



HAL
open science

La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage

Thierry Dias

► **To cite this version:**

Thierry Dias. La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. Education. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT: . tel-00635724

HAL Id: tel-00635724

<https://theses.hal.science/tel-00635724>

Submitted on 25 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE LYON 1 – CLAUDE BERNARD

ECOLE DOCTORALE INFORMATIQUE ET INFORMATION POUR LA SOCIETE, EDA 335

LABORATOIRE D'ETUDE DU PHENOMENE SCIENTIFIQUE, EA 4148

LA DIMENSION EXPERIMENTALE DES MATHEMATIQUES : UN LEVIER POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE

*Etude exploratoire dans des situations d'enseignement et de
formation au sein de l'enseignement spécialisé*

THESE soutenue le 3 décembre 2008 par :

THIERRY DIAS

pour l'obtention du DIPLOME de DOCTORAT de l'UNIVERSITE LYON 1

sous la direction de : Viviane DURAND GUERRIER

composition du jury :

Christian ALIN (président)

Viviane DURAND-GUERRIER (directeur)

Isabelle BLOCH (rapporteur)

Jacinthe GIROUX (rapporteur)

Teresa ASSUDE (examineur)

François CONNE (examineur)

André GRAMAIN (examineur)

TABLE DES MATIERES

LA DIMENSION EXPERIMENTALE DES MATHÉMATIQUES : UN LEVIER POUR L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE.....	1
TABLE DES MATIERES	I
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I - METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE	3
<i>I - 1 Caractérisation de notre méthodologie.....</i>	<i>3</i>
I - 1.1 Une réflexion épistémologique et didactique.....	4
I - 1.2 Une investigation contextualisée	4
I - 1.3 La proposition d'un scénario de formation.....	5
<i>I - 2 Origine du projet de recherche</i>	<i>5</i>
<i>I - 3 Problématique et hypothèses de recherche</i>	<i>6</i>
CHAPITRE II - ANCRAGES THEORIQUES DE LA RECHERCHE.....	9
<i>II - 1 Les modèles de milieu selon Bloch.....</i>	<i>9</i>
II - 1.1 Conception d'un milieu "théorique épistémologique".....	10
II - 1.2 Mise en œuvre d'un milieu "expérimental a priori"	10
II - 1.3 Confrontation à la contingence en comparant des contextes d'enseignement et de formation.....	12
<i>II - 2 Le processus dialectique enseigner / apprendre chez Conne.....</i>	<i>13</i>
II - 2.1 Problématique poursuivie	14
II - 2.2 Objet de la recherche	14
II - 2.3 Hypothèses de recherche	15
II - 2.4 Qu'entend-on par "faire des mathématiques" ?.....	15
§ créer et animer des objets de pensée	16
§ entrer dans les pratiques mathématiciennes	16
§ l'interaction sujet/objet comme modèle de la pensée en acte	16
§ apprendre, savoir, enseigner	16
II - 2.5 Faire faire des mathématiques	17
§ le "faire des mathématiques" de l'enseignant	17
§ faire et faire faire	17
§ activités et pratiques : enseignantes, enseignées	17
§ une vision trop simple de l'enseignement : le partage des tâches.....	18
§ une centration excessive sur les objets.....	18
§ la formation des enseignants.....	18
§ des choses à faire, des choses accomplies à repérer.....	19
§ l'élève en difficulté.....	19
II - 2.6 Regarder ce que ça donne.....	20
§ le retour sur l'expérience.....	20
§ le caractère imprévu de certains événements rencontrés en enseignant	20
§ Les enseignants doivent-ils être des chercheurs, des didacticiens ou des praticiens réflexifs ?	20
§ Conclusion.....	21
PARTIE A : ETUDE EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE.....	23
INTRODUCTION	25
CHAPITRE I - LA DIMENSION EXPERIMENTALE DES MATHÉMATIQUES	27

§	Expérimenter c'est rencontrer l'incertitude.....	27
§	Expérimenter c'est construire un réel partagé	27
§	Expérimenter c'est interagir avec des objets selon un rapport dialectique	28
§	Expérimenter c'est construire du "nouveau" à partir du "familier"	29
<i>I - 1</i>	<i>Le rôle central des objets dans l'élaboration des savoirs.....</i>	<i>29</i>
I - 1.1	La dialectique objet sensible / objet théorique.....	30
I - 1.2	Un exemple d'actualité avec la sphère	32
I - 1.3	Mathématiques et réalité.....	34
<i>I - 2</i>	<i>La dialectique expérience / expérimentation.....</i>	<i>35</i>
I - 2.1	L'aspect expérimental des mathématiques	37
I - 2.2	Une question de raisonnement.....	39
<i>I - 3</i>	<i>Expérimentation et production de la preuve</i>	<i>41</i>
CHAPITRE II - UN MILIEU POUR L'EXPERIMENTATION EN CLASSE DE MATHÉMATIQUES : CONDITIONS ET		
CONTRAINTES.....		45
<i>II - 1</i>	<i>L'organisation d'une situation didactique.....</i>	<i>45</i>
II - 1.1	La dimension expérimentale dans la théorie des situations didactiques.....	46
§	Phase de l'action	46
§	Phase de la formulation	47
§	Phase de la validation	47
II - 1.2	Le milieu en didactique des mathématiques	48
§	Apprentissage	49
§	Enseignement	51
<i>II - 2</i>	<i>Caractéristiques du milieu antagoniste de type expérimental.....</i>	<i>52</i>
II - 2.1	Un milieu porteur de déséquilibres.....	53
II - 2.2	Un milieu qui développe l'autonomie de l'élève.....	54
II - 2.3	Un milieu qui collabore à l'accès à des savoirs mathématiques	55
<i>II - 3</i>	<i>La médiation entre les objets de savoir et l'apprentissage.....</i>	<i>56</i>
II - 3.1	Représentations et interprétations dans le milieu	57
§	Éléments de sémiotique	57
§	Intérêt épistémologique en situation didactique.....	58
II - 3.2	Médiation instrumentale	60
<i>II - 4</i>	<i>Cadre institutionnel et démarche d'investigation.....</i>	<i>62</i>
§	moment 1 : Le choix d'une situation-problème par le professeur	64
§	moment 2 : L'appropriation du problème par les élèves	64
§	moment 3 : La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles.....	65
§	moment 4 : L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves	65
§	moment 5 : L'échange argumenté autour des propositions élaborées	65
§	moment 6 : L'acquisition et la structuration des connaissances	66
§	moment 7 : L'opérationnalisation des connaissances.....	67
CHAPITRE III - UNE SITUATION CONSISTANTE : LA RECHERCHE DES POLYEDRES REGULIERS		69
<i>III - 1</i>	<i>Histoire et épistémologie des savoirs en jeu.....</i>	<i>69</i>
III - 1.1	Éléments historiques.....	70
§	Géométrie des solides : passer du plan à l'espace	70
§	Brefs aperçus historiques	71
§	La nécessaire dimension expérimentale des mathématiques.....	79
III - 1.2	Fonctionnalités du savoir en mathématiques et ailleurs.....	79
§	Fonctionnalités du savoir en mathématiques	79
§	Fonctionnalités du savoir en sciences	83
<i>III - 2</i>	<i>Questions de représentations.....</i>	<i>85</i>
III - 2.1	Représentation, esthétique et technique.....	86
III - 2.2	Polyèdres, signes et représentation	88
III - 2.3	Milieu culturel et instrumental	91

III – 3	<i>Enjeux didactiques</i>	92
III – 3.1	Construire les cinq solides	93
§	Avec des triangles équilatéraux	94
§	Avec des pentagones réguliers.....	95
§	Avec des hexagones réguliers.....	96
III – 3.2	Consistance de la situation.....	96
III – 4	<i>La constitution du milieu pour l'expérimentation</i>	98
III – 4.1	Un milieu expérimental a priori.....	98
§	l'enseignant	99
§	les objets	99
§	la situation	100
§	les élèves.....	100
III – 4.2	Le laboratoire.....	100
§	Cadre théorique.....	101
§	Cadre institutionnel.....	102
§	Modélisation du laboratoire	102
§	Une référence à l'écologie : le biotope.....	105
CLOTURE DE L'EXPLORATION THEORIQUE.....		107
PARTIE B : INVESTIGATION CONTEXTUALISEE DANS L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE		109
INTRODUCTION		110
CHAPITRE I - LE CONTEXTE DE L'ENSEIGNEMENT SPECIALISE.....		111
I – 1	<i>Contexte institutionnel</i>	112
I - 1.1	La scolarisation des élèves à besoins spécifiques	112
I - 1.2	Les dispositifs institutionnels nationaux et départementaux	115
I – 2	<i>Contexte didactique</i>	117
I - 2.1	De la difficulté d'apprendre.....	117
I - 2.2	De la difficulté d'enseigner	119
§	le choix des démarches	120
§	l'avancée du temps didactique.....	121
§	le milieu pour la dévolution et la communication.....	122
§	la difficulté à manifester et constater des connaissances.....	122
I - 2.3	La question de la formation des enseignants.....	123
I – 3	<i>Dimension expérimentale et adaptation dans l'enseignement des mathématiques</i>	125
I - 3.1	Qu'est-ce qu'une adaptation de l'enseignement	126
I - 3.2	Un milieu pour l'adaptation des enseignements	127
§	conjecture n°1 : l'analyse des constituants du milieu expérimental a priori permet de faire un diagnostic nécessaire à l'adaptation du savoir au connaissances des élèves	128
§	conjecture n°2 : le choix de la démarche d'investigation met en œuvre un processus de médiation pouvant permettre des "détours"	129
§	conjecture n°3 : Proposer des outils de modélisation permet un étayage pour la mise en actes des connaissances des élèves	130
CHAPITRE II – CONFRONTATION A LA REALITE DE LA CLASSE (1)		131
II – 1	<i>Un contexte spécifique : l'UPI TSL</i>	132
II - 1.1	À propos du dispositif : Unité Pédagogique d'Intégration	132
II - 1.2	À propos des troubles spécifiques du langage	133
II – 2	<i>Présentation du terrain d'observation</i>	135
II - 2.1	Éléments du contexte d'enseignement.....	135
II - 2.2	Élèves et apprentissages.....	136
§	Résultats à l'évaluation d'entrée en sixième :	137
II - 2.3	Le dispositif de recueil des données	141
II – 3	<i>Situation didactique : la recherche des polyèdres réguliers</i>	142

II – 3.1	Descriptif de la séquence.....	142
§	séance 1	143
§	séance 2	144
II – 3.2	Observations et premiers commentaires	146
§	séance 1 avec les élèves de sixième	146
§	séance 1 avec les élèves de cinquième	147
§	séance 2 : recherche avec les élèves de sixième.....	149
§	séance 2 : recherche avec les élèves de cinquième	151
§	confrontation des résultats	153
II – 4	<i>Analyse : premières réponses aux hypothèses de recherche.....</i>	<i>155</i>
II – 4.1	Des objets sensibles aux objets mathématiques et vice-versa.....	155
§	qu'est-ce qu'une face ?	155
§	la découverte d'une propriété non énoncée	157
II – 4.2	Expérimentation et investigation	160
§	Plusieurs types d'expérimentation.....	160
§	les phases visibles de la démarche d'investigation	161
§	un renforcement de la fonction outil	162
II – 4.3	Milieu antagoniste et expérimental.....	163
§	Antagonisme du milieu	163
§	Langage et indétermination	164
§	Laboratoire et milieu expérimental.....	165
II – 4.4	Médiation langagière et instrumentale.....	166
§	Vers la conceptualisation	167
§	les instruments au secours de la représentation.....	168
CHAPITRE III – CONFRONTATION A LA REALITE DE LA CLASSE (2).....		171
III – 1	<i>Le dispositif de la classe d'intégration scolaire (CLIS).....</i>	<i>171</i>
III – 1.1	Cadre institutionnel	171
III – 1.2	Le terrain d'étude : une CLIS 1	173
III – 2	<i>Contexte d'enseignement / apprentissage.....</i>	<i>174</i>
III – 3	<i>Mise en œuvre de la situation.....</i>	<i>176</i>
III – 3.1	Variables didactiques et pédagogiques	177
III – 3.2	Descriptif de la séquence	178
§	séance 1 : "la bataille de solides"	179
§	séance 2 : "recherche des solides parfaits"	179
§	adaptation de la situation à l'enseignement spécialisé.....	180
II – 4	<i>Les invariants stabilisés</i>	<i>182</i>
II – 4.1	La médiation du geste : opération sur les artefacts	182
II – 4.2	Modélisation : de la perception à la signification	183
II – 4.3	Antagonisme du milieu et cas limites	184
II – 4.4	Stabilité du milieu et apprentissages.....	186
II – 5	<i>Séances connexes</i>	<i>188</i>
II – 5.1	Dessins des solides construits.....	188
II – 5.2	Jeux de Kim.....	190
II – 5.3	Constructions libres en atelier	191
II – 5.4	Institutionnalisation	191
II – 5.5	Evaluation.....	192
§	résultats pour la construction du solide.....	193
§	vocabulaire exprimé : résultats collectifs de la classe.....	194
§	vocabulaire exprimé : résultats individuels.....	196
II – 5.6	Situation de recherche sur les patrons du cube	197
CONCLUSION PARTIE B		198

PARTIE C : VERS UN CHANGEMENT DES PRATIQUES : UN SCENARIO DE FORMATION 201

INTRODUCTION	202
CHAPITRE I – SITUATION DE RECHERCHE ET FORMATION	203
<i>I – 1 Plusieurs contextes de formation</i>	203
I – 1.1 Descriptif de la séance en formation continue	204
I – 1.2 Descriptif de la séance en formation initiale.....	208
I – 1.3 Descriptif de la séance en formation de formateurs	210
<i>I – 2 Les invariants d'une situation de type expérimentale</i>	212
I - 2.1 Une dévolution réussie	212
§ Choix, contrôle et étayage de la situation par le professeur ou le formateur.....	212
§ L'appropriation du problème par les élèves ou par les professeurs stagiaires	213
I - 2.2 Des formulations de conjectures	214
§ Conjectures, hypothèses explicatives, protocoles	214
§ Investigation et résolution par les élèves	215
I - 2.3 Une dialectique de la validation.....	216
§ Echanges argumentés.....	216
§ rapport dialectique des objets familier/nouveau.....	217
I – 2.4 Une structuration des connaissances.....	217
§ Acquisition et structuration.....	217
§ Opérationnalisation.....	219
CHAPITRE II – INGENIERIE DE FORMATION	221
<i>II – 1 Le "rallye-ASH" : un projet de formation</i>	222
II - 1.1 Les raisons de la création du rallye-ASH.....	222
II - 1.2 Evolutions du dispositif	224
§ Bref historique	224
§ Adaptation des organisations.....	227
II - 1.2 Hétérogénéité des publics	228
I – 1.3 Correction des envois et corrigés des énigmes.....	229
<i>II – 2 Dispositifs de formation associés : initiale et continue</i>	230
II - 2.1 Des actions au plan de formation des circonscriptions	230
II - 2.2 Une prise en compte de ce dispositif en formation initiale à l'IUFM.....	232
<i>II – 3 Répercussions sur les apprentissages et l'enseignement : éléments d'analyse via le questionnaire</i>	232
II - 3.1 Dispositifs sociaux de travail	233
II - 3.2 Dévolution et enrôlement des élèves	234
II - 3.3 Qualité des relations et des interactions	235
II - 3.4 Médiation instrumentale des activités.....	235
II - 3.5 Une pratique d'enseignant réflexif	237
CHAPITRE III – VERS LES LABORATOIRES DE MATHÉMATIQUES	241
<i>III – 1 Des laboratoires de mathématiques : entre histoire et modernité</i>	242
III - 1.1 Un peu d'histoire.....	242
III - 1.2 Quelques expériences actuelles	243
III - 1.3 La recherche dans un laboratoire de mathématiques	245
<i>III – 2 Une expérimentation en SEGPA</i>	246
III – 2.1 Contexte institutionnel.....	246
III – 2.2 La situation des bananes	248
III – 2.3 Sa mise en œuvre comme laboratoire	250
§ Compte rendu en regard du canevas fourni sur la démarche d'investigation.....	250
§ Eléments de synthèse et réactions.....	255
III – 2.4 Premiers éléments d'analyse <i>a posteriori</i>	257
<i>III- 3 Développement des laboratoires</i>	259
III – 3.1 Recherche	259
III – 3.2 Formation	260

CONCLUSION GENERALE	261
La richesse d'une étude exploration théorique fondée sur l'articulation épistémologie / didactique	261
La consistance d'une investigation sur le terrain de l'enseignement spécialisé	262
La pertinence du milieu laboratoire pour la mise en œuvre de situations ancrée sur des problèmes de recherche ..	262
La diffusion des résultats par la formation des professeurs	263
BIBLIOGRAPHIE.....	265
Ouvrages d'histoire, d'épistémologie et de philosophie des sciences.....	265
Articles de didactique	267
Ouvrages et thèses de didactique.....	271
Références en sciences humaines : langage, éducation, psychologie	272
Articles et conférences "on-line"	272
Travaux personnels.....	274
ANNEXES	277

INTRODUCTION

Le compte rendu de notre travail de recherche qui va suivre, se situe dans le champ de la didactique des mathématiques, et s'ancre dans l'histoire et l'épistémologie de cette discipline. L'articulation entre ces trois domaines nous semble nécessaire puisque l'objet de notre étude est la mise en évidence de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation afin de développer la construction des savoirs scientifiques de tous les apprenants.

Nous avons choisi le cadre d'analyse de l'enseignement de la géométrie du fait de la spécificité historique, épistémologique et philosophique de cette branche des mathématiques et qui en fut néanmoins le tronc. Elle nous permet d'observer avec précision l'élaboration d'une théorie en mathématiques comme un processus oscillant entre l'analyse du spécifique et la recherche d'un "générique" en passant par l'expérimentation, la modélisation et l'intuition. L'histoire des constructions des objets idéaux, objets abstraits et pensés nous semble un élément contribuant à la compréhension des processus d'apprentissage en situation scolaire. Nous souhaitons garder cette articulation épistémologie / didactique comme un modèle d'analyse des conditions permettant la réussite dans l'accès à la connaissance des élèves. C'est l'objet de notre première partie consacrée à cette réflexion épistémologique et didactique autour de la notion de milieu en tant qu'environnement didactique.

Notre étude est centrée sur la question des objets présents ou sous-jacents dans les situations d'apprentissages proposés aux élèves. Elle ne se limite cependant pas à l'inventaire "aprioriste" de l'enseignant qui prépare le dispositif didactique dans un souci légitime d'adaptation des objets de savoirs aux connaissances de ses élèves. Pour ce faire, nous avons choisi dans la seconde partie, de nous confronter à la contingence des terrains de l'apprentissage des mathématiques à l'école élémentaire et au collège. Nous proposons volontairement une confrontation dans le contexte spécifique des difficultés d'apprentissage et des situations de handicap (au sein de l'enseignement spécialisé) afin de tester nos hypothèses de la manière la plus consistante possible. C'est aussi l'occasion d'observer in situ les liens entre la géométrie et le monde sensible, pour tenter d'approcher une réponse à la question : que nous disent les mathématiques sur le réel ?

Nous centrons nos observations sur les relations qui unissent les objets sensibles aux objets théoriques en construction dans le cadre d'une situation didactique particulière. Celle-ci sera

l'objet d'une analyse de sa consistance et de sa potentialité, qu'elle soit didactique, scientifique et pédagogique.

Notre troisième partie correspond à l'étude du développement d'un scénario de formation qui prend en compte l'ingénierie didactique construite autour d'une situation, et qui investit "en extension" le champ de la formation des enseignants. Les contextes de la formation initiale des enseignants futurs professeurs des écoles et des futurs enseignants spécialisés, fournissent des terrains d'étude significatifs sur les rapports parfois conflictuels qu'entretiennent des sujets en situation d'apprentissage avec les objets mathématiques. Il y est fait appel dans la constitution de certains corpus grâce auxquels on rendra compte de la mise en œuvre de situations didactiques.

Pour terminer, nous présentons de nouvelles perspectives de recherche et leurs possibles applications au sein de l'école grâce à la mise en place d'un dispositif susceptible d'assurer la diffusion de nos résultats : les laboratoires de mathématiques. Si la dimension expérimentale des mathématiques est un levier pour les apprentissages et la formation, comme nous essayons de le montrer dans ces travaux, nous devons assurer sa pérennité au sein d'une véritable ingénierie de formation. La recherche nécessaire à son développement doit aussi se nourrir des apports extérieurs nécessaires notamment par le recours à une dimension internationale, c'est l'objet de notre futur projet présenté à la fin de cette thèse.

chapitre I - méthodologie de la recherche

I – 1 Caractérisation de notre méthodologie

La méthodologie choisie pour notre recherche ne se rapproche ni de l'inférence, ni de la déduction mais relève plutôt d'une forme d'abduction¹ : les hypothèses formulées sont fondées théoriquement mais c'est l'expérimentation et ses inattendus qui permettent l'avancée de la recherche conduisant progressivement à la stabilisation des connaissances par la mise en évidence d'invariants. Cette méthodologie relève du processus d'hypothèse dans la démarche scientifique. Elle débute par un questionnement relatif à un phénomène (didactique) robuste et étonnant, dont l'hypothèse explicative renvoie à notre objet d'étude : la dimension expérimentale des mathématiques et sa fonction de levier dans la relation dialectique qui relie l'enseignement et l'apprentissage. La recherche consiste en une exploration en regard d'une problématique didactique conduisant à la stabilisation d'une connaissance au service de compétences professionnelles.

Les hypothèses de recherche servent d'architecture à la conduite de l'étude qui se réalise dans une confrontation à la contingence, et non pas au titre d'une expérimentation dont le but se limiterait à valider les hypothèses proposées. Nous chercherons à exploiter les données recueillies dans nos divers protocoles pour réorienter le cheminement de nos travaux en fonction des phénomènes didactiques inattendus rencontrés. Ces "surprises didactiques" sont relatives à l'indétermination des concepts en jeu dans les situations qui sont mises à l'étude, mais sont aussi liées au contexte spécifique de l'enseignement spécialisé et des apprentissages qui s'y développent.

Notre présentation comportera trois temps successifs relatifs à nos quatre questions principales de recherche:

- En quoi la dimension expérimentale des mathématiques participe-t-elle de l'élaboration des objets mathématiques?
- Quelles sont les caractéristiques d'un milieu propice à l'expérimentation en mathématiques ?
- Le contexte de l'enseignement spécialisé permet-il de mener une recherche en didactique susceptible de dégager des invariants qui soient aussi transférables à l'enseignement ordinaire ?

¹ Nous utilisons le concept d'abduction en référence à une forme de raisonnement selon Peirce : un processus qui consiste à fonder une hypothèse explicative.

- Un modèle construit dans le champ de l'épistémologie et de la didactique permet-il d'enrichir la recherche sur la formation ?

I - 1.1 Une réflexion épistémologique et didactique

Cette première partie poursuit l'objectif scientifique d'ancrer l'étude des phénomènes de construction et de diffusion des savoirs scientifiques dans ce qui relève des disciplines elles-mêmes, en référence à la spécificité de leurs objets tant dans leur dimension historique, qu'épistémologique. Cette réflexion articulée avec la didactique des mathématiques sera conduite en trois temps.

Nous essaierons tout d'abord d'apporter un éclairage significatif à la notion de "*dimension expérimentale des mathématiques*" en analysant le rôle et la nature des objets mathématiques, puis en nous consacrant à la description de la relation dialectique qui existe entre l'expérience et l'expérimentation.

Nous porterons ensuite notre réflexion sur les moyens de caractérisation d'un environnement didactique spécifique : le "*milieu pour l'expérimentation*". Nous ferons alors référence aux notions de situation didactique et de milieu antagoniste (Brousseau, 1991), ainsi qu'à celles de médiation et de démarche d'investigation.

Nous terminerons cette réflexion épistémologique et didactique par la présentation et l'analyse d'une situation didactique consistante ancrée dans le domaine de la géométrie dans l'espace : la recherche des polyèdres réguliers.

I – 1.2 Une investigation contextualisée

La deuxième partie de notre recherche consistera à mener une investigation dans un contexte à la fois très spécifique mais aussi très révélateur : celui de l'adaptation et la scolarisation des élèves en situation de handicap. Ce contexte professionnel possède les critères nécessaires à une expérimentation de qualité de la relation enseigner/apprendre. La situation didactique de recherche des polyèdres réguliers y sera mise en œuvre et analysée afin de tester l'hypothèse de la fonction de levier de la dimension expérimentale des mathématiques. Le but est de dégager un certain nombre d'invariants didactiques que nous pourrions mettre au service du développement des compétences professionnelles des enseignants.

I – 1.3 La proposition d'un scénario de formation

Notre recherche se terminera par une troisième partie qui tendra à proposer une contribution au développement de l'enseignement des mathématiques dans tous les contextes d'enseignement. En effet, la volonté de mener une investigation dans un contexte difficile ne doit cependant pas s'y limiter. Cette partie de notre travail sera l'occasion de montrer en quoi une extension de nos découvertes est possible dans le champ de la formation initiale et continue des enseignants. Nous y commenterons la mise en œuvre de dispositifs et expérimentations dans le cadre d'un projet plus global que nous qualifierons de "scénario de formation".

I – 2 Origine du projet de recherche

L'étude proposée dans cette thèse a pour origine un questionnement professionnel d'enseignant relatif à la relation dialectique entre enseignement et apprentissage. Sa source se situe dans une expérience professionnelle en zone d'éducation prioritaire ; un contexte dans lequel l'enseignement est régulièrement confronté à la difficulté de comprendre les mathématiques du côté des élèves, une difficulté à la fois récurrente et surprenante du fait de sa relative résistance malgré la diversification des démarches d'enseignement. La deuxième source renvoie à une expérience de formation en IUFM auprès de futurs enseignants de mathématiques du premier degré et de l'enseignement spécialisé premier et second degré ; et de la rencontre de la difficulté d'enseigner les mathématiques témoignée par les enseignants quel que soit leur contexte professionnel, leur cursus de formation personnel et leur propre rapport à la discipline.

Dans chacune de ces interrogations, le statut des objets mathématiques et surtout des liens qu'ils tissent avec la réalité, apparaît déterminant. C'est pourquoi l'étude s'appuie sur une idée force qui correspond à un objet d'étude développé dans nos premiers travaux de recherche sur la dimension expérimentale en mathématiques (Dias, 2004) :

la potentialité de la dimension expérimentale s'exprime dans le rapport problématique qu'entretiennent les objets mathématiques avec la réalité.

Cette dimension sera étudiée selon deux paradigmes de recherche, l'un dans le champ de l'histoire et l'épistémologie des sciences, et l'autre dans celui de la didactique des mathématiques. L'apport historique sera sollicité avec un statut d'outil pour la recherche et non pas à proprement parler avec de véritables objectifs de découverte. Il doit fournir un éclairage dans la compréhension des processus de construction des connaissances et d'appropriation des savoirs établis, et plus particulièrement dans les difficultés qui leurs sont associées. Ce faisant, il pourra aussi être question de souligner la récurrence des

bouleversements des certitudes scientifiques et autres changements de paradigmes qui jalonnent l'histoire des sciences tant dans la construction que dans la diffusion des connaissances. L'apport épistémologique permettra quant à lui de donner quelques indications de réponse concernant l'interrogation du statut des objets mathématiques.

Le champ didactique sera celui de la recherche de situations qui, tout en prenant en compte les apports historiques et épistémologiques, peuvent mettre en évidence les caractéristiques d'un milieu spécifique à la prise en compte de cette dimension expérimentale. Il s'agit aussi d'une étude des modèles de fonctionnement des connaissances en situation de résolution de problèmes. Pour cette étude, nous nous appuyons sur la notion de milieu dans la théorie de situations didactiques (Brousseau, 1988) et plus précisément sur l'étude des conditions et des caractéristiques du milieu pouvant être considéré comme celui d'une situation expérimentale en référence aux travaux de Bloch (2002). Une de nos hypothèses de recherche est que le savoir de l'élève, à la manière du savoir scientifique, se construit en interaction synergique entre les idées (développement d'hypothèses) sur l'action et le fonctionnement d'un objet; et sur la formulation langagière.

I – 3 Problématique et hypothèses de recherche

En fonction de ce que nous venons de présenter, notre problématique sera formulée de la manière suivante :

En quoi l'étude et la compréhension des caractéristiques épistémologiques et didactiques de la dimension expérimentale des mathématiques constituent-elles un levier pour l'amélioration de l'enseignement et des apprentissages de la discipline.

Il s'agira bien de rechercher des outils et instruments didactiques favorisant les apprentissages mathématiques, y compris pour des élèves en situation de handicap, et permettant de réduire les difficultés rencontrées par les enseignants dans l'exercice professionnel. C'est la recherche de cette fonction de levier qui sera centrale dans notre travail. Cela consistera notamment à déterminer les éléments susceptibles d'apporter une "valeur ajoutée" à la compréhension de la relation dialectique entre l'enseignement et l'apprentissage. Nous utilisons le mot levier en faisant référence à sa double définition en tant qu'objet et en tant qu'effet :

- Objet : instrument rigide et robuste qui permet la réduction des efforts dans une action,
- Effet : utiliser une interface pour faciliter la médiation dans un rapport problématique en vue d'une amélioration ou d'une conséquence bénéfique.

L'instrumentation dont il est question dans cette définition n'est pas seulement métaphorique, il s'agira bien de rechercher les outils et instruments didactiques les plus robustes et permettant la réduction des difficultés dans l'exercice professionnel de l'enseignant.

INTRODUCTION

Quatre hypothèses fondamentales sont présentes dans notre étude, elles forment l'architecture de la recherche et servent de "fil rouge" pour sa communication. Nous les présentons ici brièvement, mais elles seront bien entendu explorées tout au long de notre travail.

- La dimension expérimentale des mathématiques est fondée sur l'articulation entre forme et contenu en référence aux objets et à leur lien avec la réalité.
- La constitution d'un milieu doit prendre en compte simultanément les dimensions de l'apprentissage et de l'enseignement.
- La confrontation à la réalité de la classe doit être consistante et transférable, elle s'opère dans un milieu de type expérimental.
- Les liens qui unissent la recherche, la formation et l'enseignement sont au service de la diffusion et de la construction des connaissances.

chapitre II - Ancrages théoriques de la recherche

La réalisation de cette recherche ainsi que la présentation de nos travaux s'appuient sur deux ancrages théoriques principaux. Le premier est issue des travaux d'Isabelle Bloch (2002) et concerne l'analyse des modèles de milieux dans la recherche d'une articulation théorie / contingence. Nous l'utiliserons en vue de fonder l'architecture des deux premières parties de la thèse puisqu'il en guidera le déroulement en chapitres. Le deuxième provient des travaux de François Conne (Conne, 1999); il interroge le processus d'enseignement / apprentissage dans ses dimensions complémentaires ou contradictoires. Il nous servira essentiellement à fonder notre travail d'analyse des corpus mais servira également à fonder notre proposition de scénario de formation selon un triptyque chronologique utilisé dans la troisième partie de notre étude.

II - 1 Les modèles de milieu selon Bloch

La méthodologie de travail envisagée dans notre thèse s'appuie sur des moments didactiques chronologiquement distincts. Ces étapes peuvent s'apparenter à celles qui sont développées dans le cadre de l'analyse des modèles de milieux proposé par Isabelle Bloch lors de la onzième école d'été de didactique des mathématiques (Bloch, 2002) :

Il s'agit d'une élaboration ayant pour but de classer les éléments théoriques "milieux" de la théorie des situations suivant leur nature (du côté du savoir, du côté de l'expérimentation ou du côté de la contingence) et de leur fonctionnalité.

Nous avons retenu ce cadre d'analyse pour l'articulation qu'il propose entre le milieu expérimental a priori et la confrontation à la contingence, ce qui correspond à notre démarche générale de recherche. Nous l'utiliserons pour la structuration des deux premières parties de notre travail (partie A : étude épistémologique et didactique ; partie B : investigation contextualisée) ainsi que pour l'analyse des données provenant de nos expérimentations en classe.

Nous présenterons ici brièvement la classification proposée par Bloch : milieu théorique, milieu expérimental et confrontation à la contingence.

II – 1.1 Conception d'un milieu "théorique épistémologique"

Selon Bloch, le premier *modèle de milieu* fait référence à la constitution d'une situation didactique fondamentale dans la Théorie des situations didactiques (Brousseau, 1986). Un tel modèle s'appuie sur la recherche d'une relation consistante entre un savoir mathématique et un jeu de situations qui le fasse fonctionner comme une connaissance afin d'en permettre une institutionnalisation. Les problèmes permettant de faire fonctionner ce savoir comme une connaissance par les élèves doivent s'énoncer comme une série de questions finalisées, un panel de milieux matériels adaptés et une gamme de variables. Ce sont les références mathématiques, épistémologiques et culturelles de ces savoirs qui font de ce milieu sa spécificité dite "Théorique".

En suivant Bloch (2002), pour constituer ce milieu de type *Théorique*, il est nécessaire de :

- procéder à une analyse de la genèse historique du savoir en repérant ses manifestations anciennes ou contemporaines ;
- répertorier les fonctionnalités de ce savoir dans les mathématiques et dans d'autres disciplines scientifiques, en envisageant les éventuels obstacles épistémologiques relatifs ;
- mettre en évidence des savoirs et des connaissances mathématiques, culturelles et personnelles reliés au savoir visé ;
- élaborer une situation didactique (en référence à la théorie des situations didactiques élaborée par Guy Brousseau) ; c'est-à-dire concevoir un "jeu" capable de faire fonctionner ce savoir comme une connaissance par les élèves;
- rechercher des variables didactiques qui permettront la commande et le contrôle de la situation ;
- faire l'analyse prédictive de la consistance de la situation (en veillant à la non contradiction des variables en regard de la connaissance visée).

Nous mènerons cette élaboration d'un milieu théorique et épistémologique dans la situation de recherche des polyèdres réguliers que nous présenterons au chapitre trois de la première partie de cette thèse. Cependant nous ne prétendons pas que notre situation pourra être classée parmi les situations fondamentales telles qu'elles sont décrites par Brousseau (1986).

II - 1.2 Mise en œuvre d'un milieu "expérimental a priori"

Le deuxième modèle de milieu proposé par Bloch (2002) s'inscrit secondairement sur le plan chronologique de sa conception, comme une perspective de mise en œuvre du modèle théorique. Ce deuxième modèle est nommé "*a priori*" non pas pour signifier un caractère premier de sa nature, ni même dans un sens logique excluant la nécessité d'une

expérimentation. Il fait au contraire référence à cette notion d'expérimental dans sa dénomination, puisque l'une de ses raisons d'être est de tester ou de falsifier des hypothèses relatives au milieu de type théorique. La terminologie "*a priori*" fait pour sa part référence à son objectif de conduire une analyse a priori de la situation didactique.

Selon Bloch (2002), ce modèle de milieu n'est pas de type empirique car il n'est pas conçu d'après des observations effectuées en classe, mais au contraire en vue d'être tester par une confrontation à la contingence. Sa nature est encore essentiellement prédictive notamment quant à l'ergonomie de la situation qui sera mise en œuvre mais aussi en terme d'observables relatifs aux interactions entre les élèves et le milieu. Pour la constitution d'un milieu *expérimental a priori*, les étapes suivantes sont proposées par Bloch (2002):

- Construire une ingénierie didactique² effective relative à un objet de savoir dans une institution donnée;
- Anticiper et prévoir les comportements des élèves dans la situation (interactions significatives avec les différents éléments du milieu) ;
- Préparer le recueil des observables, leur organisation et leur interprétation;
- Etablir une liste de références didactiques et épistémologiques susceptibles de pouvoir analyser les situations d'enseignement;
- Analyser les connaissances mises en jeu dans la situation, les jeux possibles des élèves et du professeur.

Ce deuxième modèle de milieu sera utilisé de façon assez régulière dans les travaux que nous présentons dans le cadre de cette thèse. Il nous paraît tout à fait pertinent pour illustrer notre sujet relatif à l'analyse des conséquences de la prise en charge de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations d'enseignement et de formation. Notre méthodologie de type abductive repose en effet sur cette phase prédictive qui sert aussi bien de plateforme interrogative que de réceptacle aux informations provenant de la confrontation à la contingence, troisième et dernier modèle de milieu décrit par Bloch (2002). De plus, nous rejoignons encore une fois Bloch (2002), pour dire que l'outil d'analyse du milieu expérimental a priori est la structuration du milieu (Margolinas, 1995, 2002).

² En référence à Douady (Repères IREM n°15, 1994), nous utiliserons ici la définition suivante de l'ingénierie didactique : "L'élaboration d'un problème est un pas d'une ingénierie didactique. Dans ce contexte, le terme d'ingénierie didactique désigne un ensemble de séquences de classe conçues, organisées et articulées dans le temps de façon cohérente par un maître-ingénieur pour réaliser un projet d'apprentissage pour une certaine population d'élèves."

Milieu - Construction		P. – noosphère	S. - noosphère
Milieu - Projet		P. – constructeur	S. – construction
Milieu - Didactique	Elève - réflexif	P. projeteur	S. - projet
Milieu apprentissage	Elève	Professeur	Situation didactique
Milieu - Référence	Elève - apprenant	P. - observateur	S. - apprentissage
Milieu - Objectif	Elève - agissant		S. référence
Milieu -Matériel	Elève - objectif		S. - objective

tableau 1 : Structuration du milieu selon Margolinas (2002)

Cet outil prédictif permet d'anticiper les relations et interactions à différents niveaux et ainsi d'analyser l'adéquation entre les connaissances des élèves et le savoir mis en jeu par le professeur dans la situation.

D'une façon générale, ce modèle de milieu permet une description très analytique au niveau de l'enseignement, et représente un atout précieux pour la recherche concernant la compréhension du fonctionnement d'un milieu didactique.

II – 1.3 Confrontation à la contingence en comparant des contextes d'enseignement et de formation

Bloch (2002) termine sa proposition par une étape qui ne s'apparente pas tout à fait à un troisième modèle de milieu puisqu'elle parle d'une "*confrontation à la contingence*". Cette phase correspond davantage à un test des prédictions conduites dans le modèle expérimental a priori, mais aussi à un dispositif de régulation/modification des éléments décrits dans le modèle théorique. Les objectifs en sont les suivants :

- Analyser les effets de l'introduction d'une phase expérimentale dans le milieu en comparant plusieurs contextes d'enseignement (élémentaire et spécialisé dans notre cas);
- Analyser les effets de l'enseignement observé, par référence à un modèle expérimental et procédant d'une situation fondamentale;
- Mettre en relation les observations avec les modèles du savoir mathématique visé : remonter au niveau de la situation fondamentale;
- Déterminer les variables qui ont été productrices des effets observés;

- Revenir à une modalité expérimentale, c'est à dire disposer de situations construites en référence au modèle épistémologique.

Pour nous, cette phase est essentielle du fait de sa place dans l'articulation entre le prévisible et l'observé. C'est grâce à cette analyse que nous pouvons revendiquer l'abduction de notre démarche de recherche. La mise à l'épreuve des situations construites par l'observation en classe permet non seulement des études comparatives entre les contextes d'enseignement / apprentissage visant à tester la robustesse des situations et dégager des invariants, mais aussi l'apparition de phénomènes inattendus, de surprises didactiques (Conne, 2006) permettant d'enrichir en retour les phases de conception de chercheur.

II – 2 Le processus dialectique enseigner / apprendre chez Conne

Notre deuxième ancrage théorique principal provient d'un article de François Conne (Conne, 1999) issu d'un ouvrage collectif dont l'objet est la publication des actes d'un symposium en didactique des mathématiques. Ce colloque s'est déroulé en 1999 à Montréal dans le cadre des activités du réseau international de recherche en éducation en en formation. Ce symposium invitait des chercheurs européens et québécois ayant une pratique de recherche en didactique des mathématiques, à situer "le rôle du cognitif dans leurs recherches théoriques et expérimentales". L'article de Conne sera pour nous une sorte de fil conducteur tout au long de nos travaux dans cette thèse, mais il sera surtout mis en lumière lors de la dernière partie (partie C) consacrée au scénario de formation. Ce cadre d'analyse propose une réflexion en triptyque qui nourrira notre méthodologie de recherche et de formation :

- faire des mathématiques,
- faire faire des mathématiques,
- et "*regarder ce que cela donne*".

Trois points de vue qui nous semblent à la fois complémentaires et indissociables dans le cadre de notre recherche. Ils nous permettent notamment de comprendre en quoi le processus enseigner/apprendre est de type dialectique. Nous souhaitons présenter ici de façon assez détaillée les éléments de ce cadre théorique en terme de problématique, d'objet et d'hypothèses de recherche.

II – 2.1 Problématique poursuivie

Selon Conne, si apprendre c'est "faire et refaire", l'enjeu de l'apprentissage réside dans le contrôle de l'activité en cours, un contrôle qui peut s'avérer difficile dans certains contextes d'apprentissages comme celui de la résolution de problèmes (et qui plus est dans l'enseignement spécialisé). Le savoir (et/ou le savoir faire) en est l'aboutissement mais ne peut donner que très rarement une vision claire de son apprentissage au sujet. En considérant alors que le processus d'enseignement a les caractéristiques d'un apprentissage, quelle articulation peut-on concevoir entre le "faire des mathématiques" et le "faire faire des mathématiques" ? Cette interrogation peut se compléter avec deux autres questions complémentaires le tout permettant de formuler une véritable problématique :

- Quelles sont les données expérimentales à observer dans les interactions sujet/milieu/objet ?
- Quels sont les médiateurs didactiques à utiliser par l'enseignant pour entretenir le bon rapport à l'ignorance ?

Une problématique que nous trouvons très pertinente dans le cadre de nos propres travaux de recherche et qui nous conduit à une série d'éclairages complémentaires afin d'asseoir notre réflexion dans la troisième partie de notre travail consacrée à l'élaboration d'un scénario de formation.

II – 2.2 Objet de la recherche

Pour prendre connaissance de la complexité de l'acte d'enseigner, il est nécessaire d'analyser la distance entre l'activité enseignante et l'activité enseignée. Si l'enseignant connaît bien les mathématiques qu'il enseigne ("*il les sait*"), il lui est plus facile de concevoir des moyens de faire faire des mathématiques aux élèves. Ce niveau de connaissance des mathématiques lui permet aussi, au moins en apparence, de contrôler la situation. En contrepartie, plus le maître a prise sur les mathématiques et la situation, plus il lui est difficile d'objectiver ce que font les élèves. Regarder ce que produisent l'activité enseignante et l'activité enseignée nécessite que l'enseignant soit informé ou attentif aux issues possibles et souvent imprévisibles de l'enseignement. Cela suppose aussi que dans le processus d'enseignement, les mathématiques ne soient pas seulement versées du côté de l'objet, du dispositif et du faire (de la tâche).

Regarder ce que produit l'activité enseignante c'est tenter d'établir une correspondance entre les pensées respectives des élèves et de l'enseignant.

Même si le cognitif est à l'étude dans le processus d'apprentissage des élèves, l'objet de la recherche se situe régulièrement dans le champ didactique. François Conne s'intéresse au cognitif dans les études en didactique des mathématiques, il entre par la question des savoirs mathématiques ce qui est spécifique de la didactique parmi les disciplines s'intéressant à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

II – 2.3 Hypothèses de recherche

Dans son article, Conne propose plusieurs conjectures relatives à l'activité enseignante, au milieu de la situation didactique ainsi qu'à l'apprentissage des élèves qui nous paraissent pertinentes dans le cadre de notre étude. Nous les présentons ici comme des hypothèses de recherche que nous intégrerons pour partie dans le cours de la thèse.

Pour Conne, l'activité d'enseignement "le faire faire" ne suffit pas à installer des pratiques mathématiques mais cela permet de créer des expériences de pensée. C'est la raison pour laquelle il distingue le "faire des mathématiques" du "faire faire" qui consiste à installer une interaction entre un sujet et un dispositif afin de provoquer la rencontre sujet/objet. Le rapport dialectique existant entre ces deux activités fonde la plupart des difficultés dans la pratique professionnelle des enseignants même les plus avertis.

Pour Conne, le professeur ne peut enseigner sans interagir avec le milieu, il fait partie de la situation en tant qu'élément du milieu. C'est d'ailleurs ce dernier qui permet d'induire, de provoquer, de diriger l'interaction donc d'agir sur la dynamique de l'interaction et non pas sur sa nature. Cette conjecture nous permet de considérer que certaines interventions du professeur peuvent apparaître aux élèves comme une rétro-action du milieu, mais que cela est en lien avec la notion de contrat didactique au sein de la classe. Ainsi l'activité enseignante ne doit pas être considérée comme externe au processus d'apprentissage des élèves.

On ne peut pas faire faire des mathématiques en déléguant à l'élève l'activité et en se contentant d'orchestrer (diriger, piloter, contrôler).

Nous souhaitons maintenant apporter quelques remarques sur les trois points de vue didactiques proposés par Conne pour modéliser le processus d'enseignement / apprentissage : "faire, faire faire et regarder ce que ça donne".

II – 2.4 Qu'entend-on par "faire des mathématiques" ?

Pour répondre à la question, il est nécessaire d'observer le point de vue du sujet dans son rapport aux objets mathématiques, il s'agit en quelque sorte d'analyser l'axe de l'apprentissage.

§ *créer et animer des objets de pensée*

Qu'est-ce que faire des mathématiques pour un sujet ? Telle est la question abordée dans ce tout premier paragraphe. Faire des mathématiques c'est créer et animer des objets de pensée dans son propre "*laboratoire interne*". Le statut d'un objet mathématique est propre à l'expérience de chaque individu; ceci ne facilite pas la tâche de l'observateur (enseignant, formateur, chercheur) qui souhaite comprendre le processus d'apprentissage en rendant intelligible les phénomènes inattendus ou imprévus.

§ *entrer dans les pratiques mathématiciennes*

Il est nécessaire d'établir une distinction entre activité et pratique mathématicienne. Tout au long de cet article, Conne insiste sur cette dialectique permettant d'articuler savoir et connaissance. Ainsi il dénonce régulièrement la confusion entre activité et pratique en montrant que c'est plus souvent (et tout naturellement) la pratique mathématique qui est visible et lisible pour le sujet enseignant. Le risque principal de la confusion est alors pour l'enseignement "l'effet Jourdain" énoncé par Brousseau (1986).

§ *l'interaction sujet/objet comme modèle de la pensée en acte*

Les différents acteurs d'une situation entretiennent des rapports personnels et différents avec le milieu. Ils ne sont pas substituables les uns aux autres. Les objets mathématiques pensés sont issus des interactions entretenues d'abord avec les objets matériels et/ou symboliques. Ces interactions ne sont pas statiques mais évolutives. Elles transforment la situation et induisent à leur tour de nouveaux jeux à l'étude du contrat didactique.

Conne conclut par la définition de l'activité mathématique : "*interaction d'un sujet avec un milieu propice aux pratiques mathématiciennes*".

§ *apprendre, savoir, enseigner*

Envisager le savoir comme une finalité de l'apprentissage détermine un enjeu : le contrôle de l'activité par le sujet. Dans la déclaration "*apprendre c'est faire et refaire*" le terme refaire est à prendre sous une acception extérieure au sujet. Le fonctionnement répétitif d'une telle boucle aboutit à l'acquisition du savoir. Ce dernier permet alors à l'individu d'exercer un contrôle de son activité et le dispensera à l'avenir de "refaire".

En considérant alors le processus d'enseignement comme un apprentissage, se pose la question du rapport à l'ignorance. En allégeant le sujet dans sa vigilance, le savoir acquis oblitère la conscience des niveaux d'apprentissages ce qui rend difficile d'entretenir le rapport à l'ignorance. Dilemme crucial pour un enseignant qui chercherait à comprendre et analyser l'erreur...

II – 2.5 Faire faire des mathématiques

Pour ce second point de vue du triptyque, l'interrogation porte désormais sur l'axe de l'enseignement. Il s'agit d'adopter le point de vue du professeur dans son rapport à l'interaction sujet/objet.

§ *le "faire des mathématiques" de l'enseignant*

Certes, dans une situation d'apprentissage l'élève et l'enseignant font des mathématiques. Mais ils ne font pas les mêmes car leurs activités diffèrent, ils ne traitent pas des mêmes objets. L'enseignant a prise sur la situation grâce à sa connaissance des enjeux de la situation. Cet avantage s'accompagne néanmoins d'une difficulté : le fait de connaître les développements et les réponses gêne considérablement la perception des obstacles que les élèves rencontrent.

§ *faire et faire faire*

On considère généralement que les activités de l'enseignant et des élèves sont différentes au sein d'une situation d'apprentissage en classe. Les mathématiques que font le maître sont de l'ordre du "faire faire" alors que celles de l'élève sont tournées vers un autre objectif : apprendre. L'activité enseignante comporte de nombreuses tâches :

- suivi de l'interaction de l'élève (des élèves...) avec le milieu,
- suivi des pratiques de l'élève,
- suivi des évolutions et transformations du milieu.

"La nécessaire collaboration entre l'enseignant et l'élève amène le maître à opérer pour lui-même (et en-acte) une transposition de son savoir mathématique qui devient pour lui un savoir-faire didactique (connaissance utile pour enseigner).

La notion d'utilité de la connaissance (et du savoir) est étudiée dans un article antérieur "Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique" (Conne, 1992). Elle renvoie à une orientation pragmatique : *"la connaissance, qui est toujours en situation, s'objective relativement au critère d'utilité."* (Conne, 1992)

§ *activités et pratiques : enseignantes, enseignées*

Un dilemme pour l'enseignant : plus son savoir est important plus la conception des pratiques (tâches) est aisée mais plus l'identification de ce que font (et ne font pas) les élèves est difficile. Une issue pourrait alors être envisagée dans la centration de l'enseignant sur les performances de l'élève et la répétition de boucles permettant l'accès à des méthodes de plus en plus générales. Mais si le savoir peut s'envisager comme finalité dans ce processus, le sens quant à lui est renvoyé exclusivement au niveau du "faire".

Pour permettre à l'élève d'exercer un contrôle sur le sens il est nécessaire que les transformations du milieu et de la situation soient objectivées pour l'élève et fassent partie de l'échange didactique. Le maître doit de plus garantir la conformité au savoir de référence, à la fois des mathématiques enseignées et des mathématiques apprises. (Conne, 1999)

§ *une vision trop simple de l'enseignement : le partage des tâches*

On pourrait penser qu'enseigner les mathématiques revient pour l'enseignant à savoir beaucoup de mathématiques puis à installer en classe une pratique mathématicienne (que l'on pourrait qualifier de scolaire). Dans cette vision "*simpliste*", le maître et l'élève développent des activités propres sans interaction, sans collaboration effective. L'enseignant en sera alors quitte de reconnaître des mathématiques dans ce que l'élève fait en réponse de commandes du maître : les effets Jourdain (Brousseau, 1986) sont ainsi garantis ! Pour sortir d'un tel schéma, l'enseignant doit dévoluer le savoir et pas seulement les tâches dans une situation d'enseignement.

§ *une centration excessive sur les objets*

Chaîne simpliste de procuration : [le maître fait] - [faire des mathématiques à ses élèves]

Ce paragraphe du texte de Conne est consacré à la dénonciation d'une certaine conception dite "classique" de l'enseignement. Avec un tel point de vue, les pratiques enseignantes privilégient les tâches, croient aux vertus suffisantes des manuels, bref, on croit aux bons dispositifs et aux bons objets. On sous-entend qu'ils induisent nécessairement les bonnes interactions sujets/objets. Le seul contrôle à réaliser pour l'enseignant est celui de la conformité des productions d'élèves (traces de l'activité) aux attendus du dispositif. Dans un tel schéma, les réussites des élèves ne sont jamais soumises à analyse, seuls les "ratés" déclenchent un signal.

"L'autre thèse" est la confrontation de la pensée de l'élève à des réalités qui lui posent (encore) problème. Ce qui implique une certaine "ouverture" de la situation à son évolution vers une direction imprévue. Le "pilotage" de l'enseignant est alors plus délicat et pas toujours facile à assumer par les enseignants trop souvent insuffisamment formés à l'analyse des productions, à l'observation de l'activité mathématique de leurs élèves, et à la comparaison de leur propre activité mathématique avec celle des élèves.

§ *la formation des enseignants*

Les enseignants sont recrutés parmi les individus sachant beaucoup de mathématiques (au moins pour l'enseignement secondaire en France), on peut penser qu'il ne reste à les former

que sur le "faire faire". Cette position occulte la réflexion sur la nécessaire distinction entre pratique et activité et surinvestit la formation en préparation au "faire faire". Cette centration sur les objets d'enseignement peut avoir les mêmes dérives en centre de formation initiale que dans la préparation de la classe : croyance dans les "bons" dispositifs, les "bonnes" situations, les "bonnes" méthodologies.

§ *des choses à faire, des choses accomplies à repérer*

Dans les représentations communes de l'enseignement des mathématiques, le faire est du côté de l'élève dont le maître n'a qu'à analyser les productions. Ces interprétations sont pré-établies à l'école car indexées au programme. La progression de l'élève est considérée comme un parcours dans un programme dont les objets sont garantis. La part diagnostique de l'appareil didactique revient à mettre en œuvre un ensemble de moyens de repérage de l'élève dans le cursus. Ainsi, l'activité de l'élève peut être considérée comme une succession de performances établissant un niveau de compétences.

Si la production de l'élève est pré-interprétée par le programme et que la seule question est celle de sa conformité à l'objet d'enseignement, il n'importera alors que la comptabilisation des tâches accomplies et des épreuves surmontées.

Conne présente ensuite trois observations critiques à l'égard des enseignants :

1. Il dénonce tout d'abord ce qu'il appelle "la mode de la métacognition". Cette méthodologie consacrant le retour au "méta" renforce selon lui la centration sur le "faire".
2. La deuxième observation concerne la naturalisation des objets mathématiques due aux apports de la psychologie cognitive et aux théories concernant les stades de développement. Les dérives de ces apports peuvent aussi renforcer la confusion pratique/activité et laisser à penser que l'activité mathématique est naturelle quand on propose aux sujets des situations adaptées.
3. La troisième observation renvoie à "l'excès de confiance" des enseignants concernant la garantie de la transposition offerte dans les programmes. Garantie qui concernerait aussi le sens des tâches scolaires.

§ *l'élève en difficulté*

Dans les "représentations communes", l'échec scolaire individuel n'est que l'échec de l'élève et ne peut être imputé aux objets du programmes. Dans ce cadre, la réponse didactique se limitera à une régression dans le programme. Dans les cas persistants, une aide extérieure (psycho-sociale) pourra être envisagée. Tel est le processus décrit par Conne concernant le traitement de la difficulté à l'école aujourd'hui.

II – 2.6 Regarder ce que ça donne

"Regarder ce que ça donne oblige à "refaire" donc permet d'accéder au niveau de l'activité."

§ *le retour sur l'expérience*

L'idée de faire du couple enseignant / enseigné un sujet est fondée sur l'analogie du point de vue des activités en jeu, entre processus d'enseignement et processus d'apprentissage :

- l'enseignant comme l'élève progressent vers un contrôle accru de leurs activités respectives afin de limiter les processus de reprise et de répétition,
- il ne va pas de soi qu'un sujet puisse réfléchir a posteriori sur son apprentissage,
- le rapport à l'ignorance est rapport à l'incertitude pour l'enseignant comme pour l'apprenant.

Le rapprochement des activités de l'enseignant et du chercheur a lieu dans le retour au terrain expérimental : regarder ce que ça donne. C'est une posture relativement inhabituelle pour un professeur qui situe davantage son action dans la conception et la conduite de sa classe. Nous rejoignons ici le modèle de Bloch (2002) dans sa proposition de "confrontation à la contingence" afin d'assurer cette phase méta-didactique. Conne insiste sur le caractère déstabilisant de cette posture tant elle confronte les acteurs avec une forme d'incertitude d'une activité professionnelle pourtant fondée.

§ *le caractère imprévu de certains évènements rencontrés en enseignant*

L'une des finalités de l'apport didactique aux enseignants est de les aider à passer de la déstabilisation créée par la surprise à l'analyse afin de rendre intelligible les imprévus. Il s'agit ainsi de transformer les difficultés en questionnement professionnel, sans pour autant chercher à éliminer les surprises qui sont de toute façon constitutives de l'acte d'enseignement. On peut par exemple passer de la surprise à la tentative de catégorisation des réponses des élèves.

Pour Conne, il est même fondamental pour l'observation et l'expérience de se trouver en position d'être surpris. Les surprises doivent alors être analysées, décontextualisées : c'est l'apprentissage du chercheur. Comme dans le modèle de Bloch (2002) présenté auparavant, la confrontation à la réalité, à l'expérience de la classe a des répercussions sur l'environnement didactique conçu en amont pour autant qu'on se donne les moyens de le prendre en compte. Cette posture de praticiens réflexifs dévolue aux professeurs est un sujet d'interrogation pour la recherche en didactique.

§ *Les enseignants doivent-ils être des chercheurs, des didacticiens ou des praticiens réflexifs ?*

En considérant que l'enseignant fait partie intégrante du milieu de la situation didactique, il doit, selon Conne, gérer trois rôles en simultané : *"faire, faire faire, et, regarder ce que ça*

donne". Que devient alors le métier d'enseignant, quelles sont les compétences que l'on est en droit d'attendre de lui ?

On sait depuis longtemps que faire des mathématiques est une activité qui ne réussit qu'à une petite partie de la population en cours d'étude, et ce, quel que soient le niveau considéré et l'âge de l'apprenant. Les caractéristiques bien particulières des savoirs mathématiques en sont probablement grandement responsables comme le rappelle François Conne. Si l'on considère alors que seuls les individus entretenant de bons rapports avec ces savoirs peuvent en acquérir un grand nombre, voici défini un échantillon bien particulier. Ce sous-ensemble ainsi constitué est institutionnellement repéré comme le réservoir potentiel des futurs enseignants, à savoir des individus capables d'apprendre. C'est bien entendu sur la polysémie du mot apprendre et sur les relations entre les deux sens que réside toute la problématique institutionnelle de définition des critères de reconnaissance des individus "capables d'enseigner". Conne nous rappelle que la vision simpliste : capacité à apprendre (acquérir) = apprendre à apprendre (faire acquérir) est connue comme insuffisante depuis assez longtemps mais, cependant perdure dans la noosphère des milieux décideurs. Pour dépasser ce schéma, il faut envisager que l'acte d'enseignement nécessite des connaissances épistémologiques et didactiques concernant les savoirs mathématiques, ce qui rejoint la proposition de Bloch (2002) que nous avons présentée précédemment. Le métier d'enseignant comporte alors une dimension nouvelle, on passe à une vision plus complexe :

le maître sait des choses sur (le maître fait – faire des mathématiques aux élèves)

Les savoirs en question peuvent être considérés comme des savoirs professionnels comportant deux dimensions : une dimension didactique et une dimension pédagogique. Reste alors à s'interroger sur l'apprentissage de ces savoirs, naissent-ils de l'expérience ou d'une formation ?

Enfin, on peut encore augmenter la complexité de ce modèle en revendiquant que l'enseignant doit entretenir "un certain rapport à l'ignorance", et se trouver ainsi régulièrement dans sa pratique et son activité en position d'être surpris. C'est le sens de l'expression "regarder ce que ça donne". L'enseignant devient alors enseignant-chercheur. Pour réussir dans cette mission, il faut nécessairement envisager de nouveaux moyens de formation initiale mais aussi continue.

§ *Conclusion*

"Faire des mathématiques" est une pratique qui doit rester au service de l'activité mathématicienne sans jamais être confondue avec elle. Dans ce modèle, il est primordial de s'interroger sur le statut des objets mathématiques : objets de pensée, objets pensés, objets formulés ou objets représentés ? C'est l'enjeu de notre prochain chapitre.

Mais, "faire des mathématiques" c'est aussi cultiver une activité mathématicienne pour entretenir un rapport à l'ignorance. "Faire faire des mathématiques" conduit l'enseignant à organiser la rencontre des pratiques pour permettre la confrontation des activités au sein d'une situation comportant une intention didactique. La collaboration maître-élève au sein de la

situation peut alors être représentée par des interactions de type discursif utilisant un support langagier. Cette médiation sera aussi un objet d'étude dans la deuxième partie (partie B) de notre thèse.

"Regarder ce que ça donne" est avant tout une méthodologie de travail pour l'enseignant-chercheur reposant sur l'expérimentation. Mais comment apprendre à devenir enseignant, enseignant-didacticien et enseignant-chercheur, tel est le champ de recherche ouvert en troisième partie (partie C) de cet écrit.

PARTIE A :

ETUDE EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE

Introduction

Nous situons l'enjeu de notre recherche dans les potentialités pour l'apprentissage, de la dimension expérimentale telle qu'elle s'exprime principalement dans le rapport qu'entretiennent les mathématiques avec la réalité. Si les mathématiques parlent du monde, qu'elles permettent de le décrire et de le comprendre, alors c'est que ses objets entretiennent un lien avec une certaine forme de réalité. Une forme du réel représenté par des symboles et des signes qui, pour autant qu'ils sont mathématiques, n'en sont pas moins susceptibles d'être porteurs de contradictions. Leur signification est souvent conventionnelle, parfois contingente, ce qui fait de cette science raisonnable pour les grecques une discipline "falsifiable" pour Popper. Le processus de signification des objets mathématiques obéit aux mêmes lois que les autres, subit les mêmes effets de traduction. Cette absence de "transparence" ajoute à la difficulté d'accéder à leur maîtrise ou pour le moins à leur connaissance déjà obliérée par leur degré d'abstraction souvent cité et bien connu des milieux éducatifs.

Accéder à la connaissance scientifique ne se fait pas sans un environnement didactique, sans une intention d'enseigner. C'est pourquoi nous situons notre propos dans une constante articulation entre référence épistémologique et observation didactique comme en témoigne le sommaire de notre travail. Pour nous, l'épistémologie est un outil consistant pour la didactique puisqu'elle fournit des éléments de compréhension déterminants concernant la construction des connaissances scientifiques. Elle permet notamment d'interroger la spécificité de ces savoirs scientifiques dans leur rapport aux autres savoirs, mais elle est également nécessaire à la compréhension des processus qui en permettent la validation. Il est pour nous incontournable de mener une réflexion épistémologique sur les objets de savoirs scientifiques et plus particulièrement sur leur nature dans le champ des mathématiques, discipline souvent présentée comme ne traitant que d'objets idéaux. Nous essaierons de montrer en quoi cette vision très Platonicienne est génératrice d'un certain nombre d'obstacles dans l'environnement didactique et plus précisément dans le rapport dialectique entre enseigner et apprendre.

Notre hypothèse de recherche principale est que la construction des savoirs et connaissances scientifiques nécessite un recours à l'expérimentation dans un environnement didactique spécifique. Puisque notre travail d'investigation concerne la recherche d'une organisation didactique pertinente pour la construction des connaissances, il nous est apparu important de traiter de plusieurs rapports dialectiques entre ces concepts : expérience et expérimentation, objet théorique et objet sensible, concret et abstrait, familier et nouveau. Les concepts à l'étude dans notre recherche (expérience, expérimentation, objets, réalité) nécessitent avant

tout une explicitation s'appuyant sur la philosophie des sciences, du fait de leur relative indétermination. Nous ferons régulièrement des encarts épistémologiques pour les situer dans notre propos.

Dans la partie consacrée à la réflexion didactique, nous traiterons plus précisément de la notion de milieu qui nous paraît centrale dans notre problématique. A partir des modèles existant empruntés à Bloch (2002), nous construirons progressivement un nouveau schéma représentatif de l'environnement didactique qui nous semble pertinent dans l'objectif d'intégration de la dimension expérimentale des mathématiques que nous poursuivons. Nous verrons en quoi ce modèle est approprié à la notion d'expérimentation telle qu'elle sera définie sur le plan épistémologique, mais aussi de quelle manière il permet de comprendre la relation didactique dans un contexte d'enseignement particulier. Nous étudierons notamment les médiations qu'il permet entre les objets de savoirs et l'apprentissage (médiation langagière et instrumentale).

Pour terminer cette partie de notre travail, nous présenterons une situation d'enseignement / apprentissage dans ses dimensions épistémologique et didactique : la recherche des polyèdres réguliers. Cette situation nous permettra de mettre en lumière l'articulation nécessaire entre les différents concepts à l'étude dans notre travail de thèse. Elle sera l'objet de plusieurs mises en œuvres dans une recherche de confrontation à la contingence dans la troisième partie de cette thèse.

chapitre I - La dimension expérimentale des mathématiques

Expérimenter en mathématiques, pratiquer la démarche expérimentale, ces expressions ont un sens très précis dans notre travail de thèse. Il ne s'agit en aucun cas d'assimiler l'expérimentation à une démarche qui prône la manipulation en lieu et place de l'observation et qui serait intrinsèquement source et garantie de connaissance. L'expérimentation telle que nous l'entendons n'a de sens que par ses articulations avec la formulation (dimension langagière) et la validation (par la preuve). Le va-et-vient entre théorie et expérience est précisément ce qui caractérise une démarche de type expérimentale. Il n'y a pas d'un côté les aspects expérimentaux et de l'autre côté la preuve, entre lesquels il faudrait choisir. Au sein de la problématique que nous présentons dans cette thèse, nous souhaitons définir l'expérimentation grâce à plusieurs propositions.

§ Expérimenter c'est rencontrer l'incertitude

De Bacon à Claude Bernard en passant par Descartes, les sciences ont gagné leur dimension expérimentale grâce à une nouvelle démarche d'accès aux connaissances cultivant le doute théorique. L'expérimentation est liée à des contextes d'incertitude car expérimenter c'est avant tout chercher, se frotter à l'inattendu. L'expérimentation est une intervention (Hacking, 1989) dont l'intention est la provocation d'un phénomène, la création de quelque chose, mais quelque chose que l'on ne saurait prévoir, ni anticiper. Expérimenter comporte une dimension active à distinguer d'une autre plus passive qui consiste à "faire l'expérience de" comme nous le développerons plus loin (dialectique expérience / expérimentation). La notion d'expérience cruciale, c'est-à-dire d'une expérience censée trancher entre un certain nombre d'hypothèses également plausibles et mutuellement incompatibles, n'a de sens que dans une situation où la connaissance se trouve face à face avec ses propres incertitudes. L'expérimentation consiste alors à aller chercher hors de soi la source d'une décision sans cela inaccessible. Expérimenter c'est organiser de façon méthodique un fait, une décision de l'extérieur et ce n'est pas seulement observer ou manipuler sans intention.

§ Expérimenter c'est construire un réel partagé

Nous nous référons à Lelong (Lelong, 2004) pour cette terminologie de réel partagé qu'il distingue du réel perçu.

"En nous référant à l'expérience du mathématicien, il est aisé de préciser ce réel partagé en le comparant au réel perçu. Le réel perçu était validé par la succession de deux processus élémentaires, une perception au départ, suivie elle-même d'un certain contrôle des sens qui vaut affirmation d'existence.

Pour le réel partagé, le point de départ n'est plus sensoriel, il se présente comme un désir nous dirigeant vers une stratégie de réalisation. Cependant, comme le fait le réel perçu, il cherche d'abord à nous transporter ailleurs. Cet ailleurs nous pousse à une conceptualisation, c'est-à-dire à l'insertion d'un concept ou au moins d'une perspective nouvelle. Le plus souvent il se présentera comme une ambition, une «idée de faire quelque chose», comme on dit familièrement." (Lelong, 2004, p95)

Nous suivons Lelong pour dire que l'accès aux objets de savoirs des mathématiques s'exprime et se réalise dans un projet plus social qu'individuel. C'est la mise en mots (formulation, argumentation, validation), la communication de signes et de symboles qui caractérise le dispositif d'expérimentation dans son objectif de réalisation.

Un bref détour historique nous permet de conforter cette hypothèse. L'avènement des sciences dites expérimentales dès le début du XVII^e siècle¹, correspond à la création des grandes académies des sciences. L'enjeu fut très rapidement de démontrer la prédominance d'une activité expérimentale dans la construction et la validation des savoirs scientifiques notamment par le développement d'outils de communication sous forme d'écrits (mémoires, traités, comptes rendus puis publications). La dimension expérimentale dans la démarche scientifique s'accompagne d'une incontournable production d'écrits à destination d'un public visé comme instance de validation des faits exhibés. Cette démarche scientifique vise la construction d'une nouvelle réalité, celle qui est construite dans le cadre d'un laboratoire et dont l'existence dépasse très largement sa production. Expérimenter consiste à partager des interventions sur les choses du monde et sur les idées qui leur sont associées, un partage au sens d'acceptation conjointe (processus de validation) après contrôle.

§ *Expérimenter c'est interagir avec des objets selon un rapport dialectique*

Dans notre cadre de recherche, recourir à la dimension expérimentale c'est permettre et surtout multiplier les allers et retours entre objets (réels et formels, sensibles et théoriques) par des confrontations (adéquation, non adéquation), des vérifications (confirmer ou infirmer une hypothèse), des argumentations (prouver un raisonnement, convaincre dans un débat). Les va-et-vient se font entre les modèles (puisque l'on fait référence à des objets qui ne sont pas donnés mais construits) et des axiomes. Il s'agit d'*articuler forme et contenu dans la perspective ouverte par Tarski d'une définition des objets qui soit matériellement adéquate et formellement correcte* (Durand Guerrier, 2004). Nous précisons ici que la notion de « réalité »

¹ Nous pensons ici à l'académie des Lynx fondée en 1603 dont l'un des célèbres adhérent fut Galilée, même si le véritable avènement des sciences expérimentales est plutôt situé au début du siècle suivant.

ou « d'adéquation matérielle » ne se limite pas aux objets matériels, mais comprend les objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet pour que les rétroactions du milieu, consécutives à ses actions, lui fournissent des informations fiables sur lesquelles s'appuyer pour émettre des conjectures et/ou s'engager dans un processus de preuve.

§ *Expérimenter c'est construire du "nouveau" à partir du "familier"*

Nous faisons souvent référence à Hacking (1989) pour nos tentatives de définition de la notion d'expérimentation. Nous souhaitons revenir ici sur le titre de son ouvrage de 1983 "*Representing and intervening*" traduit en français de façon assez malhabile selon nous par "*Concevoir et expérimenter*". Le titre original d'Hacking dégageait une notion beaucoup plus engagée avec la terminologie d'intervention sur le monde pour décrire l'expérimentation. Il était question d'une réelle création de nouveaux phénomènes à partir d'éléments plus familiers, le "déjà là".

Si l'expérimentation est une étape de création, il nous semble important d'ajouter que les nouveaux objets construits doivent être référés à des traces de connaissances plus familières, et cela surtout dans le cadre d'un environnement didactique². Ainsi, le défi pour l'enseignement est de développer des situations d'apprentissage qui permettent les aller-retour entre les deux. Si, comme l'affirme Paul Langevin dans *La pensée et l'action* (Langevin, 1950), "*Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage*", nous souhaitons préciser que les objets qui permettent l'expérimentation ne sont pas nécessairement des objets matériels. Ce sont des objets suffisamment familiers pour le sujet, qui servent de domaine d'expérience pour construire des connaissances plus complexes. C'est par exemple le cas des nombres entiers et de leurs propriétés élémentaires pour la théorie des nombres³.

I - 1 Le rôle central des objets dans l'élaboration des savoirs⁴

Concret ou abstrait, sensible ou théorique, réel ou idéal l'objet scientifique est par nature externe à l'individu puisqu'il se définit en opposition au sujet. L'existence de l'objet se réalise soit par la perception soit par le langage, selon une grammaire (une axiomatique) et des références (les connaissances acquises). Ainsi, si l'objet se définit comme distinct de l'acte par lequel un sujet le perçoit, il n'en reste pas moins accessible que par une représentation, une connaissance préalable ou une pensée. Elaborer des savoirs, construire des connaissances

² Pour la dialectique ancien-nouveau dans l'enseignement et l'apprentissage, voir Assude (2002).

³ Sur ces questions, voir la réponse de Viviane Durand Guerrier à Anne Watson à paraître en 2008 dans la revue *For the learning of mathematics*.

⁴ Ce paragraphe est en partie repris du cours que nous avons donné à l'école d'été de didactique des mathématiques, Ste Livrade, août 2007, à paraître dans ses actes.

relève d'une mise en réseau organisée dans laquelle les objets sont par exemple la valeur des nœuds (ou sommets) en théorie des Graphes. Dans cette interprétation, deux difficultés principales apparaissent dans l'élaboration des savoirs. La première est que les liens s'établissent selon des règles logiques qu'il faut maîtriser ou pour le moins mettre en actes. La deuxième concerne la nature des objets sur lesquels portent les enjeux de vérité (Durand Guerrier, 2008).

Dans ce paragraphe nous utiliserons un propos dialectique par opposition à une conception statique du réel et des idées, afin de qualifier le processus de transformation grâce au jeu des contradictions. Epistémologiquement parlant, cela consiste à qualifier des relations d'implication réciproque (par exemple entre théorie et expérience).

I - 1.1 La dialectique objet sensible / objet théorique

« Une dialectique, c'est un jeu d'idées et de concepts que nous édifions à partir de notre information, à partir du donné et de l'acquis, dans le but de [nous] mieux saisir du réel » (Gonseth, cité par Sinaceur, 1993, p.191)

« Dans ce premier sens , une dialectique c'est donc une base relativement stable quoique provisoire et sujette à révision, de la construction discursive de notre appréhension du monde » (Sinaceur, op.cit. p.191)

La dialectique dont il sera question dans ce paragraphe fait référence à une méthode de raisonnement qui consiste à :

- analyser la réalité en mettant en évidence ses propositions et leurs contradictions,
- argumenter en vue de valider, prouver, démontrer.
- revenir aux objets sensibles pour mettre à l'épreuve les élaborations théoriques etc...

Cette dialectique s'exprime dans le va et vient du sensible au théorique et non pas dans le passage progressif et continu de l'un à l'autre.

Nous ne traiterons pas ici la question ontologique des objets mathématiques, question difficile toujours en débat de la philosophie des sciences. Nous nous situerons dans une position intermédiaire entre les deux doctrines que représentent le platonisme⁵ et le nominalisme⁶. Nous nous contenterons de dire que non seulement les débats sur ce sujet ne sont pas clos, mais aussi qu'ils ne concernent pas seulement les mathématiques. Nous devons aussi donner

⁵ Platonisme : doctrine philosophique postulant que la contrepartie du concept dans le réel est un "universel", conçu comme une réalité existant à l'état séparé, dans un monde idéal (en référence à celui des idées de Platon, voir l'allégorie de la Caverne).

⁶ Nominalisme : Doctrine qui ne reconnaît d'existence à aucune entité abstraite. Sous sa forme la plus extrême, elle réduit les "universaux" au statut de simples noms et en fait donc des entités purement linguistiques.

ici une définition de "l'objet" comme ce qui est placé devant, ce que l'on vise, soit pour l'atteindre soit pour le connaître. Se pose alors le problème de la représentation de ces objets dans un langage (les exprime-t-il ou les détermine-t-il ?) et donc de leur mode d'existence : des constructions de l'esprit humain (Gardies, 2004) ou des idéalités (Desanti, 1968).

Nous entendons par "objets sensibles" tout ce que les sens peuvent percevoir. Il s'agit des objets matériels du monde ordinaire : les objets de la nature bien entendu, mais aussi ceux qui sont fabriqués ou générés par l'homme. On peut citer comme exemples non exhaustifs de ces objets construits par l'homme : de simples dessins sur une feuille de papier ou sur un écran d'ordinateur, des écritures, des figures, des courbes, des graphiques... Un nombre non écrit, mais seulement cité peut être considéré comme sensible du fait de son caractère de familiarité avec celui qui le dit ou l'entend. Au sein de la classe de mathématique, la dialectique objet sensible / objet théorique peut s'exprimer au sein d'un passage alternatif du familier au nouveau comme nous le verrons dans la deuxième partie de ce paragraphe.

Les objets théoriques s'insèrent quant à eux dans une théorie mathématique, dans une axiomatique. Ils font l'objet d'une définition mathématique et sont caractérisés par des propriétés et des relations mathématiques. Leur existence revêt un caractère de nécessité, elle est assurée par le principe logique de non contradiction.

« Une définition mathématique doit être une composition : elle doit former le contenu de la nouvelle expression en n'employant que les anciens termes et les anciens rapports » (Nicod, 1923)

La question des objets mathématiques⁷ ne réside pas seulement dans leur réalité mais dans leur vérité, ou plus précisément leur véracité car en parlant de véracité on met l'accent sur la possibilité de dire la vérité sur quelque chose dans un domaine donné. Cette problématique des objets réside aussi dans ce qu'ils nous apprennent sur le monde sensible. A titre d'exemple, dans une séance proposée à des élèves de collège en situation de handicap (voir le corpus analysé plus loin), on demande de construire des objets définis de manière formelle en langue naturelle qui soient aussi des objets physiques, témoignant ainsi d'une existence sensible irréfutable. L'importance du langage apparaît ici puisque c'est lui qui fait sens en référence à l'objet, mais de plus, il rend compte de l'existence sensible des propriétés de l'objet (Heraud, Durand Guerrier, 2006). On donne aux élèves une définition théorique qui fournit des règles d'action permettant la construction d'objets géométriques représentant les objets idéaux que sont les polyèdres réguliers. Ils sont alors chargés de traduire cet énoncé formulé en langue naturelle par la construction expérimentale d'objets physiques intégrant les

⁷ La plupart des objets mathématiques rencontrés dans le monde sensible (sous la forme d'artefacts, ou de signes) ne sont pas des objets premiers (point, droite). Par exemple le sommet d'un polyèdre. Les expériences sensibles dans le monde se font sur des objets construits (Nicod, 1923) par rapport à une définition.

conditions fixées qui devront prendre peu à peu le statut d'objets formels. L'enjeu est de passer progressivement de ce solide (l'objet sensible que j'ai construit) à un polyèdre (un représentant d'une famille conceptuelle d'objet géométrique). Nous proposons une illustration de cette démarche dans le tableau suivant.

polyèdre ou "être un polyèdre régulier"	
question problématique : "ce polyèdre que je construis est-il un polyèdre régulier ?"	
sensible	théorique
référence : l'objet sensible	référence : l'objet géométrique
les 5 polyèdres	les 5 propriétés
contenu matériel	contenu linguistique
perception	signification
objets spatiaux, objets du monde sensible	objets du discours
se montrent	se disent
ce polyèdre	un polyèdre

tableau 2 : illustration de la démarche

Pour répondre à la question "ce polyèdre que je construis est-il un polyèdre régulier ?" il est nécessaire de :

- décrire les caractéristiques visibles du solide objet unique (car je l'ai construit) du monde sensible : type de faces, nombre de sommets à chaque angle, forme convexe, une description qui ne prend pas sa source uniquement dans l'observation mais aussi par la mise en mouvement (orientations dans l'espace, multiplicité des points de vue);
- mettre en rapport ces observations caractérisées avec les propriétés conceptuelles énoncées (dans la définition) d'un polyèdre régulier.

I - 1.2 Un exemple d'actualité avec la sphère

« la sphère est une figure enclose par une demi circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie » (Euclide Livre XI)

« Une définition qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre » (Giusti, 2000, La naissance des objets mathématiques, p.22)

Quelle réalité pour la sphère ? De l'objet théorique à l'objet sensible, quel modèle, quelle représentation, quelle approximation ? Nous développerons ici une solution : des allers et retours entre ce que l'on sait et ce que l'on peut faire en étudiant un défi technologico-théorique actuel : les sphères de *Gravity Probe B*⁸.

Gravity Probe B est une expérience lancée en avril 2004 sur une orbite polaire à 650 km d'altitude environ. Cette sonde de la NASA a été conçue pour vérifier deux des prévisions de la théorie de la relativité générale d'Einstein dans le champ de gravitation terrestre : mesurer comment l'espace-temps est déformé par la masse de la Terre et comment la rotation de la planète entraîne cet espace-temps autour d'elle.

Le défi technologique consiste à mesurer une dérive aussi faible que 0,042 seconde d'arc /an du système inertiel ainsi constitué, ce qui nécessite de réaliser un système 106 fois plus stable que le meilleur système inertiel en service. C'est un système de quatre gyroscopes qui doit fournir cette référence inertielle stable, en l'absence totale de perturbation.

Pour construire ces gyroscopes (modèles de sphères) il faudrait atteindre technologiquement la sphère parfaite : l'objet théorique. Les quatre gyroscopes de Gravity Probe B (figure 1) sont les sphères les plus parfaites jamais réalisées de la main de l'homme, ils sont les objets les plus ronds et les plus homogènes que l'on trouve dans l'univers. Ces objets constitués de quartz et de silicium fondu ne s'écartent jamais de la sphère parfaite de plus de 40 couches atomiques...



figure 1 : les gyroscopes de GPB

Une telle sphère sert de paradigme à la notion d'objet mathématique qui a toujours été au cœur de débats ontologiques. La sphère (empirique, approximative, matérielle) la plus parfaite du gyroscope représente ce que la science et l'ingénierie d'aujourd'hui peuvent faire de mieux.

⁸ Sur une idée développée par Hacking dans ses cours donnés au collège de France en ligne sur : <http://www.college-de-france.fr>

Elle a nécessité plus d'une vingtaine d'années de travaux d'ajustements des objets réels construits à l'objet théorique. Malgré tout, cela ne correspond pas à notre conception d'une sphère parfaite. Cette idée qui n'a de sens que dans le contexte d'un style de pensée géométrique, détermine cependant une réalité.

I – 1.3 Mathématiques et réalité

Il nous faut revenir ici sur ce que nous entendons par réalité en référence à Lelong (Lelong, 2004) qui s'intéresse à la place des objets dans la construction des connaissances. Il utilise la formulation du réel partagé qui doit être, selon lui, différencié du réel perçu. La distinction porte essentiellement sur la notion de perception qui ne doit pas être réduite à une fonction empirique réduite au sensible et qui ne dépendrait que de l'attention. En considérant les facultés d'intention de l'individu, on peut mettre en évidence une perception de type cognitive qui n'est pas contrôlée par les sens mais par la connaissance et les interactions avec les pairs. Ainsi l'affirmation d'existence de l'objet, sa réalité, est elle fondée aussi sur des rapports de type logique.

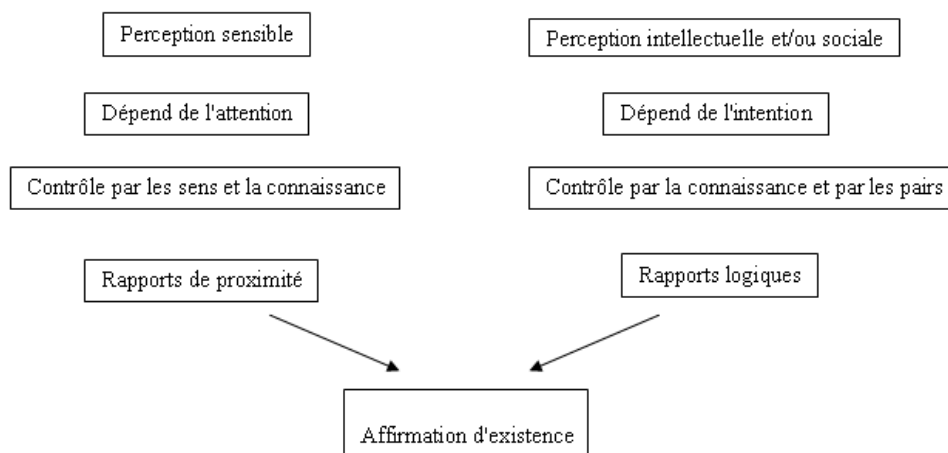


figure 2 : deux voies d'affirmation de l'existence selon le type de perception.

Cette théorie du réel partagé permet de tisser des liens entre la construction des connaissances par le recours au langage et l'activité mathématique des élèves en situation de recherche. Le langage mathématique est en quelque sorte un langage de laboratoire créé dans des conditions contrôlées, il contribue à l'affirmation d'existence : la réalité. En sciences, la réalité est progressivement déterminée, c'est une réalisation. Les objets mathématiques sont eux aussi des productions, ils peuvent paraître indépendants de leur processus de production, mais ils ne le sont pas :

La rationalité de la représentation scientifique du réel consiste en la soumission à une critique sous la double forme d'une confrontation réglée avec l'expérience et d'une explicitation des règles de calcul et d'une vérification de leur respect. La science représente le réel, une représentation qui se définit comme ce qui est et ce qui pourrait être : la virtualité. (Granger, 1999)

Nous concluons avec Nicod (1923) qui entreprend d'inverser totalement les processus en construisant une géométrie naïve dont les termes primitifs ont l'originalité d'être interprétables par des données sensibles. Les concepts scientifiques usuels seront alors explicitement recomposés à l'aide de ces données du monde sensible. Il s'agit pour lui de tendre vers une forme d'axiomatisation des structures de notre expérience sensible, naïve et pré-scientifique du monde. Ainsi, l'un des apports de la thèse de Nicod est d'édifier une théorie géométrique dont l'un des «modèles» ait pour domaine un ensemble d'entités capables d'être appréhendées dans l'expérience perceptive. Dans le système qu'il bâtit, c'est la notion de volume qui représente l'élément de base, et non le point puisque la première est facilement appréhendable dans la nature.

Cette méthodologie de présentation des savoirs nous semble mettre en lumière le processus d'élaboration des connaissances qui lui est lié. Le sujet en est l'auteur. Dans une action non dépourvue d'intention, il procède à une intervention sur les objets du monde selon un processus que l'on peut qualifier d'expérimental. Il est dès lors nécessaire d'explicitier ce que nous entendons par expérimentation afin de distinguer notamment expérience et expérimentation en gardant notre méthodologie dialectique déjà mis en œuvre dans le paragraphe précédent.

I - 2 La dialectique expérience / expérimentation

Notre problématique utilise la terminologie de dimension *expérimentale* des mathématiques avec une intention affichée de la distinguer de la notion d'expérience, non pour les cantonner dans une opposition de principe mais au profit d'un rapport dialectique à expliciter. C'est ce que nous souhaitons faire dans ce qui suit.

Conformément à son étymologie latine "*experiri*" signifie à la fois *essayer* et *éprouver*, l'expérimentation mêle une composante d'activité à une composante de passivité : expérimenter c'est d'une certaine manière agir, c'est d'une autre manière recevoir quelque chose d'extérieur.

De la même façon, on attribue généralement deux significations différentes au mot expérience. La première relevant d'un ancrage temporel, celui de la "vie qui passe" apportant

ainsi son lot d'évènements qui s'imposent à l'être humain. Un processus dans lequel le sujet peut être vu de l'extérieur comme passif. Cette assertion est dans le champ de la sensation pour l'individu et possède un caractère routinier ou pour le moins répétitif.

"expérience: signifie communément la connaissance acquise par un long usage de la vie, jointe aux réflexions que l'on a faites sur ce qu'on a vû." (Encyclopédie de Diderot d'Alembert)⁹

"L'expérience est une série d'impressions se répétant identiquement dans un ordre déterminé, et provoquant une notion permanente qui acquiert le caractère de certitude justement parce qu'elle est le produit d'identités irrécusables." (Littré, La science au point de vue philosophique, p.319)

La deuxième orientation est présentée comme une volonté pour le sujet d'intervenir sur la nature dans le but d'obtenir quelques réponses à des interrogations, ces dernières n'étant pas toutes explicites. Il s'agit de faire l'expérience des choses, de leurs contraintes, de leur résistance. La signification de l'expérience dont il s'agit ici semble dépendante d'une théorie, ou pour le moins d'une idée, qui la précède.

"expérience : le fait de provoquer un phénomène dans l'intention de l'étudier." (Le Petit Robert, p.1001)

Ainsi l'expérience dite "acquise" est souvent distinguée voire opposée à l'expérience dite "conquise". Reste que cette opposition terminologique n'est pas sans soulever un certain nombre de questions. La première est que rien ne garantit l'apprentissage ni la construction de la connaissance par l'émergence de l'évènement.

On peut d'ores et déjà classer ces deux assertions selon le déterminant qui précède le nom expérience et sur la préposition qui le suit. Dans le cas de l'article défini "faire l'expérience de" le sujet est placé dans un statut passif des évènements qui s'offrent à lui. C'est le sens anthropologique de l'homme d'expérience qui détermine une forme subjective car privée. Avec une tournure plus indéterminée "faire une expérience sur" on place le sujet dans un projet d'expérimentation, dans un processus de connaissance et d'objectivité.

A la lumière de ces propos, rien n'empêche de considérer les mathématiques comme une science dans laquelle les expérimentations sont possibles au titre de la recherche comme de celui de leur enseignement.

⁹ Encyclopédie de Diderot d'Alembert, version CDRom (2003), Editions REDON

I - 2.1 L'aspect expérimental des mathématiques

Alors qu'un très large consensus s'impose dans les communautés scientifiques sur l'activité de résolution de problème pour définir le "faire des mathématiques", la même discipline continue de souffrir durablement d'un caractère prétendument dogmatique. Selon ce point de vue, les mathématiques sont autonomes par rapport au monde réel, elles ne traitent que d'objets purement idéaux tant leur niveau d'abstraction est important. Une discipline entièrement théorique pour laquelle la confrontation avec le réel serait inutile, voire même dérisoire. A quoi bon mener des expérimentations dans un espace où seule la démonstration règne selon des règles logiques grammaticales. La démarche déductive y règne alors en maître, au dépend de toute induction ou abduction. Cette conception résistante conduit à un enseignement qui privilégie encore fortement le travail des élèves sur la rigueur nécessaire dans l'établissement des preuves et sur les règles grammaticales de la démonstration aux dépens de la recherche qui les précèdent. Réussir en mathématiques est ainsi conditionné par la juste utilisation des définitions, par la correcte application des règles.

Et pourtant, l'on s'accorde à dire que pour apprendre en mathématiques il est nécessaire de résoudre des problèmes¹⁰. Apprendre en mathématiques c'est avant tout comprendre, c'est-à-dire tenter d'entretenir des relations de sens avec les objets ou la symbolisation qui les représentent. Si résoudre des problèmes semble adéquat pour décrire l'activité mathématicienne¹¹, lui associer une démarche de type expérimental consistant à mener des expérimentations, observer leurs résultats, formuler des conjectures puis tenter de les prouver semble tout à fait appropriée. Avec cette méthodologie scientifique, induction et abduction retrouvent une place prépondérante sans pour autant délaisser la déduction nécessaire au moment de l'établissement de la preuve qui représente la spécificité des mathématiques par rapport aux autres sciences de l'empirie. La dimension expérimentale des mathématiques prend ainsi toute sa place.

Epistémologiquement, nous avons choisi de parler d'expérimentation en mathématiques à la lumière de Cavailles¹² comme d'un double système de gestes sans pour autant les envisager indépendants comme il le propose; mais plutôt dans une dialectique qui les associe. Ces gestes se développent dans les deux espaces décrits par Cavailles, un espace combinatoire pour l'expression des gestes sur les signes; et un espace opératoire pour les gestes portant sur les idéalités. C'est dans l'espace opératoire que se situent la théorie mathématique et les

¹⁰ Les programmes d'enseignement le rappellent assez fortement et ce quelque soit le niveau d'apprentissage concerné.

¹¹ On entend activité mathématicienne par le développement d'une activité de réflexion consistant à manipuler (concrètement et mentalement) des objets permettant la construction de connaissances ou l'accès aux savoirs mathématiques.

¹² D'après CASSOU-NOGUES P. (2001) De l'expérience mathématique - essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavailles, VRIN

opérations produits de la pensée. Les signes sensibles et leurs règles d'emploi sont construits dans l'espace combinatoire. Mais l'intersection de ces espaces existe : c'est en effet le sujet lui-même, celui qui écrit et qui pense, l'auteur unique de ces gestes. Il nous faut préciser ici le sens du mot *geste* en référence à Châtelet (Châtelet, 1993), un geste qui ne se laisse pas réduire à l'acte mais qui comporte une intentionnalité. Il s'agit d'un mouvement s'inscrivant entre physique et mathématique traduisant une forme de pensée de l'espace, plus précisément de l'espacement.

Une telle modélisation permet de faire apparaître l'expérience¹³ comme un dialogue du sujet avec les objets. Mais ces objets ne sont rendus visibles et accessibles que par les actes portant sur eux. Importons maintenant ce modèle dans le champ didactique. Un sujet "faisant des mathématiques" ne donne à voir que les gestes de l'espace combinatoire, ce qui rend difficile le processus d'enseignement. En effet, pour un enseignant, l'accès n'est permis qu'à la pratique mathématicienne du sujet qui apprend, et jamais à son activité mathématique. "Faire faire des mathématiques"¹⁴ c'est alors créer un milieu propice à ce dialogue, un milieu objectif (matériel et/ou symbolique) dans lequel les expériences sont permises afin d'enrôler l'activité de l'élève.

Nous faisons l'hypothèse que le travail mathématique passe par l'expérience sensible et même que le développement des mathématiques ne peut se penser hors du monde sensible. Dans le processus d'acquisition du savoir, l'expérience sensible est préalable à l'expérience mathématique. Cette dernière se produit en extension et en déformation sur le même objet. Pour illustrer ceci, nous emprunterons un exemple provenant de Gonseth (1936, p.66) extrait de son ouvrage *Les mathématiques et la réalité*. La présentation d'un cristal peut engendrer des constructions de connaissances dans des directions bien différentes au-delà des aspects intuitifs directement observables. Du point de départ de l'objet possédant une certaine forme, on pourra s'intéresser à sa place dans la classification des polyèdres, ou plutôt à la mesure de ses angles dièdres afin d'en étudier les symétries. Ces constructions sont autant d'extensions et de déformations de l'objet immédiat. Mais si l'expérience sensible apparaît bien première ici, il ne faut pas seulement l'enfermer dans ce rôle. En effet, les expressions et opérations qui portent sur cette première expérience vont ensuite donner naissance à des besoins de contrôle ou seulement de confrontation dans l'espace sensible du fait de l'élaboration de conjectures "bâtisseuses" de la théorie. De ce fait, ce qui est appris et conçu sur la réalité permet en retour d'agir sur elle. C'est en ce sens que l'on peut considérer l'expérience mathématique comme capable d'intervention sur le réel.

¹³ expérience au titre de sa dimension active comme présentée précédemment

¹⁴ au sens de CONNE F. (1999) , Faire des mathématiques, faire faire des mathématiques, regarder ce que ça donne, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal

"Faire des mathématiques, c'est fabriquer des modèles qui permettent de maîtriser des phénomènes dans la réalité" (Mercier, Sensevy, 1999).

I - 2.2 Une question de raisonnement

Epistémologiquement parlant, un détour par le raisonnement associé au processus d'expérimentation nous paraît nécessaire. Cela permet d'articuler expérience et expérimentation dans notre recherche dialectique. Pour Platon, l'expérimentation est une forme de torture dans le sens où elle viole le principe éthique de non intervention sur la nature ; pourtant son disciple Aristote se permet les premières manipulations sur des animaux avec pour objectif annoncé une amélioration de leur description anatomique. Cela représente une première trace d'une volonté d'intervention sur les objets du monde. Aristote reste pourtant l'auteur d'une métaphysique qui prône une séparation claire entre Physis (Nature) et Techne (Art), une nature pure non perturbée par l'activité ou l'intervention humaine. Dans cette théorie et son raisonnement associé qui résistera plusieurs siècles, il n'est pas concevable de manipuler (expérimenter) pour obtenir des savoirs. Pour Crombie (Crombie, 1958) il s'agit d'un style de raisonnement qualifiable de "*méthode par postulats et dérivation des conséquences*". Ces styles sont caractérisés par leurs objets et leur méthode de raisonnement associés, en voici la liste rapportée par Hacking dans son cours au collège de France :

1. *La méthode par postulats et dérivation des conséquences en mathématiques.*
2. *L'exploration et la mesure expérimentale de relations observables plus complexes.*
3. *La construction par hypothèse de modèles analogiques.*
4. *La mise en ordre du divers par la comparaison et la taxonomie.*
5. *L'analyse statistique des régularités dans les populations et le calcul des probabilités.*
6. *La dérivation historique propre au développement génétique.*

Historiquement, il faudra attendre Bacon et son "*novum organum*" en 1620 pour voir apparaître une nouvelle démarche de construction des connaissances basée sur l'exploration et la mesure : l'expérimentation. Il s'agit d'un raisonnement assez radicalement inverse à celui d'Aristote puisqu'il prône les mérites de la méthode inductive et surtout la possibilité d'une construction de nouvelles connaissances en opposition avec la révélation de celle qui nous viennent du monde des idéalités grecques. L'induction permet d'obtenir des savoirs sur le monde, ces savoirs pouvant être à l'origine de changements sur le monde. Un raisonnement qui l'emmènera sur les très utopiques terres de la "Nova Atlantis" (Bacon, 1627) à la poursuite d'un projet philosophique, scientifique mais aussi politique peu enclin à la communication extérieure. Il faut noter ici que la démarche de Bacon met surtout en avant la collection des expériences qu'il ne conduit pas lui-même dans la poursuite d'un processus de classement, de

systematisation. Les conclusions sont tirées des observations a posteriori, ce qui nous rapproche davantage de l'expérience (au sens de Claude Bernard, l'expérience "pour voir") que de l'expérimentation telle que nous l'avons défini auparavant.

Il faudra attendre l'avènement des académies des sciences pour voir se développer un raisonnement plus "par hypothèses" comportant un véritable projet de communication et comportant ainsi une dimension sociale qui changera le style de raisonnement nommé "*construction par hypothèse de modèles analogiques*" par Crombie. Cependant, ce projet ne s'affranchit pas radicalement d'une théorie a priori.

Cependant, le processus de l'expérimentation ne nous semble pas limité à celui de l'hypothèse au sens commun du terme et tel qu'il fut employé lors de l'avènement des sciences dites expérimentales aux 18^{ème} et 19^{ème} siècle. Cette méthode dite "par hypothèse" qui deviendra progressivement hypothético-déductive au 20^{ème}, ne comporte pas de référence explicite aux relations qui unissent les objets de la théorie à ceux du monde sensible du fait d'un choix résolument empirique dans la construction des connaissances. A cette époque, les expériences sont conçues pour montrer des phénomènes plus ou moins spectaculaires sans recours systématique à des éléments de modèles (il faut comprendre ici "modèle" au sens de la représentation simplifiée d'une théorie). L'expérimentation relève quant à elle d'une intention d'intervention (Hacking, 1983) ou de création des phénomènes qui fait la part belle aux objets et aux relations qui les unissent.

Là se situe vraisemblablement une différence entre expérience et expérimentation, l'expérience proposant un jeu sur les objets et l'expérimentation portant un projet de création de nouveaux objets accompagné nécessairement d'un processus de validation. Ces nouveaux objets ont besoin d'un processus de raisonnement qui soit capable de dire la vérité sur eux-mêmes ce qui ne disqualifie pas les mathématiques du groupe des disciplines dites expérimentales. En effet, le problème ne se situe pas dans l'existence des objets mathématiques mais dans leur objectivité. C'est le rôle que doit endosser la dimension expérimentale des mathématiques pour se vêtir des attributs d'une science expérimentale.

La méthode qui consiste à conjecturer grâce à une modélisation hypothétique sur des objets se rapproche à la fois d'une combinaison des styles 2 et 3 de Crombie ou de celle de l'abduction de C.S. Peirce : la méthode de l'inférence à la meilleure explication : le fait surprenant, C, est observé ; mais si A était vrai, C irait de soi ; donc, il est raisonnable de supposer que A est vrai.

«La présomption, ou plus précisément l'abduction, fournit à celui qui raisonne la théorie problématique que l'induction vérifie. Se trouvant confronté à un phénomène différent de celui qu'il aurait attendu dans des circonstances semblables, il examine les traits de ce phénomène et note quelques caractères remarquables ou des relations entre ceux-ci qu'il reconnaît aussitôt comme caractéristiques d'un concept dont son esprit est déjà pourvu, de sorte qu'est suggérée une théorie que l'expliquerait (c'est-à-

dire rendrait nécessaire) ce qu'il y a de surprenant dans le phénomène (Peirce, C.P. 2, 776 in Everaert-Desmaedt, p.83)»

Ce raisonnement est une forme d'argumentation à rebours allant en quelque sorte de la conséquence à l'antécédent par une série de sauts cognitifs parfois qualifiables d'audacieux, ce qui nous semble approprié pour décrire le processus en jeu dans l'expérimentation. Le processus suit cependant un certain nombre de règles logiques (inductives et déductives) qui permettent d'en garantir une certaine forme de validité même si elle est fortement contextuelle.

Dans l'apprentissage des mathématiques, rendre objectif des objets de connaissance nécessite un milieu approprié à la réussite de leur validation. Ce milieu nous semble pouvoir se caractériser par un certain nombre de paramètres et d'éléments, c'est ce que nous essaierons de traiter dans un paragraphe ultérieur en appui sur des références didactiques. En attendant, il nous reste à établir quelques éléments réflexifs concernant l'une des particularités de l'expérimentation, à savoir son lien étroit entretenu avec le processus de validation qui la distingue selon nous de la simple expérience.

I - 3 Expérimentation et production de la preuve

Comme nous l'avons présenté précédemment l'une des particularités de l'expérimentation par rapport à l'expérience est sa potentialité à créer de nouveaux objets. Outre les phases de formulation et d'argumentation, la démarche expérimentale comporte la mise en œuvre d'une phase de validation, étape nécessaire de garantie scientifique. Expérimentation, formulation et preuve ne sont pas des étapes chronologiques indépendantes, mais plutôt des processus pouvant rétroagir les uns sur les autres. Ainsi, l'échec d'une tentative de preuve peut amener à mieux tester la solidité de la conjecture née d'une expérimentation. Il peut conduire à modifier la conjecture, voire l'expérimentation elle-même. Il peut aussi inciter à imaginer d'autres chemins de preuve. De même, l'expérimentation mise en place pour cerner une question mathématique peut déboucher sur des résultats imprévus, surprenants, qui conduisent à des interrogations sur d'autres propriétés et sur de nouveaux domaines, sur de nouvelles conjectures et tentatives de preuve.

La spécificité des mathématiques concerne davantage cette phase de l'expérimentation que la nature même de ses objets par rapport à d'autres disciplines scientifiques comme la physique ou la biologie (dont les recherches expérimentales se font régulièrement sur bien d'autres objets que sur ceux du monde). En mathématiques, c'est bien la question de la preuve qui sera essentielle dans l'expression des connaissances, surtout si elles résultent d'une création à

l'issue d'une expérimentation. La validité des connaissances concerne leur rapport essentiel avec la vérité gage de l'activité scientifique.

En mathématiques, on se prononcera sur la validité d'un résultat s'il est démontré ou pour le moins vérifié. Pour faire la différence entre ces deux notions que sont la vérification et la démonstration, nous faisons référence à Granger (1992) et à son ouvrage *la vérification*. Il y présente la vérification comme auxiliaire de la démonstration, comme une phase d'interrogation sur l'adéquation à l'expérience du discours dans lequel prétend s'exprimer une connaissance. La vérification, telle qu'elle est présentée par Granger, nous semble appropriée à décrire l'enjeu de la validation dans le contexte de la démarche expérimentale. Vérifier concerne la relation entre les objets de la science (connaissances symboliques et intuitives) et la vérité, elle porte surtout sur les critères de validité des énoncés qui les décrivent. Par conséquent, le statut de la vérification dépend de façon essentielle de la nature des objets apparaissant dans les énoncés soumis à vérification. Nous suivons Granger pour dire que quelle que soit la discipline scientifique, *la connaissance scientifique, la connaissance objective du monde, est de nature conceptuelle, et par conséquent symbolique*. En contexte d'enseignement, ceci pose une difficulté bien connue notamment par les travaux sur la démonstration de Duval (1991) car cela s'appuie sur une bonne flexibilité de la pensée chez les élèves, une pensée flexible qui sache passer du niveau intuitif, (celui) de la vérité en termes de significations des énoncés, au niveau formel de la validité, en termes de relations de dépendance logique entre les énoncés. Pour sortir d'un débat dichotomique sur la démonstration et ses deux perspectives culturelles présentées par Balacheff (1998) comme épistémologique et psychologique, nous pouvons une fois encore suivre Granger qui nous propose d'établir le lien suivant entre vérification et démonstration (Granger, 1992, p 113) :

Vérifier en mathématiques c'est constater un résultat d'opération, simple ou complexe, portant en définitive sur des symboles ;

La condition déterminante de l'autonomie de la vérification est l'exhaustivité des champs opératoires. Lorsque cette exhaustivité fait défaut, les énoncés mathématiques n'en peuvent pas moins avoir un sens, qui dépend alors de démonstrations ;

Le statut de la vérification, et sa validité même, dépendent de façon essentielle de la nature des objets apparaissant dans les énoncés soumis à vérification.

En situation d'apprentissage, le professeur sera le garant de ces phases de validation par les relations entre une connaissance en acte et un savoir qui lui correspond. Son action et son intervention devront rendre ces relations explicites aux yeux des élèves en aidant au passage d'une compréhension (aspect sémantique des énoncés) à une validation par vérification ou démonstration en fonction des objets en jeu, de leur degré d'abstraction, de leur lien avec une possible représentation empirique (Durand-Guerrier, 2008 ; Durand-Guerrier, à paraître en 2008).

Pour conclure, nous parlerons d'expérience en référence au jeu interrogatif sur des objets alors que nous emploierons la terminologie d'expérimentation pour faire référence à un processus plus global de démarche de construction de connaissances incluant une phase déterminante de validation. La dimension expérimentale des mathématiques est consistante sur le plan épistémologique pour les trois raisons suivantes :

- Les objets mathématiques sont présents sous une forme symbolique qui permet leur interrogation, leur manipulation et leur transformation.
- L'histoire de la construction des connaissances en mathématiques révèle des moments de doute et d'incertitude propice à la mise en œuvre d'un terrain expérimental.
- Il existe un type de raisonnement associé à l'expérimentation en mathématiques.

Il nous paraît désormais important d'étudier les contextes d'enseignement / apprentissage qui permettent la prise en compte de cette dimension expérimentale. C'est l'objet du chapitre qui va suivre.

chapitre II - Un milieu pour l'expérimentation en classe de mathématiques : conditions et contraintes

Dans ce chapitre, nous étudierons les conditions favorables à la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans des situations didactiques. Il s'agira de décrire et d'analyser les processus de médiation qui constituent les rapports dialectiques des couples enseignement / apprentissage et objets de savoir / construction des connaissances.

Nous interrogerons de ce fait à nouveau les différences entre activités et pratiques qu'elles soient celles de l'enseignant ou des élèves, dans le cadre d'un milieu spécifique à la construction des connaissances scientifiques. Les interrogations seront pragmatiques puisque les conditions et les contraintes sont très contextuelles, mais aussi sémantiques.

Pour que les élèves et l'enseignant développent des activités qui soient inter-actives, l'enseignant doit dévoluer le savoir en proposant un environnement didactique propice aux actions, aux formulations et à la validation. C'est dans cet espace intermédiaire significatif que les élèves évoluent en autonomie de pensée, qu'ils explorent les possibles, conjecturent des propositions et interrogent avec l'enseignant les domaines de leur validité. Le milieu ainsi créé porte deux dimensions fondamentales : une dimension sémiotique qui assure la cohérence entre les objets de savoirs mis en jeu par le professeur et ceux qui émergent de l'activité des élèves ; et une dimension instrumentale qui assure le lien entre opérationnalité et référence.

II – 1 L'organisation d'une situation didactique

Dans ce chapitre, nous présenterons le cadre didactique dans lequel nous inscrivons notre recherche d'un milieu propice à l'expérimentation : celui de la théorie des situations didactiques de Brousseau dont l'une des idées fondatrices est que les connaissances s'y manifestent comme des moyens de contrôle. Nous verrons en quoi cette théorie comporte les éléments nécessaires à la prise en compte de la dimension expérimentale, avant de retracer très brièvement son apport à la construction de la notion de milieu.

II - 1.1 La dimension expérimentale dans la théorie des situations didactiques

Le travail conduit par Guy Brousseau depuis les années soixante-dix relève selon nous clairement d'une prise en compte de la dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques. La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) propose un cadre pour penser et construire les articulations entre expérimentation, formulation et validation. Comme l'écrit Guy Brousseau (p. 111) :

"Toutes les assertions de la théorie sont susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction."

A chacune de ces trois grandes phases que sont l'action, la formulation et la validation correspondent des situations de type adidactiques (Brousseau, 1998), le qualificatif d'adidacticité renvoyant à la potentialité du milieu à assurer les rétroactions nécessaires à la construction des savoirs, sans s'appuyer sur l'omniprésence de l'enseignant. On peut dire que de telles situations sont partiellement libérées d'intervention directes.

Dans la théorie des situations nous retrouvons la plupart des critères qui permettent la prise en compte de la dimension expérimentale telle que nous l'avons définie, et cela jusqu'à la phase de validation.

§ *Phase de l'action*

La situation d'action est organisée dans un jeu sur et par les objets (enrôlement dans la tâche) dont le contrôle est assujéti aux rétro-actions du milieu. Ce sont les réponses du milieu qui témoignent d'un processus d'adaptation des élèves mettant en actes leurs connaissances : le professeur est témoin des apprentissages en cours. Cette phase d'action peut être vécue par les élèves comme une rencontre avec l'incertitude et le doute, chaque opération engagée s'inscrit dans un dialogue hypothétique avec les objets d'un milieu objectif. La "*dialectique de l'action*" (Brousseau, 1998) concerne chaque individu dans une relation individualisée avec un milieu, que l'on peut rapprocher du "tâtonnement expérimental" (Freinet, 1933)¹⁵ dans lequel les règles sont rencontrées au fur et à mesure de leur nécessité par la mise en actes des connaissances et non pas toutes présentes a priori.

¹⁵ Le tâtonnement expérimental n'est ni un tâtonnement aveugle, ni la méthode expérimentale scientifique. Il se définit comme un processus naturel d'apprentissages personnalisés, d'action et de pensée, chez l'enfant comme chez l'adulte, qui, s'exerçant dans tous les domaines d'activité, mobilise les divers processus cognitifs et opérations mentales habituellement mis en œuvre dans le fonctionnement naturel de l'intelligence humaine. "Tâtonnement expérimental et pédagogie Freinet", édition ICEM n° 35.

§ Phase de la formulation

La situation de formulation met en avant la communication entre les *joueurs* rendue nécessaire par la résolution des problèmes rencontrés. Tout se passe comme si plusieurs individus construisaient des expériences parfois similaires et parfois différentes dans un même milieu. Toute opération passe peu à peu sous le contrôle de l'ensemble des expérimentateurs, qui pour interpréter les réponses du milieu doivent formuler des connaissances en cours d'acquisition afin d'argumenter des choix d'action. Cette phase correspond à ce que nous avons référé à la construction d'un réel partagé (Lelong, 2004), elle est caractéristique des échanges nécessaires dans un dispositif expérimental pour lequel les lectures des expérimentateurs peuvent différer, c'est selon les cas la rhétorique, la pragmatique ou la logique qui forceront la conviction.

§ Phase de la validation

La situation de validation est dédiée à l'établissement de théorèmes consécutivement à la l'énonciation de conjectures, de leur discussion par rapport à la vérité et de leur acceptation par la communauté des joueurs. Brousseau parle de la construction d'une "attitude de preuve" pour les élèves. Cette prudence terminologique renvoie sans aucun doute à la retenue nécessaire pour engager la notion de démonstration dans le contexte de la théorie des situations (il n'y a pas de recherche systématique de généralisation de la validité des arguments en référence à un système axiomatique). Brousseau (1998, pp 109-112) précise cela dans son schéma de la validation explicite lors du paragraphe de présentation des situations adidactiques.

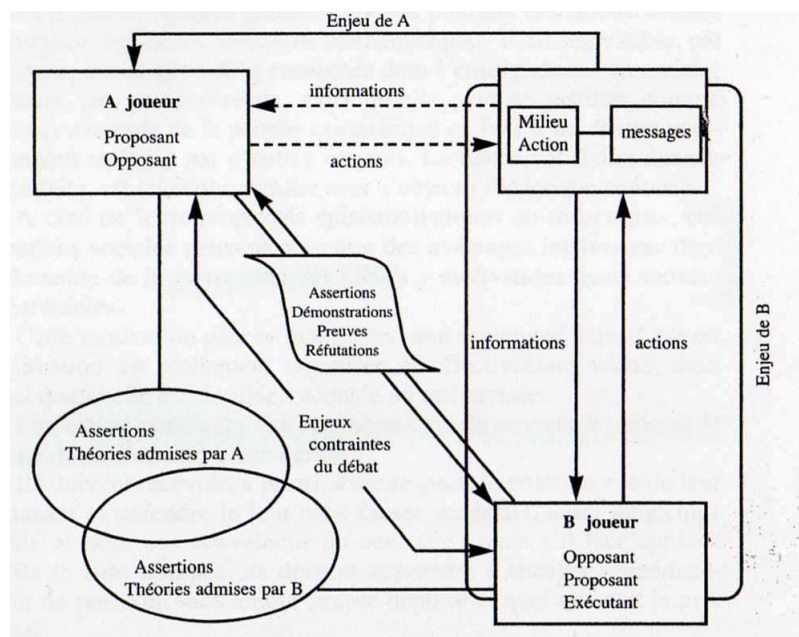


figure 3 : schéma de la validation explicite (Brousseau, 1998)

Dans cette proposition, il apparaît distinctement que ce sont les éléments discursifs entre les participants (les expérimentateurs) qui sont responsables de la validation. La différenciation de statut des acteurs (binôme proposant-opposant) enrichit l'argumentation, et conduit à des échanges portant sur les énoncés formulés. Dans cette description, nous remarquons que c'est le milieu qui peut faire en sorte que les acteurs seront à même de parvenir à un consensus conforme aux savoirs en jeu, mais que les moyens qui peuvent le garantir ne sont pas explicités. Ce qui est important c'est l'adéquation des connaissances construites avec les savoirs reconnus par la communauté scientifique grâce aux rétroactions du milieu (Durand Guerrier, 2007).

Néanmoins, cette "*dialectique de la validation*" confirme le rapprochement avec la démarche expérimentale telle que nous l'avons décrite précédemment et qui comporte une phase nécessaire de confrontation des connaissances construites avec la notion de vérité dans un système donné.

La théorie des situations propose un cadre d'analyse des situations d'enseignement / apprentissage qui nous semble pertinent par rapport à la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques. Dans un milieu favorisant l'expérimentation, les va-et-vient entre objets sensibles et objets théoriques doivent se faire entre la phase de validation et celle de l'action-formulation. Nous essaierons de montrer dans les chapitres ultérieurs de cette thèse, que l'établissement de la preuve dans une situation didactique relève d'une véritable dialectique théorique / sensible. Nous faisons l'hypothèse qu'à un stade "primaire" de construction des connaissances, la validation ne peut pas se dérouler seulement dans le registre des énoncés et que c'est le retour constant sur les objets, leurs représentants signifiés ou leurs artefacts qui permet d'accéder progressivement à des théorèmes.

II - 1.2 Le milieu en didactique des mathématiques

Le projet initial de la didactique des mathématiques peut être illustré par ces quelques mots de Guy Brousseau (1975, p. 5) prononcés lors de son exposé "qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?" et illustré dans la figure 1 :

"La didactique étudie l'évolution des interactions entre un savoir toujours en voie de constitution, un système éducatif et des élèves; cette étude a pour but d'optimiser les modes d'appropriation par le sujet de ce savoir."

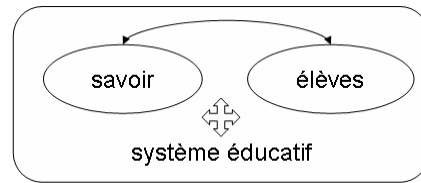


figure 4 : objet d'étude de la didactique

Le milieu y apparaît comme l'environnement dans lequel ont lieu les interactions dans ce système. Dans la théorie des situations didactiques, Brousseau (1998) le définit comme le *système antagoniste* du système enseigné. L'adjectif d'antagoniste est choisi dans la volonté de montrer que, dans cet environnement, l'élève doit rencontrer des obstacles, ou pour le moins des résistances significatives.

Dans un article plus récent¹⁶, Mercier, Sensevy et Assude (2007) utilisent une autre définition du milieu :

"le milieu est un système de contraintes et de ressources matérielles et symboliques, dans lequel évoluent l'élève et le professeur."

On y retrouve l'idée principale d'environnement contraignant associé cependant à celui de ressources. On remarquera à cette occasion la volonté de fixer la place de l'enseignant au sein du système dans cette deuxième définition. Dans ces deux acceptions, le milieu a une existence systémique qui sert de modèle explicatif à l'articulation entre les deux pôles que sont l'enseignement et l'apprentissage ; le tout dans un contexte scolaire. Avant d'aller plus loin, nous souhaitons faire ici un nouveau point de définition de ces deux postures.

§ *Apprentissage*

Dans la théorie des situations didactiques, l'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres. La connaissance, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage (Brousseau, 1998 p.59).

Il s'agit là d'une conception de l'apprentissage de type piagétienne (figure 6). Le sujet (élève) est placé dans un milieu d'apprentissage à un état d'équilibre sur le plan de ses connaissances. Pour qu'il accède à un niveau supérieur, on provoque une déstabilisation de son état de connaissances en introduisant un élément nouveau lors d'une situation d'apprentissage. Les

¹⁶ Teresa Assude, Alain Mercier, Gérard Sensevy, L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, Recherches en didactique des mathématiques, vol 27/2

phases d'assimilation, d'accommodation et d'organisation contribueront progressivement à retrouver un nouvel état d'équilibre.

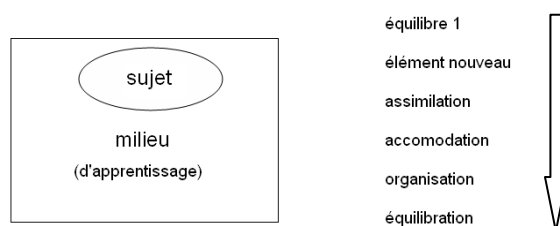


figure 5 : phases piagétienne chronologiques

Bien qu'il apparaisse que la théorie des situations se réfère à ce modèle, il faut préciser que l'élève n'est pas passif dans le milieu décrit par la Théorie des Situations Didactiques. Ce sont les réponses que l'élève fournit aux interrogations proposées qui sont les marques de son apprentissage, les manifestations de ses connaissances acquises. Il doit donc agir sur les éléments du milieu. Si les deux modèles semblent proches, les finalités restent différentes. Dans le projet Piagétien l'objet d'étude est le sujet (son développement cognitif) et le milieu est assimilable à la notion développée en biologie. Il s'agit d'un système neutre, environnemental et non choisi. La connaissance ne se construit pas contre mais dans le milieu.

Dans le projet de la didactique des mathématiques, c'est le dispositif dans lequel le sujet apprend qui est objet de l'étude. Le milieu est un système qui n'est pas neutre comme on l'a vu auparavant, il peut être ajusté grâce à des variables en fonction d'intentions d'enseignement. Ainsi le milieu peut-il être antagoniste ou allié, selon les choix didactiques et pédagogiques de celui qui enseigne, et selon les moments de l'enseignement. Dans un milieu allié (Margolinas, 2002) seule l'action est possible, dans un milieu antagoniste il y a rétroaction du milieu sur les actions du sujet.

Dans une telle situation, l'élève agit sur le milieu grâce à ses connaissances, le milieu lui renvoie en retour des informations utiles à la résolution du questionnement inhérent à l'apprentissage. On parle de rétroactions pour décrire ces échanges comme cela est illustré dans la figure 3, il s'agit de la situation d'action.

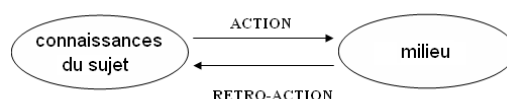


figure 6 : un milieu antagoniste

§ *Enseignement*

Dans le système proposé par la théorie des situations didactiques, la conception de l'enseignement repose sur la problématisation des activités confiées aux élèves. Il s'agit pour le professeur, de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées qui permettront les acquisitions. Ceci passe nécessairement par un choix judicieux des problèmes que l'enseignant propose aux élèves. En arrière-plan se tient en effet la finalité de l'enseignement : permettre à l'élève d'acquérir un savoir selon un processus en plusieurs phases bien décrites dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) et présentées plus haut (action, formulation, validation).

Puisque c'est une démarche de résolution de problème qui prend en charge le processus d'enseignement/apprentissage, choisir de "bons" problèmes, revient alors à déterminer des milieux avec lesquels l'élève doit interagir pour pouvoir apprendre c'est-à-dire mettre en œuvre des connaissances nouvelles en mathématiques.

Dans ce système, on intègre le professeur et le savoir en jeu à l'intérieur du milieu. Il s'agit de ne pas limiter la situation didactique à un simple moyen d'apprentissage (Brousseau, 1998). Cette extension du milieu se caractérise par un environnement comprenant un réseau d'interactions et d'échanges (figure 8) qui concerne à la fois :

- les actions didactiques du professeur (relations entre l'enseignant et la situation didactique comme moyen),
- les actions des élèves et les rétroactions du milieu antagoniste,
- les liens entre le savoir et le professeur, mais aussi entre le savoir et la situation didactique.

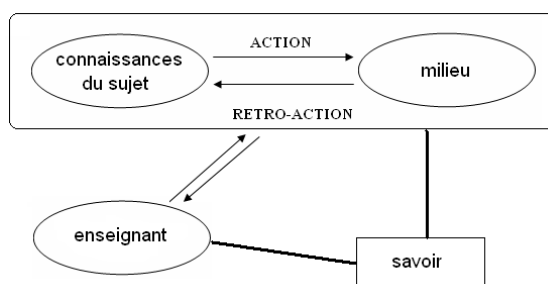


figure 7 : le milieu comme environnement didactique (d'après Salin, 2002)

Sa description nécessite le choix d'un point de vue qui sera différent selon que l'on s'intéresse aux actes d'enseignements, aux actions des élèves, ou à l'antagonisme du milieu par exemple. On parle de différents niveaux de milieu sur lesquels portent des recherches différentes (Bloch, 2002 ; Margolinas, 2002 ; Perrin-Glorian, 1999). Ces modèles varient aussi selon les composants qu'ils prennent ou non en compte dans le milieu (par exemple la place du

professeur). La nécessité d'un travail de recherche est néanmoins établi sur son sujet tant son intérêt en didactique est fondamental, ce qui explique sans aucun doute la pérennité des recherches sur le concept de milieu.

Quel que soit le point de vue que l'on adopte, le concept didactique de milieu nous semble intéressant dans le cadre de nos recherches en regard des éléments qui le caractérisent dans sa potentialité à révéler la dimension expérimentale des mathématiques. Nous souhaitons explorer davantage son caractère antagoniste dans la dialectique enseignement / apprentissage, afin de localiser les invariants nécessaires à la mise en œuvre de situations dans des classes.

II – 2 Caractéristiques du milieu antagoniste de type expérimental

Comme nous venons d'en rendre compte, la notion de milieu est définie dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) comme le système antagoniste du système enseigné. Le qualificatif d'antagonisme dont il est question s'oppose à celui d'allié qui renvoie à un schéma plus classique d'enseignement dit par *ostension*¹⁷ (Ratsimba-Rajohn, 1977). Dans ce dernier, le milieu allié signifie que le professeur cherche à montrer à l'élève ce qu'il doit voir et donc comprendre. On exhibe en quelque sorte le savoir en faisant le pari que cette mise en évidence suffira à l'appropriation par les élèves. Berthelot et Salin (1992) parlent d'ostension assumée ou déguisée selon le degré de maïeutique nécessaire à l'enseignant pour conduire ses enseignements. Il est assez clair pour nous que le milieu dont nous cherchons à définir les caractéristiques ne peut relever de cette conception des apprentissages puisque l'expérimentation se rapproche davantage d'une situation de type adidactique (Brousseau, 1998).

Rechercher l'antagonisme renvoie à un modèle d'apprentissage de type adaptatif (plutôt piagétien) : le sujet apprend en s'adaptant (assimilation, accommodation, organisation, équilibration) à un milieu volontairement porteur de déséquilibres. Ce modèle se revendique également du conflit socio-cognitif (Vygotsky, 1930, puis 1985) qui insiste davantage sur une appropriation socialisée des savoirs. Le professeur en est le concepteur et l'organisateur, c'est lui qui en choisit les variables. L'une des principales difficultés, dans ce modèle, est de garantir l'adéquation entre la connaissance acquise des élèves et le savoir visé. Le milieu apparaît davantage comme un système que comme un espace aux contours définis. L'exploration des caractéristiques du milieu antagoniste peut apporter une valeur ajoutée dans

¹⁷ Ratsiriba-Rajohn (1977) la définit comme la donnée par l'enseignant "de tous les éléments et relations constitutifs & la notion vide", Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques, mémoire de DEA, Bordeaux 1977

l'analyse a priori des situations, notamment dans le cadre de nos recherches d'un milieu propice à la mise en évidence de la dimension expérimentale des mathématiques.

Pour argumenter en faveur de cette hypothèse, nous poursuivrons trois pistes différentes qui sont elle mêmes trois caractéristiques d'un milieu de type antagoniste (Salin, 2002) :

- le milieu doit être porteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres afin de permettre l'adaptation de l'élève ;
- le milieu doit développer l'autonomie de l'élève dans ses apprentissages ;
- le milieu doit collaborer à la maîtrise de savoirs mathématiques identifiés comme tels.

II - 2.1 - Un milieu porteur de déséquilibres

La première condition permettant la qualification d'antagonisme est que le milieu doit être porteur de déséquilibres dans les rétro-actions qu'il fournit à l'activité de l'élève. Il faut entendre ici par déséquilibre un état provisoire de la pensée due à la transformation des schèmes dans le processus d'accommodation (Piaget) qui se réalise contre des connaissances acquises auparavant. Ce type de difficultés peut être provoqué par des rétro-actions du milieu qui apparaissent contradictoires aux élèves-même si elles ne le sont pas intrinsèquement. C'est en présentant ces obstacles dans la situation que l'on provoquera l'adaptation de l'élève et par la même, la construction (appropriation) d'une connaissance.

Pour qu'il y ait construction de connaissances nouvelles lors du processus d'adaptation, il faut que l'élève puisse d'abord engager les connaissances dont il dispose pour tenter de contrôler ce milieu. Il doit ensuite être en mesure d'en recevoir des rétroactions lui indiquant que ses moyens de contrôle sont encore insuffisants et que la résolution du problème ne sera pas instantanée.

Il s'en dégage selon nous deux conditions nécessaires pour les problèmes qui lui sont liés :

- Ils doivent être adaptés au niveau scolaire auquel ils sont destinés : savoirs en jeu, contexte de la situation, langage employé dans les énoncés, système de représentation symbolique associé, milieu matériel éventuel ;
- Ils doivent certes comporter des éléments de déstabilisation cognitive, mais aussi des ressources pour l'étayage nécessaire au processus d'apprentissage par adaptation. Il est en effet nécessaire d'anticiper la diversité des réactions des élèves dont une partie d'entre eux peut passer outre les rétro-actions du milieu et ne pas entrer dans un véritable processus d'apprentissage. L'enseignant doit avoir les moyens d'une intervention didactique dans ce cas, nous rejoignons ici Conne (1999) :

Pour permettre à l'élève d'exercer un contrôle sur le sens il est nécessaire que les transformations du milieu et de la situation soient objectivées pour l'élève et fassent partie de l'échange didactique.

Ces deux conditions concernent la constitution du milieu expérimental a priori (Bloch, 2002) et notamment :

- l'anticipation et la prévision des comportements des élèves dans la situation en termes d'interactions significatives avec les différents éléments du milieu (peuvent-ils endosser la responsabilité et le contrôle de la recherche, sont-ils susceptibles d'un enrôlement dans les tâches proposées) ;
- l'analyse des connaissances mises en jeu dans la situation et plus particulièrement les moyens de contrôle du professeur (en vue de la réelle mise en œuvre de ces connaissances par ses élèves) et les jeux possibles des élèves (interactions de type proposant/opposant en référence au schéma de la validation explicite de Brousseau) ;
- la présence dans le milieu d'apprentissage (niveau de la situation didactique dans le modèle de Margolinas) d'éléments susceptibles d'être utilisés par les élèves pour passer du niveau "agissant" [milieu objectif] au niveau "apprenant" [milieu référent] (Margolinas, 2002).

II - 2.2 Un milieu qui développe l'autonomie de l'élève

La deuxième caractéristique d'un milieu de type antagoniste concerne sa potentialité à développer l'autonomie de l'élève dans ses apprentissages. Nous avons insisté sur la distance que nous souhaitons prendre avec un enseignement par ostension, notamment pour ne pas prendre le risque de contextualiser trop fortement les apprentissages ce qui rendrait très délicat les possibilités de transfert des connaissances. En conséquence, il nous semble important de cultiver la décontextualisation des apprentissages en offrant la possibilité aux élèves d'être autonomes grâce à la mise en œuvre de situations fortement adidactiques. Ce milieu adidactique doit permettre "*le fonctionnement de la connaissance comme production libre de l'élève*" (Brousseau, 1998, p. 302).

Pour que le milieu puisse permettre à l'élève de mettre à l'épreuve les savoirs acquis antérieurement dans une situation d'autonomie, il est important de prévoir un étayage limité au strict nécessaire du professeur (sans pour autant l'abolir a priori). Reformulation, rappel de connaissances, apport matériel et/ou symbolique doivent être prévus mais distillés en vue d'un contrôle de l'avancée du temps didactique (Chevallard et Mercier, 1987 ; Chopin, 2007) par le professeur. Ces aménagements peuvent faire partie des éléments à ajouter dans le milieu notamment à destination des élèves à besoin particulier. Ces conditions imposent une certaine retenue de l'enseignant dans le contrôle et la gestion des rapports de l'élève avec le milieu. Il s'agit de lui dévoluer sa responsabilité au moins pendant un temps donné.

L'élève doit cependant accepter de se sentir responsable de son apprentissage, ce qui n'est pas une caractéristique d'un contrat classique. Les rapports de l'élève avec le milieu antagoniste s'inscrivent dans un contrat didactique spécifique. Ce type de contrat implique notamment un changement de posture de l'enseignant qui doit assumer les déséquilibres ou autres contradictions apportés par l'antagonisme du milieu. Dans une démarche de type expérimentale, cela signifie aussi que les hypothèses (questionnement qui naît d'une volonté d'anticipation d'après les premières interactions avec le milieu dans la phase d'action) apparaissent comme issues du travail des élèves, l'enseignant s'interdisant toute validation ou rejet précipité. Dans ce type de contrat le contrôle de l'activité des élèves est de nature très différente et proche du modèle de Conne "*le faire faire des mathématiques*" que nous avons présenté précédemment :

- suivi de l'interaction de l'élève (des élèves...) avec le milieu,
- suivi des pratiques de l'élève,
- suivi des évolutions et transformations du milieu.

La notion d'autonomie dans l'apprentissage est toute relative et renvoie essentiellement à deux caractéristiques propres au milieu antagoniste et appropriées à la prise en compte de la dimension expérimentale :

- une posture d'enseignement axée davantage sur le contrôle des réponses du milieu, sur les transformations qui s'avèrent nécessaires et sur la dévolution de la responsabilité de la résolution du problème aux élèves,
- un enrichissement du milieu qui permette aux acteurs d'interagir en fonction de leurs niveaux de connaissances sans recours à la sollicitation du savoir de l'enseignant.

II - 2.3 Un milieu qui collabore à l'accès à des savoirs mathématiques

En suivant Salin (2002) nous terminerons l'inventaire des caractéristiques d'un milieu antagoniste par sa capacité à favoriser l'accès à des savoirs mathématiques¹⁸ identifiés comme tels. Ceci nous semble relever de la constitution du modèle théorique épistémologique (Bloch, 2002), qui s'appuie sur la recherche d'une relation consistante entre un savoir mathématique et un jeu de situations qui le fasse fonctionner comme une connaissance afin d'en permettre une institutionnalisation.

Il est utile de rappeler ici que le cadre des situations didactiques possède une finalité : l'apprentissage des élèves. L'évaluation par l'enseignant de cet objectif doit être facilité par les

¹⁸ Salin utilise la terminologie "maîtrise des savoirs" que nous avons remplacé ici par "accès aux savoirs" qui nous paraît plus appropriée en terme d'objectifs à poursuivre dans les situations de type adidactique.

éléments du milieu qui lui permettront d'identifier des savoirs maîtrisés par les élèves à l'issue des phases de résolution de problèmes. En effet, faire fonctionner des connaissances pour s'assurer le contrôle de la situation ne signifie pas pour autant que les objectifs institutionnels de maîtrise des savoirs sont atteints.

Il en est de la responsabilité de l'enseignant, et des milieux qu'il propose dans chaque situation didactique, d'anticiper puis de mettre en œuvre une phase d'institutionnalisation pour réaliser cet objectif. Cette institutionnalisation doit s'appuyer sur la phase de validation que nous avons présenté auparavant.

II – 3 La médiation entre les objets de savoir et l'apprentissage

Toute situation didactique met en interaction un savoir et des élèves au sein d'un milieu qui en assure la médiation : il les unit puisqu'il les met en relation, mais il les sépare du fait de la transposition didactique nécessaire. Dans les chapitres précédents, nous avons commencé à caractériser le milieu dans le cadre d'une recherche d'un environnement propice à l'expérimentation. Nous souhaitons désormais porter notre réflexion sur le rôle de médiation qu'assure ce milieu dans la construction des connaissances, en utilisant plus particulièrement deux entrées qui nous paraissent éclairantes : la sémiotique et la médiation instrumentale.

Nous essaierons ainsi de prendre en compte les spécificités du jeu sur les objets en situation d'enseignement / apprentissage en analysant tout d'abord le processus de signification qui conduit à la présentation et à l'interprétation de ces objets. Dans notre travail, nous resterons à distance des références à l'étude des signes en didactique des mathématiques telles qu'elles ont été conduites par Chevallard (1994) dans la théorie anthropologique (ostensifs / non ostensifs) ; ou par Duval (Duval, 1995) dans les registres de représentation. Nous leur préférerons une référence à Peirce en rejoignant ainsi Conne (2007) et Falcade (2006).

Dans un deuxième temps, nous nous interrogerons sur la médiation instrumentale dans le processus de conceptualisation et d'expérimentation. Nous souhaitons ainsi poursuivre notre démarche de type dialectique en insistant sur les relations de type médiations (langagières et instrumentales) pour dépasser les cadres plus dyadiques comme les rapports élève-savoir ou sujet-objet.

II - 3.1 Représentations et interprétations dans le milieu

§ *Eléments de sémiotique*

Dans nos travaux, nous privilégions la notion de rapport dialectique (par exemple pour traiter du processus enseigner / apprendre, ou de la problématique objet sensible / objet théorique) car, selon nous, qu'il y a une insuffisance dans la pensée binaire à décrire la complexité. Nous cherchons à articuler les éléments clés plutôt qu'à les opposer, ce qui nous conduit à nous référer à une sémiotique de type peircienne pour présenter le processus de signification que nous utiliserons. Nous nous référerons à Peirce du fait qu'il fonde sa théorie sur deux principes fondamentaux :

- la théorie triadique du signe en opposition à la relation dyadique de Saussure (signifiant/signifié) ou de Frege (signifié/référent)
- l'aspect dynamique du processus interprétatif : les trois éléments qui composent le signe sont des fonctions et non des attributions.

La conséquence principale est que, si la signification doit être envisagée comme un processus dynamique, on doit considérer le signe comme toujours indéterminé. La triade Signe (ce qui représente), Objet (ce qui est représenté), Interprétant (ce qui produit leur relation) doit elle-même être considérée comme instable car toujours modifiable. Notons ici qu'une juste représentation de la triade (le signe choisi par Peirce pour interpréter l'objet sémiotique) est à différencier symboliquement du triangle (didactique ou sémiotique).

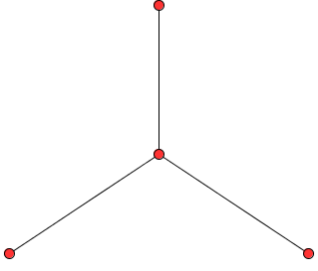
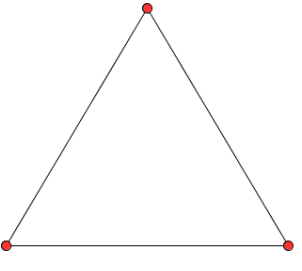
	
triade peircienne : trois relations dépendantes	représentation triangulaire : trois relations indépendantes

tableau 3 : deux représentations triadiques

Dans un environnement didactique, c'est la communication (verbale, non verbale et symbolique) entre les acteurs qui met en scène le processus sémiotique. Cette communication doit elle-même être considérée comme un processus de double signification qui comporte de

nombreuses zones d'indétermination. En suivant Marty¹⁹ nous pouvons caractériser schématiquement la communication en trois temps distincts et successifs :

1. $O \rightarrow S$: de l'objet au signe

Le producteur (émetteur) produit un signe substitué à l'objet (absent pour le récepteur) selon des règles choisies dans un système qui lui est propre mais qu'il espère partagé par un interprète (récepteur) possédant les mêmes références culturelles.

2. $S \rightarrow I$: du signe à l'interprétant

Du signe à l'interprétant, il s'agit d'un décodage qui dépend des références du récepteur, du contexte dans lequel se déroule le processus, des règles explicites ou non de l'opération. Ici se situe le principal nœud de l'indétermination relativement à la référence.

3. $I \rightarrow O$: de l'interprétant à l'objet

Retour à l'objet, si la communication est parfaitement réussie (pas d'interférence ni de déviation importante dans le processus d'interprétation) l'objet de l'émetteur et celui du récepteur coïncident.

Nous retenons la question de l'indétermination de la référence, telle que les ressources issues de la philosophie logique et de l'épistémologie logique²⁰ l'ont problématisée. L'indétermination de la référence, présente de façon permanente dans les situations d'apprentissage scolaire, peut être source de malentendu si elle reste un "point-aveugle" (Héraud, 2006), mais elle peut devenir une condition favorable à l'élaboration des connaissances si elle est traitée de façon pertinente. Parler d'indétermination ne veut pas dire en effet absence de détermination, mais au contraire pluralité de déterminations possibles (le paradoxe est qu'il y a un trop plein de significations) ; cette indétermination se manifeste d'ailleurs aussi bien du point de vue des termes du langage utilisé en situation scolaire que du point de vue des objets sensibles manipulés dans les actions ou appréhendés dans l'observation.

§ *Intérêt épistémologique en situation didactique*

Il y a un enjeu considérable pour l'enseignant dans sa pratique de classe à pouvoir d'une part affronter les phénomènes d'ambiguïtés référentielles, et d'autre part effectuer le jeu des variations référentielles (des mêmes mots et objets) en les rapportant à leur contexte d'emploi (Errera et Héraud, 2006). Pour exemple, les confusions de significations ne sont souvent pas tant le signe d'une pensée confuse ou déviante que l'indication d'une intrication de

¹⁹ Voir en ligne : <http://robert.marty.perso.cegetel.net/semiotique/marty.htm>

²⁰ Pour exemple, les "jeux de langage" chez Wittgenstein, "l'indétermination de la signification" dans la traduction chez Quine rapportés dans Errera et Héraud (2007), Durand Guerrier et Héraud (2007).

significations sur lesquelles l'enseignant peut au contraire s'appuyer pour conduire un véritable dialogue épistémologique

Le but est de contrôler ce fonctionnement au bénéfice de l'enrôlement des élèves dans la reconstruction active et participative de l'objet en jeu, au plus près de sa teneur épistémologique. Ceci nécessite selon nous, deux perspectives sémiotiques à intégrer l'une dans le milieu expérimental a priori, l'autre dans la confrontation à la contingence.

L'analyse a priori d'une situation doit comporter une étude de type sémiotique des milieux matériels tels qu'ils seront présentés aux élèves. En mathématiques, l'utilisation des signes et des symboles est abondante et elle ne saurait être pertinente que si elle s'appuie sur une juste connaissance des "champs d'interprétants" correspondants chez les élèves. Ces derniers ont capitalisé des expériences de mise en relation des signes aux objets sous forme d'habitus qui leur permet ou leur interdit un ou des processus de signification, habitus qu'il est souhaitable de connaître pour le professeur. Pour ce faire, l'analyse sémiotique des objets référents (les savoirs) et surtout du choix des signes qui permettront leur présentation nous paraît pertinente. Dans un tel cadre, une pédagogie qui ne laisserait pas suffisamment d'autonomie ou de liberté d'initiative aux élèves ne permettrait pas d'espérer la coïncidence entre les objets de référence de l'enseignant et ceux construits par les élèves. Nous faisons l'hypothèse que la potentialité d'un milieu à l'expression d'un raisonnement de type abductif chez les élèves, (tel que nous l'avons présenté auparavant) est particulièrement pertinent. Il permet en effet l'expression d'hypothèses qui s'appuient forcément sur les expériences des élèves et ainsi d'exhiber les "champs d'interprétants".

Nous arrivons ici à la deuxième perspective sémiotique à intégrer lors de la confrontation à la réalité de la classe (toujours en référence au modèle de Bloch, 2002) dans l'observation et l'analyse des interactions. Au cours de leurs actions sur le milieu les élèves produisent un certain nombre de signes qui témoignent de leurs connaissances sans qu'elles soient directement accessibles par l'enseignant. La phase de formulation (échanges argumentés entre les acteurs) sera beaucoup plus propice pour interpréter les signes produits par les élèves qui sont à ce moment dans l'obligation de construire des discours sur les sémoses²¹ qu'ils mettent en œuvre dans leur processus de signification. Une communication tournée vers l'argumentation déploie en effet davantage d'indices, au profit d'une meilleure interprétation des référents évoqués. Ceci pourra éventuellement permettre à l'enseignant d'évaluer la proximité ou la plus ou moins grande coïncidence des objets : les référents de l'enseignant (les savoirs en jeu) et ceux des élèves (faisant partie de leurs connaissances déjà là).

²¹ La sémose est définie dans la théorie triadique de la communication chez Peirce comme la transmission triadique d'une information – et donc d'un objet – par un signe dûment interprété (qui peut à son tour devenir un signe pour un autre interprétant).

II - 3.2 Médiation instrumentale

Evoquer la dimension expérimentale des sciences ne nous semble pas possible sans un détour par la notion d'instruments, tant ces derniers sont associés aux découvertes scientifiques les plus importantes. Ils ont parfois précédé les théories, l'exemple le plus célèbre est peut être celui de la lunette de Galilée qui provoqua la déception de Descartes qui voyait dans un tel processus "la honte" des sciences. A propos de la lunette il écrit dans l'ouverture de son traité de dioptrique (discours premier) :

"Mais, à la honte de nos sciences, cette invention, si utile et si admirable, n'a premièrement été trouvée que par l'expérience et la fortune [...] il y a environ trente ans par un homme qui n'avait jamais étudié." (Descartes, 1637)

Bien entendu, les instruments ont très souvent succédé aux théories comme des applications nécessaires (le microscope à effet tunnel est une application technique du concept d'effet tunnel). Même si la science a parfois considéré la technique comme secondaire, force est de constater que les instruments sont très souvent devenus les objets réels des découvertes scientifiques portant sur des concepts auxquels ils étaient sensés être subordonnés²². Nous souhaitons investiguer ici sur le rôle des instruments dans la médiation qu'ils assurent entre les objets de la science (et plus particulièrement en mathématiques bien entendu) et la construction des connaissances, dans le rapport qu'ils entretiennent avec la réalité.

Pour traiter de cette dimension instrumentale comme médiation, nous prendrons une première référence dans le champ de la psychologie Vygotsky (1985, p. 40) qui affirme :

"à côté des actes et des processus de comportement naturel, il est nécessaire de distinguer des fonctions et des formes de comportement artificiel ou instrumental"

Un comportement qui ne peut être décrit "à l'intérieur d'un rapport unique stimulus-réponse" car l'instrument, qu'il soit matériel (outil, machine, véhicule...) ou "psychique" (langage, dessin, nombre...), constitue "un nouvel élément intermédiaire s'intercalant entre l'objet et l'opération psychique dirigée sur celui-ci" (ibid, p. 42).

Dans la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990), Vergnaud utilise la notion de théorème en acte pour qualifier les connaissances manifestées par les élèves dans leurs activités. Selon Vergnaud (1990), la conceptualisation consiste en un passage des *concepts-comme-instrument* aux *concepts-comme-objet*. Une assertion qui permet de ne plus considérer l'instrument comme une prolongation du geste mais comme faisant partie de la théorie : l'instrument est un *théorème en actes*, l'objet matériel est une forme d'abstrait naturalisé.

²² Nous avons par exemple présenté le cas de l'objet baromètre dans le travail de Pascal sur la pression atmosphérique dans notre mémoire de DEA/master (Dias, 2003).



figure 8 : un instrument théorème en acte

Le compas "maître de danse" est un instrument de tourneur ou d'horloger qui permet la mesure d'un diamètre de cylindre. Il matérialise le raisonnement géométrique : des alignements des points A, O, B et A', O, B' et de l'égalité de OA, OB, OA' et OB', on déduit l'égalité des triangles OAA' et OBB'. Une façon de tenir le théorème en mains grâce au compas.

Tout objet n'est pas instrument, et sa simple manipulation n'est pas systématiquement source d'apprentissage. Un outil²³ est un objet finalisé (construit dans cet objectif) utilisé par un être vivant dans le but d'augmenter son efficacité naturelle dans l'action. Cette augmentation se traduit par la simplification des actions entreprises, par une plus grande rentabilisation de ces actions. Il devient un outil d'aide à la pensée s'il permet une réflexion sur les conduites et les actions entreprises. Un outil ne possède les caractéristiques d'un instrument que s'il porte deux dimensions : celle de l'artefact²⁴ (Rabardel, 1995) et celle de l'opérationnalité donc s'il porte un engagement à la fois psychologique et moteur de celui qui l'utilise.

"En lui-même, l'artefact ne constitue qu'une composante partielle de l'action technique instrumentée, l'autre composante relevant de l'apport propre de l'utilisateur. Ainsi, il existe des outils dont le mode d'emploi a disparu avec leurs derniers utilisateurs et qui, de ce fait, ne sont plus instrumentales. Leur nature artefactuelle persiste mais ils ne peuvent plus être constitués en instruments : seule l'inscription de l'artefact dans un

²³ Nous faisons la différence entre les terminologies *outil* et *instrument* en suivant Breuillard (1997).

²⁴ Selon Rabardel (1995) l'artefact est "l'outil nu" et l'instrument "l'outil inscrit dans l'usage".

« système de schèmes, de représentations, de connaissances, d'opérations intellectuelles et motrices, permet d'actualiser sa fonction. » (Andreucci, Froment, Vérillon, 1996)

L'instrument est opérationnel en situation didactique selon les choix de son utilisateur, des choix qui peuvent relever des propriétés de l'objet (son affordance²⁵ à la situation sera déterminante), ou des transformations à réaliser dans la résolution du problème en cours. Il apparaît dans une relation de type sémiotique entre trois pôles : l'utilisateur, l'instrument et l'objet de savoir. L'utilisation de l'instrument relève ainsi du théorème en acte (Vergnaud, 1990) comme un processus de signification reliant l'objet (au sens de Peirce) à son représentant, c'est pourquoi nous pouvons parler d'une médiation de type instrumentale.

En mathématiques, les instruments les plus connus sont les instruments de mesure et les instruments de calcul bien étudiés dans Guin et Trouche (2002) dans leur dimension didactique. Nous souhaitons montrer dans la suite de notre travail (les parties B et C) que d'autres outils d'aide à l'activité mathématique des élèves peuvent relever de cette dimension de médiation des instruments à la lumière d'un processus de signification.

II – 4 Cadre institutionnel et démarche d'investigation

Pour terminer ce chapitre consacré à la réflexion didactique, nous souhaitons montrer que la dimension expérimentale des mathématiques peut aussi s'exprimer grâce à la démarche utilisée par le professeur pour conduire ses enseignements. Pour cela, nous utiliserons le schéma de la démarche d'investigation tel qu'il a été présenté à plusieurs reprises dans des documents institutionnels dans le cadre des programmes de l'école primaire et du collège²⁶. A la lecture de ces propositions il apparaît clairement que cette démarche n'est pas un "terrain réservé" aux sciences expérimentales car les mathématiques peuvent aussi apparaître comme un territoire d'incertitude aux élèves, un espace de questionnement, de recherche et de découverte.

« Dans la continuité de l'école primaire, les programmes du collège privilégient pour les disciplines scientifiques une démarche d'investigation. Cette démarche présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et celui des mathématiques. (M.E.N., 2007) »

²⁵ Nous empruntons ce terme à la psychologie de la perception où l'affordance désigne une relation d'adaptation immédiate de l'individu à son environnement.

²⁶ Nous utiliserons principalement : Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, B.O. hors série N°6 - volume 2 du 19 avril 2007

Nous analyserons les sept *moments clés* proposés pour la mise en œuvre de la démarche d'investigation en indiquant ce qui nous paraît essentiel dans le cadre de notre recherche des éléments constitutifs d'un milieu pour l'expérimentation. Nous précéderons cette étude chronologique²⁷ de quelques commentaires sur l'introduction du document cité auparavant.

Cette démarche s'appuie sur le questionnement des élèves sur le monde réel (en sciences expérimentales) et sur la résolution de problèmes (en mathématiques). (ibid)

Cette distinction préliminaire semble vouloir faire des mathématiques une discipline qui ne permette le questionnement que dans un contexte de résolution de problème sans lien direct avec le monde réel. Nous retrouvons dans cette documentation institutionnelle un parti pris assez orienté vers la volonté de séparer les mathématiques des sciences dites expérimentales, ce qui nous semble relativement contradictoire avec l'explication des contenus de la démarche qui suivra. Il nous semble évident que le lien des mathématiques avec le monde est historique et culturel, et que c'est justement cette relation qui existe entre les objets du monde et ceux des mathématiques qui en font une discipline expérimentale. La notion de réalité dont il est question dans l'extrait rapporté est certainement utilisée comme synonyme de perception (visuelle ou manipulatoire) qui n'exclut pas non plus les mathématiques. Cependant comme le propose Langevin (1950), la notion de réalité (le concret) peut concerner les objets familiers pour le sujet. Comme nous l'avons évoqué auparavant à propos de la médiation sémiotique, les objets mathématiques ont un caractère sensible permettant leur représentation assurant leur relation au réel.

Les investigations réalisées avec l'aide du professeur, l'élaboration de réponses et la recherche d'explications ou de justifications débouchent sur l'acquisition de connaissances et de compétences méthodologiques. (ibid)

Deux objectifs sont assignés a priori à cette démarche, ils nous semblent être compatibles avec les éléments que nous avons présentés à propos du milieu propice à l'expérimentation. Le premier concerne la place du professeur résolument définie comme à l'intérieur du milieu (ce qui est somme toute assez peu surprenant dans le cadre d'un document institutionnel d'accompagnement aux programmes destiné aux enseignants). Nous partageons bien entendu cet a priori même si nous avons montré que les interactions entre professeur et élève ne doivent pas se faire au détriment de l'autonomie des élèves dans leurs apprentissages. Cependant, nous sommes d'accord pour considérer que les interventions du professeur peuvent (sous condition) être assimilées à des rétro-actions du milieu sur les actions des élèves.

²⁷ Nous soulignons ici que le texte précise que " *En fonction des sujets, un aller et retour entre ces moments est souhaitable, et le temps consacré à chacun doit être adapté au projet pédagogique de l'enseignant.*"

§ *moment 1 : Le choix d'une situation-problème par le professeur*

Il s'agit dans un premier temps didactique d'analyser les savoirs visés et de déterminer les objectifs à atteindre au sein d'un processus pédagogique de conception de séquence. Le but affiché de cette phase du travail de l'enseignant est double :

- le repérage des acquis initiaux des élèves par le choix d'une situation adaptée à leurs connaissances *déjà là* ;
- l'identification des conceptions ou des représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs probables).

Nous retrouvons ici les éléments du milieu expérimental a priori de Bloch (2002) sans référence à une analyse plus approfondie sur les savoirs en jeu (modèle théorique épistémologique) qui est pour nous incontournable dans la recherche que nous menons. En effet, le repérage des obstacles épistémologiques est lié d'une part à l'étude de la fonctionnalité de ces savoirs au sein des mathématiques, mais aussi à la prise en compte des références culturelles liées aux savoirs en jeu.

L'élaboration d'un *scénario d'enseignement* se fera en fonction de l'analyse de ces différents éléments pour atteindre l'objectif principal d'une situation didactique : la construction des connaissances.

§ *moment 2 : L'appropriation du problème par les élèves*

Le deuxième temps de la démarche peut être rapproché de la phase de dévolution présentée dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) du fait de leurs similitudes. Ce moment doit être consacré à l'appropriation par les élèves du problème à résoudre sans apport de l'enseignant concernant les connaissances à mettre en œuvre, dans un rôle cantonné à la reformulation des questions que les élèves se posent. Le tout permettant une mise en lumière des conceptions qui s'expriment comme des productions libres des élèves dans leur rapport avec le milieu.

Nous soulignons à cette occasion l'un des paradoxes qui peut s'avérer difficile dans une posture professionnelle en rupture avec un contrat plus classique en empruntant à Brousseau (Brousseau, 1997) la réflexion suivante :

Premier paradoxe de la dévolution : Le maître veut que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même mais en même temps il veut, il a le devoir social de vouloir, que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle.

La démarche d'investigation présente ici l'une des difficultés de sa mise en œuvre qui nous semble pouvoir être en partie résolue par un travail sur la signification de la situation modélisée par le problème qui est présenté. Ceci renvoie à ce que nous avons développé à

propos de la dimension sémiotique et de sa prise en compte lors de la constitution du milieu expérimental a priori. Un travail préalable sur les signes et les champs d'interprétants par les élèves nous semble de nature à contribuer la phase de dévolution vers une activité autonome des élèves.

§ *moment 3 : La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles*

Dans le déroulement chronologique proposé, un temps de formulation des hypothèses et des conjectures précède celui des expériences. Il semble que cet espace de communication soit volontairement organisé de façon collective avant toute mise en actes. Ce protocole diffère sensiblement de ce que nous envisageons pour notre part avec la phase d'action pendant laquelle les échanges sont limités à des commentaires accompagnant les rétro-actions du milieu sans intention d'organisation du travail collaboratif.

Néanmoins, nous intégrons cette phase de formulation des conjectures comme un moment indispensable dans la construction des connaissances scientifiques en regard de ce que nous avons développé au titre du raisonnement abductif. Ce dernier s'appuie sur la formulation d'hypothèses développées non pas par un simple contact avec le milieu mais par l'interprétation des réponses fournies au fur et à mesure de la recherche. On a sans doute ici un élément de différenciation. Dans la plupart des cas, la situation d'action est nécessaire pour faire des hypothèses.

§ *moment 4 : L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves*

En partant du principe que faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes, il est un temps pour appréhender les premières tentatives de réponse. Le rôle de l'expérience tient une place privilégiée dans le quatrième moment de cette démarche d'investigation, une expérience qui se confronte aux conjectures émises auparavant sans pour autant être cruciale. Cette phase de la démarche permet de définir les éléments du débat dans le milieu, qu'il s'agisse de description des méthodes ou de l'exploitation possible des premiers résultats. Il ne s'agit pas encore du temps de développement des arguments, mais plutôt d'une phase de "formulation située" (in situ) qui établit éventuellement les théorèmes qu'il faudra prouver dans la phase suivante.

L'expérimentation est conduite par les élèves, il s'agit là sans aucun doute de l'espace le plus autonome dans la démarche. Cette indépendance garantit le raisonnement abductif qui s'opère dans de nombreux allers et retours entre objets sensibles et objets théoriques comme nous l'avons décrit auparavant.

§ *moment 5 : L'échange argumenté autour des propositions élaborées*

Deux objectifs sont poursuivis dans cette séquence de l'investigation :

- La communication au sein de la classe des solutions élaborées, des réponses apportées, des résultats obtenus, des interrogations qui demeurent; une phase de mise en commun chère à la démarche expérimentale dans son histoire.
- La confrontation des propositions guidée par un débat autour de leur validité nécessitant une recherche d'arguments pour parvenir au résultat attendu par l'élaboration collective de preuves.

Nous retrouvons ici le schéma de la validation explicite tel qu'il a été présenté en théorie des situations didactiques lors de notre chapitre précédent. Nous souhaitons insister ici sur le rôle fondamental de cette phase dans la création d'un milieu propice à la dimension expérimentale en mathématiques. Nous faisons en effet l'hypothèse que c'est la mise en place d'une validation des propositions qui caractérise la construction des savoirs scientifiques, une validation qui nécessite une vérification (Granger, 1992) voire une démonstration. Ce ne sont pas les expériences conduites qui assurent la validation des conjectures émises mais le processus qui conduit à en apporter les liens avec la vérité qu'elles énoncent.

§ *moment 6 : L'acquisition et la structuration des connaissances*

Les deux derniers temps de la démarche d'investigation concernent la finalité de l'apprentissage : la structuration des connaissances puis leur opérationnalisation. Deux moments qui sont séparés dans la proposition institutionnelle ceci correspondant à la volonté de distinguer l'institutionnalisation de l'intégration des connaissances. Le temps 6 se voit assigner des objectifs à forte teneur pédagogique :

- *mise en évidence, avec l'aide de l'enseignant, de nouveaux éléments de savoir (notion, technique, méthode) utilisés au cours de la résolution;*
- *confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus;*
- *recherche des causes d'un éventuel désaccord, analyse critique des expériences faites et proposition d'expériences complémentaires;*
- *reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence. (ibid)*

C'est manifestement un temps qui s'ancre dans la phase de validation en considérant les échanges éventuellement contradictoires en référence assez certaine avec le conflit socio-cognitif. Il s'agit cependant d'une confrontation argumentée en lien avec les objets de savoirs

en cause, ce qui nous semble le principal point à signaler sur le plan didactique et épistémologique.

§ *moment 7 : L'opérationnalisation des connaissances*

La dernière phase renvoie quant à elle à des objectifs se situant essentiellement sur le champ de l'enseignement et fait explicitement référence à la maîtrise des formes langagières utilisées et au nécessaire travail sur les techniques garantissant la familiarisation avec les objets. Il est question de mettre en place des *exercices permettant d'automatiser certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques... (ibid).*

chapitre III - Une situation consistante : la recherche des polyèdres réguliers

Dans ce chapitre, nous présentons une situation didactique qui répond aux principales caractéristiques décrites dans le milieu théorique et épistémologique de Bloch (2002) tel que nous l'avons décrit auparavant. Cette situation concerne un objet de savoir en géométrie, domaine que nous avons privilégié en fonction de la forte dimension culturelle et symbolique de ses savoirs et connaissances. Il s'agit de proposer aux élèves une recherche sur la découverte des polyèdres réguliers, des objets mathématiques dont la construction nous semble particulièrement adaptée à la révélation de la dimension expérimentale des mathématiques.

Nous suivrons quatre étapes en commençant par une nécessaire présentation de la genèse historique de la découverte des polyèdres réguliers et de l'épistémologie qui lui est associée. Nous verrons comment le savoir sur ces objets de savoir a évolué depuis l'antiquité jusqu'aux portes de notre histoire scientifique récente. Nous interrogerons ensuite la dimension sémiotique dans le rapport à ces objets particuliers, afin de montrer la pluralité des registres de sens qui les concernent. Ceci permettra de préparer leur importation dans le contexte de l'enseignement.

L'analyse a priori complètera cette étude dans le cadre de la préparation d'un milieu théorique et épistémologique (Bloch, 2002). Elle sera l'occasion d'envisager les fonctionnalités de ce savoir en mathématiques et dans d'autres disciplines, afin de constituer l'inventaire des connaissances qui peuvent le faire fonctionner. Une analyse prédictive de la consistance de la situation sera également proposée afin de garantir au mieux les expérimentations qui seront conduites en classe.

Nous terminerons par une proposition de modélisation d'un milieu que nous appellerons "milieu de type laboratoire" et qui nous semble intégrer l'ensemble des données que nous avons présenté dans cette première partie de la thèse consacrée à la réflexion épistémologique et didactique.

III – 1 Histoire et épistémologie des savoirs en jeu

L'étude exploratoire qui va suivre dépasse parfois le strict cadre qui nous sera utile dans la partie didactique de la situation que nous présenterons. Nous avons cependant souhaité faire

un compte rendu assez complet de ce long temps de recherche sur les polyèdres d'une part pour mettre en évidence que certaines découvertes historiques (ou artistiques, culturelles), tout en étant fortuites sont parfois déterminantes ; et d'autre part pour témoigner du grand plaisir à conduire une recherche allant de "ports en ports" sans feuille de route toujours pré-établie. Le "monde des polyèdres" est un espace de travail dans lequel l'entrée perceptive est captivante peut être du fait de cette impression d'une harmonie tant recherchée par les Grecs, mais c'est aussi le lieu d'une grande richesse de connaissances scientifiques. Les travaux conduits dans les classes que nous rapporterons plus loin dans cette thèse en seront le témoignage, nous nous engagerons pour l'instant à bâtir l'assise historique de la découverte des polyèdres réguliers.

III - 1.1 Eléments historiques

§ Géométrie des solides : passer du plan à l'espace

Pour définir les polyèdres réguliers, nous avons besoin de la connaissance des polygones réguliers sur lesquels il nous faut revenir rapidement. Depuis l'Antiquité, on sait qu'il est théoriquement possible de construire exactement un polygone régulier convexe à n côtés pour n'importe quel entier n supérieur à 3, et que l'on peut de la sorte *approcher* le cercle. Les seules questions soulevées par les polygones réguliers sont d'ordre pratique : est-il possible de construire tel polygone régulier uniquement avec la règle et le compas ? De telles constructions sont simples pour le triangle, le carré ou l'hexagone, un peu moins pour le pentagone entre autres. Cela est impossible pour l'heptagone. Gauss a définitivement clos le débat par un théorème : il faut et il suffit que le nombre de faces n soit de la forme $2^r \cdot p_1 \cdot p_2 \dots p_s$ avec $r, s \in \mathbb{N}$ et où les p_i sont des nombres premiers de Fermat (nombre F_n de la forme $2^{2^n + 1}$) distincts.

Un raisonnement par analogie pourrait conduire à penser qu'il en est de même pour les solides réguliers, mais tel n'est pas le cas. En effet, cette propriété d'infinité des polygones réguliers n'est pas transposable dans l'espace à trois dimensions habituel : il n'est pas vrai qu'il existe des polyèdres réguliers convexes à n faces pour tout n . Force est de constater que le nombre de possibilités est même très réduit, puisqu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes appelés couramment *Solides de Platon* dont nous dresserons ici un aperçu historique de leur découverte.

§ *Brefs aperçus historiques**De Pythagore à Euclide*

La contribution de Platon à la découverte des polyèdres réguliers qui portent son nom est en fait très limitée. On connaissait en effet leur existence, le dodécaèdre exclu, bien avant le IV^e siècle avant J.C. C'est à **Pythagore** que l'on reconnaît la primauté de la découverte des quatre premiers²⁸. Tout comme la plupart de ces *premiers* philosophes, il cherchait une explication aux éléments du monde qui l'entourait que ce soit le ciel, la terre ou le vent et la pluie. La compréhension était souvent un moteur plus fondateur des recherches que celle de la constitution de la matière. En recherchant une harmonie numérique aux choses du monde, Pythagore (et certains de ses élèves) aurait proposé la première étude sur ce sujet²⁹. Un siècle plus tard, (V^e av. J.C.), **Empédocle**, philosophe pré-socratique, conçoit le monde comme l'association des éléments fondamentaux. Désireux de construire un modèle du monde physique tel qu'il était alors compris, il associe ces quatre solides aux quatre premiers éléments, en tenant compte de leurs propriétés respectives : au tétraèdre, on associa le feu pour la forme aigu de ce polyèdre ; l'association du cube et de la terre fut décidée en regard de leur stabilité commune; à l'octaèdre on associa l'eau ; à l'icosaèdre on choisit d'associer l'air.

La découverte du dodécaèdre est plus tardive. **Théétète**, (360 av. JC) mathématicien néo-pythagoricien, étudie lui aussi les polyèdres réguliers et montre que le dodécaèdre est le dernier solide de ce type. Cette découverte embarrasse beaucoup les anciens : elle perturbe le modèle construit dans la cohérence et l'esthétique par l'association des quatre solides réguliers et des quatre éléments fondamentaux. Dans son dialogue *Epinomis*, Platon y associe alors un 5^{ème} élément physique : l'éther qui *forme l'âme des êtres animés*, puis, lors d'un dialogue plus célèbre *Timée*³⁰, il se propose de mettre sur pied un nouveau système "cohérent" d'explication du monde. Pour lui, l'Univers a été créé à partir de quatre corps de base : la Terre, le feu, l'air et l'eau. Il associe alors ces éléments aux polyèdres réguliers qu'il reconstruit à partir d'agencement de deux triangles rectangles particuliers (sauf pour le dodécaèdre) :

²⁸ D'autres sources attribuent leur découverte à Pythagore et ses disciples Hiéroclès, Archytas, Philoläus pour le cube, le tétraèdre et le dodécaèdre, et à Théétète pour l'octaèdre et l'icosaèdre. Rappelons en effet si besoin qu'aucun document écrit n'a été laissé par Pythagore.

²⁹ Des solides de type platoniciens, c'est-à-dire illustrant les polyèdres réguliers sont présentés à l'Ashmolean Museum d'Oxford, ils sont datés du néolithique, ce qui laisse bien entendre que leur fabrication n'est pas une découverte grecque...

³⁰ PLATON, Œuvres complètes, tome X, Timée-Critias.

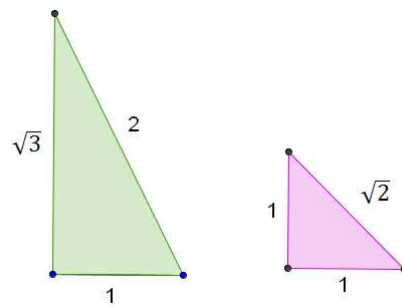


figure 9 : les triangles unités de Platon

La nouvelle distribution (qui n'est pas issue d'arguments mathématiques) devient ainsi la suivante :

- tétraèdre → feu ; octaèdre → air ; cube → terre ; icosaèdre → eau ; dodécaèdre → univers

Bref, nous admettons que de tous les très nombreux triangles scalènes, il y en a un qui est le plus beau, et nous laisserons de côté tous les autres. Ce triangle sera celui avec deux desquels peut se former le troisième triangle, qui est équilatéral. Pourquoi il en est ainsi, il serait trop long de le démontrer. Mais, à qui pourra le découvrir et le démontrer tel, je ne disputerai point la récompense. [...] On commencera par la première espèce, celle dont les composants sont les plus petits, L'élément mathématique de cette espèce est celui dont l'hypoténuse a une longueur double de celle du plus petit côté de l'angle droit. Deux de ces triangles-là s'accolent selon la diagonale du quadrilatère, et cette opération est renouvelée trois fois, de manière que toutes les diagonales et tous les petits côtés des angles droits viennent coïncider en un même point qui est comme un centre. Il naît ainsi un triangle équilatéral unique, qui est composé de petits triangles, au nombre de six. (Platon, Le Timée)

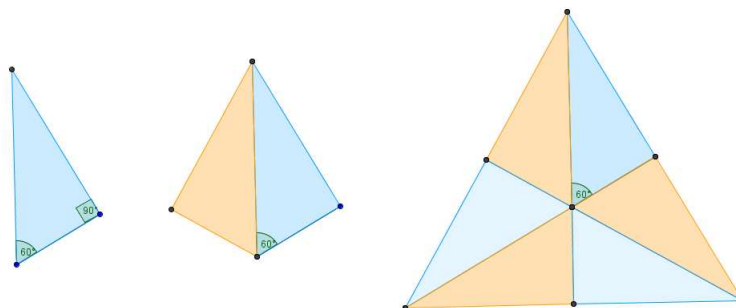


figure 10 : la construction du triangle équilatéral dans le Timée

Quatre de ces triangles équilatéraux réunis selon trois angles plans forment un seul angle solide, qui vient immédiatement après le plus obtus des angles plans. Si l'on compose quatre angles solides, on a la première forme de solide, qui a la propriété de diviser la sphère dans laquelle il est inscrit en parties égales et semblables. (ibid)

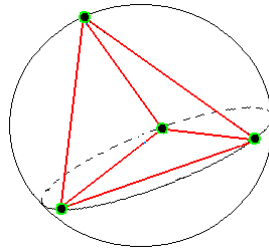


figure 11 : inscription du tétraèdre dans la sphère

La seconde espèce est composée des mêmes triangles. Quand ils ont été combinés pour former huit triangles équilatéraux, ils composent un angle solide unique, fait de quatre angles plans. Quand on a construit six de ces angles solides, le deuxième corps se trouve achevé. Le troisième est formé de la combinaison de deux fois soixante triangles élémentaires, c'est-à-dire de douze angles solides, dont chacun est enclos par cinq triangles plans équilatéraux, et il y a vingt faces qui sont des triangles équilatéraux. (...) Quand il a eu produit ces trois solides, le premier type de triangle a cessé sa fonction.

À son tour le triangle isocèle a engendré la nature du quatrième corps élémentaire. Ce corps est formé par quatre isocèles : les côtés de leurs angles droits se réunissent en un centre et forment une figure quadrangulaire équilatérale. Six de ces figures, en s'accolant, donnent naissance à huit angles solides, dont chacun est constitué par l'union harmonique de trois angles plans, Et la figure ainsi obtenue est la figure cubique, laquelle a pour base six surfaces quadrangulaires, à côtés égaux. Il restait encore une seule et dernière combinaison ; le Dieu s'en est servi pour le Tout quand il a dessiné l'arrangement final. » (ibid)

Aucune explication (rationnelle ou mathématique) n'est fournie sur cette "dernière combinaison" qui témoigne d'une vraisemblable incertitude mathématique dans le plan concernant le pentagone régulier. Nous souhaitons relever ici que la référence aux angles est assez constante dans le propos de Platon, ce qui, comme on le verra ensuite, deviendra le nœud du problème didactique.

L'association des polyèdres réguliers aux *éléments* se poursuit par quelques transformations, dont la permutation de l'éther et du feu, par le disciple de Platon. Aristote en fait les cinq substances simples de sa Physique.

La question qui se pose alors concerne la possibilité de dénombrement des polyèdres réguliers et sa preuve. C'est **Euclide** qui s'attache à la démonstration de la preuve dans le Livre XIII, propositions 13 à 18 des *Eléments*, après avoir ouvert au livre XI la partie stéréométrique en débutant par une liste de vingt-neuf définitions dont les cinq dernières³¹ concernent les cinq solides de Platon :

définition 25 : Un cube est un solide compris sous six carrés égaux.

définition 26 : Un tétraèdre est une figure solide comprise sous quatre triangles égaux et équilatéraux.

définition 27 : Un octaèdre est une figure solide comprise sous huit triangles égaux et équilatéraux.

définition 28 : Un dodécaèdre est une figure solide comprise sous douze pentagones égaux, équilatéraux, et équiangles.

définition 29 : Un icosaèdre est une figure solide comprise sous vingt triangles égaux et équilatéraux.

Les cinq solides sont désormais définis, il reste à prouver qu'on peut les construire. C'est ce qu'Euclide s'emploie à faire dans le livre XIII. Les propositions 13 à 17 exposent une construction³² des cinq solides de Platon. Chacune de ces propositions respecte une syntaxe particulière générale. Euclide énonce premièrement un théorème (la proposition); la deuxième partie est consacrée à la construction de la figure (modélisation codée) puis par la traduction de la conclusion sur la figure codée (*je dis que...*). La quatrième partie est destinée au développement de la démonstration par enrichissement de la figure construite et se termine par la conclusion. On voit apparaître ici deux modes d'existence des solides de Platon : ils existent d'abord parce qu'on peut les construire comme objets sensibles ; ils existent ensuite comme objets mathématiques dans la théorie élaborée par Euclide. Ce qu'apporte en outre la théorie, c'est la preuve qu'il n'y a pas d'autres polyèdres réguliers convexes. En effet, le propos d'Euclide concerne la démonstration de la construction des solides, aucune de ses démonstrations ne prouvent l'unicité du polyèdre construit, heureusement pour lui les problèmes qu'il pose n'ont qu'une solution.

le modèle de Kepler

À l'aube du XVII^e siècle, **Kepler** (1571-1630), tout comme Pythagore, pense que le nombre des planètes et leur disposition n'est pas arbitraire, mais une manifestation de la volonté de

³¹ IREM Clermont-Ferrand, Les Eléments d'Euclide : Livre XIII; Textes d'après la traduction de Peyrard et commentaires, juin 2001

³² Il faut noter qu'Euclide ne précise pas la signification de ce terme ni les opérations autorisées sous ce terme.

Dieu propre à l'énonciation d'une théorie. Il se lance dans une réflexion sur les orbites des planètes connues notamment grâce aux mesures de Copernic, afin de construire un modèle unique en son genre.

Dans le *Mysterium Cosmographicum*³³, ouvrage rédigé à l'âge de vingt-cinq ans, Kepler expose une vue générale de l'Univers fondée sur une idée tout à fait originale à l'époque : il utilise la géométrie dans l'espace et ses objets pour modéliser l'emboîtement des orbites des planètes³⁴. Il partage les théories de la révolution copernicienne qui placent le soleil au centre du système, et cherche pour sa part des relations entre les mesures des rayons des orbites des planètes alors connues. L'originalité de son travail réside dans le recours à l'utilisation des solides de Platon et de leurs propriétés pour résoudre son problème. Il a notamment l'intuition que leurs symétries sont importantes. Après quelques tentatives numériques de calcul de proportionnalité, Kepler se lance dans une première hypothèse qui concerne les polygones réguliers. Cette dernière n'aboutissant pas, il a alors l'idée d'utiliser les polyèdres réguliers qu'il tente d'abord d'inscrire dans la voute céleste des douze constellations. Il faut noter que dans l'iconographie de l'époque, aucune représentation n'associait alors de tels objets constitués de faces planes et de sommets sur une sphère céleste dans laquelle on préférerait inscrire des objets circulaires. En référence aux éléments d'Euclide qu'il cite abondamment quand cela lui est nécessaire, Kepler se sert alors des formules permettant de définir les sphères inscrites et circonscrites aux polyèdres réguliers pour proposer un emboîtement assez célèbre.

³³ Johannes KEPLER (1596) *Mysterium Cosmographicum*, en ligne sur <http://num-scd-ulp.u-strasbg.fr:8080/>

³⁴ Pour cette étude, nous avons bénéficié d'une traduction française partielle du *Mysterium Cosmographicum* que nous devons à André Gramain.

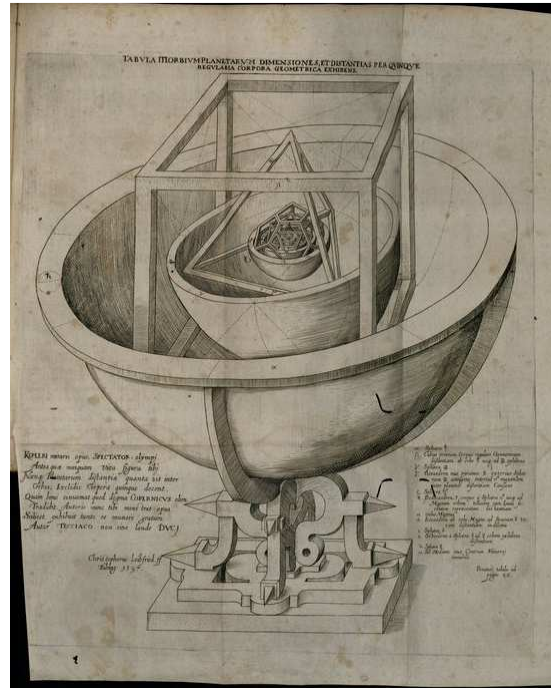


figure 12 : modèle de Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, planche dépliant de la page 26

Il utilise une argumentation parfois scientifique (par exemple les rapports entre les rayons des sphères inscrites et circonscrites de chaque polyèdre), parfois totalement ésotérique (l'organisation et le classement des cinq polyèdres) pour expliquer et avancer dans son raisonnement. Dans cette proposition parfois fort peu mathématique (les emboîtements proposés ne correspondent pas aux dualités des polyèdres), il est intéressant de noter que ces objets fournissent un modèle de réflexion à une échelle différente (macroscopique) et dans un domaine scientifique nouveau. Cette référence est sans aucun doute très contextualisée dans un siècle en pleine révolution scientifique qui cherche à expliquer un "nouveau monde". C'est aussi la période de redécouverte des anciens (avec la proximité du moyen âge), peut être que Kepler a lu le *Timée* de Platon. Nous observons de plus que ce sont d'autres propriétés des polyèdres réguliers qui servent à bâtir ce nouveau modèle, puisque ce sont les sphères circonscrites et inscrites des polyèdres qui servent d'objet de réflexion, et plus particulièrement le rapport entre elles.

L'emboîtement des orbites et des polyèdres proposé par Kepler est basé sur l'orbite de la Terre, ce qui lui permet habilement de laisser la Terre en position centrale dans son système (même si c'est bien le centre du soleil autour duquel se font les révolutions). Ce choix est déterminant pour éviter les ennuis avec l'église à cette époque. Il inscrit un octaèdre entre les orbites de Mercure et de Venus, un icosaèdre entre Venus et la Terre, un dodécaèdre entre la Terre et Mars, un tétraèdre entre Mars et Jupiter, et un cube entre Jupiter et Saturne. Kepler voit " *les solides symétriques s'insérer les uns après les autres avec tant de précision entre les*

orbites appropriées que si un paysan demandait à quels crochets les cieux sont fixés pour ne pas tomber, il serait facile de lui répondre ". (...)

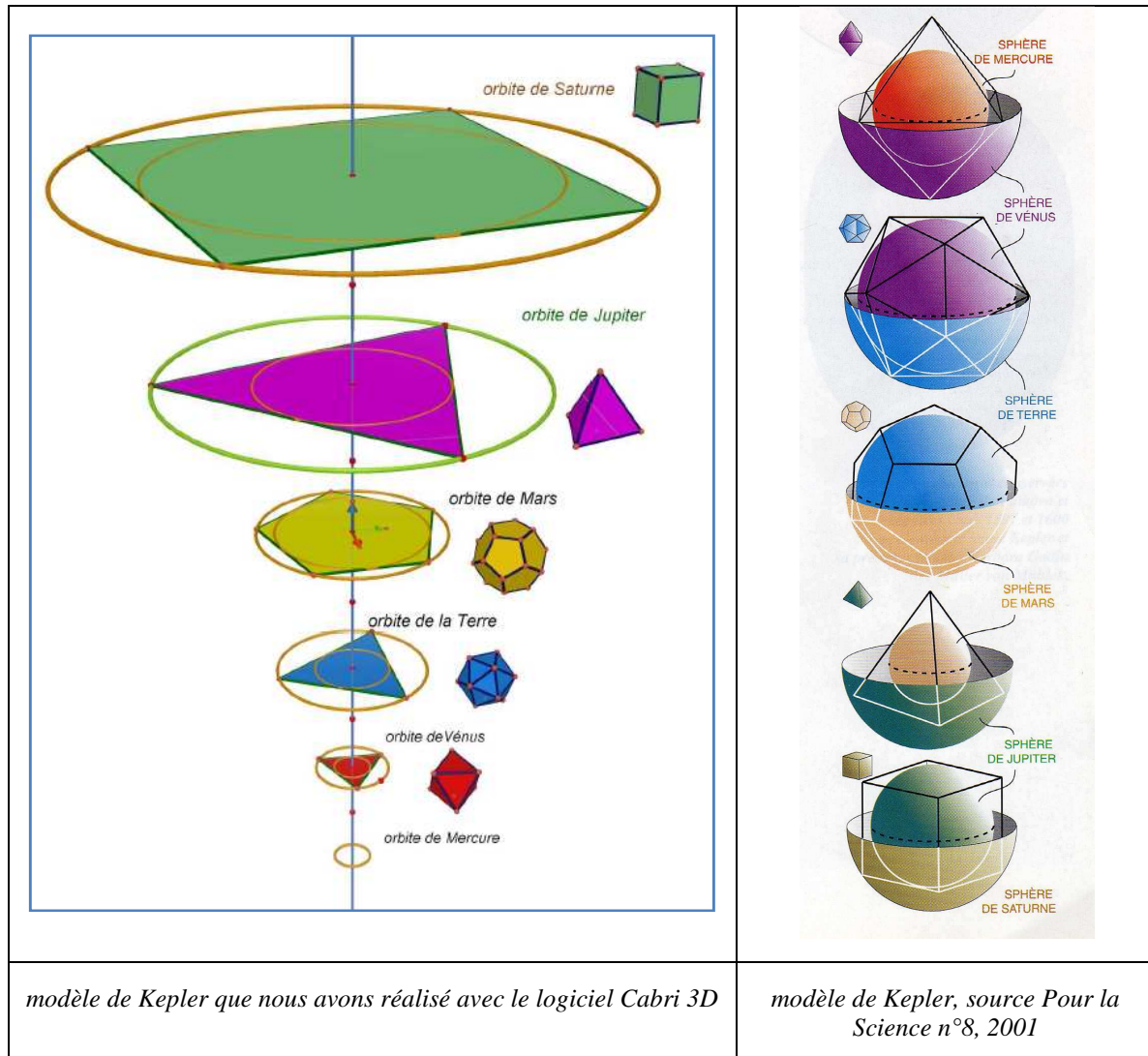


figure 13 : emboîtement des orbites et relation aux polyèdres réguliers selon Kepler

Après de longs et fastidieux calculs qu'il confie en grande partie à Mästlin, il s'aperçoit que son modèle ne correspond pas exactement aux mesures de Copernic, mais choisit de privilégier la théorie en relevant la difficulté qu'il existe alors de prouver ces mesures provenant toutes du calcul.

Bien que son modèle soit théoriquement faux, comme il le découvrira lui-même puisqu'il est le premier à révéler que les orbites des planètes ne sont pas circulaires mais elliptiques; il a servi de base à l'édition des lois portant son nom. Cette modélisation s'appuyant sur certains

arguments parfois éloignés de propositions rigoureuses, n'en est pas moins déterminante dans la construction des connaissances scientifiques.

Kepler étendra beaucoup plus tard sa recherche sur les polyèdres en imaginant d'autres solides réguliers dont les faces ne sont pas forcément convexes. Outre les cinq solides de Platon, on peut en effet construire quatre autres solides réguliers, deux dont les faces sont des polygones réguliers étoilés (ou croisés) : les solides de Kepler, et deux ayant des faces régulières, mais qui peuvent s'interpénétrer : les solides de Poincaré. Le petit dodécaèdre étoilé a été découvert par Kepler vingt-deux siècles après Platon, en 1619. Il a 12 faces qui sont des pentagones étoilés, 12 sommets et 30 arêtes. En chaque sommet se réunissent trois faces. Kepler a aussi découvert le grand dodécaèdre étoilé, formé des mêmes douze pentagones étoilés, qui a aussi 30 arêtes et 20 sommets.

Ce qui nous intéresse dans cet apport historique à propos de Kepler, est relatif à la démarche de recherche et aux références qu'il utilise pour construire des connaissances. En bon Aristocélien, il construit à partir d'une idée (théorie) mais son projet consiste à la confronter à une forme d'expérience : celle de la représentation, du calcul et de la modélisation. Il fait alors des allers-retours entre les objets de la théorie et ceux du monde sensible, en ajustant ce qui est nécessaire. Les références esthétiques, culturelles et ésotériques servent également à nourrir ses intuitions et parfois à argumenter ses choix. L'essentiel de son travail explicatif réside alors dans des tentatives de modélisation. L'utilisation des polyèdres réguliers est pour la première fois relative à leurs propriétés géométriques et notamment leurs symétries.

la formule d'Euler

Leonhard Euler (1707-1783) s'intéresse également aux polyèdres, réguliers ou non. On lui doit notamment la formule connue sous le nom de théorème de Descartes-Euler vraie pour tout polyèdre convexe : $S + F = A + 2$ dans laquelle S, F et A représentent respectivement les nombres de sommets, de faces et d'arêtes³⁵. On peut établir à partir de ce théorème une preuve de type combinatoire³⁶ du fait qu'il existe au plus cinq polyèdres réguliers convexes, preuve déjà fournie par Descartes dans le *De Solidorum Elementis*³⁷.

Avec cette formule algébrique c'est une nouvelle dimension qui s'ouvre dans les recherches sur les polyèdres. On peut ainsi interroger les relations qui unissent certains des éléments des

³⁵ Rappelons que la discussion de ce résultat est au cœur de l'ouvrage de Imre Lakatos traduit en français sous le titre "Preuves et réfutations" (Hermann, 1984, 2004).

³⁶ La preuve s'appuie sur l'étude de la relation « $km/r + k = km/2 + 2$ », obtenue en substituant dans la formule d'Euler le nombre de sommets et le nombre d'arêtes exprimés en fonction du nombre total de faces (k) et du nombre de côtés du polygone régulier associé (m). Notons que ce raisonnement combinatoire ne permet évidemment pas d'affirmer l'existence des cinq polyèdres réguliers convexes. Il faut pour cela soit les construire comme objets sensibles, soit prouver leur existence dans la géométrie euclidienne.

³⁷ Note du traducteur dans la note 2 de Lakatos, 2004 (p.8).

polyèdres eux-mêmes, sans faire référence à leur représentations réelles, mais toujours en appui sur elles pour une partie de leur vérification.

§ *La nécessaire dimension expérimentale des mathématiques*

Que nous apprend Euclide dans le XIII^{ème} livre des Eléments ? Qu'il existe un rapport de contiguïté entre théorie et expérience. La démonstration de la propriété physique de l'espace ne tolérant que cinq polyèdres réguliers convexes est liée à l'exercice de leur construction. Ce lien étroit entre l'expérimental et le théorique est porté par le passage d'une dimension à une autre mais aussi par l'articulation entre les registres numérique et géométrique. La géométrie n'étudie pas d'objets purement ou radicalement idéaux. Les preuves et démonstrations qu'elle met en œuvre se "frottent" irrémédiablement au réel lors des phases d'élaboration de ces objets.

La géométrie renvoie aux corps solides de notre expérience, la question est d'explicitier comment des objets de notre expérience commune comme les corps solides peuvent être représentés par des objets idéaux et comment de telles représentations peuvent en retour nous apporter de nouvelles connaissances sur ces objets empiriques.

L'évolution progressive des connaissances sur les polyèdres illustre cette interdépendance de l'expérience *du monde* et de l'expérience *sur le monde*, ainsi que la symbiose entre le théorique et l'expérimental. On y voit notamment comment s'enrichissent le discours démonstratif et le travail expérimental. Les obstacles, les impossibilités se révèlent dans certains cas lors de la mise en œuvre d'un raisonnement déductif et dans d'autres cas par l'action expérimentale ; la connaissance des objets se développe dans ces allers-retours entre théorie et expérience.

III – 1.2 Fonctionnalités du savoir en mathématiques et ailleurs

Afin de satisfaire aux exigences d'élaboration d'un milieu théorique au sens de Bloch (2002), nous présentons une étude non exhaustive des fonctionnalités du savoir correspondant à la classe des polyèdres réguliers. Nous chercherons ainsi à réunir un ensemble de connaissances qui lui sont associées, afin de déterminer dans un temps ultérieur un problème qui soit à même de les faire fonctionner au cours de sa résolution.

§ *Fonctionnalités du savoir en mathématiques*

Les polyèdres réguliers sont une classe d'objets définis par des propriétés qui les distinguent d'autres objets géométriques. L'appartenance d'un polyèdre à la classe des polyèdres réguliers se fait sous certaines conditions qui sont à la source des fonctionnalités du savoir. Plusieurs registres de définition existent pour les caractériser, selon les signes que nous utilisons eux-

même dépendant de la théorie dans laquelle ils sont valides. Nous verrons dans le chapitre suivant consacré à la médiation sémiotique, que le choix des signes et des symboles n'est pas sans conséquence sur les objets eux-mêmes. Nous souhaitons pour l'instant les définir d'une façon relativement simple et plutôt consensuelle, sans recours à une terminologie symbolique.

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.

La dénomination "polyèdre régulier" renvoie à un nom et à un adjectif, tous les deux porteurs d'un certain nombre de connaissances et de certaines fonctionnalités associées. Le nom polyèdre exprime une relation entre des objets (et leurs propriétés) du plan et un objet appartenant à une autre dimension qui se traduit par une construction en trois dimensions dans le réel. Cette relation peut conduire à des interrogations logiques portant sur :

- des équivalences : existe-t-il des continuités entre les propriétés des objets dans les deux dimensions, par exemple qu'est-ce qui reste vrai quand on passe du plan à l'espace (et vice versa) ;
- des implications : y a-t-il des propositions valides et vérifiées dans le plan qui impliquent d'autres propositions vraies dans l'espace ;
- des quantificateurs : quand est-il possible de passer de l'existence d'un représentant spécifique d'une classe, à la généralité d'une proposition quel que soit l'objet ; comment démontrer l'existence d'un objet polyèdre, dans quel système symbolique.

Dans la définition donnée plus haut, l'adjectif *régulier* concerne à la fois les propriétés des faces (en renvoyant aux conditions qui font la régularité d'un polygone) et les propriétés des sommets (sommets de même degré ou ayant un code de Schläfli³⁸ identique), ce qui se traduit de la façon suivante pour les solides de Platon :

³⁸ Le code de Schläfli d'un sommet est une suite des ordres des faces aboutissant à ce sommet.

nom	code et symbole de Schläfli	faces	sommets	arêtes
tétraèdre régulier	$3^3 \{3,3\}$	4 triangles	12 de degré 3	4
cube	$4^3 \{4,3\}$	6 carrés	8 de degré 3	12
octaèdre (régulier)	$3^4 \{3,4\}$	8 triangles	6 de degré 4	12
dodécaèdre (régulier)	$5^3 \{5,3\}$	12 pentagones	20 de degré 3	30
icosaèdre (régulier)	$5^3 \{3,5\}$	20 triangles	12 de degré 5	30

tableau 4 : récapitulatif des propriétés des polyèdres réguliers

Le code indiquant le degré du sommet ou le symbole de Schläfli, tout comme la comparaison de ces codes se vérifie expérimentalement, sauf en ayant recours à la théorie des graphes comme nous le verront un peu plus loin.

D'autres types de relations peuvent être objet d'étude d'un travail sur les polyèdres réguliers, il s'agit de l'articulation des registres numérique et géométrique (Duval, 1995) en terme de vérification ou de preuve. Ne cherchant pas l'exhaustivité, nous en donnerons seulement deux exemples, afin de citer celles qui nous paraissent intéressantes en vue d'une problématisation en contexte d'enseignement / apprentissage.

La première interrogation sur l'articulation des registres numérique/géométrique porte sur la preuve (ou la vérification) de l'existence d'un sommet pour un polyèdre : est-ce la mesure de son angle ($\leq 360^\circ$) ou la non coplanarité des plans dans lesquels sont inscrites les faces qui le composent ? Quel registre est-il le plus à même d'apporter une preuve ou une vérification à l'autre ? Peut-on privilégier un domaine de validité sur un autre selon le mode d'existence et l'expression sémiotique de ses objets ?

Pour deuxième exemple, nous pouvons faire référence à la formule d'Euler qui traduit algébriquement des relations entre les nombres de faces, de sommets et d'arêtes :

$$s + f = a + 2$$

Cette formule peut être utilisée comme une vérification d'une construction géométrique ou servir elle-même d'objet d'étude par exemple pour démontrer qu'il existe au plus 5 polyèdres réguliers. Nous verrons à cette occasion que le rapport entre écritures algébriques et objets géométriques observables est constant.

Pour les polyèdres réguliers, chaque face possède m arêtes donc l'ensemble des arêtes du polyèdre est $m \cdot f$ et comme chaque arête rencontre 2 faces on a $m \cdot f = 2 \cdot a$ donc

$$f = \frac{2a}{m}$$

Soit n le nombre d'arêtes qui se rencontrent à chaque sommet; et chaque arête relie 2 sommets (ce qui fait référence à l'objet sensible) :

$$m \cdot f = n \cdot s \quad \text{donc} \quad n \cdot s = 2 \cdot a$$

$$\text{en repartant de la formule d'Euler : } f - a + s = 2$$

$$\text{ce qui se traduit par : } \frac{2a}{m} - a + \frac{2a}{n} = 2$$

$$a \left(\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} \right) = 2$$

$$\frac{2}{m} - 1 + \frac{2}{n} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

On peut ainsi exprimer f en fonction de m et n :

$$f = 2 + a - s$$

$$f = 2 + \frac{mf}{2} - \frac{mf}{n}$$

$$f = \frac{4n}{2n - mn + 2m}$$

Les nombres m et n sont tout deux au moins égaux à 3. Il en résulte que les seuls couples de valeurs possibles pour m et n sont : $(m, n) = (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$

On peut terminer en faisant une classification des polyèdres réguliers qui permet de les construire à partir d'une résolution algébrique :

tétraèdre	$(m, n) = (3, 3)$	$f = \frac{12}{6 - 9 + 6} = 4$	$a = \frac{mf}{2} = 6$	$s = \frac{mf}{n} = 4$
octaèdre	$(m, n) = (3, 4)$	$f = \frac{16}{8 - 12 + 6} = 8$	$a = \frac{mf}{2} = 12$	$s = \frac{mf}{n} = 6$
icosaèdre	$(m, n) = (3, 5)$	$f = \frac{20}{10 - 15 + 6} = 20$	$a = \frac{mf}{2} = 30$	$s = \frac{mf}{n} = 12$
cube	$(m, n) = (4, 3)$	$f = \frac{12}{6 - 12 + 8} = 6$	$a = \frac{mf}{2} = 12$	$s = \frac{mf}{n} = 8$
dodécaèdre	$(m, n) = (5, 3)$	$f = \frac{12}{6 - 15 + 10} = 12$	$a = \frac{mf}{2} = 30$	$s = \frac{mf}{n} = 20$

tableau 5 : détermination algébrique des cinq polyèdres réguliers

On aperçoit ainsi que les polyèdres réguliers en tant qu'objet de savoirs ont une gamme de fonctionnalités mathématiques qui peuvent émerger dans des problèmes assez variés. Nous souhaitons faire désormais un rapide détour dans d'autres disciplines pour observer leur fonctionnalité dans des champs de connaissances éloignés des mathématiques au moins a priori.

§ *Fonctionnalités du savoir en sciences*

Les polyèdres réguliers servent de modèles descriptifs dans plusieurs domaines de la biologie :

- ils sont connus pour leur analogie structurelle avec la capsid (structure protéique de protection du génome) de certains virus comme par exemple l'herpes, cette capsid est un icosaèdre régulier :

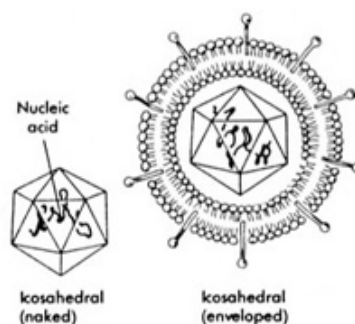


figure 14 : source Common morphologies seen in animal viruses, University of Wisconsin

- le virus de la grippe possède une enzyme (la neuraminidase) qui cristallise sous la forme de dodécaèdre rhombique,

- le virus de la poliomyélite à une capsidie polyédrique : un emboîtement d'un dodécaèdre et d'un icosaèdre :



figure 15 : source photo Pour la science, mai 1987

- la structure des squelettes (dioxyde de silicium) de radiolaires est parfois tétraédrique (Calimitra agnese), parfois même *provocatrice* pour la géométrie euclidienne ce qui est le cas pour *Auloniahexagona* qui dispose d'un squelette constitué d'un assemblage de pentagones et hexagones presque réguliers que nous retrouverons un peu plus loin avec les découvertes de la molécule de Fullène.

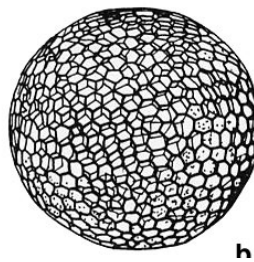


figure 16 : Auloniahexagona, source Muséum National d'Histoire Naturelle, Paris

- en cristallographie, les polyèdres servent aussi de modèle à l'échelle atomique pour le diamant (5 atomes de carbone occupant les sommets et le centre d'un tétraèdre), pour le soufre (6 atomes sur chaque sommet de l'octaèdre) ; ou à une échelle macroscopique de cristallisation (les cubes quasi parfaits de la pyrite, ou la structure octaédrique de la fluorine, rare mais magnifique).

Ces mêmes polyèdres réguliers peuvent aussi servir de modèles d'investigation pour la construction de nouvelles connaissances. C'est le cas dans l'histoire de la découverte d'une famille de composés du carbone : les fullerènes. Une découverte de 1985 qui donna onze ans plus tard un prix Nobel de Chimie à Smalley, Curl et Kroto qui souhaitaient obtenir à l'échelle atomique une molécule de structure quasi-sphérique (en référence à la géométrie du ballon de foot) en travaillant sur le carbone. En retirant un atome de carbone au sommet d'un hexagone on forme un pentagone qui donne une forme de rondeur à l'assemblage. L'architecture obtenue

possède de très nombreuses qualités dans bien des domaines, en physique (grande stabilité de la molécule), en chimie (pour des raisons aromatiques) ou pour les nano-technologies.

Bien que le polyèdre correspondant soit un icosaèdre tronqué connu depuis fort longtemps (solide archimédien) et fort bien décrit par les dessins de Piero della Francesca, la découverte n'en est pas moins réelle. On peut dire dans ce cas précis que les savoirs et connaissances sur les polyèdres ont servi de modèle dans l'intuition des chercheurs.

III – 2 Questions de représentations

En tant que science, la géométrie n'est pas l'apanage des "mathématiciens" ni même des mathématiques. Les exemples qui étayent cette conjecture sont nombreux : en ethno-mathématiques³⁹, en arts plastiques, en architecture, en ébénisterie, etc....

De Platon à Dali, en passant par De Vinci et Kepler, les objets sensibles qui représentent les polyèdres l'ont toujours été en vue de la traduction d'objets formels, comme pour prouver leur existence, mais aussi pour déterminer les concepts qu'ils représentent (leurs règles et leurs définitions). Cette quête d'orientation parfois sacrée, parfois esthétique, parfois scientifique, a traversé les siècles, portée par des personnages n'étant pas tous géomètres au sens moderne du terme, c'est-à-dire spécialistes d'une branche particulière des mathématiques.

La construction des polyèdres, qu'elle soit dans le plan (dessins en projection ou en perspective) ou dans l'espace, relève d'une performance artistique et technique dont le rapport aux règles mathématiques qui les sous-tendent pose un certain nombre de questions. L'une d'entre elle est : qui du formalisme ou du sensible est premier (mais faut-il rechercher l'antériorité d'un objet sur l'autre ou faut-il chercher la dialectique qui les relie). D'autres questions concernent les compétences techniques et technologiques qui sont nécessaires pour de telles constructions. Elles sont chargées de connaissances formelles géométriques telles qu'elles sont très esthétiquement et scientifiquement décrites dans le travail de Guy le Berre sur ce sujet (le Berre, 2006). Pourtant, on savait construire techniquement (au moins approximativement) les solides de Platon plusieurs siècles avant notre ère comme en témoigne le jeu de l'icosaèdre trouvé dans une tombe à Alexandrie (Pedrizet, 1931)⁴⁰.

³⁹ Voir par exemple le site CultureMATH : <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>

⁴⁰ <http://www.ifao.egnet.net>

III - 2.1 Représentation, esthétique et technique

Les objets mathématiques comme beaucoup d'autres objets scientifiques ont besoin d'un système sémiotique pour témoigner de leur existence. Comme nous l'avons dit auparavant, la question de la signification n'est pas un phénomène transparent de communication dans lequel les objets référents des émetteurs coïncident avec ceux des récepteurs. Le jeu des interprétants peut emprunter des chemins détournés par la succession des sémoses et conduire à des incompréhensions, voire même à des contradictions. Dans son ouvrage *Mathématiques et réalité*, Gonseth avait esquissé ce type de problématique :

La présentation d'un cristal peut engendrer des constructions de connaissances dans des directions bien différentes au-delà des aspects intuitifs directement observables. Du point de départ de l'objet possédant une certaine forme, on pourra s'intéresser à sa place dans la classification des polyèdres, ou plutôt à la mesure de ses angles dièdres afin d'en étudier les symétries. Ces constructions sont autant d'extensions et de déformations de l'objet immédiat. Mais si l'expérience sensible apparaît bien première ici, il ne faut pas seulement l'enfermer dans ce rôle. En effet, les expressions et opérations qui portent sur cette première expérience vont ensuite donner naissance à des besoins de contrôle ou seulement de confrontation dans l'espace sensible du fait de l'élaboration de conjectures "bâtisseuses" de la théorie. De ce fait, ce qui est appris et conçu sur la réalité permet en retour d'agir sur elle. C'est en ce sens que l'on peut considérer l'expérience mathématique capable d'intervention sur le réel. Gonseth (1936, p.66)

Nous pouvons par exemple interroger les médiations sémiotiques de l'icosaèdre tronqué à la lumière de Gonseth, tel que nous l'avons présenté récemment (Dias, 2007) :

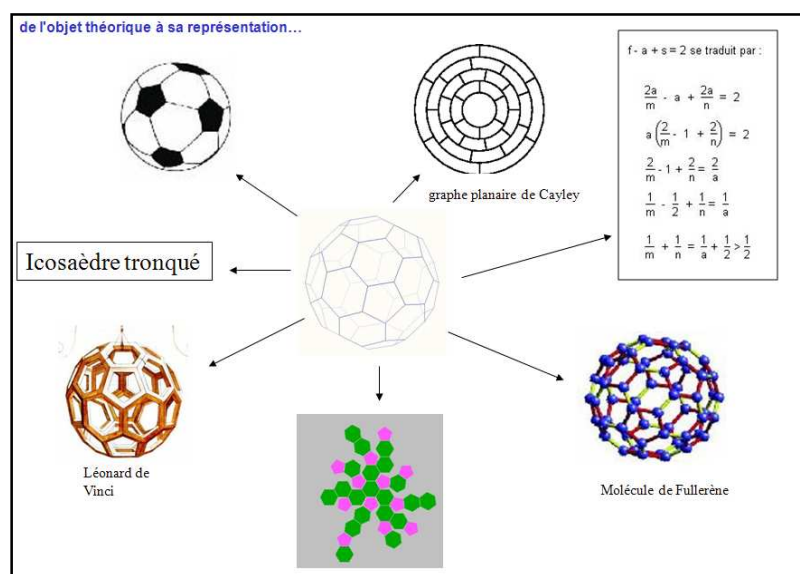


figure 17 : d'un objet idéal à sa représentation

Selon ce que nous savons, la découverte de cette figure géométrique remonte à celle des polyèdres semi-réguliers par Archimède. Sa construction s'obtient en réalisant une troncature de chaque sommet de l'icosaèdre, pour obtenir un pentagone puisque cinq triangles équilatéraux s'y rejoignent. Le premier dessin⁴¹ de cette figure se trouve dans le parchemin de Piero della Francesca intitulé *De quinque Corporibus Regularibus*, sa construction étant expliquée par des sections de la sphère (ce qui renvoie à une technique de tournage connue en sculpture), circonscrite. Son dessin propose une approximation de contours qui sont circulaires, difficulté compréhensible tant sur le plan de la construction que de la représentation. Il est en effet probable que peu de ces objets n'étaient alors en circulation. En 1498, Luca Pacioli ira plus loin dans son approche de l'objet idéal au sein de son désormais célèbre livre *De Divina Proportione*. Comme on le sait, les illustrations sont signées d'un maître : Leonardo da Vinci. Il utilisera un nouveau modèle représentatif axant différemment la figure, en évidant les faces (pour ne laisser apparaître que les arêtes et les sommets) : c'est l'invention du squelette. Cette nouvelle représentation (guidée par une intention esthétique) permet de mieux accéder à la pensée d'Archimède et fournit ainsi un nouvel interprétant de l'objet concerné. Dans son livre "*L'évasion des polyèdres*", Guy Le Berre (2006, p 71) relève l'impossibilité d'avoir la vue de l'icosaèdre tronqué proposée par De Vinci si l'on regarde une véritable construction de l'objet (en bois par exemple). Ceci prouve définitivement que l'accès à la connaissance de certains objets idéaux passe irrémédiablement par des choix d'interprétants : reste à en connaître les règles...

Un tel processus de signification pourrait conduire à d'autres interprétants dans d'autres contextes, selon d'autres références à propos d'autres connaissances préalables. Comme cela est proposé dans l'image 17, l'objet idéal icosaèdre tronqué peut conduire vers d'autres signes : son nom, son patron, son graphe ; une application sportive, une autre moléculaire ou bien le souhait de démontrer la formule d'Euler.

Les polyèdres réguliers ont fait l'objet de multiples tentatives de représentations artistiques depuis De Vinci, pour atteindre certains territoires de sens aux limites de la contradiction. Ainsi, temporellement plus près de nous, Vladimir Skoda⁴², artiste tchèque, propose une belle représentation des solides de Platon dans une installation (image 18).

⁴¹ La première mention de son existence est due à Pappus d'Alexandrie cependant aucune figure n'est présente dans le texte de Pappus visible à la bibliothèque du Vatican.

⁴² Vladimir Skoda est un sculpteur Tchèque auteur d'une œuvre intitulée « les 5 corps de Platon », œuvre de 2004 constituée de 5 sphères en cuivre symbolisant les cinq polyèdres réguliers présentés par Platon.



figure 18 : Vladimir Skoda, *Les cinq solides de Platon*

L'œuvre de Skoda traduit une forme d'impossibilité de perception de ces solides parfaits eux-mêmes (comme on peut voir la sphère presque-parfaite du gyroscope de Gravity Probe B), nul n'est besoin de les construire, la signification de la sphère circonscrite peut suffire. Pour l'artiste, la représentation est impossible en pratique et impossible en principe, car ce sont des objets abstraits introduits dans le discours.

III – 2.2 Polyèdres, signes et représentation

Nous avons vu que les représentations des polyèdres pouvaient donner lieu à de libres interprétations de leurs auteurs, lorsque ces derniers sont animés d'intentions esthétiques. Nous souhaitons présenter un autre processus de signification contextualisé, mais cette fois dans une théorie mathématique : la théorie des graphes. Elle présente moins de difficulté technique de réalisation mais confirme la complexité du jeu des interprétants dans la construction des connaissances.

La théorie des graphes n'a pas forcément une grande proximité avec les polyèdres puisqu'elle ne traite pas directement d'objet dans l'espace à trois dimensions. En revanche, elle emprunte une partie du vocabulaire des polyèdres :

*Définition : Un graphe G (non orienté) est constitué d'un ensemble $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ de points appelés **sommets**, et d'un ensemble $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ d'**arêtes**, tels qu'à chaque arête a_i sont associés deux éléments de S , appelés ses extrémités, et que nous noterons $[s_j, s_k]_i$*

En théorie des graphes, on parle de graphe planaire lorsque sa représentation ne présente aucun croisement entre les arêtes. Cette notion de graphe planaire est tout à fait adaptée à la représentation d'un polyèdre que l'on aurait aplati (en imaginant que l'on puisse le faire sans rompre aucun de ses constituants, c'est à dire avec des éléments déformables). Il ne sera plus question de dessin en perspective, ni de respect de proportions ou de grandeurs puisque ce ne sont que les liens entre sommets et arêtes qui vont nous intéresser dans cette représentation, c'est donc leur squelette qui deviendra l'objet d'étude. Voici par exemple les graphes des 5 polyèdres réguliers :

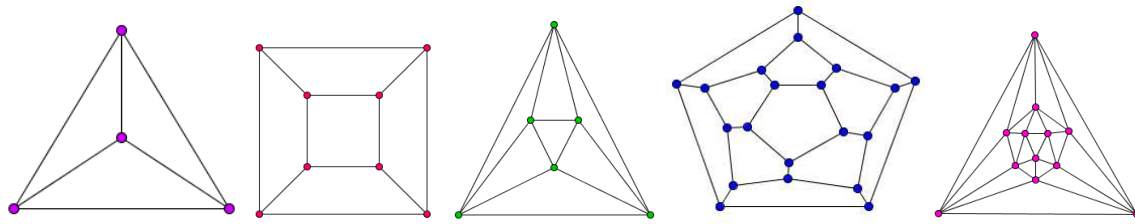


figure 19 : graphes planaires dans l'ordre : tétraèdre, cube, octaèdre, dodécaèdre et icosaèdre

Sur cette représentation, notons qu'un effet de ressemblance géométrique est encore présent pour la clarté du propos et l'aide à la reconnaissance, mais en théorie des graphes on pourrait s'éloigner des représentations caractéristiques des polyèdres afin de n'en garder aucun signe. Ce ne sont plus les propriétés graphiques qui seront mises en exergue mais des propriétés logiques de relation entre éléments constitutifs.

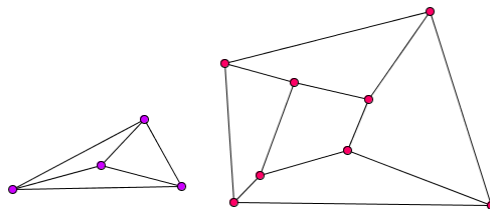


figure 20 : tétraèdre et cube

Dans cette deuxième représentation, les arêtes sont encore constituées de segments, ce qui est aussi un confort de lecture mais qui peut éventuellement être abandonné au profit d'un trait à main levé. Voici par exemple une séquence permettant de passer d'un graphe du cube à celui de l'octaèdre, son dual :

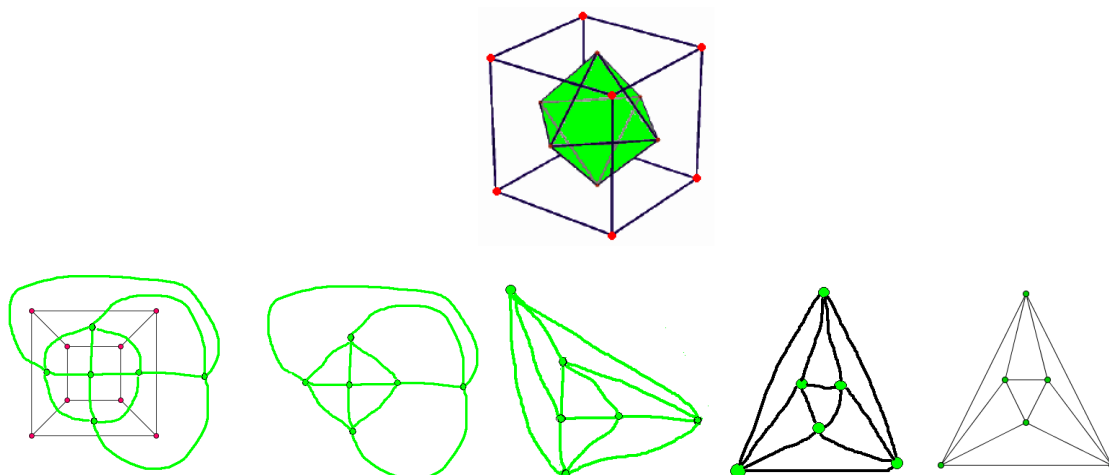


figure 21 : dualité du cube et de l'octaèdre en théorie des graphes

Dans la théorie des graphes on peut faire fonctionner d'autres savoirs en questionnant directement le système de représentation. Le signe est différent, d'autres fonctionnalités du savoir peuvent émerger. On peut à titre d'exemple s'interroger sur les symétries du dodécaèdre à partir d'un graphe particulier :

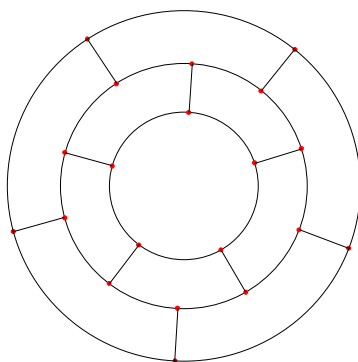


figure 22 : graphe de Cayley du dodécaèdre

Pour trouver le nombre total de symétries du dodécaèdre, on peut rechercher la transitivité entre les sommets du graphe en s'intéressant à l'excentricité de ses sommets (la distance maximum d'un sommet à un autre). Pour chacun des 20 sommets de ce graphe, l'excentricité est de 5, ce qui nous donne 120 symétries pour le dodécaèdre.

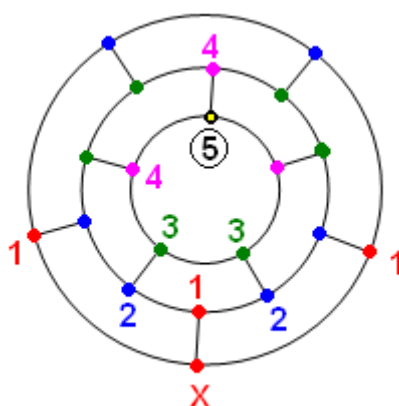


figure 23 : excentricité du sommet x dans le graphe du dodécaèdre

La formalisation peut aller jusqu'à la production de signes ne faisant plus aucune référence à un dessin quelconque tout en continuant de référer à l'objet polyèdre. L'interprétant produit ne pourra conduire à l'objet que par un processus de signification intégrant des connaissances spécifiques. A titre d'illustration, le graphe d'un polyèdre peut être signifié par sa matrice

adjacente qui traduit toujours les relations entre les sommets mais dans une autre représentation :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

figure 24 : matrice adjacente du graphe d'un tétraèdre

On peut conclure ce paragraphe consacré aux représentations que les signes objectifs qui sont produits à propos des polyèdres réguliers nécessitent un milieu spécifique pour que le processus d'interprétation qui les conduit à leur objet soit réussi. En situation d'apprentissage, cela nécessite une bonne connaissance des références des objets de savoir afin de constituer un milieu épistémologique et culturel adapté à la mise en œuvre des connaissances attendues. Il s'agit pour l'enseignant de favoriser les interactions entre les activités de ses élèves et ses propres activités d'enseignement, grâce à l'utilisation de représentations dont il connaît les interprétations possibles.

III - 2.3 Milieu culturel et instrumental

Comme nous venons de le voir, en situation d'apprentissage, nous faisons l'hypothèse que la dimension culturelle est un facteur qui facilite la dévolution. Nous proposons de mettre ceci en perspective avec le concept de psychologie ergonomique d'*affordance* au sens de Morineau (2001) qui la définit comme :

une relation particulière entre l'individu et le monde qui l'entoure, relation qui relève de l'adaptation immédiate (quasi automatique au sens qu'elle n'est ni visible ni même souhaitée) entre les deux pôles. (Morineau, 2001)

La géométrie semble en effet pouvoir être prise en compte dans ce cadre d'étude comme les expérimentations que nous menons dans le contexte de l'enseignement spécialisé (et dont nous parlerons plus loin) tendent à le prouver.

Notre hypothèse réside dans le fait que les objets de la géométrie fortement porteurs d'une dimension culturelle favorisent une adhésion a priori des élèves au processus d'apprentissage en facilitant le fonctionnement de la boucle perception/action. Les médiateurs symboliques propres aux objets géométriques (esthétique, beauté ou pureté des formes, références culturelles associées) jouant ce rôle de facilitateurs. Comme nous le verrons plus loin, nous avons par exemple souvent recueilli des témoignages enthousiastes des élèves (et des adultes en formation) lors de la construction du dodécaèdre, polyèdre régulier certes mais dont la

valeur symbolique semble partagé sur le plan esthétique : "Alors celui-ci, qu'est-ce qu'il est beau !"

Il semble également que les artefacts (Trouche, 2005) utilisés pour la construction des polyèdres (pièces articulées en plastique) soient de nature à favoriser la dévolution de la situation (elles peuvent représenter et provoquer un jeu de construction) tout en étant des médiateurs de type instrumentaux.

*Le mot instrument vient du latin **instrumentum**, qui signifie matériel, outillage ou ressource et qui dérive du verbe **instruere**. Ce verbe, francisé en **instruire**, correspond à disposer, outiller et équiper. Ainsi les mots instrument et instruire renvoient l'un à l'autre. (Barbin, 2004)*

Le matériel proposé fonctionne davantage comme un artefact puisqu'il instrumente l'élève en pré-structurant son activité, il s'agit bien d'un processus d'instrumentation au sens de Rabardel⁴³ (1999). Les pièces en plastique sont des signes d'une composante des polyèdres dont les formes (contours) peuvent conduire à l'interprétation de polygones. Les articulations prévues par le concepteur (le fabricant du jeu) peuvent aussi instrumenter l'élève dans la recherche à conduire sur les angles possibles entre les faces d'un polyèdre, ce qui nous semble d'ailleurs le point nodal de notre situation.

III – 3 Enjeux didactiques

Afin de terminer la préparation de notre *milieu théorique épistémologique*, nous présentons ici notre situation didactique de recherche des solides de Platon qui permet de faire fonctionner certaines des connaissances liées aux polyèdres réguliers en contexte d'enseignement / apprentissage. Elle comporte plusieurs phases (des jeux au sens de la théorie du jeu chez Brousseau) dont l'une d'elles sera particulièrement développée puisque c'est celle qui sera mise en œuvre et exploitée pour la recherche dans la deuxième partie de cette thèse.

Nous ferons l'analyse a priori de la situation de recherche ainsi qu'une étude approfondie des milieux possibles dans laquelle nous envisagerons les variables didactiques qui en permettent la commande et le contrôle par l'enseignant. Ce sera l'occasion de définir ce que nous entendons par milieu de type laboratoire et ainsi de clore cette partie de la thèse consacrée à la réflexion épistémologique et didactique.

⁴³ Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), Ecole d'été de didactique des mathématiques (pp. 202-213). Caen : IUFM

III – 3.1 Construire les cinq solides

Le problème que nous allons proposer peut être considéré comme faisant partie des problèmes de recherche⁴⁴. Ce sont notamment des problèmes pour lesquels les élèves ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles. Ils placent les apprenants dans une démarche proche de celles des chercheurs en mathématiques : il y a confrontation au doute et incitation à formuler des hypothèses. La tâche qui leur est dévolue est problématisée et elle sera soumise à la validation, c'est ce qui la positionne résolument dans le champ scientifique. Le problème consiste à rechercher les polyèdres réguliers (par leur construction dans le milieu matériel objectif) et s'appuie sur leur définition préalable. Cette dernière énonce les propriétés des objets géométriques représentés par les solides dits "de Platon", nous reprenons celle que nous avons énoncée auparavant :

Un polyèdre régulier est un polyèdre convexe dont les faces sont des polygones réguliers deux à deux superposables tels que, à tous les sommets corresponde un même nombre de faces.

C'est donc le nombre de ces solides qui problématise la recherche, l'ouverture de la situation résidant notamment dans l'indétermination de ce nombre : est-il fini (petit ou grand) ou infini?

Afin d'évoluer dans la résolution de ce problème, nous proposons l'introduction d'un matériel de construction plastique⁴⁵ dans le milieu objectif de la situation. Avec ce matériel de type "polydrons", de nombreux emboîtements sont possibles, ce qui déclenche une phase expérimentale plus aisée, le dessin en perspective étant relativement hors de portée des élèves en général. Cependant les solides en construction sont assez vite soumis aux contraintes du réel sensible : en effet toutes les combinaisons de faces ne sont pas possibles ou ne conduisent pas à une réponse valide par rapport à l'énoncé. Les pièces plastiques assurent un rôle instrumental d'artefact qui permet d'effectuer des expériences dans un domaine de signification très spécifique lié aux contraintes du matériel (jeu des articulations, isométrie ou non de certains côtés, rigidité bien relative des faces).

Ainsi, deux axiomes non explicites mais parfois formulés ou mis en acte par ceux qui les utilisent, rendent compte de ces contraintes :

- A1. Un sommet appartient à trois faces au minimum.
- A2. La somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit.

⁴⁴ On peut rapprocher ces problèmes de recherche des problèmes dits "ouverts" (Arsac, Mante, 2007)

⁴⁵ Le matériel est fourni par l'enseignant et seulement mis à disposition sans obligation d'utilisation a priori.

La première phase de la résolution consiste bien souvent à sélectionner les objets plastiques pouvant représenter les objets géométriques que sont les polygones réguliers. Les objets plastiques comprennent : des triangles équilatéraux, des triangles isocèles, des carrés, des rectangles, des losanges, des pentagones, hexagones et octogones réguliers. Dans le matériel proposé sous forme de pièces en plastique, la sélection donne les cinq possibilités suivantes :

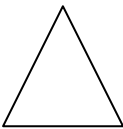

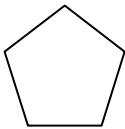
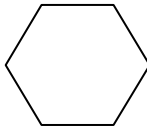
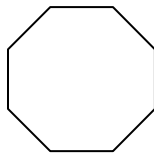
triangle	carré	pentagone	hexagone	octogone
				
3 côtés	4 côtés	5 côtés	6 côtés	8 côtés

tableau 6 : les cinq polygones réguliers présents dans le matériel utilisé par les élèves

Notons ici que les pièces comportent des contours particuliers du fait des articulations prévues, ce qui les éloigne très significativement de leur ressemblance avec des polygones et peut donc conduire à des difficultés d'interprétation dans les signes proposés aux élèves. En revanche, comme nous l'avons vu précédemment, ces articulations jouent un rôle essentiel d'artefacts dans la résolution du problèmes.

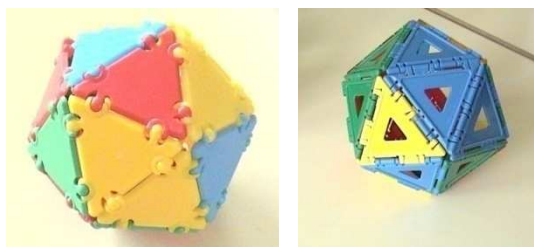


figure 25 : jeu d'articulation des pièces

Avec cette catégorie d'objets il est possible d'envisager certaines constructions pouvant répondre aux critères fixés par l'énoncé, valides tant sur le plan sensible que dans le registre mathématique. Nous rappelons ici l'inventaire des possibilités en fonction du polygone régulier choisi.

§ Avec des triangles équilatéraux

La recherche avec des triangles équilatéraux est la plus ouverte, elle conduit à trois types d'assemblages :

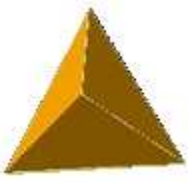





		
3 faces par sommet	4 faces par sommet	5 faces par sommet
angle polyèdre : 120°	angle polyèdre : 240°	angle polyèdre : 300°
polyèdre correspondant : TETRAEDRE	polyèdre correspondant : OCTAEDRE	polyèdre correspondant : ICOSAEDRE
		

tableau 7 : recherche avec des triangles équilatéraux

L'étude des constructions à partir de carrés identiques est relativement rapide : en effet, si l'on assemble 3 carrés pour former un sommet on achève la construction et on obtient l'hexaèdre régulier (le cube). En essayant l'assemblage de 4 carrés on trouve la limite constituée par le plan.

La construction témoigne de la théorie sur la somme des angles : $4 \times 90^\circ = 360^\circ$. C'est une simple confirmation ou réalisation de la règle numérique qui s'appuie de plus sur une référence empirique et culturelle forte : le carrelage.

§ Avec des pentagones réguliers

L'étude des possibilités de construction avec des pentagones réguliers est elle aussi très courte, elle conduit à la découverte d'un seul polyèdre régulier : le dodécaèdre dont la valeur esthétique est une référence très partagée par les élèves. Il est impossible d'assembler 4 pentagones réguliers (ou 4 octogones réguliers) sur un seul sommet car il y a chevauchement, ce qui n'est pas compatible avec la convexité.



figure 26 : conditions et contraintes d'assemblage de pentagones

La construction du dodécaèdre est semblable à celle du cube puisqu'une seule possibilité d'assemblage existe (à cause de la mesure des angles), le problème est donc moindre.

§ Avec des hexagones réguliers

Pour terminer, l'assemblage de 3 hexagones réguliers conduit à la même "impasse polyédrique" qu'avec 4 carrés : le pavage du plan. Cette découverte est pour nous le point nodal de ce problème de recherche. En effet, le réel sensible constitué par les matériaux utilisés, pose problème du fait de la souplesse de la matière plastique. La forme solide en cours de construction avec plusieurs hexagones semble vouloir plier ! Pour invalider cette proposition les bâtisseurs de solides devront faire quelques allers et retours entre les objets du monde sensible qu'ils utilisent comme outils de modélisation, et les objets géométriques qui leur correspondent. La rencontre de cet obstacle oriente la recherche vers un nouveau paradigme qui n'est plus là, celui du nombre des solides de Platon, mais plutôt des critères qui pourraient empêcher leur réalisation : parmi les objets construits du monde, quels sont ceux qui ne peuvent pas être des polyèdres réguliers.

III – 3.2 Consistance de la situation

Si la consistance et la consistance didactique de ce problème de recherche ne sont plus à démontrer (Dias et Durand-Guerrier, 2005), faisons quand même ici un rapide commentaire sur l'analyse a priori de cette situation didactique.

Il est fort probable que les sujets élèves (enfants ou adultes en formation) possèdent quelques connaissances "scolaires" dans le champ spécifique de la géométrie dans l'espace. Elles sont essentiellement de l'ordre du lexique : vocabulaire de base de la géométrie comme côté, sommet, etc.... Ils possèdent également souvent des références culturelles de ces objets particuliers que sont les solides de Platon. Le cube est par exemple régulièrement cité a priori comme un représentant de cette "famille" sans avoir recours à sa construction du fait de ses nombreuses références culturelles et sociales. C'est un objet du monde sensible ayant donné lieu à plusieurs expériences manipulatoires constitutives de la connaissance de ses propriétés.

L'apparence visuelle du dodécaèdre est elle aussi très remarquable car presque toujours assimilée à la géométrie du ballon de foot⁴⁶. C'est donc aussi un objet qui fait partie des connaissances communes, sa construction est fortement prévisible dans la phase d'essais par emboîtements des pièces plastiques.

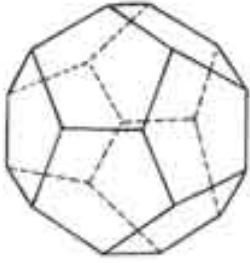
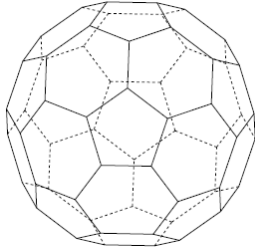
	
le dodécaèdre	l'icosaèdre tronqué
angle polyèdre : 324°	angle polyèdre : 348°

tableau 8 : différence des angles entre dodécaèdre et icosaèdre

Enfin, la structure "cristalline" du tétraèdre (et/ou de l'octaèdre) est parfois évoqué le plus souvent en référence au diamant.

Ces références d'ordre culturel n'ont pas de liens explicites ou directs avec les propriétés des objets qui les fondent, ni avec aucune définition ou règle qui pourraient les déterminer. On peut attendre a priori deux grands types de raisonnement (Dias, Durand Guerrier, 2005) par rapport à la question posée sur le dénombrement de ces solides :

- Le premier est analogique: il existe une infinité de ces polyèdres réguliers par association (ou relation) au nombre infini de polygones réguliers. Chacun de ses représentants est inscriptible dans un cercle, il en existe donc une infinité la limite étant la sphère. Une théorie erronée qui verra sa résolution par la confrontation avec la réalité par construction, avec un retour nécessaire sur les objets théoriques pour trancher comme nous le verrons plus loin.
- Le deuxième raisonnement est plus intuitif : il existe un nombre limité, et même très petit de polyèdres réguliers. Un nombre correspondant aux trois seuls polygones permettant de réaliser effectivement un solide convexe : le triangle équilatéral, le carré et le pentagone régulier. Ici encore, la théorie sera invalidée par la confrontation aux constructions réelles qui permettent de la dépasser.

⁴⁶ Cette assimilation se fait à tort car l'objet ballon de foot ne renvoie pas à un polyèdre régulier mais à un polyèdre semi-régulier constitué uniquement de pentagones et d'hexagones : l'icosaèdre tronqué.

Dans nos observations ultérieures, les manipulations de type expérimental rendues possibles par la présence du matériel ne suffisent pas à trancher ni sur le choix du bon raisonnement, ni même sur la validité de chacun d'entre eux. Ils peuvent au mieux nourrir l'intuition sous-jacente à la résolution. Il est nécessaire d'engager le débat entre élèves, avec ou sans participation du professeur, pour passer progressivement de la formulation à l'argumentation. Les discours portent sur les objets en jeux, des objets sensibles représentant d'autres objets géométriques. La signification des mots utilisés, et parfois leur indétermination, revêt alors une importance fondamentale lors des échanges langagiers. L'ambiguïté d'un mot comme *côté* en est un exemple : le côté d'un polygone est aussi l'arête du polyèdre... mais ce n'est pas son côté (Mathe, 2006).

Le principal obstacle mathématique de la situation d'apprentissage se situe dans la découverte de l'axiome 2 : la somme des angles des polygones au sommet du polyèdre est inférieure strictement à quatre fois la mesure de l'angle droit. Sa formulation n'est que fort peu probable, il faut compter sur les outils de modélisation que représente le matériel mis à disposition pour le voir émerger "en acte", par assemblage de formes identiques qui pavent le plan. C'est l'ensemble de toutes ces actions et leurs mise en mots qui est à l'origine des débats et des contradictions : par exemple celle du pavage ou non du plan par assemblage des hexagones. Il est alors attendu des énoncés argumentatifs en vue de tentatives de validation des conjectures émises.

III – 4 La constitution du milieu pour l'expérimentation

Afin de clore la présentation de notre situation de recherche des polyèdres, nous interrogerons les éléments à prendre en compte dans la constitution d'un milieu pour sa mise en œuvre, et cela en référence avec nos propositions faites en chapitre II :

- dimension adidactique de la situation,
- antagonisme des rétro-actions,
- analyse des médiations sémiotiques et instrumentales,
- démarche d'investigation.

III – 4.1 Un milieu expérimental a priori

Rappelons tout d'abord le cadre d'étude du milieu expérimental a priori défini par Bloch :

*"Il ne s'agit pas de partir de l'enseignement tel qu'il est mais plutôt de définir des possibles effectifs de l'enseignement, afin de pouvoir tester et falsifier ses hypothèses."
(Bloch, 2002)*

Dans ce modèle de milieu, l'environnement didactique est déterminé et les valeurs des variables sont fixées. L'objet d'étude est la confrontation à la contingence, il n'est plus question ici de nature empirique mais expérimentale. La co-construction dans la situation entre le travail des élèves et celui de l'enseignant, entre le langage et les objets du réel sont des données didactiques importantes. Elles sont fournies par la construction (action) des élèves et fournissent des paramètres (des variables) qui interviennent directement dans le milieu du professeur : l'action pédagogique, la conduite de la classe, s'en trouve modifiée. Ces variables d'ajustement doivent être prises en compte dans l'analyse du milieu, elles peuvent en effet influencer l'enseignement dans des phases ultérieures au cours de la séquence pédagogique.

En prenant en compte l'ensemble des connaissances cumulées, on détermine ainsi une caractérisation du milieu permettant le recours à la dimension expérimentale en mathématiques selon plusieurs volets.

§ *l'enseignant*

Les caractéristiques du pôle enseignement dépassent bien entendu le strict cadre de l'individu professionnel en situation. Nous avons montré que la connaissance a priori de l'épistémologie et de l'histoire des savoirs, était déterminante afin de concevoir une analyse a priori contenant notamment l'inventaire des obstacles liés au savoir en jeu. Il est également important que ses activités en situation d'enseignement ne soient pas considérées comme des tâches indépendantes des pratiques mathématiques de ses élèves. Nous nous référons ici à l'importance du *faire des mathématiques* de Conne (1999) qui précède le *faire faire des mathématiques*. L'objectif principal des anticipations qui bâtissent la phase de conception des situations est la constitution d'éléments didactiques permettant le contrôle de la situation par des interventions adaptées aux réactions des élèves et à la reconnaissance des connaissances mises en actes.

§ *les objets*

Le milieu doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers pour le sujet afin que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. Nous avons choisi une étude dans le champ géométrique car il est fortement empreint d'éléments épistémologiques et culturels importants dans la constitution d'un tel milieu : c'est donc un point de vue. Nous faisons l'hypothèse que cette dimension culturelle des objets modifie les conditions d'adaptation des élèves aux difficultés, contradictions et déséquilibres qu'ils rencontrent au cours de la construction de leurs connaissances. C'est aussi l'occasion de questionner les éléments qui facilitent la

dévolution des situations d'apprentissages proposées, processus délicat s'il en est et que nous essaierons d'étudier au sein d'un milieu de type laboratoire (voir paragraphe suivant 4.2).

Nous avons aussi insisté sur la nécessaire médiation sémiotique et instrumentale des objets qui fondent la situation. L'étude des processus d'interprétations possibles des signes utilisés nous semble primordial comme nous l'avons montré.

§ *la situation*

Tout le processus action/formulation/validation et institutionnalisation est basé sur l'antagonisme du milieu. Comme cela a été présenté dans un paragraphe précédent, la notion de milieu est définie dans la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) comme le système antagoniste du système enseigné. Le professeur en est le concepteur et l'organisateur, c'est lui qui en choisit les variables. L'une des principales difficultés, dans ce modèle, est de garantir l'adéquation entre la connaissance en actes puis acquise des élèves et le savoir visé. Le milieu apparaît davantage comme un système que comme un espace aux contours définis.

§ *les élèves*

Nous avons peu parlé des élèves dans ce chapitre même si nous considérons qu'ils sont partie intégrante (et même essentielle) du milieu. Nous ne souhaitons pas les caractériser comme aptes ou adaptés à la construction des connaissances scientifiques. Tout au contraire, nous espérons montrer dans la deuxième partie de cette thèse, que la constitution d'un milieu favorisant la dimension expérimentale des mathématiques est un concept didactique adapté à la diversité des élèves telle qu'elle est aujourd'hui présente dans l'institution scolaire.

C'est la prise en compte des rétro-actions fournies par les élèves dans leurs interactions avec tous les éléments du milieu qui nous semble fondamental.

III – 4.2 Le laboratoire

Nous avons souhaité clore ce premier chapitre par la présentation de ce que nous appellerons "un milieu de type laboratoire". Nous essaierons de montrer en quoi il est susceptible de répondre aux exigences que nous avons cernées pour la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques en situation d'enseignement / apprentissage. Nous utiliserons pour cela un cadre théorique de définition de la terminologie laboratoire, ainsi qu'une référence plus institutionnelle sur ses applications possibles en classe. Nous terminerons par une proposition de modélisation d'un tel système à destination de sa confrontation avec la réalité des classes dans toute sa contingence.

§ *Cadre théorique*

Pour définir notre terminologie de laboratoire, nous ferons référence principalement à Hacking qui fait du laboratoire le lieu significatif de l'expérimentation (Hacking, 1989, 2003). Un lieu consacré à la véracité qu'il différencie de la vérité en suivant Williams⁴⁷ : la véracité est celle qui est énoncée par quelqu'un en un point défini de l'espace et du temps. Le principe est que *"les humains ont besoin de dire le vrai parce qu'ils ont besoin de partager des informations, au sein d'un système social de coopération"* (Williams, 2006). Cette assertion n'est pas une pierre supplémentaire à un relativisme confus, elle donne seulement une fonction à la valeur de vérité ce qui n'implique pas que l'on réduise cette fonction à quelque chose de plus simple, comme des désirs ou des volontés de puissance, par exemple. Hacking associe le laboratoire à cette notion de véracité et à un style de raisonnement par hypothèses proche de l'abduction peircienne qui est selon lui un véritable changement de conception.

Quel doit être le changement de conception de ce que c'est que dire la vérité sur les « entités théoriques », c'est-à-dire les objets et les structures en principe inaccessibles à l'observation ? Ce n'est pas simplement qu'on conçoit des modèles analogiques et qu'on utilise la méthode hypothético-déductive pour les corroborer ou les réfuter. Le changement de conception se traduit par le fait qu'on utilise les appareils dans le but de purifier ou même de créer des phénomènes qui n'existent pas à l'état pur dans la nature telle qu'on peut l'observer. (Hacking, 2003, cours au collège de France)

Nous partageons cette référence aux domaines de validité des énoncés produits dans le cadre expérimental. Nous faisons l'hypothèse que la réalité partagée (telle qu'elle est définie par Lelong) permet une position intermédiaire dans la dialectique expérience / théorie, qu'elle représente le "travail des abeilles" décrit par Bacon:

L'expérimentateur est comparable à une fourmi, il se contente de ramasser et d'utiliser ; le raisonneur ressemble à l'araignée qui tisse sa toile à partir de sa propre substance. Mais l'abeille choisit une voie médiane : elle rassemble le matériau provenant des fleurs sauvages ou cultivées, mais c'est pour le digérer et le transformer par un pouvoir qui lui est propre. (New Organon, 1620)

Nous adopterons donc théoriquement la terminologie *laboratoire* pour signifier une activité de type expérimentale au sein d'un environnement propice à l'émergence de connaissances en actes, dont la véracité scientifique est soumise au double tribunal de l'expérience et d'une communication partagée par la communauté de recherche.

⁴⁷ WILLIAMS Bernard, (2006), Vérité et véracité, traduit de l'anglais par Jean Lelaidier, Paris, Gallimard, « Essais »

§ *Cadre institutionnel*

C'est au début du vingtième siècle, lors d'une conférence au musée pédagogique de Paris, qu'Emile Borel (Borel, 1904) lance l'idée de la création de véritables laboratoires de mathématiques :

Mais pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques. (Borel, 1904)

Borel donne l'exemple d'un atelier de menuiserie avec du matériel aussi rudimentaire que du bois, des clous et des ficelles. L'idée est que le matériel ne doit pas être l'élément fort de ces laboratoires, mais rester au service du questionnement scientifique, et éventuellement support à la représentation.

Une proposition qui sera reprise un siècle plus tard par la commission de recherche sur l'enseignement des mathématiques (CREM) présidée par Kahane. Dans son rapport au ministre concernant la réflexion sur l'enseignement des mathématiques, la commission souhaite, par ce dispositif, donner "*une nouvelle image des mathématiques et de leur aspect expérimental*" (Kahane, 2002). L'idée de ces salles d'expérimentation en mathématiques dépasse selon nous le simple caractère matériel d'un lieu au sein d'un établissement scolaire. Il s'agit plutôt de créer un dispositif d'enseignement/apprentissage ayant ses propres particularités, ses variables didactiques, ses caractéristiques pédagogiques et psychologiques.

§ *Modélisation du laboratoire*

Dans ce paragraphe, nous faisons la proposition d'un modèle d'analyse en assimilant le laboratoire à un nouveau type de milieu fondé sur la relation triadique de trois dimensions, des éléments qui le composent (sujet-objet-situation) et des relations qui les médient (Dias, 2008).

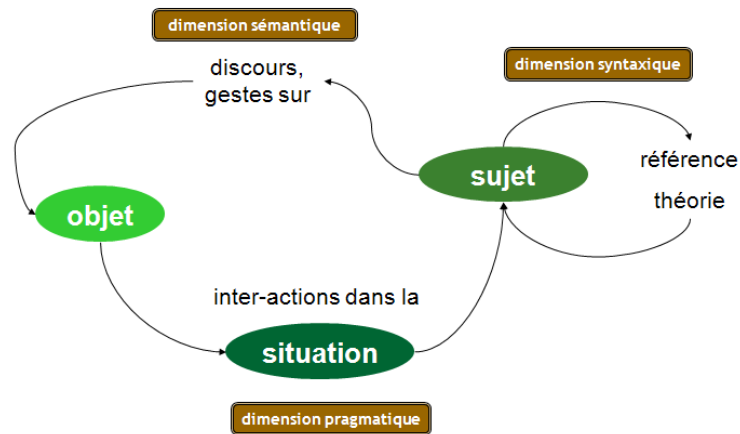


figure 27 : dispositif d'enseignement/apprentissage intégrant trois registres

Notre hypothèse est la suivante : la médiation établie entre sujets et objets est possible grâce à la présence de trois dimensions. Une dimension sémantique (orientée vers la compréhension) permettant le discours sur les objets sans laquelle le dialogue entre les joueurs (au sens de la théorie des jeux développée par Brousseau) n'est pas envisageable. Une dimension syntaxique représentée par la théorie de référence que chaque acteur possède a priori sur les objets et les phénomènes associés à leur mise en mots et en actes. Des conflits naissants de la confrontation de ces théories sont alors à l'origine de la formulation de problématiques, d'hypothèses et de conjectures. Enfin, une dimension pragmatique abordé dans une phase expérimentale fortement contextualisée où chaque joueur peut (ou non) modifier son propre rapport aux savoirs et connaissances grâce aux interactions qu'il y développe.

Cependant, nous souhaitons marquer la différence entre les types d'objets dans le cadre dialectique que nous poursuivons : objet sensible et objet théorique (figure 28). Ceci permet notamment de confirmer la place et le rôle de l'enseignant dans le milieu puisque c'est lui qui met à disposition des élèves les signes (matériels, langagiers et ou symboliques) représentant les objets théoriques sous jacents.

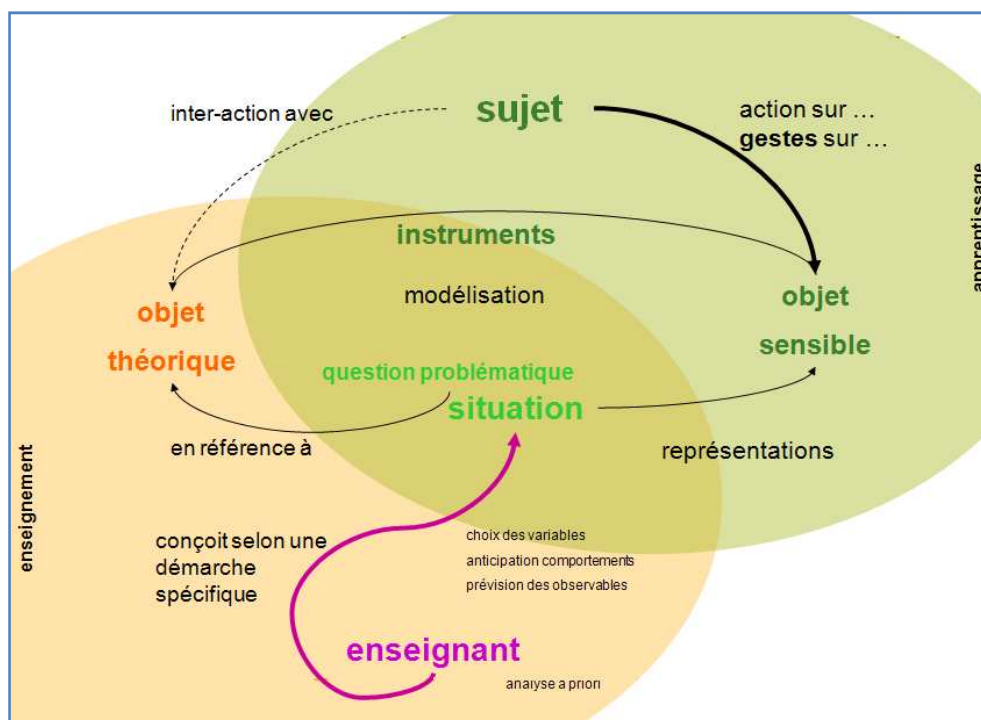


figure 28 : dispositif d'enseignement/apprentissage dans le milieu de type laboratoire

En référence à la phase d'action telle qu'elle est caractérisée dans la théorie des situations didactiques, le sujet en situation d'apprentissage agit prioritairement sur les objets sensibles qui sont mis à sa disposition. Son action n'est pas spontanée mais déterminée (soutenue) par ses connaissances qui s'expriment dans les procédures personnelles de résolution de problème qu'il met en œuvre. Dans la situation des polyèdres, les constructions premières des élèves s'appuient sur des connaissances "théoriques" en acte comme par exemple : un angle dièdre est formé par l'intersection de plus de deux faces. Les constructions et manipulations peuvent être assimilées à des phases d'expérimentation, puisqu'elles expriment une volonté d'intervention sur les objets du monde. On voit que cette phase d'action se déroule par expérimentation sur les objets sensibles en référence aux objets théoriques qui les soutiennent. La dialectique s'exprimant dans les allers retours entre les deux types d'objets engendrés par les réponses (antagonistes ou non) du milieu. C'est la volonté de contrôle de ce milieu qui permet aux élèves une forme de maintien de l'orientation (Bruner, 1983).

Ces interactions se situent dans un projet intentionnel d'expérimentation (et pour partie de modélisation) qui est rendu possible par les éléments présents dans le milieu (y compris l'enseignant, ses savoirs et ses interventions). Ils sont principalement issus des données de l'analyse a priori conduite en amont par l'enseignant, mais aussi engendrés in situ par les processus successifs d'adaptation. Ainsi la caractéristique d'un tel milieu que nous appellerons laboratoire tient dans l'ensemble des relations entre les cinq pôles (sujet, objet sensible, objet

théorique, situation et enseignant) du modèle descriptif de l'apprentissage dans un tel contexte.

Nous pouvons désormais appliquer cette modélisation à la situation de recherche des polyèdres réguliers, afin de mettre en évidence les processus dialectiques qui la composent :

- objet sensible / objet théorique,
- enseignement / apprentissage.

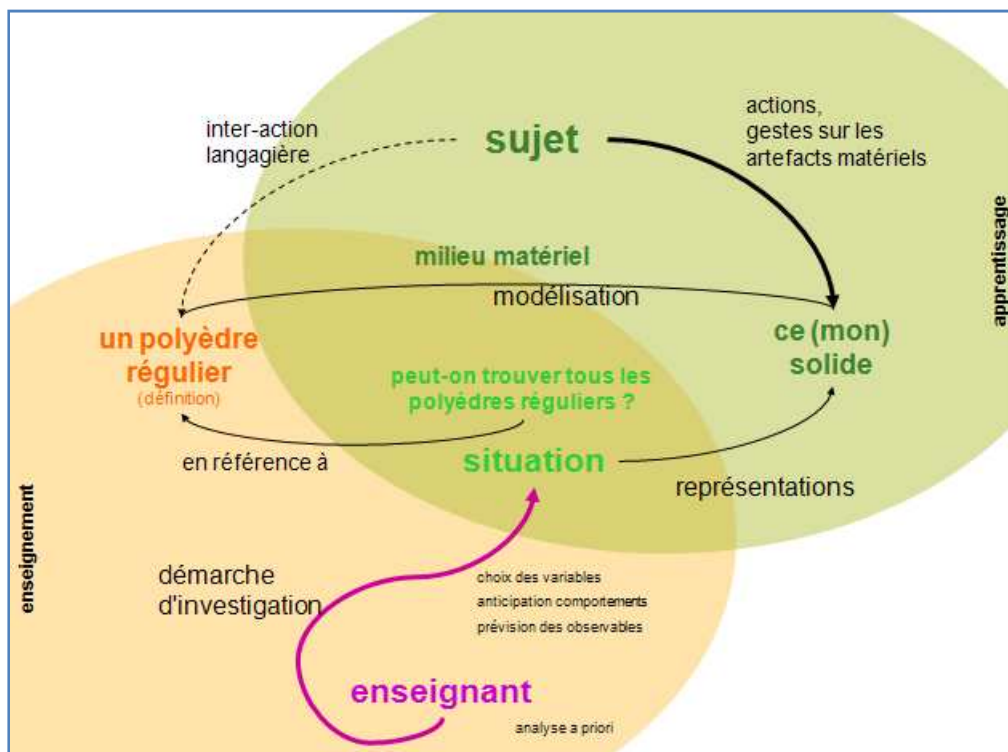


figure 29 : modélisation du laboratoire appliquée à la situation des polyèdres

§ Une référence à l'écologie : le biotope

Nous terminerons l'exploration du milieu de type laboratoire en situation didactique par une petite incursion écologique en faisant référence au concept de biotope en vue de l'analyse des conditions d'équilibre nécessaires au dispositif d'enseignement / apprentissage. Nous avons choisi de mettre en œuvre notre situation dans le contexte de l'enseignement spécialisé comme nous l'expliquerons dans le prochain chapitre. Ce faisant, il nous a paru essentiel de finaliser notre modélisation en insistant sur la question des équilibres à trouver au sein d'un milieu qui fait la part belle aux incertitudes, au doute et aux interactions entre élèves.

Lorsque nous parlons de validation intellectuelle dans les classes de mathématiques, nous ne référons pas seulement à la démonstration; mais au contraire, nous tenons compte de ce processus complexe d'allers-retours, d'intuitions, de doutes et de méfiances qui caractérisent le développement de la pensée mathématiques. (Barallobres, 2007).

Notre hypothèse est qu'il est possible d'observer la situation didactique comme un environnement et plus particulièrement comme une forme de biotope (concept biologique), dont les différents éléments contribuent à un équilibre en son sein. La conjecture principale est que le biotope doit être stable pour le développement personnel des élèves (apprentissage) et professionnel de l'enseignant (enseignement et apprentissage). Conséquence principale de cette assertion : le contrôle de l'équilibre renvoie à une conception dialectique du rapport enseignement / apprentissage.

Quelques définitions écologiques :

- Le milieu est la partie du monde avec laquelle un être vivant est en relation, un espace dans lequel il vit et se développe. Le milieu contient les ressources nécessaires au développement de cet être vivant, mais aussi ses prédateurs.
- Le biotope est un "lieu de vie" (une niche, un habitat) adapté, relativement stable caractérisé par un certain nombre de variables qui déterminent les conditions de vie et de développement des êtres qui le constituent.

Un milieu didactique selon le sens écologique du biotope nous semble propice à la recherche d'une stabilité de la situation didactique. Il nécessite une analyse des constituants du milieu afin de considérer les difficultés des élèves davantage comme des conséquences d'un biotope déséquilibré et donc comme un problème didactique qui offre une "prise" à l'enseignant, il a (ou il peut avoir) des outils pour le résoudre.

Enfin, la notion de biotope fournit une sorte d'interface d'apprentissage pour l'enseignant et ses élèves, interface nécessaire tant *"faire, faire faire et regarder ce que ça donne"* dans un même espace, une même temporalité, impliquent des équilibres difficiles à trouver !

Clôture de l'exploration théorique

Nous avons terminé ici notre étude épistémologique et didactique consacrée à l'explicitation de ce que nous entendons par dimension expérimentale des mathématiques. Elle est déterminée par un mode de relation aux objets de savoirs organisant les passages de leur dimension théorique à leur dimension sensible, elle s'appuie sur une forme de raisonnement de type abductif et se développe grâce à une démarche d'investigation.

Ceci nous a permis d'élaborer un modèle de milieu pour un dispositif d'enseignement / apprentissage en référence à la notion de laboratoire. Nous avons caractérisé ce milieu qui nous paraît propice à l'émergence de la dimension expérimentale des mathématiques en situation didactique. Les caractéristiques d'un tel environnement concernent sa potentialité à développer des apprentissages chez les élèves par un processus d'adaptation, et sa capacité à fournir les médiations nécessaires au processus de signification.

Ce milieu s'appuie notamment sur des critères développés en théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) concernant son antagonisme. Il doit également permettre de rendre lisibles les processus de signification, qu'il s'agisse de médiation langagière, symbolique ou instrumentale. La démarche d'enseignement la plus appropriée à la mise en place d'un tel milieu est la démarche d'investigation scientifique qui nous semble tout à fait adaptée au domaine et aux objets des mathématiques.

Afin de mettre à l'épreuve ce milieu, il nous fallait trouver une situation d'apprentissage propice à cette expérimentation. Nous avons choisi une situation de type fondamentale (Brousseau, 1998) qui consiste en la recherche des polyèdres réguliers. Son analyse a priori révèle sa potentialité à mettre en œuvre un milieu de type laboratoire tel que nous l'avons défini en regard de ses caractéristiques de stabilité. Compte tenu des contextes d'enseignement / apprentissage que nous allons utiliser, nous recherchons en effet à ne pas déstabiliser enseignants et élèves dans le cadre d'une expérimentation didactique.

Nous souhaitons nous consacrer dans une deuxième partie à la confrontation à la contingence afin d'expérimenter notre cadre de réflexion. Ce sont les caractéristiques du milieu et l'adaptation de la dimension expérimentale des mathématiques qui vont donc être testés. L'investigation se déroulera dans le champ des difficultés d'apprentissage et des situations de handicap afin d'évaluer la consistance de notre modèle de milieu.

PARTIE B :

**INVESTIGATION CONTEXTUALISEE DANS L'ENSEIGNEMENT
SPECIALISE**

Introduction

Cette partie de la thèse est consacrée à la mise en œuvre de la situation de recherche des polyèdres réguliers dans deux dispositifs de l'enseignement spécialisé. Ces expérimentations nous ont servies d'études pour le test des conjectures émises quant à la fonction de levier attribuée à la dimension expérimentale des mathématiques en situation didactique. Pour chaque expérimentation, nous avons constitué un milieu de type laboratoire afin de recueillir des réponses sur sa fonctionnalité dans l'environnement réel des classes.

Le choix de la situation de recherche des polyèdres nous semble être adéquat à la fois au milieu de type laboratoire, mais aussi aux connaissances à construire par les élèves qui seront concernés par l'expérimentation, puisqu'en effet, les connaissances portant sur les propriétés de certaines figures dans l'espace sont présentes dans les programmes d'enseignement des niveaux de nos classes d'étude.

L'investigation est volontairement conduite dans un contexte d'enseignement très spécifique, celui de l'enseignement spécialisé, mais la recherche porte sur les aspects qui pourraient être généralisés dans l'enseignement ordinaire et dans la formation des enseignants à l'issue de cette étude. C'est ainsi que les conclusions de cette partie de notre travail seront transférées à d'autres contextes dans la dernière phase de notre recherche.

Cette deuxième partie se compose des trois chapitres en regard de la méthodologie que nous y mettrons en œuvre :

- présentation du contexte pour l'étude et de ses spécificités,
- mise en œuvre de l'expérimentation didactique, puis analyse
- mise à l'épreuve des résultats par une deuxième expérimentation.

Cette méthodologie correspond à l'articulation entre les deux modèles de Bloch expérimental et confrontation à la contingence (Bloch, 2002). Cela nous a permis de travailler sur le choix des variables didactiques de la situation, et de préparer les observables permettant de caractériser les interactions des sujets (génériques) avec la situation. Dans nos analyses, nous serons également attentifs aux apprentissages réels des élèves effectués dans la situation afin d'évaluer la pertinence de nos choix. C'est l'ensemble du fonctionnement de la situation qui sera finalement analysé, dans ses dimensions d'enseignement, d'apprentissage et de gestion du milieu.

Nous suivons une fois encore Conne (1999) pour dire que cette investigation didactique est aussi une confrontation à la surprise et à l'inattendu, ce qui nous paraît fondamental dans une recherche portant sur l'enseignement. C'est aussi une caractéristique d'un milieu expérimental que nous pouvons appliquer à nos propres travaux.

chapitre I - Le contexte de l'enseignement spécialisé

Le contexte de l'A.S.H. (adaptation et scolarisation des élèves handicapés), par la spécificité de ses environnements didactique, pédagogique et sociétal, fournit un observatoire privilégié pour étudier les questions qui nous préoccupent relativement à l'enseignement et l'apprentissage. Nous faisons l'hypothèse qu'il permet d'effectuer un "effet de loupe", compte tenu de ce que les difficultés rencontrées y sont en quelque sorte exacerbées. Il soulève des interrogations importantes sur l'enseignement et en particulier sur celles de sa nécessaire adaptation. D'autres questions concernent le public de ce contexte d'apprentissage reconnu en difficulté voire même en situation de handicap, un public d'élèves qui n'en est pas moins susceptible d'apprendre.

L'effet "loupe" du contexte tient vraisemblablement à la stigmatisation des difficultés d'apprentissages en regard de l'écologie générale des dispositifs ASH (orientation des élèves, formation des enseignants) ou pour le moins mis en lumière du fait de leur représentativité statistique : proportion plus importante d'élèves en difficulté d'apprentissage, mais aussi d'enseignants en difficulté d'enseignement. Sur le "versant élève" de l'apprentissage, l'obstacle récurrent du contexte de l'ASH (tel qu'il est soulevé par une majorité d'enseignants spécialisés), réside dans la priorité d'une restauration de l'intention d'apprendre.

Ce contexte est choisi comme terrain pour expérimenter nos hypothèses, un premier exemple de milieu pour la confrontation à la contingence : un contexte "où l'on ne se fait pas de cadeau !"

Dans ce chapitre nous présenterons d'abord l'éclairage institutionnel nécessaire à la compréhension du système éducatif français en matière de scolarisation des élèves handicapés¹. Dans un deuxième temps, nous montrerons en quoi l'environnement didactique de l'enseignement spécialisé peut être considéré comme spécifique dans ses deux dimensions que sont l'enseignement et l'apprentissage.

L'un des enjeux de notre recherche est l'étude de la création des conditions pour un regard différent sur la pratique et l'activité mathématiques des élèves dans un cadre bien défini : celui de la résolution de problèmes de recherche. Nous essaierons de montrer que notre modèle de milieu (le laboratoire) est adapté au contexte de l'enseignement spécialisé tant la notion de

¹ Ceci correspond à la nouvelle terminologie en cours dans les textes officiels émanant du ministère de l'éducation nationale. Elle fait suite à la terminologie antérieure qui utilisait la notion d'élèves "en situation de handicap".

recherche d'équilibre y est importante. Dans l'environnement de l'ASH, il est en effet nécessaire de forger des climats de classe (fondés didactiquement) rassurants parce que non déstabilisants. Le milieu du type biotope (tel que nous l'avons modélisé auparavant) permet également de considérer l'élève en difficulté davantage comme posant un problème didactique à résoudre par l'enseignant, que comme un cas clinique relevant en grande partie d'une compréhension dans le registre psychologique ou psycho-sociologique.

I – 1 Contexte institutionnel

Les politiques d'intégration menées en France depuis plusieurs années concernant les élèves en grande difficulté scolaire ou en situation de handicap posent de nouvelles questions professionnelles aux enseignants. La prise en compte de la spécificité de chacun de ses élèves nécessite un dépassement de la réponse pédagogique apportée par la différenciation pédagogique². Cette volonté institutionnelle affichée d'une intégration massive conduit les enseignants à aménager l'ensemble de leurs gestes professionnels et de leurs enseignements. Ils ne doivent pour cela ni se limiter à une approche unitaire et simultanée des connaissances, ni prévoir quelques adaptations individualisées des connaissances. Il leur est demandé d'éviter également la réponse pédagogique minorante qui consiste à diminuer ses exigences en terme de contenu ; mais au contraire de compter sur la capacité des élèves en difficulté durable ou en situation de handicap, à entrer dans des situations d'apprentissage consistantes, complexes et porteuses de sens.

De nouveaux dispositifs structurels nationaux ont émergé pour accompagner ces nouvelles orientations politiques et pédagogiques (MEN, 2005), mais les actions de formation nécessaires à ce changement semblent aujourd'hui encore bien insuffisantes. Il semble que la priorité ait été donnée à la scolarisation des élèves rejoignant une demande sociale, au détriment d'une formation adaptée des enseignants qu'ils soient spécialisés ou non.

I - 1.1 La scolarisation des élèves à besoins spécifiques

Nous utilisons la terminologie des "besoins spécifiques" issue d'un consensus des textes relatifs à l'enseignement spécialisé, pour caractériser le changement de point de vue qui lui est associé. Parler des besoins spécifiques des élèves nous semble significatif d'un affichage de la priorité donnée au versant des apprentissages (puisque cela reste la finalité de l'école) dans le cadre de la prise en charge éducative des élèves ainsi caractérisés. La révolution (choix

² Nous empruntons cette notion à Philippe Meirieu dans MEIRIEU P. (1987) Apprendre, oui mais ... comment ?, E.S.F.

politique et sociétal) porte alors sur le dépassement de la notion d'intégration vers celle de solarisation. Il ne s'agit plus de se contenter d'intégrer ces élèves dans un bain éducatif mais de prévoir un véritable projet d'instruction basé sur une scolarité réelle.

En février 2005, la loi sur le handicap lance un nouveau défi pour l'école française : celui de la scolarisation de tous les élèves en situation de handicap en proposant une redéfinition terminologique de la notion de handicap.

« Constitue un handicap, au sens de la présente loi, toute limitation d'activité ou restriction de participation à la vie en société subie dans son environnement par une personne en raison d'une altération substantielle, durable ou définitive d'une ou plusieurs fonctions physiques, sensorielles, mentales, cognitives ou psychiques, d'un polyhandicap ou d'un trouble de santé invalidant. » M.E.N., Loi pour l'égalité des droits et des chances, la participation et la citoyenneté des personnes handicapées du 11 février 2005

Elle énonce plusieurs points forts dont nous relevons ici les trois plus importants dans le cadre de notre étude :

- Toute personne constatée en situation de handicap (quelqu'en soit le contexte, y compris scolaire bien entendu) bénéficie d'un droit à compensation qui est défini de la sorte :

Le droit à compensation vise à permettre à la personne handicapée de faire face aux conséquences de son handicap dans sa vie quotidienne en prenant en compte ses besoins, ses attentes et son projet de vie. Il englobe « des aides de toute nature à la personne et aux institutions pour vivre en milieu ordinaire ou adapté ». (ibid)

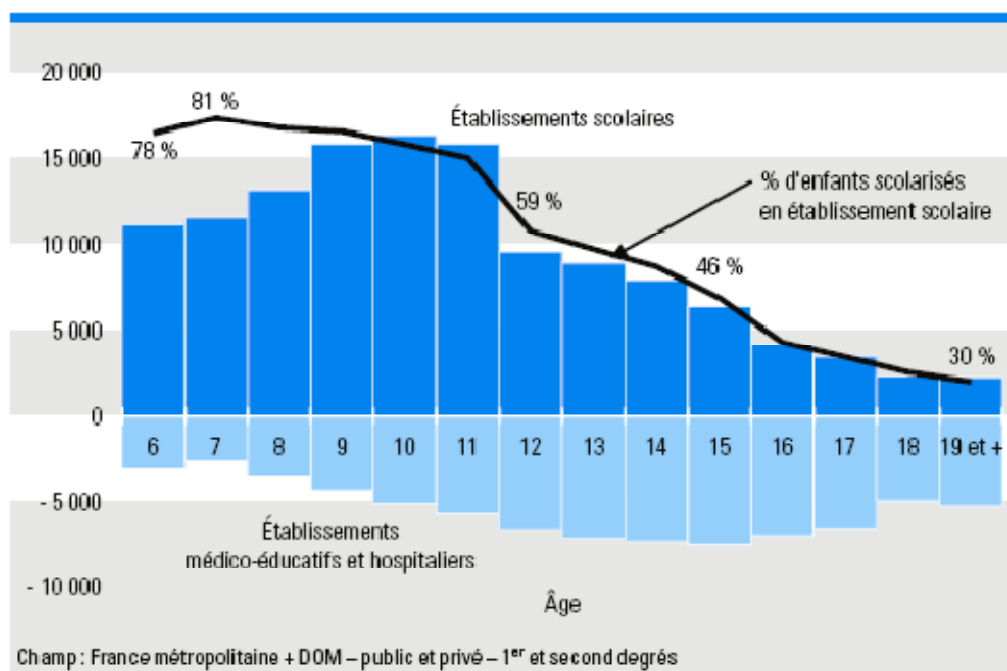
- La scolarisation en milieu ordinaire est posée comme principe (le milieu ordinaire sous entendu est l'établissement scolaire habituel école, collège ou lycée le plus proche du domicile de l'élève). Les établissements doivent répondre aux besoins de l'élève via les aménagements d'horaires ou le projet individualisé.
- Pour chaque élève un projet personnalisé de scolarisation est mis en place en réponse à ses besoins et après évaluation de ses compétences par une équipe pluridisciplinaire.

La conséquence principale attendue de cette loi est la scolarisation de tous les élèves quel que soit leur handicap. Les résultats sont au rendez-vous puisque selon la note d'information 07-23 de la D.E.P.P.³ du ministère de l'éducation nationale :

³ La note d'information du ministère de l'éducation nationale est une publication de la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance. Le numéro 07-23 est daté de mai 2006.

En 2005-2006, 235400 enfants et adolescents en situation de handicap ont été scolarisés en France. Les structures de l'Éducation nationale en ont accueilli 151500. 69% sont scolarisés dans des classes ordinaires ou dans des classes adaptées à des élèves présentant des difficultés scolaires ou sociales (scolarisation «individuelle»). Cette proportion est en hausse (52% en 1999-2000).

Le taux de cette scolarisation est bien entendu relatif à l'âge des élèves, et, s'il montre de réelles espérances pour les jeunes enfants, il reste assez bas dès l'entrée dans la scolarité du second degré (collège).



graphique 1 : Répartition par âge des enfants et adolescents handicapés selon leur lieu de scolarisation à la rentrée 2005, source MEN, DEPP, note 07-23

Cette scolarisation s'organise autour de deux modalités principales selon la spécificité des cas. Elle est dite "*individuelle*" dans des classes ordinaires ou dans des classes adaptées à des élèves ayant des difficultés durables scolaires ou sociales ; et est dite "*collective*" dans des classes dédiées aux élèves en situation de handicap où un enseignement adapté et différencié est mis en place. Elle s'effectue soit dans un établissement scolaire ordinaire (école primaire, collège, lycée professionnel ou d'enseignement général), soit dans un établissement relevant d'une gestion associative médico-sociale (institut médico-éducatif, hôpital de jour, institut d'éducation motrice, etc...).

Dans tous les cas, elle implique une nécessaire adaptation des enseignements qui doit porter davantage sur les démarches que sur les contenus puisque les élèves doivent être intégrés dans le niveau scolaire qui correspond à leur âge. La loi parle explicitement du droit à

compensation ce qui légitime le processus d'adaptation à la charge des enseignants. Pour réussir dans cette mission, l'Ecole ne doit cependant rien abandonner de ses ambitions concernant les connaissances et les compétences à acquérir. L'essentiel de ses efforts doit porter sur l'adaptation des démarches et des méthodes afin de ne pas priver les élèves en situation de handicap de véritables apprentissages.

Nous faisons cependant le constat suivant : alors que les élèves en difficulté durable ou en situation de handicap ne sont pas privés ou dénués de capacités cognitives, on leur propose encore bien souvent des tâches minorées tant par le contexte que par le contenu comme réponse à leurs besoins. La répétition des automatismes ou algorithmes en mathématiques en est un exemple significatif, comme sont aussi privilégiés les apprentissages de connaissances dites "utiles" dans la vie courante. En questionnant les enseignants, il apparaît un réel déficit de leur formation pédagogique et didactiques pour accompagner les mesures d'envergure de ces changements d'orientations comme nous le verrons un peu plus loin.

I - 1.2 Les dispositifs institutionnels nationaux et départementaux

En accompagnement de la loi française sur le handicap de février 2005, plusieurs mesures ont été prises concernant les dispositifs nécessaires à sa mise en œuvre. Il s'agit pour partie d'une redéfinition des missions qui existaient auparavant (l'exemple principal est le remplacement des commissions de l'éducation spéciale CDES par la commission des droits et de l'autonomie de la personne handicapée CDAPH) ; ou parfois de la création de structures nouvelles comme les maisons départementales des personnes handicapées (MDPH). Ces dispositifs qualifiés "d'aides techniques" sont accompagnés d'un programme d'aides dites "*humaines*" avec la création des emplois d'auxiliaires de vie scolaire. Ces derniers sont chargés de l'accompagnement individuel ou collectif des élèves dans les établissements selon des décisions prises sur le plan départemental en CDAPH.

Concernant l'enseignement, la coordination de l'ensemble des dispositifs est toujours sous la responsabilité des inspecteurs départementaux chargés des circonscriptions dites "ASH" (adaptation et scolarisation des élèves handicapés). Il y est fait une différence explicite entre deux groupes d'élèves :

- ceux qui relèvent du champ du *handicap* et qui sont donc concernés par l'ensemble du dispositif ASH,
- ceux qui relèvent de la *difficulté scolaire* (sous entendu passagère) pour qui l'aide pédagogique est assurée par les réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté⁴.

⁴ Ces réseaux datent des années 1970, même s'ils ont été réformés dans leur mission par des textes d'avril 2002.

Au sein de ces circonscriptions d'inspection et de conseil pédagogique (IEN ASH), on parle d'enseignement adapté et d'aide spécialisé, ce qui remplace la terminologie précédente "d'enseignement spécialisé" telle qu'elle est encore en vigueur en Suisse ou au Québec par exemple. Cette distinction donne une fonction moins spécifique à l'enseignement, il s'agit d'un choix politique de mission éducative. L'enseignant qui exerce sa profession dans un contexte particulier, reste détenteur d'une mission qui le destine à instruire à un élève générique. L'enseignement peut être adapté au contexte de cette mission d'instruction, mais l'aspect "spécialisation" est assigné aux aides pédagogiques plus spécifiques.

Toutes les instances de l'éducation nationale fonctionnent dans un réseau de partenariat avec les acteurs de la santé, les personnels assistants sociaux, les psychologues et parfois la protection judiciaire de la jeunesse. Même si la loi insiste sur le fait que c'est la personne en situation de handicap qui doit être au centre du dispositif, force est de constater que la place et le rôle des enseignants dans cette nouvelle organisation est fondamentale. Ses enseignements, ses évaluations et ses démarches sont déterminants pour l'ensemble des décisions qui sont prises dans le choix des projets personnels de scolarisation.

Pour terminer cette présentation des structures d'accueil, il faut aussi noter la volonté institutionnelle qui s'exprime une fois encore sur le plan terminologique : les deux principaux types d'accueil des élèves en situation de handicap ou en difficulté durables sont nommés des *dispositifs*. On évite la terminologie de *classe* d'accueil afin de signifier que le principe n'est pas de cloisonner les élèves et leurs apprentissages, c'est un dispositif non fermé sur lui-même. Il est en effet nécessaire de garder la possibilité pour chaque élève d'intégrer partiellement d'autres classes ordinaires de l'établissement d'accueil. Ces intégrations individualisées doivent elles aussi faire partie du projet personnel de scolarisation de chaque élève, et sont essentiellement sous la responsabilité de l'enseignant exerçant dans ces dispositifs. Comme nous le verrons dans un prochain chapitre au moment de la présentation de nos terrains d'étude, deux dispositifs principaux existent selon le niveau de scolarité des élèves :

- dans le premier degré il s'agit des classes d'intégration (CLIS),
- dans le second degré (collège et lycée) ce sont les unités pédagogiques d'intégration (UPI).

Le contexte institutionnel de l'enseignement spécialisé fournit un cadre administratif et pédagogique relativement complet en France. Il privilégie la scolarisation de tous les élèves dans des cursus leur permettant de réaliser un projet personnel de scolarisation adéquat. Il n'y a pas de cloisonnement entre les différents partenaires au service de cet ambitieux projet qui s'appuie sur une loi. Cependant, les enseignants (spécialisés ou non) portent une très grande responsabilité dans la réussite des projets de ces élèves, sans bénéficier d'un accompagnement

formatif notamment sur le plan didactique. Pourtant, c'est principalement cet environnement didactique qui détermine la complexité de ce contexte de l'ASH.

I – 2 Contexte didactique

Nous avons choisi le terrain de l'enseignement spécialisé pour notre recherche car nous considérons qu'il relève d'une complexité riche d'intérêt dans la compréhension de la dialectique enseigner / apprendre. Selon nous, il existe une spécificité de ce contexte pas seulement en terme de difficulté à apprendre les mathématiques des élèves (qui sont assez proches de celles rencontrées dans l'enseignement ordinaire), mais dans la difficulté à maintenir des équilibres dans le milieu des situations didactiques. L'extrême sensibilité de l'environnement didactique est dû pour partie à des relations particulières entre les élèves et les savoirs, et à la difficulté pour les enseignants à garder un contrôle serein de leurs enseignements du fait des indéterminations des interactions qu'ils rencontrent dans le milieu.

Nous essaierons de faire un point relativement court sur cette dialectique spécifique pour déterminer ce qui relève de la difficulté d'apprendre et ce qui concerne les difficultés d'enseignement. Nous ferons ensuite un point sur la formation des enseignants telle qu'elle est aujourd'hui assurée dans le cadre de ces problématiques liées à ce contexte spécifique d'exercice professionnel.

I - 2.1 De la difficulté d'apprendre

De nombreux points de vue existent pour traiter de cette délicate problématique qu'est la difficulté d'apprendre. Nous n'avons pas la prétention d'en établir ici des réponses fermes et définitives, car nous centrons nos propos dans un cadre d'analyse bien spécifique : celui de la didactique des mathématiques. Ainsi, même si nous savons que les dimensions psychologiques, sociales et même neuro-psychologiques peuvent être analysées raisonnablement comme des causes aux dysfonctionnements des apprentissages, nous ne les utiliserons pas comme cadre de référence. Cependant, il nous paraît clair que toutes ces dimensions sont en interactions dans la compréhension du processus d'apprentissage, et qu'il n'est pas possible de mener une réflexion dans ce domaine en les ignorant.

Deux entrées de type didactique nous paraissent significatives pour mieux comprendre la résistance dans les apprentissages mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé : des pratiques mathématiciennes qui ne sont pas la garantie de l'expression des connaissances, et des interactions parfois surprenantes avec le milieu. Nous les analyserons en

référence aux trois premières phases décrites dans la théorie des situations (Brousseau) action, formulation et validation.

Nous avons proposé un modèle de situation qui s'appuie dans un premier temps sur une phase d'action des élèves dans un jeu proposé par l'enseignant. L'activité des élèves consiste à intervenir dans le cadre des règles définies par le jeu, puis de réagir aux rétro-actions parfois antagonistes du milieu pour adopter progressivement une stratégie basée sur la répétition des actions puis sur leur anticipation. Ceci témoigne alors de la mise en actes de connaissances. Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, deux problèmes sont liés à cette phase.

Les règles du jeu ne représentent pas forcément un cadrage de type axiomatique suffisant pour les élèves. Elles peuvent être sciemment évitées, volontairement contournées ou plus simplement rester incomprises, ce qui, dans tous les cas, nécessite une ou plusieurs interventions de l'enseignant dans le milieu. Il en va d'une relative perte d'autonomie des élèves dans leurs pratiques, ce qui peut les désengager assez tôt du processus d'apprentissage lié à la situation.

La répétition des actions semble garantie puisque ce type de répétition est plutôt rassurante (ceci est l'objet d'une recherche assez constante en classe), en revanche l'adaptation progressive à des réponses antagonistes du milieu n'a rien de certain. L'effet rassurant peut être atteint et devenir prégnant sur le reste même si les réponses sont antagonistes. Au contraire, les rétro-actions répétitives de type contradictoire peuvent être trop déstabilisantes et vécues comme des témoignages d'un échec récurrent. Dans ces deux situations les apprentissages ne seront pas visibles dans les traces de l'activité des élèves, ce qui peut par ailleurs faire partie d'un projet plus ou moins conscient de leur part. En effet, mettre en acte des connaissances peut relever d'un effort parfois douloureux dans certains contextes psychologiques.

La deuxième phase du modèle de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) consiste à développer une communication qui s'avère nécessaire dans la résolution des problèmes rencontrés. Cette communication nécessite la coopération des acteurs (ou joueurs) dans un projet commun de contrôle du milieu. La dimension relationnelle entre les élèves est alors de la plus grande importance, ce qui pose régulièrement problème dans le contexte de l'ASH où la communication répond parfois à des règles externes. L'enjeu des conflits peut rapidement quitter le terrain socio-cognitif et nécessiter une fois encore des interventions de l'enseignant afin de garantir l'expression efficiente dans la résolution du problème. On connaît l'importance de ce moment de formulation des connaissances dans la mise en œuvre du répertoire linguistique qui lui est associé. On sait aussi que si ce dernier ne prend pas ses sources dans l'expression des élèves mais dans les propos du professeur, cela renforcera un contrat didactique basé sur l'incontournable formulation des connaissances de l'enseignant. La syntaxe et le vocabulaire ainsi mis en œuvre ne pourront pas prêter à une quelconque

discussion ou débat. Comme nous l'avons décrit auparavant, l'interprétation des signes utilisés par le professeur est relativement incertaine du côté des élèves ce qui peut les éloigner considérablement du savoir en question dans la situation.

Concernant la phase de validation, le contexte de l'enseignement spécialisé peut générer des résistances, notamment quant au rapport entretenu par les élèves aux objets de savoirs. La première concerne l'acceptation de la confrontation au doute, à l'incertitude qui est provoquée par la mise en débat des connaissances. Elle peut provoquer une situation inconfortable de remise en question qui se traduit soit par des replis intérieurs de certains élèves, soit par l'expression de personnalités dominantes, deux comportements qui sont peu propices à l'émergence d'une preuve ou d'une vérification scientifique.

Discuter, débattre signifie une communication de type argumentative qui s'appuie sur un répertoire linguistique ou symbolique adapté, efficace et convaincant par sa clarté. Autant de qualificatifs peuvent faire défaut dans certains contextes de l'enseignement spécialisé en particulier lorsque les troubles du langage sont importants. Le risque d'une phase de validation occultée par ses raisons est que le savoir puisse rester dans un statut invérifié voire avec des formulations contradictoires. Un savoir qui ne pourra être dépassé que par l'intervention de l'enseignant, ceci renforçant un type de contrat didactique déjà évoqué.

I - 2.2 De la difficulté d'enseigner

L'exercice professionnel de l'enseignant sur les terrains de l'enseignement spécialisé est d'une grande complexité, parfois relativement isolé et souvent très exigeant en terme d'investissement personnel. L'une des principales conséquences est de laisser bon nombre de ces dispositifs non pourvus par des enseignants titulaires chaque année, ceci provoquant une rotation importante d'enseignants inexpérimentés. A titre d'exemple voici quelques données sur la proportion des postes vacants issue du premier mouvement⁵ du département du Rhône pour cette année 2008.

⁵ Le premier mouvement établit la liste de tous les postes d'enseignants du premier degré en distinguant ceux qui sont vacants et qui sont donc susceptibles d'être demandés par les enseignants qui souhaitent ou qui doivent participer à ces mutations.

classe ou dispositif	CLIS	UPI	SEGPA	élémentaire ordinaire
nombre de postes vacants	54	26	41	223
nombre total de postes	105	55	115	4446
pourcentage vacants	51 %	47 %	36 %	5 %

tableau 9 : proportion de postes vacants, source: mouvement départemental du Rhône, mars 2008

Ce type de constat n'est malheureusement pas spécifique au département du Rhône même s'il prend ici des proportions importantes du fait du grand nombre de postes dans l'ASH. Il témoigne d'une double difficulté :

- rester titulaire plusieurs années sur ces types de postes qui demandent beaucoup d'engagement tant physique que psychologique,
- oser les demander pour les jeunes enseignants qui sont insuffisamment formés et informés lors de la formation initiale.

Nous souhaitons désormais présenter quatre raisons de ce déficit en les référant à des problèmes didactiques spécifiques de l'enseignement spécialisé.

§ *le choix des démarches*

Après plusieurs années d'expérience en formation initiale et continue des enseignants spécialisés, nous pouvons témoigner d'un certain nombre de difficultés exprimées de façon régulière⁶. Elles témoignent de la complexité d'exercer le métier de professeur dans le contexte de l'enseignement spécialisé notamment par rapport au choix des démarches. Il est coûteux pour les enseignants de "garder le cap" de certaines convictions pédagogiques et didactiques telles que la résolution de problèmes ou le conflit socio-cognitif (pour n'en citer que deux qui nous semblent récurrentes). Par exemple, leurs élèves semblent plutôt friands d'activités automatisées qui puissent les rassurer⁷, ce qui soulève une contradiction entre leurs intentions didactiques et la mise en œuvre réelle de leurs enseignements en classe. Il en est de même concernant les démarches qui mettent au premier plan la communication et les interactions (mises en commun, débats, situations de communication en mathématiques). Ces démarches sont parfois délicates au niveau du contrôle des situations, tant les relations entre les élèves sont affectées par des paramètres qui ne font pas partie du milieu des situations d'apprentissage. Enfin, s'il est bien acquis que le statut de l'erreur relève d'un cadre

⁶ Cette expérience est consécutive à une mission qui nous a été confiée pendant quatre ans par l'inspection académique du Rhône pour la formation en mathématiques dans le cadre des circonscriptions de l'adaptation scolaire.

⁷ Ceci peut aussi être référé à une représentation de l'enseignant, car l'argumentation est parfois difficile à développer : "Je pense qu'ils préfèrent appliquer des automatismes pour ne pas avoir à réfléchir".

d'interprétation dépassant les caractéristiques psychologiques dans une vision plus systémique, l'erreur reste difficile à "utiliser" en classe. Les démarches proposant son intégration dans des situations d'apprentissage sont relativement délicates auprès d'élèves ayant un rapport douloureux à la régularité de l'échec.

§ *L'avancée du temps didactique*

Nous référons la notion de temps didactique à Chevallard (1991) et à Giroux et René de Cotret (2003), qui le définissent ainsi dans leur introduction :

"Le temps didactique est créé par l'introduction des objets de savoir à enseigner. Ainsi, le découpage du savoir en unités temporelles relève d'une organisation linéaire qui assure un certain ordonnancement des objets de savoirs à introduire, à étudier. Pour assurer l'avancement dans le savoir, un contenu introduit par l'enseignant doit apparaître nouveau aux élèves et cependant être relié à des savoirs connus de manière à ce qu'ils puissent établir un premier rapport sur lequel pourra s'appuyer l'enseignement. L'enseignant introduit donc des objets de savoir nouveaux pour lesquels les élèves doivent établir un rapport à partir de ce qu'ils connaissent déjà." (Giroux, René de Cotret, 2003)

Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, la désynchronisation des temps d'enseignement et d'apprentissage est une des raisons des difficultés d'enseignement. La programmation établie par l'enseignant au niveau du milieu-projet (Margolinas, 2002), subit de nombreux aménagements lors de la confrontation à la réalité de la classe, ce qui le conduit à des modifications "in-situ". C'est l'ensemble de l'écologie générale de la présentation des savoirs qui s'en trouve alors modifiée puisque des boucles de remédiation / différenciation doivent être créées. Ce processus est connu dans l'enseignement dit "ordinaire", mais il est plus difficile à réguler dans l'enseignement spécialisé du fait de la grande diversité des connaissances et compétences des élèves d'une part, et d'autre part à cause d'un nombre important d'interactions imprévues dans le milieu en lien ou non avec les objets en jeu.

Ces ruptures dans l'avancée du temps didactique sont délicates à assumer pour un professionnel de l'éducation qui peut les interpréter comme une stagnation (voire une régression) des apprentissages dont il porte une part non négligeable de responsabilité. L'étirement temporel du défilé des objets de savoir pouvant devenir relativement incompatible avec les attentes didactiques du professeur, la conséquence peut être une forme d'accélération compensatrice se faisant au détriment des liens nécessaires à la construction de nouvelles connaissances. Dans tous les cas, c'est un motif d'insatisfaction professionnelle qui conduit à une déstabilisation ayant elle-même des répercussions dans le milieu de la situation d'apprentissage.

§ *le milieu pour la dévolution et la communication*

Le contexte de l'enseignement spécialisé est un terrain très sensible, il est de ce fait plus affecté par les difficultés d'apprentissage / enseignement ce qui modifie constamment les équilibres dans le milieu. La dynamique des interactions langagières, symboliques et cognitives y est particulièrement fragile, ce qui peut rendre l'enseignement plus "*mouvementé*" voire même "*chaotique*" (Conne, 1999). On peut notamment parler d'une grande sensibilité aux micro-événements (dans ou hors du milieu) qui provoquent de nombreuses perturbations par exemple lors des processus de signification. Des coupures à répétition peuvent en effet interrompre l'interprétation des signes (en référence au processus Peircien décrit auparavant) et conduire à des non-sens ou à un abandon de la tâche en cours faute de compréhension suffisante. Le contrôle du milieu pour une communication permettant l'expression des connaissances s'en trouve considérablement affecté et l'enseignant doit aménager régulièrement des liens qui refont les jonctions de sens nécessaires.

La question du milieu pour la dévolution est également un point critique dans le contexte de l'enseignement spécialisé. La dévolution est une composante essentielle du contrat didactique, le milieu doit comporter les éléments qui permettent au mieux l'acceptation par les élèves de la responsabilité de l'engagement dans la situation. Compte tenu du profil des élèves dans certains dispositifs spéciaux, leur motivation peut être très diminuée du fait de leur parcours difficile voire douloureux au sein de l'institution scolaire. Le problème qui leur sera présenté doit être suffisamment signifiant pour qu'ils puissent l'investir, ses caractéristiques didactiques doivent être saillantes (degré d'autonomie dans les actions, production libre des connaissances) et le contexte approprié à l'âge et à leur niveau de connaissance. La préparation d'un tel milieu pour des situations d'apprentissage ne laisse pas beaucoup de place à l'improvisation. Un enseignant relativement expérimenté ou très bien formé devrait être davantage en réussite dans la constitution d'un tel milieu pour la dévolution, ce qui n'est pas garanti si l'on s'en réfère aux chiffres donnés précédemment.

§ *la difficulté à manifester et constater des connaissances*

Dans le modèle d'analyse du processus d'enseignement / apprentissage que nous utilisons, ce sont les adaptations des élèves au rétro-actions du milieu qui témoignent de la mise en acte des connaissances. Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, les interactions avec le milieu (ses objets, ses acteurs) peuvent s'avérer relativement illisibles en étant soit absentes (par la non production de signes des élèves), soit "*brouillées*" par d'autres événements parasites. Ces productions seront donc difficiles à interpréter par le professeur :

- les signes produits ne sont pas toujours des mots (oral ou écrit) : ils sont difficiles à percevoir dans la classe pour des raisons d'impossibilité de contrôle de toutes les productions des élèves, mais aussi par la difficulté d'attribuer des indices de signification dans un milieu expérimental ;

- l'interprétation des signes produits est par essence délicate si l'on s'en réfère au modèle Piercien : le signe est en relation avec son objet de façon non transparente par un jeu d'interprétations ; un jeu qui dépend notamment de l'interprétant (le professeur) et des conditions offertes par l'environnement de la classe.

En suivant Conne (1999) l'activité des élèves ne doit pas être assimilée ou confondue avec les traces qu'ils en donnent à voir par leur pratique notamment au sein des phases d'actions et de formulations. Dans certains contextes de l'enseignement spécialisé cette différence entre les traces de l'activité des élèves et leurs connaissances peut être accentuée pour plusieurs raisons :

- certains élèves ne révèlent qu'une petite partie de leurs connaissances pour éviter de prendre le risque d'une trop grande exposition à l'échec, ceci pouvant conduire l'enseignant à une sous évaluation de leurs capacités,
- d'autres ne sont pas à même de produire les signes nécessaires à la restitution de leurs connaissances (c'est le cas particulièrement avec les élèves souffrant de troubles sévères du langage),
- enfin certains élèves manifestent un grand nombre de connaissances "en vrac" dont une faible partie est appropriée à la situation ce qui rend l'évaluation difficile pour l'enseignant.

I - 2.3 La question de la formation des enseignants

Pour terminer ce panorama de l'environnement didactique propre à l'enseignement spécialisé, nous tenons à apporter quelques informations actualisées sur la formation des enseignants spécialisés puisque c'est un terrain que nous utiliserons également dans la troisième partie de cette thèse.

Depuis 2004, la formation initiale a été réformée pour les enseignants spécialisés du premier degré qui doivent désormais obtenir le diplôme du CAPA-SH⁸. Ce certificat d'aptitude est décerné après un examen se situant à l'issue d'une formation en alternance pendant laquelle ils restent titulaires et en fonction sur leur poste, et effectuent des temps de formation en IUFM (ou à l'INS-HEA⁹). Cette formation, qui durait une année complète dans le système qui lui précédait, n'est depuis 2004 que de 400 heures environ, soit quatre périodes de trois semaines. Elle est définie par un cadrage national au sein d'un cahier des charges mais elle est mise en

⁸ Certificat d'aptitude professionnel pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap, création dans la Circulaire n° 2004-221 du 8-12-2004

⁹ Institut national supérieur de formation et de recherche pour l'éducation des jeunes handicapés et les enseignements adaptés (ancienne dénomination : CNEFEI).

œuvre dans des plans de formation élaborés dans les structures de formation, ces plans devant tous être validés par le ministère. Cette formation en alternance considère que le temps d'exercice est un temps formatif de "*pratique réfléchie, accompagnée et suivie*" comme le précise le cahier des charges. L'enjeu est de réussir une articulation permettant aux enseignants d'accéder à un haut niveau de formation et aux élèves de continuer à apprendre dans de bonnes conditions.

Un référentiel de compétences des enseignants spécialisés complète le schéma général, il permet le cadrage de leur évaluation au moment de l'examen. Ce dernier consiste à conduire un temps de classe devant jury, suivi d'un entretien portant sur l'exercice professionnel, puis à soutenir un mémoire.

Depuis la circulaire de 2004 pré-citée, le même dispositif existe à destination des enseignants du second degré : le 2CA-SH¹⁰. La formation ne se déroule cependant que sur 150 heures, mais les modalités de l'examen sont similaires à ceux du CAPA-SH. Cette formation initiale pour les enseignants de collège et de lycée, se situe dans une suite relativement logique à la création des unités pédagogiques d'intégration (2001) dont nous reparlerons plus loin. A la différence du CAPA-SH en premier degré, elle ne permet pas aux enseignants d'être titulaires d'un poste spécialisé puisqu'il n'en existe pas ou très peu. L'objectif est de constituer progressivement un réseau de professeurs référents au sein des établissements, des professeurs à même de conseiller leurs collègues dans le cadre de l'application de la loi de février 2005 par exemple.

Pour ces deux qualifications (premier et second degré) les formations sont optionnelles en fonction du handicap des élèves ou du contexte d'enseignement :

- option A : enseignement et aide pédagogique aux élèves sourds ou malentendants
- option B : enseignement et aide pédagogique aux élèves aveugles ou malvoyants
- option C : enseignement et aide pédagogique aux élèves présentant une déficience motrice grave ou un trouble de la santé évoluant sur une longue période et/ou invalidant
- option D : enseignement et aide pédagogique aux élèves présentant des troubles importants des fonctions cognitives
- option E : aides spécialisées à dominante pédagogique (premier degré seulement)
- option F : enseignement et aide pédagogique auprès des élèves des établissements et sections d'enseignement général et professionnel adapté
- option G : aides spécialisées à dominante rééducatives (premier degré seulement)

¹⁰ Certificat complémentaire pour les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap.

Pour les enseignants du premier degré, il existe un plan de formation continue spécialisée au sein des inspections de circonscriptions ASH. Il concerne les enseignants qui en dépendent, ce qui n'est malheureusement pas le cas de tous (les professeurs des écoles spécialisés exerçant en classe d'intégration scolaire n'en font par exemple curieusement pas partie). La formation didactique est davantage insérée dans ces plans de formation continue que lors de la formation initiale, mais il n'existe pas de cadrage horaire commun ni de contenu pré-défini.

Malgré la diversité et la richesse de chacun de ces dispositifs de formation (initiale et continue), le nombre d'enseignants spécialisés est encore insuffisant pour couvrir l'ensemble des postes qui leur sont réservés. Ceci conduit de nombreux jeunes enseignants débutants non formés à exercer dans les classes ou des dispositifs qui nécessitent pourtant une pratique expérimentée du métier. L'une des explications possibles à ce phénomène, est l'inadéquation des temps de formation à la complexité de la situation d'enseignement dans le contexte de l'adaptation et la scolarisation des élèves en situation de handicap.

I – 3 Dimension expérimentale et adaptation dans l'enseignement des mathématiques

Le contexte de l'enseignement spécialisé soulève un grand nombre de questions didactiques et pédagogiques comme nous venons de l'appréhender dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre. Que ce soit sur le plan institutionnel ou sur celui de l'environnement didactique, il apparaît une complexité supplémentaire dans le processus enseigner / apprendre par rapport à l'enseignement ordinaire. Une complexité due aux récentes politiques de scolarisation développées en France, aux difficultés d'exercice du métier d'enseignant dans ce contexte, aux résistances à l'apprentissage spécifiques des élèves en difficulté ou en situation de handicap, mais aussi à un dispositif de formation des enseignants qui semble encore inadapté.

Nous avons remarqué à plusieurs reprises que la notion d'adaptation des enseignements est très présente dans les textes institutionnels. Elle est souvent citée comme un incontournable dans l'exercice du métier d'enseignant en contexte spécialisé comme en témoigne l'extrait du bulletin officiel suivant (B.O. spécial n° 4 du 26 février 2004).

Principes généraux du référentiel de compétences d'un enseignant spécialisé :

L'enseignant spécialisé exerce auprès d'élèves présentant des besoins éducatifs particuliers liés à une situation de handicap, une maladie ou des difficultés scolaires graves, en recherchant pour chacun d'eux les conditions optimales d'accès aux apprentissages scolaires et sociaux, dans des contextes professionnels variés.

Il met en œuvre des pratiques pédagogiques différenciées et adaptées aux besoins particuliers des élèves, au sein d'une équipe pluri-catégorielle, en prenant en compte les données de l'environnement scolaire, familial et social des élèves.

Il contribue, avec les autres enseignants, à identifier les besoins éducatifs particuliers de certains élèves et favorise autant que possible la mise en œuvre dans les classes d'actions pédagogiques différenciées et adaptées permettant d'y répondre.

Il participe à l'élaboration progressive et adaptée du parcours scolaire des élèves.

Cette notion d'adaptation représente une volonté d'adéquation entre les connaissances (et compétences) des élèves avec un projet d'enseignement, ce qui nous semble conforme avec le modèle de la théorie des situations didactiques que nous utilisons.

En conséquence, dans ce paragraphe, nous souhaitons développer la conjecture suivante : la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques par la mise en œuvre d'un milieu de type laboratoire est une adaptation de l'enseignement pertinente dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Nous définirons dans un premier temps ce que nous entendons par *adaptation*, puis nous reviendrons sur le milieu laboratoire afin d'en analyser sa pertinence.

Nous essaierons alors de montrer en quoi une situation dite "de recherche" (telle celle des solides de Platon) peut être assimilée à une forme d'adaptation de l'enseignement. Il s'agit dans ce contexte d'une adaptation opérée par l'enseignant en terme d'ajustement pédagogique et didactique aux difficultés de ses élèves quant à la prise en charge des apprentissages mathématiques. C'est en effet une difficulté récurrente bien repérée dans des démarches d'enseignement de type constructivistes (Peix et Tisseron, 2002). Afin de donner à ces situations de recherche une réelle consistance en terme d'aménagement à des troubles spécifiques, l'enseignant devra alors choisir d'insister sur l'une ou l'autre des caractéristiques qui en font à la fois l'intérêt et l'adaptation.

I - 3.1 Qu'est-ce qu'une adaptation de l'enseignement

La définition du petit Robert du verbe adapter (du latin *adaptare* "ajuster à") donne deux sens à cette action; celle de réunir (de joindre, de rattacher) et celle d'approprier (d'aménager, d'accorder). Une question pédagogique relativement dichotomique est dès lors posée à l'enseignant : doit-il adapter son enseignement ou plutôt s'adapter aux difficultés d'apprentissages de ses élèves ? Adapter relevant d'une intention du professeur, s'adapter renvoyant plutôt au sujet en cours d'apprentissage se trouvant en situation de difficulté, une sorte "d'opération de survie" lui étant nécessaire pour avancer. La relation enseignement / apprentissage n'est jamais en sens unique, l'adaptation s'inscrit par conséquent dans un

processus de médiation au service de l'appropriation des objets de la situation. Un rapport dialectique qui est proche de celui que nous avons décrit dans la première partie de notre travail, une relation au service des liens qui unissent ses deux pôles.

Dans la terminologie actuelle concernant le handicap, on ne désigne plus l'élève comme une "*personne handicapée*" mais comme un sujet en "*situation de handicap*". Le mot *situation* dont il est ici question peut être assimilé au milieu comme un environnement au sens de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) dans ses dimensions matérielles, symboliques et humaines. Les paramètres qui le constituent sont autant de variables qui permettent l'aménagement, l'adaptation en évitant les ruptures et les déséquilibres.

Enfin, adapter est un processus qui intègre une phase de re-médiation entre sujets et objets d'apprentissage qui fait suite à une évaluation diagnostique. Cette nouvelle médiation peut alors être assimilée à un détour (Héraud et Prouchet, 1999) comportant des caractéristiques essentielles :

- le détour "prend plus de temps", il y a donc allongement du temps didactique (Chevallard, 1991) afin de ne pas désynchroniser l'enseignement de l'apprentissage,
- il ne se fait pas en autonomie complète mais relève d'un accompagnement sous la forme d'un étayage évitant les découragements et maintenant une activité cohérente,
- enfin, le détour doit proposer un nouvel "itinéraire" tout en veillant bien à rejoindre le "chemin principal" in fine, il ne s'agit pas de *refaire faire* à l'identique mais de proposer des démarches et des outils permettant de construire les connaissances qui sont attendues dans le cadre du savoir qui est en jeu.

Cette notion de détour pédagogique nécessite la création d'un modèle de milieu didactique particulier permettant sa réalisation. Nous essaierons de montrer que le modèle que nous avons proposé intègre les finalités de l'adaptation pédagogique grâce au recours à des éléments relevant de la didactique des mathématiques.

I - 3.2 Un milieu pour l'adaptation des enseignements

Avant de procéder à la confrontation à la réalité de la classe dans notre prochain chapitre, nous souhaitons tester la conformité de notre modèle de milieu laboratoire à la nécessaire adaptation dont il est question dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Comme nous l'avons évoqué auparavant, l'emploi de la terminologie du *biotope* a deux intérêts principaux : elle consiste à la recherche d'une stabilité de la situation didactique, et à la problématisation des difficultés rencontrées dans l'enseignement et l'apprentissage. Rappelons aussi l'intérêt du modèle dans le rapport à l'enseignement spécialisé, puisqu'il permet de considérer la question de l'élève en difficulté comme un problème didactique. Enfin, notons encore que ce modèle est fortement ancré dans celui du milieu expérimental a priori (Bloch, 2002).

Nous faisons l'hypothèse que ce modèle est approprié à la notion d'adaptation pour trois raisons principales formulées comme des conjectures que nous mettrons à l'épreuve.

§ *conjecture n°1 : l'analyse des constituants du milieu expérimental a priori permet de faire un diagnostic nécessaire à l'adaptation du savoir aux connaissances des élèves*

La situation de recherche concernant les solides de Platon a été conduite à plusieurs reprises en formation continue et en formation initiale (Dias et Durand-Guerrier, 2005) comme nous le verrons dans le prochain chapitre. A chacune de ces sessions il a été proposé aux enseignants une réflexion épistémologique sur les objets mathématiques en jeu dans la situation. Ce "détour" par des connaissances épistémologiques *a priori*, première caractéristique du milieu expérimental, nous semble constituer une forme d'adaptation dans la conception d'une situation d'apprentissage. Il s'agit en effet d'un ajustement nécessaire entre un savoir et les connaissances de l'enseignant. Cette forme d'articulation représente un investissement de temps non négligeable qui ne peut pas rendre cette démarche systématique, mais qui peut permettre une mise au point (au sens photographique de *rendre plus clair, plus net*). En effet, bon nombre des savoirs ne sont pas transparents (dans leurs énoncés, leurs définitions), pas davantage pour les élèves que pour le professeur. Le détour épistémologique et culturel permet cette clarification puisqu'il donne l'occasion aux enseignants d'appréhender la dimension historique qui peut notamment révéler les obstacles à la découverte de ce savoir. C'est aussi bien souvent le moment de retrouver les liens qui ancrent les objets mathématiques dans la réalité au cours de la résolution d'un problème. Il est alors plus efficace de concevoir une situation d'apprentissage adaptée à la fois aux compétences et connaissances des élèves. Cependant la complexité relative de cette démarche nécessite que la formation d'enseignants prenne en charge la présentation et l'argumentation de cette posture particulière représentée par le détour épistémologique.

Ces connaissances épistémologiques et culturelles permettent un choix de variables lors de la conception de la situation d'apprentissage et des "jeux" correspondants à la mise en actes des connaissances. Elles permettent une adaptation aux contextes qui sont susceptibles d'enrôler les élèves dans la tâche, elles sont également propices à fournir des éléments clés pour l'analyse des situations d'enseignement (leur dévolution, leur contrôle, leur observation).

Enfin, l'analyse a priori des constituants du milieu consiste aussi à faire une étude sémiotique des signes et symboles qui sont les expressions du savoir, du jeu possible de leurs interprétants, et donc des processus de signification permettant d'accéder aux objets qu'ils représentent. Il s'agit encore d'une adaptation puisque c'est la recherche des éléments permettant la communication pertinente dans la construction des connaissances.

§ *conjecture n°2 : le choix de la démarche d'investigation met en œuvre un processus de médiation pouvant permettre des "détours"*

Une deuxième caractéristique d'un milieu tel que nous l'avons décrit, concerne le choix d'une démarche d'investigation pour la mise en œuvre de la situation. Cette démarche propose avant tout une médiation particulière entre sujets et objets dans la situation, une médiation renforcée grâce à la présence simultanée de trois dimensions. La première est la dimension sémantique, celle qui permet le discours cohérent entre les acteurs sur les objets de savoir. Une dimension dans laquelle s'effectue le dialogue entre les joueurs et avec le professeur. L'adaptation consiste en une prise en compte de cette dimension du sens qui met en relation le langage et les objets dont il parle. Il est tout à fait essentiel de faire comprendre par exemple que c'est l'indétermination des mots que les élèves utilisent dans la construction des objets de savoirs par définition problématiques sur laquelle on peut s'appuyer (Durand Guerrier et *al*, 2005). C'est seulement ainsi que les discours autorisés ne seront pas canalisés ni contraints dans une forme imposée a priori aux élèves.

Deux autres dimensions sont présentes dans les interactions suscitées par une situation de recherche. La dimension syntaxique, qui est représentée par la "théorie" que chaque acteur possède a priori sur les objets et les phénomènes associés à leur mise en mots et en actes. Des conflits naissants de la confrontation de ces "théories" sont alors à l'origine de la formulation de questions voire de véritables problématiques pouvant être assimilées à des hypothèses ou des conjectures. Enfin, la troisième dimension est pragmatique, elle est abordée dans une phase expérimentale fortement contextualisée où chaque joueur peut ou non modifier son propre rapport aux savoirs et connaissances.

La dernière caractéristique de type adaptative et susceptible de correspondre à une adaptation réside dans les différents statuts et rôles qui sont donnés aux élèves dans une situation de recherche. La possibilité d'être tour à tour joueur (action) et chercheur (formulation, validation) est un élément clé dans cette démarche d'enseignement. Elle doit permettre d'enrôler dans la tâche par le jeu qu'elle propose, et notamment grâce à l'indétermination provisoire des mots utilisés dans le problème proposé ou des faits soumis à l'observation critique. La dévolution du problème posé va progressivement entraîner un changement de rôle des joueurs qui deviennent alors des apprentis chercheurs (Arsac et Mante, 2007). Dans ce moment didactique ils peuvent faire référence à des théories, formuler des conjectures. Une phase d'action de type expérimentale lui est intimement associée, les chercheurs sont aussi des acteurs de l'expérimentation. Ce rôle entraîne le développement de projets d'explications et de communications utilisant des procédés argumentatifs plus ou moins élaborés.

§ *conjecture n°3 : Proposer des outils de modélisation permet un étayage pour la mise en actes des connaissances des élèves*

L'une des caractéristiques du milieu expérimental réside dans la mise à disposition des "acteurs" d'outils de modélisation dans la situation. Ces outils pouvant être symboliques ou matériels selon le problème à résoudre, ils peuvent être qualifiés d'instruments comme on l'a vu auparavant. Les différentes modélisations sont alors autant de confrontations à une réalité construite dans la création de phénomènes et comme essais de réponse aux problématiques et autres conjectures émises. Il s'agit là du paramètre essentiel en terme d'adaptation. En effet, s'il est bien admis que la modélisation est une phase importante dans le processus de résolution de problème (et plus largement dans celui du raisonnement), la possibilité d'utiliser des outils pour favoriser cette construction de modèles est un aménagement didactique nécessaire pour des élèves en difficulté.

Cette médiation de type instrumentale est un véritable étayage puisqu'elle paraît particulièrement adaptée aux élèves en difficultés durables ou en situation de handicap qui ont besoin d'un renforcement des conditions de leur développement et de leurs apprentissages.

Nous proposons dans le chapitre suivant de mettre à l'épreuve nos conjectures en les confrontant à la réalité d'une classe de l'enseignement spécialisé. Nous proposons la mise en œuvre de la situation de recherche des polyèdres réguliers grâce à la constitution d'un milieu de type laboratoire.

chapitre II – Confrontation à la réalité de la classe (1)

Ce chapitre inaugure plusieurs analyses sur la mise en œuvre de la situation de recherche des polyèdres réguliers. Nous le faisons d'abord dans le contexte scolaire puis dans celui de la formation comme il en est question dans la troisième partie de cette thèse. Nous avons souhaité mener une première expérimentation sur un terrain bien spécifique celui d'une unité pédagogique d'intégration en collège, dans un contexte qui l'est déjà (celui de l'enseignement spécialisé) comme nous l'avons présenté en chapitre I.

Dans un premier temps, nous donnons toutes les informations permettant d'argumenter ces choix de contexte institutionnel d'enseignement, et de terrain d'étude. L'objectif est de montrer en quoi les difficultés d'enseignement et d'apprentissage relatives à ces environnements sont pertinentes dans le cadre de notre recherche sur la dimension expérimentale des mathématiques. Nous présentons également notre dispositif de recueil de données ainsi que les raisons didactiques et pédagogiques qui nous ont permis de faire ces choix d'observation.

La troisième partie du chapitre est consacrée à la présentation de toutes les variables choisies pour la situation, qu'elles soient matérielles, pédagogiques et didactiques. Elle permet ensuite d'exposer les premiers commentaires descriptifs de sa mise en œuvre selon un plan chronologique en séances d'enseignement.

Nous terminons par une analyse critériée servant d'évaluation de cette première expérimentation en regard des conjectures et hypothèses émises dans les premières parties de cette thèse. Il y est question de la place et du rôle des objets, d'expérimentation et de démarche d'investigation, de la notion de milieu antagoniste et de la médiation sémiotique. Il sera alors temps d'énoncer quelques premiers résultats dont nous chercherons la consistance par une deuxième confrontation à la réalité de la classe dans le troisième et dernier chapitre de cette partie de la thèse.

II – 1 Un contexte spécifique : l'UPI TSL

II - 1.1 À propos du dispositif : Unité Pédagogique d'Intégration

Depuis plusieurs années les politiques éducatives françaises privilégient la notion d'intégration scolaire dans le cadre de l'accueil des élèves en situation de handicap. Cette orientation relève d'une logique de parcours en lieu et place d'une logique plus traditionnelle de filières représentées par le développement de structures et d'établissements d'enseignement spécialisé. Dans le même temps, il est néanmoins apparu nécessaire de résoudre l'équation : à trouble spécifique, environnement d'apprentissage et processus d'enseignement particulier. Dans l'esprit de la création des classes d'intégration spécifiques (CLIS) pour le premier degré, la mise en place de dispositifs pour le second degré a été décidée et accompagnée d'une circulaire¹¹ parue au bulletin officiel en 1995. Il s'agissait alors d'*accueillir des préadolescents ou des adolescents présentant différentes formes de handicap mental qui peuvent tirer profit, en milieu scolaire ordinaire, d'une scolarité adaptée à leur âge et à leurs capacités, à la nature et à l'importance de leur handicap*. Il n'était alors pas encore question de regrouper des élèves présentant les mêmes troubles.

Ce texte a été complété en mars 2001 par une nouvelle circulaire parue au Bulletin Officiel¹² et concernant la création de nouvelles UPI en collège et en lycée *au bénéfice d'élèves présentant des déficiences sensorielles ou motrices*. L'organisation et le fonctionnement de ces UPI doivent dès lors s'adapter *aux particularités de chaque déficience, grâce à l'aménagement des lieux d'accueil et en lien étroit avec les services d'éducation ou de soins ou avec les personnels médicaux et paramédicaux exerçant en libéral*.

Les UPI sont des dispositifs pédagogiques d'appui à la scolarisation des adolescents handicapés dans l'enseignement secondaire. Elles accueillent des élèves dont le handicap ne permet pas d'envisager une scolarisation individuelle continue dans une classe ordinaire mais pouvant bénéficier, dans le cadre d'un établissement scolaire, d'une forme adaptée de scolarisation. Elles sont différenciées par type de handicap. Les UPI orientées vers les handicaps mentaux sont implantées actuellement surtout dans les collèges, mais elles peuvent également être implantées dans les lycées. Pour ce qui est des autres handicaps, sensoriels en particulier, il existe des structures d'appui à l'intégration scolaire depuis plus longtemps, en

¹¹ Circulaire n° 95-125 du 17 mai 1995 : Mise en place de dispositifs permettant des regroupements pédagogiques d'adolescents présentant un handicap mental : les Unités Pédagogiques d'Intégration. (B.O n° 21 du 25 mai 1995)

¹² Bulletin Officiel du ministère de l'Education Nationale et du ministère de la Recherche N°9 du 1er mars 2001
Scolarisation des élèves handicapés dans les établissements du second degré et développement des unités pédagogiques d'intégration (UPI)

général avec des moyens différents de ceux prévus par la réglementation actuelle des UPI pour ces types de handicap.

Il existe quatre catégories d'UPI destinées à accueillir des jeunes atteints, d'un handicap mental (UPI 1), d'un handicap auditif (UPI 2), d'un handicap visuel (UPI 3) ou d'un handicap moteur (UPI 4). Ainsi ont été créées par exemple pour le seul département du Rhône 51 dispositifs UPI accueillant en tout environ 500 élèves.

désignation	nature du handicap	nombre de dispositifs
UPI TSL	troubles spécifiques du langage	5
UPI 3	aveugles ou mal voyants	1
UPI 4	déficience motrice grave ou trouble de la santé	2
UPI TDP	troubles de la personnalité	6
UPI 1	déficience mentale LP	7
UPI 1	déficience mentale lycée	1
UPI 1	déficience mentale	22
UPI	établissements privés	7

tableau 10 : répartition des UPI du département du Rhône, chiffres : mai 2008

II - 1.2 À propos des troubles spécifiques du langage

Les troubles spécifiques du langage¹³ oral et écrit peuvent être définis comme une perturbation durable (non limitée à l'enfance et à l'adolescence) et significative de la structuration du langage. Elle se manifeste chez un enfant normalement intelligent, qui entend et qui voit bien, et qui n'a pas d'autre pathologie neurologique gênant la communication orale. L'origine de ces troubles est supposée développementale et donc indépendante de l'environnement socio-culturel.

Ces troubles interfèrent avec les capacités de communication de l'enfant et de surcroît avec ses possibilités d'apprentissage. Les conséquences sont nombreuses concernant l'apprentissage du langage écrit, dans la scolarité puis dans la vie sociale.

Ces pathologies doivent être connues et reconnues des enseignants et ce d'autant plus qu'elles sont par définition, durables : les implications pédagogiques devront être constantes et les

¹³ Les troubles spécifiques du langage regroupent les troubles spécifiques du développement du langage oral (retards de parole et de langage, dysphasies) et les troubles spécifiques du développement du langage écrit (dyslexies).

adaptations nécessaires tout au long de la scolarité de l'enfant. Une circulaire¹⁴ ministérielle existe donc à cette intention; elle situe ces troubles spécifiques *dans l'ensemble plus vaste des troubles spécifiques des apprentissages qui comportent aussi les dyscalculies (troubles des fonctions logico-mathématiques), les dyspraxies (troubles de l'acquisition de la coordination) et les troubles attentionnels avec ou sans hyperactivité.*

La classification de ces pathologies au sein de l'ensemble plus vaste des *troubles des apprentissages* n'est pas sans poser un certain nombre de questions. On peut notamment citer celle de la possibilité réelle d'établir un diagnostic fiable et pertinent avec des élèves ayant développé de nombreux troubles associés au cours de leur cursus scolaire. Les données scientifiques actuelles (INSERM, 2007) sont certes très fournies car relevant d'un nombre considérables de travaux de recherche et d'observation, mais la prudence est toujours de mise quant aux différents protocoles diagnostiques du fait notamment de la pluralité internationale des démarches dans ce domaine. Cependant, il est admis une définition désormais consensuelle de la terminologie "trouble spécifique des apprentissages" :

[...] malgré toutes les adaptations des programmes et progressions, et malgré les aménagements de dispositifs d'enseignement, les difficultés « normales », généralement surmontées par la plupart des apprenants apparaissent insurmontables pour une partie d'entre eux, au moins à un moment donné du cursus et dans le cadre d'une organisation définie de l'apprentissage. Les difficultés durablement non surmontées par certains font qu'ils s'écartent du niveau de réussite attendu (ou prescrit) des apprenants relativement à un ou plusieurs domaines à une période définie du cursus. Cet écart conduit à s'interroger sur ce qui le détermine. Plusieurs facteurs doivent être envisagés : carences éducatives, irrégularité de la scolarisation, qualité de l'enseignement reçu, existence de troubles sensoriels ou neurologiques, niveau de motivation, retard général de développement. Lorsque ces diverses éventualités ont pu être écartées, on peut alors parler de trouble spécifique des apprentissages. (INSERM, 2007, p4)

Concernant l'apprentissage des notions mathématiques, il nous semble important de poser la question de l'accès aux connaissances dans le cas des élèves présentant des troubles spécifiques du langage tant nos démarches d'enseignement privilégient justement le langage dans les processus d'acquisition. Le recours à des situations mathématiques nous semble relever d'un certain détour, d'une possible adaptation. En effet, cette discipline n'est pas identifiée par les élèves comme *responsable* de leur difficulté.

¹⁴ CIRCULAIRE N°DGS/SD6D/MEN/2002/68 du 4 février 2002 relative à la mise en œuvre d'un plan d'action pour les enfants atteints d'un trouble spécifique du langage oral ou écrit

II – 2 Présentation du terrain d'observation

II - 2.1 Eléments du contexte d'enseignement

Ce qui suit s'appuie sur une expérimentation d'une unité pédagogique d'intégration pour élèves présentant des troubles spécifiques du langage (UPI-TSL) qui a été créée en septembre 2004, il s'agit d'une première année de fonctionnement lors de l'expérimentation de notre recherche. La structure est sous la responsabilité pédagogique d'une circonscription et d'un inspecteur de l'éducation nationale ASH (Adaptation et Scolarisation des élèves Handicapés) du premier degré. L'enseignante professeur des écoles qui en est responsable est expérimentée mais exerce dans ce contexte spécifique pour la première année. Elle a sollicité une année de formation spécialisée qu'elle a obtenue après entretien en vue de l'obtention du diplôme (CAPA-SH¹⁵ pour l'année 2004-2005).

Le collège est situé en zone d'éducation prioritaire (ZEP) dans le quartier des Minguettes à Vénissieux (Rhône) et fait partie des établissements relevant du plan de "lutte contre la violence". Il comporte 660 élèves (données de 2004) qui proviennent des écoles du même secteur. Il intègre également deux classes d'accueil (CLA) pour des élèves nouvellement arrivés en France (ENAF).

Les raisons du choix de ce terrain d'étude sont diverses. Il s'agit en premier lieu de mener une recherche avec des élèves de collège présentant des difficultés de nature à perturber les apprentissages afin de tester la consistance de notre situation didactique. Un tel contexte n'exclue d'ailleurs pas l'analyse des répercussions dans des cursus d'enseignement tout à fait "ordinaires", ce que nous essaierons de faire à la fin de cette thèse. Une deuxième raison concerne la relative homogénéité de la situation reconnue de handicap des élèves diagnostiquée en amont par des structures compétentes. Il est ainsi plus pertinent d'envisager les éventuelles répercussions à la fois sur la démarche d'apprentissage et sur la stratégie d'enseignement.

La reconnaissance de ces troubles spécifiques du langage est relativement récente. De ce fait cette situation innovante et "expérimentale" s'accompagne de nombreux travaux de recherche qui sont autant de garanties référentes pour accompagner l'analyse de la recherche (INSERM, 2008, Delahaie, 2004, Dumont, 2003, Van Hout et Meljac, 2001, Habib, 1997).

Enfin, il nous a été possible de prendre appui sur une bonne évaluation diagnostique (évaluation nationale d'entrée en sixième) et sur un très bon suivi des élèves du fait de l'organisation de la classe par l'enseignante. Une enseignante qui est très impliquée tant pédagogiquement que didactiquement et inscrite dans un processus de formation continue sur

¹⁵ Certificat d'aptitude professionnelle pour les aides spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de handicap.

les situations de recherche en mathématiques. Pour terminer, les conditions matérielles pour le recueil des données s'est avéré déterminant : effectif de la classe permettant des enregistrements audio et vidéo de bonne qualité (un accord écrit a été demandé et obtenu auprès de chaque famille concernée).

II - 2.2 Elèves et apprentissages

L'unité pédagogique concerne dix élèves tous orientés par la commission départementale de l'éducation spéciale (CDES¹⁶) car présentant des troubles spécifiques du langage reconnus (dyslexie, dysphasie, troubles associés). Cinq d'entre eux ont fait l'objet d'une confirmation de cette situation de handicap par un bilan effectué dans un centre de référence hospitalier. Ces élèves ont d'importantes difficultés dans l'utilisation de la langue tant à l'écrit qu'à l'oral. Ils souffrent pour la plupart d'un manque flagrant dans leurs capacités mnésiques et ont beaucoup de peine à organiser leur travail. C'est l'ensemble de ces difficultés qui détermine leur situation de handicap et qui nécessite un processus de scolarisation adapté au sein d'un établissement du second degré compte tenu de leur âge.

Conformément aux textes institutionnels, les élèves regroupés dans l'UPI sont par ailleurs intégrés dans deux classes de sixième et une de cinquième du même collège; ce sont leurs classes de référence. Ils y effectuent un nombre d'heures variable selon leur projet de scolarisation. Les temps d'intégration en cours de mathématiques sont eux aussi diversifiés selon les projets individualisés des élèves (certains sont intégrés partiellement d'autres complètement). Ces temps de scolarisation ordinaires peuvent varier dans le courant de l'année en fonction des évolutions de chaque situation individuelle conformément au projet défini par l'enseignante en accord avec l'équipe enseignante des classes référentes.

Les élèves de sixième ont tous 13 ans et ceux de cinquième 14 ans. Quatre élèves du groupe accusent un retard scolaire d'une année en conséquence d'un redoublement en école élémentaire.

¹⁶ Commission remplacée par la CDAPH (commission pour les droits et l'autonomie de la personne handicapée) par la loi de février 2005 sus-citée.

élèves	temps de présence en UPI	temps d'intégration en cours de mathématiques	temps d'intégration global
Je	10 h	4 h	14 h
Pa	7 h	4 h	17 h
Ma	4	4	20
Zi	8	1	16
Ni	4 h à 7 h	4 h	17 h à 20 h
Da	4 h à 7 h	4 h	17 h à 20 h
Al	4 h à 7 h	4 h	17 h à 20 h
Ga	4 h à 5 h	4 h	19 h à 20 h
Cha	4 h à 5 h	4 h	19 h à 20 h
Chz	5 h	4 h dont 1 accompagnée	19 h

tableau 11 : temps d'intégration des élèves de l'UPI

Ce dispositif d'intégration permet seulement quelques temps réduits de présence de l'ensemble des élèves au sein de l'UPI du fait des emplois du temps individualisés. Ces regroupements permettent un travail en profondeur sur la méthodologie, les techniques de mémorisation, le repérage dans le temps et les règles de vie au sein du collège. Certains temps d'intégration sont utilisés comme un temps d'accompagnement en cours ordinaire par l'enseignante de l'UPI en accord avec le professeur de la discipline concernée. Cette organisation a pu être possible grâce à la présence d'une auxiliaire de vie scolaire travaillant dans le dispositif sous la responsabilité de l'enseignante professeur des écoles.

§ *Résultats à l'évaluation d'entrée en sixième :*

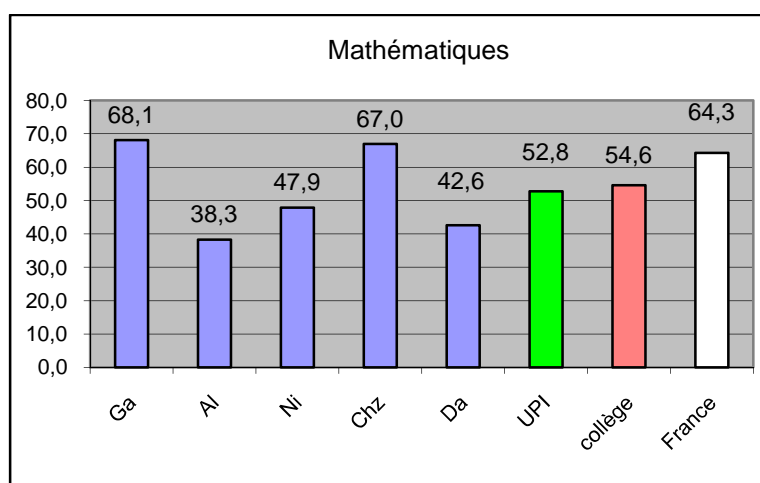
L'enseignante de la classe a choisi d'adapter les conditions de déroulement des évaluations d'entrée en sixième afin de tenir compte des difficultés des élèves provoquées par leur situation de handicap : durée des épreuves, aide à la lecture et à la compréhension des consignes, format des supports de travail. Sans ces aménagements les résultats ne donneraient en effet aucune information sur leurs connaissances ces élèves qui sont presque non lecteurs, ou en très grande difficulté de compréhension et mémorisation. Cette évaluation ne concerne que les 6 élèves de sixième de l'UPI. Nous donnons ci-dessous la présentation des données chiffrées que nous commenterons et détaillerons par la suite.

	Ga	Al	Ni	Chz	Da	UPI	collège	France	écart type
C1. Rechercher l'information, l'interpréter, la reformuler	89,5	63,2	89,5	78,9	52,6	74,7	65,3	71,7	16,4
C2. Produire une réponse, la justifier	50,0	50,0	33,3	41,7	41,7	43,3	40,6	58,6	7,0
C3. Analyser une situation, organiser une démarche	61,5	11,5	30,8	73,1	26,9	40,8	45,4	55,9	25,6
C4. Appliquer directement, utiliser une connaissance	80,0	46,7	40,0	80,0	46,7	58,7	61,9	64,3	19,7
C5. Appliquer une technique	59,1	36,4	45,5	54,5	50,0	49,1	58,7	67,3	8,7
Mathématiques	68,1	38,3	47,9	67,0	42,6	52,8	54,6	64,3	13,9

tableau 12 : résultats des élèves de sixième à l'évaluation d'entrée : pourcentage de réussite

Remarque : par respect des règles de confidentialité, les prénoms des élèves ont été modifiés.

Sur un plan général en mathématiques :



graphique 2 : moyennes des taux de réussite en mathématiques

La moyenne générale de l'UPI est très fortement rehaussée par les scores de deux élèves en particulier. Ces deux élèves ont des résultats nettement supérieurs à ceux de leurs camarades de l'UPI, à ceux du collège mais aussi à ceux du score national. Cet indicateur est confirmé par l'enseignante lors de plusieurs bilans intermédiaires effectués en dehors du protocole national (évaluations conduites en vue d'établir les projets individualisés des élèves).

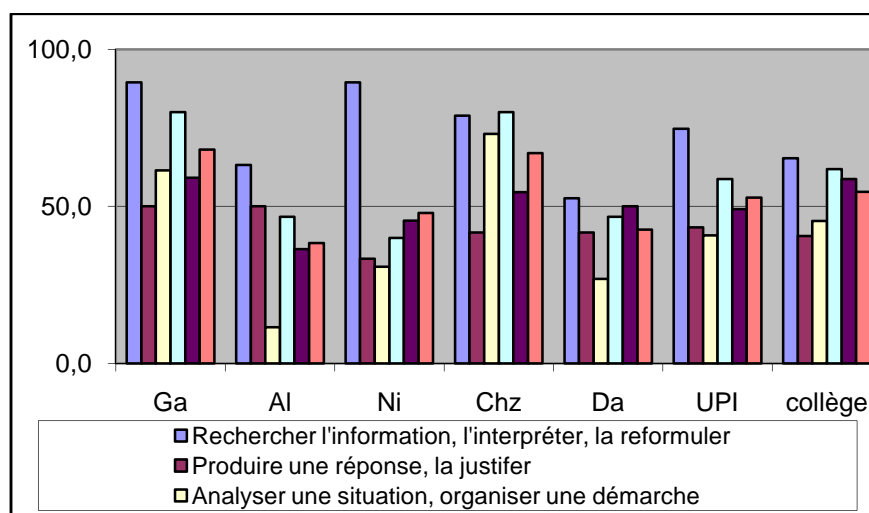
En revanche, les trois autres élèves sont tous en dessous des 50% de réussite, un seuil qui est dépassé par les élèves du collège dont les résultats sont eux-mêmes relativement inférieurs aux scores nationaux.

Un élève de la classe n'a pas suivi ce protocole.

Ces résultats montrent que les difficultés diagnostiquées sur le plan du langage comportent de nombreux troubles associés, notamment dans le champ des apprentissages mathématiques, mais pas forcément.

Bilan par type de capacités ¹⁷ :

Nous souhaitons porter maintenant notre attention sur les résultats plus spécifiques des élèves concernant le champ mathématique en observant le détails des capacités évaluées dans le protocole d'évaluation national proposé, en gardant néanmoins la valeur témoin globale de la réussite en mathématiques. Nous avons aussi choisi de comparer les résultats individuels à la moyenne de l'UPI, mais aussi à ceux plus globaux du collège.



graphique 3 : détails des réussites dans le domaine des mathématiques

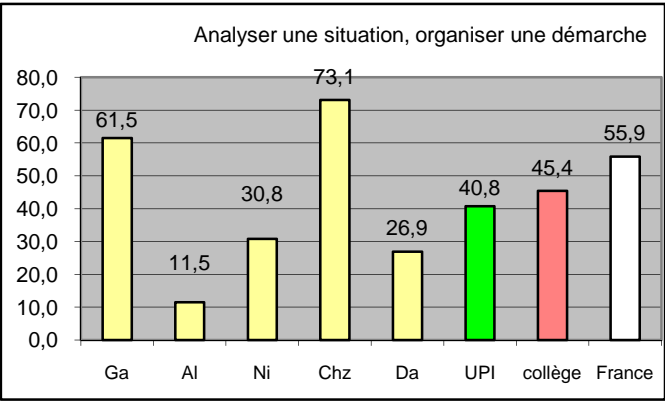
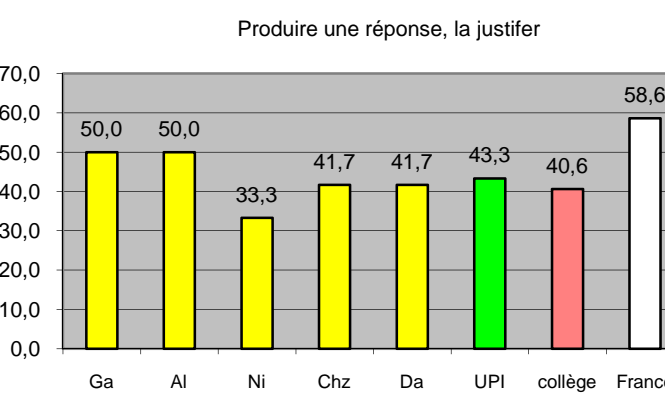
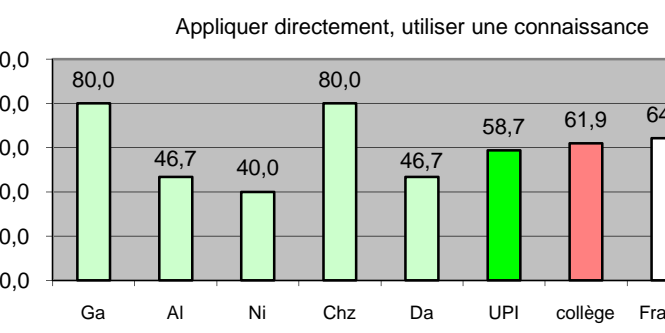
Deux remarques nous paraissent importantes :

- Les deux élèves Ga et Chz ayant de "bons" résultats, marquent leur différence essentiellement sur les capacités 3 et 4 (écart type important).
- Tous les élèves de l'UPI ont des résultats supérieurs à ceux du collège sur la capacité 1, ce que l'enseignante de la classe attribue essentiellement à l'adaptation des conditions de passation des épreuves.

Il nous semble intéressant d'observer plus attentivement les résultats portant sur les capacités 2; 3 et 4 compte tenu de la situation de recherche qui sera proposée aux élèves lors des séances conduites auprès d'eux. La situation comporte en effet des enjeux concernant la capacité à analyser une situation, à organiser des démarches de résolution, mais aussi à

¹⁷ Capacités définies par le document national et rapporté en annexe 1.

produire une présentation voire une argumentation des résultats obtenus. L'aspect relevant de la technique et de l'utilisation d'une connaissance doit aussi pouvoir être observé dans les phases de tâtonnement expérimental (action/réflexion sur le matériel).

Définition des capacités dans le protocole 2004	Résultat par type de capacité : détail																		
<p>Analyser une situation, organiser une démarche : Évaluer ou calculer une durée ; Utiliser des fractions pour construire un segment de longueur donnée ; Reconnaître un ou des axes de symétrie d'une figure plane simple ; Identifier des figures usuelles dans une figure complexe ; Traduire une situation par des fractions simples ; Traiter mentalement des calculs ; Résoudre un problème à étapes ; Déterminer la mesure d'un côté d'une figure connaissant son périmètre et d'autres informations ; Évaluer un ordre de grandeur d'un résultat numérique.</p>	<p style="text-align: center;">Analyser une situation, organiser une démarche</p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th>Group</th> <th>Result (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Ga</td><td>61,5</td></tr> <tr><td>Al</td><td>11,5</td></tr> <tr><td>Ni</td><td>30,8</td></tr> <tr><td>Chz</td><td>73,1</td></tr> <tr><td>Da</td><td>26,9</td></tr> <tr><td>UPI</td><td>40,8</td></tr> <tr><td>collège</td><td>45,4</td></tr> <tr><td>France</td><td>55,9</td></tr> </tbody> </table>	Group	Result (%)	Ga	61,5	Al	11,5	Ni	30,8	Chz	73,1	Da	26,9	UPI	40,8	collège	45,4	France	55,9
Group	Result (%)																		
Ga	61,5																		
Al	11,5																		
Ni	30,8																		
Chz	73,1																		
Da	26,9																		
UPI	40,8																		
collège	45,4																		
France	55,9																		
<p>Produire une réponse, la justifier : Utiliser, dans des cas simples, des fractions pour donner des mesures de longueur ; Utiliser un cercle pour résoudre un problème de distance ; Construire l'image d'une figure par symétrie axiale ; Résoudre un problème pouvant conduire à une division ; Reconnaître un cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point donné ; Décrire une figure en vue de sa construction.</p>	<p style="text-align: center;">Produire une réponse, la justifier</p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th>Group</th> <th>Result (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Ga</td><td>50,0</td></tr> <tr><td>Al</td><td>50,0</td></tr> <tr><td>Ni</td><td>33,3</td></tr> <tr><td>Chz</td><td>41,7</td></tr> <tr><td>Da</td><td>41,7</td></tr> <tr><td>UPI</td><td>43,3</td></tr> <tr><td>collège</td><td>40,6</td></tr> <tr><td>France</td><td>58,6</td></tr> </tbody> </table>	Group	Result (%)	Ga	50,0	Al	50,0	Ni	33,3	Chz	41,7	Da	41,7	UPI	43,3	collège	40,6	France	58,6
Group	Result (%)																		
Ga	50,0																		
Al	50,0																		
Ni	33,3																		
Chz	41,7																		
Da	41,7																		
UPI	43,3																		
collège	40,6																		
France	58,6																		
<p>Appliquer directement, utiliser une connaissance : Traiter mentalement des calculs ; Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée ; Passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire ou inversement ; Comparer des nombres décimaux ; Placer ou lire un nombre sur une droite graduée.</p>	<p style="text-align: center;">Appliquer directement, utiliser une connaissance</p>  <table border="1"> <thead> <tr> <th>Group</th> <th>Result (%)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>Ga</td><td>80,0</td></tr> <tr><td>Al</td><td>46,7</td></tr> <tr><td>Ni</td><td>40,0</td></tr> <tr><td>Chz</td><td>80,0</td></tr> <tr><td>Da</td><td>46,7</td></tr> <tr><td>UPI</td><td>58,7</td></tr> <tr><td>collège</td><td>61,9</td></tr> <tr><td>France</td><td>64,3</td></tr> </tbody> </table>	Group	Result (%)	Ga	80,0	Al	46,7	Ni	40,0	Chz	80,0	Da	46,7	UPI	58,7	collège	61,9	France	64,3
Group	Result (%)																		
Ga	80,0																		
Al	46,7																		
Ni	40,0																		
Chz	80,0																		
Da	46,7																		
UPI	58,7																		
collège	61,9																		
France	64,3																		

graphiques 4 : résultats par type de capacité

L'évaluation portant sur la capacité 3 (analyser une situation, organiser une démarche) montre des écarts très importants entre les élèves. Compte tenu de la situation de recherche que nous nous apprêtons à proposer aux élèves, ces résultats doivent nous alerter sur

l'observation des élèves les plus en difficulté dans ce domaine afin d'apporter l'étayage qui serait nécessaire. Il est cependant reconnu que les handicaps langagiers (type dyslexie) concernent les difficultés d'organisation interne des données, ce qui nous semble en rapport direct avec les capacités à organiser une démarche de résolution de problème par exemple.

Les deux élèves dont les résultats en mathématiques avaient été signalés comme bons montrent des taux de réussite très importants (80%) sur la capacité "appliquer directement, utiliser une connaissance". De ce fait, le décalage avec les résultats des autres élèves de l'UPI soulève quelques interrogations quant à la conduite de notre situation de recherche. Cela nous impose de porter une attention particulière aux prises de parole de ces élèves, afin de garder des espaces d'expression des autres élèves de la classe (espaces déjà réduits du fait de leur handicap). Ce type d'étude différenciée sera menée lors d'une recherche que nous mènerons de 2008 à 2011 dans le cadre d'un projet international présenté en chapitre trois de la dernière partie de cette thèse.

Globalement, ces résultats tendent à confirmer qu'un diagnostic de troubles spécifiques du langage peut se traduire par le développement de difficultés connexes différentes dans le champ des mathématiques. Les capacités de raisonnement et d'organisation de la pensée sont principalement concernées, des troubles sont attendus en contexte de résolution de problèmes. Cette variabilité nous paraît cependant ouvrir des possibilités concernant la remédiation à envisager avec ces élèves à condition de choisir des situations d'apprentissages adaptées. Enfin, compte tenu des relatives bonnes performances des élèves, la discipline des mathématiques nous semble un levier pour notre étude¹⁸. Elle peut en effet apparaître comme un premier élément positif pour le retour de la confiance en leur capacité à comprendre et à apprendre.

II - 2.3 Le dispositif de recueil des données

Les séances que nous allons présenter ont été filmées grâce à une caméra numérique (mini-DV) et enregistrées en format audio avec un appareil de type mini-disc, soit cinq heures d'enregistrement et d'observation en tout dans l'UPI TSL de Vénissieux. L'organisation de la salle de classe n'a pas été modifiée, la disposition des bureaux des élèves permettait un travail en équipe et convenait également à un dispositif d'enseignement plus collectif. Toutes les séances se sont déroulées au sein de la salle de l'UPI du collège. La séquence a été conduite en cinq temps correspondants eux-mêmes à trois séances. Le tout s'est déroulé sur deux matinées distantes d'une semaine.

¹⁸ Les résultats des élèves en français ne sont pas rapportés ici, ils sont très lacunaires mais montrent de grands écarts avec la moyenne du collège en ne dépassant jamais 30 à 40% concernant le taux de réussite.

La première séance a été consacrée à quelques rappels de connaissance sur les polyèdres grâce à la manipulation d'un matériel (type polydrons), le but pour les élèves est de réaliser le plus possible de solides fermés, de les décrire puis d'en proposer un classement argumenté. Cette séance a notamment permis de reconvoquer le vocabulaire de la géométrie dans l'espace au sein d'une situation problématique relativement ouverte. Ce fut aussi l'occasion d'amorcer la mise en mots de quelques notions clés en termes de relations, de propriétés et de classification.

Lors de la deuxième séance, c'est la situation de recherche des solides de Platon qui a été proposée aux élèves. Elle s'est déroulée en deux temps distincts, celui de la résolution de l'énigme par chaque groupe d'élèves, puis celui de la présentation et discussion des résultats. L'objectif principal est alors de stimuler l'activité langagière au titre de l'explication, du débat, de la validation, de l'argumentation et de la confrontation des procédures.

Dans l'organisation de la situation, il est mis à la disposition des élèves du matériel permettant de faire et défaire facilement des solides : polygones en plastique avec procédés d'articulation type *Polydron* ou *Clix*. Les figures proposées comprennent des triangles isocèles, rectangles ou équilatéraux, des rectangles, des losanges et des carrés, ainsi que des pentagones, des hexagones, des heptagones et des octogones réguliers. Sont également proposés règles, compas, ciseaux, équerre pour d'éventuels tracés et constructions en papier. La mise à disposition de l'ensemble du matériel vise à faciliter la production non langagière d'éléments de réponse au problème lors de l'activité de résolution.

La préparation de la séquence a été conduite en collaboration avec l'enseignante de l'UPI.

II – 3 Situation didactique : la recherche des polyèdres réguliers

II – 3.1 Descriptif de la séquence

En amont de cette séquence, l'enseignante avait été amenée à plusieurs reprises à conduire un travail sur le vocabulaire géométrique notamment à propos des figures planes. Il s'agissait alors d'explicitier les concepts abordés en cours de mathématiques dans lequel un certain nombre d'élèves sont intégrés. Le dispositif suivi est alors une forme rituelle au sein de l'UPI lorsque l'on reprend le cours d'après les notes des cahiers des élèves. Un affichage de classe avait été élaboré sur la classification de quelques figures planes (triangles, carré, losange, parallélogrammes), affichage comportant les principales propriétés et éléments distinctifs de ces figures de base.

Deux séances ont aussi été consacrées à la découverte d'un logiciel de géométrie dynamique afin de servir d'appui à la compréhension des notions de propriétés des figures planes. Il

s'agissait essentiellement d'une découverte des possibilités du logiciel en terme de tracé d'une figure selon ses propriétés. Ainsi la fonction "polygone régulier" proposée par le logiciel a-t-elle été expérimentée afin d'illustrer un passage incompris dans un des cours des élèves : "*tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle*".

§ *séance 1*

Organisation

Nous avons proposé deux moments de classe successifs (sixièmes puis cinquièmes) consacrés au rappel de quelques connaissances sur les polyèdres avec phase de manipulation du matériel possible.

Elèves de sixième (6 élèves présents) : 9h à 10h

Elèves de cinquième (4 élèves présents) : 11h à 12h

Objectifs poursuivis par le professeur :

- Commencer à dégager quelques notions clés : en terme de relations, de propriétés et de classification.
- Mettre en œuvre une situation pouvant provoquer des échanges langagiers (de type énonciatifs).

Compétences mise en œuvre par les élèves :

- "Faire fonctionner" le vocabulaire de la géométrie dans l'espace : face, arête, sommet, solide, polyèdre, côté, angle, convexe, concave, volume, plan.
- Découvrir et agir avec un matériel spécifique.

Consignes données et écrites au tableau :

Pour la classe de cinquième, une modification de la consigne a été décidée par l'enseignante suite à la mise en œuvre de cette partie de la séquence avec les élèves de sixième. Ainsi la reformulation de la consigne en une liste en trois étapes a été faite à l'oral et reprise à l'écrit au tableau avec les élèves de cinquième.

1/ pour les élèves de sixième :

Avec le matériel proposé, essayez de construire des solides complètement fermés différents. Attention, il faudra les décrire avec des mots et peut être commencer à les classer en expliquant ses choix.

2/ pour les élèves de cinquièmes:

Avec le matériel proposé, essayez de construire des solides complètement fermés différents.

1. Construire le plus de solides possible.

2. Dire comment on les a construits.
3. Expliquer comment on peut les classer.

Déroulement de chaque séance :

Lecture collective de la consigne : 3 minutes

Temps d'appropriation et d'explicitation : 5 minutes

Recherche : 35 minutes

Mise en commun (portant sur les différentes constructions et leur classement) : 15 minutes

A l'issue de cette séance, il a été demandé aux élèves de dessiner quelques solides qu'ils avaient construits.

§ *séance 2*

Organisation :

Deux séances ont été consacrées à la situation de recherche puis une troisième à la présentation des résultats.

- Recherche avec les élèves de cinquième : 8h à 9h
- Recherche avec les élèves de sixième : 9h à 10h
- Mise en commun et débat avec tous les élèves : 11h à 12h

Variables didactiques :

Pour l'occasion, nous avons choisi une adaptation de la consigne de la situation de recherche en faisant référence à un contexte identifié porteur par la professeure. La présentation est faite sur un parchemin¹⁹.

Le maître du Donjon est un grand sorcier qui jette tout le temps des sorts. Pour cela il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais personne ne sait combien il en cache. Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des polyèdres réguliers.*

Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon en possède ? Vous pouvez utiliser le matériel pour faire des essais de constructions.

¹⁹ voir annexe 2

** Un polyèdre régulier est constitué de plusieurs faces régulières (polygones réguliers : côtés et angles égaux). De plus ces faces doivent être toutes identiques entre elles (même forme et même taille).*

Nous avons délibérément choisi de ne pas faire figurer la condition de l'égalité des degrés des sommets dans la définition des polyèdres réguliers pour deux raisons, l'une est pédagogique et l'autre didactique. L'enseignante estimait que cette information supplémentaire aurait trop enrichi la définition et aurait ainsi rendu sa lecture plus complexe et donc plus difficile. Rappelons en effet que les élèves présentant des troubles sévères du langage possèdent un déficit important sur le plan de la compréhension des énoncés (écrits et oraux) du fait notamment d'un seuil de surcharge cognitif très bas.

Cette condition peut également être envisagée selon nous comme une variable didactique. En effet, la classe des polyèdres constituée des polyèdres dont les faces sont régulières et identiques mais dont les sommets ne sont pas de même degré, ne comporte que cinq objets. Il s'agit des 5 deltaèdres convexes qui ne sont pas des polyèdres réguliers²⁰. Nous faisons l'hypothèse que leur construction est envisageable, surtout pour la bipyramide triangulaire, et qu'elle sera traitée si nécessaire en situation par le débat avec les élèves (avec un éventuel recours à la condition de l'égalité des degrés des sommets si l'argument s'avère nécessaire).

Enfin, nous n'avons pas précisé non plus dans cette forme de la consigne que les objets devaient être convexes. Cette propriété a été considérée comme facultative dans la recherche présente un peu pour les mêmes raisons évoquées précédemment, mais aussi après observation des solides construits lors de la séance 1. En effet, les polyèdres non convexes construits librement se sont avérés très rares dans les productions des deux groupes d'élèves. La convexité restera donc un implicite, du fait notamment de la difficulté d'explicitation de la définition complète (Durand Guerrier et Héraud, 2006).

Déroulement des séances de recherche :

Lecture collective de la consigne : 3 minutes.

Temps d'appropriation et d'explicitation : 5 minutes.

Recherche : environ 35 minutes.

Mise en commun (portant sur la préparation de la communication) : 15 minutes.

Déroulement de la séance de présentation des travaux :

²⁰ Voir l'annexe 3 pour le détail de cette classe de polyèdres.

Chaque groupe présente successivement ses résultats : 2 fois 10 minutes.

Temps de questionnement et de remarques d'un groupe à l'autre.

Débat autour de la solution du problème.

II – 3.2 Observations et premiers commentaires

§ *séance 1 avec les élèves de sixième*

phase de consigne

La consigne écrite au tableau est reformulée sous une forme de liste en trois points. C'est une démarche habituelle de l'enseignante qui correspond à une adaptation souhaitable dans le cadre du handicap des élèves. C'est une reformulation qui utilise le détour d'un écrit organisé favorisant l'entrée visuelle et la trace permanente de la consigne. Elle facilite également l'activité de mémorisation en proposant une organisation sous forme de liste ce qui est conseillé pour les élèves ayant des troubles du langage comme nous l'avons vu précédemment. L'entrée dans l'activité est de ce fait très rapide, il n'y a pas de demande complémentaire par rapport à la consigne. La présence du matériel est sans aucun doute déterminante puisque les élèves s'engagent tout de suite dans des constructions, l'enrichissement du milieu par ces objets semble faciliter la dévolution.

phase de recherches

Dans un premier temps, il n'y a pas d'échanges ou d'interactions langagières, chaque élève semble mener un projet individuel de résolution. C'est une phase d'action au sens de la théorie des situations puisque les interactions ont lieu avec les éléments présents dans le milieu, ici la consigne et le matériel.

Conformément à ce qui était attendu dans l'analyse a priori, le passage du plan à l'espace est une démarche reprise par certains élèves. Dans la situation cette démarche produit des réponses relativement antagonistes. L'un des élèves a beaucoup de mal à réaliser une construction dans l'espace, il semble qu'il cherche à reproduire une représentation prégnante : celle du patron. En effet, il réalise un patron de parallépipède rectangle que ses camarades lui suggèrent de plier. Contrairement à ce qui était attendu, l'assemblage des articulations peut se réaliser sans conduire au solide anticipé.

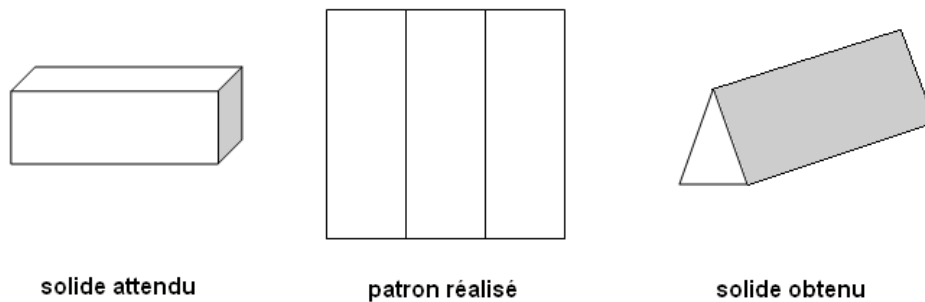


figure 30 : réponse d'un milieu antagoniste par rapport) l'articulation 2D/3D

Beaucoup de polyèdres sont découverts dans cette toute première phase, et notamment trois solides platoniciens : le tétraèdre, l'octaèdre et le dodécaèdre. Ils ne font pas l'objet de remarques particulières, ce qui est conforme à la préparation de l'enseignante. Des polyèdres semi réguliers sont aussi construits : un cube tronqué (8 triangles, 6 octogones), un tétraèdre tronqué (4 triangles, 4 hexagones).

phase de mise en commun

Certains polyèdres construits sont qualifiés de "beaux", c'est le cas des polyèdres particuliers : le dodécaèdre (surnommé "ballon de foot"), l'octaèdre (surnommé "diamant"), mais aussi du cube tronqué et du tétraèdre tronqué. Ceci traduit la référence esthétique que nous avons présentée dans l'analyse a priori conduite lors de la constitution du milieu théorique épistémologique (Bloch, 2002).

La mise en commun porte sur la description des constructions et permet de dégager quelques éléments de vocabulaire de la géométrie plane et de la géométrie dans l'espace. La distinction "côté / face" est problématique ce qui était attendu en terme de difficulté de compréhension (Mathé, 2006). Certains solides qui apparaissent comme "non terminés" (pour lesquels il manque une ou plusieurs faces faute de temps de construction suffisant) sont quand même validés (par anticipation de la construction) alors que la consigne imposait qu'ils soient "complètement fermés". Les élèves admettent que la face manquante peut très bien "être imaginée", et qu'il n'y a pas besoin de la voir pour que le solide soit acceptable.

La question du classement n'est pas abordée lors de la mise en commun, par manque de temps.

§ *séance 1 avec les élèves de cinquième*

phase de consigne

Lors de la passation de la consigne, le mot "solide" demande une explication supplémentaire (distinction du nom et de l'adjectif dont les synonymes sont nombreux). La terminologie

"fermé" ne soulève pas d'interrogation, le mot est assimilé à "pas de trous" ou par référence à son contraire "ouvert". Comme pour les élèves de sixième, une trace écrite est réalisée par l'enseignante avec les mêmes objectifs relatifs aux difficultés de ces élèves.

phase de recherches

Les expériences conduites sont du même type que celles décrites avec le groupe des élèves de sixième. Chaque élève s'engage dans des productions très personnelles qui montrent une intégration partielle de la consigne (certaines constructions ne semblent pas pouvoir aboutir à un solide fermé ou même "fermable"). Cependant, au fur et à mesure des essais, certains élèves font le choix de polygones en fonction de besoins réels. Le milieu renvoie des informations pour ce choix, soit de longueur d'un côté, soit de réalisation d'un sommet polyédrique : il y a manifestement mise en œuvre d'éléments de relations dans le plan et dans l'espace.

La recherche s'effectue individuellement sans échanges langagiers dans un premier temps. Les premiers échanges ont lieu lors de la réalisation d'un solide déjà construit par un autre élève, la question posée renvoie à la similitude des objets et aux moyens qui permettent de les différencier : "*c'est le même çui-là ?*"

Comme pour le groupe des élèves de sixième, les solides construits sont très variés, nous remarquons une fois encore que le cube, le tétraèdre et le dodécaèdre sont élaborés très rapidement et en plusieurs exemplaires. Ils correspondent à des constructions relativement algorithmiques comme nous l'avions envisagé dans la constitution du milieu expérimental.

phase de mise en commun

Lors de la mise en commun, les problèmes liés au vocabulaire apparaissent lors de la description du tétraèdre. Pour caractériser un triangle, un élève utilise la terminologie "*triangle équilatéral*" dont les élèves semblent bien connaître les propriétés (qui sont citées et reprises au tableau par l'enseignante), il est comparé au triangle isocèle (ces deux objets sont présents dans le matériel de construction en plastique). On note à ce propos plusieurs confusions langagières lors de ces échanges, le mot "*côté*" (du triangle) est employé régulièrement pour dénoter une face (du tétraèdre), ce qui est conforme à l'analyse a priori de la situation (Mathé, 2006).

Lors des débats sur le classement, ce sont les propriétés des solides qui servent de critères. Malgré leur objectivité, ces propriétés peuvent néanmoins conduire à des regroupements différents pour des polyèdres semblables. On débat par exemple sur le classement d'une pyramide de quatre triangles équilatéraux à base carrée qu'on peut classer soit parmi les polyèdres constitués de triangles équilatéraux ou parmi ceux qui possèdent une base carrée. La pyramide à base carrée pourra ainsi se retrouver aux côtés du tétraèdre dans le premier cas, ou d'une autre pyramide à base carrée constituée de quatre triangles isocèles dans le deuxième classement. Le débat n'est pas tranché quand au choix du classement, les deux sont acceptés.

Une remarque observée consiste à comparer deux solides identiques en taille et en forme (un parallélépipède rectangle) mais constitué de pièces plastiques différentes.

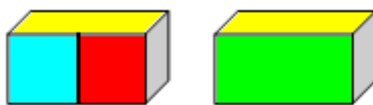


figure 31 : deux constructions, un même polyèdre

L'une des faces du solide est constituée de deux pièces (dans l'espace sensible), un débat émerge sur la notion de face d'un polyèdre sur un plan plus théorique.

Dans le même ordre d'idée, un autre débat est conduit sur la pertinence d'un classement prenant pour critère la taille des solides. L'exemple est pris sur deux représentations du cube ayant des tailles différentes, peut-on parler d'un même solide ou pas ? Ceci renvoie à la notion de permanence de la forme indépendamment de la taille (conservation des angles et des propriétés de nombre de faces à un sommet).

§ *séance 2 : recherche avec les élèves de sixième*

Il s'agit de la mise en œuvre de la situation de recherche des polyèdres réguliers telle qu'elle a été présentée en début de ce chapitre.

phase de consigne

Le lancement de la séance est un peu "théâtralisé" par le support utilisé pour la consigne contenue dans une grande enveloppe contenant un message inscrit sur une forme de parchemin illustré²¹. Le professeur lit la consigne et reformule la définition du polyèdre régulier en prenant tout le temps nécessaire à sa compréhension (rituel dans l'UPI pour l'adaptation aux handicaps langagiers et plus spécifiquement aux troubles mnésiques).

L'enseignante pose ensuite la question suivante : "Pouvez-vous en (des polyèdres réguliers) imaginer sans les construire ?" (avec le matériel). Un élève propose "le carré, le rectangle". Les autres élèves semblent manifester un désaccord à cette proposition, l'enseignante propose de faire référence à un objet réel : l'enveloppe qui contient le texte du problème qui est de forme rectangulaire. L'étude de la longueur de ses côtés permet de les différencier, ce qui exclut cet objet des polygones réguliers.

Des énoncés individuels sont distribués, ils reprennent le texte du message collectif et sont présentés eux aussi sous une forme parchemin.

²¹ voir annexe 2

phase de recherches

Les premières pièces plastiques investies pour la construction sont les carrés et les rectangles, ce qui peut paraître étonnant en référence à la séquence orale qui vient de se dérouler. Peut être s'agit-il d'une mesure de prudence tant ces polygones sont dans un champ plus familier des élèves. D'autres polygones sont peu à peu utilisés, certains triangles isocèles permettant de reconstituer un carré...

Une construction avec des hexagones est amorcée, elle pose d'emblée question aux proches voisins de l'auteur de cette proposition qui affirme que la réalisation est possible et qu'elle conduira au "ballon de foot".

La condition portant sur la superposition des faces est bien intégrée dès le début des recherches car chaque élève prend le soin de réaliser une petite collection personnelle de pièces identiques avant de débiter sa construction.

Les recherches sont d'abord individuelles et silencieuses comme lors de la première séance. Les interactions débutent de façon très limitées entre voisins proches, elles sont essentiellement non verbales et consistent à se montrer des constructions sans commentaire. Un seul élève du groupe semble attentif à toutes les constructions des autres, notamment pour s'assurer, au moins personnellement, que des polyèdres déjà construits ne soient pas en cours de copie inutile.

Lors de cette phase de recherche le professeur intervient une seule fois collectivement pour rappeler la consigne afin de rediriger les recherches qui semblent s'orienter sur une répétition de la séance 1. La définition du polyèdre régulier est redonnée à cette occasion.

phase de mise en commun

C'est le professeur qui organise cette phase de la séance, on propose aux élèves d'étudier toutes les constructions les unes après les autres en vérifiant si toutes les conditions sont bien respectées. On rappelle régulièrement le but à atteindre qui consiste à résoudre le problème en répondant à la question posée. Le protocole conduit à faire l'inventaire de toutes les propriétés d'un polyèdre régulier même lorsque l'une d'elle ne semble pas respectée dans une construction. Ainsi un solide non validé fait l'objet d'une étude complète même si la première propriété énoncée ne correspond pas à la classe attendue.

Une vingtaine de solides ont été construits avec notamment de nombreuses versions du cube. Quatre des cinq solides de Platon sont présents, ne manque que l'icosaèdre.

Le cas du cube est vérifié en premier, c'est l'occasion pour le professeur de travailler avec les élèves sur la notion d'angle du solide. Il montre et explique que les angles d'un solide peuvent se comparer en comptant les faces à chaque sommet. La condition ainsi ajoutée à la définition ne sera cependant pas suffisamment robuste du fait de la forme de sa présentation. Elle ne fait en effet pas partie de l'énoncé et n'a vraisemblablement pas la même valeur pour les élèves (la règle est énoncée oralement seulement). Cela se vérifiera par la suite lors de l'étude d'un

deltaèdre non convexe qui présente des sommets de degré 4 et d'autres de degré 6. C'est sa valeur esthétique qui sera déterminante dans le choix du groupe de le garder comme une réponse au problème.

Le cas de similitude de deux polyèdres identiques par la forme mais différents par la taille est évoqué à l'occasion de l'étude de deux cubes. Les acquis de la séance 1 permettent de trancher assez rapidement le débat ouvert sur cette interrogation.

Vient ensuite l'étude d'un hexaèdre (il s'agit de la bipyramide triangulaire, l'un des deltaèdres dont nous avons parlé précédemment) constitué de 6 triangles équilatéraux qui soulève des interrogations compte tenu qu'il satisfait les propriétés données dans la définition du polyèdre régulier (pour rappel, notre définition ne comportait pas de mention sur le degré des sommets). Contre toute attente, l'un des élèves du groupe propose de refuser le classement de ce solide parmi les réponses correctes au problème. Il évoque l'argument de la non inscription possible du solide dans le cercle : "*c'est pas un dé du sorcier parce que le cercle, y peut pas rentrer dedans, c'est pas un régulier*"²². L'argument est accompagné de gestes qui miment la constitution d'une sphère et pas celle d'un cercle. Les autres élèves du groupe sont perplexes, mais cette proposition est finalement validée. En effet, on vérifie que la condition de l'égalité des degrés des sommets n'est pas respectée, le solide est retiré du groupe des constructions que l'on gardera pour la réponse.

Le cas de la construction avec des hexagones est ensuite évoqué sur proposition de l'enseignante. Les avis sont très partagés, on reste dans un débat en référence au monde sensible, les arguments mathématiques ne sont pas présents dans le milieu. La proposition est non décidable, dans le doute, et en vue de la confrontation ultérieure avec un autre groupe, on retire cette construction des propositions pour la réponse .

§ *séance 2 : recherche avec les élèves de cinquième*

phase de consigne

Le lancement de la séance est assuré avec le même dispositif matériel que pour le groupe des élèves de sixième. Le cube, dénommé "carré" pour la circonstance est tout de suite proposé comme réponse au problème avant même sa construction. Le groupe s'interroge sur le nombre de ces polyèdres et conçoit très rapidement qu'une recherche approfondie s'impose.

phase de recherches

Dès la distribution des énoncés individuels les élèves se lancent dans des recherches individuelles silencieuses : un cube pour l'un, un pavé pour le deuxième et un pavage du plan avec des rectangles pour le troisième. Les polygones les plus familiers sont utilisés comme lors de la séance avec les élèves de sixième.

²² Voir l'extrait du corpus dans le paragraphe suivant.

Le professeur intervient pendant la phase de recherche pour insister sur la condition relative à la régularité des polygones qui servent aux faces des solides à construire. Cet apport dans le milieu semble nécessité par son inquiétude relative à l'utilisation de polygones non réguliers par les élèves. Un moment de discussion s'engage alors sur les deux conditions à respecter simultanément : angles égaux et côtés isométriques. Il semble qu'un élève n'ait pas intégré la conjonction logique des propositions (ET) se contentant de la vérification d'une condition. Pour lui, le rectangle est un polygone régulier car ses angles sont tous droits.

Un débat est conduit sur la notion de face (comme lors de la séance 1) dans le registre théorique qu'il est nécessaire de distinguer de sa représentation par une pièce plastique. En effet, se repose ici la question de la similitude d'une face constituée d'une seule pièce plastique d'une autre qui lui est isométrique mais qui est faite de deux pièces différentes. La question posée est la suivante : "un cube fabriqué avec des pièces rectangulaires est-il un polyèdre régulier ?"

A la fin de ce temps de questionnement collectif, les recherches reprennent avec des triangles équilatéraux, suite à la remarque de l'un des élèves que les angles sont tous de 60° dans ce polygone. Deux élèves construisent des sommets différents : l'un constitué de trois triangles, l'autre de quatre. Ces deux constructions aboutissent à deux réponses correctes au problème. De plus l'esthétique du solide semble déterminant dans la volonté de conduire son élaboration jusqu'à son terme.

Deux constructions sont alors menées en parallèles, elles suscitent de nombreux échanges entre les élèves : un solide avec des octogones, l'autre avec des hexagones. L'élève qui manipule les octogones est celui qui considère la disjonction des conditions définissant les polyèdres réguliers, et souhaite finir sa production même s'il se rend bien compte du "trou" laissé aux sommets de son solide (un trou qu'il considère peut être comme une sorte de sommet). Pour lui, l'octogone est un polygone régulier, ce qui suffit à valider sa proposition.

L'assemblage des hexagones provoque le débat attendu dans l'analyse a priori de la situation. Il est envisagé la construction d'un très grand solide "ça va prendre toute la classe" pour un élève, l'autre position est de refuser cette hypothèse car "*ça ne plie pas*" aux articulations des pièces. Comme pour le groupe des élèves de sixième, la construction sera abandonnée sans référence aux outils mathématiques qui permettent de trancher mais plus par effet de contrat : les élèves ne veulent pas prendre le risque de présenter une construction non terminée à l'autre groupe.

phase de mise en commun

Dix constructions sont soumises à la validation, (un assemblage plan d'hexagones est aussi gardé dans chaque équipe mais non présenté comme solution du problème). Quatre des cinq solides de Platon en font partie, il manque uniquement l'icosaèdre comme dans le premier groupe. Deux deltaèdres sont aussi parmi la liste des cas à étudier. Chaque solide est présenté à tour de rôle, il y a alors vérification du respect des conditions fixées dans l'énoncé.

Le cas du cube est envisagé en premier, sa régularité ne fait aucun doute mais on s'intéresse alors à ses angles. Comme il y a consensus sur la valeur des angles du carré, le professeur demande alors aux élèves de montrer un angle du solide. "*C'est tout ça*" dit une élève en glissant sa main sur les trois faces menant au sommet du polyèdre. Le professeur montre alors que l'on peut compter les faces à chaque sommet pour vérifier la régularité des angles en trois dimensions. La condition s'ajoute ainsi à la définition du polyèdre régulier, sans qu'elle soit formulée par écrit. Elle semble intégrée par les élèves puisqu'en effet, elle permet d'éliminer tout de suite après les deux cas de deltaèdre par comptage des faces à chaque sommet.

L'assemblage d'hexagones divise le groupe sur sa potentialité à devenir un polyèdre. Deux élèves sur les trois pensent que le pliage entraîne systématiquement des cassures, le troisième imagine qu'il suffit de prendre son temps et que l'on obtiendra un très grand solide. On décide de repousser le débat sur cet assemblage au moment de la mise en commun avec l'autre groupe, sans considérer cela comme une réponse possible à l'énigme, ce n'est pas une réponse possible au problème.

Finalement, quatre solides sont retenus, ce sont des polyèdres réguliers : cube, tétraèdre, octaèdre et dodécaèdre.

§ *confrontation des résultats*

Les deux groupes d'élèves sont réunis au sein de la salle de classe de l'UPI en vue de la présentation des travaux de chaque équipe, mais aussi pour découvrir la solution du problème apportée par le professeur (un petit coffre en bois qui contient les solides de Platon en cristal de roche). Chaque groupe présente successivement ses découvertes qu'il soumet à la validation de l'ensemble des élèves, c'est l'occasion de revenir sur les éléments qui caractérisent les polyèdres réguliers. Ce dispositif de communication orale n'est pas fréquemment utilisé au sein de l'UPI du fait des difficultés d'expression de certains élèves, pour autant aucun d'entre eux ne refuse de se prêter au jeu. Le professeur veille à un équilibre dans les prises de parole, pour conduire finalement une séance de cinquante minutes d'échanges environ²³.

Les difficultés langagières sont réelles pour des élèves de cet âge et de ce niveau de scolarité, pour autant les échanges conduisent à une compréhension des propositions énoncées. Le vocabulaire spécifique est utilisé à bon escient et compense la syntaxe relativement défaillante. L'écoute générale est bonne tout au long de cette séance, ce qui est de bonne augure pour la mise en acte des connaissances et leurs répercussions sur les apprentissages.

Cette séance propose finalement un deuxième niveau de validation après les phases de mise en commun des séances précédentes. Chaque groupe tente de reprendre les arguments qui les ont conduit à proposer des solides comme des réponses valides au problème. La différence

²³ Cette séance a fait l'objet d'une transcription complète présentée en annexe 4.

tient dans le contexte de la communication qui met en présence deux équipes avec un enjeu dans la confrontation des propositions. Cette émulation renforce les critères qui servent à l'argumentation ou à la critique, il y a initiation au débat scientifique.

Le cas de l'assemblage des hexagones est repris puisque de nombreux doutes existent dans les deux équipes à ce sujet. Comme les avis sont très partagés, c'est l'intervention du professeur qui clos le débat. On propose aux élèves d'observer le patron d'un solide (l'un du cube) et de le comparer avec l'assemblage des hexagones. On remarque que ce dernier n'a pas d'espace "de trous" entre les pièces, ce qui ne permet pas de le plier. Pour terminer, le professeur donne l'argument numérique de la somme des angles $3 \times 120 = 360^\circ$, ce qui correspond à l'angle plein et qui rend définitivement impossible la pliure et donc la construction d'un solide.

La séance se termine par la présentation aux élèves de la solution du problème dans un petit coffre en bois contenant les cinq polyèdres de Platon dans une version en cristal de roche, ce qui renforce l'esthétique de ces objets. Les élèves concèdent leur oubli, l'icosaèdre dont ils vérifient tout de même les propriétés. L'un d'eux le construira avec le matériel plastique comme pour prouver que son existence est liée à la possibilité de sa construction effective.



figure 32 : vérification des constructions par comparaison des modèles

La séance se termine par un petit détour historique concernant la découverte de ces objets dans l'antiquité et de leur utilisation dans la modélisation des éléments (air, feu, eau et terre). Le professeur revient également sur la notion d'inscription des polyèdres réguliers dans la sphère en rapport avec l'une des remarques émises en cours d'expérimentation. Ces apports historiques et théoriques servent de conclusion à la mise en commun.

Il est ensuite proposé aux élèves d'utiliser les ordinateurs de la classe pour observer une petite animation²⁴ réalisé en flash²⁵ sur internet, afin d'effectuer des manipulations virtuelles sur ces objets (rotations autour de plusieurs axes possibles).

²⁴ Visible ici : <http://www.sciences.univ-nantes.fr/physique/perso/gtulloue/Polyedres/Platon/ronde.html>

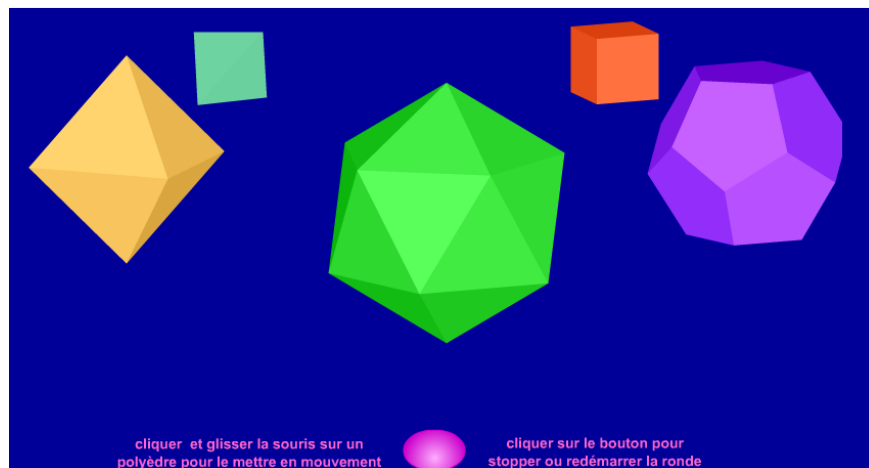


figure 33 : manipulations virtuelles des polyèdres réguliers sur internet

II – 4 Analyse : premières réponses aux hypothèses de recherche

A l'issue de cette séquence, nous nous proposons dans ce qui suit d'analyser quelques extraits de ce corpus, afin de valider un certain nombre des hypothèses émises dans le premier chapitre de notre travail de recherche présenté dans cette thèse. Nous fournirons ainsi quelques éléments de la consistance de la situation, mais aussi sur les caractéristiques du milieu qui lui est connexe.

II – 4.1 Des objets sensibles aux objets mathématiques et vice-versa

§ *qu'est-ce qu'une face ?*

Afin d'illustrer les nombreux allers et retours du registre sensible à la théorie qui nous semblent caractéristiques de l'expérience mathématique, nous présentons ici deux extraits provenant du corpus d'étude. Le premier concerne le débat portant sur la fabrication de deux cubes de tailles et de constitutions matérielles différentes pour lesquels la question posée concerne la réponse à fournir à l'énigme :

"Peut-on considérer que ces deux solides sont deux solutions différentes ou bien qu'ils représentent la même réponse ?"

²⁵ Flash fait référence au logiciel Adobe Flash qui permet de réaliser des animations de type graphiques vectoriels, une formule très répandue aujourd'hui sur les sites internet du fait de son faible poids et de ses importantes capacités créatives.

Ces constructions réelles sont une tentative de réponse à un énoncé proposé dans un registre géométrique plus abstrait (celui du langage et des mots) représenté par la définition du polyèdre régulier. Il y a eu un premier passage du sensible au géométrique. Mais les constructions dont il est question posent problème :

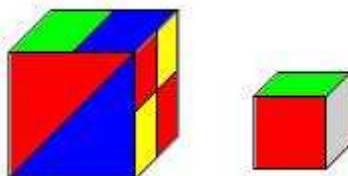


figure 34 : deux constructions pour un même objet

Dans un premier temps, les avis sont très partagés notamment entre les deux auteurs des constructions. De toute évidence, les objets sensibles sont différents. Afin de faire avancer le débat, le professeur choisi de rappeler l'énoncé des propriétés d'un polyèdre régulier. On demande ainsi aux élèves de prendre appui sur une définition qui relève du champ théorique alors que le désaccord portait sur des objets sensibles. Chaque solide construit est revisité à ce moment là par la vérification point par point des conditions énoncées. C'est ainsi que l'on valide le fait que chacun de ces objets correspond au concept de polyèdre régulier comme on peut le lire dans l'extrait suivant.

On parle des deux cubes construits (figure xx) :

E	c'est pareil, c'est le même solide
E	non, regarde il a pas les mêmes pièces ici
E	mais si c'est pareil
E	non
E	c'est pareil en fait
P	la question est là
E	c'est pareil
P	c'est pareil ?
E	oui
P	(montrant l'un des cubes) – est-ce que ça c'est un cube ?
Tous	oui
P	qu'est-ce qu'il a de différent avec celui-là ? (elle montre l'autre)
E	il a pas les mêmes pièces
P	c'est les pièces qui sont différentes, mais est-ce que les faces du solide sont les mêmes ?

extrait du corpus enregistré

Comme on peut le lire dans l'extrait retranscrit de ce passage, les élèves utilisent alors le mot "pièce" pour différencier l'objet réel de sa dénomination "face" en langage géométrique. Ainsi

l'accord dans le groupe est trouvé et l'on s'entend pour admettre que les deux solides ne représentent qu'un même objet géométrique certes constitué de pièces différentes.

L'introduction par la professeure de la définition du polyèdre régulier dans le milieu de la situation oblige les élèves à un aller et retour de l'objet sensible vers l'objet géométrique. Cette expérience permet d'avancer dans l'argumentation nécessaire à la résolution du problème posé. Il est incontestable que la résolution du problème posé naît des allers-retours entre les objets sensibles représentés par leurs artefacts (les constructions réelles) et les objets mathématiques signifiés par leurs propriétés.

§ *la découverte d'une propriété non énoncée*

Lors de la séance de recherche avec le groupe des sixièmes, les élèves réalisent un nombre assez importants de solides sans réellement interagir verbalement pendant cette phase de construction. Vient ensuite un temps de mise en commun sollicité par le professeur qui choisit de relire encore une fois la définition du polyèdre régulier telle qu'elle est présente dans l'énoncé de l'énigme. Chaque solide est confronté aux conditions nécessaires afin d'être ou non validé comme réponse au problème posé. Après quelques discussions consensuelles, vient le cas d'un solide problématique (un deltaèdre : la bipyramide triangulaire).

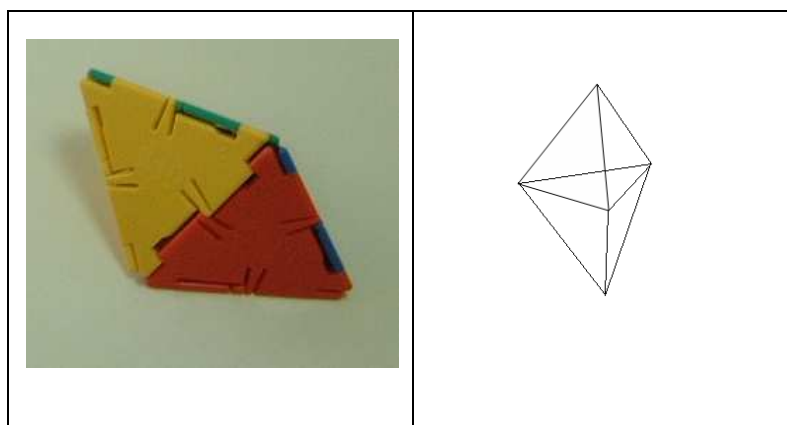


figure 35 : solide et polyèdre, du sensible au théorique

Il donne lieu à des échanges retranscrits intégralement ci-dessous :

M	ha ha ha (<i>M montre la bipyramide</i>)
Ni	ou la !
Al	c'est le même que celui qu'on a fait tout à l'heure (<i>on parle d'une bipyramide réalisé avec des triangles isocèles</i>)
Ni	ah non
M	ah non, du tout, il est fait avec des triangles équilatéraux lui, donc ça marche
Al	oui
M	dé du sorcier ou pas dé du sorcier ça ?
Ni	non

Da	dé du sorcier
Al	non
Da	ben si
Al	non
Zi	ah non, parce que le cercle y peut pas rentrer dedans, c'est pas un régulier, parce que regarde (<i>il prend le solide dans ses mains</i>)
	<i>grand silence</i>
M	non mais il dit un truc... faudrait essayer de comprendre ce que dit Zi... mais je crois que je comprends en fait
Zi	regarde ben oui (<i>il montre une sphère fictive autour du solide</i>) là, ça va prendre la forme comme ça le cercle... mais ça va pas toucher le...
Al	ouais
Zi	le truc des côtés (<i>il montre les sommets</i>)
Al	ouais mais bon...
M	alors c'est intéressant ce qu'il dit, c'est très intéressant ce que tu dis Zi parce que vous avez vu que pour qu'un polygone soit régulier il faut qu'il s'inscrive dans un cercle... et bien pour les polyèdres réguliers, Zi a raison, il vient de trouver un truc bien bien bien intéressant qui est connu en mathématiques, c'est qu'un polyèdre c'est-à-dire un solide qui est régulier, il doit s'inscrire alors pas dans un cercle, carrément dans une sphère, et normalement tous les sommets doivent toucher le bord de la sphère
Zi	sauf que là y touchent pas tous, y'a que les bouts
M	ouais, et alors regardez à cause de quoi parce qu'à ce sommet y'a combien de faces ?
E	trois !
M	et à celui là ?
E	quatre !
M	alors, on prend dé du sorcier ou pas dé du sorcier ?
E	non pas dé du sorcier
E	non, non
M	attention, parce que tout à l'heure on a dit que ça faisait rien, hein ? sur celui là (<i>on reprend le deltaèdre non convexes de 24 faces</i>) on a dit ça fait rien si à tous les sommets on a pas le même nombre de faces hein... et maintenant on vient de changer d'avis, ça fait rien ?
Al	ben non alors, si, dé du sorcier
Ni	non, non
Zi	non pas dé du sorcier parce que regardez çui là (<i>il montre le deltaèdre</i>) y peut rentrer dans un cercle parce que y peuvent tous toucher (<i>il montre les sommets</i>)
Al	ouais
M	alors on garde celui là, et on ne prend pas celui là ?
E	oui

extrait du corpus enregistré avec les élèves de sixième

Une partie des élèves du groupe pense d'emblée que ce solide est une réponse correcte au problème car les conditions sont respectées : il est constitué de faces identiques et régulières. Cependant, à la surprise de tous, l'un des élèves du groupe déclare :

"C'est pas un dé du sorcier (un polyèdre régulier) parce que le cercle (on peut penser qu'il dit "cercle" en pensant "sphère") y peut pas rentrer dedans, c'est pas régulier".

Il prend alors le solide dans ses mains et tente de signifier par des gestes un cercle (les gestes représentent d'ailleurs une sphère) passant par les deux sommets extrêmes du solide. Il montre ensuite les autres sommets et déclare pour ces derniers : *"ça va pas toucher le cercle"*. Il y a là une référence à une propriété des polygones réguliers, donc à la géométrie plane qui peut

s'expliquer par le fait que des constructions ont été réalisées sur l'ordinateur quelques jours auparavant. Le professeur avait fait expérimenter le logiciel Cabri-Géomètre et notamment la fonction polygone régulier qui témoigne assez radicalement de la propriété d'inscription dans le cercle de tout polygone régulier : leur tracé est toujours effectué à partir d'un cercle.

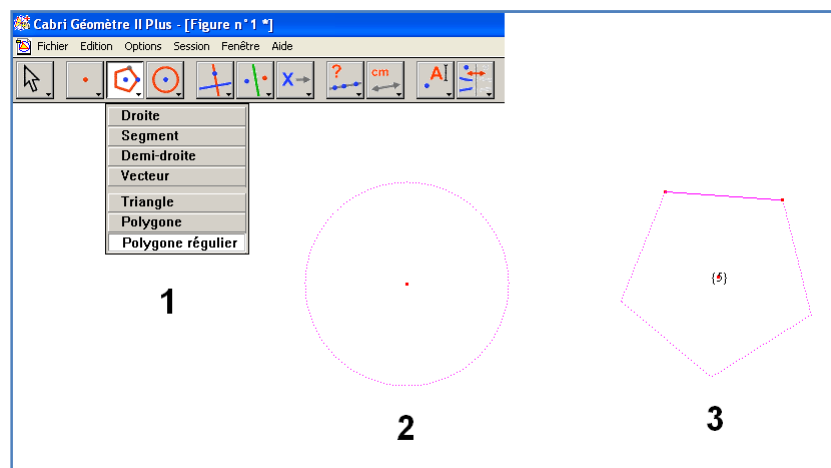


figure 36 : construction en 3 temps d'un pentagone régulier dans l'environnement cabri-géomètre

L'utilisation de cette connaissance à partir de la construction dans l'espace est surprenante²⁶ car elle relève d'un transfert plutôt inattendu dans ce contexte d'enseignement. Cependant, cette remarque d'abord déstabilisante pour le groupe, est prise en considération grâce à l'explication donnée : les gestes et la perception pour l'espace sensible et les mots pour le registre langagier. Le professeur intervient alors pour demander aux élèves de bien regarder le nombre de faces à chaque sommet du solide construit. De ce fait, la propriété "manquante" est rajoutée et cette fois il n'y a plus de doute, le solide n'est pas validé.

La dimension expérimentale qui se traduit par les allers et retours entre l'objet sensible et l'objet géométrique est une nouvelle fois lisible dans ce deuxième extrait. On voit comment les propriétés d'un objet géométrique peuvent rencontrer un réel résistant qui, grâce à son statut problématique est susceptible de renforcer l'utilisation d'arguments théoriques pour enclencher le processus de validation.

²⁶ On peut également penser que le contexte de la situation des dés du sorcier est susceptible de laisser entendre que ces objets doivent "rouler" (comme des dés) ce qui peut faire référence à une forme de sphéricité.

II – 4.2 Expérimentation et investigation

§ *Plusieurs types d'expérimentation*

Lors des phases d'action (séances 1 décrites auparavant) nous avons repéré deux types d'expérimentations que nous qualifierons d'*expérience-action* et d'*expérience-objet* en référence à Coquidé (1998). Elles font partie intégrante de la démarche d'investigation telle que nous l'avons décrite, mais il nous semble intéressant de les distinguer en fonction du projet des élèves dans leur rapport aux objets.

"expérience-action" : (ou expérientiation)

Les élèves expérimentent "pour voir", actions qui peuvent être qualifiées d'essais, d'explorations ouvertes non référencées *a priori* à une théorie. Il s'agit d'une activité que l'on peut assimiler à une familiarisation pratique avec des phénomènes (par exemple le processus d'emboîtement des pièces plastiques, leurs articulations et leurs conséquences), des objets ou des instruments. Les rétro-actions fournies par le milieu permettent des adaptations des élèves qui peuvent alors mettre en actes un certain nombre de connaissances :

- deux pièces plastiques qui s'ajustent, témoignent de l'isométrie des côtés des polygones,
- le jeu des articulations permet des assemblages différents pour un même sommet : c'est une forme de mesure de l'angle polyèdre,
- certains assemblages dans le plan ne permettent pas la réalisation d'un solide : la notion de patron est ainsi significative.

Lorsque ces expérientiations sont répétées, les élèves acquièrent des connaissances qui se manifestent par des boucles action/phénomène/conséquence qui permettent de passer à un deuxième type d'expérimentation.

"expérience-objet" : (ou expérimentation)

Les expériences sont conduites pour tester : une idée, une représentation, une image mentale. Ce type d'expérimentation est repérable selon deux indices :

- par les quelques mots ou phrases prononcées par les élèves ou par quelques bribes d'échanges entre eux : "*est-ce que celui-là il va fermer ?, Est-ce qu'on va pouvoir le plier ?*" ;
- par la répétition d'une action avec modification d'une variable : on construit un cube, puis on reprend la recherche une forme de solide similaire avec d'autres polygones (construction avec des octogones qui mène au cube tronqué).

On peut parler à ce niveau d'investigation empirique puisque ce sont les rétro-actions fournies par le milieu matériel qui déclenchent les adaptations des élèves et orientent leurs recherches

plus que le suivi d'un projet prédéfini par un questionnement ou un protocole d'expérimentation.

§ *les phases visibles de la démarche d'investigation*

Comme nous l'avons envisagé dans la préparation de la situation, la plupart des phases décrites de la démarche d'investigation ont été observées au cours de notre expérimentation. Le choix d'une situation de type "résolution de problème" a permis d'ajuster les savoirs en jeu dans la situation aux connaissances des élèves du fait de l'analyse a priori. [Ainsi avons-nous tenu compte de tous les éléments nécessaires à la constitution d'un milieu de type expérimental a priori (Bloch, 2002), et des différents registres de signification des objets que sont les polyèdres réguliers.]

L'appropriation du problème par les élèves a été réussie du fait de la prise en compte par l'enseignante des paramètres didactiques facilitant la dévolution (contexte, possibilité d'action, nature antagoniste du milieu, consigne et reformulation). Comme nous l'avons anticipé, nous n'avons pas observé un moment de formulation de conjectures ou d'hypothèses précédant les premières expériences des élèves. Les moments 3 et 4 de la démarche sont confondus tel que cela était envisagé en référence à la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998). La phase d'action ne se déroule pas en réponse à un protocole de type expérimental explicite ou énoncé. Les intentions qui guident les expériences des élèves existent mais ne sont pas toujours visibles, c'est une observation fine de leur activité qui permet de faire des hypothèses sur ces intentions. En tout état de cause, conformément aux principes de la démarche expérimentale, ce sont bien les pratiques et les échanges des élèves dans le milieu qui permettent la résolution du problème.

Le moment 5 dénommé "*échange argumenté autour des propositions élaborés*" a été observé dans notre étude lors des phases de mise en commun préparatoires à celle de la communication générale. Il est apparu essentiel que le professeur soit le garant de la recherche systématique d'une validité des propositions et des arguments. Son rôle ne consiste pas à apporter lui-même les preuves mais à solliciter tous les acteurs dans la recherche des éléments pertinents pour établir les vérifications. Il nous apparaît très clairement que si les élèves peuvent éventuellement considérer leurs confrontations avec les objets réels comme des validations suffisantes, il est du rôle de l'enseignant de leur permettre de dépasser cette conception. C'est l'une des particularités du milieu de type expérimental que de considérer ses interventions comme nécessaires dans la poursuite de cet objectif scientifique, il en va de la construction des connaissances de ses élèves.

On peut considérer que l'acquisition et la structuration des connaissances (moment 6 de la démarche) est ancrée dans les phases précédentes, y compris lors des premières actions et inter-actions avec le milieu. Nous comptons en effet sur l'adaptation des élèves aux rétro-actions du milieu pour mettre en acte des connaissances, qu'ils structureront progressivement

en anticipant de mieux en mieux leurs actions, en formulant des hypothèses puis en procédant à l'argumentation de leurs idées.

Dans notre expérimentation en UPI, nous n'avons pas observé réellement le moment d'opérationnalisation (moment 7) des connaissances puisque nous avons limité notre étude à la situation de recherche des polyèdres. Cette phase de la démarche sera étudiée lors de notre deuxième terrain de recherche servant à une nouvelle confrontation de nos résultats à la réalité de la classe.

§ *un renforcement de la fonction outil*

L'enjeu principal de la situation de géométrie proposée dans la recherche des polyèdres réguliers est de favoriser le va-et-vient entre la réalité et les modèles mathématiques. Il s'agit ainsi de présenter les mathématiques non pas comme un ensemble de vérités universelles définitivement formalisées, mais au contraire, de faire expérimenter que toute construction d'objet s'inscrit dans un parcours d'apprentissage. Ce n'est qu'à l'issue de ce cheminement qu'une notion mathématique deviendra un objet d'étude. Il nous apparaît essentiel de renforcer ainsi la fonction outil (Douady, 1986) dans le cadre d'une volonté d'adaptation pédagogique tant il est crucial dans l'enseignement spécialisé de faire du langage formalisé non pas un *a priori* mais une finalité à atteindre progressivement. La médiation par la référence aux modèles est dans ce contexte une sorte de détour. C'est parce que les élèves pourront agir sur des objets réels dans le cadre d'une résolution de problème qu'on a de fortes chances de les diriger vers la formulation de conjectures. Dès lors, l'expérience qui consiste à confronter les premiers éléments d'une théorie archaïque à la réalité du monde sensible²⁷ fournira la controverse nécessaire à toute élaboration d'un concept scientifique même encore mal défini.

Renforcer la fonction outil c'est aussi permettre la construction de modèles pendant la phase d'apprentissage dédiée à la formulation de conjectures. Nous entendons ici par modèle l'émergence de représentations (simplifiées ou non) qui naissent de la nécessité de résoudre un problème. Le modèle n'étant pas la réalité elle-même, il reste toujours perfectible comme une sorte d'échantillon qui est une manifestation de la fonction outil de la notion en jeu dans la situation. L'activité mathématique des élèves est ainsi favorisée dans la mesure où il est fortement probable que le statut d'instruments de recherche²⁸ (Giusti, 2000) conféré aux objets en jeu dans la situation soit plus accessible que celui d'objets d'études relevant d'une abstraction beaucoup plus importante.

²⁷ Par exemple dans la situation des polyèdres le fait de se rendre compte que l'assemblage de trois hexagones conduit à un pavage du plan et non pas à la réalisation d'un solide.

²⁸ Ce terme d'instruments de recherche est emprunté dans l'ouvrage "La naissance des objets mathématiques" où Enrico Giusti soutient l'hypothèse d'une génération des objets mathématiques dans un processus en trois temps. Ils apparaissent d'abord comme des instruments de recherche, puis ils deviennent solutions de problèmes avant d'être des objets d'étude.

II – 4.3 Milieu antagoniste et expérimental

Nous avons précédemment présenté ce que signifient ces deux acceptions "antagonisme et expérimental" quand il s'agit de qualifier le milieu d'une situation d'enseignement / apprentissage. Nous souhaitons d'abord montrer quels sont les éléments qui fondent ces caractéristiques d'antagonisme dans notre expérimentation, pour cela nous en présenterons trois. A l'issue de cette confrontation avec la réalité de la classe dans le contexte de l'enseignement spécialisé, nous souhaitons aussi déterminer ce qui caractérise le fonctionnement du laboratoire en référence à nos conjectures émises sur ce sujet, ce que nous ferons dans un deuxième temps.

§ *Antagonisme du milieu*

Dans le milieu matériel de notre situation de recherche des polyèdres, nous avons apporté un jeu de pièces plastiques très investi par les élèves. Ces représentations des objets polygones jouent selon nous le rôle d'instruments puisqu'ils comportent deux dimensions :

- celle de l'artefact puisqu'ils instrumentent l'activité des élèves en les plaçant dans le champ de la géométrie plane de part leur fonction de représentation des polygones,
- et celle de l'opérationnalité du fait de leurs articulations qui permettent de les assembler entre eux selon certaines règles relatives à deux domaines de la géométrie, celle du plan et celle de l'espace.

Leur présence dans le milieu favorise la dévolution du problème, mais fournit aussi très rapidement des rétro-actions problématiques vécues comme des surprises pour les élèves. Nous pouvons de ce fait considérer ce type de réponses comme une des caractéristiques de l'antagoniste du milieu :

- patrons de pseudo-solides qui ne "plient" pas,
- assemblages plans qui semblent pouvoir former des volumes (cas du pavage avec des hexagones),
- possibilité d'assemblage de deux polygones identiques superposés (est-ce un solide, un polyèdre ?)
- constructions "qui ne ferment pas" du fait du choix des polygones constituant les faces,
- constructions de solides semblables avec des polygones différents (la face carrée d'un cube peut être constituée d'une pièce carrée mais aussi de deux rectangles, de deux ou quatre triangles...)

La deuxième caractéristique de l'antagonisme du milieu tient selon nous du rapport aux objets mathématiques dans leur dimension sémiotique au sein de la situation. La géométrie dans l'espace est un domaine relativement peu investi dans les situations d'enseignement à l'école,

et notamment en fin de cycle primaire. Les activités proposées en dehors d'un support plan sont plus difficiles à trouver dans la littérature d'accompagnement pédagogique, ce qui ne construit pas un rapport de type expérimental ou sensible aux objets de cette branche des mathématiques. Dans la situation de recherche des polyèdres réguliers telle que nous l'avons proposée, le rapport aux *objets polyèdres* est différent dans sa dimension sémiotique. Nous proposons en effet des signes variés pour les représenter ou pour les définir :

- des objets plans pour les décrire ou les comparer ;
- des objets dans l'espace pour les montrer, les représenter ;
- des mots pour les nommer, pour communiquer à leur propos ;
- des propositions conditionnelles pour les définir.

Ce type de rapport à des objets de savoir est riche puisqu'il permet de nombreux liens entre les connaissances, mais il demeure cependant complexe et hors contrat didactique traditionnel. Il peut être considéré comme un élément de l'antagonisme du milieu puisqu'il propose des problèmes à résoudre aux élèves qui, pour s'y adapter, doivent construire les processus de signification permettant d'interpréter : passer du signe à l'objet et réciproquement.

La troisième caractéristique de l'antagonisme du milieu concerne les acteurs et leurs interactions dans le jeu proposé. Ces interactions se font dans le cadre d'une confrontation des connaissances mise en acte dans les actions et formulations permettant de résoudre le problème posé. On peut qualifier ces échanges de conflits de type socio-cognitif (symétriques ou dissymétriques selon le niveau de connaissances de chacun des acteurs) puisqu'ils permettent, par des régulations et négociations successives, de confronter des points de vue, des hypothèses et des résultats. En considérant les actions, les formulations et les interactions des élèves comme des éléments constitutifs du milieu, leur qualification d'antagonisme est permise puisque ces interactions se déroulent dans un cadre didactique bien défini. Il s'agit de résoudre une question scientifique pour laquelle la collaboration, la co-construction exige un débat d'idées, un partage des connaissances acquises mais nécessite aussi une validation des propositions qu'elles paraissent consensuelles ou non.

§ *Langage et indétermination*

Un exemple de cette indétermination est fourni dans l'une des séances enregistrées. La problématique concerne le mot "*carré*" qui est employé par plusieurs élèves pour désigner des objets différents. En effet, lors de la phase de recherche, le cas du cube est évoqué lors de la construction du solide. Un élève désigne l'objet qu'il vient de construire par le mot "*carré*" or, dans ce contexte très précis, il ne pense vraisemblablement pas au mot *cube* qu'il connaît certainement par ailleurs, mais c'est la prégnance de la connaissance du mot *carré* qui l'emporte dans son énonciation. Ceci provoque une ambiguïté dans le débat puisque l'on cherche à valider les propriétés des polyèdres réguliers notamment en caractérisant la

régularité des faces. Pour certains élèves le mot "*carré*" renvoie à la propriété d'un polygone et à la géométrie plane, alors que pour l'élève qui vient d'utiliser ce mot, il s'agit de désigner l'objet réel construit en trois dimensions que l'on a sous les yeux. L'enseignante choisit alors de relancer la question sur l'utilisation du mot à l'ensemble du groupe sans clore le débat par une intervention normative renvoyant définitivement le mot "*carré*" à sa signification conventionnelle.

D'une manière plus générale, les mots du vocabulaire de la géométrie plane sont très souvent repris dans le contexte de la géométrie dans l'espace (angle, sommet). Cette relative indétermination est une forme d'antagonisme qui ne peut être résolue que par un recours aux dimensions sémantiques et syntaxiques pour en stabiliser la signification. Dans nos observations conduites dans l'UPI, il est très souvent fait appel à la symbolique des gestes en appui des signes langagiers et ou symboliques. Ceci permet d'aider au processus de signification notamment lorsque le langage n'affiche pas une transparence adéquate (Mathe, 2006).

§ *Laboratoire et milieu expérimental*

L'expérimentation conduite en unité pédagogique d'intégration apporte quelques éléments supplémentaires quant aux éléments susceptibles de qualifier le milieu en référence à la modélisation proposée : le laboratoire.

Notre modélisation faisait référence à la notion écologique du biotope pour bien insister sur la nécessaire recherche des équilibres au profit des apprentissages, qu'ils soient professionnels pour l'enseignant ou scolaires pour les élèves. Nous pouvons conclure de notre expérimentation que les phénomènes d'étayage sont susceptibles de garantir ces équilibres car ils contribuent au développement personnel des élèves et professionnel de l'enseignant. Parmi les éléments qui contribuent à cet équilibre, citons l'étayage instrumental qui permet la dévolution du problème en assurant à la fois l'entrée dans l'action des élèves, et l'avancée du temps didactique pour le professeur. Ces deux conditions garantissent la stabilité de la situation dans son amorce, point très critique dans le contexte de l'enseignement spécialisé où le refus de la tâche est assez récurrent et conduit à la déstabilisation du processus enseignement / apprentissage. L'autonomie régulée des activités des élèves par les règles (syntaxiques, sémantiques et pragmatiques) de la situation, contribue à définir un cadre rassurant pour la construction des connaissances. Cette forme d'étayage résulte de l'analyse a priori (mathématique et épistémologique) réalisée dans la conception d'un milieu de type expérimental (Bloch, 2002). Il conduit à faciliter le processus d'enseignement en situation, puisqu'il donne au professeur les clés d'une compréhension davantage référencée des obstacles rencontrés par les élèves mais aussi des moyens de les surmonter.

Dans le modèle de milieu que nous avons proposé, la place du questionnement scientifique par les élèves (interrogations, hypothèses, conjectures) tient une place importante. En

confrontant ce modèle au contexte d'une classe d'élèves en situation de handicaps langagiers, nous souhaitons montrer que la phase d'action pouvait poursuivre cet objectif de questionnement. Nous avons constaté que cette phase de questionnement par l'action se déroulait lors des interactions avec le milieu matériel en premier lieu, puis lors des échanges langagiers et symboliques entre les élèves. Comme nous l'avions anticipé, la démarche de type expérimental ne consiste pas en une formulation écrite ou orale d'hypothèses ou de protocoles a priori, dégagée de toute expérience sensible. Elle relève d'un processus de type dialectique manifesté par de nombreux allers-retours entre objets théoriques et objets sensibles.

Enfin, nous souhaitons terminer par un troisième élément caractérisant le modèle du laboratoire observé dans notre expérimentation, il s'agit du rôle de la mise en commun dans la validation. Nous avons choisi de diversifier les moments consacrés à l'expression commune afin d'en faire une véritable variable pédagogique. En proposant aux élèves un modèle basé sur celui de véritables chercheurs nous avons renforcé la place de la validation dans le processus d'apprentissage. La démarche de recherche qui consiste à mener des investigations dans une constante dialectique théorie/expérience puis à confronter ses doutes et ses certitudes, n'a pas déstabiliser les élèves. Grâce à la répétition de ces alternances recherche/communication (voir notre découpage en plusieurs séances), il est apparu fondamental aux élèves que toute proposition avait droit de cité dans un espace de communication, mais que son domaine de validité devait être déterminé et rendu explicite par une argumentation validée par le professeur (ici). Selon nous, c'est là l'une des caractéristiques principales de notre modèle, et qu'il représente une valeur ajoutée dans le cadre du processus d'enseignement / apprentissage dans le domaine scientifique.

II – 4.4 Médiation langagière et instrumentale

Pour l'enseignant, intégrer la dimension expérimentale des mathématiques signifie qu'il soit à même de proposer dans le milieu de la situation à la fois des possibilités matérielles d'anticipation et de confrontation au réel, mais aussi des conditions propices aux échanges langagiers sans lesquels le processus d'apprentissage n'est pas permis. Le tout sera possible avec un accompagnement rapproché du professeur qui garantit la réussite de cette adaptation de son enseignement. Il est en effet peu probable que la seule mise à disposition des élèves des matériaux soit suffisante dans le cadre spécifique de l'enseignement spécialisé pour lequel les relances positives et rassurantes (tout en restant bien entendu questionnantes) restent nécessaires. Ces deux types de médiation, langagière et instrumentale, ont des répercussions sur la conceptualisation et sur la construction du langage comme nous l'avons observé dans notre étude du terrain de l'UPI.

§ *Vers la conceptualisation*

Proposer des situations de recherche à ses élèves caractérise un type d'enseignement, celui de "déposer" dans le milieu un certain nombre d'obstacles au sens de Bachelard²⁹ afin de mettre en scène une situation qui fait sens. Notons alors que cette mise en scène didactique s'appuie nécessairement sur la connaissance de la difficulté relative des tâches cognitives proposées, sur le répertoire des procédures disponibles ainsi que des représentations possibles. Dès lors, une adaptation possible réside dans l'aide à la conceptualisation, il s'agit ainsi de favoriser la production de signes lors de l'activité des élèves. Cette dernière est trop souvent limitée à des traces écrites, il est très délicat pour le professeur d'en analyser les fondements et ainsi de remonter aux sources des difficultés de ses élèves. Chacun sait que la mise en mots (à l'oral) par les élèves est alors une phase déterminante en situation d'apprentissage, surtout lorsqu'elle accompagne une activité d'investigation qui nécessite la formulation d'hypothèses de résolution par exemple, ou la confrontation d'idées par la comparaison de procédures.

Cependant, prendre en compte la dimension expérimentale dans l'enseignement des mathématiques ne se limite pas à susciter des activités langagières dans le cadre de la formulation. Il s'agit aussi de développer en parallèle du langage oral, une production graphique et/ou symbolique lors d'une autre phase d'apprentissage : celle de la validation. Le recours à l'utilisation et à la construction de modèles permet aux élèves de confronter leurs premières élaborations théoriques à la réalité sensible. Ils produisent alors des représentations très utiles à un enseignant soucieux de comprendre les procédures de ses élèves. En effet, la phase de validation ne se réduit pas à une mise en rapport des découvertes des élèves avec un savoir mathématique *déjà là*. Elle s'affirme davantage dans le va-et-vient nécessaire entre la réalité (sensible ou symbolique) et la théorie en cours d'élaboration dans un contexte de recherche de preuve ou d'expérimentation d'une hypothèse. Il faut alors noter à nouveau que le maître, lors de ces situations, a un rôle dynamique puissant à jouer surtout lorsque l'élève se trouve face à un obstacle qu'il n'arrive pas à surmonter.

Développer l'accès aux concepts demande d'une certaine façon une adaptation de l'enseignement surtout dans un contexte très spécifique d'élèves présentant des troubles du langage comme on l'a vu auparavant. Dans l'expérience menée en UPI, la démarche utilisée proche d'un problème ouvert et prenant en compte la dimension expérimentale des mathématiques a permis aux élèves d'améliorer leurs capacités de conceptualisation comme ils ont pu notamment en témoigner lors de la séance de présentation des solutions à l'énigme et du débat qui s'en est suivi.

²⁹ "C'est en terme d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique" (Bachelard, 1938)

§ *les instruments au secours de la représentation*

L'utilisation d'un matériel adapté à la signification des objets dans l'espace permet à tous les élèves de développer des compétences et des connaissances qu'il serait très difficile de mettre en actes (au sens de Vergnaud) par une représentation graphique habituelle dans le plan. A titre d'illustration³⁰, nous avons demandé au groupe des élèves de cinquième de dessiner certains des solides qu'ils avaient construit lors de la séance 1. Les difficultés techniques de représentation des objets dans l'espace ne permettent pas une juste traduction de l'activité mentale des élèves relative à ces objets de savoir. D'autre part, il existe de fortes disparités sur une compétence aussi technique, sans qu'il soit possible pour l'enseignant d'organiser une remédiation appropriée.

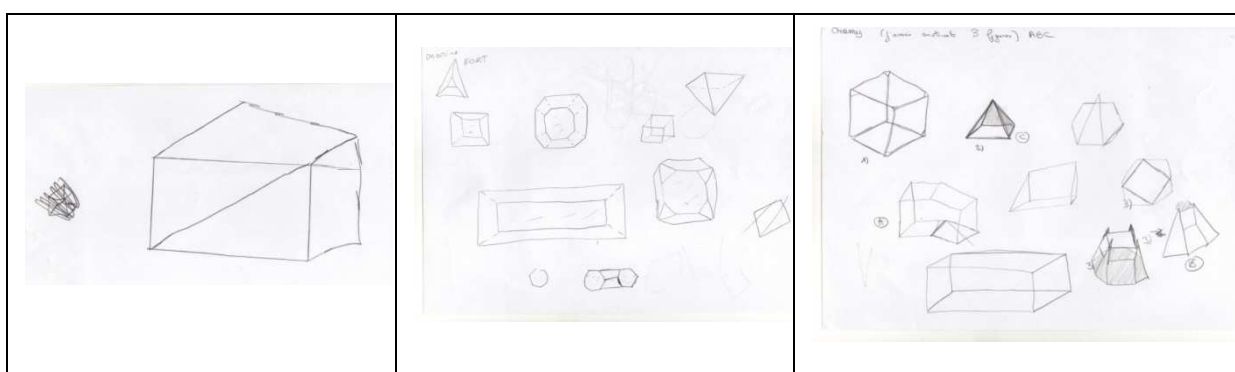


figure 37 : différents niveaux de compétence graphique pour la représentation dans l'espace

La présence d'un matériel adapté permet la production de signes plus faciles à interpréter pour le récepteur, et plus à même d'exprimer la pensée de son émetteur. C'est ainsi que les références culturelles des objets polyèdres peuvent également s'exprimer. Si le cube apparaît par exemple systématiquement comme une réponse au problème, le passage par sa construction réelle s'est tout de même imposée à chaque séance.

Les constructions des polyèdres réguliers ont été ponctuées d'un véritable sentiment de plaisir esthétique. La plupart de ces solides se sont vus attribués soit un nom (le diamant, le ballon de foot, la toupie) soit un adjectif qualificatif valorisant. Ces objets du monde réel semblent fortement ancrés dans des valeurs esthétiques et matérielles, ce qui favorise l'envie de les rencontrer, de les construire et ainsi d'en comprendre les propriétés.

³⁰ Voir l'ensemble des productions en annexe 5.

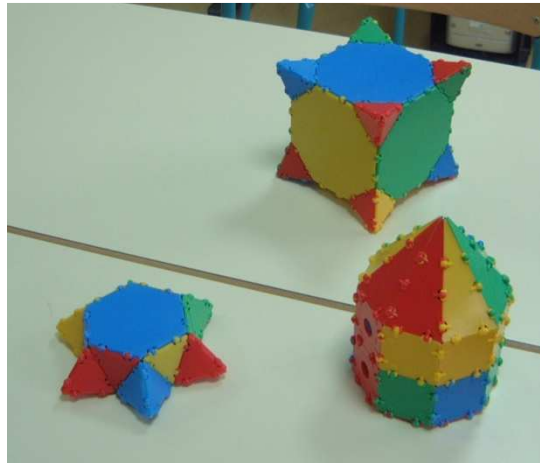


figure 38 : des productions d'élèves réalisées en séance 1

Cette première confrontation à la réalité de la classe conduite en unité pédagogique d'intégration, nous permet de valider les hypothèses émises dans l'analyse a priori de la situation d'apprentissage de recherche des polyèdres réguliers. Nous souhaitons désormais conduire une deuxième expérimentation par la mise en œuvre de cette même situation dans un contexte différent de l'enseignement spécialisé afin de faire varier plusieurs critères :

- l'âge des élèves concernés par la résolution du problème,
- le niveau de connaissance des élèves,
- le dispositif d'accueil (accueil permanent plutôt que temporaire),
- le type de handicap des élèves.

C'est la raison pour laquelle nous avons choisi une classe d'intégration scolaire en école élémentaire pour cette deuxième expérimentation.

chapitre III – Confrontation à la réalité de la classe (2)

Dans ce troisième et dernier chapitre de cette partie consacrée à l'investigation contextualisée dans le champ de l'éducation spécialisée, nous décrivons et analysons une expérimentation de la situation de recherche des polyèdres réguliers sur un terrain différent. Nous souhaitons en effet effectuer une vérification des premiers résultats obtenus en unité pédagogique d'intégration avec des élèves plus jeunes dans le cadre d'un dispositif collectif d'intégration en école primaire. Notre démarche de recherche est de type abductive, cette nouvelle phase de confrontation est aussi une volonté de remettre en question nos conjectures en retournant sur le terrain de l'incertitude que représente une classe de l'enseignement spécialisé du fait de son environnement sensible.

Notre choix s'est porté sur une classe d'intégration dont nous donnerons les éléments relatifs à son inscription institutionnelle dans un premier temps. Ce deuxième terrain d'étude fera aussi l'objet d'une présentation du contexte d'enseignement / apprentissage qui lui est corrélé. Ceci nous permettant de faire des choix de variables didactiques et pédagogiques pour la mise en œuvre de la situation que nous proposons.

Après la présentation détaillée des séances conduites dans la classe d'intégration nous essaierons de stabiliser les invariants qui se dégagent à l'issue de ces deux expérimentations. Nous terminerons par le compte rendu de plusieurs séances connexes à notre situation afin d'étudier les répercussions pédagogiques et didactiques de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans une programmation de classe.

III – 1 Le dispositif de la classe d'intégration scolaire (CLIS)

III – 1.1 Cadre institutionnel

Les classes d'intégration scolaire (CLIS) font partie d'un ensemble de dispositifs relatifs à l'intégration scolaire collective tel que nous l'avons précédemment présenté (partie 2, chapitre I). Il s'agit de structures tout à fait proches des unités pédagogiques d'intégration (dans les objectifs et l'organisation pédagogique), mais les CLIS concernent uniquement les élèves de l'école primaire qui ont entre 6 et 12 ans. Elles ont été créées en 1991 dans le but *d'organiser la scolarité adaptée des élèves qui ne peuvent, dans l'immédiat, être accueillis dans une*

*classe ordinaire et pour lesquels l'admission dans un établissement spécialisé ne s'impose pas.*³¹ Elles étaient alors destinées aux élèves souffrant d'un handicap mental, terminologie abandonnée aujourd'hui. Elles sont désormais régies par une circulaire plus récente³² qui les fonde principalement comme des dispositifs rattachés aux projets d'école, des structures d'accueil qui regroupent des élèves présentant *des besoins éducatifs suffisamment proches*.

La CLIS est une classe de l'école et son projet intégratif est inscrit dans le projet d'école. Elle a pour mission d'accueillir de façon différenciée dans certaines écoles élémentaires ou exceptionnellement maternelles, des élèves en situation de handicaps afin de leur permettre de suivre totalement ou partiellement un cursus scolaire ordinaire. (BOEN, n°19, 2002)

L'admission des élèves dans ces dispositifs relève d'une décision prise en commission des droits et d'autonomie de la personne handicapée, la situation de chaque élève devant être révisée une fois par an. Quatre types de CLIS sont répertoriés dans cette circulaire en fonction du handicap des élèves, cependant il est précisé dans la circulaire qu'il est nécessaire d'attacher une attention particulière à la composition de chaque classe. On insiste sur la nécessaire cohérence du projet pédagogique mais aussi sur la compatibilité des projets individualisés.

Les CLIS 1 ont vocation à accueillir des enfants présentant des troubles importants des fonctions cognitives qui peuvent avoir des origines et des manifestations très diverses : retard mental global, difficultés cognitives électives, troubles psychiques graves, troubles graves du développement...

Les CLIS 2 accueillent des enfants présentant une déficience auditive grave ou une surdité, et pour lesquels l'orientation vers un dispositif collectif s'avère opportune.

Les CLIS 3 accueillent des enfants présentant une déficience visuelle grave ou une cécité, quelles que soient l'origine, la précocité d'apparition et l'évolution éventuelle de la déficience.

Les CLIS 4 accueillent prioritairement des élèves présentant une déficience motrice.

(BOEN, n°19, 2002)

Il existe très peu de CLIS de type 2, 3 et 4; l'essentiel des effectifs concerne les CLIS 1 (environ 95% de ce type sur l'ensemble des CLIS dans le Rhône).

Comme dans les unités pédagogiques d'intégration, chaque élève de ces classes doit pouvoir bénéficier d'un temps d'intégration en fonction de son projet personnel de scolarisation en fonction de ses connaissances et de ses compétences si possible dans une classe de référence

³¹ Circulaire n° 91-304 du 18 novembre 1991

³² Circulaire n° 2002-113 du 30 avril 2002

(qui correspond globalement à son âge). L'effectif total est limité à 12 élèves maximum afin de garantir des conditions propices à la mise en œuvre du dispositif.

Les professeurs des écoles exerçant en CLIS doivent posséder le diplôme d'enseignant spécialisé (CAPA-SH) afin d'être titularisé sur ce type de poste. Mais, comme nous l'avons présenté dans un précédent tableau (tableau 9), une grande partie de ces dispositifs sont gérés par des enseignants non spécialisés voire même par des enseignants débutants. La CLIS, qui est un dispositif de l'enseignement spécialisé, n'est pourtant pas rattaché à une inspection de l'adaptation scolaire (IEN ASH), ce qui ne permet pas aux enseignants de disposer d'un conseil pédagogique proche, ni même d'une formation continue adaptée. C'est sans doute l'une des raisons qui conduit les enseignants spécialisés à ne pas s'inscrire sur le long terme sur le plan professionnel dans ce type de dispositif.

III – 1.2 Le terrain d'étude : une CLIS 1

Notre expérimentation se déroule dans une CLIS de type 1 au sein d'une école primaire de 10 classes. Le dispositif existe depuis très longtemps au sein de l'établissement ainsi que le processus d'intégration des élèves. Depuis septembre 2006 il est sous la responsabilité d'une enseignante spécialisée. Cette professeure des écoles est expérimentée mais n'est titulaire de son diplôme d'enseignante spécialisée que depuis 2 ans. L'équipe pédagogique de l'école est relativement expérimentée et plutôt stable, le projet d'école porte sur l'éducation à l'environnement.

L'école primaire est située en secteur géographique semi rural (banlieue lyonnaise), ce qui ne correspond d'ailleurs pas complètement à la provenance des élèves de la CLIS. Ils peuvent venir d'assez loin en fonction de l'organisation des placements au niveau départemental. Il s'agit d'un dispositif accueillant des élèves présentant des troubles plus ou moins importants des fonctions cognitives, ils sont 12 au total, ce qui correspond à l'effectif maximum.

Les raisons du choix de ce terrain sont multiples mais nous souhaitons surtout proposer notre expérimentation à un niveau scolaire de l'école primaire (avec des élèves plus jeunes donc) dans un dispositif où les élèves sont en situation de handicap cognitif. Nous souhaitons proposer une variabilité des terrains pour la recherche afin d'affiner nos observations. Nous souhaitons également proposer ce travail dans un dispositif pour lequel les enseignants ne disposent pas systématiquement d'une formation continue adaptée (ce qui est le cas pour les professeurs en CLIS comme nous l'avons présenté auparavant), c'est une forme de "compensation" pour l'enseignant qui accepte le projet.

La mise en œuvre de l'expérimentation a demandé l'accord du projet à plusieurs niveaux, ce qui s'est déroulé dans de très bonnes conditions. L'enseignante était enthousiaste et faisait déjà partie du réseau des enseignants spécialisés du projet "rallye-ASH" que nous présenterons dans la troisième partie de notre thèse. L'accord de l'inspectrice de circonscription a été

sollicité et obtenu rapidement notamment en raison de son intérêt en tant qu'inspectrice responsable du groupe départemental mathématiques et sciences³³. L'accord écrit des parents des élèves à lui aussi été sollicité dans le cadre des prises de vue engendrées par nos enregistrements, 100% des réponses ont été favorables.

Les contenus mathématiques proposés correspondaient à la progression de l'enseignante qui souhaitait conduire une situation d'apprentissage en géométrie. Le climat de classe est parfaitement adéquat l'enseignante ayant développé de nombreux rituels concernant l'écoute et le respect de chacun quelles que soient ses capacités et ses difficultés.

Enfin, parmi les raisons du choix de ce terrain il faut également citer le contexte matériel adéquat en vue de nos enregistrements vidéo possibles dans une classe très lumineuse et relativement grande. La classe bénéficie également de l'accompagnement d'une auxiliaire de vie scolaire que nous avons pu également faire participer au projet.

III – 2 Contexte d'enseignement / apprentissage

La classe d'intégration comporte 12 élèves tous orientés par la commission départementale des droits et de l'autonomie de la personne handicapée. Ils ont tous fait l'objet d'un projet personnel de scolarisation en accord avec les familles dans le strict cadre de la loi de février 2005 (présentée dans le chapitre précédent). Ces élèves souffrent tous de troubles des fonctions cognitives importants (définies par un retard mental global, des difficultés cognitives électives, des troubles psychiques, des troubles graves du développement) et se caractérisent par :

- un rapport anxiogène aux apprentissages (ce qui a des conséquences importantes sur leur autonomie),
- une image de soi relativement dégradée,
- des relations interpersonnelles difficiles soumises notamment aux problèmes de leadership,
- des lacunes importantes dans les apprentissages de base en français et mathématiques.

³³ Ce groupe départemental est sous la responsabilité d'un inspecteur départemental désigné par l'inspecteur d'académie, il est constitué d'un réseau de conseiller pédagogiques et maîtres relais sciences. Les actions de ce groupe relèvent de la formation continue des enseignants du premier degré en contexte ordinaire.

	cycle ≈	niv. scol. mathématiques ≈	classe de référence	âge	type de handicap ³⁴	suivis particuliers
Ry	3	CE2	CM1	11	TFC	psycho. (CMP)
De	3	CE2	CE2	11	TFC + TSL	orthophonie
Je	3	CE2	CM2	12	TFC	demande suivi AS
Ju	2	CE1	CE1/CE2	10	TFC	
An	3	CE2	CM2	12	TFC	
Hi	3	CE1	CM2	11	TFC + dyscalculie ?	
Ma	2/3	CE1	CE1	11	TFC + TDP	psychologique
Gr	2	CP	CE1	10	TFC + DV légère	psycho. + ortho. + ES
Jo	2	GS mat.	CE1	9	TFC + phobie scolaire	psycho. + psycho. motricité + orthophonie
Ba	3	CE2	CE2	11	TFC	orthophonie
Sy	3	CE2	CE2	11	TFC	
Fl	3	CE2	CM1	12	TFC + TSL + dyspraxie	psycho. + psycho. motricité + orthophonie

tableau 13 : présentation des élèves de la CLIS

Le groupe d'élèves possède un vécu commun assez important, seulement 3 nouveaux enfants ayant intégré le dispositif pour cette année de l'expérimentation (2007-2008). Ils sont tous intégrés relativement régulièrement dans des classes de l'école essentiellement dans le cadre des enseignements artistiques et d'éducation physique et sportive. Une élève (An., 12 ans) suit le programme de mathématique du niveau CE2 grâce à une intégration quotidienne (5 heures par semaine).

Le contexte d'enseignement / apprentissage de cette classe est approprié à la mise en œuvre de la situation que nous proposons, notamment du fait de sa participation depuis deux ans au projet du rallye mathématiques-ASH que nous organisons sur le département (voir partie C chapitre II de la thèse). Un entretien avec l'enseignante a permis d'en établir les principaux effets compatibles avec notre projet d'expérimentation :

- le vécu commun des élèves de la classe dans le travail en groupes,
- la dynamique de la démarche de recherche,
- les habitudes créées dans la prise de recul par rapport aux tâches et aux activités,
- l'étude systématique des démarches de résolution,
- un rapport différent à l'erreur dans le cadre d'une démarche expérimentale.

³⁴ TFC : troubles des fonctions cognitives ; TSL : troubles sévères du langage ; TDP : troubles du développement et de la personnalité ; DV : déficience visuelle ; CMP : centre médico-psychologique

L'enseignante professeur des écoles titulaire de la classe, nous a aussi témoigné du vif intérêt des élèves pour toutes les tâches concernant le domaine géométrique, un domaine dans lequel le sentiment d'échec est peu prégnant pour eux (sans doute par absence d'expérience d'apprentissage dans leur cursus scolaire ordinaire antérieur). Afin de ne pas isoler la séquence sur les polyèdres dans la programmation en mathématiques de la classe, il a été décidé de prolonger les situations d'apprentissage dans ce domaine à d'autres séances dont une consacrée à l'évaluation des acquis. Nous analyserons essentiellement les deux séances consacrées à notre dispositif de recherche, mais nous présenterons aussi le travail effectué a posteriori afin de donner une vision plus globale. Il nous paraît en effet important dans une confrontation avec la réalité d'une classe d'adopter le point de vue de l'enseignant qui en assure la responsabilité.

III – 3 Mise en œuvre de la situation

Pour cette expérimentation, nous avons gardé un modèle de mise en œuvre très proche de celui conduit en unité pédagogique d'intégration et présenté dans le chapitre précédent. Dans un premier temps, nous avons programmé une séquence en deux ou trois séances, la première consacrée à la découverte du matériel et la deuxième à la recherche des polyèdres réguliers. Cependant, l'enseignante a souhaité associer un certain nombre de séances connexes³⁵ au travail sur les polyèdres afin de bâtir un véritable projet d'enseignement. Ce projet est conduit finalement sur huit séances selon la programmation suivante :

- jeu de *la bataille de solides* (pour une appropriation du matériel et l'émergence du vocabulaire géométrique spécifique), cette séance correspond à la "*séance 1*" de notre situation didactique;
- dessins des solides construits (travail sur les représentations);
- jeux de Kim³⁶ : reconnaissance des propriétés par le toucher et comparaison avec des représentations iconographiques (photos);
- constructions libres de solides en atelier;
- situation de recherche des polyèdres réguliers et mise en commun, cette séance correspond à la "*séance 2*" de notre situation expérimentale;
- institutionnalisation : désignation, description des solides et propriétés des figures planes;
- évaluation sur les compétences lexicales;
- nouvelle situation de recherche sur les patrons du cube.

³⁵ Ces séances seront décrites dans le paragraphe II-5 de ce chapitre.

³⁶ Les jeux de Kim sont des jeux traditionnels permettant d'exercer les 5 sens.

Nous avons également décidé de certaines variables en fonction du contexte spécifique de cette classe d'intégration scolaire.

III – 3.1 Variables didactiques et pédagogiques

Deux séances constituent la séquence d'apprentissage (au lieu de trois en UPI), car nous avons souhaité garder la même temporalité pour l'ensemble du groupe afin de nous adapter au fonctionnement habituel de la classe. Les recherches ont été conduites dans le même lieu et dans un même temps avec un dispositif de travail en deux groupes d'élèves. Une mise en commun terminale collective s'est déroulée en fin de séance 2.

Comme pour l'expérimentation en UPI, la séance de recherche proprement dite a été précédée d'une séance d'expérience sur le matériel afin de faire fonctionner le vocabulaire spécifique de la géométrie utile dans la situation. Cette séance a cependant revêtu un caractère plus ludique compte tenu de l'âge des élèves : le jeu de la bataille des solides. Les raisons de ce choix tiennent dans les points suivants :

- donner une finalité à l'activité proposée aux élèves,
- permettre la construction de solides différents,
- utiliser la comparaison deux à deux pour faire émerger la notion de critères et de propriétés,
- faire émerger la nécessité d'une description critériée avec un vocabulaire adéquat,
- provoquer une amorce d'argumentation dans le débat comparatif.

La consigne de la situation de recherche a elle aussi subi des modifications et des adaptations au contexte de la CLIS. La forme de l'écrit, sa syntaxe, son contexte et son support ont été revus. Comme pour notre première expérimentation en collège, nous avons délibérément choisi de ne pas faire figurer la notion d'égalité des degrés des sommets des polyèdres réguliers dans leur définition, pour les mêmes raisons qu'évoquées auparavant. De plus, la terminologie "*polyèdres réguliers*" semblait poser d'importants problèmes de signification, nous avons choisi de la remplacer par "*solides parfaits*". Cette terminologie est plus proche du registre sensible, ce qui ne nous semble pas incompatible pour autant avec l'évocation d'objets théoriques.

III – 3.2 Descriptif de la séquence

Objectifs poursuivis

Quatre objectifs principaux ont été poursuivis lors de cette situation d'apprentissage, ils ont été établis en collaboration avec l'enseignante titulaire de la classe :

- "Faire fonctionner" le vocabulaire de la géométrie dans l'espace : face, arête, sommet, solide, polyèdre, côté, angle, volume (vs à plat)
- Commencer à dégager quelques notions clés en géométrie : en terme de relations, de propriétés et éventuellement de classification.
- Découvrir, agir et expérimenter avec un matériel spécifique pour des activités scientifiques.
- Développer les échanges langagiers de type énonciatifs puis argumentatifs.

Ces objectifs ont été mis en relation avec le socle commun de connaissances³⁷ tel qu'il est demandé de faire dans toute préparation pédagogique à l'école primaire.

CONNAISSANCES	CAPACITÉS
<p>Solides : cube, parallélépipède rectangle</p> <p>connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire suivant : cube, parallélépipède rectangle ; sommet, arête, face.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - percevoir un solide, en donner le nom, vérifier certaines propriétés relatives aux faces ou arêtes d'un solide à l'aide des instruments ; - décrire un solide en vue de l'identifier dans un lot de solides divers ou de le faire reproduire sans équivoque ; - construire un cube ou un parallélépipède rectangle ; - reconnaître, construire ou compléter un patron de cube, de parallélépipède rectangle.

tableau 14 : présentation du socle commun en fonction des objectifs poursuivis dans la situation d'apprentissage

Dispositif social pour les deux séances :

Le contexte de la CLIS nécessite de privilégier l'alternance des dispositifs sociaux dans des temps relativement courts. En effet, les élèves sont très sensibles à la durée de chaque type de regroupement, ce qui implique un découpage des activités en conséquence. Trois temps ont été inscrits chronologiquement pour chacune des deux séances :

- temps 1 : dispositif de travail en collectif pour le passage de la consigne
- temps 2 : travaux en groupes de 6 élèves

³⁷ Le socle commun de connaissances est défini institutionnellement par le décret n° 2006-830 du 11 juillet 2006.

- temps 3 : dispositif collectif pour la mise en commun

Les 12 élèves sont répartis par l'enseignante en deux groupes de 6 selon des critères qu'elle a choisis du fait de sa connaissance des capacités des élèves, de leurs affinités relationnelles, ou des expériences conduites auparavant dans des travaux de groupes. Ce dispositif sera reconduit sur les deux séances avec les mêmes compositions.

Organisation matérielle pour toutes les séances

Plusieurs boîtes de polygones articulables (polydrons + clixi) sont mis à la disposition des élèves pour leurs expériences.

§ *séance 1 : "la bataille de solides"*

Consignes écrites au tableau :

Jeu : bataille de solides

1/ Chaque équipe doit construire des solides complètement fermés tous différents et essayer de leur donner un nom. Il faudra ensuite préparer leur description (dire comment et avec quoi ils sont construits)

2/ Bataille

Un élève de l'équipe A choisit un solide et le présente à l'équipe B. Si l'équipe B n'a pas construit le même solide, l'équipe A marque un point, sinon il y a match nul. C'est ensuite au tour de l'équipe B de présenter un solide, et ainsi de suite.

Déroulement de la séance :

Quatre temps différents sont à distinguer, même si les temps 3 et 4 peuvent éventuellement être eux-mêmes scindés en plusieurs types de tâches. Les durées sont celles indiquées a priori dans la préparation, ce ne sont pas les durées effectives :

- Lecture de la consigne par l'enseignante : 3 minutes
- Temps d'appropriation et d'explicitation collective : 5 minutes
- Recherche : 30 minutes
- Mise en commun : 30 minutes

§ *séance 2 : "recherche des solides parfaits"*

Consigne de la situation de recherche :

La consigne est lue par l'enseignante (plusieurs élèves sont en assez grande difficulté en lecture), puis distribuée individuellement par écrit sous la forme d'un parchemin³⁸.

³⁸ Voir l'original en annexe 6.

Le maître du Donjon vit dans un château dont lui seul connaît l'entrée. Personne ne peut y pénétrer. C'est le plus grand sorcier de tous les temps, il possède des pouvoirs magiques importants avec lesquels il jette des sorts.

Pour cela, il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais, personne ne sait combien il en a.

Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des solides parfaits.

Seule une chouette connaît les plans de ces solides parfaits.

Elle sait que chaque solide est fabriqué avec des faces identiques et régulières (leurs côtés et leurs angles sont égaux comme dans le carré).

Elle sait aussi que les faces d'un solide parfait sont toutes identiques.

Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon possède de dés magiques ?

Déroulement

La séance est finalement découpée en deux temps distincts séparés par une récréation du fait de sa longueur. En effet, l'enseignante préfère ne pas différer à un autre jour la mise en commun générale consacrée à la solution du problème.

recherche :

- Lecture collective de la consigne : 3 minutes
- Temps d'appropriation et d'explicitation : 5 minutes
- Temps de recherche en groupes : 35 minutes
- Mise en commun en groupes (portant sur la préparation de la communication) : 15 minutes

présentation des travaux :

- Chaque groupe présente ses résultats : 2 x 15 minutes
- Temps de questionnement et de remarques d'un groupe à l'autre : 20 minutes
- Débat autour de la solution à cette énigme.

(Les indications de temps données sont prévisionnelles.)

§ *adaptation de la situation à l'enseignement spécialisé*

concernant la participation des élèves

Lors de ces deux séances, nous avons observé une participation importante de tous les élèves, y compris de ceux qui sont diagnostiqués avec des phobies scolaires. Quel que soit le niveau de connaissances, la motricité nécessaire aux manipulations, les compétences langagières, tout la classe participe à l'activité. Même lors de la mise en commun, aucun refus ni blocage n'est à signaler alors que cela représente un moment délicat pour certains élèves du fait de l'exposition au grand groupe (inhibition pour certains, "surexposition" pour d'autres).

L'enseignante témoigne que ce type d'observation est détecté dans plusieurs autres activités géométriques et également dans le contexte du rallye. Tout nous laisse donc à penser que la notion d'équilibre du milieu laboratoire permet de rassurer tous les élèves.

Il faut également signaler que malgré la relative longueur de chacune des séances, une forte mobilisation reste de mise parmi les élèves. Le maintien dans la tâche est assurée par les rétro-actions du milieu et par la mise en actes des connaissances, ceci est un point essentiel dans le déroulement d'une situation d'apprentissage dans le contexte de l'enseignement spécialisé.

le rôle du milieu matériel

Le milieu matériel de notre situation est considérablement enrichi par la présence du matériel de construction. Il favorise l'action par l'expérience de la manipulation. Le statut de la manipulation au service d'une réelle situation d'apprentissage est certainement la clé, ce qui est un point fort pour la géométrie (comme déjà observé à plusieurs reprises et dans des contextes différents). Avec des élèves en situation de handicap langagier, la possibilité d'une mise en actes des connaissances par le geste, la fabrication et la création est de nature à révéler des compétences relativement invisibles (ou illisibles) dans l'environnement de la langue.

Nous avons observé que ce sont les pièces carrées et triangulaires qui sont prioritairement utilisées dans les premiers instants de manipulation, dans les premières constructions et expérimentations. Elles font partie des objets les plus familiers et leur emboîtement est assez facile, ceci rejoint l'une de nos conjectures émise sur la nécessaire familiarité des éléments du milieu. Cette caractéristique est à même d'assurer le passage à de nouveaux objets en servant à la fois de point de départ rassurant et de tremplin vers la construction d'autres savoirs. Ainsi, alors qu'aucune allusion n'avait été faite aux polyèdres réguliers, trois solides de Platon sont construits au cours de la séance 1 : cube, puis tétraèdre et dodécaèdre. Même si ces constructions sont relativement rigides (trois faces pour chaque sommet), l'assemblage des pentagones représente tout de même une construction longue et susceptible de "casser" avant la fin. L'apparition relativement chronologique dans le milieu, est vraisemblablement initiée par la construction du cube qui représente l'objet le plus familier de cette classe d'objets. Une fois construit, le cube sert de témoin pour les constructions de solides dont les sommets sont de degré 3.

travail de groupe

Lors du travail en équipes, nous avons observé de nombreux comportements significatifs de l'acceptation de la collaboration dans la recherche. Ainsi les constructions individuelles sont très rapidement prises en compte par l'équipe, elles sont commentées, comparées voire même abandonnées (détruites) lorsqu'elles représentent un double (séance 1). Ce type d'interaction constructive n'est pas toujours observable dans le contexte des classes de l'enseignement

spécialisé. Il semble que l'environnement est suffisamment stable et rassurant dans ses aspects relationnels et matériels pour permettre l'expression de ce type de comportement.

II – 4 Les invariants stabilisés

A l'issue de cette deuxième expérimentation de notre situation sur le terrain de l'enseignement spécialisé, nous souhaitons faire le point sur les invariants didactiques et pédagogiques que nous pouvons considérer comme les premiers résultats de notre recherche. Nous les traiterons en quatre parties comme des éléments constitutifs du milieu de type laboratoire : médiation, modélisation, antagonisme et stabilité.

II – 4.1 La médiation du geste : opération sur les artefacts

Lors de nos observations en UPI ou en CLIS, nous avons constaté une utilisation relativement constante des gestes lors des descriptions, des dénotations et même de l'argumentation. Nous pensions dans un premier temps qu'il s'agissait là d'une forme de compensation de l'expression langagière surtout dans le contexte des élèves présentant des troubles sévères du langage. Mais nous avons constaté que cette gestuelle faisait également partie des stratégies et des postures d'enseignement lors de la mise en œuvre de notre situation didactique. Selon nous, il s'agit là d'une des caractéristiques du milieu spécifique à la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques. Cette forme de médiation sémiotique propose de nouveaux interprétants et des signes moins statiques.

"Apprendre ou faire apprendre, accorder ou céder de la mobilité graduellement à un corps, c'est toujours inventer une homogénéité nouvelle, un potentiel et se refuser aux procédures expéditives de transfert d'informations." (Châtelet, 1993, p44)

Cette référence à Châtelet dans *"Les enjeux du mobile"* donne une nouvelle définition possible à la réalité : le réel est ce qui exige une action, qui demande un geste. Mais le geste ne se laisse pas réduire à l'acte. Pour libérer la pensée d'un monde partagé entre le réel et la pensée, Châtelet introduit ce concept de geste qui n'exclut nullement l'urgence de « penser avec les mains ».

Les signes présents dans le milieu sous la forme d'artefacts (par exemple les pièces en plastique) peuvent devenir des instruments grâce aux opérations qui sont possibles sur eux. L'assemblage de deux faces permet à la notion d'angle dièdre d'exister non pas simplement sous une seule représentation, mais par un ensemble d'expériences possibles grâce à la variable de l'articulation. Ce sont les mouvements possibles du jeu sur les pièces qui

permettent d'accéder à la notion de grandeur de l'angle dièdre, en allant jusqu'au cas limite de sa mesure rencontrant le plan. Ceci est somme toute une forme de géométrie dynamique en lien direct avec le réel du monde sensible, une forme de "géométrie du monde sensible" (Nicod, 1923).

Dans nos confrontations avec la réalité des classes, nous avons par exemple constaté que les gestes pouvaient être associés à la désignation des choses (objets matérialisés, représentations objectives d'idéaux) :

- la main mime une caresse pour la face
- le doigt suit la longueur d'une arête
- le doigt pointe les sommets (en rebondissant)
- les mains dessinent le cercle ou entourent la sphère.

On voit ainsi comment le mouvement est bien utile à l'acquisition de concepts géométriques. Ce qui détermine l'objet sensible est un jeu sur les signes : un mot et un mouvement corporel qui semble de plus être à même de représenter un bon moyen mnémotechnique. Nous en profitons ici pour citer Giusti (2000, p.22) qui commente la définition de la sphère donnée par Euclide, une définition pleine de *gestualité* :

"la sphère est une figure enclose par une demi circonférence qui tourne autour du diamètre jusqu'à revenir au lieu d'où elle était partie" (Euclide Livre XI),

qui évoque plus le tour de l'ouvrier que le compas du géomètre" (Giusti, 2000)

II – 4.2 Modélisation : de la perception à la signification

Les savoirs scientifiques (et pas seulement mathématiques) font référence à des notions, à des objets idéaux dont l'acquisition ne se limite jamais à une quelconque perception. L'étude qui permet leur appropriation est un processus de signification : le dodécaèdre idéal restera à jamais invisible, c'est le réseau des signes qui le représentent qu'il faut appréhender. Dans la situation que nous mettons en œuvre lors de cette recherche, ce processus est assimilable à la modélisation.

Dans le jeu de la recherche des polyèdres, c'est une définition formulée en langue naturelle qui sert de point d'ancrage : *Les polyèdres réguliers sont des polyèdres convexes dont les faces sont des polygones réguliers égaux et dont les sommets sont équivalents*. Affirmer leur existence consiste à les construire (Durand Guerrier et Héraud, 2006). Ces objets réels ainsi construits modélisent les objets théoriques puisqu'ils représentent une réalisation de la définition. En retour, les décrire permet de fonder la perception par une signification, il est ainsi fondamental d'utiliser un réseau de signes (mots, symboles, indices, gestes) riche et consensuel.

Le rôle du langage, des mots qui dénotent, semblent déterminant, c'est le recours à l'utilisation du registre langagier qui permet la médiation entre objet théorique non familier (que l'on appelle provisoirement par un nom) et l'objet du monde sensible (et donc familier) que l'on peut appeler voire même baptiser sans conséquence. Or, nous avons constaté dans nos deux expérimentations en classe que le vocabulaire utilisé spontanément pendant les phases d'action puis de formulation est relativement pauvre (forme, rond, carré). D'autres mots sont pourtant présents dans les connaissances des élèves puisqu'ils peuvent émerger lorsqu'ils sont sollicités par le milieu. La modélisation, en tant que recherche d'une représentation partagée, stimule le travail spécifique sur le lexique et permet le passage progressif d'une dimension à une autre :

- du sensible : ce solide est plus petit / plus grand / plus gros,
- au théorique se traduisant par exemple par l'acceptation de la similitude de deux objets perceptivement différents, donc théoriques.

Ainsi avons-nous constaté lors des deux expérimentations des similitudes dans le déroulement des mises en commun. En fin de séquence de la situation didactique, il est par exemple intégré qu'*un cube spécifique représente un cube générique*, taille, couleur et type de matériel utilisé sont relégués au champ sensible et n'empêchent plus de faire référence au concept. La modélisation et le travail sur la signification ont permis l'émergence d'un processus d'abstraction.

II – 4.3 Antagonisme du milieu et cas limites

D'après nos observations, le milieu de notre situation didactique peut être qualifié d'antagoniste au sens de la théorie des situations de Brousseau. Par ses rétro-actions, certains de ses éléments contestent les évidences ou les intuitions en créant l'émulation nécessaire à la construction des connaissances, nous proposons d'en explorer trois de ces principaux éléments.

La démarche d'investigation que nous utilisons est basée sur une problématisation de l'activité des élèves, ceci nous semble être le premier élément caractérisant l'antagonisme du milieu. Les tâches confiées aux élèves proposent des questions consistantes sous la forme d'obstacles qui ne paraissent pas infranchissables du fait de leur lien avec des connaissances familières déjà là. Ce questionnement est accompagné des conditions de réussite pour la résolution du problème (définition des objets, instrumentation de l'activité), mais ne fournit évidemment pas de réponses, ce qui fonde son caractère antagoniste. La résistance due à cette problématisation détermine la consistance de la situation en assurant à ses acteurs la rencontre du sens.

Comme nous l'avons développé dans notre étude théorique, la dimension expérimentale des mathématiques est fondée sur le rapport dialectique entre les objets théoriques et les objets sensibles. La confrontation des objets théoriques au réel se fait dans un processus de modélisation (ou d'abstraction par schématisation pour suivre Gonseth³⁹) qui soulève un certain nombre de problèmes, de résistances. Pour étayer cette phase dialectique entre les objets, nous proposons d'instrumenter les élèves avec un matériel spécifique lui-même source de rencontres inattendues : les cas limites. Le milieu matériel possède ses propres contraintes : articulations, isométrie ou non des côtés, souplesse plastique, catégories de polygones (propriétés et tailles). Nous avons vu par exemple que la construction d'un solide avec des hexagones soulevait la question de la limite du plan du fait de la souplesse des pièces en plastique. Certains élèves ont aussi tenté de construire des "solides plats" pour tester l'axiome *un sommet appartient à trois faces au minimum*.

Ces rencontres sont matérialisées dans l'espace sensible grâce aux rétro-actions antagonistes des éléments du milieu, elles correspondent néanmoins à l'étude incontournable sur les objets mathématiques théoriques qui leur correspondent. Ces rencontres problématiques sont autant d'obstacles qui nécessitent l'adaptation des connaissances des élèves et ainsi les apprentissages.

La troisième caractéristique de l'antagonisme du milieu dans notre situation tient dans le dispositif social que nous proposons dans le cadre de la mise en œuvre en classe. La démarche d'investigation est fondée sur la co-construction des connaissances grâce à la description des actions conduites, à la formulation collective des hypothèses et à la présentation publique des résultats. L'ensemble des situations de communication nécessitent une adaptation des dispositifs sociaux. Ils doivent privilégier des phases de travail en équipes alternant avec des moments de mise en commun collectives.

Cependant, la co-construction ne signifie pas l'accord parfait et notamment dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Le conflit socio-cognitif est une forme d'antagonisme du milieu qui se manifeste par les interactions entre les élèves. Dans un dispositif collectif ou de travail en équipe, chaque acteur agit sous le regard et les connaissances des autres. Si cela permet de garantir en quelque sorte la validité des actions, cela représente néanmoins une prise de risque pour l'ensemble du système didactique. Les avis contradictoires exposés dans le milieu sont propices à la construction des connaissances si le contrôle est assuré par la validation scientifique. Dans notre situation de recherche des polyèdres, nous avons pu observer ce fonctionnement du conflit socio-cognitif et sa régulation par le milieu. La forte présence des objets mathématiques et l'étayage de l'enseignant sont de nature à assurer une communication tournée vers le débat et la confrontation d'idées.

³⁹ Ferdinand Gonseth, La méthode axiomatique, Bulletin de la société Mathématique de France, 1939

Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, il nous paraît essentiel de garantir des apprentissages qui ont du sens, le milieu et son caractère antagoniste nous semble de nature à l'assurer.

II – 4.4 Stabilité du milieu et apprentissages

Nous avons donné une particularité au modèle de milieu que nous expérimentons dans les classes de l'enseignement spécialisé : sa nécessaire stabilité. Il nous paraît en effet essentiel de garantir les apprentissages des élèves dans une recherche comme celle que nous menons. Compte tenu de l'environnement très sensible des classes que nous avons investies, cette recherche ne pourrait se concevoir sans avoir pour objectif une stabilité assurée du système didactique que nous proposons. Il en va de même sur le plan du développement professionnel des enseignants qui doit lui aussi être pris en compte dans notre recherche. A l'issue de nos deux expérimentations, nous avons obtenu des résultats quant à ces objectifs.

Sur le versant de l'enseignement, notre situation a été bien prise en charge dans la conduite des classes. Nous n'avons pas observé de déstabilisation dans les pratiques professionnelles mais au contraire une forte adhésion à la démarche proposée (elle sera confirmée à une plus grande échelle dans la troisième partie de la thèse). Nous avons constaté que l'appropriation des enjeux de la situation était rapide comme nous l'avons rapporté précédemment. L'une des raisons peut être que le milieu que nous étudions assure une place centrale à l'enseignant dans l'environnement didactique que ce soit dans la préparation ou la conduite de la classe. Il semble que cette caractéristique soit de nature à rassurer les professeurs dans leur action professionnelle. Nous avons vu par exemple comment le rôle de l'étayage enseignant dans la régulation des processus de signification était source d'expérience professionnelle positive. La médiation sémiotique et les phases de validation conduisent l'enseignant à *faire des mathématiques* devant les élèves, avec eux. Lors de l'expérimentation en CLIS, nous avons observé un moment que nous pouvons rapporter ici comme illustration. La question de l'appartenance du losange à la classe des polygones réguliers était soulevée par la construction d'un polyèdre. La stabilité de la situation semblait alors en question tant le solide était proche des conditions émises (entièrement fait de losanges dont la forme est proche des carrés dans le matériel à disposition). Voyant que le signe de l'irrégularité des angles dans le losange n'était pas suffisamment saillant, l'enseignante choisit un autre support pour étayer ce processus. Elle découpe un grand losange dans du papier, trace en couleur les angles puis propose le découpage et la superposition des angles pour leur comparaison. L'adhésion de l'ensemble des élèves à la démonstration déclenche le retour à la stabilité du milieu, l'avancée du temps didactique n'est ainsi pas remise en question.

Le milieu favorisant la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques est donc de nature à favoriser les enseignements scientifiques. Nous devons néanmoins étendre

notre champ d'étude à d'autres terrains que celui de l'enseignement spécialisé et notamment à celui de la formation des enseignants, ceci sera l'objet de la troisième partie de la thèse.

Du côté des apprentissages, force est de constater que l'expérimentation en classe d'intégration scolaire confirme la potentialité de la construction de connaissances telle qu'elle avait été observée en unité pédagogique d'intégration. Lors de cette confrontation avec la réalité d'une classe de l'enseignement spécialisé, notons en premier lieu les découvertes importantes des deux équipes. Seul l'octaèdre a été oublié dans l'un des deux groupes, ce qui est un résultat plus complet que lors de l'expérimentation conduite en UPI avec des élèves bien plus âgés.

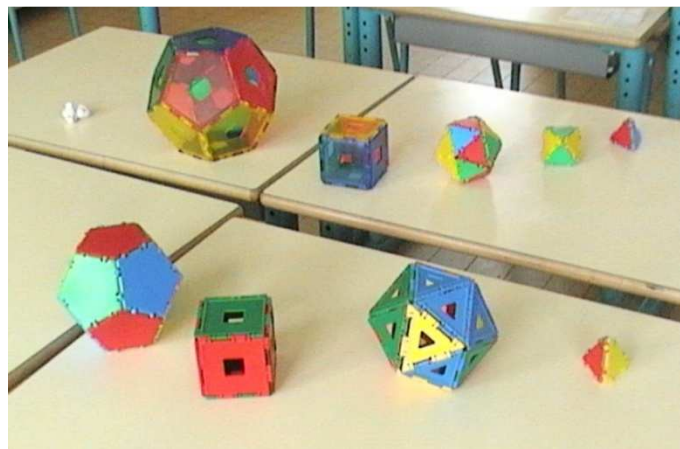


figure 39 : les réponses des deux équipes en CLIS

Nous avons également observé que le milieu proposé favorisait l'autonomie dans les apprentissages notamment grâce au matériel, à sa manipulation et aux déséquilibres permettant l'adaptation des élèves. L'autonomie est permise par la garantie du contrôle de la stabilité du milieu par l'étayage enseignant (dévolution, maintien dans la tâche, ostension). Les expériences sont nombreuses et libérées de toute inhibition par le contexte du laboratoire de recherche : toutes les actions sont permises y compris celles qui mènent à l'inattendu. L'enseignant est là pour prendre en considération ces expériences que les élèves réalisent de manière parfois marginale ou imprévue et leur permettre de les transformer en savoir.

Enfin, c'est la spécificité du processus de validation en œuvre dans le milieu laboratoire qui assure l'accès aux savoirs. La mise en acte des connaissances est assurée par le processus d'adaptation des élèves aux rétro-actions du milieu, mais cette mise en acte doit s'accompagner d'une acquisition (puis d'une stabilisation) des savoirs pour atteindre la finalité éducative de l'institution école. Cette acquisition est possible grâce au développement d'un processus de validation qui consiste à exhiber explicitement les conditions de vérité des propositions émises. Produire les objets de validation c'est apporter des arguments en vue

d'une communication, c'est construire un réel partagé (Lelong, 2004). Le rôle de l'enseignant est de garantir la conformité des connaissances construites.

Nous concluons par une forme d'évidence pédagogique. Les équilibres dans le processus d'enseignement / apprentissage tiennent aux conditions qui permettent un développement personnel des individus : des élèves qui apprennent et un professeur qui enseigne. C'est la consistance didactique de la situation et l'étayage du professeur qui contribuent à la régulation du système.

II – 5 Séances connexes

Ce sont finalement six séances connexes qui auront été consacrées au projet de travail sur les polyèdres. Elles ont toutes été à l'initiative d'un travail collaboratif avec l'enseignante qui les a préparé et conduites sous notre observation. Nous les présentons plus ou moins succinctement ici afin d'en étudier les apports dans le cadre de notre recherche, mais aussi pour apporter un témoignage sur l'engagement pédagogique de l'enseignante suite à la mise en œuvre de la situation didactique proposée. Ceci confirme l'hypothèse émise sur la valeur ajoutée pour l'enseignement de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques.

II – 5.1 Dessins des solides construits

Le jeu de la bataille des solides a permis de nombreuses constructions originales. Ces productions émanant de l'intuition et des expériences des élèves catalysées par le contexte de la situation sont l'expression d'un réseau de signes référencés à des objets particuliers. Il nous semblait important d'essayer de mettre en relation ces représentations avec d'autres interprétants (dans un autre registre). Comme il n'était pas à la portée des élèves de leur associer des noms scientifiques dans le registre de la langue naturelle (ce qui n'était d'ailleurs pas toujours possible), nous leur avons demandé d'essayer de les dessiner. Notre intention ne résidait pas dans une évaluation de leur performance graphique de dessin en perspective, mais dans la recherche des indices signifiants dans cette représentation graphique.

Les solides proposés étaient tous issus de leurs propres constructions établies lors du jeu de la bataille des solides. Aucune exigence d'outils d'aide au tracé n'a été donnée, l'utilisation de couleurs n'a pas été demandée non plus. Malgré la difficulté que représente une telle tâche, tous les élèves ont produit des dessins certains en ont même effectué plusieurs.

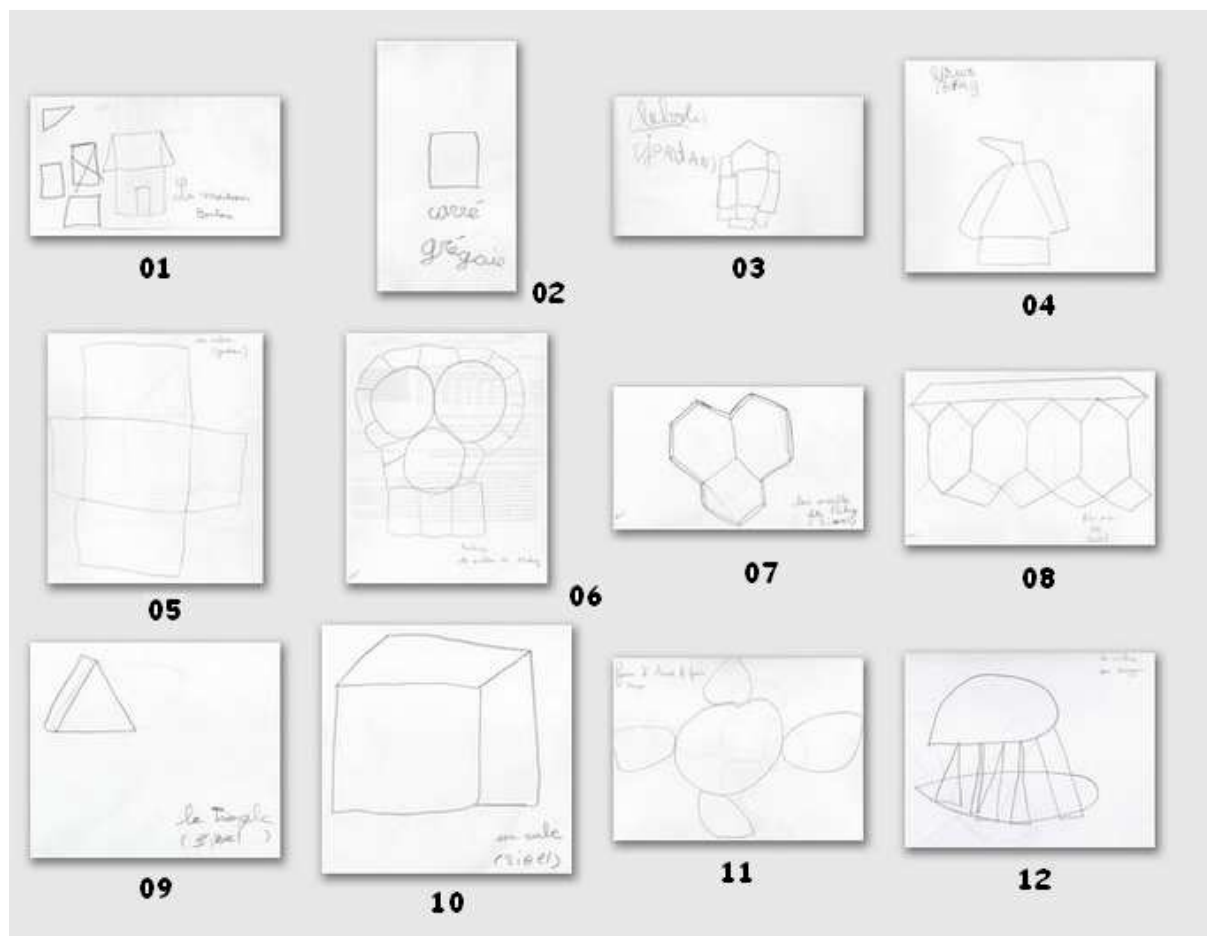


figure 40 : productions graphiques des élèves de certains solides construits

Les dessins montrent une très grande diversité de niveaux de compétences dans l'activité graphique de copie d'un objet en trois dimensions dans le plan. Si l'une des élèves maîtrise les rudiments de la perspective (07, 09, 10), les autres productions sont des représentations planes soit simplement aplaties (03, 06, 08) soit figurant des patrons (04, 05).

La grande majorité des dessins (sauf 01, 02, et 11) témoignent significativement d'une propriété essentielle des solides : leur constitution est liée à l'existence d'arêtes (juxtaposition de deux polygones) et à celle de sommets (jonction de plusieurs faces). Il est raisonnable d'associer cette compréhension à la phase de manipulation réalisée dans la séance de construction avec les objets réels.

On peut aussi remarquer que les propriétés des polygones (nombre de côtés et forme de certaines régularités) sont traduites dans la plupart des productions exceptées dans la 06, la 11 et la 12 où certains polygones sont signifiés par des ronds. Les dessins sont faits à main levée, ceci témoigne d'un certain niveau d'abstraction et d'un début de passage du dessin à la figure.

II – 5.2 Jeux de Kim

Suite à la séance 1 du jeu de la bataille des solides, nous avons observé la forte prégnance des gestes associés à la description des objets. Un jeu de reconnaissance des propriétés par le toucher a donc été proposé aux élèves. Il s'agissait de procéder à la comparaison du toucher des solides cachés dans un carton avec des représentations iconographiques (photos prises des solides construits par les élèves dans la séance 1).

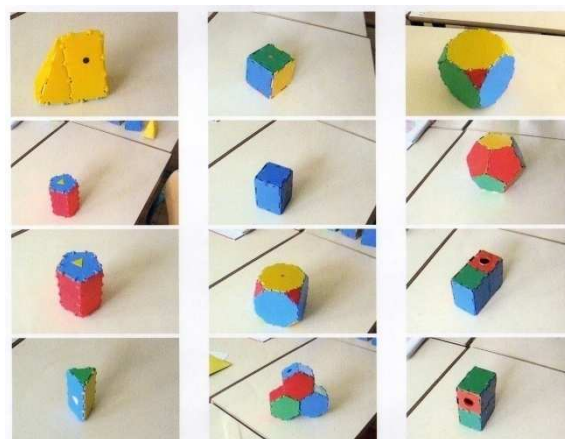


figure 41 : jeu de Kim et iconographie associée

Cet atelier dont la tâche est complexe (certaines solides sont difficiles à identifier, d'autres sont en double exemplaire dans des tailles différentes) a été très investi et très apprécié des élèves. Dans le cas de ce jeu de Kim, ce sont les notions d'arête, de sommet et de faces qui permettent l'association des deux représentations d'un même objet. Il est possible de vérifier si ces savoirs sont acquis ou en cours d'acquisition en étudiant la réussite individuelle de chaque élève dans l'activité. Sur les douze élèves, tous ont effectué cet atelier avec un taux de réussite relativement important (un maximum de trois erreurs pour deux élèves). Un seul des polyèdres a posé des difficultés de reconnaissance aux élèves. Il s'agit du cube tronqué dont les propriétés (6 faces octogonales régulières, 8 faces triangulaires régulières, 24 sommets et 36 arêtes) ne sont pas propices à une reconnaissance tactile.

Selon nous, cet atelier s'inscrit tout à fait dans la démarche d'investigation qui préconise des moments de structuration des connaissances notamment dans des exercices d'application. L'intérêt supplémentaire de ce jeu est qu'il propose une manipulation d'un objet du monde sensible (le solide en plastique) sans que sa perception visuelle soit directe. Ceci est de nature à enrichir le rapport dialectique entre les objets théoriques et les objets sensibles, point central dans notre recherche présente.

II – 5.3 Constructions libres en atelier

Même si lors des deux séances de notre situation de nombreuses constructions ont été produites, nous souhaitons donner la possibilité aux élèves de renforcer leurs expériences par l'utilisation du matériel. Des ateliers ont été mis à leur disposition en "fond de classe" afin de laisser libre cours à leur expression esthétique et à leurs expériences mathématiques. De nombreuses photos ont été prises de ces productions afin de constituer un album pour la classe.

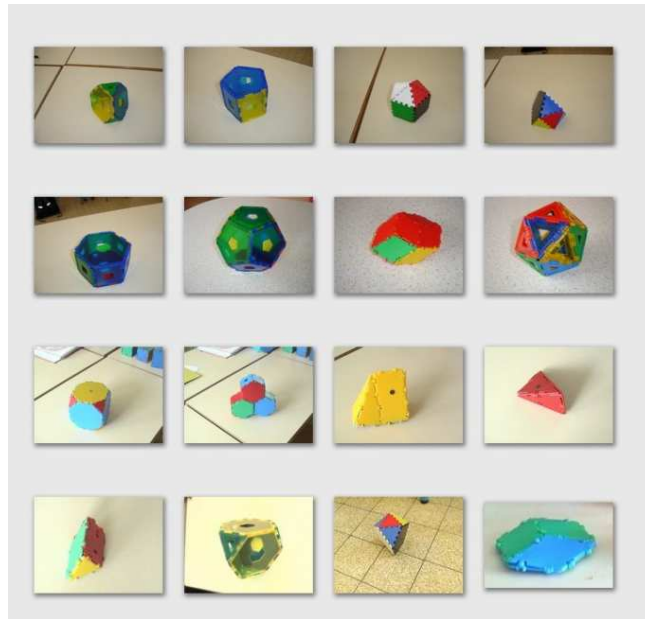


figure 42 : exemples de réalisations dans l'atelier de constructions libres

Cet atelier était pour nous l'occasion d'observer les liens qui existent entre objets théoriques et sensibles grâce à une pratique élève libre de conditions énoncées. La trace de l'activité de l'élève donnée par ses constructions, rend compte des démarches intuitives et/ou expérimentales qu'il utilise. Ce processus peut s'apparenter à une forme d'*abstraction par schématisation* (Gonseth, 1939) ; l'expérience structurant l'intuition qui elle-même enrichit l'expérience.

II – 5.4 Institutionnalisation

A l'issue des deux temps de recherche sur les polyèdres, l'enseignante a souhaité établir une trace écrite pour les élèves afin de mettre en mémoire les principaux termes de vocabulaire et leur signification. Une activité permettant d'établir ces correspondances leur a été proposée. Elle consistait à désigner et à décrire des solides, mais portait également sur les propriétés des figures planes.

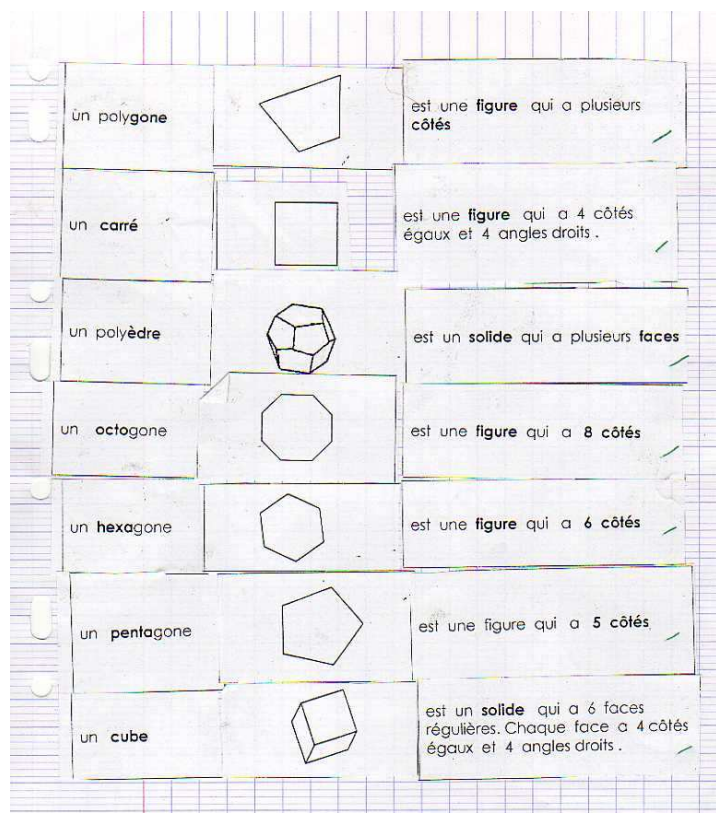


figure 43 : fiche récapitulative constituée en fin d'activité par l'une des élèves

Il est intéressant d'observer la volonté de faire des liens significatifs entre les différents interprétants d'un même objet. C'est par la correspondance entre le mot, l'icône et les propriétés que l'on définit l'objet idéal, la trace écrite établie correspondant à la démarche de construction des connaissances mise en œuvre pendant les séances précédentes.

II – 5.5 Evaluation

Une évaluation individuelle⁴⁰ a été réalisée avec chaque élève en fin de séquence sur les polyèdres. Elle répond au souhait de l'enseignante de posséder une trace objective et individualisée des apprentissages des élèves, et au souhait de la recherche de faire l'état des connaissances lexicales éventuellement attribuables à la situation conduite. Il s'agit essentiellement d'observer les compétences de construction d'un solide donné (un des cinq polyèdres régulier) et de quantifier l'utilisation du vocabulaire employé à l'oral pendant cette construction.

⁴⁰ Voir l'annexe 7

<u>Evaluation connaissances géométriques</u>		
Prénom élève :		
<i>consigne pour l'enseignant :</i> On dispose devant l'élève les cinq solides de Platon construits. Dire : choisis en un; décris le, puis essaye de le refaire en disant ce que tu fais. Présenter ensuite les 5 images et dire : replaces les solides à côté de leur image.		
solide choisi par l'élève :		
cube	tétraèdre	
octaèdre	icosaèdre	
dodécaèdre		
vocabulaire utilisé (cocher à chaque utilisation)		
vocabulaire géométrie 2D	angle	
	côté	
	carré	
	triangle	
	forme	
	hexagone	
	polygone	
vocabulaire géométrie 3D	cube	
	sommet	
	face	
	arête	
	volume	
	solide	
	polyèdre	
	pyramide	
autres noms :		
erreurs repérées :		
carré à la place de cube		
côté à la place de face		
truc, machin ou chose		
construction réussie : OUI NON		

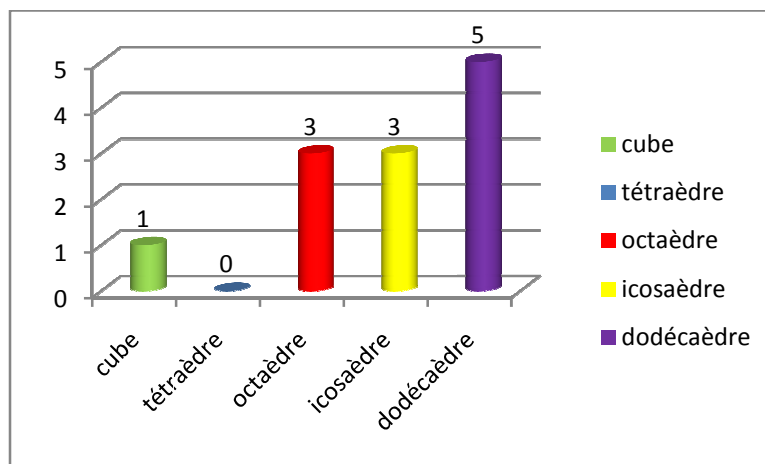
figure 44 : fiche d'évaluation individuelle

Après ce test centré sur l'utilisation du vocabulaire (16 mots sont attendus), une tâche de confrontation des représentations est proposée. Il s'agit alors de faire correspondre les cinq solides construits en plastique avec leurs représentations iconographiques (photos prises des mêmes objets).

§ résultats pour la construction du solide

Notre première surprise concerne la volonté affichée des élèves pour effectuer ce test qu'aucun d'entre eux n'a refusé (certains ont même demandé à le refaire). Ils ont fait porter leur choix sur les solides les plus difficiles à construire pendant l'évaluation, ce qui est également relativement surprenant compte tenu de leur profil cognitif. Ils ont en effet plutôt

tendance à ne pas se confronter à la complexité ou à l'éventuelle difficulté, tant la peur de l'échec est prégnante et déstabilisante pour eux.

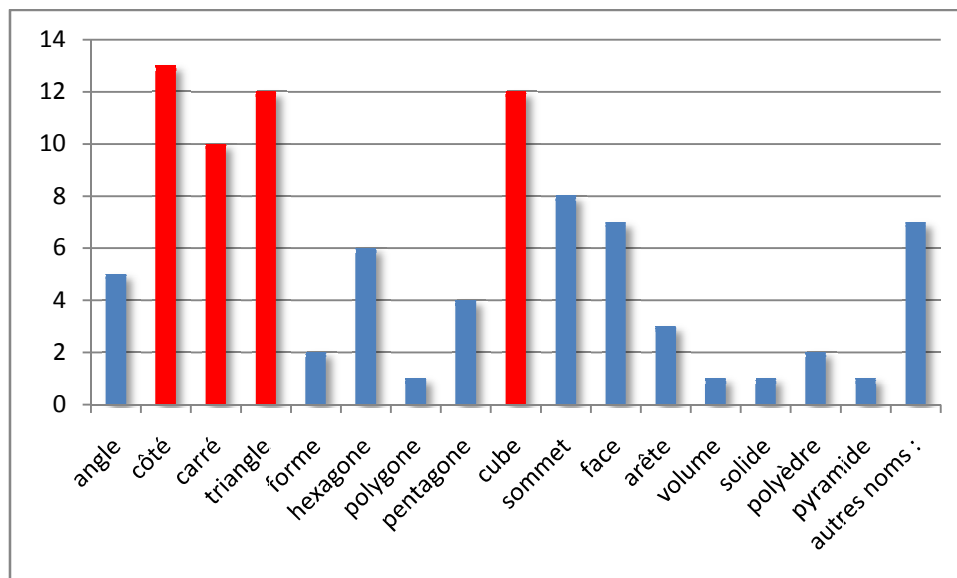


graphique 5 : répartition des choix du solide à construire

Une seule des constructions n'est pas arrivée à son terme (un icosaèdre), toutes les autres ont été synonymes de réussite. Les temps d'exécution sont très variables, mais le déroulement des constructions est organisé sans erreur : choix des polygones nécessaires, assemblage des sommets selon le degré, motricité adaptée (pas ou peu de cassures en cours de construction), conformité au modèle final sans recherche d'une correspondance en taille ou en couleur.

§ *vocabulaire exprimé : résultats collectifs de la classe*

La deuxième partie de l'évaluation porte sur l'utilisation relativement spontanée (soit sollicité par le questionnement soit employé spontanément pour décrire) du vocabulaire en situation de construction. Une liste de 16 mots attendus est présente dans le protocole afin d'évaluer leur fréquence d'utilisation, cette liste a été proposée à l'enseignante de notre part.



graphique 6 : fréquence d'utilisation par mot de la liste (cumul classe)

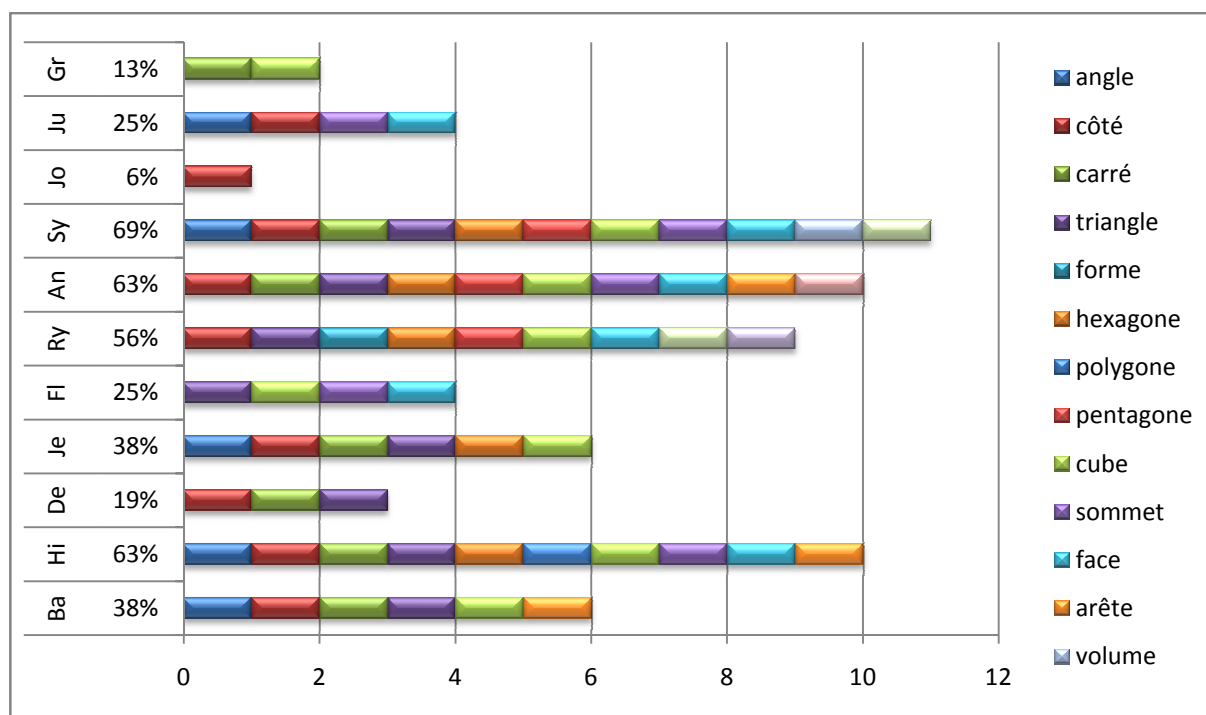
Tous les mots de la liste sont employés au moins une fois par l'un des élèves, ce qui est une première surprise compte tenu de nos remarques faites à l'issue de la première séance consacrée au jeu de la bataille des solides. Nous avons en effet remarqué que le vocabulaire employé lors de la mise en commun était limité à quelques mots seulement (essentiellement : forme, rond et carré). Le mot *forme* n'est par exemple presque plus employé, alors que nous l'avons souvent remarqué dans des utilisations spontanées en début de séquence. Cet enrichissement est de très bon augure d'autant que l'expérimentateur ne devait cocher que les emplois à bon escient. Cette réussite tient à l'une des particularités du milieu de la situation qui favorise la formulation pendant toutes les phases de la résolution du problème. Ainsi la fréquence de l'apparition des mots associés à leurs objets est-elle élevée. Ces stimulations répétitives sont de nature à favoriser la mémorisation, d'autant qu'elles s'appuient en permanence sur des objets réels, des indices ou des gestes.

Bien entendu, le nombre total de mots employés reste faible compte tenu de la durée des séquences d'évaluation (10 à 15 minutes par élève), ainsi que de leur âge. Cela reste tout de même assez bon dans le contexte de cette classe d'intégration scolaire tel que nous l'avons décrit. Aucun des mots de la liste n'est utilisé par tous les élèves, les plus proches de 100% sont : *cube* et *côté*.

On peut aussi noter à la lecture du graphique une petite prédominance du vocabulaire de la géométrie plane sur celui de la géométrie dans l'espace (53 mots employés dans le plan contre 35 dans l'espace). Ainsi, parmi les quatre mots les plus utilisés de la liste (en rouge dans le graphique), trois sont dans le domaine de la géométrie plane : carré, triangle et côté. La fréquence du mot triangle est à corrélérer avec les solides construits puisque 6 des 12 constructions sont réalisées avec des triangles équilatéraux (3 octaèdres et 3 icosaèdres).

§ *vocabulaire exprimé : résultats individuels*

Le graphique présentant les résultats individuels est établi à partir du pourcentage de mots employés de la liste, chaque emploi ne comptant que pour un même s'il est cité plusieurs fois.



graphique 7 : utilisation du vocabulaire géométrique, résultats individuels

Concernant les résultats individuels, il existe une différence importante dans le pourcentage de mots exprimés qui s'étend de 6% à 69% selon les élèves. Cette variabilité correspond aux attentes de l'enseignante et de sa connaissance des compétences langagières de ses élèves, mais présente quand même une surprise par rapport à la réussite d'une des élèves (Hi).

Les taux les plus bas traduisent en partie l'un des problèmes du protocole qui nécessitait une action de fabrication / reproduction combinée à l'expression, ce qui s'avère très difficile pour certains de ces élèves. Nous sommes conscient que l'évaluation ainsi traduite n'exprime pas de certitude quand à la non acquisition du vocabulaire spécifique pour ces élèves.

La tâche consistant à faire coïncider la représentation photographique de l'objet réel a été quant à elle réussie à 100% par les élèves. Ce taux de réussite est vraisemblablement lié aux exercices d'application réalisés dans les jeux de Kim, mais aussi dû au fait que de nombreuses photos ont été prises durant ce projet, et qu'elles ont systématiquement fait partie de l'affichage dans la classe.

II – 5.6 Situation de recherche sur les patrons du cube

Cette séance ne faisait pas partie du projet défini en amont de notre expérimentation, mais nous souhaitons en rendre compte brièvement du fait de son intérêt pour la recherche que nous menons. Cette situation est à l'initiative de l'enseignante dans la conception, la préparation⁴¹ et la mise en œuvre. Il s'agissait pour les élèves de rechercher le plus de patrons possibles du cube en procédant à la déconstruction d'un solide réalisé avec le matériel polydrons. Les recherches ont été conduites en binômes, puis ont fait l'objet de plusieurs mises en commun afin d'élaborer collectivement une réponse la plus optimale possible.

la proposition de situation de recherche:

Nous possédons le patron pour réaliser le dodécaèdre. L'icosaèdre, l'octaèdre sont un peu difficile à trouver. Aujourd'hui, je vous propose de chercher les patrons pour le cube .

" les" : il en existe en effet 11 !

Précision : vous allez en chercher le plus possible ; aujourd'hui il s'agit d'amorcer la recherche puis de la reprendre plus tard . (extrait de la fiche de préparation)

Cette appropriation aussi rapide de la démarche d'investigation par l'enseignante montre la stabilité d'un milieu de type laboratoire, cette séance ayant été menée un mois après notre expérimentation. Pour nous, cela est un témoin de la valeur ajoutée de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans l'enseignement.

⁴¹ Voir l'annexe 8

Conclusion partie B

Les élèves en situation de handicap sont aujourd'hui tous scolarisés quels que soient leur déficience conformément aux politiques éducatives françaises désormais en place. Ces élèves présentent bien souvent des troubles associés pouvant se manifester par de grandes difficultés d'apprentissage. Ce contexte implique une réflexion sur les conséquences en terme d'enseignement afin de tenir compte des adaptations didactiques nécessaires à la scolarisation de ces élèves.

Nous avons mené cette réflexion dans le cadre de la didactique des mathématiques à partir d'une situation en géométrie, afin de tester la potentialité d'un milieu spécifique qui peut être assimilé à celui du laboratoire scientifique. Notre proposition s'appuie sur le recours à la dimension expérimentale de l'activité mathématique dans le processus d'enseignement / apprentissage. Nous avons souhaité montrer en quoi les objets mathématiques en jeu dans cette situation ont des références culturelles et épistémologiques fortes, ce qui permet à la fois une dévolution facilitée du problème, et garantit aussi une riche phase de validation lors des échanges mis en œuvre dans la mise en commun.

Nous avons également montré que le savoir construit dans cette discipline scientifique s'oppose à la simple observation de la réalité physique qui se donne à voir. Il se forge dans la rencontre des contraintes du réel et dans la pluralité des processus d'interprétation des signes correspondants aux objets de savoir. On voit ainsi comment les propriétés d'un objet géométrique peuvent rencontrer un réel résistant qui, grâce à son statut problématique renforce l'utilisation d'arguments théoriques pour enclencher le processus de validation.

Dans nos expérimentations, la situation de recherche des polyèdres réguliers a été conçue comme une situation fondamentale dont la mise en œuvre fonctionne à la manière d'un jeu particulièrement adapté aux conditions des classes de l'enseignement spécialisé. Elle a permis la création d'un environnement didactique stable susceptible d'assurer les apprentissages des élèves et le développement professionnel de l'enseignant. Un professeur qui, sensibilisé aux aspects épistémologiques et didactiques relatifs aux notions en jeu dans la situation, en assure le contrôle par un étayage approprié. Cet étayage se construit dans les médiations installées entre les objets théoriques et les objets sensibles au sein du milieu, et dans la médiation sémiotique qui utilise à bon escient le jeu des interprétants au profit de la détermination des objets de savoir.

Les expérimentations présentées sont situées dans le contexte spécifique de l'enseignement spécialisé, un contexte qui par sa complexité nous assure d'une certaine consistance de nos résultats. Cependant, la forte contextualisation dans l'adaptation scolaire n'est pas suffisante si l'on souhaite envisager des développements didactiques et pédagogiques dans l'enseignement plus ordinaire. Nous souhaitons désormais envisager les répercussions qui sont possibles dans le champ de la formation initiale et continue des enseignants afin de poursuivre la potentialité de la dimension expérimentale dans son effet de levier pour l'enseignement.

PARTIE C :

**VERS UN CHANGEMENT DES PRATIQUES : UN SCENARIO DE
FORMATION**

Introduction

Fort de plusieurs expériences conduites en classe de l'enseignement spécialisé avec la situation de recherche des polyèdres, nous avons émis l'hypothèse que d'autres contextes en permettant l'observation pouvaient être utiles dans notre recherche. La situation des polyèdres est consistante dans son fonctionnement et ses résultats, mais il faut organiser peu à peu son transfert si l'on veut que l'enjeu (en terme d'application de la recherche) se situe dans la modification des pratiques ordinaires de classe. Ainsi, cette séquence a-t-elle été proposée dans une classe de cycle trois ordinaire (CM1-CM2) afin de mettre à l'épreuve sa pertinence dans un tel contexte. Cette expérimentation ne sera pas rapportée ici, elle a fait l'objet de plusieurs articles publiés dans l'ouvrage *Interactions verbales, didactiques et apprentissages* (Guernier, Durand-Guerrier, Sautot, 2006) qui confirment nos hypothèses notamment concernant la nature des interactions verbales dans une situation didactique.

Nous souhaitons désormais investir les terrains de la formation professionnelle des enseignants en vue d'une extension plus large de nos premiers résultats. Le compte rendu et l'analyse de ces expérimentations sera l'objet de la troisième partie de cette thèse.

Pour travailler sur l'articulation enseignement / apprentissage, nous proposons un scénario de formation qui permet de concerner plusieurs niveaux de l'institution (Chevallard, 1991). Ce scénario se déroule en trois étapes :

1. Exportation de la situation des polyèdres dans le contexte de la formation, l'objectif est de définir des contenus et des ressources de formation. Nous visons ainsi la formation par la construction d'un milieu et menons des expérimentations didactiques au sein de trois contextes : en formation initiale et continue d'enseignants et en formation de formateurs.
2. Extension de l'utilisation des caractéristiques d'une situation du type "recherche des polyèdres" et du milieu associé à d'autres domaines dans un dispositif spécifique à l'adaptation scolaire : le rallye-ASH. Un double processus de diffusion des connaissances et de projet d'enseignement pour les classes.
3. Création de nouveaux environnements d'apprentissages et recherche d'une stabilisation des connaissances de la thèse dans un cadre institutionnel.

La conclusion de cette troisième partie présente les perspectives de recherche et de formation issues de ce travail de thèse avec le projet de développement des laboratoires de mathématiques.

chapitre I – Situation de recherche et formation

Nous souhaitons tester la consistance de la situation des polyèdres réguliers dans plusieurs contextes de formation des enseignants qu'ils soient spécialisés ou non. Nous recherchons en effet à trouver un certain nombre d'éléments invariants didactiques et pédagogiques qui puissent témoigner de l'effet de levier pour les apprentissages des élèves et pour l'action du professeur que permet la dimension expérimentale des mathématiques. Notre modalité de recherche est de "faire vivre" la situation des polyèdres réguliers afin d'analyser les principaux constituants du milieu pouvant alors servir de contenus de formation exportables en classe. Il ne s'agit pas de proposer une séance "clé en mains" aux stagiaires qui pourraient ensuite la conduire à l'identique dans leurs environnements professionnelles, mais bien de les aider à cerner les paramètres didactiques pouvant faciliter l'enseignement de la discipline et les apprentissages des élèves.

Nous faisons ici le compte rendu de trois expérimentations de la situation de recherche des polyèdres menées dans des contextes de formation d'enseignants ou de formateurs : formation initiale, formation continue et formation de formateurs. Les observations réalisées en complément des deux situations décrites dans la partie B nous offrent des résultats suffisamment consistants pour nous permettre de dégager une liste d'invariants. A partir de ceux-ci, nous pouvons proposer des contenus de formation relatifs à la didactique des mathématiques et plus particulièrement à leur dimension expérimentale. Notre projet est que les enseignants s'emparent d'un tel travail sur les constituants du milieu de la situation afin de le mettre en œuvre dans leur classe.

I – 1 Plusieurs contextes de formation

Lors de ces années consacrées à notre recherche, nous avons mis en place la recherche des solides de Platon à plusieurs reprises et dans cinq contextes principaux de formation. Ces sessions se sont déroulées soit au sein de l'IUFM de Lyon soit dans des circonscriptions premier de gré rattachées à l'inspection académique du Rhône. Elles ont été conduites :

- en formation initiale de professeurs des écoles deuxième année (PE2),
- en formation continue pour des circonscriptions élémentaires "ordinaires",
- en formation initiale des enseignants spécialisés (dans le cadre de la préparation au CAPA-SH),

- en formation continue des enseignants spécialisés pour des circonscriptions de l'adaptation scolaire (ASH),
- et en formation académique de formateurs (plan académique de formation de formateurs).

Nous relatons ici seulement trois de ces expérimentations qui nous paraissent suffisamment représentatives tant dans la forme de leur organisation que dans leurs éléments invariants pouvant enrichir des contenus de formation en vue de la production de ressources.

I – 1.1 Descriptif de la séance en formation continue

La situation¹ observée a été conduite, observée, filmée et enregistrée lors d'une session de formation continue pour douze enseignants spécialisés provenant de diverses options². Cette séance intitulée "la résolution de problème en géométrie des solides" ne réunissait que des professeurs volontaires puisque faisant partie du plan de formation continue proposé sur le plan départemental. Nous avons envoyé aux stagiaires une courte synthèse de préparation quelques jours auparavant, elle précisait les deux objectifs principaux de la session :

- revisiter ses propres connaissances en géométrie;
- ouvrir des pistes de travail avec les élèves.

L'objet d'étude annoncé était un travail sur le point essentiel de l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire tel qu'il est décrit dans les documents institutionnels :

*"Permettre aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés".
(Programmes de l'école primaire, MEN, 2008)*

La session s'est déroulée en quatre temps distincts³, elle a commencé par une présentation collective de l'énoncé du problème sous sa forme minimale :

Déterminer tous les polyèdres réguliers.

Un temps d'appropriation individuelle de dix minutes a été laissé en début de session. Chacun a été invité à répondre individuellement par écrit au questionnement suivant, préalable à la

¹ Elle a fait l'objet d'une analyse approfondie dans un mémoire de DEA (Dias, 2004) puis dans un article pour la revue Repères IREM (Dias, Durand-Guerrier, 2005)

² Les options sont celles des formations CAPA-SH présentées au paragraphe I-2.3 de ce document.

³ Une séance de formation continue se déroule généralement sur une demi journée et dure environ trois heures.

PARTIE C : SCENARIO DE FORMATION

recherche en groupes : "Que connaissez-vous des polyèdres réguliers dits "Solides de Platon". Les avez-vous déjà rencontrés, si oui dans quel contexte ? Que pouvez-vous en dire en quelques mots ?"

La synthèse des réponses montre que sont convoquées à la fois des références scolaires et culturelles comme attendu lors de notre analyse a priori :

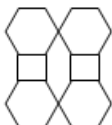
S	<ul style="list-style-type: none"> → des solides à plusieurs faces toutes planes → non roulants ? (pas sûr) → réguliers : cela a un rapport avec les faces -> elles ont certaines propriétés <ul style="list-style-type: none"> - rencontrés au collège (d'après mes souvenirs) - rencontrés à l'université (chimie, cristallographie)
J	Ces mots m'inspirent des solides tels : le cube, le cylindre, le pavé, sphère. J'ai pu en rencontrer à l'école en tant que tels (cours de géométrie, cubes en maternelle...) mais aussi dans la vie de tous les jours (boîtes, ballons...)
C	Je ne connais pas la dénomination "Solides de Platon". Ce sont des volumes. Certains ont un nom spécifique "tétraèdre" "pentaèdre" etc... car probablement ils ont des propriétés particulières. Je ne crois pas avoir eu affaire avec les polyèdres depuis que j'ai terminé ma formation.
G	<ul style="list-style-type: none"> • faces identiques • vie courante : dé à jouer (cube)... • à l'école : construction à partir de patrons
M	Solides en volume - en 3D. Quelques souvenirs d'école : lors d'étude sur les patrons, avec le cube notamment.
M	Je les ai sûrement rencontrés mais je ne crois pas qu'ils m'aient été présentés !
V	Le mot solide m'évoque les solides tels que : le cube, le pavé, les différentes pyramides (à base carrée, ...) Solides que j'ai rencontré à l'école, dans la vie quotidienne également.
M	?
JP	<ul style="list-style-type: none"> - volumes - constructions - faces - sommets...
F	Ce sont certainement des volumes
B	<ul style="list-style-type: none"> - Prismes droits (pavé, cube, prismes à base triangulaire, hexagonale, carrée,...) - Pyramides - Cylindre - Vocabulaire : face, arête, sommet - Calcul de volume, d'aire
P	<p>Je ne connaissais pas l'expression "Solides de platon" J'ai eu l'occasion de travailler sur des polyèdres (étaient-ce des réguliers ?) il y a 8 ou 10 ans avec des élèves sourds à partir de l'observation d'un ballon de foot.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>... c'est tout ce qui m'en reste, il y a 6 ans que je n'enseigne plus les maths et la géométrie.</p>

figure 45 : réponses individuelles sur la connaissance des solides de Platon

Les participants se sont ensuite répartis en trois groupes de quatre stagiaires pour la recherche du problème proprement dite qui a duré une heure et quart. La consigne en était alors la suivante :

Résoudre le problème dans un premier temps; puis faire une affiche présentant les résultats obtenus ; la ou les démarches de résolution et les procédures mises en œuvre ; les éléments de validation et les difficultés éventuellement rencontrées.

Le milieu matériel a été enrichi à l'identique des expérimentations conduites avec des élèves, en proposant un matériel spécifique pour d'éventuelles modélisations (formes polygonales emboîtables et articulables). L'environnement papier/crayon a aussi été mis en avant par la mise à disposition d'outils de traçage, mais il n'a pas été vraiment investi bien qu'utilisé au tout début des travaux en groupes.

A l'issue du travail de recherche, une mise en commun d'une quinzaine de minutes a donné lieu à un commentaire par chaque groupe de l'affiche réalisée en conclusion de la phase de recherche. Les cinq polyèdres réguliers ont été présentés par les trois équipes⁴ (par construction et par raisonnement associé), mais, l'un des groupes n'ayant pas trouvé l'icosaèdre, a tenté de prouver que ce nombre n'était vraisemblablement pas minimum et qu'il existait en conséquence d'éventuels autres polyèdres. Il y avait ici probablement référence à l'infinité de polygones inscriptibles dans le cercle (définition qu'on tentait d'étendre à l'espace), mais aussi surprise et déstabilisation de l'existence de l'icosaèdre.

Donc on a essayé de chercher ... dans l'ordre, on a commencé par les polygones à 3 côtés... donc le triangle isocèle et on a trouvé qu'on pouvait faire le tétraèdre et puis c'est tout... ensuite à 4 côtés on s'est dit soit c'est avec un angle de 90 c'est un carré et là ça donne le cube... soit on obtient tous les losanges possibles en déformant le... carré donc on s'est dit... on a essayé un... avec le matériel et par un petit peu de façon empirique, comme ça, on s'est dit comme ça on va avoir une infinité de polyèdres possibles, [...]

5 faces on a pas trop cherché, puis 3 faces ... on était en train de se demander ça puis en regardant autour de nous on a vu qu'il y avait un groupe qui en avait fait un... mais ... on l'a quand même pas mis parce que... on aurait pas été capable de donner une explication... de se dire ben y'a que celui là, y'en a pas d'autres... donc... ça nous satisfaisait pas... donc on s'en est contenté, on s'est contenté comme solution de dire qu'il y a le cube si on prend un polygone carré; si le polygone est un losange ben on a dit qu'il y en a une infinité; il y a à partir du pentagone le dodécaèdre; et on sait qu'il y en a un... y'en a un à 20, qu'il y en a un possible celui-là à 20 faces triangulaires, mais ... en dehors de celui-là... on est... on est... le simple fait qu'il y est celui-là nous dit... on sait pas si il y en aura d'autres ou pas.

(extrait du commentaire accompagnant la présentation du travail d'équipe)

⁴ L'un des groupes a présenté les cinq polyèdres mais a avoué avoir simplement fabriqué l'icosaèdre par copie du travail réalisé dans une équipe à proximité.

PARTIE C : SCENARIO DE FORMATION

Comme en témoigne l'extrait de corpus suivant, les échanges se sont portés sur cette conjecture de l'existence d'une infinité de polyèdres réguliers ainsi que sur la délicate question du pavage du plan par les hexagones dans le milieu matériel de la situation (souplesse de la matière plastique des pièces du jeu, références de constructions de type sphériques comme les géodes, difficulté de mesure des angles au sommet d'un polyèdre).

G	Non mais moi j'crois que tu peux pas avec celui là, ça correspond tu sais au pavages au sol quand on pose des carreaux, euh... ça reste plat, jamais tu peux en faire un truc...
S	tu crois ?
G	tu sais ça c'est la forme des...
S	est-ce qu'il y a vraiment un volume là ou...
G	... des carreaux que tu mets au sol dans ta maison
S	...est-ce qu'il y vraiment un volume...
C	ouais
S	... ou pas, moi j'en vois un hein... <i>(il tient la construction en équilibre sur son centre sur le bout d'un doigt en hauteur pour que tous voient)</i>
G	t'as du volume parce que c'est du plastique
S	là t'as une surface plane et là t'as un autre volume... <i>(il compare avec la surface du bureau)</i>
G	ouais je vois ce que tu veux dire, mais ça c'est...
S	je pense que là t'en auras un autre, non tu crois pas ?
C	attends, attends, on va le savoir tout de suite <i>(il reprend la construction)</i>
G	prends un truc rigide et ça marchera pas hein...
C	on continue tout de suite on va voir <i>(il continue la construction pour donner davantage de souplesse à l'ensemble)</i>
G	là tu joues sur les petits espaces entre...
C	on va voir, on va voir tu vas voir... si on...
G	ça c'est un pavage ça
C	si on arrive à donner de l'angle là
S	parce que ouais, le problème du pavage c'est vrai que maintenant... si j'imagine un pavage tu peux pas le... y restera dans le plan
G	un pavage tu peux pas lui donner une forme...euh... en volume hein
G	là vous êtes...
S	mais ce qu'il y de sûr c'est que à mon avis, si celui là <i>(il parle du solide en construction)</i> y pouvait... si jamais y pouvait faire un...
G	non, moi je...
S	...un solide, j'sais pas combien il aurait de faces mais il en aurait un paquet !
C	ah mais c'est pas vrai ! <i>(ça casse encore...)</i>
G	à l'extrême limite, à mon avis, si tu arrivais à lui donner une forme à peu près volume... c'est en jouant sur les espaces
S	ça se rapprocherait de la sphère hein... tu penses pas que ça se rapprocherait de la sphère ?
C	si, moi je pense... on va lui en mettre beaucoup, on va mettre tout ce qu'on a puis on va voir si on peut lui donner du volume quoi

extrait de corpus enregistré en formation d'enseignants spécialisés

Cette mise en commun a été suivie d'un débat d'une durée de trois quarts d'heures environ. Les principaux éléments en jeu dans la situation ont été repérés et explicités ce qui a conduit les participants à s'interroger sur les modalités de l'enseignement de la géométrie à l'école et

plus particulièrement sur les possibilités ouvertes par la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques pour penser les rapports entre l'espace et le plan.

I – 1.2 Descriptif de la séance en formation initiale

En formation initiale de professeurs des écoles, il existe environ 35 heures dédiées à l'enseignement des mathématiques. Les séances de cours durent environ trois heures, ce qui nous a permis de conduire l'expérience de la recherche des polyèdres pendant l'un de ces cours. A la différence de la première expérimentation en formation continue, le public n'est pas spécialisé puisqu'il s'agit d'une préparation à la conduite d'enseignements sans référence à un contexte spécifique. L'enjeu reste cependant celui d'une étude des éléments didactiques permettant de préparer puis de mettre en œuvre une situation d'apprentissage en géométrie à l'école élémentaire dans le cadre des programmes institutionnels.

Pour cette expérimentation, nous avons suivi le même protocole en quatre temps que dans la précédente. Sur les 29 stagiaires présents, 17 ont répondu au questionnaire individuel par "non" ou "je ne sais pas" concernant la connaissance des solides de Platon. Les autres évoquent leur rencontre soit lors d'études secondaires ou universitaires, soit la préparation du concours de professeur des écoles⁵. Sont cités le cube, la pyramide, le pavé et le "ballon de foot", ainsi que les propriétés relatives aux polygones réguliers qui les composent avec quelques tentatives concernant la superposition possible des faces.

La recherche proprement dite se déroule en quatre équipes dans lesquelles un observateur est désigné pour prendre en notes ce qui est dit et ce qui est construit⁶. Le matériel plastique habituel est distribué et très bien investi aux dépens des outils de tracé non utilisés. Les obstacles connus sur la rencontre de la limite du plan avec l'assemblage des hexagones sont observés comme en témoigne l'extrait suivant issue de la prise de notes d'un des stagiaires :

⁵ Les stagiaires en formation initiale deuxième année sont tous des lauréats du concours de l'année précédent cette formation.

⁶ Voir quelques uns de ces écrits en annexe 9.

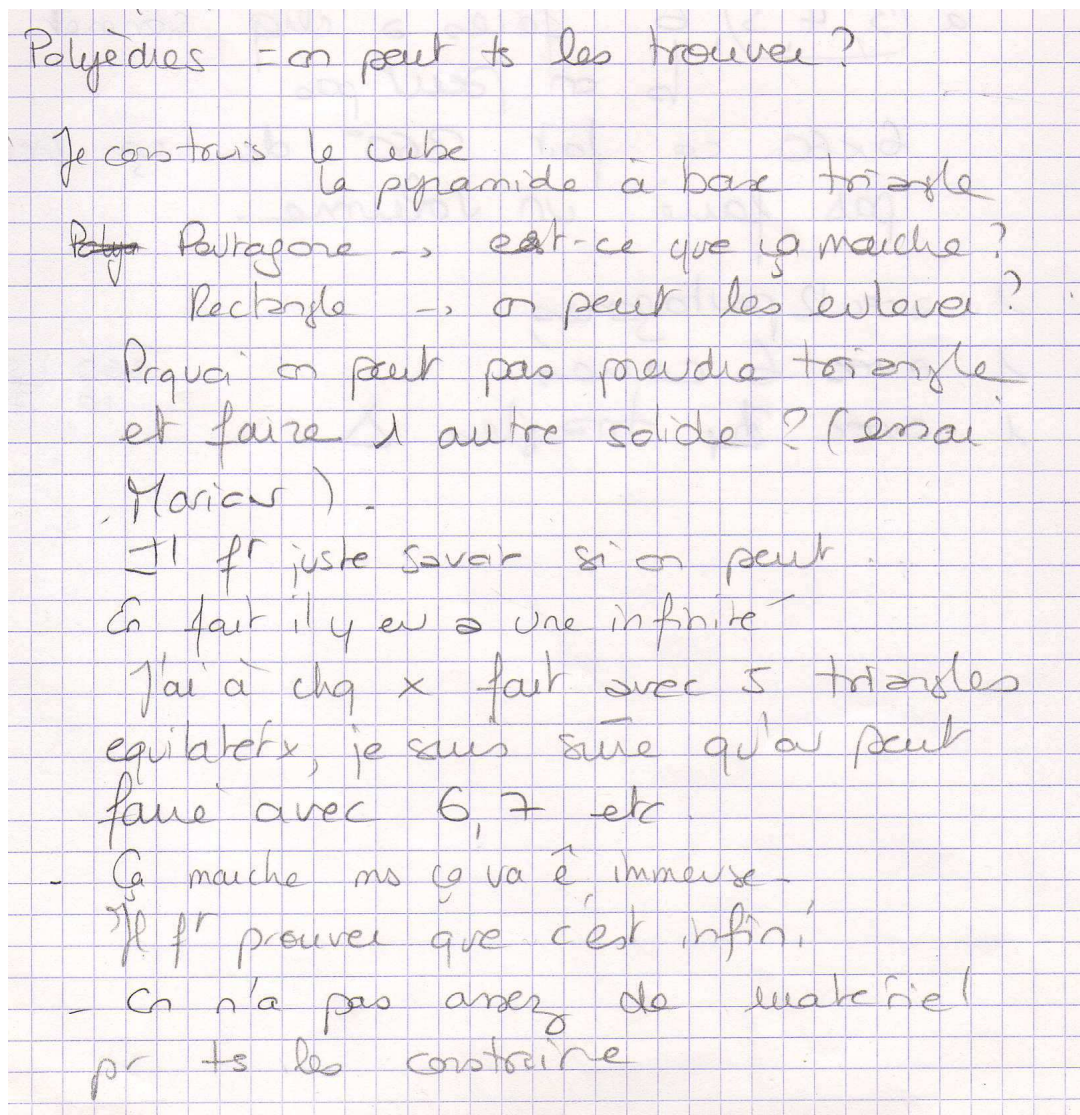


figure 46 : trace écrite des échanges pendant la recherche

Lors de la présentation des travaux sous la forme d'affiches, les débats ont porté sur le lien entre les objets mathématiques et leur représentation dans la réalité, notamment à partir de l'affiche d'un des groupes⁷. Il y est présentée la liste des cinq polyèdres réguliers dont certains des noms scientifiques, inconnus, ont été remplacés par des représentations réelles possibles de ces objets.

⁷ Dans cette équipe, deux stagiaires ont suivi un cursus d'école d'ingénieurs et ont exercé cette profession quelques années avant de passer le concours de professeur des écoles.

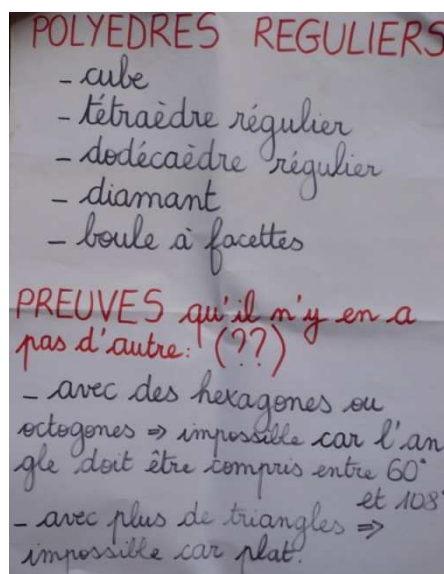


figure 48 : affiche pour la synthèse des travaux en groupes

Sur cette même affiche, la question de la preuve qu'il n'existe pas d'autres polyèdres réguliers est clairement posée. Prouver l'existence de 5 solutions au problème ne semble pas convaincre les membres de l'équipe que cela suffise à limiter les réponses à ces exemples. Un débat est alors conduit sur cette question de la preuve et sur les rapports entre spécifique et générique. C'est aussi l'occasion de travailler en formation sur la notion de validation qui, scientifiquement parlant, consiste à appuyer les résultats expérimentaux (empiriques ou non) sur des savoirs indiscutables ne relevant pas d'un simple consensus contextuel.

I – 1.3 Descriptif de la séance en formation de formateurs

Dans le cadre du plan académique de formation de formateurs⁸, nous avons également conduit une formation utilisant la situation de recherche des polyèdres dans le cadre d'un travail sur la dimension expérimentale des mathématiques. Cette session intitulée "Le recours à l'expérience dans la construction des connaissances mathématiques" s'est déroulée en présence d'un public pluri-catégoriel : inspecteurs de l'éducation nationale, conseillers pédagogiques, professeurs des écoles maîtres formateurs, formateurs en mathématiques de l'IUFM.

La motivation de notre proposition s'inscrivait dans la problématique du rapport aux objets scientifiques dans l'enseignement et dans l'apprentissage à l'école élémentaire et notamment

⁸ La formation de formateurs est proposée par l'IUFM dans un plan académique. Ces sessions permettent la rencontre entre la formation initiale, la formation continue et la recherche. Le plan s'adresse à toutes les catégories de formateurs qu'ils soient rattachés à l'IUFM ou à l'Inspection Académique.

dans le champ de l'enseignement spécialisé. Dans ce contexte professionnel, le conseil pédagogique et l'analyse des difficultés d'apprentissage sont rendus encore plus délicats. Un détour épistémologique et didactique sur la notion d'expérience en mathématiques a été proposé en vue d'apporter quelques éléments de déblocage de certaines situations grâce à la problématisation des difficultés.

Cette session de formation de 12 heures poursuivait trois objectifs principaux :

- Mettre en évidence la place de l'expérience dans la construction des connaissances en mathématiques par analogie avec les autres sciences expérimentales.
- Etudier des situations permettant de restaurer la motivation de la recherche en mathématiques pour des élèves dits "en difficulté d'apprentissage".
- Rendre compte d'une méthodologie de recherche en histoire et didactique des sciences.

La formation s'est déroulée en quatre séances de trois heures dont les intitulés étaient les suivants :

1. Les mathématiques : des sciences expérimentales ?
2. L'expérimentation : une aide à la re-médiation aux difficultés d'apprentissage.
3. La dimension expérimentale en géométrie.
4. La place de l'expérimentation dans les situations de recherche.

C'est au cours de la troisième séance que la situation de recherche des polyèdres de Platon a été proposée aux stagiaires sous la même forme que celle de l'expérience en formation continue décrite auparavant.

Le débat conclusif de cette séance a porté essentiellement sur la question de l'expérimentation en géométrie conformément à l'objectif de la séance. Il a été évoqué la question du matériel et de la qualification de son rôle dans le milieu. L'aide qu'il semble apporter a priori, du fait de la difficulté du dessin dans le champ de la géométrie dans l'espace, se révèle assez vite une source d'interrogation et de questionnement pour les apprenants adultes et tous formateurs dans le cas présent. C'est le matériel qui s'impose peu à peu comme l'antagonisme du milieu en fournissant des rétroactions fortes sous la forme des contraintes bien repérées dans l'analyse a priori :

- des assemblages "impossibles" : côtés de polygones non isométriques, solides non convexes ;
- des constructions révélant des cas "limites" : assemblage d'hexagones et courbure relative, solide à deux faces.

Au cours du débat, nous avons fait remarquer aux stagiaires que la notion d'expérimentation est bien différenciée de celle de manipulation, puisque les actions conduites au cours des phases exploratoires avec les objets sensibles étaient des tentatives de validation ou vérification de conjectures ou hypothèses émises. C'est la simultanéité des actions et des formulations qui donnent parfois un caractère aléatoire à la démarche de recherche parfois qualifiée de "tâtonnement" par certains stagiaires.

La question de l'enseignement des mathématiques et de leur dimension expérimentale a également été évoquée au sein d'actions de formation continue dans les circonscriptions du premier degré notamment avec l'aide des maîtres relais en sciences.

I – 2 Les invariants d'une situation de type expérimentale

Ces trois expérimentations que nous venons de décrire brièvement, ainsi que les deux expérimentations décrites et analysées dans la partie B, nous permettent de formuler quelques pistes de réflexion sur les invariants didactiques et pédagogiques rencontrés. Elles concernent l'ensemble du système didactique : l'enseignant, le milieu de la situation et les apprentissages des élèves. Les données proviennent des enregistrements effectués lors des séances de travail, des affiches produites lors des mises en commun de travaux, et des notes prises pendant les situations de recherche. La synthèse de nos observations nous paraît conforme aux hypothèses que nous faisons concernant la démarche expérimentale intrinsèque à la résolution de problèmes en mathématiques.

Dans la mesure où nous souhaitons inscrire nos actions de formation en référence au canevas d'une séance d'investigation telle qu'elle est proposée dans le document d'application de l'enseignement scientifique au collège (BO n°6, M.E.N., 2007); nous allons nous appuyer en partie sur les moments clés qui y sont repérés. Ceci nous permet de mettre une nouvelle fois en évidence la dimension expérimentale des mathématiques dans la situation des polyèdres, mais aussi de définir des contenus de formation.

I - 2.1 Une dévolution réussie

§ *Choix, contrôle et étayage de la situation par le professeur ou le formateur*

Mettre en œuvre une situation d'apprentissage dans le domaine scientifique nécessite le travail habituel de préparation pour le professeur : analyse des savoirs visés, détermination des objectifs à atteindre, repérage des acquis initiaux des élèves et éventuellement identification des conceptions ou des représentations des élèves. Nous avons constaté que ce moment préparatoire pouvait être enrichi par la connaissance a priori d'éléments de l'histoire et de

l'épistémologie des savoirs qui sont les enjeux de la situation. Cette connaissance permet à l'enseignant d'une part de s'assurer de la consistance des questions qu'il souhaite traiter, d'autre part d'opérer les choix pertinents dans l'analyse a priori de la situation et dans l'étude de sa conception. Lors de la mise en oeuvre devant des élèves ou des adultes en formation, cela permet aussi d'adapter ses interventions éventuelles pendant les phases de recherche autonomes.

A travers le scénario de formation que nous avons proposé avec la situation des polyèdres, nous avons pu mettre à l'épreuve ce dispositif d'enseignement / apprentissage. Ainsi la confrontation de nos hypothèses à la réalité de la classe et à celui de la formation d'adultes, nous a permis d'observer des enseignants exerçant à la fois avec sérénité et avec à propos notamment dans la gestion des échanges langagiers :

- aide à la reformulation des questions pour un travail sémantique,
- accompagnement progressif des changements de conceptions par le recours systématique au questionnement,
- aide à la stabilisation des données (ce que l'on sait) et à leur différenciation avec les variables (ce que l'on cherche)
- aide au rappel, à la récupération des connaissances (le déjà là)
- accompagnement des recherches en assurant la relance par le questionnement, l'orientation des échanges sur les objets scientifiques en jeu, la qualité des débats entre élèves,
- aide à la modélisation : inciter à utiliser ou proposer des outils et/ou des supports de recherche qui permettent aux élèves de faire de nombreux allers et retours entre réel sensible et abstractions de ce réel (formalisation)

§ *L'appropriation du problème par les élèves ou par les professeurs stagiaires*

Le cadre de la géométrie nous semble avoir été déterminant pour la phase de dévolution du problème. Dans le cadre des formations que nous conduisons depuis de nombreuses années, nous avons observé que la géométrie représente un domaine des mathématiques sous-investi par les enseignants. Ces derniers citent souvent le manque de formation professionnelle sur la question, mais il est aussi fait référence à des objets de savoirs relativement indéterminés ou trop ancrés dans le formel (pas assez dans l'expérimental). Cependant, ces enseignants constatent que la géométrie est un domaine très prisé des élèves. On cite par exemple le succès des situations de communication, de l'utilisation des logiciels de géométrie, des constructions dans le plan et dans l'espace (du fait de leur lien avec les objets sensibles). Les liens inter-disciplinaires servent d'argument par exemple avec les disciplines artistiques (place de la création, du "beau", d'un espace de liberté ou moins contraignant).

Il semble que l'ancrage culturel des polyèdres réguliers ne soit pas étranger à la réussite de la dévolution du problème aux élèves. Cependant, cet aspect n'a qu'un impact relatif dans

l'appropriation par les élèves ou des professeurs stagiaires ; c'est surtout la consistance mathématique du problème et son lien avec les savoirs fondamentaux de la géométrie qui participe de cette facilitation de la dévolution. Notons également que c'est la formulation de type "énigmatique" de l'énoncé qui assure le maintien dans l'activité de recherche. Nous pouvons remarquer que la dévolution est facilitée par les différentes mises en scène pédagogiques auxquelles se prête cette situation.

Pour terminer, il nous semble que la dévolution réussie de la recherche des solides de Platon tient également au fait qu'elle possède deux des caractéristiques d'un problème ouvert (Arsac, Mante, 2007). L'énoncé du problème semble accessible du fait de sa simplicité apparente a priori : déterminer tous les polyèdres réguliers. Ce type d'énoncé permet l'engagement dans le problème même dans des contextes d'apprentissage difficiles comme nous avons pu l'observer. Ceci s'explique par le fait que la consigne invite à chercher des représentants effectifs, avant de s'interroger sur le fait qu'on les a tous trouvés ou non. Le premier travail consiste en effet à construire des objets qui répondent à la définition (Durand-Guerrier & Heraud, 2007). La deuxième caractéristique partagée avec les problèmes ouverts est celle de la proximité des objets en jeu dans la situation avec les connaissances des élèves. En effet, comme on a pu le constater avec des élèves ou avec des adultes en formation, plusieurs des solides qui sont solution du problème sont connus (en particulier le cube qui a été cité à chacune de nos interventions). Ceci contribue à donner au problème une apparente facilité puisque l'on peut y répondre au moins partiellement très rapidement. C'est une caractéristique qui permet à tous les participants d'avoir prise sur la résolution, et ce quel que soit leur niveau de connaissance. C'est un paramètre déterminant dans l'enseignement spécialisé où les enseignants éprouvent souvent des difficultés dans ce domaine.

I - 2.2 Des formulations de conjectures

§ *Conjectures, hypothèses explicatives, protocoles*

Dans la recherche des solides de Platon, le milieu constitué pour la situation est consistant et antagoniste, ce qui est déterminant pour la formulation des conjectures. Sa consistance réside dans les éléments qui le constituent : le milieu matériel (objets plastiques mis à disposition, mise en scène de la situation en référence à un contexte familier), les connaissances en jeu, et la préparation didactique du professeur. Ces paramètres permettent aux élèves de dépasser la phase d'entrée dans la situation (questionnement initial, émergence des conceptions ou représentations) et de formuler des hypothèses, notamment grâce au matériel mis à leur disposition, le milieu matériel contribuant ainsi au milieu objectif de la situation. C'est en effet en élaborant des modélisations (construction de solides en plastique) des objets théoriques (les polyèdres définis dans un registre langagier selon des règles) que l'on assiste à l'élaboration progressive de protocoles expérimentaux. Il est difficile de distinguer dans ces phases ce qui

relève d'une expérimentation visant à tester une conjecture ou une hypothèse de celle qui relève plutôt d'une vérification ; ce sont des allers et retours répétés entre objets familiers et objets nouveaux qui caractérisent ces moments d'apprentissage.

Bien que la démarche expérimentale en mathématiques partage quelques traits communs avec la démarche d'investigation scientifique en sciences expérimentales, il ressort de nos observations, que ces protocoles expérimentaux divergent des standards des sciences dites expérimentales comme la physique ou la biologie pour lesquelles on tente de distinguer les types d'expériences (Coquidé, 1998). En mathématiques, il nous semble raisonnable de parler d'une dialectique expérimentale pour caractériser ces phases de conjectures dans une situation de recherche. Il s'agit d'un dialogue entre les objets mathématiques théoriques et leurs représentants construits dans le monde sensible (Dias, Durand Guerrier, 2005).

L'antagonisme du milieu tient essentiellement dans les rétroactions fournies par les actions et manipulations des apprenants en cours de résolution. C'est en effectuant certaines tentatives de construction que les élèves (ou les adultes) se confrontent à certains obstacles. Ainsi, le matériel qui semblait a priori une aide à la résolution du problème, devient-il peu à peu la source de nouveaux questionnements. Nous avons pu l'observer de façon systématique lors de l'assemblage des hexagones par exemple : la construction réelle s'oppose à la théorie, ceci engageant chez les adultes un débat sur les conditions de la validité d'une proposition même en mathématiques comme nous l'avons exposé dans un précédent article (Dias, Durand Guerrier, 2005).

§ *Investigation et résolution par les élèves*

Concernant les dispositifs de travail en classe (ou en formation), nous avons observé une très forte propension à conduire des travaux de groupes, dispositif habituellement peu mis en œuvre, notamment dans l'enseignement spécialisé, du fait des incertitudes en termes de conduite de classe qu'il peut augurer. L'une des inquiétudes souvent exprimées par les professeurs concerne en effet la durée des séquences qu'ils sont à même de proposer à leurs élèves. Ils les jugent souvent peu enclins à des temps de travail et de concentration importants, ce qui se révèle très différent et inattendu dans le cadre de la résolution des problèmes de recherche. On peut faire l'hypothèse que le fait "de rechercher à plusieurs" est un facteur limitant l'exposition individuelle à l'échec, phénomène dont on sait qu'il peut provoquer une grande souffrance dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Le rapport à l'erreur s'en trouve en quelque sorte partagé et donc moins redoutable à envisager. La grande variabilité des connaissances et des savoirs de chacun semble ainsi un facteur positif non discriminatoire, ce qui n'est pas habituel dans des classes comme les SEGPA⁹ par exemple.

⁹ Section d'enseignement général et professionnel adapté en collège.

Lors de nos expérimentations de la situation des polyèdres en formation, nous avons systématiquement assisté à des moments de débat interne aux groupes, mais aussi à des tentatives de description et réalisation de l'expérience sous forme de schémas (avec les adultes). Il s'agissait toujours d'explicitier des choix de méthodes, d'interprétation de résultats provisoires souvent préparatoires à la phase ultime de mise en commun.

Comme nous l'avons vu dans les deux expérimentations en classe, en situation d'enseignement, le rôle du professeur est considérablement modifié lors de la mise en œuvre d'une recherche comme celle des polyèdres. Sa principale fonction est celle de l'échafaudage raisonné pour la réussite des différents moments de la séance :

- mise en scène et enrichissement du milieu matériel pour la réussite de la dévolution;
- accompagnement des travaux de groupe par des interventions localisées et adaptées aux difficultés rencontrées et aux conceptions des "chercheurs";
- aide à la formulation ou à la reformulation langagière,
- maintien dans l'activité scientifique en garantissant ses codes : respect de la contradiction, souci de la validation, recherche de la preuve, formulation orientée vers le questionnement.

C'est un nouveau type de contrat qui est à l'œuvre dans la classe du fait de ce changement de posture. Ce contrat ne tient plus dans une transmission unilatérale d'un savoir et permet une libre expression expérimentale nécessaire dans la construction des connaissances du domaine scientifique.

I - 2.3 Une dialectique de la validation

§ *Echanges argumentés*

Les relations et interactions (élèves-élèves et élèves-professeur) pendant les phases de recherche et de mise en commun sont très différentes de celles qui sont vécues dans le quotidien ordinaire d'une classe. En se référant une nouvelle fois au contexte de l'enseignement spécialisé, la question des interactions entre les élèves est un point très sensible et souvent déterminant dans la conduite de situations d'apprentissage : de bonnes relations inter-individuelles sont nécessaires (mais non suffisantes) au processus d'acquisition des savoirs. Nous faisons l'hypothèse que c'est la présence permanente et explicite des objets mathématiques dans les discours des élèves qui sont une des causes de l'amélioration des relations.

L'autre élément significatif de la consistance de la situation de recherche est celui de la qualité des débats enregistrés ; on peut parler d'une véritable communication sur les solutions élaborées, sur les réponses apportées, les résultats obtenus, et sur les interrogations qui

demeurent. Ainsi peut-on caractériser le débat scientifique comme un temps de confrontation des propositions, un débat autour de leur validité, une recherche d'arguments. Il apparaît alors qu'en mathématiques aussi, cet échange peut se terminer par le constat qu'il existe plusieurs voies pour parvenir à un résultat attendu. Il est également mis en évidence dans les phases de mise en commun que l'élaboration collective de preuves est nécessaire à la validation des résultats proposés.

§ *rapport dialectique des objets familier/nouveau*

Les mathématiques sont souvent présentées comme une discipline dont les objets sont abstraits, ce qui rend leur accès très difficile voire même limité à certains individus ayant des dispositions spécifiques à l'abstraction. Cette représentation relativement dominante est aussi parfois présente dans le milieu de l'enseignement, elle n'est évidemment pas propice à faciliter l'acquisition de connaissances dans ce domaine. La situation que nous avons présentée nous semble de nature à construire une représentation différente des objets mathématiques notamment par le rapport dialectique qui est proposé dans la recherche des polyèdres réguliers. Nous avons montré que les objets idéaux que sont les polyèdres ont une représentation symbolique et même réelle (dés à jouer, diamant, dôme géode, etc...) dont la référence culturelle permet de les catégoriser parmi les objets familiers chez les élèves comme chez les adultes.

La dimension expérimentale des mathématiques s'exprime par le passage progressif de la familiarité des objets à la construction de connaissances et donc d'objets nouveaux plus théoriques mais jamais complètement déconnectés du monde sensible (qu'il soit perceptif visuellement, auditivement ou tactilement). Dans le système didactique mettant en relation un professeur, des élèves et des savoirs, ce type de rapport aux objets s'avère déterminant pour le développement de l'ensemble des acteurs. Il en va des apprentissages notionnels des élèves et professionnels de l'enseignant. Nous avons remarqué que dans le contexte sensible et complexe de l'enseignement spécialisé, la dialectique familier / nouveau (Assude, Gelis, 2002) était de nature à stabiliser le milieu en référence à la notion de biotope décrite auparavant.

I – 2.4 Une structuration des connaissances

§ *Acquisition et structuration*

La mise en œuvre de cette situation de recherche des polyèdres permet l'acquisition de connaissances, et ce quel que soit le niveau d'apprentissage et le contexte d'enseignement ou de formation. Ces acquisitions sont de trois ordres principalement :

Une mise en évidence (avec l'aide de l'enseignant en situation de classe) de nouveaux éléments de savoir utilisés lors de la résolution. Il peut s'agir d'une notion comme la découverte en acte d'un axiome (il faut au moins trois faces pour constituer un angle polyèdre), de l'apprentissage d'une technique (les polyèdres sont constitués de faces assemblées par leurs arêtes), ou d'une acquisition méthodologique (apprendre à stabiliser ses certitudes et à expérimenter sur ses doutes).

Le développement de compétences langagières en lien avec la nécessité d'une formulation argumentée notamment lors de la mise en commun, mais aussi pendant les phases d'expérimentation. Chaque mise en mots de l'action, chaque proposition (sous la forme d'une conjecture ou non) est exposée à la critique du groupe. Ceci nécessite à la fois une écoute active et une prise de parole au moins explicite, voire argumentative. Dans le contexte de la classe, et plus particulièrement dans l'enseignement spécialisé, le rôle de l'enseignant est crucial dans l'étayage à cette mise en mots.

La culture d'une "attitude scientifique" dans une perspective de construction des connaissances par le respect de ses codes tels que la recherche des causes d'un éventuel désaccord, l'analyse critique des expériences faites et la proposition d'expériences complémentaires, la recherche des éléments de preuve et/ou de validation, la production de traces écrites de l'activité en vue de la stabilisation des connaissances.

L'une des caractéristiques de la dimension expérimentale des mathématiques consiste en un travail spécifique sur la validation. Il est en effet connu et admis que la singularité d'une expérience n'est pas un élément suffisant pour accéder à la généralité d'une preuve en mathématiques. Dans la démarche d'investigation appliquée aux mathématiques, nous rechercherons donc essentiellement des phases de validation à l'issue des travaux d'expérimentation. Ce moment clé dans la construction des connaissances scientifiques nécessite un étayage du professeur qui doit engager la confrontation avec le savoir établi (comme autre forme de recours à la recherche documentaire, recours au manuel), en respectant des niveaux de formulation accessibles aux élèves, donc inspirés des productions auxquelles les groupes sont parvenus. Il doit veiller à organiser les liens entre les protocoles expérimentaux (constructions, modélisations, schématisations) et les objets théoriques qui leur sont sous-jacents afin de conduire progressivement et éventuellement à une reformulation écrite par les élèves, avec l'aide du professeur, des connaissances nouvelles acquises en fin de séquence. Il existe la possibilité d'une relance de la recherche si les connaissances émergentes ne sont pas en accord avec les connaissances mathématiques visées.

Nous faisons l'hypothèse que notre scénario d'enseignement pour la recherche des polyèdres garantit l'accès à cette phase de validation. Nous avons en effet observé dans toutes nos interventions des moments consacrés à la validation des propositions émises lors des phases

exploratoires. A chaque fois, il a été proposé d'en établir des traces écrites (collectives et/ou individuelles) afin de stabiliser les connaissances acquises.

§ *Opérationnalisation*

La situation des polyèdres décrite dans cet article peut donner lieu à de nombreux prolongements permettant de réinvestir certaines procédures, de maîtriser les formes d'expression liées aux connaissances travaillées : formes langagières ou symboliques, représentations graphiques, liens. On peut également envisager d'investir d'autres champs des mathématiques afin de tester le réinvestissement dans de nouveaux problèmes. C'est ce que nous essayons de conduire dans un projet en cours sur la mise en place de laboratoires de mathématiques au sein de dispositifs ou classes de l'enseignement spécialisé. Ce nouveau terrain ayant pour cadre un rallye mathématique produit déjà quelques éléments d'évaluation des connaissances et des compétences méthodologiques tout à fait prometteurs (Dias, 2006).

chapitre II – Ingénierie de formation

Nous avons choisi le terme *ingénierie* car il comporte pour nous toutes les dimensions nécessaires à la recherche quant à son volet formation. L'ingénierie fait référence aux méthodes (démarches, références, contenus), à la définition d'un répertoire d'actions et de leur programmation, mais aussi au suivi de leur mise en œuvre par des instances de coordination et d'évaluation compétentes. Ce processus de formation connexe à notre recherche fonctionne depuis quelques années, il permet de mettre en relation les données de notre travail de recherche et le terrain des classes par la médiation d'une formation des enseignants. L'enrichissement mutuel des deux parties garantit la pérennité du dispositif qui fait l'objet de nombreux contenus de formation (initiale et continue) dans l'institution sur le plan départemental.

Les invariants de la dimension expérimentale des mathématiques repérés dans le chapitre précédent doivent être portés par un projet qui permette leur mise en œuvre concrète dans les classes. C'est ce que nous avons cherché à faire en créant le dispositif du rallye mathématique de l'ASH au sein du département du Rhône. Nous montrerons dans ce chapitre qu'il répond aux conditions concernant la dévolution, la formulation des conjectures et hypothèses, la dialectique de la validation ; et qu'il permet également l'acquisition de connaissances notionnelles et de compétences scolaires. L'originalité du dispositif tient selon nous dans sa place au sein d'une ingénierie de formation dont nous présenterons ensuite les dispositifs associés. Nous terminerons ce chapitre par la présentation des premières répercussions sur les conséquences de la mise en œuvre de ce projet, que ce soit en terme d'enseignement et d'apprentissage. Pour cela, nous nous appuyerons sur le traitement analytique d'un questionnaire envoyé aux professeurs dont les classes participent au rallye.

Enfin, il nous semble important de rapporter ici que la présentation du rallye-ASH a fait l'objet de trois publications¹⁰ l'une à la COPIRELEM¹¹ (Dias, 2007), la deuxième dans les actes des journées internationales du Rallye Mathématique Transalpin (Dias, 2007) et la troisième à paraître dans les cahiers pédagogiques (Dias, 2008).

¹⁰ Une partie des contenus de ces publications est reprise ici.

¹¹ Commission Permanente des Instituts de Recherche En Mathématiques sur l'Enseignement Élémentaire.

II – 1 Le "rallye-ASH" : un projet de formation

Si nous devons définir la place du rallye dans l'ingénierie de formation, nous dirions que c'est avant tout un projet pour les classes de l'ASH puisqu'il contient les éléments relatifs à ce type de pédagogie : autonomie des élèves dans le choix des tâches, contrôle collaboratif langagier et instrumenté de l'avancée des recherches, évaluations régulières des travaux, élaboration d'une production finalisée, déplacement de la posture enseignante. Il est également un projet de formation dans le cadre de notre ingénierie, puisqu'il permet de fédérer une communauté d'enseignants autour d'enjeux didactiques et pédagogiques : dimension expérimentale des mathématiques, démarche d'investigation, étayage de l'enseignant.

Si le rallye-ASH est apparu en premier lieu comme un "habillage" plus ou moins ludique de l'activité mathématique au yeux des enseignants, il a permis par la suite d'enrôler les participants dans une pratique d'enseignants réflexifs (Perrenoud, 2008) concernant les conditions qui favorisent l'enseignement et l'apprentissage dans cette discipline. Nous présentons ici les raisons de la création du dispositif avant de décrire les formations qui lui sont associées. Pour terminer, nous verrons quelles sont d'ores et déjà les répercussions constatées dans les milieux des situations mises en œuvre dans les classes.

II - 1.1 Les raisons de la création du rallye-ASH

Il existe deux raisons principales à la création du projet tel qu'il a été proposé aux trois circonscriptions de l'adaptation et la scolarisation des élèves en situation de handicap (ASH) du Rhône. La première se situe du côté de l'enseignement, l'enjeu principal est ici la création des conditions nécessaires pour une mise en œuvre différente des activités mathématiques (préparation conduite et analyse) ceci permettant un autre regard du professeur sur les relations élève / savoir. Il s'agit de donner aux professeurs les outils pour préparer, observer et étudier l'activité mathématique de leurs élèves grâce à la démarche de la résolution de problèmes de recherche. Sur cet *axe enseignement*, nous avons recueilli à plusieurs reprises des souhaits de formation en didactique des mathématiques dans nos expériences de formation.

Ils sont tout d'abord caractérisés par une forte demande des enseignants spécialisés qui recherchent des moments d'apprentissages consistants s'inscrivant dans une programmation. Ils déplorent en effet d'être parfois obligés de conduire des séries de courts moments d'enseignements juxtaposés relatifs à des techniques. Ils souhaitent des situations adaptées au contexte dans lequel ils exercent notamment en vue de la restauration de l'estime de soi et la confiance de leurs élèves qui fait trop souvent obstacle à toute activité cognitive. Leur demande est associée à la discipline des mathématiques qui n'est pas systématiquement

redoutée par les élèves par rapport notamment aux activités de lecture ou d'écriture dans lesquelles ils sont particulièrement stigmatisés en échec.

Les professeurs de l'enseignement spécialisé réclament également à juste titre une formation à l'enseignement des mathématiques intégrant la dimension de résolution de problèmes, compte tenu du peu de formation dans ce domaine (tant en formation initiale que continue).

La deuxième raison ayant conduit à la création du projet rallye-ASH se situe sur le versant des apprentissages des élèves. Son premier objectif est de restaurer l'intention d'apprendre en mathématiques par le retour au sens dans les activités cognitives des élèves, ce qui représente un des obstacles fondamentaux cités par les enseignants exerçant dans l'enseignement spécialisé. Nous faisons l'hypothèse que la résolution de problèmes au sein d'une démarche d'investigation, propose un réel travail favorisant le sens dans les pratiques mathématiques des élèves. Elle permet d'inscrire l'apprentissage dans un projet au long cours, adapté aux connaissances familières déjà présentes, nécessitant une collaboration et des échanges langagiers ancrés sur des contenus et ayant une finalité bien identifiée.

Il nous faut rapporter ici quelques inquiétudes relevées dans les réactions de certains enseignants lors des phases de lancement du projet. Elles nous paraissent contradictoires avec les souhaits de formation, mais ont néanmoins été énoncées en révélant ainsi des doutes qu'il nous faut intégrer.

"Nos élèves ne se concentrent pas plus de 10 minutes, ils n'aiment pas les questions ouvertes qui les déstabilisent, ils veulent du concret, ils préfèrent les activités répétitives ne nécessitant pas un investissement cognitif, votre rallye c'est perdu d'avance !"

(extrait d'une remarque faite lors de la première session de formation avec les enseignants spécialisés, 2004)

Nous verrons, lors du bilan présenté plus loin qu'une partie non négligeable de ces inquiétudes a été levée. Ce sont ces regards sur les élèves, leurs capacités cognitives et comportementales qui ont été le plus modifiés.

Pour terminer, notons aussi que les enjeux du dispositif ont toujours été clairement énoncés comme la recherche d'une activité mathématique du plus grand nombre d'élèves, sans référence à un éventuel aspect compétitif recherchant à distinguer les meilleurs. Aucune médaille ni gain substantiel n'est proposé par l'organisation du projet, seuls des petits

diplômes sont envoyés à toutes les classes qui en font la demande. Une feuille de route¹² est publiée à destination de tous les participants potentiels chaque année, afin de rendre tout à fait explicite cet absence d'enjeu.

Comme pour les années passées, nous vous rappelons que l'enjeu de ce rallye tient dans la sollicitation de l'activité mathématique des élèves au sein de situations énigmatiques dont les solutions nécessitent réflexion, expérimentation, débat et mises en commun. Il n'y rien à gagner sinon le plaisir de chercher. (extrait de la feuille de route destinée aux participants)

II - 1.2 Evolutions du dispositif

§ *Bref historique*

Cette année scolaire 2007-2008 est la 5^{ème} année de mise en œuvre du projet au niveau départemental. Elle a été précédée de trois périodes consécutives, nécessaires au développement progressif de cette expérimentation didactique et pédagogique et à l'organisation de ses espaces de formations connexes. Le projet a bénéficié d'un soutien constant des trois circonscriptions de l'adaptation scolaire (ASH) du Rhône. Elles sont représentées par les trois inspecteurs départementaux (IEN), et leurs équipes de conseillers pédagogiques. Ces derniers font partie intégrante du groupe des organisateurs et des formateurs pour les différentes phases de formation continue associées au projet *rallye-ASH*.

En 2003-2004, le rallye fut organisé sous une forme relativement simple et expérimentale. Ce sont trois séances de recherche en mathématiques qui ont été menées au sein de trois établissements spécialisés volontaires (deux Instituts Médico-Educatifs et un Centre d'Education Motrice), l'ensemble concernant un groupe de 15 enseignants. Ces séances ont été encadrées par un dispositif de formation continue¹³ (conduit sur deux matinées de trois heures) pour les enseignants participant à cette action. A l'issue de cette première phase, une évaluation qualitative¹⁴ très encourageante a décidé l'équipe des formateurs¹⁵ à étendre l'expérimentation à un plus grand nombre de classes et d'établissements.

Lors de l'année scolaire 2004-2005, nous avons décidé l'extension du dispositif en le proposant à toutes les classes de l'adaptation scolaire du département du Rhône (via un site internet). Nous avons alors dénombré 25 participants inscrits dans le projet. Le rallye s'est déroulé sur toute l'année, en proposant aux classes candidates trois périodes de recherche

¹² Lettre dans son intégralité en annexe 12.

¹³ Voir annexe 10.

¹⁴ Etablie lors de la deuxième session de formation.

¹⁵ Deux conseillers pédagogiques spécialisés et un formateur IUFM en mathématiques

(pour trois manches), mais aussi des énigmes de difficultés différentes (s'accompagnant d'une différence dans les points attribués) afin de satisfaire une demande exprimée par les enseignants en formation relative aux niveaux très différents des élèves d'une classe à une autre. Le dispositif de formation associé au plan de formation départemental de l'adaptation scolaire a perduré pour 6 heures en deux sessions.

Nous avons totalisé 40 classes participantes en provenance essentiellement du Rhône mais aussi d'autres départements¹⁶ lors de la troisième année 2005-2006, puis 48 en 2006-2007. Depuis la quatrième session, la principale nouveauté consiste à prendre en compte les démarches de résolution dans le barème de notation.

Cette année, chaque énigme rapporte le même nombre de points, les différences se feront avec le barème de notation :

*12 points : réponse correcte avec explications valides;
8 points : réponse correcte sans explication, ou avec des explications non valides;
5 points : réponse incorrecte mais tentative d'explications valides
2 points : réponse incorrecte sans explications*

(extrait du règlement du rallye ASH 2006-2007)

Nous avons observé en conséquence principale une très nette amélioration de la qualité du travail de langue écrite des présentations et des rapports de recherche conçus dans les classes. Les envois se sont enrichis d'affiches produites dans les classes, de photos prises pendant les recherches, des brouillons (traces des essais) et même d'un cédérom¹⁷ pour l'une des classes. Ces supports ont notamment été utilisés lors des sessions de formation accompagnant le dispositif puisqu'ils permettent d'en dégager des contenus de formation :

- analyse comparative des démarches de résolution,
- analyse didactique a posteriori des problèmes,
- compréhension et analyse de l'erreur,
- liens possibles entre les activités mathématiques du rallye et les compétences transversales relatives aux productions langagières (écrites et orales).

¹⁶ Les inscriptions ont été ouvertes à l'extérieur sur le site d'accompagnement.

¹⁷ Ce support sera d'ailleurs l'objet de notre analyse dans le dernier paragraphe de ce chapitre, tant il témoigne de l'appropriation de la démarche que nous préconisons dans cette recherche.

Les envois ont aussi été accompagnés de lettres produites par les élèves témoignant ainsi de leur engagement et du plaisir à la pratique des activités de recherche.

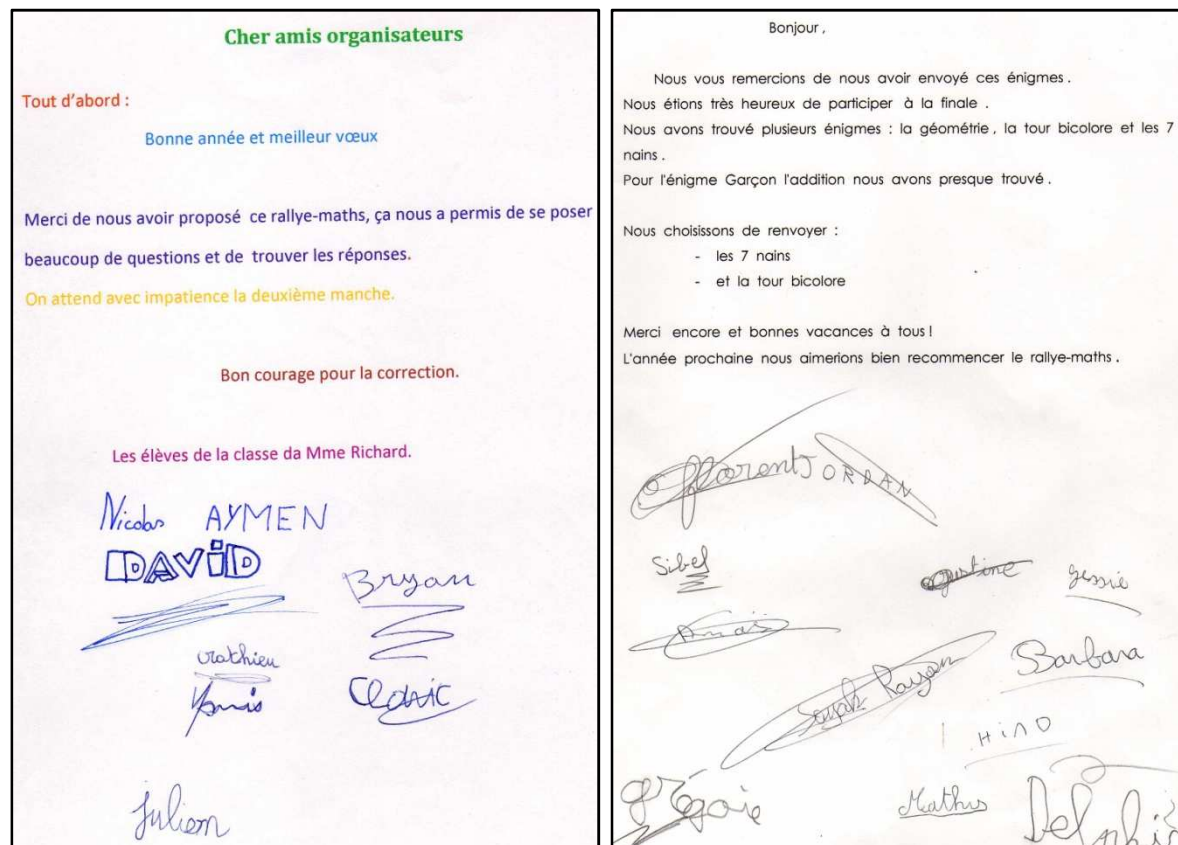


figure 48 : lettres d'accompagnement aux envois de résultats des énigmes

Depuis deux ans, une finale est proposée à tous les participants qui le souhaitent en fin d'année scolaire. Elle est organisée sur un temps beaucoup plus court (une semaine seulement) qui donne l'occasion aux élèves et à leurs enseignants de tester le dispositif intégrant une variable temps contraignante. Six problèmes sont proposés à la résolution, deux doivent être présentés par les classes candidates. Les résultats donnent alors lieu à l'envoi de diplômes pour les classes qui le souhaitent.



figure 49 : diplôme de chercheurs apprécié par certains...

§ *Adaptation des organisations*

Au cours des trois premières années, nous avons été amenés à opérer progressivement des choix organisationnels afin de tenir compte des remarques des enseignants formulées pendant les sessions de formation, et des paramètres spécifiques au contexte de l'enseignement spécialisé. Nous en présentons ici les principales évolutions.

Après deux années d'essai qui proposaient trois périodes de recherche sur l'année scolaire, nous avons finalement opté pour l'organisation de deux manches d'une durée de trois mois chacune. Ceci permet notamment des organisations pédagogiques variées et adaptées aux publics, mais aussi avec l'objectif de donner une certaine représentation de la recherche : un processus qui s'inscrit dans le long terme.

Pour chaque période de recherche, nous proposons une série de dix énigmes¹⁸. Ceci autorise l'investissement des différents domaines du champ disciplinaire (numérique, géométrique, logique de type combinatoire) selon les compétences et appétences de chaque élève ou de chaque groupe d'élèves. En effet, sur les dix énigmes proposées, chaque classe doit en choisir quatre seulement. Ce choix doit s'établir de manière concertée dans la classe puisqu'une seule réponse par énigme sera acceptée conformément aux règles imposées par le projet "rallye"¹⁹.

Enfin, nous proposons aux enseignants depuis deux années, de joindre à l'envoi des réponses, des explications sur les conditions de déroulement, sur l'avancée des recherches ainsi que sur les éléments qui ont contribué à la justification des solutions avancées. C'est ainsi que nous

¹⁸ Voir annexe 11.

¹⁹ Le règlement est donné dans un document nommé "feuille de route", voir annexe 12.

avons proposé la prise en compte des éléments de validation des réponses dans le barème de notation.

Un tableau de synthèse récapitulatif est tenu à la disposition des participants qui en font la demande, il présente l'ensemble des résultats obtenus et permet aux classes qui le souhaitent de se situer proportionnellement à leur taux de réussite. Cet outil d'évaluation n'est pas systématiquement fourni, nous le considérons donc comme une adaptation au contexte et à l'âge des élèves. Il est très apprécié dans les dispositifs de type ITEP (élèves assez âgés) et très peu utilisé en classe d'intégration par exemple.

II - 1.2 Hétérogénéité des publics

Depuis plusieurs années, et principalement les deux dernières, le projet s'est assez largement étendu sur le plan géographique mais aussi sur celui des types de dispositifs scolaires de l'enseignement spécialisé. Les publics sont désormais très hétérogènes tant sur le plan de l'âge des élèves que sur celui des structures d'accueil mais également du type de situation de handicap. Pour 2007-2008, voici le bilan détaillé que nous faisons en terme de participations :

- 14 CLIS : classes d'intégration scolaire,
- 6 classes en IME : instituts médico-éducatif (enfants et adolescents atteints de déficience mentale),
- 2 classes en IMPRO : instituts médico-professionnels
- 5 classes en ITEP : instituts thérapeutiques, éducatifs et pédagogiques (enfants ou adolescents présentant des troubles du comportement importants, sans pathologie psychotique, ni déficience intellectuelle),
- 5 SEGPA : Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté,
- 6 classes en IEM : Institution d'Education Motrice pour enfants handicapés moteurs,
- 7 UPI : Unités Pédagogiques d'Intégration,
- 1 classe en EREA DV : Etablissement Régional d'Enseignement Adapté pour Déficients Visuels.

Cependant, quels que soient la classe, l'âge et le niveau des élèves, nous avons décidé de garder le même règlement et les mêmes énigmes pour tous. Nous avons varié les contenus des énigmes sur le plan notionnel, différencier le plus possible les contextes et enrichi les domaines mathématiques afin que les problèmes concernent tous les participants. De plus, les enseignants sont laissés libres d'aménager les milieux d'apprentissage (matériel, consigne,

etc...) en faisant varier s'ils le souhaitent les niveaux d'adaptation propres aux besoins de leurs élèves. Les variables concernent aussi bien le temps à consacrer à la résolution des problèmes, que les supports de recherche proposés ou la reformulation des énoncés. Les épreuves sont par exemple traduites en braille pour la classe des élèves déficients visuels.

I – 1.3 Correction des envois et corrigés des énigmes

Chaque manche du rallye donne lieu à une correction réalisée par l'équipe organisatrice. Au fil de ces expériences de corrections, nous avons remarqué l'extraordinaire richesse de ce moment sur le plan didactique (comparaison des démarches, analyse des erreurs, compréhension des stratégies, écarts par rapport aux analyses a priori). Nous avons donc décidé de proposer ce processus de correction aux enseignants spécialisés participants ou non au rallye, dans le cadre du plan départemental de formation continue des circonscriptions de l'adaptation scolaire du Rhône. Ainsi, depuis deux ans, l'une des corrections des deux manches fait l'objet d'un temps de formation par la confrontation avec la diversité des cursus des enseignants mais aussi avec celle de leurs contextes d'enseignement. Ceci nous aide à améliorer les problèmes proposés, et apporte des données à notre recherche quant à la prise en compte de la démarche d'investigation en mathématiques.

Avec l'envoi des résultats à chaque classe, nous communiquons également un corrigé très détaillé de tous les problèmes de la manche (y compris pour ceux qui n'ont pas été choisis pour la résolution par les classes). Ce document²⁰ permet d'assurer les enseignants d'un cadrage didactique qui peut s'avérer déterminant en vue de repérer les notions travaillées dans leur programmation, ou pour retravailler avec leurs élèves des contenus abordés par certains problèmes. La préparation de ce corrigé nous a semblé faire partie d'un processus didactique renforçant la formation des enseignants, nous la proposons désormais également dans le plan de formation au moins pour l'une des manches. Le travail est alors axé sur le choix des problèmes, leur adaptation au contexte de l'enseignement spécialisé et l'analyse a priori des situations. Parallèlement à ces sessions de formation reconnue institutionnellement, une petite équipe d'enseignants et de formateurs volontaires a été bâtie pour analyser plus spécifiquement la formulation des consignes de chaque énigme. Il est possible que ce travail fasse aussi partie d'ici quelque temps des contenus de formation proposés en circonscription.

²⁰ Voir un exemple en annexe 13.

II – 2 Dispositifs de formation associés : initiale et continue

Notre ingénierie de formation est développée à partir d'un projet pour les classes qu'il est nécessaire de présenter afin d'en saisir tous les enjeux. Le principe est de proposer une formation à la didactique des mathématiques en tant qu'outil professionnel au service d'un enrichissement de la pratique et d'une réflexion sur le processus enseigner / apprendre. Cet objectif est poursuivi sur deux niveaux de formation, l'un en formation initiale de préparation au diplôme d'enseignant spécialisé (CAPA-SH), l'autre en formation continue au plan départemental. Deux critères d'évaluation sont envisagés quant au suivi de ces dispositifs de formation :

- le taux de participation des professeurs des écoles aux sessions de formation continue du plan de formation des circonscriptions de l'adaptation scolaire,
- le nombre de stagiaires CAPA-SH s'inscrivant au rallye pendant leur année de formation,
- les variations du nombre de classes inscrites au rallye, leur contexte d'enseignement et leur taux de renouvellement.

Le nombre et la qualité des mémoires professionnels à propos du dispositif rallye-ASH réalisés par les stagiaires préparant le CAPA-SH est aussi un indice que nous observerons dans les années à venir.

II - 2.1 Des actions au plan de formation des circonscriptions

Ces actions de formation continue prennent la forme de réunions pédagogiques²¹ dont la finalité est de développer et d'accompagner des méthodes de travail et des dispositifs associés dans le cadre de projets de classe. Elles ont pour cible les objectifs principaux suivants :

- accompagnement de la démarche d'enseignement par la résolution de problèmes de recherche dans le cadre du rallye : travaux sur la notion de *situation didactique*, sur l'analyse a priori,
- prise en compte et compréhension de l'erreur, analyse comparative des démarches de résolution proposées par les classes (en participant aux corrections et analyses des envois),

²¹ Une réunion pédagogique dure environ trois heures pour un enseignant du premier degré. Un plan lui est proposé chaque année par sa circonscription de rattachement. Jusqu'en 2007 chaque enseignant devait effectuer 12 heures de formation continue. Avec la réforme de 2008, ce temps passe à 18 heures.

- mise en œuvre la démarche de résolution de problèmes en mathématiques en prenant en compte les adaptations nécessaires dans un contexte de l'enseignement spécialisé : le rôle du professeur et la question de l'étayage (Bruner, 1983), la dévolution des situations, la gestion des interactions,
- prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques : la création d'un laboratoire de mathématiques (dans la classe ou dans l'établissement) pour mettre en œuvre une démarche d'investigation.

Ces sessions de formation ont été proposées progressivement dans le plan de formation des circonscriptions de l'adaptation scolaire depuis l'année scolaire 2003-2004 en même temps que le dispositif rallye²². Depuis la première proposition d'action, toutes ont été mises en place du fait du nombre suffisant de professeurs volontaires pour les suivre²³. Elles ont systématiquement atteint le nombre maximum de stagiaires se situant entre 20 et 25 personnes. Nous avons chaque fois proposé six heures de formation en deux sessions, sans jamais restreindre l'accès aux seuls participants au rallye. L'effectif des professeurs des écoles inscrits au rallye varie de 30% à 50% selon les années.

Nous envisageons un changement dans ce processus pour l'année scolaire 2008-2009. Nous souhaitons en effet organiser 12 heures de formation sous la forme d'un séminaire à destination des classes inscrites au rallye. Quatre temps de formation qui comprennent les préparations des problèmes de chaque manche, la correction des envois des classes mais aussi l'analyse in-situ d'un moment de laboratoire dans une classe qui le pratique dans le cadre de ses recherches pour le rallye. Ce projet est à l'étude avec les équipes de circonscription de l'adaptation scolaire.

	2005-2006	2006-2007	2007-2008
nombre de classes inscrites	48	48	47
nombre de réinscriptions	-	23	32
taux de ré-inscriptions	-	48 %	68 %

tableau 15 : suivi des ré-inscriptions sur les trois dernières années

²² A cette date, nous conduisons des travaux de recherche dans le cadre d'un DEA:Master sur l'expérimentation en mathématiques (Dias, 2004).

²³ Une action de formation est ouverte lorsque plus de 10 personnes ont manifesté leur intérêt pour la suivre et se sont inscrites en conséquence.

II - 2.2 Une prise en compte de ce dispositif en formation initiale à l'IUFM

L'IUFM de Lyon est centre académique pour la formation à la spécialisation des professeurs des écoles, il nous est alors possible d'intervenir dans le cadre de la formation initiale du CAPA-SH²⁴ des options C, D et F. Nous y présentons notamment le dispositif du rallye et sa valeur ajoutée en termes d'enseignement de la discipline. Ces interventions consacrées aux éléments de didactique des mathématiques font l'objet d'un volume horaire variable en fonction des options (24 heures en option D est l'exemple le plus conséquent). Cette présentation est réalisée lors de la période précédant l'année de formation, ce qui permet aux enseignants qui le souhaitent de s'inscrire dans le projet rallye lors de la rentrée suivante. Ceci représente un engagement relativement important car l'année de formation au CAPA-SH se déroule en alternance avec des périodes discontinues de présence dans les classes, ce qui rend la mise en place de projets sur le long terme relativement difficiles. Néanmoins, depuis trois ans nous avons toujours plusieurs candidats à l'expérience. Pour la sixième édition du rallye (2008-2009) ce sont 18 stagiaires CAPA-SH de l'option D (sur les 26 au total) qui se sont inscrits dans le projet ce qui représente 70% de l'effectif. Notons encore que 10 des 18 volontaires pour le rallye se sont dits prêts à organiser un laboratoire de mathématiques (tels que nous les présenterons dans le dernier chapitre de cette thèse).

La didactique des mathématiques est présentée comme un outil professionnel adapté aux situations d'enseignement spécifiques et difficiles. Nous évoquons le statut de l'activité de recherche en mathématiques, la démarche d'apprentissage qui correspond aux situations de résolution de problèmes, ainsi que la dimension expérimentale des mathématiques. Il est incontournable d'associer une réflexion sur le rôle de l'enseignant dans la conduite de sa classe que nous étudions en interrogeant le milieu spécifique que représente le "laboratoire". Enfin, les questions d'évaluation permettent un ancrage sur les contenus des programmes d'enseignement, elles complètent ce dispositif de formation que nous menons depuis cinq ans désormais.

II – 3 Répercussions sur les apprentissages et l'enseignement : éléments d'analyse via le questionnaire

A l'issue des troisième et quatrième années de l'expérimentation du rallye-mathématiques, nous avons adressé un questionnaire individuel²⁵ aux enseignants des classes inscrites dans le

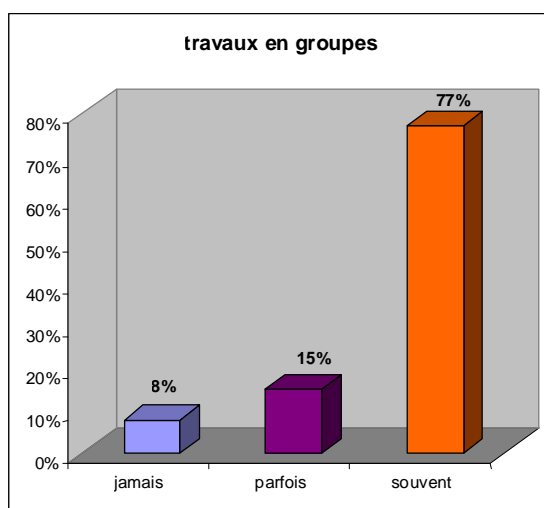
²⁴ Le Certificat d'Aptitude Professionnelle pour les Aides Spécialisées, les enseignements adaptés et la scolarisation des élèves en situation de Handicap comporte plusieurs options dont notamment : option C (déficience motrice grave), option D (troubles des fonctions cognitives), option F (section d'enseignement général et professionnels adaptés)

²⁵ Voir un exemple de ce questionnaire en annexe 14.

dispositif. Notre souhait était d'analyser les répercussions dans la pratique ordinaire de classe de la mise en œuvre du rallye. L'hypothèse est que le travail mené au sein des laboratoires de résolution de problème, pourrait amener élèves et professeurs à constituer progressivement un nouveau type de contrat didactique dont les effets seraient observables au-delà des moments de recherche des énigmes. Nous voulons ici relater une partie des analyses des réponses fournies par les professeurs, puis nous tracerons quelques perspectives sur le développement du projet pour les années à venir.

II - 3.1 Dispositifs sociaux de travail

Concernant les dispositifs de travail en classe, les réponses au questionnaire révèlent une très forte propension à proposer des travaux de groupes, dispositif habituellement peu mis en œuvre dans l'enseignement spécialisé du fait des incertitudes en termes de conduite de classe qu'il peut augurer.

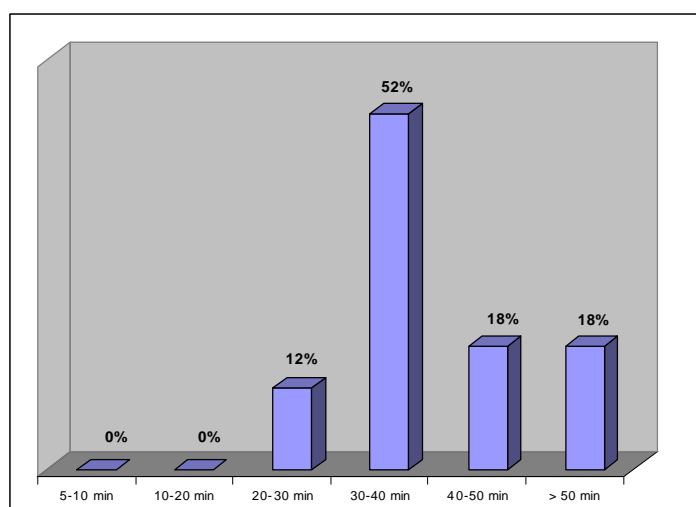


graphique 8 : "Comment organisez-vous les séances de recherche des élèves ?

Dans le contexte des recherches conduites pendant le rallye, ce sont plus des trois-quarts des enseignants qui déclarent choisir ce dispositif de travail. Certains enseignants témoignent d'une mise en place progressive de ces dispositifs de travail, d'abord sur des temps très courts puis de plus en plus longs.

A la question "Combien de temps consacrez-vous à chaque séance de recherche ?", la moitié des enseignants répondent dans la fourchette 30 à 40 minutes et un tiers plus de 40 minutes. Pourtant, l'une des inquiétudes exprimées par les professeurs en amont du projet concernait la durée des séquences qu'ils sont à même de proposer à leurs élèves. Ils les jugent en effet

souvent peu enclins à des temps de travail et de concentration importants, ce qui se révèle très différent et inattendu dans le cadre de la résolution des problèmes de recherche.



graphique 9 : Combien de temps consacrez-vous à chaque séance de recherche ?

Parmi les réponses au questionnaire, quelques enseignants citent le fait "de rechercher à plusieurs" comme un facteur limitant l'exposition individuelle à l'échec, phénomène dont on sait qu'il peut provoquer une grande souffrance dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Le rapport à l'erreur s'en trouve en quelque sorte partagé et donc moins redoutable à envisager. La grande variabilité des connaissances et des savoirs de chacun semble ainsi un facteur positif non discriminatoire, ce qui n'est pas habituel dans des classes comme les SEGPA par exemple.

II - 3.2 Dévolution et enrôlement des élèves

Quatre-vingt-sept pour cent des professeurs interrogés déclarent qu'ils ne rencontrent pas de difficulté à lancer les élèves dans la tâche proposée, alors que cette phase est souvent vécue difficilement du fait notamment des importantes différences de niveau de connaissances et de savoirs des élèves de l'enseignement spécialisé. Les arguments avancés par les enseignants concernent le contexte et le dispositif du rallye :

- qui semble "décroché" par rapport au programme,
- qui propose un travail inter-classes,
- qui comporte plusieurs "énigmes" (différents problèmes) et la possibilité de choisir,
- qui permet un travail à plusieurs,

- qui se déroule sur un temps plus long en proposant plusieurs manches, ce qui diminue le sentiment d'échec.

Ces résultats sont très importants pour les enseignants tant cette phase de dévolution des situations est rendue délicate et complexe dans l'enseignement spécialisé. De nombreux critères (pédagogiques et psychologiques) rendent l'entrée dans l'activité complexe dans son contrôle. Le contexte du rallye semble fournir un habillage facilitant même si les enseignants témoignent régulièrement que ces résultats s'obtiennent dans la durée. Ce n'est souvent pas la première année d'inscription au rallye qui est suffisante, il faut que l'expérience soit renouvelée pour que de tels effets soient sensibles.

II - 3.3 Qualité des relations et des interactions

Trois enseignants sur quatre estiment que les relations et interactions (élèves-élèves et élèves-professeur) pendant les phases de recherche et de mise en commun sont très différentes de celles qui sont vécues dans le quotidien ordinaire de la classe. Dans le contexte de l'enseignement spécialisé, la question des interactions entre les élèves est un point crucial et déterminant en vue du bon déroulement de la situation d'apprentissage. Il paraît notamment essentiel que les objets des discours soient partagés et explicites pour que le débat scientifique s'engage.

"Lorsqu'ils savent de quoi ils parlent, que l'enjeu du débat est partagé par tous, les débats ne dérapent jamais." (extrait des questionnaires individuels)

Le dispositif de travail en équipe proposé par le rallye, qui demande aux classes de n'envoyer qu'une seule réponse, provoque également un autre rapport à la tâche et par là même une relation différente au savoir. Ce dernier apparaît bien aux élèves en co-construction ce qui peut permettre de mettre provisoirement de côté les tensions et les conflits de personnes (sur le long terme, bien entendu).

II - 3.4 Médiation instrumentale des activités

Deux remarques nous semblent importantes dans ce domaine ; elles concernent la diversité du matériel proposé aux élèves mais aussi la méthodologie proposée par les enseignants quant à son utilisation. Nous notons en premier lieu, la très grande variété du matériel mis à la disposition des élèves, tant dans les objets propices à des manipulations et/ou représentations symboliques, que dans les supports de travail dépassant très largement le strict cadre de la feuille blanche : feuilles A3, calques, quadrillages, tableaux, feuilles cartonnées, sont cités spontanément par les enseignants. De nombreux instruments sont aussi proposés qui vont des

règles plastiques à l'ordinateur en passant par les calculatrices, les gabarits et autres instruments de traçage. Cette diversité rend compte d'un réel enrichissement des pratiques d'enseignement. Il est en effet plutôt rare de constater un recours aussi varié à du matériel au service de la modélisation, de l'instrumentation de l'activité des élèves, et de l'expérimentation dans un contexte de classe plus ordinaire.

L'inventaire que nous avons réalisé à travers les réponses au questionnaire nous paraît tout à fait conforme aux hypothèses que nous faisons concernant la démarche expérimentale intrinsèque à la résolution de problèmes en mathématiques. Il apparaît assez clairement que c'est la formulation de conjectures en lien avec les objets idéaux des mathématiques qui provoque la nécessité de leur représentation par des objets sensibles. Ainsi les demandes de matériel deviennent progressivement à la charge des élèves qui souhaitent un enrichissement du milieu propice à la construction des savoirs. Même dans les contextes d'enseignement où certains élèves sont caractérisés par une certaine apathie face à l'apprentissage (par exemple en institut médico-éducatif), certaines séances de recherche ont provoqué de réelles formulations de demandes parfois à la très grande surprise de leurs enseignants (pas toujours préparés à y répondre par ailleurs).

Concernant la méthodologie, certains enseignants rapportent la nécessité qui s'est imposée à eux (et à leurs élèves) de traiter la question pédagogique et didactique du matériel au sein des moments de travail préliminaires sur les énigmes (lors de l'étude sémantique des énoncés). Voici par exemple un court extrait d'une réponse d'un professeur spécialisé exerçant en classe d'intégration scolaire avec des élèves ayant entre 7 et 11 ans :

"À la demande des élèves, j'ai induit l'habitude de se poser la question du matériel / outils qui pourrait nous être utile, cela facilitant notamment la procédure de découverte des énigmes. Lors de la 1^{ère} manche, je mettais à disposition des aides matérielles (présentation différente de l'énoncé de l'énigme, supports pour les recherches géométriques). Lors de la 2^{ème} manche, j'ai demandé aux élèves de lister les aides matérielles dont ils avaient besoin. Pour la 3^{ème} manche, je n'ai fourni que le matériel demandé spontanément par les élèves." (extrait des questionnaires individuels)

II - 3.5 Une pratique d'enseignant réflexif²⁶

Comme nous l'avons évoqué auparavant dans ce chapitre, nous sommes régulièrement destinataires d'un nombre de traces de plus en plus conséquent au fil des envois des classes. Ainsi, en plus des réponses aux énigmes, nous recevons des courriers des élèves, des brouillons témoignant des recherches menées mais également des correspondances avec les enseignants. Nous les sollicitons en effet depuis deux ans, pour qu'ils nous communiquent s'ils le souhaitent, toutes les remarques qui leur semblent utiles dans le cadre de la mise en œuvre du projet. Nous souhaitons terminer ce chapitre en relatant deux types d'envois qui témoignent de l'appropriation et de la réussite de cette expérimentation.

Au cours de cette année 2007-2008, nous avons reçu une proposition faite par une enseignante participant au rallye qui est également une stagiaire CAPA-SH (option D, déficience cognitive). Elle a confectionné des outils sous forme de fiches²⁷ supports et d'aide à la recherche pour ses élèves et les a proposées aux autres participants qui souhaitaient les utiliser.


Fiche de recherche	
Enigme 	
Titre : _____	
Essai 1	
Ce que nous utilisons	
Ce que nous faisons	
Est-ce que cet essai nous a permis de trouver la réponse ?	<input type="checkbox"/> OUI <input type="checkbox"/> NON → autre essai

image 50 : fiche de recherche

²⁶ Nous empruntons la terminologie à Perrenoud (2008) sans négliger qu'il fait lui-même référence très explicitement à Schön (1994)

²⁷ Voir annexe 15.

Ces supports qui montrent une volonté d'étayer la structuration de la recherche ont été réalisés en vue de répondre à un besoin identifié par l'enseignante. Il est vraisemblable que les élèves aient exprimé ce besoin de support supplémentaire au moins dans leurs actions si ce n'est verbalement. La création de ces outils et le souhait exprimé de leur diffusion / partage au sein de la communauté des participants au rallye témoigne d'une pratique réflexive notable confirmée par les échanges lors de la dernière session de formation continue cette année. Les supports proposés sont désormais téléchargeables sur le site du rallye-ASH, nous serons attentifs à leur utilisation / appropriation par d'autres participants (ce qui a d'ores et déjà été observé lors de la deuxième manche de la cinquième édition du rallye).

Dans les envois de résultats, l'une des classes participantes nous adresse depuis trois ans un descriptif complet et très illustré des phases de recherche. Ces descriptifs sont accompagnés de témoignages parfois enthousiastes, parfois exprimant des doutes sur la conduite des opérations et sur les résultats obtenus. L'enseignante relate également certaines activités conduites dans le cadre du prolongement possible des énigmes. Chaque fois que les notions d'un problème s'avèrent intéressantes dans le cadre de la programmation des savoirs dans la classe, l'enseignante cherche des activités ou exercices de nature à stabiliser ou approfondir les connaissances des élèves. L'ensemble de ces données communiqué a abouti pour cette année 2007-2008 à l'édition d'un cédérom à l'initiative de l'enseignante²⁸ de cette classe en institut médico-éducatif.

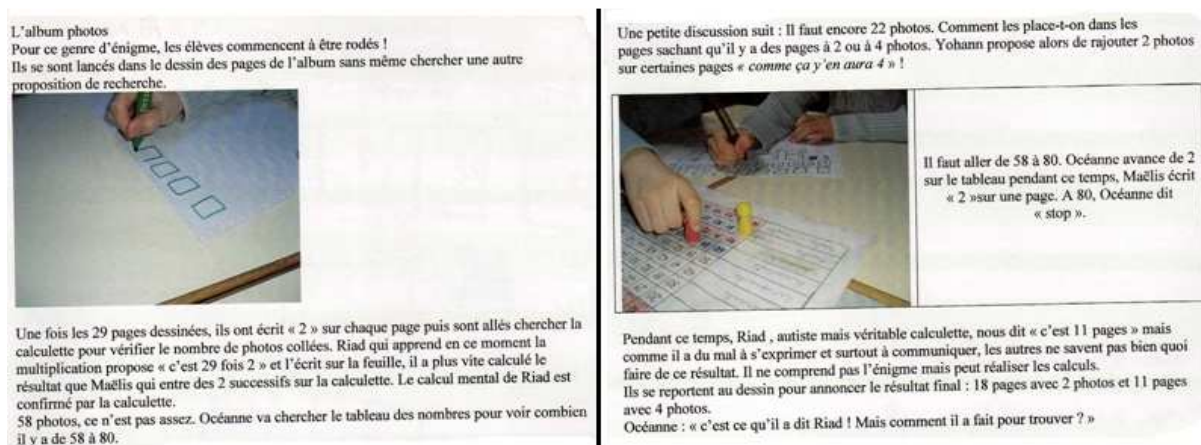


figure 51 : extrait d'un envoi de la classe de l'IME

Les observations réalisées par cette enseignante sont particulièrement riches et nous permettent d'afficher un certain nombre de résultats quant à nos conjectures émises. En effet,

²⁸ Nous lui avons proposé un témoignage dans un article à paraître dans la revue "cahiers pédagogiques" à paraître à l'automne 2008.

même si ce témoignage est relativement exceptionnel, cette posture professionnelle n'est pas isolée comme nous avons pu le constater lors des nombreuses sessions de formation conduites avec les enseignants spécialisés. La mise en œuvre de situations d'apprentissage utilisant la démarche d'investigation et révélant la dimension expérimentale des mathématiques donne la possibilité aux enseignants de changer leur place dans le milieu des situations. En s'inscrivant davantage dans une posture d'étayage consacrée à la dévolution, au contrôle des variables permettant la réussite des processus de signification (les objets de savoirs en jeu coïncident avec les connaissances mises en actes par les élèves) et à la garantie d'une phase de validation ; les enseignants obtiennent des résultats quant à la stabilité du milieu. Cela leur permet de forger une expérience professionnelle positive dans un climat de classe favorable aux apprentissages, ceci garantissant la pérennité de ce type de démarche.

Afin de stabiliser les résultats déjà obtenus par la mise en place du dispositif rallye-ASH, nous souhaitons développer la création de laboratoires de mathématiques, lieux identifiés pour la pratique de la démarche d'investigation en mathématiques. Cette perspective est l'objet du dernier chapitre de cette thèse.

chapitre III – Vers les laboratoires de mathématiques

Dans le cadre de notre ingénierie didactique, nous souhaitons une diffusion la plus large possible des dispositifs d'enseignement / apprentissage s'appuyant sur la dimension expérimentale des mathématiques. Nous voulons développer la pratique de telles situations didactiques en prenant appui sur les terrains de l'enseignement spécialisé puis en visant leur généralisation au sein de l'école primaire et à l'enseignement "ordinaire". Nous souhaitons en effet que les potentialités identifiées au sein de l'enseignement spécialisé puissent être offertes à l'ensemble des élèves. Dans un précédent chapitre nous avons défini la notion de laboratoire en référence à un type de milieu didactique en référence épistémologique à Hacking (2005) et historique à Borel (1904). Notre projet est de trouver une application concrète à cette notion afin qu'elle soit intégrée dans des pratiques scolaires.

En créant de véritables lieux laboratoires au sein des établissements scolaires, nous espérons provoquer la mise en œuvre de situations d'apprentissages relevant des enjeux didactiques et pédagogiques définis dans l'expérimentation en mathématiques. Le dispositif rallye-ASH tel que nous venons de le décrire, nous paraît représenter un tremplin idéal pour la mise en place de ces laboratoires. Nous faisons l'hypothèse qu'à l'issue de ces cinq premières années d'expérimentation, nous pouvons désormais demander aux professeurs de faire une place importante à l'activité mathématique de type expérimentation/modélisation en envisageant des extensions allant au-delà du strict cadre du rallye.

Dans ce chapitre, nous reviendrons sur les raisons qui nous conduisent à proposer le laboratoire comme un argument décisif pour la prise en compte de la dimension expérimentale en mathématiques en revenant sur les enjeux épistémologiques, historiques et didactiques. Puis nous présenterons une première expérience menée dans une section d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA) au sein d'un collège. Enfin, nous tracerons les perspectives de notre recherche quant aux années à venir concernant la diffusion de nos travaux et la constitution de ressources pour la formation.

III – 1 Des laboratoires de mathématiques : entre histoire et modernité

III - 1.1 Un peu d'histoire

L'idée des laboratoires de mathématiques pour l'enseignement n'est pas très récente puisqu'elle apparaît il y a plus d'un siècle dans une déclaration d'Emile Borel²⁹ au musée pédagogique intitulée "Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire" (Borel, 1904).

"Mais pour amener, non seulement les élèves, mais aussi les professeurs, mais surtout l'esprit public à une notion plus exacte de ce que sont les Mathématiques et du rôle qu'elles jouent réellement dans la vie moderne, il sera nécessaire de faire plus et de créer de vrais laboratoires de Mathématiques.[...] Il est, en effet, nécessaire d'arriver, non pas à multiplier les points de contact entre les Mathématiques et la vie moderne (ces points de contact sont innombrables et se multiplient chaque jour d'eux-mêmes), mais à mettre ces points de contact en évidence pour tous ; c'est le seul moyen d'empêcher que les Mathématiques soient un jour supprimées comme inutiles par voie d'économie budgétaire." (Borel, 1904, p. 58)

En pleine réforme de l'enseignement secondaire (réforme des lycées de 1902), Emile Borel fait un discours qui s'appuie sur une certaine conception des mathématiques et de leur enseignement. Il prône en effet une approche intuitionniste (ou constructiviste) des mathématiques aux côtés de Kronecker et Poincaré, une approche dans laquelle les objets ne peuvent se satisfaire d'une démonstration théorique ou axiomatique, ils doivent être exhibés par une construction.

"L'élève comprendra qu'il est sans doute excellent de bien raisonner, mais qu'un raisonnement juste ne conduit à des résultats exacts que si le point de départ est lui-même exact ; qu'il faut, par suite, ne pas croire aveuglément à tout raisonnement, à toute démonstration d'apparence scientifique, mais se dire toujours que la conclusion n'a de valeur qu'autant que les données ont été scrupuleusement vérifiées par l'expérience." (Borel, 1904, p. 61)

C'est ce qui fonde son idée de laboratoires de mathématiques qu'il présente dans la deuxième partie de son allocution. Dans la première, il cherche à montrer l'intérêt, le rôle, et la nécessité des exercices pratiques qui permettent d'introduire "*plus de vie et de sens du réel*" dans l'enseignement mathématique. Il y décrit les enjeux mais aussi les contraintes institutionnelles qui ne manqueront pas de voir le jour dans un tel programme d'enseignement :

²⁹ Emile BOREL (1871-1956), membre de l'académie des Sciences en 1921 est élu président de cette même Académie en 1934. Son discours d'investiture engagé témoigne de son souci de relier la science non seulement à ses applications concrètes mais aussi (et peut être surtout) à ses bénéfiques dans le bien être humain.

"L'organisation de ces exercices pratiques d'arpentage et de Cosmographie se heurtera quelquefois à des difficultés administratives. Il faut du beau temps pour l'arpentage, du soleil dans certains cas pour la Cosmographie, une nuit étoilée dans une autre occasion, etc. Or, les nuages n'ont pas des moeurs très administratives ; ils ne se prêteront pas toujours à l'horaire des classes, dont la belle ordonnance fait l'orgueil de l'antichambre de M. le Proviseur. Il pourra être utile de déplacer une classe de latin pour observer une éclipse, ou de retarder l'heure du coucher pour voir une occultation d'étoile par la Lune. " (Borel, 1904, p. 58)

Son argumentation pour la création de véritables laboratoires de mathématiques tient essentiellement dans sa volonté de faire faire des mathématiques à des élèves qui ne dissocient jamais la théorie d'une pratique en lien avec le réel. Il ne s'agit pas de rivaliser avec certains laboratoires de physique nécessitant parfois des instrumentations coûteuses, mais plutôt de se rapprocher de l'atelier du menuisier *"des modèles simples, construits par les élèves eux-mêmes, avec du bois, du carton, du fil, de la ficelle, etc."*. De ce fait, c'est même une conception relativement avant-gardiste d'un enseignement pluridisciplinaire qui est proposé au sein de ces laboratoires. Les professeurs provenant des diverses disciplines scientifiques pouvant être amenés à intervenir en fonction des sujets d'études et des objets qui les sous-tendent. Nous sommes proches des objectifs des itinéraires de découvertes ou des travaux pratiques encadrés pour lesquels l'ambition dépassait celle des apprentissages des élèves pour atteindre les relations interprofessionnelles.

III - 1.2 Quelques expériences actuelles

Bien que l'idée des laboratoires de mathématiques ait été reprise par la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques (présidée par Jean Pierre Kahane, 2002), puis par Jacques Lang, alors ministre de l'éducation nationale, elle n'a été que peu suivie d'effet. Pourtant, dans son rapport les incitations étaient claires et engageantes :

Il s'agirait de créer, dans tous les lycées et collèges, des laboratoires de mathématiques semblables aux laboratoires de physique ou de chimie et biologie des lycées, pourvus de locaux propres, de matériel (informatique en particulier), de livres et documents, pour rassembler des élèves par petits groupes et servir également de salle de réunion et de travail pour les professeurs. [...] Le laboratoire serait un lieu privilégié pour la rencontre entre chercheurs, enseignants et élèves. En créant une nouvelle image des mathématiques et de leur aspect expérimental, le laboratoire devrait favoriser les relations interdisciplinaires. Il pourrait être en relation avec les mathématiciens des universités les plus proches. Les laboratoires de lycée pourraient au départ intégrer des professeurs de collège de leur secteur.

(rapport CREM, 2002)

A la suite de ce rapport, on peut noter le faible nombre de tentatives d'application dans quelques expériences conduites dans les options sciences en lycée dans l'académie de Montpellier (options destinées à préparer les élèves à une orientation en cursus scientifique en première):

- option sciences de Montpellier (lycée Mas de Tesse),
- option sciences de Nîmes (lycée Alphonse Daudet)
- option sciences du lycée de Limoux.

¶ Découvrir l'implication des mathématiques dans notre vie quotidienne :

L'implication des mathématiques dans d'autres disciplines scientifiques, techniques, voire littéraires ou économiques est très importante et souvent mal connue :

- Implication dans le développement des transmissions d'informations via Internet par exemple, avec les problèmes de sécurisation de ces transmissions.
- Implication dans le domaine médical (imagerie médicale)
- Implication dans le secteur des travaux publics (constructions de ponts, tracés d'autoroutes...)

§ Comprendre et développer l'aspect expérimental des mathématiques :

- Utiliser des logiciels (géométrie, tableur, calcul formel) pour étudier des problèmes.
- Optimiser l'utilisation de sa calculatrice.
- Construire et manipuler des objets pour mieux comprendre une situation.

© Se faire plaisir avec les maths :

- Résoudre toutes sortes de casse-tête : Les jeux et énigmes mathématiques sont innombrables !!!
- S'entraîner aux diverses compétitions : Kangourou, Olympiades pour les Premières , Concours général pour les Terminales.
- Tout autre thème de mathématiques pour le plaisir de faire des maths est envisageable !

figure 52 : extrait du site consacré au laboratoire de mathématiques du lycée Mas de Tesse (34)

Même si ces laboratoires sont dynamiques et bien vivants (celui du Lycée Mas de Tesse ayant même reçu la visite de deux académiciens des sciences en 2007, J.P. Kahane et Y. Quéré), l'extension à d'autres lycées ne s'est pas produite.

Sans proposer très explicitement la notion de laboratoires de mathématiques, l'association Mathématiques-en-Jeans "*Méthode d'Apprentissage des Théories mathématiques en Jumelant des Établissements pour une Approche Nouvelle du Savoir*" témoigne d'objectifs similaires (Duchet, 2000). Cette association qui existe depuis 1989, propose des ateliers de recherche à tous les niveaux des classes du second degré mais aussi depuis quelques temps aux élèves de l'école élémentaire. Les principes sont exposés dans un site internet³⁰ très riche qui annonce en première page ses objectifs :

En mettant les jeunes aux prises avec d'authentiques problèmes, "MATH.en.JEANS" inverse la tendance courante de la classe de mathématiques et assigne à l'enseignant un rôle différent. Pour se lancer dans l'étude, il n'est plus nécessaire de posséder tous les outils et la démarche de résolution n'est plus détenue par le maître. Certitudes et réponses cèdent la place au doute et au questionnement. Loin d'être réservée à une

³⁰URL du site : <http://mathenjeans.free.fr/amej/accueil.htm>

élite, l'activité s'adresse à tous : c'est par la représentation, la formulation, le débat et la critique que se forgent les connaissances et s'affirment les capacités créatrices.

(extrait de la présentation sur le site de l'association)

Les ateliers proposés permettent à des élèves volontaires de rencontrer des chercheurs en mathématiques pour mener à bien des travaux collaboratifs sur des sujets très ouverts. Une rencontre nationale à la cité des Sciences à Paris est proposée en fin d'année scolaire, un grand colloque réunissant tous les chercheurs (élèves et professeurs) destinée à la mutualisation des travaux, aux échanges et aux débats scientifiques.

Les établissements qui participent aux ateliers Maths-En-Jeans sont essentiellement des lycées dans le cadre des options proposées aux élèves ou des collèges dans le cadre de clubs mathématiques. Le développement au premier degré est relativement récent et limité en nombre de classes mais néanmoins prometteur. Les dispositifs et structures qui organisent les recherches dans ce cadre peuvent fonctionner comme des laboratoires puisqu'elles en reprennent globalement les principes : un lieu identifié pour les recherches, une démarche expérimentale, des interactions entre élèves et professeurs, une production finalisée.

III - 1.3 La recherche dans un laboratoire de mathématiques

Nous avons défini la notion de laboratoire dans un précédent chapitre de la première partie de cette thèse (chapitre III-4.2 de la partie A) comme un lieu consacré à la recherche de la véracité, la terminologie véracité renvoyant à *celui qui dit la vérité* (Hacking, 2005) afin d'insister sur l'une des phases essentielles dans la construction des connaissances scientifiques : la validation. Le laboratoire se caractérise également par la culture du doute (hypothèses émises sur les rétroactions parfois inattendues, parfois antagonistes), et de l'expérimentation comme démarche de résolution des problèmes rencontrés. Une méthodologie de travail est privilégiée en contexte scolaire : la démarche d'investigation. Cette dernière nécessite notamment la présence et l'utilisation d'instruments, et une intense activité langagière et symbolique énonciative, descriptive puis peu à peu argumentative. Enfin, le laboratoire possède un statut public guidé par une finalité de communication.

L'activité mathématique des élèves au sein du laboratoire est fondée sur leurs interactions avec des objets dans les allers et retours du théorique au sensible, de l'abstrait au concret, du nouveau au familier. L'ensemble de ces éléments fondent un milieu spécifique que nous avons cerné et décrit auparavant. Ce milieu testé dans le cadre d'une situation particulière (la recherche des polyèdres réguliers) est aussi en grande partie reconnu dans la mise en œuvre du dispositif rallye-ASH. Tout se passe comme si les classes participantes se trouvaient dans un contexte identifié spécifiquement lors de la résolution des énigmes : situation de mise en recherche, collaboration dans les expérimentations, étayage distancié du professeur,

communication publique des résultats. Ces conditions définissent le fonctionnement d'un laboratoire, de ses outils, de ses acteurs et de leurs activités.

Notre projet consiste désormais à proposer aux enseignants de le nommer ainsi afin de rendre explicite cette démarche de recherche auprès de leurs élèves et de l'institution, que ce soit à l'échelon de la classe, de l'établissement ou à celui de l'instance pédagogique dont ils dépendent.

III – 2 Une expérimentation en SEGPA

Pour que la dynamique enclenchée par la participation au rallye puisse se développer, nous avons proposé deux sessions de formation continue à des enseignants titulaires dans des sections d'enseignement général et professionnel adapté (SEGPA). Au cours de cette formation consacrée aux outils mathématiques, nous leur avons proposé de suivre le canevas d'une démarche d'investigation en mettant en application le schéma en sept points tel qu'il est présenté dans le document d'introduction à l'enseignement des sciences (MEN, 2007). L'objectif est de l'appliquer aux mathématiques grâce notamment à la mise en place de problèmes de recherche. Cette démarche de travail qui convient particulièrement bien au contexte de l'enseignement spécialisé devait pouvoir trouver un terrain de développement au sein d'un collège, du fait des spécificités d'un tel dispositif : spécialisation disciplinaire des enseignements (un seul enseignant pour les mathématiques, inscription de la classe au sein d'un établissement dont les moyens (humains, pédagogiques, matériels et financiers) sont plus importants. Après la présentation du contexte institutionnel dans lequel s'inscrit cette nouvelle expérimentation, nous ferons le compte rendu du déroulement d'une séance "laboratoire" dans une classe ayant mis en place une situation de recherche particulière. Nous terminerons par une analyse *a posteriori* de cette expérimentation quant à ses potentialités didactiques et à sa place dans notre ingénierie de formation.

III – 2.1 Contexte institutionnel

Le projet de création de laboratoires de mathématiques dans des classes de l'enseignement spécialisé s'appuie sur le dispositif de rallye-mathématiques que nous venons de décrire. Dans le cadre du plan de formation départemental 2006-2007 des enseignants spécialisés du Rhône, nous avons proposé une session intitulée : "des mathématiques-outils aux outils mathématiques en SEGPA, l'expérimentation pour comprendre". Cette session de six heures était destinée aux professeurs des écoles exerçant en collège dans un dispositif spécifique : les sections d'enseignement général et professionnel adapté. Nous avons en effet remarqué que ces structures étaient peu présentes dans les classes participantes du rallye, ce qui nous

paraissait étonnant et par la même intéressant. D'après une enquête informelle réalisée sur le terrain par les conseillers pédagogiques des circonscriptions de l'adaptation scolaire, cela semblait dû à un déficit d'accompagnement à la conduite de séances de résolution de problème. Le contexte spécifique d'enseignement / apprentissage des SEGPA est particulièrement difficile, les élèves de 12 à 16 ans qui y sont accueillis présentent de très grandes difficultés d'apprentissage. Ces élèves ne sont pas scolarisés dans des dispositifs relevant des situations de handicap, mais présentent néanmoins des déficits cognitifs assez souvent accompagnés par des troubles du comportement. Les relations entre eux peuvent être assez conflictuelles ce qui freine bien souvent les enseignants à mettre en place des dispositifs ou des situations s'appuyant sur les interactions langagières.

La session de formation que nous avons proposée était ancrée sur la discipline des mathématiques pour deux raisons principales :

- cette discipline n'est pas celle qui met ces élèves le plus en échec, elle peut même représenter un espace d'apprentissage relativement rassurant par le sens de ses activités mais aussi par ses techniques,
- il n'existe pas ou très peu de formation concernant la didactique des mathématiques dans l'enseignement spécialisé.

Nous avons proposé aux enseignants de renverser le regard qui est porté sur l'aspect des mathématiques-outils mettant l'accent sur l'utilité des connaissances (savoir calculer quand on fait ses courses, savoir mesurer une pièce avant de la tapisser...), vers celui de l'outillage que représentent les savoirs mathématiques dans les processus de raisonnement, d'échanges interpersonnels et de compréhension des objets et phénomènes du monde sensible.

Après avoir présenté les caractéristiques de la dimension expérimentale des mathématiques, nous avons communiqué un répertoire de problèmes de recherche³¹ relativement ouverts (Arsac, Mante, 2007) dont nous présenterons l'un d'eux : "*les bananes dans le désert*". Les outils didactiques relevant du rôle de l'enseignant dans le milieu spécifique que représente la mise en œuvre de la démarche d'investigation (posture et étayage), ont été étudiés afin d'aider les professeurs à mettre en œuvre l'une de ces situations dans leur classe. La démarche d'investigation en sept points a également été explicitée, elle doit servir de guide pour la préparation et la conduite de la classe. Nous avons conseillé aux stagiaires de rendre explicite cette expérimentation dans leur classe, en la présentant comme la création d'un laboratoire de mathématiques.

Tous sont repartis avec une affiche symbolique leur permettant éventuellement d'encadrer leurs expérimentations :

³¹ Voir annexe 16.

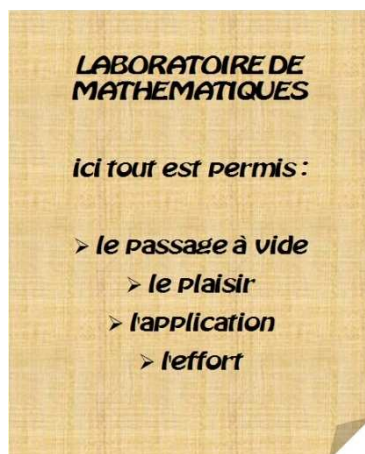


figure 53 : lancement symbolique de l'opération labo-mathématiques en SEGPA

Sur les douze professeurs des écoles présents lors de cette session, dix d'entre eux ont pu mettre en application le "canevas" proposé, et une enseignante a accepté d'être filmée pendant une séance dite "de laboratoire". Le problème choisi pour sa classe faisait partie de la liste distribuée et testée lors de la formation, nous le présenterons dans le paragraphe suivant.

III – 2.2 La situation des bananes

Il s'agit d'un problème ayant été proposé pour la première fois en 2001-2002 dans le cadre des recherches des ateliers Mathématiques-En-Jeans (dont nous avons fait le descriptif auparavant). L'énoncé en est le suivant :

Les bananes dans le désert

Dans un désert de 1000 km, nous devons transporter 3000 bananes avec un chameau ne pouvant porter que 1000 bananes sur son dos. En sachant qu'il consomme 1 banane par km parcouru (exemple : 100 km parcourus = 100 bananes consommées), quel est le plus grand nombre de bananes que vous pouvez ramener au bout du désert?

Comme il possède les caractéristiques d'un problème ouvert tels qu'ils sont définis par Arsac et Mante (2007), nous l'avons utilisé à plusieurs reprises en formation continue d'enseignants de classe "ordinaires", en formation initiale de professeurs des écoles et même en formation de formateurs. Il permet une véritable réflexion sur les stratégies du chercheur en mathématiques, et se prête à un travail numérique et algébrique ne nécessitant pas a priori de connaissances très avancées. Sa dévolution est relativement facile du fait d'un contexte simple

d'accès, de données numériques appartenant à un corpus basique, et d'une consigne courte et assez facile à comprendre.

La difficulté principale de sa résolution consiste dans la modélisation de la situation (comment représenter l'avancée de la recherche), et dans le choix des variables stratégiques, le tout mettant en évidence la force des outils mathématiques dans le domaine de la prévision et de l'anticipation. Trois types de conjectures sont possibles concernant la prévision :

- conjecture 1 de type calcul : nul n'est besoin de refaire 3 fois de suite le voyage à la borne 500 km, les mathématiques prédisent l'échec de la mission !
- conjecture 2 de type numérique : 3 départs sont nécessaires au minimum car $3000 = 3 \times 1000$
- conjecture 3 de type raisonnement : plus le chameau fait de distance plus il consomme donc moins il ne transportera de bananes de l'autre côté du désert (on peut même en déduire qu'il est préférable de charger au maximum le chameau avant chaque déplacement).

Du côté de l'anticipation un exemple de formalisation partielle de l'énigme en vue d'anticiper les changements d'une variable a été relevé lors de l'expérimentation de la situation en formation de formateurs à propos de la première borne (puisque'il est de l'ordre de l'axiome que plusieurs voyages sont nécessaires) dans le désert. On peut écrire mathématiquement le résultat de la quantité de bananes transportées à la première étape dans le désert, en choisissant par exemple cette première borne à 200 km. Comme le chameau ne transporte que 1000 bananes à la fois, il faudra effectuer 2 allers et retours et 1 aller simple donc 5 trajets.

Consommation : $5 \times 200 = 1000$

Bananes transportées : $3 \times 1000 = 3000$

Bananes sauvegardées : $3000 - 1000 = 2000$

Un tableau peut alors se concevoir d'après cette formulation :

	100	200	300	400	x
Consommation	500	1000	1500	2000	$5x$
Bananes transportées	3000	3000	3000	3000	3000
Bananes sauvegardées	2500	2000	1500	1000	$5(600 - x)$ et $x \leq 500$

tableau 10 : bananes consommées selon les étapes effectuées

Ce début de formalisation permet alors de faire d'autres anticipations sur la seconde étape en se souciant cette fois du ratio maximum, mais la recherche n'est pas terminée pour autant...

III – 2.3 Sa mise en œuvre comme laboratoire

Les analyses qui vont suivre proviennent d'un enregistrement vidéo d'une séance dite de "laboratoire mathématique" réalisée par une enseignante ayant suivi la session de formation continue décrite auparavant. La séance d'une heure s'est déroulée dans une classe de SEGPA d'un collège de Villefranche sur Saône situé en zone d'éducation prioritaire. L'effectif de cette classe est de 15 élèves dont 12 étaient présents lors de notre expérimentation.

L'enseignante est nommée à titre provisoire sur ce poste car elle ne possède pas le diplôme d'enseignant spécialisé, elle effectue seulement sa deuxième année d'enseignement après une première expérience scolaire en maternelle. C'est elle qui a souhaité enseigner en SEGPA, elle envisage d'ici quelques années de postuler pour la formation en CAPA-SH.

A l'occasion de cette première séance de laboratoire, elle a confectionné une petite valise contenant le matériel collectif et individuel nécessaire à la conduite de la séance. Elle a effectué son travail de préparation suite à la session de formation et avec notre aide³².

§ *Compte rendu en regard du canevas fourni sur la démarche d'investigation.*

A l'occasion de la mise en œuvre de la séance dans la classe, nous avons enregistré en format vidéo l'heure complète et réalisé un compte rendu destiné à l'enseignante puis à aux autres stagiaires de la session de formation lors de notre deuxième après de cette expérience en SEGPA. Pour cela, nous avons repris le canevas de la démarche d'investigation, nous en présentons ici une version plus détaillée que celle que nous avons réalisé dans le cadre de la formation, mais elle en reprend les principaux éléments.

moment 1 : choix de la situation, des objectifs

Lors de la session de formation, nous avons repris les différents paramètres devant renseigner cette phase de la préparation :

- analyser les savoirs visés et déterminer les objectifs à atteindre;
- repérer les acquis initiaux des élèves,
- identifier les conceptions ou les représentations des élèves, ainsi que les difficultés persistantes (analyse d'obstacles cognitifs et d'erreurs);
- élaborer un scénario d'enseignement en fonction de l'analyse de ces différents éléments.

Dans le cadre de la mise en place du laboratoire (il s'agit de la première séance dans cette classe de SEGPA), pour cette séance les savoirs visés sont de trois types :

³² Voir une des traces de nos échanges en annexe 17.

- des savoirs faire méthodologiques : conduire une recherche en groupe, être à l'écoute et prendre en compte les idées d'autrui,
- des savoirs notionnels : arithmétique (relations entre les nombres entiers), algèbre (traduction d'un énoncé en langue ordinaire sous forme d'une ou plusieurs écritures mathématiques impliquant des variables et des constantes)
- une initiation au raisonnement logique : repérer puis isoler les propositions évidentes (axiomes), proposer des enchaînements logiques (sur un plan arithmétique), vérifier ses conclusions

Concernant les objectifs à atteindre, dans cette première séance il s'agit essentiellement de démarrer un dispositif (le "labo-mathématiques") en proposant un projet de travail de recherche, et d'installer des habitudes de travail. Selon l'enseignante, les élèves ont déjà montré leur appétence pour le travail de recherche en mathématiques (ils participent au rallye-ASH), et ils possèdent les connaissances arithmétiques nécessaires au moins pour l'entrée dans la situation. Les obstacles principaux concernent la compréhension des éléments de la consigne ainsi que leur traduction en termes algébriques. Il est ensuite difficile de corréliser les différentes contraintes données dans l'énoncé et d'en proposer une modélisation permettant d'avancer dans sa résolution et de communiquer lors des phases de mise en commun.

Le scénario consiste à programmer la recherche sur un long terme (il faudra vraisemblablement plusieurs séances), à fournir aux élèves quelques repères méthodologiques, à accompagner de façon proximale les premières hypothèses, à étayer les différentes étapes de la construction du raisonnement et à fournir le matériel sur demande.

moment 2 : appropriation du problème par les élèves

L'étayage a concerné l'explication langagière (sémantique) de l'énoncé, mais aussi la mise en évidence de la question posée : ce que l'on doit chercher. La dévolution passe par une double annonce de l'enseignante qu'elle a choisi d'énoncer lors de sa préparation :

1/ "*Il faut du temps pour faire cette recherche*", le choix est délibéré de ne pas utiliser la terminologie de *problème*,

2/ "*J'ai moi même effectué cette recherche auparavant*" pour rassurer les élèves sur la faisabilité, mais également pour apporter un témoignage de son intérêt.

La formulation langagière utilisée par l'enseignante est pertinente pour une bonne dévolution :

"J'ai un chameau, avec ce chameau vous allez traverser le désert"

Cette formulation sous-entend un peu "*mon problème va devenir le vôtre*" puisque le chameau semble être d'abord celui du professeur mais ses actions relèvent de choix faits par les élèves. Quelques minutes plus tard, toujours dans sa consigne orale, nous avons noté que l'enseignante utilisait la formule "*votre chameau*" lors de la clôture du moment de dévolution

juste avant la distribution des supports pour la recherche, un peu comme si le chameau avait été confié aux élèves. Nous avons trouvé cette énonciation habile dans le cadre de cette entrée dans l'activité puisqu'elle permet d'afficher clairement que la responsabilité de la résolution serait confiée aux élèves.

La mise en activité des élèves s'est faite très rapidement, sans refus ni de la tâche ni du dispositif de travail en groupes (ce qui est loin d'être systématiquement le cas selon l'expérience relatée de l'enseignante). En quelques minutes (environ une dizaine) l'ensemble des élèves s'est approprié le problème tant sur le plan de la compréhension de la consigne que sur celui des outils mathématiques à mobiliser pour la résolution. La phase de dévolution un peu redoutée par l'enseignante s'est donc parfaitement déroulée.

moment 3 : La formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles

moment 4 : L'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves

Nous n'avons pas séparé ces deux moments sur le plan chronologique. Comme nous l'avions déjà fait remarquer auparavant, nous ne pensons pas que la formulation de conjectures ou d'hypothèse se fasse spontanément sans que des actions soient conduites par les élèves et que les rétroactions du milieu leur fournissent quelques premières informations nécessaires. Nous faisons le compte rendu de ces deux moments simultanément.

La recherche commence par un temps de lecture individuelle assez court. Quelques conjectures sont rapidement énoncées (un nombre par exemple, ou une décomposition de 3000). Les échanges sont oraux, il n'y a pas ou peu d'utilisation de l'écrit dans cette phase même si les trousseaux s'ouvrent comme par rituel pour signifier l'entrée dans l'activité.

La première conjecture est valide "*il faut faire plusieurs voyages*" mais construite sur une erreur de lecture des données : un désert de 100 km seulement. Cependant elle permet d'exhiber collectivement (elle est faite oralement et spontanément) le fonctionnement des allers et retours. Son énonciation arrive cependant un peu trop tôt dans la phase de recherche, et seul son locuteur en bénéficie, car son expression traduit relativement mal son raisonnement. Cet élève a refusé de travailler dans un groupe, il accepte cependant une partenaire de recherche chargée de lui faire quelques calculs sur demande grâce à l'emploi d'une calculatrice.

Dans un autre groupe, on découvre après quelques minutes de travail qu'il n'y a qu'un seul chameau. Une première hypothèse avait en effet été émise sur la présence de trois mammifères ce qui rendait la situation très différente. La deuxième découverte concerne le trajet du chameau : rien ne dit dans l'énoncé que la traversée est obligatoire en une seule étape.

Petit à petit, quelques une de ces découvertes sont stabilisées comme des "axiomes" et l'enseignante les rend publiques en les énonçant oralement et collectivement. Le premier de ces axiomes est : on ne peut pas emporter les 3000 bananes en une seule fois (c'est interdit par l'énoncé, donc non discutable). Certaines propriétés en sont déduites plus ou moins directement :

- il faut toujours prévoir un stock de bananes sur le dos du chameau pour qu'il puisse marcher (même quand il revient dans l'autre sens),
- il faut faire des étapes successives et laisser des tas de bananes dans le désert (des points relais).

Des débats ont lieu en interne dans chaque groupe mais aussi de façon assez spontanée entre quelques élèves appartenant à des équipes différentes. Ils sont argumentés par les énonciateurs mais les échanges restent relativement sans conséquence directe du fait des difficultés de compréhension entre protagonistes : seul le registre de la langue orale est utilisé dans ces échanges, il manque un appui écrit explicatif. Il faut dire que les traces réalisés en terme de "cahier d'expérience" sont peu exploitables à ce moment de la séance :

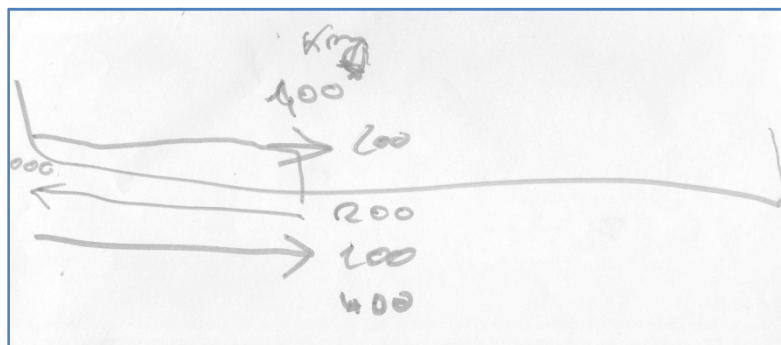


figure 54 : exemple de trace en début de recherche

Au bout de quelques minutes, certaines propositions semblent plus résistantes et elles sont testées avec le recours à l'écrit : des essais ont lieu sur la traduction des conjectures en schéma contenant des données numériques. Cet écrit alliant un repérage graphique et des opérations sur les nombres est difficile à construire, il nécessite en effet l'utilisation d'une forme scénarisée (film de l'histoire). La forme statique du schéma est peu propice à rendre compte des relations entre les nombres.

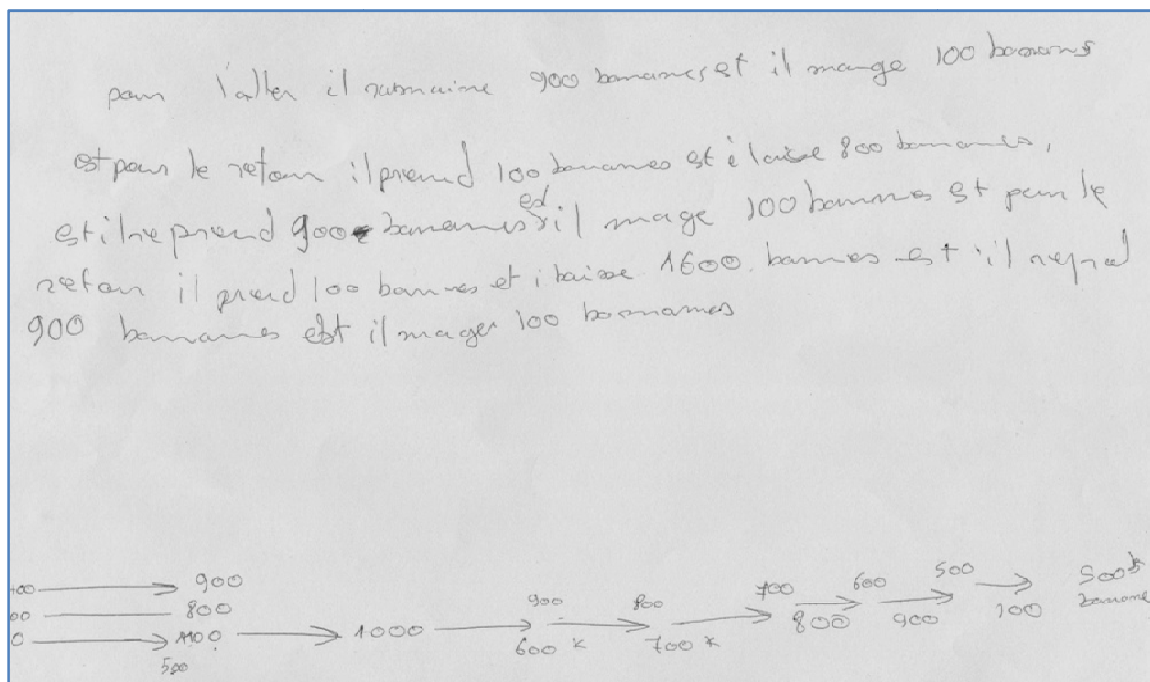


figure 55 : une trace écrite montrant un essai de scénarisation

moment 5 : L'échange argumenté autour des propositions élaborées

Tenant compte du fait que les implications et les recherches des élèves sont très variées, la professeure choisit de changer le dispositif de travail après 25 minutes de recherche environ. Elle propose une petite mise en commun bâtie sur le compte rendu de recherche de deux élèves (tous les deux lancés dans la schématisation de l'énigme).

L'écoute générale est bonne, il apparaît clairement à l'issue de ce moment que l'essentiel du problème réside dans la "mise en équation" des étapes du trajet du chameau. La longueur de chacune de ces étapes apparaît variable (ce qu'il faut chercher) mais aussi déterminante (elle détermine la réussite ou non de l'expédition).

Les propositions énoncées par chacun des deux élèves sont soumises au débat, il y a alors tentative d'argumentation des énonciateurs.

Un premier élève utilise le tableau pour écrire des listes de nombres dont les relations opératoires ne sont pas explicites (il se contente de dire les égalités construites). L'enseignante reformule les propositions sans faire de critique, elle se tient à la bonne distance (physiquement aussi d'ailleurs) pour ne pas afficher une quelconque participation à la résolution de l'énigme.

Un deuxième élève propose une schématisation du problème, il dessine au tableau une droite graduée de 1000 km en unités de 100 km. Il choisit ensuite de bien différencier les informations de distance (en dessous de la droite) de celles du nombre de bananes (au dessus de la droite). Il explique ensuite son raisonnement (bâtit sur des étapes de 100 km) dont la clé

principale réside dans le fait de stocker des bananes à des points relais du désert. Il amorce de plus un schéma plus scénarisé des étapes de l'aventure.

Conformément à sa préparation, l'enseignante essaye aussi de profiter de cette première mise en commun pour stabiliser un certain nombre de connaissances utiles dans la recherche (les axiomes et prémisses du raisonnement nécessaire). A l'issue de cette mise en commun, la recherche est relancée dans chaque groupe sans temps mort. La présence de l'enseignante auprès de chaque groupe est néanmoins nécessaire et appréciée de tous les élèves. La relance proximale s'impose car certaines conjectures sont invalidées par le moment collectif, le découragement guette... La séance atteint aussi les 45 minutes à ce moment là.

§ *Eléments de synthèse et réactions*

L'enseignante est assez satisfaite à l'issue de la séance, une bonne part de ses objectifs sont atteints : fonctionnement du travail en groupes, écoute active lors des mises en commun, avancée dans la résolution mathématique du problème. Elle est relativement surprise du taux de participation (aucun refus d'entrée dans l'activité, ce qui est relativement rare) et de la durée de l'investissement de certains de ses élèves. Même l'élève qu'elle diagnostique comme le plus difficile à contrôler du fait de ses troubles comportementaux associés (il revenait ce jour là en SEGPA après une semaine d'exclusion du collège), a participé à la résolution en acceptant même le partage des idées et une forme de collaboration dans le travail (il s'agit de l'élève ayant accepté une camarade pour l'aider dans les calculs).

Globalement, les élèves ont montré un intérêt soutenu pour la recherche malgré la durée de la séance. Le dispositif de travail en équipes a été plutôt bien accepté et s'est montré relativement efficace à toutes les phases puisque la résolution est loin d'être au "point mort". Le dispositif labo-mathématiques semble procurer aux élèves un environnement propice à des échanges constructifs, aux démarches d'essais et à l'acceptation de l'erreur (prise dans ce contexte comme une fausse route). La démarche est bien celle de l'investigation puisque l'on retrouve les principales phases qui lui sont dédiées : le questionnement, l'observation, la formulation de conjectures, l'expérimentation, la vérification. Le milieu est suffisamment antagoniste pour créer les adaptations nécessaires, et la situation relativement adidactique puisque la responsabilité de la recherche et de la validation est endossée en grande partie par les élèves.

Conformément à l'analyse a priori, la modélisation de la situation représente le principal obstacle dans un premier temps de la résolution, comme en témoigne par exemple la trace écrite d'un des groupes :

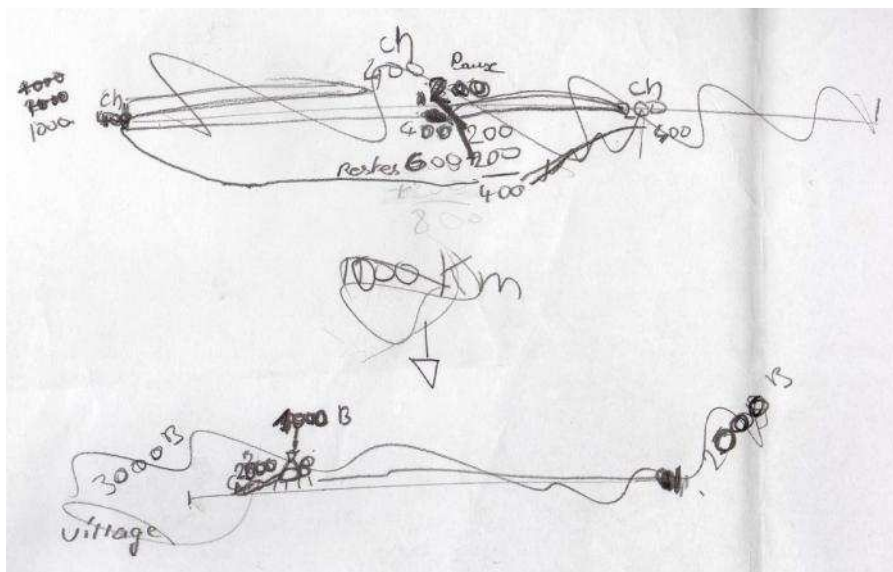


figure 56 : difficulté de représentation des étapes de la situation

Il s'avère très difficile de trouver une représentation qui soit susceptible de témoigner des étapes de la progression du chameau indiquant les kilométrages parcourus et restants ainsi que le nombre de bananes transportées, déposées à certains endroits ou restant encore à charger. Les supports de travail distribués aux élèves sont des feuilles de format A3 relativement grandes, mais cet étayage n'est pas suffisant. L'enseignante fournira dans un deuxième temps une droite numérique graduée afin de faciliter cet aspect de la représentation, ce qui a pour conséquence immédiate une clarification des propositions.

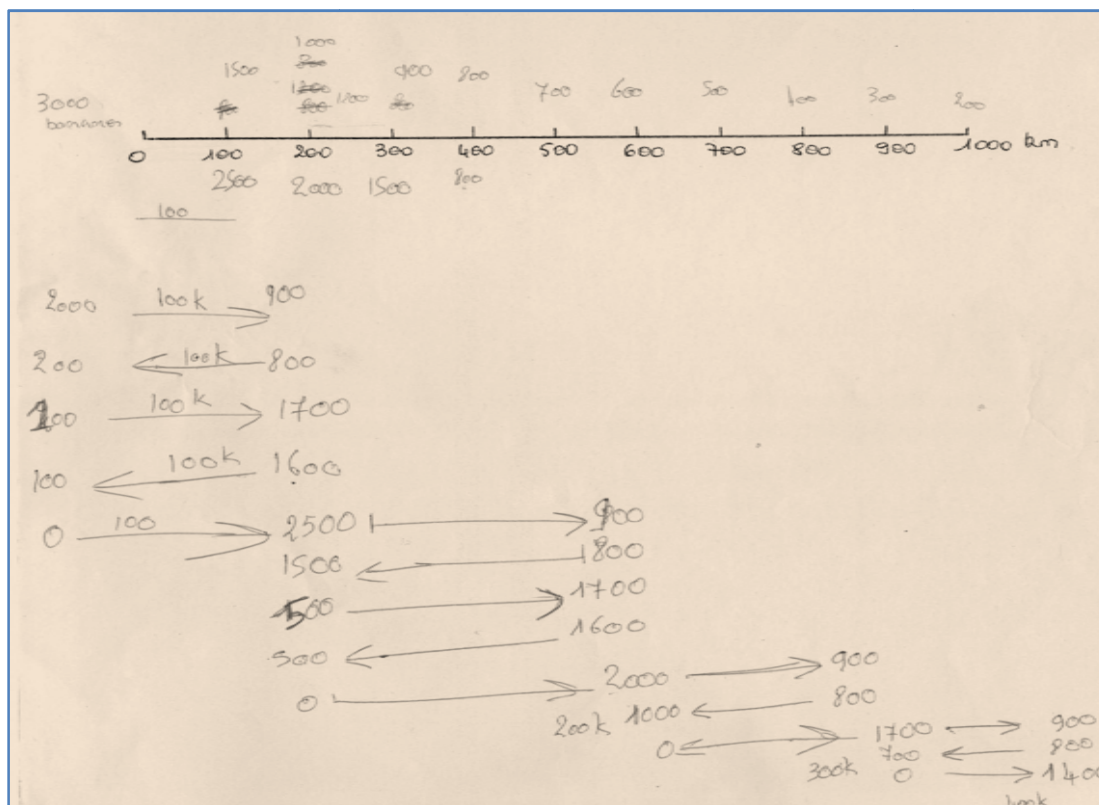


figure 57 : étayage de la trace écrite pour les recherches

L'enseignante est assez anxieuse pour la reprise de cette situation dans une séance d'approfondissement de la recherche, nous avons donc décidé d'accompagner la mise en place du laboratoire par la ritualisation d'une heure de cours de mathématiques dédiée à ce dispositif. De plus, compte tenu de notre présence dans la classe et de l'enregistrement réalisé, des extraits de la vidéo ont été projetés par l'enseignante en classe. Enfin, une lettre³³ leur a été adressée par nos soins afin de les aider à relancer les recherches concernant les "bananes dans le désert".

III – 2.4 Premiers éléments d'analyse *a posteriori*

Le problème des "bananes dans le désert" concerne un domaine mathématiques qui n'est pas celui de la géométrie, nous avons quelques interrogations sur sa potentialité à se prêter au milieu de type laboratoire tel que nous l'avons défini. En effet, même si la contextualisation est importante, les objets de savoirs dont il est question n'ont pas de valeur de référence culturelle (ni esthétique, ni ludique, ni environnemental), ce qui aurait pu représenter un obstacle lors de la dévolution ou des allers et retours entre expérimentation et théorie. Nos

³³ Voir annexe 18.

observations sont tout à fait rassurantes par rapport à ces interrogations, puisqu'aucune de nos craintes n'a été confirmée dans le contexte particulier que représentait ce terrain d'étude. Le compte rendu que nous venons de faire sur cette séance montre en effet la réussite de la phase de dévolution et une mise en action rapide et de véritables mise en actes de connaissances par l'utilisation d'outils mathématiques (raisonnement, calcul, relations numériques).

Les spécificités du milieu que nous testons sont cohérentes avec l'expérience de création d'un véritable espace de laboratoire (lieu, temps, matériel, objets de savoir). Cette concrétisation permet aux élèves de changer leur rapport habituel au fonctionnement de la classe et aux différents contrats didactiques et pédagogiques qui lui sont associés. L'expérience menée possède un degré de consistance important puisque les conditions offertes par le contexte d'une classe de SEGPA sont complexes : âge des élèves, troubles relationnels fréquents, entrée dans la tâche scolaire difficile. Du côté de l'enseignement, les hypothèses que nous avons formulées concernant le nécessaire étayage du professeur se sont aussi avérées pertinentes. Le changement provoqué dans la posture professionnelle de l'enseignant n'est cependant pas de nature à déstabiliser l'exercice de son métier, grâce à la connaissance des variables lui permettant de garder le contrôle de l'avancée du temps didactique. Ceci est d'autant plus significatif que l'enseignante est très peu expérimentée dans cette étude.

En annonçant très explicitement un moment de classe comme un "laboratoire de mathématiques", la dimension expérimentale des mathématiques semble bien servir de levier dans les deux directions que représentent l'enseignement et l'apprentissage.

Lors de la deuxième session de formation continue, ce compte rendu de la séance en SEGPA à Villefranche à fait l'objet d'une présentation et d'un débat entre les stagiaires après visionnage d'un extrait de la vidéo réalisée en classe. Les autres témoignages apportés par les stagiaires ayant expérimenté une ou plusieurs situations de laboratoire étaient relativement concordants quant aux aspects évoqués plus haut :

- dévolution du problème et engagement des élèves réussis,
- équilibre et stabilité du milieu permettant le plaisir de la recherche, le maintien dans une activité inscrite dans le long terme,
- nécessité d'un étayage du professeur dans l'organisation des phases de recherche, dans les supports fournis et dans l'instrumentation des actions,
- travaux en groupes n'ayant pas soulevé de conflit fatal à la séance.

III- 3 Développement des laboratoires

Nous sommes conscient que cette expérimentation de la mise en œuvre des laboratoires en SEGPA est très contextuelle, et que les résultats si encourageants soient-ils, ne sont pour l'instant qu'isolés. Aussi, nous terminons ce chapitre en formulant quelques perspectives de recherche concernant le développement des laboratoires ainsi que des prévisions d'articulation avec la formation pour compléter notre ingénierie.

III – 3.1 Recherche

Nous avons déposé un projet de recherche intitulé "Développement de laboratoires de mathématiques pour les élèves à besoins éducatifs particuliers et pour la formation initiale et continue des enseignants" dans le cadre de l'appel d'offre 2008 de l'IUFM de Lyon à l'Université Claude Bernard Lyon 1. Ce projet accepté en juin 2008 par le directoire de la recherche, doit nous permettre le développement du travail réflexif sur les laboratoires. Cette recherche vise à décrire un milieu d'enseignement / apprentissage spécifique (celui de la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques) et à analyser le rôle de la médiation langagière dans la construction des connaissances. Nous analyserons la spécificité de quelques problèmes proposés dans ce contexte, notamment par rapport aux objets mathématiques qu'ils mettent en jeu. Nous observerons aussi les répercussions sur les postures d'enseignement provoquées par l'introduction de telles situations dans les classes.

Ce projet international associe plusieurs chercheurs de laboratoires et de domaines d'expertises différents provenant de Suisse, de Belgique, du Québec et de France. Il doit nous permettre d'analyser plus finement les enjeux des interactions langagières dans les phases de validation et s'appuiera sur une problématique concernant les médiations entre les objets de savoirs sensibles et théoriques dans le champs des mathématiques. La pluridisciplinarité des chercheurs de l'équipe ainsi que son caractère pluri-catégoriel (enseignants, formateurs, chercheurs) assurera une dimension de "regards croisés" dans les analyses. La recherche intègre des objectifs de publication et de communication assurant le rôle de la diffusion des résultats et la constitution de ressources pour l'enseignement et la formation. Cette dimension viendra enrichir d'autres productions provenant de deux recherches contigües en cours dans lesquelles nous travaillons d'ores et déjà, l'une avec l'Institut National de la Recherche Pédagogique³⁴ (INRP) et l'autre avec l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques³⁵ (IREM) de Lyon et en également en partenariat avec l'INRP.

³⁴ Projet CORISE : COncption de Ressources pour l'Investigation Scientifique dans l'Enseignement, projet présenté en ligne sur : <http://eductice.inrp.fr/EducTice/projets/corise>

³⁵ Projet EXPRIME : EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole, projet présenté en ligne sur : <http://eductice.inrp.fr/EducTice/projets/corise/exprime>

A travers l'ensemble de ces projets, nous espérons élaborer des contenus consistants pour la diffusion des résultats de notre recherche en didactique des mathématiques, ceci afin de favoriser le développement de projets en formation initiale, en formation continue et dans les classes de l'école primaire et du collège.

III – 3.2 Formation

L'ingénierie de formation que nous avons commencée à mettre en œuvre doit perdurer dans les années à venir et éventuellement s'enrichir de nouveaux projets. Ainsi les formations connexes au projet rallye-ASH sont d'ores et déjà programmées pour l'année scolaire 2008-2009 sous la forme d'un séminaire de travail avec les enseignants dont les classes seront inscrites dans le dispositif. Ce séminaire a été décrit auparavant, il consistera en une reprise des contenus de formation déjà proposés ces dernières années mais sera considérablement allongé en durée afin de répondre davantage aux besoins exprimés par les enseignants spécialisés dans le domaine de la didactique des mathématiques.

Nous avons également proposé une nouvelle session de formation de formateurs retenue au plan 2008-2009 de l'IUFM de Lyon. Elle sera ouverte aux inscriptions en septembre 2008, il s'agit d'un dispositif permettant la diffusion des résultats d'ores et déjà obtenus par la recherche auprès de plusieurs catégories d'enseignants formateurs n'exerçant pas tous dans le contexte de l'enseignement spécialisé. Nous voulons commencer à assurer par ce biais la diffusion des connaissances acquises par nos expérimentations et débattre de leur pertinence dans le cadre de la formation des enseignants.

Pour terminer, nous assurerons également la continuité des sessions de formation initiales des professeurs des écoles et des professeurs en préparation du diplôme d'enseignants spécialisés. Nous essaierons à cette occasion de proposer des sujets de mémoire professionnel en espérant ainsi approfondir certains éléments de la recherche en lien avec l'exercice du métier pour assurer ainsi la cohérence de l'ingénierie de formation qui ne doit pas ménager de coupures entre ses différentes dimensions.

Conclusion générale

La richesse d'une étude exploration théorique fondée sur l'articulation épistémologie / didactique

Les relations qu'entretiennent les mathématiques avec la réalité ne doivent pas être continuellement envisagées comme problématique dans l'enseignement et dans l'apprentissage. En considérant qu'elles s'appuient essentiellement sur une dialectique des objets, nous avons montré qu'elles étaient susceptibles d'enrichir la construction des connaissances. Notre propos s'est appuyé sur une articulation épistémologie / didactique pour témoigner d'un processus qui s'inscrit autant dans l'histoire de l'élaboration des savoirs que dans le développement des aptitudes à construire ces connaissances. L'ambition de cette forme de pluridisciplinarité dans notre recherche, est de créer des interactions dans le développement des champs concernés de la connaissance. L'étude de l'élaboration historique des concepts ou des pratiques scientifiques fournit des éléments pour l'élaboration de nouvelles stratégies d'enseignement et d'apprentissage ; et l'étude des conditions d'enseignement et d'apprentissage fournit en retour de nouvelles questions à l'histoire et à la philosophie de ces concepts et de ces pratiques.

Accéder à la connaissance scientifique ne se fait pas sans un environnement didactique, sans une intention d'enseigner. C'est aussi la raison pour laquelle nous avons situé notre propos dans cette articulation entre référence épistémologique et observation didactique. Pour nous, l'épistémologie est un outil consistant pour la didactique puisqu'elle fournit des éléments de compréhension déterminants concernant la construction des connaissances scientifiques. Elle permet notamment d'interroger la spécificité de ces savoirs scientifiques dans leur rapport aux autres savoirs, mais elle est également nécessaire à la compréhension des processus qui en permettent la validation. Il était donc incontournable de mener une réflexion épistémologique sur les objets de savoirs scientifiques et plus particulièrement sur leur nature dans le champ des mathématiques, discipline souvent présentée comme ne traitant que d'objets idéaux. Cette vision très Platonicienne peut s'avérer génératrice d'un certain nombre d'obstacles dans l'environnement didactique et plus précisément dans le rapport dialectique entre enseigner et apprendre.

La consistance d'une investigation sur le terrain de l'enseignement spécialisé

Pour nos observations et nos analyses, nous avons fait essentiellement référence à un contexte d'enseignement / apprentissage très spécifique qui est celui de l'enseignement spécialisé. Ce choix de la complexité didactique peut être présenté comme relatif à deux difficultés principales :

- des élèves qui sont fragilisés dans leurs apprentissages et leur développement cognitif par leur situation de handicap,
- des enseignants qui sont régulièrement confrontés aux limites de plusieurs stratégies et méthodes d'enseignement et qui sont parfois démunis pour "faire autrement".

Dans un tel contexte, nous avons vu que l'environnement didactique est très sensible à la moindre perturbation du fait de ces deux difficultés et qu'il demande une grande stabilité dans les milieux des situations d'apprentissage proposées. En faisant le choix d'un tel contexte, on peut donc parler d'exigences plus importantes tant sur le plan pédagogique que didactique. Ces conditions nous sont apparues déterminantes dans le cadre de notre recherche puisqu'elles ont permis de tester la consistance de nos hypothèses dans le cadre de nos expérimentations. Elles nous ont également fourni les éléments didactiques permettant de ne pas exposer des élèves déjà fragilisés par leur cursus particulier, à de nouvelles expériences déstabilisantes mais à de véritables environnements d'apprentissage comme en ont témoigné les différentes analyses a posteriori de nos travaux effectués dans les classes.

Au terme provisoire de notre recherche, nous sommes également convaincus de la valeur ajoutée qu'apporte la prise en compte de la dimension expérimentale des mathématiques dans le processus d'enseignement. Nos expérimentations dans des contextes a priori plus difficiles en sont garants, puisqu'elles ont été appréciées puis reprises par les enseignants comme nous l'avons fait remarquer à plusieurs reprises.

La pertinence du milieu laboratoire pour la mise en œuvre de situations ancrées sur des problèmes de recherche

Notre hypothèse de recherche principale est que la construction des savoirs et connaissances scientifiques nécessite un recours à l'expérimentation dans un environnement didactique spécifique. Puisque notre travail d'investigation concernait la recherche d'une organisation didactique pertinente pour la construction des connaissances, il nous est apparu important de traiter de plusieurs rapports dialectiques entre ces concepts : expérience et expérimentation, objet théorique et objet sensible, concret et abstrait, familier et nouveau. C'est ainsi que nous avons peu à peu cerné les éléments caractérisant l'effet de levier que constitue la dimension expérimentale des mathématiques :

- Un type d'activité des élèves consiste à pratiquer le questionnement, la formulation de conjectures, la modélisation, l'expérimentation et la communication par la résolution de problèmes de recherche.
- Une posture enseignante de type réflexive qui se caractérise par un choix déterminé des problèmes en référence aux objets de savoirs en jeu, un accompagnement de la recherche et la pratique de l'étayage raisonné nécessaire à la résolution des problèmes. La démarche d'enseignement la plus appropriée est la démarche d'investigation scientifique qui nous semble tout à fait adaptée au domaine et aux objets des mathématiques.
- Un milieu labellisé par le laboratoire, ses outils, ses enjeux de savoirs et connaissances auquel est associé un environnement didactique spécifique caractérisé par les relations entre les objets de savoir mathématiques et la réalité. Ce milieu s'appuie notamment sur des critères développés en théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) concernant son antagonisme. Il doit également permettre de rendre lisibles les processus de signification, qu'il s'agisse de médiation langagière, symbolique ou instrumentale.

La mise en œuvre de situations didactiques s'appuyant sur des problèmes de recherche s'avère pertinente dans le contexte de l'enseignement spécialisé grâce au milieu de type laboratoire. C'est selon nous une réponse importante aux difficultés rencontrées en règle générale par les enseignants lorsqu'ils s'appuient sur des démarches d'enseignement utilisant la résolution de problèmes. Les caractéristiques du milieu laboratoire sont de nature à stabiliser l'environnement didactique permettant ainsi le développement cognitif des élèves et professionnel des enseignants.

La diffusion des résultats par la formation des professeurs

Notre recherche présente un scénario de formation qui s'appuie sur les résultats que nous avons présentés dans les deux premières parties de cette thèse. L'objectif principal de ce scénario est d'assurer l'articulation recherche / formation qui nous semble nécessaire dans le champ didactique notamment dans le cadre des difficultés inhérentes à la dialectique enseignement / apprentissage. L'un de nos buts est de développer des ressources pour les enseignants comme nous nous y sommes d'ores et déjà engagés dans deux projets avec l'institut national de la recherche pédagogique. Nous proposons également d'utiliser les résultats de la recherche pour enrichir les contenus de la formation continue des enseignants spécialisés au sein d'un projet de développement des laboratoires de mathématiques comme nous l'avons présenté précédemment.

Nous sommes convaincu que les difficultés liées aux relations entre enseignement et apprentissage, ne sont pas seulement liées à des facteurs cognitifs ou sociaux attribués aux

élèves. Ces difficultés mettent en jeu non seulement les pratiques et les démarches des enseignants, mais aussi les conceptions, représentations, habitus et postures qui les sous-tendent; et ceci en lien avec l'épistémologie des savoirs en jeu. Nous pouvons citer par exemple l'importance des malentendus et des incompréhensions dans les signes des discours entre élèves et enseignants, l'illusion de la transmission des savoirs dans certaines formes de cours, qu'ils soient magistraux de type ostensif ou même parfois abondamment dialogués.

Nous savons également que les pratiques professionnelles des enseignants ont tendance à se stabiliser relativement vite et à se reproduire. Même si ces pratiques individuelles sont diversifiées, leur stabilité se trouve accentuée du fait qu'elles représentent peu à peu des réponses collectives à des contraintes communes. En conséquence, nous faisons le pari du développement (tant quantitatif que qualitatif) de démarches différentes par la formation initiale et continue programmée au sein de plans institutionnels pérennes.

La solution qui consiste à attendre que la formation s'opère d'elle-même, par le simple contact des pairs ou par la mise sur le terrain, ne nous paraît pas suffisante. Une telle formation ne pourrait modifier, ni les pratiques en intégrant des outils, des démarches ou des instruments nouveaux, ni repérer et analyser les difficultés professionnelles qui résistent. La mise en évidence de l'effet de levier de la dimension expérimentale des mathématiques dans la construction des connaissances scientifiques, représente pour nous un contenu de formation à développer. A cette étape de notre processus de recherche nous sommes convaincu que ces contenus de formation sont accessibles à tous les enseignants quels que soient leurs contextes d'exercice professionnel. Notre ambition est de créer un très large accès aux savoirs mathématiques de tous les élèves, dans un environnement riche, plaisant et gratifiant.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages d'histoire, d'épistémologie et de philosophie des sciences

BACHELARD Gaston (1938), *La formation de l'esprit scientifique*, rééd. Vrin, Paris, 1993

BACON Francis (1620), *Novum Organum*, rééd. PUF, Paris, 1986

BACON Francis (1627), *Nova Atlantis "Nouvelle Atlantide"*, in *Œuvres de Francis Bacon*, traduites et commentées par Antoine de La Salle, Dijon, Frantin imprimeur, vol. 11, 1800-1803 ; en ligne sur <http://gallica.bnf.fr>

BERNARD Claude (1865), *Introduction à l'étude de la médecine expérimentale*, rééd. Delagrave, Paris, 1976

BOREL Emile (1904), Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire, conférence prononcée le 3 mars 1904 au Musée pédagogique, *Gazette des mathématiciens*, **93**, juillet 2002, p.47-64

CARTIER Pierre, CHARRAUD Nathalie (2004), textes réunis et édités par..., *Le réel en mathématiques, Psychanalyse et mathématiques*, Agalma éditeur, diffusion Le Seuil

CASSOU-NOGUES Pierre (2001), *De l'expérience mathématique - essai sur la philosophie des sciences de Jean Cavaillès*, Vrin, Paris

CAVAILLES Jean (1903-1944), *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Hermann, Paris, 1994

CAVEINGT Maurice (2004), *Le problème des objets dans la pensée mathématique, Problèmes et controverses*, Vrin, Paris

CHANGEUX Jean Pierre, CONNES Alain (2000), *Matière à penser*, Odile Jacob, Paris

CHATELET Gilles (1993), *Les enjeux du mobile, mathématique, physique, philosophie*, Seuil, Paris

CROMBIE Alistair Cameron (1958), *Histoire des sciences de Saint Augustin à Galilée*, PUF, Paris

DESANTI Jean Toussaint (1968), *Les idéalités mathématiques, recherches épistémologiques sur le développement de la théorie des fonctions de variables réelles*, Paris, Editions du seuil, coll. L'ordre philosophique

- DUMONCEL Jean-Claude (2002), *Philosophie des mathématiques*, collection Philo, Editions Ellipses, Paris
- EUCLIDE, *Les éléments*, livres XI à XIII, traduction par F.Peyrard, 1819, rééd. Albert Blanchard, Paris, 1993
- GARDIES Jean-Louis (2004), *Du mode d'existence des objets de la mathématique*, Vrin, Paris
- GONSETH Ferdinand (1936/1974), *Les mathématiques et la réalité*, Albert Blanchard, Paris
- GRANGER Gilles Gaston (1992), *La vérification*, Odile Jacob, coll. Philosophie
- GRANGER Gilles Gaston (1999), *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, coll. Sciences
- GUISTI Enrico (2000), *La naissance des objets mathématiques*, Ellipses, Paris, coll. L'esprit des sciences
- HACKING Ian (1989), *Concevoir et expérimenter*, Christian Bourgeois, Paris, 1989
- JORDAN Camille (1866), *Recherches sur les polyèdres*, Gauthier-Villars, Paris
- KEPLER Johannes (1596) *Mysterium Cosmographicum*, en ligne sur <http://num-scd-ulp.u-strasbg.fr:8080/>
- KUHN Thomas (1962), *La structure des révolutions scientifiques*, Flammarion, Paris
- LAKATOS Imre (1984), *Preuves et réfutations, Essai sur la logique de la découverte mathématique*, Hermann, Paris
- LANGEVIN Paul (1950), *La pensée et l'action*, textes recueillis et présentés par Paul Larenne, préfaces de Frédéric Joliot-Curie et Georges Cogniot, Paris, Les Editeurs Français Réunis, 1950
- LEBERRE Guy (2006), *L'évasion des polyèdres*, Mathématiques, Landerneau
- LELONG Pierre (2004), Le réel et les concepts en mathématiques : une stratégie de création, in *Le réel en mathématiques*, Psychanalyse et mathématiques, Algama éditeur, diffusion Le Seuil,
- LICOPPE Christian (1996), *La formation de la pratique scientifique - Le discours de l'expérience en France et en Angleterre, 1630-1820*, La Découverte, Paris
- LITRE E. (1873), *La science au point de vue philosophique*, Fayard, ré-édition 1997
- MERAY Charles (1892), *Considérations sur l'enseignement des mathématiques*, Darantière, Dijon, < <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/Document/>>
- NICOD Jean (1923) *La géométrie dans le monde sensible*, réédition, PUF, 1992
- PEDRIZET P. (1931) *Le jeu Alexandrin de l'icosaèdre*, Bulletin de l'institut français de l'archéologie orientale, en ligne sur <http://www.ifao.egnet.net>
- PLATON, Œuvres complètes, tome X, Timée-Critias.

BIBLIOGRAPHIE

POINCARÉ Henri (1902), *La science et l'hypothèse*, rééd. Flammarion, Paris, 1978

POPPER Karl (1973), *La logique de la découverte scientifique*, traduction française de N. Thyssen-Rutten et P. Devaux, Payot, Paris

RUSSELL Bertrand (1919), *Introduction à la philosophie des mathématiques*, traduit de l'anglais par G. Moreau, Payot, Paris, 1991

THOM René (1999), *Prédire n'est pas expliquer*, Flammarion, Paris

WILLIAMS B. (2006), *Vérité et véracité*, traduit de l'anglais par Jean Lelaidier, Paris, Gallimard, Essais

Encyclopédie de Diderot d'Alembert, version CDROM (2003), Editions REDON

Articles de didactique

ANDREUCCI Colette, FROMENT Jean-Pierre, VERILLON Pierre, (1996), Contribution à l'analyse des situations d'enseignement/apprentissage d'instruments sémiotiques de communication technique, *Aster* n°23, p.181-211

ASSUDE Teresa, MERCIER Alain, SENSEVY Gérard (2007), L'action didactique du professeur dans la dynamique des milieux, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 27/2, p.221-252

ASSUDE Teresa (2002), La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre à l'école primaire, *Educational Studies in Mathematics*, 50, p.259-287

ASSUDE Teresa (2002), *Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif, Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*, IREM de Dijon

BALACHEFF Nicolas (1998) Apprendre la preuve, in *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, Sallantin J., Szczeciniarz J.-J. (eds.), Paris PUF

BARBIN Evelyne (2004) L'outil technique comme théorème en acte, dans *Ces instruments qui font la science*, Sciences et avenir, hors série n°140, oct.-nov. 2004, pp.26-27.

BARALLOBRES Gustavo (2007), Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés, *For the Learning of mathematics*, vol. 27, 1, p.39-44

BLOCH Isabelle (2002), Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11ème école d'été de Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble

- BREUILLARD Eric, (1997), L'ordinateur à l'école, de l'outil à l'instrument, in POCHON Luc-Olivier, BLANCHET Alex (Eds), *L'ordinateur à l'école, de l'introduction à l'intégration*, IRDP, Neuchâtel, p.99-118
- BROUSSEAU Guy (1975), Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ?, *Compte-rendu du colloque 'l'analyse de la didactique des mathématiques'*, Talence : IREM de Bordeaux p.1-5
- BROUSSEAU Guy (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 7/2, p.33-115
- BROUSSEAU Guy (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 9/3, p.309-336
- CHEVALLARD Yves (2004), Pour une nouvelle épistémologie scolaire, *Cahiers pédagogiques*, Paris, CRAP, n°427, p.34-36
- CHEVALLARD Yves (1994) Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique, Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis (Turin, 3 février 1994). Texte paru dans les Actes du Séminaire pour l'année 1993-1994, p. 190-200.
- CHEVALLARD Yves & MERCIER Alain (1987), *Sur la formation du temps didactique*, IREM d'Aix-Marseille
- CHOPIN Marie Pierre (2007), Temps d'enseignement et temps didactique, Approche didactique de la question du temps dans l'enseignement des mathématiques au cycle 3 de l'école élémentaire, in *Question de Didactique*, vol 26/1, p.53-71
- CONNE François (1992), Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 12/2.3, p.221-270
- CONNE François (1999), Faire des maths, faire faire des maths et regarder ce que ça donne, chap.I in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, sous la direction de F.Conne et G.Lemoyne, Les Presses de l'Université de Montréal
- CONNE François (2007), L'expérience comme signe indiciel, *Recherche en didactique des mathématiques*, vol 28/2, p.219-264
- CONNE François (2006), La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante, *Revue l'Educateur*, numéro spécial : , 31 mars 2006, pp. 21-26
- CONNE François & al. (2004), L'enseignement spécialisé : un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence, *Actes du séminaire national de l'ARDM & IREM de Paris 7*, 2003
- COQUIDE Maryline (1998). Les pratiques expérimentales : propos d'enseignants et conceptions officielles. Aster 26, 109-132. Paris, INRP.
- DIAS Thierry, DURAND-GUERRIER Viviane (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM* n°60, p.61-78

BIBLIOGRAPHIE

- DOUADY Régine (1994), Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir, *Repères IREM* n° 15, Topiques éditions, p. 37-61
- DUCHET Pierre (2000), Situations-recherche et formation: l'exemple de MATH.en.JEANS, conférences et ateliers invités *Journée académique de Formation de formateurs de l'Éducation Nationale*, IREM de Bourgogne, 1er Mars 2000.
- DURAND-GUERRIER Viviane (2007), Retour sur le Schéma de la validation explicite dans la théorie des situations didactiques à la lumière de la théorie des modèles de Tarski, à paraître in *Actes du colloque : Quelles références épistémologiques pour les didactiques*, Bordeaux, 25-27 mai 2005, CD-Rom
- DURAND-GUERRIER Viviane (2008), Truth versus validity in mathematical proof, *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, vol. 40/3, p.373-384
- DURAND-GUERRIER Viviane (à paraître en 2008), Mathématiques scolaires et mathématiques, Responses to Watson, *For the learning of mathematics*
- DURAND-GUERRIER Viviane & TISSERON Claude (2004), édit., *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, ARDM & IREM de Paris 7, 2003*, p.77-186
- DURAND-GUERRIER Viviane & HERAUD Jean Loup (2007), Définition et règle, le mythe de la transparence en géométrie, in *Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, Presses Universitaires de Franche Comté, 2007, p.139-168
- DUVAL Raymond, (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 22, p.233-261
- DUVAL Raymond, (1995) *Sémiosis et pensée humaine, Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang eds.
- ERRERA Jean-Pierre, HERAUD Jean-Loup (2006), Sémantique et didactique des jeux de langage in *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, IUFM de Lyon, PUL, p.15-40
- FALCADE Rossana (2006), *Théorie des situations, médiation sémiotique et discussions collectives dans des séquences d'enseignement avec Cabri Géomètre pour la construction des notions de fonction et graphe de fonction*, thèse, université Joseph Fourier, Grenoble
- GIROUX Jacinthe, RENE DE COTRET Sophie (2003), Le temps didactique dans trois classes de secondaire I, in *Education et francophonie, La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire*, vol.XXXI:2, ACELF, Canada
- GUIN Dominique, TROUCHE Luc (2002), *Calculatrices symboliques. Faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, Grenoble, La Pensée Sauvage
- HERAUD Jean-Loup, PROUCHET Marc et al.(1999), *Penser pour apprendre ; Regard critique sur l'éducation cognitive à l'école*, Hatier, Paris,1999, coll. Pédagogie

HOUEMENT Catherine & KUZNIAK Alain, Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 20.1, p.89-116

MARGOLINAS Claire (1995), La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in Margolinas Claire, *Les débats de didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble, p.89-102

MARGOLINAS Claire (2002), Situations, milieux, connaissances, Analyse de l'activité du professeur, *actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée sauvage Editions

MATHE Anne-Cécile (2006), Élaboration d'une référence partagée : un exemple en géométrie des solides en CM1-CM2 in *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, IUFM de Lyon, PUL, p.117-136

MERCIER Alain, SENSEVY Gérard (1999), Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école?, *Le Télémaque*, n°15, p.69-78, Université de Caen

NIMIER Jacques (1988), *Les modes de relation aux mathématiques*, Meridiens Klincksieck, Paris

PEIX Annie & TISSERON Claude (2002), Concepts didactiques pour analyser et réorganiser une formation à la conduite de problèmes de recherche à l'école élémentaire, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 2002*, ARDM et IREM de Paris VII, p.123-150.

PERRIN GLORIAN Marie-Jeanne (1999), Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu, *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/3, p.279-323

RABARDEL Pierre (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. In M. Bailleul (Ed.), *Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp. 202-213). Caen : IUFM

SALIN Marie Hélène (2002), Repères sur l'évolution du concept de milieu en théorie des situations, *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*, La pensée Sauvage éditions

SINACEUR Hourya (1993), La dialectique de l'espace selon Ferdinand Gonseth, in *La figure et l'espace, actes du 8^{ème} colloque inter-IREM « Epistémologie et Histoire des Mathématiques »*, IREM de Lyon, p.187-207

TROUCHE Luc (2005) Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des mathématiques* 25, 91-138

VERGNAUD Gérard (1990), La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 10 2/3, p.133-170

Ouvrages et thèses de didactique

ARSAC Gilbert, MANTE Michel (2007) *Les pratiques du problème ouvert*, CRDP de l'Académie de Lyon.

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène (1992), *Représentation de l'espace chez l'enfant et enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire*. thèse de didactique des mathématiques, université Bordeaux 1

BIDEAU Jacqueline, MELJAC Claire, FISCHER Jean-Paul (1991), *Les chemins du nombre*, PUL, Lille

BKOUCHE Rudolf, CHARLOT Bernard (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Bibliothèque européenne des sciences de l'éducation, Armand Colin, Paris

BOULE François (2001), *Questions sur la géométrie et son enseignement*, Nathan, Paris, coll. Pédagogie

BROUSSEAU Guy (1998), *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Yves (1991), *La transposition didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991

COLOMB Jacques, DOUAIRE Jacques, NOIRFALISE Robert (2003), *Faire des mathématiques en classe ? Didactique des disciplines et analyse de pratiques enseignantes*, INRP, Paris

COPIRELEM, *Concertum : tome 1, Apprentissage et diversité*, ARPME, Paris, 2003

GOBERT Sophie (2001), *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, thèse, université Denis Diderot Paris VII

GUIN Dominique & TROUCHE Luc (eds.) (2002), *Calculatrices symboliques : transformer un outil en un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, La Pensée Sauvage, Grenoble

RABARDEL Pierre (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.

RATSIMBA-RAJOHN Harrison (1977), *Etude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques*, thèse de l'université de Bordeaux

SCHÖN Donald (1994), *Le praticien réflexif. À la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*, coll. formation des maîtres, Éditions Logiques, Montréal, 1994

VERGNAUD Gérard (1981), *L'enfant, les mathématiques et la réalité*, Peter Lang, Berne

Références en sciences humaines : langage, éducation, psychologie

BRUNER Jérôme (1983) Le rôle des interactions de tutelle dans la résolution de problèmes, in *Le développement de l'enfant savoir faire savoir dire*, Paris, PUF, pp 261-280

DELAHAIE Marc (2004), *L'évolution du langage chez l'enfant : de la difficulté au trouble*, éditions INPES, Saint-Denis

HABIB Michel (1997) : *Dyslexie : le cerveau singulier*, Solal, Marseille

DUMONT Annie (2001), *Mémoire et langage : surdité, dysphasie, dyslexie*, coll. orthophonie, Masson, Paris

INSERM (2007), *Dyslexie, dysorthographe, dyscalculie - Bilan des données scientifiques*, Les  ditions Inserm, Paris

MEIRIEU Philippe (1987) Apprendre, oui mais ... comment ? Paris, E.S.F.

MORINEAU Thierry éléments pour une modélisation du concept d'affordance ÉPIQUE 2001, Actes des Journées d'étude en Psychologie ergonomique, Nantes, IRCCyN, France, 29-30 Octobre 2001

PERRENOUD Philippe (2008), *Développer la pratique réflexive dans le métier d'enseignant, Professionnalisation et raison pédagogique*, ESF, Paris, 2008, coll. Pédagogies

VAN HOUT Anne, MELJAC Claire, FISCHER Jean-Paul (2005), *Troubles du calcul et dyscalculies chez l'enfant*, 2e édition, Masson, Paris

VYGOTSKY Lev Semionovitch (1930/1985), La méthode instrumentale en psychologie, in Schneuwly, B. & Bronchart, J.-P. ( ds.), *Vygotsky aujourd'hui*, Neufchâtel : Delachaux et Niestlé, p.39-47

Tâtonnement expérimental et pédagogie Freinet,  dition ICEM n  35

Articles et conférences "on-line"

BKOUCHE Rudolf (2007), *  propos des laboratoires de mathématiques*, IREM de Lille,
http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/Souris_regle_et_compas.pdf

BOREL Emile (1904), *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*, conférence prononcée le 3 mars 1904 au Musée pédagogique
http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

BIBLIOGRAPHIE

CONNÉ François (2006), *La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante*,

http://educmath.inrp.fr/Educmath/lectures/article_mois/archives/conne/

DELAHAYE Jean-Paul (2005), Mathématiques expérimentales, *Pour la Science* n°331, mai 2005,

http://www.akpeters.com/pdf/Pour_la_Science--Logic_et_Calcul_04-2005.pdf

HACKING Ian (2005), *L'ultra froid, une conférence à l'ENS-LSH, Lyon 2 décembre 2005*

http://ecole-ouverte.ens-lsh.fr/rubrique.php3?id_rubrique=333

HOUEMENT Catherine (2005), *La spécificité de la démarche d'investigation en mathématiques*,

<http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=829>

KAHANE Jean-Pierre (2002), L'enseignement des sciences mathématiques, Rapport au ministre de l'Éducation nationale, Odile Jacob, Paris, 2002

<http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/>

LA MAIN A LA PATE (2005), *Compte rendu du colloque : Mathématiques, sciences expérimentales et d'observation à l'école primaire, Saint-Etienne, 28 septembre 2005*

http://www.lamap.fr/bdd_image/144_CR_Colloque.pdf

LA SEMIOTIQUE SELON ROBERT MARTY

<http://robert.marty.perso.cegetel.net/semiotique/marty.htm>

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2007), Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, BO hors série N°6 - volume 2 du 19 avril 2007

<http://www.education.gouv.fr/bo/2007/hs6/default.htm>

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (2007), Introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques, *BO hors série* N°6 - volume 2 du 19 avril 2007

Bulletin Officiel du ministère de l'Éducation Nationale et du ministère de la Recherche N°9 du 1er mars 2001 Scolarisation des élèves handicapés dans les établissements du second degré et développement des unités pédagogiques d'intégration (UPI)

Travaux personnels

DIAS Thierry (2004), À l'école élémentaire, une science expérimentale ? *Cahiers pédagogiques*, n°421, novembre 2004, p.25-27

DIAS Thierry (2005), Rallyes et défis maths : expérimenter pour apprendre, *Réseaux Delay*, numéro 22, mars 2005, p.5-6

DIAS Thierry (2005), La dimension expérimentale en mathématiques : mythe ou réalité ?, in *Actes des 4èmes rencontres de l'ARDIST*, Lyon, octobre 2005, p.125-133

DIAS Thierry (2006), Expérience, expérimentation, manipulation en mathématiques : une tentative de clarification en appui sur la lettre de la VST de l'INRP, in *Actes du colloque de la COPIRELEM* (CDRom), Dourdan, juin 2006

DIAS Thierry (2006), Expérimenter en mathématiques pour relever le défi de l'adaptation, in *Actes du colloque Espaces Mathématiques Francophone*, mai 2006 (CDRom), Sherbrook, Canada

DIAS Thierry (2006), Former à l'adaptation des enseignements mathématiques : la place de l'expérimentation in *Actes de la Biennale de l'éducation*, INRP, Lyon, avril 2006

DIAS Thierry (2007), Présentation du corpus mathématiques Polyèdre, in *Actes des journées d'étude Interactions verbales, didactiques et apprentissages*, Presses Universitaires de Franche Comté, 2007, p.29-35

DIAS Thierry (2007), Expérimentation en mathématiques dans le contexte de l'enseignement spécialisé : étude des apports d'un dispositif de type laboratoires de mathématiques, in *Actes du colloque de la COPIRELEM* (CDRom), Troyes, juin 2007

DIAS Thierry (2007), L'apprentissage de la géométrie dans la scolarité obligatoire : une dialectique entre objets sensibles et objets théoriques, cours pour l'*École d'été de recherche en didactique des mathématiques*, Ste-Livrade, 2007

DIAS Thierry (2007), Le rallye maths : un milieu d'apprentissage spécifique, in *Actes des 11èmes rencontres internationales de l'Association du Rallye Mathématiques Transalpin*, Aoste 2007, Italie

DIAS Thierry (2008), Un instrument de recherche au service de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement spécialisé : la dimension expérimentale, conférence pour DDMES, Suisse, juin 2008

DIAS Thierry (2008), La dimension expérimentale en mathématiques, un exemple avec la situation des polyèdres, *Grand N*, publication acceptée à paraître

DIAS Thierry (2008), Expérimenter en mathématiques : un "rallye" pour l'ASH, 2008, *Cahiers pédagogiques*, publication acceptée à paraître

BIBLIOGRAPHIE

DIAS Thierry, DURAND-GUERRIER Viviane (2005), Expérimenter pour apprendre en mathématiques, *Repères IREM*, n°60, juin 2005, p.61-78

DIAS Thierry, PROUCHET Marc, TISSERON Claude (2006), Jeux en enjeux de formation, un modèle d'interaction enseignant/formateurs/chercheurs, in *Jeux et enjeux de langage dans l'élaboration des savoirs en classe*, collection IUFM, PUL, p.181-210

DURAND-GUERRIER Viviane, DIAS Thierry, BEN KILANI I. (2006), Plurilinguisme et apprentissage des mathématiques. Ambiguïtés référentielles ; négation et quantification in *La revue des langues Modernes*, vol 3/2006, p.75-83

DURAND-GUERRIER Viviane & DIAS Thierry (2008), L'interprétation des énoncés en mathématiques, un exemple en géométrie des solides, communication du symposium, La sémantique logique comme concept organisateur pour un questionnement épistémologique des disciplines scolaires, in *Actes électroniques du colloque : Quelles références épistémologiques pour les didactiques*, Bordeaux 2005 (CD-Rom)

Contribution à l'étude, coordonnée par KUNTZ Gérard (2007), Démarche expérimentale et apprentissages mathématiques, *Dossier de la veille scientifique et technique*, publication INRP, avril 2007, également en ligne :

http://educmath.inrp.fr/Educmath/etudes/experimentation_math

ANNEXES

SOMMAIRE DES ANNEXES

SOMMAIRE DES ANNEXES	278
ANNEXE 1	279
<i>Définition des capacités dans le protocole d'évaluation 2004</i>	279
ANNEXE 2	280
<i>Consigne donné pour la recherche des polyèdres réguliers en UPI.</i>	280
ANNEXE 3	281
<i>Les huit deltaèdres convexes</i>	281
ANNEXE 4	283
<i>Transcription de la mise en commun en UPI</i>	283
ANNEXE 5	294
<i>Dessins des élèves de cinquième</i>	294
ANNEXE 6	297
<i>Consigne pour la recherche des polyèdres réguliers en CLIS</i>	297
ANNEXE 7	298
<i>Evaluation individuelle du lexique en fin de séquence en CLIS</i>	298
ANNEXE 8	300
<i>Situation de recherche sur les patrons du cube</i>	300
ANNEXE 9	304
<i>Notres prises par un stagiaire (PE2) pendant la recherche de son groupe</i>	304
ANNEXE 10	308
<i>Descriptif de la formation continue 2003-2004</i>	308
ANNEXE 11	312
<i>Manche de rallye</i>	312
ANNEXE 12	322
<i>Feuille de route rallye maths-ASH 2007-2008</i>	322
ANNEXE 13	325
<i>Correction des 6 premiers problèmes d'une manche de rallye</i>	325
ANNEXE 14	331
<i>Questionnaire individuel aux participants du rallye-ASH</i>	331
ANNEXE 15	337
<i>Outils sous forme de fiches supports et d'aide à la recherche</i>	337
ANNEXE 16	341
<i>Répertoire de problèmes de recherche</i>	341
ANNEXE 17	345
<i>Echanges préparatoires à la séance en SEGPA</i>	345
ANNEXE 18	348
<i>Lettre aux élèves de SEGPA pour relancer la recherche des bananes dans le désert</i>	348

Annexe 1

Définition des capacités dans le protocole d'évaluation 2004

- Rechercher l'information, l'interpréter, la reformuler : Passer de la numération orale à la numération chiffrée ; Lire et interpréter un tableau, un diagramme, un graphique ; Produire ou réorganiser un énoncé correspondant à un calcul donné ; Élaborer un questionnement à partir de données.

- Analyser une situation, organiser une démarche : Évaluer ou calculer une durée ; Utiliser des fractions pour construire un segment de longueur donnée ; Reconnaître un ou des axes de symétrie d'une figure plane simple ; Identifier des figures usuelles (carré, losange, rectangle, triangle, cercle) dans une figure complexe ; Traduire une situation par des fractions simples (quart, tiers, demi, fractions décimales) ; Traiter mentalement des calculs (calculs réfléchis) ; Résoudre un problème à étapes ; Déterminer la mesure d'un côté d'une figure connaissant son périmètre et d'autres informations ; Évaluer un ordre de grandeur d'un résultat numérique.

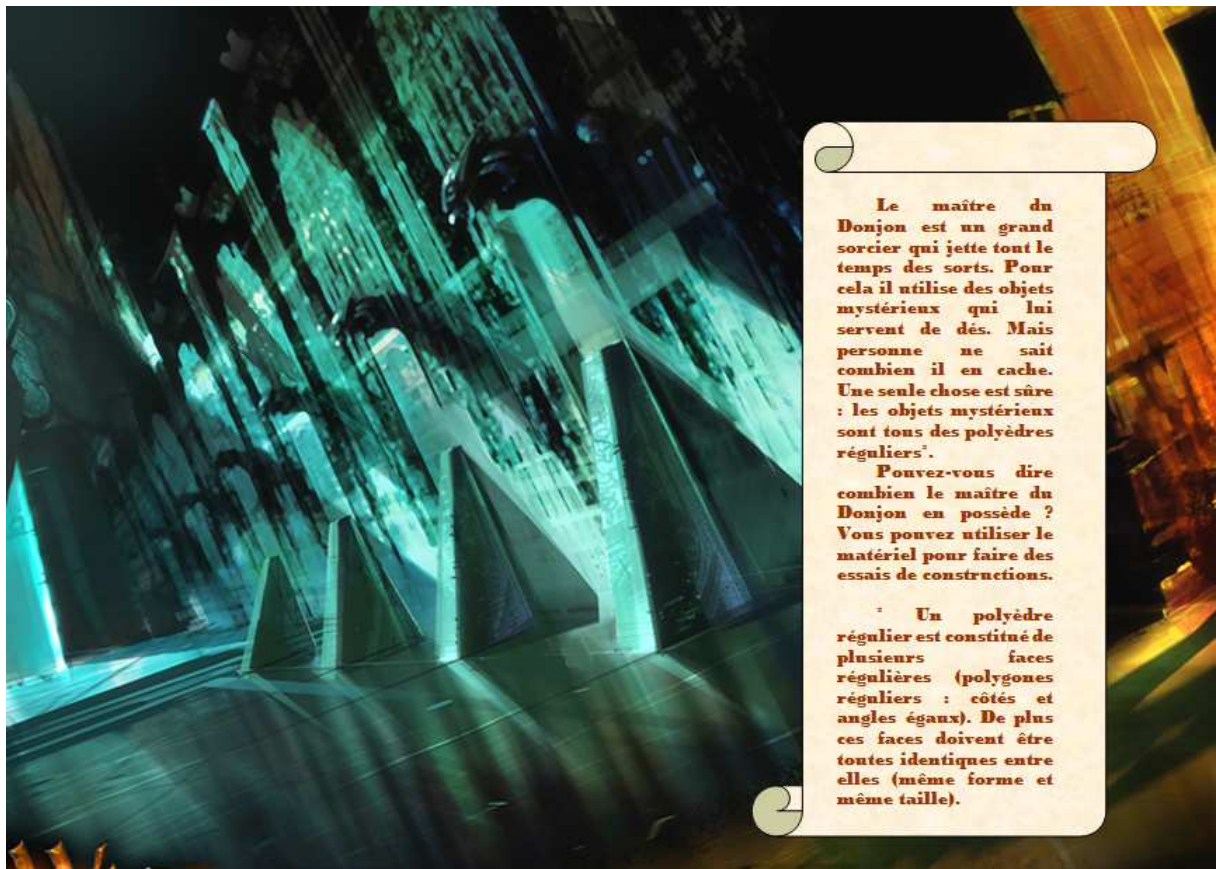
- Produire une réponse, la justifier : Utiliser, dans des cas simples, des fractions pour donner des mesures de longueur ; Utiliser un cercle pour résoudre un problème de distance ; Construire l'image d'une figure par symétrie axiale ; Résoudre un problème pouvant conduire à une division ; Reconnaître un cercle comme un ensemble de points équidistants d'un point donné ; Décrire une figure en vue de sa construction.

- Appliquer une technique : Effectuer les trois opérations (+, -, /) posées ou en ligne ; Effectuer une multiplication ou une division par 10, 100, 1 000 ; Effectuer une division ; Utiliser règle, équerre ou compas pour réaliser des tracés simples ; Construire une figure plane.

- Appliquer directement, utiliser une connaissance : Traiter mentalement des calculs ; Tracer une droite perpendiculaire à une droite donnée ; Passer, pour un nombre décimal, d'une écriture à virgule à une écriture fractionnaire ou inversement ; Comparer des nombres décimaux ; Placer ou lire un nombre sur une droite graduée.

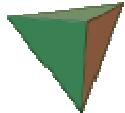




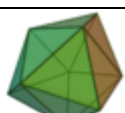


Annexe 2

Consigne donnée pour la recherche des polyèdres réguliers en UPI.



Annexe 3

Les huit deltaèdres convexes

Nom	image	Faces	Arêtes	Sommets	degrés des sommets
tétraèdre régulier		4	6	4	4×3^3
bipyramide triangulaire		6	9	5	2×3^3 3×3^4
octaèdre régulier		8	12	6	6×3^4
bipyramide pentagonale		10	15	7	5×3^4 2×3^5
disphénoïde adouci ou dodécadeltaèdre		12	18	8	4×3^4 4×3^5
prisme triangulaire tri-augmenté ou tétradécadeltaèdre		14	21	9	3×3^4 6×3^5
bipyramide carrée gyro-allongée ou hexadécadeltaèdre		16	24	10	2×3^4 8×3^5
icosaèdre régulier		20	30	12	12×3^5

Seuls trois deltaèdres sont des solides de Platon (les cinq autres sont des solides de Jonhson) :

- le deltaèdre à 4 faces, dans lequel trois faces se rencontrent à chaque sommet
→ le tétraèdre
- le deltaèdre à 8 faces, dans lequel quatre faces se rencontrent à chaque sommet
→ l'octaèdre
- le deltaèdre à 20 faces, dans lequel cinq faces se rencontrent à chaque sommet
→ l'icosaèdre

Annexe 4

Transcription de la mise en commun en UPI

E1	c'est bon, vous voyez bien ?
M	t'essaye de parler bien fort. alors vas-y tu les présentes, tu montres, t'en prend 1 en particulier.
E2	ça c'est un cube ...
	<i>rires</i>
E2	vous savez
	oui ! oui ! y a 3 côtés du même ...
E2	y a 3 sommets, 1,2,3 partout, et, et ... c'est un volume
E1	mais non, en fait il a les ch ch... en fait le carré il a tout les mêmes angles
E3	c'est pas un carré c'est un cube
	<i>rires</i>
M	voilà, ce que vous allez faire, c'est que comme c'est eux qui présentent si vous vous parlez ici, vous levez la main et vous attendez qu'ils vous donnent la parole. il faut les laisser parler d'abord, et après on posera des questions.
E2	bon, ben allez, c'est bon j'me suis trompé, c'est un cube ! il a tous les angles de... il a tout les mêmes angles et il a ses côtés tout, il a tous les côtés de même longueur alors voilà on a fait un carré. après Chami...Jean-Paul...ben allez
M	alors présente celui- là aussi par exemple
E1	c'est le, une pyramide
M	tu veux le décrire un petit peu
E1	il a des triangles, c'est un volume... il a 3 sommets...et c'est une pyramide
M2	non, non Pape tu lui laisse vas y continue
E1	y a 3 sommets de mêmes longueur, des triangles équilatéral de 60° et... c'est un volume
M1	et vous pensez que c'est un dé du sorcier ça, oui ? d'accord. après on en présente un autre
E2	ça c'est eh...un volume. il a ses angles toujours de même mesure il a toujours les mêmes

	angles et eh il a ses côtés toujours de même longueur et voilà.
	<i>beaucoup de doigts se lèvent</i>
M2	on va les laisser présenter les 4, et après vous poserez les questions ok, très bien eh...Pape...Chami tu nous présente le dernier
E1	çui là c'est le mieux, c'est moi qui l'a fait
E2	c'est un p'tit ballon
E1	c'est un ballon de foot, c'est eh y'a des pentagones...eh... il est beau !
	<i>ouais rires</i>
E4	moi j'lavais fait çui là
M1	parce que le sorcier en fait, on savait quoi sur les dés qu'il utilisait ?
(E	c'est pour des réguliers)
E2	eh...ouais aussi il y a
M1	il fallait que les...
E2	il a les... formes id... y s'ont tous les mêmes...eh...identiques là
M1	les quoi ?
E3	les mêmes faces identiques
M1	toutes les faces donc des...comment y s'appellent déjà ces formes là ce sont des ? po ?
E2	polygones
E ?	pygones
E ?	polygones réguliers
M1	poly
E ?	èdres réguliers
M1	èdres parce que ce sont les solides et vous utilisez les polygnes en fait le sorcier utilisait ces poly-èdres qui avaient les caractéristiques d'avoir les faces : ? comment ?
E2	eh...plates
M1	toutes les faces sont
E ?	plates
E1	pareilles
M1	pareilles, identiques et y avait autre chose que vous aviez retour
E2	c'est les angles
M1	les angles ?
E2	qui ont tout la même hauteur

M1	la même valeur...et puis autre chose aussi ?
E1	y fallait eh...y fallait choisir toujours eh...si tu prenais un triangle y fallait toujours prendre des triangles
M1	d'accord, c'était les conditions pour essayer de trouver quels solides le sorcier utilisait
M2	alors on peut prendre des questions maintenant, posez-les les...posez-la qu'on les voit bien, les garder, les garder pas dans la main.
E2	Chazal ?
E3	j'lève pas le doigt
M2	ceux qui lèvent la main peut-être c'est sûrement ceux qui ont des questions hein. on les touche plus, on les touche plus
Z	le ballon c'est pas un régulier parce que...y rentre pas dans une sphère on le met dans un...
E1	ben si, ben si il est régulier
E2	il a les mêmes angles
E1	ouais
Z	non...si il a les mêmes angles mais eh... il est pas eh il est y peut pas rentré dans un cercle
E2	y peut pas rentrer dans un cercle ???
Z	dans un, dans un sphère
M1	alors est-ce qu'y pourrait tenir...en fait c'était un cercle, c'était quoi qu'on veut dire une ?
E ?	planisphère
E ?	sphère
M1	une sphère ;une sphère, est-ce que si on l'mettait dans une sphère on avait qu'en fait...
Z	en fait y fallait que eh... y fallait qu'ça touche les...eh...
M1	donc tous les ? s... ?
Z	sommets
M1	...touchaient ?
Z	par le sphère ?
M1	la sphère. vous pensez qu'ça pourrait même le cas ?
E2	ben ouais
E ?	non
E 2	si
M1	Chami pense que oui
E2	partout ça touche partout hein, ben ouais

M1	mais sinon, est-ce qu'il répond pas aux conditions... c'est difficile à voir ça mais, est-ce qu'il répond aux conditions eh... qui étaient données pour qu'il soit un polyèdre régulier ?
E ?	oui
E1	t'as tous les mêmes longueurs, les, tout les angles, c'est bon c'est pareil ?
M1	t'es d'accord la-dessus Zied
E1	pareil
M1	alors finalement ?
Z	eh... j' pense pas que c'est...
M2	avec c' qui était dit dans la consigne pour l'instant, ça répond, hein. on parlera de la sphère après que Zied propose là de la regarder
A	bon y'a l'deuxième aussi
E2	lui ?
A	ouais c'est pas un...
M2	tu penses que c'est pas un polyèdre régulier ?
Z	non monsieur
M2	ah, il faut qu'on l'voit donc
Z	j'ai trouvé madame
A	ah si j'me suis trompé
M2	bon ok
M1	c'est quoi qu'tu penses Alexandre
A	non, non c'était l'autre là... çui qu'avait eh... 6 côtés et 4 sommets
	<i>il parle d'une autre construction réalisée par son groupe</i>
M2	d'accord. alors pour l'instant vous êtes d'accord qu'celui-là c'est un dé de sorcier ça aussi ?
E ?	oui
M2	quelqu'un a des remarques sur leurs propositions ?
Z	oui m'sieur çui là il a, la il on a eh... 4... eh
E1	sommets
Z	4 eh...
M2	4 faces pour chaque sommet
E1	ouais
M2	est-ce qu'y a à chaque fois 4 faces pour chaque sommet ?
E2	là y'en a 4 ; 1,2,3,4

M2	ouais
E2	1,2,3,4
Z	ah, j'ai rien dit !
M2	donc vous avez trouvé, pour vous le sorcier a combien de dés alors ?
E(s)	4
	allez vas-y Zied.
Z	eh...c'est pour présenter eh...le j'sais plus comment ça s'appelle.
E ?	le ballon d'foot
	<i>rires</i>
M2	on verra les noms tout à l'heure
M1	si tu sais pas les noms tu peux dire quoi ?
Z	un polyèdre ?
M2	voilà,voilà, très bien
Z	un polyèdre avec la tout le long côté, tous les ... ,tous les mêmes mesures d'angles et eh... et voilà...y'a pas d'questions ?
M2	les questions c'est après, d'abord vous présentez vos 4 solutions
A	eh...vous savez c'est quoi ça ?
E(s)	non, c'est quoi ?
E ?	pyramide
A	c'est un triangle
Ch	non, c'est un...
A	ah, c'est une pyramide pardon, oui, et ça ben c'est un dé parce qu'il y a 3 côtés...3 faces
M2	combien de faces tu dis ?
A	3 ?
Ch	4
M2	4 ?
A	ah oui 4
M2	allez 4...ok un autre ?
Z	eh... y'a un autre polyèdre je sais pas comment y s'appelle mais il a toutes, il a toutes les mêmes faces et eh...les mêmes cô...il a les mêmes sommets
A	ça vous savez c'est quoi ?
E ?	non

A	c'est un cube ! eh en voilà et ben ça a 4 côtés
Ch	d'accord
M2	des question...pose le pose le Zied qu'on puisse bien les voir
Ch	moi j'ai une question, c'est que cette figure c'est pas un...parce-que y'a pas les mêmes angles
Z	si
Ch	non
M2	alors viens montrer ce que tu veux dire
Z	ah oui ça touche pas ça !
Ch	parce que là,là, y'a pas la même angles que là
Z	ç'en est pas un !
M2	et comment tu peux savoir ça ? qu'est-ce que tu comptes pour savoir ? tu sais tu l'as fait tout à l'heure
	<i>chami compte les faces sur 2 sommets</i>
Ch	1,2,3,4 1,2,3,4,5,6 oups !
A	c'est çui là qu'avais dit, que j'avais confondu
M2	alors est-ce que celui-là est un dé du sorcier ?
Tous	non
Z	si
A	ben alors en fait y'en a 4, y'en a que 4
Ch	non,non
A	si
M2	alors y'en a combien ?
A	4
M2	ressortons ceux des autres
M1	est-ce que celui-là on va le mettre eh...
Tous	non
Jerem	y'en a 7, y'en a 7 en tout
M2	alors combien y'a-t-il de dés du sorcier ?
A	ben,ben
E ?	4

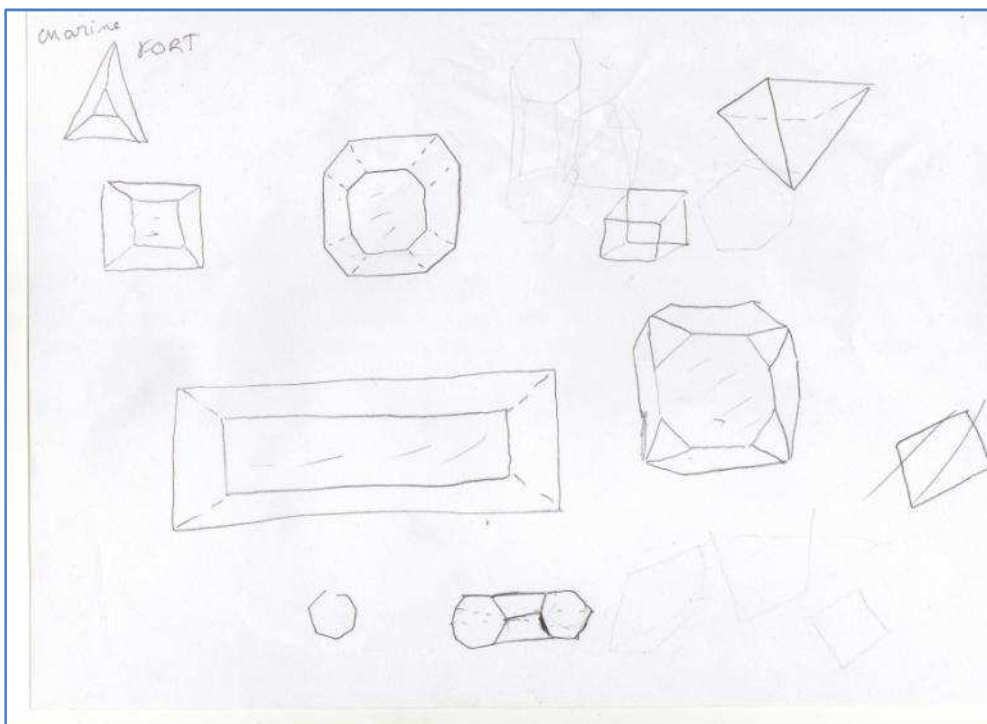
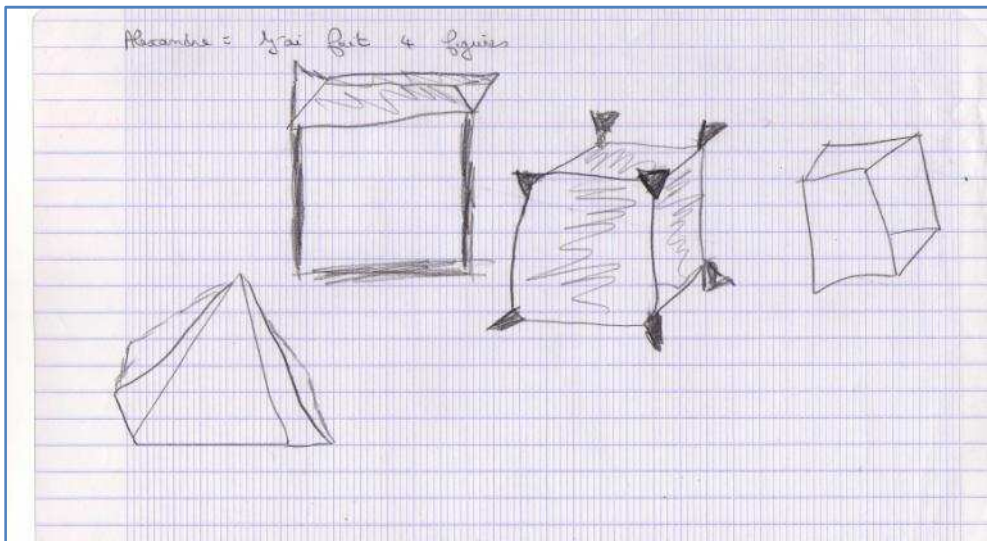
A	4
M2	j'sais pas faut qu'on en discute...pose-le Zied
Ch	en tout y'en a 7 en tout
M2	attendez on va faire ça, vous allez vous rasseoir
A	ouais mais ça c'est les mêmes, ça c'est les mêmes
E ?	non y sont différents
M2	merci merci, alors ce qui faut c'est qu'on s'écarte là faut qu'on s'écoute parle parle pour tout le monde et fort
M1	vous écoutez David
M2	David ?
Da	en fait ici, c'est pas la même... heu... taille (<i>il montre les deux dodécaèdres</i>)
M2	c'est pas la même taille de quoi, tu parles de ces deux là ?
Da	oui ce ces deux là
M2	parlons de ces deux là, alors... est-ce que ce sont les mêmes ou pas ?
Pa	en fait c'est les mêmes, mais c'est pas la même taille
M2	alors qu'est-ce qu'ils ont de pareil ?
Pa	y ont les mêmes angles, la même forme, y ont les mêmes heu...
M2	las faces sont faites avec quoi ? c'est quoi ces faces là ? des...
Al	des pentagones
M2	pentagone, c'est bien un polygone régulier ?
E	OUI !
M2	pas de problème celui là hein ! mais est-ce qu'on peut dire que ce sont les mêmes polyèdres ?
E	oui / non (<i>les avis sont partagés</i>) on n'a pas pris les mêmes pièces
Zi	non (<i>il se lève</i>)
M2	Zied, Zied dit que non, alors on va l'écouter
Zi	non parce que c'est pas les mêmes pièces, c'est pas les mêmes hein ?
Pa	si c'est les mêmes pièces
Zi	non
Pa	c'est quoi alors, c'est des triangles ?
Zi	non, c'est pas les mêmes monsieur
M2	qu'est-ce qui, qu'est-ce qui...
Zi	là y'a des boules (<i>il parle des articulations servant de charnières à l'emboîtement des pièces</i>)

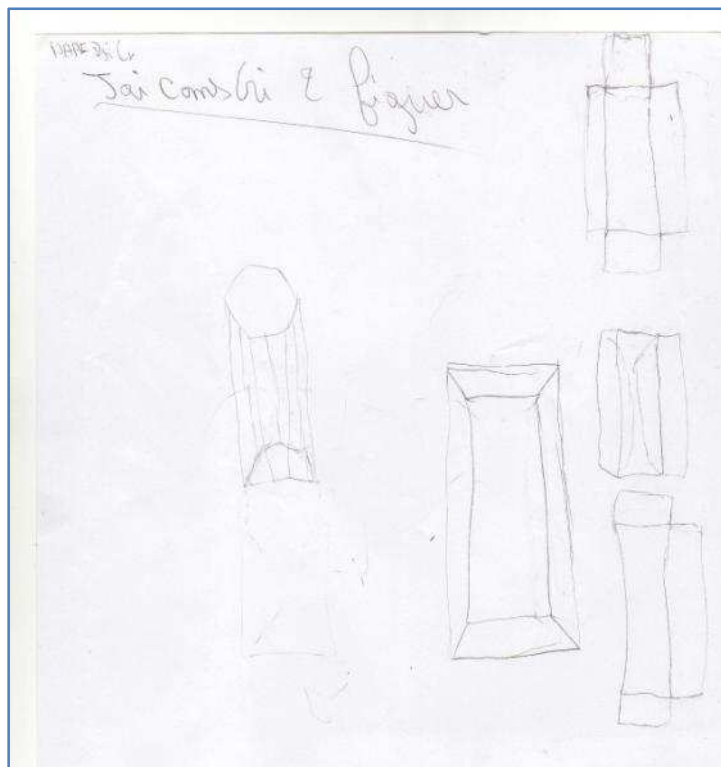
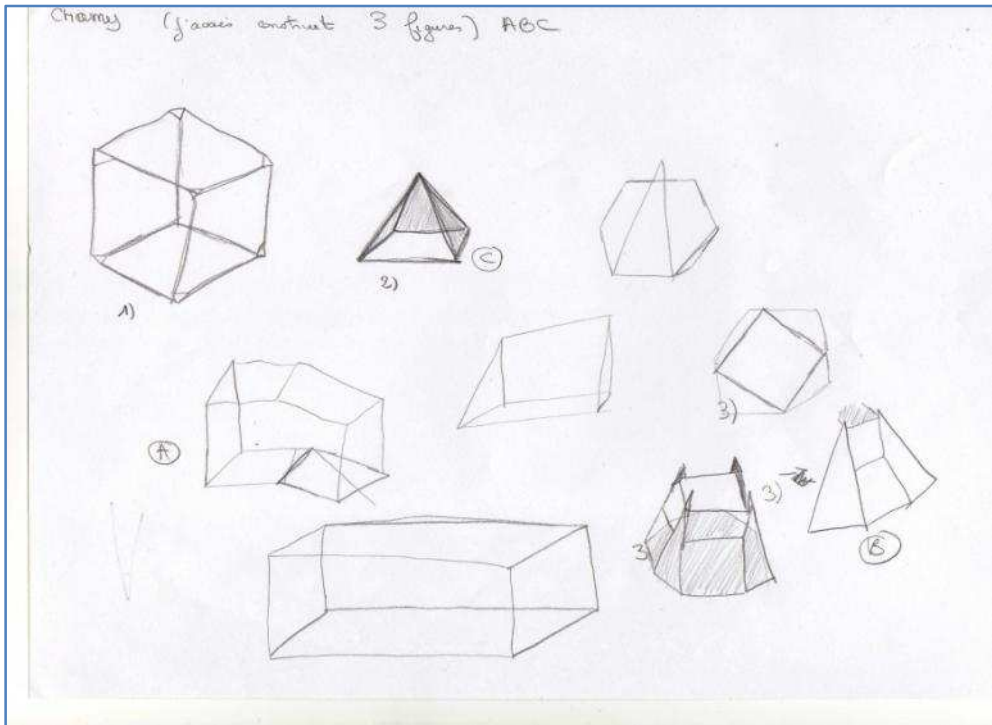
	<i>plastiques)</i>
M2	d'accord d'accord il a raison...
Zi	regarde, ça s'accroche pas pareil (<i>il montre de près à Pa</i>)
M2	d'accord ils sont pas faits avec le même matériel mais est-ce qu'on peut dire ou pas que c'est les mêmes... non, là t'es devant eux, ils voient plus rien...
Al	c'est pas les mêmes...
M2	alors on va écouter euh...
Al	et ben c'est pas les mêmes couleurs
Pa	et ben ?
M2	ah ?
Zi	ah si ! c'est les mêmes monsieur parce que regardez 1, 2, 3, 4, 5, 6... (<i>il compte les faces</i>)
Da	tu vas tous les compter ? tu vas prendre du temps !
M2	il a combien de faces ?
Zi	il a 11.. 12
M2	12, 12 faces, et si on compte celui là ?
Zi	<i>(il compte les faces du deuxième dodécaèdre)</i> 10 !
M2	11, 12, celle de dessus, celle de dessous !
Zi	<i>il a l'air très surpris, les autres rient</i>
M2	donc, Zied tu peux t'asseoir, il a raison ils ont tous les deux 12 faces, ils sont tous les deux fais de polygones réguliers, la seule chose qui change c'est la taille et aussi...
Al	la couleur !
M2	la couleur... la question est de savoir si on peut dire oui ou non...
Da	on demande pas... on demande pas la couleur
Al	oui
M2	... ce sont les mêmes polyèdres
E	oui
M2	on a le droit de dire que ce sont les mêmes, donc en fait ça fait un dé ou ça fait deux dés pour le sorcier ?
E	un dé
M2	qu'il utilise le gros ou qu'il utilise le petit est-ce que ça va changer ?
Al	non

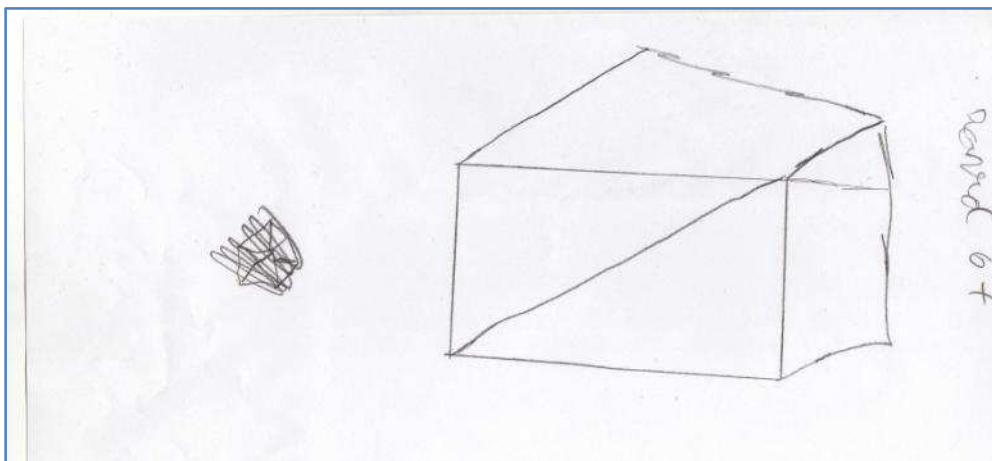
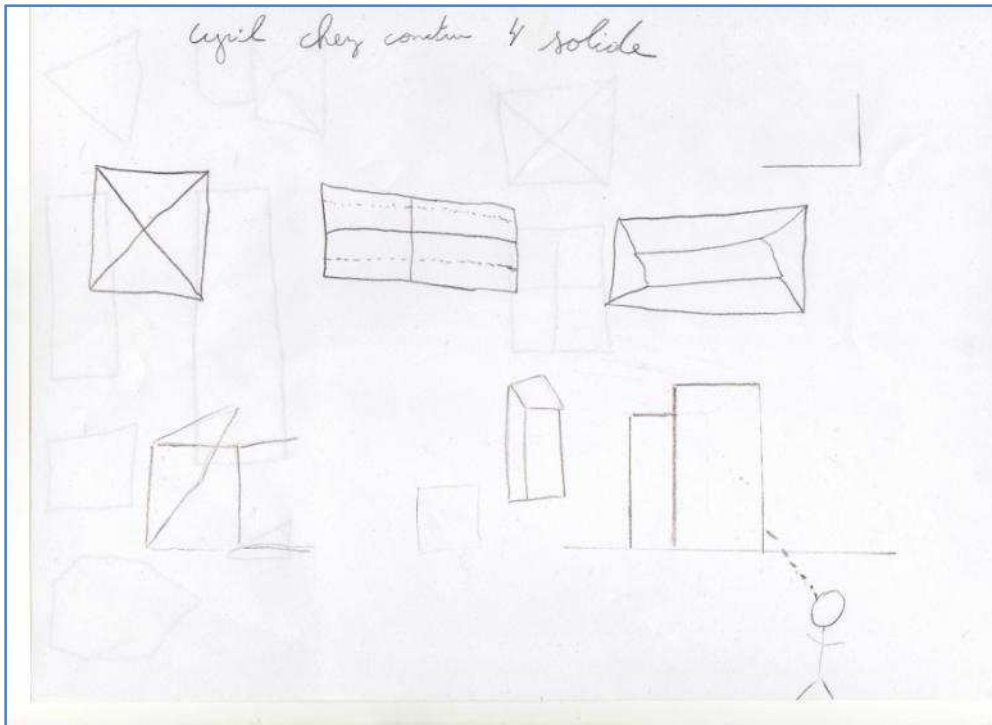
M2	bon ça c'est bon donc, est-ce qu'on peut faire la même...
A1	avec les triangles (<i>il vaut parler des tétraèdres</i>)
M2	on peut dire les mêmes choses sur ceux là ?
A1	ben oui
Ma	ben non çui là... il est plus...
M2	il est plus grand ? mais ?
Pa	c'est les mêmes
A1	c'est comme les boules (<i>il parle des dodécaèdres</i>)
M2	on est exactement dans le même cas, j'suis d'accord avec toi, donc ça ça en fait un deuxième
A1	et les carrés aussi (<i>il parle des cubes</i>)
M2	<i>il montre les deux cubes qui ont la même taille</i>
Pa	non, ex aequo
Da	ah non ils sont ex æquo
Pa	c'est les mêmes
M2	là on est d'accord
M2	<i>présente l'octaèdre et celui là ?</i>
Pa	il est particulier
A1	ouais il reste tout seul
M2	celui là il est particulier, il a été trouvé que par une équipe, peu importe, donc ça fait combien ?
E	4 !
M2	donc vous pensez que le sorcier a 4 dés
E	OUI !
Pa	ouais c'est nos quatre, c'est nous qu'on les a fait
M2	peu importe qui les a fait, puisque maintenant la question c'est : à nous tous combien on en trouve, à nous tous on en a trouvé ...
E	4
M1	de sortes différentes
M2	de sortes différentes, hein on est d'accord est-ce que vous voulez la solution du sorcier ?
E	OUI !
Zi	oui, c'est le triangle !

M1	est-ce que vous pensez que même si vous n'en avez trouvé que quatre, est-ce que vous pensez qu'il peut y en avoir d'autres
Ni	oui
tous	OUI
M1	est-ce qu'il en existerait beaucoup d'autres selon vous ?
Al	oui
E	non...
Pa	non parce que on a fait avec des carrés
M2	ah ça c'est bien comme raisonnement
Pa	on a fait avec des triangles
M2	on a fait avec les carrés... est-ce qu'on peut construire d'autres solides avec des carrés ?
E	oui
E	non
M2	vous avez essayé ?
E	oui
E	non
Zi	si monsieur
Pa	non
M2	est-ce qu'on arrive à faire... des choses qui ressemblent beaucoup comme vous avez fait tout à l'heure <i>(il va chercher un gros cube dont chaque face est réalisée avec 4 pièces carrées)</i> on peut faire des choses comme ça, c'est fait aussi avec des carrés mais est-ce que c'est différent de celui là ?
E	NON
M2	non, ça reste un cube
Pa	c'est nous çui là
M2	mais ça reste un cube, avec des carrés est-ce qu'on peut faire autre chose qu'un cube ?
E	non
Zi	si
M2	apparemment non !
M2	avec des triangles ?
Cha	on peut faire un cube

M2	avec des petits triangles comme ça vous êtes arrivés à faire... cette espèce de pyramide
Al	cette espèce de...
M2	et cette espèce de chose que l'autre jour vous avez dit on dirait un diamant
Pa	ouais c'est nous
Al	ah oui
M2	ce qui est vrai, parce qu'un diamant c'est un peu comme ça, on dirait un peu une pierre taillée quoi
Zi	c'est plus lourd, c'est plus lourd
M2	on est d'accord...
M2	avec les triangles on est arrivé à en faire deux, est-ce qu'on pourrait en faire d'autres avec des triangles ?
Zi	oui
Al	non
Zi	si (<i>in retourne chercher le deltaèdre</i>)
Ni	ah ça y'est ça repart !
M2	alors y'en a qui ont essayé et qui sont arrivés à en faire d'autres, comme celui là mais...
Pa	c'est faux !
M2	c'est pas un polyèdre régulier
Zi	si
Ni	c'est reparti !
M2	alors celui là on l'avait fait avec les autres mais il a un problème aussi vous vous rappelez, c'est à cause de quoi... c'est ?
Pa	les angles
M2	c'est les angles du solide qui ne sont pas les mêmes puisqu'ici c'est un angle qui est fait avec 5 faces... et si on se met ici, c'est un angle qui est fait avec 4 faces
E	ah ouais
M2	donc avec les triangles on n'en a pas trouvé d'autres
Al	y sont tout petits
M2	donc on en a fait avec trois côtés, quatre côtés, cinq côtés qui marchaient
E	ouais
M2	alors est-ce qu'on peut en faire d'autres à votre avis
Al	NON

Annexe 5**Dessins des élèves de cinquième**





Annexe 6

Consigne pour la recherche des polyèdres réguliers en CLIS

Le **maître** du Donjon vit dans un **château** dont lui seul connaît l'entrée. Personne ne peut y pénétrer. C'est le plus grand **sorcier** de tous les temps, il possède des **pouvoirs magiques** importants avec lesquels il jette des **sorts**.

Pour cela, il utilise des **objets mystérieux** qui lui servent de **dés**. Mais, personne ne sait combien il **en** a. Une seule chose est sûre : les **objets mystérieux** sont tous des **solides parfaits**.

Seule une **chouette** connaît les **plans** de ces **solides parfaits**.

Elle sait que chaque **solide** est fabriqué avec des **faces identiques et régulières** (leurs côtés et leurs angles sont égaux comme dans le carré).

Elle sait aussi que les **faces** d'un **solide parfait** sont **toutes identiques**.

Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon possède de dés magiques ?



Annexe 7

Evaluation individuelle du lexique en fin de séquence en CLIS

Evaluation connaissances géométriques

Prénom élève :

*consigne pour l'enseignant :**On dispose devant l'élève les cinq solides de Platon construits. Dire :**choisis en un; décris le, puis essaye de le refaire en disant ce que tu fais.**Présenter ensuite les 5 images et dire :**replaces les solides à côté de leur image.*

solide choisi par l'élève :

cube	tétraèdre	octaèdre	icosaèdre	dodécaèdre
------	-----------	----------	-----------	------------

vocabulaire utilisé (cocher à chaque utilisation)

vocabulaire géométrie 2D	angle	
	côté	
	carré	
	triangle	
	forme	
	hexagone	
	polygone	
vocabulaire géométrie 3D	cube	
	sommet	
	face	
	arête	
	volume	
	solide	
	polyèdre	
	pyramide	
autres noms :		

erreurs repérées :

carré à la place de cube	
côté à la place de face	
truc, machin ou chose	

construction réussie : OUI NON

si NON explications sommaires :

replacer les solides face aux images

réussie : OUI - NON

erreurs :

Annexe 8

Situation de recherche sur les patrons du cube

(fiche de préparation de l'enseignante)

Objectifs :

Mettre en œuvre une situation favorisant des échanges langagiers (de type énonciatifs, argumentatifs).

"Faire fonctionner" " activer " le vocabulaire de la géométrie dans l'espace : face, arête, sommet, solide, polyèdre, angle, volume . Faire les liens et le distinguer du vocabulaire spécifique de la géométrie dans le plan : **côté**, le sommet , les angles .

Comprendre le passage de la géométrie dans l'espace (polyèdre) , à celle dans le plan (polygone) .

Agir avec un matériel spécifique.

Tracer (avec des gabarits) pour représenter (les patrons) .

CONNAISSANCES	CAPACITÉS
<p>-Solides : cube, dodécaèdre (essentiellement) ; référence aux 3 autres (octaèdre, icosaèdre, tétraèdre) .</p> <p>-connaître et savoir utiliser à bon escient le vocabulaire spécifique 3 D et 2 D.</p> <p>-le patron : recherche , représentation .</p>	<p>- rechercher les différents patrons possibles du cube,</p> <p>-coopérer dans cette recherche</p> <p>- manipuler , agir</p> <p>-observer ,</p> <p>- argumenter</p>

Dispositif social :

temps 1 : collectif pour le rappel et la proposition de situation de recherche

temps 2 : travaux en groupes de 2 élèves

temps 3 : collectif pour la mise en commun; premier bilan des recherches par binôme.

Déroulement de la séance de recherche :

Bilan des séances sur les solides de platon : 5mn

présentation de la problématique (comment construire un solide de Platon - le dodécaèdre - sans matériel spécifique) à la situation de recherche (quels sont les patrons possibles pour le cube) : 10 mn

consigne , mise en place des binômes de recherche : 5 mn

Recherche : 15 minutes

Mise en commun sur ce premier temps de recherche : 10 mn

Déroulement de la séance de présentation des travaux :

Chaque binôme aura affiché à mesure les patrons trouvés pendant la recherche (ils auront ainsi été observés et comparés par les autres binômes) La présentation par binôme sera surtout un temps de questionnement et de remarques comparatives des productions : 10 mn

Bilan sur la facilité ou non de la recherche (pourquoi) .

Débat autour de ce qui est pareil et différent .

Organisation matérielle :

-Groupe de 10 élèves : recherche en binôme

-matériel manipulé : boîte de clixi et connexion

-polygones carrés - bloc logique - comme gabarit

temps 1 :

a) collectif pour le rappel

→ Les énigmes en géométrie nous ont permis de rechercher et construire les 5 solides de Platon .

A chaque fois nous utilisons le jeu de polygones .

Mais pour que chacun en ait un modèle : quel autre moyen avons-nous de les fabriquer, quel autre matériel utiliser ?

→ aide : l'exemple fait par Mr DIAS du dodécaèdre **en papier** . il a été fait avec des rectangles pliés et assemblés . Mais cette manière est longue et difficile .

→ autre exemple : présentation du dodécaèdre – calendrier : également en **papier** .

Nous savons donc maintenant **avec quoi : papier ou carton** .

Question : Avant d'obtenir le solide , comment se présente la feuille ? Comment a-t-il été réalisé est-ce que ce sont des pentagones tous séparés qui ont été collés ?

→ il s'agit d'un pliage de ce que l'on appelle un **patron** : présentation de celui qui a permis la réalisation du dodécaèdre –calendrier =>

à quoi fait-il penser

mais , ce n'est pas la seule possibilité de patron, il en existe d'autres (présentation)

Remarque : à plat (on dit dans le plan) , on parle de polygone (figure avec côté, sommet, angle) et en volume (dans l'espace) on parle de polyèdre (solide avec arêtes, sommet, angle et faces) .

b) la proposition de situation de recherche:

Nous possédons le patron pour réaliser le dodécaèdre .

L'icosaèdre , l' octaèdre sont un peu difficile à trouver

Aujourd'hui , je vous propose de chercher **les** patrons pour le cube .

" les " : il y en existe en effet **11** !

Précision : vous allez en chercher le plus possible ; aujourd'hui il s'agit d'amorcer la recherche puis de la reprendre plus tard .

c) Consigne : la recherche se fera par groupe de 2 .

Comment faire : déconstruire le cube

Puis observer les différents patrons possible .

Le représenter avec un gabarit carré

Puis, dès qu'une trouvaille est faite dans un groupe , aller l'afficher au tableau.

Au moins : essayer de trouver deux sortes de patron différent

Temps 2 : recherche

travaux en binômes : constitués par affinité , pour faciliter les échanges et la coopération .

Temps 3 : mise en commun

Bilan : par groupe , quelles difficultés rencontrées , quelles facilités

Premières observations et comparaisons entre patrons trouvés .

Annexe 9

Notres prises par un stagiaire (PE2) pendant la recherche de son groupe

Solides de Platon = polyèdres réguliers
 ↳ polygones réguliers
 ts superposables = ttes faces pareils
 ↳ un nbe de face à chaque sommet.

Conversat^o: il faut dire ts ceux q' existent ?
 ou ts ! ts ts.
 ms att de y'a f. d'o ille formes
 si octogone jusqu'à plein de gones.
 Je sens le piège
 le ?² 1 seul pr 1 polygone donné.
 octogone, si on le p. à ϕ pass.
 a-t se s'abrite ?
 il faut prendre q' les trucs réguliers.
 i quel ça sert de le faire.

A d prendre des \square .

Peut-on déterminer le nbe des facettes / sommet.
 On peut b. il faut faire ac ts les octogones
 ça va marcher ac ts les polyèdre fait de polygones réguliers.

(ils se répartissent à π .)

il n'y en a ϕ à faire.
 il paraît q' octogone régulier marche p. il faut tester
 si ça ne va pas à l'octogone
 ça marche p. ac //gram.

les angles du hexagone -- à partir d'1 certain
 degré on peut ϕ le faire

les angles doivent être compris entre α et γ .
 autour de 90° . à partir de 120° et 60° .

$$60 \leq \alpha < 120$$

si q' 3 ^{arrêtes} faces p/ sommets

i° q' 1 face ac 1 losange.

se marche si on colle 2 pyramides.

et on peut continuer

é 2 pyramides à base carré, elle s'annule
on peut la faire.

△ on fait sa marche p si @ de face p/arrête

alors je vais t'en inventer 1.

Si 2 pyramides à base carré bout à bout
sa marche p/ centre.

Je suis q' q' a 1 face à faire ac la △
on valide qd un q' c les degrés?

Maintenant je fais le u ac 5 triangles

ça va marcher jusqu'au bout.

7° 6 faces ça se peut p.

ac le u en 4 faces partit.

é le dodécaèdre est-ce q' tu peux en mettre en 4 faces?
ça marcherait. Je vais essayer.

en fait non ça marche p.

C'est la géo de l'op.

△ base 5 sa marche!

Du coup! Est-ce q'on en a trois - il n'y en

a p 1 pr 1 unité donnée -

si losange plus fin ça va marcher? oui je

peux q' ça marche.

classer ces polyèdres de
 O'Connor!

De ϕ pas. pr losange

TD les Δ sont réguliers à part le 

ils doivent s'inscrire de 1 corde
 de angle, côtés égaux.

il faut réfléchir à quels sont les ϕ polyèdres réguliers

- le carré - 1 s - 1 pas. ou
- Δ éq. à 3, 4 et 5 a:
- les icosa ϕ pass.
- pentagone - 1 solut?

il ne peut ϕ en caister d'être
 car sinon ça dépasse 360° .

constructible

si polyèdre régulier à partir du a et un angle
 dia de faces du polyèdre est entre 60° et 108° .
 qui le compare.

On les a ts.

Annexe 10

Descriptif de la formation continue 2003-2004

Réunion pédagogique AIS
mercredi 26 novembre 2003

ANALYSE A PRIORI D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

I. Introduction

Pourquoi est-ce nécessaire de faire une analyse a priori, quels en sont les principes.

Intérêt majeur et principal : s'appuyer sur l'analyse de l'erreur. En effet, l'anticipation des erreurs envisageables facilite :

1. La préparation de la séance
 - objectifs et notions en jeu mieux cernés
 - choix des dispositifs de travail mieux adapté
2. La conduite de classe en est facilitée
 - diminution des effets inattendus
 - réduction des incertitudes
 - renforcement d'une attitude adaptée de l'enseignant
3. L'analyse a posteriori devient utile
 - analyse des erreurs facilitée
 - re-médiation et différenciation prennent sens

II. Mise en situation de formation

Problème du cycliste: recherche, résolution, preuve.

Enseignements principaux de cette expérience :

- 1/ Tout le monde peut se tromper !
- 2/ Les conceptions sont des connaissances du sujet qui ont un certain domaine de validité.
- 3/ Utilisées en dehors de leur domaine de validité, les conceptions du sujet peuvent conduire à des raisonnements et/ou résultats erronés.
- 4/ La reconnaissance de l'erreur est le moteur de la poursuite de la recherche de la solution du problème : pour reconsidérer son résultat il faut en douter sérieusement ; pour abandonner une procédure qui a fait ses preuves dans de nombreuses situations, il faut avoir de bonnes raisons.
- 5/ Dans ce type de situation où l'on a à résoudre un problème "concret" ; c'est la mobilisation d'outils mathématiques qui est une aide à la résolution du problème, qui devient de ce fait un problème de mathématique.
- 6/ Avec des élèves en difficulté, il ne faut pas hésiter à recourir à une confrontation avec le milieu matériel pour valider ou invalider les solutions proposées.
- 7/ Les notions de situation didactique, variable didactique, contrat didactique développées par Guy Brousseau sont des outils essentiels pour mettre en œuvre des situations permettant de travailler à partir des erreurs.

III. Qu'est-ce qu'une situation d'apprentissage

Conditions pour l'élaboration d'une bonne situation

- L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution du problème. Il doit pouvoir y engager certaines de ses connaissances antérieures.
- Les connaissances de l'élève sont en principe insuffisantes pour qu'il résolve le problème.
- La situation doit permettre à l'élève de décider si une réponse trouvée est bonne ou mauvaise, et ceci, sans que le professeur intervienne.
- La connaissance visée doit être l'outil le plus adapté à la résolution du problème : cela exige de la part du professeur une analyse a priori dont le but est de prévoir les procédures (exactes mais aussi erronées) que l'élève peut utiliser face au problème.

Il convient de préciser d'emblée qu'il ne s'agit pas de systématiser l'emploi de telles situations, et ceci, pour plusieurs raisons :

- pour certaines notions, il est difficile d'en élaborer ;
- la gestion de la classe est plus complexe ;
- la mise en place et la conduite d'une telle situation demande un temps assez long.

On n'envisagera donc de telles situations que pour des notions nouvelles particulièrement importantes, et pour lesquelles de telles situations ont déjà été mises au point.

Niveau de complexité

Il convient de mettre les élèves face à une situation créant un vrai problème. Par exemple, un problème dans lequel on donne le prix unitaire d'un objet et où l'on demande de trouver le prix d'un certain nombre de ces objets ne peut être le support d'une situation relative à l'enseignement de la «proportionnalité» – le savoir qu'on y engage ne concerne que la multiplication par un nombre entier –, pas plus que le petit problème évoqué plus haut : «Si 4 bonbons coûtent 2 francs, combien coûtent 6 bonbons ?», problème que l'élève sait immédiatement résoudre, compte tenu des nombres qui y figurent. De même, en géométrie, une activité sur papier quadrillé dans laquelle il s'agit de dessiner la symétrique d'une figure par rapport à un axe «horizontal» ou «vertical» ne conviendra pas comme support d'une situation-problème relative à l'enseignement de la symétrie orthogonale en 6e: pour de nombreux élèves, cette situation n'est plus problématique.

Variables didactiques

Une variable didactique est une donnée du problème (la taille d'un ou de plusieurs nombres, la place d'un nombre par rapport à 1, la place dans la feuille de papier de l'axe de la symétrie, etc.) ou un élément de consigne (autorisation ou non d'utiliser une calculatrice, tel ou tel instrument pour tracer : règle, équerre, compas, etc., ou pour mesurer : double décimètre, rapporteur, etc.) dont la variation va provoquer une modification dans le choix des procédures de résolution employées par les élèves.

Par exemple, dans un exercice d'agrandissement d'une figure, on voit bien que le choix du coefficient 2 permet à l'élève d'engager des procédures qui ne seront plus utilisables avec un coefficient égal à 1,75.

On saisit immédiatement le parti que le professeur peut tirer de l'emploi judicieux d'une variable didactique. Sa manipulation pourra permettre de confronter d'abord les élèves à une variante du problème dont ils pourront se saisir et qui soit facile à résoudre à l'aide de leurs connaissances antérieures, puis dans un second temps de les confronter à une variante qui soit aussi facile à saisir mais dont la résolution sera pour eux véritablement problématique.

Les moments d'une séquence

voir annexe

La structuration d'une séquence

voir annexe

IV. Analyser une séquence connue des didacticiens : le puzzle de Brousseau

V. Analyse et commentaire de texte

(à propos de l'enseignement des maths en SEGPA)

Pour la prochaine séance, il est souhaitable que chaque stagiaire mette en œuvre la démarche proposée sur une séquence, qu'il en prépare une trace écrite et qu'il collecte des travaux d'élèves. Ces corpus seront analysés dans cette deuxième réunion pédagogique intitulée : ANALYSE DE L'ERREUR

Annexe 11

Manche de rallye

RALLYE MATHS ASH 2007-2008

MANCHE 1

Rallye Maths ASH

année 2007-2008

manche 1

énigmes	points	nombre	géométrie	logique
1. LA TABLE DE JARDIN	12	X	X	
2. NOMBRE À DEVINER	12	X		X
3. LA VACHE DANS LE VERGER	12		X	
4. REPAS DE GALA	12	X		X
5. LE CARRÉ DE THOMAS	12	X	X	
6. LES BANCS DU PARC	12	X		
7. LA ROSACE DE JULIE	12	X	X	
8. MACHINE À CALCULER	12	X		
9. DOMINOS	12	X		X
BONUS : L'HORLOGE DIGITALE	10		X	

Règlement

Vous devez choisir 4 énigmes parmi les 9 qui sont proposées. Si vous le souhaitez vous pouvez ajouter le bonus, cette énigme n'est donc pas obligatoire. Elle vient en supplément des 4 énigmes que vous aurez choisies.

Cette année, chaque énigme rapporte le même nombre de points, les différences se feront avec le barème de notation :

- 12 points : réponse correcte avec explications valides;
- 8 points : réponse correcte sans explication, ou avec des explications non valides;
- 5 points : réponse incorrecte mais tentative d'explications valides
- 2 points : réponse incorrecte sans explications

RALLYE MATHS ASH 2007-2008

MANCHE 1

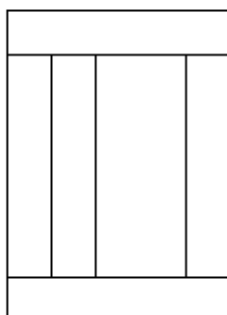


© ARMT

LA TABLE DE JARDIN

Le papa de Lucie a construit une table de jardin rectangulaire en utilisant 7 planches de bois identiques, ayant chacune un périmètre de 3 m

Voici le dessin du plateau de la table, comme il se présente à la fin de la construction.



Quelle est la longueur et la largeur de cette table de jardin ?

Donnez votre réponse et expliquez votre raisonnement.



© ARMT

NOMBRE À DEVINER

Jacques pense à un nombre. Ses camarades doivent le deviner. Pour les aider, il leur donne les renseignements suivants :

- ce nombre est pair.
- le double de ce nombre est plus petit que 100.
- ce nombre est plus grand que 33.
- le nombre recherché ne contient qu'une seule fois le chiffre 4.
- si l'on échange les deux chiffres de ce nombre, on obtient un nombre plus petit que 70 mais plus grand que 50.

A quel nombre pense Jacques ?

Expliquez comment vous avez fait pour le trouver.



© ARMT

LA VACHE DANS LE VERGER

Les arbres du verger du père Michel sont très bien alignés. Ils sont représentés par les points noirs sur le plan ci-dessous.

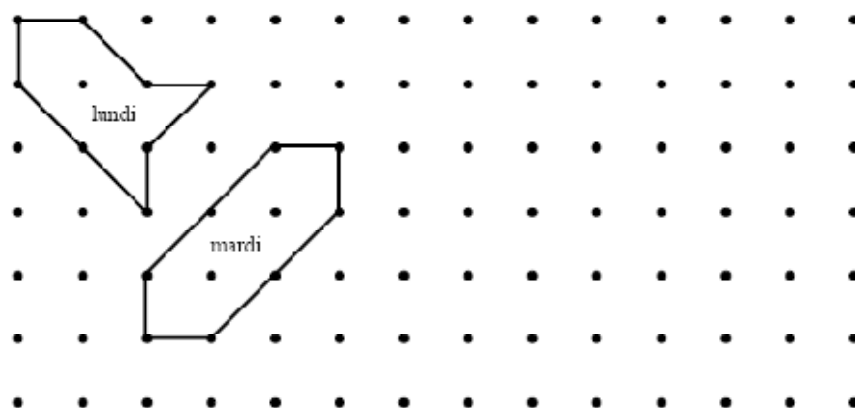
Lundi matin, le père Michel a fait un enclos pour que sa vache, Hortense, puisse brouter l'herbe qui pousse sous les arbres. Il a utilisé 8 barres de bois, 4 grandes et 4 plus petites, qu'il a placées entre 8 troncs d'arbres pour relier un tronc à l'autre.

Lundi soir, Hortense a mangé toute l'herbe de l'enclos, mais elle a encore faim.

Mardi matin, le père Michel fait un nouvel enclos, plus grand que celui du lundi, en utilisant les huit mêmes barres. Hortense aura ainsi plus d'herbe à manger.

Mardi soir, Hortense a tout mangé, mais elle a encore faim.

Plan du verger du Père Michel avec la place des enclos de lundi et mardi



Aidez le père Michel et dessinez un enclos pour mercredi et un autre pour jeudi, de plus en plus grands, pour donner chaque jour plus d'herbe à Hortense.

Mais attention, vous devez toujours utiliser les huit mêmes barres, entre huit arbres.

Expliquez pourquoi votre enclos de mercredi est plus grand que celui de mardi et celui de jeudi plus grand que celui de mercredi.



© ARMT

REPAS DE GALA

Le restaurant « Au Glouton » prépare sa salle pour le repas de gala pour les 122 participants d'un congrès. Le restaurateur possède 12 tables de 8 personnes et 12 tables de 6 personnes. Mais les organisateurs du congrès ont demandé qu'il n'y ait aucune place vide aux tables utilisées.

Combien de tables de chaque sorte peuvent être préparées pour répondre à la demande des organisateurs ?

Indiquez vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.



LE CARRÉ DE THOMAS

Dans du carton, Thomas a découpé plusieurs pièces carrées :

- 3 carrés de 1 cm de côté
- 5 carrés de 2 cm de côté
- 5 carrés de 3 cm de côté
- 1 carré de 4 cm de côté
- 1 carré de 5 cm de côté

Il veut assembler toutes ces pièces pour faire un puzzle carré de 10 cm de côté. Les pièces ne doivent pas se chevaucher et il ne doit pas y avoir de vide.

Thomas peut-il former ce grand carré avec toutes les pièces qu'il a découpées ? Expliquez pourquoi.

(Vous pouvez multiplier toutes les mesures par 10 pour la recherche.)

Dessinez ce carré de 10 cm de côté et les pièces que vous avez utilisées pour le former.



© ARMT

LES BANCS DU PARC

Dans un grand parc, il y a deux sortes de bancs : des bancs à deux places et des bancs à trois places.

Il y a 15 bancs à deux places de plus que de bancs à trois places

Il y a en tout 185 places assises sur les bancs du parc.

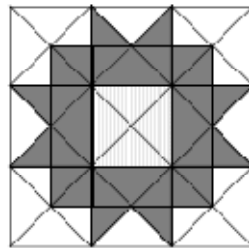
Combien ce parc compte-t-il de bancs en tout ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.



© ARMT

LA ROSACE DE JULIE



Julie doit repeindre ce carreau en blanc et en gris. Elle se demande si elle doit acheter plus de couleur blanche ou plus de couleur grise. Le carré du centre, en pointillé, ne doit pas être repeint

Faudra-t-il plus de gris que de blanc, plus de blanc que de gris, autant de blanc que de gris ... ?

Expliquez comment vous avez procédé.



© RM Allier Bregeon

MACHINE À CALCULER 😊

Sophie possède une sorte de machine à calculer munie d'une touche 😊

Quand Sophie tape 5 puis 😊, sa machine affiche : 25

Quand Sophie tape 7 puis 😊, sa machine affiche : 31

Quand Sophie tape 10 puis 😊, sa machine affiche : 40

Quand Sophie tape 9 puis 😊, que pourrait afficher sa machine ?

Expliquez le fonctionnement de la touche 😊 de cette machine à calculer.



© ARMT

DOMINOS

Sophie a sorti quatre dominos de leur boîte, dessinés sur la figure 1.

Elle les dispose en carré, comme sur la figure 2. Elle constate qu'il y a 8 points sur le côté du haut, 9 points sur le côté de droite, 7 points en bas et 6 points à gauche.

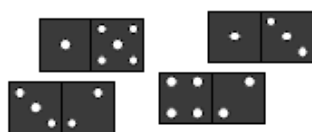


figure 1

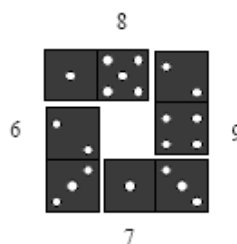


figure 2

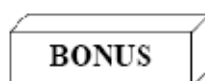
Sophie aimerait qu'il y ait le même nombre de points sur chaque côté.

Arrivera-t-elle à disposer ces quatre dominos en carré de manière à avoir le même nombre de points sur chaque côté ?

Dessinez une solution pour chaque nombre de points que vous avez trouvé.

RALLYE MATHS ASH 2007-2008

MANCHE 1



© ARMT

L'HORLOGE DIGITALE

Au mur de son bureau, Sabine vient d'accrocher une horloge digitale qui indique les heures et les minutes, avec des chiffres comme ceux-ci :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Par exemple, le soir à 8 heures moins le quart, l'horloge indique :

19:45

Comme elle a un rendez-vous de travail en milieu de journée, Sabine regarde rapidement l'heure et s'aperçoit qu'il est temps qu'elle parte.

Mais elle ne s'est pas rendu compte qu'elle avait en fait regardé l'image de son horloge qui se reflétait dans son grand miroir accroché au mur devant elle, en face de l'horloge. Elle est donc arrivée à son rendez-vous avec 20 minutes d'avance.

Quelle heure était-il réellement quand elle a regardé son horloge dans son miroir ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

Annexe 12

Feuille de route rallye maths-ASH 2007-2008

IUFM de Lyon

Inspection académique du Rhône

Lyon, le 22 octobre 2007

L'équipe organisatrice du rallye maths ASH

aux :

participants du rallye ASH 2006-2007

Chers collègues,

Le rallye 2007-2008 est officiellement lancé et vous êtes toujours aussi nombreux !

Voici la "feuille de route" qui contient l'essentiel des informations concernant le déroulement général des épreuves ainsi que le calendrier.

Comme pour les années passées, nous vous rappelons que l'enjeu de ce rallye tient dans la sollicitation de l'activité mathématique des élèves au sein de situations énigmatiques dont les solutions nécessitent réflexion, expérimentation, débat et mises en commun. Il n'y rien à gagner sinon le plaisir de chercher.

Pour cette version 2007-2008 la communication continue à se dérouler par des moyens électroniques : l'envoi des épreuves se fera exclusivement par mail, une plateforme étant aussi à votre disposition sur Internet à l'adresse suivante :

<http://pedagogie.lyon.iufm.fr/mathdelay> rubrique "ressources pour l'ASH". Vous y trouverez toutes les informations pour le rallye (épreuves, corrigés, forum pour vos questions, etc...).

Vos réponses peuvent bien entendu nous parvenir par courrier postal, ce qui vous laisse d'avantage de possibilité concernant les supports de rédaction.

L'envoi des épreuves se fera d'abord sans les corrections, puis quelques jours après le délai de réponse, un accompagnement didactique et pédagogique vous sera transmis. Nous avons fixé la durée des recherches à environ 3 mois pour chaque manche; il y aura que 2 manches dans l'année :

manche 1 : du 22 octobre au **8 janvier 2007**

manche 2 : du 11 février au **9 mai 2008**

Une finale sera proposée aux participants qui le souhaiteront.

Cette année encore, toutes les énigmes valent 12 points (sauf pour le bonus) quelque soient leur niveau de difficulté. Le barème de correction varie en fonction de la qualité de l'argumentation des réponses :

- 12 points : réponse correcte avec explications valides;
- 8 points : réponse correcte sans explication, ou avec des explications non valides;
- 5 points : réponse incorrecte mais tentative d'explications valides
- 2 points : réponse incorrecte sans explications

Nous gardons aussi l'idée d'une énigme particulière : **le bonus**. Cette recherche facultative est en général plus longue à traiter et peu faire l'objet d'un "atelier de fond de classe" comme on dit. Les classes qui le souhaitent peuvent engager leurs élèves sur cette recherche, mais ne pourront pas la compter parmi les 4 énigmes qu'elles ont choisi : le bonus reste un supplément.

Chaque manche comportera donc 9 énigmes (plus un bonus) qui portent sur quatre domaines : géométrie, numération, calcul, logique. Chaque classe choisit 4 énigmes et ajoute éventuellement le bonus. Elle expédie à la fin de la période de recherche une seule réponse par énigme sélectionnée (merci de bien respecter les dates butoirs). Il sera tenu compte des démarches de résolution, il est donc nécessaire de ne pas envoyer seulement des réponses "brutes".

Une seule adresse postale est à utiliser pour l'envoi de vos réponses, merci de bien respecter cette règle :

Rallye maths ASH
INSPECTION ACADEMIQUE DU RHONE
21 rue Jaboulay
69007 LYON

Un classement sera établi à l'issue de chaque manche et envoyé à chaque classe participante, ce classement est tenu à la discrétion des enseignants qui l'utilisent comme ils veulent et si ils le souhaitent.

Tous nos encouragements pour ce travail au long cours.

Bien cordialement.

pour l'équipe organisatrice : Thierry DIAS

Annexe 13

Correction des 6 premiers problèmes d'une manche de rallye

Rallye maths ASH 2007-2008	corrigé + analyse	1
1. LA TABLE DE JARDIN		
ANALYSE A PRIORI		
Domaine de connaissances		
<ul style="list-style-type: none"> - Géométrie : périmètre, rectangle et décomposition du rectangle - Arithmétique : les 4 opérations 		
Analyse de la tâche		
<ul style="list-style-type: none"> - Remarquer sur le dessin que la longueur d'une planche est 5 fois sa largeur, et que, par conséquent son périmètre est 12 fois sa largeur ($2 \times 5 + 2 \times 1$). Il s'ensuit que la largeur d'une planche est 25 cm ($300 : 12$). - Par conséquent, la largeur et la longueur du plateau valent, respectivement, 5 et 7 fois la largeur d'une planche, les dimensions de la table sont donc 125 cm (25×5) et 175 cm (25×7). <p>Ou : on peut aussi remarquer sur le dessin que le périmètre du plateau peut s'exprimer au moyen des côtés d'une planche, puisqu'il est formé de 4 largeurs et 4 longueurs. Il s'ensuit que le périmètre du plateau est 2 fois celui d'une planche, c'est-à-dire 600 cm (300×2). Noter ensuite que la longueur est 5 fois la largeur et que par conséquent le périmètre de la table correspond à 24 fois la largeur d'une planche ; en déduire que $(600 : 24) \times 5 = 125$ (cm) est la largeur de la table, alors que la longueur est $(600 : 24) \times 7 = 175$, en cm.</p>		
Attribution des points		
12 Réponse correcte (largeur 125 cm ou 1,25 m, longueur 175 cm ou 1,75 m) avec explications claires		
8 Réponse correcte mais avec une argumentation peu convaincante.		
5 Réponse correcte sans explication, ou réponse justifiée avec une erreur de calcul		
2 Début de raisonnement correct ou détermination du périmètre du plateau seulement		

2. NOMBRE À DEVINER**ANALYSE A PRIORI**

Domaine de connaissances

- Arithmétique : numération, relation d'ordre, chiffres et nombres, numération de position, double d'un nombre, nombre pair.

Analyse de la tâche

- Comprendre les différentes contraintes du problème.
- Traduire chaque information par une propriété des chiffres du nombre cherché ou par un encadrement.
- Procéder de manière systématique en écartant les nombres qui ne satisfont pas les conditions.
- Déduire, de la deuxième et de la troisième conditions, que les nombres possibles sont compris entre 34 et 49. Parmi ceux-ci, les seuls nombres aussi compatibles avec la première et la quatrième conditions sont le 34, le 40, le 42, le 46 et le 48.
- Écarter le 34, le 40, le 42, et le 48 parce que non compatibles avec la cinquième condition.
- Conclure que le nombre pensé est 46.

Ou : les deuxième et troisième conditions montrent que les nombres possibles sont compris entre 34 et 49 ; la dernière condition donne comme chiffre des unités 5 ou 6 ; la première condition impose 6 comme chiffre des unités : soit 36 ou 46 ; la quatrième condition impose 46

Attribution des points

- 12 Réponse correcte (46) avec explications ou vérification explicite de la cohérence avec toutes les contraintes.
- 8 Réponse correcte (46) avec explications incomplètes ou sans vérification explicite de la cohérence avec toutes les contraintes.
- 5 Réponse correcte (46) sans explication.
- 2 Début de recherche correcte (au moins la sélection de l'intervalle 34 – 49).

3. LA VACHE DANS LE VERGER (Cat. 3, 4)

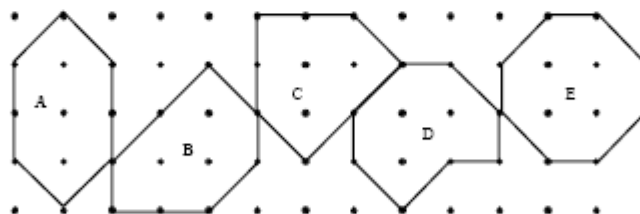
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : propriétés de figures fermées, comparaison de longueurs
- Mesures : recherche d'une unité commune d'aire

Analyse de la tâche

- Interpréter le plan du verger et y repérer les arbres, les barres de longueurs différentes et les différents enclos
- Observer les périmètres des enclos et reconnaître qu'il y a deux sortes de barres, celles dont la longueur correspond à un côté du « quadrillage » ou à une « diagonale ». Constaté que chaque périmètre est composé de quatre barres de chacune des deux sortes.
- Comprendre que « ce qu'il y a à manger » dans l'enclos, ou « plus grand » se réfère à l'aire de l'enclos, dont le périmètre est toujours le même et dont la forme ne semble pas devoir être prise en compte. Chercher alors à comparer les aires pour vérifier que cette grandeur a augmenté et chercher à en trouver une plus grande.
- Trouver que les aires des enclos peuvent s'exprimer en « carrés » et/ou en « triangles » (demi-carrés). Par exemple, l'aire du lundi vaut 2 carrés entiers et 4 triangles, celle du mardi de 3 carrés entiers et 4 triangles.
- Chercher une disposition des perches qui donne une aire plus grande (4 carrés et 4 triangles, puis 5 carrés et 4 triangles) en tenant compte des trois contraintes :
augmentation de l'aire du mardi au mercredi, découverte d'une des formes A à D
augmentation de l'aire du mercredi au jeudi,
respect des longueurs de barres (4 « côtés », 4 « diagonales »)
(quelques solutions pour le mercredi (A, B, C, D) et la solution pour le jeudi (E))



- Donner une explication montrant qu'il y a un comptage des carrés ou triangles ou nombre de points intérieurs (selon le théorème de Pick, l'aire en carrés vaut le nombre de points intérieurs + la moitié du nombre de points sur la frontière - 1. Les élèves ne peuvent le savoir, mais l'intuition « plus il y a d'arbres à l'intérieur, plus grande est l'aire » est à accepter comme explication).

Attribution des points

- 12 Réponse complète : (deux figures trouvées, en progression, respect des longueurs de perches), avec explications
- 8 Réponse complète avec explications peu claires ou manquantes
- 5 Réponse partielle avec deux des trois conditions précédentes (par exemple deux figures, en progression, mais avec 8 côtés en « diagonale »)
- 2 Réponse partielle avec une seule des trois conditions précédentes

4. REPAS DE GALA

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, division
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il faut utiliser des tables de 8 ainsi que des tables de 6, vu que 122 n'est divisible par aucun de ces nombres.
- Procéder donc par essais organisés ; par exemple, considérer que $12 \times 8 = 96$ et que, par conséquent, en utilisant toutes les tables de 8 places, il faudrait encore 26 places pour lesquelles 4 tables de 6 places ne suffiraient pas et une 5^e table de 6 places ne serait pas utilisée entièrement. Diminuer alors le nombre des tables de 8 places et se rendre compte qu'avec 10 tables de 8 places et 7 tables de 6 places on réussit à installer la salle selon la demande.
- Après avoir trouvé une première solution, il faut penser qu'il pourrait y en avoir d'autres. Poursuivre donc la recherche, par exemple en diminuant le nombre des tables de 8 et augmentant celui des tables de 6 pour trouver ainsi les autres combinaisons qui donnent une somme de 122. On obtient trois possibilités supplémentaires : 7 tables de 8 places et 11 tables de 6 places, ou 4 tables de 8 places et 15 tables de 6 places ou 1 tables de 8 places et 19 tables de 6 places. Mais, seule la première de ces combinaisons est acceptable, parce qu'il n'y a que 12 tables de 6 places.

Où : construire un tableau du type

tables de 8	personnes placées	personnes restant à placer	tables de 6 (autres personnes placées)	Personnes restant à placer
12	96	26	4 (24)	2 personnes
11	88	34	5 (30)	4 personnes
10	80	42	7 (42)	0
9	72	50	8 (48)	2 personnes
8	64	58	9 (54)	4 personnes
7	56	66	11 (66)	0
6	48	74	12 (72)	2 personnes
5	40	82	13 (non acceptable)	4 personnes
4	32	90	15 (non acceptable)	0

compter le nombre total des places disponibles ($12 \times 8 + 12 \times 6 = 148$), se rendre compte qu'il faut éliminer 46 places ($148 - 122$) par « tables complètes » ; on peut faire cela en éliminant 5 tables de 8 personnes et 1 de 6 places ($8 \times 5 + 1 \times 6 = 46$) ou 5 tables de 6 places et 2 de 8 places ($6 \times 5 + 8 \times 2 = 46$). Donc conclure que dans le premier cas il y a 7 tables de 8p. (12-5) et 11 de 6p. (12-1), dans le deuxième cas 10 tables de 8p. (12-2) et 7 tables de 6p. (12-5).

- Conclure qu'il y a deux manières possibles de dresser les tables : 10 tables de 8 places et 7 tables de 6 places ou 7 tables de 8 places et 11 tables de 6 places.

Attribution des points

- 12 Réponse correcte (10 tables de 8 places et 7 tables de 6 places ; 7 tables de 8 places et 11 tables de 6 places) avec explications
- 8 Réponse correcte avec seulement les vérifications, ou découverte d'une seule possibilité avec explications
- 5 Réponse correcte sans explications, ou découverte d'une seule possibilité avec seulement la vérification, ou plusieurs solutions dont une erronée qui ne tient pas compte d'une des conditions
- 2 Découverte d'une seule possibilité sans explication ou début de raisonnement correct

5. LE CARRÉ DE THOMAS

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie et mesure (carré, aire, pavages)
- Logique : raisonnement, déduction

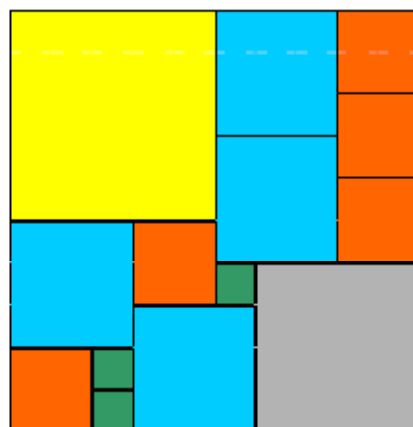
Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on ne peut utiliser que des pièces carrées des dimensions indiquées pour construire le grand carré.
- Calculer la mesure de l'aire du grand carré en cm^2 (ou le nombre total de carrés de 1 cm de côté), c'est-à-dire 100, et calculer la mesure de l'aire totale des petits carrés (109 cm^2), en déduire qu'il y a une pièce de 9 cm^2 en plus, ce qui correspond à un carré de 3 cm de côté.
- Essayer de réaliser le grand carré avec les pièces qui restent (par exemple en découpant les pièces données et en les disposant sur un carré 10×10 ou en dessinant un quadrillage 10×10 et en le subdivisant en carrés de dimensions souhaitées).

Ou : procéder par essais en cherchant à réaliser le carré avec les pièces données et en constatant qu'il reste toujours un carré de 3 cm de côté.

Ou : après avoir remarqué que le carré de côté 5 cm ne peut être éliminé, constater que 10 cm peut être réalisé comme $5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 2 \text{ cm}$ ou comme $5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$ ou comme $5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$ ou comme $5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$ ou comme $5 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm} + 1 \text{ cm}$, ce qui détermine les carrés qui peuvent être adjoints au carré de 5 cm. Par essais et déductions, un pavage peut être réalisé (il en existe de nombreux).

Exemple d'assemblage possible :



Attribution des points

- 12 Réponse complète correcte « Non, il y a un carré de côté 3 cm en trop, avec le dessin d'un assemblage correct », avec explication claire de la méthode utilisée pour déterminer l'intrus
- 8 Réponse complète correcte, mais avec explication incomplète pour la détermination de l'intrus
- 5 La pièce en trop est trouvée, mais l'assemblage ne respecte pas toutes les conditions ou assemblage correct, mais l'intrus n'est pas mentionné explicitement.
- 2 Début d'assemblage correct (au moins 10 des 15 pièces sont posées)

6. LES BANCs DU PARC

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique (les 4 opérations)

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que s'il y avait autant de bancs à 3 places que de bancs à 2 places, il suffirait de diviser par 5 le nombre de places assises, pour trouver le nombre de bancs.
- Remarquer que les 15 bancs supplémentaires à 2 places offrent 30 places assises.
- En enlevant ces 30 places des 185, on trouve 155 places.
- Et la division de 155 par 5 donne 31. C'est donc qu'il y a 31 bancs à 3 places et $31+15 = 46$ bancs à 2 places, d'où $77 = 31 + 46$ bancs en tout dans le parc.

Ou : Après avoir divisé 185 par 5 ($185 : 5 = 37$), diminuer progressivement le nombre de bancs à 3 places et augmenter le nombre de bancs à deux places, en considérant que 2 bancs à 3 places équivalent à 3 bancs à 2 places. Continuer ainsi jusqu'à ce que la différence entre le nombre de bancs à 2 places et ceux à 3 places soit 15.

Représenter éventuellement le procédé dans un tableau de ce genre :

Nombre de bancs à 2 places	37	40	43	46
Nombre de bancs à 3 places	37	35	33	31
Différence	0	5	10	15

Ou : choisir un nombre d'un nombre fictif (par exemple 70) de bancs à 2 places, diminuer successivement le nombre des bancs de 2 places et augmenter celui des bancs de 3 places, en considérant que 2 bancs à 3 places équivalent à 3 bancs à 2 places. La bonne solution est celle où la différence est 15. (s'aider éventuellement d'un tableau comme le suivant.)

Nombre de bancs à 2 places	70	67	64	61	58	55	52	49	46	43	40	37
Nombre de bancs à 3 places	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37
Différence	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

Attribution des points

- 12 Solution complète (77 bancs en tout, 31 à 3 places et 46 à 2 places) avec opérations et explications complètes
- 8 Solution correcte, avec explications incomplètes ou solution ne faisant pas apparaître le nombre total de bancs (31 bancs à 3 places et 46 bancs à 2 places)
- 5 Solution correcte sans explication ou bonne démarche avec une erreur de calcul
- 2 Début de recherche cohérente ou plus d'une erreur de calcul

Annexe 14

Questionnaire individuel aux participants du rallye-ASH

1. Dispositif

Comment organiser vous les séances de recherche des élèves ?

	<i>jamais</i>	<i>parfois</i>	<i>souvent</i>
travaux en groupes,			
travaux en binômes,			
séances en collectif,			

Combien de temps consacrez-vous à chaque séance de recherche ?

<i>5-10 min</i>	<i>10-20 min</i>	<i>20-30 min</i>	<i>30-40 min</i>	<i>40-50 min</i>	<i>> 50 min</i>

Combien de temps consacrez-vous à chaque séance de mise en commun ?

<i>5-10 min</i>	<i>10-20 min</i>	<i>20-30 min</i>	<i>30-40 min</i>	<i>40-50 min</i>	<i>> 50 min</i>

Combien consacrez vous de séances de maths destinées au rallye pour chaque manche ?

<i>entre 1 et 5</i>	<i>entre 5 et 10</i>	<i>plus que 10</i>

Selon quelle fréquence ? (tous les jours, 1 à 2 fois par semaine, 1 à 2 fois par mois)

<i>tous les jours</i>	<i>1 à 2 fois par semaine</i>	<i>1 à 2 fois par mois</i>

Vous arrive-t-il de donner du matériel aux élèves pendant les phases de recherche ?

<i>oui</i>	<i>non</i>

Quel type de matériel (ou supports particulier de travail) mettez-vous à la disposition des élèves ?

Remarques concernant le dispositif :

2. Activité des élèves

Comment caractériseriez-vous (globalement) l'engagement de vos élèves pendant les phases de recherche ?

<i>investissement personnel</i>	<i>désintérêt</i>	<i>persévérance</i>	<i>abandon rapide</i>	<i>joie</i>	<i>apathie</i>	<i>recherche active</i>	<i>attente</i>

Pendant les phases de recherches, avez-vous observé les types de pratique spontanés suivantes chez vos élèves : (réponse oui/non + exemples si possible)

	<i>oui</i>	<i>non</i>	<i>exemple</i>
recours à des instruments			
manipulation d'objets			
schématisations variées			
allers et retours entre hypothèses et expérimentation			
autre			

remarques sur l'activité des élèves

Relations et interactions

Observez-vous des différences dans la relation aux apprentissages pendant les séances de maths consacrées au rallye ? (faire des maths dans ce contexte est-il différent)

1. à propos de l'engagement dans l'activité (acceptent-ils plus facilement de démarrer),

2. à propos du maintien dans la tâche (ont-ils tendance à moins décrocher),

3. à propos des apprentissages effectués (apprennent-ils mieux, qui, est-ce les mêmes élèves que d'habitude)

Observez-vous des différences dans les interactions entre élèves ?

- Les échanges sont-ils les mêmes que d'habitude (en quantité et en qualité) ?

- Avez-vous observé des de moments de débat, d'argumentation ?

remarques sur les interactions et relations

Rôle de l'enseignant, et adaptation des enseignements

Le rôle de l'enseignant semble différent pendant les phases de recherche. Avez-vous repéré dans votre activité des gestes ou des postures différents, des moments d'étayage particuliers...

Nous faisons l'hypothèse que le contexte du rallye est une forme de travail favorisant l'adaptation des enseignements et des apprentissages. Avez-vous repérer de tel effets lors de la

mise en œuvre de séances consacrées au rallye, si oui donnez en si possible quelques exemples.

--

Un grand merci pour votre aimable participation !!


vosre classe	nombre d'élèves	vosre option	vosre ancienneté

Accepteriez-vous un petit entretien individuel sur ce questionnaire ? OUI - NON

Annexe 15

Outils sous forme de fiches supports et d'aide à la recherche

Fiche de recherche

Enigme 

Titre : _____

Essai 1
Ce que nous utilisons
Ce que nous faisons
Est-ce que cet essai nous a permis de trouver la réponse ?

oui non → autre essai

Fiche de réponse

Enigme



Titre : _____

Ce dont nous avons eu besoin
pour résoudre l'énigme

Notre recherche

Utilisation de :

- Matériel
- Dessins
- Techniques mathématiques

Notre réponse à l'énigme	
Nous en sommes sûrs parce que :	
Date	Nom des chercheurs

Annexe 16

Répertoire de problèmes de recherche

Formation Continue des enseignants de SEGPA

1 des bananes dans le désert



Dans un désert de 1000 km, il faut transporter 3000 bananes avec un chameau ne pouvant porter que 1000 bananes sur son dos.
On sait qu'il consomme 1 banane par km parcouru.
exemple : 100 km parcourus = 100 bananes consommées

Quel est le plus grand nombre de bananes que vous pouvez amener au bout du désert ?

Thierry Dias Janvier 2007



2

les dés du sorcier



Le maître du Donjon est un grand sorcier qui jette tout le temps des sorts. Pour cela il utilise des objets mystérieux qui lui servent de dés. Mais personne ne sait combien il en cache. Une seule chose est sûre : les objets mystérieux sont tous des polyèdres réguliers*.

Pouvez-vous dire combien le maître du Donjon en possède ?

* Un polyèdre régulier est constitué de plusieurs faces régulières (polygones réguliers : côtés et angles égaux). De plus ces faces doivent être toutes identiques entre elles (même forme et même taille).

Thierry Dias janvier 2007

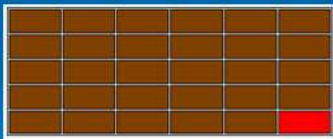
3

le carré de trop !

On joue avec une tablette de chocolat dont un carré est empoisonné : le rouge. Chacun son tour prend la plaque et en détache une partie en suivant une ligne droite du quadrillage*. Le but du jeu est de laisser le carré empoisonné à l'adversaire.

Que pensez-vous de cette affirmation : "J'ai trouvé le truc ! Je suis sûr de gagner si c'est moi qui commence !"

Y a-t-il un truc ? Si oui est-ce qu'il fonctionne pour une tablette de chocolat d'une autre dimension ?



* : On doit couper la tablette en un coup pour en détacher une partie, comme on coupe effectivement une tablette : on peut prendre une ou plusieurs rangées (ou colonnes) mais on ne peut pas prendre une partie comme ci dessous.

découpage interdit !!



Thierry Dias janvier 2007

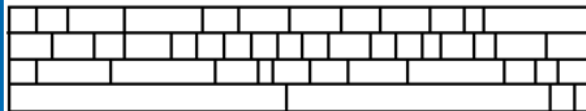
4

les couleurs de Guthrie

On veut colorier une carte en employant le plus petit nombre de couleurs possible, avec les règles suivantes :

- Chaque pays est constitué d'un seul bloc.
- Deux pays sont voisins si ils ont une ligne frontière commune (pas un seul point, ni la mer).
- Deux pays voisins sont toujours de couleurs différentes.

On peut commencer avec une "carte" qui ressemble à un mur de briques irrégulières.



Essayez de la colorier avec 7 couleurs différentes, puis avec moins si c'est possible. Peut-on imaginer une règle générale pour colorier un mur de briques quelconque ? Après on travaille avec la carte de l'Afrique, puis avec des cartes de ton invention.

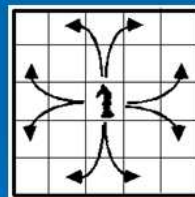
Thierry Dias Janvier 2007

5

le cavalier d'Euler

Sur un échiquier un cavalier se déplace en parcourant deux cases tout droit et une case de côté.

- Sur combien de cases au maximum, peut aller un cavalier, sans passer deux fois sur la même ?
- Sur un échiquier 5x5 : en partant du centre ? En partant d'une autre case ?
- Sur des échiquiers plus grands: 6x6, 7x7, 8x8 (l'échiquier normal) ?
- Peut-il aller sur toutes les cases ?



Thierry Dias Janvier 2007

6

jeu de dés

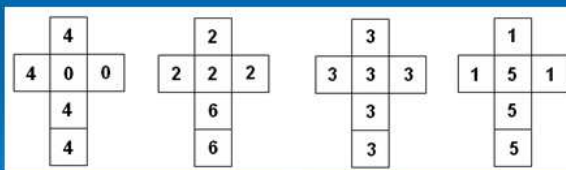
Voici un jeu de dés qui nécessite deux joueurs (ou joueuses). Chacun de deux joueurs construit un dé d'après les patrons ci-dessous. Le joueur qui à le plus grand nombre gagne la partie. Après 12 lancers le joueur ayant le plus de points gagne.

Pensez-vous qu'il existe une stratégie pour gagner ?

Lequel de ces dés choisiriez-vous ?

Préférez-vous choisir le dé en premier ou en second ?

Expliquer votre stratégie.



A

B

C

D

Annexe 17

Echanges préparatoires à la séance en SEGPA

séance du vendredi 9 mars :

Je te donne quelques indications pour rejoindre notre riant collègue caladois : à la sortie de l'autoroute, tu prends à gauche comme lorsque tu vas à Belleruche ; au gros rond point, tu prends la 2^{ème} sortie, direction Blédina (la 1^{ère} va au centre ville, la 3^{ème} à Limas-Belleruche). Tu vas passer devant la caserne des pompiers à droite ; le collègue est juste après, à gauche.

Pour te garer : il y a un grand parking près du collègue : il faut prendre à droite au feu devant le collègue. A cette heure-ci tu auras peut-être du mal à te garer. Si tu n'es pas trop chargé, tu peux essayer de te garer sur le trottoir juste avant la caserne des pompiers.

Concernant la séance, voilà ce que j'envisage : tes remarques et critiques sont attendues !

* à ta place je commencerai bien par la consigne afin que chacun puisse d'emblée se poser quelques premières interrogations individuellement,

en y incluant d'abord l'explication du futur dispositif de travail : en instituant bien explicitement l'idée du labo de maths pour jouer aux chercheurs, une séance qui en appellera d'autres... afin qu'ils comprennent que ce dispositif ne tombe pas du ciel pour une seule fois préviens les aussi d'emblée que cette recherche n'est pas un "problème" de maths que l'on trouve en une seule fois, qu'il faudra sans doute plusieurs séances, que l'enjeu est la recherche ET la communication. (revois pour cela le diaporama que j'avais projeté si tu as le temps)

* regroupement : 4 groupes de 3 élèves (groupes au choix des élèves)

à toi de voir pour l'organisation des groupes, mais, ont-ils l'habitude de travailler dans ce dispositif et si oui comment se répartissent les élèves dans ces groupes habituellement ? sinon 3 groupes de 4 ce serait pas mal

* dévolution de la consigne :

* d'abord à l'oral, en « mimant » un peu la scène (sans aller jusqu'à me déguiser en chameau... *ben là alors je regrette pas la caméra !*)

* éventuellement matérialiser la situation avec un chameau en plastique sur mon bureau qui représente le désert + un tas de quelque chose pour les *bananes* (*je ne suis pas sûre de ce point : voir + loin*)

à ce stade je ne pense pas qu'il soit utile d'utiliser trop de matériel (sauf peut être une image décrivant la situation ou le chameau en plastique)

** pense à laisser un moment pour d'éventuelles explications sur des mots incompris*

* enfin remise à chaque élève de la consigne écrite telle que tu nous l'a donnée en animation : texte + dessin chameau

n'oublie pas de fournir du brouillon en format A3 si possible (plus facile pour l'affichage si besoin) ainsi que de préparer éventuellement quelques calculettes que tu mettra à disposition sur demande seulement (pas la peine de les évoquer a priori)

* mise au travail par groupe ; je passe de groupe en groupe

c'est une phase importante pour vérifier la compréhension de la consigne et aider éventuellement au démarrage si besoin

* Difficultés attendues :

Ne pas arriver à se représenter le problème : *je devrais peut-être réserver le matériel en plastique à ces groupes-là ? je te mets en pièce jointe quelques éléments en images pour dépanner les plus en difficulté, tu peux aussi proposer des schématisations (droite numérique allant de 0 à 1000)*

ne pas trouver qu'on a le droit de faire plusieurs aller-retour : *et là comment les mettre sur la voie sans leur en dire trop ?*

essaye à chaque fois que c'est possible de faire des mises au point collectives en énonçant (et encore mieux en écrivant) les découvertes stabilisé, exemples :

1/ ce n'est pas possible en un seul voyage parce que :

donc il faut faire des allers retours

2/ le chameau ne peut jamais voyager à vide car il doit manger, donc ...

etc... au fur et à mesure que ces "axiomes" apparaissent aux élèves, ce sont bien entendu apparemment des évidences mais encore faut-il les énoncer pour avancer la recherche

vouloir trouver une solution immédiate par le calcul, alors que ce problème nécessite une longue phase de tâtonnements, procédure à laquelle les élèves ne sont pas habitués

cela fait effectivement partie d'un des enjeux de la mise en place du labo, il s'agit de modifier le contrat habituellement vécu par les élèves en résolution de problème (cela fera partie de vos premières institutionnalisations)

difficultés de calcul

** Tu peux prévoir un ou plusieurs moments de mise en commun ou chaque équipe présente un peu aux autres là où ils en sont, le but étant de profiter des travaux des uns et des autres, de montrer que chaque équipe ne travaille pas contre les autres.*

Matériel : feuilles de brouillon, feutres. Calculatrices autorisées

Si possible essayez de terminer la séance par un petit moment de synthèse sous ta responsabilité, en présentant ce que vous avez découvert, ce que vous avez stabilisé comme savoirs (et/ou savoir-faires) et ce qui reste à découvrir.

Annexe 18

Lettre aux élèves de SEGPA pour relancer la recherche des *bananes dans le désert*



ACADEMIE DE LYON



IUFM de l'Académie de LYON

IUFM de Lyon
Inspection académique
du Rhône
thierry.dias@ac-lyon.fr
IUFM de Lyon
IA du Rhône

Lyon, le 20 mars 2007

Thierry DIAS :
aux élèves de la SEGPA Jean Moulin

Chers amis chercheurs et chercheuses,

Je souhaite tout d'abord vous adresser toutes mes félicitations pour le travail que vous avez fait lors de la première séance de recherche sur "les bananes dans le désert". C'est une énigme difficile, et cependant vous avez déjà trouvé beaucoup de choses intéressantes :

- le chameau ne peut pas faire le transport en une seule fois,
- le chameau doit faire plusieurs étapes en laissant parfois des bananes dans le désert (il les emportera plus tard),
- en faisant des petites étapes de 100 km, le chameau consomme beaucoup de bananes.

Voici quelques idées que je vous donne si vous souhaitez continuer la recherche :

- essayez de faire peu d'étapes (elles doivent donc être plus longues que 100 km) pour consommer moins de bananes,
- toutes les étapes ne font pas obligatoirement la même distance,
- n'oubliez pas que la dernière étape sera un aller simple (le chameau peut finir son travail lorsqu'il atteint l'autre côté du désert, il n'a plus besoin de revenir)



Je vous encourage à ne pas abandonner la recherche même si vous la trouvez un peu difficile. Le but du labo-maths consiste à chercher ensemble pour résoudre les énigmes, à en discuter entre vous en essayant toujours d'expliquer pourquoi vous pensez avoir trouvé les bonnes solutions.

Bonne recherche et bon courage à toutes et à tous !

Thierry DIAS