



HAL
open science

Interaction optomécanique à trois modes et refroidissement d'un micro-résonateur mécanique

Chiara Molinelli

► **To cite this version:**

Chiara Molinelli. Interaction optomécanique à trois modes et refroidissement d'un micro-résonateur mécanique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. Français. NNT: . tel-00635999

HAL Id: tel-00635999

<https://theses.hal.science/tel-00635999>

Submitted on 26 Oct 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Chiara Molinelli

pour obtenir le grade de docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**Interaction optomécanique à trois modes
et refroidissement d'un micro-résonateur
mécanique**

M.	François BONDU	Rapporteur
Mme	Caroline CHAMPENOIS	Examinatrice
M.	Pierre-François COHADON	Membre invité
M.	Antoine HEIDMANN	Directeur de thèse
Mme	Agnès MAITRE	Présidente
M.	David VITALI	Rapporteur

Remerciements

Ce travail de thèse m'a offert l'occasion à la fois d'approfondir des sujets passionnants et stimulants et de rencontrer des personnes aux qualités rares, qui m'ont laissé quelque chose de précieux tant au niveau personnel que scientifique et que je tiens à remercier.

Ce travail de thèse à été réalisé dans l'équipe Mesure et Bruits Fondamentaux du Laboratoire Kastler Brossel à l'Université Pierre et Marie Curie. Antoine Heidmann a encadré mon travail avec patience, grande disponibilité et dévouement. Pendant ces années, j'ai pu bénéficier de ses grandes connaissances, de sa rigueur scientifique et de son enthousiasme, de son soutien ainsi que de son humour et de sa cordialité. Il m'est impossible d'énumérer ici tout ce qu'il m'a transmis, mais pour tout ça je tiens à lui adresser mes plus sincères et chaleureux remerciements.

Je tiens à remercier également tous les autres membres de l'équipe pour l'ambiance conviviale et stimulante (ainsi que pour la plus belle fête-surprise que j'aie jamais eue!). Pierre-François Cohadon a été la première personne qui m'a accueillie au Labo (et dans le bureau et à Paris) : je lui suis reconnaissante pour avoir suivi de si près ce travail, pour sa disponibilité et son soutien tout au long de la thèse, pour son amitié, sa bonne humeur et son regard optimiste qui m'ont aidée dans plus d'une occasion. Merci également pour la relecture attentive et critique de ce manuscrit.

Un grand merci à Tristan Briant pour la disponibilité, la patience et la compétence avec lesquelles il a toujours répondu à mes questions et demandes d'aide de tout genre, ainsi que pour le programme du moteur pas-à-pas.

Merci également à Aurélien Kuhn, Pierre Verlot, Alexandros Tavernarakis, Slavek Gras, Thomas Antoni, Michaël Bahriz, Jean Teissier, Thomas Caniard et Julien Le Bars, avec lesquels j'ai partagé joies et déceptions, enthousiasme et fatigue du travail expérimental et qui ont été pour moi un stimulant et un soutien dans de nombreuses occasions. Je leur souhaite bon vent !

J'adresse un chaleureux remerciement à Olivier Arcizet qui a guidé mes premiers pas en salle de manip (ainsi que sur le terrain de frisbee *ultimate*) pour le plaisir que j'ai eu à travailler avec lui. Sa passion pour le travail expérimental et pour la science, ses grandes

qualités scientifiques et ses rares qualités humaines ont été pour moi un soutien et une source d'inspiration quotidiens.

Un grand merci à Haixing Miao, qui a passé un mois en visite dans notre équipe, pour sa curiosité et son enthousiasme pour notre expérience à trois modes, ainsi que pour le programme de calcul du recouvrement spatial. Merci aussi à Danny Price et Mehdi Lallouache qui ont apporté leur aide et leur enthousiasme à la mise au point des expériences.

Je remercie David Blair et Chunnong Zhao pour les discussions enrichissantes et les échanges que nous avons eus dans la réalisation de l'expérience à trois modes.

Je tiens à remercier Isabelle Roch-Jeune de l'IEMN et Christophe Michel, Laurent Pinard et Raffaele Flaminio du LMA pour leur compétence et leur professionnalisme dans la réalisation des micro-résonateurs et de leur coating.

Je suis très reconnaissante à Agnès Maître et Caroline Champenois pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse, pour leur intérêt vis-à-vis du manuscrit et leurs conseils. Je remercie également François Bondu et David Vitali qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse pour la relecture attentive du manuscrit.

Je remercie Paul Indelicato de m'avoir accueilli au Laboratoire Kastler Brossel, ce qui m'a permis de profiter de l'ambiance chaleureuse et stimulante de l'antenne Jussieu. Merci d'abord au secrétariat et aux équipes techniques, à Monique Granon, Laëtitia Morel, Geneviève Léonis, Jean-Michel Isac, Pascal Travers, Saysavanh Souramasing, Gaël Coupin, Jean-Pierre Okpizs, Brigitte Delamour, Serge Begon et Corinne Poisson, qui m'ont toujours aidée avec compétence, patience et le sourire aux lèvres. Je remercie sincèrement tous les doctorants et les chercheurs du laboratoire : leurs conseils, enseignements, prêts de matériel, discussions, ainsi que les pauses café, tous les moments passés ensemble en dehors du laboratoire et leur amitié ont été pour moi une aide précieuse, et aussi un soutien pour garder le moral. Un grand merci en particulier à Nicolas Treps, pour m'avoir accueilli dans son bureau, Julien Laurat, Oxana Mishina, Olivier Pinel, Jean-François Morizur, pour les fleurs et les chocolats qu'il m'a apporté une fois..., Godefroy Lemenager, Michaël Schermann, Claire Adrados, Alberto Amo, Sidney Burks, Jérémie Ortalo, Renné Camara-Medeiros, Francesco Scazza, Roman Schmeissner, Pu Jian, Lucile Veissier, Antoine Canaguier-Durand, Rym Bouchendira, Vera Giulia Sala, Olivier Morin, Alexandre Vallette, Csilla Szabo-Foster, Alex Gumberidze, Vincent Delaubert, Charles Leyder, Sophie Schlessler, Estefania de Mirandes, Irina Pirozhenko, Sanat Avazbaev, Jean-Philippe Karr, Brahim Lamine, Saïda Guellati-Khelifa, Alberto Bramati, Eric-Olivier Le Bigot, Stéphane Boucard, Claude Fabre, Elisabeth Giacobino, Michel Pinard, Martino Trassinelli, Marco Romanelli et Francesco Intravaia, pour avoir démarré le projet QuFAR, dont j'ai bénéficié au début de ma thèse.

Je tiens à remercier du fond du cœur Benoît et sa bonne humeur contagieuse, Gabriel pour tous les échanges enrichissants, Jean et Natacha pour la confiance et l'amitié qu'ils m'ont donnés (et pour cette belle soirée au musée d'Orsay...), Delphine pour sa spontanéité

et sa chaleur, Emmanuelle et Esther qui m'ont toujours fait sentir chez moi, Mauro et Elisa, Emiliano, Tamara qui sait toujours écouter et conseiller, Giulia, Alessandra, *il mio gemellino* Pietro, Ferruccio et Moreno, avec qui j'ai partagé les mois de rédaction, et Antonino, pour l'accueil familial à Paris-Montrouge, pour toutes les discussions et pour le vélo aussi ; j'ai partagé plus que du temps avec Piernicola et Claudia, Riccardo, Virginia et Gianni, . . . je suis heureuse qu'ils fassent partie de ma vie.

Pendant ces années j'ai eu le plaisir de faire des vacances à l'UPMC et à l'Université d'Evry : je tiens à remercier Alexandra Fragola et Laurent Hilico pour m'avoir donné la possibilité de découvrir cet aspect de la recherche scientifique.

J'ai également eu l'honneur et le plaisir de rencontrer Carlos Navarrete-Benloch et German de Valcarcel : les échanges scientifiques et personnels avec eux ont été pour moi source de motivation et d'enrichissement (musicale aussi, grâce aux Versus5).

Je tiens à remercier Paolo Tombesi, David Vitali, Gianni Di Giuseppe, Marco Luca-marini, Paolo Amico, Angela Trapananti et Daniela Paolotti pour m'avoir fait découvrir le monde de l'optique quantique et pour m'avoir conseillée dans le choix de la thèse. Un grand merci également à Sara, Andrew et Luca.

Un remerciement "collectif" aux amis en Italie pour leur soutien à distance, à Esa qui m'a accompagnée quotidiennement et à Paolo car sans lui cette thèse n'aurait même pas été commencée.

Merci à Fortunato, Domenica, Ilaria, Vito, qui m'ont beaucoup encouragée surtout pendant la rédaction, et à ma famille au complet (je pense surtout à *nonno Mario* et à Sara, à qui je souhaite une bonne thèse, et à *nonna Antonietta* pour ses pensées quotidiennes et sa sollicitude).

Mes derniers remerciements vont à mes parents et à ma sœur, qui ont suivi de près tous mes pas dans le monde de l'optomécanique et dans Paris avec transport, patience et amour et qui m'ont constamment encouragée au cours de ces années ; merci à *papà* toujours présent même si "derrière le caméscope", à *mamma* dont la force et l'enthousiasme lui ont valu un doctorat *honoris causa* et ont ressuscité ma petite plante, et à Laura qui est toujours de mon côté de manière critique et stimulante, pour son soutien déterminé et affectueux pendant la rédaction.

Et merci à Giuseppe avec qui j'ai *couru les rues, battu la campagne et fendu les flots* et qui a été toujours là pour me supporter avec force dans les moments difficiles et pour m'encourager à *oser voler* plus haut. Sa confiance en moi, son amour et sa volonté ont rendu ces années beaucoup plus légères ; sa passion pour la science et la recherche (et pour la mer !) et sa rigueur restent une source d'inspiration pour moi.

Table des matières

Introduction	1
1 Observer le régime quantique d'un micro-miroir	5
1.1 L'oscillateur harmonique mécanique	7
1.1.1 Quantification des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique	7
1.1.2 Couplage de l'oscillateur avec l'environnement	9
1.1.3 Les fluctuations de position de l'oscillateur	11
◇ Le théorème fluctuations-dissipation	11
◇ Le spectre de bruit de position de l'oscillateur	13
1.2 La mesure interférométrique optique	16
1.2.1 Mesure optique de position	16
◇ Mesure de déplacements avec une cavité Fabry-Perot	16
1.2.2 Description quantique du champ électromagnétique	19
◇ Le méthode semi-classique	19
1.2.3 Sensibilité de la mesure de petits déplacements	22
1.2.4 L'action en retour de la mesure : le bruit de pression de radiation	24
1.3 Des micro-miroirs pour observer le régime quantique	26
1.3.1 Des résonateurs optomécaniques de toute taille	26
1.3.2 Couplage optomécanique avec des micro-miroirs	29
1.3.3 Réalisation des micro-miroirs	32
◇ Gravure des micro-résonateurs	32
◇ Le traitement optique	34
2 Le couplage optomécanique avec un micro-miroir	37
2.1 Description mécanique du micro-miroir	38
2.1.1 Équation élastique et modes propres de vibration d'un résonateur	38
2.1.2 Dynamique d'un résonateur soumis à une force et à la dissipation	40
◇ Effet d'une force	41

◇ Effet de la dissipation	41
2.2 Les champs électromagnétiques dans une cavité Fabry-Perot	43
2.2.1 Le couplage optomécanique	43
◇ Effet de la déformation du résonateur sur le champ en cavité.	43
◇ Susceptibilité et masse effectives du résonateur	45
2.2.2 Évolution du champ dans une cavité	46
◇ État stationnaire des champs	48
2.2.3 Mesure de petits déplacements	50
◇ Évolution des quadratures dans la cavité	50
◇ Sensibilité de la mesure	51
2.2.4 Adaptation spatiale du faisceau incident	52
2.3 Effets de la pression de radiation	54
2.3.1 Effets statiques et équivalence avec un milieu non-linéaire	54
2.3.2 Fluctuations quantiques de la pression de radiation et limite quantique standard	55
2.4 Refroidissement actif de l'oscillateur	58
2.4.1 Principe de la friction froide	58
2.4.2 Limite quantique de la friction froide	62
2.5 Refroidissement par pression de radiation	64
2.5.1 Le couplage optomécanique dans une cavité désaccordée	65
2.5.2 La dynamique du résonateur	67
◇ Terme dissipatif	68
◇ Terme conservatif.	70
◇ Spectre de bruit et limite quantique du refroidissement	70
◇ Mise en évidence expérimentale	72
2.5.3 Analogie avec le refroidissement laser	73
3 Montage expérimental et mesures à température ambiante	75
3.1 Description générale	77
◇ Description du montage optique.	78
3.2 La source laser	80
3.2.1 Description du laser	80
3.2.2 La cavité de filtrage	81
◇ Propriétés optiques de la cavité	82
◇ Asservissement par tilt-locking	83
3.3 La cavité de mesure et l'enceinte à vide	86
3.3.1 La cavité de mesure	86
3.3.2 L'enceinte à vide	88
3.4 Asservissement du laser et mesure de petits déplacements	90

3.4.1	Description du principe du Pound-Drever-Hall	90
3.4.2	Mise en œuvre expérimentale de l'asservissement du laser	93
3.4.3	Mesure de déplacements avec la technique Pound-Drever-Hall	94
3.5	Spectre de bruit thermique à température ambiante	97
3.5.1	Le spectre de bruit thermique	97
	◇ Structure des modes propres : la méthode des éléments finis	100
3.5.2	Le spectre de bruit en fonction de la pression	101
3.5.3	Spectre de bruit thermique à haute fréquence	103
3.6	Test mécanique des micro-résonateurs	105
3.6.1	Mesure du déplacement du faisceau avec une photodiode à quadrants	105
3.6.2	Tests mécaniques d'un micro-résonateur avec un interféromètre de Michelson	108
4	Bruit thermique à température cryogénique et refroidissement laser	111
4.1	Description du cryostat à He ₄ et de la nouvelle cavité	114
4.1.1	Le cryostat à He ₄	114
	◇ Contraintes sur le système cryogénique	114
	◇ Caractéristiques du cryostat choisi	115
4.1.2	Une nouvelle cavité compacte	117
	◇ Description de la cavité	117
	◇ Descente en température.	119
4.2	Mesure du bruit thermique à température cryogénique	122
	◇ Mesure des propriétés optiques de la cavité	122
	◇ Le spectre de bruit thermique à température cryogénique.	123
	◇ Caractéristiques des modes mécaniques.	125
	◇ Calibration des spectres à basse température.	126
4.3	Biréfringence de la cavité	130
4.3.1	Mise en évidence des effets de biréfringence	130
	◇ La biréfringence de la cavité.	130
	◇ Observation des effets de la biréfringence sur le pic d'Airy et le bruit thermique.	132
4.3.2	Étude théorique des effets de la biréfringence	135
4.4	Refroidissement laser à température cryogénique	140
4.4.1	Montage expérimental et mesure du désaccord	140
4.4.2	Résultats expérimentaux	142
5	Interaction paramétrique à trois modes : introduction théorique	147
5.1	Les avantages du couplage à trois modes	149
	◇ Double intérêt du couplage à trois modes.	150

◇	Expériences d'interaction à trois modes	151
5.2	Refroidissement par couplage à trois modes	153
◇	L'hamiltonien du système	153
◇	Evolution du système et dynamique du résonateur	156
◇	Avantages et inconvénients du couplage à 3 modes	160
◇	Valeur attendue pour le gain paramétrique	161
5.3	Une cavité accordable pour le couplage à trois modes	163
5.3.1	Les cavités quasi-dégénérées	163
◇	La dégénérescence transverse d'une cavité	163
◇	Les cavités confocale et semi-confocale	165
◇	Ajuster l'écart entre modes quasi-dégénérés	167
5.3.2	Le recouvrement spatial	169
◇	Calcul de l'intégrale de recouvrement spatial	172
◇	Recouvrement spatial avec un faisceau non-parfaitement centré	173
6	Réalisation expérimentale du couplage à trois modes	175
6.1	Réalisation d'une cavité optique quasi-dégénérée	177
6.1.1	Description de la cavité	177
6.1.2	Description du montage général	179
6.1.3	Premières mesures	181
6.1.4	Un micro-miroir plus fin	182
◇	Le nouveau micro-miroir	182
◇	La cavité	184
6.2	Caractérisations optique et mécanique de la cavité et du miroir mobile	186
6.2.1	Caractérisation optique de la cavité	186
◇	Observation des modes de la cavité	186
◇	Variation de l'écart $\Delta\nu$ entre modes en fonction de la longueur L	188
◇	Finesse et bande passante	188
◇	Stabilité de la cavité	190
6.2.2	Caractérisation des modes mécaniques	190
◇	Spectre de bruit thermique	191
◇	Cartographie des modes	193
6.3	Mise en évidence du couplage optomécanique à trois modes	194
6.3.1	Spectres de bruit thermique pour différents désaccords	194
6.3.2	Refroidissement dans le régime anti-Stokes	197
6.3.3	Chauffage dans le régime Stokes	201
	Conclusion	205

Annexe	211
A Recouvrement spatial pour une cavité semi-confocale	211
B Recouvrement spatial pour une cavité quasi semi-confocale	214

Introduction

Les miroirs sont couramment utilisés dans de nombreuses expériences en physique, de l'astronomie à la microscopie : ils sont employés pour focaliser la lumière provenant d'une source astronomique, pour diriger des faisceaux laser, pour manipuler et refroidir des atomes, ou encore pour détecter la flexion d'un microlevier ou parcourir la surface d'un échantillon en microscopie à force atomique. Dans la plupart des cas, on néglige les effets que la réflexion de la lumière peut avoir sur le miroir lui-même. Cependant, ces effets deviennent importants dans certaines expériences d'optique ultra-sensibles, comme celles liées à la détection des ondes gravitationnelles ou à l'optomécanique.

L'idée que tout objet exposé à une radiation électromagnétique subit une force liée au transfert d'impulsion de la lumière fut déduite théoriquement par Maxwell en 1871 [109] : la force de pression de radiation F_{rad} exercée par une source lumineuse de puissance P est inversement proportionnelle à la vitesse de la lumière, selon la relation $F_{\text{rad}} = 2P/c$. Elle est donc extrêmement faible, de l'ordre du nanonewton pour un faisceau de 1 W, et souvent négligeable par rapport aux vibrations mécaniques ou aux fluctuations thermiques des miroirs. Ses effets ont été mis en évidence pour la première fois dans une expérience de laboratoire au début du vingtième siècle par Lebedev en 1901 [98], puis par Nichols et Hull en 1903 [119], mais c'est seulement à partir des années 70 que l'on a commencé à utiliser la pression de radiation pour manipuler, piéger et refroidir des atomes et des molécules [9, 35].

Dans le cadre d'une description corpusculaire de la lumière, la force de pression de radiation apparaît comme une conséquence de l'échange d'impulsion $2\hbar k$ à chaque réflexion d'un photon sur le miroir. Dans les cavités optiques de très grande finesse, la pression de radiation d'un photon est alors amplifiée par le grand nombre d'aller-retours dans la cavité, et l'interaction entre la lumière et un miroir peut devenir très importante. Au cours des dernières années, il est devenu envisageable d'utiliser ce *couplage optomécanique* pour refroidir des résonateurs mécaniques de taille macroscopique, à l'instar du refroidissement laser des atomes. Depuis les premières démonstrations de refroidissement en 2006 [5, 60, 134], les effets du couplage par pression de radiation ont été mis en évidence sur un grand

nombre de systèmes de tailles très différentes. Une revue des principaux dispositifs peut être trouvée dans les références [74, 88, 107, 33].

Cette technique peut en principe être utilisée pour refroidir un résonateur mécanique jusqu'à son état quantique fondamental [158, 106], ce qui permettrait de mettre en évidence le comportement quantique d'un objet macroscopique et de manipuler son état. Ces possibilités expliquent l'essor important que connaît le domaine de l'optomécanique quantique, et plusieurs conséquences du couplage optomécanique sont aujourd'hui étudiées. En plus du refroidissement laser et de l'observation de l'état fondamental d'un résonateur mécanique, le couplage optomécanique est responsable d'un effet d'action en retour (*back action*) dans les mesures optiques telles que les mesures interférométriques : les fluctuations quantiques d'intensité du faisceau laser induisent des fluctuations de pression de radiation et de la position des miroirs de l'interféromètre, qui peuvent conduire à une limite de sensibilité de la mesure [27, 81]. Par ailleurs, une cavité dont un miroir se déplace sous l'effet de la pression de radiation est analogue à une cavité contenant un milieu non linéaire de type Kerr et pourrait ainsi être utilisée pour produire un état comprimé de la lumière par un moyen purement mécanique [52], ou encore pour réaliser une mesure quantique non-destructive (QND) de l'intensité d'un faisceau lumineux [80, 75].

Pour atteindre le régime quantique dans lequel les fluctuations de point zéro du résonateur deviennent prédominantes, l'énergie thermique du résonateur doit être plus faible que son quantum d'énergie $\hbar\Omega_m$, où Ω_m est sa pulsation de résonance. Cela signifie que sa température T doit être inférieure à une température quantique T_Q définie par $k_B T_Q = \hbar\Omega_m$. Atteindre le régime quantique est donc d'autant plus facile que la fréquence de résonance est élevée : un résonateur oscillant à une fréquence de 1 GHz se retrouve dans son état quantique fondamental à une température de 50 mK, tandis qu'un oscillateur à 1 MHz nécessite une température inférieure à 50 μ K. Par contre, nous verrons que les fluctuations de position résiduelles sont caractérisées par une dispersion $\Delta x_Q = \sqrt{\hbar/(2M\Omega_m)}$, d'autant plus grande que la masse et la fréquence du résonateur sont faibles : un résonateur de 100 μ g oscillant à 10 MHz a une dispersion quantique de position à l'échelle de l'attomètre (10^{-18} m).

L'intérêt des dispositifs optomécaniques et des méthodes de mesure optiques est leur grande sensibilité dans la mesure des déplacements du résonateur, mais cela nécessite d'utiliser un résonateur de taille suffisante pour être compatible avec une cavité optique de grande finesse. On s'attend donc à devoir utiliser des dispositifs optomécaniques de taille caractéristique de quelques dizaines de microns ou plus, dont la fréquence de résonance est typiquement de l'ordre de quelques mégahertz et la température quantique d'une centaine de microkelvins. Cette température ne peut être atteinte qu'en réalisant un refroidissement par pression de radiation du résonateur, préalablement thermalisé à température cryogénique avec un cryostat.

Les objectifs de ce travail de thèse ont donc été d'une part de démontrer la possibilité de combiner mesures optiques de haute sensibilité et cryogénie, et d'autre part d'étudier un nouveau mécanisme de refroidissement par couplage optomécanique. Nous avons ainsi placé une cavité de grande finesse avec un micro-miroir dans un cryostat à circulation d'hélium liquide, mesuré son spectre de bruit thermique, et réalisé un refroidissement laser du micro-résonateur. Nous avons également réalisé un nouveau montage afin de mettre en évidence un couplage optomécanique à trois modes, où la pression de radiation couple le mode mécanique du résonateur avec deux modes optiques simultanément résonnants dans la cavité. Par un transfert de photons d'un mode optique à l'autre, assisté par l'absorption d'un phonon du résonateur (processus anti-Stokes), on réalise un mécanisme de refroidissement en principe capable d'atteindre le régime quantique du résonateur et plus efficace que le refroidissement laser à deux modes.

Dans le premier chapitre, nous rappelons les propriétés de l'oscillateur harmonique quantique et comment caractériser son bruit thermique et ses fluctuations de point zéro à l'aide du théorème fluctuations-dissipation. Nous présentons ensuite le principe de la mesure optique de petits déplacements, qui a une sensibilité suffisante pour espérer observer les fluctuations de point zéro d'un résonateur mécanique. Nous faisons également un tour d'horizon des expériences d'optomécanique qui se sont développées au cours des dernières années, en vue d'observer le régime quantique d'un résonateur mécanique, et nous décrivons finalement les micro-miroirs utilisés comme miroir mobile dans nos cavités.

La description du couplage optomécanique entre un micro-miroir et un champ électromagnétique dans une cavité à miroir mobile fait l'objet du deuxième chapitre. Nous décrivons d'abord la dynamique du micro-résonateur, puis les fluctuations quantiques des champs en utilisant la méthode semi-classique, et nous nous intéressons en particulier à la manière dont ces fluctuations sont couplées à la déformation de la surface du micro-miroir. Cela nous permet de déterminer la sensibilité d'une mesure de petits déplacements à l'aide d'une cavité Fabry-Perot, ainsi que de mettre en évidence un certain nombre de conséquences du couplage optomécanique. Nous analysons en particulier la possibilité de refroidir le micro-miroir par refroidissement laser dans une cavité désaccordée : dans le cas où la fréquence de résonance mécanique est grande devant la bande passante de la cavité, cette technique permet en principe de refroidir un résonateur jusqu'à son état fondamental, ce qui en fait un outil essentiel pour la mise en évidence du régime quantique du micro-résonateur. Nous examinons aussi la possibilité de refroidir le résonateur à l'aide d'une boucle de contre-réaction provoquant un effet de friction froide, comme cela a été démontré expérimentalement au laboratoire avec un miroir mobile [37] et avec un micro-résonateur [5].

Le troisième chapitre est dédié à la description de l'ensemble des éléments du dispositif

expérimental utilisé au cours de cette thèse, composé de trois blocs principaux : une source laser accordable et filtrée spatialement, la cavité de grande finesse dans laquelle se trouve le micro-résonateur, et le système de détection du champ réfléchi qui permet à la fois de mesurer les déplacements du résonateur et d'asservir la fréquence du laser sur la résonance de la cavité. Nous présentons les mesures de bruit thermique que nous avons réalisées à la température ambiante avec ce dispositif, puis nous décrivons deux montages expérimentaux plus simples, où la réponse du résonateur à une excitation est mesurée par une photodiode à quadrants ou par interférométrie, et qui ont permis de déterminer les propriétés mécaniques des micro-résonateurs sans avoir à les monter dans une cavité.

Le chapitre 4 est consacré aux travaux réalisés pour combiner cryogénie et refroidissement laser. Une nouvelle cavité, compatible avec les opérations cryogéniques, est placée à l'intérieur d'un cryostat à He_4 . Nous avons refroidi la cavité à une température cryogénique de l'ordre de 20 K et ensuite réduit la température du micro-résonateur par refroidissement laser jusqu'à environ 6 K. Nous analysons également les effets de la biréfringence de la cavité à basse température, qui peuvent modifier et limiter le refroidissement du résonateur.

La dernière partie de ce manuscrit est dédiée à la description d'une expérience de refroidissement laser du micro-résonateur en régime de bandes latérales résolues, qui utilise une interaction à trois modes (deux modes optiques et un mode mécanique) visant à améliorer l'efficacité du processus. Dans le chapitre 5, nous décrivons théoriquement ce couplage à trois modes et montrons ses avantages dans le cadre du refroidissement laser. Nous détaillons ensuite le principe d'une cavité dont la différence de fréquence entre deux modes optiques peut être précisément ajustée à la fréquence de résonance mécanique du micro-résonateur. La construction d'une telle cavité nous a permis de mettre en évidence pour la première fois une interaction paramétrique à trois modes, en observant une variation de la dynamique du micro-miroir à l'aide des mesures des spectres de bruit thermique. Les résultats de ces observations sont résumés dans le sixième chapitre : nous avons observé un refroidissement du micro-résonateur jusqu'à une température de 90 K environ. En accordant la cavité sur le processus à trois modes inverse, qui correspond à la création d'un phonon par transfert d'un photon d'un mode à l'autre (processus Stokes), nous avons également démontré un chauffage du résonateur. Un tel effet est attendu dans les futures générations d'interféromètre gravitationnel, et pourrait conduire à une instabilité paramétrique de ces détecteurs.

Observer le régime quantique d'un micro-miroir

Ce premier chapitre présente les motivations générales de mon travail de thèse et les principes de base des expériences que j'ai conduites. Le régime quantique d'un objet macroscopique tel qu'un micro-résonateur mécanique peut se comprendre en assimilant ce dernier à un oscillateur harmonique. La première section présente ainsi une description quantique de l'oscillateur harmonique, caractérisée par la quantification de ses niveaux d'énergie et par la présence de fluctuations quantiques de position et d'impulsion, non nulles même dans l'état fondamental de l'oscillateur.

La mise en évidence de ces fluctuations quantiques nécessite de placer le résonateur dans un état bien défini, comme par exemple son état fondamental. Or un tel système mécanique est couplé à son environnement et se trouve à l'équilibre thermique, donc dans un mélange d'état qui dépend de sa température T . J'introduirai ainsi le théorème fluctuations-dissipation, qui permet de relier les fluctuations du résonateur au couplage de l'oscillateur avec son environnement. Placer le résonateur dans son état quantique fondamental nécessite d'abaisser sa température, et nous verrons dans le chapitre 2 comment on peut refroidir un résonateur mécanique en le couplant à des faisceaux lasers.

L'observation du régime quantique d'un micro-résonateur mécanique nécessite aussi un dispositif de mesure capable de détecter les très petites fluctuations de position résiduelles dans l'état fondamental. Nous montrons dans la section 1.2 que cela peut être réalisé par interférométrie optique, notamment en utilisant le micro-résonateur comme un miroir dans une cavité Fabry-Perot. Nous décrivons le principe de la mesure et déterminons sa sensibilité, essentiellement limitée par le bruit quantique dans la mesure et par l'action en retour due à la pression de radiation du faisceau lumineux sur le résonateur.

Je présenterai enfin dans la section 1.3 quelques systèmes utilisés dans des expériences qui visent à mettre en évidence l'état quantique fondamental d'un résonateur mécanique, en insistant sur les dispositifs constitués de micro-miroirs qui peuvent se coupler efficacement à la lumière dans une cavité optique. Ce chapitre se termine par une présentation des micro-miroirs que j'ai utilisés au cours de ma thèse.

1.1 L'oscillateur harmonique mécanique

L'étude de l'oscillateur harmonique à une dimension joue un rôle fondamental en physique car de nombreux systèmes peuvent être décrits au voisinage d'une position d'équilibre stable par les équations d'un oscillateur harmonique, dans la limite des petites oscillations. De nombreux phénomènes sont donc formellement équivalents entre eux : les oscillations d'un pendule ou d'un circuit LC, les vibrations des atomes d'un réseau cristallin (les phonons), les modes d'un champ électromagnétique dans une cavité...

Il semble donc important de commencer ce chapitre introductif par une description quantique de l'oscillateur harmonique libre à une dimension. Nous étudierons ensuite comment ses propriétés physiques sont modifiées par le couplage avec un bain thermique et finalement, nous introduirons le spectre de bruit de position, qui sera la grandeur expérimentale à laquelle on aura accès. Nous verrons en particulier comment le bruit thermique est relié à la température par le théorème fluctuations-dissipation.

1.1.1 Quantification des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique

En mécanique classique, le mouvement d'un objet de masse M soumis à un potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2} kx^2$ correspond à une oscillation autour de sa position d'équilibre $x = 0$ avec une pulsation

$$\Omega_m = \sqrt{\frac{k}{M}}, \quad (1.1)$$

et une amplitude qui dépend des conditions initiales du système. En mécanique quantique [38], les grandeurs classiques position x et impulsion p sont remplacées par les observables \hat{X} et \hat{P} , qui vérifient la relation de commutation $[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$. L'opérateur hamiltonien du système est obtenu simplement en substituant ces observables dans l'expression classique de l'énergie totale du système :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} k \hat{X}^2. \quad (1.2)$$

Il est commode d'introduire les opérateurs d'annihilation et de création, définis à partir de combinaisons linéaires de \hat{X} et \hat{P} :

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{M\Omega_m}{2\hbar}} \left(\hat{X} + i \frac{\hat{P}}{M\Omega_m} \right), \quad (1.3)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{M\Omega_m}{2\hbar}} \left(\hat{X} - i \frac{\hat{P}}{M\Omega_m} \right). \quad (1.4)$$

Ces opérateurs vérifient la relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ et permettent d'écrire le

hamiltonien sous la forme canonique :

$$\hat{H} = \hbar\Omega_m \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (1.5)$$

L'opérateur $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ a les mêmes vecteurs propres que \hat{H} , donc l'étude des solutions de l'équation aux valeurs propres de \hat{H} est équivalente à l'étude des valeurs propres de \hat{N} . Il est possible de montrer que les valeurs propres de \hat{N} sont les entiers naturels[38]. Le spectre de l'oscillateur harmonique est donc lui aussi discret et prend les valeurs :

$$E_n = \hbar\Omega_m \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad \text{avec } n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

Les niveaux d'énergie sont donc séparés d'un écart constant et égal à $\hbar\Omega_m$ et sont non-dégénérés. L'état fondamental possède une énergie moyenne non nulle et égale à $\hbar\Omega_m/2$ (voir la figure 1.1), ce qui est une propriété caractéristique de l'oscillateur harmonique quantique. En effet, l'oscillateur classique est dans son état de moindre énergie lorsque les énergies potentielle et cinétique sont nulles simultanément.

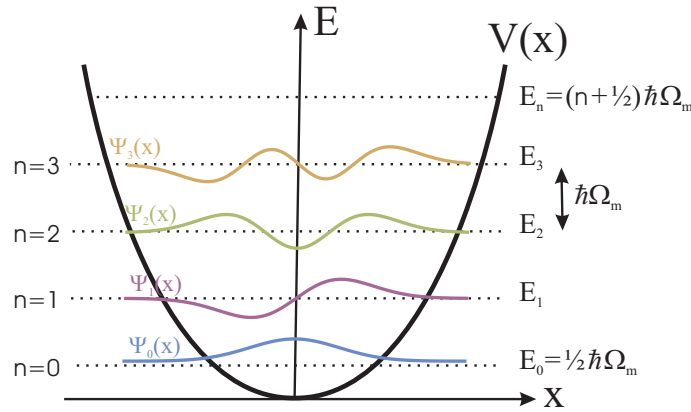


FIGURE 1.1 – Potentiel, niveaux d'énergie et profil des premières fonctions d'onde d'un oscillateur harmonique à une dimension.

On peut calculer les différents états propres du hamiltonien. Pour l'état fondamental associé à l'énergie minimale E_0 , on trouve une fonction d'onde qui a une extension spatiale non nulle : la densité de probabilité de présence est une gaussienne dont la position et l'impulsion moyennes sont nulles, $\langle \hat{X} \rangle = \langle \hat{P} \rangle = 0$, mais avec des écarts quadratiques moyens, également appelés fluctuations de point zéro, égaux à :

$$\Delta \hat{X}^2 = \frac{\hbar}{2M\Omega_m} \quad \text{et} \quad \Delta \hat{P}^2 = \frac{M\hbar\Omega_m}{2}. \quad (1.7)$$

A la différence du cas classique où l'énergie, la position et l'impulsion peuvent s'annuler simultanément, l'état fondamental d'un oscillateur quantique possède alors une énergie non

nulle. La différence entre comportements classique et quantique trouve son origine dans l'inégalité de Heisenberg, qui peut être écrite à partir des équations (1.7) sous la forme $\Delta\hat{X} \cdot \Delta\hat{P} \geq \hbar/2$. Cela indique que la position et l'impulsion de l'oscillateur quantique ne peuvent pas être connues de manière précise simultanément et que l'état fondamental correspond à l'état où la somme des énergies cinétique et potentielle est la plus faible possible.

Pour conclure, il est intéressant de donner un ordre de grandeur typique de l'extension spatiale de la fonction d'onde dans l'état fondamental : pour un oscillateur de masse 1 kg oscillant à une fréquence de 1 Hz, on trouve que $\Delta\hat{X}$ est de l'ordre de 10^{-18} m seulement. Etant donné que $\Delta\hat{X}$ ne dépend que du produit $M\Omega_m$, on arrive à la même valeur pour un microrésonateur de masse 1 mg oscillant à 1 MHz.

1.1.2 Couplage de l'oscillateur avec l'environnement

Tout système physique réel n'est jamais vraiment isolé mais il est couplé à son environnement ; dans cette partie et dans la suivante nous prendrons en considération ce couplage et étudierons les propriétés d'un oscillateur harmonique réel, en équilibre thermodynamique avec un bain thermique à la température T.

Le hamiltonien total de ce système est la somme du hamiltonien de l'oscillateur libre \hat{H} , du hamiltonien du bain thermique \hat{H}_b et d'un hamiltonien \hat{H}_{int} qui traduit le couplage entre les deux : $\hat{H}_{\text{tot}} = \hat{H} + \hat{H}_b + \hat{H}_{\text{int}}$. L'état propre de ce système ne correspond plus à l'état propre d'un oscillateur libre, puisque le couplage empêche de factoriser l'état entre oscillateur et environnement. Du fait de la nature statistique de la description du thermostat, cet état sera un mélange statistique des états de l'oscillateur libre, mélange caractérisé par l'opérateur densité :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} e^{-\hat{H}/k_B T}, \quad (1.8)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et Z la fonction de partition :

$$Z = \text{Tr} \left(e^{-\hat{H}/k_B T} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n+1/2)\hbar\Omega_m/k_B T} = \frac{e^{-\hbar\Omega_m/2k_B T}}{1 - e^{-\hbar\Omega_m/k_B T}}. \quad (1.9)$$

Nous pouvons calculer l'énergie moyenne de l'oscillateur, qui s'écrit :

$$\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr} \left(\hat{H} \rho \right) = \hbar\Omega_m \left(n_T + 1/2 \right), \quad (1.10)$$

où n_T est le nombre moyen de phonons thermiques de l'oscillateur et vaut :

$$n_T = \frac{1}{e^{\hbar\Omega_m/k_B T} - 1}. \quad (1.11)$$

Sur la figure 1.2 nous avons représenté en trait plein l'énergie moyenne $\langle \hat{H} \rangle$ de l'oscillateur quantique et en pointillés celle de l'oscillateur classique. Pour ce dernier, d'après le théorème d'équipartition de l'énergie, chaque degré de liberté contribue pour $k_B T/2$ à l'énergie moyenne totale ; dans le cas de l'oscillateur harmonique à une dimension, les contributions des énergies potentielle et cinétique s'ajoutent et on obtient :

$$\langle H \rangle_{\text{class}} = k_B T. \quad (1.12)$$

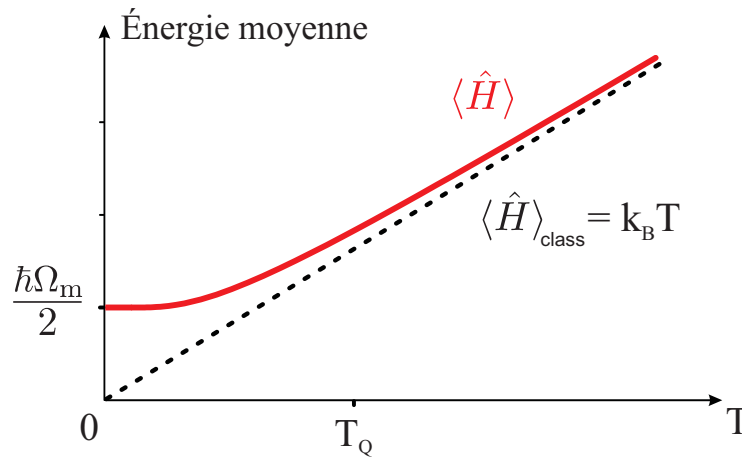


FIGURE 1.2 – Énergie moyenne de l'oscillateur harmonique en fonction de la température T de son environnement. En pointillés la prédiction classique, en trait plein les résultats du calcul quantique.

Nous observons d'abord que pour $T = 0$, $\langle H \rangle = \hbar\Omega_m/2$ tandis que $\langle H \rangle_{\text{class}} = 0$. Cela correspond au fait qu'au zéro absolu l'oscillateur n'est pas dans un mélange statistique d'états, mais dans son état fondamental, avec une énergie non nulle $\hbar\Omega_m/2$. Classiquement, l'oscillateur est par contre immobile dans sa position d'équilibre stable et son énergie est nulle.

Pour des basses températures, telles que $k_B T \ll \hbar\Omega_m$, on a $\langle H \rangle \simeq \hbar\Omega_m/2$ et seule la population de l'état fondamental est appréciable. Par contre, dans la situation inverse où $k_B T \gg \hbar\Omega_m$, $\langle H \rangle$ admet comme asymptote l'énergie de l'oscillateur classique $\langle H \rangle \simeq k_B T$. On peut ainsi définir une *température quantique* par l'expression :

$$k_B T_Q = \hbar\Omega_m. \quad (1.13)$$

Pour une température $T \gg T_Q$, les oscillateurs quantique et classique ont la même énergie moyenne, tandis que pour $T \ll T_Q$ le comportement de l'oscillateur est dominé par ses propriétés quantiques. C'est ce deuxième régime que nous souhaitons observer expérimentalement avec un résonateur mécanique macroscopique.

Remarquons que pour un oscillateur de fréquence de résonance $\Omega_m/2\pi$ de l'ordre du

hertz, la température quantique selon l'équation (1.13) est de l'ordre de 10^{-11} K. Cette condition sur la température impose donc une limitation très sévère sur la fréquence de résonance Ω_m du résonateur, sur laquelle nous reviendrons de manière plus détaillée dans la suite. Notons ici que même pour une fréquence de résonance de 1 MHz, la température quantique correspond à quelques dizaines de microkelvins et reste inaccessible par des moyens cryogéniques traditionnels. Il est alors nécessaire d'utiliser des mécanismes de refroidissement actifs, tels que la friction froide étudiée dans la section 2.4, ou le refroidissement laser dans une cavité désaccordée, présenté dans la section 2.5.

1.1.3 Les fluctuations de position de l'oscillateur

Le couplage avec l'environnement a une autre conséquence sur l'oscillateur, qui consiste à modifier sa dynamique, et notamment son amortissement. Dans cette partie, nous verrons comment l'amortissement est lié au spectre de la force de Langevin thermique, qui rend compte des fluctuations de l'oscillateur. D'une mesure de position de l'oscillateur — qui est la grandeur accessible dans nos expériences, comme nous le montrerons dans la prochaine section — nous pouvons obtenir des informations sur le couplage de l'oscillateur avec l'environnement, sur sa température et ainsi sur son état.

Le théorème fluctuations-dissipation

Le théorème fluctuations-dissipation a été formulé initialement pour un système classique [25], mais il peut être étendu au cas quantique. Dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire [94], lorsqu'on se restreint à de petits déplacements, la position d'un oscillateur dépend linéairement des forces qui lui sont appliquées¹ :

$$x[\Omega] = \chi[\Omega] (F_{\text{ext}}[\Omega] + F_T[\Omega]), \quad (1.15)$$

où $F_T[\Omega]$ est la force de Langevin associée aux fluctuations thermiques de l'oscillateur couplé à son environnement, $F_{\text{ext}}[\Omega]$ est une éventuelle force extérieure supplémentaire et $\chi[\Omega]$ est la susceptibilité mécanique de l'oscillateur. Pour un amortissement de type visqueux, la susceptibilité prend la forme :

$$\chi[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_m^2 - \Omega^2 - i\Omega\Gamma)}, \quad (1.16)$$

1. Les conventions pour relier les grandeurs dans les domaine fréquentiel et temporel sont :

$$x[\Omega] = \int dt x(t) e^{i\Omega t} \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\Omega x[\Omega] e^{-i\Omega t} \quad (1.14)$$

où M est la masse de l'oscillateur, Ω_m sa pulsation de résonance et Γ son taux d'amortissement. D'après le théorème fluctuations-dissipation, le spectre de la force de Langevin F_T est proportionnel à la partie imaginaire de la susceptibilité selon la relation :

$$\mathcal{S}_T[\Omega] = -\frac{2k_B T}{\Omega} \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\chi[\Omega]} \right) = 2M\Gamma k_B T. \quad (1.17)$$

Dans cette équation, le spectre $\mathcal{S}_T[\Omega]$ est défini comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la force de Langevin $F_T(t)$ (théorème de Wiener-Khintchine) :

$$\mathcal{S}_T[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle F_T(t) F_T(t + \tau) \rangle e^{i\Omega\tau}, \quad (1.18)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique sur le bain thermique.

L'équation (1.17) est un cas particulier du théorème fluctuations-dissipation, qui relie la dissipation de n'importe quel système au spectre de la force de Langevin, responsable des fluctuations de ce système. Einstein a été le premier à établir une relation entre l'inverse de la friction et les fluctuations de la vitesse du mouvement Brownien en 1905 [50]. Puis en 1928, Nyquist [120] a montré que le bruit de tension qui apparaît aux bornes d'une résistance est relié à l'impédance de cette dernière (bruit Johnson dans une résistance), c'est-à-dire que le spectre d'une force aléatoire est lié à la dissipation du système.

Le théorème fluctuations-dissipation a été formulé de manière plus générale par Callen et Welton [25]. Il a ensuite été généralisé à tous les systèmes dans le cadre de la réponse linéaire [92] et pour prendre en compte les propriétés statistiques quantiques des fluctuations [94]. Plus récemment [132], ce théorème a été appliqué aux oscillateurs mécaniques à faible dissipation utilisés dans des mesures de précision, de façon à obtenir une description plus précise des mécanismes de pertes dans ces oscillateurs.

Le résultat (1.17) peut être étendu dans le cadre d'une description quantique du système en considérant l'opérateur $\hat{F}_T[\Omega]$ correspondant à la force de Langevin, caractérisé par la relation de commutation suivante :

$$[\hat{F}_T[\Omega], \hat{F}_T[\Omega']] = 2\pi\delta(\Omega + \Omega') 2\hbar M\Gamma\Omega. \quad (1.19)$$

En substituant à l'énergie moyenne classique $k_B T$ l'expression quantique donnée par l'équation (1.10), on trouve que le spectre de l'opérateur de Langevin s'écrit :

$$\mathcal{S}_T[\Omega] = -\hbar \coth \left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T} \right) \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\chi[\Omega]} \right) = M\Gamma \hbar\Omega \coth \left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T} \right). \quad (1.20)$$

Cette expression redonne bien le spectre classique (1.17) à haute température $k_B T \gg \hbar\Omega_m$.

Pour conclure, le théorème fluctuations-dissipation peut être interprété [25] comme la description du lien entre un concept macroscopique, la dissipation, et un microscopique,

les fluctuations d'une force. En effet, un oscillateur sans dissipation peut osciller indéfiniment avec une amplitude constante et il apparaît ainsi comme un système possédant une sorte de "cohérence interne" dans son mouvement périodique. Le couplage avec un bain thermique et les fluctuations stochastiques qui le caractérisent agissent alors sur l'oscillateur en provoquant une dissipation d'énergie, une perte de cohérence, jusqu'à atteindre l'équilibre thermique. La dissipation apparaît donc comme la manifestation macroscopique des fluctuations de la force.

Callen et Welton proposent aussi une analogie intéressante avec la théorie de l'émission spontanée : un atome isolé du rayonnement électromagnétique et placé dans un état excité ne peut pas spontanément retomber dans son état fondamental ; c'est seulement grâce à la quantification du champ en électrodynamique quantique que l'on peut interpréter la transition spontanée d'un atome excité comme une dissipation causée par l'interaction avec les fluctuations du champ électromagnétique dans le vide.

Le spectre de bruit de position de l'oscillateur

Finalement, nous présentons dans la suite le spectre de bruit thermique de position de l'oscillateur à l'équilibre thermodynamique, qui d'après la définition du spectre donnée par l'équation (1.18) s'écrit :

$$\mathcal{S}_x^T[\Omega] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle x_T(t) x_T(t + \tau) \rangle e^{i\Omega\tau} = |\chi[\Omega]|^2 \mathcal{S}_T[\Omega], \quad (1.21)$$

où $x_T(t) = \chi[\Omega] F_T[\Omega]$ [équation (1.15)]. En vertu du principe ergodique, la moyenne statistique d'ensemble est égale à la moyenne temporelle d'une réalisation. Expérimentalement, la moyenne qui apparaît dans l'équation (1.21) est donc la moyenne sur la durée du signal acquis, si le temps de mesure est suffisamment long devant le temps de corrélation du réservoir.

De même, l'écart quadratique moyen $\Delta\hat{X}^2$ défini à partir des niveaux d'énergie de l'oscillateur harmonique quantique (section 1.1.1) correspond à la variance expérimentale² Δx_T^2 , liée au spectre de bruit de position par :

$$\Delta x_T^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \mathcal{S}_x^T[\Omega]. \quad (1.22)$$

Cette variance est égale à l'aire du spectre de bruit thermique de position \mathcal{S}_x^T .

Lorsqu'on considère un oscillateur de faible amortissement, le spectre de position (1.21)

2. La variance expérimentale d'une variable aléatoire x est définie par la relation :

$$\Delta x^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x^2(\tau) d\tau.$$

est très piqué autour de la fréquence de résonance mécanique et le spectre (1.20) de la force de Langevin \mathcal{S}_T peut être approximé par sa valeur prise en $\Omega = \Omega_m$. On obtient alors en utilisant les équations (1.11), (1.16) et (1.20) :

$$S_x^T[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M \left[(\Omega_m^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2 \right]} \hbar \Omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} \right), \quad (1.23)$$

où n_T est le nombre de phonons thermiques à la température T [équation (1.11)]. Pour des températures comparables à la température quantique T_Q [définie par l'équation (1.13)], ce nombre tend vers zéro et seul le terme $1/2$ correspondant aux fluctuations de point zéro reste dans l'équation (1.23). Pour $T \gg T_Q$, le nombre de phonons thermiques vaut $n_T \simeq k_B T / \hbar \Omega_m$ et le spectre de bruit de position, représenté sur la figure 1.3, devient :

$$S_x^T[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M \left[(\Omega_m^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma^2 \Omega^2 \right]} k_B T. \quad (1.24)$$

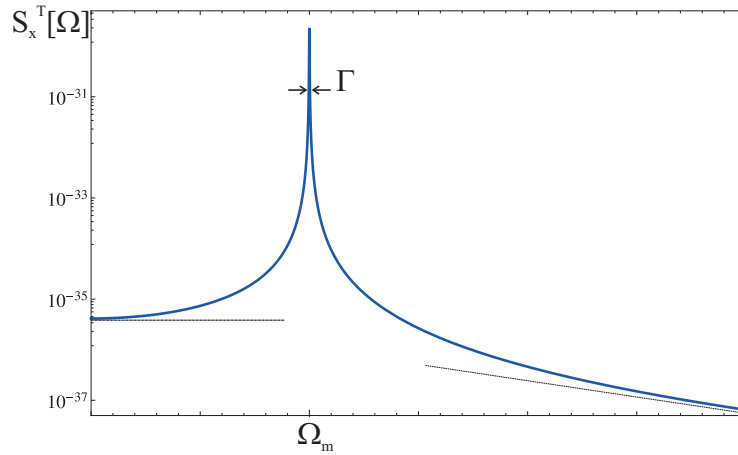


FIGURE 1.3 – Spectre de bruit thermique de position d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω_m et de taux d'amortissement Γ , couplé à un bain thermique à température T .

Le spectre de bruit de position correspond à une réponse lorentzienne au bruit blanc de la force de Langevin thermique ; il est donc très piqué au voisinage de la fréquence de résonance Ω_m , avec une largeur à mi-hauteur égale à Γ . La largeur de la réponse mécanique peut aussi être reliée au facteur de qualité mécanique Q , égal au rapport entre la pulsation mécanique et la largeur de la lorentzienne :

$$Q = \Omega_m / \Gamma. \quad (1.25)$$

Aux basses fréquences, le spectre est indépendant de la fréquence tandis qu'à plus haute fréquence, il présente une décroissance en $1/\Omega^4$. Le niveau de bruit à la fréquence de

résonance vaut :

$$S_x^T[\Omega_m] = \frac{2}{M \Omega_m^2 \Gamma} k_B T. \quad (1.26)$$

Remarquons que ce bruit est inversement proportionnel à la masse de l'oscillateur : un oscillateur ayant une masse faible est donc plus sensible aux fluctuations thermiques et sa réponse mécanique conduit à une amplitude de bruit plus importante. Notons par ailleurs que l'expression (1.26) est obtenue à une température élevée ($T \gg T_Q$), mais il est facile d'écrire à partir de l'équation (1.23) une expression valable pour toute température :

$$S_x^T[\Omega_m] = \frac{\hbar}{M \Omega_m \Gamma} (2n_T + 1). \quad (1.27)$$

La puissance de bruit diminue donc linéairement avec la température, jusqu'à atteindre la température quantique T_Q . A une température plus basse, on a $n_T \ll 1$ et le spectre de bruit de position à $\Omega = \Omega_m$ atteint une valeur limite constante, correspondant aux fluctuations de point zéro :

$$S_x^Q[\Omega_m] = \frac{\hbar}{M \Omega_m \Gamma}. \quad (1.28)$$

Ce comportement du bruit de position peut alors représenter une signature expérimentale du comportement non-classique de l'oscillateur : pour une température petite devant T_Q , la puissance de bruit à la résonance mécanique ne se réduit pas en diminuant la température du système, comme ce serait le cas pour un oscillateur classique.

Une deuxième signature du comportement quantique est donnée par l'écart quadratique moyen des fluctuations de position, défini par l'équation (1.22). Sa valeur peut être obtenue en utilisant l'expression du spectre (1.23) et on trouve :

$$\frac{1}{2} M \Omega_m^2 \Delta x_T^2 = \frac{\hbar \Omega_m}{2} \left(n_T + \frac{1}{2} \right). \quad (1.29)$$

A température élevée $T \gg T_Q$, cette expression se réduit à $\frac{1}{2} k_B T$, qui traduit le théorème d'équipartition de l'énergie. A température plus basse $T \ll T_Q$, la valeur de l'écart quadratique Δx_T^2 devient constante et égale à la variance quantique de position donnée par l'expression (1.7). Cette saturation à une valeur minimale des fluctuations de position est la deuxième signature expérimentale du comportement quantique d'un oscillateur.

1.2 La mesure interférométrique optique

Comme nous l'avons indiqué dans la section 1.1.3, nous avons accès expérimentalement aux fluctuations de la position de l'oscillateur. Dans cette section, nous allons introduire les principes généraux de cette mesure, en renvoyant au chapitre 2 pour une approche plus détaillée.

Nous introduirons d'abord les principes de la mesure de petits déplacements d'un miroir mobile en décrivant une mesure interférométrique basée sur la détection des variations de la phase d'un faisceau lumineux qui se réfléchit sur le miroir. Nous aborderons ensuite une description quantique de la lumière afin de déterminer la sensibilité de cette mesure optique. Finalement, nous introduirons le bruit de pression de radiation exercé sur le miroir par la lumière et ses conséquences sur la sensibilité de la mesure.

1.2.1 Mesure optique de position

Considérons d'abord le système le plus simple pour modéliser le couplage entre la lumière et un oscillateur mécanique : un faisceau laser en incidence normale se réfléchit sur un miroir mobile, comme représenté sur la figure 1.4.

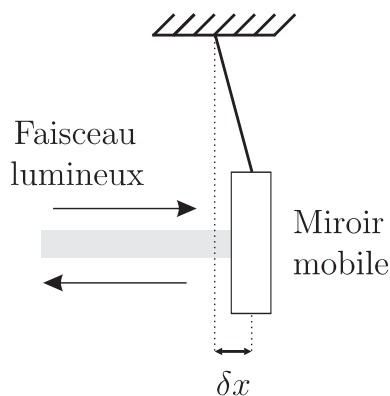


FIGURE 1.4 – Modélisation du couplage optomécanique entre un miroir et un faisceau laser incident

Un déplacement longitudinal du miroir entraîne une variation $2 \delta x$ du chemin optique suivi par le laser et, par conséquent, une variation de phase $\delta \varphi$ égale à :

$$\delta \varphi = 4\pi \frac{\delta x}{\lambda}, \quad (1.30)$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière. La phase du faisceau réfléchi est donc affectée par les déplacements du miroir et cet effet peut être utilisé pour mesurer ses déplacements. En revanche, la position du miroir qu'on cherche à mesurer peut être perturbée par la lumière via la pression de radiation : cela correspond à l'*action en retour* de la mesure (ici la lumière) sur l'objet mesuré (ici le miroir).

Mesure de déplacements avec une cavité Fabry-Perot

Il est possible d'augmenter la sensibilité de la mesure des petits déplacements en utilisant un dispositif basé encore une fois sur un miroir mobile parfaitement réfléchissant, en

face duquel on place un deuxième miroir partiellement réfléchissant, le coupleur d'entrée, de façon à former une cavité Fabry-Perot.

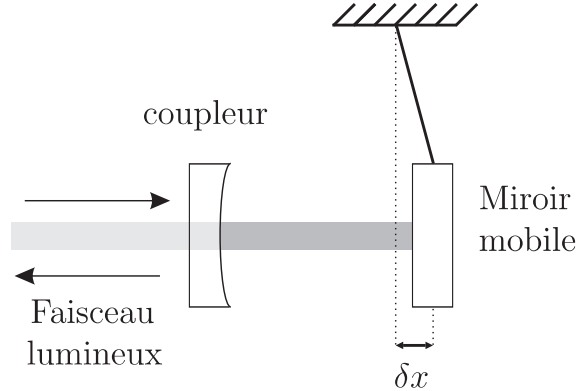


FIGURE 1.5 – Principe d'une mesure optique de déplacements d'un miroir mobile, à l'aide d'une cavité Fabry-Perot.

Si on néglige les pertes de la cavité, celle-ci réfléchit complètement la lumière incidente et les intensités moyennes incidente et réfléchie sont conservées : $\bar{I}_{\text{out}} = \bar{I}_{\text{in}}$. Par contre, l'interférence des réflexions multiples du champ à l'intérieur de la cavité induit des résonances lorsque la longueur de la cavité est un multiple entier de la demi-longueur d'onde $\lambda/2$ de la lumière. L'intensité intracavité moyenne \bar{I} , représentée sur la figure 1.6, varie alors en fonction de la longueur et décrit autour d'une résonance un pic d'Airy de forme lorentzienne, dont la largeur et l'amplitude dépendent des caractéristiques optiques des miroirs. On peut les exprimer en fonction de la finesse \mathcal{F} , définie comme le rapport entre l'intervalle spectrale libre, c'est-à-dire la distance $\lambda/2$ entre deux résonances successives, et la largeur du pic d'Airy. Cette largeur vaut ainsi par définition $\lambda/2\mathcal{F}$, tandis que la hauteur du pic d'Airy vaut :

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \bar{I}_{\text{in}}. \quad (1.31)$$

L'intensité intracavité moyenne est amplifiée par un facteur proportionnel à la finesse : cela permet d'interpréter la finesse comme le nombre moyen d'allers-retours que les photons effectuent avant de ressortir de la cavité.

La phase du faisceau réfléchi, représentée sur la figure 1.6, dépend elle-aussi fortement du désaccord de la cavité par rapport à la résonance : lorsque le miroir se déplace d'une quantité de l'ordre de $\lambda/2\mathcal{F}$, elle subit une variation proche de 2π , et la pente de la courbe est maximale à résonance où elle vaut $8\mathcal{F}/\lambda$. Le déphasage $\delta\varphi_{\text{out}}$ produit à résonance par une variation δx de position du miroir s'écrit ainsi :

$$\delta\varphi_{\text{out}} = 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda}. \quad (1.32)$$

En comparant cette expression avec le déphasage produit par un simple miroir [équation

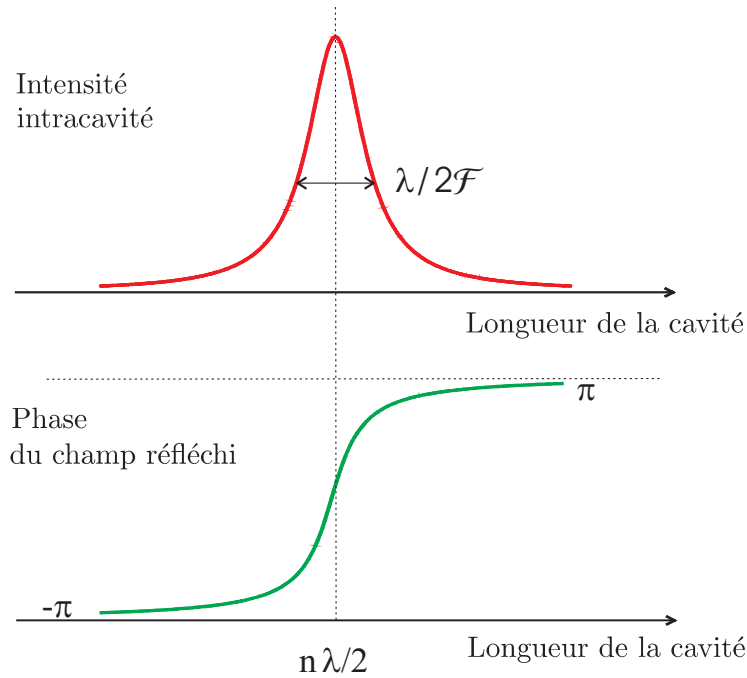


FIGURE 1.6 – En haut : évolution de l'intensité intracavité en fonction de la longueur de la cavité, balayée au voisinage d'une résonance de la cavité. En bas : variation de la phase du faisceau réfléchi par la cavité sur la même plage de longueur. A la résonance de la cavité, la phase change de signe et est très sensible aux fluctuations de longueur.

(1.30)], l'intérêt d'utiliser une cavité pour des mesures de petits déplacements est évident : l'interférence entre les multiples allers-retours de la lumière amplifie l'effet d'un mouvement δx sur la phase du faisceau réfléchi par un facteur \mathcal{F} . La sensibilité d'une telle mesure peut être ainsi très élevée, suivant la valeur de la finesse : dans une cavité de finesse $\mathcal{F} \simeq 50\,000$, avec un laser de longueur d'onde $\lambda = 1\,\mu\text{m}$, la largeur $\lambda/2\mathcal{F}$ du pic d'Airy est de 10^{-11} m (10 picomètres). On peut ainsi mesurer des déplacements bien inférieurs au picomètre en détectant la phase du faisceau réfléchi et les dispositifs interférométriques basés sur des cavités Fabry-Perot permettent de réaliser les mesures de position les plus sensibles, avec une sensibilité proche aujourd'hui de $10^{-20}\text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ [153]. Mesurer les fluctuations de point zéro d'un oscillateur devient ainsi envisageable.

Pour définir plus précisément la sensibilité de la mesure, il faut comparer le signal produit par un déplacement du miroir aux bruits qui peuvent entacher la mesure. Certains bruits sont d'origine classique (bruit sismique, fluctuations d'indice optique, vibrations mécaniques, ...), d'autres sont liés à la nature quantique de la lumière. Dans nos expériences, le fait d'analyser les déplacements à une fréquence élevée, supérieure au mégahertz, permet d'éliminer la plupart des bruits classiques et la sensibilité est en pratique limitée par le bruit quantique de la lumière. Nous étudions dans la section suivante les deux conséquences de la nature quantique du champ électromagnétique : le bruit dans la mesure et l'action en retour.

1.2.2 Description quantique du champ électromagnétique

En optique quantique, une méthode souvent utilisée pour décrire de manière quantique un champ électromagnétique consiste à considérer d'abord un champ classique confiné dans une cavité optique unidimensionnelle parfaitement réfléchissante, puis à passer à la quantification de ce champ. En effet, le champ classique se décompose en une somme discrète de modes déterminés par les conditions aux limites de la cavité. Le point-clé du passage à la description quantique est l'association à chacun de ces modes d'un oscillateur harmonique quantique, possédant des caractéristiques similaires à celles décrites dans la section 1.1.1. Ce procédé peut être étendu à des systèmes optiques ouverts, où les modes discrets et confinés du système (ici la cavité) sont couplés à des modes se propageant et correspondant à des ondes planes progressives [101, 39, 58].

Nous considérons ici un champ monochromatique décrit par un seul mode de la cavité, de pulsation ω_0 . L'expression du champ en termes des opérateurs de création \hat{a}^\dagger et annihilation \hat{a} est donc :

$$\hat{E}(t) = \hat{a}(t)e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger(t)e^{i\omega t}, \quad (1.33)$$

avec $\hat{a}(t)$ et $\hat{a}^\dagger(t)$ obéissant à la relation de commutation suivante :

$$[\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] = \delta(t - t'). \quad (1.34)$$

Les quadratures du champ définies par :

$$\hat{a}_1 = \hat{a} + \hat{a}^\dagger, \quad \hat{a}_2 = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}), \quad (1.35)$$

représentent les analogues pour le champ des opérateurs de position \hat{x} et impulsion \hat{p} pour un oscillateur harmonique matériel et, à l'instar de \hat{a}^\dagger et \hat{a} , leur commutateur est non nul. Cela implique une limite inférieure au produit de leurs incertitudes $\Delta\hat{a}_1$ et $\Delta\hat{a}_2$, qui vérifie une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta\hat{a}_1 \Delta\hat{a}_2 \geq 1. \quad (1.36)$$

Les variables \hat{a}_1 et \hat{a}_2 présentent donc des fluctuations quantiques, que nous allons décrire dans la suite en utilisant la méthode semi-classique [127, 128, 52].

Le méthode semi-classique

Dans les expériences d'optique quantique en variables continues telles que la nôtre, on utilise des faisceaux laser intenses, pour lesquels le nombre de photons est très grand³. La méthode semi-classique est très adaptée et couramment utilisée pour décrire les fluctuations quantiques d'un tel faisceau intense. Elle consiste à associer aux opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger du

3. À un laser de 1 mW de puissance correspondent environ 10^{15} photons par seconde.

champ des variables aléatoires classiques, α et α^* , complexes conjuguées l'une de l'autre. Ces variables obéissent à une distribution de probabilité qui correspond à la distribution de quasi-probabilité de Wigner [157, 136] de telle manière que toute valeur moyenne de produit d'opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger rangés dans l'ordre symétrique soit égale à la valeur moyenne de la même combinaison des variables α et α^* pondérée par la distribution de Wigner.

La variable aléatoire α caractérise alors complètement le champ quantique et on peut en particulier la décomposer comme la somme de sa valeur moyenne $\bar{\alpha}$, qui correspond à la valeur classique du champ, et de ses fluctuations $\delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$ qui représentent ses fluctuations quantiques.

La quantification du champ conduit à la définition des états du champ, similaires à ceux d'un oscillateur mécanique quantique : on introduit ainsi *le vide*, défini comme l'état quantique du champ correspondant à l'état d'énergie minimale du mode. Le champ vide est un cas particulier d'une classe d'états qui possèdent une incertitude minimale [égalité dans l'équation (1.36)], mais dont le nombre moyen de photons $\langle a^\dagger a \rangle$ est supérieur à zéro : les *états cohérents*. Introduits par Glauber en 1963 [63], ces états décrivent bien les champs associés aux faisceaux lasers et peuvent être obtenus en appliquant au champ vide l'opérateur déplacement $\hat{D}(\alpha)$, défini comme :

$$\hat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha a^\dagger - \alpha^* a\right). \quad (1.37)$$

La fonction d'onde des états cohérents est celle du vide $|0\rangle$ translatée dans l'espace des phases jusqu'au point $\bar{\alpha}$:

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle \quad (1.38)$$

La distribution de Wigner des états cohérents est une gaussienne de variances égales et minimales pour les deux quadratures a_1 et a_2 : $\Delta a_1 = \Delta a_2 = 1$. La distribution est ainsi positive et peut être considérée comme une véritable distribution de probabilité pour la variable α . Elle est représentée sur la figure 1.7 : le plan représente l'espace des phases, dont les axes sont définis par les quadratures :

$$\alpha_1 = \alpha + \alpha^* \quad \alpha_2 = i(\alpha^* - \alpha), \quad (1.39)$$

analogues semi-classiques des opérateurs (1.35). La fonction de Wigner est centrée sur la valeur moyenne $\bar{\alpha}$, correspondant à l'amplitude classique du champ, et la variance est la même dans toutes les directions.

L'ensemble des quadratures du champ peut être défini de manière générale par la relation :

$$\alpha_\theta = e^{-i\theta} \alpha + e^{i\theta} \alpha^*, \quad (1.40)$$

qui généralise les relations (1.39) et peut être interprétée comme une rotation du système

d'axe de l'espace des phases d'un angle θ .

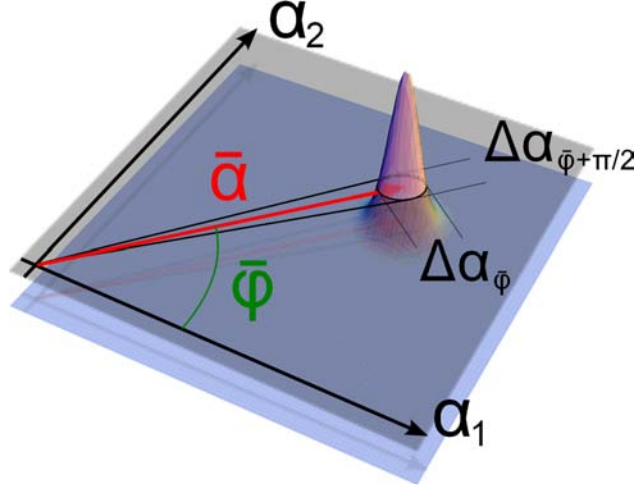


FIGURE 1.7 – Fonction de Wigner d'un état cohérent représentée dans l'espace de Fresnel $\{\alpha_1, \alpha_2\}$, centré en $|\bar{\alpha}| e^{i\bar{\varphi}}$. Les dispersions $\Delta\alpha_{\bar{\varphi}}$ et $\Delta\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2}$ des quadratures d'amplitude et de phase sont reliées aux dispersions ΔN et $\Delta\varphi$ du nombre de photon et de la phase du champ.

La figure 1.7 représente une coupe de la distribution de Wigner dans l'espace des phases : le cercle centré au point $\bar{\alpha}$ correspond à la courbe d'iso-probabilité à $1/e$ de la distribution de Wigner. Tout point α à l'intérieur de ce cercle (disque grisé sur la figure 1.7b) représente une réalisation possible du champ quantique et peut s'écrire

$$\alpha = \sqrt{N} e^{i\varphi}, \quad (1.41)$$

où $N = |\alpha|^2$ est le nombre de photons dans le mode et φ la phase du champ.

Les fluctuations quantiques δN du nombre de photons $N = a^\dagger a$ et de la phase $\delta\varphi$ peuvent être estimées en linéarisant l'expression (1.41) autour de sa valeur moyenne $\bar{\alpha} = \sqrt{\bar{N}} e^{i\bar{\varphi}}$. On les relie ainsi aux fluctuations de deux quadratures qui joueront un rôle particulier par la suite, la quadrature d'amplitude $\alpha_{\bar{\varphi}}$ et celle de phase $\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2}$. On obtient :

$$\delta N = |\bar{\alpha}| \delta\alpha_{\bar{\varphi}} \quad (1.42)$$

$$\delta\varphi = \frac{1}{2|\bar{\alpha}|} \delta\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2} \quad (1.43)$$

Les fluctuations de la quadrature d'amplitude $\delta\alpha_{\bar{\varphi}}$, parallèle au champ moyen (voir la figure 1.7b), sont donc associées au bruit d'intensité, tandis que la quadrature orthogonale $\delta\alpha_{\bar{\varphi}+\pi/2}$ caractérise le bruit de phase.

Comme $\Delta\alpha_\theta = 1$ pour une quadrature quelconque d'un état cohérent, nous pouvons

utiliser l'équation (1.42) pour calculer la variance de l'intensité de l'état cohérent :

$$\Delta N^2 = \bar{N}. \quad (1.44)$$

Elle est ainsi égale au nombre moyen de photons dans l'état, ce qui est typique d'une distribution poissonnienne. Les fluctuations relatives de l'intensité $\Delta N/\bar{N}$ diminuent comme $1/\sqrt{\bar{N}}$ lorsqu'on augmente l'intensité \bar{N} de l'état. La variance de la phase est par contre inversement proportionnelle au nombre de photons et vaut d'après l'équation (1.43) :

$$\Delta\varphi^2 = \frac{1}{4\bar{N}}. \quad (1.45)$$

Ce résultat peut être interprété qualitativement en remarquant que la dispersion de la phase $\Delta\varphi$ correspond à l'angle selon lequel la distribution du champ est vue depuis l'origine (cf. figure 1.7). Puisque la dispersion est égale à 1 indépendamment de la direction et de l'amplitude du champ, $\Delta\varphi$ diminue quand l'intensité augmente et que la distribution s'éloigne de l'origine.

Enfin, les variables N et φ sont deux grandeurs quantiques qui ne commutent pas et leurs dispersions vérifient une inégalité de Heisenberg :

$$\Delta N \Delta\varphi \geq \frac{1}{2}. \quad (1.46)$$

Un état cohérent du champ est donc un état minimal pour cette inégalité : les fluctuations d'intensité et de phase atteignent le minimum accessible pour des états non comprimés et définissent le bruit quantique standard. Comme nous allons le montrer dans la section suivante, ce bruit de la lumière conduit à l'existence d'une limite fondamentale de sensibilité à la mesure de petits déplacements.

1.2.3 Sensibilité de la mesure de petits déplacements

Nous avons montré dans la section 1.2.1 que la phase du champ réfléchi par une cavité Fabry-Perot est très sensible aux déplacements du miroir et peut être utilisée pour mesurer sa position [équation (1.32)]. Nous déterminons ici la sensibilité d'une telle mesure, en considérant les fluctuations quantiques de la phase du faisceau lumineux.

Comme nous l'avons évoqué au début de la section précédente, le modèle de quantification que nous avons utilisé est celui d'un champ stationnaire dans une boîte de dimensions finies. En utilisant la méthode semi-classique, nous pouvons néanmoins généraliser cette description à un champ se propageant dans un système physique réel [53]. Pour cela, nous remplaçons le nombre N de photons du champ dans la boîte par le nombre de photons se propageant par seconde, c'est-à-dire le flux I de photons.

Les fluctuations quantiques d'un champ $A(t)$ se propageant et évoluant dans le temps sont définies par $\delta A(t) = A(t) - \bar{A}$. De manière similaire aux définitions de la section 1.1.3, le spectre de bruit $S_A[\Omega]$ de la variable aléatoire A est relié à ses fluctuations $\delta A[\Omega]$ par l'expression :

$$\langle \delta A[\Omega] \delta A[\Omega'] \rangle = 2\pi\delta(\Omega + \Omega')S_A[\Omega], \quad (1.47)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique sur la distribution de Wigner. Si on considère le cas particulier du champ cohérent, cette dernière équation et la relation (1.44) nous permettent de montrer que les fluctuations d'intensité $\delta I[\Omega]$ sont indépendantes de la pulsation Ω et proportionnelles à la racine du flux moyen de photons \bar{I} . Le spectre des fluctuations d'intensité s'écrit :

$$S_I[\Omega] = \bar{I}, \quad (1.48)$$

tandis que, en combinant les équations (1.47) et (1.45), le spectre des fluctuations de phase est donné par :

$$S_\varphi[\Omega] = \frac{1}{4\bar{I}}. \quad (1.49)$$

Si l'on injecte un faisceau laser cohérent dans une cavité sans pertes, le faisceau sortant à résonance retranscrit les fluctuations de la phase du faisceau incident. Ce bruit de phase $\delta\varphi_{\text{in}}$ d'origine quantique se superpose aux variations de phase dues aux déplacements du miroir et l'équation (1.32) devient :

$$\delta\varphi_{\text{out}} = 8\mathcal{F} \frac{\delta x}{\lambda} + \delta\varphi_{\text{in}}. \quad (1.50)$$

Le spectre des fluctuations de phase du faisceau incident $S_\varphi^{\text{in}}[\Omega]$ étant donné par l'équation (1.49), le plus petit déplacement mesurable δx_{min} est obtenu en égalisant l'effet du signal $\delta x[\Omega]$ au bruit $S_\varphi^{\text{in}}[\Omega]$ et vaut :

$$\delta x_{\text{min}} = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}_{\text{in}}}}. \quad (1.51)$$

Cette équation montre que la sensibilité de la mesure est d'autant plus grande que la finesse de la cavité et l'intensité incidente sont élevées.

Il est intéressant de donner quelques ordres de grandeur : dans notre expérience, nous utilisons une source laser Nd:Yag à $\lambda = 1064$ nm. Pour un faisceau de puissance incidente $P_{\text{in}} = 1$ mW, le flux moyen de photons vaut $\bar{I}_{\text{in}} = P_{\text{in}}/h\nu_0 \simeq 10^{16}$ photons/s, où ν_0 est la fréquence du laser. Pour une cavité de finesse $\mathcal{F} \simeq 50\,000$, l'équation (1.51) montre que le plus petit déplacement mesurable correspond à environ 10^{-20} m/ $\sqrt{\text{Hz}}$, ce qui donne une idée de la grande sensibilité des mesures interférométriques de petits déplacements. Nous n'avons considéré toutefois que le bruit quantique de phase du faisceau incident, qui se traduit par un bruit de mesure sur la grandeur détectée [équation (1.50)]. Comme

nous allons le voir dans la section suivante, le bruit d'intensité, conjugué du bruit de phase, intervient aussi sous la forme d'un bruit de pression de radiation qui perturbe le mouvement des miroirs. La combinaison de ces deux bruits conduit à l'existence d'une limite quantique de sensibilité de la mesure.

1.2.4 L'action en retour de la mesure : le bruit de pression de radiation

Une des conséquences des postulats de la mesure en mécanique quantique est que le processus de mesure perturbe le système étudié : dans les expériences de mesure interférométrique de position telles que la nôtre, l'instrument de mesure est constitué par la lumière et sa nature quantique est responsable de cet effet d'action en retour de la mesure sur la grandeur mesurée. Plus précisément, le principe de conservation de l'impulsion du système implique l'existence d'une force de pression de radiation : en se réfléchissant sur le miroir, chaque photon lui transfère une impulsion $2\hbar k$ ($k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde de la lumière). Le miroir est donc soumis par le faisceau laser à une force de pression de radiation :

$$F_{\text{rad}}(t) = 2\hbar k I(t), \quad (1.52)$$

où $I(t)$ est le flux de photons incident sur le résonateur à l'instant t . Du fait de la puissance moyenne importante dans la cavité, la force de pression de radiation induit donc un effet de recul du miroir. Par ailleurs, la lumière qui circule dans la cavité présente des fluctuations quantiques d'intensité, qui vont entraîner des fluctuations de la pression de radiation. Elles sont obtenues en linéarisant l'équation (1.52) :

$$\delta F_{\text{rad}} = 2\hbar k \delta I. \quad (1.53)$$

Ces fluctuations sont responsables d'un bruit de position supplémentaire du miroir, qui reproduit les fluctuations d'intensité du champ intracavité. Nous verrons dans le chapitre 2 que dans le cas d'une cavité sans perte, ces fluctuations intracavité sont directement proportionnelles aux fluctuations d'intensité δI_{in} du faisceau incident, avec un coefficient de proportionnalité qui correspond à l'amplification par la finesse de la cavité (relation similaire à l'équation (1.31) pour les champs moyens) :

$$\delta I = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \delta I_{\text{in}}. \quad (1.54)$$

La force de Langevin thermique (section 1.1.3) n'est donc pas la seule force agissant sur le miroir : le bruit de photon induit un bruit de position qui se superpose au bruit thermique. Aux forces agissant sur le miroir selon l'équation (1.15), il faut par conséquent ajouter la force de pression de radiation et nous pouvons exprimer les fluctuations de

position induites par la pression de radiation sous la forme :

$$\delta x_{\text{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega] \delta F_{\text{rad}}[\Omega] = \frac{8\hbar}{\lambda} \mathcal{F} \chi[\Omega] \delta I_{\text{in}}[\Omega]. \quad (1.55)$$

Le bruit quantique de la lumière est donc responsable de deux bruits de natures différentes : le bruit de phase $\delta\varphi_{\text{in}}$ du faisceau incident se traduit par un bruit de la mesure directement détecté dans le faisceau réfléchi [équation (1.50)], tandis que le bruit d'intensité δI_{in} induit une action en retour qui perturbe la position du miroir [équation (1.55)]. Comme nous l'avons vu dans la section 1.2.2, ces deux bruits sont conjugués et obéissent à une inégalité de Heisenberg [équation (1.46)]. Ainsi, augmenter la puissance incidente réduit le bruit de phase mais augmente le bruit d'intensité [équations (1.48) et (1.49)]. Ceci explique pourquoi on ne peut pas augmenter indéfiniment la sensibilité de notre mesure avec un faisceau cohérent, car la combinaison de ces deux bruits conduit à une borne inférieure appelée la Limite Quantique Standard [27, 81] : augmenter l'intensité intracavité améliore la sensibilité de la mesure mais augmente aussi le bruit de pression de radiation.

Si l'étude de cette Limite Quantique Standard est un sujet de recherche très important, notamment en vue d'améliorer la sensibilité des mesures interférométriques telles que les détecteurs d'ondes gravitationnelles [2, 17], nous verrons dans la suite d'autres conséquences essentielles de la pression de radiation. C'est en particulier elle qui permet d'agir sur la dynamique du miroir et fournit ainsi une méthode efficace pour refroidir un résonateur mécanique, en principe jusqu'à atteindre son état quantique fondamental.

1.3 Des micro-miroirs pour observer le régime quantique

Nous présentons dans cette section quelques expériences qui ont permis de mettre en évidence des effets du couplage optomécanique. Nous verrons ainsi que les résonateurs mécaniques utilisés sont très variés et de toute taille. Nous nous concentrons ensuite sur les micro-miroirs, c'est-à-dire des dispositifs où un miroir est déposé sur un résonateur mécanique, ce qui permet de les utiliser dans une cavité Fabry-Perot. Nous terminons cette section en présentant les micro-miroirs utilisés au cours de ma thèse.

1.3.1 Des résonateurs optomécaniques de toute taille

Le couplage entre degrés de liberté mécaniques et optiques d'un système, tel qu'il est décrit dans la section précédente, est à la base de nombreuses réalisations expérimentales, depuis les interféromètres géants pour détecter les ondes gravitationnelles [2, 17] jusqu'aux microscopes à force atomique [12, 131] capables de détecter de très faibles forces [116, 32]. Les premières études théoriques des effets du couplage optomécanique remontent aux années 70 à 80 [148, 19, 28], mais c'est seulement depuis quelques années que ce domaine a vu une évolution expérimentale importante, grâce aux améliorations des techniques de microfabrication de résonateurs de tailles micrométrique et nanométrique, et de fabrication de miroirs de très grande réflectivité.

Cela a permis d'exacerber les effets du couplage optomécanique, dans des dispositifs très variés comme nous allons le voir dans cette section. Les objectifs poursuivis concernent non seulement le refroidissement d'un résonateur mécanique jusqu'à son état fondamental, mais aussi la mise en évidence d'un certain nombre d'effets d'optique quantique induits par la pression de radiation : on peut citer l'existence de corrélations optomécaniques entre l'intensité du faisceau et le déplacement du résonateur [153], l'existence de limites quantiques dans les mesures interférométriques et la possibilité d'améliorer la sensibilité de ces mesures [26, 154].

En ce qui concerne la mise en évidence du régime quantique d'un résonateur mécanique, le choix du dispositif résulte d'un compromis de façon à satisfaire au mieux deux contraintes essentielles, que nous avons déjà décrites dans les sections précédentes. Tout d'abord, la température du résonateur doit être suffisamment basse pour que sa dynamique soit dominée par ses propriétés quantiques : ainsi la température quantique $T_Q = \hbar\Omega_m/k_B$ d'un résonateur oscillant à une fréquence $\Omega_m/2\pi = 1$ MHz correspond environ à $50 \mu\text{K}$. Atteindre une telle température nécessite de combiner l'utilisation d'un cryostat avec des méthodes de refroidissement actif. Comme nous le verrons dans le chapitre 2, ces techniques sont en général basées sur le couplage par pression de radiation à un bain thermique

de température quasi-nulle. Elles ont pour conséquence d'augmenter l'amortissement effectif du résonateur, et de dégrader son facteur de qualité. Atteindre le régime quantique nécessite donc de partir d'une température cryogénique aussi basse que possible, puis d'utiliser un résonateur de grand facteur de qualité mécanique et de faible masse pour que le processus de refroidissement soit efficace.

Par ailleurs, les fluctuations quantiques de position à la fréquence de résonance dépendent de la masse, de la fréquence et du facteur de qualité mécanique (voir l'équation 1.28) :

$$S_x^Q[\Omega_m] = \frac{\hbar Q_{\text{eff}}}{M\Omega_m^2} \quad (1.56)$$

où $Q_{\text{eff}} \simeq QT_Q/T$ représente le facteur de qualité mécanique, dégradé par le processus de refroidissement actif utilisé pour atteindre la température quantique T_Q . Cette équation montre que l'on a intérêt à maximiser le rapport $Q/M\Omega_m$, tout en conservant une fréquence de résonance élevée pour augmenter la température quantique et la rendre accessible expérimentalement. Cela conduit en pratique à une miniaturisation du résonateur, limitée toutefois par la sensibilité de la mesure du déplacement du résonateur : dans le cas d'une mesure optique par exemple, la taille du micro-miroir doit être suffisante pour l'utiliser dans une cavité optique de grande finesse. D'autres techniques de mesure, en couplant le résonateur à des circuits électriques ou à des champs micro-ondes, bien que moins sensibles a priori, ont donc été également utilisées en vue d'observer le régime quantique de résonateurs de masse très faible ou de fréquence très élevée.

Malgré ces contraintes, le couplage optomécanique a été mis en évidence avec une grande variété de dispositifs, allant de miroirs d'interféromètres gravitationnels pesant plusieurs kilogrammes et oscillant à une fréquence de l'ordre du hertz [1], jusqu'à des résonateurs de taille nanométrique et pesant quelques picogrammes. Parmi les dispositifs les plus massifs, on peut citer les travaux réalisés par l'équipe de N. Mavalvala, qui ont mis en évidence [41] le couplage entre la pression de radiation et un miroir de silice de masse 1 g (illustré sur la FIG. 1.8(a)), utilisé comme miroir mobile dans une cavité Fabry-Perot ; ils ont observé le refroidissement d'un mode de vibration du miroir de fréquence propre égale à 12 Hz, jusqu'à une température de 7 mK en partant de la température ambiante, en combinant effet de ressort optique et friction froide (voir section 2.4). On peut également placer dans cette catégorie l'ensemble des travaux réalisés dans notre équipe avec des miroirs cylindriques d'un pouce de diamètre ou des miroirs plan-convexes dont la masse des modes de vibration est de l'ordre de 100 mg. Les résultats les plus récents concernent la mise en évidence de corrélations optomécaniques entre la lumière et le mouvement du miroir [153] et l'amélioration de la sensibilité des mesures interférométriques par amplification optomécanique du signal [154].

Les premières démonstrations du refroidissement d'un résonateur par pression de radiation dans une cavité désaccordée ont été obtenues simultanément en 2006 par notre

équipe et celle de M. Aspelmeyer [5, 60], avec des cavités où le miroir mobile a une taille micrométrique, une masse comprise entre 400 ng et 200 μg , et une fréquence de résonance entre 250 kHz et 1 MHz. Peu après, le groupe de T. Kippenberg [134] a refroidi selon le même principe un mode mécanique radial d'un micro-tore en silice, caractérisé par une fréquence de résonance de l'ordre de 50 MHz et une masse de 15 ng. Ce dispositif représente un système optomécanique intégré puisque le tore sert à la fois de résonateur optique et mécanique (FIG. 1.8(d)). Récemment, le même groupe a montré la possibilité de refroidir un tel micro-tore jusqu'à une température très proche de la température quantique avec un nombre de phonons thermiques inférieur à 10 [129], en combinant un cryostat à He₃ fonctionnant à la température de 600 mK et un refroidissement par pression de radiation.

Des résonateurs de masse encore plus faible ont pu être couplés efficacement à la lumière en les utilisant non pas comme miroir mais comme milieu dispersif dans une cavité. Le groupe de J. Harris [147] a ainsi montré la possibilité de refroidir jusqu'à 7 mK environ un mode mécanique d'une membrane très fine de SiN, en plaçant la membrane près d'un noeud de l'onde stationnaire dans une cavité Fabry-Perot. La fréquence de résonance du mode est de quelques centaines de kilohertz, et sa masse de 50 pg seulement (FIG. 1.8(c)). Un autre dispositif de très faible masse a été réalisé par l'équipe de O. Painter [48], en confinant fortement les modes mécanique et optique à l'aide d'un système intégré constitué d'une cavité à cristaux photoniques appelée *zipper cavity* (FIG. 1.8(e)). Dans le même ordre d'idée, les équipes de I. Robert-Philip et T. Kippenberg ont développé une membrane suspendue à cristaux photoniques où le couplage entre un mode mécanique très confiné de fréquence proche du gigahertz et le mode optique dans la cavité à cristal photonique a été observé [56].

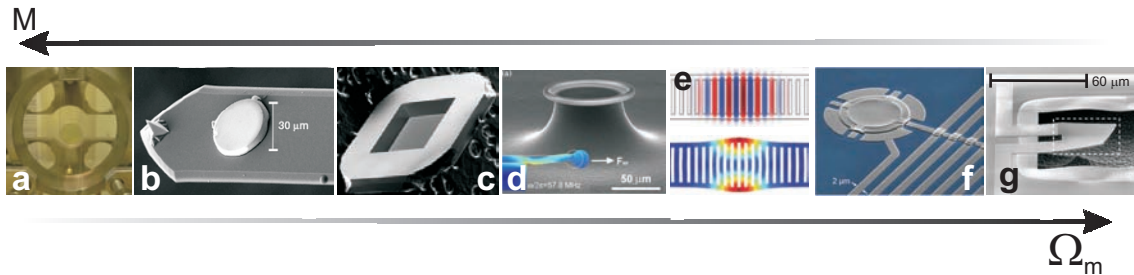


FIGURE 1.8 – Photographies de différents résonateurs utilisés dans des expériences d'optomécanique : miroir suspendu (a) [41] ; miroir de Bragg déposé sur un micro-levier de microscope à force atomique (b) [89] ; membrane en SiN (c) [147] ; micro-tore en silice (d) [134] ; cavité à cristaux photoniques (e) [49] ; micro-membrane couplée à une cavité micro-ondes (f) [146] ; résonateur piézo-électrique (g) [121]. Les fréquences de résonance évoluent de gauche à droite de 13 Hz à 6 GHz ; les masses varient de 1 g (a) à moins de 50 pg (c, e, f) ; les facteurs de qualité mécanique sont compris entre quelques centaines (g) et quelques millions (c).

Parmi les expériences qui utilisent des techniques de détection non optique avec des résonateurs ayant des dimensions inférieures à quelques microns, on peut citer les dis-

positifs conçus par les groupes de A. Cleland [121], de K. Schwab [76] et de K. Lehnert [146]. Ainsi, A. Cleland et son équipe [121] ont reporté pour la première fois l'observation des fluctuations de point zéro d'un mode de compression d'un micro-résonateur piézo-électrique, de dimension $50 \mu\text{m}$ et d'épaisseur 600 nm (FIG. 1.8(g)). Avec une fréquence de résonance de 6 GHz , l'utilisation d'un cryostat à dilution à une température de 25 mK a été suffisante pour dépasser la température quantique du résonateur, de plus d'un facteur 10. Le couplage électromagnétique avec un qubit supraconducteur a alors permis d'observer ses fluctuations et même de contrôler son excitation élémentaire par un seul phonon. Très récemment, l'équipe de K. Lehnert [146] a atteint l'état quantique fondamental d'un micro-résonateur en forme de membrane, couplé à un circuit supraconducteur à micro-ondes, ce micro-résonateur ayant une fréquence de résonance d'environ 10 MHz (FIG. 1.8(f)). Une technique de refroidissement actif dans le régime des bandes latérales résolues (voir section 2.5) du résonateur préalablement thermalisé à 20 mK dans un cryostat à dilution a permis d'atteindre un nombre de phonons thermiques inférieur à 1.

1.3.2 Couplage optomécanique avec des micro-miroirs

Le choix de mesurer avec un dispositif optique les fluctuations de position de l'oscillateur impose une limite inférieure à la taille du résonateur : si l'on veut utiliser le résonateur comme miroir mobile dans une cavité Fabry-Perot, il faut que le faisceau laser puisse se réfléchir sur sa surface avec de faibles pertes, afin de ne pas dégrader la finesse \mathcal{F} de la cavité. La dimension de la surface du résonateur doit donc être supérieure à la taille transverse du faisceau, d'un facteur 4 au moins pour conserver une finesse de l'ordre de $100\,000$. La géométrie des miroirs et la longueur L de la cavité déterminent entièrement la valeur du col du mode fondamental d'une cavité optique [91]. Les contraintes de fabrication imposent que le résonateur mécanique soit plan, et de ce fait le col optique y est localisé. Dans l'approximation paraxiale, la valeur du col w_0 est alors donnée par l'expression :

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{L(R-L)} \quad (1.57)$$

où R est le rayon de courbure du miroir d'entrée. Par exemple, pour $R = 50 \text{ mm}$ et $L = 2.4 \text{ mm}$, on obtient un col de $60 \mu\text{m}$, ce qui conduit à une surface du micro-miroir d'au moins quelques centaines de microns⁴. Si l'avantage d'une telle taille est de permettre une mesure optique ultra-sensible grâce à la finesse de la cavité que l'on peut espérer atteindre, ses désavantages sont une plus grande masse et une fréquence de résonance plus basse, ces paramètres intervenant dans l'efficacité du couplage optomécanique et dans la température quantique T_Q . La taille du résonateur résulte donc d'un compromis entre la

4. En réduisant le rayon de courbure R et la longueur L de la cavité, on peut obtenir des cols optiques de quelques microns seulement, ce qui permet d'utiliser des résonateurs beaucoup plus petits. Cette amélioration est en cours de réalisation dans notre équipe.

surface minimale nécessaire pour l'utiliser comme micro-miroir dans une mesure optique ultra-sensible, et la réduction de ses dimensions afin d'augmenter le couplage à la pression de radiation et sa température quantique.

Différentes solutions ont été adoptées, basées essentiellement sur la fabrication d'un micro-résonateur de la taille souhaitée et le dépôt d'un miroir très réfléchissant, comme par exemple le résonateur en forme de "double roue" en silicium utilisé par l'équipe de F. Marin [105], dont la partie centrale sur laquelle est déposé un miroir diélectrique a une épaisseur de $45\ \mu\text{m}$ et un diamètre de l'ordre du millimètre (FIG. 1.9(a)). La fréquence de résonance du mode fondamental, qui correspond essentiellement à un mouvement d'ensemble du disque central, est de 250 kHz environ, tandis que la qualité optique du miroir déposé a permis de construire une cavité de finesse $\mathcal{F} = 10\,000$. Un micro-résonateur de dimensions transverses de quelques centaines de microns et de seulement $2.4\ \mu\text{m}$ d'épaisseur a été utilisé en 2006 par le groupe de M. Aspelmeyer [60] pour démontrer le refroidissement par pression de radiation, même si la finesse de la cavité optique ainsi construite était de 500 seulement (FIG. 1.9(b)). Le même groupe a plus récemment refroidi jusqu'à 1.3 mK (soit 32 phonons thermiques) un micro-résonateur en Si_3N_4 en forme de pont sur lequel est déposé un miroir de Bragg de quelques dizaines de microns de diamètre, en combinant refroidissement cryogénique et actif [69] (FIG. 1.9(c)).

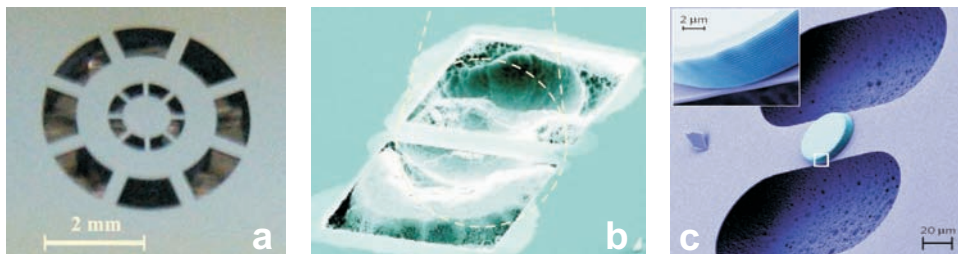


FIGURE 1.9 – Photographies de quelques micro-miroirs utilisés dans des expériences d'optomécanique avec des cavités optiques, issues respectivement des références [105, 60, 69].

Les résonateurs que j'ai utilisés ont des dimensions transverses typiques de plusieurs centaines de microns, de façon à assurer une grande sensibilité de la mesure optique de déplacement. Nous avons choisi la géométrie, le matériau, et l'épaisseur du résonateur de façon à optimiser sa masse et son facteur de qualité mécanique. Plusieurs mécanismes, internes et externes, contribuent à la dissipation du système [167, 144, 149] : les pertes de surface (amortissement du gaz résiduel [34, 164], défauts de la surface [115], ...), la viscosité intrinsèque du matériau [85, 168], les pertes mécaniques dues au maintien de la structure [164], les pertes par effet thermoélastique [169] et d'autres encore. Nous nous sommes donc tournés vers des résonateurs fabriqués en silicium, dont la structure cristalline présente moins de dissipation intrinsèque que les matériaux amorphes [144], et dont les

pertes par effet thermoélastique peuvent être inférieures à celles du quartz [97]. De plus, les techniques de gravure du silicium sont aujourd’hui très bien maîtrisées et permettent la réalisation de structures de la taille souhaitée et très précisément définies, ceci étant un point important pour obtenir un bon facteur de qualité mécanique.

L’une des géométries les plus simples que l’on puisse utiliser –et que nous avons souvent utilisée dans notre expérience– est celle d’une poutre de dimensions $L \times l \times e$ doublement encastrée comme celle représentée sur la FIG. 1.10. Pour cette géométrie, il est possible de trouver des solutions analytiques de l’équation du mouvement. Nous verrons dans le prochain chapitre que la déformation d’un résonateur se décompose de manière générale sur une base de modes propres de vibration ; dans le cadre d’un modèle unidimensionnel simplifié qui s’adapte bien à cette géométrie, on peut écrire les pulsations des résonances des modes en fonction des dimensions du résonateur :

$$\Omega_n \simeq n \frac{e}{L^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}} \quad (1.58)$$

où E est le module d’Young, ρ la masse volumique du matériau et n l’indice du mode. Cette relation montre que la fréquence propre du mode augmente en diminuant la longueur L du pont ou en augmentant son épaisseur e .

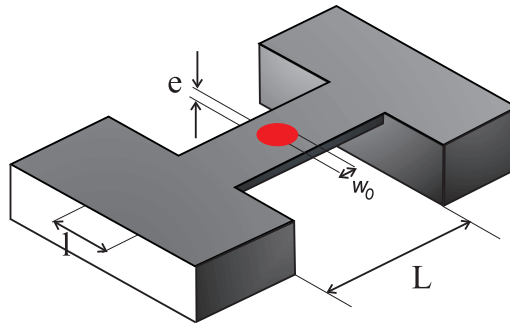


FIGURE 1.10 – Résonateur en forme de poutre doublement encastrée.

Ces résonateurs ont été réalisés en collaboration avec plusieurs laboratoires et instituts [7] : l’ESIEE Paris puis l’Institut d’Electronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie à Lille (IEMN) pour la gravure, et le Laboratoire des Matériaux Avancés à Lyon (LMA) pour le dépôt de couches diélectriques de haute réflectivité sur la surface du résonateur. Nous décrivons dans la section suivante le procédé de fabrication de ces micro-miroirs, que nous avons repris au cours de ma thèse pour une nouvelle génération dédiée à l’étude du couplage à trois modes (voir la section 6.1.4).

1.3.3 Réalisation des micro-miroirs

Parmi les techniques les plus utilisées pour réaliser des micro-structures en silicium très bien définies⁵, la technique de gravure sèche dite *Deep Reactive Ion Etching* (DRIE) est celle qui assure la plus grande précision dans la réalisation de micro-résonateurs avec des flancs de grande profondeur [108]; d'autres techniques, telle que la lithographie chimique par exemple, ne conduisent pas à une aussi bonne qualité sur des profondeurs de plusieurs dizaines de microns. Une fois les résonateurs gravés, un ensemble de couches diélectriques est déposé à leur surface pour former un miroir de grande réflectivité.

Gravure des micro-résonateurs

La gravure des échantillons est réalisée sur des *wafers* en SOI (*Silicon On Insulator*) constitués de trois couches successives : un substrat en silicium d'épaisseur $520\ \mu\text{m}$ (l'épaisseur peut varier selon les wafers, et la deuxième série d'échantillons réalisée par l'IEMN avait un substrat de $300\ \mu\text{m}$ environ), une couche de $2\ \mu\text{m}$ d'oxyde SiO_2 , et finalement une couche de $60\ \mu\text{m}$ de silicium, qui correspond à la couche dans laquelle est gravé le résonateur, qui aura donc également une épaisseur de $60\ \mu\text{m}$. La couche intermédiaire sert de couche d'arrêt pendant la gravure des deux faces.

La face supérieure des wafers, sur laquelle sera déposé le traitement optique, est polie avec une rugosité garantie à $3\ \text{Å}$, pour réduire le plus possible les pertes optiques et obtenir une finesse élevée.

Le masque. Pour graver de manière sélective le wafer et laisser intactes les zones qui formeront le résonateur, il est nécessaire d'utiliser des masques. Le dessin de ces masques est différent pour les deux faces du wafer, puisque le masque de la face supérieure définit la géométrie du résonateur proprement dit, tandis que celui de la face inférieure enlève toute la matière du substrat sous le résonateur. La FIG. 1.11 montre des exemples des deux masques; les lignes définissent des puces de $1\ \text{cm}$ de côté, qui seront découpées à la fin du processus de gravure. Dans chaque carré, on a placé 4 structures différentes, ce qui a permis dans un premier temps de multiplier le nombre de résonateurs et de tester différentes géométries et tailles. Par la suite, nous avons préféré faire graver une seule micro-structure au centre de chaque puce. Le masque contient aussi des motifs de centrage, qui servent à positionner correctement le wafer lors de la gravure double-face.

Le masque est ensuite imprimé sur un transparent avec une imprimante laser, qui a une précision suffisante (de quelques microns) pour nos besoins. La procédure pour transférer le masque sur le wafer utilise une résine photosensible déposée sur chaque face du wafer

5. Comme nous l'avons dit plus haut, la qualité des flancs et la définition des structures sont essentielles pour obtenir des facteurs de qualité mécanique élevés : des bords trop rugueux introduisent une possibilité supplémentaire de dissipation des vibrations du résonateur et augmentent donc son amortissement.

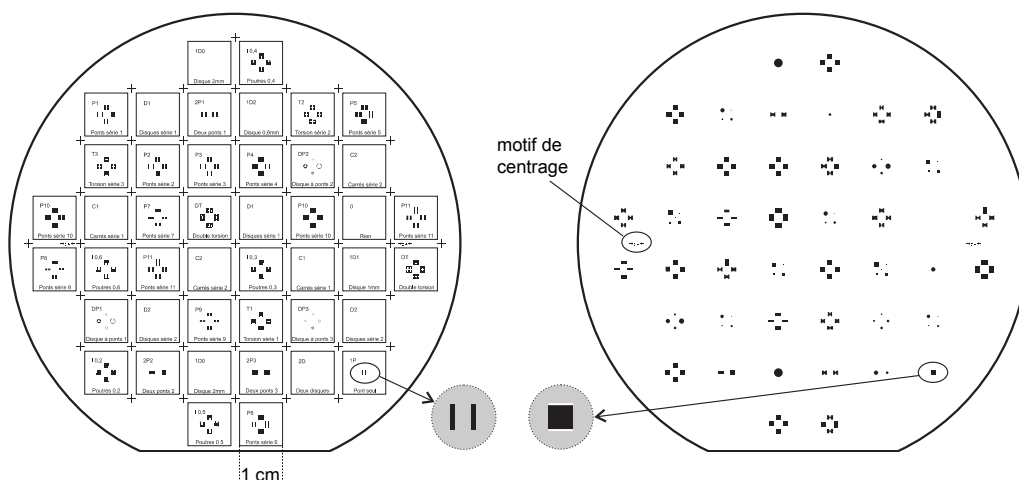


FIGURE 1.11 – Négatifs des masques utilisés pour graver les micro-résonateurs : à gauche la face supérieure et à droite la face inférieure, vue de dessus. Les parties gravées sont les zones noires. Chaque puce de 1 cm de côté contient 4 résonateurs, dont les dessins des masques supérieur et inférieur sont différents de façon à libérer toute la matière du substrat sous le résonateur (zoom au centre de la figure).

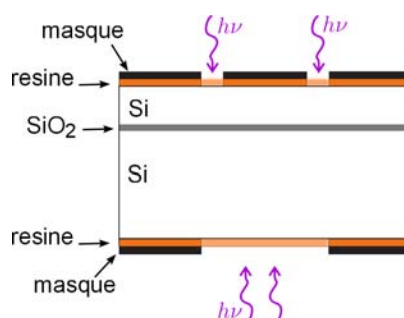


FIGURE 1.12 – Vue en coupe du wafer et principe du transfert des masques sur chaque face en utilisant de la résine photosensible.

et soumise à une radiation UV qui permet d'enlever les parties de résine irradiée (voir la FIG. 1.12); le masque est donc le positif des motifs qui seront gravés.

La gravure. Le transfert des masques et la gravure ont été réalisés à l'ESIEE Paris par Lionel Rousseau pour la première série de résonateurs, et à l'IEMN par Isabelle Roch-Jeune pour la seconde série utilisée pour le couplage à trois modes.

La technique de gravure est la DRIE, qui combine l'action chimique de radicaux libres qui réagissent avec le silicium et affaiblissent les liens du réseau cristallin, et l'action anisotrope d'ions accélérés qui ont pour effet de graver la surface sans toucher les flancs. Cette technique n'empêche pas totalement l'attaque des surfaces verticales lors d'une exposition prolongée de l'échantillon. C'est pourquoi on utilise pour des gravures profondes un processus de passivation, qui consiste à arrêter régulièrement la gravure et à placer le wafer dans un deuxième plasma qui va protéger les flancs déjà gravés en créant une structure

polymère plus dense (voir la FIG. 1.13(a)). Sur la photo de la FIG. 1.14(b), on peut voir l'aspect des flancs à la fin de la gravure.

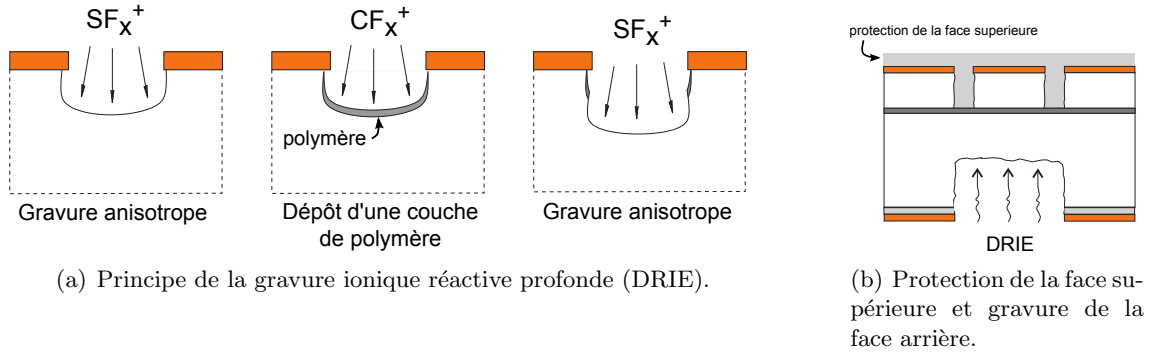
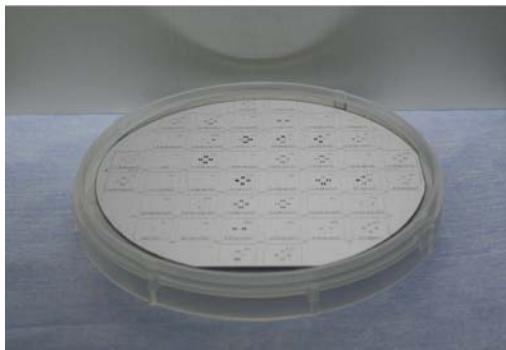
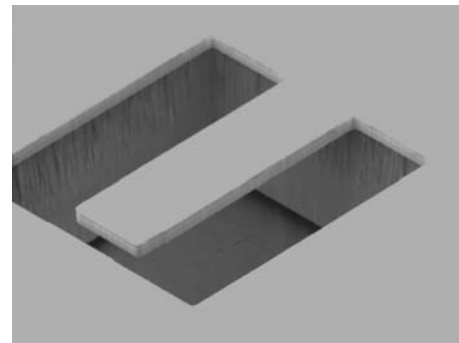


FIGURE 1.13 – Principales étapes de la gravure double-face du wafer.

Après gravure de la face avant, celle-ci est protégée pour graver la face arrière (FIG. 1.13(b)), la couche intermédiaire d'oxyde servant de couche d'arrêt pour chacune des deux gravures. Une fois le procédé terminé, la couche d'oxyde mise à nu est supprimée et le wafer nettoyé. Le résultat de la gravure est montré sur la FIG. 1.14(a). La découpe en puces carrées de 1 cm de côté est réalisée à l'aide d'une scie diamantée, en faisant attention à ne pas casser les structures ni à endommager la surface.



(a) Photographie du wafer après la gravure.



(b) Photographie au microscope à balayage électronique d'un micro-résonateur.

FIGURE 1.14 – Aspects du wafer et du micro-résonateur après la gravure.

Le traitement optique

La qualité du traitement optique déposé à la surface de la puce va déterminer la réflectivité et les pertes des micro-miroirs, et donc la sensibilité de la mesure des déplacements du résonateur. De plus, le dépôt de couches diélectriques sur la face supérieure de la puce crée des contraintes supplémentaires sur le micro-résonateur qui peuvent entraîner des

problèmes mécaniques ou une dégradation du facteur de qualité. Pour réaliser cette étape critique dans les meilleures conditions, nous avons fait appel au Laboratoire des Matériaux Avancés, qui a développé des techniques très avancées dans le cadre de la mise au point des miroirs des interféromètres gravitationnels. Cela nous a permis d'avoir des traitements d'une qualité optique inégalée déposés sur nos micro-résonateurs en silicium [6].



FIGURE 1.15 – Photographie d'une puce de 1 cm de côté, après traitement optique. Les couches diélectriques recouvrent intégralement les 4 résonateurs en forme de ponts doublement encastrés de 1 mm de long et de différentes largeurs.

Les puces sont préalablement nettoyées pour éliminer tout résidu de gravure éventuel qui pourrait empêcher l'adhésion du traitement optique. Ce dernier consiste en plusieurs couches de deux matériaux diélectriques d'indice optique différent, déposées alternativement par une technique évaporative. L'épaisseur des couches des deux matériaux, proportionnelle à la durée de l'exposition, est choisie de façon à correspondre à un chemin optique de $\lambda/4$, de sorte que l'ensemble constitue un miroir de Bragg pour lequel les différentes ondes lumineuses réfléchies aux interfaces interfèrent constructivement. La transmission résiduelle et la réflectivité globale de l'empilement dépend alors du nombre de doublets, que nous avons limité à 20 de façon à ne pas créer trop de contraintes mécaniques sur le résonateur.

La photographie de la FIG. 1.15 montre une puce avec 4 micro-résonateurs, sur laquelle est clairement visible le traitement diélectrique de forme circulaire. La présence d'une zone non traitée sur les bords de la puce est due à la pièce de maintien dans la machine qui ne laisse libre que la zone centrale. Les mesures réalisées en cavité avec un micro-miroir composé d'une vingtaine de doublets diélectriques [3] conduisent à une transmission résiduelle de quelques dizaines de ppm (partie par million). La réflectivité est en fait essentiellement limitée par les pertes par diffusion, de l'ordre de 100 ppm, liées à la rugosité du substrat.

Le couplage optomécanique avec un micro-miroir

Après avoir présenté un tour d’horizon des différentes expériences qui visent à mettre en évidence le régime quantique d’un résonateur macroscopique et avoir décrit le système que nous avons choisi, je reviens dans ce chapitre sur les principes fondamentaux du couplage optomécanique, afin de détailler de manière plus précise la dynamique du micro-résonateur. Ceci permettra de mieux comprendre l’équivalence avec un simple oscillateur harmonique et son couplage avec la lumière. Je décrirai ensuite l’évolution des champs électromagnétiques dans une cavité optique à miroir mobile. Je m’intéresserai en particulier au couplage entre les fluctuations quantiques du champ et les déformations de la surface du miroir induites par l’excitation de ses modes acoustiques.

J’utiliserai pour cela la méthode semi-classique qui permet de décrire l’évolution quantique du système à l’aide des équations classiques. Cette approche permet de déterminer la sensibilité d’une mesure de déplacements réalisée à partir d’une cavité Fabry-Perot, et en particulier les conséquences de la pression de radiation. Nous démontrerons l’équivalence avec un milieu non-linéaire, et l’existence d’une limite quantique standard, résultat d’un compromis entre le bruit quantique de la mesure et l’action en retour induite par la pression de radiation.

Nous examinerons également un certain nombre de conséquences du couplage optomécanique, en particulier la possibilité de refroidir le résonateur mécanique par friction froide à l’aide d’une boucle de contre-réaction, ou par refroidissement laser dans une cavité désaccordée. Ces deux techniques permettent en principe de refroidir le résonateur jusqu’à son état fondamental, et sont donc des outils essentiels pour la mise en évidence du régime quantique du résonateur.

2.1 Description mécanique du micro-miroir

Les dispositifs optomécaniques étudiés à ce jour correspondent soit à un mouvement d'ensemble d'un système mécanique, comme par exemple le mouvement pendulaire des miroirs suspendus des antennes gravitationnelles, soit à des modes de vibration interne de résonateurs mécaniques. Si dans le premier cas le déphasage subi par la lumière est simplement relié au mouvement d'ensemble du dispositif, la situation semble plus complexe dans le second cas puisque la surface du résonateur sur laquelle se réfléchit la lumière est déformée par l'excitation de nombreux modes acoustiques. Nous allons montrer que le couplage optomécanique peut toutefois être décrit simplement par un déplacement équivalent monodimensionnel, tout d'abord en décomposant le mouvement en modes de vibration (section 2.1), puis en examinant les conséquences du mouvement sur la lumière (section 2.2.1).

2.1.1 Équation élastique et modes propres de vibration d'un résonateur

Dans le cadre de l'approximation adiabatique¹, la déformation $\mathbf{u}(x, y, z, t)$ provoquée par la propagation d'ondes acoustiques dans une plaque de matériau homogène et isotrope, tel que le silicium utilisé pour nos micro-résonateurs (voir FIG. 2.1), est décrite par l'équation d'élasticité, qui relie le produit de l'accélération et de la densité ρ du matériau à la tension interne [95, 165]. Les déplacements peuvent être décomposés en une partie longitudinale parallèle à la direction de propagation de l'onde (ondes de compression) et une partie transverse qui n'implique aucune variation de volume (ondes de cisaillement). Si l'on décrit notre résonateur comme une plaque mince, on peut supposer que son épaisseur e est petite par rapport à ses dimensions transverses (longueur L et largeur l) et par rapport à la longueur d'onde acoustique. Si on suppose également que les déformations élastiques sont petites devant les dimensions de la plaque (déplacements petits par rapport à l'épaisseur du résonateur), on peut limiter notre étude aux seules vibrations transverses de la plaque.

On peut voir à l'aide de la FIG. 2.1 que pour une plaque soumise à une flexion sur toute sa hauteur, certaines de ses "couches" subissent une traction (zone convexe sur la figure), tandis que d'autres sont sujettes à une compression (zone concave). Il existe donc une *surface neutre* (en vert) qui sépare les deux zones de compression et de traction, où les contraintes internes sont nulles. Les mouvements du résonateur peuvent être décrits par les déformations subies par cette surface. En plaçant l'origine du système de coordonnées

1. En général la température d'un corps déformé par l'excitation d'un mode de vibration interne n'est pas constante, mais on peut supposer que le transfert de chaleur se produit sur des temps beaucoup plus longs que la période d'oscillation. Nous nous sommes également placés dans la condition idéale où le résonateur peut être considéré comme libre.

sur la surface neutre, le plan (x, y) coïncidant avec la surface neutre de la plaque non déformée, on note $u(x, y)$ le vecteur déplacement vertical des points de la surface neutre, qui permet de caractériser complètement la déformation du résonateur.

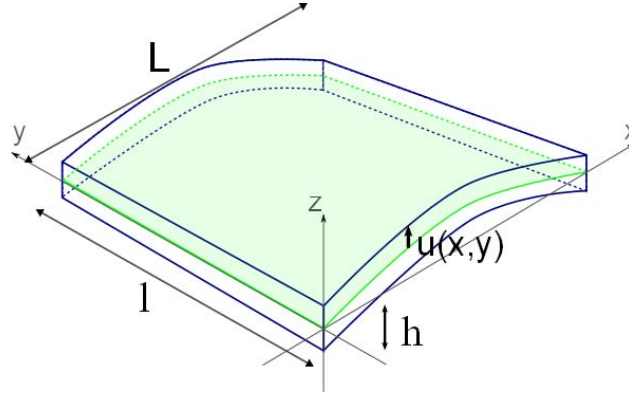


FIGURE 2.1 – Dessin simplifié de la vibration d'un résonateur. Le plan en vert représente la surface neutre qui ne subit pas de contraintes.

Suivant ces approximations, l'équation d'évolution de notre système suit l'équation de Bernoulli [95] :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{D}{e} \Delta^2 u = 0 \quad (2.1)$$

où $D = Ee^3/12(1 - \sigma^2)$ est la rigidité en flexion de la plaque, E le module d'Young du matériau et σ son coefficient de Poisson ; Δ est l'opérateur de Laplace à deux dimensions.

Cette équation admet des solutions qui correspondent aux modes de vibration de la plaque. On peut par exemple trouver des solutions analytiques simples pour des déformations du résonateur uniformes sur sa largeur, sous la forme $u(x, y, t) = u(x) \cos(\Omega t)$. Ces solutions doivent vérifier l'équation de dispersion :

$$\frac{\partial^4 u(x)}{\partial x^4} = k^4 u(x) \quad (2.2)$$

avec la relation suivante de dispersion :

$$\Omega = k^2 \sqrt{\frac{D}{e\rho}} \quad (2.3)$$

En imposant les conditions aux limites qui traduisent le fait que le résonateur est fixé à ses extrémités² :

$$u(0) = u(L) = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=L} = 0, \quad (2.4)$$

2. Il s'agit évidemment d'une approximation : en réalité les extrémités, même si elles sont encastrées dans le substrat qui est massif, sont susceptibles de se déplacer. Cela sera pris en compte dans la simulation par éléments finis du résonateur.

on peut trouver les solutions de l'équation (2.2) sous la forme $u(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + c_3 \cosh kx + c_4 \sinh kx$, où le vecteur d'onde k doit vérifier la relation :

$$\cos(kL) \cosh(kL) = 1 \quad (2.5)$$

qui ne peut être satisfaite que pour un ensemble discret $\{k_n\}$ de vecteurs d'onde. On obtient ainsi un ensemble de solutions $u_n(x)$ correspondant aux pulsations discrètes $\Omega_n = k_n^2 \sqrt{D/e\rho}$, définies par la relation de dispersion (2.3). On peut également vérifier à partir de l'équation (2.5) que les k_n sont inversement proportionnels à L et que la dépendance de Ω_n est bien en e/L^2 comme nous l'avions indiqué dans le premier chapitre (eq. (1.58)).

De manière plus générale, les solutions de l'équation (2.1) avec les conditions aux limites (2.4) ne sont pas uniformes selon la largeur et s'écrivent sous la forme $u_n(x, y)$ avec une dépendance explicite en y . L'ensemble de ces solutions fournit une base orthogonale des modes de vibration du résonateur. Toute déformation $u(x, y)$ peut être décomposée sur ces modes propres selon la relation :

$$u(x, y, t) = \sum_n a_n(t) u_n(x, y) \quad (2.6)$$

où $a_n(t)$ sont les amplitudes des différents modes acoustiques et dépendent des forces qui s'appliquent sur le résonateur [124, 23]. En intégrant les densités d'énergie sur le volume du résonateur à partir de l'équation du mouvement (2.1), nous pouvons écrire l'énergie mécanique totale du résonateur comme la somme des énergies mécaniques individuelles de chaque mode propre :

$$\mathcal{E} = \sum_n \frac{1}{2} M_n \left(\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 a_n^2(t) \right) \quad (2.7)$$

où la masse M_n représente la masse de la partie du résonateur mise en mouvement par le n -ième mode [124], définie par :

$$M_n = \rho e \int_S dx dy |u_n(x, y)|^2 \quad (2.8)$$

L'expression (2.7) fait apparaître l'énergie d'une somme d'oscillateurs harmoniques de masse M_n et de pulsation Ω_n . La décomposition modale (2.6) permet donc de considérer le mouvement global du résonateur comme la somme des mouvements de chacun de ses modes de vibration, qui correspondent à des oscillateurs harmoniques libres et non amortis.

2.1.2 Dynamique d'un résonateur soumis à une force et à la dissipation

Dans la partie précédente nous avons considéré un résonateur complètement découplé de son environnement ; nous analysons ici l'effet d'une force appliquée sur le résonateur et

l'effet de la dissipation sur l'évolution des amplitudes des modes propres acoustiques.

Effet d'une force

Au membre de droite de l'équation (2.1) on ajoute d'abord le terme $F(\mathbf{r}, t)$ qui représente la force par unité de surface, définie en tout point \mathbf{r} de la surface du résonateur. Il peut s'agir par exemple de la pression de radiation qu'exerce un faisceau lumineux sur le miroir déposé à la surface du résonateur. Le travail \mathcal{W} qui s'ajoute à l'énergie totale \mathcal{E} (éq. (2.7)) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{W} = -\langle F(\mathbf{r}, t), u(\mathbf{r}, t) \rangle = \int_{\mathcal{S}} d^2r F(\mathbf{r}, t) u(\mathbf{r}, t) \quad (2.9)$$

où $\langle F, u \rangle$ représente le recouvrement transverse des deux fonctions, intégré sur la surface \mathcal{S} du résonateur. En utilisant la décomposition modale (2.6) dans l'expression (2.9), on trouve que l'énergie totale vaut maintenant :

$$\mathcal{E} + \mathcal{W} = \sum_n \left[\frac{1}{2} M_n \left(\frac{d^2 a_n(t)}{dt^2} + \Omega_n^2 a_n^2(t) \right) - \langle F(\mathbf{r}, t), u_n(\mathbf{r}) \rangle a_n(t) \right] \quad (2.10)$$

Elle est encore représentée par la somme des énergies d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques indépendants, chacun étant soumis à une force $\langle F, u_n \rangle$, qui représente le recouvrement spatial entre la force et le profil spatial du mode acoustique.

Si on résoud une équation similaire à (2.1) où on ajoute la force $F(\mathbf{r}, t)$ et on utilise la décomposition (2.6), on obtient l'équation d'évolution des amplitudes $a_n(t)$ des modes acoustiques :

$$\frac{d^2 a_n}{dt^2} + \Omega_n^2 a_n = \frac{1}{M_n} \langle F, u_n \rangle \quad (2.11)$$

Pour des petits déplacements, la théorie de la réponse linéaire permet d'obtenir l'amplitude spectrale de chaque mode en fonction du recouvrement de la force appliquée avec le mode n , en transposant l'équation (2.11) dans l'espace de Fourier :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] \langle F[\Omega], u_n \rangle \quad (2.12)$$

où $\chi_n[\Omega] = 1/M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2)$ représente la susceptibilité mécanique d'un oscillateur harmonique non amorti de masse M_n et de fréquence propre Ω_n .

Effet de la dissipation

La décomposition (2.6) en modes propres équivalents à des oscillateurs harmoniques permet également de décrire le comportement d'un résonateur couplé à son environnement thermique et soumis à la dissipation, de manière similaire à ce que nous avons présenté dans la section 1.1.3. Les pertes associées à la dissipation peuvent être modélisées par

un terme de frottement visqueux, tandis que les fluctuations nécessairement ajoutées par le couplage avec l'environnement sont décrites par des forces de Langevin F_{T_n} agissant sur chaque mode de vibration. L'équation (2.12) d'évolution du mode n devient dans ces conditions :

$$a_n[\Omega] = \chi_n[\Omega] (\langle F[\Omega], u_n \rangle + F_{T_n}[\Omega]) \quad (2.13)$$

où la susceptibilité mécanique prend en compte le frottement visqueux supplémentaire sous la forme d'un taux d'amortissement Γ_n :

$$\chi_n[\Omega] = \frac{1}{M_n(\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n\Omega)} \quad (2.14)$$

Comme dans la section 1.1.3, le spectre des fluctuations de la force de Langevin F_{T_n} est relié à l'amortissement par le théorème fluctuation-dissipation donné par l'équation (1.20) :

$$\mathcal{S}_{T_n}[\Omega] = \hbar \coth\left(\frac{\hbar\Omega}{2k_B T}\right) \text{Im}\left(\frac{1}{\chi_n[\Omega]}\right) \quad (2.15)$$

Remarquons que cette expression du théorème fluctuation-dissipation n'est correcte que si les forces F_{T_n} agissent indépendamment sur chaque mode, ce qui n'est une approximation valide que dans le cas de pertes homogènes [163, 162]. La présence des couches diélectriques du miroir sur notre résonateur par exemple peut faire apparaître des pertes inhomogènes qui couplent les modes de vibration entre eux.

2.2 Les champs électromagnétiques dans une cavité Fabry-Perot

Dans la section précédente nous avons vu que les petits déplacements du miroir mobile de notre cavité Fabry-Perot sont en fait liés aux déformations de la surface dues aux modes acoustiques du résonateur. Nous avons également établi l'équivalence formelle de la dynamique du résonateur avec celle d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques. Dans cette section nous étudions plus en détail le champ dans la cavité et la façon dont il est sensible au mouvement du résonateur. En utilisant la décomposition modale présentée dans la section précédente, nous allons montrer qu'une description monodimensionnelle du mouvement est possible, faisant ainsi le lien avec la présentation simplifiée donnée dans le premier chapitre.

Nous décrirons ensuite l'évolution et les états stationnaires du champ intracavité, d'abord d'un point de vue classique, puis quantique en utilisant l'approche semi-classique. Nous relierons ainsi les fluctuations des quadratures du champ aux petits déplacements du résonateur, ce qui nous permettra de déterminer la sensibilité de la mesure de déplacements.

2.2.1 Le couplage optomécanique

Nous résumons ici l'approche qui permet de décrire le couplage entre un faisceau laser et les modes internes du miroir mobile [124, 36, 22, 3] : bien que basée sur une description multi-mode du mouvement du résonateur, elle permet de définir un déplacement équivalent monodimensionnel x qui simplifie beaucoup les calculs ultérieurs. Ce déplacement est relié au recouvrement spatial entre le profil gaussien du faisceau lumineux et celui des modes acoustiques.

Effet de la déformation du résonateur sur le champ en cavité

Si la cavité est non dégénérée, un seul mode du champ est résonnant en cavité, normalement le mode TEM₀₀ ; si on considère une cavité plan-concave, le faisceau incident au niveau du résonateur plan a un profil spatial gaussien de la forme [91] :

$$v_0(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w_0^2}} e^{-\mathbf{r}^2/w_0^2} \quad (2.16)$$

où w_0 est le col du faisceau (*minimum waist*), situé au niveau du résonateur. Sur ce plan, le champ électromagnétique de fréquence optique ω_0 et d'amplitude lentement variable $\alpha(t)$ est de la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r}) \alpha(t) e^{-i\omega_0 t} \quad (2.17)$$

Quand le champ est réfléchi par le miroir mobile, dont le déplacement en un point \mathbf{r} de sa surface est donné par la déformation $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ défini dans la section précédente, le champ subit un déphasage qui dépend du point \mathbf{r} et qui s'écrit :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = v_0(\mathbf{r}) \alpha(t) e^{-i\omega_0 t} e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)} \quad (2.18)$$

La présence de l'exponentielle en $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ implique que la projection du champ réfléchi sur la base des modes propres du champ électromagnétique dans la cavité possède des composantes non nulles sur des modes d'ordre plus élevé, et donc le champ après réflexion n'est plus purement un TEM₀₀. Cependant, la cavité elle-même sélectionne le mode fondamental : en effet, pour une cavité plan-concave de longueur L et de rayon de courbure R du miroir d'entrée, supposé grand devant L , l'intervalle entre modes transverses est donné par [91] :

$$\nu_{tr} = \frac{c}{2\pi\sqrt{LR}} \quad (2.19)$$

Pour une cavité de quelque millimètres de long avec un miroir de quelques centimètres de rayon de courbure, l'intervalle entre les fréquences optiques de la cavité est de l'ordre de la dizaine de GHz, donc beaucoup plus grand que les fréquences typiques d'évolution de $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ qui sont de l'ordre de la dizaine de MHz. Les composantes transverses du champ réfléchi ne sont donc pas résonnantes dans la cavité et le champ réfléchi est de ce fait formé par la seule projection du champ (2.18) sur le mode fondamental de la cavité :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = \langle v_0(\mathbf{r}) e^{2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}, v_0(\mathbf{r}) \rangle \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.20)$$

Pour des déplacements petits par rapport à la longueur d'onde du faisceau laser, on peut développer au premier ordre cette expression, qui devient :

$$\mathcal{E}'(\mathbf{r}, t) = (1 + 2i\mathbf{k} \cdot \langle \mathbf{u}, v_0^2 \rangle) \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.21)$$

Lors de sa réflexion sur le résonateur, le champ subit donc uniquement un déphasage proportionnel au déplacement pondéré par l'intensité locale du champ (terme $\langle u, v_0^2 \rangle$ où u est le déplacement longitudinal du résonateur auquel est sensible la lumière de vecteur d'onde k). Cette expression permet de faire une analogie avec le modèle unidimensionnel présenté dans le chapitre 1 (voir par exemple l'équation (1.30)), puisque le déphasage du champ réfléchi par le résonateur peut s'écrire $2ikx(t)$ où le déplacement effectif unidimensionnel $x(t)$ est défini par :

$$x(t) = \langle u(t), v_0^2 \rangle \quad (2.22)$$

La description unidimensionnelle de l'effet du mouvement d'un miroir donnée dans le premier chapitre peut ainsi être généralisée au cas d'un résonateur mécanique : le déplacement $x(t)$ vu par la lumière dépend du recouvrement spatial entre l'intensité du champ dans la

cavité et la déformation du résonateur.

Dans la prochaine partie nous allons déterminer la forme de ces déplacements quand le résonateur est soumis à une force de pression de radiation et nous allons définir la masse effective du résonateur.

Susceptibilité et masse effectives du résonateur

Pour analyser le comportement d'un résonateur soumis à la force de pression de radiation du champ dans la cavité, nous utilisons l'expression (2.13) de l'amplitude des modes mécaniques d'un résonateur sujet à une force quelconque. Le profil de la force de pression de radiation exercée par le faisceau intracavité³ sur le résonateur s'écrit comme :

$$F_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = 2\hbar k |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = 2\hbar k v_0^2(\mathbf{r}) I(t) \quad (2.23)$$

Si on utilise cette expression pour la force $F[\Omega]$ dans l'équation (2.13) et la décomposition modale donnée par l'équation (2.6), on peut écrire le déplacement effectif (2.22) à la pulsation Ω sous la forme [124] :

$$\begin{aligned} x[\Omega] &= \sum_n \langle u_n, v_0^2 \rangle \chi_n[\Omega] (\langle F_{\text{rad}}[\Omega], u_n \rangle + F_{T_n}[\Omega]) \\ &= \sum_n \langle u_n, v_0^2 \rangle^2 \chi_n[\Omega] \left(2\hbar k I[\Omega] + \frac{1}{\langle u_n, v_0^2 \rangle} F_{T_n}[\Omega] \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Nous allons montrer que le mouvement du résonateur sous l'effet de la pression de radiation et de l'agitation thermique peut s'écrire sous une forme équivalente au traitement monodimensionnel du chapitre 1 (équations (1.14) et (1.52)), à condition de redéfinir convenablement la masse, la susceptibilité et la force de Langevin. Tout d'abord, l'expression (2.24) peut être écrite sous la forme :

$$x[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\text{eff}}[\Omega] \left(2\hbar k I[\Omega] + \frac{1}{\langle u_n, v_0^2 \rangle} F_{T_n}[\Omega] \right) \quad (2.25)$$

où on a défini une susceptibilité effective χ_n^{eff} qui dépend du recouvrement $\langle u_n, v_0^2 \rangle$ entre le profil spatial du mode n et le faisceau dans le mode fondamental, à travers une masse effective M_n^{eff} définie par :

$$\chi_n^{\text{eff}}[\Omega] = \frac{1}{M_n^{\text{eff}} (\Omega_n^2 - \Omega^2 - i\Gamma_n \Omega)} \quad (2.26)$$

$$M_n^{\text{eff}} = \frac{M_n}{\langle u_n, v_0^2 \rangle^2} \quad (2.27)$$

3. L'intensité du faisceau intracavité est définie par : $I(t) = \int_{\mathcal{S}} d^2r |\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)|^2 = |\alpha(t)|^2$

Le mode acoustique correspond donc à un oscillateur harmonique dont la masse dépend de son adaptation spatiale avec le faisceau lumineux. Si les modes acoustique et optique sont bien adaptés entre eux ($\langle u_n, v_0^2 \rangle$ grand), la masse effective est réduite, signifiant que la lumière sera très sensible aux déplacements provoqués par ce mode. La masse peut par contre devenir infinie si le recouvrement entre le faisceau et le mode acoustique est nul, par exemple si le laser se trouve sur un nœud du mode mécanique. Dans ce cas particulier, le champ ne sera pas sensible au mouvement du miroir lié à ce mode propre.

Finalement, pour décrire le comportement global du résonateur soumis à la pression de radiation et couplé à un bain thermique, on définit la susceptibilité et la force de Langevin effectives totales par :

$$\chi_{\text{eff}}[\Omega] = \sum_n \chi_n^{\text{eff}}[\Omega] \quad \text{et} \quad F_{\text{T}}^{\text{eff}}[\Omega] = \frac{1}{\chi_{\text{eff}}[\Omega]} \sum_n \frac{\chi_n^{\text{eff}}[\Omega]}{\langle u_n, v_0^2 \rangle} F_{\text{T}_n}^{\text{eff}} \quad (2.28)$$

On peut montrer que la force de Langevin effective ainsi définie satisfait le théorème fluctuation-dissipation associé à la susceptibilité χ_{eff} (équation (2.15)), et les expressions (2.28) permettent d'écrire le déplacement effectif x du résonateur donné par (2.25) sous la forme :

$$x[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega] \left(2\hbar k I[\Omega] + F_{\text{T}}^{\text{eff}}[\Omega] \right) \quad (2.29)$$

Ce résultat rend explicite l'équivalence formelle du mouvement du résonateur tel qu'il est vu par le faisceau, avec le déplacement unidimensionnel utilisé dans le chapitre 1. La force de pression de radiation s'écrit simplement $2\hbar k I$ où I est l'intensité totale du faisceau intracavité (voir l'équation (1.52)). La réponse $x[\Omega]$ du miroir a la même expression que dans le chapitre 1 (équation (1.15)), si ce n'est que la susceptibilité effective χ_{eff} n'est plus celle d'un simple oscillateur harmonique mais contient les contributions de tous les modes acoustiques propres du résonateur, pondérées par leur recouvrement spatial avec le faisceau laser.

2.2.2 Évolution du champ dans une cavité

Nous allons décrire dans cette partie l'évolution du champ dans la cavité Fabry-Perot en prenant en compte les conséquences du mouvement du miroir. La cavité est composée du résonateur sur lequel est déposé un miroir supposé totalement réfléchissant, et d'un miroir d'entrée dont la transmission est non nulle (voir FIG. 2.2). A la différence du traitement réalisé dans le chapitre 1, nous prendrons en compte les éventuelles pertes dans la cavité, qui peuvent être dues à l'absorption ou la diffusion de la lumière sur les miroirs, ou encore à une réflectivité imparfaite du miroir mobile. Comme nous nous intéressons principalement au champ réfléchi par la cavité, ces pertes peuvent être prises en compte en donnant une transmission non nulle au miroir arrière.

Dans ces conditions, on note R et T les coefficients de réflexion et de transmission en intensité du miroir d'entrée ($r = \sqrt{R}$ et $t = \sqrt{T}$ étant les coefficients en amplitude). On note L_0 la longueur de la cavité lorsque le miroir mobile est à repos, et P la transmission en intensité du miroir mobile. La cavité ayant une grande finesse, on supposera T et P petits devant 1.

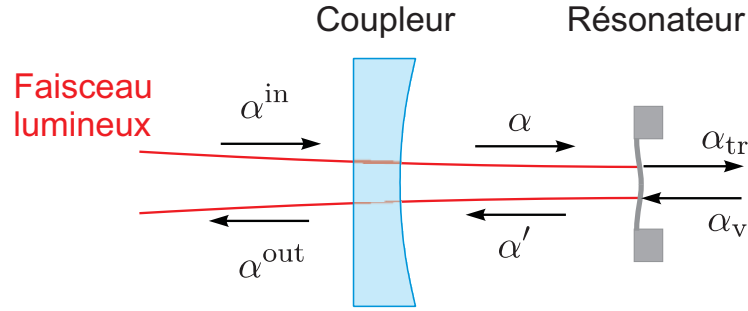


FIGURE 2.2 – Définition des conventions pour les champs incident, intracavité, réfléchi et transmis par la cavité

Suivant la notation des champs donnée en FIG. 2.2, les relations linéaires d'entrée-sortie des champs permettent d'exprimer le champ intracavité α à un instant t comme la somme de la partie du champ incident transmise par le miroir d'entrée et le champ α' ayant déjà effectué un aller-retour dans la cavité ; de même, le champ réfléchi $\alpha^{\text{out}}(t)$ est formé par la partie immédiatement réfléchi de α^{in} et la partie transmise de α' . On a ainsi les relations linéaires suivantes :

$$\begin{cases} \alpha(t) &= t \alpha^{\text{in}}(t) + r \alpha'(t) \\ \alpha^{\text{out}}(t) &= t \alpha'(t) - r \alpha^{\text{in}}(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

L'unitarité de ces relations impose l'égalité $r^2 + t^2 = 1$ et, comme $T \ll 1$, on peut approximer le coefficient de réflexion par $r \simeq 1 - T/2$. Le même type de relations d'entrée-sortie sont valables pour le miroir mobile, entre les champs α , α' , α_{tr} (champ transmis représentant les pertes) et α_v (fluctuations du vide entrant par le miroir arrière) :

$$\begin{cases} \alpha'(t + \tau/2) e^{-i\Psi(t)/2} &= \sqrt{P} \alpha_v(t) + (1 - P/2) \alpha(t - \tau/2) e^{i\Psi(t)/2} \\ \alpha_{\text{tr}}(t) &= \sqrt{P} \alpha(t - \tau/2) e^{i\Psi(t)/2} - (1 - P/2) \alpha_v(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

Dans ces équations, on a pris en compte le temps de propagation de la lumière sur un aller-retour dans la cavité, égal à $\tau = 2L(t)/c$, et le déphasage $\Psi(t)$ subi par le champ sur un tour, défini par :

$$\Psi(t) \equiv 2kL(t)[2\pi] \quad (2.32)$$

où k est le vecteur d'onde du champ et $L(t)$ la longueur instantanée de la cavité, définie à

partir de la longueur au repos L_0 et des déplacements $x(t)$ du micro-miroir :

$$L(t) = L_0 + x(t) \quad (2.33)$$

Grâce à l'équivalence établie dans la partie 2.2.1 (équation (2.29)), nous avons utilisé dans cette équation un déplacement unidimensionnel $x(t)$ pour décrire les déplacements du micro-miroir. Pour des déplacements petits par rapport à la longueur de la cavité, les variations du temps de propagation τ , qui a priori dépend de $x(t)$, peuvent être négligées et on a $\tau = 2L_0/c$.

Si on suppose de plus la cavité de grande finesse ($T, P \ll 1$) et proche de résonance ($\Psi(t) \ll 1$), l'enveloppe $\alpha(t)$ du champ varie peu sur un seul aller-retour, ce qui permet d'écrire une équation différentielle pour l'évolution du champ dans la cavité :

$$\tau \frac{d}{dt} \alpha(t) = [-\gamma + i\Psi(t)] \alpha(t) + \sqrt{T} \alpha^{\text{in}}(t) + \sqrt{P} \alpha_v(t) \quad (2.34)$$

$$\alpha^{\text{out}}(t) = \sqrt{T} \alpha(t) - \alpha^{\text{in}}(t) \quad (2.35)$$

$$\alpha_{\text{tr}}(t) = \sqrt{P} \alpha(t) - \alpha_v(t) \quad (2.36)$$

$$\Psi(t) = \Psi_0 + 2k x(t) \quad (2.37)$$

où $\Psi_0 \equiv 2k L_0[2\pi]$ est le déphasage de la cavité lorsque le miroir mobile est au repos, et $2\gamma = T + P$ représente les pertes totales de la cavité (y compris la transmission du coupleur d'entrée).

État stationnaire des champs

Ces équations permettent de déterminer les champs moyens stationnaires pour les champs réfléchi, transmis et intracavité, en annulant la dérivée dans l'équation (2.34) et par substitution dans les équations (2.35) et (2.36). On obtient :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{\text{in}} \quad , \quad \bar{\alpha}^{\text{out}} = \frac{\gamma - P + i\bar{\Psi}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{\text{in}} \quad , \quad \bar{\alpha}_{\text{tr}} = \frac{\sqrt{TP}}{\gamma - i\bar{\Psi}} \bar{\alpha}^{\text{in}} \quad (2.38)$$

où on a introduit le déphasage moyen du champ $\bar{\Psi} = \Psi_0 + 2k \bar{x}$, qui dépend du déplacement moyen \bar{x} du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne, égale à $2\hbar k \bar{I}$. Le déphasage $\bar{\Psi}$ contient donc un terme non linéaire proportionnel à \bar{I} , responsable en particulier d'un effet de bistabilité induit par pression de radiation (voir section 2.3.1).

Lorsque la pression de radiation est suffisamment peu intense, le profil des intensités transmises $|\bar{\alpha}_{\text{tr}}|^2$ et réfléchiées $|\bar{\alpha}_{\text{out}}|^2$ en fonction du désaccord de la cavité est un pic d'Airy autour de la résonance optique de largeur 2γ , comme représenté sur la FIG. 2.3. Sur cette figure on remarque que l'intensité réfléchie décrit un pic en absorption, car la lumière qui

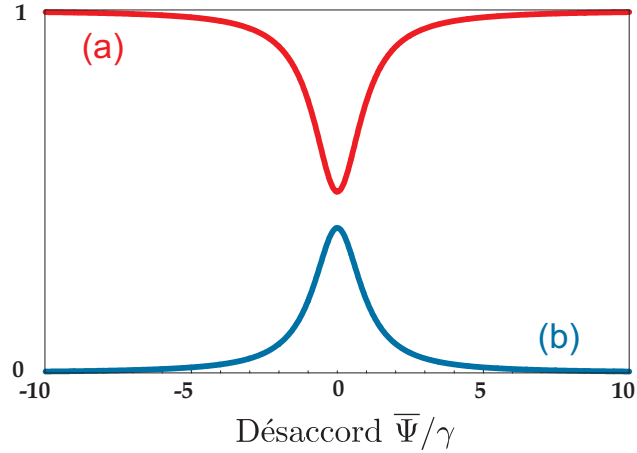


FIGURE 2.3 – Intensité réfléchie (a) et transmise (b) par une cavité optique présentant des pertes, en fonction du désaccord $\bar{\Psi}/\gamma$.

entre dans la cavité à résonance est en partie perdue à cause des pertes. L'amplitude du pic en réflexion est donnée par le coefficient de réflexion à résonance \mathcal{R} , défini comme le rapport entre l'intensité à résonance et hors-résonance :

$$\mathcal{R} = \frac{\bar{I}_{\bar{\Psi}=0}^{\text{out}}}{\bar{I}_{\bar{\Psi}=\pm\infty}^{\text{out}}} = \left[\frac{T - P}{T + P} \right]^2 \quad (2.39)$$

Remarquons que si la transmission est égale aux pertes ($T = P$), le champ moyen réfléchi s'annule complètement à résonance. On se trouve dans une situation équivalent à celle d'une cavité symétrique sans perte dont les deux miroirs ont la même transmission, pour laquelle toute l'intensité est transmise (rappelons que les pertes de la cavité ont été modélisées par une transmission non nulle du miroir arrière).

L'intensité intracavité \bar{I} a une dépendance lorentzienne en fonction du déphasage, centrée sur la résonance et de largeur 2γ . La finesse, définie comme le rapport entre l'intervalle spectral libre et la largeur du pic d'Airy, s'écrit ainsi :

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{2\gamma} = \frac{2\pi}{T + P} \quad (2.40)$$

L'équation (2.38) montre qu'à résonance l'intensité intracavité est amplifiée par un facteur $4T/(T + P)^2$ par rapport à l'intensité incidente. Pour une cavité sans perte, ce facteur vaut précisément $2\mathcal{F}/\pi$, et on retrouve l'effet d'amplification décrit dans le premier chapitre (voir l'équation (1.31)).

2.2.3 Mesure de petits déplacements

Dans cette section nous nous intéressons à la mesure des déplacements du micro-miroir et aux limites de sensibilité dues aux fluctuations quantiques des champs. Nous utilisons pour cela la méthode semi-classique, que nous avons déjà présentée dans le chapitre 1, puisque le champ injecté dans la cavité est un champ intense dont la valeur moyenne $\bar{\alpha}$ est grande devant les fluctuations semi-classiques $\delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$. Nous pouvons ainsi linéariser les équations d'évolution de la distribution de Wigner, ce qui permet de décrire l'évolution des fluctuations quantiques du système par les équations classiques linéarisées au premier ordre des fluctuations $\delta\alpha$ [128, 53].

Nous nous plaçons par ailleurs à résonance avec la cavité ($\bar{\Psi} = 0$) puisque nous avons montré dans le chapitre 1 que la sensibilité de la phase du champ réfléchi aux déplacements du miroir est maximale à résonance (voir la FIG. 1.6). Dans ces conditions, les équations (2.38) donnant les champs moyens se simplifient et tous les champs ont la même phase, que nous pouvons choisir arbitrairement réelle.

Évolution des quadratures dans la cavité

Nous écrivons les relations d'entrée-sortie des fluctuations dans l'espace de Fourier en linéarisant les équations (2.34) à (2.37) autour de la valeur moyenne des champs. Pour une cavité à résonance ($\bar{\Psi} = 0$), on obtient :

$$(\gamma - i\Omega\tau)\delta\alpha[\Omega] = \sqrt{T}\delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{P}\delta\alpha_v[\Omega] + 2ik\bar{\alpha}\delta x[\Omega] \quad (2.41)$$

$$\delta\alpha^{\text{out}}[\Omega] = \sqrt{T}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] \quad (2.42)$$

$$\delta\alpha_{\text{tr}}[\Omega] = \sqrt{P}\delta\alpha[\Omega] - \delta\alpha_v[\Omega] \quad (2.43)$$

Nous allons désormais écrire les quadratures d'intensité et de phase, qui sont liées aux fluctuations d'intensité et de phase du champ selon les équations (1.42) et (1.43). Pour un champ moyen réel, les quadratures d'intensité p et de phase q du champ α s'identifient aux quadratures réelles et imaginaires données par les équations (1.39) :

$$\delta p[\Omega] = \delta\alpha[\Omega] + \delta\alpha^*[\Omega] \quad (2.44)$$

$$\delta q[\Omega] = i(\delta\alpha^*[\Omega] - \delta\alpha[\Omega]) \quad (2.45)$$

où nous avons utilisé l'égalité $\delta\alpha^*[\Omega] = (\delta\alpha[-\Omega])^*$ pour la transformé de Fourier de $\delta\alpha^*(t)$.

En substituant les équations (2.41) et (2.42) dans les expressions (2.44) et (2.45), nous pouvons écrire les fluctuations d'intensité et de phase des champs intracavité et réfléchi

sous la forme :

$$(\gamma - i\Omega\tau) \delta p[\Omega] = \sqrt{T} \delta p^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{P} \delta p_v[\Omega] \quad (2.46)$$

$$(\gamma - i\Omega\tau) \delta q[\Omega] = \sqrt{T} \delta q^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{P} \delta q_v[\Omega] + 4\bar{\alpha} k \delta x[\Omega] \quad (2.47)$$

$$(\gamma - i\Omega\tau) \delta p^{\text{out}}[\Omega] = (\gamma - P + i\Omega\tau) \delta p^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{TP} \delta p_v[\Omega] \quad (2.48)$$

$$(\gamma - i\Omega\tau) \delta q^{\text{out}}[\Omega] = (\gamma - P + i\Omega\tau) \delta q^{\text{in}}[\Omega] + \sqrt{TP} \delta q_v[\Omega] + 4\sqrt{T}\bar{\alpha} k \delta x[\Omega] \quad (2.49)$$

où δx représente les fluctuations de position du micro-miroir.

Ces équations montrent qu'à résonance les fluctuations de phase et d'intensité du champ sont découplées et que seules les fluctuations de phase dépendent de la position du micro-miroir. Cela peut être interprété en remarquant que le point de fonctionnement d'une cavité à résonance se trouve au sommet du pic d'Airy, là où la pente de variation de l'intensité en fonction du déphasage est nulle. L'intensité est donc indépendante au premier ordre du mouvement du miroir.

Les équations (2.46) à (2.49) montrent que les expressions des fluctuations intracavités et sortantes admettent au dénominateur un terme $(\gamma - i\Omega\tau)$ qui représente le filtrage par la cavité. Cela peut être interprété intuitivement en considérant que la cavité moyenne les fluctuations de position du miroir sur le temps de stockage de la lumière dans la cavité. Elle se comporte donc comme un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure correspond à la bande passante de la cavité, égale à :

$$\Omega_c = \gamma/\tau \quad (2.50)$$

Cet effet de filtrage a pour conséquence de limiter la sensibilité à haute fréquence de la mesure des déplacements du micro-miroir, comme nous allons le voir dans la section suivante. Il peut également être utilisé pour filtrer les fluctuations classiques d'un faisceau laser, comme c'est le cas avec la cavité de filtrage placée dans la source laser de notre montage expérimental (voir section 3.2.2).

Notons enfin que l'expression (2.49) des fluctuations de phase du faisceau réfléchi est équivalente à l'équation simplifiée (1.50) donnée dans le chapitre 1, à condition de considérer une cavité sans perte ($P = 0$) et des déplacements à basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_c$).

Sensibilité de la mesure

À partir d'un spectre de bruit donnée par l'équation (1.47) dans le premier chapitre, nous pouvons écrire le spectre $S_q^{\text{out}}[\Omega]$ des fluctuations du faisceau réfléchi, qui est la quantité à laquelle nous avons accès expérimentalement. En considérant que tous les bruits

incidents sont décorrélés, cela donne :

$$\begin{aligned}
(\gamma^2 + \Omega^2 \tau^2) S_q^{\text{out}}[\Omega] &= ((\gamma - P)^2 + \Omega^2 \tau^2) S_q^{\text{in}}[\Omega] + TP S_q^v[\Omega] \\
&+ \left(\frac{16\pi}{\lambda} \frac{T}{T+P} \right)^2 \bar{I}^{\text{in}} S_x[\Omega]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Les deux premiers termes sont des termes de bruit qui correspondent aux spectres filtrés par la cavité des bruits de phase du faisceau incident et du vide associé aux pertes. Le dernier terme représente le signal qu'on cherche à mesurer, proportionnel au spectre des vibrations du micro-miroir.

Comme nous l'avons fait en section 1.2.3, nous pouvons estimer le plus petit déplacement mesurable en considérant un rapport signal à bruit égal à 1. Pour un faisceau cohérent injecté dans la cavité, le bruit de phase incident est un bruit blanc, qui possède un spectre indépendant de la fréquence et égal à un ($S_q^{\text{in}}[\Omega] = S_q^v[\Omega] = 1$). Le déplacement minimal observable $\delta x_{\text{shot}}[\Omega]$ à une fréquence d'analyse Ω vaut alors :

$$\delta x_{\text{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}} \frac{1}{\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}} \frac{T+P}{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c} \right)^2}. \tag{2.52}$$

La dépendance de cette expression avec la fréquence montre que la sensibilité diminue pour des fréquences supérieures à la bande passante Ω_c , à cause de l'effet de filtrage de la cavité. Ce résultat généralise l'expression (1.51) donnée dans la section 1.2.3, qui n'était valable que dans le cas basse fréquence et pour une cavité sans perte. Remarquons que la présence des pertes réduit la sensibilité d'un facteur $T/(T+P)$ par rapport au cas idéal d'une cavité sans perte.

2.2.4 Adaptation spatiale du faisceau incident

Les pertes dans la cavité ne sont pas la seule cause possible de dégradation de la sensibilité de la mesure. Parmi les autres possibilités, on peut citer le rendement quantique η_{PhD} de la détection, qui se traduit par une augmentation d'un facteur $1/\sqrt{\eta_{\text{PhD}}}$ du plus petit déplacement mesurable, ou l'adaptation spatiale du faisceau laser sur la cavité, que nous examinons ici.

Nous avons jusqu'à présent considéré le faisceau incident adapté au mode fondamental TEM_{00} de la cavité. Dans le cas contraire, la projection du faisceau sur les modes propres de la cavité possède des composantes non nulles pour des modes d'ordre supérieur ; ces modes ayant des fréquences de résonance différentes de celle du mode fondamental, ils sont simplement réfléchis par la cavité. Ainsi une partie de la lumière incidente ne pénètre pas dans la cavité, ce qui diminue le signal.

Nous pouvons décomposer le champ incident sur le mode fondamental plus une partie

qui prend en compte tous les autres modes transverses :

$$\alpha^{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \alpha_0^{\text{in}}(t) v_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega_0 t} + \beta'(\mathbf{r}, t) \quad (2.53)$$

où $\alpha_0(t)$ est l'amplitude du mode TEM₀₀ et $\beta'(\mathbf{r}, t)$ la contribution de tous les autres modes.

Le paramètre d'adaptation spatiale η_{cav} est défini comme le rapport entre l'intensité incidente réellement couplée à la cavité et l'intensité totale incidente, ce qui permet d'écrire :

$$\alpha_0^{\text{in}}(t) = \sqrt{\eta_{\text{cav}}} \alpha^{\text{in}}(t) \quad (2.54)$$

Dans le cas d'une adaptation spatiale parfaite, ce paramètre vaut $\eta_{\text{cav}} = 1$ et on retrouve la sensibilité calculée précédemment. Dans le cas contraire, le champ $\beta'(\mathbf{r}, t)$ est directement réfléchi et seule l'intensité $\eta_{\text{cav}} \bar{I}^{\text{in}}$ est couplée au résonateur. D'après la relation (2.52), le déplacement minimum observable devient $\delta x_{\text{shot}}[\Omega]/\sqrt{\eta_{\text{cav}}}$: la sensibilité est ainsi réduite d'un facteur $\sqrt{\eta_{\text{cav}}}$.

Notons que l'adaptation spatiale affecte aussi l'intensité moyenne du faisceau réfléchi. Cela peut se comprendre en considérant qu'à résonance la totalité du faisceau ne pénètre pas dans la cavité et donc une partie seulement subit des pertes. En utilisant les équations (2.38), on peut écrire l'intensité réfléchie en tenant compte du facteur η_{cav} :

$$\bar{I}_{\Psi=0}^{\text{out}} = \bar{I}_0^{\text{in}} \left(\frac{T-P}{T+P} \right)^2 + |\bar{\beta}'|^2, \quad \bar{I}_{\Psi=\pm\infty}^{\text{out}} = \bar{I}^{\text{in}} \quad (2.55)$$

Le coefficient de réflexion à résonance, défini par l'équation (2.39), devient alors :

$$\mathcal{R} = 1 - \eta_{\text{cav}} \left[1 - \left(\frac{T-P}{T+P} \right)^2 \right]. \quad (2.56)$$

2.3 Effets de la pression de radiation

Nous revenons dans cette section sur les effets de la pression de radiation sur le système, en nous intéressant d'abord aux effets statiques, qui peuvent provoquer un phénomène de bistabilité pour des grandes intensités intracavité ; nous étudions ensuite les conséquences des fluctuations quantiques de la pression de radiation sur la sensibilité d'une mesure de petits déplacements.

2.3.1 Effets statiques et équivalence avec un milieu non-linéaire

Dans la définition des champs moyens (équations (2.38)), nous avons introduit le déphasage moyen $\bar{\Psi} = \Psi_0 + 2k\bar{x}$, lié au déplacement statique \bar{x} du miroir induit par la force de pression de radiation. Cette déformation moyenne est la somme des contributions statiques de tous les modes acoustiques du micro-miroir et peut être déduite à partir de l'équation (2.29) calculée à fréquence nulle. On obtient ainsi :

$$\bar{x} = 2\hbar k \chi_{\text{eff}}[0] \bar{I} \quad (2.57)$$

où $\bar{I} = |\bar{\alpha}|^2$ est l'intensité moyenne du champ intracavité. Le déphasage moyen du champ s'écrit alors sous la forme :

$$\bar{\Psi} = \Psi_0 + 4\hbar k^2 \chi_{\text{eff}}[0] \bar{I} = \Psi_0 + \Psi_{\text{NL}} \quad (2.58)$$

où nous avons défini le déphasage non-linéaire Ψ_{NL} dû au déplacement du miroir sous l'effet de la pression de radiation moyenne du champ intracavité. Ce terme, proportionnel à l'intensité \bar{I} , introduit une non-linéarité similaire à l'effet Kerr [46] : la présence dans une cavité optique d'un milieu de type Kerr, dont l'indice de réfraction $n(I)$ dépend de l'intensité intracavité, modifie la longueur optique $n(I) \times L$ de la cavité. Dans une cavité à miroir mobile, par contre, c'est la longueur physique L de la cavité qui est directement modifiée par le mouvement du miroir et dépend ainsi de l'intensité \bar{I} du faisceau. Dans les deux cas, la variation du chemin optique provoque un déphasage du faisceau sur un aller-retour qui est proportionnel à l'intensité intracavité moyenne.

En substituant l'expression (2.58) de $\bar{\Psi}$ dans l'équation (2.38), nous pouvons écrire l'intensité intracavité en fonction de l'intensité incidente sous la forme :

$$\bar{I} = \frac{T}{\gamma^2 + (\Psi_0 + 4\hbar k^2 \chi_{\text{eff}}[0] \bar{I})^2} \bar{I}^{\text{in}} \quad (2.59)$$

Si le terme non linéaire au dénominateur est négligeable par rapport à γ , l'intensité intracavité \bar{I} décrit un pic d'Airy en fonction du désaccord Ψ_0 , centré en $\Psi_0 = 0$ et de largeur 2γ

comme on l'a vu plus haut (section 2.2.2). Dans le cas contraire, l'équation (2.59) apparaît comme une équation du troisième degré, qui présente jusqu'à trois solutions stationnaires pour \bar{I} en fonction du déphasage Ψ_0 , dont deux sont stables. Ceci conduit à un effet de bistabilité pour lequel le pic d'Airy est déformé par les effets non linéaires, comme le montre la FIG. 2.4. Cette bistabilité optomécanique a été observée pour la première fois en 1983 [46].

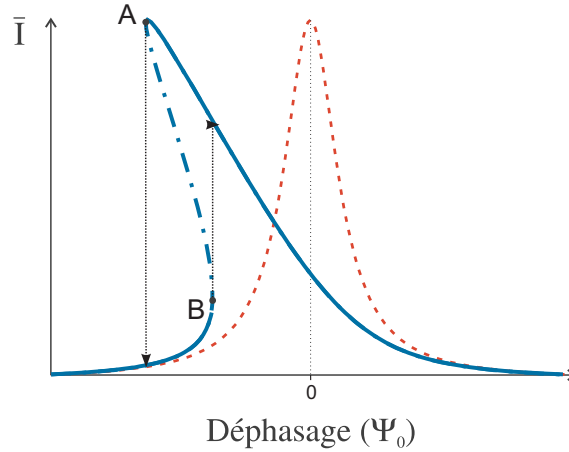


FIGURE 2.4 – Bistabilité induite par la pression de radiation. Le pic d'Airy obtenu à faible puissance lumineuse (pointillés rouges) se déforme jusqu'à obtenir un effet d'hystérésis à plus forte puissance. La zone pointillée entre les points tournants A et B correspond à une branche instable.

La grande similitude entre le couplage optomécanique et un effet Kerr a suggéré d'utiliser la pression de radiation pour créer par exemple des états comprimés de la lumière [126, 15, 16, 103], ou encore pour effectuer une mesure quantique non-destructive (QND) des fluctuations d'intensité d'un faisceau intense en mesurant les fluctuations de phase d'un second faisceau envoyé dans la cavité [80, 123, 75, 152].

2.3.2 Fluctuations quantiques de la pression de radiation et limite quantique standard

Nous avons vu dans le chapitre 1 que la pression de radiation a un effet d'action en retour dans la mesure qui conduit à l'existence d'une limite quantique standard pour la sensibilité de la mesure (section 1.2.4). Nous allons retrouver ici ce résultat, à partir de la description plus complète du couplage optomécanique présentée dans les sections précédentes.

D'après les équations (1.53) ou (2.29), les fluctuations de la force de pression de radiation sont proportionnelles aux fluctuations de l'intensité intracavité, elles-mêmes reliées à la quadrature d'intensité par la relation $\delta I = \bar{\alpha} \delta p$. En utilisant l'expression (2.46) de δp

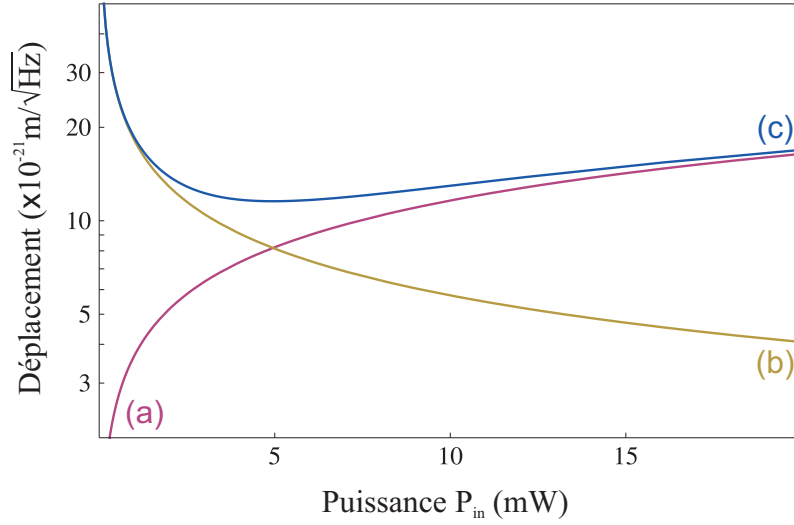


FIGURE 2.5 – Sensibilité d’une mesure de déplacement en fonction de la puissance incidente. La courbe (a) représente le bruit quantique de pression de radiation, la courbe (b) le bruit de phase du faisceau incident, et la courbe (c) la somme des deux contributions. Les courbes sont tracées à basse fréquence, où $\chi[\Omega \simeq 0] \simeq 1/M\Omega_m^2$, avec $M = 20 \mu\text{g}$ et $\Omega_m/2\pi = 1 \text{ MHz}$. La limite quantique standard est atteinte pour une puissance $P_{\text{in}} = 5 \text{ mW}$.

pour une cavité à résonance et sans perte, le bruit de pression de radiation s’écrit sous la forme :

$$\delta x_{\text{rad}}[\Omega] = \chi[\Omega] \delta F_{\text{rad}}[\Omega] = 4\hbar k \chi[\Omega] \frac{\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta p^{\text{in}}[\Omega] \quad (2.60)$$

Comme dans l’expression de $\delta x_{\text{rad}}[\Omega]$ obtenue dans le premier chapitre, on retrouve que les fluctuations d’intensité du champ incident sont amplifiées par la finesse $\mathcal{F} = \pi/\gamma$ de la cavité, mais elles sont également filtrées à des fréquences supérieures à la bande passante $\Omega_c = \gamma/\tau$ de la cavité.

Ce bruit de pression de radiation contamine le mouvement du miroir et limite en fin de compte la mesure, au même titre que le bruit de phase donné par l’équation (2.52). A partir de l’expression de ces deux bruits, nous pouvons calculer le plus petit déplacement mesurable. Pour un faisceau incident cohérent, ces deux bruits sont décorrélés et le bruit total de la mesure est donné par leur somme quadratique $\delta x_{\text{min}} = \sqrt{\delta x_{\text{shot}}^2 + \delta x_{\text{rad}}^2}$, qui s’écrit à basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_c$) :

$$\delta x_{\text{min}} = \sqrt{\frac{\lambda^2}{256 \mathcal{F}^2 \bar{I}^{\text{in}}} + \frac{64 \hbar^2 \mathcal{F}^2 \chi^2[\Omega] \bar{I}^{\text{in}}}{\lambda^2}}. \quad (2.61)$$

Nous avons représenté sur la FIG. 2.5 les deux composantes δx_{shot} et δx_{rad} (courbes (a) et (b)) ainsi que δx_{min} (courbe (c)) : le bruit de phase évolue comme $1/\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}$, alors que le bruit de pression de radiation est proportionnel à $\sqrt{\bar{I}^{\text{in}}}$. Par conséquent, à une fréquence

donnée, le compromis entre ces deux contributions, appelé *Limite Quantique Standard*, est atteint lorsque les deux bruit sont égaux, ce qui est vérifié pour une intensité incidente égale à :

$$\bar{I}_{\text{LQS}}^{\text{in}} = \frac{\lambda^2}{128 \hbar \mathcal{F}^2 |\chi[\Omega]|}, \quad (2.62)$$

qui correspond à une puissance incidente de 5 mW pour les paramètres utilisés dans la figure ($\Omega_{\text{m}}/2\pi = 1$ MHz, $\Omega \ll \Omega_{\text{m}}$, $M = 20 \mu\text{g}$, $\lambda = 1.064 \mu\text{m}$ et $\mathcal{F} = 50\,000$). La sensibilité maximale atteinte pour cette puissance ne dépend que des caractéristiques mécaniques du micro-miroir et s'écrit, à partir des équations (2.61) et (2.62) :

$$\delta x_{\text{LQS}}[\Omega] = \sqrt{\hbar |\chi[\Omega]|}. \quad (2.63)$$

La limite est donc d'autant plus basse que la réponse du miroir à la pression de radiation est faible, ce qui correspond à une valeur réduite de la susceptibilité mécanique.

Il a été montré toutefois que la limite quantique standard n'est pas la limite inférieure pour la sensibilité d'une mesure de petits déplacements : elle peut être dépassée en utilisant par exemple des états non-classiques pour le champ incident [81, 160, 64, 110], ou en désaccordant la cavité [86, 4, 154], ou encore en mesurant une quadrature particulière du champ réfléchi [86].

2.4 Refroidissement actif de l'oscillateur

Nous avons montré dans le premier chapitre que pour atteindre le régime quantique d'un résonateur mécanique, sa température doit être inférieure à la température quantique définie par la relation (1.13). Les fréquences typiques des modes mécaniques des résonateurs que nous utilisons sont de l'ordre du MHz : leur température quantique vaut donc environ $50 \mu\text{K}$, température qui n'est pas accessible par des moyens cryogéniques traditionnels. Il est alors nécessaire d'utiliser des mécanismes de refroidissement différents, et nous allons présenter dans la suite de ce chapitre deux méthodes basées sur le couplage optomécanique et qui ont été démontrées expérimentalement pour la première fois par notre équipe [37, 6, 5]. Le principe de ces techniques de refroidissement actif consiste à coupler le résonateur à un bain thermique à température quasi-nulle. Si ce couplage augmente la dissipation du résonateur et donc son amortissement, il réduit également sa température jusqu'à atteindre la température du bain associé. Les deux processus examinés dans cette section et dans la prochaine permettent en principe de refroidir le résonateur jusqu'à atteindre son état quantique fondamental.

Nous présentons dans cette section la technique appelée friction froide (*cold damping* en anglais), qui a été introduite pour la première fois en 1953 par Milatz et Van Zolingen [114] lors d'une étude du mouvement Brownien dans les électromètres.

2.4.1 Principe de la friction froide

La technique de friction froide consiste à mesurer le mouvement du miroir à l'aide d'une cavité Fabry-Perot, comme cela a été décrit dans les sections précédentes, et à utiliser l'information ainsi fournie sur le mouvement du résonateur pour contrôler celui-ci à l'aide d'une boucle de contre-réaction. On applique donc une force F_{fb} produite par un dispositif externe d'asservissement. D'après l'équation (2.29), la réponse dynamique du miroir s'écrit alors :

$$\delta x[\Omega] = \chi[\Omega] (\delta F_{\text{rad}}[\Omega] + F_{\text{T}}[\Omega] + F_{\text{fb}}[\Omega]) \quad (2.64)$$

Cette force peut être de différente nature : il peut s'agir de la pression de radiation d'un faisceau venant se réfléchir directement sur le résonateur et dont l'intensité est contrôlée par l'asservissement [104, 37, 22, 122], ou alors d'une force électrostatique appliquée au moyen d'une électrode⁴ dont la tension est contrôlée [6]. La FIG. 2.6 montre le schéma de principe correspondant.

4. Il est possible d'appliquer une force électrostatique à notre miroir mobile car il est réalisé en silicium, à la différence des miroirs standards dont les substrats ne sont normalement pas conducteurs.

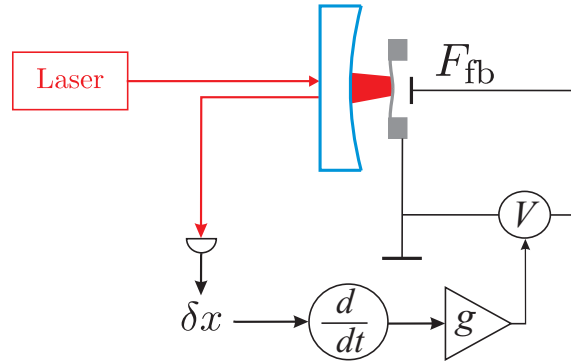


FIGURE 2.6 – Schéma du principe de la friction froide. Une force électrostatique contrôlée par un asservissement est appliquée au moyen d'une électrode placée à l'arrière du micro-résonateur. L'asservissement est piloté par la mesure optomécanique de la vitesse du résonateur.

Nous supposons dans cette section que tous les bruits quantiques sont négligeables devant le bruit thermique du miroir (nous examinerons dans la prochaine section la limite quantique du refroidissement par friction froide). Dans ces conditions, la quadrature de phase δq^{out} du faisceau réfléchi par la cavité est directement proportionnelle aux déplacements δx du miroir (équation (2.49), en supposant δx_{shot} négligeable devant le bruit thermique du miroir, voir les équations (2.51) et (2.52)). Nous négligeons également l'action en retour de la mesure, donnée par la force δF_{rad} dans l'équation (2.64). Nous nous intéressons par ailleurs à un seul mode mécanique du résonateur, le principe de la friction froide pouvant aisément se généraliser à un résonateur multimode. La susceptibilité χ se réduit alors à la forme lorentzienne (1.16) caractérisée par une fréquence de résonance Ω_m , une masse M et un amortissement Γ .

La phase du faisceau réfléchi fournit une mesure directe du bruit thermique du miroir, et le refroidissement par friction froide consiste à rendre la force de contrôle F_{fb} proportionnelle à la vitesse du résonateur, ce qui s'écrit dans le domaine fréquentiel :

$$F_{\text{fb}}[\Omega] = M \Gamma g (i \Omega \delta x[\Omega]) \quad (2.65)$$

où g est un paramètre sans dimension représentant le gain de la boucle de contre-réaction.

Le déplacement du miroir en présence d'une telle force est obtenu en substituant l'équation (2.65) dans (2.64), ce qui donne :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\text{fb}}[\Omega] F_{\text{T}}[\Omega] \quad (2.66)$$

où nous avons introduit une nouvelle susceptibilité χ_{fb} pour le miroir en présence de

contre-réaction, qui vaut :

$$\chi_{\text{fb}}[\Omega] = \frac{1}{M(\Omega_{\text{m}}^2 - \Omega^2 - i\Gamma_{\text{fb}}\Omega)} \quad (2.67)$$

Γ_{fb} est le taux d'amortissement modifié, égal à $\Gamma_{\text{fb}} = (1+g)\Gamma$. La nouvelle susceptibilité est celle d'un oscillateur harmonique de masse M , de pulsation à résonance Ω_{m} , mais avec un taux d'amortissement Γ_{fb} modifié d'un facteur $(1+g)$ par rapport au cas sans friction froide. La force visqueuse supplémentaire $F_{\text{fb}}[\Omega]$ modifie donc l'amortissement du résonateur, qui peut en particulier être augmenté lorsque $g > 0$, ce qui entraîne un élargissement de la résonance.

La force de Langevin F_{T} est liée à la dissipation du miroir par l'intermédiaire du théorème fluctuation-dissipation, et elle n'est bien sûr pas modifiée par la présence de la force F_{fb} utilisée pour la contre-réaction. En négligeant le bruit quantique du résonateur, le spectre de la force de Langevin reste donc celui donné par l'équation (1.17) :

$$S_{\text{T}}[\Omega] = 2M\Gamma k_{\text{B}}T \quad (2.68)$$

et le spectre de bruit de position associé, en l'absence de friction froide, vaut $\mathcal{S}_x^{\text{T}}[\Omega] = |\chi[\Omega]|^2 S_{\text{T}}[\Omega]$.

En présence de la contre-réaction, le spectre du bruit de position $\mathcal{S}_x^{\text{fb}}[\Omega]$ est obtenu en utilisant les équations (2.66) et (2.68) :

$$\mathcal{S}_x^{\text{fb}}[\Omega] = |\chi_{\text{fb}}[\Omega]|^2 S_{\text{T}}[\Omega] = \frac{2\Gamma}{M[(\Omega_{\text{m}}^2 - \Omega^2)^2 + \Gamma_{\text{fb}}^2\Omega^2]} k_{\text{B}}T \quad (2.69)$$

Le spectre de bruit est donc modifié par la contre-réaction comme le montre par exemple la FIG. 2.7. Pour un gain positif, la largeur du spectre est augmentée par un facteur $(1+g)$, tandis que sa hauteur à résonance est réduite par un facteur $(1+g)^2$. La variance de position Δx^2 étant égale à l'aire du spectre (équation (1.22)), elle est réduite par un facteur $(1+g)$, ce qui correspond à un refroidissement du miroir.

Plus précisément, l'expression (2.66) des fluctuations de position montre que le résonateur est dans un équilibre thermodynamique toujours caractérisé par la force de Langevin F_{T} mais avec la nouvelle susceptibilité χ_{fb} . Il obéit donc au théorème fluctuation-dissipation mais avec l'amortissement Γ modifié en Γ_{fb} . Ceci conduit à définir la nouvelle température T_{fb} du résonateur selon une relation similaire à (2.68) :

$$S_{\text{T}}[\Omega] = 2M\Gamma_{\text{fb}} k_{\text{B}} T_{\text{fb}} \quad (2.70)$$

La comparaison avec la formulation (2.68) du théorème fluctuation-dissipation sans refroidissement

dissement permet d'écrire :

$$T_{\text{fb}} = \frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{fb}}} T = \frac{T}{1 + g}. \quad (2.71)$$

La température du résonateur est donc réduite par un facteur $(1 + g)$.

Soulignons que l'effet de la friction froide n'est pas équivalent à une simple augmentation mécanique de l'amortissement, qui conduit à la fois à une plus grande dissipation et à une augmentation des fluctuations ; dans ce cas, selon le théorème fluctuation-dissipation, la variance du mouvement serait inchangée. La friction froide, par contre, couple le système initial à un bain thermique à température nulle, donc on peut amortir les fluctuations sans ajouter de bruit. On peut également montrer [42] que la température résultante est la valeur moyenne des températures des deux bains (thermique et friction froide), pondérés par leurs amortissements respectifs.

Notre expérience a permis de mettre en évidence le refroidissement par friction froide [6], à l'aide d'une boucle de contre-réaction illustrée sur la FIG. 2.6. Avec une pointe métallique à l'arrière du micro-miroir, on applique une force électrostatique dont l'amplitude est pilotée par la boucle de contre-réaction : le signal mesuré à la sortie de la cavité, proportionnel au mouvement du miroir, est déphasé et amplifié par un gain variable. En augmentant la valeur du gain, on a mis en évidence une augmentation de l'amortissement qui se traduit par l'élargissement du spectre et par la réduction du bruit thermique, comme le montre la FIG. 2.7. Ceci équivaut à une diminution de plus en plus importante de la température, jusqu'à une température de 5 K pour la courbe (e) de la figure.

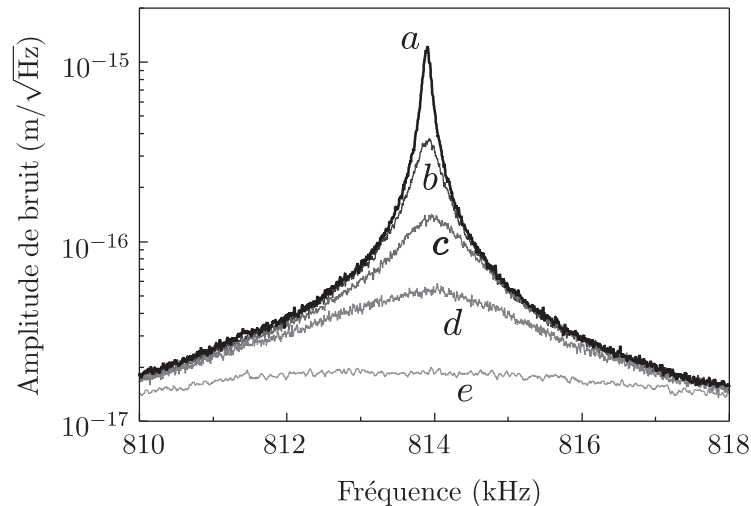


FIGURE 2.7 – Spectres de bruit thermique d'un mode mécanique du micro-miroir, obtenus expérimentalement pour des valeurs croissantes du gain g de la boucle de contre-réaction. La courbe (a) est obtenue sans contre-réaction. La température effective correspondant à la courbe (e) est de 5 K

2.4.2 Limite quantique de la friction froide

Il est intéressant de se demander quelle est la température minimale qu'on peut atteindre avec le refroidissement par friction froide. En effet, l'expression (2.71) de la température effective semble montrer que pour un gain infini, il est possible de refroidir le résonateur jusqu'à une température nulle, qui correspondrait à une variance $\Delta x^2 = 0$. Ce paradoxe s'explique par le fait que l'expression (2.71) est obtenue dans la limite classique $T \gg T_Q$, sans prendre en compte le comportement quantique de l'oscillateur. Nous n'avons également pas considéré les limitations quantiques induites par la lumière sur la mesure. Nous présentons maintenant un modèle où ces bruit quantiques sont pris en compte [42].

Les bruits quantiques ont deux conséquences majeures. Tout d'abord, le théorème fluctuation-dissipation doit être pris dans sa forme plus générale donnée par l'équation (1.20) et faisant intervenir les fluctuations de point zéro, qui peut s'écrire en fonction du nombre moyen de phonons n_T (équation (1.11)) sous la forme :

$$S_T[\Omega] = 2M\Gamma \hbar\Omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} \right) \quad (2.72)$$

Par ailleurs, la mesure ne fournit plus directement la position δx du résonateur car elle est entachée de deux bruits supplémentaires, le bruit de phase du faisceau incident (équation (2.49)) et l'action en retour représentée par la force δF_{rad} dans l'équation (2.64) et dont l'expression a été déterminée dans la section 2.3.2 (équation (2.60)). Les fluctuations vues par le signal qu'on mesure sont donc la somme de deux contributions $\delta x'[\Omega] = \delta x[\Omega] + \delta x_{\text{shot}}[\Omega]$, où on a introduit les fluctuations δx_{shot} associées au bruit de phase du faisceau incident. Pour une cavité sans perte et à des fréquences inférieures à la bande passante de la cavité ($\Omega_m \ll \Omega_c$), ce bruit supplémentaire et la force de pression de radiation prennent les expressions simples suivantes :

$$\delta x_{\text{shot}}[\Omega] = \frac{\lambda}{16\mathcal{F}\sqrt{I^{\text{in}}}} \delta q^{\text{in}}[\Omega], \quad \delta F_{\text{rad}}[\Omega] = \frac{\hbar}{2} \frac{16\mathcal{F}\sqrt{I^{\text{in}}}}{\lambda} \delta p^{\text{in}}[\Omega] \quad (2.73)$$

La force de contrôle $F_{\text{fb}}[\Omega]$ est proportionnelle aux fluctuations mesurées $i\Omega\delta x'[\Omega]$ et réinjecte le bruit supplémentaire δx_{shot} dans la dynamique du résonateur, qui est aussi affectée par les fluctuations de la pression de radiation. À partir de l'expression (2.64), l'équation d'évolution du résonateur s'exprime toujours en fonction de la susceptibilité effective χ_{fb} en présence de la friction froide :

$$\begin{aligned} \delta x[\Omega] &= \chi[\Omega] (F_T[\Omega] + \delta F_{\text{rad}}[\Omega] + F_{\text{fb}}[\Omega]) \\ &= \chi_{\text{fb}}[\Omega] (F_T[\Omega] + \delta F_{\text{rad}}[\Omega] + iM\Gamma\Omega g \delta x_{\text{shot}}[\Omega]) \end{aligned} \quad (2.74)$$

En utilisant les équations (2.72) et (2.73), on peut alors calculer le spectre de bruit de

position de l'oscillateur, qui s'écrit sous la forme :

$$S_x^{\text{fb}}[\Omega] = |\chi_{\text{fb}}[\Omega]|^2 2M\Gamma \hbar\Omega_m \left(n_{\text{T}} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{4} + \frac{g^2}{4\zeta} \right), \quad (2.75)$$

où nous avons introduit le paramètre sans dimension de couplage optomécanique ζ , relié à l'intensité intracavité \bar{I} par :

$$\zeta = \frac{64\pi\hbar\mathcal{F}}{\lambda^2 M\Gamma\Omega_m} \bar{I}. \quad (2.76)$$

On retrouve entre parenthèses le nombre de phonons thermiques n_{T} , un terme constant égal à 1/2 dû au bruit quantique de l'oscillateur, et deux termes qui rendent compte des effets quantiques dans la mesure, l'un directement proportionnel à l'intensité (pression de radiation) et l'autre qui lui est inversement proportionnel (bruit de phase amplifié par la boucle de contre-réaction de gain g).

La réponse spectrale de l'oscillateur soumis à la friction froide est équivalente à celle d'un oscillateur libre à la fréquence Ω_m et avec un amortissement Γ_{fb} . En comparant le spectre de bruit obtenu avec celui d'un oscillateur libre (équations (2.75) et (1.23)), on constate que le résonateur est à l'équilibre thermodynamique à une température effective caractérisée par un nombre moyen de phonons n_{T}^{fb} donné par :

$$\Gamma_{\text{fb}} \hbar\Omega_m \left(n_{\text{T}}^{\text{fb}} + \frac{1}{2} \right) = \Gamma \hbar\Omega_m \left(n_{\text{T}} + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{4} + \frac{g^2}{4\zeta} \right) \quad (2.77)$$

avec $\Gamma_{\text{fb}} = (1 + g)\Gamma$.

De façon similaire à l'optimisation faite sur la puissance incidente pour atteindre la limite quantique standard dans une mesure interférométrique, on peut minimiser les bruits ajoutés par la mesure (deux derniers termes de l'équation (2.77)) en choisissant convenablement le paramètre optomécanique ζ . On trouve que pour $\zeta^{\text{opt}} = g$, l'équation précédente s'écrit :

$$\hbar\Omega_m \left(n_{\text{T}}^{\text{fb}} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\Omega_m \left(\frac{n_{\text{T}}}{1 + g} + \frac{1}{2} \right) \quad (2.78)$$

La friction froide permet donc de réduire le nombre de phonons thermiques peuplant le mode propre de vibration, jusqu'à atteindre $n_{\text{T}}^{\text{fb}} = 0$ pour un gain infini. Il ne reste alors plus que les fluctuations quantiques responsables du facteur 1/2 dans l'équation (2.78).

2.5 Refroidissement par pression de radiation

Nous terminons ce chapitre par la description d'une deuxième technique de refroidissement qui n'utilise pas une boucle externe d'asservissement, mais qui profite des effets de pression de radiation dans une cavité désaccordée. Jusqu'à maintenant nous avons considéré le faisceau laser accordé sur la résonance de la cavité, ce qui permet d'atteindre une sensibilité optimale aux petits déplacements. En désaccordant la cavité, la force de pression de radiation peut devenir visqueuse, ce qui modifie profondément la dynamique du micro-miroir : comme on l'a vu pour le refroidissement par friction froide dans la section précédente, la présence d'une force proportionnelle à la vitesse de l'oscillateur peut produire une diminution de sa température effective.

Avant de passer à une étude plus détaillée des effets de la pression de radiation dans une cavité désaccordée, il est possible de comparer qualitativement l'effet du mouvement du miroir sur l'intensité intracavité pour une cavité à résonance ou désaccordée. A résonance ($\bar{\Psi} = 0$), d'après les équations d'entrée-sortie (2.46) à (2.49), seule la phase du champ réfléchi dépend des fluctuations δx de la position du miroir, alors que l'intensité est indépendante de δx . Comme le montre la FIG. 1.6, les fluctuations de position n'induisent à résonance aucune dépendance de l'intensité intracavité car on se trouve au sommet du pic d'Airy, où la pente est nulle.

La situation change quand on désaccorde la cavité : la fréquence du laser ne correspond plus au sommet mais à un point sur le flanc du pic d'Airy où la pente est non nulle. Dans ce cas (voir FIG. 2.8), un déplacement δx du micro-résonateur induit une variation non nulle de l'intensité intracavité δI , proportionnelle à la dérivée de la fonction d'Airy dI/dL , où L est la longueur de la cavité. Puisque la force de pression de radiation est proportionnelle à l'intensité intracavité, il en résulte $\delta F_{\text{rad}} \propto (dI/dL) \delta x$. Une telle force change la dynamique du résonateur puisqu'elle agit comme une force de rappel qui modifie la raideur du résonateur. Elle ne modifie cependant pas le spectre de bruit thermique qui est relié à la force de Langevin par l'intermédiaire de l'amortissement du résonateur, et la température du micro-résonateur reste de cette manière inchangée. Cet effet de *force pondéromotrice* [21] ou de ressort optique (*optical spring* en anglais) [24] a été observé récemment par de nombreux groupes, avec un miroir monté sur une lame flexible [139], avec le mode pendulaire d'un miroir suspendu [40], ou encore avec des micro-tores en silice [87, 78].

Nous avons considéré jusqu'à présent que les fréquences d'évolution du mouvement δx sont petites devant la bande passante Ω_c de la cavité. Dans le cas contraire, les effets dynamiques dus au temps de stockage de la lumière dans la cavité deviennent importants, ce qui retarde la réponse de la pression de radiation aux déplacements. La force subit alors un déphasage, qui la rend en partie visqueuse ; cela conduit à une modification de

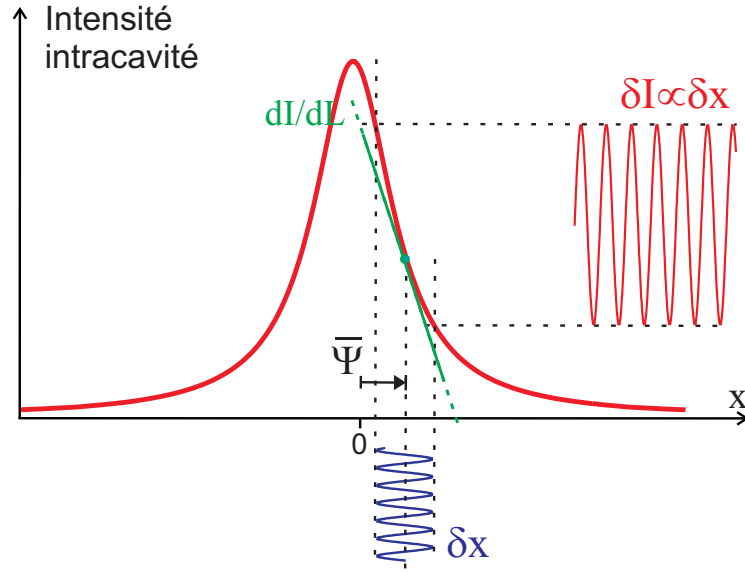


FIGURE 2.8 – Effet de la pression de radiation dans une cavité désaccordée ($\bar{\Psi} \neq 0$) : les fluctuations de position δx induisent des fluctuations de l'intensité intracavité proportionnelles à la pente du pic d'Airy évaluée au point de fonctionnement de la cavité. La pression de radiation résultante se comporte comme une force de rappel à basse fréquence, et comme une force visqueuse à des fréquences comparables à la bande passante de la cavité.

l'amortissement et de la température du micro-miroir, dont le sens dépend de la pente sur le pic d'Airy, et donc du signe du désaccord. Dans les dernières années, plusieurs équipes s'intéressant au couplage optomécanique ont montré la possibilité de refroidir de manière très efficace avec cette technique différents types de résonateurs (voir par exemple [111, 5, 60, 89, 117, 134, 55]).

2.5.1 Le couplage optomécanique dans une cavité désaccordée

Dans la section 2.2.3 nous avons introduit les équations d'entrée-sortie linéarisées pour les fluctuations quantiques des champs dans une cavité Fabry-Perot et nous avons écrit les fluctuations des quadratures d'intensité et de phase en supposant la cavité à résonance. Ceci permettait de considérer tous les champs moyens -incident, réfléchi, transmis et intracavité- réels et d'écrire les quadratures de phase et d'intensité sous une forme simple (équations (2.44) et (2.45)). Ces relations doivent être modifiées lorsque la cavité est désaccordée et, d'après les équations (2.38), les champs moyens ne sont plus en phase entre eux. On supposera dans la suite la cavité sans perte ($P = 0$) et, en choisissant le champ intracavité $\bar{\alpha}$ réel, on trouve que les phases des champs incident et réfléchi valent :

$$e^{-i\theta_{\text{in}}} = \frac{\gamma - i\bar{\Psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}} \quad \text{et} \quad e^{-i\theta_{\text{out}}} = \frac{\gamma + i\bar{\Psi}}{\sqrt{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}} \quad (2.79)$$

Ces phases doivent maintenant être prises en considération quand on écrit les quadratures des champs, en utilisant la relation générale (1.40). L'équation (2.41) d'évolution des fluctuations du champ intracavité devient en présence de désaccord :

$$(\gamma - i\bar{\Psi} - i\Omega\tau) \delta\alpha[\Omega] = \sqrt{2\gamma} \delta\alpha^{\text{in}}[\Omega] + 2ik\bar{\alpha} \delta x[\Omega] \quad (2.80)$$

où δx représente toujours le déplacement du micro-miroir de susceptibilité $\chi[\Omega]$. Quant à la force de pression de radiation, les fluctuations δF_{rad} sont toujours liées aux fluctuations de la quadrature d'intensité $\delta p = \delta\alpha + \delta\alpha^*$ selon la relation :

$$\delta F_{\text{rad}}[\Omega] = 2\hbar k \delta I[\Omega] = 2\hbar k \bar{\alpha} \delta p[\Omega] \quad (2.81)$$

En utilisant l'équation (2.80), on trouve que la force de pression de radiation δF_{rad} est la somme de deux contributions, la première, $\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$, liée aux fluctuations du champ incident et la deuxième, $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$, au déplacement du miroir ; ces deux contributions s'écrivent comme :

$$\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] = 2\hbar k \bar{\alpha} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}} \left\{ \frac{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2 - i\gamma\Omega\tau}{\Delta} \delta p^{\text{in}}[\Omega] - \frac{i\bar{\Psi}\Omega\tau}{\Delta} \delta q^{\text{in}}[\Omega] \right\} \quad (2.82)$$

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] = -8\hbar k^2 \bar{\alpha}^2 \frac{\bar{\Psi}}{\Delta} \delta x[\Omega] \quad (2.83)$$

$$\text{avec } \Delta = (\gamma - i\Omega\tau)^2 + \bar{\Psi}^2 \quad (2.84)$$

On peut remarquer que la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ est proportionnelle à $\bar{\Psi}/\Delta$; elle est donc nulle à résonance, et aussi pour $\bar{\Psi} \gg \gamma$, soit pour des grands désaccords. Cette force est maximale pour $\bar{\Psi} \simeq \gamma$, soit pour un désaccord correspondant à la demi-largeur du pic d'Airy. Aux basses fréquences ($\Omega \ll \Omega_c$), on trouve que cette force vaut :

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega \ll \Omega_c] \simeq 4\hbar k^2 \frac{d\bar{I}}{d\Psi} \delta x[\Omega] \quad (2.85)$$

où nous avons introduit la pente $d\bar{I}/d\Psi$ du pic d'Airy, reliée à la fonction d'Airy normalisée $\mathcal{A}(\bar{\Psi}) = \gamma^2/(\gamma^2 + \bar{\Psi}^2)$ par :

$$\frac{d\bar{I}}{d\Psi} = \frac{2}{\gamma} \frac{d\mathcal{A}}{d\Psi} \bar{I}^{\text{in}} = -\frac{4\gamma\Psi}{(\gamma^2 + \Psi^2)^2} \bar{I}^{\text{in}} \quad (2.86)$$

Nous retrouvons donc dans l'expression (2.85) que la force de pression de radiation statique ($\Omega \ll \Omega_c$) est proportionnelle à la pente du pic d'Airy au point de fonctionnement de la cavité désaccordée. Pour un désaccord positif, où la pente du pic d'Airy est négative, elle se comporte alors comme une force de rappel supplémentaire qui augmente la raideur de

l'oscillateur.

À plus haute fréquence, on peut également relier la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ à la pente du pic d'Airy :

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] = 4\hbar k^2 \frac{\gamma^2 + \bar{\Psi}^2}{\Delta} \frac{d\bar{I}}{d\Psi} \delta x[\Omega] \quad (2.87)$$

Le terme supplémentaire $(\gamma^2 + \bar{\Psi}^2)/\Delta$ par rapport à l'équation (2.85) induit un effet de filtrage à haute fréquence. Il a aussi pour conséquence de déphaser la force puisque Δ est complexe, ce qui rend la force en partie visqueuse. Comme pour la friction froide étudiée dans la section précédente, cet *amortissement optique* supplémentaire est capable de refroidir le résonateur.

2.5.2 La dynamique du résonateur

Comme dans les sections précédentes, nous ne considérons ici qu'un mode acoustique décrit par une susceptibilité mécanique χ de forme lorentzienne (équation (1.16)). Le résonateur est soumis à la force de Langevin F_{T} et à la force de pression de radiation, qui se décompose en sa partie quantique $\delta F_{\text{rad}}^{(in)}$ et la partie $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ liée au mouvement (équations (2.82) et (2.83)). Cette dernière est responsable d'une modification de la dynamique du résonateur, qui conduit à l'équation du mouvement suivante :

$$\delta x[\Omega] = \chi_{\text{eff}}[\Omega] \left(\delta F_{\text{rad}}^{(in)}[\Omega] + F_{\text{T}}[\Omega] \right) \quad (2.88)$$

où la susceptibilité effective χ_{eff} est définie par :

$$\chi_{\text{eff}}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] + 8\hbar k^2 \bar{I} \frac{\bar{\Psi}}{\Delta}. \quad (2.89)$$

Cette susceptibilité décrit à la fois le couplage avec le bain thermique, à travers l'amortissement Γ de l'oscillateur, et le couplage au mode optique par l'intermédiaire de la pression de radiation, mode optique qui se comporte comme un bain thermique additionnel à température nulle ; par conséquent, la température effective du résonateur sera la moyenne entre les températures des bains thermique et optique pondérée par le couplage avec chacun. On s'attend donc à une réduction importante de la température effective lorsque l'amortissement optique devient grand devant l'amortissement mécanique Γ .

Un désaccord de la cavité modifie donc la dynamique du micro-miroir de manière similaire à la force F_{fb} du processus de friction froide. Pour mieux comprendre la dynamique de l'oscillateur nous allons mettre la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ sous une forme qui permet de séparer clairement les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité χ_{eff} .

L'introduction de la dérivée $\dot{\mathcal{A}} = d\mathcal{A}/d\Psi$ de la fonction d'Airy, calculée en $\bar{\Psi} \pm \Omega\tau$,

permet d'écrire la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ sous la forme :

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] = \left\{ \frac{\dot{\mathcal{A}}(\bar{\Psi} + \Omega\tau)}{\mathcal{A}(\bar{\Psi} + \Omega\tau)} + \frac{\dot{\mathcal{A}}(\bar{\Psi} - \Omega\tau)}{\mathcal{A}(\bar{\Psi} - \Omega\tau)} + i\frac{2}{\gamma} [\mathcal{A}(\bar{\Psi} + \Omega\tau) - \mathcal{A}(\bar{\Psi} - \Omega\tau)] \right\} \times 2\hbar k^2 \bar{I} \delta x[\Omega] \quad (2.90)$$

On s'aperçoit alors que la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ résulte de la contribution de deux termes déphasés de $\pm\Omega\tau$ par rapport à $\bar{\Psi}$. Comme $\bar{\Psi}$ représente le déphasage entre la pulsation ω_0 du laser incident et la résonance de la cavité, ces contributions correspondent à deux bandes latérales à $\pm\Omega$ de la fréquence de la porteuse ω_0 du laser.

La force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ possède une partie réelle, égale aux deux premiers termes dans l'équation (2.90) et responsable de l'effet de ressort optique, et une partie imaginaire responsable de l'amortissement optique et du refroidissement du résonateur. Grâce aux équations (2.88) et (2.89), on peut alors décomposer la susceptibilité effective en parties conservative et dissipative.

Terme dissipatif

On s'intéresse d'abord à la partie dissipative de la susceptibilité qui peut s'écrire sous la forme :

$$\text{Im} \{ \chi_{\text{eff}}^{-1}[\Omega] \} = -M\Gamma\Omega - \frac{4\hbar k^2}{\gamma} \bar{I} [\mathcal{A}(\bar{\Psi} + \Omega\tau) - \mathcal{A}(\bar{\Psi} - \Omega\tau)] \quad (2.91)$$

La présence dans la partie dissipative du second terme dû à la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ modifie l'amortissement mécanique de l'oscillateur Γ , qui devient pour des fréquences Ω proches de Ω_m :

$$\Gamma_{\text{eff}} = (1 + g') \Gamma \quad (2.92)$$

$$\text{avec } g' = \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-) \quad (2.93)$$

où on a utilisé le paramètre optomécanique déjà défini dans le cadre de la friction froide (équation (2.76)) et on a défini $\mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A}(\bar{\Psi} \pm \Omega_m\tau)$.

Nous pouvons remarquer tout d'abord que l'amortissement effectif Γ_{eff} dans l'expression (2.92) a une forme très proche de l'amortissement Γ_{fb} modifié par friction froide trouvé dans la section 2.4 ; l'amortissement mécanique Γ est modifié par la présence d'un amortissement supplémentaire $g'\Gamma$ qui représente le couplage de l'oscillateur avec le réservoir additionnel fourni ici par le mode optique. Le paramètre optomécanique ζ quantifie ce couplage et indique que l'amortissement effectif est d'autant plus important que ce paramètre est grand (régime dit *de couplage fort*), soit pour une finesse de la cavité importante et pour une grande puissance incidente.

Par ailleurs, la modification de l'amortissement Γ est liée à la dissymétrie entre les hauteurs \mathcal{A}_{\pm} du pic d'Airy au niveau des deux bandes latérales situées de part et d'autre du faisceau laser incident, aux pulsations $\omega_0 \pm \Omega_m$ (voir la FIG. 2.9(a)). A désaccord nul, ces deux contributions sont parfaitement égales et s'annulent réciproquement : l'amortissement n'est pas modifié. Un désaccord de la cavité permet de déséquilibrer les deux bandes latérales \mathcal{A}_{\pm} et d'obtenir une variation de l'amortissement du résonateur (FIG. 2.9(b)).

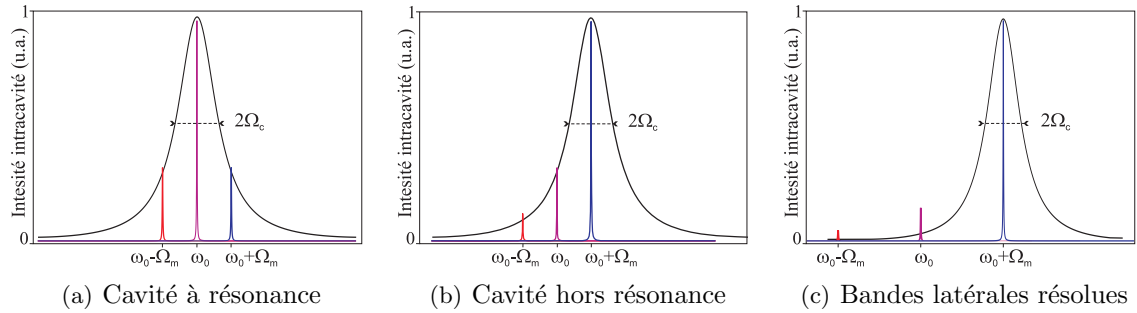


FIGURE 2.9 – Contribution des bandes latérales $\mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A}(\bar{\Psi} \pm \Omega_m \tau)$ au processus dissipatif. (a) : lorsque la cavité est à résonance avec la fréquence du laser incident ω_0 les deux bandes s'équilibrent. (b) : en désaccordant la cavité on peut favoriser l'une des deux bandes, ici la bande à $\omega_0 + \Omega_m$. (c) : lorsque les bandes latérales sont résolues, la contribution de la bande hors résonance devient négligeable.

L'effet dépend également du rapport entre la fréquence mécanique Ω_m et la bande passante Ω_c de la cavité. En régime quasi-statique ($\Omega_m \ll \Omega_c$), la dissymétrie entre les deux termes s'atténue, comme on peut s'en rendre compte sur la FIG. 2.9(b) lorsque les 3 pics sont très proches les uns des autres. On retrouve ainsi le résultat déduit de l'équation (2.87), la force $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ n'ayant pas de composante visqueuse dans le régime quasi-statique. Pour avoir un effet d'amortissement optique appréciable, il est nécessaire que la fréquence mécanique soit au moins comparable à la bande passante ($\Omega_m \simeq \Omega_c$) ; un désaccord de la porteuse du laser égal à la demi-largeur du pic d'Airy ($\bar{\Psi} \simeq \gamma$), comme en FIG. 2.9(b), rendra une des bandes latérales résonnante avec la cavité et produira un déséquilibre d'environ 80% entre elles.

Notons enfin que le déséquilibre entre les bandes latérales est maximal lorsque l'une des bandes est résonnante avec la cavité tandis que l'autre est complètement hors résonance. Cela correspond au cas où la fréquence de résonance mécanique est grande devant la bande passante ($\Omega_c \ll \Omega_m$), ce qui augmente l'efficacité du processus et permet d'atteindre la température quantique de l'oscillateur [106, 158, 57, 43], comme nous le verrons dans la prochaine section. Dans ces conditions cependant la porteuse du laser est aussi très désaccordée, ce qui réduit l'intensité intracavité \bar{I} et l'efficacité du processus (via le paramètre optomécanique ζ dans l'équation (2.93)).

Terme conservatif

Comme nous l'avons déjà indiqué, la partie réelle de la force de pression de radiation (2.90) est responsable de l'effet de ressort optique. Cette expression fait apparaître explicitement que la force pondéromotrice est la somme des contributions des deux bandes latérales : chaque bande produit un effet de ressort optique similaire à celui obtenu à basse fréquence (équation (2.85)), avec un coefficient multiplicateur $\dot{\mathcal{A}}/\mathcal{A}$ qui dépend à la fois de la pente et de l'amplitude de la fonction d'Airy.

L'addition d'un terme réel à la force qui s'exerce sur l'oscillateur modifie ainsi sa fréquence de résonance Ω_m ; dans le cas où cette modification reste petite devant Ω_m , l'identification de la partie réelle de χ_{eff}^{-1} (équation (2.89)) avec $M(\Omega_{\text{eff}}^2 - \Omega^2)$ donne la nouvelle fréquence de résonance Ω_{eff} sous la forme :

$$\Omega_{\text{eff}} = \Omega_m - \Gamma \frac{\zeta}{8} \left(\frac{\dot{\mathcal{A}}_+}{\mathcal{A}_+} + \frac{\dot{\mathcal{A}}_-}{\mathcal{A}_-} \right) \quad (2.94)$$

où on a défini $\dot{\mathcal{A}}_{\pm} = \dot{\mathcal{A}}(\bar{\Psi} \pm \Omega_m \tau)$.

Lorsque le déphasage $|\bar{\Psi}|$ est inférieur à $\Omega_m \tau$, les deux bandes latérales sont de part et d'autre de la résonance et les pentes $\dot{\mathcal{A}}_{\pm}$ sont de signes opposés, induisant une compensation partielle des deux termes de l'équation (2.94). C'est le cas en particulier à résonance (voir la FIG. 2.9(a)), où la combinaison des deux bandes latérales conduit à un effet nul. Pour des grands déphasages ($|\bar{\Psi}| > \Omega_m \tau$), les deux termes s'ajoutent et le ressort optique provoque un décalage de la fréquence de résonance ayant le même signe que $\bar{\Psi}$.

Spectre de bruit et limite quantique du refroidissement

Nous analysons maintenant le spectre des fluctuations de position $\delta x[\Omega]$ afin de déterminer la température limite que l'on peut atteindre avec le refroidissement par pression de radiation. A partir de l'équation du mouvement (2.88), le spectre des fluctuations de position s'écrit :

$$\mathcal{S}_x^{\text{eff}}[\Omega] = |\chi_{\text{eff}}[\Omega]|^2 \left(\mathcal{S}_T[\Omega] + \mathcal{S}_{\text{rad}}^{(in)}[\Omega] \right) \quad (2.95)$$

où $\mathcal{S}_T[\Omega]$ est le spectre de la force de Langevin donné par l'équation (2.72) dans le cas général où l'on tient compte des fluctuations quantiques du résonateur, et le spectre de la force de pression de radiation $\delta F_{\text{rad}}^{\text{in}}$ s'écrit d'après l'équation (2.82) :

$$\mathcal{S}_{\text{rad}}^{(in)}[\Omega] = M\Gamma \hbar \Omega_m \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-) \quad (2.96)$$

Comme dans le cas de la friction froide (équation (2.75)), le spectre de bruit de position a une forme lorentzienne caractérisée par la susceptibilité χ_{eff} :

$$S_x^{\text{eff}}[\Omega] = |\chi_{\text{eff}}[\Omega]|^2 2M\Gamma \hbar\Omega_m \left(n_T + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{8} (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-) \right) \quad (2.97)$$

On retrouve dans la parenthèse le nombre de phonons thermique n_T , le terme $1/2$ dû au bruit quantique du résonateur, et le bruit de pression de radiation⁵, proportionnel à ζ . Comme précédemment (équation (2.78)), le résonateur est dans un équilibre thermodynamique qui, compte tenu de la modification de l'amortissement de Γ en $\Gamma_{\text{eff}} = (1 + g')\Gamma$, correspond à un nombre résiduel de phonons n_T^{eff} donné par :

$$\hbar\Omega_m \left(n_T^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\hbar\Omega_m}{1 + g'} \left(n_T + \frac{1}{2} + \frac{\zeta}{8} (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-) \right) \quad (2.98)$$

En utilisant la définition (2.93) de g' , on trouve finalement :

$$n_T^{\text{eff}} + \frac{1}{2} = \frac{n_T}{1 + g'} + \frac{1}{2} \left(\frac{1 + \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ + \mathcal{A}_-)}{1 + \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-)} \right) \quad (2.99)$$

L'état thermodynamique final dépend de très peu de paramètres : le couplage optomécanique ζ qui définit entre autres la puissance laser incidente (voir l'équation (2.76)), et les hauteurs \mathcal{A}_{\pm} du pic d'Airy sur les bandes latérales décalées de $\pm\Omega_m$ par rapport au faisceau laser. Il est clair d'après l'équation (2.99) que l'on peut atteindre l'état quantique fondamental du résonateur ($n_T^{\text{eff}} \simeq 0$) en prenant un gain g' grand devant le nombre initial de phonons n_T , et les bandes latérales telles que $\mathcal{A}_- \ll \mathcal{A}_+$. En pratique, cela consiste à choisir un désaccord $\bar{\Psi}$ négatif (laser de fréquence ω_0 décalée vers le rouge), avec la bande latérale à $\omega_0 + \Omega_m$ située proche de résonance (\mathcal{A}_+ maximal), et celle à $\omega_0 - \Omega_m$ très loin de résonance (\mathcal{A}_- quasi-nul). Cette configuration correspond au régime des bandes latérales résolues (voir FIG. 2.9(c)), pour lequel $\Omega_m \gg \Omega_c$ et seule la bande latérale à $\omega_0 + \Omega_m$ est résonnante.

Notons pour finir qu'il est également possible de chauffer le résonateur plutôt que de le refroidir, en choisissant un désaccord $\bar{\Psi}$ positif (laser décalé vers le bleu). Ceci conduit à une diminution de l'amortissement effectif qui amplifie les oscillations et peut rendre le système instable [21], comme cela a été observé par notre équipe sur des micro-résonateurs en silicium [5]. Nous reviendrons sur ces aspects d'instabilité paramétrique dans le chapitre 5.

5. le bruit de pression de radiation est exactement le même que celui obtenu par friction froide; l'expression simple $\zeta/4$ obtenue dans l'équation (2.75) correspondait aux conditions $\bar{\Psi} = 0$ et $\Omega_m \ll \Omega_c$.

Mise en évidence expérimentale

Notre équipe a été parmi les premières à mettre en évidence une variation du spectre de bruit du micro-miroir correspondant à une réduction de sa température effective [5, 60, 89, 134]. Sur la FIG. 2.10(a) sont représentés cinq spectres de bruit d'un mode du micro-miroir de fréquence propre égale à 814.7 kHz, obtenus pour cinq valeurs différentes du désaccord. Les courbes du noir au bleu correspondent à un désaccord $\bar{\Psi}/\gamma$ égal respectivement à 0, -0.1 , -0.25 , -0.4 , -0.6 . Ces spectres ont été pris en utilisant le montage de la cavité décrit dans la section 3.5, la cavité ayant une finesse de 25 000 et la puissance incidente étant de 5 mW ; le micro-miroir utilisé est une poutre doublement encastree de $1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 60\text{ }\mu\text{m}$; pour plus de détails sur la mise en œuvre du système pour désaccorder la cavité, nous renvoyons au chapitre 5. La bande passante de la cavité vaut environ 1 MHz, c'est-à-dire que l'on est dans le régime où $\Omega_c \simeq \Omega_m$.

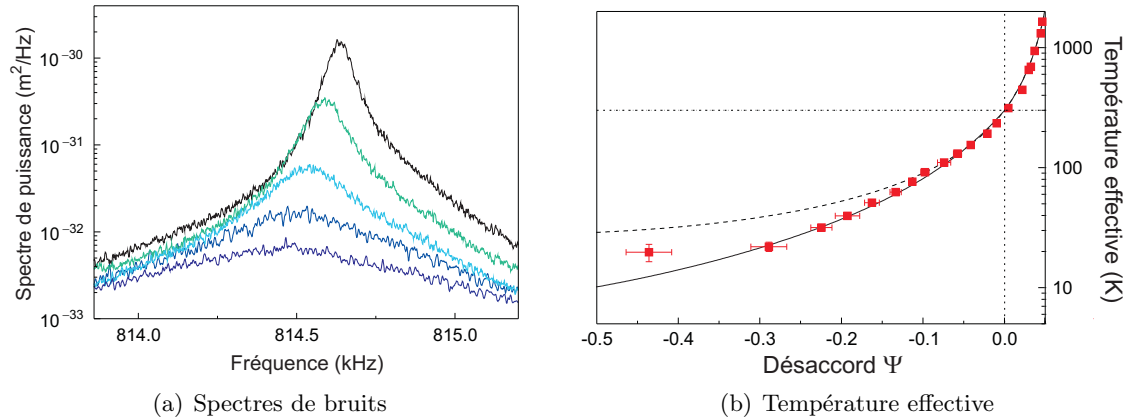


FIGURE 2.10 – Effets du désaccord de la cavité sur la dynamique d'un oscillateur. (a) : spectres de bruit thermique observés pour différents désaccords $\bar{\Psi}/\gamma = 0, 0.1, 0.25, 0.4, 0.6$. (b) : température effective de l'oscillateur déduite à partir de l'aire des spectres. Les figures sont extraites de [5].

La figure 2.10(a) montre que pour des désaccords négatifs le spectre de bruit décroît d'autant plus que le désaccord augmente. On note également un effet de ressort optique qui se traduit par un décalage d'environ 150 Hz de la fréquence de résonance vers les basses fréquences. L'effet d'amortissement optique est clairement visible sur l'élargissement du spectre. L'évolution de la fréquence propre de résonance et de l'amortissement est celle attendue : le taux de variation de la fréquence est assez faible (environ 0.02%) tandis que l'amortissement augmente d'environ un facteur 10.

La FIG. 2.10(b) montre les températures effectives mesurées à partir de l'aire des spectres (les points en rouge) en fonction du désaccord, qui peut être aussi bien négatif que positif : la température correspondant à $\Psi/\gamma = 0$ étant de 300 K, on atteint une température minimale de 20 K pour des désaccords négatifs, et un chauffage jusqu'à 2000 K pour des désaccords positifs, proche de la limite d'instabilité paramétrique. La courbe en

pointillé décrit la variation de la température effective attendue d'après la relation déduite de l'équation (2.99) à la limite classique :

$$T_{\text{eff}} = T \frac{\Gamma}{\Gamma_{\text{eff}}} \quad (2.100)$$

La déviation des valeurs expérimentales pour des désaccords $\bar{\Psi}/\gamma$ importants est probablement due à une contribution des autres modes acoustiques, prise en compte dans la courbe en trait plein.

2.5.3 Analogie avec le refroidissement laser

Le couplage par pression de radiation entre une onde électromagnétique de pulsation ω_0 et une onde acoustique à la pulsation Ω_m produit un phénomène de diffusion inélastique Brillouin-Mandelstam de la lumière par les modes acoustiques du micro-miroir. Dans les références [102, 165], Louisell *et al.* et Yariv supposèrent la lumière modulée par une variation de la constante diélectrique induite par les vibrations acoustiques, tandis que dans notre cas l'excitation des modes mécaniques provoque une variation de la longueur de la cavité. Etant donnée l'équivalence entre les variations des longueurs physique et optique de la cavité (voir section 2.3.1), on comprend que leur analyse reste valable pour des cavités à miroir mobile [21, 84].

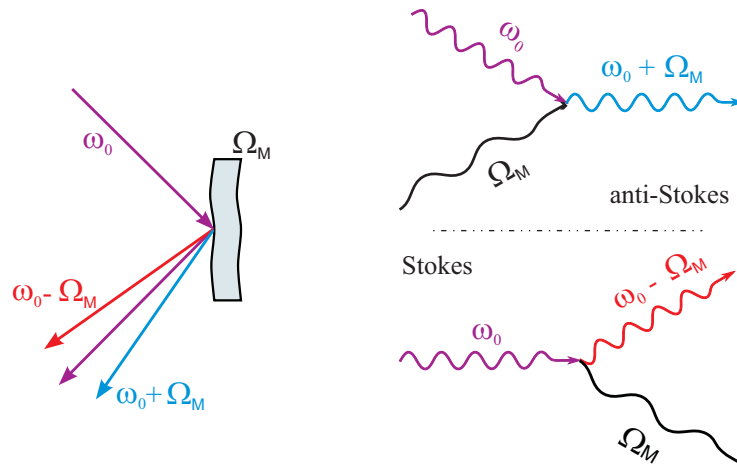


FIGURE 2.11 – Représentation de la diffusion inélastique d'un mode optique de fréquence ω_0 par un mode acoustique du miroir de fréquence Ω_m . Le champ incident sur le miroir est modulé et présente deux bandes latérales en réflexion. Deux processus sont alors possibles : le processus anti-Stokes (en haut) qui conduit à l'absorption d'un phonon et le processus Stokes (en bas) où un phonon est créé.

Le couplage par pression de radiation peut ainsi être interprété, de la même façon que pour le refroidissement Doppler dans le domaine atomique [155], comme la conversion d'un photon d'énergie $\hbar\omega_0$ du laser incident en un photon d'énergie $\hbar\omega_s$ à cause de l'interaction

avec un phonon du miroir à la fréquence Ω_m ; ce processus, appelé *processus Stokes*, doit satisfaire la conservation de l'énergie, soit la relation $\omega_s = \omega_0 - \Omega_m$. Il est également possible d'absorber un phonon par le processus inverse, dit *anti-Stokes*, de conversion d'un photon incident en un photon de fréquence plus élevée $\omega_{as} = \omega_0 + \Omega_m$ (voir FIG. 2.11). Ce deuxième cas représente effectivement un processus d'extraction d'énergie d'un mode du résonateur mécanique.

Le champ incident est donc partiellement modulé aux fréquences $\pm\Omega_m$ après réflexion sur la cavité, ce qui correspond à la création de deux bandes latérales aux fréquences $\omega_0 \pm \Omega_m$. Comme ces deux champs se propagent dans la cavité, ils peuvent être amplifiés ou atténués selon qu'ils sont à résonance ou pas avec la cavité.

Dans le cas où le champ incident est à résonance avec la cavité, les probabilités des processus Stokes et anti-Stokes sont égales. Les deux processus se compensent et l'énergie du miroir ne subit pas de variation. Par contre, lorsque la cavité est désaccordée, une des deux bandes est amenée plus près de la résonance que l'autre et le processus correspondant est favorisé : ainsi, un désaccord de la cavité vers les basses fréquences favorise le processus anti-Stokes qui diminue le nombre de phonons, alors qu'un désaccord opposé va l'augmenter (voir FIG. 2.12).

Comme nous considérons des vibrations thermiques du miroir, le nombre moyen de phonons acoustiques est proportionnel à la température (équation (1.11)) : une diminution du nombre de phonon correspond ainsi à un refroidissement du miroir. Ce mécanisme d'extraction d'énergie d'un mode acoustique d'un objet mésoscopique est le même que celui qui a permis à partir des années 80 le refroidissement laser d'un degré de liberté translationnel d'un atome [77, 159], et il est possible de développer une théorie de la diffusion similaire pour le couplage optomécanique [158, 161].

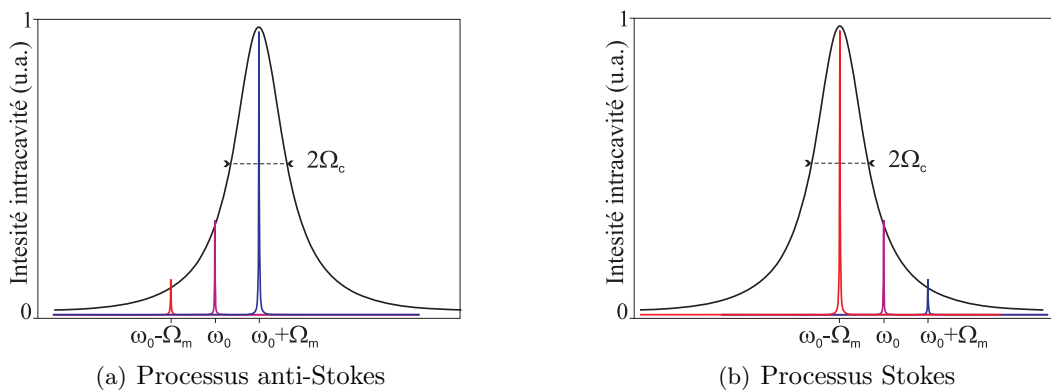


FIGURE 2.12 – Résonance des processus Stokes et anti-Stokes : un décalage vers le rouge du laser (a) rend la bande anti-Stokes à $\omega_0 + \Omega_m$ résonnante et favorise l'extraction de phonons thermiques, tandis qu'un décalage vers le bleu (b) favorise le processus Stokes à $\omega_0 - \Omega_m$ qui chauffe le résonateur.

Montage expérimental et mesures à température ambiante

Je présente dans ce chapitre les éléments principaux du dispositif expérimental, qui peuvent être séparés en trois blocs fonctionnels comme le montre la FIG. 3.1 : une source laser stabilisée, la cavité Fabry-Perot à micro-miroir, et le dispositif de détection qui permet d'une part d'asservir le laser sur la résonance de la cavité et d'autre part de récupérer les informations sur les déplacements du micro-miroir.

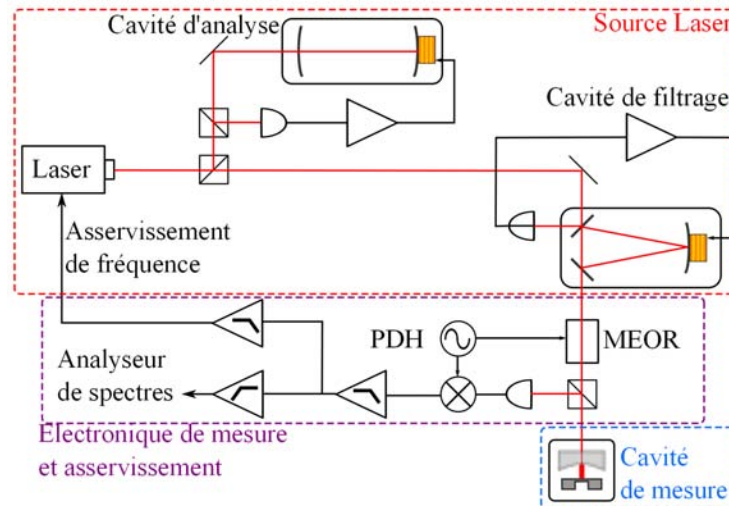


FIGURE 3.1 – Principe général du montage expérimental, composé de trois blocs principaux : la source laser filtrée, la cavité de mesure et le dispositif de détection pour l'asservissement du laser et la mesure des petites fluctuations de longueur de la cavité.

Après avoir donné en section 3.1 un aperçu général du montage, je décris la source laser, composée du laser Nd:Yag lui-même et d'une cavité de filtrage spatial asservie par

une technique appelée *tilt-locking*. J'ai utilisé et réalisé au cours de ma thèse différentes cavités à micro-miroir selon l'expérience à effectuer : je présenterai dans la section 3.3 la cavité utilisée pour les mesures de bruit thermique à température ambiante ; un montage plus compact, adapté à un environnement cryogénique, sera décrit dans le chapitre 4, tandis qu'une cavité plus longue et semi-confocale sera présentée dans le chapitre 6 pour l'observation du couplage à trois modes.

La section 3.4 décrit le système de détection, ainsi que le principe de la technique Pound-Drever-Hall utilisée pour la mesure des fluctuations de la phase réfléchie et pour le verrouillage du laser sur la résonance de la cavité. Je montrerai ensuite les résultats des mesures de bruit thermique effectuées avec cette technique (section 3.5).

Nous présentons dans la dernière section deux montages plus simples basés sur une détection directe de la réponse du résonateur à une excitation mécanique, par photodiode à quadrant ou par interférométrie. Ceci nous a permis de déterminer la fréquence et le profil spatial des modes mécaniques, sans avoir à construire une cavité avec chaque résonateur testé.

3.1 Description générale

Le principe de notre montage est similaire à celui de nombreuses expériences en optomécanique, puisqu'il est basé sur une cavité Fabry-Perot dont un miroir est mobile, et qui est couplée à un laser dont on mesure la phase du faisceau réfléchi.

Le choix de la source laser, un laser Nd:YAG commercial, a été surtout déterminé par les caractéristiques de nos cavités à micro-miroir. Afin de réduire le plus possible les vibrations mécaniques, nos cavités sont en général rigides et compactes, les miroirs étant montés sur des supports plaqués l'un contre l'autre et ne disposant d'aucun élément piézo-électrique pour faire varier leur espacement. Nous devons donc utiliser un laser ayant une plage suffisante d'accordabilité pour que sa fréquence puisse être ajustée sur une résonance de la cavité. Par ailleurs, la longueur d'onde de 1064 nm est celle à laquelle fonctionnent les interféromètres développés pour la détection des ondes gravitationnelles [14, 13, 2]. Il s'agit donc d'une longueur d'onde pour laquelle on dispose d'excellents traitements optiques [10, 73], ainsi que de photodiodes à haut rendement quantique.

Afin d'atteindre une très grande sensibilité dans la mesure des déplacements du micro-miroir, la source laser doit être aussi stable que possible en fréquence et en intensité, et son profil spatial doit être adapté au mode TEM₀₀ de la cavité. Il est donc nécessaire d'une part d'adapter le faisceau à l'aide de différentes lentilles, et d'autre part de filtrer son profil de façon à éliminer son astigmatisme. Nous utilisons pour cela une cavité Fabry-Perot asservie à résonance, qui se comporte comme un filtre spatial en ne transmettant la lumière que dans son mode fondamental. Il s'agit d'une cavité triangulaire à l'instar de celles utilisées dans les interféromètres gravitationnels, afin de limiter les réflexions parasites vers le laser.

La sensibilité de la mesure des déplacements du micro-miroir est maximale lorsque la cavité est à résonance avec le laser. Nous utilisons un asservissement de la fréquence du laser basé sur la technique de Pound-Drever-Hall [47] pour maintenir cette condition de résonance : le faisceau, avant de parvenir à la cavité, est modulé en phase par un modulateur électro-optique résonnant ; la réflexion sur la cavité transforme cette modulation de phase en modulation d'intensité, qui est mesurée par une photodiode. La démodulation du photocourant fournit alors le signal d'erreur qui permet de contrôler la fréquence du laser.

Comme le déphasage de la cavité $\Psi \equiv 2kL[2\pi]$ (équation (2.32)) dépend à la fois des déplacements du miroir et de la longueur d'onde à travers le vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$, une variation $\delta\nu$ de la fréquence du laser est équivalente à un déplacement δx du miroir :

$$\delta\Psi = \frac{4\pi}{c} (L \delta\nu + \nu \delta x) \quad (3.1)$$

Le signal d'erreur produit par la détection Pound-Drever-Hall fournit donc aussi bien les écarts de fréquence $\delta\nu$ du laser par rapport à la résonance de la cavité, que les déplacements

du micro-miroir. En pratique, la partie basse fréquence du signal d'erreur, principalement reliée aux bruits du laser et aux vibrations des différents éléments de la cavité, est utilisée pour l'asservissement de la fréquence du laser. La partie haute fréquence du signal, qui contient l'information sur les déplacements du micro-miroir, est envoyée vers un analyseur de spectre et donne accès au spectre de bruit de position du résonateur.

Notons que l'équivalence $\delta x/L = \delta\nu/\nu$ entre une variation de longueur de la cavité et une variation de fréquence du laser, déduite de l'équation (3.1), montre qu'il est préférable d'utiliser une cavité courte pour que le bruit de fréquence du laser ne limite pas la sensibilité de la mesure de déplacement. Les cavités décrites dans ce chapitre et le suivant ont une longueur L de l'ordre de 2 mm, celle utilisée dans le chapitre 6 a une longueur de quelques centimètres. Enfin, cette relation permet de calibrer les spectres de bruit obtenus à partir du signal d'erreur Pound-Drever-Hall : on applique une modulation de fréquence $\delta\nu_{\text{cal}}$ d'amplitude connue et on compare son effet sur le signal d'erreur à celui produit par les déplacements du micro-miroir ; la relation (3.1) permet alors de convertir les variations de tension du signal d'erreur en déplacements équivalents du miroir.

Description du montage optique

La FIG. 3.2 montre l'ensemble du montage expérimental, tel qu'il était durant la première partie de ma thèse, avant la mise en place du cryostat [3]. Le montage est placé sur une table optique avec des pieds à suspension hydraulique, ce qui assure une bonne isolation vis-à-vis des vibrations du sol. La table est placée sous un flux laminaire de classe 100 de façon à protéger les optiques de la poussière.

Le faisceau issu du laser passe par un ensemble de lames quart d'onde et demi-onde puis par un isolateur optique à effet Faraday, pour obtenir une polarisation parfaitement linéaire et empêcher tout retour de lumière vers le laser. Le faisceau est ensuite séparé par un cube séparateur de polarisation (PBS₁), précédé d'une lame demi-onde pour ajuster les intensités transmise et réfléchi par le cube. La partie réfléchi est envoyée dans une cavité linéaire confocale de 10 cm de longueur et de finesse 1 000. La longueur de cette cavité d'analyse est balayée en permanence grâce à une cale piézo-électrique et l'observation des pics d'Airy en transmission permet de s'assurer que le faisceau laser est bien monomode.

Un autre cube séparateur de polarisation (PBS₃) fournit un second faisceau auxiliaire, qui peut être utilisé pour différents tests, tandis que le faisceau principal, avec une puissance typique de 50 mW, traverse un modulateur électro-optique (MEO) utilisé pour l'asservissement de l'intensité du laser. Une lentille de focale 100 mm montée sur une translation 3 axes réalise l'adaptation spatiale du faisceau sur la cavité de filtrage spatial.

Le faisceau transmis par cette cavité traverse ensuite un modulateur électro-optique résonant à 12 MHz qui en module la phase pour créer le signal d'erreur Pound-Drever-Hall. Une lame $\lambda/2$ associée au cube PBS₉ permet de régler la puissance envoyée dans la cavité

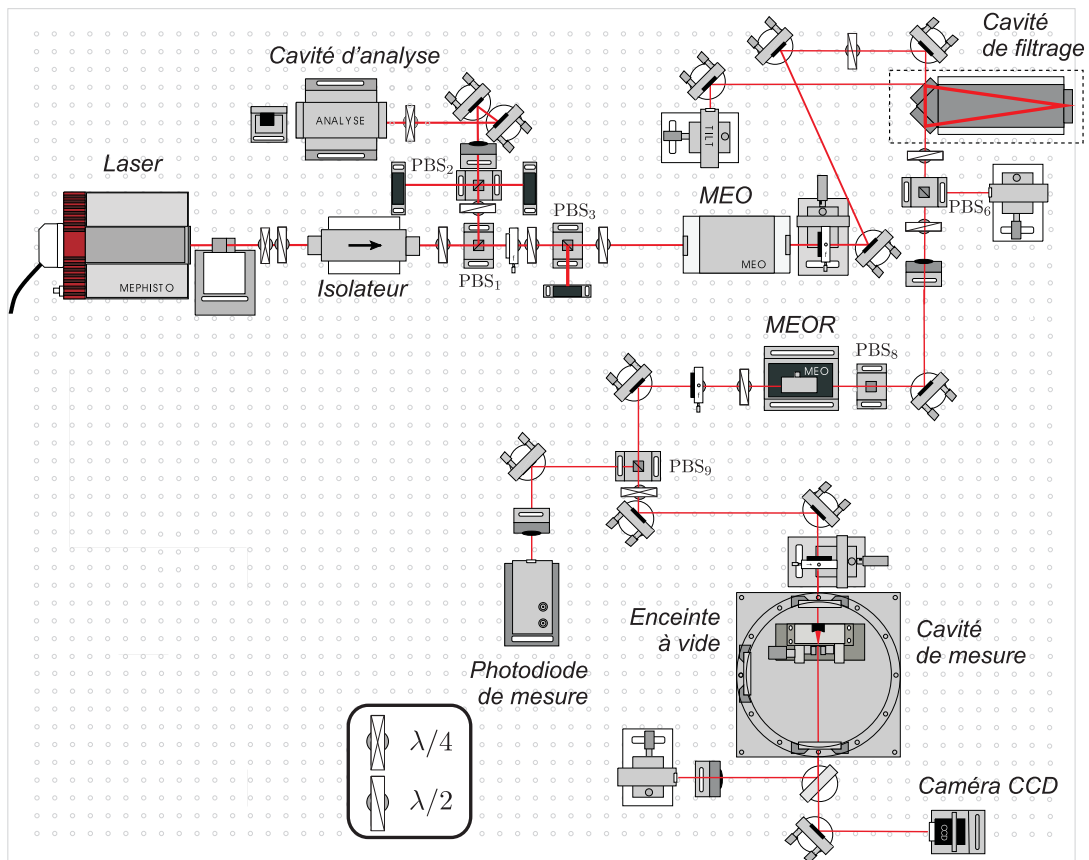


FIGURE 3.2 – Montage expérimental utilisé pour les mesures à température ambiante [3], avant la mise en place du cryostat.

de mesure. Une lame $\lambda/4$ transforme la polarisation linéaire en polarisation circulaire, de façon à ce que le faisceau réfléchi par la cavité de mesure soit réfléchi par le cube PBS₉ et envoyé sur la photodiode de mesure.

L'adaptation spatiale du faisceau sur la cavité de mesure est effectuée à l'aide de différentes lentilles, dont la dernière est montée sur des translations micrométriques et se situe très près de l'enceinte à vide contenant la cavité. Le faisceau parasite transmis par la cavité est utilisé pour contrôler les modes de la cavité. Il est envoyé en partie vers une photodiode et en partie vers une caméra CCD pour observer le profil du faisceau laser sur le micro-miroir.

Les composants optiques utilisés dans le montage sont traités antireflets à 1064 nm ; la plupart des supports mécaniques ont été réalisés par l'atelier de mécanique du laboratoire, afin d'être adaptés au mieux à nos contraintes d'espace et de stabilité.

3.2 La source laser

Notre source laser est constituée d'un laser solide Nd:YAG commercial (Mephisto, de la marque Innolight) de longueur d'onde égale à 1064 nm et de puissance en sortie d'environ 1 W en continu. Comme expliqué précédemment, la source laser est aussi composée de différents éléments optiques (isolateurs, cavité d'analyse), et d'une cavité de filtrage spatial qui élimine l'astigmatisme du faisceau et filtre le bruit classique du laser.

3.2.1 Description du laser

Le milieu amplificateur du laser est un cristal de grenat d'yttrium et aluminium (YAG) solide, dopé avec des ions de néodyme Nd^{3+} , taillé de manière à constituer une cavité non planeaire (voir FIG. 3.3(a)), et pompé par une diode à 808 nm. L'intensité du laser dépend de la puissance de pompage, qui peut être modifiée en faisant varier le courant fourni à la diode, le courant de seuil étant de 850 mA. Ce laser possède également un module interne qui permet de réduire le bruit classique d'intensité en rétroagissant sur le courant de pompe (*noise eater*).

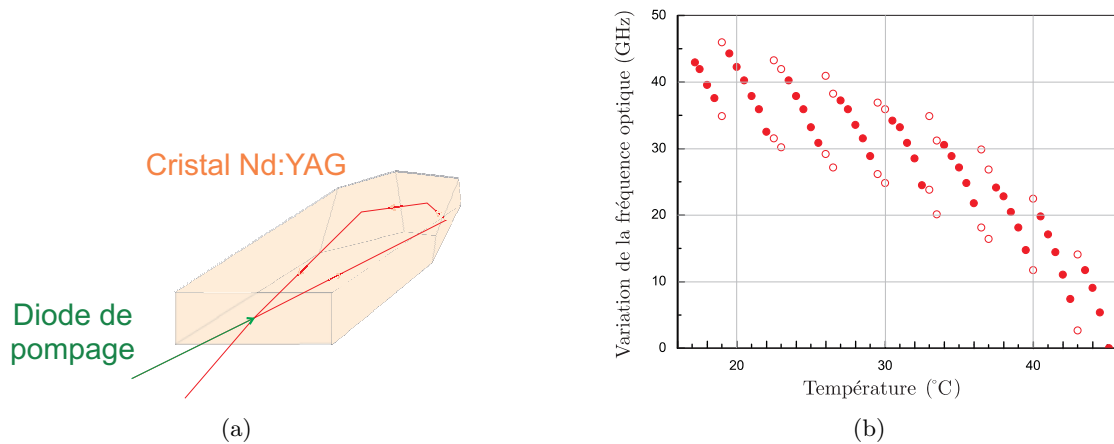


FIGURE 3.3 – (a) Schéma du cristal Nd:YAG formant une cavité non planeaire. (b) Variation de la fréquence du laser en fonction de la température de consigne du cristal. La mesure a été faite avec la cavité d'analyse; les cercles évidés mettent en évidence les plages où le comportement du laser est bimode.

Pour faire varier la fréquence du laser, il est nécessaire de modifier le chemin optique suivi par la lumière dans le cristal YAG. Cela peut être réalisé de deux manières : avec une cale piézo-électrique qui induit une contrainte mécanique sur le cristal YAG, et par un élément Peltier qui permet de contrôler sa température. Avec une bande passante de 150 kHz environ, la cale piézo-électrique permet d'effectuer des variations rapides de la fréquence, tandis que l'élément Peltier a une réponse relativement lente (bande passante

de 1 Hz environ), mais de plus grande amplitude. La FIG. 3.3(b) montre la variation de la fréquence du laser en fonction de la température du cristal, qui peut être asservie entre 16 et 46 °C. La plage de variation de fréquence du laser est de 45 GHz environ, avec des plages de température d'environ 1 °C de large où la cavité laser est doublement résonnante et présente deux modes longitudinaux en sortie. Le laser reste néanmoins monomode sur des plages de 10 GHz environ. Cette caractéristique rend importante l'utilisation d'une cavité d'analyse du faisceau, pour pouvoir toujours vérifier son caractère monomode lors d'une mesure.

3.2.2 La cavité de filtrage

Dans la section 2.2.4, nous avons souligné l'importance d'avoir une bonne adaptation spatiale du faisceau avec la cavité : il est nécessaire de disposer d'une source laser dont le profil est parfaitement gaussien et adapté au mode fondamental de la cavité. Après avoir traversé les différents éléments optiques précédant la cavité de mesure (isolateur, modulateur électro-optique), notre faisceau laser présente un astigmatisme et n'est pas vraiment gaussien (écart mesuré¹ égal à $M^2 = 2.1$). Le passage à travers une cavité optique asservie sur son mode fondamental TEM_{00} permet de filtrer spatialement le laser car seul le mode résonnant est transmis alors que les modes d'ordre supérieur sont directement réfléchis. Une telle cavité effectue également un filtrage des bruits classiques du laser pour des fréquences supérieures à la bande passante de la cavité. Elle permet enfin de rendre très stable au cours du temps le pointé du faisceau transmis, indépendamment des éventuelles dérives du laser.

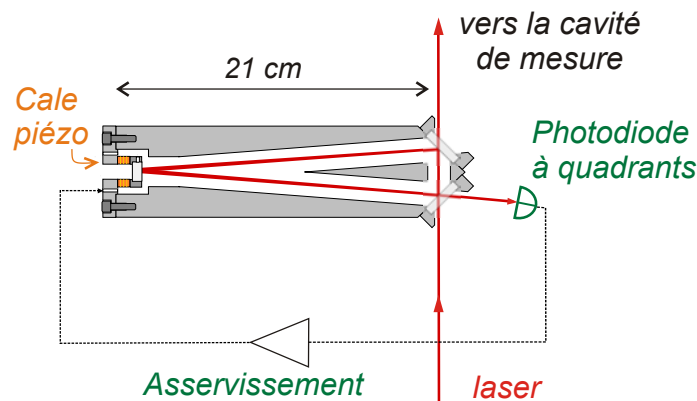


FIGURE 3.4 – Schéma de la cavité en anneau de filtrage spatial du faisceau.

Notre cavité est une cavité triangulaire, représentée sur la FIG. 3.4, qui évite les retours de lumière vers le laser puisque le faisceau n'est pas normal à la surface du miroir d'entrée.

1. Le coefficient M^2 est défini par $M^2 = \pi\theta d_0/4\lambda$, où θ est l'angle de divergence du faisceau et d_0 le diamètre au col. On trouve que $M^2 = 1$ pour un mode TEM_{00} parfait.

Ceci correspond par ailleurs à la géométrie des cavités de filtrage utilisées dans tous les interféromètres pour la détection des ondes gravitationnelles.

Le corps de la cavité est réalisé en Invar (alliage de fer et de nickel), qui présente de très grandes rigidité et stabilité en température. Elle est fixée sur un support massif en dural et entourée d'une enceinte en plexiglas, pour atténuer les vibrations mécaniques et les bruits acoustiques. Les miroirs d'entrée et de sortie sont plans et ont subi un traitement optique spécial adapté à l'angle qu'ils forment avec le faisceau incident. Le miroir au sommet possède un rayon de courbure de 1 m et il est monté sur une cale piézo-électrique qui permet de balayer au moins un intervalle spectral libre de la cavité.

Propriétés optiques de la cavité

Les caractéristiques optiques de la cavité ont été déterminées en mesurant les valeurs de la finesse, le coefficient de réflexion et l'intensité transmise ; comme le traitement optique du miroir d'entrée est optimisé pour une polarisation s du faisceau incident, ces paramètres dépendent de la polarisation du faisceau incident. Une lame demi-onde placée à l'entrée de la cavité permet de choisir la polarisation s ou p du faisceau : dans le premier cas la finesse est optimale et la bande passante de la cavité est plus petite, ce qui a pour effet de produire un filtrage du faisceau plus efficace ; cependant, en travaillant avec la mauvaise finesse (polarisation p) les procédures d'alignement sont plus simples, l'asservissement à résonance de la cavité est plus stable, et la puissance en sortie maximale admissible est plus importante.

Le tableau 3.1 présente les résultats de ces mesures, que j'ai refaites récemment. Par rapport aux valeurs obtenues au moment de la construction de la cavité (voir le tableau 4.2 de la référence [3]), les valeurs sont moins bonnes, avec notamment une réduction de 30% environ de la finesse de la cavité. Cela est sûrement dû à une dégradation des miroirs, soit naturelle avec le temps, soit liée à l'utilisation accidentelle de faisceaux laser de puissance trop élevée.

Dans ce tableau, la finesse \mathcal{F} , définie comme le rapport entre l'intervalle spectral libre ν_{ISL} et la largeur des pics d'Airy, est mesurée en balayant la cavité à l'aide de la cale piézo-électrique et en comparant ces deux grandeurs, observées directement sur l'intensité transmise. La bande passante de la cavité est égale à la demi-largeur du pic d'Airy $\Omega_c/2\pi = \nu_{\text{ISL}}/2\mathcal{F}$. Elle est ainsi calculée à partir de la finesse et de la valeur de l'intervalle spectral libre $\nu_{\text{ISL}} = c/L = 714 \text{ MHz}$, où $L = 420 \text{ mm}$ est la longueur de la cavité triangulaire. L'observation des pics d'Airy du mode fondamental et des modes transverses de la cavité permet également de déterminer l'adaptation spatiale η_{cav} du faisceau laser incident sur la cavité (voir section 2.2.4) :

$$\eta_{\text{cav}} = \frac{I_0}{I_0 + \sum_k I_k}, \quad (3.2)$$

	polarisation s	polarisation p
Finesse \mathcal{F}	1950	190
Bande passante (kHz)	183	1880
Adaptation spatiale η_{cav}	0.85	0.85
Réflexion \mathcal{R}	0.45	0.17
Transmission \mathcal{T}	0.13	0.6
T_1 (ppm)	650	14000
T_2 (ppm)	610	13800
Pertes P (ppm)	1950	5300

TABLE 3.1 – Caractéristiques optiques de la cavité de filtrage : les polarisations s et p désignent les polarisation respectivement perpendiculaire et parallèle au plan d’incidence du faisceau avec le miroir à 45° .

où I_0 et I_k sont les intensités des pics d’Airy du mode fondamental et des différents modes transverses k . Pour notre cavité de filtrage, l’adaptation spatiale vaut $\eta_{\text{cav}} = 85\%$ environ.

Le coefficient de réflexion à résonance \mathcal{R} , qui a été défini pour une cavité linéaire par l’équation (2.56), et la transmission \mathcal{T} de la cavité triangulaire s’écrivent :

$$\mathcal{R} = 1 - \eta_{\text{cav}} \left[1 - \left(\frac{T_1 - T_2 - P}{T_1 + T_2 + P} \right)^2 \right] \quad (3.3)$$

$$\mathcal{T} = \eta_{\text{cav}} \frac{4T_1T_2}{(T_1 + T_2 + P)^2} \quad (3.4)$$

où T_1 , T_2 et P sont respectivement les transmissions des miroirs d’entrée, de sortie, et les pertes totales des trois miroirs de la cavité. La mesure de ces deux coefficients \mathcal{R} et \mathcal{T} , ainsi que la connaissance de la finesse $\mathcal{F} = 2\pi/(T_1 + T_2 + P)$ et de l’adaptation spatiale η_{cav} permettent finalement de déterminer les différents coefficients T_1 , T_2 et P , comme indiqué dans le tableau 3.1.

Asservissement par tilt-locking

La cavité de filtrage doit être maintenue en permanence à résonance avec le laser incident, de façon à disposer d’un faisceau d’intensité stable sur la cavité à miroir mobile. Ceci nécessite un asservissement performant de la longueur de la cavité, via la cale piézo-électrique du miroir de fond. La bande passante de la cavité en polarisation s est en effet assez faible (inférieure à 200 kHz), et la fréquence du laser est susceptible de varier du fait qu’elle est asservie sur la résonance de la cavité à miroir mobile (voir le schéma 3.2).

Plusieurs techniques d’asservissement existent, plus ou moins performantes et complexes à mettre en œuvre. On peut citer par exemple les techniques basées sur la polarisation du champ réfléchi par une cavité biréfringente ou contenant un milieu non-linéaire (technique de Hänsch et Couillaud [72]), ou encore celles utilisant le battement entre le

laser et des bandes latérales (technique Pound-Drever-Hall [47], que nous décrirons dans la prochaine section). Nous avons choisi ici la méthode du *tilt-locking*, inventée par Shaddock *et al.* en 1999 [138, 137], pour sa facilité de mise en œuvre, qui ne nécessite pas de modulation supplémentaire du faisceau tout en restant assez robuste et sensible.

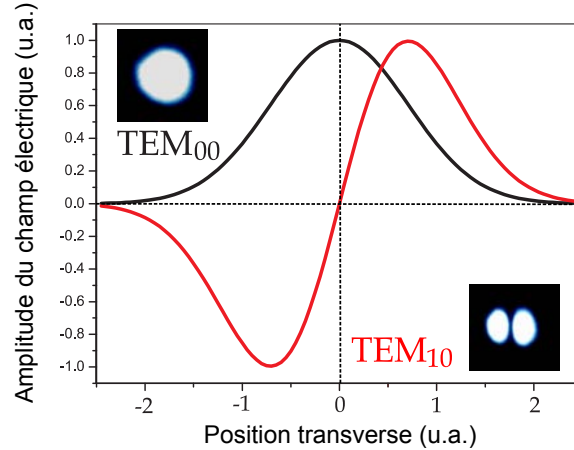


FIGURE 3.5 – Profils transverses des modes TEM_{00} et TEM_{10} . Les encarts montrent les profils d'intensité des deux modes observés avec une caméra CCD.

Le principe de cette méthode d'asservissement repose sur le battement entre deux modes spatiaux différents de la cavité, détecté avec une photodiode à quadrants. La phase du champ réfléchi par la cavité dans son mode fondamental TEM_{00} subit une variation de 2π au passage de la résonance (voir par exemple la FIG. 1.6). Cette variation peut être lue par interférence avec un autre mode dont la phase ne varie pas sur la même plage de fréquence. On utilise pour cela le mode TEM_{01} qui est non dégénéré avec le mode fondamental et subit donc une réflexion sur la cavité avec une phase constante. En pratique, on désaligne légèrement le faisceau laser incident par rapport à la cavité, de façon à ce qu'une partie du faisceau soit réfléchi dans le mode TEM_{01} . Pour détecter l'interférence entre les deux modes, on utilise une photodiode à deux quadrants, de telle manière que les deux lobes du mode TEM_{01} , de phases opposées (voir la FIG. 3.5), tombent chacun dans une moitié séparée de la photodiode. Le signal d'erreur est donné par la différence des photocourants de chaque moitié de la photodiode.

Un réglage approprié du désalignement et de la phase de Gouy permet alors d'obtenir un signal d'erreur symétrique au voisinage de la résonance. Ce signal d'erreur est utilisé par une électronique d'asservissement qui contrôle la fréquence de résonance de la cavité en agissant sur la cale piézo-électrique du miroir de fond.

La partie gauche de la FIG. 3.6 montre dans l'ordre le signal transmis, les intensités mesurées sur les deux quadrants de la photodiode, et enfin le signal d'erreur (correspondant à la différence des deux intensités), lorsque l'on balaye un intervalle spectral libre de la cavité en modulant la cale piézo-électrique. On constate que le signal d'erreur a bien la

forme voulue autour de la résonance du mode fondamental TEM_{00} , avec à la fois une pente très raide à résonance et une large plage de capture (définie comme la plage de fréquence sur laquelle le signal d'erreur admet une valeur significativement non nulle). La plage de capture s'étend en fait jusqu'à la résonance du mode TEM_{01} , où le signal d'erreur présente un comportement similaire. Ceci peut être un inconvénient en pratique, puisque l'asservissement de la cavité peut se produire non plus sur le mode fondamental mais sur le mode TEM_{01} . Pour y remédier, nous augmentons la puissance du faisceau incident jusqu'à saturation de la photodiode à quadrants : de cette manière on n'observe plus le pic en réflexion correspondant à la résonance du mode TEM_{01} (FIG. 3.6 (e)) et on élimine les variations du signal d'erreur non désirées (figure (f)), au détriment de la plage de capture qui se trouve fortement réduite.

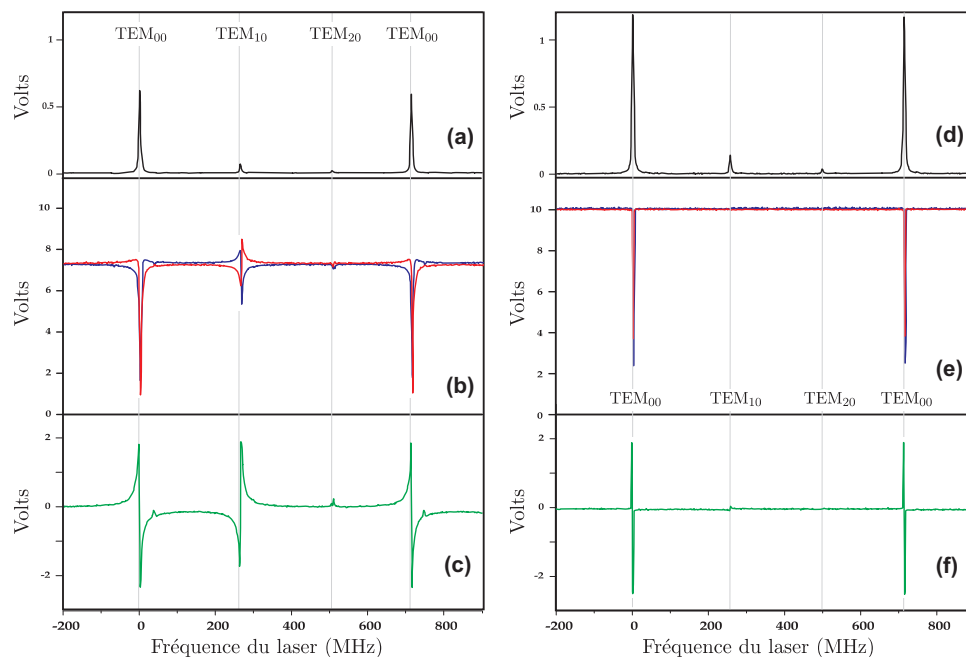


FIGURE 3.6 – Intensité transmise par la cavité de filtrage (a), intensité réfléchie sur les deux quadrants (b) et signal d'erreur résultant (c) ; les courbes (d), (e) et (f) représentent les mêmes grandeurs obtenues en saturant la photodiode à quadrants.

J'ai par la suite abandonné cette méthode qui a probablement causé l'endommagement des dépôts diélectriques des miroirs, et j'ai mis en place une saturation électronique des deux quadrants de la photodiode, réglable à l'aide d'une tension de décalage variable. Ceci permet d'obtenir le même comportement, tout en gardant une puissance lumineuse raisonnable à l'entrée de la cavité.

3.3 La cavité de mesure et l'enceinte à vide

Les cavités optiques que nous avons utilisées sont formées par un micro-miroir, tel que ceux décrits dans le premier chapitre, et par un coupleur d'entrée de taille plus importante. Il s'agit d'un miroir fabriqué à partir d'un support en silice fondue superpoli à 0.4 nm rms (marque REO), ce qui assure des pertes par diffusion inférieures à 10 ppm en principe. Le traitement diélectrique multicouches a été effectué par le LMA, avec une transmission de l'ordre de 70 ppm.

La cavité de mesure doit posséder des caractéristiques précises en terme de longueur, de parallélisme et de positionnement des miroirs; son montage mécanique doit assurer une stabilité mécanique suffisante et une conductivité thermique des pièces de maintien permettant de bien thermaliser les miroirs. Selon les nécessités des différentes expériences menées, nous avons privilégié certaines caractéristiques, par exemple en réduisant la taille de l'ensemble mécanique pour le montage cryogénique, en plaçant un des miroirs sur une cale piézo-électrique ou même en désolidarisant les deux miroirs pour pouvoir faire varier la longueur de la cavité dans le cas de l'étude du couplage optomécanique à trois modes.

Pour les premières mesures réalisées à température ambiante, le montage mécanique a été pensé pour satisfaire au mieux les nécessités de thermalisation, de rigidité et de parallélisme, tout en ayant la possibilité de positionner précisément le micro-miroir sur l'axe optique de la cavité. La cavité est placée dans une enceinte à vide relativement grande mais capable de tenir un vide de l'ordre de 5×10^{-2} mbar sans pompage pendant la durée des mesures.

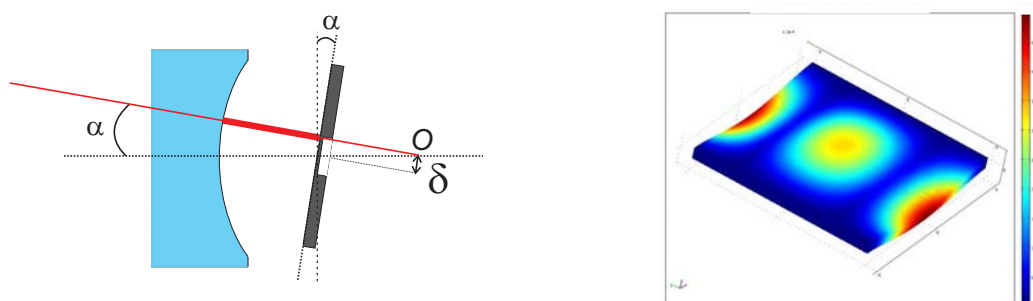
3.3.1 La cavité de mesure

Pour assurer la stabilité optique de la cavité, le coupleur d'entrée est concave, le micro-miroir étant plan. L'axe optique de la cavité est déterminé par la position et l'orientation de ses miroirs : il correspond à la normale aux deux surfaces réfléchissantes. Si les deux miroirs sont bien centrés et parallèles, l'axe optique passe par le milieu du micro-résonateur. Par contre, un défaut de parallélisme entre les deux miroirs d'un angle α induit un décalage de l'axe optique donné par (voir la FIG. 3.7(a))

$$\delta = (R - L) \sin \alpha, \quad (3.5)$$

où R est le rayon de courbure du coupleur d'entrée et L la longueur de la cavité. Le décentrage δ modifie le recouvrement spatial entre le faisceau laser et les modes mécaniques (voir section 2.2.1), les fluctuations de position $\hat{x}(t)$ vues par le faisceau laser (éq. 2.22) étant maximales lorsque le faisceau se réfléchit sur un ventre du mode mécanique. Si on s'intéresse par exemple à un mode avec un lobe au centre, comme celui représenté sur la

FIG. 3.7(b), la réponse spectrale diminue si le décentrage devient plus grand que la taille du lobe.



(a) Un défaut de parallélisme entre les deux miroirs se traduit par un décentrage du faisceau par rapport au micro-miroir.

(b) Simulation par éléments finis d'un mode mécanique d'un résonateur en forme de pont de $1 \times 1 \text{ mm}^2$.

FIGURE 3.7 – Incidence du parallélisme sur le centrage du faisceau sur le micro-résonateur

Pour une cavité de longueur $L = 2.4 \text{ mm}$ avec un miroir d'entrée de rayon de courbure $R = 50 \text{ mm}$, la tolérance sur le défaut de parallélisme est égale à 10^{-3} rad si l'on veut atteindre une précision sur le centrage meilleure que $\delta = 50 \mu\text{m}$. Avec les puces d'1 cm de côté que nous utilisons, cela revient à assurer un parallélisme à mieux que $10 \mu\text{m}$.

Même si un grand soin est apporté à l'usinage des pièces de maintien des miroirs, il est indispensable de pouvoir effectuer un réglage fin du centrage du micro-miroir, ce qui a été réalisé à l'aide de translations micrométriques de la puce. Par ailleurs, la première série de résonateurs fabriqués avant ma thèse contenait quatre résonateurs sur chaque puce, disposés symétriquement à une distance de 2 mm l'un de l'autre environ. Les translations ont alors permis de choisir le résonateur utilisé dans la cavité.

Le schéma du montage mécanique est présenté sur la FIG. 3.8(a). Les deux miroirs sont montés dans des supports qui peuvent glisser l'un sur l'autre et servent également d'espaceur. Le choix des matériaux a été fait avec le souci de réduire la masse thermique de la cavité. La pièce de support du miroir d'entrée est en cuivre tandis que celle de la puce est en laiton, pour assurer une bonne conductivité thermique et un faible frottement lors de la translation. Le berceau de la puce est plaqué par un disque de teflon sur le cadre externe en PVC, tout en pouvant se déplacer latéralement grâce aux vis de translation micrométrique. L'ensemble forme un bloc d'environ $10 \times 10 \times 2 \text{ cm}^3$, solidaire du socle dans l'enceinte à vide par l'intermédiaire d'une pièce en cuivre posée sur un élément Peltier utilisé pour l'asservissement de la température, et enfin fixée sur un grand bloc de cuivre qui sert de masse thermique.

L'asservissement en température permet d'éviter les dérives thermiques des fréquences de résonance mécanique du micro-miroir et optique de la cavité, évitant ainsi une dérive

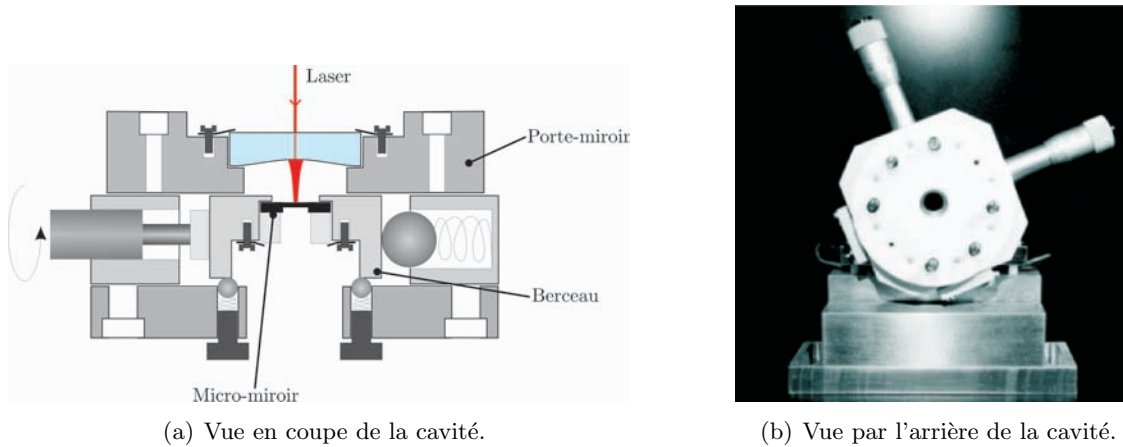


FIGURE 3.8 – Schéma et photo de la cavité.

trop importante de la fréquence du laser qui pourrait le faire passer dans une zone de fonctionnement bimode. Enfin, il est nécessaire de pouvoir balayer un intervalle spectral libre de la cavité pour trouver la fréquence de résonance du mode optique fondamental ; la cavité de longueur 2.4 mm a un intervalle spectral libre de 62 GHz, qui dépasse la plage d'accordabilité du laser, limitée à 40 GHz environ. Le contrôle de la température de la cavité nous permet de jouer sur la dilatation thermique des espaceurs pour balayer un intervalle spectral. Le coefficient de dilatation thermique du cuivre étant de $\alpha = 1.6 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, la variation de température nécessaire à balayer un intervalle spectral $\Delta L = \lambda/2$ vaut $\Delta T = \alpha^{-1} \Delta L / L \simeq 14 \text{ K}$, facilement accessible par l'asservissement contrôlant l'élément Peltier.

3.3.2 L'enceinte à vide

Pour optimiser les performances de notre cavité de mesure, nous l'avons placée sous vide, ce qui permet de réduire un certain nombre de bruits et d'améliorer les facteurs de qualité mécanique. En effet, diminuer la pression réduit les pertes mécaniques dues au chocs avec les molécules d'air. Par ailleurs, la longueur optique de la cavité dépend de l'indice optique de l'air, qui peut varier de manière appréciable en cas de flux d'air non contrôlé. Placer la cavité sous vide permet de s'affranchir en grande partie de ce bruit supplémentaire. Enfin, travailler sous vide permet de réduire le bruit acoustique à basse fréquence qui perturbe l'asservissement du laser ; l'amplitude résiduelle du signal d'erreur une fois l'asservissement en marche est d'ailleurs visiblement réduite.

Pour deux expériences différentes réalisées pendant ma thèse, j'ai utilisé une enceinte à vide qui avait été fabriquée au laboratoire et qui disposait d'un volume suffisant pour contenir la cavité, plusieurs accès optiques pour injecter le faisceau laser et récupérer la lumière transmise, et une bonne étanchéité pour maintenir un vide de $5 \times 10^{-2} \text{ mbar}$ sans

pompage pendant toute la durée des mesures (de l'ordre de l'heure) ; il est en effet essentiel de travailler avec la pompe éteinte pour éviter les vibrations et le bruit acoustique. Pour compenser les fuites et le dégazage des matériaux dans l'enceinte une fois la pompe coupée, nous effectuons plusieurs cycles de pompage avec un ensemble constitué d'une pompe primaire BOC-Edwards et d'une pompe turbomoléculaire Alcatel, permettant d'atteindre une pression inférieure à 10^{-4} mbar.

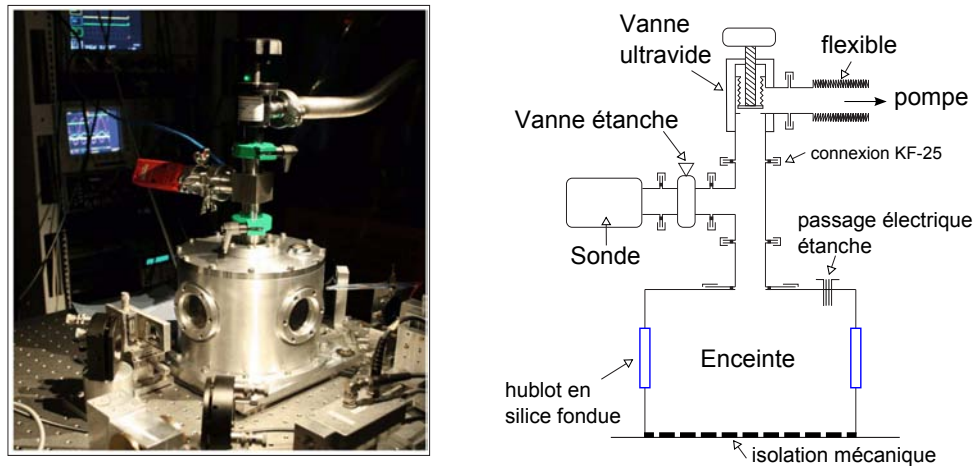


FIGURE 3.9 – Photo et schéma de l'enceinte à vide.

La FIG. 3.9 montre une vue en coupe de l'enceinte ; elle est réalisée en dural, de forme cylindrique (hauteur et diamètre de 30 cm environ), vissée à une plaque de base posée sur une feuille de caoutchouc épaisse pour atténuer les vibrations. Le corps central de l'enceinte est muni de trois ouvertures avec des hublots en silice de grande taille. Le couvercle circulaire est muni de deux connecteurs étanches, qui permettent le passage des câbles nécessaires aux contrôles ou aux mesures. Le conduit supérieur relie le corps central à la sonde de pression et aux pompes via une vanne étanche ultravide et un tubulaire souple.

3.4 L'asservissement du laser et la mesure de petits déplacements : la technique Pound-Drever-Hall

Pour observer avec la plus grande sensibilité le mouvement du micro-miroir, la cavité doit être maintenue à résonance avec le faisceau laser. La technique Pound-Drever-Hall (PDH) est une méthode couramment utilisée, plus complexe que celle du tilt-locking car elle implique la mise en place d'un système de modulation-démodulation de la phase du laser. Elle est néanmoins une technique d'asservissement très robuste et fiable et peut également être utilisée pour mesurer les déplacements du micro-miroir, sans avoir à développer un deuxième dispositif spécifique pour cet usage.

Cette technique porte les noms des chercheurs qui l'ont conçue en 1983 [47], et elle a trouvé une large utilisation dans les interféromètres gravitationnels. Elle consiste à moduler la phase du faisceau incident à une fréquence grande devant la bande passante de la cavité ; le faisceau transmis par la cavité subit alors une modulation d'intensité qui est détectée par une photodiode. Ce signal, une fois démodulé, est proportionnel à l'écart entre la résonance de la cavité et le faisceau laser.

Nous allons détailler dans la suite le principe de cette technique et sa mise en œuvre expérimentale. Nous verrons finalement comment le signal d'erreur obtenu permet de détecter les déplacements du micro-miroir.

3.4.1 Description du principe du Pound-Drever-Hall

La technique d'extraction du signal PDH est illustré sur la FIG. 3.10 : le champ $\alpha_0(t)$ issu de la source laser traverse un modulateur électro-optique qui module la phase du champ à une pulsation Δ . L'intensité du champ $\alpha_{\text{out}}(t)$ réfléchi par la cavité et renvoyé grâce à un circulateur optique vers une photodiode, est ensuite démodulé à la même pulsation Δ puis filtré par un filtre passe-bas ayant une fréquence de coupure inférieure à $\Delta/2\pi$.

Le champ incident sur la cavité de mesure, modulé à la pulsation Δ , s'écrit :

$$\alpha_{\text{in}}(t) = \alpha_0(t) e^{i\beta \cos(\Delta t)} \simeq \alpha_0(t) \{J_0 + iJ_1 (e^{i\Delta t} + e^{-i\Delta t})\} \quad (3.6)$$

où β est la profondeur de modulation, J_0 et J_1 les premières fonctions de Bessel sur lesquelles se développe le champ pour une profondeur de modulation faible. L'équation (3.6) montre que la modulation de phase ajoute au champ $\alpha_0(t)$ deux bandes latérales à des fréquences séparées de $\pm\Delta/2\pi$, et en quadrature par rapport à la porteuse. Pour une fréquence de modulation de 12 MHz grande devant la bande passante de la cavité ($\Omega_c \sim 1$ MHz), les bandes latérales sont directement réfléchies par la cavité alors que la porteuse subit un déphasage qui dépend de son désaccord Ψ avec la résonance de la cavité.

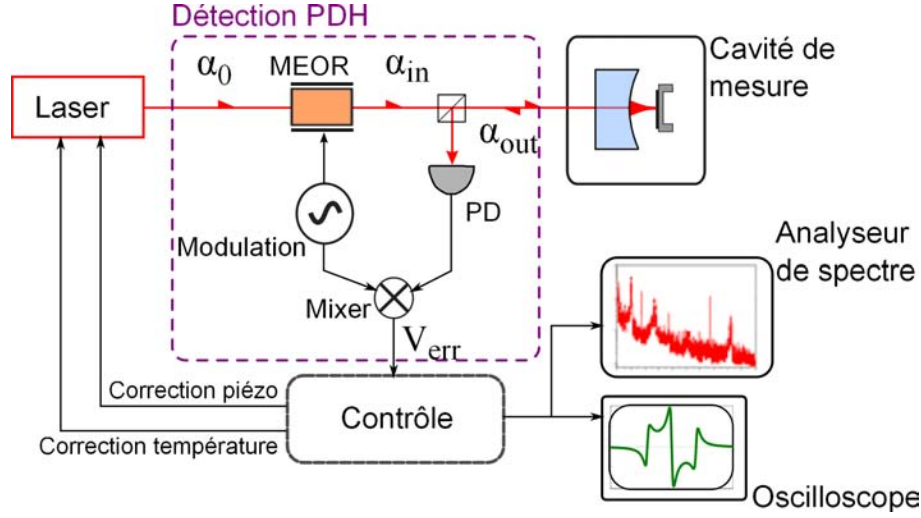


FIGURE 3.10 – Schéma du principe de l'extraction du signal d'erreur PDH. La phase du champ incident est modulée à la fréquence $\Delta/2\pi = 12\text{ MHz}$; l'intensité réfléchie démodulée fournit le signal d'erreur V_{err} . Le schéma du boîtier d'asservissement est représenté sur la FIG. 3.12.

Les bandes latérales apparaissent ainsi comme une référence de phase pour la mesure des variations du déphasage de la porteuse, la mesure de l'intensité du faisceau réfléchi donnant accès aux battements entre la porteuse et les bandes latérales. Le champ réfléchi est obtenu en multipliant chaque terme de la relation (3.6) par son coefficient de réflexion à la fréquence adéquate. Le coefficient de réflexion $r_{\Psi}[\Omega]$ à désaccord Ψ quelconque et à une fréquence Ω peut être obtenu en utilisant les relations (2.34) à (2.37) et vaut :

$$r_{\Psi}[\Omega] = \frac{\gamma - P + i\Psi + i\Omega\tau}{\gamma - i\Psi - i\Omega\tau}. \quad (3.7)$$

où γ est le taux d'amortissement de la cavité et P les pertes. Le champ réfléchi s'écrit alors :

$$\alpha_{\text{out}}(t) = \alpha_0(t) \left\{ J_0 r_{\Psi}[0] + iJ_1 (r_{\Psi}[-\Delta] e^{i\Delta t} + r_{\Psi}[\Delta] e^{-i\Delta t}) \right\}. \quad (3.8)$$

L'intensité $I_{\text{out}}(t) = |\alpha_{\text{out}}(t)|^2$ mesurée par la photodiode comporte donc un terme oscillant à la pulsation Δ et d'autres termes à fréquence nulle ou double. Comme le signal est ensuite démodulé à la pulsation Δ , on ne s'intéresse ici qu'à la partie évoluant à la pulsation Δ , qui s'écrit :

$$I_{\text{out}}^{(\Delta)}(t) = -2 J_0 J_1 \bar{I}_{\text{in}} \left\{ \text{Im} \{ r_{\Psi}^*[0] (r_{\Psi}[-\Delta] + r_{\Psi}[\Delta]) \} \cos(\Delta t) + \text{Re} \{ r_{\Psi}^*[0] (r_{\Psi}[-\Delta] - r_{\Psi}[\Delta]) \} \sin(\Delta t) \right\} \quad (3.9)$$

La démodulation consiste à multiplier ce terme par une tension sinusoïdale de la forme $\cos(\Delta t + \phi)$ où ϕ est une phase ajustable. Il est ainsi possible d'extraire l'amplitude de l'un

des deux termes de l'équation (3.9), ou une combinaison linéaire des deux. Le second terme ayant une dérivée nulle par rapport au désaccord Ψ autour de $\Psi = 0$, le choix optimal correspond à $\phi = 0$, qui donne un signal d'erreur de la forme :

$$\begin{aligned} V_{\text{err}}(\Psi) &= \langle I_{\text{out}}(t) \cos(\Delta t) \rangle \\ &= -J_0 J_1 \bar{I}_{\text{in}} \text{Im} \{ r_{\Psi}^*[0] (r_{\Psi}[-\Delta] + r_{\Psi}[\Delta]) \} \end{aligned} \quad (3.10)$$

où la moyenne temporelle $\langle \dots \rangle$ porte sur un temps long devant la période de modulation $2\pi/\Delta$. Lorsque la fréquence des bandes latérales est grande devant la bande passante ($\Delta \gg \Omega_c$), l'expression du signal d'erreur se simplifie au voisinage de la résonance ($\Psi \ll \Delta\tau$) :

$$V_{\text{err}}(\Psi) \simeq -J_0 J_1 \bar{I}_{\text{in}} \frac{2T \Psi}{\gamma^2 + \Psi^2} \quad (3.11)$$

Cette expression montre que le signal d'erreur varie très rapidement et change de signe autour de $\Psi = 0$, ce qui permet de réaliser un asservissement efficace. La dépendance du signal d'erreur avec le désaccord Ψ pour une cavité de bande passante $\Omega_c = \gamma/\tau = 2\pi \times 1$ MHz et une fréquence de modulation $\Delta/2\pi = 12$ MHz est représentée sur la FIG. 3.11.

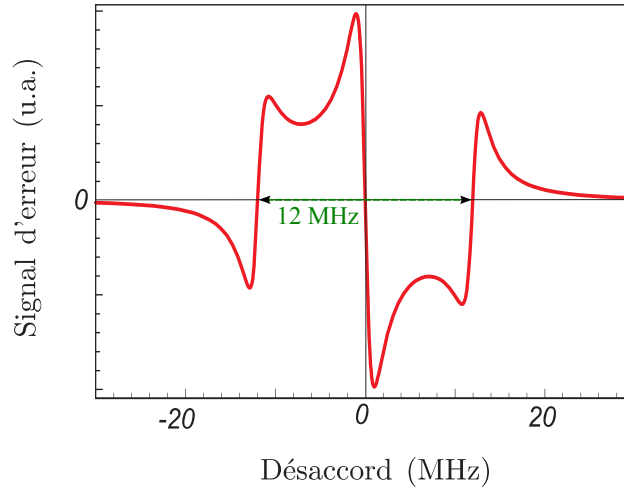


FIGURE 3.11 – Signal d'erreur Pound-Drever-Hall d'une cavité de bande passante égale à 1 MHz. Le laser est modulé à une fréquence de 12 MHz.

On peut remarquer que le signal reste positif pour tout désaccord Ψ à l'intérieur de la plage $[-\Delta, 0]$, tandis qu'il est négatif sur $[0, \Delta]$; cela montre que ce type d'asservissement peut localiser la résonance du laser sur une plage de capture bien plus grande que la bande passante de la cavité, ce qui facilite l'accrochage de la fréquence du laser.

3.4.2 Mise en œuvre expérimentale de l'asservissement du laser

Le signal d'erreur Pound-Drever-Hall sert à la fois à la mesure du spectre de bruit de position du micro-miroir (voir la section suivante) et à l'asservissement du laser sur la cavité. Pour cela, on contrôle la fréquence du laser à l'aide de deux entrées sur le laser : une voie lente via la température du cristal YAG et une voie rapide qui pilote la cale piézo-électrique placée sur le cristal.

En pratique, la modulation de phase du faisceau incident est réalisée au moyen d'un modulateur électro-optique résonnant (New Focus, modèle 4003) piloté par un générateur à 12 MHz capable de délivrer une puissance électrique de 1.5 W et conduisant ainsi à une profondeur β de la modulation de phase de l'ordre du radian. Le générateur est également pourvu d'une deuxième sortie qui produit un signal synchrone avec le premier mais avec un déphasage ajustable : c'est ce signal qu'on utilise pour la démodulation en l'envoyant sur un mélangeur de la marque Minicircuits sur lequel entre également le signal de la photodiode. Le produit résultant est filtré avec un circuit passe-bas Minicircuits de fréquence de coupure égale à 5 MHz, suffisante pour observer le spectre des déplacements du micro-miroir aux fréquences qui nous intéressent.

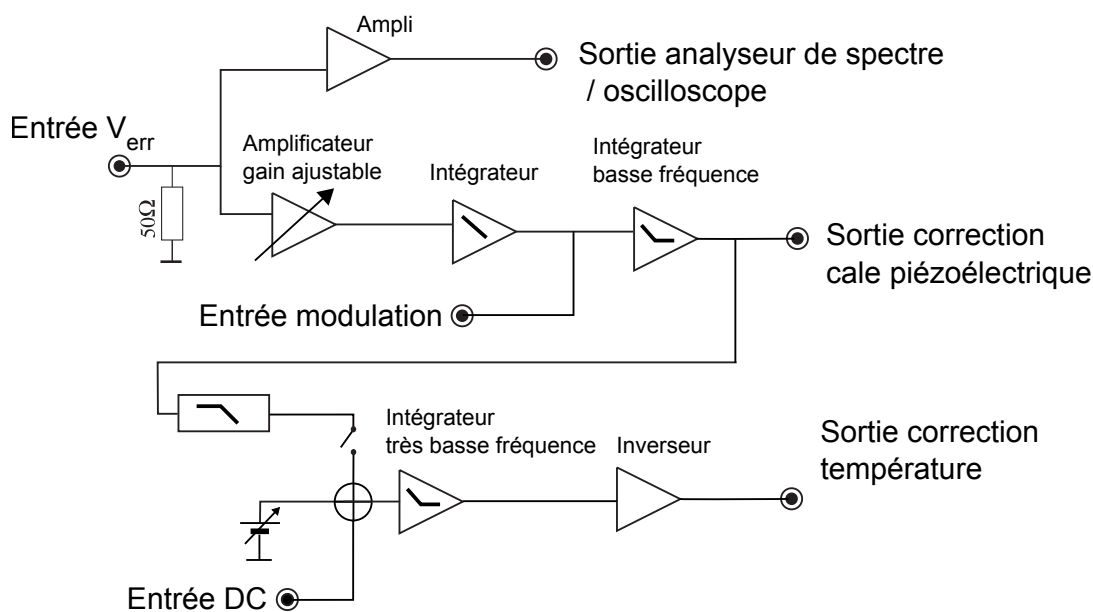


FIGURE 3.12 – Schéma de principe du boîtier de contrôle de l'asservissement en fréquence du laser, qui dispose également d'une sortie pour la mesure des déplacements du micro-miroir.

Le signal d'erreur ainsi produit pilote un étage préamplificateur dont le schéma de principe est donné sur la FIG. 3.12. Une partie du signal est amplifiée et directement envoyée à la fois vers un oscilloscope et vers un analyseur de spectre pour la mesure des déplacements du résonateur. L'autre partie est composée de deux voies en parallèle, avec

des fonctions de transfert adaptées au pilotage de la température (voie lente) et de la cale piézo-électrique (voie rapide) du laser. En plus des réglages usuels de gain des étages et des interrupteurs permettant de mettre en ou hors fonction les étages intégrateurs, le boîtier dispose de deux entrées permettant de moduler la fréquence du laser (sur la voie de la cale piézo-électrique) et d'ajouter une tension continue pour un ajustement fin de la température (sur la voie température). La voie lente dispose également d'une tension continue réglable pour effectuer des balayages lents de la fréquence du laser.

La séquence de mise en marche de l'asservissement de la fréquence du laser s'effectue en plusieurs étapes successives : d'abord on approche la fréquence du laser de la résonance de la cavité grâce au réglage du courant de pompage de la diode du laser ou avec le réglage fin de la température, en regardant le faisceau transmis par la cavité par exemple avec une caméra CCD. On met ensuite en fonction l'asservissement de la voie rapide : le signal d'erreur est alors maintenu proche de zéro et le laser reste à résonance avec la cavité à miroir mobile. Les dérives du signal d'erreur sont finalement corrigées en mettant en marche l'asservissement de la voie température. En mesurant le bruit sur le signal d'erreur, on constate que l'asservissement est efficace jusqu'à une fréquence de l'ordre de 20 kHz.

3.4.3 Mesure de déplacements avec la technique Pound-Drever-Hall

Le signal d'erreur Pound-Drever-Hall réalise le battement entre le champ réfléchi par la cavité et les bandes latérales directement réfléchies. En plus de fournir un signal d'erreur efficace, nous allons montrer que cela permet aussi d'extraire du champ réfléchi l'information concernant les déplacements du micro-miroir, simplement en récupérant la partie haute fréquence du signal d'erreur.

Nous supposons que l'asservissement fonctionne dans des conditions optimales, ce qui se traduit par le fait que la cavité est à résonance avec le laser incident ($\Psi \equiv 0$) et les bandes latérales sont à des fréquences élevées par rapport à la bande passante de la cavité ($\Delta \gg \Omega_c$). On s'intéresse par ailleurs à des déplacements du micro-miroir à des fréquences Ω supposées petites devant celle des bandes latérales ($\Omega \ll \Delta$). Dans ces conditions, le champ réfléchi par la cavité s'écrit :

$$\alpha_{\text{out}}[\Omega] = \bar{\alpha}_0 (J_0 r_0[0] \delta(\Omega) - iJ_1 \{ \delta(\Omega - \Delta) + \delta(\Omega + \Delta) \}) + \delta\alpha_{\text{out}}[\Omega] \quad (3.12)$$

Les premiers termes représentent le champ moyen, somme de la porteuse et des bandes latérales, tandis que les fluctuations $\delta\alpha_{\text{out}}$ sont dues aux déplacements δx du micro-miroir (on néglige ici les fluctuations quantiques). D'après les équations (2.41) et (2.42), nous

pouvons écrire ce champ réfléchi sous la forme :

$$\delta\alpha_{\text{out}}[\Omega] = 2ik\bar{\alpha} \frac{\sqrt{T}}{\gamma - i\Omega\tau} \delta x[\Omega] \quad (3.13)$$

où le champ intracavité moyen $\bar{\alpha}$ est associé à la porteuse $J_0\bar{\alpha}_0$, seule composante du champ incident à être à résonance avec la cavité :

$$\bar{\alpha} = \frac{\sqrt{T}}{\gamma} J_0\bar{\alpha}_0 \quad (3.14)$$

Le signal d'erreur étant obtenu par filtrage basse fréquence du produit entre l'intensité réfléchie et une tension sinusoïdale en $\cos(\Omega t)$, sa composante à la fréquence Ω s'écrit :

$$V_{\text{err}}[\Omega] = \frac{1}{2} (I_{\text{out}}[\Omega + \Delta] + I_{\text{out}}[\Omega - \Delta]) h[\Omega] \quad (3.15)$$

où $h[\Omega]$ est la fonction de transfert du filtre basse fréquence, dont la fréquence de coupure est supposée grande devant Ω ($h[\Omega] \simeq 1$) mais petite devant Δ ($h[\Delta] \simeq 0$). A partir de l'expression (3.12), le calcul des composantes $I_{\text{out}}[\Omega \pm \Delta]$ autour des bandes latérales fait alors directement apparaître le battement entre les bandes latérales (terme $J_1\bar{\alpha}_0$) et les fluctuations $\delta\alpha_{\text{out}}$ du champ réfléchi. On obtient ainsi :

$$I_{\text{out}}[\Omega \pm \Delta] = iJ_1\bar{\alpha}_0 (\delta\alpha_{\text{out}}[\Omega] - \delta\alpha_{\text{out}}^*[\Omega]) = -J_1\bar{\alpha}_0 \delta q_{\text{out}}[\Omega] \quad (3.16)$$

Cette expression montre clairement que le signal d'erreur Pound-Drever-Hall (3.15) permet d'extraire le bruit de phase δq_{out} du faisceau réfléchi par la cavité.

A partir des équations (3.13) et (3.14), on obtient finalement :

$$V_{\text{err}}[\Omega] = -2J_0J_1\bar{I}_{\text{in}} \frac{T/\gamma}{\gamma - i\Omega\tau} h[\Omega] 2k\delta x[\Omega] \quad (3.17)$$

que l'on peut encore écrire :

$$V_{\text{err}}[\Omega] = \left. \frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi} \right|_{\Psi=0} \frac{h[\Omega]}{1 - i\Omega/\Omega_c} \delta\Psi[\Omega] \quad (3.18)$$

où $\delta\Psi = 2k\delta x$ est le déphasage produit par le déplacement δx du micro-miroir, et la pente du signal d'erreur statique (équation (3.11)) est donnée par :

$$\left. \frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi} \right|_{\Psi=0} = -2J_0J_1\bar{I}_{\text{in}} \frac{T}{\gamma^2} \quad (3.19)$$

A basse fréquence ($\Omega \ll \Omega_c$), le signal d'erreur est égal au produit de la pente du signal d'erreur par le déphasage induit par les déplacements du micro-miroir, comme on aurait

pu s'y attendre d'après l'équation (3.11) :

$$V_{\text{err}}[\Omega \ll \Omega_c] \simeq \left. \frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi} \right|_{\Psi=0} \delta\Psi[\Omega] \quad (3.20)$$

A plus haute fréquence, la cavité agit comme un filtre passe-bas de fréquence de coupure Ω_c et réduit la réponse du signal d'erreur aux déplacements.

La relation (3.18) peut être utilisée pour calibrer nos mesures de déplacement du miroir. On obtient ainsi une calibration complémentaire de celle que l'on peut réaliser en appliquant une modulation de fréquence connue au laser incident, et en utilisant l'équivalence $\delta\nu/\nu = \delta x/L$ entre modulation de fréquence et déplacement. A partir de l'équation (3.18), on trouve que l'amplitude δx des déplacements est liée au spectre S_{err} du signal d'erreur par la relation :

$$\delta x[\Omega] = \frac{\lambda}{4\pi} \frac{\sqrt{1 + \Omega^2/\Omega_c^2}}{\frac{dV_{\text{err}}}{d\Psi}} \sqrt{S_{\text{err}}[\Omega]} \quad (3.21)$$

Il suffit donc de connaître la bande passante de la cavité et la pente du signal d'erreur pour calibrer le signal fourni par l'analyseur de spectre.

Comme le montre la FIG. 3.13(a), la mesure de la bande passante est très simplifiée du fait de la présence des bandes latérales, qui fournissent des pics d'Airy secondaires à une fréquence bien définie, aussi bien pour les champs réfléchis que transmis par la cavité. En modulant la fréquence du laser à basse fréquence, on visualise ainsi l'intensité transmise sur un oscilloscope et l'échelle temporelle peut être convertie en fréquence en utilisant les maxima des pics secondaires, que l'on sait être séparés de 24 MHz. La bande passante est alors directement déduite de la largeur du pic d'Airy. De même, le signal d'erreur passant par zéro pour les désaccords $\Psi = 0$ et $\Psi = \pm\Delta \times \tau$, on peut mesurer sa pente à résonance (voir la FIG. 3.13(b)). Dans la prochaine section, nous utiliserons cette méthode pour calibrer les spectres de bruit thermique de la cavité à température ambiante.

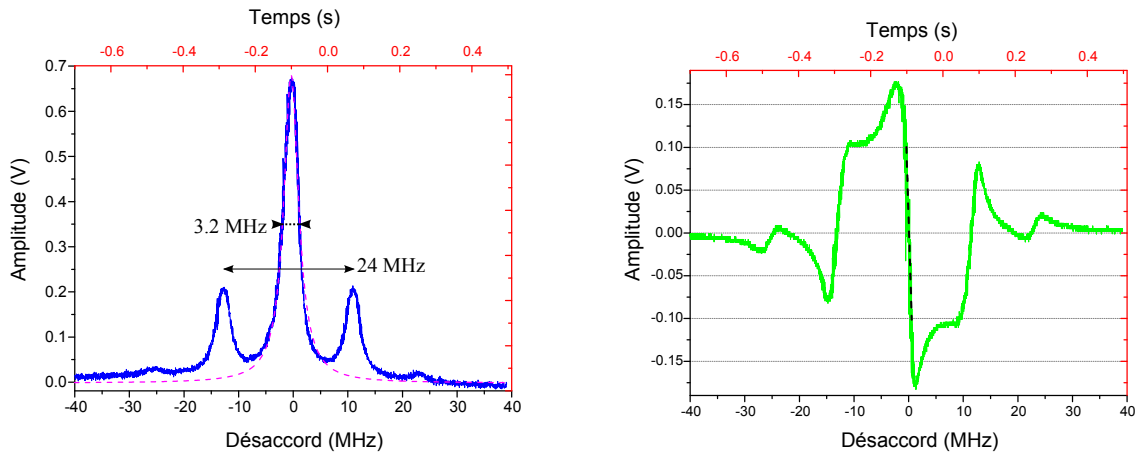


FIGURE 3.13 – (a) : amplitude du champ transmis. (b) : signal d’erreur Pound-Drever-Hall.

3.5 Spectre de bruit thermique à température ambiante

Nous présentons dans cette section les résultats des mesures à température ambiante du bruit thermique d’un micro-miroir. Le spectre de bruit du signal d’erreur Pound-Drever-Hall reflète l’excitation thermique des différents modes de vibration du résonateur, dont nous comparons les caractéristiques à celles obtenues par une simulation par éléments finis. Nous présentons ensuite l’étude de la dépendance des facteurs de qualité mécanique avec la pression régnant dans l’enceinte à vide. Nous terminons cette section par les spectres de bruit thermique de modes d’ordre plus élevé, obtenus avec le montage dédié à l’observation du couplage à trois modes.

3.5.1 Le spectre de bruit thermique

La FIG. 3.14 montre un spectre de bruit observé en envoyant directement le signal d’erreur Pound-Drever-Hall sur l’analyseur de spectre. Ce résultat a été obtenu avec un micro-résonateur à pont doublement encastré de $800\ \mu\text{m}$ de long, $400\ \mu\text{m}$ de large et $60\ \mu\text{m}$ d’épaisseur (appelé P11), avec une pression dans l’enceinte à vide de 10^{-2} mbar. Le résonateur est monté dans la cavité optique décrite dans la section 3.3.1, caractérisée par une longueur $L = 2.4\ \text{mm}$, un intervalle spectral libre de $62.5\ \text{GHz}$, une finesse $\mathcal{F} = 20\,000$, ce qui correspond à une bande passante de $1.6\ \text{MHz}$. Le coefficient d’adaptation spatiale est d’environ 0.85 , et la puissance laser incidente de $2\ \text{mW}$.

Le spectre est formé d’une succession de 8 parties de $600\ \text{kHz}$ de large, acquises par l’analyseur de spectre avec une résolution spectrale (RBW) de $100\ \text{Hz}$ et 8192 points par acquisition, soit un point tous les $73\ \text{Hz}$ environ. Chaque acquisition est moyennée sur une

centaine de balayages. Ainsi, les pics qu'on observe sur le spectre ne sont pas dus à un défaut de moyennage mais correspondent à des structures réelles du spectre de bruit du faisceau réfléchi par la cavité. Le spectre est calibré en terme de déplacements du micro-résonateur en $\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$, comme on l'a expliqué dans la partie précédente, en mesurant la pente statique du signal d'erreur et en prenant en compte la réduction de la sensibilité due à la bande passante de la cavité (équation (3.21)).

On constate en premier lieu, en accord avec ce qu'on attendait théoriquement (section 1.1.3), que le spectre est caractérisé par une série de pics tels que celui de la FIG. 1.3, de fréquence $\Omega_m/2\pi$ de l'ordre du mégahertz, dont certains présentent un très bon facteur de qualité mécanique Q (faible taux d'amortissement mécanique Γ). Ces pics correspondent au bruit thermique des différents modes propres du micro-résonateur. Du fait de la faible masse effective des modes, l'amplitude des pics est relativement importante par rapport au plancher de bruit observé sur le spectre, avec une dynamique dépassant 40 dB pour certains modes.

Il est possible de distinguer une dizaine de résonances sur la plage 0 – 5 MHz, repérées sur la figure par leurs indices longitudinal et transverse, qui correspondent aux nombres de nœuds du mode propre respectivement dans les directions longitudinale et transverse. L'identification des modes a été faite en comparant les fréquences de résonance obtenues expérimentalement avec celles obtenues grâce à une simulation par éléments finis, décrite dans la prochaine partie.

A partir de l'étude de ce spectre, il est possible de remonter aux caractéristiques mécaniques des différents modes de vibration, telles que leur fréquence de résonance, leur facteur de qualité, leur masse effective, et leur profil spatial. L'encadré (a) de la FIG. 3.14 montre le spectre de bruit du mode (0,1), obtenu par moyennage de 100 spectres de 8192 points sur une plage de 30 kHz autour de 865 kHz, et avec une résolution spectrale de 10 Hz. Au spectre est superposé un ajustement lorentzien donné par l'équation (1.24) et tracé avec $\Omega_m/2\pi = 864.76 \text{ kHz}$ et $\Gamma/2\pi = 187 \text{ Hz}$, d'où on déduit un facteur de qualité mécanique $Q = \Omega_m/\Gamma = 4600$. L'ajustement est en très bon accord avec la courbe expérimentale sur une plage de 10 kHz autour de la résonance, les différences observées sur une plage plus large étant liées à la contribution des autres modes acoustiques.

Les courbes en gris sur le spectre large de la FIG. 3.14 reproduisent les ajustements lorentziens des différents modes du micro-miroir, tandis que leur somme est donnée par la courbe en vert, qui représente ainsi la contribution du bruit thermique du micro-résonateur au spectre expérimental. Le bruit supplémentaire que l'on observe est dû à d'autres causes, telles que le bruit thermique du miroir d'entrée, le bruit de photon, et le bruit de fréquence du laser, qui limitent la sensibilité de la mesure des déplacements du micro-résonateur à un niveau proche de $10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$.

L'encadré (b) de la FIG. 3.14 montre un agrandissement du spectre sur la plage de fréquences 3.65 – 3.8 MHz, dans laquelle il n'y a pas de mode propre du micro-résonateur.

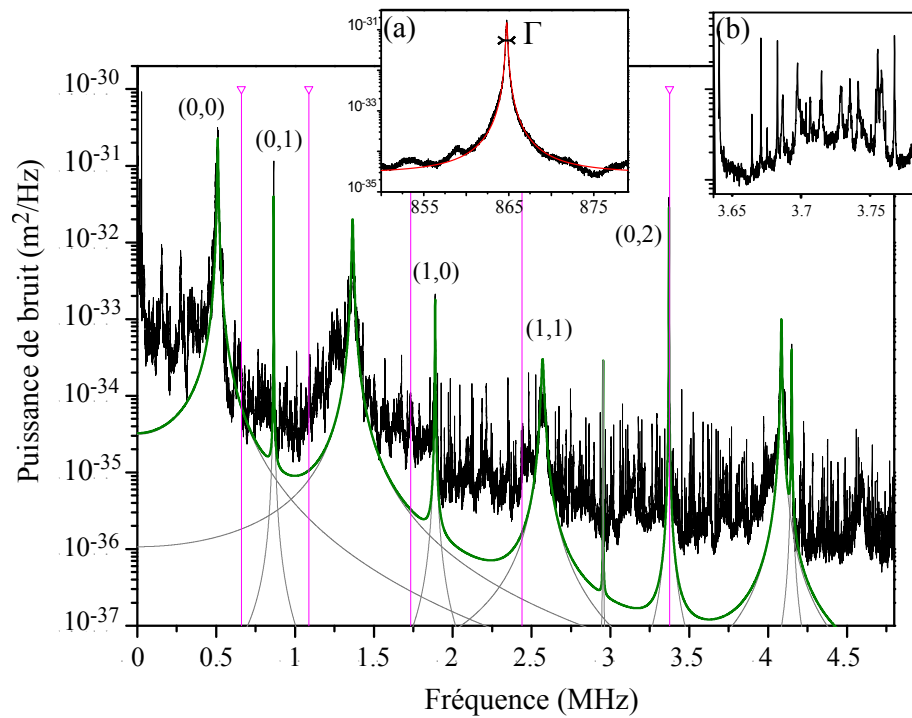


FIGURE 3.14 – Spectre de bruit de position observé avec un micro-résonateur en forme de pont doublement encastré de $800 \times 400 \mu\text{m}$. La courbe en vert représente le bruit thermique attendu d'après les caractéristiques mécaniques des modes déterminées à partir du spectre. Les traits en magenta indiquent les fréquences propres calculées avec la simulation par éléments finis. Encadré (a) : spectre du mode (0,1) avec l'ajustement lorentzien de la résonance. Encadré (b) : agrandissement du spectre sur la plage 3.65 – 3.8 MHz où on observe essentiellement les modes du coupleur d'entrée.

De nombreux pics sont néanmoins visibles, avec une amplitude inférieure à $10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$, que nous pouvons attribuer aux modes propres du miroir d'entrée [23]. En effet, l'amplitude de ces modes reste pratiquement constante lorsqu'on fait varier le recouvrement entre le faisceau laser et les modes mécaniques du résonateur en translatant ce dernier par rapport à l'axe optique de la cavité. Le spectre de bruit des modes de vibration du coupleur d'entrée constitue ainsi une limite à l'observation du fond du bruit thermique du micro-miroir.

Structure des modes propres : la méthode des éléments finis

Pour pouvoir comparer nos résultats expérimentaux avec des prévisions théoriques, nous avons utilisé une simulation numérique par éléments finis (*Finite Elements Method*), à l'aide du logiciel Comsol. Cette méthode permet de modéliser un système physique continu ayant un nombre infini de degrés de liberté, et de résoudre de manière approchée le système d'équations qui le décrit. Concrètement cette méthode consiste à discrétiser le système physique préalablement dessiné avec une grille (maillage), formée par des éléments de base de forme codifiée (les éléments finis, en forme de triangle, carré, tétraèdre, ...) et connectés par des nœuds ; à l'ensemble des éléments peuvent être associées les propriétés du matériel (module d'Young, module de Poisson, densité). On détermine ensuite les équations qui décrivent les relations et les contraintes du système sur les nœuds de connexion des éléments, selon les conditions aux limites imposées à la structure [54].

Nous avons ainsi élaboré un modèle mécanique du micro-résonateur avec Comsol, pour calculer la forme et la fréquence des ses modes propres. Il faut tout d'abord dessiner la puce, et lui associer les propriétés mécaniques du silicium (la présence de la couche d'arrêt en SiO_2 est négligée). On impose ensuite les conditions aux limites, dictées par la façon dont la puce est fixée sur son support, puis le logiciel définit automatiquement un maillage adapté aux volumes, avec par exemple des éléments plus petits et plus denses sur le résonateur, comme on peut le voir sur la FIG. 3.15. Après la résolution du problème, le logiciel fournit les fréquences propres du système et le profil spatial des modes propres (voir la FIG. 3.15 à droite).

La simulation par éléments finis a été utilisée à plusieurs reprises pour analyser le comportement mécanique des micro-résonateurs, et pour avoir un modèle de comparaison afin d'identifier les pics observés sur le spectre de bruit thermique². La simulation est également un outil essentiel pour étudier les différentes géométries possibles en vue d'optimiser les facteurs de qualité mécanique et pour tester l'influence du système de fixation de la puce.

Le tableau 3.2 permet de comparer les fréquences de résonance obtenues par éléments finis avec les valeurs déduites des ajustements lorentziens du spectre de bruit expérimental.

2. La comparaison des fréquences de résonance théoriques et expérimentales n'est pas toujours suffisante pour définir les modes ; la mesure du profil spatial en observant la réponse spectrale en fonction du point d'impact du faisceau sur le micro-résonateur fournit dans ce cas une information plus fiable.

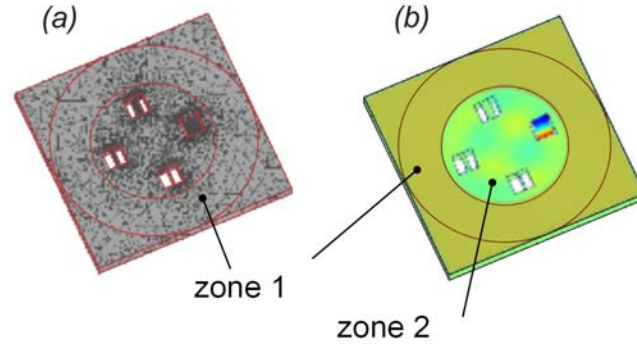


FIGURE 3.15 – Modélisation par éléments finis d'une puce avec quatre micro-résonateurs. (a) : définition de la géométrie du système, des contraintes et du maillage, plus dense au niveau des résonateurs. (b) : profil spatial d'un mode propre obtenu par Comsol; la zone 1 est la surface par laquelle la puce est maintenue, alors que la zone 2 est libre de se déplacer.

Pour diminuer le temps de calcul dans la simulation, nous avons supprimé du modèle les trois autres résonateurs présents en réalité sur la puce. L'accord entre fréquences expérimentales et simulées semble meilleur pour les modes transverses $(0, j)$ de fréquence élevée, probablement parce que dans ce cas le couplage avec la puce est réduit.

Ce comportement se retrouve sur les facteurs de qualité atteints expérimentalement, les modes $(0, j)$ étant les seuls à dépasser 10 000. Cela est sans doute dû au fait qu'ils induisent peu de déplacement au niveau des bords par lesquels le pont est tenu, et ils sont ainsi peu couplés aux modes de vibration du reste de la puce. La simulation par éléments finis montre par contre que les modes longitudinaux de la forme $(i, 0)$ sont souvent couplés avec des modes de la puce.

mode	$\Omega_i/2\pi$ (kHz) simulation	$\Omega_i/2\pi$ (kHz) expérience	$\Gamma_i/2\pi$ (Hz) expérience
(0,0)	660	510	6000
(0,1)	1088	865	300
(1,0)	1734	1890	2000
(1,1)	2440	2570	17000
(0,2)	3377	3371	293

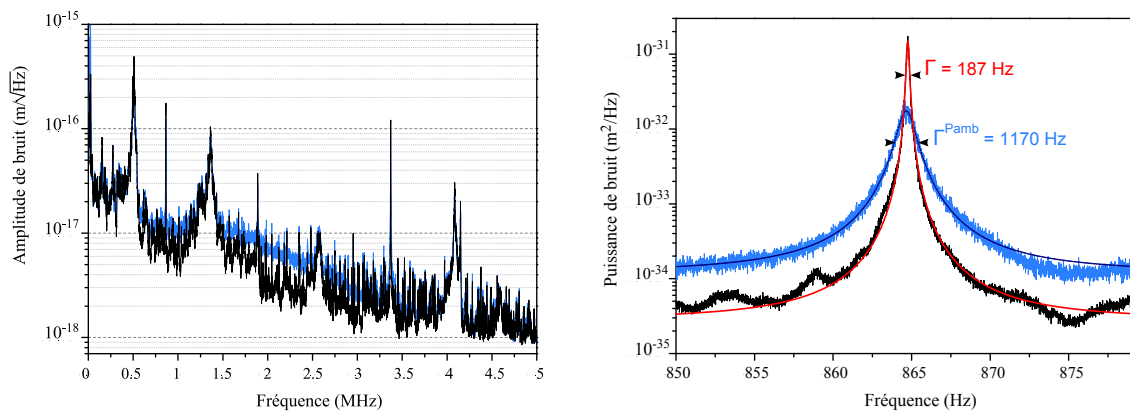
TABLE 3.2 – Comparaison entre les paramètres mécaniques des modes propres obtenus expérimentalement et par la simulation par éléments finis.

3.5.2 Le spectre de bruit en fonction de la pression

Nous avons souligné dans le premier chapitre l'importance d'obtenir un facteur de qualité mécanique élevé pour notre micro-résonateur. L'une des sources de pertes mécaniques les plus évidentes, qui nous a menés à la mise en place d'une enceinte à vide, est l'amor-

tissement par le gaz résiduel. Nous avons ainsi étudié la variation du facteur de qualité mécanique en fonction de la pression dans l'enceinte.

Les spectres représentés sur la FIG. 3.16(a) ont été obtenus pour deux valeurs différentes de la pression dans l'enceinte à vide. La courbe noire, déjà présentée sur la FIG. 3.14, correspond à une pression de 10^{-2} mbar, tandis que la courbe en bleu est obtenue à pression ambiante. La FIG. 3.16(b) montre les spectres autour du mode à la fréquence $\Omega_m/2\pi \simeq 865$ kHz, acquis sur une plage de 30 kHz et avec un résolution spectrale de 10 Hz, dans les mêmes conditions de pression : à pression ambiante pour la courbe bleue et à 10^{-2} mbar pour la courbe noire.



(a) Spectres de bruit de 0 à 5 MHz.

(b) Spectres sur une plage de 30 kHz autour du mode à 865 kHz.

FIGURE 3.16 – Spectres thermiques sur une large plage de fréquence (a) et autour d'un mode (b), pour le micro-résonateur P11 (pont doublement encastré de $800 \times 400 \mu\text{m}^2$), à pression ambiante (courbes bleues) et à 10^{-2} mbar (courbes noires).

On constate sur ces courbes une réduction d'un facteur 7 environ de la largeur de la résonance, qui est proportionnelle à l'amortissement mécanique Γ du mode. Ainsi, le facteur de qualité est amélioré d'un facteur 7 à basse pression. La présence de gaz autour du micro-miroir induit l'émission d'ondes acoustiques par le résonateur, ce qui provoque une dissipation d'énergie et, par conséquent, une augmentation de son amortissement mécanique. A pression ambiante, le gaz se comporte comme un fluide visqueux dans lequel le chemin libre des molécules est inférieur aux dimensions caractéristiques du résonateur. Par contre, pour une pression de 10^{-2} mbar, la densité du gaz devient si faible que ce type d'amortissement peut être négligé.

A pression ambiante, on observe également sur la FIG. 3.16(a) une augmentation du bruit de fond sur une plage de fréquence allant de 0.5 à 3.5 MHz. Ce bruit est lié aux variations d'indice dans la cavité, dues à la présence de particules dans le faisceau laser [3]. La diffusion du faisceau sur ces particules conduit essentiellement à introduire un déphasage du faisceau qui va s'accumuler au cours de sa propagation, ce qui est équivalent à

une modification de l'indice n_{eff} du milieu dans lequel se propage le faisceau. Cette variation d'indice a pour premier effet de changer la longueur effective de la cavité, ce que l'on peut constater très facilement : en abaissant graduellement la pression, on observe un défilement des fréquences de résonance de la cavité. L'indice n_{eff} étant proportionnel aux nombres de particules dans le faisceau laser, il subit par ailleurs des fluctuations δn_{eff} du fait des fluctuations temporelles de la densité de particules présentes dans le faisceau. Cela conduit à l'existence d'un bruit supplémentaire dans le spectre observé, équivalent à un déplacement $\delta x_{\text{air}} \simeq L \delta n_{\text{eff}}$.

3.5.3 Spectre de bruit thermique à haute fréquence

Nous avons également étudié le spectre de bruit thermique de modes d'ordre plus élevé, dans le cadre des recherches décrites dans le chapitre 6 pour la mise en évidence du couplage à trois modes. Nous avons utilisé pour cela la cavité presque semi-confocale décrite dans la section 6.1 : il s'agit d'une cavité de longueur $L = 37.5$ mm, constituée d'un coupleur d'entrée de rayon de courbure $R = 50$ mm, et d'un micro-miroir de la puce P11 en forme de pont doublement encastré de $1400 \mu\text{m}$ de long par $600 \mu\text{m}$ de large.

La figure 3.17 montre le spectre d'une telle cavité sur une plage de 9 MHz, obtenu avec une puissance incidente $P_{\text{in}} = 10$ mW. Pour observer le bruit thermique jusqu'à une fréquence aussi élevée, nous avons retiré le filtre passe-bas de fréquence de coupure 5 MHz situé juste après le mixer, et dont le rôle était d'éliminer la bande latérale à 12 MHz dans le signal Pound-Drever-Hall (voir la section 3.4). Une fois ce filtre enlevé, on observe un effet de repliement du spectre, une résonance mécanique à la fréquence ν_m se retrouvant aussi, avec une amplitude plus faible, à la fréquence $12 \text{ MHz} - \nu_m$. Cet effet est surtout gênant au-delà de 9 MHz, où l'on retrouve un certain nombre des pics présents entre 0 et 3 MHz.

Malgré la finesse $\mathcal{F} \simeq 7000$ relativement faible de la cavité, la bande passante $\nu_{BP} = c/(4L\mathcal{F}) = 290$ kHz est étroite du fait de la longueur de la cavité. On peut ainsi constater que la sensibilité se détériore avec la fréquence d'analyse à cause de l'effet de filtrage de la cavité : le bruit de photon limite la sensibilité à $5 \times 10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ pour une fréquence de 2.5 MHz, et remonte au-delà comme on s'y attend d'après l'équation (2.52). Au-dessus de 4.5 MHz, on observe très peu de pics, et ceux-ci ont une dynamique assez réduite (environ 5 dB seulement au-dessus du plancher de bruit). En-dessous de 4 MHz, on distingue des structures correspondant aux modes de vibrations du résonateur (de plus grande dynamique) et du coupleur d'entrée. Sont également représentées en mauve les fréquences des premiers modes du résonateur issues d'une simulation par éléments finis ; les fréquences attendues des modes $(0, n)$, intéressants pour le couplage à trois modes, ont été mises en évidence en bleu.

L'encadré (a) montre un zoom sur le spectre du mode acoustique $(0,2)$ centré à

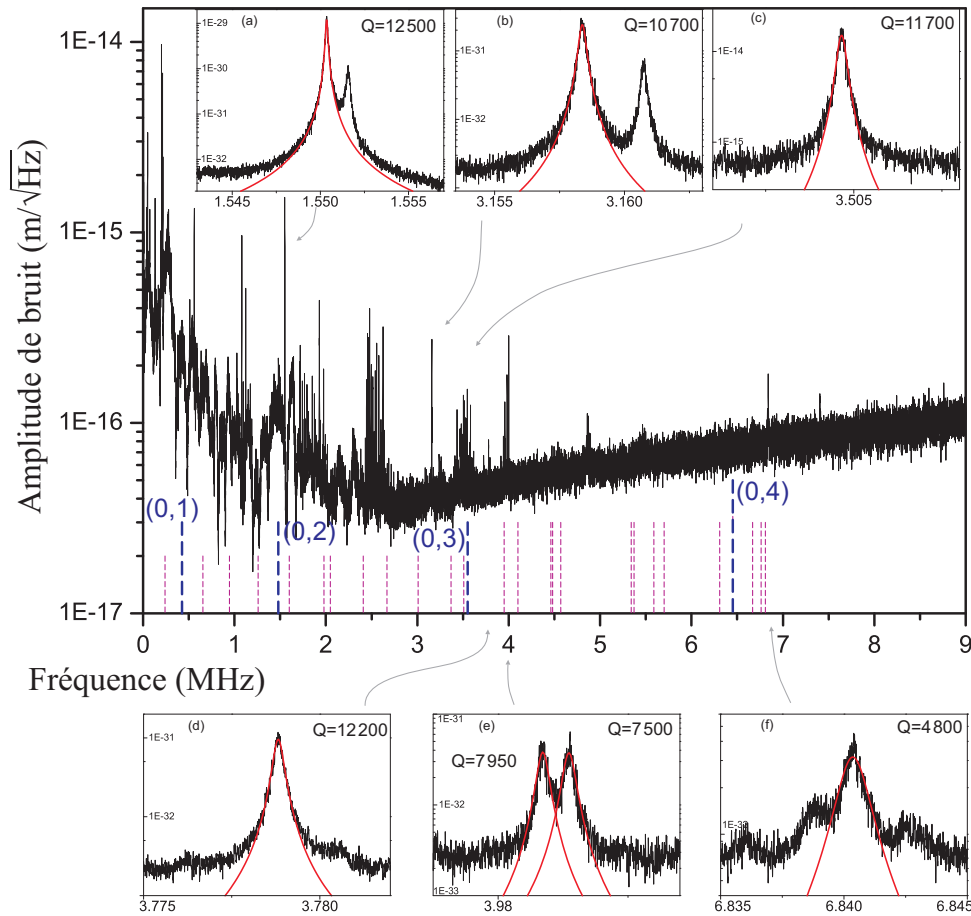


FIGURE 3.17 – Spectre large bande du bruit thermique pour un micro-résonateur en forme de pont doublement encastré de $1400 \times 600 \mu\text{m}^2$. Les différents modes sont repérés par leurs indices longitudinal et transverse (i, j) , et les traits en pointillés représentent les fréquences attendues d'après une simulation par éléments finis : le zoom dans l'encadré (a) correspond au mode $(0,2)$, celui en (f) au mode $(0,4)$; l'identification du mode $(0,3)$ reste incertaine.

1.55 MHz, avec un facteur de qualité mécanique $Q = 12200$, tandis que l'encadré (f) représente probablement le mode $(0,4)$ centré à 6.84 MHz. L'identification du mode $(0,3)$ s'est avérée plus délicate car il y a plusieurs résonances autour de la fréquence attendue qui possèdent une amplitude importante (encadrés (b) à (e)). De même, le mode $(0,5)$, attendu autour de 9.5 MHz, n'a pas pu être observé pour deux raisons : d'abord la sensibilité se dégrade trop rapidement à haute fréquence du fait de la faible bande passante de la cavité, et par ailleurs la présence des bandes latérales à 12 MHz et le processus de démodulation pour la création du signal d'erreur Pound-Drever-Hall limitent l'observation du spectre à 10 MHz environ.

3.6 Test mécanique des micro-résonateurs

Afin d'identifier de manière certaine à quels modes acoustiques du résonateur correspondent les résonances observées dans le spectre de bruit thermique, nous avons utilisé deux montages de test permettant d'accéder plus simplement aux propriétés mécaniques du micro-miroir, et en particulier au profil spatial des modes. Dans les deux dispositifs, le résonateur est excité mécaniquement par une force électrostatique ou grâce à une cale piézo-électrique ; le premier montage est basé sur la détection par une photodiode à quadrants des variations de pointé d'un faisceau laser qui se réfléchit à la surface du résonateur, alors que le second utilise un interféromètre de Michelson pour détecter le mouvement.

Ces bancs de test ont été placés sur une table optique en dehors du flux laminaire de classe 100, si bien que le résonateur à tester se trouve dans un environnement exposé aux poussières qui peuvent détériorer l'état de surface et la réflectivité du micro-miroir ; il est également sujet à de nombreuses manipulations et à l'excitation mécanique elle-même, qui risquent d'abîmer aussi bien le coating que le substrat. Nous avons ainsi estimé préférable d'employer une copie du résonateur pour tester sa réponse mécanique, et de ne pas nous servir de celui utilisé à terme dans les cavités de mesure.

3.6.1 Mesure du déplacement du faisceau avec une photodiode à quadrants

La mesure du mouvement d'un objet par la position transverse d'un faisceau laser réfléchi par sa surface (imagerie optique) a de nombreuses applications dans plusieurs domaines, par exemple en microscopie à force atomique pour détecter la force à laquelle est soumis le micro-levier [130] ou pour contrôler la position d'une particule piégée avec une pince optique [141, 62], ce qui a motivé l'étude de stratégies pour en améliorer la résolution jusqu'à dépasser la limite quantique standard [51, 150, 79]. Comme le montrent aussi ces références, la photodiode à quadrants est un instrument largement utilisé dans les mesures de déplacements de faisceaux laser : un tel dispositif permet de détecter soit un déplacement transverse soit une variation de l'angle de pointé du faisceau.

Le schéma du montage que nous avons réalisé [125] est représenté sur la figure 3.18 : le faisceau laser incident sur le micro-miroir (toujours un Nd :YAG à 1064 nm) est positionné avec deux miroirs formant une baïonnette et focalisé à l'aide d'une lentille. Le col du faisceau est situé au niveau du résonateur et fait une centaine de microns. Le faisceau se réfléchit à 45° sur le micro-miroir, excité électrostatiquement avec une pointe métallique pilotée par un amplificateur haute tension à 800 V, auquel est appliquée une modulation autour des fréquences de résonance des modes du résonateur. Nous pouvons contrôler le centrage du faisceau grâce à la caméra CCD avec objectif macro placée à l'arrière du résonateur. Le faisceau réfléchi est focalisé sur une photodiode à quadrants (QPD, pour

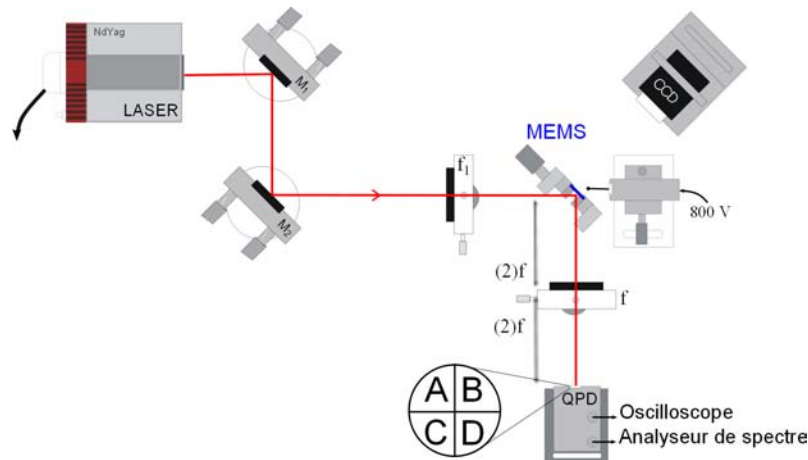
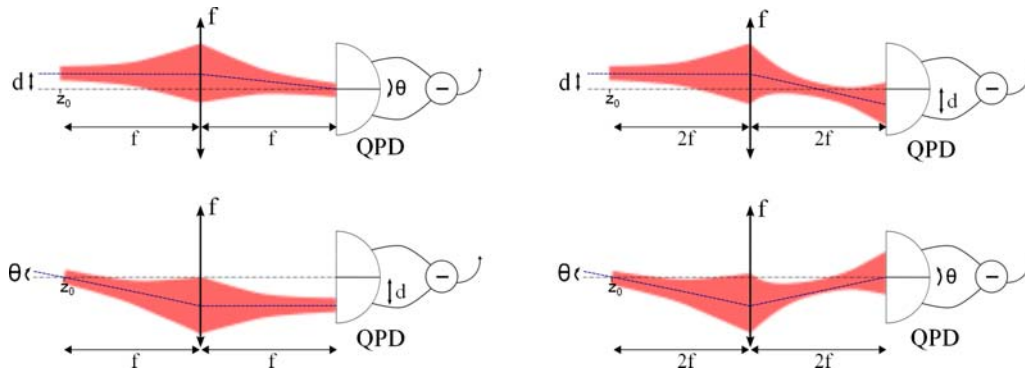


FIGURE 3.18 – Schéma du montage pour le test mécanique des micro-miroirs.

Quadrant PhotoDiode) sensible à l'infrarouge dont le circuit électronique a été conçu de manière à pouvoir combiner les quatre quadrants en faisant au choix les différences verticale $((A + B) - (C + D))$ ou horizontale $((A + C) - (B + D))$, ou encore la somme de tous les signaux. Le signal issu de la QPD peut être envoyé à un oscilloscope, qui permet de réaliser tous les réglages initiaux de centrage du faisceau sur le QPD, et à un analyseur de spectre, qui permet d'observer la réponse à la fréquence de modulation de la force électrostatique.

FIGURE 3.19 – Principe de la détection du déplacement transverse (schémas du haut) et de l'écart angulaire (schémas du bas) du faisceau laser, produits par la déformation de la surface du micro-miroir placé en z_0 . Dans la configuration optique $f - f$ (à gauche), la photodiode à quadrants (QPD) est sensible à l'angle, alors qu'elle est sensible au déplacement dans la configuration $2f - 2f$ (à droite).

Pour pouvoir détecter soit un déplacement transverse soit un décalage angulaire du faisceau réfléchi, il est nécessaire de considérer deux configurations optiques différentes, dites $f - f$ et $2f - 2f$, représentées sur la figure 3.19. A partir du plan z_0 où se trouve le micro-miroir, le faisceau réfléchi est représenté par son profil gaussien en rouge et par le rayon géométrique associé en bleu. Le faisceau est focalisé par une lentille de focale f sur le QPD, préalablement centré sur l'axe du faisceau en équilibrant les quadrants. On

peut montrer qu'en configuration $f - f$ (à gauche sur la figure), la photodiode à quadrants est sensible principalement à un écart angulaire du faisceau dans le plan z_0 , tandis qu'en configuration $2f - 2f$ (à droite), elle est sensible en premier lieu aux déplacements transverses du faisceau. En effet, en utilisant les matrices ABCD et en prenant en compte une seule dimension du plan transverse, on obtient dans l'approximation paraxiale :

$$\begin{pmatrix} d_{\text{QPD}} \\ \theta_{\text{QPD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\theta \\ -d/f \end{pmatrix} \quad (\text{configuration } f - f) \quad (3.22)$$

$$\begin{pmatrix} d_{\text{QPD}} \\ \theta_{\text{QPD}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d \\ \theta - d/f \end{pmatrix} \quad (\text{configuration } 2f - 2f) \quad (3.23)$$

où (d, θ) et $(d_{\text{QPD}}, \theta_{\text{QPD}})$ représentent le déplacement et l'angle du faisceau, respectivement dans les plans du résonateur et de la photodiode. Comme seul le déplacement d_{QPD} provoque une variation du photocourant de la photodiode, on voit que dans le premier cas on mesure uniquement le décalage angulaire du faisceau et dans le deuxième son déplacement. La configuration $2f - 2f$ reproduit ce que l'on obtient dans une cavité, qui n'est sensible également qu'au déplacement du résonateur ; la configuration $f - f$ permet en principe de sonder une information différente, qui correspond au gradient du profil spatial du mode mécanique, au point d'impact du faisceau laser.

Un programme d'acquisition permet de choisir la fréquence de modulation de la haute tension appliquée à la pointe métallique, et de récupérer le signal sur l'analyseur de spectre à la même fréquence (en mode *zero span*). Le programme effectue une succession de mesures en incrémentant par petits pas successifs la fréquence, et fournit ainsi le spectre de la réponse à la force électrostatique sur une plage de 30 à 40 kHz autour d'une fréquence choisie, comme le montre par exemple la figure 3.20.

Nous avons testé avec ce montage le micro-résonateur P2 de taille $1000 \times 1000 \times 60 \mu\text{m}^3$: nous avons d'abord fait un balayage rapide de la fréquence de modulation de la force électrostatique pour repérer les résonances, et ensuite des spectres centrés autour des fréquences détectées. Nous présentons sur la figure 3.20 les spectres obtenus pour les modes de fréquences $\nu_m = 911 \text{ kHz}$ et $\nu_m = 3.184 \text{ kHz}$, qui correspondent très probablement aux modes (0,2) et (0,4). Le montage étant à pression ambiante, les largeurs des résonances sont de l'ordre du kHz et les facteurs de qualité assez limités (voir la section 3.5).

Le fait de ne pas mesurer le spectre du micro-miroir avec une cavité diminue notablement la sensibilité, mais cette méthode de test a l'avantage d'être d'utilisation assez facile et rapide. Toutefois, le risque de provoquer des décharges entre la pointe métallique et le substrat, et ainsi d'endommager à la fois les propriétés mécaniques et optiques du micro-résonateur, représentent un inconvénient majeur de ce montage. Afin d'y remédier, une excitation du mouvement par une cale piézo-électrique a été utilisée dans le second banc de test.

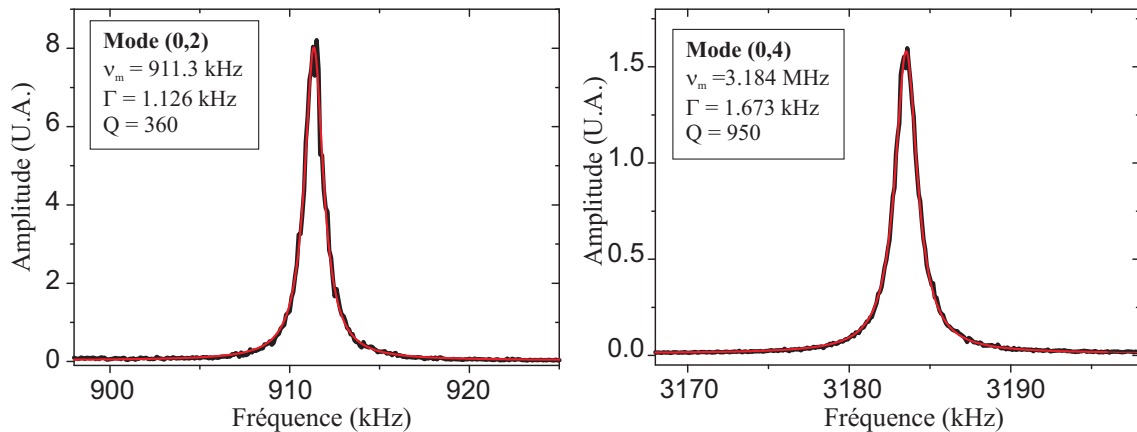


FIGURE 3.20 – Spectres des modes (0,2) et (0,4) du résonateur P11, obtenus en mesurant le faisceau réfléchi avec la photodiode à quadrants. Les courbes rouges sont des ajustements lorentziens, qui permettent de déterminer la fréquence de résonance et le facteur de qualité.

3.6.2 Tests mécaniques d'un micro-résonateur avec un interféromètre de Michelson

Le deuxième dispositif qui a été réalisé dans l'équipe est basé sur la mesure des variations de la phase du faisceau réfléchi par le micro-résonateur (voir la figure 3.21). Il s'agit d'un dispositif interférométrique de type Michelson, où le miroir constituant l'oscillateur local est placé sur une cale piézoélectrique de façon à asservir le signal détecté à mi-pente. Le faisceau est focalisé par un objectif de microscope ; sa taille sur le micro-miroir est de $10\ \mu\text{m}$ environ et le micro-résonateur est monté sur des platines de positionnement pilotables en pas-à-pas de façon à déplacer le point d'impact du faisceau laser. Le micro-miroir à tester est placé dans une enceinte à vide, ce qui permet d'améliorer le facteur de qualité des modes mécaniques et de le protéger au moins partiellement des poussières. Il est fixé à une cale piézo-électrique, qui fournit une excitation comparable à l'excitation électrostatique sur la plage de fréquences qui nous intéresse (jusqu'à 6 – 7 MHz). Le signal est fourni par un analyseur de réseau, qui analyse également la réponse mécanique du résonateur.

La petite taille du faisceau combinée à la possibilité de déplacer transversalement le résonateur représente un des avantages majeurs de ce dispositif : en plus d'une mesure du spectre du micro-miroir, telle qu'on pouvait l'obtenir avec le premier montage, cela nous permet de caractériser le profil spatial de ses modes acoustiques, en mesurant la réponse en plusieurs points de la surface du résonateur.

Pour chaque résonance observée dans la réponse spectrale du micro-miroir, on peut ainsi déterminer la forme du mode propre en excitant le micro-miroir à la fréquence de résonance du mode et en déplaçant le résonateur perpendiculairement au faisceau, par petits pas dans les deux directions x et y (la résolution des micro-translations est de 30 nm), de manière à quadriller toute sa surface. La position du faisceau sur la surface du

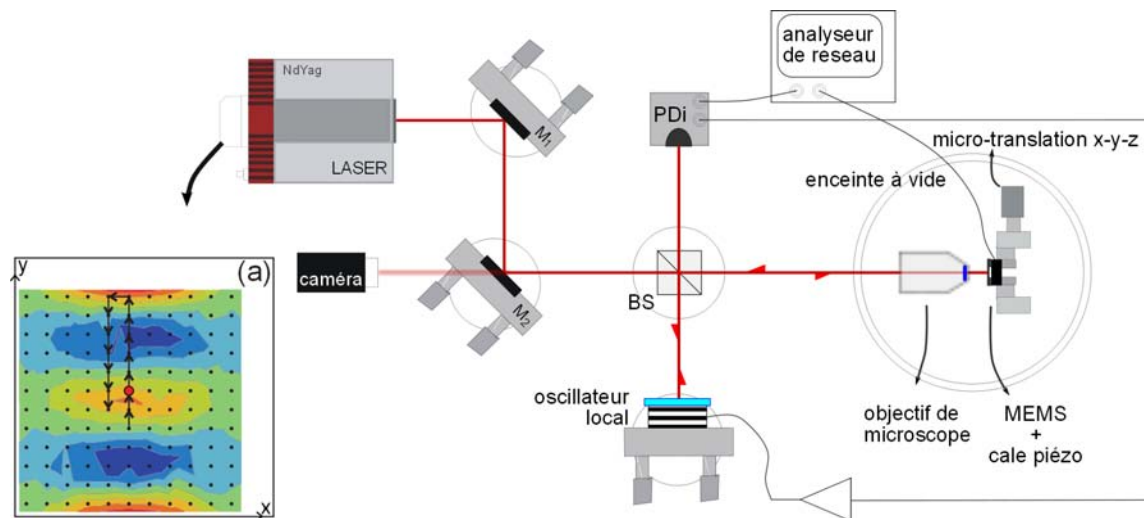


FIGURE 3.21 – Schéma du montage de l'interféromètre de Michelson pour le test mécanique des micro-résonateurs : le résonateur est placé dans une enceinte à vide, sur des platines de translation motorisées. Un analyseur de réseau pilote une cale piézo-électrique pour exciter le résonateur et récupère l'information sur son mouvement à partir de l'intensité à la sortie de l'interféromètre, qui sert aussi pour l'asservissement de l'oscillateur local. Encadré (a) : principe du déplacement du faisceau à la surface du résonateur.

micro-résonateur peut être contrôlée via une caméra positionnée sur le faisceau réfléchi (voir la figure 3.21). L'encadré (a) de la figure représente un résonateur (la déformation spatiale d'un de ses modes, obtenue par simulation par éléments finis, est également représentée) et une grille de déplacements du faisceau, avec un pas typiquement de l'ordre de quelques dizaines de microns. À chaque position, on mesure l'amplitude et la phase de la réponse spectrale avec l'analyseur de réseau.

Cette technique nous permet ainsi d'observer la variation de l'amplitude du spectre pendant un balayage simple le long des axes de symétrie du résonateur, ou de reconstruire le profil spatial d'un mode donné [23]. À partir de ces informations, on détermine le nombre de ventres et de nœuds, ce qui permet de connaître sans équivoque le mode excité.

Sur la figure 3.22 est représenté le profil du mode $(0, 2)$ à 1.55 MHz du résonateur P11 de $1400 \times 600 \mu\text{m}^2$, que l'on a mesuré avec cette méthode : les valeurs de l'amplitude spectrale ont été enregistrées sur une longueur d'environ 1.1 mm et sur toute la largeur, par pas de $90 \mu\text{m}$ en x et de $30 \mu\text{m}$ en y , formant ainsi une matrice d'environ 200 points. Malgré l'échantillonnage limité de cette mesure, le profil spatial du mode $(0, 2)$ est très proche du profil obtenu par la simulation, avec un lobe central d'une largeur égale à environ la moitié de la largeur totale du pont, et une amplitude qui diminue dans le sens longitudinal en s'approchant des extrémités du pont fixées à la puce. Il correspond, comme on s'y attendait, au pic dans l'encadré (a) de la figure 3.17, de fréquence égale à 1.55 MHz environ.

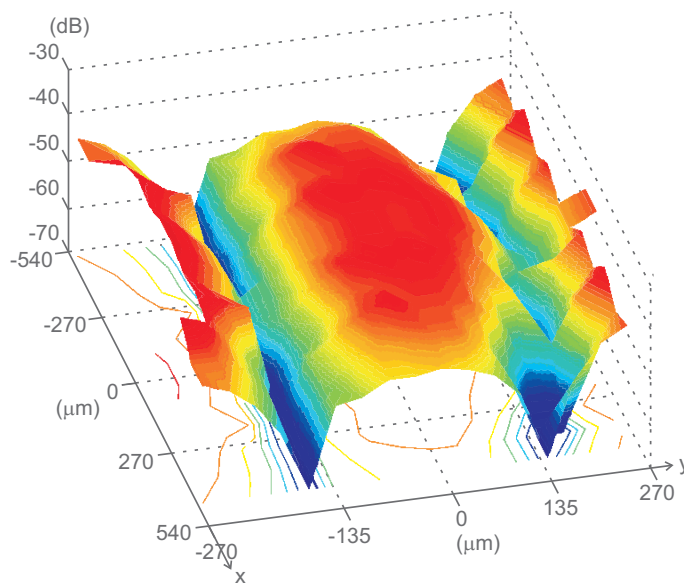


FIGURE 3.22 – Cartographie du mode (0,2) à 1.55 MHz du résonateur P11, obtenue par une mesure de l'amplitude de la réponse spectrale à l'excitation mécanique, en déplaçant le point d'impact du laser sur une grille de points couvrant la surface du résonateur.

Bruit thermique à température cryogénique et refroidissement laser

Nous avons étudié dans la section 2.5 le mécanisme de refroidissement par pression de radiation dans une cavité désaccordée, et montré qu'il pouvait en principe permettre d'atteindre l'état fondamental du résonateur mécanique. Le nombre de phonons résiduels dans le régime refroidi est donné par l'équation (2.99) et peut s'écrire sous la forme :

$$n_{\text{T}}^{\text{eff}} = \frac{n_{\text{T}}}{1 + g'} + n_{\text{Q}}, \quad (4.1)$$

où le gain g' est relié à la dissymétrie entre les bandes Stokes et anti-Stokes (équation (2.93)) :

$$g' = \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-), \quad (4.2)$$

et où n_{Q} est le nombre de phonons associés au bruit quantique de pression de radiation (voir l'équation (2.98)), donné par :

$$n_{\text{Q}} = \frac{\frac{\zeta}{4} \mathcal{A}_-}{1 + \frac{\zeta}{4} (\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-)}. \quad (4.3)$$

D'après les résultats obtenus dans la section 2.5, n_{Q} correspond aussi au nombre de phonons produits par les processus Stokes résiduels, puisqu'il est proportionnel à l'amplitude \mathcal{A}_- de la bande latérale décalée vers le rouge.

Ces expressions précisent les contraintes auxquelles il faut satisfaire pour atteindre le régime quantique du résonateur ($n_{\text{T}}^{\text{eff}} \ll 1$) :

- Le nombre de phonons initial $n_{\text{T}} = k_{\text{B}}T/\hbar\Omega_{\text{m}}$ doit être aussi faible que possible, ce qui implique une température T basse et une fréquence de résonance Ω_{m} élevée. La

première expérience de refroidissement réalisée au laboratoire (voir section 2.5.2) a été menée à température ambiante, avec un mode mécanique de fréquence égale à 814 kHz, donnant ainsi un nombre de phonons initial de l'ordre de 7×10^6 .

- Le gain g' du refroidissement doit être suffisant pour éliminer les phonons thermiques (premier terme dans l'expression (4.1)). Dans l'expérience réalisée en 2006, le gain était de l'ordre de 20 [5]. D'après l'expression (4.2) du gain, il faut à la fois un couplage optomécanique important ($\zeta \gg 1$) et une dissymétrie entre les bandes latérales Stokes et anti-Stokes, cette dernière étant à résonance avec la cavité ($\mathcal{A}_+ \simeq 1$, $\mathcal{A}_- \simeq 0$). Notons que le refroidissement a aussi pour conséquence d'augmenter l'amortissement du résonateur (équation (2.92)). Le facteur de qualité mécanique initial doit donc être suffisant grand : $Q \gg g'$.
- L'expression (4.3) du nombre n_Q de phonons résiduels associés au bruit quantique impose alors d'être dans le régime des bandes latérales résolues ($\Omega_m \gg \Omega_c$), qui permet de rendre la bande Stokes négligeable par rapport à la bande anti-Stokes ($\mathcal{A}_- \ll \mathcal{A}_+$). Dans ces conditions, le nombre résiduel de phonons s'écrit : $n_Q \simeq \mathcal{A}_-/\mathcal{A}_+ \simeq \Omega_c^2/4\Omega_m^2$.

Trois améliorations complémentaires doivent donc être envisagées afin d'augmenter l'efficacité du refroidissement laser et d'atteindre le régime quantique de notre micro-miroir : l'utilisation d'un système cryogénique pour réduire la température initiale, l'amélioration des propriétés mécaniques du résonateur, et le fonctionnement dans le régime des bandes latérales résolues.

La mise en œuvre d'une cavité dans le régime des bandes latérales résolues fera l'objet des chapitres 5 et 6. La réalisation de nouveaux micro-résonateurs qui possèdent des fréquences de résonance plus élevées, une masse plus faible et un meilleur facteur de qualité est à l'heure actuelle en cours dans notre équipe. À côté de ces améliorations, diminuer la température initiale en plaçant le résonateur dans un système cryogénique est crucial pour atteindre le régime quantique : c'est seulement en pré-refroidissant le résonateur avec, par exemple, un cryostat à dilution fonctionnant à une température de l'ordre de 100 mK, et en combinant l'utilisation d'un tel cryostat avec le refroidissement laser, qu'il sera possible d'atteindre et d'observer l'état fondamental du résonateur.

Le refroidissement cryogénique est depuis une dizaine d'années une pratique assez standard dans le domaine des nano-résonateurs mécaniques [90, 93, 135, 117], mais il s'agit d'une technique plutôt nouvelle dans le contexte de l'opto-mécanique [69, 133, 44]. La première étape à franchir dans la réalisation d'un système optique de grande sensibilité fonctionnant à une température $T \simeq 100$ mK est de vérifier la compatibilité d'une cavité à micro-miroir de grande finesse avec un système cryogénique. Je présente ainsi dans ce chapitre le cryostat à He₄ utilisé dans ce but, et le nouveau montage de la cavité conçu pour être compatible avec un fonctionnement cryogénique. Après avoir présenté les premières

mesures du bruit thermique en régime cryogénique, je décris les résultats concernant la réduction de la température effective du micro-miroir obtenue par refroidissement laser en désaccordant la cavité. Finalement je mets en évidence des effets de biréfringence de la cavité à basse température, qui peuvent affecter la température effective du micro-miroir et représenter une limite au refroidissement.

4.1 Description du cryostat à He₄ et de la nouvelle cavité

Nous décrivons dans cette section le cryostat que nous avons utilisé pour refroidir le micro-miroir à température cryogénique, les contraintes qui ont guidé le choix de ses caractéristiques, et son fonctionnement. Nous présentons ensuite le nouveau montage mécanique de la cavité, de dimensions et caractéristiques adaptées au fonctionnement dans le cryostat mais assurant en même temps une très bonne stabilité mécanique, ce qui nous a permis de construire une cavité de très grande finesse et de réaliser des mesures optiques de haute sensibilité à température cryogénique.

4.1.1 Le cryostat à He₄

Contraintes sur le système cryogénique

Même si à terme un cryostat à dilution sera nécessaire pour atteindre des températures inférieures à 100 mK, nous avons voulu utiliser un système plus simple pour mener les premiers essais et pour nous assurer de la possibilité de combiner dispositifs optomécaniques et cryogénie. Nous nous sommes ainsi tournés vers un cryostat à He₄ liquide, dont la température limite est de l'ordre de 3.5 K. La définition des caractéristiques du cryostat nécessaires à notre expérience a été une étape essentielle pour guider le choix du modèle :

- L'utilisation d'une cavité optique requiert que le cryostat possède des accès optiques et un espace interne d'au moins quelques cm³ pour placer la cavité. D'autres solutions que des accès optiques seraient possibles, comme l'injection par fibre optique de la lumière dans le cryostat, mais cela conduirait à des modifications importantes de notre montage optique dont nous avons d'ores et déjà démontré les excellentes caractéristiques en terme de sensibilité¹.
- La bonne thermalisation du micro-miroir est fondamentale pour le succès de l'expérience en cryogénie : la puissance frigorifique du cryostat doit pouvoir compenser l'absorption d'une fraction de la lumière incidente par la cavité, principalement dans les couches diélectriques des miroirs ou par diffusion. La puissance du faisceau incident étant typiquement de l'ordre de quelques milliwatts, cela ne représente pas un réel problème pour un cryostat à He₄, dont la puissance de refroidissement est de quelques centaines de milliwatts, variable selon le modèle. Cela peut être néanmoins un point plus délicat dans le cas de l'utilisation d'un cryostat à dilution dont la puissance frigorifique est de quelques centaines de microwatts seulement.

1. Il est en effet possible de construire des cavités de grande finesse avec des fibres optiques pourvues d'un miroir sphérique à leur extrémité [143]; on pourrait envisager de coupler l'une de ces fibres avec un micro-résonateur.

- Il est finalement nécessaire que le système frigorifique induise très peu de vibrations qui pourraient provoquer des fluctuations de longueur de la cavité et diminuer la sensibilité de la mesure. Travailler à une température inférieure à 4 K permet déjà de s'affranchir du bruit causé par l'ébullition de l'hélium qui devient complètement fluide à basse température. La cavité et son système de fixation doivent également être extrêmement stables et rigides. Il est enfin nécessaire de pouvoir découpler le cryostat de la pompe à vide, qui représente une source supplémentaire de vibrations mécaniques.

Caractéristiques du cryostat choisi

Le système qui semblait le mieux répondre à nos contraintes est le modèle ST500 de l'entreprise Janis, dont la FIG. 4.1 représente une vue en coupe. Ce dispositif, qui a également été utilisé dans les références [142, 68], est en fait conçu pour des expériences en microscopie et présente des caractéristiques intéressantes au niveau de sa stabilité mécanique et de ses accès optiques. Il a la forme d'un camembert très compact, avec un diamètre externe de 18 cm seulement, et dispose de deux fenêtres d'un pouce de diamètre sur les faces supérieure et inférieure, permettant d'accéder directement à la zone froide centrale.

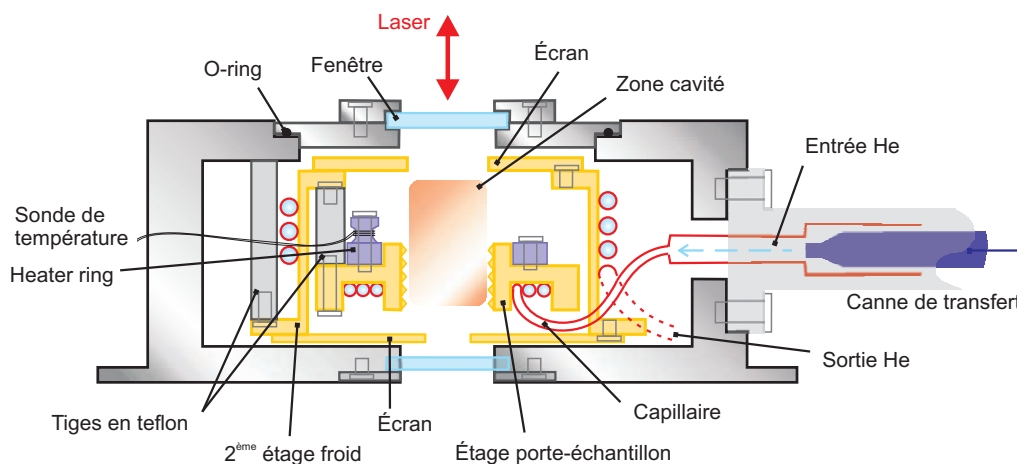


FIGURE 4.1 – Dessin de la section du cryostat à He₄ Janis ST-500. L'hélium liquide s'écoule de la canne de transfert dans le capillaire, qui refroidit par contact thermique la zone porte-échantillon. L'isolation thermique est assurée par des tiges en téflon qui maintiennent les deux étages froids en cuivre doré (zone centrale et écran). Deux fenêtres traitées anti-reflet permettent d'injecter le laser dans la cavité et de récupérer le faisceau transmis. L'ensemble du cryostat est pompé sous vide.

Il s'agit d'un cryostat à circulation d'hélium 4 liquide : un capillaire en cuivre où s'écoule continuellement l'hélium s'enroule en spirale autour de la zone porte-échantillon de forme cylindrique, et la refroidit par contact thermique. Cette zone froide centrale, visible sur la photo de la FIG. 4.2(b), est fixée par trois tiges en téflon à un deuxième étage plus large et concentrique, autour duquel circule aussi l'hélium après avoir refroidi

la zone centrale ; ce deuxième étage sert ainsi d'écran thermique. Il est lui-même attaché à la structure externe du cryostat par trois autres tiges en teflon. Ces tiges assurent à la fois une très bonne isolation thermique et une grande stabilité mécanique de la zone porte-échantillon. L'écran thermique est également constitué de plaques sur les faces supérieure et inférieure, percées en leur milieu pour permettre le passage du faisceau laser, le trou ayant un diamètre de quelques centimètres. Toutes les parties décrites, à l'exception de la structure externe, sont en cuivre doré, matériau présentant une très haute conductivité thermique à 4 K [151].

La zone porte-cavité est entourée par un anneau en métal contenant une résistance chauffante (*heater ring*) et contre lequel est plaquée une sonde de température (sonde S1) ; ce système permet de contrôler la température et de l'asservir en pilotant la tension fournie à la résistance. Toute la zone où sera placée la cavité est sous vide. Du fait de sa conception avec un seul vide interne, il n'est pas possible d'utiliser ce cryostat en plaçant l'échantillon sous une vapeur d'hélium permettant d'améliorer sa thermalisation.

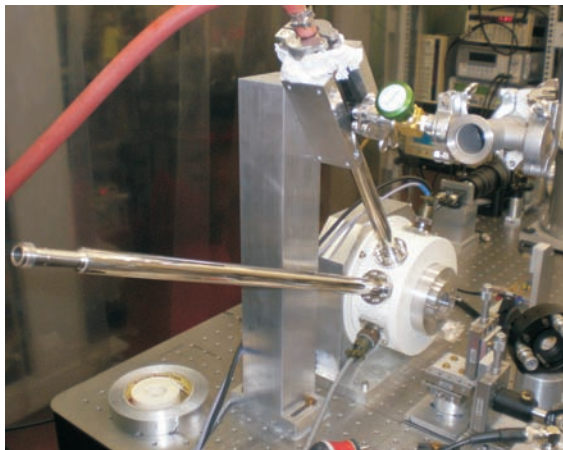
Le cryostat possède une ouverture sur sa face supérieure, qui permet d'accéder à l'intérieur pour le montage de la cavité. Elle est fermée par une plaque simplement maintenue par la pression lorsqu'on fait le vide à l'intérieur du cryostat, et munie d'une fenêtre en BK7 traitée anti-reflet. La proximité des fenêtres de la zone porte-cavité permet de rapprocher la lentille assurant l'adaptation spatiale du faisceau laser à moins de 5 cm de la cavité. Cela permet aussi de visualiser convenablement le micro-résonateur à l'aide d'une caméra CCD pourvue d'un objectif, ainsi que le faisceau transmis, ce qui facilite les opérations d'alignement et d'asservissement de la cavité.

A l'extérieur du cryostat, on trouve deux tiges d'une cinquantaine de centimètres de longueur fixées sur le côté ; la première permet d'injecter l'hélium liquide dans le capillaire en introduisant la canne de transfert qui le relie au dewar ; la deuxième contient deux circuits différents, d'une part pour l'évacuation de l'hélium après la circulation dans le capillaire interne (en y reliant une pompe à vide primaire pour faciliter la circulation), et d'autre part pour le pompage du vide dans le cryostat en entier. Nous utilisons un banc de pompage composé d'une pompe turbomoléculaire et d'une pompe pour le vide primaire, ce qui permet d'atteindre une pression de 10^{-5} mbar à l'intérieur du cryostat. La bonne tenue au vide de l'enceinte du cryostat permet de travailler avec les pompes éteintes pendant 8 heures à une pression inférieure à 10^{-3} mbar.

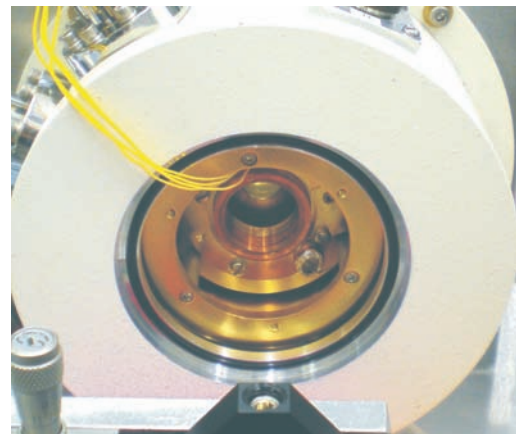
Le cryostat est également pourvu de deux connecteurs électriques, permettant de relier la sonde de température, la tension pour le chauffage, et aussi jusqu'à deux sondes supplémentaires pour mieux contrôler les gradients de température à l'intérieur du cryostat. La mesure et l'asservissement de la température sont effectués à l'aide d'un contrôleur commercial (Lakeshore 331) pouvant fournir jusqu'à 50 W de puissance et un courant de 1 A. Il possède deux entrées pour les capteurs de température et peut supporter différents types

de capteurs, ce qui a permis de relier une deuxième sonde placée près de la cavité. L'asservissement est basé sur un contrôle PID (proportionnel-intégrateur-dérivateur) du point de consigne, à partir de la sonde placée à côté de l'anneau chauffant. L'asservissement a été utilisé systématiquement lors des mesures à température ambiante dans le cryostat, tandis qu'il n'a pas été nécessaire pendant les mesures à basse température, à moins de vouloir opérer à des températures supérieures à 4 K, car la stabilité de température garantie par le cryostat était suffisante.

Vue sa taille réduite, le cryostat a pu aisément être placé sur la table optique, en vissant le corps central à un bloc très massif en dural spécialement conçu à cet effet et attaché rigidement à la table, comme on peut le voir sur la photo de la FIG. 4.2(a). Après avoir constaté la présence de vibrations provenant de la tige d'évacuation de l'hélium, celle-ci a été rendue solidaire de la table grâce à une colonne massive en dural et du caoutchouc pour amortir les vibrations.



(a) Vue du cryostat fixé sur la table optique par l'intermédiaire d'un bloc massif en dural, avec la tige d'évacuation attachée à une colonne en dural pour amortir ses vibrations.



(b) Détail de l'intérieur du cryostat, avec au centre la zone porte-échantillon, où sera vissée la cavité.

FIGURE 4.2 – Ensemble du montage et détail du cryostat à He₄ Janis ST500.

4.1.2 Une nouvelle cavité compacte

Description de la cavité

Il a été nécessaire de développer une nouvelle cavité Fabry-Perot de façon à l'adapter à l'espace réduit à l'intérieur du cryostat et pour assurer une thermalisation optimale des éléments optiques, en particulier du résonateur, tout en conservant une bonne rigidité mécanique afin d'éviter toute vibration nuisible à la sensibilité de la mesure. La mise en

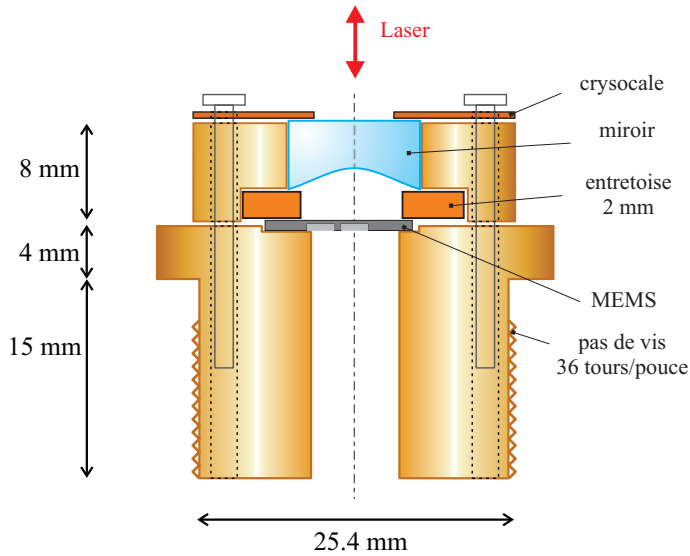


FIGURE 4.3 – Vue en coupe du nouveau montage mécanique de la cavité.

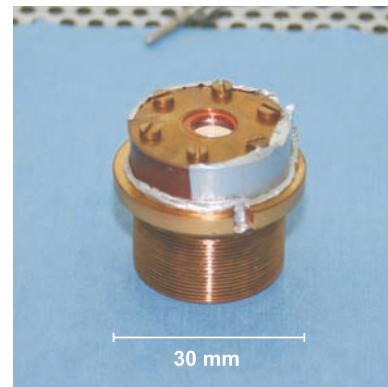


FIGURE 4.4 – Photo de la cavité assemblée. Le fil d'indium écrasé entre les deux pièces en cuivre (partie principale et anneau du miroir d'entrée) assure un meilleur contact thermique.

place de la cavité dans le cryostat est assurée par le support porte-échantillon (visible sur la FIG. 4.2(b)) sur lequel le montage peut être vissé. Le pas de vis particulièrement petit permet un meilleur contact thermique du montage avec la zone froide.

La FIG. 4.3 donne un aperçu du montage mécanique de la cavité, dont les pièces ont été fabriquées par l'atelier de mécanique du laboratoire. Dessinée pour être la plus possible monolithique, la pièce principale consiste en un bloc de cuivre de forme cylindrique fileté sur la totalité de sa partie inférieure, ce qui permet un maintien rigide et un bon contact thermique avec le porte-échantillon. Ce cylindre possède un plateau sur sa face supérieure, également afin d'augmenter la surface en contact avec la zone froide lorsque l'ensemble est complètement vissé. Au centre de la face supérieure, la pièce présente une niche rectangulaire dans laquelle vient se loger la puce de $1 \times 1 \text{ cm}^2$ du résonateur. La forme rectangulaire de ce logement permet de décentrer la puce par rapport à l'axe optique.

Le parallélisme entre la puce et le miroir d'entrée est assuré par une entretoise de 2 mm d'épaisseur, posée sur la puce. L'entretoise et le miroir d'entrée sont maintenus centrés sur l'axe de la structure par une pièce cylindrique en cuivre, et l'ensemble est maintenu serré par un disque fin en crysocale, qui vient se visser par dessus la cavité et donne une certaine élasticité en compression. Comme pour la cavité à température ambiante présentée dans le chapitre précédent, nous avons percé plusieurs trous dans la structure pour évacuer facilement l'air des interstices lors du pompage de l'enceinte du cryostat.

La photo sur la FIG. 4.4 montre la cavité montée. L'ensemble peut aisément être assemblé en dehors du cryostat et être vissé seulement dans un deuxième temps ; cela nous a permis d'effectuer tout le montage à l'abri de la poussière sous un flux laminaire de classe 1, puis de procéder à l'alignement de la cavité et au centrage du résonateur sur l'axe

optique en utilisant un banc d'optique extérieur au cryostat, beaucoup plus commode à utiliser. Grâce à la précision de la fabrication des pièces mécaniques, et notamment au parallélisme de l'entretoise, le centrage consiste essentiellement à translater légèrement la puce dans son logement. Pour cela, on visualise à l'aide d'une caméra CCD le point d'impact du faisceau sur le résonateur, une fois la cavité montée et le faisceau laser aligné. Un réglage fin peut être réalisé en réglant très légèrement le serrage des vis de maintien de la cryoscale. Nous avons pu de cette façon aligner de manière satisfaisante la cavité.

Les mesures que je présenterai dans les sections suivantes ont été réalisées avec un tel montage, en utilisant un résonateur en forme de pont doublement encastré de dimensions $1000 \times 1000 \times 60 \mu\text{m}^3$ et un coupleur d'entrée de rayon de courbure égal à 50 mm. La longueur de la cavité, déterminée par l'entretoise, est de 2 mm, ce qui correspond à un intervalle spectrale libre de 75 GHz.

Après les premières descentes en température, nous avons constaté un défaut de thermalisation du résonateur mécanique, et de la cavité en général. Nous avons alors déposé une fine couche de graisse thermique (Apiezon N) au niveau du filetage assurant le contact entre le montage et le porte-échantillon. Nous avons également utilisé du fil d'indium (visible sur la FIG. 4.4) pour optimiser le contact thermique entre toutes les parties du montage, et en particulier entre les deux pièces en cuivre composant le montage, et sous le plateau supérieur de la pièce principale, en contact avec le porte-échantillon.

Descente en température

Après avoir relié le cryostat au dewar d'hélium par l'intermédiaire de la canne de transfert, et avoir lancé la circulation de l'hélium grâce à la pompe placée à la sortie du cryostat, la descente en température se produit assez rapidement, en une dizaine de minutes environ. La FIG 4.6 montre l'évolution en fonction du temps de la température de la sonde principale, située près de la zone froide. Pour atteindre des températures inférieures à 4.2 K, qui correspond à la température d'ébullition de l'hélium à pression ambiante, on réduit la pression de vapeur à l'équilibre avec le liquide grâce à la pompe et en jouant sur une vanne pointeau placée sur la canne de transfert. Même en pompant sur la sortie d'hélium du cryostat, la consommation reste assez faible, ce qui représente un avantage de ce système cryogénique.

Toutefois, la thermalisation de la cavité elle-même nécessite au moins deux heures supplémentaires après la stabilisation de la sonde principale à 3.5 K. Malgré les précautions prises au cours de la phase de conception de la cavité en termes de conductivité thermique de l'ensemble, la température du résonateur² n'est jamais descendue en dessous de 6 K.

2. La température du résonateur est mesurée directement à partir de l'observation de son bruit thermique (voir section suivante), en estimant l'aire du spectre de déplacements et en le comparant à celui obtenu à température ambiante.

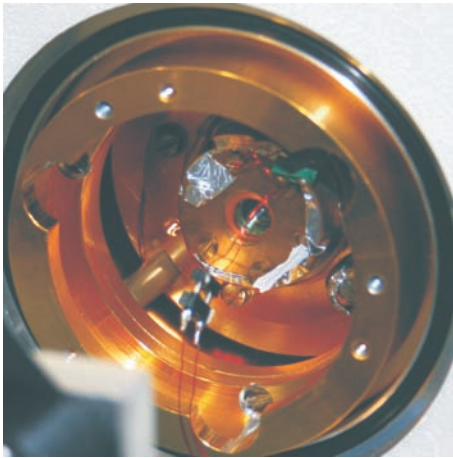


FIGURE 4.5 – Photo de la cavité placée dans le cryostat.

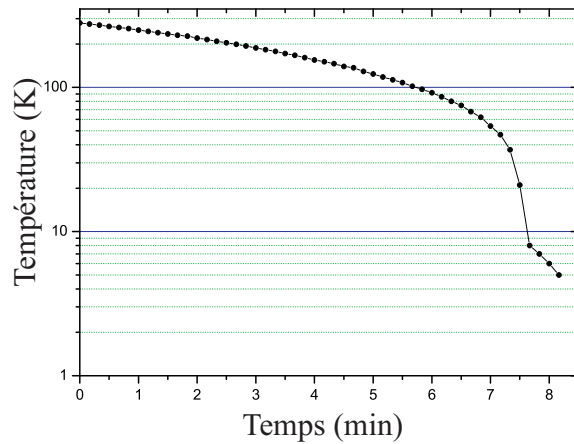


FIGURE 4.6 – Courbe de la descente en température mesurée par la sonde principale en contact avec la zone froide.

Nous avons utilisé deux sondes supplémentaires, la première positionnée à l'extrémité du montage de la cavité afin de connaître plus précisément le degré de thermalisation de la cavité (elle est présente sur la FIG. 4.5, sous le scotch métallique collé à la crysocale), et la deuxième sur l'écran thermique sur la face avant du cryostat. Après thermalisation, la température de l'écran est d'environ 11 K tandis que la température mesurée par la sonde au sommet de la cavité s'est avérée très dépendante des conditions du montage mécanique : elle peut varier entre 16 et 8 K, selon les conditions de serrage de l'ensemble dans le cryostat ou des vis de la crysocale, et selon la présence ou non de fil d'indium. La température minimale a été atteinte en vissant complètement le montage dans le porte-échantillon, en utilisant du fil d'indium pour remplir tous les interstices entre les différentes pièces, et en vissant le plus étroitement possible les 6 vis du montage, ce qui d'un côté assure un meilleur contact thermique mais de l'autre augmente les contraintes sur les miroirs, ce qui peut affecter les propriétés optiques de la cavité.

Il est également important de souligner que les miroirs ne sont pas montés sur des cales piézo-électriques qui permettraient de balayer la longueur de la cavité sur au moins un intervalle spectral libre. Cela présente un inconvénient car la descente à basse température conduit à une variation des fréquences de résonance de la cavité et il est nécessaire d'adapter la fréquence du laser en conséquence.

En effet, toute variation de la température entraîne une modification du volume des éléments mécaniques et optiques qui composent la cavité : dans notre cas, c'est principalement la contraction de l'entretoise de 2 mm qui va modifier la longueur de la cavité lors de la descente à 4 K (voir la FIG. 4.3). Pour un matériau isotrope, la variation de longueur

ΔL est reliée par une loi linéaire à la variation de température ΔT :

$$\Delta L = \alpha L \Delta T, \quad (4.4)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique linéaire du milieu. Ainsi l'entretoise en cuivre ($\alpha = 17 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$) subit une contraction d'approximativement $10 \mu\text{m}$ lors de la descente en température, ce qui correspond à une vingtaine d'intervalles spectraux libres. Une fois la température stabilisée, il est peu probable que la fréquence du laser se retrouve de nouveau proche d'une résonance de la cavité. Comme la plage d'accordabilité du laser, obtenue en jouant sur la température du cristal Yag (environ 40 GHz), est inférieure à l'intervalle spectrale libre de la cavité (75 GHz), il a été souvent nécessaire de modifier aussi le courant de pompe, qui entraîne une variation à la fois de la puissance émise et de la fréquence du laser (*frequency pulling* [145]).

4.2 Mesure du bruit thermique à température cryogénique

Dans cette partie nous présentons les résultats des mesures de bruit thermique à température cryogénique obtenus avec la cavité décrite dans la section précédente : nous nous intéressons ici aux mesures effectuées en maintenant le laser à résonance avec la cavité, tandis que dans la prochaine section nous examinerons le bruit thermique du micro-résonateur lorsque la cavité est désaccordée, ce qui permet de tirer profit de l'action en retour exercée par la pression de radiation pour refroidir le résonateur, comme cela avait été fait à température ambiante (voir section 2.5).

La température du résonateur, et plus particulièrement du mode mécanique dont on observe le mouvement, est directement déduite de l'observation du spectre des déplacements, puisque la température est proportionnelle à l'aire du spectre (équation (1.29)). Pour déterminer la réduction de température par rapport à la température ambiante, il est donc important de calibrer convenablement le bruit de phase du faisceau réfléchi en terme de déplacement du résonateur, et nous présenterons dans cette section les deux méthodes que nous avons employées dans ce but.

Mesure des propriétés optiques de la cavité

Nous comparons tout d'abord les caractéristiques optiques de la cavité à température ambiante et à température cryogénique. Après avoir réalisé le montage et aligné les deux miroirs de la cavité à l'aide du banc de test comme décrit précédemment, le bloc de la cavité est vissé dans le cryostat. Une fois l'enceinte du cryostat fermée et placée sous vide, et la température de la cavité stabilisée à 300 K avec l'asservissement de température du cryostat, la résonance fondamentale de la cavité est repérée en balayant la fréquence du laser et en visualisant le faisceau transmis avec une caméra CCD et une photodiode reliée à un oscilloscope numérique. En comparant les intensités des pics d'Airy du mode fondamental et des premiers modes transverses, on optimise l'alignement du laser en jouant aussi bien sur les deux miroirs placés sur le trajet du faisceau que sur la lentille de focalisation : l'élimination des modes transverses TEM_{01} et TEM_{10} assure un bon pointé du faisceau par rapport à l'axe optique de la cavité, tandis que la minimisation des seconds modes transverses (TEM_{nm} avec $n + m = 2$) permet d'optimiser la taille et la position longitudinale du col optique du faisceau par rapport au micro-miroir.

On procède alors aux mesures des caractéristiques optiques de la cavité comme nous l'avons fait pour la cavité de filtrage (voir section 3.2.2) : l'estimation des hauteurs relatives des pics d'Airy du mode fondamental et des premiers modes transverses permet de déterminer l'adaptation spatiale η_{cav} , que l'on trouve de l'ordre de 85%, aussi bien à température ambiante qu'en régime cryogénique. L'acquisition du pic d'Airy du mode fondamental permet également de déterminer la bande passante ν_{BP} de la cavité, égale à la

demi-largeur du pic calibré grâce aux bandes latérales à ± 12 MHz utilisées pour la détection Pound-Drever-Hall, comme nous l'avons expliqué dans la section 3.4 (FIG. 3.13(a)). Connaissant la longueur $L = 2$ mm de la cavité, nous estimons l'intervalle spectral libre $\nu_{\text{ISL}} = c/2L \simeq 75$ GHz, ainsi que la finesse de la cavité $\mathcal{F} = \nu_{\text{ISL}}/2\nu_{\text{BP}}$. Les valeurs obtenues pour la cavité à température ambiante T_{amb} et à température cryogénique T_{cryo} sont présentées dans le tableau 4.1.

	T_{amb}	T_{cryo}
Bande passante ν_{BP}	2.05 MHz	2.65 MHz
Finesse \mathcal{F}	18 000	14 000

TABLE 4.1 – Caractéristiques de la cavité de mesure à température ambiante et à basse température.

Si le coupleur d'entrée est toujours un miroir de 50 mm de rayon de courbure et de transmission de l'ordre de 70 ppm, le micro-miroir est maintenant constitué d'un pont doublement encastré de 1×1 mm² (puce appelée P3). Les caractéristiques optiques sont toutefois similaires à celles que nous avons obtenues avec la puce P11 (voir section 3.5.1). Nous remarquons cependant une diminution de la finesse lorsqu'on passe à basse température : la réflectivité des miroirs pouvant dépendre du point d'impact du faisceau sur la surface, cela peut être attribué à une modification de l'axe optique lors de la descente en température, du fait des contraintes mécaniques imposées par les pièces de fixation. Cette variation peut également être liée à des effets de biréfringence dans la cavité, dont nous discuterons dans la prochaine section.

Le spectre de bruit thermique à température cryogénique

Les mesures des spectres de bruit thermique à températures ambiante et cryogénique présentées dans cette partie sont effectuées à une pression de l'ordre de 10^{-4} mbar et avec une puissance incidente $P_{\text{in}} = 5$ mW.

La courbe (b) en bleu sur la FIG. 4.7 montre un spectre large bande du signal d'erreur Pound-Drever-Hall, lorsque le cryostat est à basse température, c'est-à-dire pour une température $T_{\text{cryo}} = 3.6$ K mesurée par la sonde située près de la zone froide. Le spectre est obtenu en enregistrant successivement 25 acquisitions de 8192 points sur une largeur de 160 kHz chacune et avec une résolution spectrale de 20 Hz, soit un point tout les 20 Hz environ. Chaque acquisition est moyennée sur une centaine de balayages.

Le spectre à basse température présente une structure très similaire à celui obtenu à température ambiante (courbe a), mais avec un niveau globalement réduit de 20 dB environ : dans la plage de fréquences 0 – 5 MHz, on observe une quinzaine de pics d'amplitude importante (jusqu'à 40 dB au dessus du plancher de bruit), qui correspondent au bruit

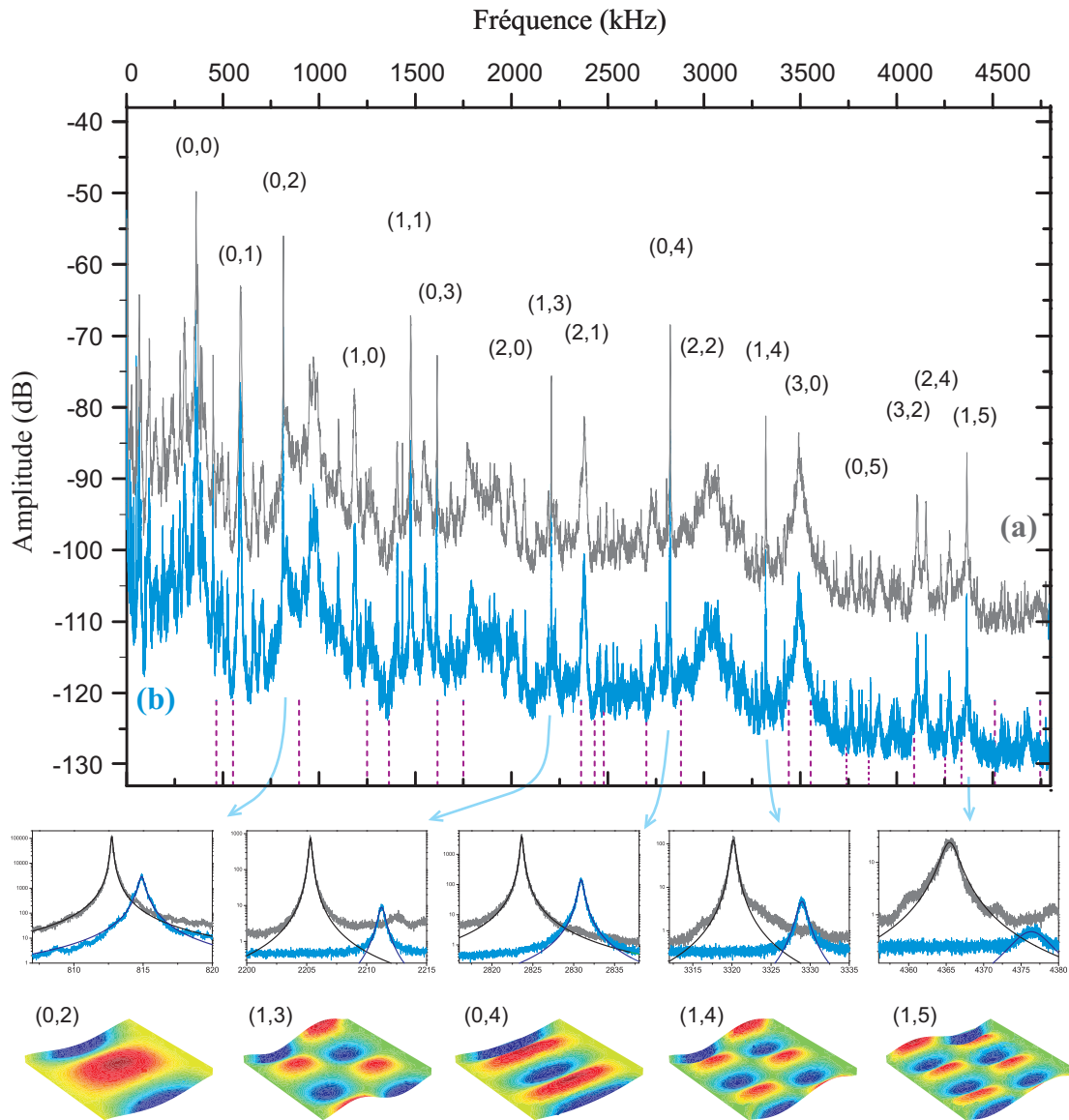


FIGURE 4.7 – Spectres large bande du bruit thermique, obtenus à température ambiante (a) et à basse température (b). Les différents modes du résonateur sont repérés par leurs indices (i,j) , qui définissent le nombre de nœuds longitudinaux et transverses, et les traits en pointillé correspondent aux fréquences attendues d'après une simulation par éléments finis. Les figures en dessous présentent des zooms sur cinq modes particuliers, avec les profils spatiaux obtenus par la simulation.

thermique des modes mécaniques du micro-résonateur, repérés sur la figure par les indices longitudinal et transverse (i, j) ; comme nous l'avons déjà remarqué dans le chapitre 3, on observe également de nombreux autres pics d'amplitude réduite associés aux modes propres du miroir d'entrée. Les fréquences propres du résonateur, déterminées à l'aide d'une simulation par éléments finis, sont indiquées par des traits pointillés verticaux sur la figure; bien que l'écart avec les valeurs mesurées puisse aller jusqu'à une centaine de kHz, la simulation permet d'identifier sans difficulté les modes à basse fréquence (inférieure à 2 MHz) où les modes sont suffisamment séparés en fréquence, mais l'identification devient plus délicate à haute fréquence.

L'amplitude du pic de bruit thermique des modes du micro-miroir est inversement proportionnelle à leur masse effective (équation (2.27)) et varie par conséquent selon la position du point d'impact du faisceau laser par rapport aux nœuds et aux ventres du mode à la surface du résonateur : si le point d'impact se trouve sur un nœud du mode, la masse effective devient infinie et la réponse spectrale s'annule. Le spectre des modes propres donne ainsi une estimation du centrage du faisceau laser sur le résonateur. Nous pouvons remarquer, par exemple, que le mode $(0,1)$ est visible sur les deux spectres, alors qu'il possède un nœud au milieu de la poutre sur toute la longueur, ce qui indique que le faisceau n'est pas parfaitement centré transversalement.

Caractéristiques des modes mécaniques

Dans les encadrés au dessous du spectre large bande de la FIG. 4.7 sont représentés les agrandissements des spectres de bruit thermique de cinq modes du résonateur, acquis avec une résolution spectrale de 10 Hz, sur une plage de 30 kHz autour de chaque fréquence de résonance, et en moyennant sur une centaine d'acquisitions de 8192 points chacune (soit un point tous les 4 Hz environ). Chaque spectre à températures ambiante et cryogénique peut être ajusté par une fonction lorentzienne (équation (1.24)), ce qui permet d'obtenir les valeurs des fréquences propres $\Omega_m/2\pi$ et des amortissements Γ aux deux températures.

On remarque que la fréquence de résonance des modes augmente en passant de 298 à 3.6 K, de façon similaire à ce qui avait été observé par exemple avec un micro-levier en silicium [71]. Nous avons montré dans la section 2.1 que la fréquence de résonance d'un mode du résonateur dépend à la fois des dimensions du résonateur, du module d'Young E du matériau, ainsi que de sa densité (équation (2.3)). Les variations de dimension restant faibles, la dépendance en température est essentiellement due à la variation du module d'Young induite par des effets d'anharmonicité des vibrations du réseau, que l'on peut écrire sous la forme d'une relation semi-empirique [156, 118] :

$$E(T) = E_0 - BT \exp\left(-\frac{T_0}{T}\right) \quad (4.5)$$

où E_0 est le module d'Young à température nulle, la température $T_0 > 0$ et le paramètre

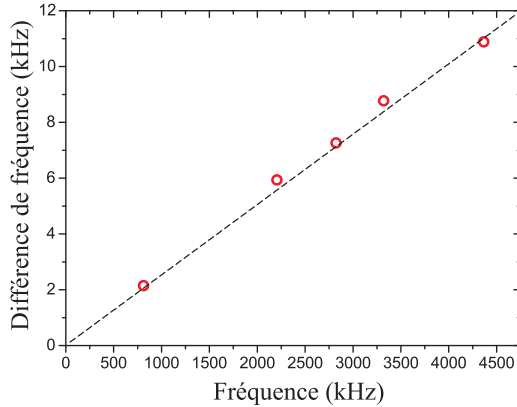


FIGURE 4.8 – Écart entre les fréquences de résonance à températures ambiante et cryogénique $(\Omega_m(T_{\text{cryo}}) - \Omega_m(T_{\text{amb}}))/2\pi$ pour différents modes mécaniques.

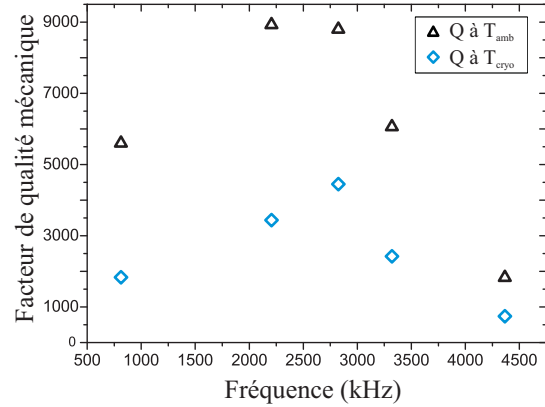


FIGURE 4.9 – Facteurs de qualité Q de cinq modes à températures ambiante (triangles noirs) et cryogénique (carrés bleus).

B étant des constantes indépendantes de la température.

D'après l'équation (2.3), on s'attend à une variation des fréquences de résonance des modes proportionnelle à $\sqrt{E(T)}$. Avec les paramètres fournis dans la littérature pour le silicium [71], la variation relative des fréquences entre les températures ambiante et cryogénique est de l'ordre de $\Delta\Omega_m/\Omega_m \simeq 5 \times 10^{-3}$. La FIG. 4.8 montre les variations de fréquence obtenues pour les cinq modes de la FIG. 4.7 : on observe bien un comportement linéaire de l'écart $\Delta\Omega_m/2\pi$ avec la fréquence de résonance $\Omega_m/2\pi$ des modes, la pente étant toutefois plus faible que prévue (environ 2.7×10^{-3}).

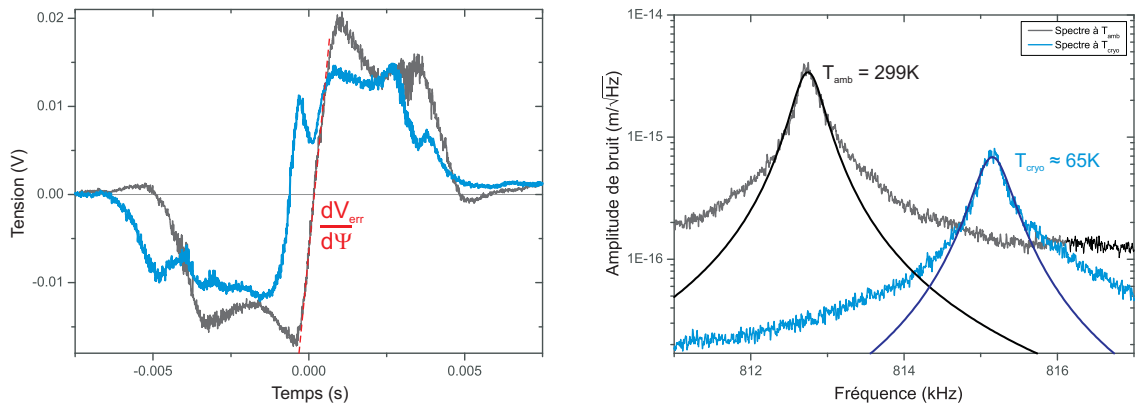
La FIG. 4.9 montre la variation du facteur de qualité mécanique pour les cinq modes, qui se dégrade à basse température contrairement à ce qui est prévu pour le facteur de qualité intrinsèque du silicium [71]. Cela signifie que l'amortissement de nos résonateurs est limité par d'autres sources de perte mécanique, sans doute liées au maintien non optimal des puces et à un couplage entre les modes du pont et de la puce ; dans ces conditions, le passage à basse température peut induire des contraintes mécaniques supplémentaires et se traduire par une dégradation du facteur de qualité.

Calibration des spectres à basse température

La détermination de la fréquence de résonance et de l'amortissement de chaque mode ne dépend pas de la calibration du spectre de bruit : nous avons extrait ces valeurs de l'ajustement lorentzien des spectres directement issus du signal Pound-Drever-Hall, avec une échelle verticale sur la FIG. 4.7 en décibels et non en déplacement équivalent en $m/\sqrt{\text{Hz}}$. Cependant, pour mesurer la température réelle du micro-résonateur, une telle calibration devient nécessaire puisque la température est directement proportionnelle à l'aire du spectre de bruit thermique (équation (1.29)). La comparaison des aires des spectres à

températures ambiante et cryogénique à partir des ajustements lorentziens permet alors de connaître la température T_{cryo} du résonateur, en supposant que les paramètres opto-mécaniques tels que la masse effective ne sont pas modifiés par la descente à froid.

Nous avons adopté deux méthodes différentes pour la calibration des spectres : la première utilise la pente statique du signal d'erreur Pound-Drever-Hall ($dV_{\text{err}}/d\Psi$) à résonance (voir l'équation (3.21) et les explications dans la section 3.4) ; cette calibration dépend de la finesse et de la bande passante de la cavité et n'est donc pas identique pour les spectres à T_{amb} et T_{cryo} . Nous avons toutefois constaté une déformation du signal d'erreur au voisinage de la résonance, qui compromet une mesure précise de la pente. Cette déformation, nettement visible sur la FIG. 4.10(a), est apparue aussi bien à basse qu'à haute température, et semble dépendre par exemple du serrage des vis de fixation du bloc cavité. Comme le champ incident a une polarisation circulaire de façon à séparer les faisceaux incident et réfléchi, cet effet pourrait être dû à la présence de biréfringence dans la cavité (voir section suivante), et compromet une calibration correcte des spectres à partir de la pente du signal d'erreur.



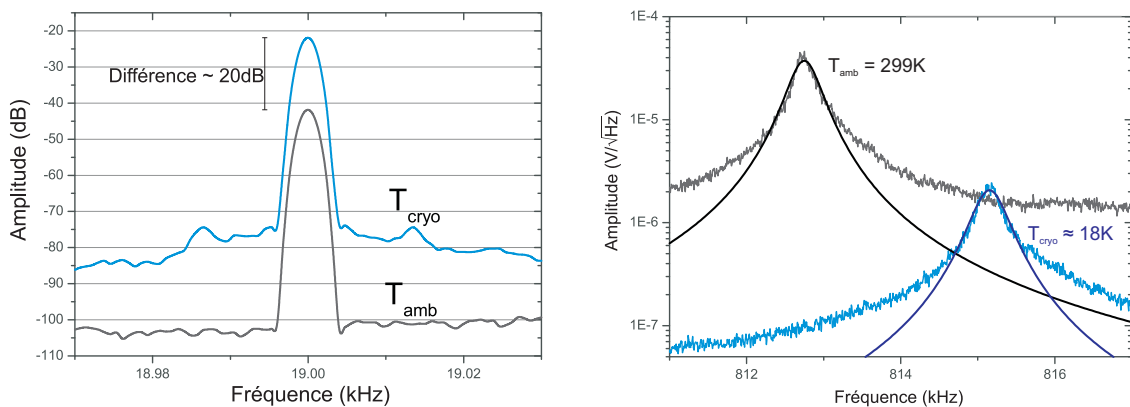
(a) Profil expérimental du signal d'erreur Pound-Drever-Hall : en gris un signal non déformé à T_{amb} , en noir un signal présentant une déformation enregistré à T_{cryo} .

(b) Amplitudes spectrales du mode (0,2) à températures ambiante et cryogénique, calibrées en utilisant la pente statique à résonance du signal d'erreur. Cette calibration conduit à une température cryogénique $T_{\text{cryo}} = 65$ K.

FIGURE 4.10 – Spectres de bruit thermique d'un mode du micro-résonateur à températures ambiante et cryogénique (b), calibrés avec le signal d'erreur Pound-Drever-Hall (a).

Nous avons ainsi préféré employer une deuxième méthode de calibration qui utilise une modulation de la fréquence du laser incident. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, une variation connue $\delta\nu$ de la fréquence du laser est équivalente à un déplacement δx du micro-miroir grâce à la relation (3.1) : $\delta\nu/\nu = \delta x/L$ où L est la longueur de la cavité. Ceci permet de convertir les variations de tension mesurées par la détection Pound-Drever-Hall en déplacement du miroir. En pratique, seule nous intéresse

ici une calibration relative des spectres aux températures ambiante et cryogénique. On utilise pour cela une modulation sinusoïdale à 19 kHz, appliquée à la phase du faisceau laser incident au moyen d'un modulateur électro-optique non-résonnant placé avant la cavité de filtrage. Ceci provoque une petite modulation de fréquence du faisceau laser, suffisante pour observer un pic de modulation à 19 kHz sur le spectre du signal d'erreur Pound-Drever-Hall. En comparant l'amplitude de ce pic aux deux températures (voir la FIG. 4.11(a)), on peut renormaliser les spectres de façon à obtenir la même réponse à la modulation de fréquence, et donc aux déplacements du micro-miroir.



(a) Spectres du pic monochromatique de modulation de fréquence à températures ambiante et cryogénique, enregistré sur le signal Pound-Drever-Hall en moyennant une vingtaine de fois le spectre sur une plage de 50 Hz environ avec une résolution spectrale de 1 Hz.

(b) Spectres du bruit thermique du mode (0,2) à T_{amb} (en noir) et T_{cryo} (en bleu) calibrés en utilisant la modulation de fréquence du laser incident.

FIGURE 4.11 – Spectres de bruit thermique d'un mode du micro-résonateur à températures ambiante et cryogénique ((b)), calibrés par une modulation de fréquence du laser ((a))

Les FIG. 4.10(b) et 4.11(b) montrent les résultats obtenus respectivement en utilisant la calibration par la pente statique du signal d'erreur, et par la modulation de fréquence du laser : la température mesurée dans le premier cas est de $T_{cryo} \simeq 65$ K, et dans le deuxième de $T_{cryo} \simeq 18$ K.

Aucun de ces deux résultats ne coïncide avec la température de la zone froide du cryostat, mesurée à 3.6 K, ce qui signifie que la cavité n'est pas bien thermalisée bien que nous attendions entre 3 à 6 heures après la descente en température, avant de faire les mesures de bruit. Nous avons mené des tests très soigneux pour vérifier si la température trouvée aux environs de 18 K était réaliste. Pour cela, nous avons utilisé un deuxième exemplaire du montage mécanique de la cavité et un micro-miroir de test, et nous avons mesuré la température avec une sonde placée à plusieurs endroits de l'enceinte et du montage, jusqu'à la surface même de la puce en silicium. Nous avons trouvé dans un premier temps une température au niveau de la puce à 18 K, en accord avec les mesures de

spectre de bruit. Nous avons ensuite cherché à améliorer la thermalisation de la cavité, en utilisant de la graisse thermique et du fil d'indium pour assurer un meilleur contact aussi bien au niveau des pièces de fixation que pour la puce elle-même, et nous avons procédé à un meilleur serrage de cette dernière. Ceci nous a permis effectivement d'améliorer la température, en descendant jusqu'à 9 K, mais le risque d'une détérioration importante des propriétés mécaniques et optiques du micro-résonateur nous a empêchés d'aller plus loin.

4.3 Biréfringence de la cavité

Nous avons déjà fait allusion dans la section précédente à la déformation du signal d'erreur Pound-Drever-Hall, qui semble dépendre de la façon dont les vis de maintien des miroirs sont serrées et des contraintes mécaniques induites lors de la descente en température. Parallèlement à cette déformation, nous avons observé une modification des valeurs mesurées pour la finesse et la bande passante de la cavité.

Nous avons cherché à interpréter ces variations comme une conséquence d'un comportement biréfringent de la cavité, et nous avons ainsi mené une analyse plus approfondie du comportement de la cavité. Nous avons également étudié comment la biréfringence peut être responsable d'un effet de chauffage ou de refroidissement par pression de radiation du résonateur, modifiant à la fois l'amortissement des modes et leur bruit thermique.

4.3.1 Mise en évidence des effets de biréfringence

La biréfringence de la cavité

Le phénomène de biréfringence dans une cavité optique est essentiellement lié à la biréfringence dans les couches diélectriques qui composent les miroirs de la cavité. Lors de la traversée d'un milieu uniaxe, la lumière subit un déphasage qui dépend de sa polarisation. Un tel milieu possède en effet deux axes orthogonaux de polarisation e_{\parallel} et e_{\perp} et deux indices de réfraction n_{\parallel} et n_{\perp} différents selon ces axes. Les chemins optiques suivis par la lumière dépendent alors des indices de réfraction, ce qui se traduit par un déphasage entre les deux composantes de la lumière de polarisations e_{\parallel} et e_{\perp} égal à :

$$\Delta\Psi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \Delta n \quad (4.6)$$

où $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$ caractérise la biréfringence du milieu et d est l'épaisseur du milieu traversé.

L'origine précise de la biréfringence produite lors de la réflexion sur un miroir est assez mal connue ; les différentes couches diélectriques déposées à la surface correspondent alternativement à des zones de faible et fort indices d'épaisseur optique $\lambda/4$, et elles ne présentent en général pas de biréfringence prononcée. Cependant, la prise en compte d'une biréfringence dans les couches les plus profondes, qui pourrait être induite par la proximité du substrat, et le calcul des interférences multiples lors de la réflexion de la lumière sur l'empilement, permettent de bien rendre compte des résultats expérimentaux [11] : un déphasage $\Delta\Psi$ de la lumière entre deux axes de polarisation orthogonaux a effectivement été observé, l'effet étant d'autant moins prononcé que le nombre de couches est important.

Ce déphasage varie ainsi de 10^{-3} rad pour un miroir de faible réflectivité composé de peu de couches, jusqu'à moins de 10^{-7} rad pour des miroirs de très grande qualité optique.

Ce déphasage vient s'ajouter au déphasage dû à la propagation du champ dans la cavité, et doit donc être pris en compte pour la détermination des fréquences de résonance de la cavité. Le déphasage total Ψ est relié à la fréquence optique ν du laser par l'expression :

$$\Psi = 2\pi \frac{L}{\lambda} = 2\pi \frac{\nu}{\nu_{\text{ISL}}} \quad (4.7)$$

où $\nu_{\text{ISL}} = c/2L$ est l'intervalle spectral libre pour une longueur optique L de la cavité. La condition de résonance $\Psi \equiv 0 [2\pi]$ conduit alors à des fréquences de résonance différentes pour les deux axes de polarisation, avec un écart :

$$\Delta\nu = \nu_{\text{ISL}} \frac{\Delta\Psi}{2\pi} \quad (4.8)$$

Pour une cavité de 2 mm de long caractérisée par un intervalle spectral libre $\nu_{\text{ISL}} = 75$ GHz, le décalage en fréquence peut varier de quelques kilohertz (pour un déphasage $\Delta\Psi$ induit par la biréfringence égal à 10^{-7} rad) jusqu'à 10 MHz (pour $\Delta\Psi = 10^{-3}$ rad). Cela signifie que la cavité présente deux pics d'Airy décalés en fréquence, associés aux deux axes propres de la cavité.

Lorsque la lumière incidente est polarisée circulairement, comme c'est le cas dans notre expérience, la décomposition selon les deux axes de polarisation se traduit par la présence simultanée des deux pics d'Airy. La visibilité de ces deux pics dépend du rapport entre leur écart $\Delta\nu$ et la bande passante ν_{BP} de la cavité, égale à la demi-largeur du pic d'Airy. Mais même si le dédoublement n'est pas clairement visible ($\Delta\nu \lesssim \nu_{\text{BP}}$), la biréfringence peut conduire à un élargissement du pic d'Airy observé, et à un effet de refroidissement ou de chauffage du résonateur par pression de radiation, comme nous allons le voir dans cette section. La FIG. 4.12 représente la situation que l'on vient de décrire : en présence de biréfringence et pour une polarisation incidente circulaire, la résonance de la cavité est la somme des contributions des fonctions d'Airy de chaque axe propre de la cavité (courbes (a) et (b) sur la figure). Pour $\Delta\nu \lesssim \nu_{\text{BP}}$, le pic résultant (courbe (c) en bleu) ne fait pas apparaître de dédoublement mais a une forme presque lorentzienne, élargie et dissymétrique. La mesure de la largeur de ce pic, en vue de déterminer la bande passante et la finesse de la cavité, conduit donc à des résultats faux.

La FIG. 4.12 a été tracée pour des valeurs proches de l'expérience, c'est-à-dire une finesse $\mathcal{F} = 20\,000$, une bande passante $\nu_{\text{BP}} = 1.9$ MHz, et un écart entre les deux pics d'Airy $\Delta\nu = 1$ MHz. Remarquons que cela correspond à un déphasage induit par la biréfringence $\Delta\Psi = 8 \times 10^{-5}$ (équation (4.8)). Il s'agit d'une valeur relativement élevée par rapport à ce que l'on aurait pu attendre de miroirs ayant une grande réflectivité. Cependant, même si le miroir déposé sur le micro-résonateur est de grande qualité, il induit, du fait de la faible

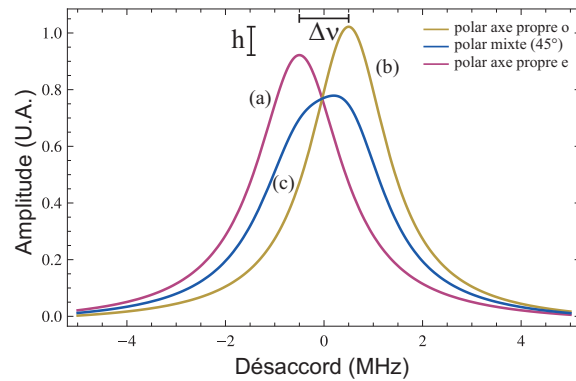


FIGURE 4.12 – Fonctions d’Airy dans une cavité biréfringente, pour différentes polarisations du faisceau incident : les courbes (a) et (b) représentent le cas où la lumière est polarisée selon les axes propres de la cavité ; la courbe (c) est obtenue pour une polarisation circulaire. $\Delta\nu$ représente l’écart en fréquence entre les deux pics, et h leur différence de hauteur.

épaisseur de la structure, des contraintes mécaniques qui peuvent déformer cette dernière et ainsi provoquer une biréfringence supplémentaire des couches diélectriques.

Observation des effets de la biréfringence sur le pic d’Airy et le bruit thermique

Nous avons apporté une modification au montage expérimental, afin de pouvoir faire varier la polarisation du faisceau incident sur la cavité. Nous avons utilisé un ensemble composé d’un cube séparateur de polarisation et d’une lame demi-onde, placé entre la lame quart d’onde (qui permettait de produire une polarisation circulaire) et la cavité (voir la FIG. 4.13). Le passage à travers le cube fait perdre la moitié de la puissance incidente, mais la lame demi-onde permet d’envoyer dans la cavité une polarisation linéaire d’angle variable. Le faisceau réfléchi par la cavité est transmis par le cube puis de nouveau transformé en polarisation circulaire par la lame quart d’onde. Ceci permet de récupérer sur la photodiode la moitié de la puissance du faisceau réfléchi.

Nous avons ainsi pu vérifier le comportement de la résonance de la cavité en faisant varier la polarisation du faisceau incident : nous avons observé un comportement similaire à celui attendu théoriquement (FIG. 4.12), c’est-à-dire que le pic d’Airy du faisceau transmis par la cavité se décale en fréquence en fonction de l’angle de polarisation, et passe par deux extréma pour deux polarisations incidentes perpendiculaires (courbes (a) et (b) sur la FIG. 4.14(a)). Il est difficile d’extraire de manière précise l’écart $\Delta\nu$ entre les fréquences de résonance pour ces deux axes propres, du fait des vibrations et des dérives de la cavité qui rendent imprécises les positions des pics d’Airy. Il est par contre possible de mesurer la différence de hauteur h entre ces deux courbes, qui correspond à une variation d’intensité relative de 15% ; cette différence est imputable à une réflectivité différente des miroirs pour les deux polarisations, ce qui se reflète aussi sur la largeur des pics d’Airy et sur la

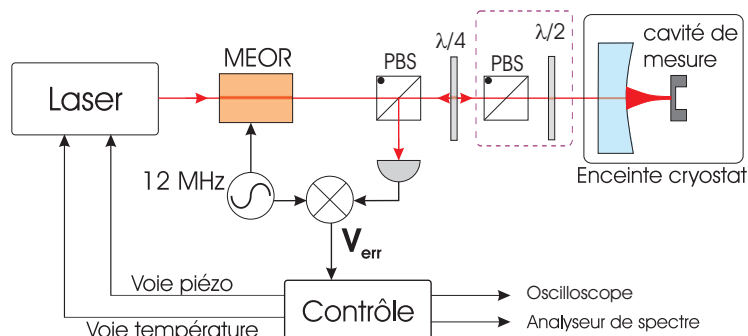
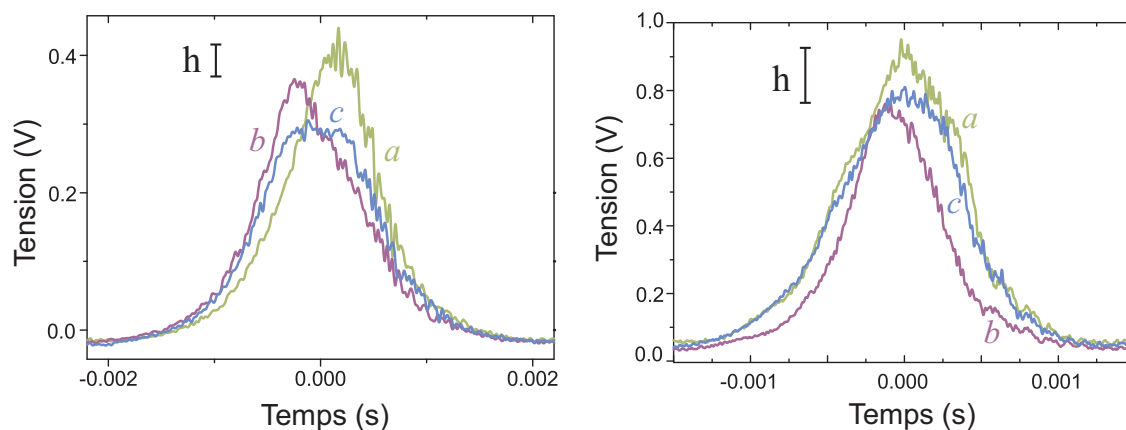


FIGURE 4.13 – Schéma du montage expérimental qui permet d’attaquer la cavité avec un faisceau polarisé linéairement et d’angle ajustable par la rotation de la lame demi-onde.

finesse de la cavité, respectivement égale à 45 000 et 41 000. La courbe (c) est obtenue pour une polarisation à 45° par rapport aux deux axes propres, équivalente à une polarisation circulaire ; on obtient dans ce cas un pic d’Airy élargi par la présence simultanée des deux modes. Une détermination de la finesse à partir de cette courbe donnerait donc une valeur erronée, de l’ordre de 35 000.

La FIG. 4.14(b) montre les mêmes courbes, mais à température cryogénique. On obtient des valeurs différentes aussi bien pour l’écart en fréquence, pour les hauteurs des pics d’Airy, que pour les finesesses, égales à 42 000 et 30 000 pour les deux axes propres. Nous avons également observé que les axes propres de la cavité à froid ne correspondent pas à ceux obtenus à température ambiante. Ces résultats confirment que la descente à froid fait subir des contraintes mécaniques aux éléments de la cavité.



(a) Fonctions d’Airy obtenues à température ambiante.

(b) Fonctions d’Airy obtenues à température cryogénique.

FIGURE 4.14 – Fonctions d’Airy obtenues pour différentes polarisations incidentes, à températures ambiante (a) et cryogénique (b). Les courbes a et b sont obtenues pour un faisceau polarisé selon les axes propres de la cavité, la courbe c pour une polarisation à 45° par rapport à ces axes.

Nous avons également observé des modifications importantes sur le spectre de bruit thermique, en tournant la polarisation du faisceau incident. Les figures 4.15(a) et 4.15(b) montrent le spectre du mode (0,2) à 814 kHz, respectivement à températures ambiante et cryogénique, et pour différents angles de polarisation (repérés ici par l'angle de la lame demi-onde et non par rapport aux axes propres de la cavité). On peut remarquer que l'amplitude et la largeur du spectre changent. L'amortissement du résonateur, estimé à l'aide d'un ajustement lorentzien des spectres, varie entre 27 et 95 Hz à température ambiante (ce qui correspond à une variation du facteur de qualité mécanique entre 30 000 et 9 000), et entre 136 et 260 Hz à froid (facteur de qualité entre 6 000 et 3 000). Soulignons que toutes ces mesures ont été faites en accordant le laser sur la "résonance" de la cavité, c'est-à-dire au sommet du pic d'Airy. Il est donc évident que la biréfringence affecte aussi les propriétés optomécaniques du micro-résonateur, et nous expliquerons dans la prochaine partie l'origine de ce phénomène.

Cet effet peut être particulièrement gênant quand on cherche à estimer les propriétés mécaniques du résonateur, telles que le facteur de qualité, à partir du spectre de bruit thermique. Il rend également difficile la détermination de la température cryogénique par comparaison des aires des spectres de bruit à température ambiante et à froid, comme nous l'avons fait dans la section 4.2, puisque la biréfringence de la cavité n'est pas la même aux deux températures.

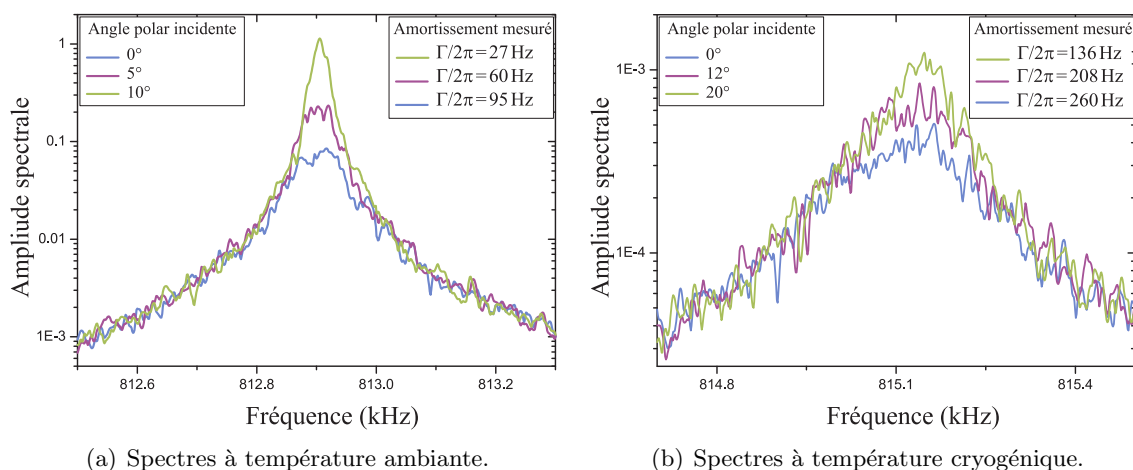


FIGURE 4.15 – Spectres de bruit thermique du mode (0,2) pour trois polarisations différentes du faisceau incident.

Nous avons également étudié le comportement des modes mécaniques de fréquence plus élevée (modes (1,3), (0,4) et (1,4), dont les fréquences sont égales à 2.2 MHz, 2.8 MHz et 3.3 MHz respectivement; voir FIG. 4.7) et nous avons observé une variation similaire de l'amortissement, mais de moindre importance au fur et à mesure que la fréquence augmente.

4.3.2 Étude théorique des effets de la biréfringence

Nous analysons ici les conséquences de la biréfringence sur les propriétés optomécaniques de la cavité et du micro-miroir. Nous dérivons en particulier les fonctions d'Airy que nous avons qualitativement décrites dans la section précédente, et nous mettons en évidence un effet de refroidissement ou de chauffage du résonateur, selon la polarisation du faisceau incident.

Dans une cavité biréfringente, si le faisceau incident a une polarisation circulaire ou linéaire qui ne coïncide pas avec l'un des axes propres, même si le faisceau est accordé sur le maximum du pic d'Airy et semble donc être à résonance avec la cavité, en réalité aucun des deux modes correspondants aux axes propres de la cavité n'est véritablement à résonance. Comme on peut le voir sur la FIG. 4.16, le laser, caractérisé par sa fréquence optique ω_L , est désaccordé vers le bleu pour la première composante de fréquence ω_1 , et vers le rouge pour l'autre composante de fréquence ω_2 . Chacun des deux modes propres de la cavité donne ainsi lieu séparément à un effet de refroidissement ou de chauffage, proportionnel à la pente du pic d'Airy du mode propre à la fréquence ω_L (voir section 2.5) : le mode de fréquence plus élevée induit un refroidissement du résonateur (pente dessinée en vert), alors que l'autre mode le chauffe (pente en mauve). Les pentes étant en général différentes pour les deux modes, ces effets ne se compensent pas et la température du résonateur est modifiée, bien que la cavité semble être toujours à résonance.

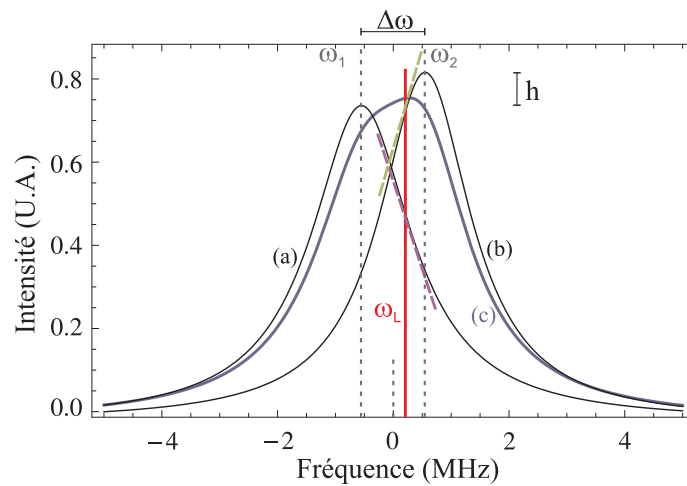


FIGURE 4.16 – Intensité intracavité tracée en fonction de la fréquence ω_L du laser, pour trois angles différents de la polarisation du faisceau incident par rapport aux axes propres de la cavité : $\theta = 0$ (a), 90° (b), et 45° (c). Lorsque le laser est accordé sur le maximum du pic d'Airy en polarisation à 45° (trait rouge), il est désaccordé par rapport aux résonances ω_1 et ω_2 des deux modes propres. Les pentes non nulles des pics d'Airy respectifs au point de fonctionnement (pointillés verts et mauves) induisent un chauffage et un refroidissement du résonateur.

Pour chaque mode propre de la cavité repéré par son indice $i = (1, 2)$, on déduit de

l'équation (2.38) l'amplitude moyenne du champ intracavité (on suppose ici la cavité sans perte) :

$$\bar{\alpha}_i = \frac{\sqrt{2}\gamma_i}{\gamma_i - i\Psi_i} \bar{\alpha}_i^{in} \quad (4.9)$$

où $\Psi_i = (\omega_L - \omega_i)\tau_i$ est le désaccord, γ_i et τ_i sont les paramètres optiques de la cavité pour chaque mode propre (qui définissent la forme de chaque pic d'Airy), et $\bar{\alpha}_i^{in}$ est la projection du champ incident sur l'axe propre correspondant.

Pour un champ incident qui se décompose selon un angle θ sur les axes propres de la cavité, l'intensité intracavité totale est la somme des intensités $|\bar{\alpha}_i|^2$ des deux composantes, pondérées par leur poids $\cos^2 \theta$ et $\sin^2 \theta$:

$$I = \left(\frac{2\gamma_1}{\gamma_1^2 + \Psi_1^2} \cos^2 \theta + \frac{2\gamma_2}{\gamma_2^2 + \Psi_2^2} \sin^2 \theta \right) I^{in} \quad (4.10)$$

Pour simplifier les calculs, on suppose dans la suite que les deux modes propres sont caractérisés par la même finesse $\mathcal{F} = \pi/\gamma_1 = \pi/\gamma_2$ et la même bande passante $\Omega_c = \gamma_i/\tau_i$. Par contre on dissymétrise les deux pics d'Airy comme sur la FIG. 4.16 en considérant un écart relatif h entre leur hauteur. On peut alors écrire l'intensité intracavité sous la forme :

$$I = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \left(\frac{h_1}{1 + \phi_1^2} + \frac{h_2}{1 + \phi_2^2} \right) I^{in} \quad (4.11)$$

où h_i représente l'amplitude des contributions respectives de chaque mode propre de la cavité :

$$h_1 = (1 - h/2) \cos^2 \theta \quad (4.12)$$

$$h_2 = (1 + h/2) \sin^2 \theta \quad (4.13)$$

Les paramètres ϕ_i représentent le désaccord du laser par rapport aux deux modes propres, normalisé à la bande passante :

$$\phi_i = (\omega_L - \omega_i)/\Omega_c \quad (4.14)$$

Les courbes (a), (b) et (c) sur la FIG. 4.16 représentent les pics d'Airy obtenus respectivement pour $\theta = 0, 90^\circ$ et 45° , avec un écart $\omega_2 - \omega_1$ entre les deux modes propres égal à $1.1\Omega_c$ et une dissymétrie $h = 0.1$. Soulignons que pour les paramètres choisis, le pic d'Airy a toujours un seul maximum, comme on peut le voir sur la courbe (c) correspondant à un angle de 45° , ce qui ne serait plus le cas pour un écart plus important entre les deux modes propres. Comme $h \neq 0$, le maximum est en général décalé par rapport au centre $(\omega_1 + \omega_2)/2$ des deux modes, et nous considérons dans la suite que le laser ω_L est asservi sur ce maximum (trait rouge sur la figure dans le cas d'une polarisation à 45°).

Chaque mode propre $i = (1, 2)$ est responsable d'une force de pression de radiation $\delta F_{\text{rad},i}^{(x)}$ qui s'exerce sur le résonateur, dont l'expression est donnée par l'équation (2.83). Chacune de ces forces conduit indépendamment à une modification de l'amortissement du résonateur selon l'équation (2.92), et induit un chauffage ou un refroidissement du résonateur selon le signe de cet amortissement supplémentaire, comme nous l'avons expliqué dans la section 2.5.

Ainsi, l'amortissement effectif total est la somme de l'amortissement mécanique Γ du mode et des amortissements supplémentaires $\Gamma_{\text{rad},i}$ induits par les deux modes propres :

$$\Gamma_{\text{eff}} = \Gamma + \Gamma_{\text{rad},1} + \Gamma_{\text{rad},2} \quad (4.15)$$

A partir des équations (2.92) et (2.76), on peut exprimer ces amortissements en fonction des paramètres ϕ_i et h_i des deux modes propres :

$$\Gamma_{\text{rad},i} = - \frac{4\phi_i}{\left| (1 - i\Omega_m/\Omega_c)^2 + \phi_i^2 \right|^2} \frac{2h_i}{1 + \phi_i^2} \Gamma_{\text{rad}} \quad (4.16)$$

où $\Gamma_{\text{rad}} = \frac{\zeta}{8} (\Omega_m/\Omega_c) \Gamma$ est l'amortissement induit par la pression de radiation dans une cavité sans biréfringence, avec le laser placé à mi-pente sur le pic d'Airy, et à basse fréquence ($\Omega_m \ll \Omega_c$).

La variation de l'amortissement effectif $\Gamma_{\text{eff}} - \Gamma = \Gamma_{\text{rad},1} + \Gamma_{\text{rad},2}$, normalisé à Γ_{rad} , est représentée sur la FIG. 4.17 en fonction de l'angle θ de la polarisation incidente et de Ω_m/Ω_c , pour les mêmes paramètres de la cavité, à savoir $\omega_2 - \omega_1 = 0.9\Omega_c$ et $h = 0.05$. Cette courbe a été tracée avec un programme Mathematica de la façon suivante : pour chaque angle θ , on détermine le maximum du pic d'Airy à partir de l'expression (4.11), ce qui fixe la fréquence ω_L et les désaccords ϕ_i ; l'amortissement effectif est alors calculé grâce aux équations (4.15) et (4.16).

On observe un effet de refroidissement ou de chauffage pour des fréquences mécaniques vérifiant $\Omega_m \lesssim \Omega_c$: l'effet de la biréfringence sur l'amortissement et sur la température du mode mécanique ne se manifeste que dans le régime des bandes latérales non résolues. Dans ces conditions, on obtient toutefois des effets importants, notamment pour une polarisation incidente orientée selon un angle voisin de 45° , qui est en fait équivalente à la polarisation circulaire que nous utilisons dans l'expérience.

Nous avons utilisé ces résultats pour ajuster les valeurs de l'amortissement effectif obtenues expérimentalement à partir des spectres de bruit thermique, pour différentes valeurs de l'angle θ (tels que ceux de la FIG. 4.15), aussi bien à température ambiante qu'à température cryogénique. Les valeurs expérimentales et l'ajustement sont représentés sur la FIG. 4.18. La fonction est tracée pour les valeurs du déséquilibre en hauteur h des pics d'Airy déduites expérimentalement de manière similaire aux courbes de la FIG. 4.14 ; on trouve les valeurs $h = 0.15$ à T_{amb} et $h = 0.2$ à T_{cryo} , valeurs légèrement différentes de

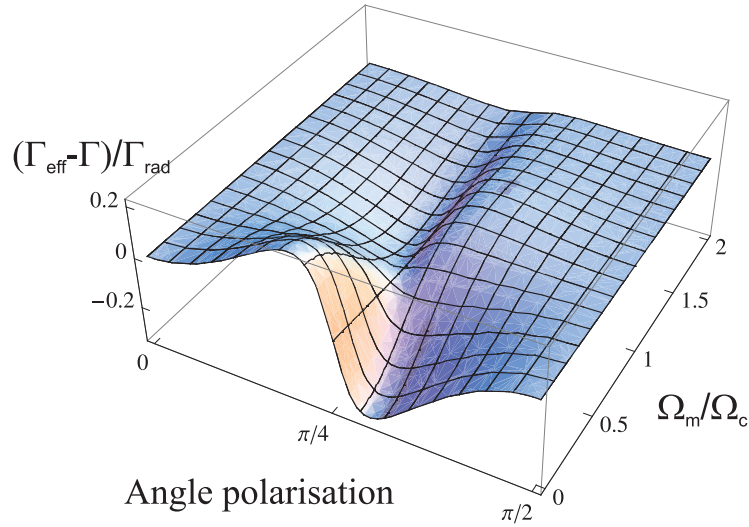


FIGURE 4.17 – Variation de l’amortissement effectif en fonction de l’angle θ de la polarisation incidente et de Ω_m/Ω_c .

celles de la FIG. 4.14 car ces mesures ont été réalisées après avoir manipulé la cavité et modifié les contraintes, notamment au niveau du serrage des vis des miroirs.

L’écart en fréquence $\Delta\nu$ entre les résonances des deux modes propres étant difficile à déterminer expérimentalement avec précision, ce paramètre est utilisé comme variable d’ajustement de la courbe. On voit sur la FIG. 4.15 qu’on a un très bon accord avec les valeurs expérimentales, pour $\Delta\nu/\nu_{BP} = 0.95$ à T_{amb} , et $\Delta\nu/\nu_{BP} = 0.85$ à T_{cryo} . Le paramètre Γ_{rad}/Γ sert aussi de variable d’ajustement, et vaut respectivement $\Gamma_{rad}/\Gamma = 17.1$ à température ambiante et $\Gamma_{rad}/\Gamma = 6.5$ à température cryogénique. Ces valeurs sont en bon accord qualitatif avec l’effet d’amortissement optique Γ_{rad} ($\simeq 10\Gamma$) attendu avec nos paramètres expérimentaux, à mi-pente du pic d’Airy et pour une puissance de 5 mW.

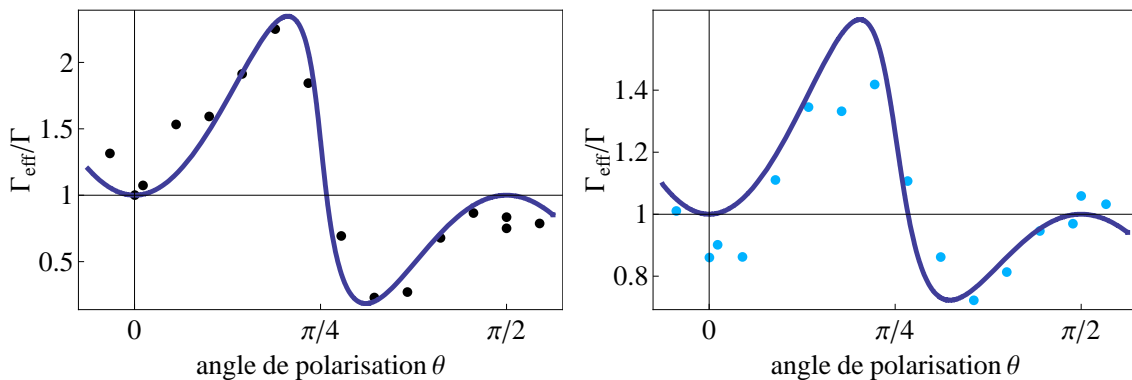


FIGURE 4.18 – Valeurs expérimentales de l’amortissement effectif déduites des spectres de bruit thermique, à températures ambiante (à gauche) et cryogénique (à droite), pour différents angles θ de la polarisation incidente. Les courbes en traits pleins sont des ajustements à partir des expressions (4.15) et (4.16).

Cette analyse montre que pour éviter tout effet de chauffage ou de refroidissement induits par la biréfringence, il est préférable d'utiliser un faisceau incident dont la polarisation est linéaire et alignée sur l'un des axes propres de la cavité. C'est ce que nous ferons dans la section suivante pour combiner refroidissements cryogénique et laser du résonateur.

4.4 Refroidissement laser à température cryogénique

Nous présentons dans cette dernière section les résultats du refroidissement et chauffage par pression de radiation d'un mode mécanique du micro-résonateur P3, monté dans une cavité refroidie à température cryogénique. Nous présentons d'abord le montage expérimental et la méthode que nous avons utilisée pour calibrer le désaccord, et ensuite les résultats obtenus.

4.4.1 Montage expérimental et mesure du désaccord

Pour éviter les problèmes de biréfringence, nous avons conservé le cube séparateur de polarisation et la lame demi-onde, placés juste avant la cavité. Comme nous l'avons décrit dans la section précédente, ceci nous permet d'ajuster la polarisation incidente sur l'un des axes propres de la cavité. Par contre, nous perdons la moitié du faisceau incident et du faisceau réfléchi, réduisant à la fois l'efficacité du refroidissement laser et la sensibilité de la mesure.

Afin de réaliser le refroidissement par pression de radiation, le laser doit pouvoir être asservi en dehors de la résonance de la cavité. Nous avons donc modifié le système de détection Pound-Drever-Hall décrit dans le chapitre 3 pour ajouter une tension continue réglable au signal d'erreur. Le signal V_{err} passe par un étage soustracteur avant d'être envoyé au boîtier d'asservissement de la fréquence du laser (FIG. 4.19). La tension continue est produite par un générateur de fonctions Agilent capable de fournir une tension continue de ± 5 V avec une précision de 0.01 mV ; selon le signe de la tension appliquée, on obtient un désaccord positif ou négatif, ce qui permet de choisir le point de fonctionnement de la cavité.

L'étendue de la plage d'asservissement accessible dépend fortement du signal d'erreur : pendant les opérations à température cryogénique nous ne sommes pas allés au delà de $\Psi/\gamma = \pm 0.5$ car l'asservissement devenait instable en se rapprochant du maximum du signal d'erreur.

La méthode pour mesurer le désaccord par rapport à la résonance et pour calibrer le signal d'erreur et le spectre de bruit thermique de la cavité lorsque la cavité est désaccordée est présentée dans la référence [3] ; nous la résumons ici brièvement. L'expression (3.11) du signal d'erreur, valide au voisinage de la résonance, peut être écrite sous la forme :

$$V_{\text{err}}(\Psi) = V_{\text{max}} \frac{2\gamma\Psi}{\gamma^2 + \Psi^2} \quad (4.17)$$

où V_{max} est la valeur maximale du signal d'erreur, atteinte en $\Psi = \pm\gamma$. Lorsque le désaccord Ψ est inférieur à γ en valeur absolue, cette relation peut être inversée et on obtient

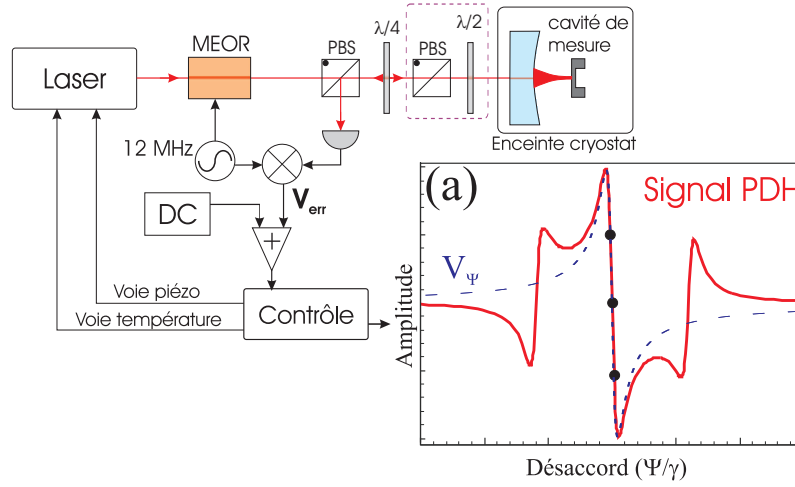


FIGURE 4.19 – Schéma simplifié du montage : on ajoute au signal d'erreur V_{err} une tension continue réglable qui permet d'asservir le laser en différents points en dehors de résonance, comme illustré sur la courbe du signal Pound-Drever-Hall.

l'expression du désaccord en fonction de la tension de décalage V_Ψ soustraite du signal d'erreur :

$$\Psi = \gamma \frac{V_{max} - \sqrt{V_{max}^2 - V_\Psi^2}}{V_\Psi}. \quad (4.18)$$

Pour déterminer expérimentalement la tension maximale V_{max} du signal d'erreur, on acquiert tout d'abord le signal d'erreur en balayant la fréquence du laser autour de la résonance de la cavité ; comme le montre l'encadré (a) de la FIG. 4.19, on ajuste alors la partie centrale de la courbe obtenue (correspondant à des petits désaccords) avec l'expression (4.17), ce qui fixe V_{max} . La FIG. 4.20 montre la variation du désaccord en fonction de la tension de décalage (équation (4.18)) : lorsque $V_\Psi = \pm V_{max}$ la pente de la courbe devient infinie et cette méthode de mesure du désaccord n'est plus exploitable.

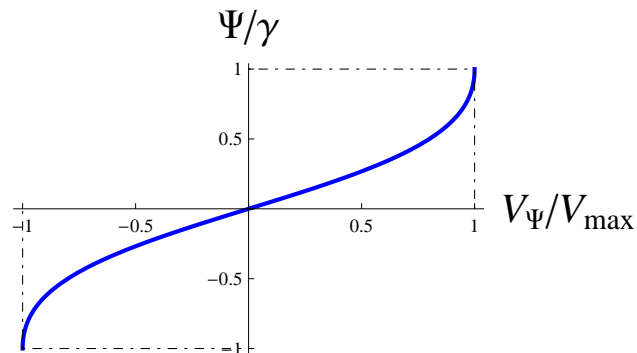


FIGURE 4.20 – Variation du désaccord de la cavité en fonction de la tension de décalage appliquée au signal d'erreur Pound-Drever-Hall, normalisée à la tension maximale du signal d'erreur.

La calibration des spectres obtenus pour différents désaccords de la cavité peut être effectuée en généralisant l'équation (3.18) au cas d'un désaccord non nul. La dépendance de la calibration avec le désaccord et la fréquence d'analyse n'est toutefois pas aussi simple qu'à résonance. Nous avons donc préféré calibrer les spectres en utilisant une modulation monochromatique de la phase du faisceau laser, comme nous l'avons décrit dans la section 4.2.

4.4.2 Résultats expérimentaux

Les résultats expérimentaux qui suivent ont été obtenus avec le système cryogénique et la cavité présentés dans ce chapitre. Nous avons mesuré des spectres de bruit thermique du mode (0,2) du micro-résonateur P3 de taille 1×1 mm, pour différents désaccords et avec une puissance incidente $P_{\text{in}} = 5$ mW. Les spectres sont calibrés à l'aide de la modulation de phase du laser, ce qui permet tout d'abord de calibrer le spectre obtenu à basse température avec un désaccord nul par comparaison avec le spectre à température ambiante, puis de calibrer les spectres à différents désaccords. A la différence de la section 4.2, nous avons utilisé une modulation à une fréquence de 812 kHz, donc proche de la résonance du mode considéré. Le spectre obtenu à résonance permet également de déterminer les paramètres optomécaniques à l'aide d'un ajustement lorentzien.

Nous avons répété les mesures pour les deux polarisations du faisceau parallèles aux axes propres de la cavité : la FIG. 4.21(a) présente les spectres de bruit thermique pour un angle $\theta = 0$; les courbes allant du mauve au bleu clair sont obtenues pour des valeurs du désaccord $\Psi/\gamma = +0.19, +0.17, 0.14, 0.08, 0, -0.08, -0.17, -0.27, -0.38$, la courbe en noir étant celle à désaccord nul. Pour les désaccords négatifs, l'amortissement augmente et la fréquence de résonance se décale vers les basses fréquences (effet de ressort optique), alors que pour les désaccords positifs les paramètres varient en sens inverse. On obtient le même comportement dans le cas où d'une polarisation $\theta = \pi/2$ correspondant à l'autre axe propre de la cavité : les courbes du rouge au vert sont obtenues pour des désaccords $\Psi/\gamma = +0.14, +0.08, 0, -0.08, -0.17, -0.27, -0.38, -0.54$.

A partir de l'ajustement lorentzien de tous les spectres, on peut extraire les paramètres Γ_{eff} et Ω_{eff} pour chaque courbe et étudier leur dépendance en fonction du désaccord Ψ/γ . La FIG. 4.22 reporte l'évolution de l'amortissement relatif $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ (l'amortissement propre Γ du résonateur étant obtenu à partir du spectre à résonance), pour les deux polarisations du faisceau incident ($\theta = 0$ à gauche et $\theta = \pi/2$ à droite). On constate effectivement une augmentation de l'amortissement pour les désaccord négatifs, et une réduction pour les désaccords positifs. Nous avons représenté également un ajustement théorique des données déduit des équations (2.92), (2.93) et (2.76), avec $\Omega_m/2\pi = 815.2$ kHz et $Q = \Omega_m/\Gamma = 4500$. Le valeur de la finesse, qui apparaît dans l'expression du paramètre optomécanique ζ , est différent pour les deux polarisations, et vaut respectivement 25 000 et 30 000 pour

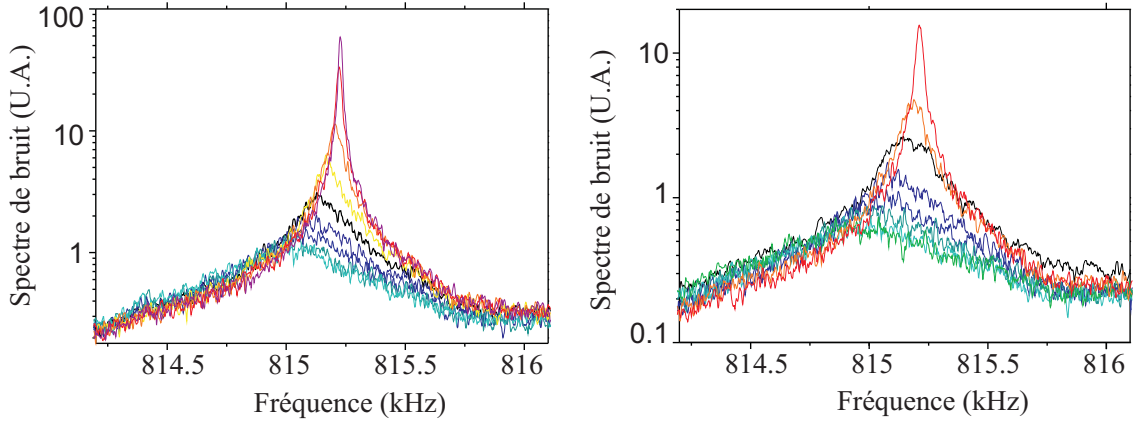
(a) Spectres mesurés pour une polarisation incidente $\theta = 0$.(b) Spectres mesurés pour une polarisation incidente $\theta = \pi/2$.

FIGURE 4.21 – Spectres de bruit thermique observés lorsqu'on désaccorde la cavité refroidie à température cryogénique, avec un faisceau laser incident polarisé selon les axes propres de la cavité ($\theta = 0$ à gauche et $\pi/2$ à droite).

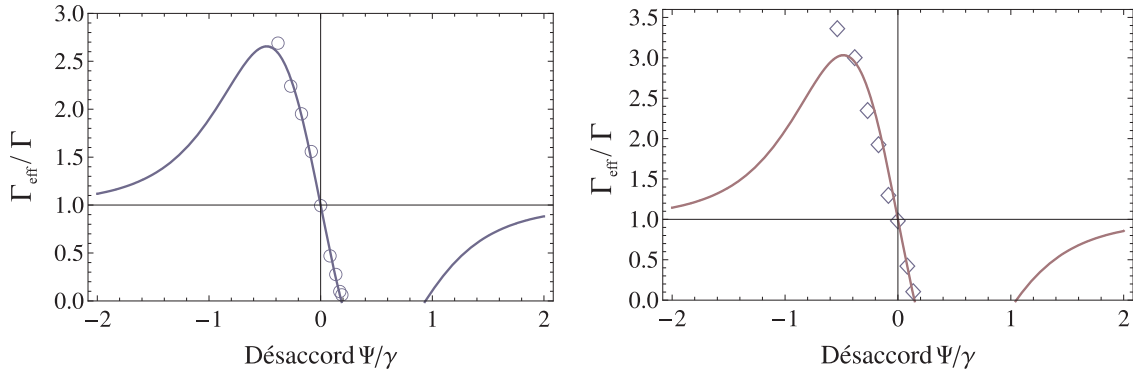
les polarisations $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$. La masse du mode peut être estimée à partir du spectre à désaccord nul et vaut environ 2 mg, soit un ordre de grandeur plus grande que la valeur typiquement mesurée à température ambiante [7]. Cela est sans doute dû à un mauvais centrage du micro-miroir lors du montage de la cavité ou à un décentrage à basse température du faisceau laser sur le micro-miroir. Le seul paramètre ajustable est donc l'intensité intracavité, qui pour une puissance incidente constante dépend du désaccord selon la relation :

$$I = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \Psi^2} I_{\Psi=0} \quad (4.19)$$

L'ajustement de chaque série de points donne une valeur pour la puissance intracavité à résonance $P_{\Psi=0}$, qui vaut 4.22 W pour la courbe de la FIG. 4.22(a) et 4.32 W pour celle de la FIG. 4.22(b). Si les ajustements sont en bon accord avec les points expérimentaux, les valeurs estimées de la puissance intracavité ainsi obtenues sont inférieures aux valeurs attendues pour une puissance incidente de 5 mW et une finesse de 25 000 ou 30 000.

Dans la cavité désaccordée, la fréquence de résonance effective est aussi modifiée par un effet de ressort optique induit par la pression de radiation, selon la relation (2.94). Les figures 4.23(a) et 4.23(b) présentent l'évolution avec le désaccord de la fréquence de résonance, déduite des ajustements lorentziens des spectres de bruit, ainsi qu'un ajustement déduit de l'équation (2.94). Comme pour l'amortissement effectif, le seul paramètre ajustable est la puissance intracavité à résonance $P_{\Psi=0}$, égale à 1.51 W pour la courbe à $\theta = 0$ et à 1.93 W pour celle à $\theta = \pi/2$. Encore une fois, on remarque que les valeurs de la puissance intracavité ainsi obtenues sont inférieures aux valeurs attendues.

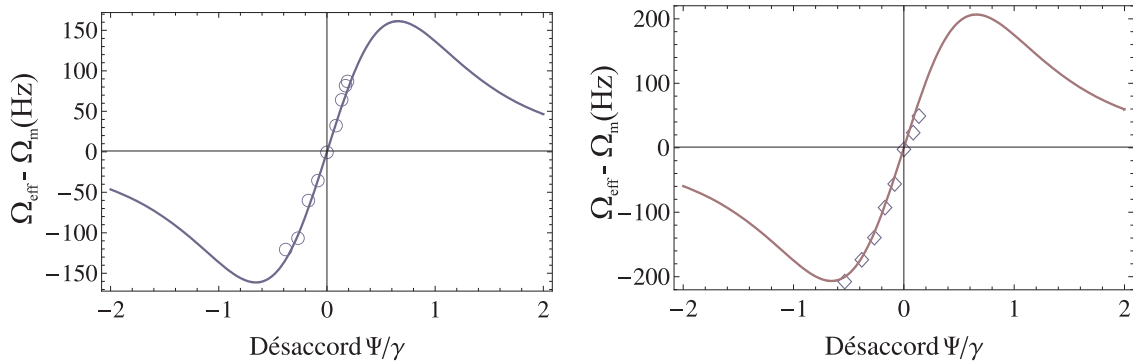
La température effective T_{eff} du mode est proportionnelle à l'aire du spectre, et les



(a) Évolution de l'amortissement effectif pour une polarisation incidente $\theta = 0$.

(b) Évolution de l'amortissement effectif pour une polarisation incidente $\theta = \pi/2$.

FIGURE 4.22 – Évolution de l'amortissement effectif normalisé $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ en fonction du désaccord normalisé Ψ/γ , pour les deux angles de polarisation du faisceau incident.



(a) Evolution de la fréquence de résonance pour une polarisation incidente $\theta = 0$.

(b) Evolution de la fréquence de résonance pour une polarisation incidente $\theta = \pi/2$.

FIGURE 4.23 – Variation $\Omega_{\text{eff}} - \Omega_m$ de la fréquence de résonance, en fonction du désaccord normalisé Ψ/γ , pour les deux angles de polarisation du faisceau incident.

valeurs correspondant aux courbes de la FIG. 4.21 sont reportées sur la FIG. 4.24. Du fait de la méthode utilisée pour la calibration des spectres, ces valeurs sont déduites de la température T_{cryo} obtenue à partir du spectre à désaccord nul, et estimée par comparaison avec le spectre à température ambiante. Malgré tous les efforts faits pour thermaliser correctement la cavité et éviter les effets provoqués par la biréfringence, la calibration des deux courbes à désaccord nul avec les polarisations $\theta = 0$ et $\pi/2$ donne une température de l'ordre de 22 K³. La FIG. 4.24 montre qu'on observe une réduction de la température effective pour les désaccords négatifs d'un facteur 3 environ pour les deux polarisations, et une augmentations d'un facteur 30 et 10 respectivement pour les désaccords positifs, comme on pouvait s'y attendre à partir de la variation de l'amortissement effectif. Les températures atteintes varient de 8 K à 715 K en polarisation $\theta = 0$ et de 6 K à 160 K pour les courbes à $\theta = \pi/2$.

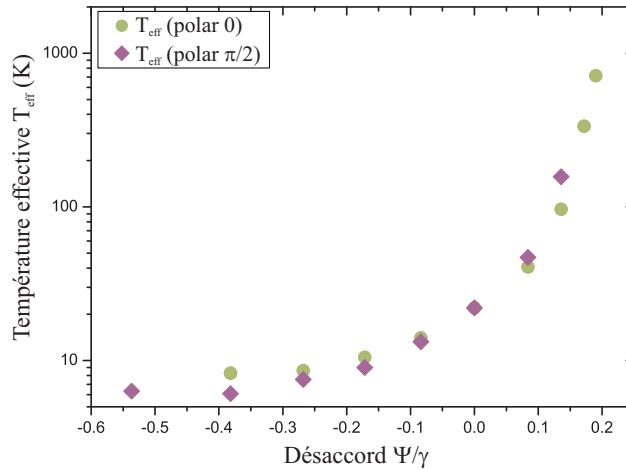


FIGURE 4.24 – Température effective du mode (0,2) mesurée à partir de l'aire des spectres, pour les deux angles de polarisation du faisceau incident.

3. Notons que pour diminuer la biréfringence de la cavité, nous avons légèrement desserré les vis du montage mécanique de la cavité, ce qui a pour effet de diminuer les contraintes sur les miroirs mais pourrait éventuellement empêcher la bonne thermalisation du résonateur.

Interaction paramétrique à trois modes : introduction théorique

J'ai déjà eu occasion au cours de ce manuscrit (chapitres 2 et 4) de souligner la nécessité d'améliorer l'efficacité du refroidissement laser de notre système dans le but d'approcher la température quantique du micro-résonateur, ou de manière équivalente afin de réduire le nombre effectif de phonons n_T^{eff} (équation (2.99)). Cela peut être réalisé suivant trois approches complémentaires : il est nécessaire en premier lieu d'améliorer les caractéristiques du micro-résonateur (augmentation de sa fréquence de résonance Ω_m , de son facteur de qualité Q , réduction de sa masse M), deuxièmement de placer le résonateur à une température cryogénique, ce qui a fait l'objet du chapitre précédent, et finalement de fonctionner dans le régime des bandes latérales résolues ($\Omega_m \gg \Omega_c$) qui permet de mettre à résonance la bande anti-Stokes tout en rendant les processus Stokes négligeables (voir la section 2.5).

Les caractéristiques optiques de notre cavité, ainsi que les fréquences de résonance typiques des micro-résonateurs présentés jusqu'à maintenant dans ce manuscrit sont telles que $\Omega_m \simeq \Omega_c \simeq 1$ MHz. Les prochains chapitres sont dédiés à la description d'une expérience de refroidissement laser du micro-résonateur en régime de bandes latérales résolues, obtenu en utilisant une cavité plus longue et des modes mécaniques de fréquence plus élevée. La mise en place de ce dispositif m'a par ailleurs permis de mettre en évidence un nouveau mécanisme de refroidissement, qui peut être plus efficace que celui décrit jusqu'à présent. Il repose sur le fait que nous utilisons un second mode optique, situé exactement à une pulsation Ω_m du premier, ce qui permet de rendre résonnants à la fois le laser incident à la pulsation ω_0 et la bande anti-Stokes à la pulsation $\omega_0 + \Omega_m$, améliorant ainsi l'efficacité du processus anti-Stokes.

Dans ce chapitre je décrirai ce couplage à trois modes (deux modes optiques et un mode mécanique) et je montrerai ses avantages dans le cadre du refroidissement par pression

de radiation du résonateur. Cet effet a été étudié initialement par Braginsky *et al.* [21], dans le contexte des détecteurs interférométriques des ondes gravitationnelles, où une interaction à trois modes, résonnante avec la bande Stokes cette fois-ci, peut apparaître accidentellement et induire des instabilités dans l'interféromètre. En rendant les deux modes optiques résonnants avec la porteuse et la bande Stokes, notre expérience permet également de mettre en évidence ce régime et apparaît ainsi comme un outil pour l'étude et le contrôle des instabilités dans les détecteurs d'ondes gravitationnelles.

5.1 Les avantages du couplage à trois modes

La FIG. 5.1 montre différents mécanismes de refroidissement laser. Le schéma du haut représente comment les fréquences ω_0 du laser incident et $\omega_0 \pm \Omega_m$ des bandes Stokes et anti-Stokes sont réparties par rapport au pic d'Airy de la cavité, dans le cas qui correspond aux expériences que nous avons déjà réalisées, c'est-à-dire $\Omega_m \lesssim \Omega_c$. La bande latérale anti-Stokes étant placée à résonance avec la cavité, le processus associé devient dominant et produit le refroidissement du résonateur par absorption d'un phonon à chaque transfert d'un photon du laser incident vers la bande anti-Stokes. La limite de température atteinte est reliée aux processus Stokes résiduels, qui peuvent être rendus négligeables en se plaçant dans le régime des bandes latérales résolues $\Omega_m \gg \Omega_c$ (schéma du milieu). Cela se produit toutefois au détriment de la puissance laser à l'intérieur de la cavité, puisque le laser se trouve également hors résonance.

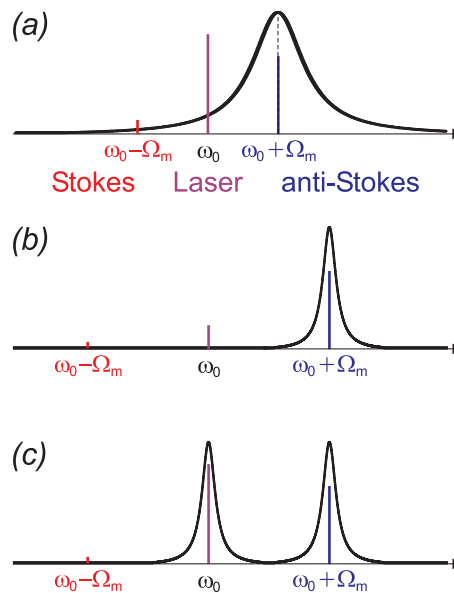


FIGURE 5.1 – Schémas du refroidissement laser, dans les régimes des bandes latérales non résolues (a) et résolues (b), et avec le couplage à trois modes (c) où à la fois le laser et la bande anti-Stokes sont résonnants avec deux modes optiques de la cavité.

Le couplage optomécanique à trois modes (schéma du bas) palie à cet inconvénient, grâce à la présence de deux modes optiques permettant à la fois au laser incident et à la bande anti-Stokes d'être à résonance, tout en conservant la bande Stokes loin de résonance. Le refroidissement correspond alors à l'absorption de phonons par transfert d'un photon du mode optique de basse énergie (où se trouve le laser incident) vers celui de plus haute énergie.

Par rapport au refroidissement par couplage à deux modes, cela comporte un avantage évident, en éliminant une contrainte sérieuse sur la puissance incidente disponible qui

empêche en fin de compte de se placer trop loin de résonance. En permettant de rendre résonnant le processus de refroidissement anti-Stokes tout en gardant le laser accordé avec le mode fondamental de la cavité, le couplage à trois modes permet en principe d'atteindre l'état quantique fondamental pour des puissances incidentes plus faibles et de profiter de la plus grande sensibilité aux petits déplacements de la cavité [172, 45].

Il est important de remarquer que le mode mécanique diffuse le mode optique fondamental incident dans un autre mode propre optique de la cavité, qui a une distribution spatiale différente, ce qui conduit non seulement à une modification de la fréquence du mode optique, mais aussi à une modification de son profil spatial. Ainsi, la conversion sera d'autant plus efficace que le profil du mode acoustique correspond bien à celui du mode optique transverse d'ordre supérieur impliqué dans le processus ; cet accord spatial entre les trois modes, et la condition de résonance entre la fréquence mécanique Ω_m et l'écart en fréquence entre les deux modes optiques, sont deux conditions essentielles à la réalisation du couplage à trois modes.

Double intérêt du couplage à trois modes

Il est également possible d'accorder le deuxième mode transverse de la cavité avec la bande Stokes, ce qui conduit à un transfert d'énergie inverse, du champ vers le résonateur par création de phonons à chaque transfert d'un photon du mode fondamental où se trouve le laser incident vers le mode optique transverse. Ceci a pour effet de chauffer le résonateur et peut engendrer une instabilité du système.

C'est dans ce cadre que s'est initialement développé l'intérêt pour l'interaction à trois modes, et en particulier pour les risques d'instabilités qui pourraient apparaître dans les interféromètres de seconde génération pour la détection des ondes gravitationnelles [21, 18, 20, 84]. Les caractéristiques des cavités placées dans les bras de l'interféromètre, notamment la grande longueur et le petit intervalle spectral libre, conduisent à une densité élevée de modes optiques dans la plage de fréquences 20 – 80 kHz, où se trouvent par ailleurs de nombreux modes mécaniques internes des miroirs de l'interféromètre, avec une bonne adaptation spatiale à la lumière du fait de la grande taille du col optique du faisceau. Cela augmente le risque de résonances fortuites entre modes optique et mécanique, qui sont de plus exacerbées par la grande puissance optique circulant dans les bras. Les améliorations envisagées pour ces futurs détecteurs pourraient ainsi être entravées par des phénomènes d'instabilité paramétrique à trois modes.

Il est donc devenu important de comprendre et de contrôler le mécanisme à l'origine de ces instabilités. Après les premières études menées par Braginsky *et al.* [18], de nombreuses équipes ont entrepris d'analyser les instabilités à trois modes dans les antennes gravitationnelles, avec des modèles de plus en plus complexes et réalistes. En particulier, une série d'études menées par l'équipe de David Blair a confirmé les résultats préliminaires de Braginsky : en utilisant notamment une simulation 3D de la cavité, Zhao *et al.* [170] et Gras *et*

al. [67] ont montré que le couplage à trois modes peut impliquer à la fois plusieurs modes acoustiques, dont une dizaine d'entre eux aurait même un gain paramétrique supérieur à 1, entraînant de ce fait une instabilité; le couplage peut également impliquer plusieurs modes optiques différents, qui contribuent à l'instabilité d'un seul mode acoustique [83].

Pour limiter ces instabilités, l'utilisation d'un amortisseur mécanique qui réduirait le facteur de qualité des modes acoustiques concernés par l'instabilité a été proposée [66, 65]; cela peut cependant provoquer aussi une diminution de la sensibilité de l'interféromètre. Divers schémas de contrôle des instabilités avec une contre-réaction optique ou électrostatique ont également été étudiés [82].

Expériences d'interaction à trois modes

Plusieurs groupes cherchent actuellement à observer le couplage à trois modes, soit pour étudier des systèmes de contrôle des instabilités paramétriques, soit pour réaliser un refroidissement actif plus efficace d'un micro-résonateur. Les dispositifs utilisés sont différents, mais font en général appel à un résonateur avec un grand facteur de qualité mécanique et une faible masse, une cavité de grande finesse, une puissance incidente importante, et un bon recouvrement spatial entre modes optiques et mode mécanique.

La première démonstration du couplage à trois modes a été réalisée par Zhao *et al.* [171] avec une cavité de finesse $\mathcal{F} \simeq 1\,500$ et de longueur $L = 77$ m, formée par deux miroirs suspendus d'environ 15 cm de diamètre et 5 cm d'épaisseur, oscillant à relativement basse fréquence : le mode mécanique concerné a une fréquence $\nu_m = \Omega_m/2\pi = 160$ kHz, avec un facteur de qualité $Q \simeq 700\,000$. L'expérience a consisté à balayer la différence de fréquence $\Delta\nu = \nu_1 - \nu_0$ entre les modes optiques TEM₀₀ et TEM₀₁ autour de ν_m grâce à une plaque de compensation en silice placée dans la cavité, et à exciter le miroir par une force électrostatique à sa fréquence de résonance. En détectant le faisceau transmis avec une photodiode à quadrants, ils ont pu observer une variation de l'intensité du mode TEM₀₁ en fonction de $\Delta\nu$, qui augmente d'un facteur 100 environ pour $|\Delta\nu| = \nu_m$ (voir FIG. 5.2 (a)). L'interaction à trois modes était ici forcée par l'excitation du miroir, mais cette expérience a néanmoins permis de montrer la faisabilité du couplage à trois modes avec des miroirs macroscopiques et avec une cavité aux caractéristiques proches des détecteurs d'ondes gravitationnelles.

Le même groupe a ensuite proposé l'utilisation d'un micro-miroir dans un schéma similaire mais de taille plus compacte afin de réduire la masse du résonateur [113, 172]. La cavité du micro-miroir serait couplée avec une deuxième cavité qui sert à accorder l'écart en fréquence $\Delta\nu$ entre les deux modes optiques.

Encore plus récemment, Grudin *et al.* [70] ont reporté l'observation de l'amplification du spectre de bruit thermique de 7 modes acoustiques de fréquence entre 40 et 400 MHz dans un micro-tore en silice, due au couplage à trois modes avec la bande Stokes. Le système est formé de deux micro-tores ayant des fréquences optiques différentes, dont le

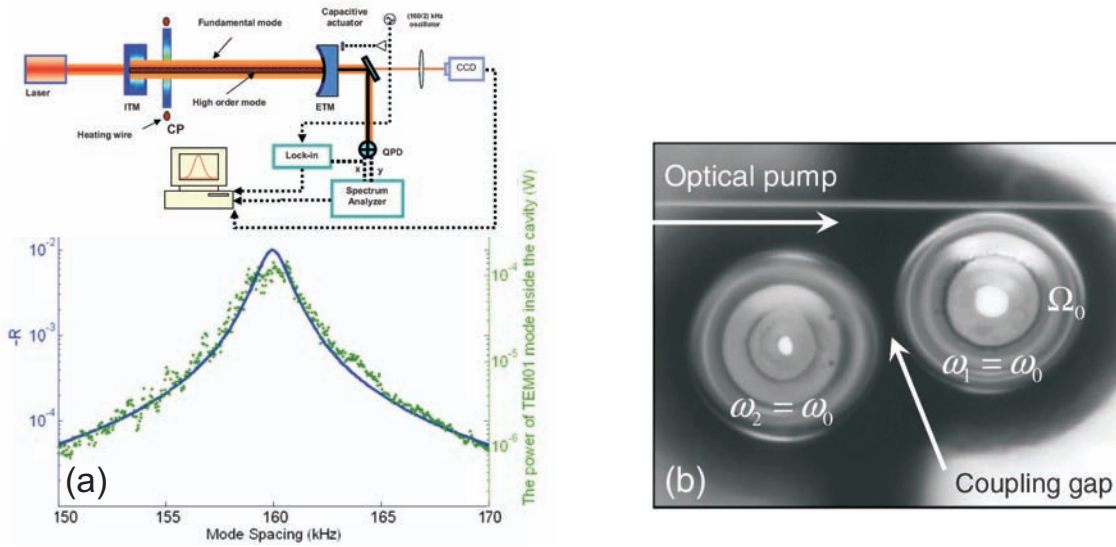


FIGURE 5.2 – (a) Figures issues de la référence [171]. Variation de l'intensité transmise du mode optique TEM₀₁ en fonction de l'écart $\Delta\nu$ entre les deux modes optiques, balayée autour de la fréquence de résonance mécanique, et schéma du dispositif expérimental utilisé. (b) Figure issue de la référence [70]. Vue du dessus de deux micro-tores dont le couplage et l'écart en fréquence peuvent être ajustés en changeant la distance qui les sépare.

couplage peut être ajusté en modifiant leur séparation, ce qui permet d'accorder leur écart de fréquences $\Delta\nu$ avec différentes résonances mécaniques ν_m successives (voir FIG. 5.2 (b)). Les auteurs présentent également une élégante analogie entre l'effet d'augmentation du nombre de phonons et l'émission laser.

Citons, pour conclure, la possibilité de réaliser un schéma d'intrication tripartite entre les trois modes résonnants dans le système [112], indispensable dans les protocoles de communication et cryptographie quantiques.

5.2 Refroidissement par couplage à trois modes

Dans cette partie nous analysons le couplage à trois modes et déterminons les équations d'évolution des champs et la dynamique du résonateur. Nous suivons tout d'abord une approche hamiltonienne [171, 113, 112] pour justifier la forme du terme d'interaction caractérisant le couplage, puis nous écrivons les équations semi-classiques du champ et du résonateur.

Le système que nous décrivons est une cavité à miroir mobile (le micro-résonateur) de longueur au repos L_0 (voir la FIG. 5.3). On s'intéresse à deux modes optiques particuliers de la cavité, le mode α de fréquence propre ω_0 , et le mode β de fréquence ω_1 (avec $\omega_1 - \omega_0 \simeq \pm\Omega_m$). En pratique, le premier mode est le mode fondamental de la cavité auquel le faisceau laser incident est couplé, et le second mode est un mode transverse initialement vide. Le déplacement du résonateur est représenté par sa déformation $x(t, r_\perp)$ en tout point r_\perp de sa surface. On supposera dans toute la suite la cavité sans perte ($P = 0$).

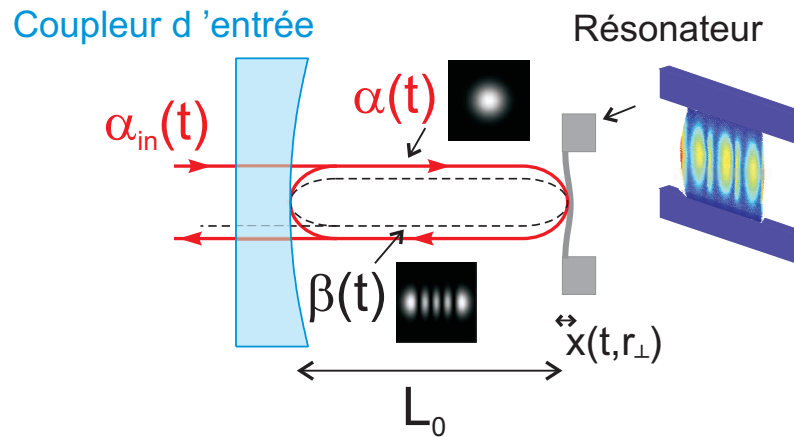


FIGURE 5.3 – Schéma d'une cavité Fabry-Perot à miroir mobile, de longueur au repos L_0 , avec deux modes $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ qui peuvent être simultanément résonnants aux fréquences ω_0 et ω_1 . La déformation du résonateur est notée $x(t, r_\perp)$ en un point r_\perp de sa surface.

L'hamiltonien du système

L'hamiltonien total de ce système est la somme de trois termes, $H_{\text{tot}} = H_m + H_{\text{champ}} + H_{\text{ext}}$, où H_m et H_{champ} sont les hamiltoniens du résonateur et du champ et H_{ext} décrit le couplage avec des réservoirs externes, représentant le champ incident, les fluctuations du vide et le bruit thermique. Nous allons expliciter les hamiltoniens H_m et H_{champ} , ce qui nous permettra de déterminer l'expression du terme de couplage à trois modes à introduire dans les équations semi-classiques. L'hamiltonien H_{ext} est déjà présent dans ces équations sous la forme des champs semi-classiques entrants et de la force de Langevin thermique

F_T . Nous ne chercherons pas à décrire plus en détail ce terme, que l'on peut trouver par ailleurs dans la littérature [112].

Le terme H_m décrit l'évolution libre du micro-résonateur ; en limitant notre analyse à un seul mode mécanique, il s'écrit :

$$H_m = \frac{P^2}{2M} + \frac{M\Omega_m^2}{2} X^2 \quad (5.1)$$

où X et P sont les opérateurs position et impulsion du résonateur (voir la section 1.1.1), et M la masse du mode mécanique de fréquence de résonance Ω_m .

Le terme H_{champ} représente l'énergie du champ électromagnétique dans la cavité. Comme l'un des miroirs est mobile, il ne représente pas seulement l'énergie libre du champ, mais aussi le terme d'interaction. L'hamiltonien du champ peut en effet s'écrire comme l'intégrale de la densité du champ sur le volume total de la cavité [38, 96] :

$$H_{\text{champ}} = \frac{1}{2} \int_V dr_{\perp} dz \left(\epsilon_0 |E(r_{\perp}, z, t)|^2 + \frac{|B(r_{\perp}, z, t)|^2}{\mu_0} \right) \quad (5.2)$$

$$= \int_V dr_{\perp} dz \epsilon_0 |E(r_{\perp}, z, t)|^2 \quad (5.3)$$

où ϵ_0 et μ_0 sont les constantes de permittivité diélectrique et de perméabilité magnétique du vide, z représente la coordonnée selon l'axe de propagation dans la cavité, et r_{\perp} les coordonnées dans le plan perpendiculaire. L'intégrale sur tout le volume peut être décomposée en une partie fixe, correspondant au volume de la cavité associé à la longueur au repos L_0 , et une partie liée au déplacement du résonateur. L'hamiltonien est donc la somme de deux termes $H_{\text{champ}} = H_0 + H_{\text{int}}$ qui, à l'ordre 1 dans le déplacement $x(t, r_{\perp})$ du résonateur, s'écrivent :

$$H_0 = \int dr_{\perp} \int_0^{L_0} dz \epsilon_0 |E(r_{\perp}, z, t)|^2 \quad (5.4)$$

$$H_{\text{int}} = \int dr_{\perp} x(t, r_{\perp}) \epsilon_0 |E(r_{\perp}, 0, t)|^2 \quad (5.5)$$

Le premier terme H_0 représente la partie de l'hamiltonien relatif au champ libre, alors que le terme H_{int} correspond à l'interaction du champ avec le micro-résonateur.

Nous pouvons décomposer l'opérateur champ électrique $E(r_{\perp}, z, t)$ sur l'ensemble des modes du champ dans la cavité. En se limitant aux deux seuls modes optiques α et β , caractérisés respectivement par les profils spatiaux $v_0(r_{\perp}, z)$ et $v_1(r_{\perp}, z)$, et par les fréquences ω_0 et ω_1 , on obtient [101] :

$$E(r_{\perp}, z, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 L_0}} a(t) v_0(r_{\perp}, z) e^{-i\omega_0 t} + \sqrt{\frac{\hbar\omega_1}{2\epsilon_0 L_0}} b(t) v_1(r_{\perp}, z) e^{-i\omega_1 t} \quad (5.6)$$

Les opérateurs $a(t)$ et $b(t)$ sont les opérateurs d'annihilation dans les deux modes considérés et vérifient les relations de commutation $[a(t), a^\dagger(t')] = [b(t), b^\dagger(t')] = \delta(t-t')$. Les facteurs de normalisation dans cette équation sont une conséquence de la quantification du champ à l'intérieur du volume de la cavité, les intégrales dans le plan perpendiculaire des profils spatiaux v_i étant normalisées à 1 (voir l'équation (2.16)). L'hamiltonien du champ libre a alors la forme habituelle :

$$H_0 = \hbar\omega_0 \left(a^\dagger(t)a(t) + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_1 \left(b^\dagger(t)b(t) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.7)$$

De même, en ne considérant qu'un mode mécanique du résonateur caractérisé par le profil spatial $u(r_\perp)$, une décomposition modale similaire à l'équation (2.6) se résume à :

$$x(t, r_\perp) = X(t) u(r_\perp) \quad (5.8)$$

où $X(t)$ représente l'amplitude du mode. Remarquons qu'à la différence des opérateurs a et b dans lesquels la dépendance temporelle rapide aux fréquences optiques ω_0 et ω_1 a été retirée, l'opérateur $X(t)$ contient à la fois l'évolution sinusoïdale à la fréquence mécanique Ω_m et une enveloppe lentement variable.

L'hamiltonien d'interaction est obtenu en combinant les équations (5.5), (5.6) et (5.8). En négligeant tous les termes non résonnants, on ne garde en fait que les termes croisés faisant intervenir les deux champs optiques a et b , et le déplacement X du résonateur, évoluant à la fréquence $\pm(\omega_1 - \omega_0) \pm \Omega_m$. On obtient ainsi :

$$H_{\text{int}} = \hbar G_0 X(t) \left[a^\dagger(t) b(t) e^{i(\omega_0 - \omega_1)t} + a(t) b^\dagger(t) e^{i(\omega_1 - \omega_0)t} \right] \quad (5.9)$$

où nous avons défini la constante G_0 du couplage :

$$G_0 = \frac{\sqrt{\omega_0 \omega_1 \Lambda}}{L_0} \quad (5.10)$$

qui dépend d'une intégrale de recouvrement spatial entre les trois modes :

$$\Lambda = \left(\int dr_\perp u(r_\perp) v_0(r_\perp, 0) v_1(r_\perp, 0) \right)^2 \quad (5.11)$$

En utilisant la notation intégrale définie dans le chapitre 2 par l'équation (2.9), cette intégrale de recouvrement s'écrit simplement $\Lambda = \langle u, v_0 v_1 \rangle^2$. On pourra noter que l'hamiltonien d'interaction trouvé ici est similaire à celui du couplage optomécanique entre un résonateur et un seul mode du champ, avec toutefois quelques différences par rapport à la dérivation que nous avons faite dans le chapitre 2. En plus de la présence de deux modes optiques, le déplacement $X(t)$ du résonateur représente ici l'amplitude du mode mécanique (notée $a_n(t)$ dans le chapitre 2, voir la décomposition modale donnée par l'équation

(2.6)) et non un déplacement effectif prenant en compte le recouvrement avec la lumière (voir équation (2.22)). Ceci explique pourquoi l'hamiltonien d'interaction dépend explicitement de l'intégrale de recouvrement $\langle u, v_0 v_1 \rangle$, alors que l'intégrale de recouvrement $\langle u, v_0^2 \rangle$ dans le cas du couplage avec un seul mode optique était intégrée dans la définition du déplacement effectif et de la masse effective (équation (2.27)).

Evolution du système et dynamique du résonateur

A partir de l'expression des hamiltoniens que nous venons de donner, nous pouvons écrire les équations de Langevin pour les opérateurs $a(t)$, $b(t)$, $X(t)$, et les résoudre en linéarisant les opérateurs autour de leur valeur moyenne. Cela revient à écrire les équations semi-classiques comme dans le deuxième chapitre, mais en tenant compte de la nouvelle expression (5.9) de l'hamiltonien d'interaction. Du fait de la différence entre la quantification dans une boîte et la méthode semi-classique qui fait appel à des champs qui se propagent (en particulier, $N = \langle a^\dagger a \rangle$ est le nombre de photons dans la cavité alors que $I = |\alpha|^2$ représente le flux de photon, en photons par seconde), le passage des opérateurs aux variables semi-classiques est basé sur la correspondance : $a \rightarrow \sqrt{\tau} \alpha$, $b \rightarrow \sqrt{\tau} \beta$, et $X \rightarrow x$.

On décompose le champ α sous la forme $\alpha(t) = \bar{\alpha} + \delta\alpha(t)$ où la variable aléatoire $\delta\alpha$ vérifie $\delta\alpha(t) \ll \bar{\alpha}$ et on considère que l'on injecte dans la cavité un champ incident $\bar{\alpha}_{\text{in}}$ non nul et à résonance. Comme aucun champ n'entre dans le mode β ($\bar{\beta}_{\text{in}} = 0$), le champ moyen $\bar{\beta}$ est nul et on a directement $\beta(t) = \delta\beta(t)$. En réintégrant le déplacement moyen \bar{x} dans la longueur au repos L_0 de la cavité, on peut également considérer que le déplacement est uniquement caractérisé par les fluctuations $\delta x(t)$, avec $\bar{x} = 0$.

En utilisant l'équation d'évolution en représentation de Heisenberg ($i\hbar \dot{a} = [a, H]$ pour tout opérateur a), on constate que l'hamiltonien d'interaction H_{int} ne couple pas le champ α aux autres variables du système à l'ordre 1, puisque les valeurs moyennes $\bar{\beta}$ et \bar{x} sont nulles. Le champ α vérifie donc les équations habituelles d'une cavité Fabry-Perot, et à résonance tous les champs moyens peuvent être considérés comme réels avec la relation (équation (2.38)) :

$$\bar{\alpha} = \sqrt{\frac{2\mathcal{F}_0}{\pi}} \bar{\alpha}_{\text{in}} \quad (5.12)$$

où $\mathcal{F}_0 = \pi/\gamma_0$ est la finesse de la cavité pour le mode fondamental.

Pour les variables dynamiques $\delta\beta$ et δx du système, on obtient les équations d'évolution semi-classiques suivantes :

$$\chi[\Omega]^{-1} \delta x[\Omega] = -\hbar G_0 \tau \bar{\alpha} \left(\delta\beta[\Omega - \Delta\omega] + \delta\beta^\dagger[\Omega + \Delta\omega] \right) + F_T \quad (5.13)$$

$$(\gamma_1 + i\Delta\omega \tau - i\Omega\tau) \delta\beta[\Omega - \Delta\omega] = \sqrt{2\gamma_1} \delta\beta_{\text{in}}[\Omega - \Delta\omega] - i G_0 \tau \bar{\alpha} \delta x[\Omega] \quad (5.14)$$

Dans ces expressions, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ est l'écart de fréquence entre les deux modes optiques,

égal à Ω_m si le mode transverse est parfaitement à résonance avec la bande anti-Stokes, et à $-\Omega_m$ s'il est accordé avec la bande Stokes; χ est la susceptibilité du mode mécanique, donnée par l'équation (2.14), qui dépend de la fréquence de résonance Ω_m , de l'amortissement mécanique Γ , et de la masse du mode M (équation (2.8)); F_T est la force de Langevin associée au mode mécanique; enfin, γ_1 est l'amortissement de la cavité pour le mode transverse β , associé à la finesse $\mathcal{F}_1 = \pi/\gamma_1$.

Nous pouvons remarquer que l'équation (5.14) pour les fluctuations du mode transverse $\delta\beta$ est formellement identique à l'équation (2.80) obtenue dans le cas d'un seul mode optique et pour une cavité désaccordée : l'écart en fréquence $\Delta\omega$ remplace le désaccord, selon la relation $\Psi \equiv -\Delta\omega\tau$. Ainsi, placer le mode transverse à résonance avec la bande anti-Stokes ($\Delta\omega = +\Omega_m$) est équivalent à désaccorder un seul mode optique de $\Psi = -\Omega_m\tau$, c'est-à-dire à se placer dans les conditions du refroidissement dans le régime des bandes latérales résolues (schéma (b) de la FIG. 5.1). En comparant les équations (5.14) et (2.80), on constate également que le coefficient caractérisant le couplage au mouvement du résonateur est $-G_0\tau\bar{\alpha}$ au lieu de $2k\bar{\alpha}$. Or, $\Delta\omega$ étant de l'ordre de Ω_m , on peut légitimement supposer $|\Delta\omega| \ll \omega_0$, et on déduit de l'équation (5.10) une expression approchée du coefficient G_0 :

$$G_0 \simeq \frac{\sqrt{\omega_0^2\Lambda}}{L_0} = \frac{2k}{\tau} \sqrt{\Lambda} \quad (5.15)$$

$G_0\tau$ est donc bien équivalent à $2k$, à l'intégrale de recouvrement Λ près, dont la présence est liée à la différence de définition du déplacement x du résonateur, comme nous l'avons déjà noté.

La relation (5.13), combinée à l'équation (5.14), permet d'exprimer la force de pression de radiation (premier terme dans l'expression à droite de l'égalité) sous une forme équivalente aux expressions (2.82) et (2.83) :

$$\delta F_{\text{rad}}[\Omega] = -\hbar G_0\tau\bar{\alpha} \left(\delta\beta[\Omega - \Delta\omega] + \delta\beta^\dagger[\Omega + \Delta\omega] \right) = \delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] + \delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] \quad (5.16)$$

avec

$$\delta F_{\text{rad}}^{(x)}[\Omega] = 2\hbar G_0^2\tau^2\bar{\alpha}^2 \frac{\Delta\omega\tau}{\Delta'} \delta x[\Omega] \quad (5.17)$$

$$\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] = -\hbar G_0\tau\bar{\alpha} \sqrt{2\gamma_1} \left(\frac{\delta\beta_{\text{in}}[\Omega - \Delta\omega]}{\gamma_1 - i\Omega\tau + i\Delta\omega\tau} + \frac{\delta\beta_{\text{in}}^\dagger[\Omega + \Delta\omega]}{\gamma_1 - i\Omega\tau - i\Delta\omega\tau} \right) \quad (5.18)$$

où le dénominateur Δ' est défini de façon similaire à Δ dans l'équation (2.84), par $\Delta' = (\gamma_1 - i\Omega\tau)^2 + \Delta\omega^2\tau^2$.

La force de pression de radiation est donc la somme de deux composantes : $\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$ est liée aux fluctuations quantiques du champ vide β_{in} couplé au mode transverse de la cavité, tandis que $\delta F_{\text{rad}}^{(x)}$ est proportionnelle au déplacement x du résonateur. Cette dernière force

est exactement la même que celle trouvée dans le cas d'un couplage à un seul mode optique (équation (2.83)), à condition de remplacer Ψ par $-\Delta\omega\tau$, et $2k$ par $G_0\tau$. Elle a donc le même effet : elle modifie la dynamique du résonateur, selon les équations (2.88) et (2.89), la susceptibilité effective étant donnée par :

$$\chi_{\text{eff}}^{-1}[\Omega] = \chi^{-1}[\Omega] - 2\hbar G_0^2 \tau^2 \bar{I}_0 \frac{\Delta\omega\tau}{\Delta'} \quad (5.19)$$

où $\bar{I}_0 = \bar{\alpha}^2$ est l'intensité intracavité moyenne dans le mode fondamental.

Nous pouvons alors séparer les parties imaginaire et réelle et calculer une expression pour l'amortissement effectif Γ_{eff} et pour la fréquence de résonance effective Ω_{eff} . Comme dans la section 2.5, on définit les hauteurs du pic d'Airy du mode transverse par :

$$\mathcal{A}'_{\pm} = \mathcal{A}(-\Delta\omega\tau \pm \Omega_m\tau) = \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + (\Omega_m \mp \Delta\omega)^2} \quad (5.20)$$

où $\Omega_1 = \gamma_1/\tau$ est la bande passante de la cavité pour le mode transverse. On définit également un paramètre de couplage optomécanique à 3 modes par :

$$\zeta' = \frac{64\pi\hbar\mathcal{F}_1}{\lambda^2 M \Gamma \Omega_m} \bar{I}_0 \Lambda \quad (5.21)$$

où $\mathcal{F}_1 = \pi/\gamma_1$ est la finesse de la cavité pour le mode transverse. Cette expression est formellement identique à l'équation (2.76) définissant le paramètre optomécanique ζ , avec en plus la présence de l'intégrale de recouvrement Λ .

Il existe toutefois une différence majeure entre les deux expressions, qui fait tout l'intérêt du couplage à 3 modes : ici le mode fondamental est à résonance, ce qui permet de profiter pleinement de l'amplification par la finesse de la cavité, et d'avoir une intensité intracavité $\bar{I}_0 = (2\mathcal{F}_0/\pi)\bar{I}_0^{\text{in}}$ très importante même pour une intensité incidente \bar{I}_0^{in} modeste.

L'amortissement effectif Γ_{eff} peut s'exprimer en fonction d'un coefficient \mathcal{R} définissant le gain paramétrique du couplage à trois modes [112, 172], donné par :

$$\Gamma_{\text{eff}} = (1 - \mathcal{R})\Gamma \quad (5.22)$$

$$\text{avec } \mathcal{R} = -\frac{\zeta'}{4} (\mathcal{A}'_+ - \mathcal{A}'_-) \quad (5.23)$$

L'effet d'amplification paramétrique, ou de déamplification paramétrique, dépend clairement de l'écart en fréquence $\Delta\omega$ entre les deux modes optiques, et plus précisément de la façon dont le mode transverse est accordé avec les bandes latérales Stokes ou anti-Stokes, situées à $\pm\Omega_m$ du mode fondamental. Une fois l'une des résonances $\Delta\omega \simeq \pm\Omega_m$ atteinte, l'amplitude du gain dépend alors du paramètre de couplage ζ' , proportionnel à l'intensité

intracavité \bar{I}_0 qui peut atteindre des valeurs importantes car le mode fondamental est à résonance.

Dans le régime des bandes latérales résolues ($\Omega_m \gg \Omega_1$), une seule bande à $\omega_0 \pm \Omega_m$ peut être résonnante à la fois avec le mode transverse ω_1 . Ainsi, si le mode transverse est accordé avec la bande anti-Stokes ($\Delta\omega \simeq \Omega_m$), on a $\mathcal{A}'_+ \simeq 1$, $\mathcal{A}'_- \simeq 0$, et $\mathcal{R} \simeq -\zeta'/4 < 0$. Ceci conduit à une augmentation de l'amortissement effectif, et au refroidissement du résonateur. Dans le cas contraire, pour un mode transverse accordé avec la bande Stokes ($\Delta\omega \simeq -\Omega_m$), le gain paramétrique $\mathcal{R} \simeq \zeta'/4$ admet des valeurs positives et peut même conduire à une instabilité paramétrique du système pour $\mathcal{R} > 1$, puisque l'amortissement du résonateur s'annule.

La condition de résonance $\Delta\omega = \pm\Omega_m$ du processus à 3 modes admet une plage de validité en fréquence, sur laquelle le gain paramétrique atteint des valeurs appréciables, comme cela est représenté sur la FIG. 5.4. A partir des équations (5.20) et (5.23), le gain paramétrique a en effet une dépendance de forme lorentzienne, centrée à $\pm\Omega_m$ et de demi-largeur égale à la bande passante Ω_1 de la cavité pour le mode transverse :

$$\mathcal{R} = \frac{\zeta'}{4} \left(\frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + (\Delta\omega + \Omega_m)^2} - \frac{\Omega_1^2}{\Omega_1^2 + (\Delta\omega - \Omega_m)^2} \right) \quad (5.24)$$

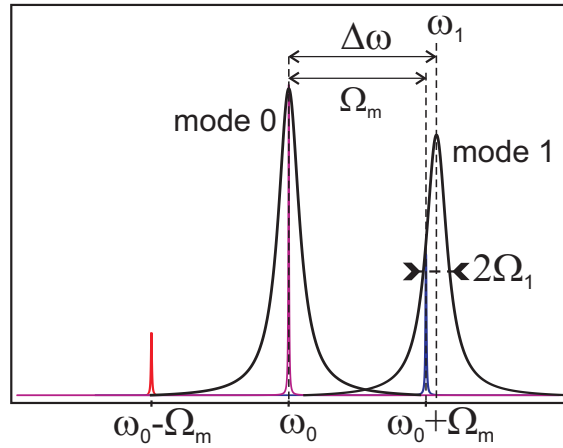


FIGURE 5.4 – Condition de résonance pour le processus à trois modes, dans la situation correspondant au refroidissement. L'efficacité est maximale lorsque le mode transverse coïncide avec la bande anti-Stokes, sur une plage égale à la bande passante Ω_1 du mode transverse.

A partir de l'équation (5.19), on peut aussi calculer le décalage de la fréquence de résonance induit par effet de ressort optique à 3 modes :

$$\Omega_{\text{eff}} = \Omega_m - \Gamma \frac{\zeta'}{8} \left(\frac{\dot{\mathcal{A}}'_+}{\mathcal{A}'_+} + \frac{\dot{\mathcal{A}}'_-}{\mathcal{A}'_-} \right) \quad (5.25)$$

qui est tout à fait similaire à l'expression (2.94) trouvée dans le chapitre 2. De même, on peut déterminer à partir de l'équation (5.18) le spectre des fluctuations quantiques de la force de pression de radiation $\delta F_{\text{rad}}^{(\text{in})}$, reliées aux fluctuations du vide du champ entrant dans le mode transverse. On obtient une expression identique à l'équation (2.96) :

$$\mathcal{S}_{\text{rad}}^{(\text{in})}[\Omega] = M\Gamma \hbar\Omega_m \frac{\zeta'}{4} (\mathcal{A}'_+ + \mathcal{A}'_-) \quad (5.26)$$

qui montre que le résonateur est à l'équilibre thermodynamique à une température effective différente de la température ambiante. De manière analogue au chapitre 4 (équations (4.1) à (4.3)), on trouve alors que le nombre de phonons thermiques effectif caractérisant cet équilibre est donné par :

$$n_{\text{T}}^{\text{eff}} = \frac{n_{\text{T}}}{1 - \mathcal{R}} + n_{\text{Q}} \quad (5.27)$$

où $n_{\text{Q}} = \frac{\zeta'}{4} \mathcal{A}'_- / (1 - \mathcal{R})$ est le nombre de phonons associés au bruit quantique de pression de radiation.

On atteint l'état fondamental du résonateur dans le cas d'un accord $\Delta\omega = \Omega_m$ sur la bande anti-Stokes, et pour un gain paramétrique \mathcal{R} négatif et de valeur absolue grande devant le nombre initial n_{T} de phonons thermiques. Dans le régime des bandes latérales résolues, le nombre de phonons résiduels est alors $n_{\text{Q}} \simeq \mathcal{A}'_- / \mathcal{A}'_+ \simeq \Omega_1^2 / 4\Omega_m^2$, comme dans le cas à un seul mode optique (équation (4.3)).

Avantages et inconvénients du couplage à 3 modes

A côté des similitudes formelles, il y a des différences importantes entre le processus à deux modes et celui à trois modes. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà noté, dans le couplage à trois modes le mode fondamental de la cavité reste toujours à résonance avec le laser incident et cela présente plusieurs avantages. L'intensité intracavité moyenne \bar{I}_0 est notamment directement amplifiée par la finesse de la cavité, ce qui implique une force de pression de radiation plus intense (équations (5.16) à (5.18)) et une plus grande efficacité du couplage optomécanique (équation (5.21)). Pour atteindre une efficacité comparable en refroidissement à deux modes dans le régime des bandes latérales résolues, la puissance incidente doit être considérablement augmentée pour compenser le désaccord important du faisceau incident. Par ailleurs, la sensibilité du faisceau réfléchi aux petits déplacements du résonateur est maximale quand le laser est à résonance ; cela permet également de filtrer les bruits d'amplitude et phase du laser [172, 45].

Le schéma d'interaction à trois modes permet de sélectionner la résonance de la bande anti-Stokes (pour $\Delta\omega = \Omega_m$) ou de la bande Stokes (pour $\Delta\omega = -\Omega_m$), et ainsi d'optimiser le processus de refroidissement ou de chauffage d'un mode mécanique. Alors que cela est obtenu en désaccordant vers le rouge ou vers le bleu le laser incident dans le cas du couplage à deux modes, ici il est nécessaire de modifier la géométrie de la cavité pour déplacer la

résonance du mode transverse par rapport à celle du mode fondamental. Comme nous le montrons dans la prochaine section, cela peut être réalisé expérimentalement en changeant légèrement la longueur d'une cavité quasi semi-confocale.

Pour conclure, remarquons encore une fois que cette interaction implique un mode optique transverse dont le profil spatial est plus complexe que celui du mode fondamental, ce qui se traduit par une expression différente de l'intégrale de recouvrement spatial Λ avec le mode mécanique (équation (5.11)); sa valeur doit être la plus élevée possible (i.e. $\Lambda \simeq 1$) pour obtenir un gain paramétrique important, ce qui impose des limitations dans le choix des paramètres géométriques des modes optiques et mécanique.

Valeur attendue pour le gain paramétrique

Il est utile d'estimer l'ordre de grandeur du gain que l'on peut obtenir pour des paramètres correspondant à ceux de notre expérience. De façon à se rapprocher des conditions expérimentales, nous prenons maintenant en compte les pertes P de la cavité. Cela ne change pas fondamentalement les résultats obtenus dans cette section, puisque les équations semi-classiques des variables dynamiques $\delta\beta$ et δx sont identiques, à part le terme des fluctuations incidentes dans l'équation (5.14) qui devient $\sqrt{T}\delta\beta_{\text{in}} + \sqrt{P}\delta\beta_{\text{v}}$ où $\delta\beta_{\text{v}}$ représente les fluctuations du vide associées aux pertes. De ce fait, les expressions de la susceptibilité et de l'amortissement effectifs restent inchangées. Par contre, le champ intracavité $\bar{\alpha}$ est plus faible en présence de pertes, d'un facteur $\sqrt{T/(T+P)}$, puisque la relation (5.12) doit être remplacée par l'expression (2.38). Le gain paramétrique est donc toujours donné par les équations (5.23) et (5.21), où l'intensité intracavité \bar{I}_0 est égale à :

$$\bar{I}_0 = \frac{2}{\pi} \frac{T}{T+P} \mathcal{F}_0 \bar{I}_{\text{in}} \quad (5.28)$$

Le gain paramétrique s'exprime en fonction des paramètres expérimentalement accessibles sous la forme :

$$\mathcal{R} = \pm \frac{16}{\pi\lambda c} \frac{Q}{M\Omega_{\text{m}}^2} \frac{T}{T+P} \mathcal{F}_0 \mathcal{F}_1 P_{\text{in}} \Lambda \quad (5.29)$$

où le signe \pm indique que l'on s'est placé à résonance avec l'une des bandes latérales, de façon à maximiser la différence $\mathcal{A}'_+ - \mathcal{A}'_- \simeq \pm 1$.

Avec nos micro-résonateurs en silicium, on peut espérer atteindre une fréquence de résonance $\Omega_{\text{m}}/2\pi$ comprise entre 1 et 10 MHz, une masse du mode $M \simeq 100 \mu\text{g}$, et un facteur de qualité $Q \simeq 10\,000$. La finesse de la cavité dépend de la qualité des couches diélectriques et de la rugosité du substrat : nous atteignons typiquement des finesses \mathcal{F} comprises entre 10 000 et 30 000. Le calcul du recouvrement Λ (qui peut aller de 0 à 1) sera présenté de manière détaillée dans la suite du manuscrit, et ici nous le supposons égal à 0.5.

Pour une cavité sans perte de finesse $\mathcal{F}_0 \simeq \mathcal{F}_1 \simeq 30\,000$, une puissance incidente

$P_{\text{in}} = 10 \text{ mW}$ et une fréquence de résonance $\Omega_{\text{m}}/2\pi = 4 \text{ MHz}$, le gain paramétrique vaut ± 10 , ce qui permet en principe d'atteindre l'instabilité paramétrique pour un gain positif, et de refroidir le résonateur par un facteur 10 pour un gain négatif.

5.3 Une cavité accordable pour le couplage à trois modes

Dans cette dernière section, je présente les concepts essentiels pour la réalisation d'une expérience de couplage à trois modes, basée sur l'utilisation d'une cavité optique dont deux modes sont presque dégénérés. Après avoir rappelé les principes généraux sur une telle cavité, nous montrerons comment faire varier l'écart en fréquence entre les deux modes optiques. Nous montrerons également comment calculer et optimiser le recouvrement spatial Λ entre les modes optiques et mécanique.

5.3.1 Les cavités quasi-dégénérées

Dans cette partie, après avoir introduit la notion de dégénérescence transverse d'une cavité linéaire, nous passons en revue deux exemples de cavités dégénérées : les cavités confocale et semi-confocale. Ces définitions ne représentent pas des résultats nouveaux, mais sont utiles à la compréhension des choix expérimentaux effectués pour optimiser le couplage à trois modes, et en particulier, pour accorder la différence de fréquence entre deux modes optiques de la cavité et un mode mécanique du micro-résonateur.

La dégénérescence transverse d'une cavité

La base traditionnellement utilisée pour décrire le profil spatial d'un faisceau laser et représenter les modes propres d'une cavité optique linéaire dans l'approximation paraxiale est la base des modes d'Hermite-Gauss [166]. Un mode TEM_{mn} est défini par deux indices transverses m et n , auxquels est associée la forme du champ électrique $\mathcal{E}_{mn}(r_{\perp}, z)$ en tout point de coordonnées z le long de l'axe de la cavité et $r_{\perp} = (x, y)$ dans le plan perpendiculaire :

$$\mathcal{E}_{mn}(r_{\perp}, z) = \mathcal{E}_0 \frac{w_0}{w} H_m\left(\sqrt{2}\frac{x}{w}\right) H_n\left(\sqrt{2}\frac{y}{w}\right) \exp\left(-ikz - ik\frac{r_{\perp}^2}{2q} + i\Psi\right) \quad (5.30)$$

où H_m (resp. H_n) représente le polynôme d'Hermite¹ d'ordre m (resp. n). Les paramètres w , q et Ψ dépendent de la position z le long de l'axe de propagation et représentent respectivement la largeur transverse du faisceau, le rayon de courbure complexe et la phase de Gouy. Ils s'écrivent de la façon suivante :

$$w = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad (5.31)$$

$$q = z + iz_R \quad (5.32)$$

$$\Psi = (m + n + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (5.33)$$

1. Les polynômes d'Hermite sont définis selon la relation : $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} (\exp(-x^2))$.

où $z_R = \pi w_0^2/\lambda$ est la distance de Rayleigh et $w_0 = w(z = 0)$ est la largeur transverse minimale du faisceau (ou *waist*), atteinte au niveau de son col supposé ici placé dans le plan $z = 0$. Le rayon de courbure R du faisceau à la position z est relié au rayon de courbure complexe q par la relation $R^{-1} = q^{-1} + i\lambda/(\pi w^2)$ et vaut $R = z + z_R^2/z$. On peut trouver une étude complète des modes gaussiens dans plusieurs manuels, par exemple dans les références [140, 145].

Les modes d'une cavité optique linéaire doivent satisfaire des conditions d'interférences constructives entre les multiples faisceaux réfléchis. La cavité sélectionne ainsi les modes transverses dont le rayon de courbure complexe est invariant par propagation sur un tour dans la cavité, et dont la phase accumulée sur un tour est un multiple entier de 2π . Pour un mode gaussien TEM_{mn} de vecteur d'onde k_{pmn} , cette phase vaut :

$$\Delta\Psi = 2k_{pmn}L - (m + n + 1)\Psi_0 = 2p\pi \quad (5.34)$$

où $L = z_2 - z_1$ est la longueur de la cavité, z_1 et z_2 ($> z_1$) étant les positions des miroirs de la cavité par rapport au col du faisceau situé en $z = 0$, et p est un entier naturel représentant en fait l'ordre longitudinal du mode. Le premier terme dans cette équation représente la phase totale accumulée par une onde plane sur un aller-retour, tandis que Ψ_0 est la phase de Gouy accumulée par le mode TEM_{00} :

$$\Psi_0 = 2 \left[\arctan\left(\frac{z_2}{z_R}\right) - \arctan\left(\frac{z_1}{z_R}\right) \right]. \quad (5.35)$$

Une fois déterminée la base des modes transverses TEM_{mn} adaptée spatialement à la cavité, la condition (5.34) effectue une sélection de la fréquence $\nu_{pmn} = k_{pmn}c/2\pi$ du mode résonnant dans la cavité pour un indice longitudinal p fixé, sélection qui dépend de la phase de Gouy :

$$\nu_{pmn} = \nu_0 \left(p + (m + n + 1) \frac{\Psi_0}{2\pi} \right) \quad (5.36)$$

où $\nu_0 = c/2L$ est l'intervalle spectral libre de la cavité. En balayant la fréquence du laser, on peut observer les résonances successives des différents modes propres de la cavité. La figure 5.5(a) illustre cette situation, dans le cas d'une adaptation spatiale imparfaite du faisceau incident avec le mode fondamental TEM_{00} de la cavité, ce qui permet d'observer les différents modes transverses TEM_{mn} pour un même ordre fondamental p . D'après l'expression (5.36), l'intervalle entre modes transverses est $\nu_0\Psi_0/2\pi$.

Une cavité est dite dégénérée quand plusieurs modes transverses ont la même fréquence de résonance ν_{pmn} . Comme les modes TEM_{mn} avec la même valeur de $m+n$ sont dégénérés en fréquence pour une cavité linéaire à symétrie cylindrique, nous ne considérerons par la suite que les dégénérescences entre deux modes d'ordres $m+n$ différents. D'après l'équation (5.36), cette condition est vérifiée si la phase de Gouy accumulée par le mode TEM_{00} est

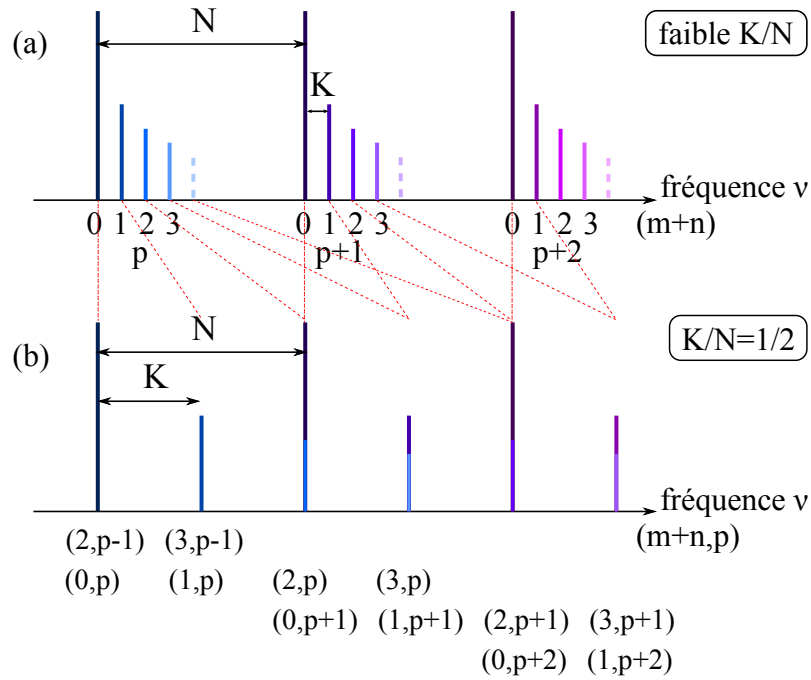


FIGURE 5.5 – Lorsqu'on balaye la fréquence du laser, l'intensité transmise par la cavité présente des pics correspondants à la projection du faisceau incident sur les modes propres TEM_{mn} (courbe a). Une cavité dégénérée (courbe b) est telle que le rapport K/N entre l'intervalle entre modes transverses et l'intervalle spectral libre est rationnel.

le produit de 2π avec une fraction rationnelle, soit :

$$\Psi_0 = 2\pi \frac{K}{N}, \quad (5.37)$$

où K et N sont entiers. Le rapport irréductible K/N est l'ordre de dégénérescence de la cavité et possède des valeurs comprises entre 0 et 1. Sur la figure 5.5(b) est représenté le cas où $K/N = 1/2$; on remarque alors la coïncidence entre modes de séries longitudinales différentes, le mode TEM_{02} de la série longitudinale $p - 1$ coïncidant avec le mode fondamental de la série p .

Les cavités confocale et semi-confocale

Nous analysons dans cette partie deux types de cavité dégénérée, en renvoyant pour une étude complète aux références [8, 59]. On peut étudier la dégénérescence d'une cavité en calculant la matrice de Gauss correspondant à un aller-retour du faisceau dans la cavité; en effet, on peut montrer qu'un champ transverse dans une cavité dégénérée se reproduit égal à lui même après N tours dans la cavité, c'est-à-dire que sa matrice de Gauss M doit vérifier :

$$M^N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

On peut également montrer que la phase de Gouy s'écrit :

$$\Psi_0 = \arccos\left(\frac{A+D}{2}\right). \quad (5.39)$$

Une *cavité confocale* est formée par deux miroirs de rayon de courbure R , séparés d'une distance $L = R$ (voir la figure 5.6). On peut calculer sa matrice de propagation, qui vaut :

$$M_{\text{conf}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

et sa phase de Gouy, qui selon la relation (5.39) vaut $\Psi_0 = \pi$, ce qui permet de déduire l'ordre de dégénérescence $K/N = 1/2$. On vérifie aussi facilement que $(M_{\text{conf}})^2 = 1$. Dans cette configuration, un mode transverse sur deux est résonnant avec un mode fondamental, comme le montre le spectre des modes transverses représenté sur la figure 5.5(b). La cavité confocale est en fait la plus dégénérée possible parmi les cavités à deux miroirs.

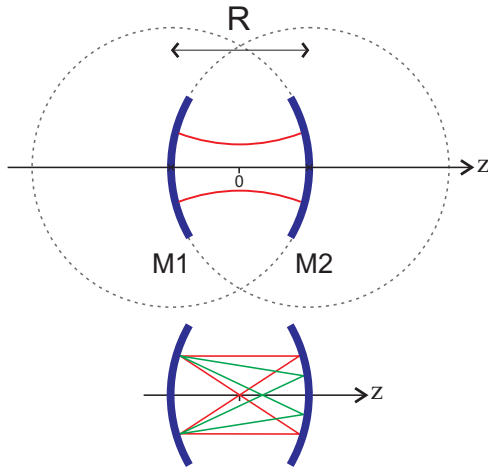


FIGURE 5.6 – Schéma d'une cavité confocale (haut) et deux trajectoires possibles pour un rayon (bas) : il revient sur lui-même après deux tours.

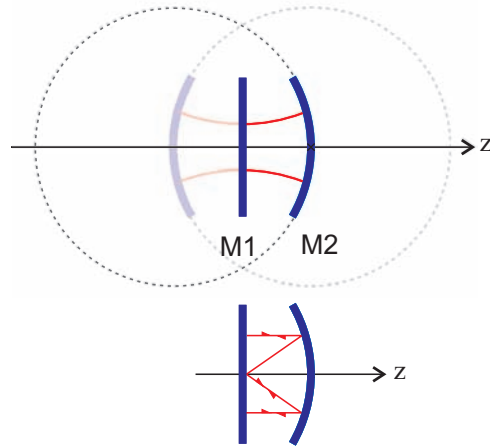


FIGURE 5.7 – La cavité semi-confocale peut être obtenue en plaçant un miroir dans le plan de symétrie de la cavité confocale.

La *cavité semi-confocale* est formée par un miroir de rayon de courbure R et un miroir plan placé à une distance $L = R/2$. Elle peut être vue comme une cavité confocale dans laquelle on aurait placé un miroir plan au niveau du plan de symétrie (voir la figure 5.7). Cela ne modifie pas le trajet des rayons, ni la base des modes propres par rapport à la cavité confocale. Sa matrice de propagation est :

$$M_{\text{semi}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{R}{2} \\ -\frac{2}{R} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.41)$$

Deux aller-retours dans la cavité semi-confocale correspondent à la propagation dans la cavité confocale et on trouve que $(M_{\text{semi}})^2 = M_{\text{conf}}$; par conséquent, $(M_{\text{semi}})^4 = 1$ et un mode sur quatre est résonnant avec un mode fondamental. Ainsi, en notant les modes propres de la cavité par les deux indices $(p, s = m + n)$, cela signifie que le mode $(p, 0)$ correspondant au mode fondamental de la série longitudinale p coïncide avec tous les modes $(p - k, 4k)$ des séries longitudinales précédentes (pour $k = 1, 2, \dots$).

En suivant le même raisonnement, il est facile d'imaginer une cavité formée par les deux mêmes miroirs, séparés maintenant d'une distance $L = 3R/4$, que nous avons appelée *quasi* semi-confocale. On trouve qu'elle a un ordre de dégénérescence égal à $1/3$, donc un mode sur 3 coïncide avec un mode fondamental, à savoir les modes d'indice $(p - k, 3k)$.

Les cavités dégénérées, et particulièrement les cavités confocale et semi-confocale, représentent un outil important dans le domaine de l'imagerie quantique pour transmettre et amplifier sans bruit des images (c'est-à-dire une superposition arbitraire de plusieurs modes transverses) ainsi que pour générer et manipuler des états non-classiques multimodes de la lumière. L'équipe de Claude Fabre au Laboratoire Kastler Brossel a ainsi développé des oscillateurs paramétriques optiques dégénérés, en plaçant des cristaux non linéaires dans des cavités confocale ou semi-confocale [59, 61, 99, 100], qui ont permis de réaliser une amplification ou une déamplification sans bruit d'une image injectée dans la cavité. Cette équipe a également étudié une cavité totalement dégénérée, dite auto-imageante [30], qui permet la génération d'états non-classiques multimodes, pour lesquels plusieurs modes transverses au sein d'un même faisceau ont un bruit réduit en dessous du bruit quantique standard [29, 31].

Ajuster l'écart entre modes quasi-dégénérés

Le résonateur se comportant comme un miroir plan, nous nous sommes plus particulièrement intéressés aux cavités constituées d'un miroir plan et d'un miroir courbe de rayon de courbure R , comme la cavité semi-confocale. Nous venons de voir avec l'exemple de la cavité *quasi* semi-confocale qu'il est possible d'obtenir différentes configurations de dégénérescence en jouant sur la longueur L de la cavité, et ainsi de choisir quel mode transverse est dégénéré avec le mode fondamental.

En pratique, nous nous intéressons essentiellement dans la suite à la dégénérescence entre un mode fondamental $(p, 0)$ et un mode transverse $(p - 1, s)$ de la série longitudinale précédente, avec $s = 3$ ou 4 . Par ailleurs, l'utilisation d'une telle cavité pour étudier le couplage optomécanique à trois modes nécessite de pouvoir ajuster la différence de fréquence entre les deux modes optiques sur une plage de l'ordre de $\pm\Omega_m/2\pi$ autour de la dégénérescence parfaite.

D'après l'équation (5.36), l'écart en fréquence entre les deux modes s'écrit sous la

forme :

$$\Delta\nu = \nu_{(p-1,s)} - \nu_{(p,0)} = \nu_0 \left(s \frac{\Psi_0}{2\pi} - 1 \right). \quad (5.42)$$

où la phase de Gouy Ψ_0 prend une expression simple dans le cas d'une cavité constituée d'un miroir plan et d'un miroir courbe [91] :

$$\Psi_0 = 2 \arccos \left(\sqrt{1 - L/R} \right). \quad (5.43)$$

Nous pouvons alors tracer la différence de fréquence entre les deux modes optiques, en fonction de L . Les courbes (a) et (d) de la figure 5.8 représentent la dégénérescence des modes $(p, 0)$ et $(p-1, 4)$ pour la courbe (a), et des modes $(p, 0)$ et $(p-1, 3)$ pour la courbe (d). L'écart de fréquence entre les premiers modes s'annule dans la situation confocale $L = R/2$ (trait vertical bleu), tandis que les seconds sont dégénérés lorsque la cavité est quasi semi-confocale, pour une longueur $L = 3R/4$ (trait vertical vert). Les courbes sont tracées pour $R = 50$ mm, sur une plage de longueur de la cavité allant de 10 à 50 mm, longueur au-delà de laquelle la cavité devient instable.

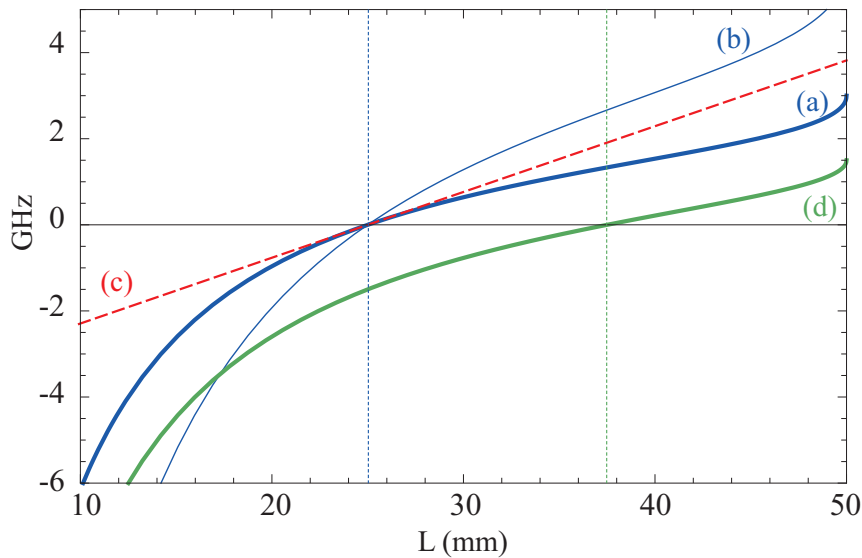


FIGURE 5.8 – Variations attendues de l'écart de fréquence $\Delta\nu$ entre deux modes optiques, pour une cavité plan-concave avec un rayon de courbure $R = 50$ mm, en fonction de la longueur L de la cavité. Courbe (a) : écart entre les modes $(p, 0)$ et $(p-1, 4)$, dont la pente au voisinage de la dégénérescence est de $153 \text{ kHz}/\mu\text{m}$ (courbe (c)). Courbe (b) : les modes $(p, 0)$ et $(p-2, 8)$ sont dégénérés pour la même longueur, mais leur écart varie plus rapidement. Courbe (d) : écart entre les modes $(p, 0)$ et $(p-1, 3)$, qui a une pente de $88 \text{ kHz}/\mu\text{m}$ à la dégénérescence correspondant à une cavité quasi semi-confocale.

On peut noter que la dégénérescence entre le mode fondamental $(p, 0)$ et le mode $(p-2, 8)$ se produit pour la même longueur de la cavité que celle avec le mode $(p-1, 4)$ (courbes (a) et (b)), mais la variation de $\Delta\nu$ autour de la longueur correspondant à la dégénérescence est plus rapide, ce qui peut présenter un inconvénient lorsqu'on cherche à

accorder finement la résonance du couplage à 3 modes. Par ailleurs, la largeur du faisceau augmentant avec l'ordre du mode transverse, utiliser un faisceau d'ordre transverse élevé peut conduire à des pertes par diffraction plus importantes sur le micro-miroir, et réduire la finesse de la cavité. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché à exploiter des dégénérescences avec des modes d'ordre transverse élevé.

La variation de $\Delta\nu$ autour de la dégénérescence des modes $(p, 0)$ et $(p - 1, 4)$ (courbe (c) de la figure 5.8) est pratiquement linéaire sur une plage d'une dizaine de millimètres environ, avec une pente de $153 \text{ kHz}/\mu\text{m}$. De même, la variation de l'écart des modes $(p, 0)$ et $(p - 1, 3)$ d'une cavité quasi semi-confocale autour de $L = 3R/4$ est linéaire avec une pente d'environ $85 \text{ kHz}/\mu\text{m}$ (courbe (d)).

Afin de mettre en évidence le couplage optomécanique à trois modes, nous pouvons donc tirer profit des propriétés de dégénérescence des cavités plan-concaves, en réalisant une cavité presque dégénérée pour deux modes optiques, et de longueur variable pour accorder leurs fréquences de façon à obtenir un écart $\Delta\nu = \pm\Omega_m/2\pi$. Si on considère un mode mécanique de fréquence propre de l'ordre de 5 MHz, la cavité doit pouvoir couvrir une plage de fréquence de 10 MHz pour que l'on puisse choisir de mettre à résonance les processus Stokes ou anti-Stokes, soit une variation de longueur d'une centaine de microns.

Afin de garder le couplage à 3 modes à résonance, nous devons par ailleurs ajuster $\Delta\nu$ avec une bonne précision, de l'ordre du dixième de la bande passante de la cavité. Pour une cavité de longueur $L = 25 \text{ mm}$ et de finesse $\mathcal{F} = 20\,000$, cette bande passante est de l'ordre de 150 kHz. Cela implique donc une résolution de 15 kHz sur $\Delta\nu$, correspondant à une précision d'une centaine de nanomètres sur la longueur de la cavité. Une telle résolution peut être atteinte avec des systèmes tels que les nanopositionneurs Attocube, qui offrent une résolution de déplacement linéaire sub-nanométrique.

Nous verrons dans la prochaine partie que les deux configurations (semi-confocale et quasi semi-confocale) sont intéressantes aussi parce que les modes transverses impliqués ($s = 4$ et $s = 3$ respectivement) possèdent un bon recouvrement spatial avec différents modes mécaniques du micro-résonateur, ce qui nous laisse un plus grand choix dans la réalisation du couplage à trois modes.

5.3.2 Le recouvrement spatial

L'optimisation du gain paramétrique \mathcal{R} est liée non seulement à l'accord entre la différence de fréquences des modes optiques et la fréquence du mode mécanique, mais aussi au recouvrement spatial entre ces trois modes, ainsi qu'aux propriétés du mode mécanique, telles que son facteur de qualité, sa fréquence propre et sa masse. Dans cette partie, je vais expliquer la méthode que nous avons utilisée pour calculer le recouvrement spatial et les résultats que nous avons obtenus et qui ont guidé nos choix pour la configuration de la cavité, le coupleur d'entrée, le résonateur et le mode mécanique.

Les amplitudes des champs TEM_{00} et TEM_{mn} sur la surface du micro-miroir, qui apparaissent dans l'expression (5.11) de l'intégrale de recouvrement spatial Λ (termes v_0 et v_1) sont bien connues et peuvent être déduites de la forme analytique (5.30) du champ électrique dans la cavité. La figure 5.9 présente les profils spatiaux des modes qui nous intéressent plus particulièrement. Comme le col du faisceau est situé sur le miroir plan que forme le résonateur, ces profils dépendent essentiellement de la taille w_0 du faisceau sur le résonateur. Dans le cas d'une cavité plan-concave, cette dernière est reliée à la longueur L de la cavité et au rayon de courbure R du coupleur d'entrée par l'expression (1.57). Nous avons tout d'abord défini la gamme intéressante de rayons de courbure, en prenant en compte la limitation sur la taille du col optique imposée par les dimensions transverses du micro-miroir et les contraintes qui limitent L : nous considérerons des miroirs de rayon R inférieur à 200 mm, auquel correspond un col optique de taille maximale égale à $w_0 \simeq 180 \mu\text{m}$ (atteinte en situation semi-confocale), et supérieur à 20 mm, ce qui implique une cavité de longueur L supérieure à 10 mm.

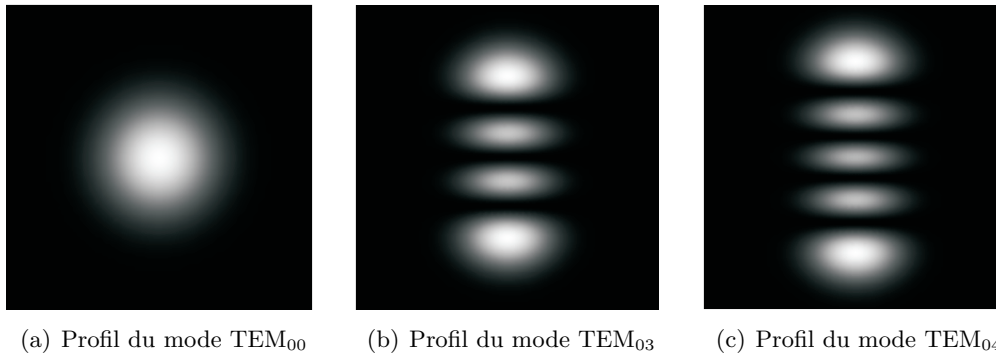


FIGURE 5.9 – Représentation des amplitudes de différents modes optiques envisagés pour l'interaction à trois modes : couplage entre modes optiques TEM_{00} (a) et TEM_{03} (b) dans une cavité quasi semi-confocale, et entre modes TEM_{00} et TEM_{04} (c) dans une cavité semi-confocale.

Le profil de déplacement de la surface du micro-miroir n'admettant pas de solution analytique, nous avons fait appel au programme de simulation par éléments finis des micro-résonateurs, que nous avons déjà décrit dans la section 3.5.1. Les valeurs discrètes de la déformation fournies par le logiciel de simulation permettent d'obtenir par interpolation la déformation sur l'ensemble de la surface, utilisable par le calcul de l'intégrale de recouvrement. La figure 5.10 montre l'exemple du mode mécanique d'indices $(0, 4)$, pour un pont de $1 \times 1 \text{ mm}^2$.

Les modes gaussiens dans nos cavités ne possèdent pas une véritable symétrie de révolution autour de l'axe du faisceau, mais ils ont des noeuds le long des directions transverses x et y : un mode TEM_{mn} a m (resp. n) noeuds et $(m + 1)$ (reps. $(n + 1)$) lobes de signe alternativement positif et négatif le long de l'axe x (resp. y). Par conséquent, leur dis-

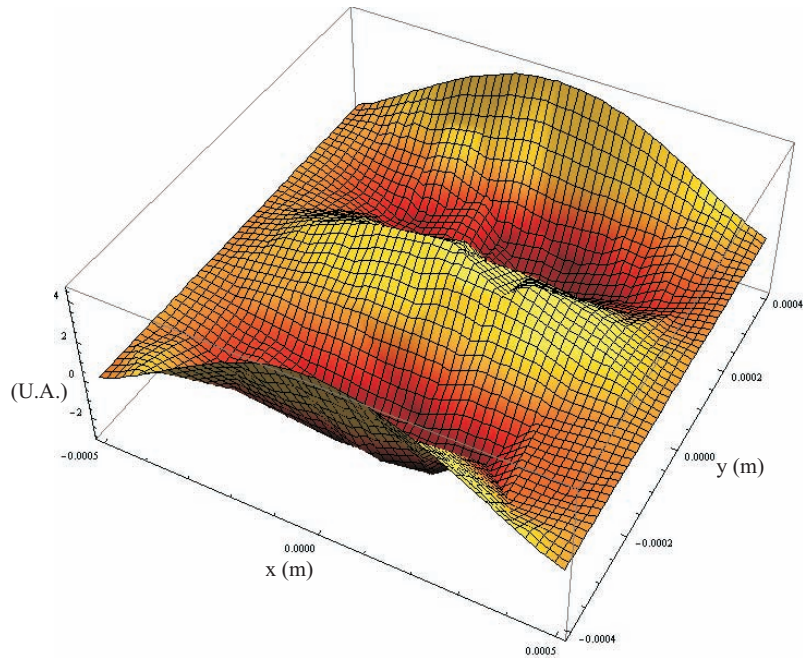


FIGURE 5.10 – Déformation de la surface d’un pont doublement encastré en $x = \pm 0.5 \text{ mm}$, de taille $1 \times 1 \text{ mm}^2$, obtenue par simulation par éléments finis. Le mode représenté est le mode d’indices $(0, 4)$, qui se couple aux modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} dans une cavité semi-confocale.

tribution peut être assez proche des déformations des modes acoustiques d’un résonateur rectangulaire qui a également deux axes de symétrie.

Nous avons effectué plusieurs simulations par éléments finis pour différentes tailles de micro-résonateurs rectangulaires doublement encastrés, d’épaisseur égale à $60 \mu\text{m}$. Nous avons typiquement choisi une longueur de 1 mm et une largeur variable entre 1 et 0.6 mm : en deçà de cette valeur, les pertes optiques par diffraction deviennent considérables, surtout pour de grands rayons de courbure R du miroir d’entrée. On ne veut pas non plus trop augmenter la taille du résonateur pour ne pas accroître sa masse; elle peut au contraire être éventuellement réduite en diminuant l’épaisseur du résonateur, tout en conservant les mêmes dimensions transverses.

D’après les mesures des spectres de bruit de différents modes mécaniques du micro-résonateur, nous savons que les modes qui n’ont pas de nœuds longitudinaux (i.e. les modes $(0, n)$, comme celui représenté sur la figure 5.10) possèdent un meilleur facteur de qualité parce qu’ils créent moins de contraintes sur les points d’accrochage du micro-pont à la puce. Nous nous sommes donc restreints à ce type de mode. Ce choix implique que parmi les modes optiques d’ordre supérieur qui sont naturellement dégénérés, seuls les modes TEM_{0n} (TEM_{04} en configuration semi-confocale et TEM_{03} pour la cavité quasi semi-confocale) auront un bon recouvrement spatial avec les modes mécaniques, ce qui limite encore les combinaisons à considérer lors du calcul du recouvrement. Les profils des

modes TEM_{03} et TEM_{04} sont représentés sur la figure 5.9.

Calcul de l'intégrale de recouvrement spatial

Nous avons évalué le recouvrement dans les deux configurations de cavité, pour cinq valeurs expérimentalement intéressantes du rayon de courbure R , et pour les six premiers modes mécaniques de six micro-résonateurs de largeurs différentes. Les valeurs obtenues sont résumées dans l'Annexe A pour la cavité semi-confocale et B pour la cavité quasi semi-confocale.

Nous montrons dans le tableau 5.1 un exemple de valeurs du recouvrement obtenues avec les modes d'un résonateur de $1 \times 0.8 \text{ mm}^2$ en configuration semi-confocale (mode optique TEM_{04}) : les colonnes sont relatives à différents rayons de courbure R , et donc à différentes longueurs $L \simeq R/2$ de la cavité et à différentes tailles w_0 du faisceau sur le micro-miroir ; les lignes correspondent aux modes mécaniques d'indices pairs $(0, 2n)$, qui sont les seuls à avoir un recouvrement significatif avec le mode optique TEM_{04} . Les fréquences propres ν_m sont issues des simulations par éléments finis. Nous avons ajouté une dernière ligne avec les valeurs des pertes par diffraction D_{04} du mode optique transverse, celles du mode TEM_{00} étant négligeables.

On obtient le même type de résultats en configuration quasi semi-confocale, avec une intégrale de recouvrement entre le mode optique TEM_{03} et la déformation de la surface qui n'est cette fois-ci significatif que pour les modes acoustiques impairs $(0, 2n + 1)$.

MEMS ($1 \times 0.8 \text{ mm}^2$)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,2) $\nu_m = 1.15 \text{ MHz}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$3.65 \cdot 10^{-4}$	$8.09 \cdot 10^{-5}$	$3.01 \cdot 10^{-6}$	$9.67 \cdot 10^{-10}$
(0,4) $\nu_m = 4 \text{ MHz}$	0.2205	0.105	0.031	0.0028	$1.55 \cdot 10^{-4}$
(0,6) $\nu_m = 8.67 \text{ MHz}$	0.7	0.61	0.333	0.056	0.005
D_{04}	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	~ 0	~ 0

TABLE 5.1 – Valeurs du recouvrement spatial entre les premiers modes acoustiques d'un micro-résonateur de $1 \times 0.8 \text{ mm}^2$ et les modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} , pour différentes valeurs du rayon de courbure R du coupleur d'entrée. Seuls les modes acoustiques $(0, 2n)$ avec nombre de nœuds pair, pour lesquels le recouvrement est non négligeable, sont indiqués. Les valeurs des pertes par diffraction D_{04} sont également présentées. Toutes les dimensions sont données en mm.

Nous pouvons observer que pour un mode acoustique donné, le recouvrement augmente avec la taille w_0 du faisceau, tout comme les pertes par diffraction. En effet, on obtient le meilleur recouvrement quand le profil du mode optique transverse épouse parfaitement la forme des lobes du mode acoustique : par exemple, le mode mécanique (0,4) représenté sur la figure 5.10 aura un recouvrement important avec le mode optique TEM_{04} de la

figure 5.9(c), et ce d'autant plus que la largeur de ce dernier se rapproche de la largeur du résonateur.

Le choix du résonateur et du coupleur d'entrée résulte donc d'un compromis entre les valeurs attendues du recouvrement et des pertes par diffraction. Les configurations qui prévoient des tailles importantes du faisceau sur le résonateur, c'est-à-dire pour lesquelles $R = 200$ et 150 mm, ont été écartées à cause des pertes importantes qu'elles engendrent ; le meilleur compromis a semblé être l'utilisation d'un miroir avec $R = 50$ mm, en combinaison avec des résonateurs de largeur plutôt réduite, entre 800 et $600 \mu\text{m}$.

Recouvrement spatial avec un faisceau non-parfaitement centré

Le centrage du faisceau intervient dans le recouvrement spatial : dans les tableaux donnés en annexes A et B, celui-ci a été calculé dans le cas d'un faisceau parfaitement centré. Il peut s'avérer que le recouvrement augmente si le faisceau est légèrement décalé, mais par contre les effets de diffraction sur les bords du micro-résonateur seront encore plus importants, ce qui rend de toute façon le décentrage du faisceau indésirable.

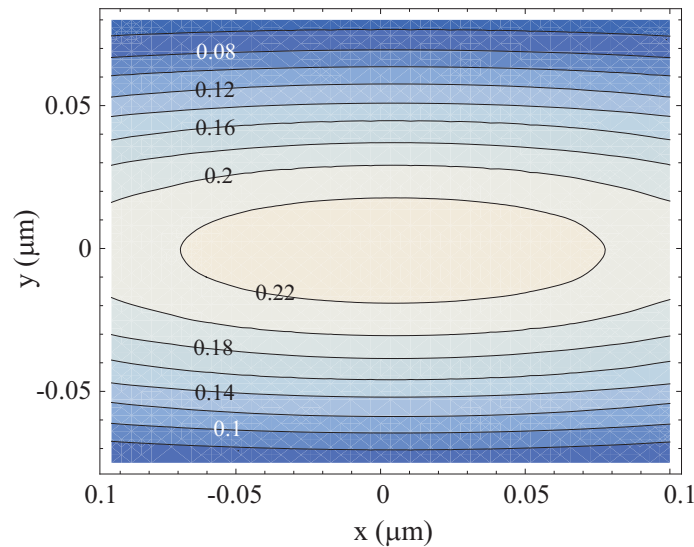


FIGURE 5.11 – Valeur du recouvrement entre les modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} , et le mode mécanique $(0,4)$ en fonction du décentrage du faisceau, sur une zone de $\pm 100 \times \pm 80 \mu\text{m}^2$ autour du centre du résonateur. Les courbes de niveau représentent les valeurs atteintes par l'intégrale de recouvrement.

Pour étudier la variation du recouvrement spatial avec le centrage, nous avons refait le calcul du recouvrement pour un faisceau décalé d'une quantité (x, y) en longueur et en largeur, sur une plage correspondant à un décalage maximum du dixième de la taille du résonateur. La figure 5.11 présente les valeurs du recouvrement entre les modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} et le mode acoustique $(0,4)$, en configuration semi-confocale avec $R = 200$ mm et $w_0 = 184 \mu\text{m}$. Le recouvrement obtenu pour un faisceau centré est $\Lambda = 0.22$

(voir le tableau 5.1), ce qui correspond à la valeur du point situé en $(x, y) = (0, 0)$ sur la figure 5.11. Comme nous nous intéressons à un mode mécanique d'indice élevé dans le sens transverse, on peut remarquer que la variation du recouvrement est plus critique pour des décalages transverses du faisceau : ainsi le recouvrement est réduit de moitié pour un décentrage de $y = 60 \mu\text{m}$, tandis que pour un décalage de la même quantité dans la direction longitudinale, il ne subit presque aucune variation. Les opérations de centrage transverse du faisceau ont donc une grande importance pour maximiser le recouvrement spatial.

Un angle entre les orientations respectives du mode optique transverse et de la déformation acoustique peut représenter un facteur de réduction supplémentaire du recouvrement : les estimations des valeurs de recouvrement prenant en compte un tel angle montrent qu'une rotation relative des modes de $\pi/8$ réduit le recouvrement spatial d'environ 40 %. En supposant le résonateur parfaitement plat, on aurait pu envisager la mise en place d'un dispositif de rotation du résonateur autour de l'axe de la cavité pour corriger une éventuelle discordance angulaire. Cela n'a pas été nécessaire : le résonateur présente en réalité une courbure différente selon les deux axes longitudinal et transverse, du fait des contraintes induites par le dépôt des couches diélectriques du miroir. Même des micro-résonateurs d'épaisseur égale à $60 \mu\text{m}$ subissent une déformation de l'ordre de 10 à 50 nm, surtout selon la direction transverse. Cette déformation introduit donc une dissymétrie entre les rayons de courbure dans les directions longitudinale et transverse, suffisante pour orienter les modes optiques de la cavité selon les axes du résonateur. De ce fait, les modes optiques TEM_{0n} se trouvent toujours bien alignés avec les modes mécaniques.

Réalisation expérimentale du couplage à trois modes

Après avoir introduit dans le chapitre précédent les concepts théoriques du couplage optomécanique à trois modes, qui permet à la fois de rendre le processus de refroidissement laser plus efficace et d'observer les instabilités paramétriques, je vais présenter dans ce chapitre comment nous avons mis en évidence un tel couplage et les résultats que nous avons obtenus.

Le couplage à trois modes est caractérisé par le gain paramétrique \mathcal{R} (équations (5.23) et (5.29)), qui dépend des caractéristiques optomécaniques du résonateur et de la cavité, et du facteur de recouvrement spatial Λ entre les modes acoustique et optiques considérés. L'obtention d'un couplage important nécessite aussi l'accord entre la différence $\Delta\nu$ des fréquences des modes optiques de la cavité et la fréquence propre du mode acoustique $\nu_m = \Omega_m/2\pi$. Les conditions essentielles pour la réalisation d'une interaction à trois modes peuvent alors se résumer en trois points principaux :

- la cavité doit supporter deux modes propres dont la différence de fréquence $\Delta\nu$ est proche de $\pm\nu_m$ et ajustable sur une plage suffisante ;
- les trois modes doivent avoir un bon recouvrement spatial Λ ;
- pour éliminer les processus non désirés liés à l'autre bande latérale, il est nécessaire d'opérer dans le régime des bandes latérales résolues, c'est-à-dire que la bande passante de la cavité doit être petite par rapport à ν_m .

Comme nous l'avons vu dans la section 5.3, la condition entre les différentes fréquences peut être obtenue à l'aide de cavités optiques quasi-dégénérées, et le montage expérimental que j'ai réalisé repose sur un tel dispositif, où une cavité de longueur réglable sur une large plage mais avec une résolution sub-micrométrique permet de satisfaire à la condition de

résonance.

La sélection de la géométrie du résonateur, de sa taille, du mode mécanique à coupler et du miroir d'entrée est dictée par la nécessité de maximiser le recouvrement spatial ; de plus, la fréquence du mode mécanique choisi doit être plus grande que la bande passante de la cavité, soit $\nu_m \gg \nu_{BP}$ (régime des bandes latérales résolues), où $\nu_{BP} = \Omega_1/2\pi$ est la bande passante du mode optique transverse couplé par l'interaction à trois modes (voir l'équation (5.20)).

Dans ce chapitre je vais d'abord retracer la réalisation expérimentale d'une telle cavité. La deuxième section est dédiée aux premiers résultats expérimentaux obtenus, qui constituent une caractérisation à la fois optique et mécanique de la cavité et du résonateur. Enfin, je présenterai une mise en évidence de l'interaction paramétrique à trois modes, à l'aide des mesures des spectres de bruit thermique du micro-miroir.

6.1 Réalisation d'une cavité optique quasi-dégénérée

Nous décrivons dans cette partie la mise en œuvre du montage qui a permis l'observation du couplage à trois modes avec une cavité presque dégénérée de longueur accordable, selon les caractéristiques que nous avons présentées dans le chapitre précédent.

6.1.1 Description de la cavité

Le montage de la cavité est visible sur la figure 6.1. Il est constitué de deux pièces indépendantes, chacune portant l'un des deux miroirs. La distance entre ces deux pièces est minutieusement contrôlée afin de régler la longueur de la cavité. Deux blocs en laiton solidaires forment le socle sur lequel sont fixées ces deux pièces de montage. Ce socle, renforcé latéralement par deux épaules massives non visibles sur la photo, rend la cavité plus stable mécaniquement. Toutes les pièces ont été réalisées par l'atelier de mécanique du laboratoire.

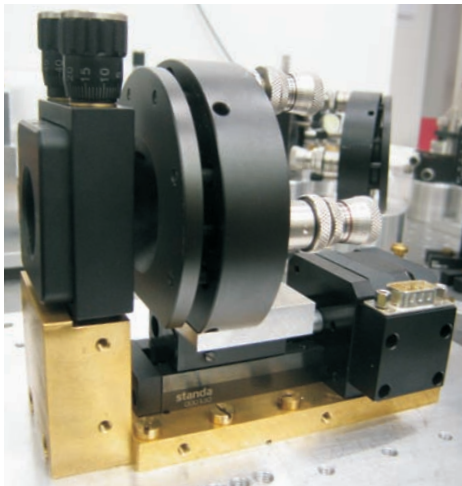


FIGURE 6.1 – Photographie de la cavité. La pièce de renfort latérale en laiton a été enlevée de façon à mieux voir le moteur pas-à-pas sur lequel est fixée la monture du coupleur d'entrée.



FIGURE 6.2 – Photographie des deux pièces de fixation des miroirs, avant assemblage final. On aperçoit à gauche le micro-miroir maintenu sous la pièce en crysocale, et à droite le miroir d'entrée pris en sandwich dans les deux pièces en plexiglas.

Les miroirs sont placés dans deux porte-miroirs commerciaux massifs, munis de vis micrométriques pour l'ajustement fin de l'orientation des miroirs. Le porte-miroir du coupleur d'entrée est vissé sur la platine mobile d'un moteur pas-à-pas fixé au socle, par l'intermédiaire d'une plaque en dural visible sur la photo. Ce moteur permet de faire varier la longueur de la cavité en déplaçant le miroir d'entrée par pas de $1.25 \mu\text{m}$. Nous avons préféré cette solution qui consiste à maintenir fixe la position longitudinale du micro-résonateur,

où se trouve le col optique de la cavité, pour ne pas avoir à corriger de manière importante l'adaptation spatiale du faisceau incident à chaque modification de longueur de la cavité. Pour assurer la meilleure stabilité mécanique et garder un montage relativement compact, la pièce de montage du micro-miroir est dépourvue de tout système de translation dans le plan transverse ; le centrage du faisceau laser sur le résonateur est effectué à l'aide des réglages du faisceau incident et de l'inclinaison des miroirs de la cavité.

Le schéma des montages qui permettent de fixer les miroirs sur leur support commercial est représenté sur la figure 6.3. Le miroir d'entrée est pris en sandwich à l'intérieur de deux pièces cylindriques en plexiglas, d'un pouce de diamètre et avec des ouvertures au centre de façon à laisser passer le faisceau de part et d'autre ; cet ensemble est collé sur une cale piézoélectrique, elle-même collée à une plaque cylindrique en plexiglass qui vient se loger dans le support commercial. Ce dispositif assure une bonne protection du miroir et permet de le retirer simplement de l'ensemble du montage mécanique de la cavité, par exemple pour changer le rayon de courbure. Le montage pour la fixation du résonateur est également constitué d'une pièce de base d'un pouce de diamètre, collée par l'intermédiaire d'une cale piézoélectrique à une plaque cylindrique montée dans le support commercial. La pièce possède sur sa face supérieure une niche d'environ $400\ \mu\text{m}$ de profondeur pour placer la puce de $1 \times 1\ \text{cm}^2$ du résonateur, serrée par un disque en chrysocale.

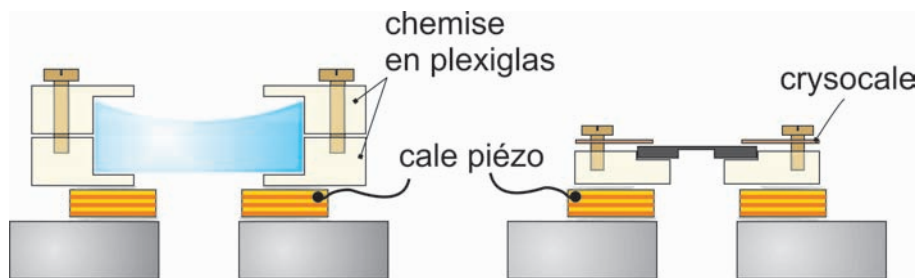


FIGURE 6.3 – Schémas des montages du coupleur d'entrée (à gauche) et du micro-miroir (à droite) sur leur porte-miroir. Chaque élément dispose d'une cale piézo-électrique, sur laquelle est montée une chemise en plexiglas qui protège le miroir d'entrée, ou un ensemble maintenu par une chrysocale pour le résonateur.

L'ajustement de la longueur de la cavité s'effectue de deux manières : en faisant varier la position du coupleur d'entrée avec le moteur pas-à-pas et en appliquant une tension continue aux cales piézo-électriques du résonateur et du coupleur. Cette dernière solution possède évidemment une course totale bien inférieure à celle du moteur.

Le moteur pas-à-pas (*stepper motor* en anglais) est un moteur qui transforme une séquence de commandes en une rotation contrôlée du moteur. La rotation de l'axe peut ainsi être subdivisée en un grand nombre de pas : par exemple, le moteur que nous utilisons (Standa 00130) fait 200 pas/tour. La position du moteur peut être contrôlée sans capteur et est pilotée par ordinateur, à l'aide d'un programme Labview. Le moteur peut être placé

dans une enceinte à vide, et fonctionner sans problème dans ces conditions. Le moteur contrôle un chariot qui peut glisser le long d'un rail, et chaque pas du moteur correspond à un déplacement linéaire du chariot de $1.25 \mu\text{m}$. Nous avons choisi ce système à cause de sa capacité de charge élevée, l'ensemble du montage du coupleur d'entrée fixé au chariot pesant environ 500 g. Son fonctionnement par pas produit des vibrations quand le moteur est en marche, mais il est très stable à l'arrêt, ce qui réduit les problèmes de vibration pendant les mesures. Sa plage d'excursion en longueur d'une dizaine de centimètres est limitée en pratique par l'ensemble du montage mécanique de la cavité à plus d'un centimètre, ce qui est largement suffisant pour mettre à résonance successivement les processus Stokes et anti-Stokes (voir la partie 5.3.1); en revanche, la résolution sur le déplacement du moteur, qui correspond à la longueur d'un pas soit $1.25 \mu\text{m}$, n'est pas suffisante pour ajuster précisément l'écart de fréquence entre les deux modes optiques.

Selon les estimations théoriques présentées dans la partie 5.3.1, une variation de longueur de $1.25 \mu\text{m}$ correspond à une variation de la différence de fréquence $\Delta\nu$ entre les deux modes optiques d'environ 100 kHz, soit une valeur du même ordre de grandeur que la bande passante de la cavité, qui est égale à 150 kHz pour une cavité de finesse $\mathcal{F} = 20\,000$ et de longueur $L = 25 \text{ mm}$. Pour avoir une sensibilité suffisante sur la variation de longueur, nous avons donc monté le micro-miroir et le coupleur d'entrée sur des cales piézo-électriques, qui assurent un déplacement proportionnel à la tension continue appliquée. La cale sur laquelle est montée le résonateur permet de changer la longueur de la cavité sur une plage de $2 \mu\text{m}$, et de raccorder ainsi les mesures effectuées pour chaque pas du moteur. Nous reviendrons sur ce point lors de la présentation des mesures dans la section 6.3.

On peut également utiliser cette cale pour exciter le résonateur afin d'étudier sa réponse mécanique autour de la fréquence de résonance des modes, et également pour appliquer une modulation à plus basse fréquence afin de balayer la longueur de la cavité et observer les pics d'Airy des modes optiques sur le faisceau transmis.

Comme expliqué dans la section 5.3.2, le choix du coupleur d'entrée résulte d'un compromis entre l'optimisation de l'intégrale de recouvrement avec les différents résonateurs, et les pertes par diffraction du mode optique d'ordre transverse supérieur. En tenant compte aussi des dimensions maximales de la cavité (liées à sa mise en place à l'intérieur d'une enceinte à vide), nous avons utilisé un miroir de rayon de courbure de 50 mm, fabriqué par ATFilms et traité au Laboratoire des Matériaux Avancés pour le dépôt diélectrique, qui présente une transmission de 100 ppm.

6.1.2 Description du montage général

La nouvelle cavité a été installée sur la table optique, à côté du montage déjà existant. Comme le montre la figure 6.4, la cavité partage la même source laser infrarouge Nd:YAG à 1064 nm que l'ancienne cavité placée dans le cryostat. Nous avons changé l'orientation

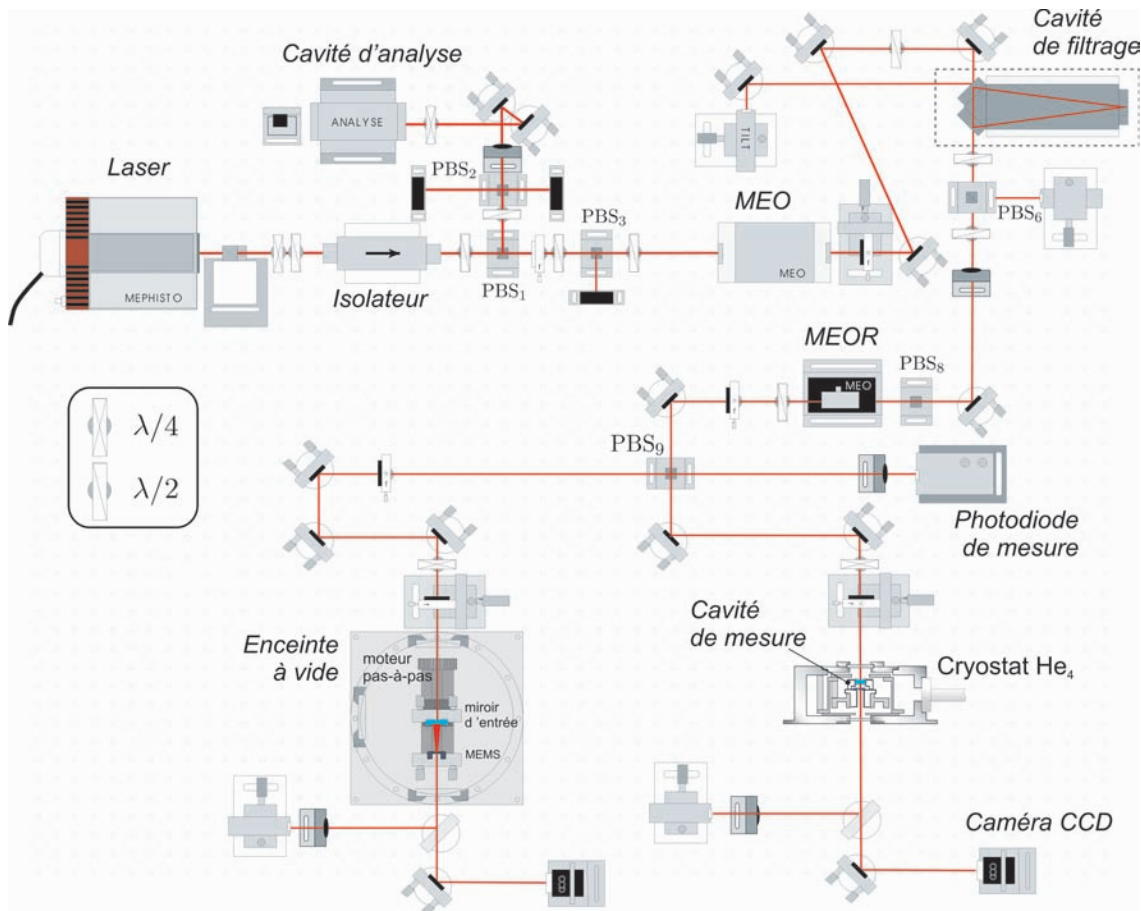


FIGURE 6.4 – Montage expérimental utilisé pour le couplage à trois modes, en récupérant le faisceau laser réfléchi par le cube séparateur de polarisation PBS_9 , et en déplaçant la photodiode afin de détecter l'intensité réfléchie par la cavité et transmise par ce même cube.

du cube séparateur de polarisation PBS_9 et tourné la lame demi-onde qui le précède, de façon à ce que le faisceau soit envoyé vers la nouvelle cavité. Le faisceau est ainsi filtré par la cavité de filtrage spatial et a traversé le modulateur électro-optique qui module sa phase à une fréquence de 12 MHz pour produire le signal d'erreur Pound-Drever-Hall (voir la section 3.4). Une lame $\lambda/4$ placée sur le chemin du faisceau avant la cavité joue le rôle d'un circulateur optique, de façon à ce que le faisceau réfléchi par la cavité soit transmis par le cube, et envoyé vers le système de détection qui a été déplacé à cet endroit.

L'adaptation spatiale du faisceau, dont le profil a préalablement été mesuré avec un analyseur de faisceau, est effectuée à l'aide de deux lentilles L_1 et L_2 de focale respectivement égale à 150 et 100 mm, la deuxième lentille étant montée sur un système de translation micrométrique à trois axes pour optimiser l'adaptation au mode fondamental de la cavité. Un jeu de deux miroirs permet d'aligner précisément le faisceau.

Comme pour les autres montages présentés précédemment dans ce manuscrit, le fais-

ceau transmis par la cavité est simultanément visualisé à l'aide d'une caméra CCD munie d'un objectif macro 18 – 108 mm, et détecté par une photodiode dont le signal de sortie est visualisé avec un oscilloscope.

La cavité est placée dans l'enceinte à vide décrite dans la section 3.3, qui possède un volume interne assez important. Il n'était en effet pas envisageable de mettre une cavité d'une longueur de quelques centimètres et disposant d'un moteur dans l'espace limité à l'intérieur du cryostat. On aurait certes pu ne mettre que le micro-miroir dans le cryostat et disposer le coupleur d'entrée à l'extérieur, mais une telle cavité n'est pas très stable mécaniquement, ce qui aurait pu limiter la sensibilité de la mesure des déplacements du résonateur. Nous avons donc préféré placer la cavité entière dans l'enceinte à vide.

6.1.3 Premières mesures

La finesse des cavités quasi-dégénérées que nous avons construites varie entre 5 000 et 20 000. Du fait de leur longueur, elles ont une bande passante beaucoup plus faible que les cavités monolithiques présentées dans les chapitres 3 et 4, typiquement de l'ordre de 100 kHz au lieu de 1 MHz. Cela rend plus délicat l'asservissement du laser sur la résonance du mode fondamental de la cavité, d'autant plus que cette dernière est moins compacte et présente donc plus d'instabilités mécanique et thermique. Nous avons donc cherché à améliorer cet asservissement, notamment en tirant profit de la présence de cales piézo-électriques sur chacun des miroirs de la cavité. Il s'est avéré toutefois que l'asservissement le plus efficace est obtenu en pilotant la cale piézo-électrique interne du laser, sans doute du fait de sa plus grande bande passante, au-delà de 100 kHz.

Nous avons déjà présenté dans le chapitre 3 le spectre de bruit thermique obtenu avec une cavité constituée d'un miroir d'entrée de 50 mm de rayon de courbure et d'un micro-miroir en forme de pont de $1400 \times 600 \mu\text{m}^2$ de la puce P11, en configuration quasi semi-confocale ($L \simeq 37.5$ mm). Sur une plage de fréquence comprise entre 0 et 9 MHz, nous avons identifié les modes mécaniques (0, 1) à (0, 4) (voir la figure 3.17).

Malgré plusieurs tentatives en changeant le résonateur, le coupleur d'entrée, ou encore la longueur de la cavité, nous n'avons pas observé d'effet du couplage à trois modes avec ces résonateurs. A titre d'exemple, les tableaux fournis en Annexes montrent que le mode mécanique le plus intéressant parmi ceux observés pour la puce P11, présentant à la fois une intégrale de recouvrement supérieure à 1 % et une fréquence pas trop élevée pour maximiser le gain paramétrique \mathcal{R} (équation (5.29)), est le mode (0, 3) en configuration quasi semi-confocale, dont les caractéristiques sont : fréquence de résonance mécanique $\nu_m = 3.78$ MHz, facteur de qualité $Q = 8000$, masse $M \simeq 250 \mu\text{g}$, et recouvrement calculé entre les modes mécanique (0, 3) et optique TEM₀₃ égal à $\Lambda = 1.6$ %. D'après les autres paramètres déterminés expérimentalement (finesse $\mathcal{F} = 7000$, bande passante $\nu_{BP} = 290$ kHz, puissance incidente $P_{in} = 10$ mW), le gain paramétrique attendu

n'est que de $\mathcal{R} \simeq 0.007$ à l'accord des fréquences $\Delta\nu = \pm\nu_m$. Cela ne se traduirait que par une variation inférieure au pourcent de la largeur de la résonance mécanique et de la température effective du résonateur.

Nous avons ainsi changé de micro-miroir, pour améliorer simultanément les propriétés optiques et mécaniques de la cavité, et augmenter la valeur attendue du gain \mathcal{R} : une nouvelle série de micro-résonateurs nous a permis d'obtenir de meilleurs résultats, présentés dans les prochaines sections.

6.1.4 Un micro-miroir plus fin

Pour améliorer la valeur du gain paramétrique \mathcal{R} , nous avons estimé nécessaire non seulement de refaire une série de micro-miroirs pour retrouver une bonne réflectivité, mais aussi de modifier la géométrie des structures pour optimiser leurs caractéristiques mécaniques. Puisque le profil des modes propres d'un résonateur en forme de pont rectangulaire épouse assez bien la distribution spatiale des modes gaussiens du faisceau, conduisant à des valeurs raisonnables de l'intégrale de recouvrement Λ (voir Annexes), nous n'avons pas cherché à modifier radicalement la géométrie du résonateur. Nous avons donc conservé la structure en forme de pont doublement encastré qui assure par ailleurs des bons facteurs de qualité pour les modes mécaniques $(0, n)$. Il est d'autre part difficile de réduire la largeur du micro-miroir sans augmenter les pertes par diffraction, et une valeur comprise entre 0.6 et 1 mm nous a semblé raisonnable.

Par contre, nous pouvons jouer sur l'épaisseur du résonateur : une réduction de son épaisseur e entraîne une diminution proportionnelle à la fois de la masse des modes mécaniques d'après l'équation (2.8), et de leur fréquence de résonance selon l'équation (1.58). D'après l'expression (5.29) du gain paramétrique, on devrait donc augmenter le gain comme $1/e^3$. Par ailleurs, nous n'avons pas pu détecter jusqu'à présent les modes mécaniques $(0, 5)$ et $(0, 6)$, du fait de leur fréquence de résonance trop élevée, de l'ordre de la dizaine de mégahertz pour un résonateur de $60 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Diminuer l'épaisseur devrait les rendre accessibles et nous permettre de profiter de leur recouvrement spatial bien meilleur que celui obtenu avec les modes $(0, 3)$ et $(0, 4)$.

Le nouveau micro-miroir

La nouvelle série de résonateur a été réalisée selon le même procédé que celui décrit dans la section 1.3.3. La gravure des échantillons a été effectuée à l'IEMN (Institut d'Électronique, de Microélectronique et de Nanotechnologie, à Lille), par la technique DRIE en partant de deux wafers de SOI superpolis (rugosité inférieure à 2 \AA rms). A l'origine, la couche supérieure de ces wafers avait une épaisseur de $100 \mu\text{m}$ et a été réduite au cours du superpoli par l'entreprise SESO. Les spécifications demandées étaient de 40 et $50 \mu\text{m}$, mais l'épaisseur de la couche restante, mesurée à l'IEMN, s'est avérée bien supérieure, très

probablement à cause de la méconnaissance de l'épaisseur initiale des wafers. Une gravure de test réalisée préalablement sur une plaque de SOI de $30\ \mu\text{m}$ d'épaisseur¹ nous a tout de même permis de disposer de micro-résonateurs de faible épaisseur ; la photo de la figure 6.5 en montre un exemple.

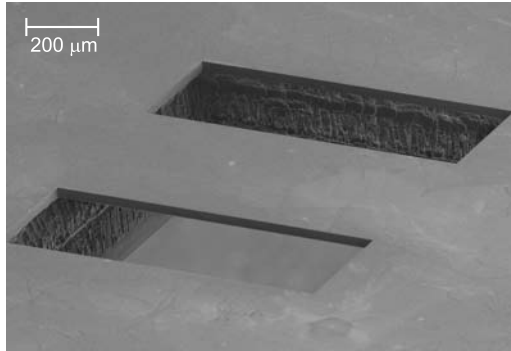


FIGURE 6.5 – Image en microscopie électronique d'un micro-résonateur d'épaisseur $30\ \mu\text{m}$ réalisé à l'IEMN.

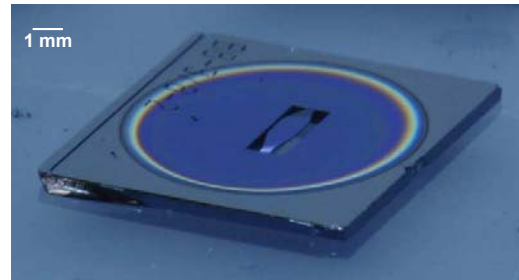


FIGURE 6.6 – Vue d'une puce après traitement au LMA. Le résonateur a ici une géométrie différente de pont biseauté, dans le but de réduire les pertes mécaniques par ancrage.

Une fois la plaque gravée, elle a été séparée en puces carrées de 1 cm de côté chacune, contenant un seul micro-résonateur au centre (voir la figure 6.6). Ces puces ont été traitées par le LMA, qui a déposé sur presque toute leur surface une série de 15 doublets de SiO_2 et de Ta_2O_5 , de façon à réaliser un miroir de transmission résiduelle attendue de 100 ppm. A cause de l'épaisseur assez importante, de l'ordre de $5\ \mu\text{m}$, des couches diélectriques par rapport à celle du résonateur, le dépôt a provoqué des contraintes qui induisent une courbure du pont. Le micro-miroir est ainsi convexe et le rayon de courbure est visiblement différent selon les deux axes longitudinal et transverse, le résonateur étant davantage bombé dans la direction transverse. La courbure semble varier selon la taille du résonateur, mais comme elle ne nous a pas empêché de construire une cavité de grande finesse, nous n'avons pas cherché à corriger cet effet.

Afin d'avoir une meilleure idée de la déformation du pont, le profil spatial a été mesuré à l'aide d'un profilomètre de la marque Dektak, dans la salle blanche de l'Ecole Normale Supérieure. Cet appareil, en déplaçant une pointe à la surface de l'échantillon le long d'une ligne, est capable de mesurer le décalage vertical avec une sensibilité de quelques Angstrom seulement. En parcourant plusieurs lignes sur l'échantillon selon deux axes orthogonaux, on reconstitue le profil spatial selon une maille carrée. La figure 6.7 montre le profil 3D obtenu pour un pont de $1000 \times 800\ \mu\text{m}^2$, qui montre clairement que le pont est déformé, et de façon différente selon les deux axes du pont. Notamment, dans la direction transverse, le profil est approximativement parabolique avec un décalage vertical de l'ordre de $2\ \mu\text{m}$ entre le centre et le bord. Les modes d'ordre transverse élevé dans cette direction sont

1. Pour cette plaque, qui était déjà en possession de l'IEMN, nous ne connaissons pas la valeur de la rugosité.

justement ceux qui nous intéressent pour le couplage à trois modes ; comme ils explorent une partie importante du pont, leur condition de dégénérescence va être a priori assez différente des situations semi-confocale ou quasi semi-confocale que l'on avait obtenues avec un résonateur plan.

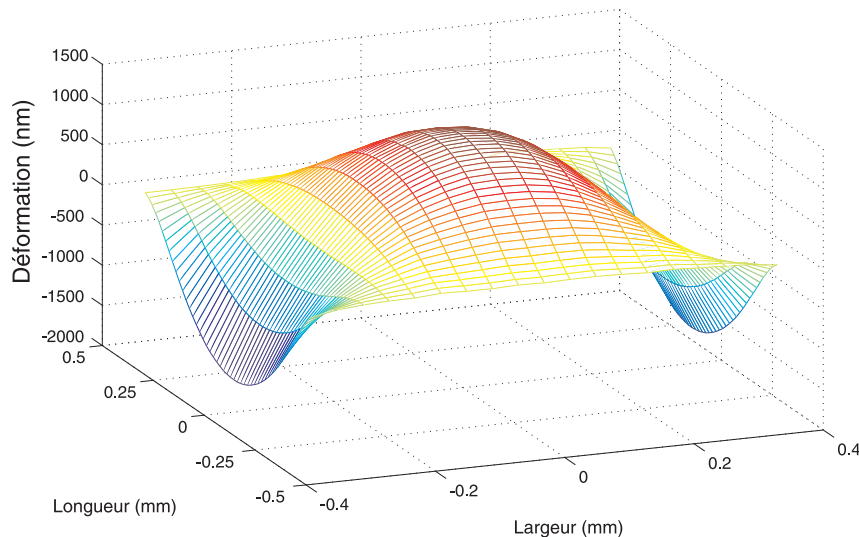


FIGURE 6.7 – Profil spatial d'un micro-miroir de $30\ \mu\text{m}$ d'épaisseur, $1\ \text{mm}$ de longueur et $800\ \mu\text{m}$ de largeur, obtenu avec un profilomètre Dektak. La déformation due à la présence des couches diélectriques est différente selon les deux axes longitudinal et transverse du pont.

Notons que cette déformation va aussi modifier les propriétés mécaniques du résonateur, et donc les fréquence de résonance des modes acoustiques et leur facteur de qualité, à cause des contraintes créées par le traitement diélectrique.

La cavité

Le montage de la cavité, ainsi que le moteur pas-à-pas pour le réglage de sa longueur, est le même que celui présenté au début de cette section. L'adaptation spatiale du faisceau doit toutefois être optimisée en ajustant la position du col optique w_0 , qui se trouve maintenant en une position longitudinale $z = 0$ située au-delà de la position du micro-miroir (voir la figure 6.8).

Le premier aspect auquel nous nous sommes intéressés a été de s'assurer que la déformation du résonateur n'était pas importante au point de rendre la cavité instable ou impossible à régler. Une fois vérifié qu'il n'y avait pas de problème sur toute la plage de longueurs de la cavité intéressante pour notre expérience, nous avons entrepris les réglages et l'alignement de la cavité, qui se sont avérés plus laborieux qu'auparavant.

Le deuxième aspect important a consisté à construire une cavité proche de la dégénérescence avec le nouveau micro-miroir. La condition de dégénérescence des modes optiques

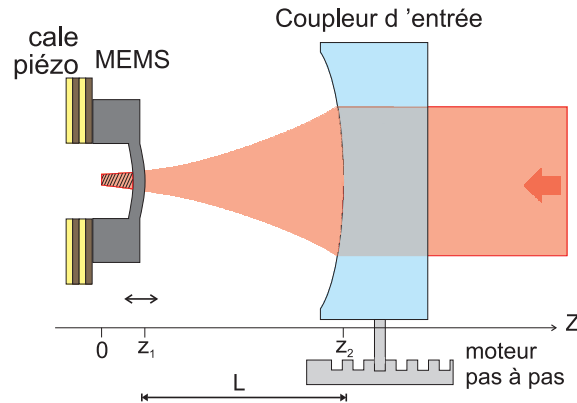


FIGURE 6.8 – Schéma de la cavité concave-convexe avec un micro-miroir de $30\ \mu\text{m}$ d'épaisseur, déformé par les contraintes des couches diélectriques. Comme précédemment, le réglage de la longueur de la cavité se fait par pas discrets à l'aide du moteur, et continûment grâce à la cale piézo-électrique sur laquelle est fixé le résonateur, qui permet également d'exciter ses modes mécaniques.

ne correspond plus aux cas d'une cavité semi-confocale pour les modes TEM_{00} et TEM_{04} , ni à une cavité quasi semi-confocale pour les modes TEM_{00} et TEM_{03} . Nous avons ainsi trouvé expérimentalement que les modes TEM_{00} et TEM_{04} sont dégénérés pour une longueur $L = 34\ \text{mm}$ (au lieu de $25\ \text{mm}$ pour une cavité semi-confocale).

6.2 Caractérisations optique et mécanique de la cavité et du miroir mobile

La réalisation du couplage à trois modes nécessite le contrôle de l'écart en fréquence $\Delta\nu$ entre les modes optiques, qui doit être proche de la fréquence de résonance mécanique ν_m . Nous avons ainsi vérifié expérimentalement que $\Delta\nu$ varie en fonction de la longueur L de la cavité sur une plage suffisante autour de la dégénérescence des deux modes optiques (voir la figure 5.8). Ensuite, nous avons identifié et caractérisé les modes mécaniques du résonateur.

6.2.1 Caractérisation optique de la cavité

Comme la déformation des nouveaux résonateurs de faible épaisseur rend la distribution des modes optiques transverses plus complexe, nous commençons la description de la caractérisation optique en présentant les résultats obtenus avec un ancien résonateur d'épaisseur $60\ \mu\text{m}$, qui se comporte comme un miroir plan. Il s'agit ici d'un pont de la puce P4, de taille $1000 \times 600\ \mu\text{m}^2$. Le miroir d'entrée est toujours un coupleur de rayon de courbure $R = 50\ \text{mm}$.

La caractérisation de la cavité est effectuée en observant les faisceaux transmis et réfléchi. Comme pour les autres cavités utilisées au cours de ma thèse, le faisceau transmis par cette cavité est en partie envoyé sur une photodiode reliée à un oscilloscope et en partie sur une barrette CCD avec objectif macro, qui a été essentiel dans l'identification des modes transverses d'ordre supérieur observés à l'oscilloscope.

Observation des modes de la cavité

Sur la figure 6.9 sont représentés en noir les pics d'Airy des différents modes optiques de la cavité, obtenus à partir du faisceau transmis en balayant la fréquence du laser grâce à une modulation lente de la température du cristal YAG (la rampe appliquée est tracée en rouge sur la figure). L'observation de l'image transmise par la caméra CCD permet d'identifier les différents modes associés à chaque pic d'Airy sur cette figure. En repérant les modes par leur indices (p, s) comme dans le chapitre 5, où p est l'indice longitudinal et $s = m+n$ la somme des indices transverses, on observe deux séries longitudinales différentes $p-1$ et p , et quatre modes transverses $s = 0$ à 3 pour la série longitudinale $p-1$. Le mode transverse $(p-1, 3)$ est proche du mode fondamental suivant $(p, 0)$, indiquant que la cavité est presque dans une configuration quasi semi-confocale. Nous remarquons aussi que les modes transverses de même indice s ne sont pas parfaitement dégénérés : on observe distinctement par exemple les trois modes de la série $(p-1, 2)$. Cela est certainement dû à des dissymétries du pont ou du miroir d'entrée.

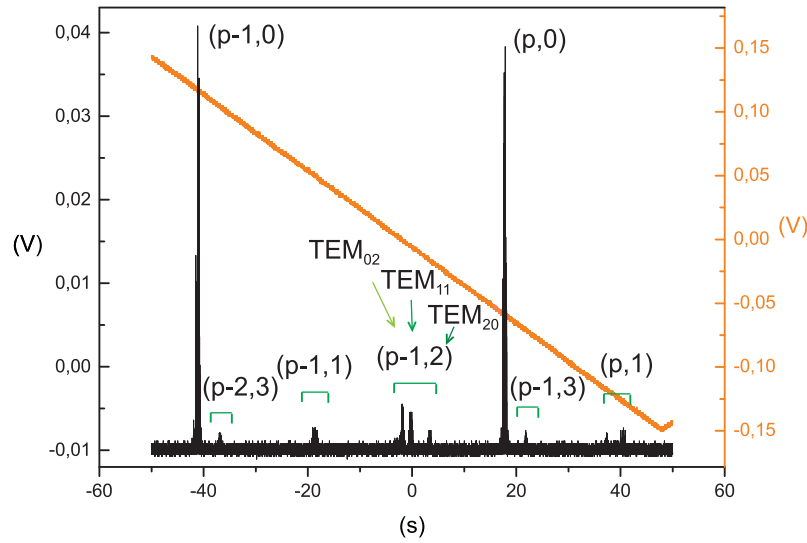


FIGURE 6.9 – Pics d’Airy des différents modes optiques de la cavité, repérés par leurs indices longitudinal et transverse (p, s) , obtenus en balayant la fréquence du laser (courbe noire). La rampe de tension qui contrôle la température du cristal laser est indiquée en rouge.

Avec les nouveaux micromiroirs, nous avons observé un écart beaucoup plus prononcé entre modes transverses de même somme $s = m + n$, conduisant à un mélange des séries correspondant à des valeurs de s différentes. Cela est clairement dû aux profils dissimilaires du pont selon les deux axes longitudinal et transverse, induisant une différence de fréquence importante entre modes TEM_{0n} et TEM_{n0} . Grâce à la caméra CCD, nous avons toutefois pu identifier sans ambiguïté les modes transverses et trouver la dégénérescence entre modes TEM_{00} et TEM_{04} pour une longueur de la cavité de l’ordre de $L = 35$ mm.

La dégénérescence des modes peut être vérifiée plus finement en appliquant une modulation plus rapide à l’une des cales piézoélectriques du coupleur d’entrée ou du micro-miroir, autour de la fréquence de résonance du mode fondamental $(p, 0)$; la figure 6.10 montre le résultat obtenu sur une plage de 35 MHz environ. Les bandes latérales générées par le modulateur électro-optique résonnant à 12 MHz permettent de mesurer de manière directe la différence de fréquence $\Delta\nu$ entre les modes optiques, en plus de la bande passante de la cavité ν_{BP} . A partir d’ajustements lorentziens (en vert sur la figure), nous pouvons extraire la valeur centrale et la largeur à mi-hauteur de tous les pics d’Airy. Ceci permet de déterminer la largeur du mode fondamental et la différence $\Delta\nu$ entre ce dernier et le mode transverse d’ordre supérieur qui nous intéresse.

Cette mesure de $\Delta\nu$ nous sera utile pour tracer la variation des différents paramètres optomécaniques en fonction de $\Delta\nu$ et vérifier que le couplage à trois modes a bien lieu pour $\Delta\nu = \pm\nu_m$ (voir section 6.3).

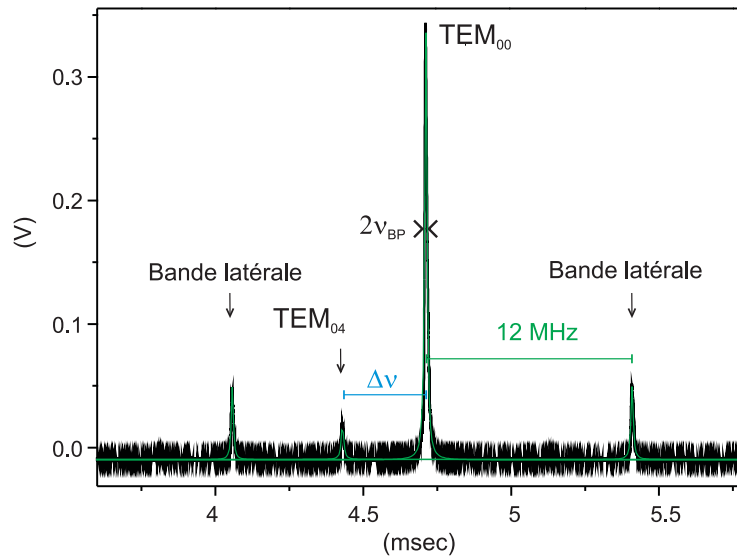


FIGURE 6.10 – Intensité transmise par la cavité en balayant sa longueur sur une plage de 40 MHz autour de la résonance du mode fondamental, à l’aide de la cale piézo-électrique du micro-miroir. Les ajustements lorentziens des pics d’Airy correspondant aux modes TEM_{00} , TEM_{04} et aux bandes latérales sont tracés en vert. On obtient ainsi la bande passante ν_{BP} de la cavité et la différence $\Delta\nu$ entre les deux modes.

Variation de l’écart $\Delta\nu$ entre modes en fonction de la longueur L

Pour déterminer la variation de $\Delta\nu$ avec la longueur de la cavité, nous avons répété la mesure précédente de $\Delta\nu$ (figure 6.10) pour différents pas du moteur, qui correspondent à un déplacement linéaire de $1.25\ \mu\text{m}$. Les valeurs obtenues pour l’écart $\Delta\nu$ entre les fréquences des modes TEM_{04} et TEM_{00} sont reportées sur la figure 6.11. Elles sont réparties en deux groupes, qui correspondent aux séries de mesures effectuées pour un mode transverse de part et d’autre du mode fondamental, c’est-à-dire dans les conditions de résonance Stokes associée aux instabilités paramétriques ($\Delta\nu \simeq -\nu_m$), et de résonance anti-Stokes correspondant au refroidissement du résonateur ($\Delta\nu \simeq \nu_m$).

Comme attendu d’après l’expression théorique (figure 5.8), la variation de $\Delta\nu$ est pratiquement linéaire sur les plages de longueur considérées. Les ajustements visibles sur la figure 6.11 donnent des pentes égales à $273\ \text{kHz}/\mu\text{m}$ du côté de la résonance Stokes et à $254\ \text{kHz}/\mu\text{m}$ du côté refroidissement.

Finesse et bande passante

Nous avons également mesuré la finesse et la bande passante à chaque pas du moteur. En effet, quand on déplace le coupleur d’entrée, l’axe de la cavité peut être légèrement modifié et il est possible que le point d’impact sur le micro-miroir change. Les valeurs sont représentées sur la figure 6.12 en fonction de L . Nous observons que la finesse du mode

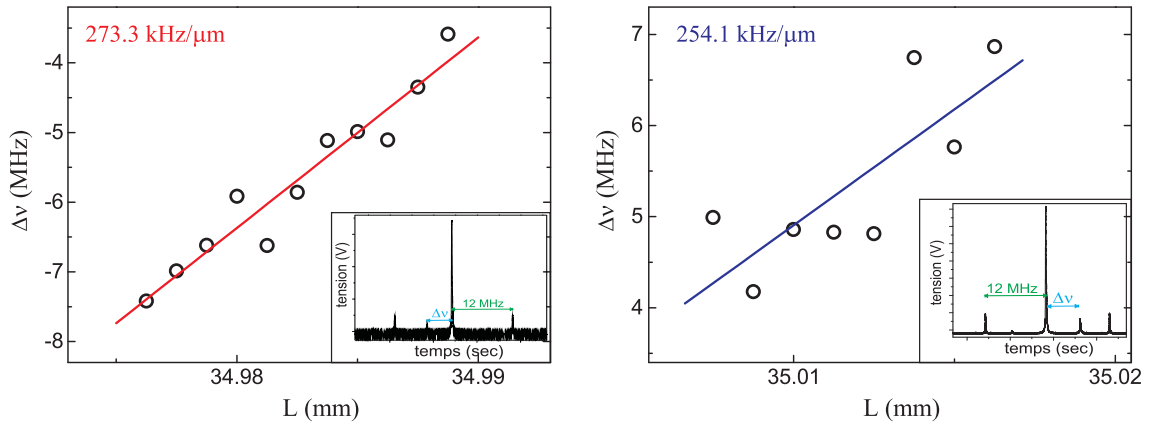


FIGURE 6.11 – Valeurs mesurées de la différence de fréquence $\Delta\nu$ entre les modes optiques TEM_{04} et TEM_{00} (ronds noirs) et ajustement linéaire (ligne en trait plein), en fonction de la longueur de la cavité de part et d’autre de la dégénérescence ($\Delta\nu$ négatif à gauche et positif à droite). Les inserts présentent des exemples des pics d’Airy observés.

fondamental varie entre 25 500 et 33 000, et la bande passante entre 67 et 86 kHz. Ces valeurs sont bien meilleures que celles obtenues avec la première série de micro-miroirs, dont le traitement optique s’était sans doute dégradé (finesse de l’ordre de 7000).

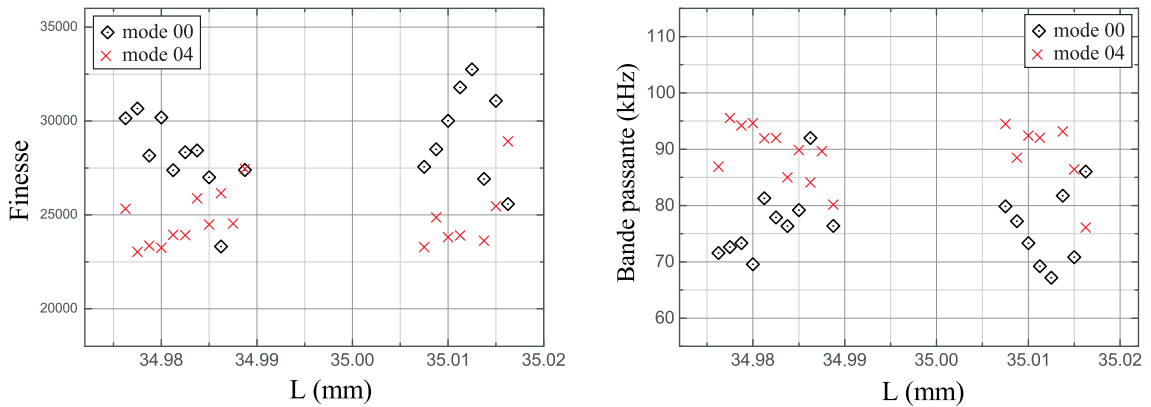


FIGURE 6.12 – Valeurs de la finesse (à gauche) et de la bande passante (à droite) des modes TEM_{00} (losanges noirs) et TEM_{04} (croix rouges), en fonction de la longueur L de la cavité.

Sur la figure 6.12 sont également reproduites les valeurs de la finesse du mode optique TEM_{04} , qui varient autour d’une valeur moyenne de l’ordre de 24 000, inférieure à celle obtenue pour le mode fondamental, comme on s’y attend pour un mode transverse d’ordre supérieur qui a une plus grande extension spatiale. Cela correspond à une bande passante ν_{BP} d’environ 92 kHz.

Comme la largeur de la résonance du couplage à trois modes est justement égale à la bande passante du mode transverse (équation (5.24)), on constate que la précision du déplacement du moteur est insuffisante pour s’approcher convenablement de la résonance :

avec une pente de l'ordre de $260 \text{ kHz}/\mu\text{m}$, un pas du moteur de $1.25 \mu\text{m}$ correspond en effet à une variation de $\Delta\nu$ de plus de 300 kHz . Nous utiliserons donc la cale piézo-électrique du micro-miroir, qui permet une variation de longueur sur une plage continue supérieure à $2 \mu\text{m}$, pour ajuster la résonance du couplage à trois modes.

Stabilité de la cavité

Cette cavité n'est pas pourvue d'un système d'asservissement de température. Par conséquent, nous avons en premier lieu examiné la stabilité thermique de l'ensemble de la cavité, en vérifiant l'absence de dérive notable de sa longueur à l'échelle de quelques heures. En effet, une dérive qui ne pourrait pas être compensée par les cales piézo-électriques de la cavité nous empêcherait de rester à la résonance du couplage à trois modes.

Pour observer cette dérive, nous avons ajusté la longueur de la cavité de manière à obtenir un écart en fréquence $\Delta\nu = 12 \text{ MHz}$ pour le mode TEM_{03} ² (il coïncide alors avec l'une des bandes latérales, comme on peut le voir sur la figure 6.13). Cette méthode permet de détecter très facilement une dérive de $\Delta\nu$ qui correspondrait à une variation supérieure à la bande passante ν_{BP} , égale à la demi-largeur de la bande latérale, puisque cela se traduirait par un dédoublement du pic. Nous avons effectué une acquisition du faisceau transmis toutes les heures pour une durée totale de quatre heures, sans remarquer de séparation des pics. Nous avons toutefois observé des petites variations, de 5% environ, sur l'amplitude du pic, qui peuvent être attribuées à des variations de fréquence inférieures à la largeur du mode, et qui correspondent donc à des fluctuations de longueur inférieures au micron.

6.2.2 Caractérisation des modes mécaniques

La cavité que nous avons utilisée pour nos mesures est formée par un résonateur en forme de pont, de taille $1 \times 0.8 \text{ mm}^2$, et par un coupleur d'entrée de rayon de courbure $R = 50 \text{ mm}$. Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} sont presque dégénérés pour une longueur de la cavité $L = 34 \text{ mm}$. Dans cette configuration, les modes acoustiques qui auront un recouvrement non nul avec les modes optiques et auxquels nous nous intéresserons plus particulièrement sont ainsi les modes à nombre de nœuds pair.

Nous avons vérifié avec une simulation par éléments finis que les fréquences de résonance pour un tel micro-miroir d'épaisseur $30 \mu\text{m}$ sont plus faibles que pour celui d'épaisseur $60 \mu\text{m}$: les fréquences des premiers modes pairs, reportées dans la deuxième colonne de la table 6.1, sont environ deux fois plus basses, comme attendu d'après l'expression (1.58).

2. Ce test préliminaire de la stabilité de la cavité a été effectué en utilisant la toute première cavité avec le MEMS P11, dont la longueur était accordée sur la dégénérescence des modes fondamental et TEM_{03} . N'ayant pas modifié le montage mécanique de la cavité, nous pouvons supposer que les résultats restent valables une fois les miroirs de la cavité changés.

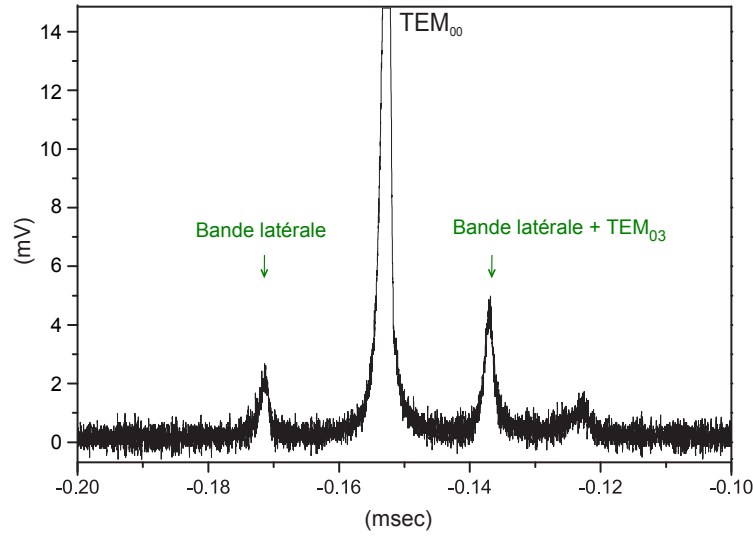


FIGURE 6.13 – Vérification de la stabilité de la longueur de la cavité vis-à-vis d'éventuelles dérives thermiques. L'intensité transmise est mesurée toutes les heures pour comparer l'écart $\Delta\nu$ entre les modes TEM_{03} et TEM_{00} , préalablement ajusté à la fréquence des bandes latérales.

En particulier, le mode acoustique (0,6) est attendu à une fréquence proche de 5 MHz, alors que nous ne l'avons pas trouvé sur une plage de 0 à 9 MHz avec le résonateur P11 (voir section 3.5.3).

Spectre de bruit thermique

L'avantage de travailler avec des modes acoustiques d'indices pairs est que leur profil spatial présente un ventre au centre du pont. Ainsi l'intégrale de recouvrement entre le profil du mode mécanique et le mode fondamental TEM_{00} de la cavité est maximal (terme $\langle u, v_0^2 \rangle$ dans l'expression (2.22) du déplacement effectif vu par le mode fondamental). Même si on perd en sensibilité du fait que les modes mécaniques ont des fréquences plus grandes que la bande passante de la cavité, la sensibilité reste suffisante pour observer directement le déplacement du résonateur sur le bruit de phase du faisceau réfléchi par la cavité, comme nous l'avons fait dans les chapitres 3 et 4 avec des cavités plus courtes.

Sur la figure 6.14 est représenté un spectre de bruit thermique obtenu sur un plage de fréquences comprises entre 4 et 6 MHz : nous observons trois pics d'environ 20 dB de dynamique par rapport au plancher de bruit. La mesure a été effectuée loin de la condition de résonance du couplage à trois modes, la longueur L étant telle que $\Delta\nu \gg \nu_m$; de cette manière nous sommes certains qu'aucun des modes mécaniques n'est affecté par les effets du couplage à trois modes. Un ajustement lorentzien des trois pics permet d'obtenir leur fréquence de résonance et leur facteur de qualité, reportés sur la figure. Les valeurs obtenues pour les facteurs de qualité sont en général inférieures aux valeurs habituelles d'environ

10 000 pour les micro-résonateurs de plus grande épaisseur, ce qui est certainement dû aux contraintes mécaniques créées par les couches diélectriques.

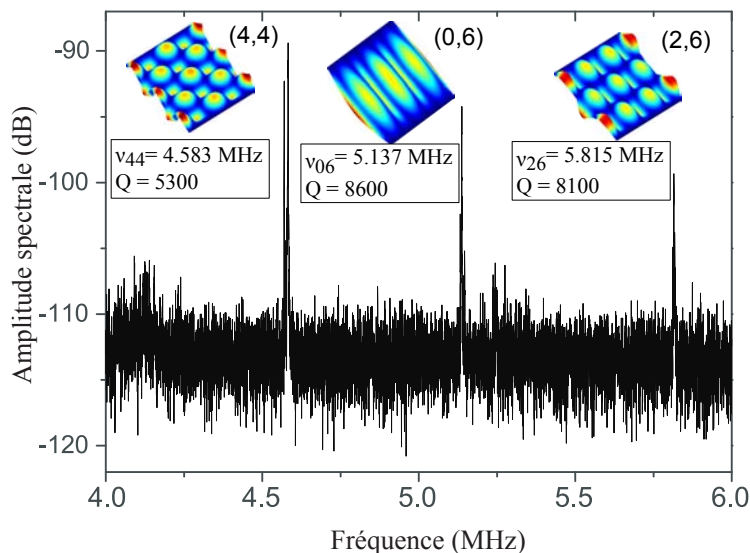


FIGURE 6.14 – Spectre de bruit thermique obtenu sur une plage de 4 à 6 MHz, avec le pont doublement encasturé de $1000 \times 800 \mu\text{m}^2$ et de $30 \mu\text{m}$ d'épaisseur. Les modes mécaniques sont repérés par leurs indices longitudinal et transverse.

Comme les fréquences de résonance sont assez rapprochées et les facteurs de qualité du même ordre de grandeur, nous avons recouru au banc de test mécanique basé sur un interféromètre de Michelson, déjà décrit dans la section 3.6.2, pour identifier les modes : le résonateur placé dans l'un des bras est excité par une cale piézo-électrique et peut être déplacé transversalement pour déterminer le profil spatial du mode mécanique excité. Nous avons utilisé pour ce test une copie du résonateur utilisé dans la cavité, lui aussi avec un dépôt diélectrique à sa surface et par conséquent courbé. J'ai commencé par mesurer un spectre de bruit thermique de ce micro-miroir et déterminé ses fréquences de résonance mécanique dans la plage de 0 à 6 MHz ; en déplaçant le point d'impact du faisceau le long des axes du résonateur et en observant la variation de l'amplitude de la réponse spectrale à chaque fréquence, j'ai ensuite déterminé avec certitude le mode acoustique correspondant à chaque résonance. Les fréquences des modes pairs ainsi mesurées sont reportées dans la deuxième colonne de la table 6.1 ; notons en particulier que le mode (4,4) a une fréquence de résonance inférieure à celle du (0,6), ce qui aurait été difficile à établir par la simple observation du spectre, puisque l'inverse était attendu d'après les simulations numériques. Les fréquences des mêmes modes mesurées pour le micro-miroir monté dans la cavité sont légèrement différentes (troisième colonne du tableau), mais il est néanmoins possible de les identifier sans ambiguïté.

Les trois modes observés dans la plage de 4 à 6 MHz correspondent donc respectivement aux modes (4,4), (0,6) et (2,6). J'ai calculé la valeur du recouvrement spatial avec

le profil du mode optique TEM_{04} ; les valeurs obtenues sont reportées dans la dernière colonne de la table 6.1. Notons en particulier que les valeurs pour les modes (0,6) et (2,6) sont très proches, autour de $\Lambda = 5\%$. Aussi, comme les facteurs de qualité mesurés sont également comparables, les deux modes sont des candidats équivalents pour observer l'effet du couplage à trois modes.

MEMS à pont ($1000 \times 800 \times 30 \mu\text{m}^3$)	Fréquence ν_m (kHz)			Recouvrement spatial Λ
	simulation FEM	mesure Mich.	mesure cavité	
mode (0,2)	595	592	576	-
mode (0,4)	2 140	2 296	2 234	-
mode (0,6)	4 899	5 267	5 137	0.0585
mode (4,4)	5 098	4 718	4 583	0.0035
mode (2,6)	5 867	5 967	5 815	0.0506

TABLE 6.1 – Table des fréquences de résonance des modes acoustiques du micro-miroir de taille $1000 \times 800 \times 30 \mu\text{m}^3$. La dernière colonne donne la valeur calculée de l'intégrale de recouvrement Λ .

Cartographie des modes

Nous avons mesuré le profil spatial de chaque mode mécanique, sur presque toute la surface du résonateur, par la méthode que nous avons déjà décrite dans la section 3.6.2 : en déplaçant le point d'impact du faisceau sur un réseau qui couvre toute la largeur (y) et $2/3$ de la longueur (x) du micro-résonateur, on enregistre la réponse mécanique d'un mode donné par pas de $15 \mu\text{m}$ le long de l'axe y et de $20 \mu\text{m}$ le long de l'axe x . Le profil résultant pour le mode (0, 6), obtenu par interpolation des 30×60 valeurs mesurées, est représenté sur la figure 6.15. On peut remarquer que les lobes suivent légèrement la déformation du résonateur liée aux couches diélectriques, mais qu'on retrouve bien le profil attendu. La déformation pourrait donc modifier légèrement la valeur du recouvrement Λ calculée en utilisant le profil spatial obtenu par la simulation par éléments finis.

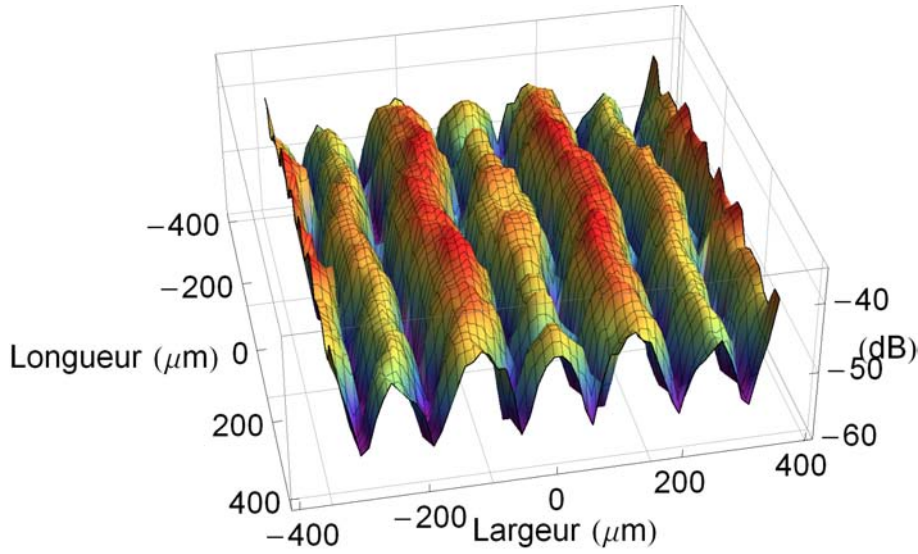


FIGURE 6.15 – Cartographie du mode mécanique (0,6) du résonateur en forme de pont de taille $1000 \times 800 \times 30 \mu\text{m}$, obtenue avec le banc de test utilisant un interféromètre de Michelson.

6.3 Mise en évidence du couplage optomécanique à trois modes

D'après ce qui a été expliqué dans la section 5.2, on doit observer une variation de la température effective et des paramètres mécaniques du résonateur lorsque la condition d'accord de fréquence $\Delta\nu = \pm\nu_m$ est vérifiée, où ν_m est la fréquence de résonance de l'un des modes mécaniques identifiés dans la partie précédente. Les effets attendus doivent être proportionnels à la valeur du gain paramétrique \mathcal{R} défini dans le chapitre précédent (équation (5.29)). Ce sont ces effets que nous allons mettre en évidence expérimentalement dans cette partie, en nous appuyant sur les caractérisations optomécaniques de la cavité et du résonateur présentées dans les sections précédentes.

6.3.1 Spectres de bruit thermique pour différents désaccords

Nous présentons sur les figures 6.16 et 6.17 deux séries de spectres de bruit thermique du mode propre (0,6) à $\nu_m = 5.137 \text{ MHz}$ du nouveau micro-résonateur, chaque série correspondant à des écarts $\Delta\nu$ différents entre les deux modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} , au voisinage de la résonance de la bande Stokes pour les courbes de gauche ($\Delta\nu \simeq -\nu_m$), et de la bande anti-Stokes pour celles de droite ($\Delta\nu \simeq +\nu_m$). Nous avons fait l'acquisition de 5192 points pour chaque spectre, avec une résolution spectrale de 10 Hz et une cinquantaine de moyennes. Les spectres sont calibrés à l'aide d'un pic de modulation (non visible sur la figure) obtenu en appliquant au modulateur électro-optique non résonnant un signal

de fréquence proche de la résonance du mode mécanique.

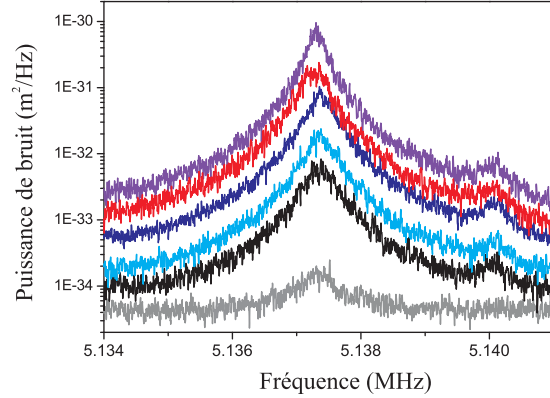


FIGURE 6.16 – Spectres de bruit thermique du mode mécanique (0,6) pour différentes valeurs de $\Delta\nu$ au voisinage de la résonance $-\nu_m$ du processus Stokes. La courbe noire correspond au spectre observé loin de la résonance.

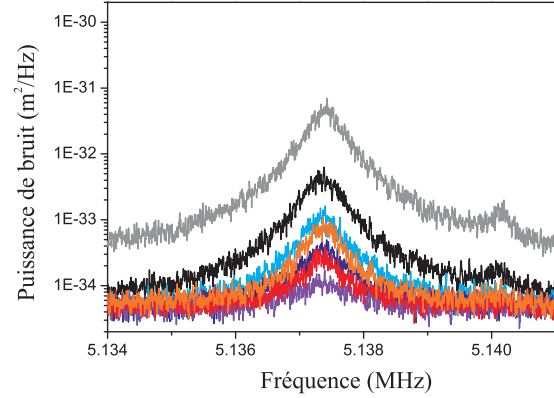


FIGURE 6.17 – Spectres de bruit thermique du mode mécanique (0,6) pour différentes valeurs de $\Delta\nu$ au voisinage de la résonance $+\nu_m$ du processus anti-Stokes. La courbe noire correspond au spectre observé loin de la résonance.

Pour chaque figure, le spectre en noir est enregistré suffisamment loin de la condition d'accord de fréquences pour correspondre au spectre de bruit thermique obtenu en l'absence du processus à trois modes. En pratique, la cavité est raccourcie ou allongée de quelques dizaines de microns par rapport à la longueur de dégénérescence (voir la figure 6.11). Par exemple, la courbe noire de gauche a été enregistrée pour une longueur L telle que $\Delta\nu \simeq -7.2$ MHz. Un ajustement lorentzien de ce spectre permet ainsi de déterminer les paramètres optomécaniques du mode : fréquence propre $\nu_m = 5.1374$ MHz, amortissement $\Gamma/2\pi = 600$ Hz et masse effective $M = 95 \mu\text{g}$.

La position du moteur pas-à-pas étant fixée sur la valeur la plus proche de la résonance du processus à trois modes, nous avons fait varier finement la longueur de la cavité en appliquant différentes tensions continues à la cale piézoélectrique sur laquelle est monté le micro-miroir. Les spectres représentés sur la figure 6.16, de couleur allant du bleu au rouge, ont été obtenus pour des valeurs croissantes de la tension sur la cale piézoélectrique, soit pour des longueurs L croissantes et des valeurs de $\Delta\nu$ de plus en plus proches de $-\nu_m$. On constate une variation du niveau de bruit thermique, qui augmente jusqu'à atteindre un maximum (courbe violette) pour ensuite diminuer de nouveau (courbe rouge). Un ajustement lorentzien de chaque spectre permet d'extraire les paramètres optomécaniques et de vérifier que la variation de l'amortissement se fait en sens inverse de celle de l'amplitude du spectre : en se rapprochant de la résonance, Γ_{eff} atteint un minimum (courbe violette), pour ensuite augmenter de nouveau.

Des mesures similaires réalisées dans les conditions de résonance du processus anti-Stokes (figure 6.17), c'est-à-dire pour des longueurs L supérieures, révèlent un effet inverse :

en fonction de la tension continue appliquée à la cale piézoélectrique, on constate une diminution progressive de l'amplitude jusqu'à atteindre un minimum (courbe violette), avant d'augmenter à nouveau (courbes rouge et orange), tandis que l'amortissement évolue de manière inverse.

Selon le processus Stokes ou anti-Stokes mis en jeu, on obtient ainsi un rapport $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ entre les amortissements effectif et propre du mode mécanique (0,6) qui varie entre 3.2 au maximum en régime de résonance anti-Stokes, jusqu'à 0.6 au minimum en régime Stokes. Cette modification de l'amortissement est associée à un effet de refroidissement ou de chauffage du mode mécanique, puisque la puissance de bruit thermique est respectivement amplifiée en régime Stokes (figure 6.16) et réduite en régime anti-Stokes (figure 6.17). A partir des ajustements lorentziens, on peut calculer l'aire des spectres et en déduire la variation de température. On atteint ainsi une température minimale T_{eff} de 30 K en régime anti-Stokes, et maximale de 30 000 K environ.

On peut noter que les variations de température observées correspondent à un rapport T/T_{eff} respectivement égal à 10 et 0.01. Ces valeurs sont différentes du rapport $\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma$ des amortissements, alors qu'on s'attend d'après les équations (5.22) et (5.27) à ce que ces deux quantités aient la même valeur, du moins dans le régime classique ($n_{\text{T}}^{\text{eff}} \gg n_{\text{Q}}$) : $T/T_{\text{eff}} \simeq \Gamma_{\text{eff}}/\Gamma = 1 - \mathcal{R}$. Comme il est probable qu'il s'agisse d'un défaut de calibration lors de la mesure, nous avons préféré dans la suite étudier la variation de l'amortissement Γ_{eff} , qui est uniquement reliée à la largeur des spectres de bruit observés et dépend donc a priori assez peu des imperfections de la mesure.

Remarquons finalement qu'à côté de l'augmentation du niveau de bruit observée dans le régime Stokes (figure 6.16), on observe également pour une longueur L légèrement différente une diminution de ce niveau (courbe grise), correspondant plutôt à un refroidissement par rapport au régime thermique (courbe noire). De même, à côté de la réduction du niveau de bruit dans le régime anti-Stokes, on observe une augmentation de ce niveau (courbe grise sur la figure 6.17). Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Le même type de mesure a été réalisé pour les modes mécaniques (4,4) et (2,6), en parvenant à des résultats similaires à ceux obtenus pour le mode (0,6) : on observe là encore une réduction et une augmentation de la température effective au voisinage des conditions de résonance des processus anti-Stokes et Stokes, pour une longueur de cavité différente pour chaque mode. Les températures minimales atteintes dans le régime anti-Stokes sont de 23 K pour le mode (4,4) et 50 K pour le (2,6), tandis que dans le régime Stokes on observe une augmentation de la température effective, jusqu'à environ 25 000 pour le (4,4) et 15 000 pour le (2,6). Les valeurs obtenues pour le mode (2,6) sont systématiquement moins importantes que pour les deux autres modes mécaniques, contrairement à ce qu'on attendrait du recouvrement spatial Λ , et donc du gain paramétrique, que nous avons calculé dans la section précédente (table 6.1).

6.3.2 Refroidissement dans le régime anti-Stokes

Pour une analyse plus quantitative de la variation des paramètres optomécaniques, et notamment de l'amortissement Γ_{eff} , il est nécessaire de tracer les valeurs de ces paramètres obtenues pour différents $\Delta\nu$. Nous avons ainsi effectué pour chaque pas du moteur une dizaine de mesures de spectres de bruit, en appliquant une tension continue sur la cale piézoélectrique du micro-miroir, sur une plage de ± 200 V. Ceci permet de faire varier la longueur L de la cavité sur environ $2 \mu\text{m}$, ce qui reste insuffisant pour apprécier pleinement la résonance du processus à trois modes. Nous avons donc combiné les déplacements produits par le moteur et ceux de la cale, en calibrant les déplacements de façon à pouvoir reconstruire la dépendance des paramètres optomécaniques sur une large plage, d'environ $10 \mu\text{m}$.

Calibration de la longueur de la cavité

La facteur de conversion $\Delta\nu/\Delta L$ permettant de relier l'écart en fréquence au pas du moteur de $1.25 \mu\text{m}$ a déjà été caractérisé dans la section précédente, en observant les pics d'Airy des deux modes optiques en transmission (figure 6.11). Nous n'avons pas utilisé la même méthode pour calibrer les déplacements de la cale, car ceux-ci sont de plus faible amplitude et cela rend la mesure des pics d'Airy trop imprécise du fait des dérives et vibrations de la cavité. Nous avons donc estimé les déplacements à partir des valeurs mesurées des paramètres optomécaniques, selon le procédé suivant. Il est en fait possible d'observer l'effet de l'interaction à trois modes pour deux positions successives du moteur, comme le montre la figure 6.18 qui reporte l'amortissement effectif Γ_{eff} pour différentes tensions de la cale, et pour les deux positions du moteur. Les ajustements lorentziens de la résonance du processus à trois modes observé dans les deux positions permet de connaître avec précision l'écart en tension $\Delta V = 274$ V qui déplace la cale d'une longueur égale à un pas du moteur, soit $1.25 \mu\text{m}$. Ceci nous donne un facteur de conversion de la tension appliquée à la cale de $219 \text{ V}/\mu\text{m}$. Remarquons que l'amplitude de déplacement de la cale est d'environ 2 microns, ce qui permet de couvrir complètement l'intervalle de longueur entre deux positions consécutives du moteur et d'effectuer ainsi des mesures de spectre en faisant varier $\Delta\nu$ de manière très uniforme.

Ce facteur de conversion permet de raccorder toutes les séries de mesures faites à différentes tensions sur la cale, chaque série correspondant à une position du moteur, et de tracer les paramètres optomécaniques en fonction de la variation de longueur globale L , somme des variations de position du moteur et de la cale. Sur la figure 6.19 sont représentées les valeurs de l'amortissement effectif Γ_{eff} de tous les spectres mesurés pour le mode mécanique (0,6), autour du régime anti-Stokes. A chaque position du moteur, repéré par une couleur différente sur la figure, nous avons acquis entre 5 et 15 spectres et reporté les valeurs correspondantes, convenablement décalées horizontalement selon la position du moteur. On constate que les séries se recouvrent bien, et seul subsiste une longueur "0" de

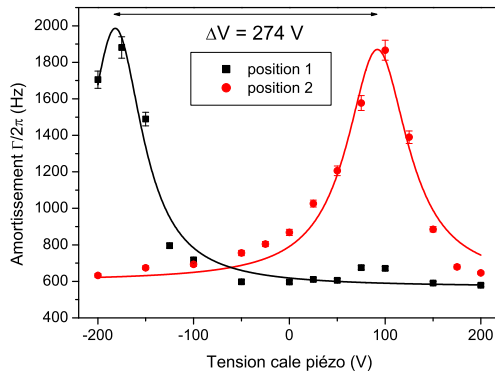


FIGURE 6.18 – Deux séries de valeurs de l’amortissement effectif Γ_{eff} , obtenues pour deux positions du moteur et plusieurs valeurs de tension sur la cale. La résonance du couplage à trois modes observée correspond à la même longueur de la cavité, ce qui permet de relier la variation de tension sur la cale au pas de $1.25 \mu\text{m}$ du moteur.

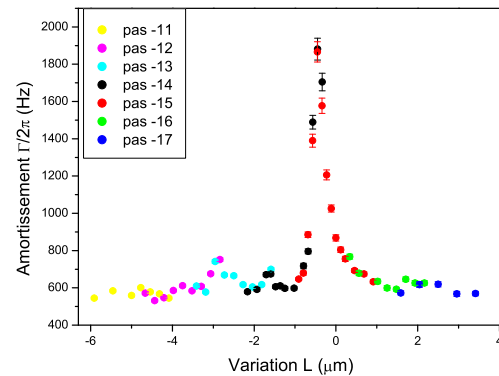


FIGURE 6.19 – Valeurs de l’amortissement effectif Γ_{eff} déduites des spectres mesurés à différentes longueurs, sur une plage d’une dizaine de microns. Les couleurs discriminent les séries relatives aux différents pas du moteur. Chaque point correspond à une tension différente appliquée à la cale piézoélectrique du micro-miroir. Les points en noir correspondent à la série “position 1” de la figure 6.18 et ceux en rouge à la série “position 2”

référence qui est arbitraire. Par ailleurs, en supposant la variation de l’écart en fréquence $\Delta\nu$ linéaire dans l’intervalle de longueurs considéré, il est alors facile de convertir les longueurs en écart $\Delta\nu$, à l’aide des résultats de la section précédente (figure 6.11).

L’amortissement $\Gamma_{\text{eff}}/2\pi$ du mode (0,6) varie sur la plage observée de 600 Hz (sa valeur standard) à 1.9 kHz environ, quand l’interaction à trois modes est résonnante. J’ai répété le même processus de mesure, d’analyse et de calibration pour les modes (4,4) et (2,6). Il apparaît une variation de l’amortissement de ces modes similaire à celle du mode (0,6) : l’amortissement du mode (4,4) vaut 870 Hz hors de la zone d’interaction à trois modes, où il atteint la valeur de 2.2 kHz; celui du mode (2,6) passe de 720 Hz à 2.9 kHz quand l’interaction est résonnante.

Résultats

Les trois séries complètes des valeurs de l’amortissement pour les trois modes mécaniques peuvent maintenant être tracées en fonction de la différence de fréquences $\Delta\nu$ (figure 6.20), en utilisant le taux de conversion de $254 \text{ kHz}/\mu\text{m}$ mesuré expérimentalement (voir la figure 6.11). Pour fixer la longueur de référence “0” commune à toutes ces séries, nous avons arbitrairement identifié l’écart $\Delta\nu$ correspondant au maximum de l’amortissement du mode (0,6) (points en noir sur la figure) avec la fréquence de résonance de ce mode ($\nu_m = 5.137 \text{ MHz}$). Les autres séries (points rouges pour le mode (4,4) et points verts pour le mode (2,6)) étant déplacées de la même quantité, cela permet d’estimer les

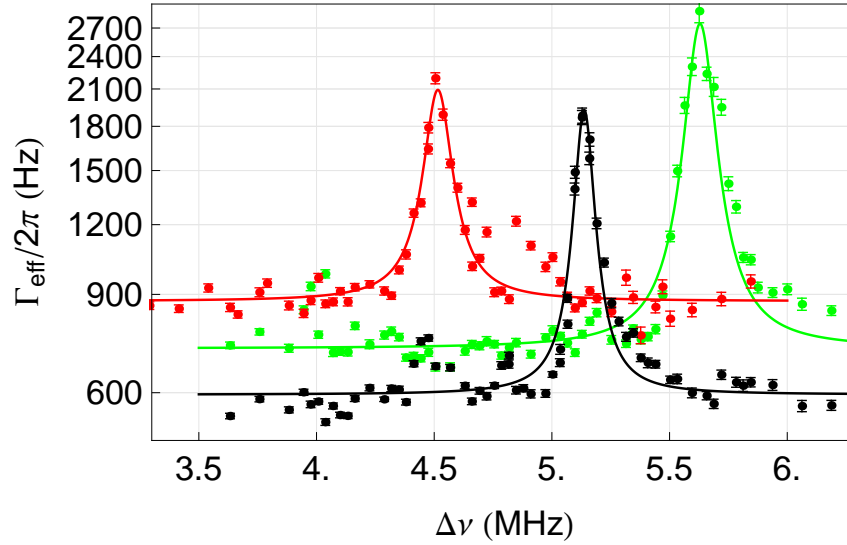


FIGURE 6.20 – Évolution de l'amortissement effectif Γ_{eff} des modes mécaniques (0,6) (noir), (4,4) (rouge) et (2,6) (vert) en fonction de la différence $\Delta\nu$ de fréquence entre les modes optiques TEM_{04} et TEM_{00} . Les ajustements (courbes en traits pleins) sont obtenus à partir des expressions théoriques du chapitre 5 et pour les paramètres donnés dans la table 6.2.

fréquences de résonance du processus anti-Stokes pour ces deux modes mécaniques : elles valent respectivement 4.52 MHz et 5.6 MHz. Cela confirme que chaque mode manifeste effectivement une augmentation de l'amortissement effectif au voisinage immédiat de la condition $\Delta\nu = \nu_m$. La légère discordance (de 60 et 200 kHz respectivement) entre les valeurs de $\Delta\nu$ et celles des fréquences de résonance mécanique est sans doute à attribuer à l'imprécision de la calibration des mesures en fonction de $\Delta\nu$.

L'amortissement effectif Γ_{eff} est relié au gain paramétrique \mathcal{R} par l'expression (5.22), et dépend à travers ce dernier de différents paramètres optomécaniques (voir les équations (5.24) et (5.29)), tels que la puissance incidente $P_{\text{in}} = 5 \text{ mW}$, la bande passante $\nu_{\text{BP}} = \Omega_1/2\pi \simeq 92 \text{ kHz}$ du mode transverse TEM_{04} , les finesses optiques et facteur de qualité mécanique, l'intégrale de recouvrement spatial Λ , ou encore les masses effectives des modes mécaniques qui peuvent être obtenues expérimentalement à partir des ajustements des spectres thermiques et valent $M = 95 \mu\text{g}$, $50 \mu\text{g}$ et $55 \mu\text{g}$ pour les modes (0,6), (4,4) et (2,6) respectivement.

Comme prédit théoriquement, on obtient sur la figure 6.20 une forme lorentzienne pour la courbe donnant Γ_{eff} en fonction de la fréquence, autour de la fréquence de résonance et de largeur en principe égale à la bande passante du mode transverse TEM_{04} . Les fréquences centrales ν_{fit} et les demi-largeurs $\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ peuvent être obtenues à partir des ajustements et sont données dans le tableau 6.2. La dernière colonne du tableau donne les valeurs du gain paramétrique \mathcal{R} déduites de la hauteur de l'ajustement lorentzien ($\Gamma_{\text{eff}}/\Gamma = 1 - \mathcal{R}$), à

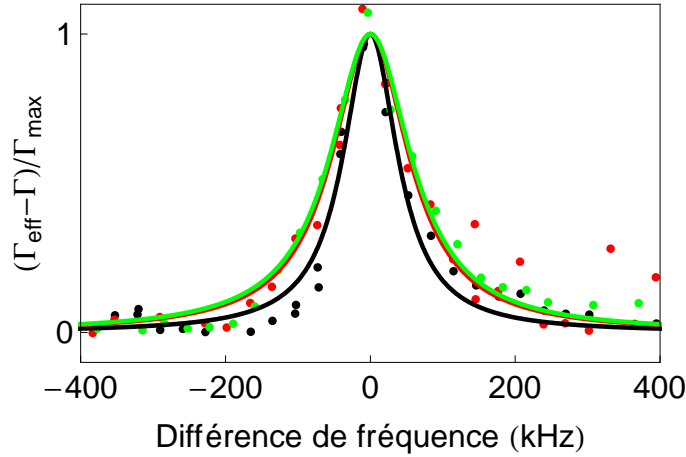


FIGURE 6.21 – Variation $\Gamma_{\text{eff}} - \Gamma$ de l’amortissement, normalisée à 1, pour les modes acoustiques (0,6) (points noirs), (4,4) (points rouges) et (2,6) (points verts), en fonction de l’écart $\Delta\nu - \nu_m$ à la résonance du processus anti-Stokes. Les ajustements lorentziens (traits continus) sont déduits de l’expression (5.24) et des paramètres donnés dans la table 6.2.

partir duquel on peut calculer la valeur du recouvrement spatial Λ_{fit} à l’aide de l’expression (5.29). Les valeurs de ν_{fit} et de Λ_{fit} sont comparées à celles attendues (ν_m et Λ).

mode	ν_m (MHz)	M (μg)	Λ	ν_{fit} (MHz)	$\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ (kHz)	Λ_{fit}	\mathcal{R} observé
(0,6)	5,137	95	0.0585	—	43	0.012	-2.16
(4,4)	4,58	50	0.0035	4,52	63	0.005	-1.53
(2,6)	5,81	55	0.0506	5,6	73	0.011	-3.03

TABLE 6.2 – Paramètres du processus anti-Stokes, avec les caractéristiques mécaniques (fréquence de résonance ν_m et masse M) et la valeur calculée Λ de l’intégrale de recouvrement spatial ; les autres paramètres sont déduits des observations du régime anti-Stokes : fréquence de résonance ν_{fit} et demi-largeur $\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ du processus, intégrale de recouvrement Λ_{fit} et gain paramétrique \mathcal{R} déduits.

Pour mettre en exergue le caractère résonnant du processus anti-Stokes pour les 3 modes mécaniques considérés, la figure 6.21 présente l’évolution de l’amortissement mécanique, normalisé à ses valeurs maximale et minimale, en fonction de l’écart à la résonance du processus anti-Stokes : la largeur commune des trois courbes (obtenues pour 3 modes mécaniques de largeurs mécaniques différentes) atteste de ce que la largeur de la résonance est bien d’origine optique.

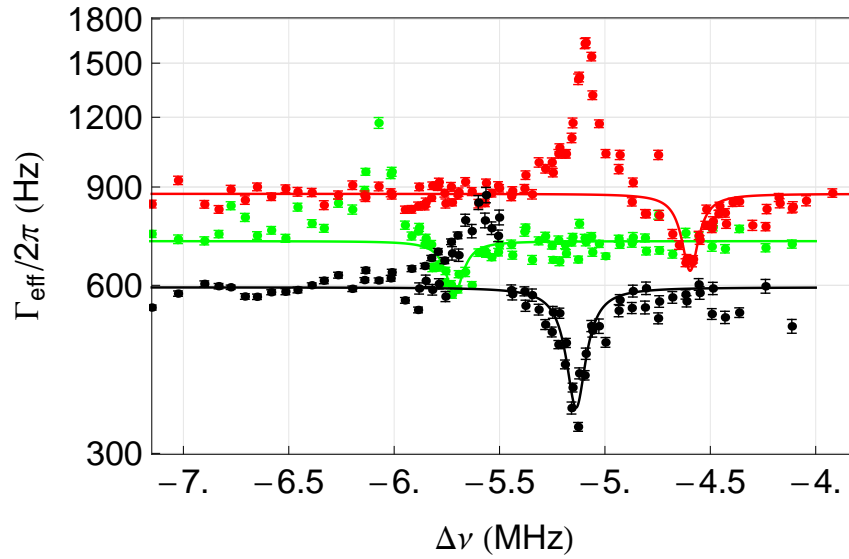


FIGURE 6.22 – Évolution de l'amortissement effectif Γ_{eff} des modes mécaniques (0,6) (noir), (4,4) (rouge) et (2,6) (vert) en fonction de la différence $\Delta\nu$ de fréquences entre les modes optique TEM_{04} et TEM_{00} , autour des résonances Stokes. Les ajustements (courbes en traits pleins) sont obtenus à partir des expressions théoriques du chapitre 5 et pour les paramètres donnés dans la table 6.3.

6.3.3 Chauffage dans le régime Stokes

Nous avons répété les mêmes mesures de spectre de bruit thermique des trois modes mécaniques en faisant varier la longueur L dans la plage autour de $\Delta\nu = -\nu_m$, où le mode optique TEM_{04} est résonnant avec la bande Stokes. On observe dans ces conditions une diminution de l'amortissement et une augmentation simultanée de la température effective du résonateur. La même procédure que celle décrite dans le cas anti-Stokes est utilisée pour déterminer l'amortissement effectif Γ_{eff} à partir des spectres de bruit thermique, et son évolution avec l'écart en fréquence $\Delta\nu$ est finalement représenté sur la figure 6.22. L'ajustement des amortissements effectifs suit toujours les expressions (5.24) et (5.29), où le gain paramétrique \mathcal{R} est maintenant positif. Les valeurs obtenues pour les paramètres sont reportées dans le tableau 6.3 (pour $P_{\text{in}} = 5 \text{ mW}$). Les demi-largeurs $\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ déduites des ajustements sont comparables à celles mesurées du côté anti-Stokes.

En ce qui concerne les autres paramètres, nous attendions des valeurs comparables au cas anti-Stokes, hormis bien sûr pour le signe du gain paramétrique. Nous constatons cependant une diminution de la valeur absolue de ce gain, qui conduit aussi à une diminution de l'intégrale de recouvrement spatial entre les trois modes, qui pourrait être due à une modification du centrage de la cavité sur le micro-miroir lors du passage du mode TEM_{04} d'un côté à l'autre du mode fondamental TEM_{00} .

On note sur les valeurs de l'amortissement effectif Γ_{eff} présentées sur la figure 6.22 que

mode	ν_m (MHz)	M (μg)	Λ	ν_{fit} (MHz)	$\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ (kHz)	Λ_{fit}	\mathcal{R} observé
(0,6)	5,137	95	0.0585	—	74	0.002	0.4
(4,4)	4,58	50	0.0035	-4,47	65	0.001	0.3
(2,6)	5,81	55	0.0506	-5,76	77	0.0008	0.2

TABLE 6.3 – Paramètres du processus Stokes, avec les caractéristiques mécaniques (fréquence de résonance ν_m et masse M) et la valeur calculée Λ de l'intégrale de recouvrement spatial ; les autres paramètres sont déduits des observations du régime Stokes : fréquence de résonance ν_{fit} et demi-largeur $\nu_{\text{BP}}^{\text{fit}}$ du processus, intégrale de recouvrement Λ_{fit} et gain paramétrique \mathcal{R} déduits.

l'amortissement augmente pour des écarts $\Delta\nu$ situés à gauche de la résonance du processus Stokes, et cela pour chaque mode mécanique. Cet effet inattendu était déjà visible, comme nous l'avons déjà noté, sur les spectres de bruit thermique de la figure 6.16, où la courbe grise a un niveau de bruit correspondant à un refroidissement du résonateur. Nous n'avons pas clairement identifié la source de cet effet parasite, et nous n'avons pu que constater la présence quasi-simultanée d'un autre mode mécanique chauffé par couplage à trois modes : ainsi, le maximum de l'amortissement du mode (4,4) (points rouges sur la figure 6.22) est atteint pour un écart $\Delta\nu$ correspondant à la résonance du processus Stokes pour le mode mécanique (0,6) (points noirs).

Nous avons également étudié et représenté sur la figure 6.23 l'évolution de la fréquence de résonance $\Omega_{\text{eff}}/2\pi$ des trois modes mécaniques en fonction de $\Delta\nu$, lors de l'interaction Stokes. On observe un bon accord entre les points expérimentaux et l'ajustement théorique donné par l'expression (5.25), autour des valeurs centrales $\Delta\nu \simeq -\nu_m$ de chaque mode. On observe un désaccord plus important sur l'aile gauche de chaque résonance, qui pourrait être dû à l'effet parasite de refroidissement que nous venons d'indiquer.

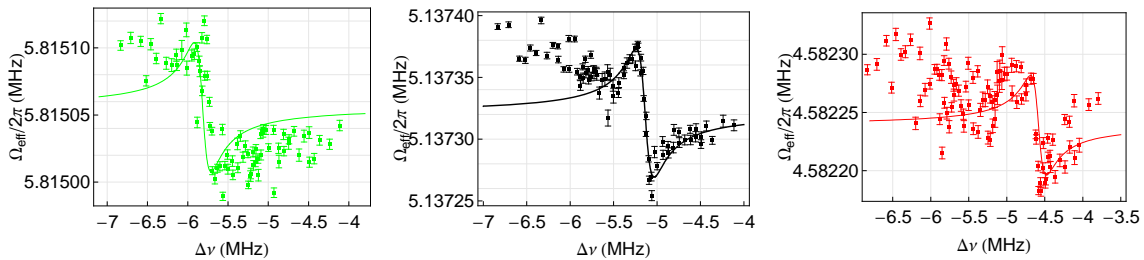


FIGURE 6.23 – Évolution de la fréquence de résonance $\Omega_{\text{eff}}/2\pi$ des trois modes mécaniques (2,6), (0,6) et (4,4) (de gauche à droite), en fonction de l'écart $\Delta\nu$ autour des résonances Stokes. Les ajustements sont obtenus à partir de l'expression (5.25).

En conclusion, nous avons observé une modification claire de l'amortissement du résonateur, dans des conditions correspondant au couplage à trois modes : cette modification a

en effet été observée sur plusieurs modes mécaniques, et elle correspond bien à un chauffage du résonateur du côté Stokes, et à son refroidissement du côté anti-Stokes. Par ailleurs elle présente un caractère résonant de largeur compatible avec la bande passante de la cavité. Une étude plus poussée, dont les grandes lignes sont présentées dans le chapitre suivant, serait nécessaire pour confirmer ces effets au niveau de la température effective du résonateur, ou pour mieux comprendre certains effets parasites observés dans ces premières expériences.

Conclusion

Le couplage optomécanique entre la lumière et un micro-résonateur mécanique permet de modifier la dynamique du résonateur grâce à l'action de la pression de radiation, ce qui permet d'envisager de refroidir l'oscillateur mécanique jusqu'à atteindre son état quantique fondamental. C'est dans ce cadre que s'inscrit mon travail de thèse au Laboratoire Kastler Brossel : après les premières démonstrations d'observation ultra-sensible du mouvement thermique d'un micro-résonateur et de refroidissement laser en partant de la température ambiante, réalisées en 2006, je me suis attachée à mettre en place des processus de refroidissement laser capables d'amener le résonateur dans son état quantique fondamental, et combinable avec des dispositifs cryogéniques.

Le premier objectif de ce travail de thèse a ainsi été de vérifier la possibilité de combiner mesure optique ultra-sensible et cryogénie, en plaçant une cavité de grande finesse dans un cryostat à hélium liquide. En deuxième lieu, nous nous sommes intéressés à un nouveau type de refroidissement laser qui couple deux modes optiques à un mode mécanique du résonateur, et démontré expérimentalement son efficacité.

Nous avons commencé par présenter dans le deuxième chapitre le cœur de notre dispositif, la cavité Fabry-perot dont un miroir est déposé sur un micro-résonateur, avec son mouvement qui peut être décrit comme celui d'un simple oscillateur harmonique ; sa description semi-classique a permis de montrer un certain nombre de conséquences du couplage optomécanique, et notamment le principe du refroidissement laser. L'effet de la pression de radiation dans une cavité désaccordée peut être décomposé en deux contributions : un terme conservatif responsable de l'effet de ressort optique du micro-miroir et un terme visqueux qui modifie l'amortissement et la température effective du micro-résonateur. Ce mécanisme de refroidissement (ou de chauffage) par couplage dynamique peut être interprété comme un processus de diffusion inélastique, en analogie avec la physique moléculaire, et dans le cas où le processus anti-Stokes de refroidissement est le seul à avoir lieu (régime des bandes latérales résolues), on démontre que ce refroidissement optique est optimal et peut amener le résonateur dans son état quantique fondamental.

Dans le chapitre 3, nous décrivons le montage expérimental utilisé au cours de cette

thèse : la source laser composée principalement d'un laser accordable Nd:YAG commercial et d'une cavité de filtrage spatial ; le système de modulation-démodulation Pound-Drever-Hall pour l'asservissement de la fréquence du laser et pour la mesure des fluctuations de phase du faisceau réfléchi par la cavité à micro-miroir, proportionnelles au mouvement de ce dernier. Avec cette cavité rigide de finesse de l'ordre de 20 000, nous avons mesuré le spectre de bruit thermique du micro-résonateur mécanique sur une large plage de fréquences et étudié les caractéristiques de plusieurs de ses modes mécaniques en les comparant aux résultats calculés par simulation par éléments finis. Nous montrons également le spectre sur une large bande de fréquences (jusqu'à 9 MHz), mesuré avec une cavité non rigide à micro-miroir de finesse 7 000 environ, avec une sensibilité de $5 \times 10^{-17} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ à une fréquence d'analyse de 3 MHz.

Nous avons conclu ce chapitre en décrivant deux montages mis en place spécifiquement pour le test mécanique des micro-résonateurs. Le premier est basé sur la détection avec une photodiode à quadrants de la déflexion du faisceau réfléchi par le micro-résonateur, excité électrostatiquement. Ce système présentant des risques pour l'intégrité du résonateur, un montage plus polyvalent a été réalisé au laboratoire en se basant sur un interféromètre de Michelson et une excitation piézoélectrique du micro-résonateur. En balayant le faisceau laser à la surface du résonateur, on obtient la cartographie du profil spatial des modes mécaniques correspondant à chaque fréquence de résonance observée sur le spectre.

Le quatrième chapitre décrit le cryostat à hélium liquide ainsi que la cavité conçue pour le fonctionnement dans un environnement cryogénique. Puisque la cryogénie est une technique plutôt nouvelle en association avec les mesures optiques de grande sensibilité, il nous a semblé opportun de commencer par étudier le comportement de la cavité de grande finesse dans un cryostat à He₄ liquide. Nous avons donc construit une nouvelle cavité qui grâce aussi aux caractéristiques du cryostat s'est révélée mécaniquement assez stable, ce qui a permis de mesurer le spectre de bruit thermique du micro-miroir et d'analyser ses propriétés mécaniques à froid.

La calibration des spectres de bruit thermique à basse température, essentielle pour établir avec précision la température à laquelle se thermalise le micro-résonateur, a présenté néanmoins des difficultés : la calibration effectuée suivant le signal d'erreur Pound-Drever-Hall a donné des résultats discordants avec celle faite à l'aide d'un pic de modulation de fréquence du laser. Parallèlement, nous avons mesuré des variations de finesse et de bande passante lors des descentes à froid, et lors des manipulations de la cavité, ce qui nous a poussé à chercher à interpréter ces variations comme une conséquence d'un comportement biréfringent de la cavité, qui diffère à températures ambiante et cryogénique. Nous avons ainsi étudié d'un point de vue théorique et expérimental les effets de la biréfringence sur la cavité et avons trouvé que dans une cavité biréfringente, lorsque la polarisation du faisceau incident ne correspond à aucun des axes propres, même si le faisceau semble accordé à la résonance de la cavité, aucun des deux modes propres n'est à résonance ; ce désaccord

entraîne alors un effet de refroidissement ou de chauffage par pression de radiation, qui modifie la température effective mesurée pour le mode mécanique. L'étude expérimentale menée en fonction de l'angle de polarisation du faisceau incident confirme notre analyse théorique : l'amortissement effectif varie avec l'angle, même si la cavité semble asservie sur la résonance.

Nous avons finalement contourné cet inconvénient en attaquant en polarisation linéaire la plus proche possible de l'un des axes propres de la cavité à température ambiante et à froid (les axes ne coïncident pas nécessairement lors d'une descente à froid puisque les contraintes sur la structure de la cavité sont évidemment modifiées). Nous avons ainsi pu appliquer le refroidissement laser en partant d'une température cryogénique. Nous avons cherché à trouver un compromis entre une bonne thermalisation, qui implique un contact thermique important avec le micro-résonateur et le miroir, et l'effet de biréfringence qu'un serrage trop important induit. Ainsi les deux mesures effectuées avec le faisceau polarisé le long des deux axes de la cavité ont montré que la température de thermalisation du micro-miroir n'est que d'une vingtaine de kelvins avec le cryostat utilisé. En désaccordant la cavité, nous avons obtenu une réduction supplémentaire de la température effective, jusqu'à 6 K environ. Cette température évidemment reste loin de la température quantique recherchée ; cependant, l'essai avec ce cryostat à hélium liquide nous a permis de mener des tests de faisabilité d'une expérience d'optique ultrasensible en régime cryogénique et a constitué une étape essentielle pour déterminer les caractéristiques nécessaires de stabilité mécanique, de puissance frigorifique, etc., souhaitées lors de la conception d'un nouveau cryostat à dilution en collaboration avec l'entreprise Cryoconcept (voir figure 6.24).

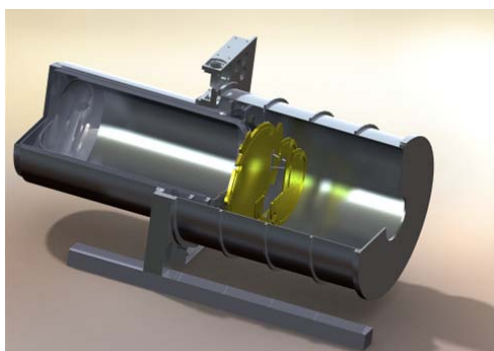


FIGURE 6.24 – Dessin du cryostat à dilution projeté en collaboration avec Cryoconcept.

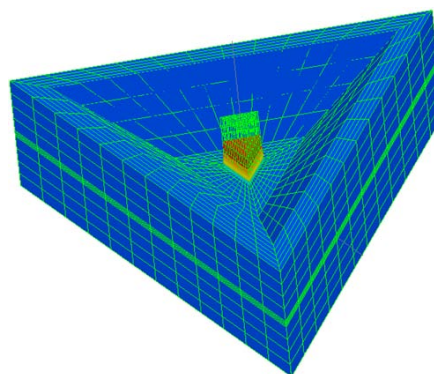


FIGURE 6.25 – Simulation par éléments finis d'une nouvelle géométrie pour le micro-résonateur, en forme de micro-pilier en quartz.

La dernière partie de la thèse est consacrée à une nouvelle expérience de couplage

optomécanique à trois modes. La présence d'un deuxième mode optique rend inutile le désaccord de la cavité, puisque le processus anti-Stokes de refroidissement peut être rendu sélectivement résonnant en accordant le deuxième mode optique. La cavité étant à résonance avec la porteuse, la puissance incidente requise pour atteindre le régime quantique du micro-résonateur est plus petite, et la sensibilité de la mesure est optimale. Nous avons d'abord décrit théoriquement ce couplage selon le formalisme semi-classique, et retrouvé en particulier l'expression du gain paramétrique obtenue pour la première fois par Braginsky *et al.* [21] dans le cadre des études des instabilités paramétriques dans les interféromètres gravitationnels. Pour optimiser ce gain, le choix des modes optiques et mécanique impliqués doit maximiser le recouvrement spatial entre les profils spatiaux. La possibilité de tester le profil spatial des modes mécaniques du micro-résonateur a permis d'identifier sans erreur les modes, ce qui a été essentiel dans ce contexte.

Le montage expérimental conçu pour réaliser ce couplage repose sur une cavité presque dégénérée de longueur ajustable avec précision, ce qui permet par exemple d'accorder le deuxième mode optique avec la bande anti-Stokes en régime de bandes latérales résolues. Ce dispositif nous a permis de mettre en évidence une interaction paramétrique à trois modes, en mesurant les spectres de bruit thermique de trois modes acoustiques différents : nous avons observé une variation des paramètres optomécaniques (température effective, amortissement et fréquence de résonance) en fonction du désaccord entre le deuxième mode optique et la bande anti-Stokes (ou Stokes). Nous avons notamment observé une variation significative de l'amortissement mécanique, d'un facteur 2 ou 3 selon le mode sur le côté anti-Stokes, et de 50% environ sur le côté Stokes. L'efficacité limitée du processus paramétrique semble principalement due à un recouvrement spatial entre les modes acoustiques étudiés et les deux modes optiques TEM_{00} et TEM_{04} plus modeste que prévu, à cause d'un décentrage du faisceau, d'une adaptation spatiale imparfaite ou encore de la déformation du résonateur sous les contraintes des couches diélectriques formant le miroir. Du côté chauffage correspondant à la résonance du processus Stokes, l'évolution de l'amortissement effectif présente aussi une variation inattendue de signe opposé ; ce même comportement se manifeste sur les valeurs de la température effective et est visible aussi sur le côté anti-Stokes (refroidissement). Bien qu'à l'heure actuelle ce comportement ne soit pas complètement compris, et que les valeurs du gain paramétrique déduites expérimentalement ne s'accordent pas parfaitement avec les valeurs attendues pour les trois modes, les résultats présentés semblent néanmoins montrer clairement un effet de couplage à trois modes sur la température et l'amortissement effectifs des trois modes mécaniques étudiés.

Le couplage à trois modes nécessite certainement une étude plus approfondie, qui explore la réponse du système à une excitation piézoélectrique par exemple : cela permettrait de confirmer les variations de l'amortissement observées sur le bruit thermique, et d'étudier plus en détail cet effet. Également, une étude de l'interaction à trois modes en fonction de

la puissance laser incidente serait certainement intéressante et envisageable à court terme : en augmentant la puissance, le couplage doit augmenter, ce qui permettrait peut-être d'explorer le seuil d'apparition des instabilités paramétriques du côté Stokes. Finalement, on peut envisager la détection directe du mode optique d'ordre supérieur produit lors de l'interaction à trois modes, ce qui représenterait une nouvelle manifestation de l'interaction. Une telle mesure a déjà été tentée sans succès au cours de ce travail de thèse : nous avons cherché à mesurer le battement entre le mode TEM_{00} et le mode TEM_{04} en cachant une partie du faisceau réfléchi avec une lame de rasoir, ou encore en utilisant une photodiode à quadrants, de manière à ce que le recouvrement entre les deux modes optiques soit non nul, mais les résultats n'ont pas été concluants.

Bien qu'encore préliminaires, les résultats obtenus avec l'expérience d'interaction à trois modes ouvrent la voie à plusieurs perspectives intéressantes, en représentant une méthode efficace pour atteindre le régime quantique du micro-résonateur et en même temps en donnant la possibilité d'étudier de manière détaillée les instabilités paramétriques, qui sont redoutées pour la prochaine génération d'interféromètres gravitationnels.

A côté des opérations à température cryogénique (prévues à une centaine de millikelvins avec le nouveau cryostat à dilution) et en régime des bandes latérales résolues, pour approcher l'état quantique fondamental, une troisième amélioration est envisagée dans notre système : l'amélioration des propriétés mécaniques du résonateur mécanique. La réalisation et le test de nouveaux micro-résonateurs en quartz cristallin, dont le facteur de qualité devrait augmenter à température cryogénique, est actuellement en cours. Ces micro-résonateurs, en forme de micro-pilier de section triangulaire maintenu de manière symétrique par une fine membrane, possèdent de modes de compression/dilatation qui devraient avoir de très grands facteurs de qualité mécanique. De plus, le dépôt diélectrique est confiné sur le sommet de la structure, sur une zone non déformée par le mode mécanique, ce qui devrait éviter les dégradations du facteur de qualité mécanique dues à la présence des couches diélectriques. Les pertes mécaniques liées au maintien du résonateur dans la cavité sont par ailleurs limitées grâce à un cadre de découplage, réalisé en collaboration avec l'ONERA, et les derniers résultats montrent des facteurs de qualité de 2×10^6 environ, soit plus de deux ordres de grandeur plus grands que pour les résonateurs de la génération précédente.

Annexe

A. Recouvrement spatial pour une cavité semi-confocale

Nous avons calculé le recouvrement spatial Λ du couplage optomécanique à 3 modes (équation (5.11)) pour 6 tailles de résonateurs constitués de ponts de largeur différente, pour différents modes mécaniques, et pour le mode optique TEM_{04} qui est proche de la dégénérescence avec le mode TEM_{00} dans une cavité semi-confocale.

Les tableaux suivants présentent l'ensemble des résultats obtenus, chaque tableau correspondant à une largeur donnée de résonateur. Les lignes sont associées aux différents modes mécaniques, et les colonnes à différents rayons de courbure du miroir d'entrée de la cavité. La dernière ligne donne les pertes optiques par diffraction sur le micro-résonateur, qui dépendent de la taille w_0 du col du faisceau.

MEMS (1×1 mm)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
$\nu_m = 0.552$ (0,1)	$3.46 \cdot 10^{-11}$	$4.09 \cdot 10^{-11}$	$2.94 \cdot 10^{-11}$	$4.49 \cdot 10^{-11}$	$3 \cdot 10^{-11}$
$\nu_m = 0.897$ (0,2)	$2.35 \cdot 10^{-4}$	$8.21 \cdot 10^{-5}$	$1.84 \cdot 10^{-5}$	$1.36 \cdot 10^{-6}$	$6.43 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 1.62$ (0,3)	$9.19 \cdot 10^{-9}$	$1.56 \cdot 10^{-8}$	$1.44 \cdot 10^{-8}$	$9.05 \cdot 10^{-10}$	$1.37 \cdot 10^{-9}$
$\nu_m = 2.71$ (0,4)	0.069	0.0287	0.0076	0.00063	$4.2 \cdot 10^{-5}$
$\nu_m = 4.1$ (0,5)	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$1.64 \cdot 10^{-7}$	$1.29 \cdot 10^{-7}$	$7.97 \cdot 10^{-10}$	$1.53 \cdot 10^{-9}$
$\nu_m = 5.74$ (0,6)	0.514	0.312	0.12	0.0145	0.0012
D_{04}	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$5.26 \cdot 10^{-9}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.9 mm)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.57$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$4.45 \cdot 10^{-10}$	$7.66 \cdot 10^{-12}$	$3.17 \cdot 10^{-11}$	$2.36 \cdot 10^{-12}$
(0,2) $\nu_m = 0.998$	$4.65 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-4}$	$3.49 \cdot 10^{-5}$	$2.27 \cdot 10^{-6}$	$2.01 \cdot 10^{-7}$
(0,3) $\nu_m = 1.89$	$8.23 \cdot 10^{-8}$	$1.09 \cdot 10^{-8}$	$2.39 \cdot 10^{-8}$	$6 \cdot 10^{-8}$	$1.03 \cdot 10^{-8}$
(0,4) $\nu_m = 3.22$	0.1234	0.54	0.0151	0.00133	$1.01 \cdot 10^{-4}$
(0,5) $\nu_m = 4.9$	$4.76 \cdot 10^{-7}$	$2.54 \cdot 10^{-7}$	$3.37 \cdot 10^{-7}$	$5.77 \cdot 10^{-7}$	$1.87 \cdot 10^{-7}$
(0,6) $\nu_m = 6.85$	0.654	0.463	0.206	0.0289	0.0027
D_{04}	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$5.1 \cdot 10^{-4}$	$7.07 \cdot 10^{-7}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.8 mm)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.601$	$1.07 \cdot 10^{-8}$	$1.53 \cdot 10^{-8}$	$1.13 \cdot 10^{-8}$	$1.54 \cdot 10^{-9}$	$9.23 \cdot 10^{-12}$
(0,2) $\nu_m = 1.15$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$3.65 \cdot 10^{-4}$	$8.09 \cdot 10^{-5}$	$3.01 \cdot 10^{-6}$	$9.67 \cdot 10^{-10}$
(0,3) $\nu_m = 2.3$	$8.36 \cdot 10^{-7}$	$8.08 \cdot 10^{-7}$	$3.46 \cdot 10^{-7}$	$2.51 \cdot 10^{-8}$	$6.97 \cdot 10^{-8}$
(0,4) $\nu_m = 4$	0.2205	0.105	0.031	0.0028	$1.55 \cdot 10^{-4}$
(0,5) $\nu_m = 6.16$	$9.23 \cdot 10^{-5}$	$7.06 \cdot 10^{-5}$	$3.77 \cdot 10^{-5}$	$6.96 \cdot 10^{-6}$	$2.3 \cdot 10^{-6}$
(0,6) $\nu_m = 8.67$	0.7	0.61	0.333	0.056	0.005
D_{04}	$5.6 \cdot 10^{-2}$	$6.4 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.7 mm)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.634$	$7.33 \cdot 10^{-9}$	$1.06 \cdot 10^{-8}$	$4.34 \cdot 10^{-9}$	$5.21 \cdot 10^{-11}$	$6.86 \cdot 10^{-10}$
(0,2) $\nu_m = 1.36$	$3.82 \cdot 10^{-3}$	$9.5 \cdot 10^{-4}$	$2.16 \cdot 10^{-4}$	$2.22 \cdot 10^{-5}$	$2.05 \cdot 10^{-6}$
(0,3) $\nu_m = 2.86$	$4.55 \cdot 10^{-6}$	$5.55 \cdot 10^{-6}$	$4.44 \cdot 10^{-6}$	$1.33 \cdot 10^{-6}$	$2.92 \cdot 10^{-9}$
(0,4) $\nu_m = 5.06$	0.378	0.208	0.071	0.0079	$8.03 \cdot 10^{-4}$
(0,5) $\nu_m = 7.78$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2.6 \cdot 10^{-4}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$4.93 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$
(0,6) $\nu_m = 11$	0.6	0.7	0.508	0.12	0.018
D_{04}	$1.94 \cdot 10^{-1}$	$4.77 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$	$8.23 \cdot 10^{-9}$	~ 0

MEMS (1×0.6 mm)	$w_0 = 0.184$ $R = 200$	$w_0 = 0.159$ $R = 150$	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.669$	$1.33 \cdot 10^{-10}$	$3.96 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-10}$	$1.42 \cdot 10^{-10}$	$3.86 \cdot 10^{-11}$
(0,2) $\nu_m = 1.66$	$1.95 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$	$5.91 \cdot 10^{-4}$	$4.27 \cdot 10^{-5}$	$2.77 \cdot 10^{-6}$
(0,3) $\nu_m = 3.62$	$2.52 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$	$1.08 \cdot 10^{-7}$	$5.84 \cdot 10^{-8}$	$7.21 \cdot 10^{-9}$
(0,4) $\nu_m = 6.33$	0.565	0.402	0.170	0.022	$1.93 \cdot 10^{-3}$
(0,5) $\nu_m = 9.51$	$2.67 \cdot 10^{-7}$	$6.82 \cdot 10^{-8}$	$6.25 \cdot 10^{-8}$	$5.24 \cdot 10^{-7}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$
(0,6) $\nu_m = 13.01$	0.36	0.638	0.742	0.277	0.042
D_{04}	0.432	0.204	0.025	$6.34 \cdot 10^{-6}$	~ 0

MEMS (1.4×0.6 mm)	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.42$	1.09×10^{-9}	1.85×10^{-9}	1.88×10^{-9}
(0,2) $\nu_m = 1.48$	5.10×10^{-4}	2.96×10^{-5}	1.71×10^{-6}
(0,3) $\nu_m = 3.5$	2.44×10^{-7}	2.04×10^{-7}	2.62×10^{-6}
(0,4) $\nu_m = 6.28$	0.172	0.0214	0.0018
(0,5) $\nu_m = 9.58$	3.02×10^{-5}	2.8×10^{-5}	5.08×10^{-5}
(0,6) $\nu_m = 13.2$	0.741	0.272	0.0391
D_{04}	0.0251	6.3×10^{-6}	~ 0

B. Recouvrement spatial pour une cavité quasi semi-confocale

Cette annexe, comme la précédente, présente les résultats du calcul du recouvrement spatial Λ intervenant dans le couplage optomécanique à 3 modes, cette fois-ci dans le cas d'une cavité quasi-confocale ($L = 3R/4$), pour laquelle les modes optiques TEM_{00} et TEM_{03} sont proches de dégénérescence. Les notations sont les mêmes que dans les tableaux de l'annexe A.

MEMS (1×1 mm)	$w_0 = 0.171$ $R = 200$	$w_0 = 0.148$ $R = 150$	$w_0 = 0.12$ $R = 100$	$w_0 = 0.086$ $R = 50$	$w_0 = 0.061$ $R = 25$
$\nu_m = 0.552$ (0,1)	$1.24 \cdot 10^{-5}$	$5.89 \cdot 10^{-6}$	$1.89 \cdot 10^{-6}$	$2.72 \cdot 10^{-7}$	$3.82 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 0.897$ (0,2)	$1.14 \cdot 10^{-8}$	$1.14 \cdot 10^{-8}$	$9.53 \cdot 10^{-9}$	$1.34 \cdot 10^{-8}$	$4.64 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 1.62$ (0,3)	0.0464	0.022	0.0073	0.0011	0.0001
$\nu_m = 2.71$ (0,4)	$3.22 \cdot 10^{-8}$	$5.47 \cdot 10^{-8}$	$1.06 \cdot 10^{-7}$	$2.06 \cdot 10^{-7}$	$4.3 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 4.1$ (0,5)	0.464	0.29	0.123	0.023	0.0035
$\nu_m = 5.74$ (0,6)	$4.9 \cdot 10^{-5}$	$4.04 \cdot 10^{-5}$	$2.63 \cdot 10^{-5}$	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$4.86 \cdot 10^{-6}$
D_{03}	$2.87 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-7}$	$3.12 \cdot 10^{-12}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.9 mm)	$w_0 = 0.171$ $R = 200$	$w_0 = 0.148$ $R = 150$	$w_0 = 0.12$ $R = 100$	$w_0 = 0.086$ $R = 50$	$w_0 = 0.061$ $R = 25$
$\nu_m = 0.57$ (0,1)	$1.56 \cdot 10^{-5}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$	$2.47 \cdot 10^{-6}$	$3.22 \cdot 10^{-7}$	$3.78 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 0.998$ (0,2)	$1.74 \cdot 10^{-9}$	$1.06 \cdot 10^{-8}$	$2.31 \cdot 10^{-8}$	$2.13 \cdot 10^{-8}$	$3.11 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 1.89$ (0,3)	0.077	0.038	0.0127	0.0019	0.0002
$\nu_m = 3.22$ (0,4)	$3.84 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-8}$	$7.85 \cdot 10^{-8}$	$9.58 \cdot 10^{-8}$	$4.09 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 4.9$ (0,5)	0.613	0.417	0.193	0.039	0.0061
$\nu_m = 6.85$ (0,6)	$4.04 \cdot 10^{-6}$	$6.11 \cdot 10^{-6}$	$4.64 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-10}$	$1.95 \cdot 10^{-6}$
D_{03}	$4.4 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-6}$	$1.41 \cdot 10^{-9}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.8 mm)	$w_0 = 0.171$ $R = 200$	$w_0 = 0.148$ $R = 150$	$w_0 = 0.12$ $R = 100$	$w_0 = 0.086$ $R = 50$	$w_0 = 0.061$ $R = 25$
$\nu_m = 0.601$ (0,1)	$2.32 \cdot 10^{-5}$	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$3.55 \cdot 10^{-6}$	$5.55 \cdot 10^{-7}$	$8.84 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 1.15$ (0,2)	$3.55 \cdot 10^{-7}$	$2.92 \cdot 10^{-7}$	$2.24 \cdot 10^{-7}$	$3.48 \cdot 10^{-7}$	$4.04 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 2.3$ (0,3)	0.132	0.671	0.0234	0.0036	0.0005
$\nu_m = 4$ (0,4)	$8.24 \cdot 10^{-6}$	$1.18 \cdot 10^{-5}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-5}$	$1.7 \cdot 10^{-5}$
$\nu_m = 6.16$ (0,5)	0.746	0.575	0.302	0.068	0.011
$\nu_m = 8.67$ (0,6)	$3.39 \cdot 10^{-4}$	$4.65 \cdot 10^{-4}$	$5.21 \cdot 10^{-4}$	$4.29 \cdot 10^{-4}$	$2.89 \cdot 10^{-4}$
D_{03}	$4.58 \cdot 10^{-3}$	$2.31 \cdot 10^{-4}$	$2.97 \cdot 10^{-7}$	~ 0	~ 0

MEMS (1×0.7 mm)	$w_0 = 0.171$ $R = 200$	$w_0 = 0.148$ $R = 150$	$w_0 = 0.12$ $R = 100$	$w_0 = 0.086$ $R = 50$	$w_0 = 0.061$ $R = 25$
$\nu_m = 0.634$ (0,1)	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$1.6 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-6}$	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 1.36$ (0,2)	$1.09 \cdot 10^{-6}$	$1.28 \cdot 10^{-6}$	$1.12 \cdot 10^{-6}$	$5.4 \cdot 10^{-7}$	$2.6 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 2.86$ (0,3)	0.23	0.123	0.045	0.0075	0.0012
$\nu_m = 5.06$ (0,4)	$5.8 \cdot 10^{-5}$	$7.2 \cdot 10^{-5}$	$6.5 \cdot 10^{-5}$	$3.1 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$
$\nu_m = 7.78$ (0,5)	0.75	0.69	0.439	0.123	0.024
$\nu_m = 11$ (0,6)	$8.6 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-4}$
D_{03}	$3.1 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-3}$	$2.9 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^{-12}$	~ 0

MEMS (1×0.6 mm)	$w_0 = 0.171$ $R = 200$	$w_0 = 0.148$ $R = 150$	$w_0 = 0.12$ $R = 100$	$w_0 = 0.086$ $R = 50$	$w_0 = 0.061$ $R = 25$
$\nu_m = 0.669$ (0,1)	$5.8 \cdot 10^{-4}$	$4.7 \cdot 10^{-5}$	$5.6 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-7}$	$1.3 \cdot 10^{-7}$
$\nu_m = 1.66$ (0,2)	$4.6 \cdot 10^{-8}$	$6.4 \cdot 10^{-8}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$9.8 \cdot 10^{-8}$
$\nu_m = 3.62$ (0,3)	0.404	0.244	0.097	0.017	0.0024
$\nu_m = 6.33$ (0,4)	$4.8 \cdot 10^{-9}$	$9 \cdot 10^{-8}$	$4.6 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$	$1.8 \cdot 10^{-6}$
$\nu_m = 9.51$ (0,5)	0.7	0.84	0.71	0.251	0.052
$\nu_m = 13.01$ (0,6)	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$5.9 \cdot 10^{-4}$	$7.7 \cdot 10^{-4}$	$3.5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$
D_{03}	0.136	0.034	0.0013	$2 \cdot 10^{-8}$	~ 0

MEMS (1.4×0.6 mm)	$w_0 = 0.13$ $R = 100$	$w_0 = 0.092$ $R = 50$	$w_0 = 0.065$ $R = 25$
(0,1) $\nu_m = 0.42$	2.02×10^{-6}	3.06×10^{-7}	4.28×10^{-8}
(0,2) $\nu_m = 1.48$	1.47×10^{-7}	2.48×10^{-9}	6.31×10^{-8}
(0,3) $\nu_m = 3.5$	0.096	0.016	2.20×10^{-3}
(0,4) $\nu_m = 6.28$	2.44×10^{-5}	4.21×10^{-6}	1.92×10^{-6}
(0,5) $\nu_m = 9.58$	0.707	0.244	0.0484
(0,6) $\nu_m = 13.2$	0.001	5.48×10^{-4}	1.55×10^{-4}
D_{04}	0.0013	2.33×10^{-8}	~ 0

Bibliographie

- [1] B. Abbott et al. Observation of a kilogram-scale oscillator near its quantum ground state. *New Journal of Physics*, 11(7) :073032, 2009. [27](#)
- [2] A. Abramovici, W. E. Althouse, R. W. P. Drever, Y. Gursel, S. Kawamura, F. J. Raab, D. Shoemaker, L. Sievers, R. E. Spero, and K. S. Thorne. Ligo - the laser interferometer gravitational-wave observatory. *Science*, 256 :325–333, April 1992. [25](#), [26](#), [77](#)
- [3] O. Arcizet. *Mesure optique ultrasensible et refroidissement par pression de radiation d'un micro-résonateur mécanique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006. [35](#), [43](#), [78](#), [79](#), [82](#), [102](#), [140](#)
- [4] O. Arcizet, T. Briant, A. Heidmann, and M. Pinard. Beating quantum limits in an optomechanical sensor by cavity detuning. *Phys. Rev. A*, 73(3) :033819, Mar 2006. [57](#)
- [5] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, and A. Heidmann. Radiation-pressure cooling and optomechanical instability of a micromirror. *Nature*, 444 :71, 2006. [1](#), [3](#), [28](#), [58](#), [65](#), [71](#), [72](#), [112](#)
- [6] O. Arcizet, P.-F. Cohadon, T. Briant, M. Pinard, A. Heidmann, J.-M. Mackowski, C. Michel, L. Pinard, O. Français, and L. Rousseau. High-sensitivity optical monitoring of a micromechanical resonator with a quantum-limited optomechanical sensor. *Phys. Rev. Lett.*, 97(13) :133601, Sep 2006. [35](#), [58](#), [61](#)
- [7] O. Arcizet, C. Molinelli, T. Briant, P.-F. Cohadon, A. Heidmann, J.-M. Mackowski, C. Michel, Français O. Pinard, L., and L. Rousseau. Experimental optomechanics with silicon micromirrors. *New Journal of Physics*, 10(12) :125021, 2008. [31](#), [143](#)
- [8] J. A. Arnaud. Degenerate optical cavities. *Applied Optics*, 8(1) :189–195, 1969. [165](#)
- [9] A. Ashkin. Applications of laser radiation pressure. *Science*, 210(4474) :1081–1088, 1980. [1](#)
- [10] F. Beauville and al. The virgo large mirrors : a challenge for low loss coatings. *Classical and Quantum Gravity*, 21(5) :S935, 2004. [77](#)

- [11] F. Bielsa, A. Dupays, M. Fouché, R. Battesti, C. Robilliard, and C. Rizzo. Birefringence of interferential mirrors at normal incidence. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 97 :457–463, 2009. 10.1007/s00340-009-3677-7. [130](#)
- [12] G. Binnig, C. F. Quate, and Ch. Gerber. Atomic force microscope. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9) :930–933, Mar 1986. [26](#)
- [13] F. Bondu. *Etude du bruit thermique et stabilisation en fréquence du laser du détecteur interférométrique d’ondes gravitationnelles VIRGO*. PhD thesis, Université de Paris Sud - Centre d’Orsay, 1996. [77](#)
- [14] F. Bondu, A. Brillet, F. Cleva, H. Heitmann, M. Loupias, C. N. Man, H. Trinquet, and the Virgo Collaboration. The Virgo injection system. *Classical and Quantum Gravity*, 19(7) :1829, 2002. [77](#)
- [15] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight. Preparation of nonclassical states in cavities with a moving mirror. *Phys. Rev. A*, 56(5) :4175–4186, Nov 1997. [55](#)
- [16] S. Bose, K. Jacobs, and P. L. Knight. Scheme to probe the decoherence of a macroscopic object. *Phys. Rev. A*, 59(5) :3204–3210, May 1999. [55](#)
- [17] C. Bradaschia and al. The Virgo Project : a wide band antenna for gravitational wave detection. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 289 :518–525, April 1990. [25](#), [26](#)
- [18] V. B. Braginsky, S. E. Strigin, and S. P. Vyatchanin. Analysis of parametric oscillatory instability in power recycled Ligo interferometer. *Physics Letters A*, 305(3-4) :111–124, 2002. [150](#)
- [19] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov, and K. S. Thorne. Quantum nondemolition measurements. *Science*, 209(4456) :547–557, 1980. [26](#)
- [20] V. B. Braginsky and S. P. Vyatchanin. Low quantum noise tranquilizer for Fabry–Perot interferometer. *Physics Letters A*, 293(5-6) :228–234, 2002. [150](#)
- [21] V.B. Braginsky, S. E. Strigin, and S. P. Vyatchanin. Parametric oscillatory instability in Fabry–Perot interferometer. *Physics Letters A*, 287(5-6) :331–338, 2001. [64](#), [71](#), [73](#), [148](#), [150](#), [208](#)
- [22] T. Briant. *Caractérisation du couplage optomécanique entre la lumière et un miroir : bruit thermique et effets quantiques*. PhD thesis, 2003. [43](#), [58](#)
- [23] T. Briant, P.-F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard. Optomechanical characterization of acoustic modes in a mirror. *Phys. Rev. A*, 68(3) :033823, Sep 2003. [40](#), [100](#), [109](#)
- [24] A. Buonanno and Y. Chen. Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs. *Phys. Rev. D*, 65(4) :042001, Jan 2002. [64](#)
- [25] H. B. Callen and T. A. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.*, 83(1) :34–40, Jul 1951. [11](#), [12](#)

- [26] T. Caniard, P. Verlot, T. Briant, P.-F. Cohadon, and A. Heidmann. Observation of back-action noise cancellation in interferometric and weak force measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 99(11) :110801, Sep 2007. [26](#)
- [27] C. M. Caves. Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 45(2) :75–79, Jul 1980. [2](#), [25](#)
- [28] C. M. Caves. Quantum-mechanical noise in an interferometer. *Phys. Rev. D*, 23(8) :1693–1708, Apr 1981. [26](#)
- [29] B. Chalopin. *Optique quantique multimode : des images aux impulsions*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2009. [167](#)
- [30] B. Chalopin, A. Chiummo, C. Fabre, A. Maître, and N. Treps. Frequency doubling of low power images using a self-imaging cavity. *Opt. Express*, 18(8) :8033–8042, Apr 2010. [167](#)
- [31] B. Chalopin, F. Scazza, C. Fabre, and N. Treps. A scalable source for multimode squeezing of transverse modes. (*soumis*). [167](#)
- [32] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, and F. Capasso. Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force. *Science*, 291(5510) :1941–1944, 2001. [26](#)
- [33] A. Cho. Putting light’s light touch to work as optics meets mechanics. *Science*, 328(5980) :812–813, 2010. [2](#)
- [34] R.G. Christian. The theory of oscillating-vane vacuum gauges. *Vacuum*, 16(4) :175 – 178, 1966. [30](#)
- [35] S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable. Experimental observation of optically trapped atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 57(3) :314–317, Jul 1986. [1](#)
- [36] P.-F. Cohadon. *Bruit thermique et effets de la pression de radiation dans une cavité optique de grande finesse*. PhD thesis, 2000. [43](#)
- [37] P.-F. Cohadon, A. Heidmann, and M. Pinard. Cooling of a mirror by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 83(16) :3174–3177, Oct 1999. [3](#), [58](#)
- [38] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique, volume I*. Hermann, 1977. [7](#), [8](#), [154](#)
- [39] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, and G. Grynberg. *Photons et atomes : introduction à l’électrodynamique quantique*. L’Editeur : EDP Sciences, 2001. [19](#)
- [40] T. Corbitt, D. Ottaway, E. Innerhofer, J. Pelc, and N. Mavalvala. Measurement of radiation-pressure-induced optomechanical dynamics in a suspended Fabry-Perot cavity. *Phys. Rev. A*, 74(2) :021802, Aug 2006. [64](#)
- [41] Thomas Corbitt, Christopher Wipf, Timothy Bodiya, David Ottaway, Daniel Sigg, Nicolas Smith, Stanley Whitcomb, and Nergis Mavalvala. Optical dilution and feed-

- back cooling of a gram-scale oscillator to 6.9 mk. *Phys. Rev. Lett.*, 99(16) :160801, Oct 2007. [27](#), [28](#)
- [42] J.M. Courty, A. Heidmann, and M. Pinard. Quantum limits of cold damping with optomechanical coupling. *The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 17(3) :399–408, 2001. [61](#), [62](#)
- [43] A. Dantan, C. Genes, D. Vitali, and M. Pinard. Self-cooling of a movable mirror to the ground state using radiation pressure. *Phys. Rev. A*, 77(1) :011804, Jan 2008. [69](#)
- [44] M. Siciliani de Cumis, A. Farsi, F. Marino, G. D’Arrigo, F. Marin, F. S. Cataliotti, and E. Rimini. Radiation pressure excitation and cooling of a cryogenic micro-mechanical systems cavity. *Journal of Applied Physics*, 106(1) :013108, 2009. [112](#)
- [45] J. M. Dobrindt and T. J. Kippenberg. Theoretical analysis of mechanical displacement measurement using a multiple cavity mode transducer. *Phys. Rev. Lett.*, 104(3) :033901, Jan 2010. [150](#), [160](#)
- [46] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes, and H. Walther. Optical bistability and mirror confinement induced by radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 51(17) :1550–1553, Oct 1983. [54](#), [55](#)
- [47] R. W. P. Drever, J. L. Hall, F. V. Kowalski, J. Hough, G. M. Ford, A. J. Munley, and H. Ward. Laser phase and frequency stabilization using an optical resonator. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 31 :97–105, 1983. 10.1007/BF00702605. [77](#), [84](#), [90](#)
- [48] M. Eichenfeld, R. Camacho, J. Chan, K.J. Vahala, and O. Painter. A picogram- and nanometre-scale photonic-crystal optomechanical cavity. *Nature*, 459 :550, 2009. [28](#)
- [49] M. Eichenfeld, J. Chan, R.M. Camacho, K.J. Vahala, and O. Painter. Optomechanical crystals. *Nature*, 462 :78, 2009. [28](#)
- [50] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten. *Teilchen Annalen der Physik*, 17 :549–560, 1905. [12](#)
- [51] C. Fabre, J. B. Fouet, and A. Maître. Quantum limits in the measurement of very small displacements in optical images. *Opt. Lett.*, 25(1) :76–78, Jan 2000. [105](#)
- [52] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino, and S. Reynaud. Quantum-noise reduction using a cavity with a movable mirror. *Phys. Rev. A*, 49(2), Feb 1994. [2](#), [19](#)
- [53] C. Fabre and S. Reynaud. *Fundamental Systems in Quantum Optics*. North-Holland, 1990 (1992). [22](#), [50](#)
- [54] M. J. Fagan. *Finite element analysis : theory and practice*. Longman, 1992. [100](#)

- [55] I. Favero and K. Karrai. Cavity cooling of a nanomechanical resonator by light scattering. *New Journal of Physics*, 10(9) :095006, 2008. [65](#)
- [56] E. Gavartin, R. Braive, I. Sagnes, O. Arcizet, A. Beveratos, T. J. Kippenberg, and I. Robert-Philip. Optomechanical coupling in a two-dimensional photonic crystal defect cavity. *ArXiv e-prints*, November 2010. [28](#)
- [57] C. Genes, D. Vitali, P. Tombesi, S. Gigan, and M. Aspelmeyer. Ground-state cooling of a micromechanical oscillator : Comparing cold damping and cavity-assisted cooling schemes. *Phys. Rev. A*, 77(3) :033804, Mar 2008. [69](#)
- [58] C.C. Gerry and P.L. Knight. *Introductory Quantum Optics*, volume 73. Cambridge University Press, 2005. [19](#)
- [59] S. Gigan. *Amplification paramétrique d'images en cavité : Effets classiques et quantiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2004. [165](#), [167](#)
- [60] S. Gigan, H. R. Böhm, M. Paternostro, F. Blaser, G. Langer, J. B. Hertzberg, K. C. Schwab, D. Bäuerle, M. Aspelmeyer, and A. Zeilinger. Self-cooling of a micromirror by radiation pressure. *Nature*, 444 :67–70, 2006. [1](#), [28](#), [30](#), [65](#), [72](#)
- [61] S. Gigan, L. Lopez, N. Treps, A. Maître, and C. Fabre. Image transmission through a stable paraxial cavity. *Physical Review A*, 72(2) :23804, 2005. [167](#)
- [62] F. Gittes and C. F. Schmidt. Interference model for back-focal-plane displacement detection in optical tweezers. *Opt. Lett.*, 23(1) :7–9, Jan 1998. [105](#)
- [63] R. J. Glauber. Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131 :2766, 1963. [20](#)
- [64] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke, and A. LaPorta. Squeezed-light-enhanced polarization interferometer. *Phys. Rev. Lett.*, 59(19) :2153–2156, Nov 1987. [57](#)
- [65] S. Gras, D. G. Blair, and C. Zhao. Suppression of parametric instabilities in future gravitational wave detectors using damping rings. *Classical and Quantum Gravity*, 26(13) :135012, 2009. [151](#)
- [66] S. Gras, D.G. Blair, and L. Ju. Test mass ring dampers with minimum thermal noise. *Physics Letters A*, 372(9) :1348 – 1356, 2008. [151](#)
- [67] S. Gras, C. Zhao, D. G. Blair, and L. Ju. Parametric instabilities in advanced gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, 27(20) :205019, 2010. [151](#)
- [68] S. Gröblacher, S. Gigan, H. R. Böhm, A. Zeilinger, and M. Aspelmeyer. Radiation-pressure self-cooling of a micromirror in a cryogenic environment. *Europhysics Letters*, 81(5) :54003, 2008. [115](#)
- [69] S. Gröblacher, J.B. Hertzberg, M.R. Vanner, G.D. Cole, S. Gigan, K. C. Schwab, and M. Aspelmeyer. Demonstration of an ultracold micro-optomechanical oscillator in a cryogenic cavity. *Nature Physics*, 5 :485, 2009. [30](#), [112](#)

- [70] I. S. Grudinin, H. Lee, O. Painter, and K. J. Vahala. Phonon laser action in a tunable two-level system. *Phys. Rev. Lett.*, 104(8) :083901, Feb 2010. [151](#), [152](#)
- [71] U. Gysin, S. Rast, P. Ruff, E. Meyer, D. W. Lee, P. Vettiger, and C. Gerber. Temperature dependence of the force sensitivity of silicon cantilevers. *Phys. Rev. B*, 69(4) :045403, Jan 2004. [125](#), [126](#)
- [72] T.W. Hansch and B. Couillaud. Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity. *Optics Communications*, 35(3) :441 – 444, 1980. [83](#)
- [73] G. M. Harry et al. Titania-doped tantala/silica coatings for gravitational-wave detection. *Classical and Quantum Gravity*, 24(2) :405, 2007. [77](#)
- [74] A. Heidmann, T. Briant, and P. F. Cohadon. Vers l’optomécanique quantique. *Images de la physique*, 2010. [2](#)
- [75] A. Heidmann, Y. Hadjar, and M. Pinard. Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 64 :173–180, 1997. 10.1007/s003400050162. [2](#), [55](#)
- [76] J.B. Hertzberg, T. Rochelau, T. Ndukum, M. Savva, A.A. Clerk, and K.C. Schwab. Back-action-evading measurements of nanomechanical motion. *Nature Physics*, 6 :213, 2010. [29](#)
- [77] T.W. Hänsch and A.L. Schawlow. Cooling of gases by laser radiation. *Optics Communications*, 13(1) :68 – 69, 1975. [74](#)
- [78] M. Hossein-Zadeh and K. J. Vahala. Observation of optical spring effect in a microtoroidal optomechanical resonator. *Opt. Lett.*, 32(12) :1611–1613, 2007. [64](#)
- [79] M. T. L. Hsu, V. Delaubert, P. K. Lam, and W. P. Bowen. Optimal optical measurement of small displacements. *Journal of Optics B : Quantum and Semiclassical Optics*, 6(12) :495, 2004. [105](#)
- [80] K. Jacobs, P. Tombesi, M. J. Collett, and D. F. Walls. Quantum-nondemolition measurement of photon number using radiation pressure. *Phys. Rev. A*, 49(3) :1961–1966, Mar 1994. [2](#), [55](#)
- [81] M. T. Jaekel and S. Reynaud. Quantum limits in interferometric measurements. *Europhysics Letters*, 13(4) :301, 1990. [2](#), [25](#), [57](#)
- [82] L. Ju, D. G. Blair, C. Zhao, S. Gras, Z. Zhang, P. Barriga, H. Miao, Y. Fan, and L. Merrill. Strategies for the control of parametric instability in advanced gravitational wave detectors. *Classical and Quantum Gravity*, 26(1) :015002, 2009. [151](#)
- [83] L. Ju, S. Gras, C. Zhao, J. Degallaix, and DG Blair. Multiple modes contributions to parametric instabilities in advanced laser interferometer gravitational wave detectors. *Physics Letters A*, 354(5-6) :360–365, 2006. [151](#)

- [84] W. Kells and E. D'Ambrosio. Considerations on parametric instability in Fabry-Perot interferometer. *Physics Letters A*, 299(4) :326 – 330, 2002. [73](#), [150](#)
- [85] A. L. Kimball and D. E. Lovell. Internal friction in solids. *Physical Review*, 30(6) :948–959, 1927. [30](#)
- [86] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin. Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum nondemolition interferometers by modifying their input and/or output optics. *Phys. Rev. D*, 65(2) :022002, Dec 2001. [57](#)
- [87] T. J. Kippenberg, H. Rokhsari, T. Carmon, A. Scherer, and K. J. Vahala. Analysis of radiation-pressure induced mechanical oscillation of an optical microcavity. *Phys. Rev. Lett.*, 95(3) :033901, Jul 2005. [64](#)
- [88] T. J. Kippenberg and K. J. Vahala. Cavity Optomechanics : Back-Action at the Mesoscale. *Science*, 321(5893) :1172–1176, 2008. [2](#)
- [89] D. Kleckner and D. Bouwmeester. Sub-kelvin optical cooling of a micromechanical resonator. *Nature*, 444 :75, 2006. [28](#), [65](#), [72](#)
- [90] R. G. Knobel and A. N. Cleland. Nanometre-scale displacement sensing using a single electron transistor. *Nature*, 424 :291, 2003. [112](#)
- [91] H. Kogelnik and T. Li. Laser beams and resonators. *Applied Optics*, 5(10) :1550–1567, 1966. [29](#), [43](#), [44](#), [168](#)
- [92] R Kubo. The fluctuation-dissipation theorem. *Reports on Progress in Physics*, 29(1) :255, 1966. [12](#)
- [93] M. D. LaHaye, O. Buu, B. Camarota, and K. C. Schwab. Approaching the Quantum Limit of a Nanomechanical Resonator. *Science*, 304(5667) :74–77, 2004. [112](#)
- [94] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii. *Course of Theoretical Physics, Statistical Physics*. Butterworth-Heinemann, 1980. [11](#), [12](#)
- [95] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. *Theory of Elasticity, Course of Theoretical Physics vol 7*. 1995. [38](#), [39](#)
- [96] C. K. Law. Interaction between a moving mirror and radiation pressure : A hamiltonian formulation. *Phys. Rev. A*, 51(3) :2537–2541, Mar 1995. [154](#)
- [97] B. Le Foulgoc. *Évaluation du potentiel de performances des micro-accéleromètres inertiels vibrants en silicium*. PhD thesis, Université Paris-Est, 10 2008. [31](#)
- [98] P. N. Lebedev. Experimental examination of light pressure. *Ann. der Physik*, 6 :433, 1901. [1](#)
- [99] L. Lopez. *Amplification paramétrique, sans bruit, continue, d'images en cavité*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2006. [167](#)

- [100] L. Lopez, N. Treps, B. Chalopin, C. Fabre, and A. Maître. Quantum processing of images by continuous wave optical parametric amplification. *Phys. Rev. Lett.*, 100(1) :013604, Jan 2008. [167](#)
- [101] R. Loudon. *The quantum theory of light*. Oxford University Press, USA, 2000. [19](#), [154](#)
- [102] W. H. Louisell, A. Yariv, and A. E. Siegman. Quantum fluctuations and noise in parametric processes. i. *Phys. Rev.*, 124(6) :1646–1654, Dec 1961. [73](#)
- [103] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali, and P. Tombesi. Entangling macroscopic oscillators exploiting radiation pressure. *Phys. Rev. Lett.*, 88(12) :120401, Mar 2002. [55](#)
- [104] S. Mancini, D. Vitali, and P. Tombesi. Optomechanical cooling of a macroscopic oscillator by homodyne feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 80(4) :688–691, Jan 1998. [58](#)
- [105] F. Marino, F. S. Cataliotti, A. Farsi, M. Siciliani de Cumis, and F. Marin. Classical signature of ponderomotive squeezing in a suspended mirror resonator. *Phys. Rev. Lett.*, 104(7) :073601, Feb 2010. [30](#)
- [106] F. Marquardt, J. P. Chen, A. A. Clerk, and S. M. Girvin. Quantum theory of cavity-assisted sideband cooling of mechanical motion. *Physical Review Letters*, 99(9) :093902, 2007. [2](#), [69](#)
- [107] F. Marquardt and S. M. Girvin. Optomechanics. *Physics*, 2 :40, May 2009. [2](#)
- [108] F. Marty, L. Rousseau, B. Saadany, B. Mercier, O. Francais, Y. Mita, and T. Bourouina. Advanced etching of silicon based on deep reactive ion etching for silicon high aspect ratio microstructures and three-dimensional micro- and nanostructures. *Microelectronics journal*, 36(7) :673–677, 2005. [32](#)
- [109] J. C. Maxwell. A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I*, 155 :459–512, 1865. [1](#)
- [110] K. McKenzie, D. A. Shaddock, D. E. McClelland, B. C. Buchler, and P. K. Lam. Experimental demonstration of a squeezing-enhanced power-recycled Michelson interferometer for gravitational wave detection. *Phys. Rev. Lett.*, 88(23) :231102, May 2002. [57](#)
- [111] C.H. Metzger and K. Karrai. Cavity cooling of a microlever. *Nature*, 432 :1002–1005, 2004. [65](#)
- [112] H. Miao, C. Zhao, L. Ju, and D. G. Blair. Quantum ground-state cooling and tripartite entanglement with three-mode optoacoustic interactions. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 79(6) :063801, 2009. [152](#), [153](#), [154](#), [158](#)
- [113] H. Miao, C. Zhao, L. Ju, S. Gras, P. Barriga, Z. Zhang, and D. G. Blair. Three-mode optoacoustic parametric interactions with a coupled cavity. *Physical Review A*, 78(6) :63809, 2008. [151](#), [153](#)

- [114] J.M.W. Milatz and J.J. Van Zolingen. The Brownian motion of electrometers. *Physica*, 19(1-12) :181 – 194, 1953. [58](#)
- [115] P. Mohanty, D. A. Harrington, K. L. Ekinci, Y. T. Yang, M. J. Murphy, and M. L. Roukes. Intrinsic dissipation in high-frequency micromechanical resonators. *Phys. Rev. B*, 66(8) :085416, Aug 2002. [30](#)
- [116] U. Mohideen and A. Roy. Precision measurement of the casimir force from 0.1 to 0.9 μm . *Phys. Rev. Lett.*, 81(21) :4549–4552, Nov 1998. [26](#)
- [117] A. Naik, O. Buu, M. D. LaHaye, A. D. Armour, A. A. Clerk, M. P. Blencowe, and K. C. Schwab. Cooling a nanomechanical resonator with quantum back-action. *Nature*, 443 :193–196, 2006. [65](#), [112](#)
- [118] M. L. Nandanpawar and S. Rajagopalan. Wachtman’s equation and temperature dependence of bulk moduli in solids. *Journal of Applied Physics*, 49(7) :3976–3979, 1978. [125](#)
- [119] E. F. Nichols and G. F. Hull. The pressure due to radiation. (second paper.). *Phys. Rev. (Series I)*, 17(1) :26–50, Jul 1903. [1](#)
- [120] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32(1) :110, Jul 1928. [12](#)
- [121] A.D. O’Connell, M. Hofheinz, M. Ansmann, R.C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Neeley, H. Sank, H. Wang, J. Wenner, J.M. Martinis, and A.N. Cleland. Quantum ground state and single-phonon control of a mechanical resonator. *Nature*, 464 :697, 2010. [28](#), [29](#)
- [122] M. Pinard, P.-F. Cohadon, T. Briant, and A. Heidmann. Full mechanical characterization of a cold damped mirror. *Phys. Rev. A*, 63(1) :013808, Dec 2000. [58](#)
- [123] M. Pinard, C. Fabre, and A. Heidmann. Quantum-nondemolition measurement of light by a piezoelectric crystal. *Phys. Rev. A*, 51(3) :2443–2449, Mar 1995. [55](#)
- [124] M. Pinard, Y. Hadjar, and A. Heidmann. Effective mass in quantum effects of radiation pressure. *The European Physical Journal D*, 7(1) :107–116, 1999. [40](#), [43](#), [45](#)
- [125] D. C. Price. *Characterisation of microresonators for use in opto-acoustic parametric amplifiers*. PhD thesis, The University of Western Australia, 2008. [105](#)
- [126] S. Reynaud, C. Fabre, E. Giacobino, and A. Heidmann. Photon noise reduction by passive optical bistable systems. *Phys. Rev. A*, 40(3) :1440–1446, Aug 1989. [55](#)
- [127] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino, and C. Fabre. Quantum fluctuations in optical systems. *Progress in Optics*, 30 :1–85, 1992. [19](#)
- [128] Serge Reynaud and Antoine Heidmann. A semiclassical linear input output transformation for quantum fluctuations. *Optics Communications*, 71(3-4) :209, 1989. [19](#), [50](#)

- [129] R. Rivière, S. Deléglise, S. Weis, E. Gavartin, O. Arcizet, A. Schliesser, and T. J. Kippenberg. Optomechanical sideband cooling of a micromechanical oscillator close to the quantum ground state. *Phys. Rev. A*, 83 :063835, 2011. [28](#)
- [130] D. Rugar, R. Budakian, H. J. Mamin, and B. W. Chui. Single spin detection by magnetic resonance force microscopy. *Nature*, 430 :329–332, 2004. [105](#)
- [131] D. Rugar and P. Hansma. Atomic force microscopy. *Physics Today*, 43(10) :23–30, 1990. [26](#)
- [132] P. R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. *Phys. Rev. D*, 42(8) :2437, Oct 1990. [12](#)
- [133] A. Schliesser, O. Arcizet, R. Rivière, G. Anetsberger, and T. J. Kippenberg. Resolved-sideband cooling and position measurement of a micromechanical oscillator close to the Heisenberg uncertainty limit. *Nature Physics*, 5 :509, 2009. [112](#)
- [134] A. Schliesser, P. Del’Haye, N. Nooshi, K. J. Vahala, and T. J. Kippenberg. Radiation pressure cooling of a micromechanical oscillator using dynamical backaction. *Phys. Rev. Lett.*, 97(24) :243905, Dec 2006. [1](#), [28](#), [65](#), [72](#)
- [135] K. C. Schwab and M. L. Roukes. Putting mechanics into quantum mechanics. *PhysicsToday*, July :36, 2005. [112](#)
- [136] M.O. Scully and M.S. Zubairy. *Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1997. [20](#)
- [137] D. A. Shaddock, B. C. Buchler, W. P. Bowen, M. B. Gray, and P. K. Lam. Modulation-free control of a continuous-wave second-harmonic generator. *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics*, 2(5) :400, 2000. [84](#)
- [138] D. A. Shaddock, M. B. Gray, and D. E. McClelland. Frequency locking a laser to an optical cavity by use of spatial mode interference. *Optics letters*, 24(21) :1499–1501, 1999. [84](#)
- [139] B. S. Sheard, M. B. Gray, C. M. Mow-Lowry, D. E. McClelland, and S. E. Whitcomb. Observation and characterization of an optical spring. *Phys. Rev. A*, 69(5) :051801, May 2004. [64](#)
- [140] A.E. Siegman. *Lasers University Science*. 1986. [164](#)
- [141] R.M. Simmons, J.T. Finer, S. Chu, and J.A. Spudich. Quantitative measurements of force and displacement using an optical trap. *Biophysical Journal*, 70(4) :1813 – 1822, 1996. [105](#)
- [142] K. Srinivasan and O. Painter. Optical fiber taper coupling and high-resolution wavelength tuning of microdisk resonators at cryogenic temperatures. *Applied Physics Letters*, 90(3) :031114, 2007. [115](#)

- [143] T. Steinmetz, Y. Colombe, D. Hunger, T. W. Hansch, A. Balocchi, R. J. Warburton, and J. Reichel. Stable fiber-based Fabry-Perot cavity. *Applied Physics Letters*, 89(11) :111110, 2006. [114](#)
- [144] G. Stemme. Resonant silicon sensors. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 1(2) :113, 1991. [30](#)
- [145] O. Svelto. *Principles of lasers*. New York : Plenum Press, 1989. [121](#), [164](#)
- [146] J. D. Teufel, T. Donner, D. Li, J. H. Harlow, M. S. Allman, K. Cicak, A. J. Sirois, J. D. Whittaker, K. W. Lehnert, and R. W. Simmonds. Sideband Cooling Micro-mechanical Motion to the Quantum Ground State. *ArXiv e-prints*, March 2011. [28](#), [29](#)
- [147] J. D. Thompson, B. M. Zwickl, A. M. Jayich, F. Marquardt, S. M. Girvin, and J. G. E. Harris. Strong dispersive coupling of a high-finesse cavity to a micromechanical membrane. *Nature*, 452 :72–75, 2008. [28](#)
- [148] K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann, and V. D. Sandberg. Quantum nondemolition measurements of harmonic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 40(11) :667–671, Mar 1978. [26](#)
- [149] H. A.C. Tilmans, M. Elwenspoek, and J. H.J. Fluitman. Micro resonant force gauges. *Sensors and Actuators A : Physical*, 30(1-2) :35 – 53, 1992. [30](#)
- [150] N. Treps, N. Grosse, W. P. Bowen, C. Fabre, H. A. Bachor, and P. K. Lam. A Quantum Laser Pointer. *Science*, 301(5635) :940–943, 2003. [105](#)
- [151] G. Ventura and L. Risegari. *The art of cryogenics : low-temperature experimental techniques*. Elsevier Science Ltd, 2008. [116](#)
- [152] P. Verlot. *Etude des effets de pression de radiation et des limites quantiques du couplage optomécanique*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2010. [55](#)
- [153] P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, P.-F. Cohadon, and A. Heidmann. Scheme to probe optomechanical correlations between two optical beams down to the quantum level. *Phys. Rev. Lett.*, 102(10) :103601, Mar 2009. [18](#), [26](#), [27](#)
- [154] P. Verlot, A. Tavernarakis, T. Briant, P.-F. Cohadon, and A. Heidmann. Backaction amplification and quantum limits in optomechanical measurements. *Phys. Rev. Lett.*, 104(13) :133602, Mar 2010. [26](#), [27](#), [57](#)
- [155] V. Vuletić and S. Chu. Laser cooling of atoms, ions, or molecules by coherent scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 84(17) :3787–3790, Apr 2000. [73](#)
- [156] J. B. Wachtman, W. E. Tefft, D. G. Lam, and C. S. Apstein. Exponential temperature dependence of Young’s modulus for several oxides. *Phys. Rev.*, 122(6) :1754–1759, Jun 1961. [125](#)
- [157] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40(5) :749–759, 1932. [20](#)

- [158] I. Wilson-Rae, N. Nooshi, W. Zwerger, and T. J. Kippenberg. Theory of ground state cooling of a mechanical oscillator using dynamical backaction. *Physical Review Letters*, 99(9) :093901, 2007. [2](#), [69](#), [74](#)
- [159] D. J. Wineland and W. M. Itano. Laser cooling of atoms. *Phys. Rev. A*, 20(4) :1521–1540, Oct 1979. [74](#)
- [160] M. Xiao, L.-A. Wu, and H. J. Kimble. Precision measurement beyond the shot-noise limit. *Phys. Rev. Lett.*, 59(3) :278–281, Jul 1987. [57](#)
- [161] A. Xuereb, P. Domokos, J. Asbóth, P. Horak, and T. Freearde. Scattering theory of cooling and heating in optomechanical systems. *Phys. Rev. A*, 79(5) :053810, May 2009. [74](#)
- [162] K. Yamamoto, M. Ando, K. Kawabe, and K. Tsubono. Thermal noise caused by an inhomogeneous loss in the mirrors used in the gravitational wave detector. *Physics Letters A*, 305(1-2) :18 – 25, 2002. [42](#)
- [163] K. Yamamoto, S. Otsuka, M. Ando, K. Kawabe, and K. Tsubono. Experimental study of thermal noise caused by an inhomogeneously distributed loss. *Physics Letters A*, 280(5-6) :289 – 296, 2001. [42](#)
- [164] J. Yang, T. Ono, and M. Esashi. Energy dissipation in submicrometer thick single-crystal silicon cantilevers. *Journal of Microelectromechanical Systems*, 11(6) :775–783, December 2002. [30](#)
- [165] A. Yariv. Quantum theory for parametric interactions of light and hypersound. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1 :28–36, April 1965. [38](#), [73](#)
- [166] A. Yariv. *Optical electronics in modern communications*. Oxford University Press, 1997. [163](#)
- [167] C. Zener. Internal friction in solids. i. theory of internal friction in reeds. *Phys. Rev.*, 52(3) :230–235, Aug 1937. [30](#)
- [168] C. Zener. Internal friction in solids. *Proceedings of the Physical Society*, 52(1) :152, 1940. [30](#)
- [169] C. Zener, W. Otis, and R. Nuckolls. Internal friction in solids iii. experimental demonstration of thermoelastic internal friction. *Phys. Rev.*, 53(1) :100–101, Jan 1938. [30](#)
- [170] C. Zhao, L. Ju, J. Degallaix, S. Gras, and D. G. Blair. Parametric instabilities and their control in advanced interferometer gravitational-wave detectors. *Phys. Rev. Lett.*, 94(12) :121102, Apr 2005. [150](#)
- [171] C. Zhao, L. Ju, Y. Fan, S. Gras, B. J. J. Slagmolen, H. Miao, P. Barriga, D. G. Blair, D. J. Hosken, and A. F. Brooks. Observation of three-mode parametric interactions in long optical cavities. *Physical Review A*, 78(2) :23807, 2008. [151](#), [152](#), [153](#)

-
- [172] C. Zhao, L. Ju, H. Miao, S. Gras, Y. Fan, and D. G. Blair. Three-mode optoacoustic parametric amplifier : A tool for macroscopic quantum experiments. *Physical Review Letters*, 102(24) :243902, 2009. [150](#), [151](#), [158](#), [160](#)

RÉSUMÉ

Dans ce manuscrit nous présentons une expérience de mesure optique ultrasensible des vibrations mécaniques d'un micro-miroir dans une cavité Fabry-Perot de grande finesse. Le micro-miroir est constitué d'un résonateur de taille micrométrique en silicium, de fréquence de résonance $\Omega_m/2\pi$ de l'ordre du mégahertz, sur lequel est déposé un traitement optique de haute réflectivité. La sensibilité très élevée des mesures interférométriques est en principe suffisante pour observer les fluctuations quantiques de point zéro du résonateur. Pour atteindre le régime où l'énergie d'agitation thermique du micro-résonateur devient négligeable devant celle de l'état quantique fondamental, sa température doit être inférieure à $T_Q = \hbar \Omega_m/k_B \simeq 50 \mu\text{K}$. Afin d'approcher cette température, nous avons utilisé à la fois des méthodes cryogéniques traditionnelles et une technique de refroidissement laser basée sur les effets dynamiques de la pression de radiation dans une cavité désaccordée.

Nous avons ainsi étudié la possibilité de combiner mesures optiques de haute sensibilité et cryogénie en plaçant le micro-résonateur et la cavité dans un cryostat à circulation d'hélium liquide. Nous avons mesuré le spectre de bruit thermique à température cryogénique et réalisé un refroidissement par pression de radiation du micro-résonateur.

Nous avons également étudié un nouveau mécanisme de couplage optomécanique à trois modes, à bandes latérales résolues, plus efficace pour refroidir un micro-résonateur. Nous avons mis en évidence à la fois un effet de réduction et d'augmentation de la température effective du micro-miroir selon le couplage des modes optiques. Cette technique permet également d'étudier le phénomène des instabilités paramétriques pouvant apparaître dans les interféromètres gravitationnels de seconde génération.

Mots-clés : Optomécanique en cavité, Micro-miroir, Oscillateur mécanique, État quantique fondamental, Refroidissement laser, Pression de radiation, Cavité de grande finesse, Cryogénie.

ABSTRACT

We present a very sensitive optical measurement of the mechanical fluctuations of a micro-mirror in a high finesse Fabry-Perot cavity. The micro-mirror is formed by a micrometric silicon resonator typically oscillating at few megahertz and coated with a high reflectivity dielectrical multilayer. The very high sensitivity of interferometric measurements allows in principle to measure the zero-point fluctuations of the resonator. Its thermal energy becomes negligible with respect to ground state energy when its effective temperature is lower than $T_Q = \hbar \Omega_m/k_B \simeq 50 \mu\text{K}$: in order to meet this very stringent condition, we both made use of cryogenic techniques and a cooling laser technique based on dynamical radiation-pressure effects in a detuned cavity.

We have thus explored the possibility of performing high-sensitivity optical measurements once the micro-resonator and the cavity are cooled in a flowing helium cryostat. We measured the thermal noise spectrum at cryogenic temperature and realized the radiation pressure cooling of the micro-mirror.

We studied a new kind of optomechanical coupling as well, which involves three modes and will enable a more efficient active cooling. We demonstrated the possibility of either increase or decrease the effective temperature, depending on the coupling between the modes. Furthermore, this technique is useful to study the parametric instabilities which are likely to play a role in second generation of gravitational-waves interferometers.

Key words : Cavity optomechanics, Micro-mirror, Mechanical oscillator, Quantum ground state, Laser cooling, Radiation pressure, High finesse cavity, Cryogenics.