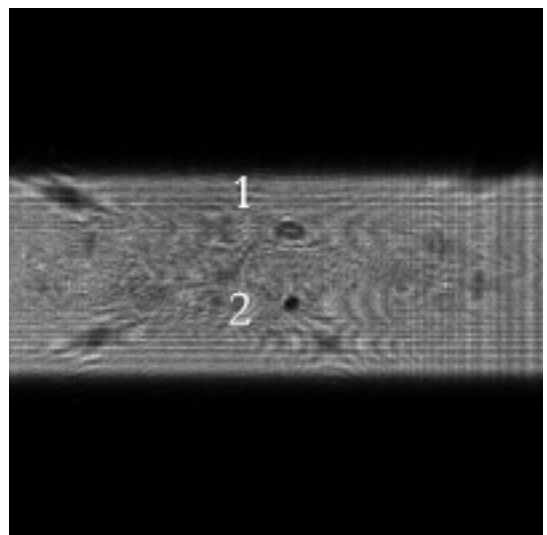
Reconstruction of this hologram can be performed using FRFT [14]. In fact, FRFT is a really efficient reconstruction operator when dealing with astigmatic holograms [1, 12, 13]. Numerical refocusing on particle "1" is proposed Figure 4(a). Reconstructed image of the particle is obtained by adjusting the fractional orders of the FRFT within the range defined, from Eq. (13), by the ROI position. Particle is considered in focus when the best contrast (determined by plotting intensity profiles along particle axis) between the image of the latter and the background is reached. To refocus on particle "1", a FRFT of orders $a_x = 0.71$, $a_y = -0.8$ is performed. It should be noted that the FRFT orders have opposite signs. This is due to the fact that, within the ROI, wavefront curvature radii exhibit opposite signs. Refocusing on particle "2" (see Figure 4(b)) is possible with $a_x = 0.61$, $a_y = -0.88$.

5 CONCLUSION

In summary, we have proposed and demonstrated a convenient method to select a 3D-ROI within an hologram. This achievement is of great interest as it does not need bulk computational treatment; the 3D-ROI selection is experimentally performed by using the astigmatic properties of pipe flows. Working within a limited 3D-ROI is a good way to reduce the amount of data to be treated or to refine hologram processing in a limited zone. Experimental implementation has been performed showing the possibility of optically selecting a $3.7\ \text{mm}^3$ ROI within a $884\ \text{mm}^3$ studied volume. Finally, particles contained in the ROI have been reconstructed using the fractional Fourier transform.



(a)



(b)

FIG. 4 FRFT reconstruction of Figure 3 with (a) $a_x = 0.71$ and $a_y = -0.8$ (b) $a_x = 0.61$ and $a_y = -0.88$

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by the Agence Nationale de la Recherche (Edition 2007 du programme BLANC: "VIVE3D - Vélométrie Instantanée Volumique pour les Ecoulements tridimensionnels").

A TRANSFER MATRICES OF THE OPTICAL SYSTEM

Each part of an optical system can be represented by a matrix. Using this principle, we can build a set of matrices corresponding to our experiment (Figure 1). After passing through the pinhole, the beam propagates in free space over a distance

$z_p - z_l$. The associated $M_{z_p - z_l}$ matrix is

$$M_{z_p - z_l} = \begin{pmatrix} 1 & z_p - z_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

The beam is then focalized by a thin spherical lens. The focal distance of this lens is denoted by f . The associated transfer matrix M_{lens} is

$$M_{lens} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n_0}{f} & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

After the thin lens, the beam propagates, over a distance z_l , to the pipe. The matrix M_{z_l} , associated with this step, is given by

$$M_{z_l} = \begin{pmatrix} 1 & z_l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Then the beam is refracted at the interface between free space and glass ($n_1 = 1.5$). The curvatures along both directions are R_{x1} and R_{y1} . $M_{R_{x1}}$, $M_{R_{y1}}$ matrices along x and y axis are

$$M_{R_{x1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0 - n_1}{R_{x1}} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{R_{y1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_0 - n_1}{R_{y1}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

After refraction, the beam propagates in glass ($n_1 = 1.5$). For this step,

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Next step is the refraction of the beam at the interface between glass and the medium inside the pipe (refractive index n_2). Curvatures R_{x2} and R_{y2} in x and y direction are given by

$$M_{R_{x2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R_{x2}} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{R_{y2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_2}{R_{y2}} & 1 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

We are now in the pipe. To reach the object, we have to propagate over δ ,

$$M_\delta = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\delta}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Doing the same over z_i permit us to reach the output of the pipe,

$$M_{z_i} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{z_i}{n_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

After a refraction at the interface (curvatures R_{x3} and R_{y3}) between the medium with refractive index n_2 and glass,

$$M_{R_{x3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{R_{x3}} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{R_{y3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2 - n_1}{R_{y3}} & 1 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

a propagation in glass ($n_1 = 1.5$),

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & \frac{e}{n_1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

a refraction at the interface (curvature R_{x4} and R_{y4}) between glass ($n_1 = 1.5$) and free space,

$$M_{R_{x4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_0}{R_{x4}} & 1 \end{pmatrix} \quad M_{R_{y4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_1 - n_0}{R_{y4}} & 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

and free space propagation over z_{CCD} ,

$$M_{z_{CCD}} = \begin{pmatrix} 1 & z_{CCD} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

the whole ABCD system is described.

B AMPLITUDE DISTRIBUTIONS $R(x, y)$ AND $O(x, y)$

In Appendix A each part of our optical system has been represented with transfer matrices. Using this formalism allows us, under paraxial conditions, to deal with propagation of a Gaussian point source through the pipe.

Intensity distribution of the diffraction pattern in the CCD sensor plane is determined by considering two matrix systems $M_1^{x,y}$ and $M_2^{x,y}$.

$M_1^{x,y}$ is composed of five steps; propagation in free space over $z_l - z_p$, beam focalization, propagation in free space over z_l , propagation through the first thick lens, propagation in a medium of refractive index n_2 over δ . These steps are characterized by two transfer matrices,

$$\begin{aligned} M_1^{x,y} &= M_\delta \times M_{L_1}^{x,y} \times M_{z_l} \times M_{lens} \times M_{z_p - z_l} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{x,y} & B_1^{x,y} \\ C_1^{x,y} & D_1^{x,y} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

$M_2^{x,y}$ is also composed of three steps; propagation in a medium of refractive index n_2 over z_i , propagation through the second thick lens, propagation in free space over z . Transfer matrices for this system are,

$$M_2^{x,y} = M_{z_{CCD}} \times M_{L_2}^{x,y} \times M_{z_i} = \begin{pmatrix} A_2^{x,y} & B_2^{x,y} \\ C_2^{x,y} & D_2^{x,y} \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Thanks to Eqs. (17)–(19) one can build the transfer matrices of the first thick lens,

$$\begin{aligned} M_{L_1}^x &= M_{R_{x2}} \times M_e \times M_{R_{x1}} \\ M_{L_1}^y &= M_{R_{y2}} \times M_e \times M_{R_{y1}}. \end{aligned} \quad (28)$$

By using the same method for the second lens, we obtain

$$\begin{aligned} M_{L_2}^x &= M_{R_{x4}} \times M_e \times M_{R_{x3}} \\ M_{L_2}^y &= M_{R_{y4}} \times M_e \times M_{R_{y3}}. \end{aligned} \quad (29)$$

B.1 Propagation through $M_1^{x,y}$

Propagation through $M_1^{x,y}$ is calculated using the generalized Huygens-Fresnel integral,

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} \int_{\mathbb{R}^2} G(\mu, \nu) \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^x} (A_1^x \mu^2 - 2\xi\mu + D_1^x \xi^2)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_1^y} (A_1^y \nu^2 - 2\eta\nu + D_1^y \eta^2)\right] d\mu d\nu. \quad (30)$$

After analytical developments of Eq. (30), the complex amplitude distribution in the object plane is

$$G_1(\xi, \eta) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[-\left(\frac{\xi^2}{\omega_{1x}^2} + \frac{\eta^2}{\omega_{1y}^2}\right)\right] \times \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\xi^2}{R_{1x}} + \frac{\eta^2}{R_{1y}}\right)\right] \quad (31)$$

with $K_1^{x,y}$ given by

$$K_1^{x,y} = \left(\frac{\pi\omega^2}{1 - iA_1^{x,y} \frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}}\right)^{1/2}, \quad (32)$$

$\omega_{1x,y}$ and $R_{1x,y}$ are respectively the beam radii and the wavefront curvature in the particle plane. Their mathematical expressions are

$$\omega_{1x,y} = \left(\frac{\lambda B_1^{x,y}}{\pi\omega}\right) \left[1 + \left(A_1^{x,y} \frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2\right]^{1/2} \\ R_{1x,y} = -B_1^{x,y} \left[D_1^{x,y} - \frac{A_1^{x,y} \left(\frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2}{1 + \left(A_1^{x,y} \frac{\pi\omega^2}{\lambda B_1^{x,y}}\right)^2}\right]^{-1}. \quad (33)$$

B.2 Propagation through $M_2^{x,y}$

Propagation to the CCD sensor plane is given by the following integral,

$$G_2(x, y) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}E_2)}{i\lambda\sqrt{B_2^x B_2^y}} \int_{\mathbb{R}^2} G_1(\xi, \eta) [1 - T(\xi, \eta)] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^x} (A_2^x \xi^2 - 2x\xi + D_2^x x^2)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda B_2^y} (A_2^y \eta^2 - 2y\eta + D_2^y y^2)\right] d\xi d\eta. \quad (34)$$

The integral of Eq. (34) can be split into two integrals R and O associated with the reference beam and the diffracted beam respectively. Their expressions are given in Eqs. (2) and (3).

B.2.1 Amplitude distribution $R(x, y)$

R is associated with the reference wave. After analytical developments of Eq. (2), the amplitude distribution R is

$$R(x, y) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y K_2^x K_2^y \times \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{N_x}{B_2^x} x^2 + \frac{N_y}{B_2^y} y^2\right)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{M_x}{B_2^x} x^2 + \frac{M_y}{B_2^y} y^2\right)\right] \quad (35)$$

where

$$M_{x,y} = D_2^{x,y} + \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)^2} \\ N_{x,y} = \frac{\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)^2} \quad (36)$$

and

$$K_2^{x,y} = \left[\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{1 + i\frac{\pi\omega_{1x,y}^2}{\lambda B_2^{x,y}} \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y}} - A_2^{x,y}\right)}\right]^{1/2}. \quad (37)$$

B.2.2 Amplitude distribution $O(x, y)$

O is the amplitude of the diffracted wave. We define $\omega_{1x,y,eq}$ and $R_{1x,y,eq}$

$$\frac{1}{\omega_{1x,eq}^2} = \frac{1}{\omega_{1x}^2} + \frac{\Re\{B_k\}}{b^2} \\ \frac{1}{\omega_{1y,eq}^2} = \frac{1}{\omega_{1y}^2} + R_{ell}^2 \frac{\Re\{B_k\}}{b^2} \quad (38)$$

and

$$\frac{1}{R_{1x,eq}} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2} \\ \frac{1}{R_{1y,eq}} = \frac{1}{R_{1y}} + R_{ell}^2 \frac{\Im\{B_k\}\lambda}{\pi b^2} \quad (39)$$

to simplify notations. It should be noted that \Re and \Im stand for real and imaginary part respectively. Thus O becomes

$$O(x, y) = \frac{\exp(i\frac{2\pi}{\lambda}E_1)}{i\lambda\sqrt{B_1^x B_1^y}} K_1^x K_1^y \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{D_2^x}{B_2^x} x^2 + \frac{D_2^y}{B_2^y} y^2\right)\right] \times \sum_{k=1}^N A_k K_2^{x,eq} K_2^{y,eq} \exp\left[-\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{N_{x,eq}}{B_2^x} x^2 + \frac{N_{y,eq}}{B_2^y} y^2\right)\right] \times \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{M_{x,eq}}{B_2^x} x^2 + \frac{M_{y,eq}}{B_2^y} y^2\right)\right] \quad (40)$$

with

$$M_{x,y_{eq}} = \frac{\left(\frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)^2}$$

$$N_{x,y_{eq}} = \frac{\frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}}{1 + \left(\frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}}\right)^2 \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)^2} \quad (41)$$

and

$$K_2^{x,y_{eq}} = \left[\frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{1 + i \frac{\pi\omega_{1x,y_{eq}}^2}{\lambda B_2^{x,y}} \left(\frac{B_2^{x,y}}{R_{1x,y_{eq}}} - A_2^{x,y}\right)} \right]^{1/2}. \quad (42)$$

References

- [1] N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography in thick optical systems: application to visualization in pipes" *Appl. Opt.* **47**, 4147–4157 (2008).
- [2] N. Salah, G. Godard, D. Lebrun, P. Paranthoën, D. Allano, and S. Coëtmellec, "Application of multiple exposure digital in-line holography for particle tracking in a Bénard-von Kármán vortex flow" *Meas. Sci. Technol.* **19**, 074001 (2008).
- [3] P. Picart, and J. Leval, "General theoretical formulation of image formation in digital Fresnel holography" *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1744–1761 (2008).
- [4] W. Yang, A. B. Kostinski, and R. A. Shaw, "Depth-of-focus reduction for digital in-line holography of particle fields" *Opt. Lett.* **30**, 1303–1305 (2005).
- [5] W. Li, N. C. Loomis, Q. Hu, and C. S. Davis, "Focus detection from digital in-line holograms based on spectral l_1 norms" *J. Opt. Soc. Am. A* **24**, 3054–3062 (2007).
- [6] J. de Jong, and H. Meng, "Digital holographic particle validation via complex wave" *Appl. Opt.* **46**, 7652–7661 (2007).
- [7] F. Dubois, C. Schockaert, N. Callens, and C. Yourassowsky, "Focus plane detection criteria in digital holography microscopy by amplitude analysis" *Opt. Express* **14**, 5895–5908 (2006).
- [8] E. Malkiel, J. N. Abras, and J. Katz, "Automated scanning and measurements of particle distributions within a holographic reconstructed volume" *Meas. Sci. Technol.* **15**, 601–612 (2004).
- [9] L. Onural, and M. T. Özgen, "Extraction of three-dimensional object-location information directly from in-line holograms using Wigner analysis" *J. Opt. Soc. Am. A* **9**, 252–260 (1992).
- [10] L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet, and D. Jeulin, "Direct extraction of the mean particle size from a digital hologram" *Appl. Opt.* **45**, 944–952 (2006).
- [11] W. Li, N. C. Loomis, Q. Hu, and C. Davis, *Rapid extraction of 3D regions of interest from digital holograms* (MTS/IEEE Oceans 2007 Conference, Vancouver, 29 September–4 October 2007).
- [12] F. Nicolas, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Allano, D. Lebrun, and A. J. E. M. Janssen, "Application of the fractional Fourier transformation to digital holography recorded by an elliptical, astigmatic Gaussian beam" *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2569–2577 (2005).
- [13] N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Lebrun, and A. J. E. M. Janssen, "Digital in-line holography with an elliptical, astigmatic Gaussian beam: wide-angle reconstruction" *J. Opt. Soc. Am. A* **25**, 1459–1466 (2008).
- [14] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M.A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform: with Applications in Optics and Signal Processing* (John Wiley & Sons, 2001).

Bibliographie

- [1] G. Pan and H. Meng, “Digital in-line holographic piv for 3d particulate flow diagnostics,” in *4th international symposium on particle image velocimetry*, 2001.
- [2] G. Pan and H. Meng, “Digital holography of particle fields : reconstruction by use of complex amplitude,” *Appl. Opt.*, vol. 42, pp. 827–833, 2003.
- [3] M. Malek, S. Coëtmellec, D. Allano, and D. Lebrun, “Formulation of in-line holography process by a linear shift invariant system : application to the measurement of fiber diameter,” *Opt. Commun.*, vol. 223, pp. 263–271, 2003.
- [4] E. Malkiel, J. Sheng, J. Katz, and J. R. Strickler, “The three-dimensional flow field generated by a feeding calanoid copepod measured using digital holography,” *J. Exp. Bio.*, vol. 206, pp. 3657–3666, 2003.
- [5] J. Garcia-Sucerquia, W. Xu, S. K. Jericho, P. Klages, M. H. Jericho, and H. J. Kreuzer, “Digital in-line holographic microscopy,” *Appl. Opt.*, vol. 45, pp. 836–850, 2006.
- [6] D. Gabor, “A new microscopic principle,” *Nature*, vol. 161, pp. 777–778, 1948.
- [7] W. L. Bragg, “The x-ray microscope,” *Nature*, vol. 149, pp. 470–471, 1942.
- [8] D. Gabor, “Microscopy by reconstructed wave-fronts,” *Proc. R. Soc. London Ser. A*, vol. 197, pp. 454–487, 1948.
- [9] D. Gabor, “Microscopy by reconstructed wave-fronts ii,” *Proc. Phys. Soc.*, vol. 64, pp. 449–469, 1951.
- [10] B. J. Thompson, J. H. Ward, and W. R. Zinky, “Application of hologram techniques for particle size analysis,” *Appl. Opt.*, vol. 6, pp. 519–526, 1967.
- [11] J. D. Trolinger, R. A. Belz, and W. M. Farmer, “Holographic techniques for the study of dynamic particle fields,” *Appl. Opt.*, vol. 8, pp. 957–961, 1969.
- [12] H. Royer, F. Albe, and P. Sutterlin, “Vizualisation des brouillards par holographie,” *Opt. Commun.*, vol. 4, pp. 75–77, 1971.
- [13] R. Bexon and M. G. D. abd M. C. Stainer, “In-line holography and the assessment of aerosols,” *Opt. Laser Technol.*, vol. 8, pp. 161–165, 1976.
- [14] R. Menzel and F. M. Shofner, “An investigation of fraunhofer holography for velocimetry applications,” *Appl. Opt.*, vol. 9, pp. 2073–2079, 1970.
- [15] L. Onural, *Digital decoding of in-line holograms*. PhD thesis, State University of New York at Buffalo, 1985.

- [16] L. Onural and P. D. Scott, "Digital decoding of in-line holograms," *Opt. Eng.*, vol. 26, pp. 1124–1132, 1987.
- [17] U. Schnars and W. Jüptner, "Direct recording of holograms by a ccd target and numerical reconstruction," *Appl. Opt.*, vol. 33, pp. 179–181, 1994.
- [18] U. Schnars and W. P. O. Jüptner, "Digital recording and numerical reconstruction of holograms," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 13, pp. R85–R101, 2002.
- [19] C. Buraga-Lefebvre, S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul, "Application of wavelet transform to hologram analysis : three-dimensional location of particles," *Opt. Laser Eng.*, vol. 33, pp. 409–421, 2000.
- [20] P. D. Natale, P. Ferraro, and G. Pierattini, "A method for the determination of three-dimensional velocity fields from holographic images," *Opt. Laser Technol.*, vol. 27, pp. 103–106, 1995.
- [21] H. Meng and F. Hussain, "In-line recording and off-axis viewing technique for holographic particle velocimetry," *Appl. Opt.*, vol. 34, pp. 1827–1840, 1995.
- [22] H. Meng, G. Pan, Y. Pu, and S. H. Woodward, "Holographic particle image velocimetry : from film to digital recording," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 15, pp. 673–685, 2004.
- [23] S. Coëtmellec, C. Buraga-Lefebvre, D. Lebrun, and C. Özkul, "Application of in-line digital holography to multiple plane velocimetry," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 12, pp. 1392–1397, 2001.
- [24] M. Malek, D. Allano, S. Coëtmellec, C. Özkul, and D. Lebrun, "Digital in-line holography for three-dimensional-two-components particle tracking velocimetry," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 15, pp. 699–705, 2004.
- [25] D. Lebrun, N. Salah, N. Verrier, S. Coëtmellec, G. Godard, and D. Allano, "Digital reconstruction of in-line holograms, application in flow measurements," in *Digital holographic reconstruction and optical tomography for engineering applications*, 2007.
- [26] N. Salah, G. Godard, D. Lebrun, P. Paranthoën, D. Allano, and S. Coëtmellec, "Application of multiple exposure digital in-line holography for particle tracking in a Bénard-von Kármán vortex flow," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 19, p. 074001, 2008.
- [27] W. Xu, M. H. Jericho, I. A. Meinertzhagen, and H. J. Kreuzer, "Digital in-line holography for biological applications," *PNAS*, vol. 98, pp. 11301–11305, 2001.
- [28] J. Garcia-Sucerquia, W. Xu, S. K. Jericho, M. H. Jericho, and H. J. Kreuzer, "4-d imaging of fluid flow with digital in-line holographic microscopy," *Optik*, vol. 119, pp. 419–423, 2008.
- [29] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. Roberts & Company Publishers, 2005.
- [30] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 1999.
- [31] L. Onural, "Sampling of the diffraction field," *Appl. Opt.*, vol. 39, pp. 5929–5935, 2000.

- [32] L. Onural, "Some mathematical properties of the uniformly sampled quadratic phase function and the associated issues in digital fresnel diffraction simulations," *Opt. Eng.*, vol. 43, pp. 2557–2563, 2004.
- [33] P. Picart and J. Leval, "General theoretical formulation of image formation in digital fresnel holography," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, pp. 1744–1761, 2008.
- [34] L. Onural, "Diffraction from a wavelet point of view," *Opt. Lett.*, vol. 18, pp. 846–848, 1993.
- [35] P. Pellat-Finet, "Fresnel diffraction and the fractional-order fourier transform," *Opt. Lett.*, vol. 19, pp. 1388–1390, 1994.
- [36] E. Fogret and P. Pellat-Finet, "Agreement of fractional fourier optics with the huygens-fresnel principle," *Opt. Commun.*, vol. 272, pp. 281–288, 2007.
- [37] D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo, and F. Marinho, "Fast algorithm for free-space diffraction patterns calculation," *Opt. Commun.*, vol. 164, pp. 233–245, 1999.
- [38] D. Mas, J. Perez, C. Hernandez, C. Vazquez, J. J. Miret, and C. Illueca, "Fast numerical calculation of fresnel patterns in convergent systems," *Opt. Commun.*, vol. 227, pp. 245–258, 2003.
- [39] G. Liu and P. D. Scott, "Phase retrieval and twin-image elimination from in-line fresnel holograms," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 159–165, 1987.
- [40] K. A. Nugent, "Twin-image elimination in gabor holography," *Opt. Commun.*, vol. 78, pp. 293–299, 1990.
- [41] T. Latychevskaia and H.-W. Fink, "Solution to the twin image problem in holography," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, pp. 2339011–2339014, 2007.
- [42] S. Belaïd, D. Lebrun, and C. Özkul, "Application of two-dimensional wavelet transform to hologram analysis : visualization of glass fibers in turbulent flame," *Opt. Eng.*, vol. 36, pp. 1947–1951, 1997.
- [43] D. Lebrun, S. Belaïd, and C. Özkul, "Hologram reconstruction by use of optical wavelet transform," *Appl. Opt.*, vol. 38, pp. 3730–3734, 1999.
- [44] S. Coëtmellec, N. Verrier, M. Brunel, and D. Lebrun, "General formulation of digital in-line holography from correlation with a chirplet function," *Opt. Comm.*, vol. XX, pp. xxxx–xxxx, 2009.
- [45] F. J. Marinho and L. M. Bernardo, "Numerical calculation of fractional fourier transforms with a single fast-fourier-transform algorithm," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, pp. 2111–2116, 1998.
- [46] S.-C. Pei, M.-H. Yeh, and C.-C. Tseng, "Discrete fractional fourier transform based on orthogonal projections," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 47, pp. 1335–1348, 1999.
- [47] S. Coëtmellec, *Application de la transformation de Fourier fractionnaire à la restitution numérique des hologrammes de particules*. PhD thesis, Université de Rouen, 2002.

- [48] S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul, “Characterization of diffraction patterns directly from in-line holograms with the fractional fourier transform,” *Appl. Opt.*, vol. 41, pp. 312–319, 2002.
- [49] S. Coëtmellec, D. Lebrun, and C. Özkul, “Application of the two-dimensional fractional-order fourier transformation to particle field digital holography,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 19, pp. 1537–1546, 2002.
- [50] A. Sahin, H. M. Ozaktas, and D. Mendlovic, “Optical implementation of the two-dimensional fractional fourier transform with different orders in the two dimensions,” *Opt. Commun.*, vol. 120, pp. 134–138, 1995.
- [51] A. Sahin, M. A. Kutay, and H. M. Ozaktas, “Nonseparable two-dimensional fractional fourier transform,” *Appl. Opt.*, vol. 37, pp. 5444–5453, 1998.
- [52] A. Sahin, H. M. Ozaktas, and D. Mendlovic, “Optical implementations of two-dimensional fractional fourier transforms and linear canonical transforms with arbitrary parameters,” *Appl. Opt.*, vol. 37, pp. 2130–2141, 1998.
- [53] F. Nicolas, S. Coëtmellec, M. Brunel, D. Allano, D. Lebrun, and A. J. E. M. Janssen, “Application of the fractional fourier transformation to digital holography recorded by an elliptical, astigmatic gaussian beam,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 22, pp. 2569–2577, 2005.
- [54] R. L. Bayt and K. S. Breuer, “Fabrication and testing of micro-sized cold-gaz thrusters in micropropulsion of small spacecraft,” *Progress in Astronautics and Aeronautics*, vol. 197, pp. 381–398, 2000.
- [55] J. Darabi, M. M. Ohabi, and D. Devoe, “An electrohydrodynamic polarization micropump for electronic cooling,” *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 10, pp. 98–106, 2001.
- [56] C. D. Meinhart and H. Zhang, “The flow structure inside a microfabricated inkjet printhead,” *J. Microelectromech. Syst.*, vol. 9, pp. 67–75, 2000.
- [57] D. Sinton, “Microscale flow visualization,” *Microfluid Nanofluid*, vol. 1, pp. 2–21, 2004.
- [58] S. Devasenathipathy, J. G. Santiago, S. T. Wereley, C. D. Meinhart, and K. Takehara, “Particle imaging techniques for microfabricated fluidic systems,” *Exp. Fluids*, vol. 34, pp. 504–514, 2003.
- [59] F. Dubois, A. Vedernikov, and N. Callens, “Micro-velocimétrie 3d par holographie digitale,” in *9e Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser*, 2004.
- [60] S. Kim and S. J. Lee, “Measurement of 3d laminar flow inside a micro tube using micro digital holographic particle tracking velocimetry,” *J. Micromech. Microeng.*, vol. 17, pp. 2157–2162, 2007.
- [61] S. J. Lee and S. Kim, “Micro holographic ptv measurements of dean flows in a curved micro-tube,” in *14th Int. Symp. on applications of laser techniques to fluid mechanics*, 2008.

- [62] S. Satake, T. Kunugi, K. Sato, and T. Ito, "Digital holographic particle tracking velocimetry for 3-d transient flow around an obstacle in a narrow channel," *Opt. Rev.*, vol. 11, pp. 162–164, 2004.
- [63] S. Satake, T. Kunugi, K. Sato, T. Ito, and J. Taniguchi, "Three-dimensional flow tracking in a micro channel with high time resolution using micro digital-holographic particle-tracking velocimetry," *Opt. Rev.*, vol. 12, pp. 442–444, 2005.
- [64] S. Satake, T. Kunugi, K. Sato, T. Ito, H. Kanamori, and J. Taniguchi, "Measurements of 3d flow in a micro-pipe via micro digital holographic particle tracking velocimetry," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 17, pp. 1647–1651, 2006.
- [65] S. Satake, H. Kanamori, T. Kunugi, K. Sato, and T. I. and K. Yamamoto, "Parallel computing of a digital hologram and particle searching for microdigital-holographic particle-tracking velocimetry," *Appl. Opt.*, vol. 46, pp. 538–543, 2007.
- [66] S. Satake, T. Anraku, H. Kanamori, T. Kunugi, K. Sato, and T. Ito, "Measurement of three-dimensional flow in microchannel with complex shape by micro-digital-holographic particle-tracking velocimetry," *J. Heat Transfer*, vol. 130, pp. 0424131–0424137, 2008.
- [67] C. S. Vikram, *Particle Field Holography*. Cambridge University Press, 1992.
- [68] J. S. Crane, P. Dunn, B. J. Thompson, J. Z. Knapp, and J. Zeiss, "Far-field holography of ampule contaminants," *Appl. Opt.*, vol. 21, pp. 2548–2553, 1982.
- [69] S. D. Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, and G. Pierattini, "Correct-image reconstruction in the presence of severe anamorphism by means of digital holography," *Opt. Lett.*, vol. 26, pp. 974–976, 2001.
- [70] S. Grilli, P. Ferraro, S. D. Nicola, A. Finizio, and G. P. and R. Meucci, "Whole optical wavefields reconstruction by digital holography," *Opt. Express*, vol. 9, pp. 294–302, 2001.
- [71] S. D. Nicola, P. Ferraro, A. Finizio, and G. Pierattini, "Wave front reconstruction of fresnel off-axis holograms with compensation of aberrations by means of phase-shifting digital holography," *Opt. Laser Eng.*, vol. 37, pp. 331–340, 2002.
- [72] B. R. A. Nijboer, *The diffraction theory of aberrations*. PhD thesis, Groningen, 1942.
- [73] J. Braat, P. Dirksen, and A. J. E. M. Janssen, "Assessment of an extended nijboer-zernike approach for the computation of optical point-spread functions," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 19, pp. 858–870, 2002.
- [74] A. J. E. M. Janssen, "Extended nijboer-zernike approach for the computation of optical point-spread functions," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 19, pp. 849–857, 2002.
- [75] A. J. E. M. Janssen, J. J. M. Braat, and P. Dirksen, "On the computation of the nijboer-zernike aberration integrals at arbitrary defocus," *J. Mod. Opt.*, vol. 51, pp. 687–703, 2004.

- [76] N. Verrier, S. Coëtmelec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography with an elliptical, astigmatic gaussian beam : wide-angle reconstruction," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 25, pp. 1459–1466, 2008.
- [77] M. Abramovitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, 1970.
- [78] M. A. Kutay, H. M. Ozaktas, O. Arikan, and L. Onural, "Optimal filtering in fractional fourier domains," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 45, pp. 1129–1143, 1997.
- [79] M. A. Kutay and H. M. Ozaktas, "Optimal image restoration with the fractional fourier transform," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 15, pp. 825–833, 1998.
- [80] V. Namias, "The fractional order fourier transform and its application to quantum mechanics," *J. Inst. Maths Its Applics*, vol. 25, pp. 241–265, 1980.
- [81] A. McBride and F. Kerr, "On namias's fractional fourier transforms," *IMA J. Appl. Math.*, vol. 159-175, 1987.
- [82] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform : With Applications in Optics and Signal Processing*. Wiley, 2001.
- [83] J. J. Wen and M. A. Breazeale, "Gaussian beam function as a base function set for acoustical field calculations," in *Proc. IEEE Ultrason. Symp.*, 1987.
- [84] J. J. Wen and M. A. Breazeale, "A diffraction beam field expressed as the superposition of gaussian beams," *J. Acoust. Soc. Am.*, vol. 83, pp. 1752–1756, 1988.
- [85] C. Zheng, D. Zhao, and X. Du, "Analytical propagation expression of elliptical gaussian beams through nonsymmetric systems with an elliptical aperture," *Optik*, vol. 117, pp. 296–298, 2006.
- [86] X. Du and D. Zhao, "Propagation of decentered elliptical gaussian beams in apertured and nonsymmetrical optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 23, pp. 625–631, 2006.
- [87] X. Du and D. Zhao, "Propagation of elliptical gaussian beams in apertured and misaligned optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 23, pp. 1946–1950, 2006.
- [88] X. Du and D. Zhao, "Propagation of elliptical gaussian beams modulated by an elliptical annular aperture," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 24, pp. 444–450, 2007.
- [89] J. Zhang, B. Tao, and J. Katz, "Turbulent flow measurement in a square duct with hybrid holographic piv," *Exp. Fluids*, vol. 23, pp. 373–381, 1997.
- [90] J. S. A. Collins, "Lens-system diffraction integral written in terms of matrix optics," *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 60, pp. 1168–1177, 1970.
- [91] H. T. Yura and S. G. Hanson, "Optical beam wave propagation through complex optical systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 4, pp. 1931–1948, 1987.
- [92] C. Palma and V. Bagini, "Extension to the fresnel transform to abcd systems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 14, pp. 1774–1779, 1997.
- [93] A. J. Lambert and D. Fraser, "Linear systems approach to simulation of optical diffraction," *Appl. Opt.*, vol. 37, pp. 7933–7939, 1998.

- [94] N. Verrier, S. Coëtmelec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography in thick optical systems : application to visualization in pipes," *Appl. Opt.*, vol. 47, pp. 4147–4157, 2008.
- [95] F. Slimani, G. Grehan, G. Gouesbet, and D. Allano, "Near-field lorenz-mie theory and its application to microholography," *Appl. Opt.*, vol. 23, pp. 4140–4148, 1984.
- [96] F. Nicolas, *Holographie numérique femtoseconde : Modélisation et restitution par transformation de Fourier fractionnaire*. PhD thesis, Université de Rouen, 2007.
- [97] F. Nicolas, S. Coëtmelec, M. Brunel, and D. Lebrun, "Digital in-line holography with a sub-picosecond laser beam," *Opt. Commun.*, vol. 268, pp. 27–33, 2006.
- [98] W. Yang, A. B. Kostinski, and R. A. Shaw, "Depth-of-focus reduction for digital in-line holography of particle fields," *Opt. Lett.*, vol. 30, pp. 1303–1305, 2005.
- [99] W. Li, N. C. Loomis, Q. Hu, and C. S. Davis, "Focus detection from digital in-line holograms based on spectral l_1 norms," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 24, pp. 3054–3062, 2007.
- [100] J. de Jong and H. Meng, "Digital holographic particle validation via complex wave," *Appl. Opt.*, vol. 46, pp. 7652–7661, 2007.
- [101] F. Dubois, C. Schockaert, N. Callens, and C. Yourassowsky, "Focus plane detection criteria in digital holography microscopy by amplitude analysis," *Opt. Express*, vol. 14, pp. 5895–5908, 2006.
- [102] E. Malkiel, J. N. Abras, and J. Katz, "Automated scanning and measurements of particle distributions within a holographic reconstructed volume," *Meas. Sci. Technol.*, vol. 15, pp. 601–612, 2004.
- [103] L. Onural and M. T. Özgen, "Extraction of three-dimensional object-location information directly from in-line holograms using wigner analysis," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 9, pp. 252–260, 1992.
- [104] L. Denis, C. Fournier, T. Fournel, C. Ducottet, and D. Jeulin, "Direct extraction of the mean particle size from a digital hologram," *Appl. Opt.*, vol. 45, pp. 944–952, 2006.
- [105] W. Li, N. C. Loomis, Q. Hu, and C. S. Davis, "Rapid extraction of 3D regions of interest from digital holograms," in *Oceans 2007*, 2007.
- [106] J. Wang, "From DNA biosensors to gene chips," *Nucleic Acids Res.*, vol. 28, pp. 3011–3016, 2000.
- [107] D. R. Reyes, D. Iossifidis, P.-A. Auroux, and A. Manz, "Micro total analysis systems. 1. introduction, theory and technology," *Anal. Chem.*, vol. 74, pp. 2623–2636, 2002.
- [108] G. M. Whitesides, "The origins and the future of microfluidics," *Nature*, vol. 442, pp. 368–373, 2006.
- [109] C. N. Baroud, J.-P. Delville, F. Gallaire, and R. Wunenburger, "Thermocapillary valve for droplet production and sorting," *Phys. Rev. E*, vol. 75, p. 046302, 2007.

- [110] C. N. Baroud, M. R. de Saint Vincent, and J.-P. Delville, “An optical toolbox for total control of droplet microfluidics,” *Lab Chips*, vol. 7, pp. 1029–1033, 2007.
- [111] J.-P. Delville, M. R. de Saint Vincent, R. D. Schroll, H. Chraïbi, B. Issenmann, R. Wunenburger, D. Lasseux, W. W. Zhang, and E. Brasselet, “Laser microfluidics : fluid actuation by light,” *J. Opt. A : Pure Appl. Opt.*, vol. 11, p. 034015, 2009.
- [112] A. K. Tieu, M. R. Mackenzie, and E. B. Li, “Measurements in microscopic flow with a solid-state lda,” *Exp. Fluids*, vol. 19, pp. 293–294, 1995.
- [113] C. D. Meinhart, S. T. Wereley, and J. G. Santiago, “Piv measurements of a micro-channel flow,” *Exp. Fluids*, vol. 27, pp. 414–419, 1999.
- [114] J. G. Santiago, S. T. Wereley, C. D. Meinhart, D. J. Beebe, and R. J. Adrian, “A particle image velocimetry system for microfluidics,” *Exp. Fluids*, vol. 25, pp. 316–319, 1998.
- [115] A. W. Lohmann, “Image rotation, wigner rotation and the fractional fourier transform,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 10, pp. 2181–2186, 1993.
- [116] N. Verrier, S. Coëtmellec, M. Brunel, and D. Lebrun, “Determination of 3D-region of interest using digital in-line holography with astigmatic gaussian beams,” *JEOS :RP*, vol. 4, p. 09038, 2009.
- [117] B. Lü and K. Duan, “Nonparaxial propagation of vectorial Gaussian beams diffracted at a circular aperture,” *Opt. Lett.*, vol. 28, pp. 2440–2442, 2003.