



**HAL**  
open science

# Communications acoustiques sous-marines sur canal fortement dispersif en temps et en fréquence: point de vue de la théorie de l'information

François-Xavier Socheleau

► **To cite this version:**

François-Xavier Socheleau. Communications acoustiques sous-marines sur canal fortement dispersif en temps et en fréquence: point de vue de la théorie de l'information. Théorie de l'information [cs.IT]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2011. Français. NNT: . tel-00638836v1

**HAL Id: tel-00638836**

**<https://theses.hal.science/tel-00638836v1>**

Submitted on 7 Nov 2011 (v1), last revised 20 Nov 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

## Télécom Bretagne

En habilitation conjointe avec l'Université de Bretagne Occidentale

Ecole Doctorale – sicma

---

### Communications acoustiques sous-marines sur canal fortement dispersif en temps et en fréquence : point de vue de la théorie de l'information

---

### Thèse de Doctorat

Mention : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Présentée par **François-Xavier Socheleau**

Département : Signal et Communications

Laboratoire : UMR CNRS 3192 Lab-STICC

Directeur de thèse : Christophe Laot

#### Jury :

<i>Président</i>	M. Didier Le Ruyet, Professeur, Conservatoire National des Arts et Métiers
<i>Rapporteurs</i>	M. Mérouane Debbah, Professeur, Ecole Supérieure d'Electricité M. João Pedro Gomes, Maître de conférences, Instituto Superior Técnico
<i>Examineurs</i>	M. Gilles Burel, Professeur, Université de Bretagne Occidentale M. Christophe Laot, Maître de conférences, Télécom Bretagne M. Jean-Michel Passerieux, Ingénieur expert sonar, Thales Underwater Systems
<i>Invité</i>	M. Nicolas Beuzelin, Expert systèmes de télécommunication sous-marins, DGA Techniques Navales



---

Cette thèse a été préparée à Télécom Bretagne au sein du département Signal et Communications (UMR CNRS 3192 Lab-STICC) et à Thales Underwater Systems au sein du service des Etudes Générales Sonar de novembre 2008 à octobre 2011. Une partie des travaux présentés dans ce manuscrit est issue d'une collaboration avec le professeur Stojanovic de Northeastern University, Boston, USA.

Cette thèse Cifre a été co-financée par Thales Underwater Systems et l'ANRT. Ce travail a également été soutenu par le GESMA (Groupes d'Etudes Sous-Marines de l'Atlantique) qui a fourni une partie des données réelles exploitées dans ce manuscrit.



---

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance envers Christophe Laot et Jean-Michel Passerieux pour la qualité de leur encadrement tout au long de cette thèse. Leur disponibilité, la pertinence de leurs conseils, leur culture scientifique, le partage de leur expérience, leur confiance et leur soutien m'ont été très précieux aux cours de ces trois dernières années.

Je remercie vivement Didier Le Ruyet pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Gilles Burel et Nicolas Beuzelin pour y avoir participé. Je remercie également les rapporteurs Mérouane Debbah et Joao Pedro Gomes pour le soin qu'ils ont apporté à la lecture et à l'évaluation de ce manuscrit.

Je souhaite aussi remercier Milica Stojanovic pour m'avoir accueilli dans son laboratoire à Northeastern University.

Ces années passées à Télécom Bretagne ont aussi été l'occasion de développer des collaborations fructueuses sur des sujets scientifiques divers. J'associe pleinement à ces remerciements Sébastien Houcke, Abdeldjalil Aïssa-El-Bey et Mohamed Rabie Oularbi avec qui j'ai collaboré sur des problèmes de détection en radio-cognitive, Dominique Pastor qui a très fortement influencé ma vision des statistiques robustes et de la parcimonie ainsi que Samir Saoudi sans qui je n'aurais pu être initié au concept du cinquième quart-temps.

Enfin, je n'oublie pas tous les membres de l'équipe EGS de Thales ainsi que ceux du département Signal & Communications de Télécom Bretagne que je remercie pour leur bonne humeur quotidienne qui contribue à créer une excellente atmosphère de travail.



---

# Résumé

Le canal acoustique sous-marin (ASM) est réputé comme difficile. Il présente à la fois des effets de réflexion/réfraction générant de la dispersion temporelle importante, une atténuation fortement croissante avec la fréquence qui restreint la bande-passante disponible, ainsi qu'une forte variabilité du milieu, qui, combinée avec une faible célérité des ondes acoustiques, induit une dispersion fréquentielle conséquente.

Contrairement à la recherche dans le domaine des radio-communications qui repose principalement sur des modèles de propagations bien établis, la recherche en communication ASM ne dispose pas de tels modèles et s'appuie majoritairement sur des expérimentations en mer.

L'objectif principal de ce travail de thèse est de montrer que malgré notre connaissance limitée sur la réalité physique du canal, il est possible, en utilisant des outils théoriques adaptés, de déterminer en laboratoire des directives pertinentes aussi bien pour la sélection des modulations et la validation des modems correspondants que pour les prédictions de débit. Dans ce contexte, la théorie de l'information s'avère être un outil très précieux pour inférer un maximum de conclusions sur le canal et induire des directives pratiques sur les formats de modulation.

Nous développons dans un premier temps un point de vue de théorie de l'information sur la modélisation de canaux acoustiques sous-marins doublement dispersifs en s'appuyant sur le principe d'entropie maximale. Dans un cadre d'inférence plus empirique, nous proposons ensuite un modèle de canal alimenté par des données réelles qui repose sur l'hypothèse selon laquelle une réponse impulsionnelle de canal mesurée en mer n'est qu'une observation d'un processus aléatoire sous-jacent. Nous dérivons dans un troisième temps de nouvelles bornes de capacité sur le canal ASM en considérant des hypothèses plus réalistes que l'état de l'art sur le sujet : le canal est ici supposé doublement dispersif, la puissance crête limitée et la réalisation courante du canal inconnue de l'émetteur et du récepteur (contexte non-cohérent). Enfin, nous nous intéressons à la structure « propre » du canal et cherchons à optimiser la forme d'onde de transmission pour trouver un bon compromis entre les notions très intriquées de robustesse et de débit qui caractérisent les performances des systèmes de communication.

## Mots clés

Communications acoustiques sous-marines, théorie de l'information, modélisation de canal





---

# Abstract

The underwater acoustic channel (UAC) is known to be a difficult communication medium. It generates significant temporal dispersion due to the effects of reflection and refraction, its attenuation strongly increases with the frequency, which limits the available bandwidth, and its strong variability combined with the low speed of acoustic waves induces substantial frequency dispersion.

Unlike research in the field of radio communications that relies primarily on well-established propagation models, research in underwater acoustic communications does not have such models and is mostly based on sea trials.

The main objective of this thesis is to show that despite our limited knowledge on the physical reality of the channel, it is possible, using appropriate theoretical tools, to determine in laboratory relevant guidelines for the selection of modulations and the validation of corresponding modems, as well as for the prediction of achievable data rates. In this context, information theory proves to be a valuable tool to infer a maximum of conclusions on the channel and induce practical guidelines on the design of transmission schemes.

We first develop an information theoretic viewpoint on doubly dispersive UAC modeling that relies on the principle of maximum entropy. In a more empirical inference framework, we then propose a channel model driven by real data that is based on the assumption that a channel impulse response measured at sea is a single observation of an underlying random process. Third, we derive new bounds on the capacity of underwater acoustic channels and consider more realistic assumptions than the state-of-the-art on that topic : the channel is assumed to be doubly dispersive, the average-power and the peak-power of the input signal are assumed to be finite, and neither the transmitter nor the receiver knows the current realization of the channel (non-coherent setting). Finally, we focus on the eigen structure of the channel and seek to optimize the signalling scheme in order to find a good compromise between the intertwined notions of reliability and data rate that characterize the performance of communication systems.

## **Keywords**

Underwater acoustic communications, information theory, channel modeling



---

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vii</b>
<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
<b>Acronymes</b>	<b>xiii</b>
<b>Notations</b>	<b>xv</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>I Modélisation du canal</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités sur le milieu de propagation acoustique sous-marin</b>	<b>13</b>
1.1 Physique du milieu . . . . .	13
1.1.1 Célérité de l'onde acoustique . . . . .	13
1.1.2 Equation d'onde et théorie des rayons . . . . .	14
1.1.3 Pertes de propagation . . . . .	17
1.1.4 Variabilité de l'environnement . . . . .	18
1.1.5 Bruit . . . . .	18
1.2 Implications des particularités du milieu sur les communications . . . . .	19
1.2.1 Environnement petit fond et dispersion temporelle . . . . .	19
1.2.2 Bande passante disponible . . . . .	20
1.2.3 Compression/dilatation Doppler . . . . .	21
1.2.4 Dispersion fréquentielle . . . . .	22

1.3	Modèle de transmission . . . . .	23
1.3.1	Opérateur canal . . . . .	23
1.3.2	Canal aléatoire et hypothèse WSSUS . . . . .	23
1.3.3	Approximation bande étroite . . . . .	24
1.3.4	Modèle discret équivalent en bande de base . . . . .	26
1.3.5	Exemple de canaux réels . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Modèle de canal à entropie maximale</b>	<b>31</b>
2.1	Principe d'entropie maximale . . . . .	31
2.2	Modélisation de la densité de probabilité du canal . . . . .	32
2.2.1	Modèle gaussien . . . . .	32
2.2.2	Paramètres incertains . . . . .	33
2.3	Modélisation des fluctuations temporelles du canal . . . . .	35
2.4	Illustrations . . . . .	39
2.4.1	Comparaison avec des données réelles . . . . .	39
2.4.2	Limitations du modèle . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Rejeu stochastique de canal</b>	<b>45</b>
3.1	Inférence empirique . . . . .	45
3.1.1	Canal stationnaire en tendance . . . . .	45
3.1.2	Densité de probabilité du canal . . . . .	49
3.2	Corrélations entre trajets et rejeu . . . . .	52
3.3	Illustrations . . . . .	53
	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
<b>II</b>	<b>Capacité du canal et optimisation du schéma de signalisation</b>	<b>59</b>
	<b>Introduction</b>	<b>61</b>
<b>4</b>	<b>Sur la capacité du canal acoustique sous-marin</b>	<b>65</b>
4.1	Sur la capacité non-cohérente . . . . .	65
4.2	Modèle de transmission . . . . .	67
4.3	Bornes de capacité . . . . .	70
4.3.1	Définition de la capacité non-cohérente . . . . .	70
4.3.2	Bornes supérieures . . . . .	70
4.3.3	Borne inférieure . . . . .	73

4.4	Illustrations . . . . .	74
4.4.1	Evaluation des bornes de capacité sur canaux synthétiques . . . . .	75
4.4.2	Evaluation des bornes de capacité sur un canal réel . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Sur l'optimisation du schéma de signalisation</b>	<b>81</b>
5.1	Structure singulière du canal et signalisation de Weyl-Heisenberg . . . . .	81
5.1.1	Diagonalisation approchée . . . . .	81
5.1.2	Signalisation de Weyl-Heisenberg . . . . .	82
5.1.3	Compromis interférence-efficacité spectrale . . . . .	84
5.2	Optimisation de puissance . . . . .	91
5.2.1	Motivations . . . . .	91
5.2.2	Schéma de Weyl-Heisenberg contraint en puissance crête . . . . .	93
5.2.3	Sur l'étalement du canal de transmission . . . . .	95
5.2.4	Optimisation de puissance sur des canaux sous-étales . . . . .	96
5.2.5	Évaluation numérique pour les canaux sous-étales . . . . .	99
5.2.6	Directives de conception . . . . .	106
5.2.7	Cas des canaux sur-étales . . . . .	106
	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Solution numérique de l'équation (2.19)</b>	<b>127</b>
<b>B</b>	<b>Décomposition modale empirique</b>	<b>129</b>
<b>C</b>	<b>Détails sur la preuve du théorème 4.3.2</b>	<b>131</b>
C.1	Calcul de $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}}$ . . . . .	131
C.2	Calcul de $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y} \mathbf{x}}$ . . . . .	132
<b>D</b>	<b>Détails sur la preuve du théorème 4.3.3</b>	<b>133</b>
<b>E</b>	<b>Bornes sur le rapport signal sur interférence</b>	<b>137</b>



---

# Acronymes

Pour des raisons de lisibilité, la signification d'une abréviation ou d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre. Par ailleurs, puisque nous utilisons toujours l'abréviation la plus usuelle, il est fréquent que ce soit le terme anglais qui soit employé.

<b>AFD</b>	Average Fade Duration
<b>ASM</b>	Acoustique Sous-Marin(e)
<b>AUV</b>	Autonomous Underwater Vehicle
<b>CSI</b>	Channel State Information
<b>d.d.p</b>	densité de probabilité
<b>EMD</b>	Empirical Mode Decomposition
<b>i.i.d</b>	indépendant et identiquement distribué
<b>KL</b>	Kullback-Leibler
<b>LCR</b>	Level Crossing Rate
<b>MIMO</b>	Multiple Input Multiple Output
<b>MMSE</b>	Minimum Mean Square Error
<b>NMSE</b>	Normalized Mean Square Error
<b>OFDM</b>	Orthogonal Frequency Division Multiplexing
<b>OTI</b>	Out-of-band Tone Insertion
<b>PAPR</b>	Peak-to-Average Power Ratio
<b>rms</b>	root mean square
<b>RX</b>	Récepteur
<b>SINDR</b>	Signal-to-Interference plus Noise plus Distortion Ratio
<b>SINR</b>	Signal-to-Interference plus Noise Ratio
<b>SIR</b>	Signal-to-Interference Ratio
<b>SISO</b>	Single Input Single Output
<b>SNDR</b>	Signal-to-Noise plus Distortion Ratio
<b>SNR</b>	Signal-to-Noise Ratio
<b>TEB</b>	Taux d'Erreur Binaire
<b>TX</b>	Émetteur
<b>WH</b>	Weyl-Heisenberg
<b>WSSUS</b>	Wide-Sense Stationary and Uncorrelated Scattering





---

# Notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées dans les différents chapitres du document. Dans la mesure du possible, nous avons tenté de conserver les mêmes notations d'un chapitre à l'autre.

$\mathbf{x}$	vecteur
$\mathbf{A}$	matrice
$(\cdot)^T$	transposé
$(\cdot)^*$	conjugué
$(\cdot)^\dagger$	transposé et conjugué
$\odot$	produit de Hadamard
$[\cdot]_{k,l}$	élément de la $k$ -ième ligne et $l$ -ième colonne d'une matrice
$\mathbf{I}_N$	matrice identité $N \times N$
$\mathbf{1}_N$	vecteur $N \times 1$ dont les éléments sont égaux à 1
$\mathbf{D}(\mathbf{x})$	matrice diagonale contenant les éléments du vecteur $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}_{\downarrow l}$	vecteur $\mathbf{x}$ de dimension $N \times 1$ dont les $N-l$ premiers éléments ont été décalés $l$ fois vers le bas et où les $l$ premiers sont ensuite mis à zéros
$\ \cdot\ _F$	norme de Frobenius
$\ \cdot\ $	norme euclidienne
$\text{tr}(\cdot)$	trace
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	espérance mathématique
$\mathcal{CN}(\mathbf{m}, \mathbf{R})$	distribution d'un vecteur gaussien circulaire de moyenne $\mathbf{m}$ et de matrice de covariance $\mathbf{R}$
$\Re$	partie réelle
$\Im$	partie imaginaire
$\angle$	argument d'un nombre complexe
$ \cdot $	module
$\langle y, z \rangle$	produit scalaire entre $y(t)$ et $z(t)$ tel que $\langle y, z \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)z^*(t)dt$
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac
$\nabla$	opérateur nabla
$\Delta$	opérateur laplacien
$\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable
$\mathbb{H}$	opérateur canal
$h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$	réponse impulsionnelle du canal
$G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$	fonction d'étalement du canal
$S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$	fonction de diffusion du canal



---

# Introduction générale

## Motivations et contexte de l'étude

La capacité à communiquer efficacement sous l'eau sans liaison filaire revêt un intérêt majeur pour de nombreuses applications liées à l'analyse, l'exploration ou l'exploitation du milieu sous-marin. La transmission de données océanographiques par des observatoires immergés, la commande de robots sous-marins téléopérés, le positionnement de systèmes se déplaçant dans les fonds marins ou l'envoi de messages entre un sous-marin et un bâtiment de surface en sont quelques exemples particuliers [Lurton, 2011; Juhel, 2005]. Alors que la conductivité électrique de l'eau limite très fortement la propagation des ondes radio-électriques et que les ondes optiques souffrent de la diffusion induite par les hétérogénéités du milieu marin, l'onde acoustique s'avère être le support le mieux adapté à la transmission d'information sur de longues distances.

Les modems acoustiques commercialisés de nos jours opèrent principalement dans des gammes de fréquences allant de quelques centaines de hertz à plusieurs dizaines de kilohertz et offrent des débits allant de quelques bits par jour à plusieurs dizaines de kilobits par seconde. Ces débits sont fortement conditionnés par les contraintes de consommation d'énergie des modems et par les distances de communications visées, le produit débit-distance étant habituellement inférieur à  $50 \text{ kbits/s} \times \text{km}$  [Kilfoyle and Baggeroer, 2000]. Comparativement aux performances offertes par les systèmes de communication radio évoluant dans l'air, les débits des modems acoustiques peuvent paraître dérisoires. Cependant, il faut noter que les contraintes imposées par le milieu sous-marin sont semblablement disproportionnées. Le canal acoustique sous-marin présente à la fois des effets de réflexion/réfraction générant de la dispersion temporelle, une atténuation fortement croissante avec la fréquence qui restreint la bande-passante disponible, ainsi qu'une forte variabilité du milieu, qui, combinée avec une faible célérité des ondes acoustiques, induit une dispersion fréquentielle importante. A titre de comparaison, les systèmes radio mobiles sont eux aussi contraints par les phénomènes de dispersion temps-fréquence. La grande différence avec les communications acoustiques sous-marines (ASM) est l'ordre de grandeur de ces phénomènes. Le produit dispersion temporelle - dispersion fréquentielle est habituellement compris entre  $10^{-4}$  et  $10^{-7}$  pour les systèmes radio alors qu'il est généralement de l'ordre de  $10^{-2}$  pour les systèmes ASM.

Après les travaux précurseurs des années 70-80 [Baggeroer, 1984] et les premières évaluations des communications cohérentes haut-débit des années 90 [Kilfoyle and Baggeroer, 2000], de nouvelles formes d'ondes et techniques de récep-

tion prometteuses émergent actuellement [Stojanovic et al., 2008]. Parmi ces techniques, souvent empruntées au domaine des radio-communications, on trouve les modulations multi-porteuses [Frassati et al., 2005; Gomes and Stojanovic, 2009; Li et al., 2008; Leus and van Walree, 2009], le recours aux systèmes multi-capteurs [Li et al., 2009; Roy et al., 2007], les techniques de codage canal type turbo-codes [Trubuil et al., 2010] ou LDPC [Huang et al., 2008], l'identification de canaux parcimonieux [Berger et al., 2010; Zamanizadeh et al., 2010] ou encore les techniques itératives de réception [Laot et al., 2010; Otnes and Eggen, 2008]. Les récentes expérimentations de ces technologies ouvrent des perspectives très intéressantes comparées à celles des modems commercialisés actuellement. Certains résultats expérimentaux rapportés dans la littérature démontrent même qu'il est parfois possible de communiquer à 10 kbits/s sur des distances de l'ordre de 50 km [Sangfelt et al., 2008], ce qui correspond à un produit débit-distance 10 fois supérieur aux limites communément admises jusqu'à récemment. Cependant, il est encore difficile de déterminer si ces nouvelles techniques peuvent effectivement mener à une rupture technologique en acoustique sous-marine ou si les résultats rapportés sont principalement la conséquence de conditions expérimentales exceptionnellement favorables.

En effet, l'identification de formes d'ondes performantes ou la comparaison de techniques de transmission concurrentes reste un processus laborieux en acoustique sous-marine. Contrairement à la recherche dans le domaine des radio-communications qui repose principalement sur des modèles de propagation bien établis, la recherche en communication acoustique sous-marine ne dispose pas de tels modèles et s'appuie majoritairement sur des expérimentations en mer. Ceci s'explique en partie par une connaissance limitée des phénomènes physiques qui régissent le milieu sous-marin et par l'absence de consensus au sein de la communauté de recherche sur certaines propriétés, notamment statistiques, du canal [Stojanovic and Preisig, 2009]. L'absence de modèles « standardisés » induit dès lors des cycles de développement longs et coûteux.

Un des objectifs de ce travail de thèse est de montrer que malgré notre connaissance limitée de la réalité physique du canal, il est possible, en utilisant des outils théoriques adaptés, de déterminer en laboratoire des directives pertinentes aussi bien pour la sélection des modulations et la validation des modems correspondants que pour les prédictions de débit. En limitant le recours aux essais en mer, ce travail de laboratoire peut permettre de réduire les cycles de développement des systèmes de communications et d'accélérer ainsi la quête vers l'un des objectifs ultimes en communication ASM : l'identification des techniques d'émission-réception offrant le meilleur produit débit-distance<sup>1</sup>. Toute la difficulté consiste alors à exploiter au mieux la connaissance objective du milieu de propagation sans spéculer sur le comportement du canal, ce qui pourrait mener à des conclusions erronées.

Dans ce cadre de travail particulier, la théorie de l'information s'avère être un outil très précieux pour inférer un maximum de conclusions sur le canal et induire des directives « pratiques » sur les formats de modulation. Pour baliser le chemin vers la maximisation du produit débit-distance, nous nous sommes focalisé sur les propriétés du canal de transmission en abordant notamment les sujets de modélisation de canal, de calcul

---

1. Pour être plus précis, ce Saint Graal s'exprime plutôt en fonction du produit efficacité spectrale-distance (bits/s/Hz.km).

de capacité et d'optimisation de schéma de signalisation par rapport à la structure de ce canal. Même si les réflexions proposées dans ce manuscrit reposent sur des outils théoriques, la majeure partie des illustrations et analyses numériques se base sur des signaux réels enregistrés en mer. On s'attache ainsi à faire le lien entre la théorie et la physique du milieu. On notera aussi que le travail présenté dans ce manuscrit se limite aux systèmes de transmission Single-Input Single-Output (SISO) n'utilisant qu'un seul transducteur à l'émission et qu'un seul hydrophone à la réception.

## Plan et contributions

Ce manuscrit de thèse s'articule autour de deux parties distinctes. Chacune de ces parties débute par sa propre introduction, permettant de situer précisément le contexte de travail ainsi que les contributions par rapport à la littérature existante. La présente introduction est donc succincte.

Dans le cadre de la première partie, nous nous intéressons à la modélisation des canaux ASM dispersifs en temps et fréquence.

Le chapitre 1 présente des généralités sur les phénomènes physiques qui régissent le comportement du canal acoustique sous-marin ainsi que leurs impacts sur les systèmes de communications.

Dans le chapitre 2, nous nous attachons à construire un modèle de canal paramétrique à partir d'une information restreinte sur le milieu ASM à modéliser. En utilisant une méthode d'inférence inductive, connue sous le nom du principe d'entropie maximale, nous montrons qu'il est possible d'obtenir un modèle proche de la réalité physique en connaissant seulement quelques grandeurs statistiques comme la puissance moyenne et l'étalement Doppler. Ce modèle repose principalement sur les travaux de Jaynes [Jaynes, 1957], Debbah et al. [Debbah and Müller, 2005; Guillaud et al., 2007], et reprend une partie importante de l'article

E.-X. Socheleau, C. Laot, and J.-M. Passerieux, "Concise Derivation of Scattering Function from Channel Entropy Maximization", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, no. 11, Nov. 2010.

Au chapitre 3, nous proposons un modèle de canal piloté par des données réelles. Ce modèle, dit de rejeu stochastique, repose sur l'hypothèse selon laquelle un canal sondé en mer est une observation d'un processus aléatoire sous-jacent. A partir de la mesure effectuée en mer, les propriétés statistiques du canal sont analysées afin de pouvoir générer en laboratoire de nouvelles réalisations du processus observé. Contrairement au modèle du chapitre 2, qui est paramétrique et ne nécessite pas de données réelles, le modèle proposé dans le chapitre 3 est non paramétrique et consiste, à partir de l'observation d'un canal sur une tranche temporelle donnée, à générer d'autres réalisations de ce canal ayant exactement les mêmes propriétés statistiques. Ce chapitre couvre l'article

E.-X. Socheleau, C. Laot, and J.-M. Passerieux, "Stochastic Replay of Non-WSSUS Underwater Acoustic Communication Channels Recorded at Sea", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, No. 10, pp. 4838-4849, 2011.

Dans la seconde partie de ce manuscrit, nous cherchons tout d'abord à connaître les

limites théoriques de débit de communication qu'il est possible d'atteindre en ASM et initions ensuite une réflexion sur les directives de conception de schémas de signalisation qui permettraient d'optimiser les ressources offertes par le milieu ASM.

La capacité du canal de transmission acoustique sous-marin est abordée dans le chapitre 4 en considérant des contraintes plus réalistes que l'état de l'art sur le sujet. Le canal est ici supposé doublement dispersif, les puissances crêtes et moyennes limitées et la réalisation courante du canal inconnue de l'émetteur et du récepteur (contexte non-cohérent). La capacité exacte du canal sous de telles hypothèses reste encore inconnue. Par conséquent, des bornes sur cette capacité sont calculées. Ce chapitre reprend en partie l'article

J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, C. Laot, "Achievable Rates over Doubly Selective Rician-Fading Channels under Peak-Power Constraint", *soumis à IEEE Trans. Wireless Commun.*, Oct. 2011.

Le chapitre 5 s'intéresse à l'optimisation du schéma de signalisation au regard des caractéristiques du canal ASM. Nous considérons un schéma de signalisation de type Weyl-Heisenberg qui consiste à multiplexer l'information en temps-fréquence et permet une adaptation relativement souple au caractère doublement dispersif du canal. Nous discutons des différents paramètres qu'il est possible d'optimiser et discutons de leur impact sur l'interférence observée à la réception et sur le débit d'information. Nous nous focalisons particulièrement sur les techniques d'optimisation de puissance.

## **Première partie**

# **Modélisation du canal acoustique sous-marin**





---

# Introduction

Afin d'anticiper en laboratoire les performances des systèmes de communication acoustique en environnements sous-marins réels, les modèles de canaux de propagation sont essentiels. Selon leur degré d'exhaustivité et de précision, ces modèles peuvent augmenter fortement la probabilité de succès des essais terrain et réduire ainsi le coût de développement du système global. De nombreuses techniques de modélisation sont disponibles dans la littérature [Brekhovskikh and Lysanov, 1991; Cristol, 2005; Zhang et al., 2009; Stojanovic, 2008; Geng and Zielinski, 1995; Galvin and Coats, 1996; Bjerrum-Niese and Lützen, 2000; Essebbar et al., 1994; Xie et al., 2006; Porter and Bucker, 1987]. Ces modèles de canaux acoustiques sous-marins (ASM) reposent sur des formalismes qui sont généralement soit déterministes et gouvernés par des considérations physiques [Stojanovic, 2008; Essebbar et al., 1994; Zhang et al., 2009; Porter and Bucker, 1987] ou stochastiques [Galvin and Coats, 1996; Geng and Zielinski, 1995; van Walree et al., 2008] ou une combinaison des deux (les moments des modèles stochastiques étant calculés à partir de paramètres physiques) [Cristol, 2005; Bjerrum-Niese and Lützen, 2000; Xie et al., 2006]. Quel que soit le formalisme choisi, il est communément admis que le canal est un système linéaire variant dans le temps entièrement caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$  telle que l'entrée  $s(t)$  et la sortie  $r(t)$  de ce système vérifient

$$r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\mathbb{H}}(\tau, t) s(t - \tau) d\tau, \quad (1)$$

où  $\tau$  représente le domaine des retards, i.e. le domaine de dispersion temporelle des multi-trajets du canal, et  $t$  le temps absolu.

Comme nous allons le présenter dans le chapitre 1, les lois de la physique déterministe s'avèrent très utiles pour déterminer certaines caractéristiques de cette réponse impulsionnelle. Elles permettent notamment de connaître précisément les retards d'arrivée des différents trajets du canal en fonction de la configuration de la transmission (immersion de l'émetteur et du récepteur, distance, fréquence, profil bathycélérimétrique etc.) ainsi que la puissance moyenne relative de ces trajets. Alors que les considérations déterministes offrent une modélisation précise du comportement moyen du canal, la modélisation statistique apparaît être la plus appropriée pour tenir compte des fluctuations temporelles rapides de la réponse du canal dues aux phénomènes aléatoires tels que la réflexion sur les interfaces rugueuses (surface de la mer et le fond) ou les mouvements de l'émetteur (TX) et récepteur (RX) autour de leur position nominale. Dans un formalisme probabiliste, le canal est alors entièrement caractérisé par la densité de probabilité conjointe du processus aléatoire  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$ . Alors que les distributions marginales de ce

processus s'approchent souvent de modèles paramétriques connus (de type gaussien par exemple), ses fluctuations temporelles sont plus difficiles à modéliser car elles dépendent de phénomènes de différentes échelles (cycles saisonniers, mouvement des vagues, mouvements de TX et RX, caractéristiques des diffuseurs etc.).

La modélisation de canal est généralement confrontée à un dilemme récurrent : celui de capturer au maximum la dynamique réelle des processus océaniques tout en limitant le nombre de paramètres d'entrée et le coût de calcul. Non seulement la complexité de calcul d'un modèle croît rapidement avec son niveau d'exhaustivité mais plus il cherche à s'approcher de la réalité physique précise du canal et moins il est probable que tous les paramètres d'entrée requis soient connus avec une précision suffisante pour rendre le modèle pertinent. En d'autres termes, même si le modèle est très bon, si la connaissance que l'on a sur les valeurs numériques des paramètres d'entrée est trop approximative, le modèle est inutile. En communication acoustique sous-marine où l'acquisition de données réelles coûte cher, les hypothèses heuristiques sont souvent prépondérantes pour palier le manque de connaissances sur les propriétés du canal [Kilfoyle and Baggeroer, 2000, Sec. II]. Comme souligné dans l'introduction générale, il n'y a pas de consensus dans la communauté de recherche sur la caractérisation statistique des processus d'évanouissement ASM [Stojanovic and Preisig, 2009]. Ce type de construction de modèle ad-hoc peut entraîner des approximations non objectivement justifiées et est donc non-consensuel.

Dans un contexte où des efforts émergent de la communauté de recherche en communications ASM pour définir des modèles de canaux standardisés [Otnes et al., 2009], nous nous sommes intéressés à la modélisation statistique de canal dans deux cadres d'inférence bien distincts, chacun de ces cadres étant conditionné par le degré de connaissance à disposition sur le processus à modéliser. Le premier modèle de canal, proposé dans le chapitre 2, repose sur une vision bayésienne ou subjective de la notion de probabilité alors que le second modèle, présenté dans le chapitre 3, s'inscrit lui dans une démarche empirique ou fréquentiste. L'approche bayésienne considère une probabilité comme le degré de conviction attribué par un individu à la réalisation d'un événement en tenant compte de son expérience ou de ses constatations alors que la vision fréquentiste interprète la probabilité d'un événement comme la fréquence relative avec laquelle il se produit dans un grand nombre d'expériences. Dans un contexte de modélisation, ces deux approches, souvent opposées, sont de notre point de vue complémentaires, la pertinence de l'une ou l'autre dépendant du degré d'abondance de l'information disponible sur le canal.

Dans le cas souvent rencontré en ASM où des modèles de propagation sont nécessaires mais où l'information à disposition sur les phénomènes à modéliser est limitée et/ou onéreuse à rassembler, il semble judicieux d'opter pour une approche bayésienne de modélisation. Dans le cadre bayésien, on ne cherche pas à simuler la réalité physique du canal, qui n'est pas connue de façon exhaustive, mais on se focalise plutôt sur la modélisation de la connaissance objective dont on dispose sur cette réalité, tout en laissant l'information inconnue dans un espace non contraint. L'objectif est ici de proposer le modèle le moins arbitraire possible qui ne spécule pas sur le comportement du canal et qui ne fait pas appel à des hypothèses non justifiées. Cette exigence de modélisation peut être exprimé par le desideratum ou axiome de cohérence utilisé en inférence inductive.

Ce desideratum peut être formulé comme suit [Jaynes, 2003] : « *If a conclusion can be reasoned out in more than one way, then every possible way must lead to the same result*<sup>2</sup> ». En d'autres termes, si l'on demande à plusieurs personnes de construire un modèle à partir de la même information sur le canal tout en répondant à l'exigence de cohérence, alors toutes ces personnes doivent aboutir au même modèle. Dans [Debbah and Müller, 2005], Debbah et Müller on abordé la question de modélisation *cohérente* de canaux de propagations en appliquant le principe d'entropie maximale introduit dans [Jaynes, 1957] par Jaynes. Classiquement, lorsque l'on veut représenter une connaissance imparfaite d'un phénomène  $X$  pour lequel seule une information a priori  $I$  est connue, le principe d'entropie maximale consiste à attribuer à  $X$  la densité de probabilité ayant la plus forte entropie parmi toutes les densités de probabilité compatibles avec  $I$ . L'entropie au sens de Shannon étant une mesure du degré d'incertitude d'une densité de probabilité, la distribution qui maximise l'entropie est, par définition, la plus incertaine et donc la moins arbitraire parmi toutes les distributions compatibles avec les contraintes imposées par  $I$ .

Comme souligné dans [Jaynes, 1957], la modélisation au sens du maximum d'entropie n'est pas censée représenter la réalité physique d'un phénomène, mais plutôt un état de connaissance sur cette réalité. Une tâche essentielle est alors de déterminer la quantité et le type d'information dont le modèle a besoin pour caractériser l'environnement à modéliser avec suffisamment de précision. Idéalement, on cherche à contraindre un modèle avec des paramètres qui soient très informatifs et faciles à connaître ou à estimer pour un environnement donné. Ceci est principalement justifiée par la volonté de fournir un modèle de canal suffisamment précis qui repose sur peu de paramètres pour lesquels il est aisé de spécifier des valeurs numériques.

A l'aide du principe d'entropie maximale et en s'inspirant des travaux présentés dans [Jaynes, 1957] et [Debbah and Müller, 2005], nous proposons dans le chapitre 2, un modèle analytique pour les densités de probabilités marginales du processus  $h_{\eta}(\tau, t)$  discrétisé ainsi que pour les densités spectrales de puissance de ce processus. Nous montrons qu'il est possible de construire un modèle compatible avec les données expérimentales à partir d'une connaissance limitée du canal, exprimée sous formes de moments tels que la puissance moyenne ou l'étalement doppler. Hormis la propriété de *cohérence* associée au principe d'entropie maximale, un des atouts majeurs de l'inférence bayésienne en général est qu'elle permet d'adapter facilement le modèle en fonction de l'information disponible. Au même titre qu'une théorie scientifique, un modèle est une construction toujours provisoire en principe : il se doit d'être compatible avec les phénomènes observables par expérimentation, mais cette compatibilité ne signifie pas que le modèle ou la théorie soient définitifs. Lorsqu'une observation vient contredire le modèle, celui-ci peut évoluer pour prendre en compte ces nouvelles données.

La limite de l'approche bayésienne ou plutôt de son formalisme, se révèle lorsqu'il y a profusion d'information sur le canal. Même si les données réelles sont onéreuses à collecter, des entreprises ou institutions lancent régulièrement des campagnes de sondage du canal ASM pour constituer des bases de données utiles à l'évaluation de systèmes en cours de développement ou au design de systèmes futurs. Les données récupérées à l'is-

---

2. Si une conclusion peut être obtenue par plus d'un moyen, alors tous ces moyens doivent aboutir au même résultat.

sue des ces campagnes se présentent sous la forme d’observations bruitées<sup>3</sup> du processus aléatoire  $h_{\text{H}}(\tau, t)$  sur une fenêtre de durée de l’ordre de plusieurs dizaines ou centaines de secondes (cf. chapitre 1). Si l’on cherche à reproduire au plus proche, à l’aide d’un modèle paramétrique, le comportement des processus  $h_{\text{H}}(\tau, t)$  pour lesquels on dispose d’observations riches (i.e. sur de longues durées par rapport aux fluctuations élémentaires du canal), le formalisme d’inférence bayésienne peut s’avérer être lourd à manipuler. Typiquement, lorsque les propriétés statistiques du canal changent au cours du temps ou que différents trajets sont corrélés, l’utilisation du principe d’entropie maximale devient complexe. En cas de profusion de données, on s’approche d’un régime asymptotique pour lequel l’inférence empirique prend tout son sens. Dans ce régime asymptotique, les approches bayésienne et empirique doivent en théorie converger mais l’approche empirique peut s’avérer plus facile à mettre en oeuvre.

Contrairement à l’inférence bayésienne qui construit un modèle pour nous à partir de l’information dont on dispose, l’inférence empirique requiert souvent une intuition préalable pour imaginer un modèle, cette intuition étant ensuite comparée aux données à l’aide de tests statistiques pour valider ou invalider le modèle. Ce caractère intuitif, qui est souvent décrié, a une vertu : il permet, dans certains cas, de prendre un raccourci et d’aboutir rapidement à un modèle satisfaisant d’un point de vue opérationnel. L’illustration typique de ce cas est la modélisation d’une densité de probabilité à partir du tracé d’histogrammes des données observées. Cette approche est totalement discutable d’un point de vue méthodologique mais a le mérite d’être pragmatique et peut aboutir à un modèle simple qui satisfasse les exigences opérationnelles requises sur le modèle.

Dans un cadre d’inférence empirique, nous proposons dans le chapitre 3 un modèle de canal alimenté par des données réelles issues de mesures expérimentales effectuées en mer. De façon similaire au modèle de canal récemment proposé par van Walree et al. dans [van Walree et al., 2008], notre modèle repose sur le postulat selon lequel un canal de communication ASM sondé à un endroit donné et sur une fenêtre temporelle donnée est une observation d’un processus aléatoire ergodique sous-jacent  $h_{\text{H}}(\tau, t)$ . A partir de cette mesure, les propriétés statistiques du canal sont analysées afin de pouvoir générer en laboratoire de nouvelles réalisations du processus observé. C’est ce que nous appelons par la suite le rejeu stochastique de canal. Une telle méthode de modélisation offre un cadre d’application assez restreint comparé aux modèles de propagation paramétriques usuels puisqu’elle correspond à une configuration de transmission (immersion TX/RX, fréquence, distance TX-RX etc.) particulière. Cependant, cette approche est d’un grand intérêt car elle permet de reproduire de façon fiable la réalité physique du milieu ASM et d’exploiter pleinement les expériences en mer dans des conditions de laboratoire contrôlées et reproductibles. A partir d’une réponse impulsionnelle enregistrée en mer et grâce au rejeu stochastique, il est ainsi possible de comparer des techniques de transmissions concurrentes confrontées au même canal avec un niveau de signification statistique précis. L’originalité principale de la méthode proposée dans la chapitre 3 par rapport aux méthodes de rejeu stochastique existantes [van Walree et al., 2008; Galvin and Coats, 1996] vient de la relaxation des hypothèses simplificatrices et parfois erronées de stationnarité au sens large du processus  $h_{\text{H}}(\tau, t)$  et de décorrélation entre les différents trajets du canal.

---

3. En plus d’être bruitées, les observations de  $h_{\text{H}}(\tau, t)$  sont généralement obtenues à travers un processus de mesure qui les déforme (comme la convolution avec les instruments de mesure par exemple).

Cette première partie consacrée à la modélisation de canal est organisée en trois chapitres. Le chapitre 1 présente les principaux phénomènes physiques qui conditionnent les propriétés du canal ASM et leurs implications sur les performances des systèmes de communication. Dans un cadre d'inférence bayésien, le chapitre 2 est consacré à la construction d'un modèle statistique de canal à partir d'une connaissance limitée de celui-ci. Le chapitre 3 repose sur l'analyse de données réelles et est dédié à l'étude d'un modèle de jeu stochastique de canal.



---

# Généralités sur le milieu de propagation acoustique sous-marin

« *It is wrong to think that the task of physics is to find out how Nature is. Physics concerns what we can say about Nature.* »

Niels Bohr

Ce chapitre est consacré aux rappels, définitions et notations qui seront utilisées dans cette partie du document. Nous nous intéressons tout d'abord aux principaux phénomènes physiques qui régissent le comportement du canal acoustique sous-marin et discutons ensuite leurs impacts sur les systèmes de communication. Enfin, nous présentons dans un troisième temps les notations et les hypothèses relatives au canal sur lesquelles reposent les travaux présentés dans ce manuscrit.

## 1.1 Physique du milieu

Du fait de son caractère non-homogène, l'océan est un milieu de propagation très complexe pour l'onde acoustique. Comme nous allons le présenter dans cette section, les hétérogénéités, qu'elles soient régulières ou aléatoires, impactent fortement le champ acoustique. Cette section a pour objectif de rappeler quelques notions élémentaires de physique liées à la propagation des ondes acoustiques en milieu sous-marin et se limite aux phénomènes influant les performances des systèmes de communication.

### 1.1.1 Célérité de l'onde acoustique

Le son se propage dans l'eau<sup>1</sup> à une vitesse de l'ordre de  $1500 \text{ m.s}^{-1}$  et d'une manière générale, le milieu acoustique sous-marin n'est pas isocélère. La célérité  $c$  du son dépend en effet de grandeurs telles que la température, la pression hydrostatique ou la salinité (dans une moindre mesure) qui varient d'un point de l'espace à un autre et qui peuvent aussi fluctuer au cours du temps. Des formules empiriques sont disponibles dans la littérature pour exprimer cette dépendance de  $c$  vis-à-vis de ces trois paramètres (la pression étant généralement exprimée par le biais de la profondeur  $z$ ). Une formule couramment utilisée est la formule de Clay et Medwin dont l'expression est [Clay and Medwin, 1977]

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.010T)(S - 35) + 0.016z, \quad (1.1)$$

---

1. A titre de comparaison, les ondes acoustiques se propagent à environ  $340 \text{ m.s}^{-1}$  dans l'air.



avec  $c$  en  $\text{m.s}^{-1}$ ,  $T$  la température en degrés Celsius,  $S$  la salinité en ‰ et  $z$  en mètres. La célérité de l'onde acoustique croît avec chacun de ces paramètres et est variable dans le temps et dans l'espace. Hormis quelques régions comme celles où convergent les courants chauds et froids, le gradient vertical de célérité est généralement beaucoup plus important que le gradient horizontal (rapport de l'ordre de 1000 [Brekhovskikh and Lysanov, 1991]). Dès lors qu'il s'agit de modéliser les variations spatiales de la célérité, un modèle simplifié consiste alors à approcher la structure de l'océan par un empilement de strates horizontales auxquelles on attribue des valeurs de célérité différentes suivant leur profondeur. Le champ de célérité sur une zone géographique et à un instant donné est alors représenté par le profil bathycélérimétrique sur lequel la célérité est tracée en fonction de la profondeur.

Dans des environnements grand-fond, la température diminue généralement avec la profondeur à l'inverse de la pression qui augmente avec celle-ci. La salinité variant peu, l'effet contraire de la température et de la pression aboutit à un profil de célérité qui décroît d'abord avec la profondeur (prépondérance de l'effet de la température en surface) puis augmente avec  $z$  (effet de la pression). A titre d'exemple, la figure 1.1 illustre de façon très schématique la bathycélérimétrie dans les zones à climat tempéré. Près de la surface, la température et la pression étant en général quasiment constantes, la vitesse du son varie peu. A mesure que la profondeur augmente, la température diminue, impliquant une diminution de la célérité qui n'est pas compensée par l'augmentation de la pression avec la profondeur. Cette zone de diminution de température est appelée la thermocline principale. Au delà d'une certaine profondeur, la température atteint une valeur stable d'environ 4 °C (on parle d'isotherme), et à partir de là, l'augmentation de pression avec la profondeur fait croître la célérité. La figure 1.1 est bien entendu schématique et dans la réalité on observe de nombreux profils de célérité très différents (se référer à la base "World Ocean Atlas"<sup>2</sup> par exemple).

La variation de la célérité se situe généralement entre 1450 et 1550  $\text{m.s}^{-1}$ . Même si ces variations sont relativement faibles, nous allons voir qu'elles affectent de façon très significative la propagation des ondes acoustiques dans l'océan.

### 1.1.2 Equation d'onde et théorie des rayons

D'une manière générale, la propagation des ondes acoustiques en milieu non homogène est décrite par l'équation d'onde [Robinson and Lef, 1994]

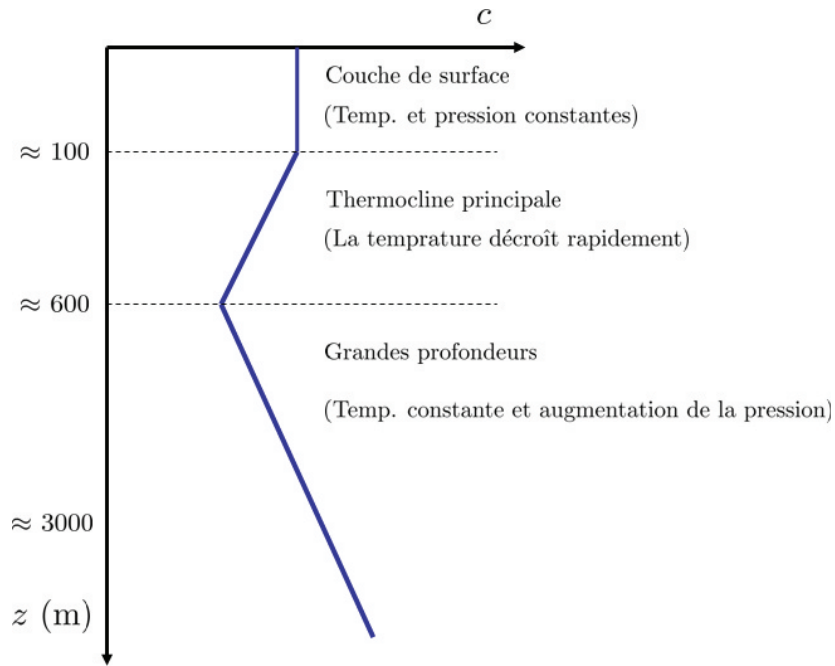
$$\rho \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{r}, t) \right) - \frac{1}{c^2(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial^2 p(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \begin{cases} 0, & \text{en dehors de la source} \\ S(\mathbf{r}, t), & \text{à la source,} \end{cases} \quad (1.2)$$

avec

- $\mathbf{r}$  le vecteur position,
- $t$  le temps,
- $\rho$  la densité du milieu,
- $p(\mathbf{r}, t)$  la pression acoustique,
- $c(\mathbf{r}, t)$  la célérité du son,

---

2. <http://www.nodc.noaa.gov/>



**Figure 1.1** — Représentation schématique du profil de célérité en zone tempérée (source : [Stojanovic and Preisig, 2009]).

- $S(\mathbf{r}, t)$  la distribution de la source.

Si l'on considère un milieu dont la célérité est invariante dans le temps<sup>3</sup> et une source harmonique qui génère une pression de la forme  $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)$ , (1.2) devient l'équation de Helmholtz indépendante du temps

$$\rho \operatorname{div} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p(\mathbf{r}) \right) + k^2 p(\mathbf{r}) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_s), \quad (1.3)$$

où  $\mathbf{r}_s$  est la position de la source,  $\delta(\cdot)$  l'impulsion de Dirac, et  $k = \omega/c$  le nombre d'onde. Pour les régions éloignées de la source où la densité du milieu ne varie pas de façon notable, (1.3) devient

$$\Delta p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0, \quad (1.4)$$

où  $\Delta$  représente ici le laplacien. La résolution des équations que nous venons de décrire représente la base de la plupart des modèles de propagation développés par les acousticiens. Le milieu acoustique sous-marin étant complexe, les solutions de l'équation d'onde ou de Helmholtz sont approchées de façon numérique. En fonction des hypothèses supposées sur le milieu, il existe différentes approches de modélisation, on peut citer par exemple : la théorie des rayons, l'équation parabolique, les méthodes des modes normaux et des modes couplés, la méthode des éléments finis, la méthode des différences finies ou l'intégration du nombre d'onde (Fast Field Program) [Buckingham, 1992; Etter, 2003; Robinson and Lef, 1994; Brekhovskikh and Lysanov, 1991].

Dans un contexte de communication ASM, l'approche la plus souvent appliquée est la théorie des rayons. On suppose dans cette théorie que l'énergie acoustique transmise de

3. où tout du moins variant très lentement à l'échelle des phénomènes à modéliser

l'émetteur au récepteur suit des chemins particuliers, que l'on appelle rayons, et qui sont par définition les normales aux fronts d'ondes de phase constante. Cette théorie s'appuie aussi sur l'hypothèse « hautes fréquences » des signaux transmis. Un signal est dit haute-fréquence lorsque sa longueur d'onde est très inférieure au gradient de célérité. Une directive approximative pour la définition d'un signal haute fréquence est fournie par la relation [Etter, 2003, Sec. 4.3]

$$f > 10 \frac{c}{H} \quad (1.5)$$

où  $f$  est la fréquence en Hz et  $H$  la hauteur de la colonne d'eau en m. Dans l'approche par rayons, la pression acoustique est représentée sous la forme

$$p(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(ik_0 W(\mathbf{r})), \quad (1.6)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde de référence (i.e. à un point fixé),  $A$  désigne l'amplitude inconnue et  $W$  la fonction dite *eikonale*, inconnue également. En développant l'équation de Helmholtz,  $A$  et  $W$  sont obtenus par la résolution du système suivant [Brekhovskikh and Lysanov, 1991]

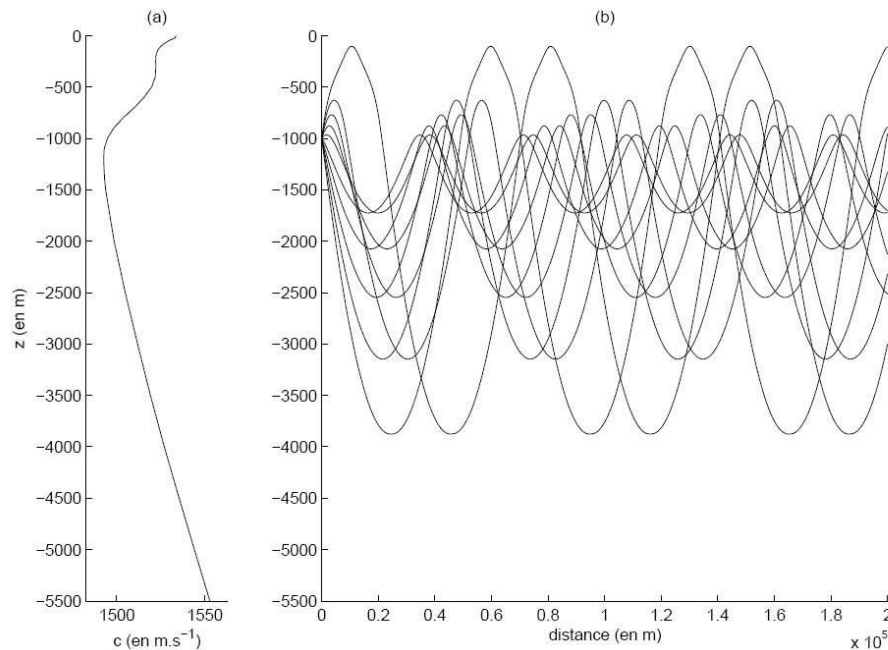
$$(\nabla W)^2 = \left(\frac{k}{k_0}\right)^2 \quad (1.7)$$

$$2\nabla A \nabla W + A \Delta W = 0. \quad (1.8)$$

L'équation (1.7) est dite *eikonale* et définit la géométrie des rayons, i.e., les lignes orthogonales au front d'onde avec  $W = \text{cste}$ . L'équation (1.8), dite de transport, permet quant à elle de déterminer l'amplitude de l'onde. Après quelques manipulations, l'équation *eikonale* permet d'aboutir à une loi de l'optique géométrique très connue, la loi de Snell-Descartes :  $n \cos \theta = \text{cste}$  où  $\theta$  désigne l'angle de rasance formé par la direction du rayon acoustique et l'interface entre deux milieux de célérité différente et où  $n$  est l'indice de réfraction.

A partir de la loi de Snell-Descartes et pour un profil de célérité donné, il est possible de tracer les trajectoires des rayons issus d'une source sonore. En considérant une stratification horizontale de l'océan, la variation continue de l'indice du milieu avec la profondeur entraîne une courbure progressive des ondes acoustiques qui, d'après (1.7), sont réfractées vers les zones de plus faible célérité. Dans un milieu qui n'est pas isocélère, les rayons ne suivent donc pas des trajectoires rectilignes. Ceci est illustré à la figure 1.2 qui montre un tracé de rayons associé à un profil de célérité mesuré en Atlantique nord.

La courbure des ondes acoustiques implique l'apparition de zones géographiques particulières comme les zones dites d'ombre qui restent non insonifiées même si l'émetteur rayonne de façon isotrope. Une autre particularité du canal ASM est l'existence de chenaux sonores qui se trouvent à proximité de zones où le gradient de célérité dans la colonne d'eau est nul. Dans ces chenaux, découverts au cours de la seconde guerre mondiale, l'onde acoustique peut se propager sans être réfléchi par la surface ou le fond par simple réfraction et bénéficie d'un phénomène de guide d'onde permettant de transmettre de l'information sur de très longues distances.



**Figure 1.2** — (a) Exemple de profil de célérité mesuré en Atlantique nord, (b) tracé de rayons associé avec un émetteur immergé à 1000 m de profondeur (source : [Rabaste, 2006]).

### 1.1.3 Pertes de propagation

Lors de son cheminement dans le canal ASM, le signal acoustique subit une atténuation qui dépend principalement des pertes induites par trois phénomènes de nature différente. On distingue les pertes par divergence géométrique, les pertes par amortissement et les pertes dues aux interactions avec le fond et la surface.

Les pertes par divergence géométrique correspondent à la diminution de la densité surfacique de puissance au fur et à mesure que l'onde acoustique s'éloigne de la source. Ces pertes s'expriment en décibels comme

$$A_d = 10 \times m \log D, \quad (1.9)$$

où  $D$  est la distance en mètres entre l'émetteur et le récepteur et  $m$  est le facteur de dispersion spatiale dépendant de la géométrie de cette dispersion (cylindrique :  $m = 1$ , sphérique :  $m = 2$ ).

Les pertes par amortissement correspondent en partie à la transmission de l'énergie acoustique d'un signal au milieu sous la forme d'énergie calorifique. Ce phénomène est dû à la viscosité de l'eau de mer qui induit des forces de frottements à l'échelle moléculaire lors du passage d'une onde acoustique. Il existe aussi une atténuation supplémentaire résultante de la dissociation ou relaxation de composés chimiques (acide borique et sulfate de magnésium) lors du passage cette onde [Domingo, 2008]. L'amortissement est exprimé grâce à un coefficient d'absorption  $\alpha(f)$  qui dépend de la fréquence et est exprimé en dB perdu par kilomètre. Il existe plusieurs modèles pour ce coefficient, une

expression largement employée est donnée par la formule de Thorp

$$\alpha(f) \approx 0.11 \frac{f^2}{1+f^2} + 44 \frac{f^2}{4100+f^2} + 2.75 \cdot 10^{-4} f^2 + 0.003, \quad (1.10)$$

où  $f$  est la fréquence exprimée en kHz.

Les pertes de réflexion fond ou surface sont assez complexes à modéliser. Les pertes à la surface vont dépendre par exemple de la rugosité ou des bulles d'air formées par les vagues et les pertes de réflexion sur le fond sont fonction du relief, du type de sédiment ou de l'angle de rasance. En première approximation, on peut considérer que la surface de la mer comme un réflecteur idéal du fait de la très grande différence d'impédance entre l'eau de mer et l'air. Si la surface de la mer est calme, la réflexion est proche de la perfection et l'onde est seulement déphasée de  $\pi$  sans être fortement atténuée. Les pertes de réflexion  $\gamma_b$  sur le fond peuvent quant à elles être approchées dans des conditions idéales par [Brekhovskikh and Lysanov, 1991]

$$\gamma_b(\theta) = \begin{cases} \frac{\rho_b \sin\theta - \rho \sqrt{(c/c_b)^2 - \cos^2\theta}}{\rho_b \sin\theta + \rho \sqrt{(c/c_b)^2 - \cos^2\theta}}, & \cos\theta \leq c/c_b \\ 1, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.11)$$

où  $\rho$  et  $c$  désignent la densité et la célérité du son dans l'eau et  $\rho_b$  et  $c_b$  la même chose mais dans le fond marin. Pour des modèles plus détaillés, le lecteur peut se référer à [Brekhovskikh and Lysanov, 1991; Domingo, 2008; Lurton, 2011; Cristol, 2005] par exemple.

On notera que la puissance d'une source acoustique s'exprime en dB référencé par rapport à une pression de  $1 \mu\text{Pa}$  à une distance de 1 mètre de la source, cette unité est notée par la suite dB re  $\mu\text{Pa} @ 1 \text{ m}$ . Pour référence une puissance acoustique de 171 dB re  $\mu\text{Pa} @ 1 \text{ m}$  correspond à une puissance électrique de 1 W.

#### 1.1.4 Variabilité de l'environnement

En plus d'être hétérogène, le milieu océanique fluctue au cours du temps. Ces fluctuations interviennent à différentes échelles, on peut citer par exemple :

- les phénomènes planétaires qui agissent à l'échelle de la circonférence terrestre et sur plusieurs années,
- les cycles saisonniers qui vont, entre autres, impacter les profils de célérité au travers des variations de température,
- les phénomènes de marées qui sont des cycles journaliers,
- les phénomènes s'appliquant aux microstructures (quelques mètres) telles que les turbulences, les vagues ou la rugosité des interfaces fond et surface.

#### 1.1.5 Bruit

Il existe plusieurs sources naturelles importantes de bruit ambiant dans l'océan à des fréquences d'intérêt pour les communications acoustiques. Les principales sources de bruit ambiant sont [Stojanovic, 2007] : les turbulences, le trafic maritime, les vagues et

le bruit thermique. Chacune des sources peut être modélisée par une distribution gaussienne de densité spectrale de puissance donnée par

$$\text{turbulences} : 10 \log N_t(f) = 17 - 30 \log f, \quad (1.12)$$

$$\text{trafic maritime} : 10 \log N_s(f) = 40 + 20(s - 0.5) + 26 \log f - 60 \log(f + 0.03), \quad (1.13)$$

$$\text{vagues} : 10 \log N_w(f) = 50 + 7.5w^{1/2} + 20 \log f - 40 \log(f + 0.4), \quad (1.14)$$

$$\text{bruit thermique} : 10 \log N_{th}(f) = -15 + 20 \log f. \quad (1.15)$$

Le fréquence est ici exprimée en kHz,  $s$  représente le facteur d'activité maritime compris entre 0 et 1 et  $w$  est la vitesse du vent en  $\text{m.s}^{-1}$ . Il existe bien évidemment d'autres sources de bruit (biologiques ou autres) qui ne sont pas évoquées ici car elles sont spécifiques à un contexte particulier (ex. : claquement des crevettes, sifflement, claquement, pépiement etc. des mammifères marins). Des exemples de densité spectrale de bruit sont montrés à la figure 1.3 pour différents facteurs d'activité maritime et vitesses de vent. Un modèle simplifié consiste à approcher la contribution des quatre sources de bruit par un modèle de densité spectrale de puissance décroissant de 17 ou 18 dB par décade.

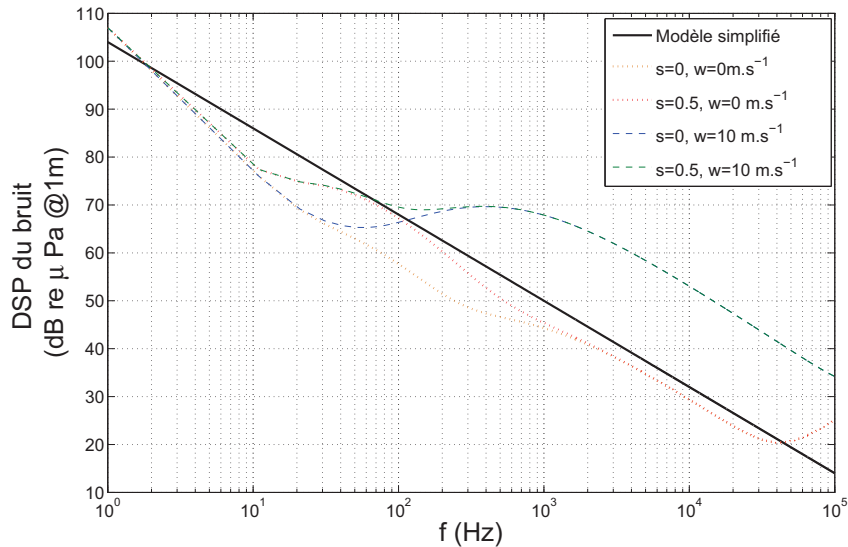


Figure 1.3 — Densité spectrale de puissance de bruit.

## 1.2 Implications des particularités du milieu sur les communications

### 1.2.1 Environnement petit fond et dispersion temporelle

Le contexte d'application de cette thèse se focalise principalement sur l'environnement marin dit « petit-fond ». De nombreuses définitions de l'expression « petit-fond »

sont avancées dans la littérature. Elles se raccrochent généralement soit à des considérations géologiques ou se fondent sur le rapport entre la distance de propagation  $D$  et la hauteur d'eau  $H$ . D'un point de vue géologique, les petits fonds correspondent aux plateaux continentaux dont la profondeur est généralement inférieure à la centaine de mètres. Du point de vue de la propagation acoustique, on parle de petits fonds lorsque les rayons acoustiques émis interagissent de façon importante avec les limites que sont le fond et la surface [Rabaste, 2006]. Ces interactions peuvent s'exprimer au travers de caractéristiques géométriques comme le rapport  $D/H$ . Par exemple, dans [Coates, 1993], différentes terminologies sont employées en fonction du rapport  $D/H$  pour qualifier la profondeur des eaux. Dans notre contexte, on s'intéresse aux applications qui évoluent principalement dans les zones portuaires ou côtières et pour lesquels  $D/H \gg 1$ . Un exemple typique d'application correspondant à ce contexte est la communication sur plusieurs kilomètres entre un robot sous-marin autonome (AUV<sup>4</sup>) et une plate-forme en surface dans une zone où la hauteur d'eau est de l'ordre de plusieurs dizaines de mètres.

Du fait de la faible hauteur d'eau, la bathycélérimétrie des environnements petits fonds ne présente pas toutes les caractéristiques de celle des grands fonds comme illustré aux figures 1.1 et 1.2-(a). Cette bathycélérimétrie petit fond est principalement déterminée par la température. En hiver, la couche d'eau est isotherme de sorte que le milieu devient isocélère, alors qu'en été elle peut présenter une diminution de température entre la surface et le fond induisant un gradient négatif de célérité. L'environnement petit fond est généralement plus hétérogène que l'environnement grand fond du fait par exemple des phénomènes de marées, de la rugosité du fond, de la présence potentielle d'estuaires etc.

De part les nombreuses réflexions sur le fond et la surface, les canaux ASM petits fonds sont très dispersifs en temps ce qui peut engendrer de l'interférence entre symboles d'information transmis et dégrader les performances des systèmes de communication (ou au moins complexifier les récepteurs). Comme illustré à la section 1.3, cette dispersion est de l'ordre de plusieurs milli-secondes pour les canaux les moins dispersifs jusqu'à la centaine de milli-secondes pour les canaux les plus dispersifs.

## 1.2.2 Bande passante disponible

Comme il est montré dans la section précédente, les pertes de propagation ainsi que la puissance du bruit ambiant dépendent fortement de la fréquence. Les pertes d'amortissement augmentent significativement avec la fréquence alors que le bruit lui diminue. L'atténuation du signal s'accroît aussi à mesure que la distance parcourue par l'onde acoustique augmente. Dans un environnement petit-fond et pour une fréquence et une distance données, il est possible d'effectuer un bilan de liaison approximatif en calculant le rapport signal sur bruit espéré à la réception comme

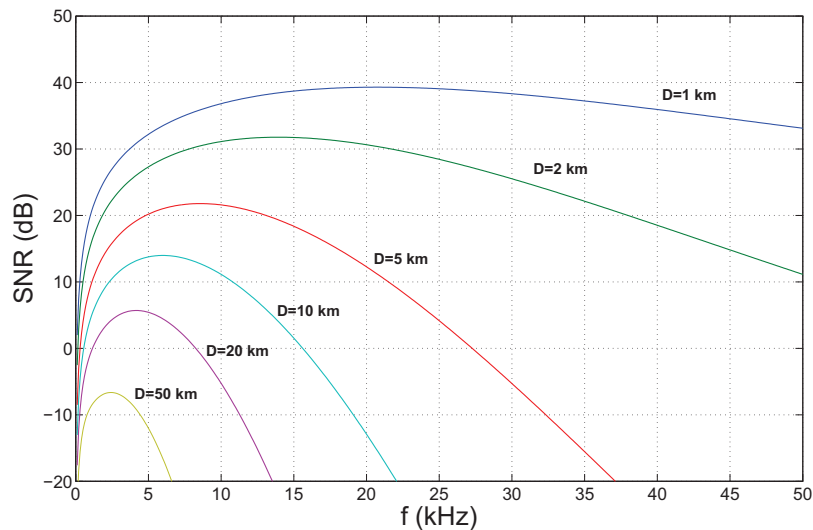
$$\text{SNR}(D, f) = \text{SL} + \text{DI}(f) - \underbrace{10 \times m \log D}_{\text{divergence}} - \underbrace{\alpha(f) \cdot D \times 10^{-3}}_{\text{absorption}} - \underbrace{50 + 18 \log(f)}_{\text{bruit}}, \quad (1.16)$$

---

4. Autonomous Underwater Vehicle

où SL (pour sound level) est la puissance du signal transmis et DI le gain d'antenne fonction de la fréquence et de la longueur de l'antenne. La figure 1.4 représente le rapport signal sur bruit du canal acoustique en fonction de la fréquence et de la distance avec  $m = 1.5$ , SL choisi arbitrairement tel que  $\text{SNR}(D, f) = 20$  dB à 1 km et à 1 kHz et  $\text{DI}=0$  dB (antenne omni-directionnelle). La figure 1.4 met en évidence trois propriétés du canal ASM très impactantes pour les systèmes de communication :

1. la bande passante disponible diminue rapidement en fonction de la distance à laquelle on veut transmettre. En d'autres termes, la capacité du canal décroît rapidement avec la distance.
2. La fréquence optimale, dans le sens où le SNR est maximisé, est décroissante en fonction de la distance.
3. La bande passante disponible est du même ordre de grandeur que la fréquence centrale, ce qui rend le canal intrinsèquement large bande.



**Figure 1.4** — Rapport signal sur bruit du canal acoustique en fonction de la fréquence et de la distance.

### 1.2.3 Compression/dilatation Doppler

La faible célérité des ondes acoustiques et le caractère large bande du canal induisent un effet Doppler très prononcé dès lors que l'émetteur et/ou le récepteur sont en mouvement. Le Doppler  $\varepsilon$  résultant de cette mobilité est défini comme le ratio entre la vitesse relative émetteur-récepteur  $v$  et la célérité du milieu  $c$ . Pour une fréquence pure  $f_n$ , l'effet Doppler peut être exprimé au travers d'une simple pondération fréquentielle avec

$$f_n^\varepsilon = f_n(1 + \varepsilon). \quad (1.17)$$

Cette relation est souvent utilisée pour les signaux bande étroite qui vérifient  $f_c/B \gg 1$  où  $f_c$  est la fréquence porteuse et  $B$  la bande du signal. Dans ce cas, il est souvent considéré que le spectre complet du signal est translaté par une même valeur de fréquence



Doppler  $\varepsilon f_c$ . Pour les signaux large bande comme utilisés en communications ASM, ce décalage Doppler n'est pas uniforme sur la bande  $B$  et est généralement représenté par une compression/dilatation<sup>5</sup> temporelle du signal transmis tel que [Sharif et al., 2000]

$$r(t) = s((1 + \varepsilon)t), \quad (1.18)$$

où  $r(t)$  est le signal reçu et  $s(t)$  le signal transmis<sup>6</sup>. Dans le domaine fréquentiel, cette compression/dilatation a pour effet de transformer un signal en bande de base de bande  $B$  en un signal de bande  $(1 + \varepsilon)B$  centré sur autour de la fréquence  $\varepsilon f_c$  [Stovanovic and Freitag].

Cet effet Doppler doit impérativement être pris en compte à la réception, notamment dans les étages de synchronisation, pour éviter une dégradation importante des performances de transmission [Eynard and Laot, 2008]. Comme discuté au chapitre 3, la mobilité de l'émetteur et du récepteur peut aussi impacter les propriétés statistiques du canal. On notera de plus que la faible célérité des ondes acoustiques peut être critique pour des applications réseaux puisqu'elle engendre des délais de propagations très importants (ex : il faut plus de 13 s pour effectuer un « ping » sur un noeud situé à 10 km).

### 1.2.4 Dispersion fréquentielle

Comme discuté à la section 1.1.4, le canal ASM fluctue au cours du temps. Les fluctuations à l'échelle de la durée d'un paquet de données (de plusieurs secondes à plusieurs minutes) sont principalement dues à la rugosité et à l'agitation de la surface de la mer, aux irrégularités du fond combinées aux mouvements de l'émetteur et à la présence de populations superficielles de micro-bulles d'air [Cristol and Passerieux, 2009]. Ces microstructures sont généralement considérées comme aléatoires. Une puissance acoustique rencontrant une surface aléatoire est redistribuée selon deux composantes :

- une partie cohérente, se comportant de façon spéculaire, c'est-à-dire comme si l'interface était plane, sauf pour un taux d'atténuation prenant la forme d'un simple coefficient de réflexion,
- une partie aléatoire diffusée.

Les fluctuations du canal, engendrées par la diffusion aléatoire de la puissance acoustique, génèrent donc de la dispersion fréquentielle, désignée également comme l'étalement Doppler. Au même titre que la dispersion temporelle peut induire de l'interférence entre symboles pour les systèmes de communication, la dispersion fréquentielle peut induire de l'interférence entre sous-porteuses si l'information est multiplexée dans le domaine fréquentiel. Même si l'information est uniquement multiplexée dans le domaine temporel, la dispersion fréquentielle implique dans la plupart des cas la mise en oeuvre d'algorithmes adaptatifs pour suivre les variations du canal. La dispersion fréquentielle des canaux ASM est généralement de l'ordre de quelques Hertz [van Walree, 2011].

5. compression si  $\nu > 0$  et dilatation sinon.

6. On suppose implicitement un canal idéal mono-trajet sans perte de puissance et sans bruit.

## 1.3 Modèle de transmission

### 1.3.1 Opérateur canal

L'action du canal ASM peut être décrite au travers d'un opérateur linéaire  $\mathbb{H} : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , où  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  représente l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable, tel que l'entrée  $s(t)$  et la sortie  $r(t)$  du canal vérifient

$$r(t) = (\mathbb{H}s)(t) \quad (1.19)$$

$$= \int_{\tau} h_{\mathbb{H}}(\tau, t) s(t - \tau) d\tau \quad (1.20)$$

$$= \int_{\tau} \int_{\nu} G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) s(t - \tau) e^{2j\pi\nu t} d\tau d\nu, \quad (1.21)$$

où  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$  est la réponse impulsionnelle du canal variant dans le temps et  $G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$  est la fonction d'étalement caractérisant la réflectivité du diffuseur associé au retard  $\tau$  et à la fréquence Doppler  $\nu$ . Cette fonction vérifie  $G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\mathbb{H}}(\tau, t) e^{-2j\pi\nu t} dt$ .

**Définition 1.3.1**  $\mathbb{H}$  est dit dispersif en temps si, pour  $s(t) = \delta(t)$ , la durée du signal  $(\mathbb{H}s)(t)$  est strictement positive.

**Définition 1.3.2**  $\mathbb{H}$  est dit dispersif en fréquence si, pour  $s(t) = e^{j2\pi f_0 t}$ , la bande du signal  $(\mathbb{H}s)(t)$  est strictement positive.

**Définition 1.3.3**  $\mathbb{H}$  est dit sélectif en temps si  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$  dépend de  $t$ .

**Définition 1.3.4**  $\mathbb{H}$  est dit sélectif en fréquence si  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$  dépend de  $\tau$ .

**Propriété 1.3.1** Un canal sélectif en temps (resp. fréquence) est dispersif en fréquence (resp. temps) et inversement.

On notera qu'il existe d'autres formalismes de représentation de l'opérateur canal, notamment lorsque celui-ci est large bande (cf. [Rickard et al., 2005] par exemple).

### 1.3.2 Canal aléatoire et hypothèse WSSUS

Il est généralement judicieux de modéliser les canaux ASM comme aléatoires. Premièrement parce qu'une description uniquement déterministe du milieu de propagation physique est trop complexe dans la plupart des cas d'intérêt pratique, et deuxièmement, parce qu'une description aléatoire est plus robuste dans le sens où les systèmes de communication conçus sur la base de canaux aléatoires devraient pouvoir fonctionner dans une multitude d'environnements de propagation différents. Par conséquent, nous considérons l'opérateur  $\mathbb{H}$  comme aléatoire.

Pour faciliter le traitement mathématique, il est parfois nécessaire de faire des hypothèses supplémentaires sur le canal. Un modèle simplifié de l'opérateur  $\mathbb{H}$  est le modèle WSSUS (wide-sense stationary and uncorrelated scattering) proposé par Bello [Bello,

1963]. Ce modèle repose sur deux hypothèses élémentaires : la stationnarité au sens large et la décorrélation du phénomène de diffusion. Comme expliqué au chapitre 3, ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées dans la pratique. Cependant, sur une fenêtre temporelle et une bande limitée, ces hypothèses peuvent être considérées comme raisonnables, on parle alors de modèle quasi-WSSUS. Mathématiquement, le modèle WSSUS implique

$$\mathbb{E} \left\{ (G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) - \bar{h}_\tau \delta(\nu)) (G_{\mathbb{H}}(\tau', \nu') - \bar{h}_{\tau'} \delta(\nu'))^* \right\} = S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) \delta(\nu - \nu') \delta(\tau - \tau'), \quad (1.22)$$

où  $\bar{h}_\tau = \mathbb{E}_t \{h_{\mathbb{H}}(\tau, t)\}$  et  $S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$  désigne la fonction de diffusion du canal qui vérifie

$$S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) = \int_u R_{\mathbb{H}}(\tau, u) e^{-2j\pi\nu u} du, \quad (1.23)$$

avec  $R_{\mathbb{H}}(\tau, u) = \mathbb{E} \left\{ (h_{\mathbb{H}}(\tau, t) - \bar{h}_\tau) (h_{\mathbb{H}}(\tau, t+u) - \bar{h}_\tau)^* \right\}$ .

**Définition 1.3.5** *La valeur quadratique moyenne (rms) de l'étalement Doppler du canal est définie comme*

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{\int_\nu (\nu - \bar{\nu})^2 q_{\mathbb{H}}(\nu) d\nu}{\int_\nu q_{\mathbb{H}}(\nu) d\nu}} \quad (1.24)$$

où  $\bar{\nu} = \frac{\int_\nu \nu q_{\mathbb{H}}(\nu) d\nu}{\int_\nu q_{\mathbb{H}}(\nu) d\nu}$  et où  $q_{\mathbb{H}}(\nu) = \int_\tau S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) d\tau$  est le profil puissance-Doppler du canal.

**Définition 1.3.6** *Le facteur d'étalement du canal est défini comme le produit  $\Delta_{\mathbb{H}} = 4v_{\text{max}} \times \tau_{\text{max}}$  où  $\tau_{\text{max}}$  et  $v_{\text{max}}$  sont respectivement l'étalement maximum des retards et du Doppler tels que  $S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) + |\bar{h}_\tau|^2 \delta(\nu) = 0$  pour  $|\tau| > \tau_{\text{max}}$  et  $|\nu| > v_{\text{max}}$ . Le support du canal est noté  $\mathcal{D} \triangleq [-\tau_{\text{max}}, \tau_{\text{max}}] \times [-v_{\text{max}}, v_{\text{max}}]$*

L'hypothèse WSSUS est invoquée aux chapitres 4 et 5 principalement par convenance mathématique. L'implication physique de cette approximation est discutée dans ces chapitres respectifs.

### 1.3.3 Approximation bande étroite

Le modèle des rayons de la section 1.1.2, qui décrit le signal reçu comme un nombre fini de rayons propres retardés les uns par rapport aux autres et ayant subi chacun une atténuation et un déphasage différents, permet de modéliser la réponse impulsionnelle  $h_{\mathbb{H}}(\tau, t)$  comme une somme de Dirac retardés les uns des autres et pondérés par des coefficients à valeurs complexes. Cette réponse impulsionnelle s'écrit

$$h_{\mathbb{H}}(\tau, t) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l(t) \delta(\tau - \tau_l(t)), \quad (1.25)$$

où  $L$  représente le nombre de trajets et  $c_l(t)$  et  $\tau_l(t)$  sont respectivement l'atténuation complexe et le retard associés au  $l$ -ième trajet à l'instant  $t$ . On notera que la sélectivité temporelle du canal s'exprime au travers la dépendance de l'atténuation complexe par rapport à  $t$  et que le canal est sélectif en fréquence si  $L \geq 1$ . La compression/dilatation

Doppler qui résulte du caractère large bande du canal et de la mobilité relative entre l'émetteur et le récepteur s'exprime quant à elle au travers de la dépendance par rapport à  $t$  du retard associé à chaque trajet. En effet, si l'on note vitesse relative de chaque trajet comme  $v_l$ , alors le retard  $\tau_l(t)$  est une fonction affine du temps et vérifie  $\tau_l(t) = \bar{\tau}_l - t \times v_l / c$  où  $\bar{\tau}_l$  est une constante. Dans ce cas, la sortie du canal s'écrit

$$r(t) = \int_{\tau} \sum_{l=0}^{L-1} c_l(t) \delta\left(\tau - \bar{\tau}_l + t \frac{v_l}{c}\right) s(t - \tau) d\tau. \quad (1.26)$$

Dans notre contexte petit-fond où  $D/H \gg 1$ , on peut supposer que les angles de départ (resp. arrivé) entre les points de réflexions fond-surface et le transducteur d'émission (resp. de réception) sont quasiment les mêmes de façon à ce que  $v_l \approx v, \forall l$ . Cette hypothèse permet de simplifier la représentation du canal. En effet, si l'on pose  $u = \tau + t \times v / c = \tau + t\varepsilon$ , alors (1.26) devient

$$r(t) = \int_u \sum_{l=0}^{L-1} c_l(t) \delta(u - \bar{\tau}_l) s((1 + \varepsilon)t - u) du. \quad (1.27)$$

La sortie du canal peut donc se représenter sous la forme

$$r(t) = (\mathbb{H}s)((1 + \varepsilon)t), \quad (1.28)$$

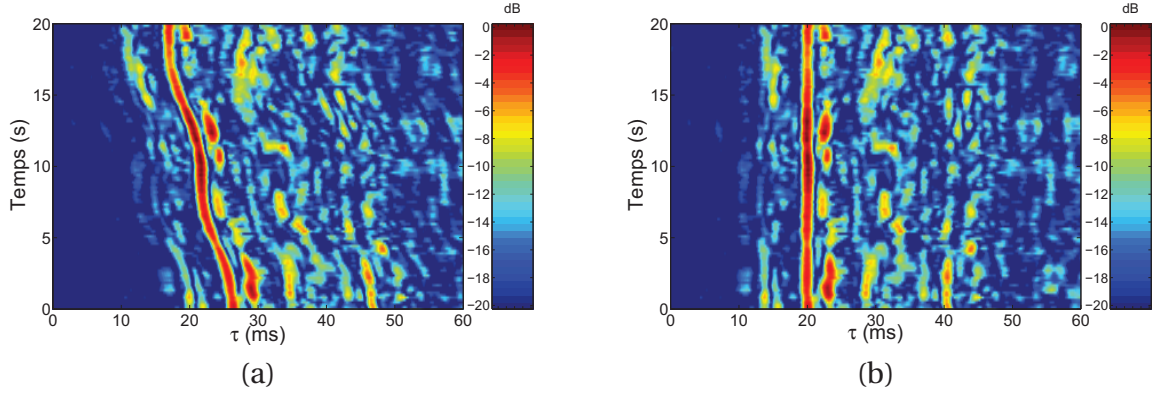
avec une nouvelle expression de la réponse impulsionnelle du canal donnée par

$$h_{\mathbb{H}}(\tau, t) = \sum_{l=0}^{L-1} c_l(t/(1 + \varepsilon)) \delta(\tau - \bar{\tau}_l). \quad (1.29)$$

Le canal ASM large bande peut donc s'exprimer sous la forme d'un canal « bande étroite » dès lors que le facteur d'échelle  $(1 + \varepsilon)$  est appliqué sur le signal transmis. Dans la plupart des récepteurs actuels, ce facteur d'échelle est compensé en tête de réception par simple rééchantillonnage du signal reçu de sorte que les traitements situés en aval de ce rééchantillonnage peuvent faire l'hypothèse bande étroite [Mason et al., 2008; Sharif et al., 2000; Eynard and Laot, 2008]. Par la suite, on considérera donc le canal ASM sous la forme bande étroite donnée dans (1.29).

La figure 1.5-(a) montre l'évolution temporelle du profil de puissance d'un canal réel sondé en mer avec un émetteur mobile. Sur cette figure, on peut observer que le retard de chaque trajet dérive au cours du temps comme modélisé par (1.25). La dérive moyenne est approximativement de 8 ms sur une fenêtre de 20 s ce qui correspond à une vitesse relative moyenne de  $0.6 \text{ m.s}^{-1}$ . On notera que par soucis de lisibilité nous avons jusqu'ici implicitement supposé une vitesse  $v$  indépendante du temps alors que dans la réalité, et comme montré par la figure 1.5-(a), l'émetteur et le récepteur peuvent subir des accélérations.

La figure 1.5-(b) montre le même canal après compensation Doppler par rééchantillonnage. Dans ce cas, la réponse impulsionnelle du canal peut s'exprimer sous la forme donnée par (1.29).



**Figure 1.5** — Evolution temporelle du profil de puissance d'un canal réel sondé en mer Méditerranée. (a) Pas de compensation Doppler, (b) Doppler compensé par rééchantillonnage.

### 1.3.4 Modèle discret équivalent en bande de base

Sous l'hypothèse que les fluctuations temporelles du canal peuvent se représenter dans le domaine fréquentiel sur un support compact de largeur  $B_D$  et que le signal d'entrée est à bande limitée  $B$ , la relation d'entrée/sortie (1.20) peut se discrétiser et se représenter en bande de base sous la forme [Artes et al., 2004]

$$y_c\left(\frac{k}{f_o}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} h_{\parallel}\left(\tau, \frac{k}{f_o}\right) e^{-j2\pi f_c \tau} \text{sinc}(f_i \tau - l) d\tau \right) x_c\left(\frac{k}{f_o} - \frac{l}{f_i}\right), \quad (1.30)$$

où  $y_c(\cdot)$  et  $x_c(\cdot)$  désignent respectivement l'enveloppe complexe des signaux reçus et émis,  $f_o \geq B + B_D$ ,  $f_i \geq B$  et  $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ .

La relation d'entrée/sortie (1.30) peut être simplifiée davantage en considérant que le signal d'entrée est sur-échantillonné à une fréquence  $f_s \geq B + B_D$  tel que  $f_i = f_o = f_s$ . Dans ce cas, (1.30) peut s'écrire sous la forme

$$y(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l(k) x(k-l), \quad (1.31)$$

où  $h_l(k)$  désigne le canal discret équivalent en bande de base<sup>7</sup> d'expression

$$h_l(k) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\parallel}\left(\tau, \frac{k}{f_s}\right) e^{-j2\pi f_c \tau} \text{sinc}(f_s \tau - l) d\tau, \quad (1.32)$$

$y(k) = y_c(k/f_s)$  et  $x(k) = x_c(k/f_s)$ .

En conséquence de la relation (1.32), on notera que d'un point de vue purement théorique, même si  $h_{\parallel}(\tau, t)$  est WSSUS,  $h_l(k)$  ne peut pas vérifier l'hypothèse de diffuseurs décorrélés présentée à la section 1.3.2. En effet, en supposant un canal WSSUS  $h_{\parallel}(\tau, t)$ ,

7. Par soucis de lisibilité, dans la suite du manuscrit nous nous autorisons un abus de langage et désignons  $h_l(k)$  comme le  $l$ -ième trajet du canal alors qu'il ne représente pas un trajet physique mais un coefficient du canal discret équivalent en bande de base.

la covariance entre chaque coefficient du canal n'est pas nécessairement nulle car elle s'exprime comme

$$R_{lp}(u) = \mathbb{E} \left\{ (h_l(k) - \bar{h}_l) (h_p(k+u) - \bar{h}_p)^* \right\}, \quad (1.33)$$

$$= \int_{\tau} R_{\mathbb{H}} \left( \tau, \frac{u}{f_s} \right) \text{sinc}(f_s \tau - l) \text{sinc}(f_s \tau - p) d\tau, \quad (1.34)$$

où  $\bar{h}_l = \mathbb{E}_k \{h_l(k)\}$  et  $R_{\mathbb{H}}(\cdot, \cdot)$  est donnée par l'expression (1.23). Cependant, sous certaines conditions, il est possible de retrouver des coefficients du canal discret décorrelés. Par exemple, si l'on suppose que la fonction de covariance  $R_{\mathbb{H}} \left( \tau, \frac{u}{f_s} \right)$  est constante par rapport à  $\tau$  sur un intervalle  $T$ , (1.34) devient

$$R_{lp}(u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{\mathbb{H}} \left( mT, \frac{u}{f_s} \right) \int_{T(m-\frac{1}{2})}^{T(m+\frac{1}{2})} \text{sinc}(f_s \tau - l) \text{sinc}(f_s \tau - p) d\tau. \quad (1.35)$$

Si  $f_s$  vérifie  $f_s \gg 1/T$  alors

$$\int_{T(m-\frac{1}{2})}^{T(m+\frac{1}{2})} \text{sinc}(f_s \tau - l) \text{sinc}(f_s \tau - p) d\tau \approx 0, \forall p \neq l. \quad (1.36)$$

Dans ce cas, les coefficients du canal sont décorrelés et  $R_{ll}(u) \approx R_{\mathbb{H}} \left( \frac{l}{f_s}, \frac{u}{f_s} \right) / f_s$ . Cette approximation se vérifie de plus en plus à mesure que  $f_s$  augmente. En conséquence, un moyen de garantir que les trajets du canal de transmission discret équivalent en bande de base sont mutuellement décorrelés, sous l'hypothèse d'un canal de propagation WSSUS, est de choisir une fréquence d'échantillonnage significativement supérieure à la bande du signal transmis. Du fait des faibles bandes passantes offertes en ASM, ce n'est pas une contrainte forte et c'est même une pratique courante notamment pour compenser la compression/dilatation Doppler où des facteurs de sur-échantillonnage de 8 ou 16 sont employés [Mason et al., 2008; Eynard and Laot, 2008].

### 1.3.5 Exemple de canaux réels

Une partie des réflexions et des illustrations présentées dans ce manuscrit se base sur des données expérimentales recueillies par Thales Underwater Systems à proximité de Sanary-sur-mer (mer Méditerranée) en Octobre 2004 et par le GESMA<sup>8</sup> dans la rade de Brest (océan Atlantique) en Octobre 2007. Les deux montages expérimentaux, ainsi que les conditions d'essai, sont résumés dans le tableau 1.1.

Pour les essais de 2004, un filtre adapté à une séquence binaire pseudo-aléatoire a été mis en oeuvre pour fournir l'évolution temporelle de la réponse du canal. En 2007, l'expérimentation n'a pas été initialement conçue pour le sondage de canal de sorte qu'aucun signal sonde dédié n'a été utilisé. Toutefois, puisque toutes les données transmises étaient parfaitement connues à la réception, il a été possible d'estimer les réponses impulsionnelles à l'aide de méthodes du type moindres carrés adaptatifs.

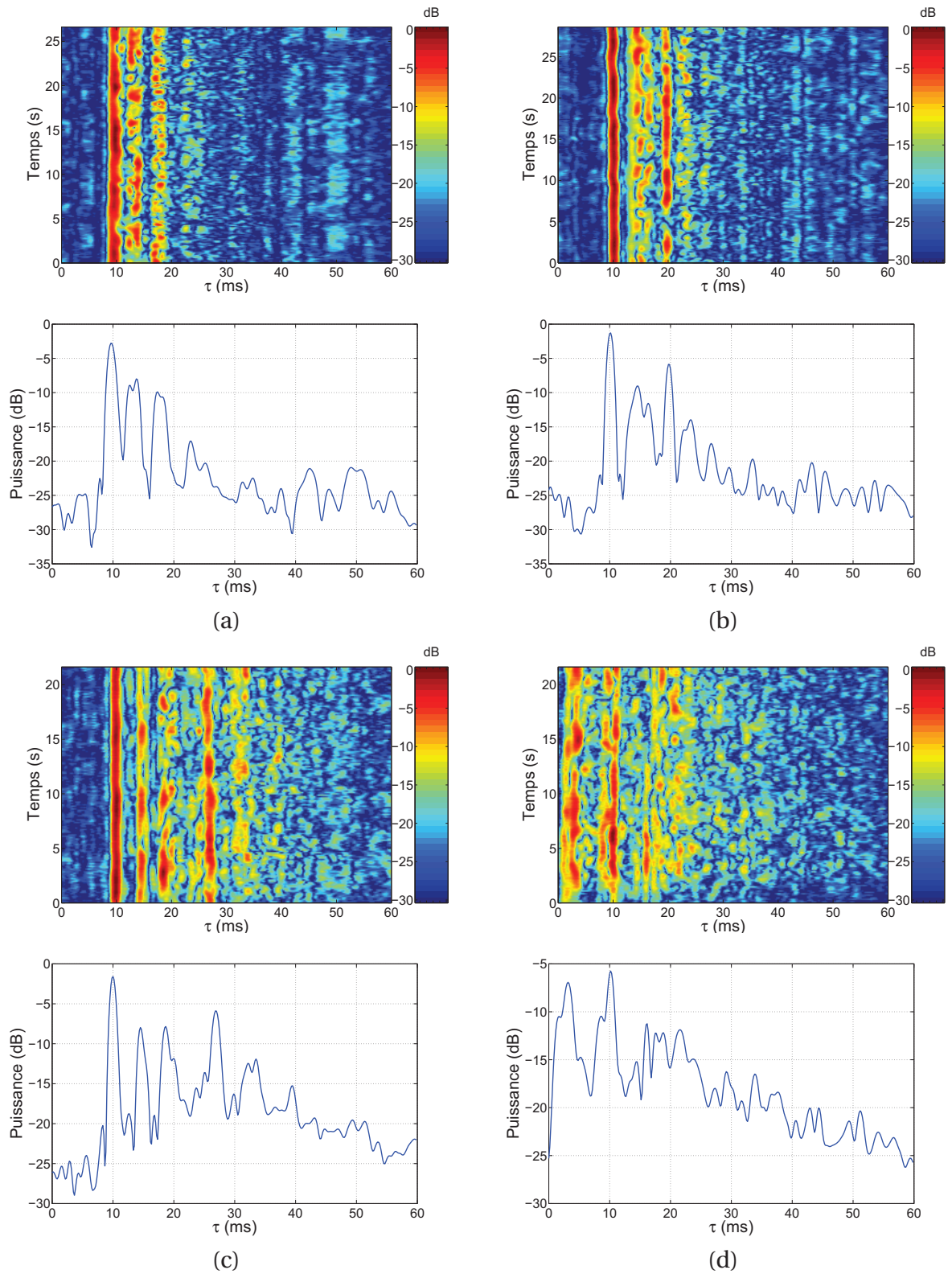
8. Groupes d'Études Sous-Marines de l'Atlantique

Tableau 1.1 — Conditions d'expérimentations

	Mer (2004)	Méditerranée	Océan (2007)	Atlantique
<b>Tx puissance (dB re 1 <math>\mu</math>Pa @ 1 m)</b>	190		185	
<b>Tx-Rx distance (m)</b>	500-10000		500-3000	
<b>Profondeur (m)</b>	60-120		10-40	
<b>Tx/Rx immersion (m)</b>	20-50		5	
<b>Tx/Rx vitesse relative (m.s<sup>-1</sup>)</b>	0-4		0-3	
<b>Fréquence porteuse (kHz)</b>	6		11.2 or 17.5	
<b>Signal sonde</b>	Séquence pseudo-aléatoire de 48 ms répétée toutes les 125 ms, comme donnée dans [Fan and Darnell, 1996, pp. 293].		Flux de données QPSK continu à 2.9 kBd ou 4.35 kBd <sup>a</sup>	
<b>Conditions de mer</b>	Vitesse du vent : 10-15 m.s <sup>-1</sup> , hauteur des vagues modérée		Petite houle	

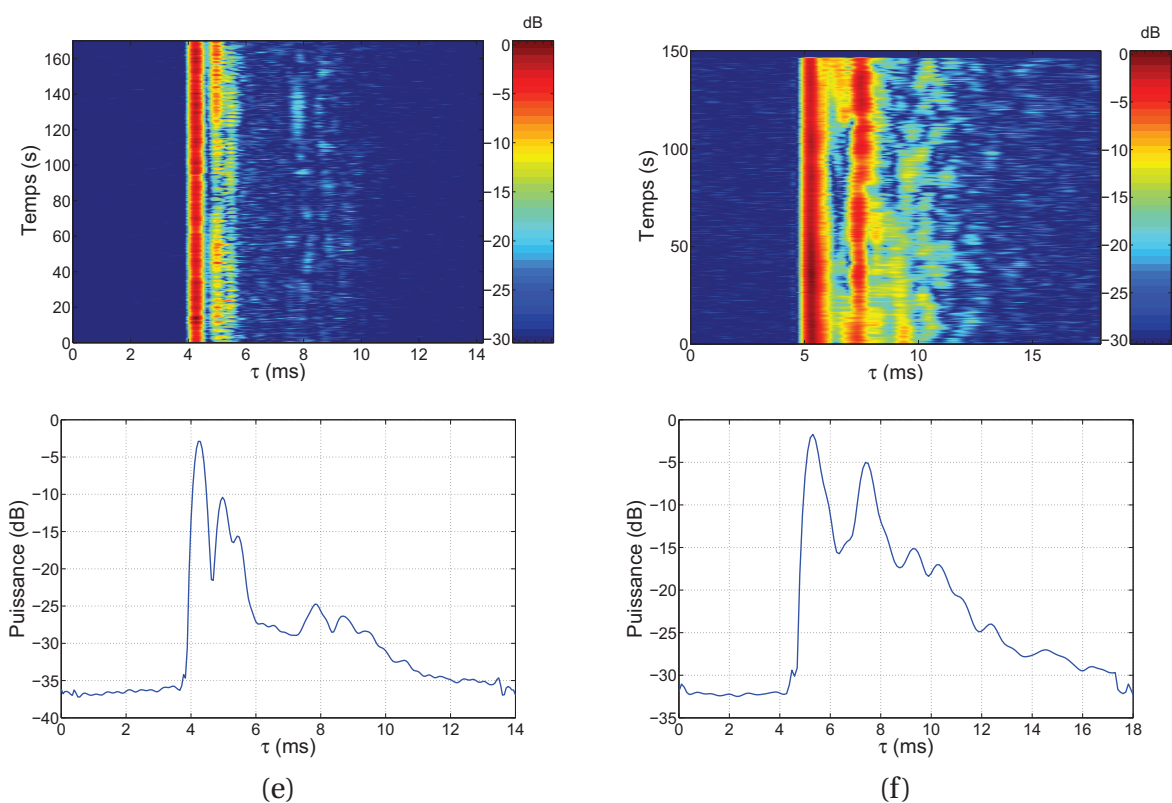
<sup>a</sup>Se référer à [Goalic et al., 2008a] pour plus de détails.

Les figures 1.6 et 1.7 présentent des réponses de canaux issus de ces expérimentations après compensation Doppler. Les durées d'observation de ces canaux varient de 30 à 160 secondes. On peut remarquer qu'en fonction des conditions d'expérimentation, l'étalement temporel varie de 5 à 15 ms pour les canaux sondés en Atlantique et s'étend jusqu'à 50 ms pour les canaux sondés en mer Méditerranée. On notera aussi qu'à l'exception du canal (d), un trajet dominant relativement stable est toujours présent.



**Figure 1.6** — Exemples de profils de puissance instantanés et moyens de canaux réels. (a) Mer Med. :  $D = 1000$  m,  $B = 1$  kHz, (b) mer Med. :  $D = 2500$  m,  $B = 1$  kHz (c) mer Med. :  $D = 5000$  m,  $B = 1$  kHz (d) mer Med. :  $D = 9000$  m,  $B = 1$  kHz.





**Figure 1.7**— Exemples de profils de puissance instantanés et moyens de canaux réels. (e) Océan Atl. :  $D = 1000$  m,  $f_c = 17,5$  kHz,  $B = 2,9$  kHz (f) océan Atl. :  $D=2000$  m,  $f_c = 11,2$  kHz,  $B = 1,6$  kHz.

---

# Modèle de canal à entropie maximale

« *pluralitas non est ponenda sine necessitate.* »

Guillaume d'Ockham

Dans ce chapitre, nous présentons un modèle de canal dispersif en temps et en fréquence basé sur le principe d'entropie maximale initialement proposé par Jaynes [Jaynes, 1957]. Après un bref rappel des fondements de ce principe, nous adaptons les travaux de Debbah et al. [Debbah and Müller, 2005; Guillaud et al., 2007] sur les canaux radio-fréquences pour obtenir un modèle analytique des densités de probabilités marginales du processus aléatoire qu'est le canal ASM. Nous modélisons ensuite les fluctuations temporelles du canal par maximisation du taux d'entropie exprimé en fonction du spectre Doppler. Par construction, le modèle proposé est *cohérent* dans le sens où il ne repose que sur une information objective de l'environnement à modéliser. Par comparaison avec des données réelles, il est montré au travers de mesures de statistiques d'évanouissement et de taux d'erreur binaires, qu'une simple connaissance des statistiques du second ordre (puissances moyennes, étalement Doppler) peut être suffisante pour obtenir un modèle pertinent pour tester des systèmes de communication. On notera que le modèle proposé dans ce chapitre se limite aux canaux stationnaires au sens strict.

## 2.1 Principe d'entropie maximale

Le principe d'entropie maximale, également appelé principe du maximum d'entropie, est une méthode générale d'inférence inductive qui permet d'attribuer un modèle, exprimé sous forme de densité de probabilité, à une quantité  $X$  à partir d'informations partielles sur cette quantité. Ce principe, introduit par Jaynes en 1957 [Jaynes, 1957], peut être vu comme une extension du principe d'indifférence<sup>1</sup> formalisé par J. Bernoulli et Laplace. Ce principe d'indifférence indique que *s'il n'y a aucune raison de croire que, sur un ensemble d'événements mutuellement exclusifs, un événement est plus susceptible de se produire que tout autre, alors on doit supposer que tous les événements sont équi-probables*. Dans un contexte bayésien où la probabilité représente un état de connaissance ou de croyance, la distribution uniforme correspond alors à l'état d'ignorance maximale.

Jaynes a étendu cette vision d'inférence au cas où une information a priori  $I$  est disponible sur la variable aléatoire  $X$  que l'on cherche à modéliser. En se basant sur les axiomes de Shannon [Shannon, 1948] qui interprète l'entropie comme une mesure de la quantité d'incertitude d'une densité de probabilité, Jaynes démontre que parmi l'ensemble  $\mathcal{E}$  des densités de probabilités compatibles avec la connaissance  $I$ , la densité d'entropie maxi-

---

1. aussi connu sous le nom de principe de raison insuffisante

male est la densité la moins arbitraire à choisir pour modéliser  $X$ . En d'autres termes, la densité

$$P_{X|I} = \operatorname{argmax}_{p \in \mathcal{E}} - \int p(x) \log p(x) dx, \quad (2.1)$$

correspond à la densité qui contraint le moins l'information inconnue sur  $X$ . Choisir toute autre distribution entraînerait l'ajout implicite d'informations subjectives sur  $X$  et serait donc non *cohérent*<sup>2</sup> par rapport à  $I$ .

Pour plus de détails sur les desiderata de raisonnement plausible sur lesquels le principe d'entropie maximale repose, le lecteur peut se référer à [Cox, 1946; Jaynes, 2003]. Des justifications formelles du principe d'entropie maximale sont disponibles dans [Shore and Johnson, 1980; Jaynes, 1982]<sup>3</sup>.

## 2.2 Modélisation de la densité de probabilité du canal

### 2.2.1 Modèle gaussien

La grande majorité des modèles de propagation statistiques supposent que la réponse impulsionnelle du canal est un processus gaussien [Cristol, 2005; Chitre, 2007; van Walree et al., 2008; Qarabaqi and Stojanovic, 2009; Socheleau et al., 2009]. L'hypothèse s'appuie généralement sur l'argument physique selon lequel pour un retard fixé, le signal reçu est la somme de la contribution d'un grand nombre de réflexions diffuses. Comme montré dans [Debbah and Müller, 2005], au lieu d'être supposée, la gaussianité peut être formellement justifiée à la lumière du principe d'entropie maximale.

Considérons notre canal comme un processus aléatoire multi-varié de  $L$  trajets  $H(k) = [h_0(k), \dots, h_{L-1}(k)]^T$  où  $k$  représente l'indice temporel. A titre d'exemple, analysons le cas où la seule information disponible sur le canal est qu'il soit stationnaire au sens strict et d'énergie finie  $\sigma^2$ . En cohérence avec cette information limitée, un modèle de densité de probabilité  $P(H)$  peut être obtenu en maximisant l'entropie du canal

$$- \int P(H) \log P(H) dH \quad (2.2)$$

sous la contrainte

$$\int P(H) dH = 1 \text{ and } \int \sum_{l=0}^{L-1} |h_l|^2 P(H) dH = \sigma^2. \quad (2.3)$$

Les contraintes formalisent mathématiquement notre connaissance sur le canal. Notez que l'indice  $k$  est volontairement omis lorsqu'il n'y a pas de références à des propriétés temporelles. Ce problème de maximisation peut être résolu en utilisant les multiplicateurs de Lagrange

$$\mathcal{L}(P) = - \int P(H) \log P(H) dH + \alpha \left( 1 - \int P(H) dH \right) + \lambda \left( \sigma^2 - \int \sum_{l=0}^{L-1} |h_l|^2 P(H) dH \right) \quad (2.4)$$

2. au sens donnée en introduction de la partie I

3. Malgré son intérêt largement démontré pour de nombreuses applications pratiques, la philosophie du principe du maximum d'entropie reste toujours polémique, voir [Uffink, 1996] par exemple.

et en annulant le dérivée fonctionnelle  $L(P)$

$$\frac{\delta L(P)}{\delta P} = -\log P(H) - 1 - \alpha - \lambda \sum_{l=0}^{L-1} |h_l|^2 = 0. \quad (2.5)$$

La résolution du système d'équations (2.3) et (2.5) aboutit à des trajets indépendants et identiquement distribués (i.i.d) suivant une loi normale [Debbah and Müller, 2005], i.e.,

$$P(H) = \frac{1}{(\pi\sigma^2/L)^L} \prod_{l=0}^{L-1} e^{-\frac{L|h_l|^2}{\sigma^2}}. \quad (2.6)$$

Contrairement à la définition classique de modèles de canaux, la gaussianité ainsi que l'indépendance entre trajets n'est pas une hypothèse a priori mais la conséquence de la contrainte d'énergie finie.

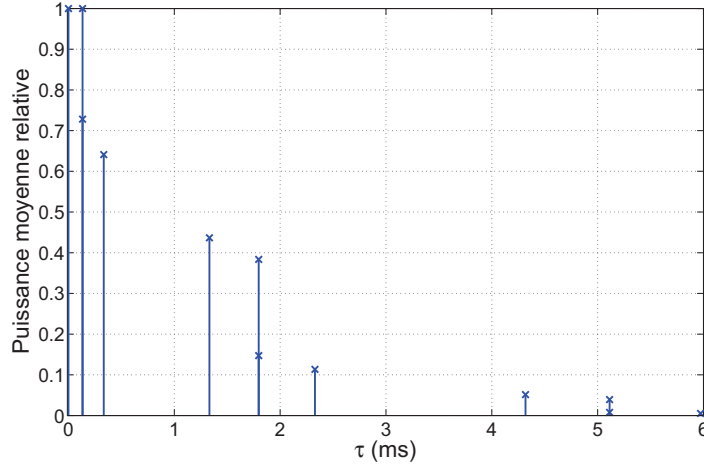
Pour affiner notre modèle, les approches de modélisation développées par les acousticiens peuvent se révéler très utiles. Par exemple, à l'aide de techniques basées sur le tracé de rayons [Porter and Bucker, 1987; Cristol, 2005], il est possible d'obtenir le profil de puissance du canal (cf. Figure 2.1) pour une configuration donnée. Ceci implique que pour chaque trajet  $l$ , nous pouvons connaître sa puissance moyenne relative  $p_l = \mathbb{E}\{|h_l|^2\}$ . En utilisant des modèles comme [Cristol, 2005], cette puissance moyenne peut même être décomposée comme la somme des puissances des diffuseurs et d'une composante spéculaire telle que  $p_l = \sigma_l^2 + |d_l|^2$  avec  $d_l = \mathbb{E}\{h_l\}$  l'expression de la composante spéculaire et  $\sigma_l^2 = \mathbb{E}\{|h_l - d_l|^2\}$ . Dans ce cas, la distribution du canal qui maximise l'entropie devient

$$P(H) = \prod_{l=0}^{L-1} \frac{1}{(\pi\sigma_l^2)} e^{-\frac{|h_l - d_l|^2}{\sigma_l^2}}. \quad (2.7)$$

Ce résultat indique que lorsque notre connaissance du canal est limitée aux statistiques d'ordre 1 et 2, le modèle le moins arbitraire à implémenter, au regard du principe d'entropie maximale, est le modèle gaussien. Une distribution gaussienne induit alors un évanouissement de Rice ou de Rayleigh en fonction de la valeur de  $d_l$ . Contraindre le modèle avec des statistiques d'ordre supérieur résulterait en une distribution différente. Cependant, dans la pratique, notre connaissance se limite souvent à des statistiques d'ordre 2 et comme montré dans la section 2.4, cette connaissance peut s'avérer suffisante pour aboutir à un modèle satisfaisant.

## 2.2.2 Paramètres incertains

Le modèle obtenu à l'équation 2.7 suppose que tous les paramètres d'entrée représentant notre état de connaissance du canal sont connus de façon déterministe. Lors de l'utilisation d'un modèle, il arrive cependant que l'on soit seulement en mesure de borner notre connaissance sur le canal. Un des cas les plus pertinents en pratique correspond à la situation où en l'absence de données réelles et sans accès à des modèles très avancés comme [Cristol, 2005], il n'est pas possible de connaître  $\sigma_l^2$  et  $|d_l|^2$  avec précision. Pour des environnements petit-fond et à partir de considérations physiques rudimentaires basées sur les lois de Snell-Descartes et la formule de Thorp (cf. [Stojanovic, 2008] par exemple),



**Figure 2.1** — Exemple de profil de puissance obtenu par tracé de rayons. L'émetteur et le récepteur sont respectivement immergés à 20 et 5 m et séparés de 1 km.

il est généralement possible d'obtenir une bonne approximation de la puissance  $p_l$  de chaque trajet et de la phase  $\theta_l$  de sa composante spéculaire<sup>4</sup>. Cependant la répartition de la puissance  $p_l$  entre la composante spéculaire et la composante aléatoire (diffuse) est rarement connue exactement. Néanmoins, avec un peu d'expérience on peut borner le ratio  $K_l = |\mathbb{E}\{h_l\}|^2 / \mathbb{E}\{|h_l - d_l|^2\}$  par des valeurs  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$ . Comme illustré dans le chapitre suivant, ce ratio fluctue par exemple entre 0 et 30 pour les canaux méditerranéens montrés au chapitre 1 et peut être supérieur à 600 pour des canaux plus stables. Le modèle d'entropie maximale se formule alors avec des contraintes représentées sous forme d'inégalités

$$\begin{aligned} & \max_{P(H)} && - \int P(H) \log P(H) dH, \\ & \text{avec } \forall 0 \leq l < L, && \begin{cases} K_{\min} \leq \frac{|\mathbb{E}\{h_l\}|^2}{\mathbb{E}\{|h_l - d_l|^2\}} \leq K_{\max} \\ \mathbb{E}\{|h_l|^2\} = p_l, \\ \angle \mathbb{E}\{h_l\} = \theta_l. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.8)$$

De manière équivalente, les contraintes de maximisation peuvent aussi s'écrire

$$\forall 0 \leq l < L, \begin{cases} \sqrt{\frac{p_l K_{\min}}{K_{\min}+1}} \leq \mathbb{E}\{h_l\} e^{-j\theta_l} \leq \sqrt{\frac{p_l K_{\max}}{K_{\max}+1}}, \\ \frac{p_l}{K_{\max}+1} \leq \mathbb{E}\{|h_l - \mathbb{E}\{h_l\}|^2\} \leq \frac{p_l}{K_{\min}+1}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Contrairement à (2.7),  $\mathbb{E}\{h_l\}$  et  $\mathbb{E}\{|h_l - \mathbb{E}\{h_l\}|^2\}$  ne sont pas déterminés ici par des valeurs déterministes, la connaissance du canal est uniquement représentée par  $K_{\min}$ ,  $K_{\max}$  et  $p_l$ . En dérivant la fonctionnelle  $P(H)$  et en utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker [Bonnans et al., 2006], il vient que  $P(H)$  s'exprime comme dans (2.7) avec  $\sigma_l^2 = \frac{p_l}{K_{\min}+1}$  et  $d_l = \sqrt{\frac{p_l K_{\min}}{K_{\min}+1}} e^{j\theta_l}$ . Le canal étant uniquement contraint par des statistiques d'ordre 1 et 2,

4. A chaque réflexion fond ou surface, on peut supposer que la composante spéculaire est déphasée de  $\pi$ .

ce résultat correspond à la distribution gaussienne dont le déterminant de la matrice de covariance est le plus grand par rapport aux contraintes fixées.

Même si elle maximise l'entropie du modèle de canal, cette approche est limitée dans son application. En effet, quelles que soient les valeurs de  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$ , la distribution résultante de (2.8) sera toujours indépendante de notre connaissance sur  $K_{\max}$ . Une alternative de modélisation, inspirée du travail de Guillaud et al. sur les canaux MIMO radio-fréquences [Guillaud et al., 2007], consiste à exploiter le principe d'entropie maximale tout en s'assurant que le domaine des valeurs possibles pour  $K_l$  soit exploré au maximum. La démarche est la suivante :

1. A partir du principe d'entropie maximale et d'une certaine connaissance de  $K_l$  (représentée par  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$  dans notre exemple), induire la densité de probabilité  $P_{K_l}(K)$ .
2. A partir du principe d'entropie maximale, induire le modèle  $P_{H|K_l}(H, K)$  qui suppose  $K_l$  connu.
3. Marginaliser  $P_{H, K_l}(H, K) = P_{H|K_l}(H, K)P_{K_l}(K)$  pour obtenir  $P(H)$  :

$$P(H) = \int_{\mathbb{R}^+} P_{H|K_l}(H, K)P_{K_l}(K) dK. \quad (2.10)$$

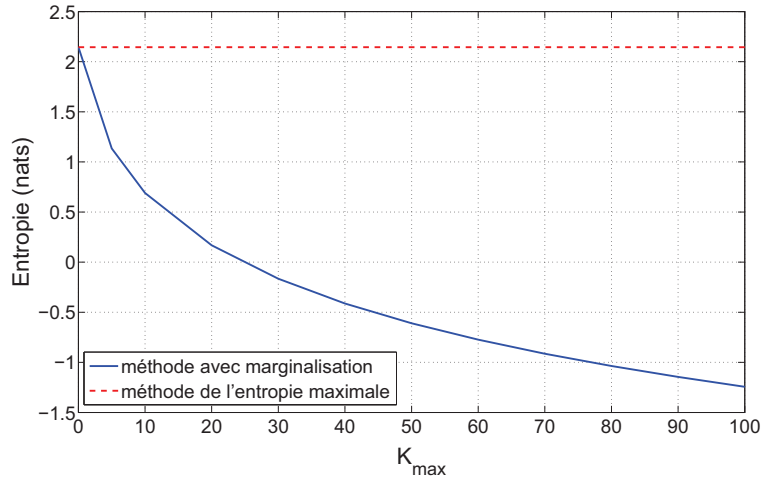
Si la seule information à disposition sur  $K_l$  est formalisée par les bornes  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$ , on peut montrer que la distribution  $P_{K_l}(K)$  qui maximise l'entropie est uniforme sur  $[K_{\min}; K_{\max}]$  [Cover and Thomas, 1991, ch. 12]. Si  $K_{\min}$  et  $K_{\max}$  sont choisis indépendamment de  $l$ , alors  $P_{K_l}(K) = P_K(K)$  pour tout  $l$ . La distribution  $P_{H|K_l}(H, K) = P_{H|K}(H, K)$  s'exprime quant à elle comme (2.7) avec  $\sigma_l^2 = \frac{p_l}{K+1}$  et  $d_l = \sqrt{\frac{p_l K}{K+1}} e^{j\theta_l}$ . Par conséquent, le modèle obtenu en utilisant cette méthode de marginalisation du paramètre incertain s'écrit

$$P(H) = \int_{K_{\min}}^{K_{\max}} \prod_{l=0}^{L-1} \frac{K+1}{\pi p_l (K_{\max} - K_{\min})} e^{-\frac{K+1}{p_l} \left| h_l - \sqrt{\frac{p_l K}{K+1}} e^{j\theta_l} \right|^2} dK. \quad (2.11)$$

Contrairement à (2.8), ce modèle ne maximise pas l'entropie au regard de notre connaissance du canal. Ceci est illustré à la figure 2.2 où les entropies de  $P(H)$ , obtenue par (2.8) et (2.11), sont comparées en fonction de  $K_{\max}$  pour un canal mono-trajet,  $K_{\min}$  étant fixé à 0. La covariance et de ce fait l'entropie de  $P_{H|K}(H, K)$  étant une fonction décroissante de  $K$ , il est attendu que l'entropie de  $P(H)$  obtenue par marginalisation diminue avec  $K_{\max}$ . Comme nous allons le voir dans la section 2.4 de ce chapitre, la méthode de marginalisation peut aboutir à un modèle plus réaliste que le modèle résultant de (2.8).

## 2.3 Modélisation des fluctuations temporelles du canal

Les réflexions que nous avons menées jusqu'à présent sur la modélisation de canal n'intègrent que très sommairement la dimension temporelle du processus aléatoire  $H(k)$ . Nous avons évoqué l'hypothèse de stationnarité au sens strict de ce processus à la section 2.2.1, à savoir que pour tout  $k_1$  et  $k_2 \in \mathbb{Z}$  la distribution de  $H(k_1)$  est égale à celle de



**Figure 2.2** — Comparaison de l'entropie du modèle obtenu par (2.8) et (2.11) en fonction de  $K_{\max}$ .  $L = 1$ ,  $p_l = 1$  et  $K_{\min} = 0$ .

$H(k_2)$ , mais nous n'avons pas encore proposé de modèle pour la distribution conjointe de  $H(k_1), H(k_2), \dots, H(k_n)$ . Une bonne caractérisation de cette distribution conjointe est primordiale pour notre modèle puisque la conception et les performances des systèmes de communication sont fortement impactées par les fluctuations temporelles du canal. Nous allons voir dans cette section que le principe d'entropie maximale s'avère, encore une fois, très utile pour modéliser ces fluctuations.

Quelle que soit notre connaissance sur le canal permettant d'aboutir aux modèles (2.6), (2.7), (2.8) ou (2.11), la maximisation de l'entropie nous indique que les trajets doivent être modélisés comme indépendants. Par conséquent, l'entropie conjointe du processus aléatoire multi-varié  $H(k)$  peut être exprimée comme la somme de l'entropie de chacun des processus  $\{h_l(k)\}_k$ . Ainsi, maximiser l'entropie globale de  $H(k)$  revient à maximiser l'entropie des différents  $\{h_l(k)\}_k$  indépendamment. Pour cette raison et par souci de lisibilité, l'indice  $l$  sera volontairement omis dans cette section.

D'une manière générale, l'entropie ou plus exactement le taux d'entropie d'un processus aléatoire  $\{X(k)\}$  est défini comme [Cover and Thomas, 1991, ch. 4]

$$h_R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} h_E(X(1), X(2), \dots, X(n)), \quad (2.12)$$

où  $h_E(\cdot)$  désigne l'entropie différentielle. Pour être cohérent avec le principe d'entropie maximale, notre objectif est maintenant de trouver, pour chaque trajet, la distribution conjointe de  $h(k_1), h(k_2), \dots, h(k_n)$  qui maximise le taux d'entropie  $h_R$  soumis à un ensemble de contraintes qui traduisent l'état de nos connaissances sur les fluctuations temporelles du canal.

A l'exception de (2.11), tous les résultats de la section 2.2 indiquent que  $H(k)$  doit être modélisé comme un processus gaussien pour être *cohérent* avec notre connaissance du canal. Dans le cas gaussien stationnaire, la dynamique temporelle du processus peut non seulement être représentée par la distribution conjointe de toutes ses variables mais elle est aussi entièrement déterminée par son spectre Doppler  $S(\nu)$  défini comme

$$S(\nu) = \sum_{u=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left\{ (h(k) - \mathbb{E}\{h(k)\})(h(k+u) - \mathbb{E}\{h(k+u)\})^* \right\} e^{-2j\pi\nu u}. \quad (2.13)$$

Représenter les fluctuations temporelles du canal à l'aide de  $S(\nu)$  plutôt qu'avec la distribution conjointe des variables du processus  $h(k)$  se révèle très intéressant dans notre cas. En effet, Kolmogorov a montré que le taux d'entropie d'un processus aléatoire gaussien discret  $h(k)$  peut s'exprimer en fonction de son spectre Doppler tel que [Cover and Thomas, 1991, ch. 12]

$$h_R = \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} \log S(\nu) d\nu. \quad (2.14)$$

Le processus  $h(k)$  est ici implicitement supposé échantillonné à une période qui vérifie la théorème de Shannon tel que  $S(\nu)$  ait un support normalisé borné  $[\nu_{\min}, \nu_{\max}]$  avec  $-1/2 \leq \nu_{\min} \leq \nu \leq \nu_{\max} \leq 1/2$ . Le modèle que l'on cherche à obtenir consiste donc à trouver  $S(\nu)$  qui maximise (2.14) à partir de l'information dont on dispose sur les fluctuations temporelles du canal. En général, cette information peut se formaliser, pour chaque trajet, comme un ensemble de moments spectraux  $\mu_p$  de fonctions connues  $m_p(\nu)$ ,  $p \in \mathcal{P}$  où  $\mathcal{P}$  représente l'ensemble des ordres de contrainte, i.e.

$$\mu_p = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} m_p(\nu) S(\nu) d\nu. \quad (2.15)$$

Notre problème est très analogue à la méthode d'estimation spectrale basée sur le principe d'entropie maximale proposée par Burg dans [Burg, 1975]. Cette méthode cherche à trouver  $S(\nu)$  qui maximise (2.14) à partir de la connaissance de  $N$  points équidistants de la fonction d'autocovariance du processus à modéliser. Dans ce cas,  $\mu_p$  correspond à la fonction d'autocovariance  $\mu_p = \mathbb{E} \left\{ (h(k) - \mathbb{E}\{h(k)\})(h(k+p) - \mathbb{E}\{h(k+p)\})^* \right\}$  qui peut aussi être exprimée comme un moment trigonométrique spectral tel que  $m_p(\nu) = e^{2j\pi p\nu}$  et  $\mathcal{P} = \{0, 1, \dots, N-1\}$ . Cette représentation du canal qui nécessite la connaissance de  $N$  points d'autocovariance n'est pas adaptée à notre contexte où l'on cherche à modéliser le canal de façon concise, c'est à dire avec un minimum de paramètres. Un raccourci vers la modélisation concise pourrait être de choisir  $N$  petit, mais cela peut ne pas être une bonne option car on risque de ne pas caractériser le canal avec une précision suffisante. Une autre approche consiste à exprimer l'état de nos connaissances sur les fluctuations temporelles du canal en termes de moments géométriques tel que  $m_p(\nu) = \nu^p$ . Dans un contexte ASM, une telle représentation présente trois avantages :

1. Les moments géométriques sont faciles à interpréter physiquement de sorte que leurs ordres de grandeur sont généralement connus pour un environnement donné. Typiquement,  $\mu_0$  est la puissance moyenne totale de  $h(k)$ ,  $\mu_1$  est le barycentre de  $S(\nu)$  et  $\mu_2$  est homogène au carré de l'étalement Doppler  $\nu_{\text{rms}}$  avec  $\nu_{\text{rms}} = \sqrt{\mu_2/\mu_0 - (\mu_1/\mu_0)^2}$ .
2. Ils sont faciles à estimer lorsque l'on dispose de données réelles.
3. Ils sont informatifs dans le sens où peu de moments sont nécessaires pour obtenir un modèle précis (cf. section 2.4).



On notera qu'il est aussi possible de représenter les fluctuations temporelles du canal par des considérations spatiales sur les angles de départ (resp. d'arrivée) entre les diffuseurs et le transducteur d'émission (resp. réception) comme dans [Debbah and Müller, 2005, Eq. (90)]. Cependant, dans un contexte SISO, les distributions sur ces angles sont rarement connues, on préférera donc la représentation sous forme de moments spectraux.

A partir de (2.14) et (2.15), le spectre Doppler de chaque trajet est obtenu en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\begin{aligned} \max_{S(v)} \quad & \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \log S(v) dv, \\ \text{avec} \quad & \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} v^p S(v) dv = \mu_p, \forall p \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

De la même manière que dans la section précédente, la solution est obtenue grâce aux multiplicateurs de Lagrange

$$L(S) = \int \log S(v) dv - \sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p \left( \mu_p - \int v^p S(v) dv \right). \quad (2.17)$$

En dérivant  $L(S)$  par rapport à  $S$ , on obtient

$$S(v) = \frac{1}{\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p v^p}. \quad (2.18)$$

Les multiplicateurs  $\lambda_p$  sont ensuite obtenus à partir de l'ensemble des équations

$$\int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \frac{v^q}{\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p v^p} dv = \mu_q, \forall q \in \mathcal{P}. \quad (2.19)$$

En fonction de l'ensemble  $\mathcal{P}$ , une solution analytique d'un tel système d'équations est en général difficile à obtenir. Par conséquent, pour faciliter le calcul des multiplicateurs  $\lambda_p$ , une approche numérique comme celle présentée à l'annexe A est préconisée.

Comme indiqué précédemment, le modèle (2.18) est théoriquement valable uniquement pour les processus gaussiens et ne devrait donc pas s'appliquer au processus issu de la méthode (2.11) de marginalisation du paramètre  $K$ . Cependant, trouver une expression analytique du taux d'entropie du processus issu de (2.11) semble être difficile. Par conséquent, nous proposons tout de même d'approcher la relation qui lie les différentes variables  $h(k_1), h(k_2), \dots, h(k_n)$  par le spectre Doppler donné par (2.18). Cette approximation peut être justifiée comme suit : lorsque  $K_{\max}$  tend vers  $K_{\min}$ , la densité de probabilité  $P(H)$  de l'équation (2.11) tend vers  $P_{H|K}(H, K)$  qui est gaussienne et lorsque  $K_{\max}$  est largement supérieur à  $K_{\min}$ , l'entropie devient rapidement très faible (cf. figure 2.2) de sorte qu'une approximation sur la distribution conjointe du processus  $H(k)$  ne devrait avoir que très peu d'impact sur l'utilisation qui est faite du modèle. Une autre manière de voir cette approximation est de considérer que l'on maximise une borne supérieure, donnée par (2.14), du taux d'entropie du modèle issu de (2.11) au lieu de maximiser le taux d'entropie réel.

## 2.4 Illustrations

### 2.4.1 Comparaison avec des données réelles

Comme souligné dans l'introduction de la partie I, le modèle n'est pas destiné à représenter la réalité physique du canal, mais plutôt un état de connaissance de cette réalité. Une question cruciale est alors de déterminer la quantité d'information dont le modèle a besoin pour caractériser l'environnement à modéliser avec suffisamment de précision. La réponse dépend bien entendu de ce que nous avons l'intention de faire avec le modèle. En communications ASM, les simulateurs de canaux sont principalement employés<sup>5</sup>

1. pour aider à la conception de systèmes de communication,
2. pour mesurer leurs performances en termes de taux d'erreur binaire (TEB).

Par conséquent, pour évaluer la méthode de modélisation à entropie maximale, nous suggérons

1. de comparer les statistiques d'évanouissement d'un canal réel sondé en mer avec celles des différents modèles développés dans ce chapitre,
2. de comparer le TEB d'un système de communication donné lorsqu'il est confronté au canal réel et lorsqu'il est confronté aux modèles.

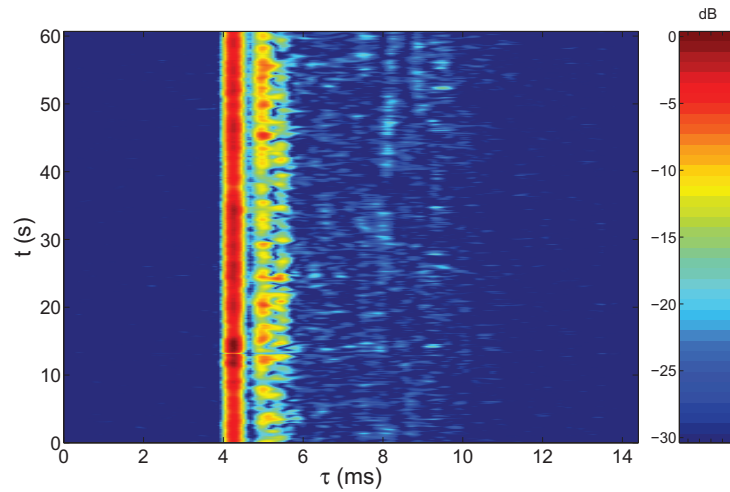
Idéalement, nous voudrions caractériser le canal avec le minimum de paramètres possibles afin d'obtenir un modèle simple à utiliser. En règle générale et comme discuté dans ce chapitre, l'information disponible sur le canal se limite à des statistiques d'ordre deux au plus. La figure 2.3 montre la réponse impulsionnelle du canal<sup>6</sup> qui va servir de référence pour notre évaluation. Ce canal a été sondé en Atlantique à 17,5 kHz dans une bande de 3 kHz. A l'aide des métriques d'évanouissement et de TEB, notre objectif est d'évaluer la quantité d'information dont le modèle a besoin pour s'approcher au mieux du comportement du canal réel. Pour ce faire, nous avons estimé différents moments du canal à partir de la réponse impulsionnelle de la figure 2.3 et avons injecté ces paramètres dans le modèle.  $p_l$  est estimé en moyennant la puissance instantanée de chaque trajet,  $\mu_2$  (homogène à l'étalement Doppler) est estimé en utilisant l'algorithme présenté dans [Bello, 1965] (pour  $p = 1$  et  $\forall p > 2$ , les moments  $\mu_p$  sont supposés inconnus). Le rapport de puissance  $K$  entre la composante spéculaire et de la composante aléatoire de chaque trajet est estimé en appliquant la méthode des moments de [Abdi et al., 2001]. La fréquence Doppler maximale  $\nu_{\max}$  est mesurée à partir de la méthode présentée dans [Holtzman and Sampath, 1995], on suppose  $\nu_{\min} = -\nu_{\max}$ .

Au cours de la phase de conception des systèmes de communication, la sélection de codes correcteurs d'erreurs et d'entrelaceurs est principalement dictée par les statistiques d'erreurs par paquets. Ces statistiques sont entre autres données par le LCR (level crossing rate) qui caractérise la sévérité de l'évanouissement dans le temps.  $\text{LCR}(\rho)$  correspond au nombre moyen d'événements d'évanouissement inférieurs à  $\rho$  par unité de temps et s'exprime en terme de probabilité comme

$$\text{LCR}(\rho) = P[r(k) \geq \rho, r(k-1) < \rho] \cdot f_s, \quad (2.20)$$

5. comme illustré au chapitre 4, les modèles peuvent aussi être utilisés pour estimer la capacité.

6. l'évolution de son profil de puissance au cours du temps pour être plus précis.

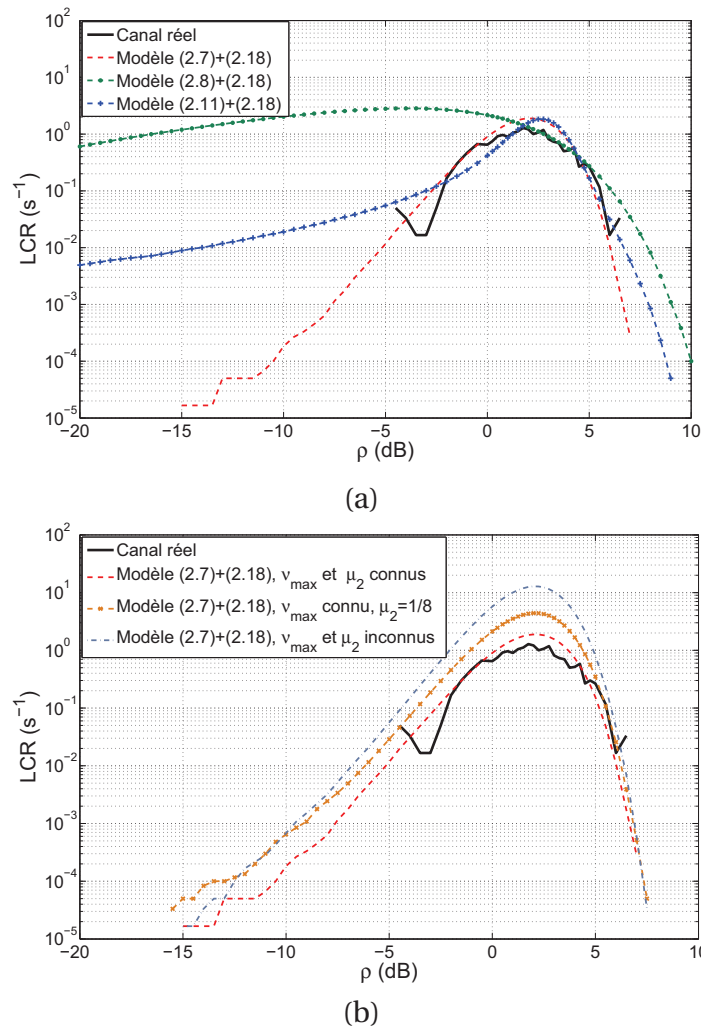


**Figure 2.3** — Exemple de canal sondé en Atlantique à 17.5 kHz dans 3 kHz de bande. La fréquence Doppler maximale est estimée à 6,2 Hz, l'étalement Doppler de chaque trajet varie entre 0.7 et 3,8 Hz et  $K$  estimé est compris entre 0 et 32.

où  $r(k) = |\sum_l h_l(k-l)|$  et  $f_s$  est la fréquence d'échantillonnage. Les figures 2.4-(a) et (b) comparent les LCR obtenus pour différents degrés de connaissance sur le canal. La figure 2.4-(a) évalue l'impact du choix du modèle de densité de probabilité alors que la figure 2.4-(b) s'intéresse au modèle des fluctuations temporelles.

Plus précisément, la figure 2.4-(a) compare les différents modèles de densité de probabilité présentés à la section 2.2 en supposant une bonne connaissance des fluctuations temporelles du canal (i.e.  $\mu_2$ ,  $\nu_{\min}$  et  $\nu_{\max}$  sont spécifiés en entrée du modèle à partir des valeurs estimées sur la réponse impulsionnelle originale). Le LCR mesuré sur la réponse impulsionnelle originale est aussi tracé à titre de référence. Cette réponse impulsionnelle correspondant à une seule observation d'un processus aléatoire sur une durée limitée, son LCR est estimé avec une variance importante contrairement aux statistiques issues des modèles à entropie maximale qui sont ici moyennés sur 1000 réalisations. Comme attendu, plus on dispose d'informations sur le canal et plus le modèle se rapproche de la réalité. Le modèle (2.7) qui intègre la connaissance de la puissance des composantes aléatoires et spéculaires se trouve être le plus conforme aux données réelles. On peut aussi remarquer sur la figure 2.4-(a), que les modèles (2.8) et (2.11) qui disposent de la même information sur le canal présentent des résultats bien distinctifs. Ces deux modèles sont caractérisés par leur connaissance incertaine du rapport de puissance  $K$ . Pour les simulations  $K_{\min}$  a été fixé à 0 et  $K_{\max}$  à 32, ce qui correspond aux valeurs extrêmes mesurées sur la réponse impulsionnelle réelle. Malgré l'entorse que le modèle (2.11) représente par rapport au concept d'entropie maximale, celui-ci s'avère être plus pertinent que (2.8) car, comme expliqué à la section 2.2.2, il explore tout le domaine des valeurs possibles pour  $K$ .

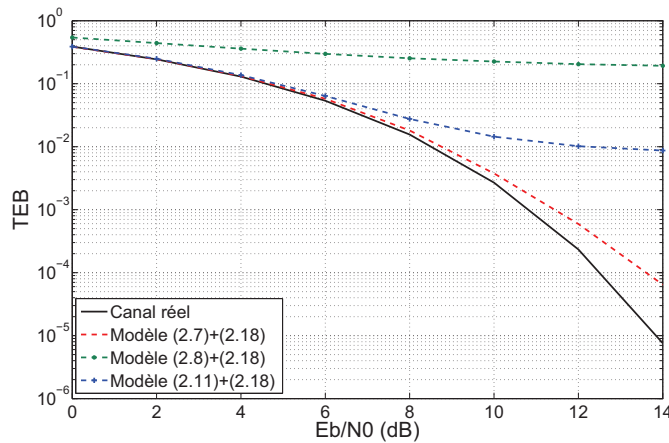
La figure 2.4-(b) évalue l'impact des connaissances des fluctuations temporelles sur le LCR pour trois scénarios différents. Pour chacun de ces scénarios, le modèle de densité de probabilité est donné par (2.7). Le premier cas correspond à la situation où  $\mu_2$ ,  $\nu_{\min}$  et



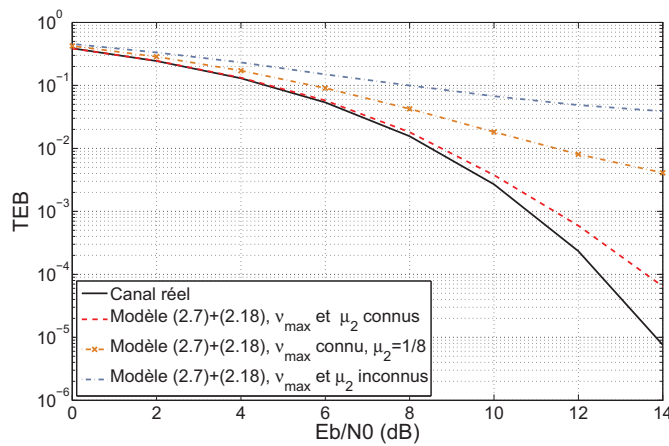
**Figure 2.4** — Comparaison des LCR mesurés pour plusieurs modèles d’entropie maximale obtenus à partir de différents degrés de connaissance du canal. (a) Impact du modèle de densité de probabilité, (b) impact du modèle des fluctuations temporelles.

$v_{\max}$  sont connus. Le deuxième scénario considère  $v_{\min}$  et  $v_{\max}$  connus et  $\mu_2$  choisi de façon plus ou moins arbitraire égale à  $1/8$ . Ce choix de  $1/8$  correspond au second moment du spectre Doppler de Jakes communément utilisé en radio-mobile et parfois en ASM de façon injustifiée [Qu and Yang, 2008; Byun et al., 2007; Hwang and Schniter, 2009]<sup>7</sup>. Le troisième scénario traduit l’absence quasi-totale d’information sur la dynamique temporelle du canal. Le terme « quasi » exprime l’idée que, même si  $\mu_2$ ,  $v_{\min}$  et  $v_{\max}$  ne sont pas connus, il est toujours possible de borner la dynamique du canal par des considérations physiques. Typiquement,  $v_{\max}$  peut être majorée par  $v_{\limite}$  qui est obtenue à partir de la connaissance de la fréquence porteuse de transmission  $f_c$ , de la vitesse de propagation des ondes acoustiques  $c$  et de la vitesse relative maximale entre l’émetteur et le récepteur  $v_{\limite}$ , soit  $v_{\limite} = v_{\limite} f_c / c$ . Pour les simulations,  $v_{\limite}$  a été fixée à  $2 \text{ m.s}^{-1}$  ce qui implique  $v_{\limite} = 23.3 \text{ Hz}$  pour une célérité de  $1500 \text{ m.s}^{-1}$ . Lorsque seule  $v_{\max}$  est connue,

7. Pour plus détails sur la relation entre le principe d’entropie maximale et le spectre de Jakes, le lecteur peut se référer à nos travaux présentés dans [Socheleau et al., 2010].



(a)



(b)

**Figure 2.5** — Comparaison des TEB mesurés pour plusieurs modèles d'entropie maximale obtenus à partir de différents degrés de connaissance du canal. (a) Impact du modèle de densité de probabilité, (b) Impact du modèle des fluctuations temporelles.

on peut montrer que le spectre qui maximise le taux d'entropie (2.14) est un spectre Doppler « plat » de support  $[-v_{\max}, v_{\max}]$  (cf. [Socheleau et al., 2010]). De façon similaire aux évaluations de la figure 2.4-(a), la figure 2.4-(b) montre que plus la connaissance des fluctuations temporelles est précise et plus le modèle à entropie maximale se rapproche du canal réel.

Pour illustrer davantage le comportement des modèles issus du principe d'entropie maximale, nous avons mesuré le TEB sans codage canal d'un lien de communication QPSK<sup>8</sup> lorsqu'il est confronté aux différents modèles. Ce type de lien a été choisi ici car il correspond à ce qui est actuellement implémenté dans la plupart des modems commercialisés. Le TEB est évalué en fonction du rapport  $E_b/N_0$  où  $E_b$  est l'énergie par bit et  $N_0$  la densité spectrale de bruit. Les figures 2.5-(a) et (b) montrent les TEB obtenus pour des degrés de connaissance du canal identiques à ceux associés à la figure 2.4. Ces résultats

8. Le récepteur est ici constitué d'un annuleur d'interférence piloté par les données avec un suivi de phase conjoint.

corroborent les mesures effectuées sur le LCR et mettent en évidence l'importance de la connaissance des paramètres  $K$  et  $\mu_2$ . On notera que même lorsque le modèle (2.7) avec connaissance de  $\mu_2$  et  $v_{\max}$  est implémenté, il subsiste un écart de TEB avec le canal réel pour de forts  $Eb/N_0$ . Cet écart peut s'expliquer par la combinaison de trois phénomènes distincts. Premièrement, la réponse impulsionnelle originale correspond à une seule observation de durée limitée du processus aléatoire qu'est le canal et par conséquent l'incertitude relative d'estimation du TEB croît à mesure que le TEB diminue. Deuxièmement, les valeurs des paramètres d'entrée du modèle sont issues d'estimation sur le signal réel et ne sont donc pas des valeurs exactes. Enfin, la connaissance supposée du canal exprimée au travers des contraintes présentées aux sections 2.2 et 2.3 n'a pas la prétention d'être exhaustive et peut révéler ses limites pour de faibles TEB.

### 2.4.2 Limitations du modèle

La modélisation de canal à base du principe d'entropie maximale offre le principal avantage de répondre à trois exigences fondamentales de modélisation :

1. *cohérence*-le modèle ne repose que sur une connaissance objective de l'environnement à modéliser,
2. *concision*-relativement peu de paramètres sont nécessaires pour caractériser assez précisément un canal doublement dispersif,
3. *ouverture*-le modèle est évolutif, il peut être mis à jour à chaque fois qu'une nouvelle information sur l'environnement à modéliser est disponible.

Malgré ces caractéristiques intéressantes, le principe d'entropie maximale peut se montrer difficile à manipuler lorsque les propriétés statistiques du canal sont un peu « originales ». Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, le canal ASM n'est pas nécessairement stationnaire au sens strict comme supposé dans ce chapitre. De plus, il est communément admis que les mouvements de l'émetteur et du récepteur tendent à corréler la partie fluctuante des différents trajets d'un même canal, ce qui remet en cause l'indépendance des trajets induite lors de la construction des modèles présentés dans ce chapitre. Le principe d'entropie maximale peut en théorie intégrer ces contraintes de non-stationnarité et de corrélations entre trajets. La difficulté consiste alors à représenter simplement cette information et à pouvoir spécifier si possible des valeurs numériques aux paramètres résultants de cette nouvelle information. Ceci peut s'avérer quelque peu délicat lorsque la corrélation entre trajets est un tenseur à trois dimensions par exemple (cf. chapitre suivant).

Dans notre contexte ASM, il ne nous a pas semblé pertinent de pousser le principe d'entropie maximale si loin car son formalisme et les outils mathématiques qu'il requiert apparaissent très vite complexes à manipuler<sup>9</sup>. La vocation que nous voulons donner au modèle de canal basé sur le principe d'entropie maximale est une vocation de modèle « synthétique » utilisé dans les premières phases d'étude et de développement d'un système de communication. Pour une modélisation au plus proche de la réalité physique,

---

9. Le lecteur intéressé pourra se référer aux travaux de Guillaud et al. [Guillaud et al., 2007] qui utilisent le principe d'entropie maximale de façon avancée pour la modélisation de canaux MIMO avec une connaissance non déterministe de la corrélation entre antennes.

nous présentons dans le chapitre suivant un modèle de canal piloté par des données réelles qui repose, contrairement à l'approche de modélisation adoptée jusqu'ici, sur un formalisme d'inférence empirique. Ce formalisme offre l'avantage d'être simple à utiliser mais nécessite un peu d'intuition et beaucoup de données sur le canal à modéliser.

« *You have to learn the rules of the game. And then you have to play better than anyone else.* »

Albert Einstein

Pour exploiter pleinement les expérimentations en mer dans des conditions de laboratoire contrôlées et reproductibles, un modèle de canal piloté par des données réelles est proposé dans ce chapitre. Ce modèle repose sur l'hypothèse selon laquelle un canal sondé en mer est une observation d'un processus aléatoire sous-jacent. A partir de cette mesure, les propriétés statistiques du canal sont analysées afin de pouvoir générer en laboratoire de nouvelles réalisations du processus observé. Sur la base de l'analyse de données recueillies dans l'océan Atlantique et la mer Méditerranée, nous relâchons l'hypothèse de stationnarité au sens strict (et même au sens large) invoquée dans le chapitre précédent et par la plupart des modèles existants [van Walree et al., 2008; Galvin and Coats, 1996]. Nous montrons tout d'abord, grâce à la décomposition modale empirique, qu'un modèle stationnaire en *tendance* correspond aux données analysées. Contrairement à l'état de l'art sur le sujet, les trajets diffus sont ensuite supposés potentiellement corrélés, de sorte que les véritables statistiques du second ordre du canal sont prises en compte par notre modèle. Enfin, des scénarios de test illustrent les avantages du rejeu stochastique de canal pour la conception et la validation de systèmes de communication.

## 3.1 Inférence empirique

Contrairement au chapitre précédent, toute la construction du modèle proposé dans ce chapitre repose sur l'interprétation de données réelles et plus particulièrement sur les données issues des expérimentations présentées à la section 1.3.5. La méthodologie de modélisation adoptée ici est assez subjective car elle se base principalement sur l'intuition et non sur l'induction. Cependant, comme nous allons le voir par la suite, ce type d'approche a le mérite d'aboutir à un modèle de canal relativement simple intégrant des propriétés statistiques assez complexes comme la non-stationnarité ou la corrélation entre trajets.

### 3.1.1 Canal stationnaire en tendance

L'hypothèse de stationnarité au sens large du canal est souvent admise pour simplifier les modèles de propagation (cf. [Cristol, 2005; Geng and Zielinski, 1995; van Walree et al., 2008]). Elle peut s'énoncer sous la forme suivante : pour tout  $0 \leq l \leq L - 1$  et pour tout  $k$ ,



$k_1$  and  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}\{h_l(k_1)\} = \mathbb{E}\{h_l(k_2)\}, \quad (3.1)$$

$$\mathbb{E}\{|h_l(k_1)|^2\} = \mathbb{E}\{|h_l(k_2)|^2\} < \infty, \quad (3.2)$$

$$\mathbb{E}\{h_l(k_1)h_l^*(k_2)\} = \mathbb{E}\{h_l(k)h_l^*(k+k_2-k_1)\}. \quad (3.3)$$

Bien que le concept soit bien défini en théorie, tester la stationnarité sur des données réelles n'est pas direct. La stationnarité se réfère à une invariance des propriétés statistiques au cours du temps, mais une pratique courante considère généralement cette invariance dans un sens plus large, par rapport à une échelle d'observation. Dans la suite de ce chapitre, nous référençons donc la stationnarité par rapport à l'échelle d'observation.

Certaines études comme [Tomasi et al., 2011], montrent que lorsque l'émetteur et le récepteur sont fixes, le canal peut être stationnaire au sens large sur des durées de plusieurs minutes. Cependant lorsque les éléments communicants sont en mouvement, cette propriété n'est plus nécessairement vraie. En effet, la réponse impulsionnelle du canal ASM étant dépendante de la topologie du milieu, de la distance TX-RX, de la profondeur d'immersion etc., ces grandeurs ou caractéristiques sont dépendantes du mouvement de l'émetteur et du récepteur et peuvent faire varier les propriétés statistiques du canal au cours du temps. En analysant l'enveloppe de canaux ASM réels, nous pouvons conjecturer certaines propriétés sur la stationnarité du canal. Par exemple, la figure 3.1 montre l'évolution temporelle de l'enveloppe des trois trajets les plus puissants du canal (f) de la figure 1.7. La figure 3.1 suggère que les signaux se propageant au travers du canal ASM sont affectés par des phénomènes d'évanouissement de différentes échelles temporelles. L'évanouissement est généralement qualifié de lent ou rapide en référence à la vitesse à laquelle l'amplitude et la phase du canal fluctuent par rapport aux contraintes temporelles imposées sur l'application qui utilise le canal. Par exemple, on peut comparer le temps de cohérence du canal par rapport à la durée d'un mot de code, d'un paquet de données voire même d'un temps symbole. Les évanouissements rapides sont prédominants dans la conception de systèmes de communication car les paramètres de transmission et les algorithmes de réception doivent être adaptés à ses caractéristiques pour assurer de bonnes performances. Les évanouissements lents ne représentent qu'une variation à long terme du rapport signal sur bruit dont l'impact sur les performances de réception est généralement bien connu analytiquement [Proakis, 2001]. La figure 3.1 indique que l'hypothèse de stationnarité au sens large n'est pas vérifiée sur notre échelle d'observation car la moyenne locale de l'enveloppe des trajets fluctue dans le temps. A contrario, les statistiques du second ordre semblent elles être invariantes. Ces observations suggèrent deux hypothèses de modélisation :

**Hypothèse 3.1.1** *Les évanouissements lents et rapides sont combinés de façon additive.*

**Hypothèse 3.1.2** *Le canal ASM est un processus aléatoire stationnaire en tendance, tel que chaque trajet vérifie*

$$h_l(k) = d_l(k) + \zeta_l(k) \quad (3.4)$$

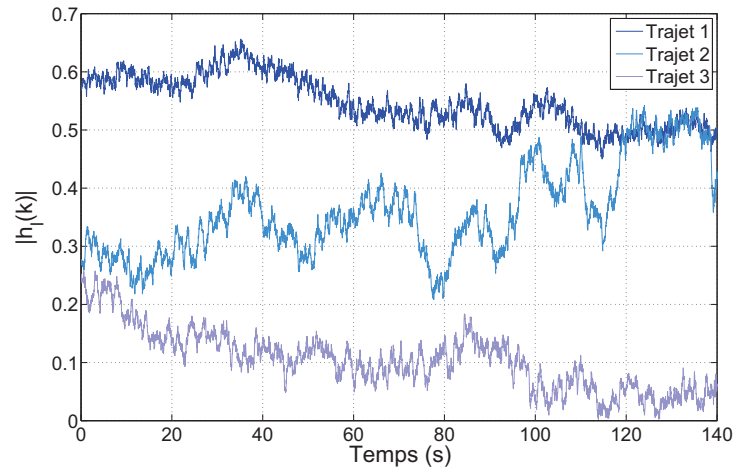
avec, pour tout  $k$ ,  $k_1$  et  $k_2 \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{E}\{h_l(k)\} = d_l(k), \quad (3.5)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\left(h_l(k_1) - \mathbb{E}\{h_l(k_1)\}\right)\left(h_l(k_2) - \mathbb{E}\{h_l(k_2)\}\right)^*\right\} &= \mathbb{E}\{\zeta_l(k_1)\zeta_l^*(k_2)\} \\ &= \mathbb{E}\{\zeta_l(k)\zeta_l^*(k+k_2-k_1)\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

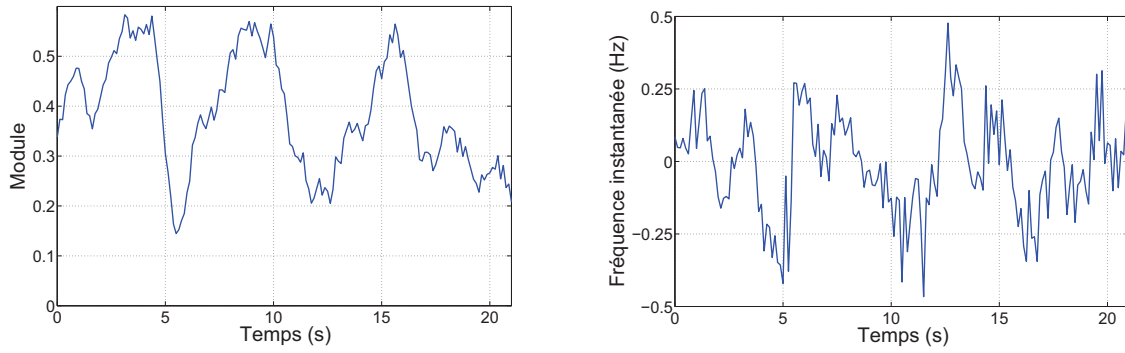
$d_l(k)$  est appelée la *tendance* qui est une composante pseudo-cohérente qui se comporte quasiment comme si le milieu était déterministe et  $\zeta_l(k)$  est un processus aléatoire stationnaire au sens large de moyenne nulle.  $d_l(k)$  peut être interprétée comme la contribution de phénomènes pseudo-déterministes sur les fluctuations du canal. A notre échelle d'observation (entre 30 et 160 secondes), ces phénomènes résultent principalement de la variation de distance et de profondeur, de l'ondulation des vagues ou des phénomènes d'ombrage dûs à la topologie de l'environnement. En accord avec l'hypothèse 3.1.1,  $d_l(k)$  peut être vue comme la composante qui contribue aux évanouissements lents. Quant à  $\zeta_l(k)$ , il représente les fluctuations du canal imputables aux diffuseurs responsables de l'évanouissement rapide. On notera que  $d_l(k)$  est considérée ici comme pseudo-déterministe seulement parce que la fenêtre d'observation est limitée par rapport à la vitesse de fluctuation des phénomènes physiques sous-jacents. Une fenêtre d'observation plus longue pourrait mener à des conclusions différentes.



**Figure 3.1** — Exemples d'évolution temporelle de l'enveloppe des trajets d'un canal ASM.

Pour valider et définir plus précisément notre modèle de canal stationnaire en tendance, nous cherchons maintenant à isoler la tendance de la partie purement aléatoire. Si nous réussissons à isoler ces deux composantes et à obtenir des propriétés invariantes sur  $d_l(k)$  et  $\zeta_l(k)$  pour tous les canaux analysés, alors nous pourrions admettre que l'hypothèse 3.1.1 et 3.1.2 sont des hypothèses sensées. Pour trouver un opérateur ou un espace dans lequel ces composantes sont séparables, nous nous sommes focalisé sur les propriétés physiques du canal. D'après l'hypothèse 3.1.2,  $d_l(k)$  est contraint par les phénomènes qui induisent des variations sur l'amplitude du canal sur des durées de l'ordre de quelques secondes (pour l'ondulation des vagues par exemple) jusqu'à plusieurs minutes (dérive de l'émetteur et du récepteur) alors que les diffuseurs sont responsables de

l'évanouissement sur des périodes de l'ordre de dizaines ou centaines de milli-secondes. Par conséquent,  $d_l(k)$  et  $\zeta_l(k)$  peuvent être discriminés grâce à leur amplitude respective. La difficulté consiste alors à filtrer les trajets d'un canal à valeurs complexes à partir d'un critère basé sur les périodes de variations de son amplitude tout en conservant l'information de phase. L'utilisation d'un filtre linéaire classique ne semble pas adaptée à notre problème. Les observations montrent en effet que la phase des trajets ne varie pas nécessairement au même rythme que leur amplitude et rien ne garantit que les spectres fréquentiels de  $d_l(k)$  et  $\zeta_l(k)$  soient disjoints. Une autre approche, motivée par l'observation de trajets avec une forte *tendance* (voir figure 3.2 par exemple), est de modéliser chaque trajet comme la somme de modes modulés en amplitude (AM) et en fréquence (FM).



**Figure 3.2** — Exemple d'évolution temporelle du module et de la fréquence instantanée d'un trajet avec une tendance puissante (Mer Med.).

La décomposition de signaux non-stationnaires au sens large en composantes intrinsèques modulées AM-FM est possible grâce à la décomposition modale empirique (EMD) initialement proposée par Huang et al. dans [Huang et al., 1998] et brièvement présentée dans l'annexe B. L'EMD est pertinente pour résoudre notre problème principalement parce que la décomposition en modes AM-FM est appropriée à l'analyse de signaux non-stationnaires mais aussi parce qu'elle ne requiert pas de base de fonctions pré-déterminées. De plus, elle ne fait aucune hypothèse sur la nature harmonique des oscillations et peut ainsi garantir une représentation compacte du signal original (i.e., avec moins de modes qu'une transformée de Fourier ou en ondelettes). La méthode EMD initiale étant limitée aux séries temporelles à valeurs réelles, nous utilisons ici son extension aux signaux à valeurs complexes présentée dans [Rilling et al., 2007].

Chaque trajet du canal peut se représenter dans l'espace des modes empiriques comme

$$h_l(k) = \sum_{q=0}^{Q_l-1} m_{l,q}(k) + \epsilon_l(k) \quad (3.7)$$

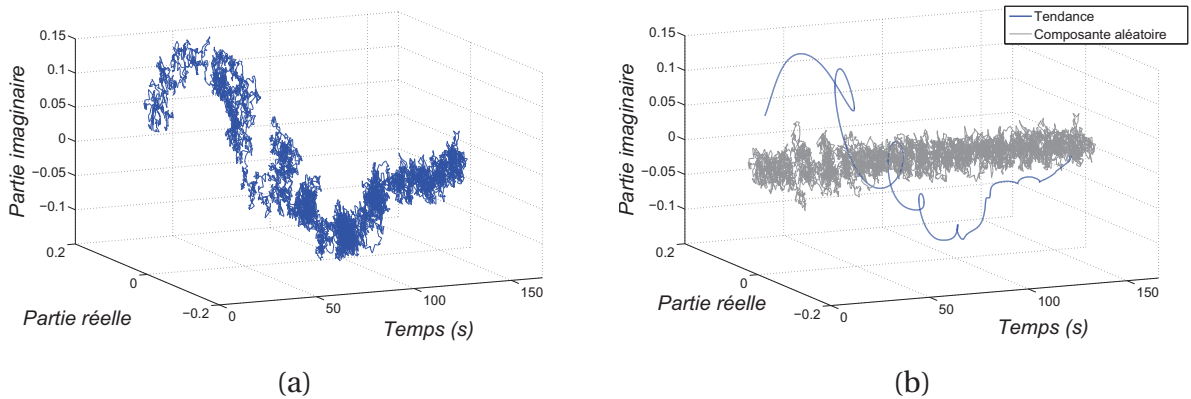
où  $m_{l,q}$  est le  $q$ -ième des  $Q_l$  modes résultant de l'EMD du trajet  $h_l$  et  $\epsilon_l$  est le résidu de décomposition. Comme les modes oscillants rapidement (resp. lentement) contribuent aux évanouissements rapides (resp. lents), nous discriminons alors la *tendance* de la compo-

sante aléatoire comme

$$h_l(k) = \underbrace{\sum_{q=0}^{S_l-1} m_{l,q}(k)}_{\zeta_l(k)} + \underbrace{\sum_{q=S_l}^{Q_l-1} m_{l,q}(k)}_{d_l(k)} + \epsilon_l(k) \quad (3.8)$$

où  $S_l$  est l'ordre de décomposition permettant de séparer les deux composantes. Les périodes d'évanouissement étant mesurées sur l'enveloppe du trajet,  $S_l$  est basé sur un critère fréquentiel calculé sur le module des modes. Plus précisément, si nous considérons que le phénomène pseudo-déterministe le plus rapide affectant l'amplitude d'un trajet est l'ondulation des vagues,  $S_l$  est choisi comme l'ordre maximum tel que la période moyenne de  $|\sum_{q=0}^{S_l-1} m_{l,q}(k)|$  soit inférieure à la période moyenne des vagues (habituellement de l'ordre de quelques secondes). Il existe plusieurs manières de calculer cette période moyenne [Massel, 1996]. Puisque nous travaillons sur le module de signaux à valeurs complexes, nous suggérons d'utiliser la période moyenne crête qui est définie comme le temps moyen séparant les extrema de  $|\sum_{q=0}^{S_l-1} m_{l,q}(k)|$ . On notera que l'EMD étant une opération non-linéaire, la méthode de filtrage (3.8) est elle aussi non-linéaire.

Un exemple de filtrage EMD appliqué à des données réelles est montré à la figure 3.3. Le résultat de décomposition apparaît conforme à l'hypothèse 3.1.2 car la composante  $\zeta_l(k)$  estimée semble être la réalisation d'un processus stationnaire au sens large à moyenne nulle. Pour isoler les deux composantes, la période moyenne de  $|\sum_{q=0}^{S_l-1} m_{l,q}(k)|$  a été minorée à 5 s ce qui correspond à la période moyenne minimale des ondulations de vagues observée sur les données réelles.



**Figure 3.3** — Illustration du filtrage EMD appliqué à un trajet d'un canal réel. (a) Trajet original, (b) séparation de la tendance et de la composante aléatoire.

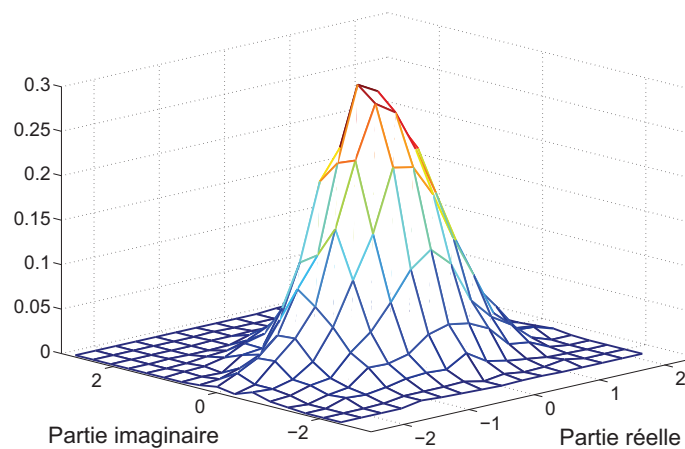
### 3.1.2 Densité de probabilité du canal

Grâce au filtrage EMD, il est maintenant possible d'étudier les propriétés statistiques de chaque processus aléatoire  $\zeta_l(k)$  et plus particulièrement d'établir un modèle de densité de probabilité de celui-ci, sous l'hypothèse qu'il est ergodique. Comme discuté précédemment, l'inférence empirique requiert souvent une intuition préalable pour imaginer un modèle, cette intuition étant ensuite comparée aux données observées à l'aide de

tests statistiques pour statuer sur la validité du modèle. Pour réconcilier partiellement les cadres d'inférence bayésien et empirique, nous proposons d'utiliser le principe d'entropie maximale pour orienter ou stimuler l'intuition nécessaire à la définition de notre modèle empirique. A partir des échantillons  $\zeta_l(k)$  et sous l'hypothèse d'ergodicité, il est possible d'estimer simplement n'importe quel moment à l'ordre  $p$ , en supposant qu'il existe, comme  $1/N \times \sum_{k=0}^{N-1} |\zeta_l(k)|^p$ , où  $N$  est le nombre d'échantillons disponibles. Pour avoir une idée sur l'expression d'un modèle paramétrique qui correspondrait aux données, nous suggérons d'appliquer le principe d'entropie maximale sous contrainte de moments connus à différents ordres et de comparer, à l'aide de la divergence de Kullback-Leibler (KL) [Cover and Thomas, 1991], les distributions résultantes avec les densités de probabilité empiriques. La divergence KL fournit une mesure de dissimilarité entre deux distributions, des distributions identiques ayant une divergence de 0. Le tableau 3.1 montre un exemple de divergence KL mesurée sur un trajet sondé dans l'océan Atlantique. Sur cet exemple représentatif, on peut observer que la mesure de KL converge vers une valeur faible stable dès que l'on intègre dans le modèle à entropie maximale les contraintes à l'ordre deux. Comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, la distribution résultante de l'application de contraintes au second ordre sur le modèle à entropie maximale est une distribution normale où les parties réelles et imaginaires sont indépendantes. A titre d'illustration, l'histogramme conjoint de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une composante aléatoire d'un trajet « atlantique » est montrée à la figure 3.4.

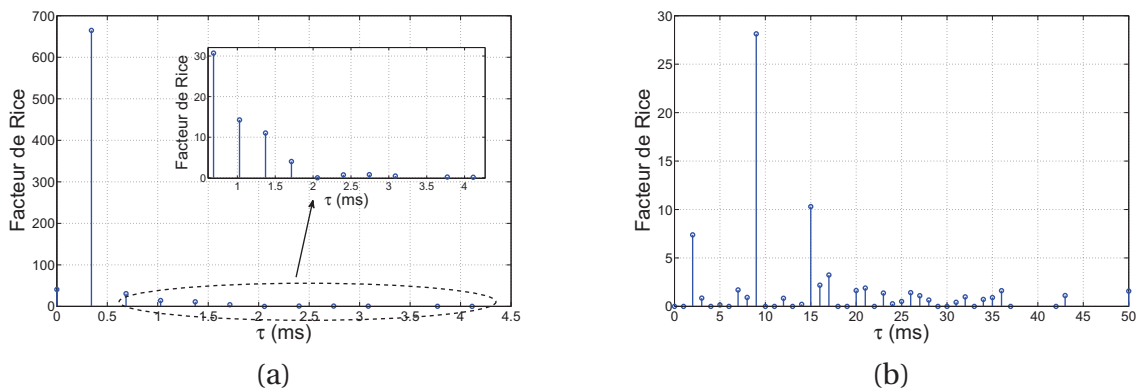
**Tableau 3.1** — Exemple de mesures de divergence de KL en fonction des ordres de contrainte

Ordre des moments $p$	0	$\leq 1$	$\leq 2$	$\leq 3$	$\leq 4$	$\leq 5$
Divergence KL	0.64	0.62	$8.8 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-3}$



**Figure 3.4** — Exemple d'histogramme conjoint de la partie réelle et de la partie imaginaire d'une composante aléatoire d'un trajet « atlantique ».

Sans réelle surprise le modèle gaussien apparaît de nouveau. Pour conforter ce résultat, nous avons appliqué un test de Kolmogorov-Smirnov [Stephens, 1974] sur les enveloppes des composantes  $\zeta_l(k)$ . Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'hypothèses basé sur les fonctions de répartitions empiriques. Il sert à déterminer si un échantillon donné suit une loi précise ou non. Sous l'hypothèse de gaussianité et d'indépendance des parties réelles et imaginaires,  $|\zeta_l(k)|$  doit en théorie suivre une distribution de Rayleigh. 96% des trajets confrontés au test Kolmogorov-Smirnov ont passé le test avec un niveau de signification (p-valeur) supérieur à 5%. On rappelle qu'un résultat est dit statistiquement significatif lorsqu'il est improbable qu'il puisse être obtenu par un simple hasard, 5% étant un seuil conventionnel [Stigler, 2008]. Le fait qu'un modèle de densité de probabilité commun à tous les trajets testés ait été trouvé tend à montrer que les hypothèses 3.1.1 et 3.1.2 sont valides. Par conséquent, nous considérons que les canaux analysés peuvent être modélisés par des canaux de Rice avec une composante moyenne fluctuant lentement au cours du temps. En complément et comme illustré à la figure 3.5, les mesures effectuées sur les canaux réels indiquent que le rapport de puissance (appelé aussi facteur de Rice) entre les tendances  $d_l(k)$  et les composantes aléatoires  $\zeta_l(k)$  dépend du retard  $\tau$  d'arrivée des trajets et tend vers zéro pour les trajets les plus retardés.



**Figure 3.5** — Mesures du facteur de Rice en fonction du retard d'arrivée de chaque trajet. (a) Exemple de canal très stable sondé dans l'océan Atlantique, (b) exemple de canal sondé en mer Méditerranée.

Si  $\zeta_l(k)$  est un processus gaussien, il est alors entièrement caractérisé par ses statistiques du premier et second ordre. Les mesures et les tests statistiques révèlent qu'il s'agit d'un processus à moyenne nulle, mais il semble difficile de trouver un modèle paramétrique général pour ses statistiques de second ordre. Les observations semblent indiquer d'une part que les spectres Doppler sont différents d'un canal à l'autre et d'autre part, si l'on veut se rapprocher au plus près de la réalité physique, il faut prendre en compte la corrélation potentielle entre trajets ce qui semble difficile à intégrer dans un modèle paramétrique simple. Toutefois, comme montré dans la section suivante, dans le cadre du jeu stochastique, il est possible de tirer de nouvelles réalisations des processus  $\zeta_l(k)$  tout en conservant les propriétés de leurs statistiques de second ordre, sans le recours à la définition d'un modèle paramétrique complet.

## 3.2 Corrélations entre trajets et rejou

Le rejou stochastique repose sur le postulat selon lequel un canal de communication sondé à un endroit donné sur une fenêtre temporelle donnée est l'observation d'un processus aléatoire sous-jacent. D'après les résultats obtenus dans la section précédente, le caractère aléatoire du canal est représenté par les  $\zeta_l(k)$ . Dès lors, le vecteur observé  $[\zeta_0(k), \dots, \zeta_{L-1}(k)]$  est considéré comme la réalisation d'un processus aléatoire gaussien multi-varié  $\Omega(k) = [\omega_0(k), \dots, \omega_{L-1}(k)]$ . La méthode de Rice détaillée dans [Rice, 1944] suggère de construire un processus aléatoire gaussien  $\Lambda(k) \triangleq [\lambda_0(k), \dots, \lambda_L(k)]$  à partir de notre observation comme

$$\lambda_l(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} Z_l(n) e^{2j\pi nk/N} e^{j\theta_l(n)}, \quad \forall 0 \leq l \leq L-1 \quad (3.9)$$

où  $Z_l(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_l(k) e^{-2j\pi nk/N}$ ,  $\theta_l(n)$  est une variable aléatoire i.i.d et  $N$  est la taille de la fenêtre d'observation. Dans nos expérimentations,  $N$  est suffisamment grand (entre 240 et 15000) pour invoquer le théorème de la limite centrale et garantir une certaine gaussianité des  $\lambda_l(k)$ . Comme  $\zeta_l(k)$  est la réalisation d'un processus à moyenne nulle,  $\theta_l(n)$  est choisi aléatoirement et de façon uniforme sur l'intervalle  $]0, 2\pi]$ .

Les statistiques du second ordre de  $\Omega(k)$  sont définis par la matrice de corrélation

$$\Gamma(u) = \begin{bmatrix} \gamma_{0,0}(u) & \gamma_{0,1}(u) & \cdots & \gamma_{0,L-1}(u) \\ \gamma_{1,0}(u) & \gamma_{1,1}(u) & \cdots & \gamma_{1,L-1}(u) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{L-1,0}(u) & \gamma_{L-1,1}(u) & \cdots & \gamma_{L-1,L-1}(u) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

où  $\gamma_{l,p}(u) = \mathbb{E}\{\omega_l(k)\omega_p^*(k-u)\}$ . Si le processus est supposé ergodique, nous avons alors

$$\gamma_{l,p}(u) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^N \zeta_l(k)\zeta_p^*(k-u). \quad (3.11)$$

L'hypothèse usuelle d'absence de corrélations entre trajets considère que  $\gamma_{l,p}(u) = 0, \forall l \neq p$  mais dans notre cas nous relâchons cette hypothèse pour être aussi proche que possible de réalité physique du canal. Les réflexions sur les mêmes corps physiques ou les étalements de retard et Doppler causés par la transmission de données limitées dans le temps et en fréquence peuvent en effet induire de la corrélation entre les trajets multiples. Dans la plupart des cas, la simulation de processus aléatoires corrélés est assez complexe et coûteuse en calcul [Deodatis, 1996; Chen and Letchford, 2005]. Dans [van Walree et al., 2008], les auteurs contournent cette difficulté en supposant que la fonction de diffusion du canal est séparable en retard et Doppler. Cette séparabilité réduit ainsi les corrélations à un produit de facteurs de corrélation temporelle et spatiale. Bien que cette hypothèse puisse être valable dans certains milieux spécifiques tels que le chenal de la mer Baltique présenté dans [van Walree et al., 2008], elle ne convient pas aux mesures que nous avons recueillies dans l'océan Atlantique et la mer Méditerranée.

Afin de générer un processus  $\Lambda(k)$  avec des statistiques similaires à  $\Omega(k)$ , nous proposons de créer de la dépendance entre les phases aléatoires  $\theta_l(n)$ . Les éléments de la

matrice de corrélation de  $\Lambda(k)$  s'expriment comme

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\{ \lambda_l(k) \lambda_p^*(k-u) \right\} &= \frac{1}{N} \left( \sum_{n=0}^{N-1} Z_l(n) Z_p^*(n) e^{2j\pi u \frac{n}{N}} \cdot \mathbb{E} \left\{ e^{j(\theta_l(n) - \theta_p(n))} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{N-1} Z_l(n) Z_p^*(m) e^{2j\pi \frac{k(n-m)+mu}{N}} \cdot \mathbb{E} \left\{ e^{j(\theta_l(n) - \theta_p(m))} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

En choisissant  $\theta_l(n) = \theta_p(n)$  et les  $\{\theta_l(n)\}_n$  i.i.d, il vient que

$$\mathbb{E} \left\{ e^{j(\theta_l(n) - \theta_p(n))} \right\} = 1 \quad (3.13)$$

$$\mathbb{E} \left\{ e^{j(\theta_l(n) - \theta_p(m))} \right\} = 0, m \neq n. \quad (3.14)$$

(3.12) se simplifie alors et devient

$$\mathbb{E} \left\{ \lambda_l(k) \lambda_p^*(k-u) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} Z_l(n) Z_p^*(n) e^{2j\pi u \frac{n}{N}}. \quad (3.15)$$

En appliquant le théorème de Plancherel-Parseval, cette relation peut s'écrire comme

$$\mathbb{E} \left\{ \lambda_l(k) \lambda_p^*(k-u) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_l(k) \zeta_p^*([k-u]_N) \quad (3.16)$$

où  $[\cdot]_N$  dénote l'opération modulo  $N$ .  $\mathbb{E} \left\{ \lambda_l(k) \lambda_p^*(k-u) \right\}$  s'avère être une très bonne approximation de  $\gamma_{l,p}(u)$  dans notre contexte. En effet, les mesures effectuées sur les  $\zeta_l(k)$  indiquent que leurs temps de cohérence sont inférieurs à 600 ms (resp. 2 s) pour des niveaux de corrélation de 50% (resp. 10%). Ces durées sont très courtes en comparaison avec la durée des observations disponibles qui sont comprises entre 30 et 160 secondes. Par conséquent, étant donné que [Max and Lacoume, 2004, pp. 195]<sup>1</sup>

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E} \left\{ \zeta_l(k) \zeta_p^*([k-u]_N) \right\} = \begin{cases} \frac{N-u}{N} \gamma_{l,p}(u) & \text{pour } 0 \leq u \leq \frac{N}{2}, \\ \frac{u}{N} \gamma_{l,p}(N-u) & \text{pour } \frac{N}{2} \leq u \leq N, \end{cases} \quad (3.17)$$

et que la corrélation est seulement significative pour des petites valeurs de  $u$ , nous pouvons conclure que (3.16) est l'expression d'un estimateur faiblement biaisé de  $\gamma_{l,p}(u)$ . En conséquence, le véritable processus aléatoire  $\Omega(k)$  sous-jacent aux observations peut être approché par  $\Lambda(k)$ .

La procédure complète de rejeu stochastique peut être résumé par l'algorithme 1.

On notera que le caractère non stationnaire du canal que l'on rejoue limite la durée de rejeu à la durée de la réponse impulsionnelle initialement observée.

### 3.3 Illustrations

Le rejeu de canal s'avère être un moyen de validation complémentaire aux essais terrains. Alors que les expérimentations en mer garantissent des conditions de test réalistes,

1. Pour obtenir ce résultat, la corrélation est supposée négligeable pour  $u > N/2$ .



**Algorithm 1** Rejeu stochastique de canal

**Require:** Une estimation de la réponse impulsionnelle d'un canal réel sur une fenêtre de  $N$  échantillons et constituée de  $L$  trajets.

1. Tirer  $N$  réalisations d'une variable aléatoire  $\theta(n)$  uniformément distribuée sur  $]0, 2\pi]$

**for**  $0 \leq l \leq L - 1$  **do**

2. A l'aide de l'EMD, décomposer chaque trajet  $h_l(k)$  comme  $h_l(k) = d_l(k) + \zeta_l(k)$

3. Calculer  $Z_l(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \zeta_l(k) e^{-2j\pi nk/N}$

4. Calculer  $\lambda_l(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} Z_l(n) e^{2j\pi nk/N} e^{j\theta(n)}$

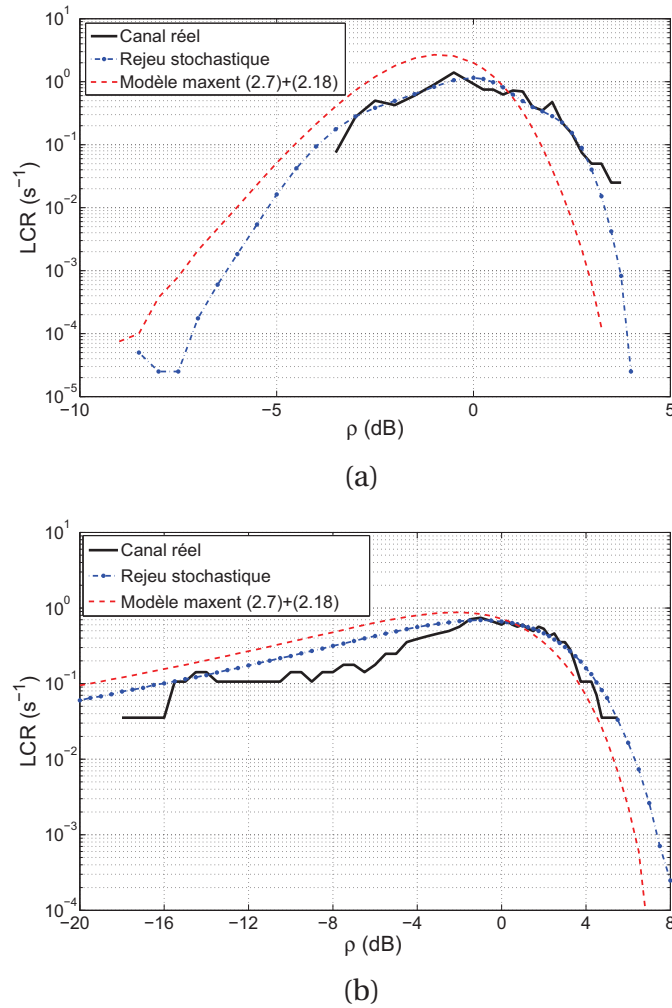
5. Additionner  $\lambda_l(k)$  à  $d_l(k)$  pour obtenir une nouvelle réalisation du trajet  $l$

**end for**

elles offrent un champ de validation restreint puisqu'elles correspondent à un « instantané » d'un environnement opérationnel donné. Même si, contrairement aux modèles de propagation paramétriques comme celui du chapitre précédent, le rejeu est lui aussi contraint par cet environnement opérationnel (immersion TX/RX, fréquence, distance TX-RX fixées etc.), il permet, dans une certaine mesure, d'évaluer la contribution de certains phénomènes physiques de façon indépendante. Par exemple, à partir de la réponse impulsionnelle originale du canal réel, il est possible de tester des systèmes de communication avec différentes configurations (constellation, débit, mono vs multi-porteuses etc.) dans des environnements variés (types ou puissances de bruit différents, facteur de Rice variable etc.). Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, ce rejeu peut aussi permettre d'évaluer numériquement la capacité de canaux réels ASM. De plus, l'avantage du caractère stochastique du rejeu de canal est que, grâce à des simulations de Monte-Carlo, toutes les métriques utilisées pour la conception ou validation de systèmes peuvent être calculées avec un bon niveau de signification statistique.

A titre d'illustration, la figure 3.6 montre le LCR (cf. (2.20)) des canaux (f) et (b) des figures 1.6 et 1.7 qui ont la particularité d'être non-stationnaires. La figure 3.6 met en avant deux phénomènes. Premièrement, par simulation de Monte-Carlo, l'utilisation du rejeu stochastique permet de réduire la variance d'estimation de la statistique d'évanouissement LCR par rapport aux mesures effectuées sur la réponse impulsionnelle originale. Deuxièmement, en comparant les résultats obtenus avec le rejeu stochastique et le modèle à entropie maximale, il est possible d'évaluer l'impact du caractère non-stationnaire du canal et de la corrélation potentielle entre trajets sur les mesures. Le modèle à entropie maximale, tel que défini dans le chapitre précédent, faisant l'hypothèse de stationnarité et n'intégrant pas l'information de corrélation est par conséquent moins proche des données réelles. On notera que si ce dernier était contraint par une quantité d'information équivalente à celle implicitement utilisée par le modèle de rejeu, les deux méthodes devraient en théorie converger vers les mêmes résultats.

Un autre exemple original d'utilisation du rejeu stochastique est présenté à la figure 3.7. Il correspond à un cas où le rejeu est utilisé pour régler les algorithmes de réception. Par exemple, il peut être intéressant de savoir dans quelle mesure un récepteur est sensible aux fluctuations rapides du canal. Une manière d'évaluer cette sensibilité est d'estimer le taux d'erreur binaire en fonction de rapports de puissance  $E_b/N_0$  pour divers



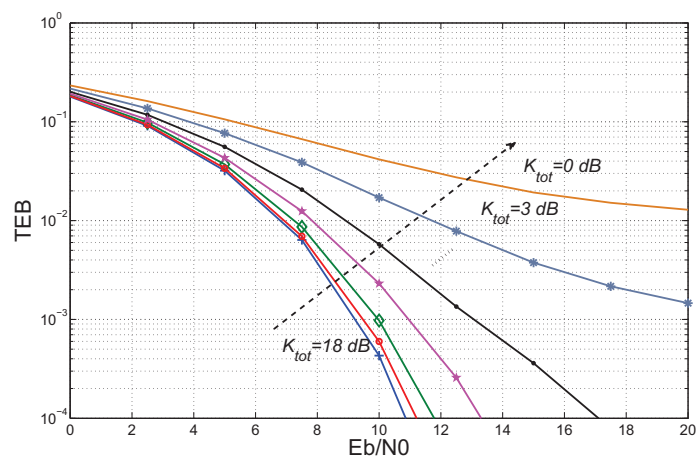
**Figure 3.6** — Comparaison des LCR mesurés entre le rejeu stochastique et l’approche à entropie maximale sur des canaux non-stationnaires. (a) Canal atlantique, (b) canal méditerranéen.

rapports de puissance  $K_{\text{tot}}$  entre les *tendances* et les composantes aléatoires du canal où

$$K_{\text{tot}} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} |d_l(k)|^2}{\sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=0}^{N-1} |\zeta_l(k)|^2}. \quad (3.18)$$

Puisque nous sommes en mesure d’isoler les deux composantes, il est possible de modifier artificiellement la puissance de l’une ou l’autre et d’évaluer l’impact de ce changement sur le TEB. Ceci est illustré à la figure 3.7 sur un système QPSK comme décrit à la section 2.4.1 et pour le canal atlantique (f) de la figure 1.7 où  $K_{\text{tot}}$  est artificiellement réduit à 0 dB par pas de 3 dB, le rapport de puissance  $K_{\text{tot}}$  estimé sur le canal original étant de 18 dB.

Des exemples complémentaires d’utilisation du rejeu stochastique sont présentés dans [Socheleau et al., 2011a,b].



**Figure 3.7** — Influence sur le taux d'erreur binaire d'un système QPSK du rapport de puissance les *tendances* et les composantes aléatoires d'un canal atlantique.

---

# Conclusion

Après avoir rappelé quelques généralités sur le milieu ASM, nous nous sommes intéressé, dans cette partie, à la modélisation du canal de communication acoustique sous-marin. Nous avons proposé deux modèles complémentaires qui exploitent différents degrés de connaissance a priori sur le milieu à modéliser.

Le premier modèle, détaillé dans le chapitre 2, est un modèle paramétrique qui a pour vocation d'être utilisé dans les premières phases de conception et de validation des modems ASM. Ce modèle exploite le principe d'entropie maximale qui repose sur le formalisme de la théorie de l'information. Un des atouts majeurs de l'approche à entropie maximale, elle qu'est permet d'obtenir un modèle quel que soit notre degré de connaissance sur le milieu que l'on cherche à modéliser. A l'aide de ce principe d'inférence inductive, nous avons notamment montré qu'à partir du connaissance limitée du milieu de propagation, il était possible d'obtenir un modèle proche de la réalité physique de ce milieu. En effet, les comparaisons entre des statistiques d'évanouissement ou de taux d'erreur binaire issus du modèle et de canaux réels indiquent que la connaissance du profil de puissance du canal, du facteur de Rice et de l'étalement Doppler peut s'avérer suffisante pour imiter avec précision le milieu sous-marin réel.

Avec pour objectif de se rapprocher au maximum des caractéristiques physiques du canal, nous avons ensuite proposé au chapitre 3 le modèle de rejeu stochastique. Ce modèle, non paramétrique et piloté par des mesures réelles, a pour vocation d'être utilisé dans des phases de conceptions ou validation plus avancées que celles où le modèle à entropie maximale intervient. A partir d'une seule mesure de réponse impulsionnelle effectuée en mer, le rejeu stochastique permet d'évaluer, de façon indépendante, l'impact de différents phénomènes physiques sur le lien de communication avec un bon niveau de signification statistique. L'analyse des canaux de transmission réels a montré que ceux-ci peuvent être modélisés par des processus aléatoires stationnaires en tendance, ce qui est plus générale que l'hypothèse habituelle de stationnarité au sens large. De plus, à condition que la durée du signal réel rejoué soit supérieure au temps de cohérence du canal, nous avons montré que la corrélation potentielle entre trajets peut facilement être simulée sans avoir recours à un modèle paramétrique.



## **Deuxième partie**

### **Capacité du canal et optimisation du schéma de signalisation**



---

# Introduction

Les récentes expérimentations de nouveaux schémas de signalisation et de techniques performantes de traitement du signal ont montré qu'il était possible d'accroître les débits de communication des systèmes acoustiques ou d'améliorer leur robustesse par rapport aux modems actuellement commercialisés. Comme indiqué dans l'introduction générale, parmi ces techniques, souvent empruntées au domaine des radiocommunications, on trouve notamment les modulations multi-porteuses [Frassati et al., 2005; Gomes and Stojanovic, 2009; Li et al., 2008; Leus and van Walree, 2009], le recours aux systèmes multi-capteurs [Li et al., 2009; Roy et al., 2007], les techniques de codage canal type turbo-codes [Trubuil et al., 2010] ou LDPC [Huang et al., 2008], l'identification de canaux parcimonieux [Berger et al., 2010; Zamanizadeh et al., 2010] ou encore les techniques itératives de réception [Laot et al., 2010; Otnes and Eggen, 2008].

Dans ce contexte, une évaluation des performances limites qu'il est possible d'atteindre sous l'eau avec une onde acoustique, notamment au moyen du calcul de la capacité de Shannon, apparaît essentielle pour déterminer si ces nouvelles techniques peuvent effectivement aboutir à une amélioration significative des débits de transmission comme celle observée au cours des dix dernières années dans le domaine des radiocommunications par exemple. De plus, afin de trouver un bon compromis débit/robustesse et de chercher à se rapprocher des bornes théoriques de capacité, il est primordial d'identifier des directives de conception de systèmes de communications qui permettent d'optimiser les schémas de signalisation utilisés.

Contrairement à la capacité des canaux radios, la capacité des canaux ASM petit-fond a été peu étudiée. Dans [Hayward and Yang, 2004], les auteurs calculent la capacité du canal ASM en appliquant un modèle de propagation à base de rayons gaussiens pour connaître l'amplitude et la phase de chacun des trajets. Ils considèrent un canal sélectif en fréquence mais invariant dans le temps et supposent une bande de fréquence disponible quasiment illimitée. En supposant une puissance de transmission de 193 dB re  $\mu\text{Pa}$  @ 1 m, ils aboutissent à des résultats de capacité très optimistes où le produit débit-distance est de l'ordre de 1 Mbits/s $\times$ km. Ceci est très supérieur aux systèmes actuels qui sont généralement majorés par un produit débit-distance de 50 kbits/s $\times$ km. Plus récemment, Lucani et al. considèrent dans [Lucani et al., 2008] un modèle de propagation plus simple<sup>2</sup> et déterminent des relations approchées entre la distance, la puissance de transmission et la capacité. Même si ces travaux sont très intéressants, ils ne sont pas com-

---

2. Ils considèrent un canal mono-trajet dont le SNR à la réception varie avec la fréquence et la distance en fonction d'un modèle physique de propagation simplifié.



plètement réalistes puisqu'ils négligent à la fois certaines caractéristiques critiques du canal ASM, comme son caractère aléatoire et variant dans le temps, ainsi que des limitations imposées par le matériel de transmission, comme la puissance crête et la bande de transmission limitées. Dans le chapitre 4, la capacité du canal de transmission acoustique sous-marin est abordée en considérant un maximum de contraintes réalistes. Le canal est supposé doublement dispersif, les puissances crêtes et moyennes limitées et la réalisation courante du canal inconnue de l'émetteur et du récepteur (contexte non-cohérent).

Une fois les bornes de capacité connues, l'objectif ultime est de trouver le schéma de signalisation qui permet d'atteindre ces bornes. Cette recherche s'avère très délicate dans la pratique. De part son caractère doublement dispersif et sa limitation en bande passante, le milieu de propagation acoustique sous-marin impose des contraintes fortes sur les notions très intriquées de robustesse et d'efficacité spectrale qui définissent les performances des systèmes de communication. Alors que la notion d'efficacité spectrale est clairement définie et se mesure en bits/s/Hz, la notion de robustesse est plus subjective. Un système peut être considéré comme robuste lorsqu'il n'est pas trop affecté par les écarts entre l'environnement réel de propagation et celui supposé a priori. Cette robustesse est en général inversement proportionnelle au nombre de paramètres fixés a priori.

Ce dilemme robustesse-efficacité spectrale se traduit dans la pratique par le choix de modulations différentes en fonction de l'importance que l'on accorde à l'une ou l'autre caractéristique et en fonction des propriétés du canal. Historiquement, les modulations mono-porteuses couplées à des récepteurs reposant sur des égaliseurs de canal ont été largement étudiées et utilisées dans la pratique pour les communications sous-marines haut-débit [Kilfoyle and Baggeroer, 2000]. Depuis peu, les systèmes multi-porteuses de type OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) génèrent beaucoup d'intérêt en raison de la simplicité de leur récepteur et de la flexibilité qu'ils offrent [Frassati et al., 2005; Li et al., 2008; Leus and van Walree, 2009]. Dans un contexte ASM, la caractéristique la plus attrayante de l'OFDM est peut-être la simplicité du récepteur utilisant l'égalisation dans le domaine fréquentiel, avec un coefficient unique par sous-porteuse, et un nombre restreint de paramètres fixés a priori. Cette simplicité en fait un système de communication généralement robuste. Ceci est à comparer avec les égaliseurs utilisés pour les systèmes mono-porteuses qui requièrent le réglage de paramètres tels que le nombre de coefficient des filtres d'égalisation ou le pas d'adaptation, réglage qui peut s'avérer délicat dans la pratique lorsque le canal est très dispersif en temps. Cependant, la robustesse de l'OFDM, par rapport aux modulations mono-porteuses, se paie en efficacité spectrale du fait de l'utilisation d'intervalles de garde dont la durée est minorée par l'étalement temporel maximal du canal, étalement qui peut atteindre plusieurs dizaines de milli-secondes (cf. figure 1.6). En fonction de la vitesse de fluctuation du canal, ces intervalles de garde peuvent en effet induire jusqu'à 50% de perte d'efficacité spectrale.

L'absence de solution universelle qui permettrait d'obtenir un système de communication robuste et efficace quel que soit l'environnement sous-marin est à imputer au caractère doublement dispersif du canal et à ses différences notoires d'une zone géographique ou d'une saison à l'autre [van Walree, 2011]. Cependant, en unifiant les concepts de modulations mono-porteuses et OFDM dans un schéma de signalisation plus général et en apportant une certaine connaissance du canal à l'émetteur, il est envisageable de trouver un compromis robustesse-efficacité quel que soit l'environnement de propaga-

tion.

Il est communément admis que la connaissance du canal  $\mathbb{H}$  à la réception peut être obtenue (au prix d'une perte de capacité) à l'aide de méthodes d'estimation de canal, ce qui permet une détection cohérente. La connaissance du canal à l'émission peut, quant à elle, permettre d'adapter la forme d'onde transmise aux caractéristiques de ce canal et de réduire ainsi la complexité des techniques d'égalisation et de détection à la réception et/ou d'améliorer l'efficacité spectrale. Cette connaissance peut être utilisée pour effectuer une opération de « diagonalisation » du canal, en transmettant l'information sur les fonctions singulières de  $\mathbb{H}$ , et/ou pour allouer les ressources (comme la puissance par exemple) de façon optimale. L'envoi d'information sur des classes de canaux qui ont une structure « singulière » commune peut se faire en garantissant une absence d'interférence à la réception et peut permettre ainsi la récupération des données transmises par des algorithmes simples. Ainsi, l'OFDM (avec un choix approprié de l'intervalle de garde) diagonalise exactement la classe des canaux invariants dans le temps et les modulations mono-porteuses la classe des canaux non sélectifs en fréquence.

Pour les canaux doublements sélectifs et dans un contexte ASM, la diagonalisation est plus délicate car  $\mathbb{H}$  est aléatoire et l'émetteur ne peut pas connaître la réalisation courante du canal dans la plupart des cas pratiques. La faible vitesse de propagation des ondes acoustiques couplée avec la fluctuation rapide du canal implique, en effet, que l'information sur l'état du canal (CSI) n'est plus d'actualité lorsqu'elle arrive à l'émetteur par le biais d'un lien de retour. Cependant, l'émetteur peut obtenir une information sur les statistiques du canal qui, elles, fluctuent beaucoup plus lentement (cf. chapitre 3). Du fait du caractère aléatoire du canal, il est aussi fortement probable que sa structure singulière soit elle aussi aléatoire, de sorte que la conception du récepteur et de l'émetteur doit se faire conjointement pour un ensemble de canaux qui présentent des structures singulières différentes. La diagonalisation du canal ne peut alors se faire que de façon approchée ou « moyenne » de sorte que l'interférence est inéluctable. Le tout consiste alors à optimiser cette diagonalisation moyenne suivant un critère qui va dépendre du compromis robustesse-efficacité spectrale le mieux adapté à l'application considérée.

Le choix de la base de fonctions qui peut permettre de diagonaliser le canal de façon approchée est fortement orienté par les contraintes contradictoires imposées par la dispersion temporelle et fréquentielle. Le caractère doublement dispersif des canaux ASM suggère d'utiliser un schéma de signalisation dont le support temps-fréquence est adapté aux caractéristiques de ceux-ci. C'est le cas par exemple des bases de Gabor ou Weyl-Heisenberg [Kozek, 1997] qui sont générées à partir d'une fonction prototype décalée en temps d'une durée  $T$  et d'une fréquence  $F$ . Ces bases offrent une souplesse de conception car elles permettent à la fois d'optimiser la fonction prototype ainsi que la grille temps-fréquence  $T \times F$ .

Après les calculs de capacité du chapitre 4, nous nous intéressons au chapitre 5 à la notion de diagonalisation du canal et aux caractéristiques des bases de Weyl-Heisenberg. Nous discutons des opportunités offertes par les bases de Weyl-Heisenberg pour optimiser la robustesse des systèmes de communications et étudions des techniques d'allocation de puissance permettant de maximiser le taux d'information.



---

## Sur la capacité du canal acoustique sous-marin

*« Sachons donc borner notre ambition : c'est un funeste délire que de soupirer après ce qu'on ne peut atteindre. »*

Pindare

La capacité du canal de transmission acoustique sous-marin est abordée dans ce chapitre en considérant un maximum de contraintes réalistes. Le canal est ici supposé doublement dispersif, les puissances crêtes et moyennes limitées et la réalisation courante du canal inconnue de l'émetteur et du récepteur (contexte non-cohérent). La capacité exacte du canal sous de telles hypothèses reste encore inconnue. Par conséquent, des bornes supérieures et inférieures de cette capacité sont proposées puis numériquement évaluées et discutées sur un canal ASM réel. Il est montré que la mise en œuvre de systèmes de communications offrant une efficacité spectrale deux ou trois fois supérieure à l'état de l'art apparaît comme un objectif raisonnable pour les canaux ASM petit-fond typiques avec un SNR de 15 à 20 dB. De plus, pour une puissance moyenne de transmission fixée, il est également montré que des systèmes autorisant des rapports puissance crête sur puissance moyenne importants sont fortement souhaitables.

### 4.1 Sur la capacité non-cohérente

Comme discuté dans [Biglieri et al., 1998; Goldsmith, 2005], la capacité d'un canal aléatoire variant dans le temps est conditionnée par le degré de connaissance du canal (CSI pour « channel state information ») à l'émetteur et au récepteur. Le cas le plus favorable pour la capacité correspond à la situation où la connaissance de chaque réalisation courante du canal est disponible à l'émetteur et au récepteur. Dans ce cas, l'émetteur a la possibilité d'adapter sa puissance de transmission instantanée ainsi que le débit (au travers du codage et de la forme d'onde choisie) à l'état courant du canal. Un autre cas favorable est lorsque la réalisation courante du canal est disponible à la réception uniquement. Dans notre contexte ASM ces hypothèses sont optimistes. En effet, la connaissance du canal à la réception est généralement acquise en allouant une partie des ressources disponibles pour l'estimation de canal. Par exemple, des symboles pilotes peuvent être incorporés dans le flux de données pour aider le récepteur dans le processus d'estimation de canal. Du point de vue de la théorie de l'information, l'estimation de canal à base de pilotes n'est qu'un cas particulier de codage. Ainsi, le débit atteignable avec des schémas à base de séquences d'entraînement ne peut excéder la capacité en l'absence de CSI à l'émetteur et au récepteur. Ceci est aussi valable pour les récepteurs qui acquièrent le CSI par des méthodes aveugles d'estimation de canal. Celles-ci induisent une perte de

SNR, imputable aux erreurs d'estimation, qui dégrade la capacité par rapport au cas idéal de connaissance parfaite du CSI.

Par la suite, nous désignons par *non-cohérente* la configuration où la réalisation courante du canal n'est disponible ni à l'émission ni la réception, mais où les statistiques du canal sont connues [Sethuraman and Hajek, 2005; Durisi et al., 2010]. Ceci, par opposition à la configuration *cohérente* où un génie fournit au récepteur un CSI parfait.

Malgré les efforts qui ont été fournis dans la littérature pour étudier les canaux dispersifs non-cohérents, aucune expression explicite de leur capacité n'est connue à ce jour, même pour les canaux simples. La plupart des résultats disponibles calculent soit la capacité dans des régimes asymptotiques (bande passante infinie, valeurs extrêmes de SNR) et/ou fournissent des bornes de celle-ci, et ce, pour diverses hypothèses relatives à la puissance crête et à la sélectivité du canal. Les premières contributions sur la capacité non-cohérente se concentrent sur les canaux à évanouissement plat sans mémoire et sans contrainte sur la puissance crête [Gallager, 1968; Richters, 1967; Faycal et al., 2001]. Plus récemment, une puissance crête finie est considérée dans [Gursoy et al., 2005] pour des canaux de Rice mono-trajet variant dans le temps mais sans mémoire temporelle. Des bornes de capacité non-cohérente sous contrainte de puissance crête finie ont aussi été proposées dans [Sethuraman and Hajek, 2005] pour des canaux mono-trajets mais avec mémoire temporelle et dans [Sethuraman et al., 2009; Durisi et al., 2010] pour des canaux doublement dispersifs.

Les travaux présentés dans [Sethuraman et al., 2009] et [Durisi et al., 2010] sont étroitement liés à ce chapitre car ils intègrent à la fois de la mémoire temporelle et fréquentielle dans leur modèle de canal et bornent les puissances moyenne et crête. Pour obtenir leurs bornes de capacité, les auteurs dans [Sethuraman et al., 2009] et [Durisi et al., 2010] partitionnent le canal doublement dispersif en sous-bandes fréquentielles de telle sorte que le canal soit non sélectif en fréquence, mais variant dans le temps, au sein de chaque sous-bande. La contrainte de puissance crête est alors appliquée soit sur chaque slot temps-fréquence du signal d'entrée ou soit sur la représentation temporelle globale de ce signal<sup>1</sup>. Les limitations de puissance crête dans le domaine temps-fréquence modélisent principalement les contraintes imposées par les organismes de réglementation des ressources physiques et s'appliquent par exemple aux systèmes radio-fréquence tels que l'UWB. La limitation de puissance crête dans le domaine temporel uniquement correspond, quant à elle, aux contraintes imposées par les appareils électroniques tels que les amplificateurs de puissance et, dans notre cas, imposées aussi par les sources acoustiques.

Contrairement au spectre radio-électrique, l'utilisation du spectre acoustique sous-marin n'est pas réglementée. Par conséquent, seules les contraintes sur la représentation temporelle du signal transmis s'appliquent dans notre contexte. Malgré leur pertinence, les bornes de capacité non-cohérente sous contrainte temporelle de puissance crête finie présentées dans [Sethuraman et al., 2009] et [Durisi et al., 2010] ne sont pas directement applicables au canal ASM. En effet, elles considèrent soit des signaux de bande infinie soit un régime de faible SNR et s'intéressent uniquement aux canaux de Rayleigh. Le tra-

---

1. On notera qu'une puissance crête finie dans le domaine temps-fréquence n'implique pas nécessairement une puissance crête finie dans le domaine temporel seul.

vail que nous présentons dans ce chapitre n'impose pas de restrictions particulières sur la bande et le SNR et, en cohérence avec les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3, s'applique aux canaux de Rice qui incluent les canaux de Rayleigh comme cas particulier.

## 4.2 Modèle de transmission

Soit  $\mathbf{x} = [x(0), \dots, x(N-1)]^T$  le vecteur d'entrée du canal discret équivalent en bande de base dont les composantes sont supposées indépendantes et identiquement distribuées<sup>2</sup> (i.i.d.) et soumises aux contraintes suivantes, quel que soit  $k \in \{0, N-1\}$ ,

$$|x(k)|^2 \leq \Omega_x^2, \quad (4.1)$$

$$\mathbb{E}\{|x(k)|^2\} = \sigma_x^2 \leq \frac{\Omega_x^2}{\beta}, \beta \geq 1, \quad (4.2)$$

où  $\Omega_x^2$  désigne la puissance crête et où  $\beta$  représente le rapport minimal entre la puissance crête et la puissance moyenne toléré par le système. La contrainte (4.1) sur la puissance crête, avec  $\Omega_x^2 < +\infty$ , s'applique quel que soit le système de communication ASM considéré du fait des limites physiques des composants électroniques ou acoustiques de la chaîne de transmission. La contrainte (4.2) sur la puissance moyenne est principalement significative pour les émetteurs alimentés par des batteries pour lesquelles l'énergie est une ressource limitée. Dans ce cas,  $\beta$  est strictement supérieur à 1. Il peut aussi y avoir des scénarios où les transducteurs acoustiques imposent un fort  $\beta$  pour limiter leur surchauffe. C'est le cas lorsque de long messages doivent être transmis sur de longues périodes par exemple. Cependant, lorsque la puissance d'émission est essentiellement limitée par le coût et le volume des amplificateurs, la contrainte est principalement sur la puissance crête de telle sorte que  $\beta$  est proche de 1.

La sortie du canal est donnée par la relation

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{w}$  désigne le vecteur bruit et  $\mathbf{H}$  est une matrice aléatoire  $N \times N$  gaussienne et propre définie comme

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_0(0) & & & & & & \\ h_1(1) & h_0(1) & & & & & \\ \vdots & & & & \mathbf{0} & & \\ h_{L-1}(L-1) & & & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & & & & \\ & & & h_{L-1}(N-1) & \dots & h_0(N-1) & \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

2. En raison de la mémoire temporelle du canal, une plus grande capacité de canal pourrait vraisemblablement être obtenue si la distribution des symboles d'entrée n'était pas limitée aux distributions i.i.d.. Néanmoins, la prise en compte de la corrélation entre symboles d'entrée dans le calcul de la capacité cohérente conduit à un problème difficilement soluble. Par conséquent, nous nous focalisons uniquement sur des entrées i.i.d. et utilisons le terme de capacité de façon légèrement abusive.

Nous rappelons que  $h_l(k)$  désigne le gain complexe du  $l$ -ième trajet du canal discret équivalent en bande de base à l'instant  $k$ , avec  $l \in \{0, L-1\}$  et  $k \in \{0, N-1\}$ . En fonction du contexte, il peut être aussi utile d'écrire (4.3) comme

$$\mathbf{y} = \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{h}_l \odot \mathbf{x}_{|l} + \mathbf{w} \quad (4.5)$$

où  $\mathbf{h}_l$  est le vecteur  $N \times 1$  correspondant au  $l$ -ième trajet, i.e.,  $\mathbf{h}_l = [h_l(0), h_l(1), \dots, h_l(N-1)]^T$  et où  $\mathbf{x}_{|l}$  désigne le vecteur  $\mathbf{x}$  dont les  $N-l$  premiers éléments ont été décalés  $l$  fois vers le bas et où les  $l$  premiers sont ensuite mis à zéros.

Les bornes de capacité que nous proposons dans ce chapitre reposent sur certaines hypothèses qui sont présentées et justifiées ci-après.

**Hypothèse 4.2.1** *Le canal de transmission est supposé ergodique.*

D'une manière générale un processus aléatoire est dit ergodique si les moyennes d'ensemble et les moyennes temporelles sont identiques. On parle de canal ergodique lorsque les gains complexes  $h_l(k)$  peuvent être modélisés par des processus aléatoires ergodiques. Dans ce cas, le caractère aléatoire du canal peut être moyenné dans le temps de sorte qu'un débit de transmission constant peut être supporté sur une longue durée (relativement aux périodes de fluctuation du canal). Du point de vue de la capacité, cette hypothèse d'ergodicité n'est valide que si chaque « mot de code » transmis visite toutes les réalisations du canal, autrement dit si le canal fluctue rapidement sur la durée d'un mot de code. Dans notre contexte ASM, ceci est le plus souvent vérifié car le temps de cohérence du canal n'est que de l'ordre de quelques centaines de milli-secondes [Radosevic et al., 2009; Socheleau et al., 2009] ce qui correspond à la durée de quelques centaines ou milliers de bits étant donné les bandes passantes utilisées. De plus, les latences de traitement induites par l'utilisation de mots de code longs ne sont pas pénalisantes pour les systèmes de communications ASM car elles sont généralement inférieures aux délais de propagation de l'onde acoustique. Par conséquent, si un mot de code visite toutes les réalisations du canal, alors la capacité au sens de Shannon existe et vaut la capacité ergodique.

**Hypothèse 4.2.2** *Le canal de transmission vérifie l'hypothèse WSSUS.*

Comme indiqué à la section 1.3.2, cette hypothèse implique tout d'abord que le canal soit stationnaire au sens large. Comme nous avons pu le montrer dans le chapitre 3, ceci n'est pas vérifié dans tous les cas puisque la composante moyenne du canal peut fluctuer au cours du temps. Cependant, dans notre contexte où, comme discuté précédemment, on s'intéresse à la capacité ergodique, l'hypothèse de stationnarité au sens large n'est pas absurde et peut se justifier comme suit :

- comme montré dans le chapitre 3, conditionnellement aux fluctuations long terme ou « tendances » du canal représentées par le terme  $d_l(k)$  dans (3.4), le canal est stationnaire au sens large,
- le temps de cohérence des fluctuations rapides du canal est très inférieur aux périodes de fluctuations lentes (quelques centaines de milli-secondes vs quelques secondes voire dizaines ou centaines de secondes). Autrement dit, sur la durée d'un mot de code, le canal peut être considéré comme stationnaire au sens large.

L'hypothèse de diffuseurs décorrélés est plus difficile à justifier et constitue une limitation de nos travaux. Dans la mesure où le canal de propagation physique vérifie cette hypothèse, le canal discret équivalent en bande de base peut aussi vérifier celle-ci si le canal de transmission est suffisamment sur-échantillonné (cf. section 1.3.4). Cependant, si le canal de propagation présente des trajets fortement corrélés, les résultats que nous présentons dans ce chapitre ne s'appliquent plus.

**Hypothèse 4.2.3** *Le bruit est supposé blanc et gaussien et vérifie  $\mathbf{w} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_w^2 \mathbf{I}_N)$ .*

Cette hypothèse est invoquée principalement pour des questions de lisibilité des résultats que nous allons présenter et n'est pas une nécessité. Les résultats de la section 4.3 peuvent être généralisés au cas où le bruit ambiant ASM est coloré.

A partir de l'hypothèse 4.2.2, le canal satisfait les relations suivantes

$$\mathbb{E}\{\mathbf{h}_l\} = \bar{h}_l \cdot \mathbf{1}_N \triangleq \bar{\mathbf{h}}_l \quad (4.6)$$

$$\mathbb{E}\{(\mathbf{h}_l - \bar{\mathbf{h}}_l)(\mathbf{h}_p - \bar{\mathbf{h}}_p)^\dagger\} \triangleq \mathbf{R}_H(l) \cdot \delta(l - p) \quad (4.7)$$

où  $\bar{h}_l$  et  $\mathbf{R}_H(l)$  sont respectivement la moyenne et la matrice de covariance du  $l$ -ième trajet. Nous désignons par  $\sigma_h^2(l)$  les éléments de la diagonale principale de  $\mathbf{R}_H(l)$  et

$$\Xi_H^2 \triangleq \sum_{l=0}^{L-1} \sigma_h^2(l) \quad (4.8)$$

$$\Psi_H^2 \triangleq \sum_{l=0}^{L-1} |\bar{h}_l|^2 = \int_{-1/2}^{1/2} |\psi_H(\theta)|^2 d\theta, \quad (4.9)$$

où  $\psi_H(\theta)$  est la transformée discrète de la composante moyenne de la réponse impulsionnelle, i.e.,  $\psi_H(\theta) = \sum_l \bar{h}_l e^{-2j\pi l\theta}$ .  $\mathbf{R}_H$  est une matrice  $N \times N$  qui représente la somme sur tous les trajets de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_H(l)$ , i.e.  $\mathbf{R}_H \triangleq \sum_l \mathbf{R}_H(l)$ , et  $\check{\mathbf{S}}_H(\nu)$  est le spectre Doppler du canal obtenu par la relation suivante

$$\check{\mathbf{S}}_H(\nu) = \frac{1}{\Xi_H^2} \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{R}_H]_{k,1} e^{-2j\pi k\nu/N}, \quad (4.10)$$

où  $[\mathbf{R}_H]_{k,1}$  désigne le  $k$ -ième élément de la première colonne de  $\mathbf{R}_H$ .

Le rapport signal crête sur bruit est défini comme

$$\text{SNR}_{\text{peak}} \triangleq \Omega_x^2 \frac{\Psi_H^2 + \Xi_H^2}{\sigma_w^2}, \quad (4.11)$$

et le SNR moyen maximum comme

$$\text{SNR}_{\text{av}}^{\text{max}} \triangleq \frac{1}{\beta} \text{SNR}_{\text{peak}}. \quad (4.12)$$

Le facteur de Rice du  $l$ -ième trajet s'écrit

$$K_l \triangleq \frac{|\bar{h}_l|^2}{\sigma_h^2(l)}. \quad (4.13)$$



## 4.3 Bornes de capacité

### 4.3.1 Définition de la capacité non-cohérente

Soit  $\mathcal{F}_x$  l'ensemble des fonctions de répartition pour lesquelles  $\mathbf{x}$  vérifie la contrainte sur la puissance crête (4.1) et sur la puissance moyenne (4.2). La capacité non-cohérente du canal (4.3) s'exprime comme [Sethuraman and Hajek, 2005]

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sup_{f_{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_x} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \quad (4.14)$$

où  $I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) = h_{\mathbb{E}}(\mathbf{y}) - h_{\mathbb{E}}(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  est l'information mutuelle entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{x}$  avec  $h_{\mathbb{E}}(\mathbf{y})$  l'entropie différentielle de  $\mathbf{y}$ .

Comme discuté à la section 4.1, la capacité non-cohérente est particulièrement difficile à caractériser analytiquement. Par conséquent, dans la suite de ce chapitre nous présentons uniquement des bornes sur la capacité  $C$ .

### 4.3.2 Bornes supérieures

Avant de fournir une borne supérieure qui tient compte explicitement du caractère doublement dispersif du canal ainsi que de la contrainte de puissance crête sur les données d'entrée, notons tout d'abord qu'en appliquant la règle de la chaîne sur l'information mutuelle, une borne assez intuitive peut être dérivée. Cette première borne supérieure, donnée par le théorème 4.3.1, correspond à l'hypothèse idéale où le récepteur connaît chaque réalisation du canal et où les symboles d'entrée ne sont pas contraints en puissance crête.

**Théorème 4.3.1** *La capacité non-cohérente du canal (4.3) avec des entrées i.i.d. satisfaisant la contrainte sur la puissance crête (4.1) et sur la puissance moyenne (4.2) est majorée par la capacité cohérente  $C^{\text{coh}}$ , où*

$$C^{\text{coh}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\Omega_x^2}{\beta \sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right\}. \quad (4.15)$$

#### Preuve

Notons tout d'abord que

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \stackrel{(a)}{=} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H}) - I(\mathbf{x}; \mathbf{H}|\mathbf{y}) \stackrel{(b)}{\leq} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H})$$

où (a) découle de la règle en chaîne [Medard, 2000, pp. 937-938] et la dépendance mutuelle entre  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{x}$ , et (b) vient du fait que  $I(\mathbf{x}; \mathbf{H}|\mathbf{y}) \geq 0$ , l'information mutuelle étant toujours non-négative. Dès lors,

$$C \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sup_{f_{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}_x} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H})$$

avec  $I(\mathbf{y}; \mathbf{x} | \mathbf{H}) = h_E(\mathbf{y} | \mathbf{H}) - h_E(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{H})$ . En appliquant [Cover and Thomas, 1991, Théorème 17.2.3] et en remarquant que  $\mathbb{E}\{\mathbf{y}\mathbf{y}^\dagger | \mathbf{H}\} = \sigma_x^2 \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \sigma_w^2 \mathbf{I}_N$  avec  $\sigma_x^2 \leq \Omega_x^2 / \beta$ , nous obtenons

$$h_E(\mathbf{y} | \mathbf{H}) \leq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \pi e \left( \frac{\Omega_x^2}{\beta} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \sigma_w^2 \mathbf{I}_N \right) \right) \right\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N.$$

De plus, conditionnellement à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{y}$  est un vecteur complexe gaussien de matrice de covariance  $\sigma_w^2 \mathbf{I}_N$ . Par conséquent,  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} I(\mathbf{y}; \mathbf{x} | \mathbf{H}) &\leq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \pi e \left( \frac{\Omega_x^2}{\beta} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger + \sigma_w^2 \mathbf{I}_N \right) \right) \right\} - N \log(\pi e \sigma_w^2) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{\Omega_x^2}{\beta \sigma_w^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \right) \right\}. \end{aligned}$$

■

On notera que  $C^{\text{coh}}$  correspond à la capacité cohérente<sup>3</sup> du canal  $\mathbf{H}$  sans restriction sur la puissance crête et avec un SNR moyen égal à  $\text{SNR}_{\text{av}}^{\text{max}}$ . En plus de son attrait intuitif, il est montré dans la section 4.4 que cette borne s'avère très utile pour certains canaux de Rice.

Afin de caractériser davantage la capacité (4.14), une nouvelle borne supérieure qui intègre la contrainte de puissance crête ainsi que la sélectivité temps-fréquence du canal est proposée dans le théorème 4.3.2. Cette borne, faisant explicitement apparaître le spectre Doppler du canal, repose sur de récents résultats obtenus dans [Sethuraman and Hajek, 2005; Sethuraman et al., 2009] et [Durisi et al., 2010].

**Théorème 4.3.2** *La capacité non-cohérente du canal (4.3) avec des entrées i.i.d. satisfaisant la contrainte sur la puissance crête (4.1) et sur la puissance moyenne (4.2) est majorée par  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$ , où*

$$\begin{aligned} U_{\text{peak}}^{\text{DS}} &= \max_{0 \leq \alpha \leq 1} \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\alpha \Omega_x^2}{\beta \sigma_w^2} (\Xi_H^2 + |\psi_H(\theta)|^2) \right) d\theta \\ &\quad - \frac{\alpha}{\beta} \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\Omega_x^2 \Xi_H^2}{\sigma_w^2} \check{\mathbf{S}}_H(\nu) \right) d\nu \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Preuve

La première étape de la démonstration consiste à remarquer que le terme  $h_E(\mathbf{y})$  de l'équation (4.14) peut être majoré par l'entropie différentielle d'un vecteur complexe gaussien  $\tilde{\mathbf{y}}$  de même matrice de covariance que  $\mathbf{y}$  (voir [Cover and Thomas, 1991, Théorème 17.2.3]). Ainsi,  $h_E(\mathbf{y}) \leq \log \det(\pi e \Gamma_{\mathbf{y}})$ , où  $\Gamma_{\mathbf{y}}$  est la matrice de covariance de  $\mathbf{y}$ . De plus, conditionnellement au vecteur d'entrée  $\mathbf{x}$ , la sortie du canal  $\mathbf{y}$  est gaussienne de covariance  $\Gamma_{\mathbf{y} | \mathbf{x}}$ . Par conséquent, la capacité vérifie

$$C \leq \sup_{p_{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_{\mathbf{x}}} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} (\log \det \Gamma_{\mathbf{y}} - \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \{ \log \det \Gamma_{\mathbf{y} | \mathbf{x}} \}). \quad (4.17)$$

3. A notre connaissance, aucune expression analytique n'est connue pour l'expression de la capacité non-cohérente pour les canaux de Rice doublement sélectifs. Cependant, (4.15) peut facilement être évaluée par des méthodes numériques de type Monte-Carlo.

La deuxième étape consiste à calculer les deux matrices de covariance  $\Gamma_y$  et  $\Gamma_{y|x}$  et à substituer leur logdet dans (4.17). A partir des résultats obtenus dans l'annexe C, on obtient

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_y = \log \sigma_w^2 + \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} (\Xi_H^2 + |\psi_H(\theta)|^2) \right) d\theta$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{y|x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \log \sigma_w^2 + \frac{1}{N} \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right).$$

Par conséquent,

$$C \leq \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} (\Xi_H^2 + |\psi_H(\theta)|^2) \right) d\theta - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_x \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right) \right\}. \quad (4.18)$$

Finalement, la troisième étape consiste à minorer le second terme de (4.18) comme

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_x \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right) d f_{\mathbf{x}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right)}{\|\mathbf{x}\|^2} \|\mathbf{x}\|^2 d f_{\mathbf{x}} \\ &\geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_{\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{X}} \left( \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right)}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2 d f_{\mathbf{x}} \quad (4.19) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left( \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \frac{\log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right)}{\|\mathbf{x}\|^2} \right) \underbrace{\mathbb{E} \{ \|\mathbf{x}\|^2 \}}_{=\sigma_x^2}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N : |x(k)|^2 \leq \Omega_x^2, \forall k\}$  est le domaine d'intégration de  $\mathbf{x}$  soumis à la contrainte de puissance crête. L'inégalité (4.19) s'explique par le fait que les termes sous l'intégrale sont non-négatifs et que par conséquent une borne inférieure de l'espérance peut être obtenue en remplaçant le premier terme par son infimum sur  $\mathcal{X}$ . Comme  $\mathbf{R}_H$  est une matrice définie positive, l'infimum est obtenu pour un vecteur  $\mathbf{x}$  dont les entrées satisfont  $|x(k)|^2 \in \{0, \Omega_x^2\}$  [Sethuraman and Hajek, 2005, Sec. VI-A]. A partir de ce résultat, nous appliquons ensuite [Durisi et al., 2010, lemme 11, pp. 383], tel que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_x \left\{ \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right) \right\} \geq \frac{\sigma_x^2}{\Omega_x^2} \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\Omega_x^2 \Xi_H^2}{\sigma_w^2} \check{\mathbf{S}}_H(\nu) \right) d\nu.$$

Le théorème 4.3.2 est ensuite obtenu en notant que  $0 \leq \sigma_x^2 \leq \Omega_x^2 / \beta$  et en posant  $\alpha = \frac{\sigma_x^2}{\Omega_x^2}$ . ■

A ce stade, quelques commentaires sont nécessaires. Premièrement, on peut noter que  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  est la différence de deux termes :

- Le premier terme est équivalent à la capacité ergodique d'un canal invariant dans le temps dont la réponse en fréquence correspond à la réponse en fréquence moyenne du canal  $\mathbf{H}$  (i.e,  $\mathbb{E}_n \left\{ \left| \sum_k h_{n,k} e^{-2j\pi k\theta} \right|^2 \right\} = \Xi_H^2 + |\psi_H(\theta)|^2$ ).
- Le second terme, qui correspond à une pénalité, exprime la perte de capacité induite par l'absence de CSI à la réception. Ce terme prend en compte les fluctuations temporelles du canal au travers du spectre Doppler.

La seconde remarque concerne le paramètre  $\alpha$  qui est défini par le rapport entre la puissance moyenne et la puissance crête. Les situations où  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  est maximisé pour  $\alpha$  plus petit que 1 correspondent aux cas où il est avantageux de transmettre l'information avec une puissance moyenne plus faible que le maximum autorisé et par conséquent de favoriser l'amplitude des symboles d'information pour transmettre l'information. De telles situations surviennent par exemple à fort SNR (voir la section 4.4) ou lorsque le canal fluctue trop rapidement pour utiliser des modulations à module constant (le suivi de la phase devient trop difficile).

### 4.3.3 Borne inférieure

En utilisant une généralisation de l'inégalité de puissance d'entropie donnée dans [Zamir and Feder, 1993], une borne inférieure de la capacité non-cohérente peut être obtenue.

**Théorème 4.3.3** *La capacité non-cohérente du canal (4.3) avec des entrées i.i.d. satisfaisant la contrainte sur la puissance crête (4.1) et sur la puissance moyenne (4.2) est minorée par  $L_{\text{peak}}^{\text{DS}}$ , où*

$$L_{\text{peak}}^{\text{DS}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( I_N + \lambda \frac{\Omega_x^2}{\beta \sigma_w^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^\dagger \right) \right\} - \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\Omega_x^2 \Xi_H^2}{\beta \sigma_w^2} \check{\mathbf{S}}_H(v) \right) dv \quad (4.20)$$

et  $\lambda$  est un facteur de pondération d'expression

$$\lambda = \begin{cases} 2\beta/(\pi e), & \text{si } 1 \leq \beta \leq 3 \\ e^{\gamma \Omega_x^2 / \beta} \beta / (\pi e K^2 \Omega_x^2), & \text{si } \beta > 3, \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $K$  et  $\gamma$  sont les solutions du système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} K e^{-\gamma u^2} du &= 1, \\ \int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} u^2 K e^{-\gamma u^2} du &= \frac{\Omega_x^2}{2\beta}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

qui peut être résolu numériquement.

**Preuve**

Le point de départ de la démonstration du théorème 4.3.3 est une inégalité sur l'information mutuelle communément utilisée [Deng and Haimovich, 2004; Sethuraman and Hajek, 2005] :

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}) \geq I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H}) - I(\mathbf{y}; \mathbf{H}|\mathbf{x}). \quad (4.23)$$

Le calcul de  $I(\mathbf{y}; \mathbf{H}|\mathbf{x}) = h_E(\mathbf{y}|\mathbf{x}) - h_E(\mathbf{y}|\mathbf{x}, \mathbf{H})$  est assez direct car

- conditionnellement à  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  est distribué suivant une loi gaussienne avec une matrice de covariance égale à  $\sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbf{x} \mathbf{R}_H \mathbf{x}^\dagger$ ,
- conditionnellement à  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{y}$  est aussi gaussien avec une matrice de covariance égale à  $\sigma_w^2 \mathbf{I}_N$ .

En appliquant l'inégalité de Jensen, on obtient  $I(\mathbf{y}; \mathbf{H}|\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}} \{ \log \det(\mathbf{I}_N + \mathbf{x} \mathbf{R}_H \mathbf{x}^\dagger) \} \leq \log \det(\mathbf{I}_N + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H) \leq \log \det(\mathbf{I}_N + \frac{\Omega_x^2}{\beta \sigma_w^2} \mathbf{R}_H)$ . De plus,  $\mathbf{R}_H$  étant une matrice de Toeplitz, en appliquant le théorème de Szegö [Gray, 2006], il vient pour  $N \rightarrow \infty$  que la capacité du canal peut être minorée comme

$$C \geq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H}) - \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\Omega_x^2 \Xi_H^2}{\beta \sigma_w^2} \check{\mathbf{S}}_H(\nu) \right) d\nu, \forall \mathbf{x} \text{ satisfaisant (4.1) et (4.2)}. \quad (4.24)$$

Le calcul du premier terme n'est pas aussi aisé. Cependant, ce terme peut être minoré en invoquant le lemme de généralisation de l'inégalité de puissance d'entropie [Zamir and Feder, 1993]. Le détail de la minoration du terme  $I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H})$  est donné à l'annexe D. ■

Comme la borne supérieure du théorème 4.3.2, la borne inférieure est aussi la différence entre deux termes. Le premier terme correspond à la capacité cohérente du canal sans limitation sur la puissance crête, comme présenté dans le théorème 4.3.1, mais avec une perte de SNR exprimée par le facteur  $\lambda$ . Le second terme est à nouveau une pénalité sur la capacité due à l'incertitude sur l'état du canal. On notera que pour  $\beta = 1$ , l'expression de  $\lambda$  se simplifie en  $\lambda = 2/(\pi e)$  ce qui correspond à une différence de 6.3 dB entre le premier terme de (4.20) et la borne supérieure donnée au théorème 4.3.1. Comme représenté sur la figure 4.1, cette différence diminue à mesure que la contrainte sur la puissance crête diminue, autrement dit à mesure que  $\beta$  augmente.

## 4.4 Illustrations

Pour illustrer l'intérêt des bornes de capacités détaillées dans la section précédente, nous allons maintenant évaluer celles-ci au travers de plusieurs scénarios. En utilisant un modèle de canal paramétrique, l'impact de divers paramètres sur la capacité sont discutés à la section 4.4.1. Les bornes de capacité appliquées à un canal ASM réel sont ensuite analysées à la section 4.4.2.

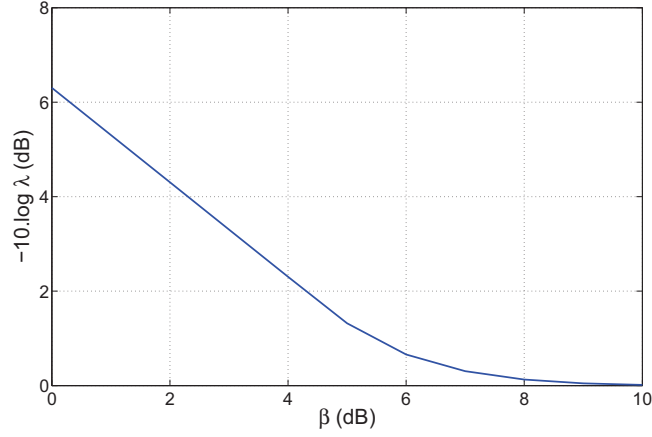


Figure 4.1 — Evolution de  $\lambda$  défini à l'équation (4.21) en fonction de la contrainte  $\beta$ .

#### 4.4.1 Evaluation des bornes de capacité sur canaux synthétiques

On suppose ici que le système de transmission est uniquement contraint par la puissance crête (i.e.,  $\beta = 0$  dB). Le canal de propagation simulé est un canal WSSUS discret doublement dispersif avec une fonction de diffusion de type « pavé droit », à savoir

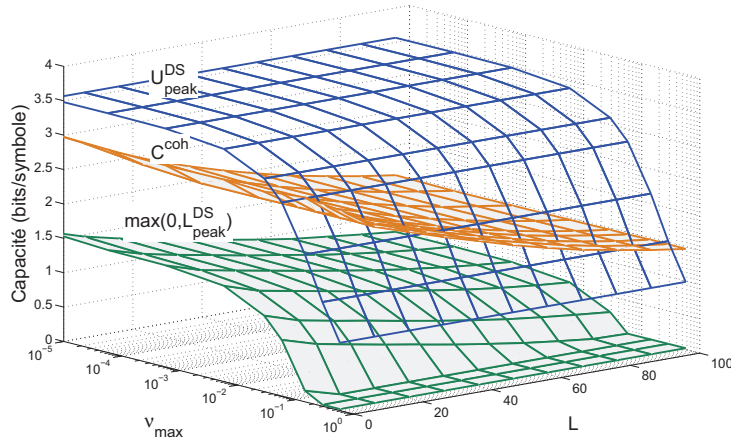
$$\mathbb{E}_k \{|h_l(k)|^2\} = \frac{1}{L}, \forall l \in \{0, \dots, L-1\} \text{ et } \check{S}_H(\nu) = \begin{cases} \frac{1}{2\nu_{\max}}, & \text{if } \frac{-1}{\nu_{\max}} \leq \nu \leq \frac{1}{\nu_{\max}} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\nu_{\max} \leq 1/2$  désigne l'étalement Doppler maximal.

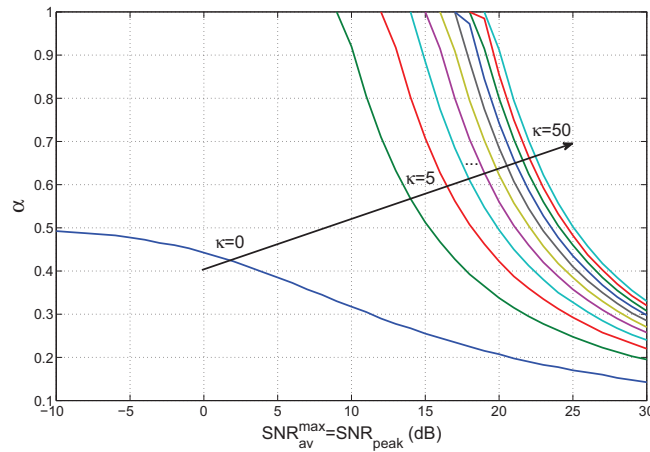
La figure 4.2 montre le comportement des bornes de capacité en fonction du nombre de trajets et de l'étalement Doppler. Le rapport signal sur bruit moyen est de 10 dB et un évanouissement de Rayleigh est considéré, i.e.,  $\kappa_l = 0, \forall l$ . Comme attendu, les deux bornes supérieures  $C^{\text{coh}}$  et  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  se comportent différemment et sont par conséquent complémentaires.  $C^{\text{coh}}$  est seulement impactée par la sélectivité fréquentielle du canal et décroît à mesure que le nombre de trajets augmente. Cette borne ne dépend pas de l'étalement Doppler car elle correspond au cas cohérent où le récepteur connaît chacune des réalisations du canal parfaitement.  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  s'avère surtout pertinente lorsque le canal fluctue de sorte que son taux d'entropie soit très important<sup>4</sup>. Dans ce cas, le terme de pénalité de (4.16) devient significatif et réduit drastiquement la capacité. Quant à la borne inférieure  $L_{\text{peak}}^{\text{DS}}$ , elle dépend de  $L$  au travers du premier terme de (4.20) et dépend de l'incertitude sur le canal, exprimé par  $\nu_{\max}$ , au travers du second terme.

Comme discuté dans la section 4.3.2,  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  peut fournir des directives sur la conception de systèmes de transmission. Plus précisément, au travers du paramètre  $\alpha$ ,  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  indique lorsqu'il est pertinent de porter de l'information sur l'amplitude du signal transmis. La figure 4.3 montre l'évolution de  $\alpha$  en fonction du SNR crête pour différents facteurs de Rice. Pour cette simulation, le canal est non sélectif en fréquence mais varie très rapidement dans le temps avec  $\nu_{\max} = 1/2$ . On peut noter que pour les forts SNR ou les faibles

4. On notera que pour un spectre Doppler rectangulaire le taux d'entropie du canal est une fonction croissante de  $\nu_{\max}$  (cf. Socheleau et al. [2010])



**Figure 4.2** — Bornes de capacité en fonction du nombre de trajets et de l'étalement Doppler du canal.  $\beta = 0$  dB,  $\text{SNR}_{\text{av}}^{\text{max}} = \text{SNR}_{\text{peak}} = 10$  dB et  $K_l = 0, \forall l > 0$ .



**Figure 4.3** — Rapport de puissance crête sur puissance moyenne  $\alpha$  optimal pour la borne  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  en fonction du SNR crête et du facteur de Rice  $K$  (canal mono-trajet,  $\beta = 0$  dB et  $v_{\text{max}} = 1/2$ ).

facteur de Rice,  $\alpha$  est strictement inférieur à 1. Dans ce cas, il est judicieux, d'après  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$ , de ne pas transmettre un signal de module constant égale à  $\Omega_x$ , mais plutôt de choisir un signal dont la puissance moyenne est choisie plus faible que le maximum autorisé.

#### 4.4.2 Evaluation des bornes de capacité sur un canal réel

Les bornes de capacité que nous avons proposées peuvent être évaluées numériquement sur des canaux réels grâce notamment aux outils mis en œuvre pour le rejou stochastique de canal. L'intérêt d'évaluer ces bornes sur canaux réels est de pouvoir comparer l'efficacité spectrale des systèmes actuels par rapport à ce qu'il est théoriquement pos-

sible d'atteindre et de connaître ainsi la marge de progression possible. Nous proposons ici d'estimer ces bornes sur le canal (b) de la figure 1.6 sondé en Méditerranée dans une bande 1 kHz. En utilisant l'algorithme présenté dans [Bello, 1965], la valeur quadratique moyenne de l'étalement Doppler est estimée à 1.2 Hz et la valeur quadratique moyenne de l'étalement des retards à 8 ms. Les paramètres  $\sigma_h^2(k)$  et  $\bar{h}_k$  des équations (4.8) et (4.9), nécessaires pour calculer les bornes, sont estimés en utilisant la décomposition modale empirique présentée au chapitre 3. Le spectre Doppler  $\check{S}_H(\nu)$  est obtenu en utilisant un périodogramme de Welch moyenné<sup>5</sup>.

Pour évaluer les bornes de capacité, nous étudions deux scénarios d'intérêt pratique pour les systèmes ASM. Le premier scénario correspond au cas où la puissance transmise est principalement limitée par le coût et le volume des amplificateurs, ce qui induit une contrainte forte sur la puissance crête ( $\beta = 0$  dB). Le second scénario décrit le cas où la contrainte est principalement sur la puissance moyenne à cause de problèmes de surchauffe des transducteurs ou de limitation d'énergie imposée aux systèmes sur batteries. Dans le cas de surchauffe des transducteurs, la puissance moyenne doit être au moins dix fois inférieure à la puissance crête, on choisit donc  $\beta = 10$  dB pour le second scénario.

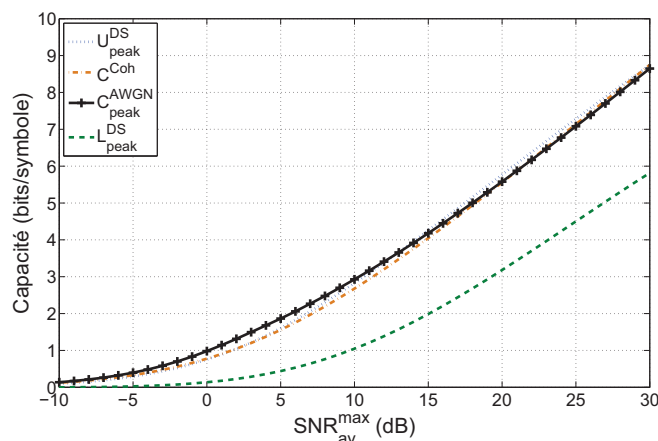
La figure 4.4 montre les diverses bornes de capacité appliquées au canal méditerranéen (b) de la figure 1.6 pour  $\beta = 0$  dB. A titre de référence, la capacité  $C_{\text{peak}}^{\text{AWGN}}$  d'un canal AWGN à puissance crête limitée est aussi tracée<sup>6</sup>. La première observation que l'on peut faire sur cette figure est que les deux bornes supérieures  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  et  $C^{\text{coh}}$  sont très similaires et très proches de  $C_{\text{peak}}^{\text{AWGN}}$ . Ceci peut s'expliquer par la nature « ricéenne » forte du canal. Une grande partie de l'énergie du canal repose sur quelques trajets avec un facteur de Rice important (par exemple, le facteur de Rice du trajet retardé de  $\tau = 10$  ms est approximativement 80). L'analyse de  $L_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  sur la figure 4.4 permet de conclure que pour les gammes de SNR de fonctionnement des modems ASM dits haut-débit (environ 15 à 20 dB), ce canal devrait permettre de communiquer avec une efficacité spectrale de 2 à 3 bits/sec/Hz. Ceci implique que pour les canaux similaires à celui considéré ici, il reste une marge significative d'augmentation du débit par rapport aux modems SISO actuels qui travaillent à environ 1 bit/sec/Hz [Li et al., 2008; Goalic et al., 2008b; Singer et al., 2009]. De la même manière, cela signifie qu'il devrait y avoir 5 à 10 dB de marge entre ce qui est implémenté à l'heure actuelle et la limite théorique ultime.

La figure 4.5 montre les bornes de capacité dans le second scénario où le système de transmission est principalement limité par la puissance moyenne. A titre de référence, la capacité  $C_{\text{av}}^{\text{AWGN}}$  d'un canal AWGN sans contrainte sur la puissance crête est aussi tracée. On peut observer que  $U_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  n'est pas très utile dans ce cas car l'étalement Doppler est relativement faible et  $\beta$  assez important. Il faut noter aussi que  $C^{\text{Coh}}$  et  $L_{\text{peak}}^{\text{DS}}$  sont très proches. Ceci signifie que tant que  $\beta$  est suffisamment grand et l'étalement Doppler relativement faible (inférieur à 2 Hz ici), la connaissance a priori de chaque réalisation du canal à la réception (contexte cohérent) n'apporte pas de gain significatif sur la capacité. Ceci est mis en évidence à la figure 4.6 où les bornes sont tracées en fonction du rap-

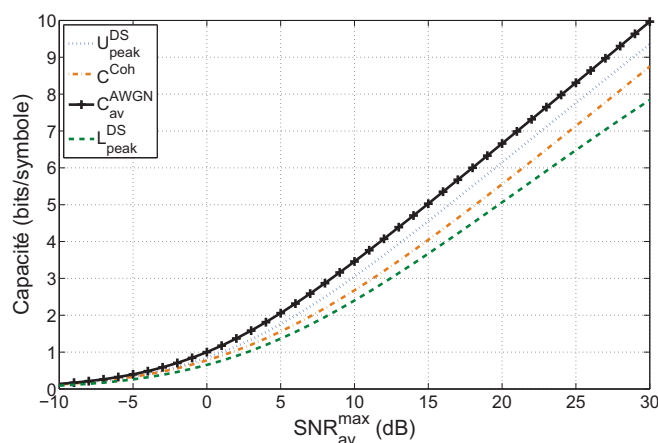
5. Les expérimentations ont montré que les calculs numériques de bornes de capacité effectués sur les canaux réels étaient très peu dépendants de la méthode d'estimation du spectre Doppler.

6. On notera que  $C_{\text{peak}}^{\text{AWGN}}$  a été étudiée dans [Shamai and Bar-David, 1995] où un algorithme numérique a été proposé pour calculer cette capacité.





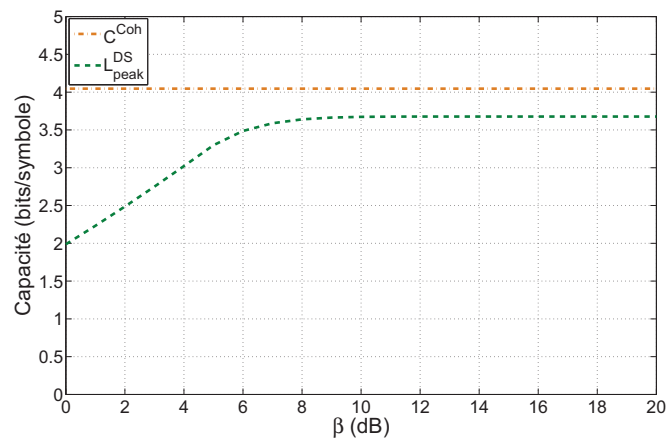
**Figure 4.4** — Bornes de capacité appliquées à un canal réel enregistré en Méditerranée en fonction du SNR moyen maximal,  $\beta = 0$  dB.



**Figure 4.5** — Bornes de capacité appliquées à un canal réel enregistré en Méditerranée en fonction du SNR moyen maximal,  $\beta = 10$  dB.

port de puissance crête sur puissance moyenne  $\beta$  et pour un SNR moyen de 15 dB. Tant que  $\beta \geq 8$  dB, une configuration non-cohérente est quasiment équivalente à une configuration cohérente et la perte de capacité induite par une limitation de la puissance crête devient négligeable.

Les mêmes analyses ont été menées pour tous les canaux des figures 1.6 et 1.7 et elles mènent aux mêmes conclusions. De plus, comme discuté dans [Passerieux et al., 2011], les bornes de capacité ne varient pas beaucoup d'un canal à l'autre et laissent penser que la contrainte sur la puissance crête est un facteur beaucoup plus limitant sur la capacité que l'étalement des retards ou l'étalement Doppler.



**Figure 4.6** — Bornes de capacité appliquées à un canal réel enregistré en Méditerranée en fonction du rapport puissance crête sur puissance moyenne minimal  $\beta$ ,  $\text{SNR}_{\text{av}}^{\text{max}} = 15$  dB.



# Sur l'optimisation du schéma de signalisation

« La puissance ne consiste pas à frapper fort ou souvent, mais à frapper juste »

Honoré de Balzac, Physiologie du mariage

De part son caractère doublement dispersif et sa limitation en bande passante, le milieu de propagation acoustique sous-marin (ASM) impose des contraintes fortes sur les notions très intriquées de robustesse et de débit qui définissent les performances des systèmes de communication. Comparativement aux approches mono-porteuses classiquement employées en ASM, le multiplexage de l'information à transmettre sur une grille temps-fréquence offre l'opportunité d'optimiser plus de degrés de liberté. Ce type d'approche favorise par exemple la robustesse des communications en permettant une diagonalisation approchée du canal qui permet de réduire la plage des interférences dues au caractère dispersif de celui-ci. Ce gain de robustesse se paie généralement par une perte d'efficacité spectrale liée à la faible densité de la grille temps-fréquence qui résulte de la limitation imposée par le théorème de Balian-Low. Dans ce chapitre, on discute des différents paramètres qu'il est possible d'optimiser pour chercher à contrer cette limitation. On s'intéresse plus précisément aux techniques d'optimisation de puissance, permettant d'améliorer le taux d'information, à partir d'une connaissance des statistiques du canal à l'émission. On montre notamment que cette optimisation s'avère bénéfique pour les systèmes essentiellement limités par leur puissance crête.

## 5.1 Structure singulière du canal et signalisation de Weyl-Heisenberg

### 5.1.1 Diagonalisation approchée

En considérant que  $\mathbb{H}$  est un opérateur compact sur un espace de Hilbert, il peut se représenter sous la forme

$$\mathbb{H} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle u_n, \cdot \rangle v_n(t), \quad (5.1)$$

où  $\{\lambda_n\}$  représente l'ensemble des valeurs singulières du canal et  $\{u_n(t)\}$  et  $\{v_n(t)\}$  ses fonctions singulières. En transmettant une information  $x_n$  dans le canal sous la forme  $s_n(t) = x_n u_n(t)$ , elle peut être facilement estimée à la réception en projetant la sortie du canal sur  $v_n(t)$  car  $\langle \mathbb{H}s_n, v_n \rangle = \lambda_n x_n$ . Dans ce cas, l'information reçue correspond à l'in-

formation transmise à un coefficient près<sup>1</sup> et aucune interférence n'est observée, simplifiant ainsi les algorithmes de réception. Le point critique ici est que l'émetteur doit connaître  $\{u_n(t)\}$  préalablement à la transmission. Ceci est difficilement envisageable dans un contexte ASM car en général, ces fonctions singulières dépendent explicitement de l'opérateur  $\mathbb{H}$  et varient ainsi d'une réalisation de canal à l'autre.

Cependant, au lieu d'exiger que  $\mathbb{H}u_n = \lambda_n v_n$ , on peut toujours chercher des fonctions  $g$  et  $\gamma$  telles que  $\mathbb{H}g - \lambda'\gamma$  soit petit dans un certain sens à définir. Par exemple, comme discuté dans [Kozek, 1997],  $\{\lambda', g, \gamma\}$  peut être définie comme une structure singulière approchée du canal avec une borne  $\epsilon$  si

$$\mathbb{E} \{ \|\mathbb{H}g - \lambda'\gamma\|^2 \} \leq \epsilon, \quad (5.2)$$

où  $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ . Comme nous allons le voir par la suite, cette structure approchée est utile pour la conception de schémas de signalisation car en choisissant  $g$  et  $\gamma$  qui garantissent un  $\epsilon$  faible, on restreint et contrôle la puissance moyenne de l'interférence observée à la réception.

### 5.1.2 Signalisation de Weyl-Heisenberg

Afin d'approcher la structure singulière du canal, nous considérons ici l'ensemble des fonctions de Weyl-Heisenberg (WH) qui multiplexent l'information en temps-fréquence et permettent une adaptation relativement souple au caractère doublement dispersif du canal. Ce schéma de signalisation, très général, intègre les modulations mono-porteuses linéaires et l'OFDM utilisées pour les communications haut-débit, comme cas particuliers. Nous désignons l'ensemble de WH utilisé à l'émission par

$$(g(t), T, F) \triangleq \left\{ g_{k,n}(t) = g(t - kT)e^{j2\pi nFt}, \|g\|^2 = 1 \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} \quad (5.3)$$

et celui de la réception par

$$(\gamma(t), T, F) \triangleq \left\{ \gamma_{k,n}(t) = \gamma(t - kT)e^{j2\pi nFt}, \|\gamma\|^2 = 1 \right\}_{k,n \in \mathbb{Z}} \quad (5.4)$$

où  $T, F > 0$  sont les paramètres de grille temps-fréquence du schéma de signalisation.

Le signal transmis équivalent en bande de base s'écrit

$$x(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{k,n} g_{k,n}(t), \quad (5.5)$$

où  $KT$  représente la durée (approximative) de transmission et  $N$  est choisi de sorte que  $NF \leq B$ , avec  $B$  la bande disponible. Ce schéma s'apparente à une transmission multiporteuse où  $N$  représente le nombre de sous-porteuses utilisées ( $N = 1$  correspondant aux modulations mono-porteuses linéaires).  $x_{k,n}$  désigne le symbole de donnée transmis au temps  $k$  et à la sous-porteuse  $n$ . On suppose que les  $x_{k,n}$  sont i.i.d, de moyenne nulle et de variance unitaire.

1. On ne considère pas le terme de bruit ici.

A la réception, le signal reçu  $y(t)$  est projeté sur l'ensemble  $\{\gamma_{k,n}(t)\}$ , tel que

$$y_{k,n} \stackrel{\Delta}{=} \langle y, \gamma_{k,n} \rangle = \langle \mathbb{H}x, \gamma_{k,n} \rangle + \underbrace{\langle w, \gamma_{k,n} \rangle}_{\stackrel{\Delta}{=} w_{k,n}} \quad (5.6)$$

où  $w(t)$  dénote le bruit additif.  $y_{k,n}$  peut se développer comme

$$y_{k,n} = \underbrace{\langle \mathbb{H}g_{k,n}, \gamma_{k,n} \rangle}_{\stackrel{\Delta}{=} h_{k,n}} x_{k,n} + \sum_{\substack{k'=0 \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{K-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \underbrace{\langle \mathbb{H}g_{k',n'}, \gamma_{k,n} \rangle}_{\stackrel{\Delta}{=} \rho_{k',n';k,n}} x_{k',n'} + w_{k,n}, \quad (5.7)$$

où le premier terme du côté droit de l'équation représente le signal utile alors que le second exprime l'interférence entre symboles et entre sous-porteuses.

Dans notre contexte, trois caractéristiques fondamentales des ensembles  $(g(t), T, F)$  et  $(\gamma(t), T, F)$  vont intervenir dans l'optimisation de notre système de communication.

- **(Bi)orthogonalité** : pour un canal idéal où  $y(t) = x(t)$ , la démodulation parfaite (i.e.,  $y_{k,n} = x_{k,n}$ ) est obtenue si et seulement si les fonctions  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  satisfont la condition de (bi)orthogonalité

$$\langle g_{k,n}, \gamma_{k',n'} \rangle = \delta(k - k') \delta(n - n'). \quad (5.8)$$

- **Localisation** temps-fréquence : la localisation temps-fréquence d'une fonction prototype  $g(t)$  caractérise l'étalement temps-fréquence de cette fonction et impacte directement la puissance de l'interférence à la réception. Elle est définie ci-dessous comme le produit d'un étalement en temps et d'un étalement en fréquence

$$\kappa = \int_t (t - \mu_{g(t)}) |g(t)|^2 dt \times \int_f (f - \mu_{G(f)}) |G(f)|^2 df, \quad (5.9)$$

où  $G(f)$  est la transformée de Fourier de  $g(t)$  et où  $\mu_{g(t)} = \int_t t g(t) dt$  et  $\mu_{G(f)} = \int_f f G(f) df$  sont respectivement les barycentres de  $g(t)$  et  $G(f)$ . Cette localisation  $\kappa$  est régie par le principe d'Heisenberg, tel que

$$\kappa \geq \frac{1}{4\pi}, \quad (5.10)$$

avec l'égalité pour les fonctions  $g(t)$  gaussiennes.

- **Complétude**<sup>2</sup> : la complétude de l'ensemble  $(g(t), T, F)$  dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  impacte directement l'efficacité spectrale du système de communication et dépend notamment de la densité  $1/TF$  de la grille temps-fréquence. Si  $(g(t), T, F)$  est incomplet dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , alors il existe des signaux  $x(t) \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  qui ne peuvent pas s'exprimer sous la forme (5.5) même lorsque  $K, L \rightarrow +\infty$ .

**Idéalement, on souhaiterait obtenir un système de transmission qui soit (bi)orthogonal avec des fonctions prototypes bien localisées et une densité  $1/TF$  de grille temps-fréquence la plus grande possible de sorte à maximiser l'efficacité spectrale.** Malheureusement, ces trois conditions ne peuvent pas être satisfaites simultanément à cause du théorème de Balian-Low [Christensen, 2003, Th. 4.1.1]. Plus précisément [Hlawatsch and Matz, 2011, Ch. 2] :

2. Un espace métrique  $\mathcal{M}$  est dit complet ou espace complet si toute suite de Cauchy de  $\mathcal{M}$  a une limite dans  $\mathcal{M}$  (c'est-à-dire qu'elle converge dans  $\mathcal{M}$ ) [Dieudonné, 1965].

- $TF \geq 1$  est une condition nécessaire pour que la condition de (bi)orthogonalité (5.8) soit vérifiée [Gröchenig, 2001, Cor. 7.5.1, Cor. 7.3.2].
- Pour  $TF = 1$ , il est possible de trouver des ensembles de WH qui soient (bi)orthogonaux et complets dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$  [Christensen, 2003, Th. 8.3.1]. Cependant, en conséquence du théorème de Balian-Low [Christensen, 2003, Th. 4.1.1], ces ensembles sont nécessairement mal localisés en temps-fréquence.
- Pour  $TF > 1$ , il est possible d'avoir simultanément des fonctions prototypes (bi)orthogonales et bien localisées en temps-fréquence. Cependant, dans ce cas l'ensemble  $(g(t), T, F)$  est nécessairement incomplet dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ , entraînant alors une perte d'efficacité spectrale.
- Pour  $TF < 1$ , il est possible de construire des ensembles de WH générés par des fonctions prototypes bien localisées qui soient aussi (sur-)complètes dans  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ . Cependant, en conséquence de la sur-complétude, l'information portée par le signal résultant de (5.5) ne peut pas être retrouvée de façon unique à la réception, même en l'absence de bruit. On exploite plus de degrés de liberté que ceux offerts par le canal.

### 5.1.3 Compromis interférence-efficacité spectrale

La discussion de la section précédente met en évidence la difficulté de trouver un compromis entre une interférence faible et une utilisation optimale des degrés de liberté offerts par le canal. Le dilemme interférence-efficacité spectrale se traduit dans la pratique au travers de la répartition, entre l'émetteur et le récepteur, de « l'intelligence » et de la complexité de la chaîne de transmission et notamment de la capacité du récepteur à traiter l'interférence. Si l'émetteur est intelligent et s'adapte aux conditions de propagation, il peut théoriquement permettre la mise en œuvre d'un récepteur plus simple et donc plus robuste, sans pour autant sacrifier le débit de transmission. Classiquement, les approches d'optimisation des ensembles de WH, telles que celles décrites dans [Kozek and Molisch, 1998; Matz et al., 2007; Haas and Belfiore, 1997; Liu et al., 2004], cherchent, pour  $TF$  fixé, les fonctions prototypes qui maximisent le rapport signal sur interférence (SIR). Pour mieux comprendre le compromis interférence-efficacité spectrale, nous proposons d'étudier ici les variations du SIR ainsi que de l'efficacité spectrale en fonction de  $TF$  pour des fonctions prototypes  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  fixées.

#### Influence de $TF$ sur l'interférence

Le rapport signal sur interférence sur chaque sous-porteuse  $n$  est défini comme

$$\text{SIR}_n \triangleq \frac{\mathbb{E}\{|h_{k,n}|^2\}}{\mathbb{E}\left\{\left|\sum_{\substack{k'=0 \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{K-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \rho_{k',n';k,n}\right|^2\right\}}. \quad (5.11)$$

Soit  $A_{g,\gamma}(\tau, \nu)$  la fonction d'inter-ambiguïté de  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  définie par

$$A_{g,\gamma}(\tau, \nu) \triangleq \int_t g(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi\nu\tau} dt. \quad (5.12)$$

La puissance du signal ainsi que celle de l'interférence peuvent s'exprimer en fonction de  $A_{g,\gamma}(\tau, \nu)$ . Plus précisément,

$$\begin{aligned}
h_{k,n} &\stackrel{\Delta}{=} \langle \mathbb{H} g_{k,n}, \gamma_{k,n} \rangle \\
&= \int_t \int_\tau \int_\nu G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) g(t - kT - \tau) e^{j2\pi n F(t-\tau)} e^{j2\pi \nu t} \gamma^*(t - kT) e^{-j2\pi n F t} d\nu d\tau dt \\
&= \int_\tau \int_\nu G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) \left( \int_t g^*(t - kT - \tau) \gamma(t - kT) e^{-j2\pi \nu t} dt \right)^* e^{-j2\pi n F \tau} d\nu d\tau \\
&= \int_\tau \int_\nu G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) A_{\gamma,g}^*(\tau, \nu) e^{j2\pi(\nu kT - nF\tau)} d\nu d\tau \tag{5.13}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho_{k',n';k,n} &\stackrel{\Delta}{=} \langle \mathbb{H} g_{k',n'}, \gamma_{k,n} \rangle \\
&= \int_\tau \int_\nu G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) A_{\gamma,g}^*(\tau + (k' - k)T, \nu + (n' - n)F) e^{-j2\pi n' F \tau} e^{j2\pi(\nu + (n' - n)F)kT} d\nu d\tau \tag{5.14}
\end{aligned}$$

avec  $G_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$  la fonction d'étalement du canal définie par (1.19).

En supposant que sur la durée de transmission  $KT$  le canal est WSSUS<sup>3</sup>, la puissance du signal reçu à la sous-porteuse  $n$  s'exprime alors comme

$$\sigma_{h_n}^2 = \int_\tau \int_\nu S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) |A_{\gamma,g}(\tau, \nu)|^2 d\nu d\tau + \left| \int_\tau \bar{h}_\tau A_{\gamma,g}^*(\tau, 0) e^{-j2\pi n F \tau} d\tau \right|^2, \tag{5.15}$$

où  $S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu)$  et  $\bar{h}_\tau$  sont définis à l'équation (1.22). Le premier terme du côté droit de l'équation représente la puissance transportée par la partie fluctuante du canal, alors que le deuxième terme correspond à la partie déterministe du canal qui est supposée invariante sur la durée  $KT$  considérée. On notera que si  $\bar{h}_\tau$  est nul, le canal suit un évanouissement de Rayleigh et dans ce cas, la puissance du signal est indépendante de  $n$ .

Sous l'hypothèse de données i.i.d, de moyenne nulle et de variance unitaire, la puis-

---

3. Les ensembles de Weyl-Heisenberg peuvent être optimisés au rythme des fluctuations des statistiques du canal, de sorte que sur la durée  $KT$  le canal est supposé stationnaire au sens large.



sance du terme d'interférence peut être bornée par

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{\substack{k'=0 \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{K-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \rho_{k',n';k,n} \right|^2 \right\} &= \sum_{\substack{k'=0 \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{K-1} \sum_{n'=0}^{N-1} \mathbb{E} \left\{ |\rho_{k',n';k,n}|^2 \right\} \\
&\leq \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} \left\{ |\rho_{k',n';k,n}|^2 \right\} \\
&= \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k',n') \neq (k,n)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_{\tau} \int_{\nu} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) |A_{\gamma,g}(\tau + (k' - k)T, \nu + (n' - n)F)|^2 d\nu d\tau \\
&\quad + \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau} e^{-j2\pi n'F\tau} A_{\gamma,g}^*(\tau + (k' - k)T, (n' - n)F) e^{-j2\pi nF\tau} d\tau \right|^2 \\
&= \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k',n') \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int_{\tau} \int_{\nu} |A_{\gamma,g}(\tau, \nu)|^2 S_{\mathbb{H}}(\tau - k'T, \nu - n'F) d\nu d\tau \\
&\quad + \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau - k'T} A_{\gamma,g}^*(\tau, n'F) e^{-j2\pi(n'+n)(\tau - k'T)F} d\tau \right|^2 \tag{5.16} \\
&\triangleq \sigma_{I_n}^2. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

On définit alors le rapport signal sur interférence moyen comme

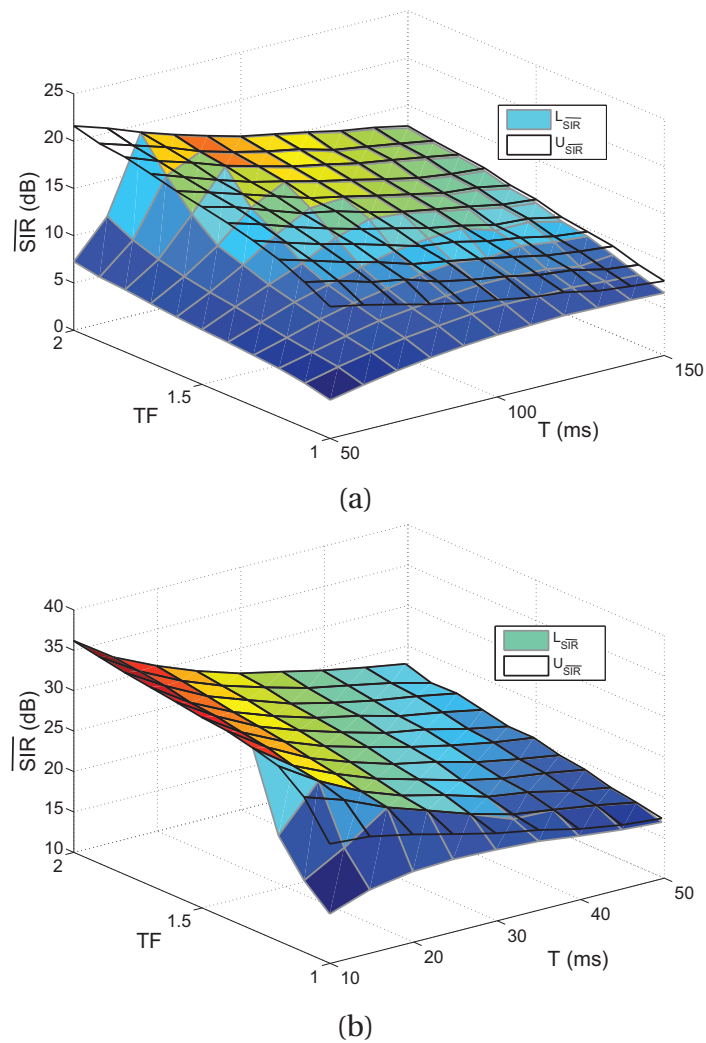
$$\overline{\text{SIR}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\sigma_{h_n}^2}{\sigma_{I_n}^2}. \tag{5.18}$$

Pour faciliter l'évaluation numérique de ce SIR moyen sur des canaux réels, nous proposons de travailler avec des bornes qui ne dépendent pas de la forme de la fonction de diffusion mais uniquement de son support  $\mathcal{D}$  donné par la définition 1.3.6. Cela évite ainsi d'avoir une mesure du SIR moyen qui soit sensible à la méthode d'estimation de la fonction de diffusion. Dans l'annexe E, on détermine les bornes  $L_{\overline{\text{SIR}}}$  et  $U_{\overline{\text{SIR}}}$  telles que  $L_{\overline{\text{SIR}}} \leq \overline{\text{SIR}} \leq U_{\overline{\text{SIR}}}$ .

Sur la figure 5.1, nous avons représenté ces bornes sur le SIR moyen pour deux canaux ASM réels en fonction du produit  $TF$  et pour différentes valeurs de  $T$ . Cette figure est intéressante pour déterminer les grandeurs  $T$  et  $F$  qui permettent de garantir un certain SIR à la réception pour un canal donné. Nous avons considéré des fonctions prototypes rectangulaires classiquement utilisées par les systèmes multi-porteuses ASM, à savoir

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & \text{si } 0 < t \leq T, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T - T_g}} & \text{si } 0 < t \leq T - T_g, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{5.19}$$

où  $T_g$  représente le temps de garde qui vérifie  $T_g = T - 1/F$ . Comme attendu, à mesure que le produit  $TF$  augmente, le SIR moyen croît. On remarque aussi que pour des fonctions prototypes données, les gammes de SIR moyen sont fortement dépendantes du canal. Ainsi, les plages de SIR de la figure 5.1-(a) sont beaucoup plus faibles que celles de la figure

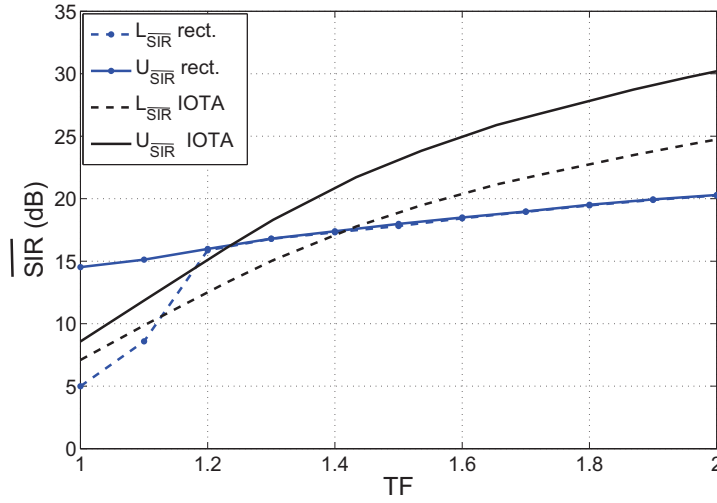


**Figure 5.1** — Evolution du rapport signal sur interférence pour des fonctions prototypes rectangulaires en fonction du produit  $TF$  et pour différentes valeurs de  $T$ . (a) Canal méditerranéen de la figure 1.6-(b), (b) canal atlantique de la figure 1.7-(e).

5.1-(b) car les canaux associés à ces figures présentent des étalements temps-fréquence différents ; le canal méditerranéen de la figure 1.6-(b) présentant un facteur d'étalement plus important que le canal atlantique de la figure 1.7-(e).

Pour un même canal et pour un produit  $TF$  fixé, le SIR moyen dépend aussi des fonctions prototypes  $g(t)$  et  $\gamma(t)$ . La figure 5.2 compare le SIR moyen obtenu en fonction de  $TF$  pour des prototypes rectangulaires et des prototypes gaussiens orthogonalisés par la procédure IOTA (isotropic orthogonal transform) décrite dans [Floch et al., 1995; Stroemer and Beaver, 2003]. Ces derniers offrent l'avantage de se rapprocher de la localisation temps-fréquence des fonctions gaussiennes tout en étant orthogonaux. Le SIR est mesuré sur le canal atlantique de la figure 1.7-(e) auquel on a volontairement retiré<sup>4</sup> la partie déterministe  $\tilde{h}_\tau$  afin de créer un canal artificiel plus dispersif en fréquence.

4. à l'aide de la méthode EMD décrite au chapitre 3



**Figure 5.2** — Comparaison du SIR moyen en fonction du produit  $TF$  et du choix de fonctions prototypes. Résultats obtenus sur la partie aléatoire du canal atlantique de la figure 1.7-(e) (la composante  $\tilde{h}_\tau$  a volontairement été annulée),  $T = 15$  ms.

### Influence de $TF$ sur l'efficacité spectrale

Alors que l'augmentation de  $TF$  permet de réduire la puissance de l'interférence et de fiabiliser ainsi la transmission, elle implique malheureusement une perte d'efficacité spectrale. L'analyse que nous venons de mener ne révèle pas l'influence que  $\sigma_{h_n}^2$ ,  $\sigma_{I_n}^2$  et  $TF$  ont sur cette efficacité spectrale. Trouver le bon compromis entre la maximisation du SIR et la minimisation de  $TF$  n'est pas direct. Pour donner quelques éléments de réponse, nous proposons d'étudier deux cas d'intérêt pratique. Le premier cas correspond au schéma de communication où l'interférence est uniquement gérée au travers de l'optimisation de  $g(t)$ ,  $\gamma(t)$  et  $TF$ , sans la mise en œuvre de traitements de l'interférence à la réception. Dans ce cas, chaque sous-porteuse est traitée individuellement et l'interférence résiduelle à la réception n'est pas exploitée. Elle est considérée comme un bruit supplémentaire. Le deuxième cas correspond à un schéma de communication plus avancé où le récepteur utilise toute l'information reçue, y compris lorsqu'elle se présente sous forme d'interférence.

Pour le premier cas, nous proposons d'évaluer l'impact de l'interférence et du produit  $TF$  sur le taux d'information  $I(y_{k,n}, x_{k,n})$  en considérant l'interférence comme un bruit gaussien. En appliquant les résultats du théorème 4.3.1 au schéma de signalisation de WH, ce taux d'information peut être majoré par

$$I(y_{k,n}, x_{k,n}) \leq \frac{1}{TF} \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}_n) \}, \quad (5.20)$$

où  $\text{SINR}_n$  représente le rapport signal sur bruit plus interférence à la sous-porteuse  $n$ , i.e.,  $\text{SINR}_n \triangleq \sigma_{h_n}^2 / (\sigma_{I_n}^2 + \sigma_{w_n}^2)$  avec  $\sigma_{w_n}^2 \triangleq \mathbb{E} \{ |w_{k,n}|^2 \}$ .  $\xi$  est une variable aléatoire caractérisant les variations de la puissance instantanée du canal, i.e.,  $\xi = |h_{k,n}|^2 / \sigma_{h_n}^2$ . Une manière de mesurer l'impact de  $\sigma_{h_n}^2$ ,  $\sigma_{I_n}^2$  et  $TF$  sur l'efficacité spectrale est d'évaluer, pour différentes

valeurs de  $TF$ , le gain supplémentaire sur le SINR qui est requis pour compenser la perte de taux d'information due à l'utilisation d'une grille de densité sous-critique ( $TF > 1$ ) par rapport à l'utilisation d'une grille de densité critique ( $TF = 1$ ). En effet, l'augmentation de  $TF$  implique deux phénomènes contradictoires sur le taux d'information. Si  $TF$  augmente, le SINR croît, ce qui est favorable au taux d'information, cependant, la densité  $1/TF$  de la grille temps-fréquence diminue, ce qui est défavorable à ce taux. Ainsi, en supposant que pour  $TF = 1$ , le rapport signal sur bruit plus interférence est égal à  $\text{SINR}_n$ , on souhaiterait connaître, pour un système ayant un produit  $T'F' > 1$ , le rapport signal sur bruit plus interférence  $\text{SINR}'_n$  qui est requis pour que l'égalité suivante soit vérifiée

$$\underbrace{\frac{1}{TF}}_{=1} \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}_n) \} = \underbrace{\frac{1}{T'F'}}_{>1} \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}'_n) \}. \quad (5.21)$$

En notant que le terme  $\text{SINR}'_n$  peut s'exprimer comme  $\text{SINR}'_n \triangleq q \text{SINR}_n$  avec  $q > 1$ , on cherche alors le gain  $q$  sur le SINR qui est requis pour compenser la perte de taux d'information due à l'utilisation d'une grille de densité sous-critique. Cette valeur de  $q$  peut être connue de façon assez précise en bornant l'information mutuelle. En utilisant l'inégalité de Jensen et les résultats de [Oyman et al., 2002, Eq.(7)], nous obtenons

$$\frac{1}{T'F'} \log(1 + q \text{SINR}_n e^{-\varphi}) \leq \frac{1}{T'F'} \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + q \xi \text{SINR}_n) \} \leq \frac{1}{T'F'} \log(1 + q \text{SINR}_n), \quad (5.22)$$

où  $\varphi \approx 0,57721566$  est la constante d'Euler. Par conséquent, pour  $T'F' > 1$  et injectant (5.22) dans (5.21), il s'en suit que

$$\frac{1}{\text{SINR}_n} \left( e^{T'F' \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}_n) \}} - 1 \right) \leq q \leq \frac{1}{\text{SINR}_n e^{-\varphi}} \left( e^{T'F' \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}_n) \}} - 1 \right). \quad (5.23)$$

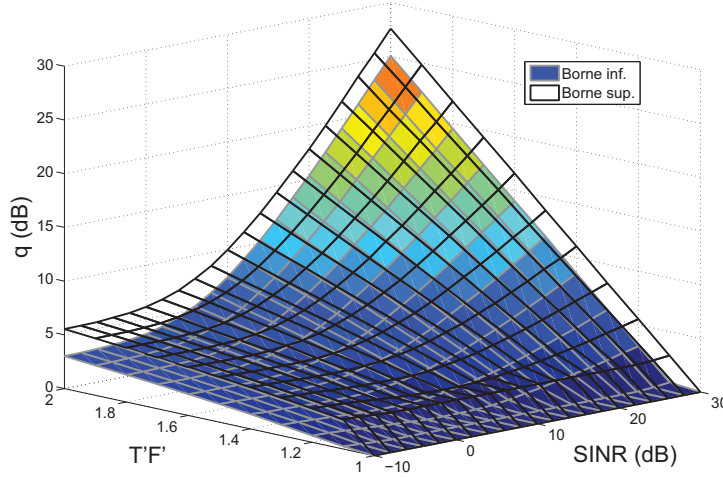
Pour des fonctions prototypes  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  fixées, on a tout intérêt à choisir, s'il existe, le plus grand  $T'F' > 1$  tel que (5.23) soit vérifiée pour une gamme de SINR donné. Dans ce cas, on ne perd pas en taux d'information par rapport au cas  $TF = 1$  et en plus on facilite le travail des traitements de réception puisque la puissance de l'interférence se trouve diminuée.

A titre d'exemple, la figure 5.3 représente les bornes sur  $q$  en fonction du SINR et de  $T'F'$  et pour un canal à évanouissement de Rayleigh. Dans ce cas,  $\xi$  est une variable aléatoire de loi exponentielle et de moyenne unitaire. Les deux bornes sont assez serrées puisqu'elles diffèrent uniquement par le terme  $e^{-\varphi}$  qui représente une différence de 2,5 dB. On peut observer que le gain  $q$  croît en fonction de  $T'F'$  comme attendu mais aussi en fonction du SINR. Plus précisément,

$$\begin{aligned} \lim_{\text{SINR}_n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{SINR}_n} \left( e^{T'F' \mathbb{E}_\xi \{ \log(1 + \xi \text{SINR}_n) \}} - 1 \right) &= \frac{1}{\text{SINR}_n} \left( e^{T'F' \mathbb{E}_\xi \{ \log \xi \}} + \text{SINR}_n^{T'F'} \right) \\ &\rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (5.24)$$

impliquant que  $q \rightarrow +\infty$  pour  $\text{SINR}_n \rightarrow +\infty$ .

Cette analyse montre qu'il faut être très précautionneux dans le choix de  $TF$  car la perte d'efficacité spectrale due à l'utilisation d'une grille de densité sous-critique ( $TF > 1$ )



**Figure 5.3** — Evolution du gain  $q$  de SINR requis pour compenser la perte d'information mutuelle due à l'utilisation d'une grille de densité sous-critique.

peut être plus significative que l'augmentation de cette efficacité résultante de l'amélioration du SINR. A l'inverse, choisir  $TF = 1$  ne garantit pas nécessairement une efficacité spectrale optimale. En d'autres termes, le choix de  $TF$  doit se faire au cas par cas en fonction des conditions de propagations et des fonctions prototypes  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  choisies. Dans la littérature, il existe cependant des règles empiriques générales qui permettent d'obtenir un bon compromis entre la limitation de l'interférence et la perte d'efficacité spectrale dans le cas où l'interférence n'est pas traitée à la réception. Classiquement, il est préconisé de choisir [Kozek and Molisch, 1998; Matz et al., 2007; Durisi et al., 2010]

$$\frac{T}{F} = \frac{\tau_{\max}}{\nu_{\max}} \text{ et } TF \approx 1,2. \quad (5.25)$$

Si l'on considère maintenant la cas où le récepteur utilise toute l'information reçue, y compris lorsqu'elle se présente sous forme d'interférence, le taux d'information ne s'exprime plus sous la forme (5.20) car toutes les sous-porteuses sont traitées conjointement et non plus individuellement. Par analogie avec les systèmes MIMO et en considérant une durée de transmission  $KT$  avec un système constitué de  $N$  sous-porteuses, la relation (5.7) entre les symboles transmis et les symboles observés peut se représenter sous la forme matricielle suivante

$$\mathbf{y}_{WH} = \mathbf{H}_{WH} \mathbf{x}_{WH} + \mathbf{w}_{WH}, \quad (5.26)$$

où  $\mathbf{x}_{WH}$  est le vecteur de données, de dimension  $NK \times 1$ ,  $\mathbf{y}_{WH}$  est le vecteur des symboles observés et  $\mathbf{w}_{WH}$  est le vecteur bruit. La matrice  $\mathbf{H}_{WH}$ , de dimension  $NK \times NK$ , représentant le canal de transmission, s'exprime comme

$$\mathbf{H}_{WH} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{WH}^{(0,0)} & \cdots & \mathbf{H}_{WH}^{(0,K)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{H}_{WH}^{(K,0)} & \cdots & \mathbf{H}_{WH}^{(K,K)} \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

où le bloc matriciel  $\mathbf{H}_{WH}^{(k,k')}$  de taille  $N \times N$  est donné par

$$\left[ \mathbf{H}_{WH}^{(k,k')} \right]_{n,n'} \triangleq \langle \mathbb{H} \mathbf{g}_{k',n'}, \gamma_{k,n} \rangle. \quad (5.28)$$

La matrice  $\mathbf{H}_{WH}$  dépend donc des fonctions prototypes ainsi que du produit  $TF$ . En se basant sur le théorème 4.3.1, l'information mutuelle entre le vecteur d'entrée  $\mathbf{x}_{WH}$  et le vecteur  $\mathbf{y}_{WH}$  de sortie du canal peut être majorée par

$$I(\mathbf{y}_{WH}; \mathbf{x}_{WH}) \leq \frac{1}{TF \times K} \mathbb{E}_{\mathbf{H}_{WH}} \left\{ \log \det \left( \mathbf{H}_{WH} \mathbf{H}_{WH}^\dagger + \mathbf{R}_{w_{WH}} \right) - \log \det \left( \mathbf{R}_{w_{WH}} \right) \right\}. \quad (5.29)$$

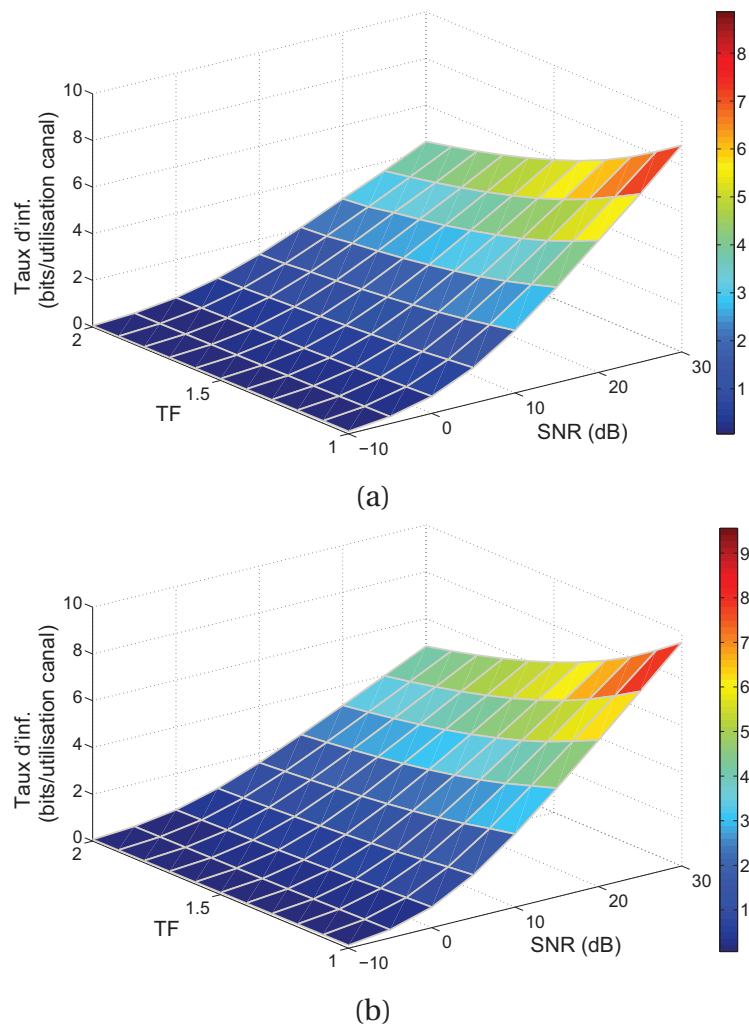
On suppose ici que les données sont i.i.d et de puissance unitaire.  $\mathbf{R}_{w_{WH}}$  représente la matrice, de dimension  $NK \times NK$ , de covariance du bruit après projection sur la base de WH de réception. On notera que même dans le cas où le bruit physique ambiant est blanc, cette matrice n'est pas nécessairement diagonale du fait de la projection sur la base de WH de réception.

La figure 5.4 représente l'évolution de la borne sur le taux d'information, donnée par l'équation (5.29), pour deux canaux ASM réels, en fonction du produit  $TF$  et pour différentes valeurs de rapport signal sur bruit. Le rapport signal sur bruit est ici défini comme  $KN/\text{tr}(\mathbf{R}_w)$  (la puissance des données transmises est supposée unitaire). Pour les simulations, nous avons considéré des fonctions prototypes rectangulaires. Les deux courbes de la figure 5.4 indiquent clairement que si l'on veut maximiser le taux d'information, il faut choisir une grille de densité critique ( $TF = 1$ ). Ceci est théorique et suppose que toute l'information convoyée par l'interférence est correctement traitée à la réception. Dans la pratique, ce résultat est à pondérer car les traitements de réception ne sont jamais parfaits. Ainsi, en fonction des performances du récepteur, il conviendra peut-être de choisir  $TF$  légèrement supérieur à 1. On notera aussi que la perte sur le taux d'information due à l'utilisation d'une grille de densité sous-critique est inférieure au produit  $TF$ . Par exemple, si l'on choisit une grille de produit  $TF = 1.2$ , la perte observée par rapport au taux d'information correspondant à l'utilisation d'un grille critique  $TF = 1$ , est d'un facteur inférieur à 1.2.

## 5.2 Optimisation de puissance

### 5.2.1 Motivations

En plus d'être impactée par le choix des ensembles de WH utilisés dans la chaîne de transmission, l'information mutuelle entre l'entrée et la sortie du canal dépend de la manière dont la puissance d'émission disponible est exploitée. Relativement à l'information mutuelle, les signalisations de type WH sont attrayantes car elles offrent l'opportunité d'optimiser dans le temps et en fréquence la puissance allouée en fonction des caractéristiques du canal. Ainsi, à partir d'une connaissance à l'émission de l'état du canal, connaissance qui est statistique dans notre contexte, il est possible d'accroître le débit d'information en ajustant la puissance allouée sur chaque sous-porteuse en fonction de la sélectivité fréquentielle du canal. C'est ce qui correspond aux stratégies d'allocation



**Figure 5.4** — Evolution du taux d'information en fonction du rapport signal sur bruit et du produit  $TF$  pour un système capable de traiter l'interférence à la réception. (a) Canal méditerranéen de la figure 1.6-(b) avec  $T = 75$  ms, (b) canal atlantique de la figure 1.7-(e) avec  $T = 10$  ms.

de type « water-filling » [Gallager, 1968; Chow et al., 1995]. Cependant, ces opportunités d'optimisation doivent être contrastées avec l'un des inconvénients majeurs des schémas multi-porteuses de WH, à savoir leur fort rapport puissance crête sur puissance moyenne (ou PAPR pour peak-to-average power ratio). Ce fort PAPR résulte de l'addition cohérente des différentes sous-porteuses et peut imposer aux composants matériels limités en puissance crête, tels que les amplificateurs de puissance ou les transducteurs, de fonctionner avec un « recul » de puissance (power back-off) important, réduisant ainsi la puissance moyenne d'émission. Le fort PAPR peut aussi induire des distorsions non linéaires lorsque le signal transmis excède le niveau de saturation [Ochiai and Imai, 2002; Bahai et al., 2002]. L'information mutuelle étant directement dépendante du rapport signal sur bruit à la réception, un recul de puissance conséquent ou de la distorsion peuvent alors limiter les performances du système de communication.

Les opportunités offertes par les schémas de signalisations de WH ainsi que leurs limites soulèvent plusieurs questions du point de vue de la conception de systèmes de

communication. Une des questions clé est de déterminer la meilleure stratégie de gestion de la puissance disponible afin de maximiser le débit d'information. Par exemple, est-il utile d'optimiser la puissance allouée sur les sous-porteuses en fonction des caractéristiques du canal? En ce qui concerne la puissance crête, la manière de gérer le fort PAPR à la transmission reste assez obscure. Doit-on autoriser une certaine saturation en sortie de l'amplificateur de puissance afin de maximiser le SNR à la réception, quitte à introduire un peu de distorsion? De combien doit-on « reculer » la puissance moyenne de transmission par rapport à la puissance crête? Le dilemme distorsion/recul de puissance n'a pas de solution évidente et suggère la possibilité d'un compromis optimal. De plus, doit-on chercher à réduire le PAPR du signal avant amplification de sorte à limiter le phénomène de saturation? Il existe en effet de nombreuses techniques de réduction de PAPR dans la littérature [Han and Lee, 2005; Rojo and Stojanovic, 2010]. Le problème est qu'elles ne sont pas gratuites, elles requièrent la transmission de pilotes supplémentaires qui réduisent le débit ou bien nécessitent de la puissance supplémentaire pour réguler le PAPR.

L'objectif de cette section est de fournir quelques réponses à ces questions afin d'identifier des stratégies d'allocation de puissance favorables au débit d'information. Il existe de nombreuses études dédiées à ces questions pour des communications radio-fréquence [Papandreou and Antonakopoulos, 2008], mais seuls quelques résultats préliminaires sont disponibles dans un contexte ASM [Ophir et al., 2006; Huang, 2010]. La faible vitesse de propagation des ondes acoustiques impose des contraintes fortes sur la nature du CSI disponible à l'émission qui, couplée avec la limitation de puissance crête, rend les stratégies conçues pour les communications radio-fréquence difficilement applicables. De la même manière, les seuls résultats disponibles dans un contexte ASM n'étant en fait que des applications directes de schéma radio-fréquence, ils s'avèrent eux aussi difficilement exploitables.

Par conséquent, dans cette section, nous cherchons à identifier des directives d'allocation de puissance favorables au débit d'information pour des systèmes ASM de type WH, limités en puissance crête et ayant connaissance des statistiques du canal à l'émission. Nous proposons tout d'abord une modélisation des schémas de WH contraints en puissance crête et discutons ensuite de l'étalement du canal. L'optimisation de puissance sur des canaux sous-étalés est abordée par la suite et des évaluations numériques sont réalisées pour identifier des directives de conception. En fin de section, nous discutons de l'optimisation de puissance sur des canaux sur-étalés.

### 5.2.2 Schéma de Weyl-Heisenberg contraint en puissance crête

Si l'on considère la possibilité d'allouer la puissance de façon non-uniforme dans le domaine fréquentiel et de transmettre un signal distordu du fait de la saturation de l'amplificateur de puissance, le modèle de transmission donné par les équations (5.5) et (5.35) doit être réécrit. Nous considérons toujours des données  $x_{k,n}$  indépendantes, centrées et de puissance unitaire. Comme indiqué à la figure 5.5, nous désignons par  $\Phi_n$  la puissance allouée à la  $n$ -ième sous-porteuse et par convenance nous normalisons cette puissance telle que  $\sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n = 1$ .



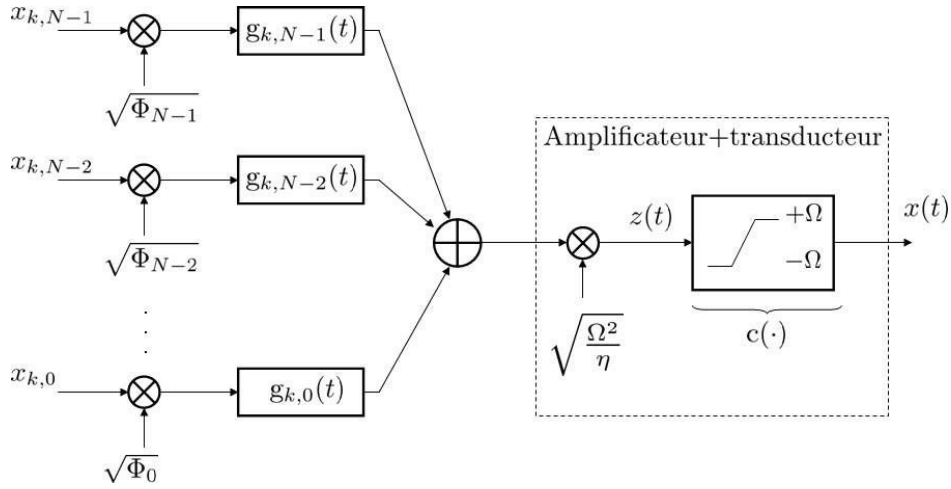


Figure 5.5 — Modèle du signal multi-porteuse contraint en puissance crête

Le gain de l'amplificateur de puissance est modélisé par un facteur  $\sqrt{\frac{\Omega^2}{\eta}}$ , où  $\Omega^2$  désigne la puissance crête et  $\eta$  une variable utilisée pour contrôler le gain de cette amplificateur. Les non-linéarités résultantes de la limitation en puissance crête sont modélisées par une fonction sans mémoire  $c(\cdot)$ , définie comme un limiteur d'amplitude idéal, à savoir

$$x(t) = c(z(t)) = \begin{cases} z(t), & |z(t)|^2 \leq \Omega^2 \\ \Omega e^{i\angle z(t)}, & |z(t)|^2 > \Omega^2, \end{cases} \quad (5.30)$$

où  $x(t)$  est le signal transmis et où  $z(t) = \sqrt{\frac{\Omega^2}{\eta}} \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_{k,n} g_{k,n}(t)$ . La sortie du limiteur peut aussi s'exprimer comme

$$x(t) = \alpha z(t) + d(t), \quad (5.31)$$

où  $d(t)$  représente la distorsion créée par  $c(\cdot)$  et  $\alpha$  est une constante à valeur réelle. Par convenance mathématique, ce modèle est communément employé [Raich et al., 2005; Ochiai, 2003] pour représenter les signaux tronqués en amplitude car il « linéarise » un problème non linéaire. Ce modèle s'applique quel que soit  $z(t)$  et n'est pas unique puisque n'importe quelle valeur réelle peut être choisie pour  $\alpha$ . Le choix de  $\alpha$  dépend du type de simplifications nécessaires lorsque l'on manipule  $x(t)$ . Des valeurs pertinentes de  $\alpha$  sont discutées dans la section 5.2.4. La distorsion créée par  $c(\cdot)$  est à la fois présente dans la bande de transmission, mais aussi en dehors de cette bande. La distorsion dans la bande peut être vue comme du bruit qui dégrade les performances de réception alors que la distorsion en dehors de cette bande est vue comme de l'interférence par les systèmes qui transmettent dans des bandes de fréquence adjacentes. Typiquement, pour les systèmes de radiocommunication, cette distorsion en dehors de la bande est un problème puisqu'elle doit être filtrée du fait de la réglementation stricte d'utilisation du spectre qui exige la suppression de lobes secondaires. Dans un contexte ASM, cette suppression n'est pas requise car le spectre n'est pas régulé. De plus, les transducteurs acoustiques étant généralement limités en bande passante, la majeure partie de la distorsion hors bande sera automatiquement filtrée lors de la conversion du signal électrique en signal acoustique.

Comme discuté dans le chapitre 4, en plus de la limitation de puissance crête, les modems ASM peuvent aussi être contraints en puissance moyenne de sorte que

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}\{|x(t)|^2\} dt \leq \frac{\Omega^2}{\beta}, \quad \beta \geq 1, \quad (5.32)$$

où, pour rappel,  $\beta$  est une constante représentant le rapport minimal entre la puissance crête et la puissance moyenne toléré par le système.

Pour maximiser le débit d'information par rapport à la puissance, les schémas de signalisation temps-fréquence de WH offrent l'opportunité d'optimiser conjointement deux degrés de liberté. Le premier est le vecteur d'allocation de puissance des sous-porteuses  $\Phi = [\Phi_0, \dots, \Phi_{N-1}]$  qui peut être optimisé en fonction de la sélectivité fréquentielle du canal. Le second degré est le recul de puissance qui régule la puissance moyenne transmise et qui est défini comme

$$P_{bo} \triangleq \frac{\Omega^2}{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}\{|x(t)|^2\} dt}, \quad (5.33)$$

avec  $P_{bo}$  vérifiant  $P_{bo} \geq \beta$ . Un  $P_{bo}$  faible favorise le SNR à la réception mais peut induire beaucoup de distorsion et à l'inverse un  $P_{bo}$  fort limite la distorsion mais réduit aussi la puissance moyenne transmise. Un des objectifs du travail présenté dans cette section est donc de trouver le bon compromis. Comme montré dans la section 5.2.4, l'optimisation du recul de puissance est réalisée en réglant le paramètre  $\eta$ . En effet, en supposant que  $z(t)$  est à moyenne nulle et distribué suivant un loi gaussienne [Wei et al., 2010], on montre que  $P_{bo}$  s'écrit

$$P_{bo} = \frac{\eta}{1 - e^{-\eta}}. \quad (5.34)$$

Afin de satisfaire la contrainte sur la puissance moyenne (5.32),  $\eta$  doit vérifier  $\eta \geq \beta + W(-\beta e^{-\beta})$ , où  $W(\cdot)$  désigne la fonction de Lambert, la fonction inverse de  $f(w) = we^w$ .

### 5.2.3 Sur l'étalement du canal de transmission

La formulation du problème d'optimisation de puissance dépend des caractéristiques du canal de transmission et plus particulièrement de son étalement temps-fréquence. Comme indiqué à la définition 1.3.6, l'étalement du canal est quantifié au travers du facteur  $\Delta_{\text{H}} = 4v_{\text{max}} \times \tau_{\text{max}}$ .

Classiquement [Kozek, 1997; Bello, 1963], un canal est dit sous-étalé lorsque  $\Delta_{\text{H}} < 1$  et sur-étalé sinon. En ASM, les canaux petit-fond sont majoritairement sous-étalés et présentent un facteur d'étalement de l'ordre de  $10^{-2}$ , c'est le cas des canaux des figures 1.6 et 1.7 par exemple. Cependant, dans des configurations particulières comme la transmission dans des canaux de surface ou sur des zones côtières très petit-fond où les vagues se cassent, ce facteur d'étalement peut être compris entre 1 et 10 [van Walree, 2011].

Si l'on distingue les canaux sous-étalés des autres, c'est parce qu'ils présentent des caractéristiques intéressantes du point de vue de l'optimisation du schéma de signalisation. En effet, ceux-ci sont approximativement normaux [Kozek, 1997] de sorte que la décomposition en valeurs singulières de (5.1) peut être remplacée par une décomposition en

valeurs propres. Plus important encore, même si  $\mathbb{H}$  est un opérateur aléatoire, ses fonctions propres peuvent être approchées par des fonctions déterministes bien localisées en temps et en fréquence. Plus précisément [Durisi et al., 2010], toute fonction  $g(t)$  déterministe d'énergie unitaire qui est bien localisée en temps et en fréquence est une fonction propre approchée de  $\mathbb{H}$  au sens des moindres carrés, i.e., l'erreur quadratique moyenne  $\mathbb{E}\{\|\langle \mathbb{H}g, g \rangle g - \mathbb{H}g\|^2\}$  est petite si  $\mathbb{H}$  est sous-étalé. Cette erreur est minimisée si  $g(t)$  est choisie telle que  $A_{g,g}(\tau, \nu) \approx 1$  sur le support  $\mathcal{D}$  de la fonction de diffusion. Dans ce cas, la relation entre l'entrée et la sortie du canal (5.7) devient

$$y_{k,n} \approx h_{k,n}x_{k,n} + w_{k,n}. \quad (5.35)$$

La puissance de l'interférence est alors négligeable. On notera que comme discuté dans la section 5.1, l'écriture du signal reçu sous la forme (5.35) implique de choisir une grille temps-fréquence sous-critique telle que  $TF > 1$ . Pour être plus précis, l'approximation (5.35) ne dépend pas uniquement de l'étalement  $\Delta_{\mathbb{H}}$ . Elle dépend aussi du rapport signal sur bruit<sup>5</sup> et surtout des choix de conception. Pour optimiser le taux d'information et réduire au maximum le produit  $TF$ , le concepteur peut volontairement choisir des fonctions prototypes  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  telles que (5.35) ne soit pas vérifiée même lorsque  $\Delta_{\mathbb{H}}$  est très petit. C'est le cas, par exemple, du schéma de signalisation proposé par Hwang et Schniter dans [Hwang and Schniter, 2009] où de l'interférence entre sous-porteuses est volontairement introduite à l'émission pour optimiser l'efficacité spectrale et limiter le nombre de coefficients de l'égaliseur fréquentiel implémenté à la réception.

On notera que par abus de langage, lorsque nous évoquons les canaux sous-étalés dans la suite de ce chapitre, nous sous-entendons que ces canaux vérifient l'approximation (5.35).

#### 5.2.4 Optimisation de puissance sur des canaux sous-étalés

Nous voulons maintenant identifier les stratégies d'allocation de puissance favorables au débit ou plus exactement favorables au taux d'information. Comme au chapitre précédent, le canal est supposé ergodique et le taux d'information est défini comme l'information mutuelle entre les symboles de données transmis et reçus, moyenné sur toutes les réalisations du canal<sup>6</sup>.

En considérant un canal sous-étalé et en intégrant la contrainte sur la puissance crête, les symboles observés à la réception, donnés initialement par (5.35), s'expriment maintenant comme

$$y_{k,n} \approx \sqrt{\frac{\Omega^2}{\eta}} h_{k,n} (\alpha x_{k,n} + d_{k,n}) + w_{k,n}, \quad (5.36)$$

où  $d_{k,n} = \langle d, \gamma_{k,n} \rangle / \sqrt{\frac{\Omega^2}{\eta}}$ .

5. Pour un canal donné et des fonctions prototypes fixées, cette approximation peut être vraie pour un SNR inférieur à 30 dB par exemple, mais fautive pour des SNR plus importants.

6. Cette définition est à contraster avec les canaux non ergodiques où la probabilité de coupure est habituellement utilisée comme métrique [Yao and Giannakis, 2005].

En supposant que chaque sous-porteuse est traitée individuellement, le taux d'information s'écrit

$$I(y; x) = \frac{1}{TF} \sum_{n=0}^{N-1} I(y_{k,n}; x_{k,n}), \quad (5.37)$$

où  $I(y_{k,n}; x_{k,n})$  peut se développer en utilisant la règle en chaîne comme  $I(y_{k,n}; x_{k,n}) = I(y_{k,n}; x_{k,n} | h_{k,n}) - I(x_{k,n}; h_{k,n} | y_{k,n})$ . Le premier terme de droite représente l'information mutuelle lorsque le canal est parfaitement connu à la réception et le second représente la pénalité sur le taux d'information due à la connaissance imparfaite du canal à la réception. Ce second terme exprime en fait la différence entre le contexte cohérent et celui non-cohérent. Comme discuté au chapitre 4, les récepteurs ASM ne sont pas aidés par des génies et le contexte réel est non-cohérent.

Cependant, le terme de pénalité est généralement mal connu car il dépend à la fois du canal, des symboles transmis ainsi que des performances des algorithmes de réception comme l'estimateur de canal. L'objectif de cette section étant d'identifier des directives générales sur l'allocation de puissance, nous ne souhaitons pas nous attacher à un contexte trop particulier. Par conséquent, nous considérons des symboles transmis issus d'un alphabet gaussien et définissons la fonction de coût caractérisant le taux d'information comme

$$R = \frac{1}{TF} \sum_{n=0}^{N-1} I(y_{k,n}; x_{k,n} | h_{k,n}). \quad (5.38)$$

N'étant pas en mesure d'exprimer simplement l'information mutuelle (5.37) dans un contexte général, cette fonction  $R$  peut être vue comme une borne supérieure sur le taux d'information réel.

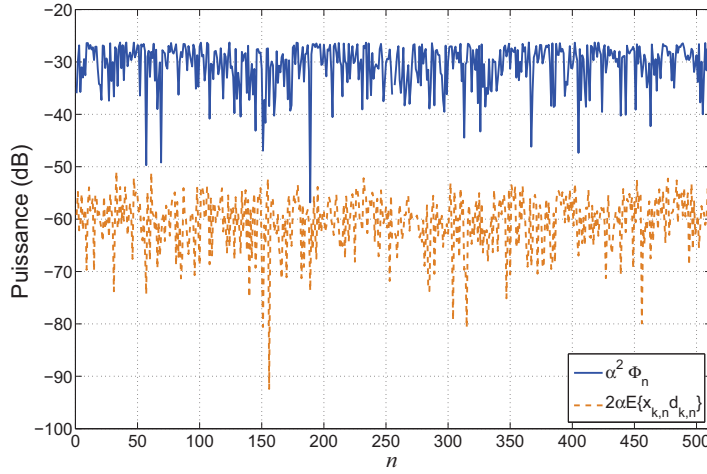
Notre problème d'optimisation de puissance peut alors se formuler comme

$$\begin{aligned} & \max_{\Phi, P_{bo}} && R, \\ & \text{sous les contraintes} && \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_n = 1, \\ & && \eta \geq \beta + W(-\beta e^{-\beta}). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Pour déterminer l'expression de  $R$ , nous modélisons tout d'abord la distorsion  $d_{k,n}$  comme un bruit additif gaussien, ce qui est une hypothèse communément admise lorsque  $N$  est grand [Banelli and Cacopardi, 2000; Ochiai, 2003]. Notons que la validité de cette hypothèse diminue à mesure que le recul de puissance  $P_{bo}$  augmente. Pour de forts reculs de puissance, la distorsion tend en effet à ressembler à un bruit impulsif [Bahai et al., 2002]. Toutefois, le bénéfice sur l'information mutuelle de la diminution de la distorsion (due à l'augmentation du recul de puissance) compense généralement l'approximation de modélisation.

L'information mutuelle  $I(y_n; x_n | h_n)$  peut être déterminée en caractérisant les distributions de  $y_{k,n} | h_{k,n}$  et  $y_{k,n} | x_{k,n}, h_{k,n}$ . Comme  $x_{k,n}$  et  $d_{k,n}$  sont supposés gaussiens, nous avons

$$y_{k,n} | h_{k,n} \sim \mathcal{CN} \left( 0, \frac{|h_{k,n}|^2 \Omega^2}{\eta} \left( \alpha^2 \Phi_n + \mathbb{E} \{ |d_{k,n}|^2 \} + 2\alpha \mathbb{E} \{ x_{k,n} d_{k,n}^* \} \right) + \sigma_{w_n}^2 \right) \quad (5.40)$$



**Figure 5.6** — Comparaison entre le terme d'intercorrélacion  $2\alpha\mathbb{E}\{x_{k,n}d_{k,n}^*\}$  et la densité spectrale de puissance  $\alpha^2\Phi_n$ .

et

$$y_{k,n}|x_{k,n}, h_{k,n} \sim \mathcal{CN}\left(\sqrt{\frac{\Omega^2}{\eta}} h_{k,n} \alpha x_{k,n}, \frac{|h_{k,n}|^2 \Omega^2}{\eta} \mathbb{E}\{|d_{k,n}|^2\} + \sigma_{w_n}^2\right) \quad (5.41)$$

Par conséquent,

$$R = \frac{1}{TF} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}_{h_{k,n}} \left\{ \log \left( 1 + \frac{\alpha^2 \Phi_n + 2\alpha \mathbb{E}\{x_{k,n} d_{k,n}^*\}}{\mathbb{E}\{|d_{k,n}|^2\} + \sigma_{w_n}^2 \eta / (\Omega^2 |h_{k,n}|^2)} \right) \right\}, \quad (5.42)$$

Théoriquement, le terme d'intercorrélacion  $\mathbb{E}\{x_{k,n} d_{k,n}^*\}$  est non nul. Cependant, dans la plupart des cas ce terme est négligeable dans le sens où  $R$  peut être approché comme

$$R \approx \frac{1}{TF} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}_{h_{k,n}} \{\log(1 + \text{SNDR}(n))\}, \quad (5.43)$$

où  $\text{SNDR}(n)$  dénote le rapport signal sur bruit plus distorsion à la sous-porteuse  $n$

$$\text{SNDR}(n) = \frac{\alpha^2 \Phi_n}{\mathbb{E}\{|d_{k,n}|^2\} + \sigma_{w_n}^2 \eta / (\Omega^2 |h_{k,n}|^2)}. \quad (5.44)$$

Cette approximation peut se justifier doublement. Premièrement, la distorsion sur la sous-porteuse  $n$  dépend des données sur toutes les sous-porteuses et pas uniquement de  $x_{k,n}$ . Dès lors, pour  $N$  grand, la contribution de  $x_{k,n}$  sur  $d_{k,n}$  est limitée. Plus important,  $\alpha$  peut être choisi de sorte que  $d(t)$  soit décorrélié de  $z(t)$ , impliquant une très faible intercorrélacion  $\mathbb{E}\{x_{k,n} d_{k,n}^*\}$ . Ce point est illustré à la figure 5.6 où le terme  $2\alpha\mathbb{E}\{x_{k,n} d_{k,n}^*\}$  est comparé à la densité spectrale de puissance  $\alpha^2\Phi_n$  pour un système OFDM avec une fonction prototype rectangulaire. Dans cet exemple,  $N = 512$ , les  $\Phi_n$  sont tirés aléatoirement suivant une loi uniforme et le signal transmis est fortement distordu avec  $(\eta, \Omega^2) = (1, 1)$ .

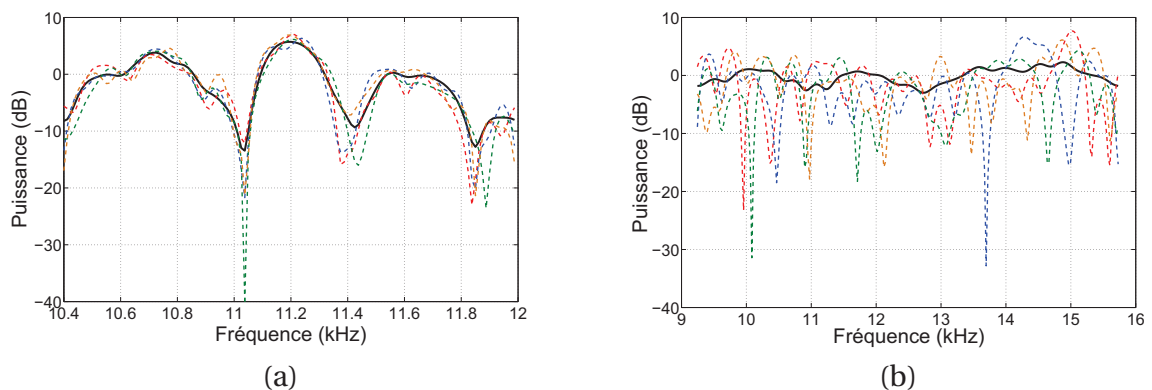
Du fait de l'expression de  $R$  donnée à l'équation (5.43), le problème d'optimisation (5.39) ne peut pas être résolu analytiquement. Cependant, comme montré ci-après, des solutions approchées peuvent être obtenues à l'aide de méthodes numériques.

### 5.2.5 Évaluation numérique pour les canaux sous-étalés

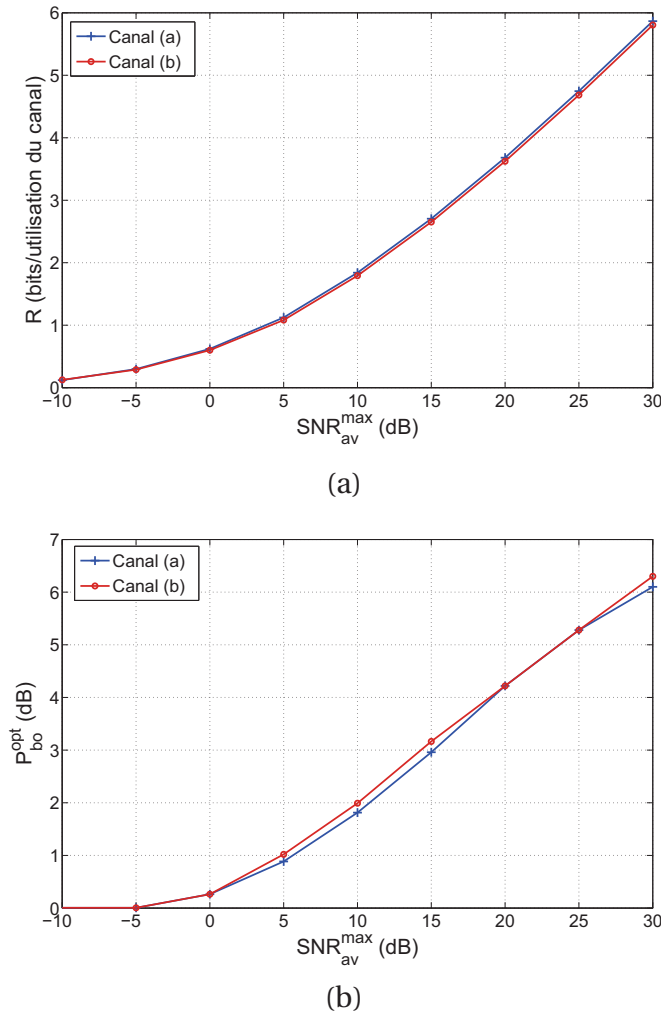
Afin d'identifier les stratégies d'allocation de puissance favorables au débit d'information, nous considérons ici deux canaux réels sous-étalés dont les réponses en fréquence sont données à la figure 5.7. Le canal (a) de cette figure a été sondé en rade de Brest sur une distance de 2 km et le canal (b) est issu d'expérimentations menées par Woods Hole Oceanographic Institution au large de Marthas Vineyard (USA) en 2008 sur une distance de 1 km. Comme l'optimisation de puissance repose sur la connaissance des statistiques du canal, ces deux canaux ont été choisis pour illustrer les résultats car ils présentent des réponses en fréquence différentes. Le canal (a) présente une sélectivité fréquentielle moyenne significative alors que les densités de probabilité des sous-canaux fréquentiels sont quasiment identiques pour le canal (b).

Afin de satisfaire la condition (5.35), nous considérons des fonctions prototypes rectangulaires de produit  $TF = 1.2$  avec  $T = 48$  ms pour le canal (a) (soit 64 sous-porteuses) et  $T \approx 24$  ms (soit 128 sous-porteuses). Ces configurations garantissent un rapport signal sur interférence  $\overline{\text{SIR}}$  supérieur à 35 dB. Pour s'approcher des caractéristiques des signaux à temps continu, notamment par rapport aux valeurs de puissance crête, les signaux simulés sont sur-échantillonnés d'un facteur 16.

La solution du problème d'optimisation (5.39) est ici obtenue à l'aide de méthodes numériques de type « Sequential Quadratic Programming » [Bonnans et al., 2006]. Nous rappelons que le but de cette analyse n'est pas de se concentrer sur les questions de mise en œuvre et de proposer des algorithmes d'optimisation peu coûteux. Le but est uniquement d'analyser les gains potentiels apportés par l'optimisation de puissance afin de fournir des directives générales sur la gestion de cette puissance.



**Figure 5.7**— Exemples de réponse en fréquence de canaux ASM sous-étalés. Ligne pleine : réponse moyenne, lignes en pointillé : exemples de réponses instantanées. (a) Canal sondé en rade de Brest, (b) canal sondé au large de Marthas Vineyard (USA)



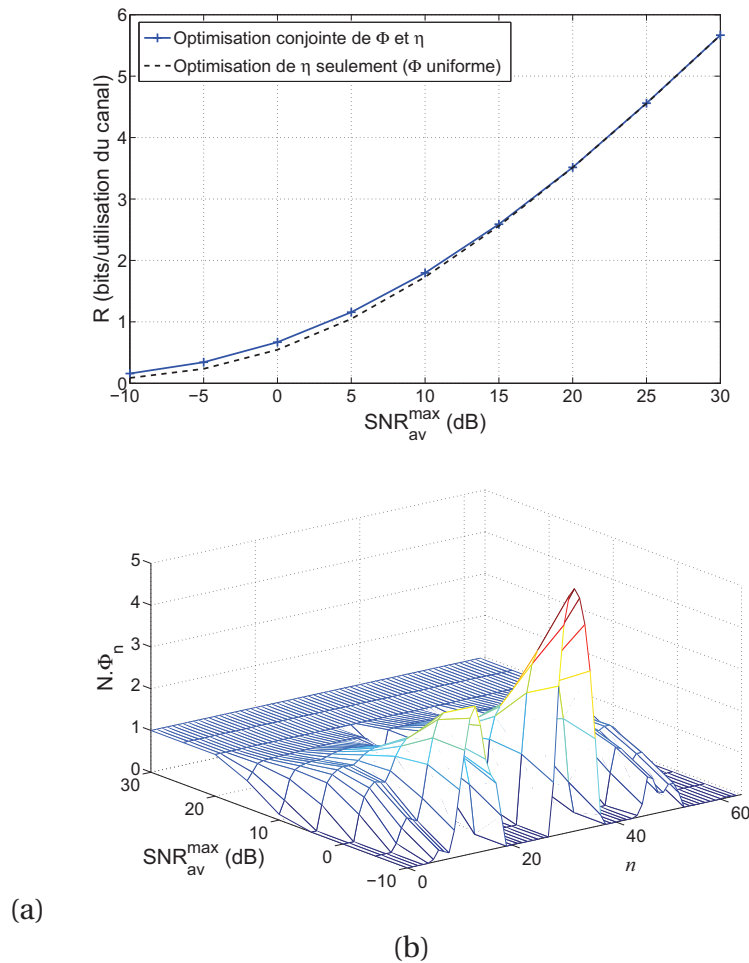
**Figure 5.8** — (a) Taux d'information optimal en fonction du rapport signal sur bruit. (b) Recul de puissance optimal en fonction du rapport signal sur bruit.  $\beta = 0$  dB.

### Limitation en puissance crête uniquement

Nous considérons tout d'abord le cas où la puissance de transmission est principalement limitée par le coût et le volume des amplificateurs de sorte que la puissance crête soit la contrainte unique, i.e.,  $\beta = 0$  dB.

La figure 5.8-(a) montre, pour les deux canaux, l'évolution du taux d'information en fonction du SNR moyen maximum défini à l'équation (4.12). Malgré leurs différences, les deux canaux présentent un taux d'information optimal très similaire. Sur la figure 5.8-(b) nous pouvons voir l'évolution du recul de puissance optimal en fonction du SNR moyen maximum. Cette figure indique qu'autoriser de la distorsion à l'émission peut être bénéfique pour le débit d'information. En effet, à faible SNR, le système de communication doit favoriser la puissance moyenne de transmission, quitte à introduire une forte distorsion (i.e., faible  $P_{bo}$ ). Par contre, à mesure que le SNR augmente, le recul de puissance optimal augmente lui aussi, limitant ainsi la distorsion.

Pour dissocier les effets de l'optimisation de l'allocation de puissance des sous-

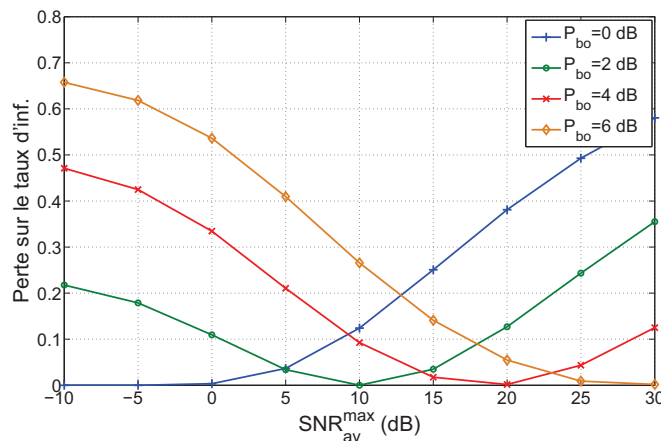


**Figure 5.9** — Effet de l’optimisation de la puissance des sous-porteuses sur le taux d’information du canal (a) sondé en rade de Brest. (a) Taux d’information optimal en fonction du rapport signal sur bruit, (b) vecteur d’allocation de puissance  $\Phi$  optimal en fonction du rapport signal sur bruit.  $\beta = 0$  dB.

porteuses de celui de l’optimisation du recul de puissance, nous avons comparé le taux d’information obtenu lorsque  $\Phi$  et  $\eta$  sont conjointement optimisés et lorsque seul  $\eta$  est optimisé. Dans le dernier cas, la puissance allouée à chaque sous-porteuse est uniforme et de valeur  $1/N$ . Pour tous les canaux testés, un schéma d’optimisation d’allocation de puissance sur les sous-porteuses n’apporte pas de gain significatif. Celui-ci apporte un gain à faible SNR (de façon similaire à une stratégie de waterfilling), mais ce gain est plutôt marginal. L’allocation de puissance optimisée sur les sous-porteuses paye seulement si les densités de probabilité des sous-canaux fréquentiels sont suffisamment différentes l’une de l’autre, ce qui n’est pas le cas sur les canaux testés. La figure 5.9 illustre ces résultats pour le canal (a) de la figure 5.7; canal qui, parmi notre base de données de canaux réels, présente la plus forte disparité entre les distributions de ses sous-canaux fréquentiels.

Pour mieux évaluer le bénéfice apporté par la connaissance des statistiques du canal à l’émission, nous avons mesuré les pertes sur le taux d’information obtenues lorsque le recul de puissance n’est pas adapté aux conditions de propagation. Le but est ici de savoir



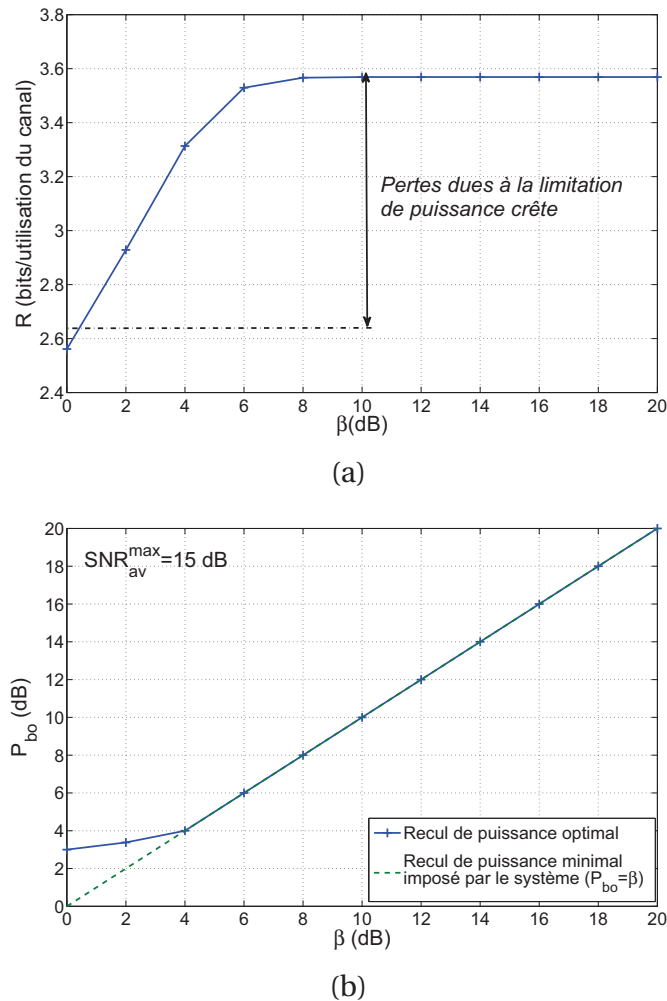


**Figure 5.10** — Pertes sur le taux d'information, normalisée par le taux d'information optimal, en fonction du rapport signal sur bruit et pour différentes valeurs de recul de puissance. Pertes mesurées sur le canal (b) sondé au large de Marthas Vineyard.

si fixer le recul de puissance indépendamment du SNR peut induire une diminution importante du taux d'information. La figure 5.10 montre cette perte normalisée par le taux d'information optimal pour le canal (b) sondé au large de Marthas Vineyard. Tout d'abord, on peut noter sur cette figure qu'il n'y a pas de recul de puissance qui garantisse des performances proches de l'optimal pour une large gamme de SNR, ce qui met en évidence le bénéfice de l'optimisation. Cependant, si l'environnement dans lequel le système opère est à peu près connu par le concepteur de système et relativement stable, alors une optimisation adaptative « en ligne » n'est pas forcément nécessaire. Dans certains cas, une connaissance approchée des statistiques du canal peut en effet être fournie a priori par le concepteur de système plutôt que par un lien de retour. Par exemple, sur la figure 5.10, on observe qu'un recul de puissance de 4 dB garantit une perte sur le taux d'information inférieure à 10% par rapport à l'optimal, et ce, pour un SNR compris entre 10 et 25 dB. Par conséquent, si le concepteur sait que dans la plupart des situations son système va opérer dans une telle gamme de SNR, alors le recul de puissance peut être fixé « hors ligne » à 4 dB, sans nécessité de lien de retour et sans impliquer une perte significative de débit.

### Limitation en puissance crête et puissance moyenne

Pour les systèmes alimentés par des batteries ou contraints par la surchauffe des transducteurs,  $\beta$  est généralement supérieur à 1. A la figure 5.11, nous analysons l'impact de la contrainte  $\beta$  sur le taux d'information en utilisant le canal (a) sondé ren rade de Brest comme exemple. Le SNR moyen maximum est fixé à 15 dB de sorte que  $\Omega^2$  augmente avec  $\beta$ . La figure 5.11-(a) montre le prix à payer en perte de taux d'information du fait de la contrainte sur la puissance crête. A mesure que  $\beta$  augmente, la contrainte sur la puissance crête devient moins restrictive, induisant un meilleur taux d'information. Pour un niveau de puissance moyenne transmise fixé, les systèmes capables de supporter des forts rapports de puissance crête sur puissance moyenne sont par conséquent fortement souhaitables. Ceci corrobore les résultats obtenus dans le chapitre 4. On peut aussi obser-

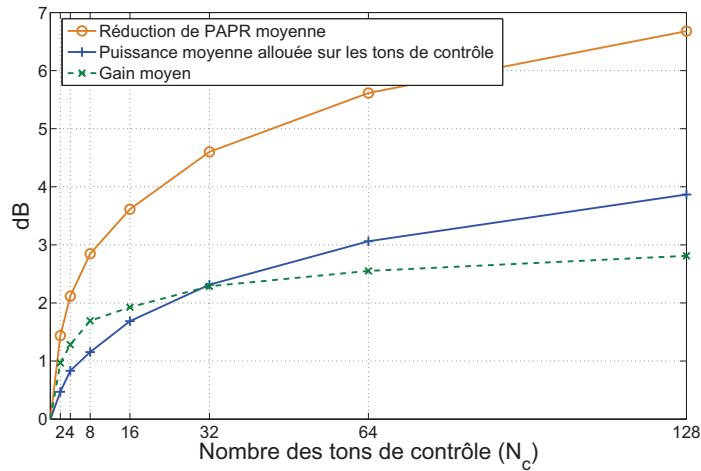


**Figure 5.11** — (a) Taux d'information optimal en fonction de  $\beta$ . (b) Recul de puissance optimal en fonction de  $\beta$ . Canal (a) sondé en rade de Brest,  $SNR_{av}^{max} = 15$  dB.

ver sur la figure 5.11-(a) que lorsque  $\beta$  atteint 8 dB, le taux d'information  $R$  sature, ce qui indique que les systèmes avec une contrainte  $\beta$  supérieure à 8 dB sont quasiment équivalents à des systèmes sans contraintes sur la puissance crête. La figure 5.11-(b) montre, quant à elle, l'évolution du recul de puissance optimal en fonction de  $\beta$ . A mesure que  $\beta$  augmente, on observe que le recul de puissance  $P_{bo}$  optimal tend vers  $\beta$ . Ceci indique que pour un rapport signal sur bruit donné et à partir d'un certain  $\beta$  (4 dB dans notre exemple), la meilleure stratégie consiste à transmettre à la puissance moyenne maximale autorisée.

### Impact des méthodes de réduction de PAPR

Une des questions à laquelle nous souhaiterions répondre est de savoir si les méthodes de réduction de PAPR conçues pour les systèmes multi-porteuses sont bénéfiques



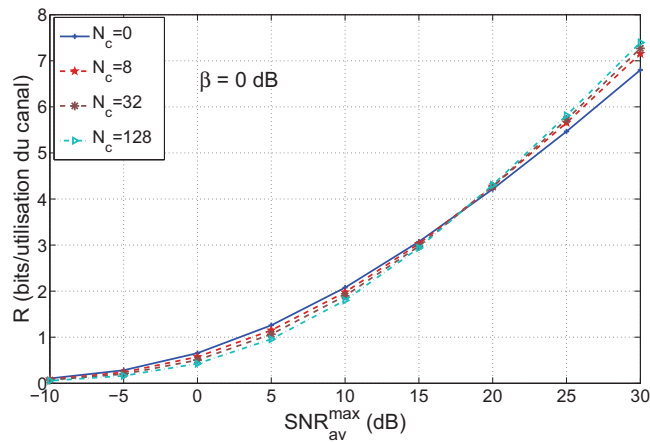
**Figure 5.12** — Puissance moyenne allouée au tons de contrôle hors bande et réduction moyenne du PAPR en fonction du nombre de tons de contrôle. Le gain moyen est défini comme la moyenne du rapport entre la réduction du PAPR et la puissance consommée par les tons de contrôle.  $N = 128$ .

du point de vue du taux d'information. Le PAPR avant amplification est défini comme

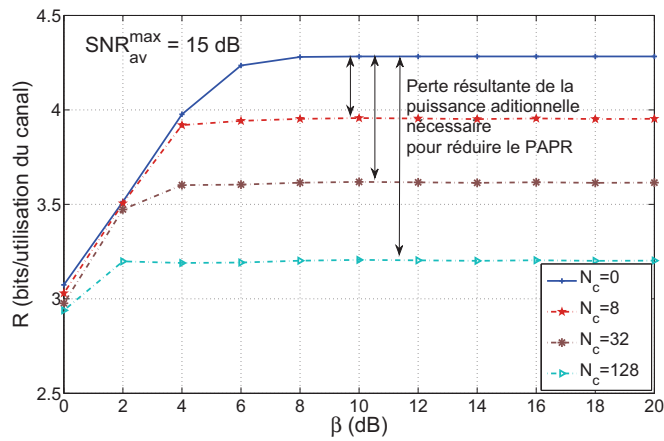
$$\text{PAPR} = \frac{\max_{0 < t \leq T} |z(t)|^2}{\underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}\{|z(t)|^2\} dt}_{\triangleq 1}}. \quad (5.45)$$

Si l'on arrive à réduire ce PAPR effectif, il est alors possible de diminuer le phénomène de distorsion résultant de l'écrêtage du signal transmis par l'amplificateur. Il existe de nombreuses méthodes de réduction de PAPR dans la littérature, basées, par exemple, sur l'utilisation de mots de code particuliers, sur l'altération de la phase des symboles transmis ou sur l'utilisation de tons de contrôles [Han and Lee, 2005]. Récemment, une méthode de réduction de PAPR spécialement adaptée au contexte ASM a été proposée dans [Rojo and Stojanovic, 2010]. Cette technique est basée sur l'insertion de tons de contrôles dont les symboles sont optimisés afin de limiter la puissance crête du signal global avant amplification. Cette approche est particulière au contexte ASM car ces tons de contrôle sont insérés en dehors de la bande passante nominale du transducteur, et par conséquent, automatiquement filtrés lorsque le signal est transformé en onde acoustique. Cette méthode est communément appelée la méthode OTI pour « out-of-band tone insertion ».

Le point critique des méthodes de réduction de PAPR est qu'elles ne sont pas gratuites. Elles requièrent soit la transmission de pilotes supplémentaires qui réduisent le débit ou alors elles ont besoin de puissance supplémentaire pour réguler le PAPR. La méthode OTI tombe dans la deuxième catégorie. Comme les tons de contrôle sont en dehors de la bande de transmission, ils n'affectent pas l'efficacité spectrale. Par contre, ils consomment de la puissance. A titre d'exemple, la figure 5.12 montre la puissance moyenne allouée aux tons de contrôle OTI ainsi que la réduction moyenne de PAPR résultante en fonction du nombre  $N_c$  de tons de contrôle. Le système OFDM est ici composé



(a)



(b)

**Figure 5.13** — Impact de la méthode de réduction de PAPR OTI sur le taux d’information. (a) Taux d’information en fonction du rapport signal sur bruit, (b) taux d’information en fonction de  $\beta$ . Canal (a) sondé en rade de Brest.

de 128 sous-porteuses. Du point de vue du SNR ou du SNDR, la technique OTI offre des avantages puisque la réduction de PAPR est toujours supérieure à la puissance allouée aux tons de contrôle (i.e., le gain moyen est supérieur à 0 dB). Par ailleurs, l’augmentation du nombre  $N_c$  de tons de contrôle implique une meilleure réduction de PAPR, mais nécessite également plus de puissance. Le problème est maintenant de savoir si cette méthode a un rendement positif du point de vue du taux d’information.

Pour ce faire, nous avons tracé aux figures 5.13-(a) et (b) l’impact de la méthode OTI sur le taux d’information en fonction respectivement du rapport signal sur bruit et de  $\beta$ . Le bénéfice de la réduction de PAPR est mitigé. A faible SNR, la figure 5.13-(a) montre que la puissance consommée par les tons de contrôle est prédominante sur la réduction de PAPR, résultant ainsi en une perte du taux d’information. La méthode OTI est seulement bénéfique à fort SNR où le recul de puissance est assez important (cf. fig. 5.8-(b)). De plus, comme montré à la figure 5.13-(b), la réduction de PAPR est plutôt contre-productive pour les systèmes avec un  $\beta$  important. La puissance requise pour réduire le PAPR de-

vient un facteur limitant au regard du taux d'information.

### 5.2.6 Directives de conception

L'analyse numérique des stratégies d'optimisation de puissance montre des résultats cohérents au travers des différents canaux testés<sup>7</sup>. Pour des canaux sous-étalés, ces résultats fournissent des directives de conception qui peuvent être résumées comme suit :

- L'optimisation de puissance peut apporter une amélioration significative du taux d'information seulement pour les systèmes qui sont principalement limités par leur puissance crête et peu par leur puissance moyenne (i.e., avec un faible  $\beta$ ).
- Un schéma optimisé d'allocation de puissance sur les sous-porteuses est seulement bénéfique à faible SNR et pour des canaux qui présentent des statistiques très disparates d'un sous canal fréquentiel à l'autre. Ce qui n'est pas le cas des canaux testés.
- Pour les systèmes principalement limités par leur puissance crête (i.e., avec un  $\beta$  faible) et travaillant à faible SNR, faire fonctionner l'amplificateur proche de la zone de saturation s'avère bénéfique, même si cela introduit de la forte distorsion.
- Pour les systèmes principalement limités par leur puissance crête et travaillant à fort SNR (> 15 dB), l'implémentation de techniques de réduction de PAPR semble avantageux.
- Pour les systèmes principalement limités par leur puissance moyenne (i.e., avec un  $\beta$  supérieur à 5 dB sur les canaux testés), les techniques de réduction de PAPR peuvent être contre-productives.

### 5.2.7 Cas des canaux sur-étalés

Dans le cas des canaux sur-étalés et plus généralement lorsque l'approximation (5.35) n'est plus valable, l'optimisation de la puissance de transmission va dépendre des capacités de traitement supposées du récepteur.

#### Absence de traitement de l'interférence à la réception

Lorsque l'interférence n'est pas exploitée par le récepteur, elle est considérée comme un bruit supplémentaire. Dans ce cas, le problème d'optimisation de puissance est très similaire à celui présenté pour les canaux sous-étalés. En modélisant l'interférence comme un bruit gaussien, la fonction de coût  $R$ , homogène au taux d'information, peut en effet s'écrire

$$R \approx \frac{1}{TF} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbb{E}_{h_{k,n}} \{ \log(1 + \text{SINDR}(n)) \}, \quad (5.46)$$

où  $\text{SINDR}(n)$  dénote le rapport signal sur interférence plus bruit plus distorsion à la sous-porteuse  $n$

$$\text{SINDR}(n) = \frac{\alpha^2 \Phi_n}{\mathbb{E} \{ |d_{k,n}|^2 \} + (\sigma_{w_n}^2 + \sigma_{I_n}^2) \eta / (\Omega^2 |h_{k,n}|^2)}. \quad (5.47)$$

7. Les stratégies d'optimisation ont aussi été testées sur des canaux méditerranéens.

où  $\sigma_{I_n}^2$  est la puissance de l'interférence à la sous-porteuse  $n$ . Cette puissance se calcule comme dans l'équation (5.17) mais en considérant cette fois-ci une répartition de la puissance des données pas nécessairement homogène d'une sous-porteuse à l'autre (i.e,  $\sigma_{I_n}^2$  dépend du vecteur d'allocation de puissance  $\Phi$ ).

Du fait de la similarité de formulation du problème d'optimisation avec le cas sous-étalé, les directives de conception listées à la section 5.2.6 s'appliquent ici aussi. La différence principale entre les deux scénarios apparaît sur le vecteur  $\Phi$  optimal qui n'est pas le même suivant que l'on considère l'interférence ou non.  $\sigma_{I_n}^2$  dépend en effet de  $\Phi$ . Cette différence n'a pas de grandes conséquences sur les directives de conception à suivre puisque, comme indiqué à la section 5.2.6, l'optimisation de  $\Phi$  impacte peu le taux d'information.

### Traitement de l'interférence à la réception

Dans le cas d'une transmission sur un canal sur-étalé avec un récepteur capable d'exploiter l'information reçue sous forme d'interférence, l'optimisation de puissance se révèle beaucoup plus ardue. Les données observées doivent en effet se traiter dans leur globalité et non plus sous-porteuse par sous-porteuse. De ce fait, en plus de l'optimisation du recul de puissance, on ne doit plus uniquement optimiser la puissance allouée sur chaque sous-porteuse mais la matrice de covariance des données. Si l'on reprend la formulation matricielle de l'équation (5.26) et que l'on intègre la possible distorsion due à la contrainte sur la puissance crête, l'entrée et la sortie du canal de transmission vérifient

$$\mathbf{y}_{WH} = \mathbf{H}_{WH} (\alpha \mathbf{x}_{WH} + \mathbf{d}_{WH}) + \mathbf{w}_{WH}, \quad (5.48)$$

où  $\mathbf{d}_{WH}$  est le vecteur distorsion de taille  $KN \times 1$ . Dans ce cas, la fonction de coût représentant le taux d'information s'écrit

$$\begin{aligned} R \approx \frac{1}{TF \times K} \mathbb{E}_{\mathbf{H}_{WH}} \left\{ \log \det \left( \mathbf{H}_{WH} (\alpha \mathbf{R}_{x_{WH}} + \mathbf{R}_{d_{WH}}) \mathbf{H}_{WH}^\dagger + \mathbf{R}_{w_{WH}} \right) \right. \\ \left. - \log \det \left( \mathbf{H}_{WH} \mathbf{R}_{d_{WH}} \mathbf{H}_{WH}^\dagger \right) - \log \det \left( \mathbf{R}_{w_{WH}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.49)$$

où  $\mathbf{R}_{x_{WH}}$  et  $\mathbf{R}_{d_{WH}}$  sont respectivement les matrices de covariance des données et de la distorsion, toutes deux de dimension  $KN \times KN$ . Le problème consiste alors à trouver  $\mathbf{R}_{x_{WH}}$  et  $P_{bo}$  qui maximisent  $R$  sous les mêmes contraintes que celles données à l'équation (5.39).

Ce problème reste ouvert et n'a pas été résolu dans le cadre de cette thèse. La difficulté du problème vient de la dimension des matrices à optimiser et de la dépendance entre  $\mathbf{R}_{x_{WH}}$  et  $\mathbf{R}_{d_{WH}}$ . Une manière d'aborder le problème serait de considérer des cas particuliers de ce problème très général. Par exemple, si l'on considère que  $g(t)$  et  $\gamma(t)$  sont choisies de façon à ce qu'il n'y ait pas d'interférence entre symboles, alors il faut juste traiter l'interférence entre sous-porteuses et la dimension du problème passe de  $KN \times KN$  à  $N \times N$ . De la même manière, le problème se simplifie pour les cas où la contrainte sur la puissance moyenne est forte (i.e.,  $\beta$  grand), la distorsion peut être négligée et le problème consiste alors à trouver  $\mathbf{R}_{x_{WH}}$  uniquement. Pour ce cas particulier et en supposant un canal de Rayleigh, la structure optimale de  $\mathbf{R}_{x_{WH}}$  est connue et est donnée dans [Tauböck and Hlawatsch, 2007].



---

# Conclusion

L'étude menée dans le chapitre 4 nous a permis d'identifier des nouvelles bornes sur la capacité non-cohérente des canaux ASM SISO, modélisés ici comme des canaux de Rice doublement dispersifs. Afin de refléter les contraintes imposées par le matériel électronique et acoustique sur le signal transmis, nous avons considéré des puissances crête et moyenne finies. Les effets d'une puissance crête limitée et d'une configuration non-cohérente ont été quantifiés au travers, respectivement, d'une perte sur le rapport signal sur bruit moyen et d'un terme de pénalité fonction du spectre Doppler du canal.

Les évaluations numériques ont montré que pour des systèmes de transmission faiblement contraints en puissance crête (rapport puissance crête sur puissance moyenne minimum supérieur à 8 dB), le terme de pénalité reste faible et la configuration non-cohérente n'implique pas de perte significative sur la capacité comparativement au contexte cohérent.

En appliquant les bornes de capacité sur un canal ASM réel, nous avons montré que dans des environnements petit-fond typiques (fort facteur de Rice, facteur d'étalement de l'ordre de  $10^{-2}$ ), il est théoriquement possible de doubler, voire tripler, les débits de transmission par rapport aux modems haut-débit commercialisés actuellement qui opèrent autour de 1 bit/s/Hz.

Dans le but ensuite de trouver le bon compromis entre robustesse et efficacité spectrale des systèmes de transmission ASM, nous nous sommes intéressés, au chapitre 5, aux schémas de signalisation multi-porteuses de type Weyl-Heisenberg. Ces schémas multiplexent l'information dans le domaine temps-fréquence offrant ainsi la possibilité de s'adapter au caractère doublement dispersif du canal ASM. Au travers du choix des fonctions prototypes et de la grille temps-fréquence qui caractérisent les schémas de Weyl-Heisenberg, nous avons discuté de la possibilité d'optimiser la puissance de l'interférence observée à la réception, favorisant ainsi la robustesse du système, et/ou de la possibilité d'utiliser au maximum les degrés de liberté offerts par le canal, favorisant alors l'efficacité spectrale.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié des techniques d'optimisation de puissance favorables au taux d'information. Ces techniques reposent sur la connaissance des statistiques du canal à l'émission. Nous avons considéré l'optimisation de la puissance allouée sur chaque sous-porteuse en fonction de la sélectivité fréquentielle du canal, tout en intégrant les contraintes de puissance crête et moyenne finies imposées par les amplificateurs et/ou les transducteurs acoustiques. La limitation de la puissance crête est



connue pour avoir un impact notable sur les performances des systèmes multi-porteuses du fait de la dynamique temporelle importante de leur forme d'onde. Les zones de linéarité des amplificateurs ou des transducteurs étant limitées, le compromis entre faire fonctionner l'émetteur en régime linéaire ou saturé a été analysé. L'optimisation de puissance a ainsi été réalisé conjointement sur la puissance allouée aux sous-porteuses et sur le recul de puissance moyenne contraint par la limitation en puissance crête. L'impact de méthodes de réduction du PAPR sur le taux d'information a également été étudié.

Pour les canaux dits sous-étalés, nous avons montré que l'optimisation de puissance est bénéfique uniquement pour les systèmes fortement contraints par leur puissance crête et peu par leur puissance moyenne. L'amélioration du taux d'information apportée par l'optimisation de la puissance allouée sur chaque sous-porteuse est marginale lorsque la connaissance du canal à l'émission est limitée aux statistiques. Enfin, pour les systèmes fortement contraints par leur puissance crête, faire fonctionner les amplificateurs proches de la saturation s'avère bénéfique à faible SNR et implémenter des méthodes de réduction de PAPR est surtout avantageux à fort SNR.

---

# Conclusion générale et perspectives

## Synthèse des contributions

Tout au long de ce manuscrit, nous nous sommes attaché à caractériser le canal de communication acoustique sous-marin afin de proposer des outils de conception/validation de modems et d'identifier les schémas de signalisation adaptés à la structure de ce canal. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressé à la modélisation statistique des canaux ASM dispersifs en temps et fréquence en exploitant différents degrés d'information a priori sur le milieu à modéliser. Dans la seconde partie, nous avons cherché à connaître les limites théoriques de débit de communication qu'il est possible d'atteindre en ASM et avons proposé des directives de conception des schémas de signalisation qui permettent d'optimiser les ressources offertes par le milieu de propagation.

Plus précisément, les principales contributions de ce travail de thèse sont les suivantes :

- En exploitant le principe d'entropie maximale, nous avons montré au chapitre 2 qu'il était possible de construire un modèle paramétrique du canal de communication ASM qui soit
  1. *cohérent*-le modèle ne repose que sur une connaissance objective de l'environnement à modéliser,
  2. *concis*-relativement peu de paramètres sont nécessaires pour caractériser assez précisément le canal doublement dispersif (sous l'hypothèse de stationnarité au sens large de celui-ci),
  3. *ouvert*-le modèle est évolutif et peut être mis à jour à chaque fois qu'une nouvelle information sur l'environnement à modéliser est disponible.

Ce modèle présente également l'avantage d'autoriser l'utilisation de paramètres d'entrée dits incertains dont les valeurs numériques ne sont pas connues exactement. Le recours à ces paramètres s'avère très pertinent lorsque l'on est seulement en mesure de borner notre connaissance sur le canal.

- En analysant des données recueillies dans l'océan Atlantique et la mer Méditerranée, nous avons montré au chapitre 3 que les canaux de transmission ASM

pouvaient être modélisés par des processus aléatoires stationnaires en tendance. Ce modèle est plus général que l'hypothèse habituelle de stationnarité au sens large et convient particulièrement aux canaux avec des émetteurs/récepteurs en mouvement. De plus, dans ce chapitre 3, nous avons proposé un modèle de rejeu stochastique qui permet de reproduire de façon fiable la réalité physique du milieu ASM en intégrant notamment la corrélation potentielle entre trajets.

- En considérant un maximum de contraintes réalistes, nous avons proposé au chapitre 4 de nouvelles bornes de capacité du canal ASM. Le canal a été supposé doublement dispersif, les puissances crêtes et moyennes limitées et la réalisation courante du canal inconnue de l'émetteur et du récepteur (contexte non-cohérent). Nous avons montré dans ce chapitre que la mise en œuvre de systèmes de communication offrant une efficacité spectrale deux ou trois fois supérieure à l'état de l'art apparaissait comme un objectif raisonnable pour les canaux ASM petit-fond typiques avec un SNR de 15 à 20 dB. De plus, pour une puissance moyenne de transmission fixée, il a également été montré que des systèmes autorisant des rapports puissance crête sur puissance moyenne importants étaient fortement souhaitables.
- Dans le but de trouver le bon compromis entre robustesse et efficacité spectrale, nous avons discuté au chapitre 5 de l'optimisation des schémas de signalisation multi-porteuses de type Weyl-Heisenberg. Nous avons proposé une méthode d'analyse de l'influence des fonctions prototypes et de la grille temps-fréquence sur l'interférence observée à la réception et sur l'efficacité spectrale. De plus, nous avons identifié des techniques d'optimisation de puissance favorables au taux d'information. Plus particulièrement, pour les canaux dits sous-étalés, nous avons montré que :
  1. l'optimisation de puissance est bénéfique uniquement pour les systèmes fortement contraints par leur puissance crête et peu par leur puissance moyenne,
  2. l'amélioration du taux d'information apportée par l'optimisation de la puissance allouée sur chaque sous-porteuse est marginale lorsque la connaissance du canal à l'émission est limitée aux statistiques,
  3. pour les systèmes fortement contraints par leur puissance crête, faire fonctionner les amplificateurs proches de la saturation s'avère bénéfique à faible SNR et implémenter des méthodes de réduction de PAPR est surtout avantageux à fort SNR.

## Perspectives

Les travaux initiés lors de la thèse permettent d'envisager les perspectives suivantes :

- Les modèles de canaux proposés aux chapitre 2 et 3 se focalisent essentiellement sur les fluctuations rapides du canal ASM. Afin de compléter ces modèles, il serait intéressant d'ajouter les fluctuations lentes de ce canal. Même si elles sont moins

- critiques pour les systèmes de communication que les fluctuations rapides, elles peuvent impacter la conception de systèmes qui transmettent sur de longues périodes et qui ont la capacité de s'adapter (au travers de leur puissance notamment) aux variations lentes de l'environnement. Une caractérisation des fluctuations lentes permettrait d'étendre le modèle à entropie maximale aux canaux non stationnaires au sens large et permettrait également d'appliquer la méthode du rejeu stochastique sur des durées supérieures à la durée de la réponse impulsionnelle initialement observée. Ces fluctuations lentes ne peuvent être caractérisées que si des campagnes de sondage de canaux réels sont réalisées sur de longues périodes.
- Dans un contexte où des efforts émergent de la communauté de recherche en ASM pour proposer des protocoles de communication standardisés, il serait pertinent de mutualiser, au niveau international, les bases de données de canaux sondés en mer. A partir de cette base et à l'aide de techniques de rejeu stochastique comme celle que nous avons proposée ou celle présentée dans [van Walree et al., 2008], il serait alors possible de comparer de façon objective des techniques de transmission concurrentes.
  - Au chapitre 4, nous avons exprimé les bornes de capacité en fonction du rapport signal sur bruit. Pour être plus facilement exploitables, il serait judicieux de coupler ces bornes avec un modèle de propagation physique qui exprime le rapport signal sur bruit en fonction de la distance entre l'émetteur et le récepteur et des caractéristiques de la chaîne de transmission (puissances crête et moyenne en dB re  $\mu\text{Pa}$  @ 1 m, largeur de bande disponible etc.). Pour une puissance d'émission et une distance fixées, ce couplage avec un modèle physique pourrait aussi nous permettre d'identifier la bande et la fréquence optimales de transmission qui maximiseraient le débit d'information. De plus, dans notre travail sur la capacité, nous avons contraint les données transmises à être i.i.d afin de faciliter les calculs. Pour déterminer la capacité au sens strict du terme, il faudrait relâcher cette contrainte. En lien avec les perspectives sur la modélisation de canaux, il serait aussi intéressant d'intégrer les fluctuations lentes du canal pour pouvoir déterminer la capacité en terme de probabilité de coupure (« outage capacity »), ce type de métrique étant plus pertinent que la capacité ergodique pour les systèmes qui transmettent en continu sur de longues périodes. Enfin, lorsque les infrastructures le permettent, l'utilisation de plusieurs transducteurs à l'émission et d'hydrophones à la réception s'avère favorable à l'augmentation du débit. Il conviendrait donc d'étendre ces travaux de capacité non-cohérente et limitée en puissance crête aux canaux MIMO.
  - La question d'optimisation du schéma de signalisation évoquée au chapitre 5 reste très ouverte. Nous avons travaillé sur des schémas multi-porteuses de Weyl-Heisenberg car ceux-ci nous semblent adaptés au caractère doublement dispersif du canal mais rien ne garantit qu'ils soient optimaux au regard de la capacité du canal. Dans notre effort d'optimisation de ces schémas de Weyl-Heisenberg, nous avons dissocié les différents paramètres (fonctions prototypes, grille  $TF$  et puissance) qui influent sur leurs performances. Idéalement, il faudrait réaliser l'optimisation de façon conjointe car ces paramètres sont fortement dépendants

les uns des autres. De plus, dans ce chapitre 5 nous avons supposé la distribution du canal connue à l'émission, dans la pratique cette information peut se trouver quantifiée ou partielle. Ainsi, il serait intéressant d'étudier l'impact du degré de connaissance des statistiques (seuls quelques moments connus, grandeurs quantifiées etc.) du canal à l'émission sur les choix d'optimisation.

- En parallèle des travaux présentés dans ce manuscrit, quelques mois de la thèse ont été dédiés à l'implémentation et la validation en mer d'une chaîne complète de transmission multi-porteuse de type OFDM avec des fonctions prototypes rectangulaires. Il conviendrait d'améliorer cette chaîne de transmission en optimisant les fonctions prototypes, la puissance émise et les traitements de réception au regard des éléments présentés dans le chapitre 5.

---

# Publications

Les travaux de recherche menés durant ces trois années de thèse sur les communications acoustiques sous-marines ont donné à lieu des publications qui sont référencées ci-dessous. La liste complète des publications de l'auteur, intégrant les publications sur des sujets autres que ceux relatifs aux communications acoustiques, est disponible à l'adresse <http://perso.telecom-bretagne.eu/fxsocheleau/Publications/>

## Articles de journaux

- J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, C. Laot, "Achievable Rates over Doubly Selective Rician-Fading Channels under Peak-Power Constraint", *soumis à IEEE Trans. Wireless Commun.*, Oct. 2011
- F.-X. Socheleau, C. Laot, and J.-M. Passerieux, "Stochastic Replay of Non-WSSUS Underwater Acoustic Communication Channels Recorded at Sea", *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 59, No. 10, pp. 4838-4849, 2011
- F.-X. Socheleau, C. Laot, J.-M. Passerieux, "Concise Derivation of Scattering Function from Channel Entropy Maximization", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 58, n°11, pp. 3098-3103, Novembre 2010

## Articles de conférences

- F.-X. Socheleau, J.-M. Passerieux, C. Laot, "Le canal de communication acoustique sous-marin : point de vue de la théorie de l'information", *XXIII colloque GRETSI*, Septembre 2011
- J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, X. Cristol, "High Fidelity Simulation Tools for Performance Assessment of Underwater Acoustic Communications Modems", *Maritime Systems and Technology*, Juin 2011
- F.-X. Socheleau, J.-M. Passerieux, C. Laot, "Acoustic Modem Performance Assessment via Stochastic Replay of at Sea Recorded underwater Acoustic Communication Channels", *Underwater Acoustic Measurements*, Juin 2011

- J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, C. Laot, "On the capacity of the Underwater Acoustic Communication Channel under Realistic Assumptions", *IEEE European Wireless*, Mai 2011
- J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, C. Laot, "Shallow Water Acoustic Communications : How Far are we from the Channel Capacity?", *European Conference on Underwater Acoustics*, Juillet 2010
- F.-X. Socheleau, C. Laot, J.-M. Passerieux, "A Maximum Entropy Framework for Statistical Modeling of Underwater Acoustic Communication Channels", *IEEE OCEANS'10 Conf*, Juin 2010
- F.-X. Socheleau, J.-M. Passerieux, C. Laot, "Characterisation of time-varying underwater acoustic communication channel with application to channel capacity", *Underwater Acoustic Measurements*, Juin 2009

---

# Bibliographie

- A. Abdi, C. Tepedelenlioglu, M. Kaveh, and G. Giannakis. On the Estimation of the K Parameter for the Rice Fading Distribution. *IEEE Commun. Lett.*, 5(3), 2001.
- H. Artes, G. Matz, and F. Hlawatsch. Unbiased Scattering Function Estimators for Underspread Channels and Extension to Data-Driven Operation. *IEEE Trans. Signal Process.*, 52(5) :254–264, 2004.
- A. B. Baggeroer. Acoustic Telemetry-An Overview. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 9(4), 1984.
- A. R. S. Bahai, M. Singh, A. J. Goldsmith, and B. R. Saltzberg. A New Approach for Evaluating Clipping Distortion in Multicarrier Systems. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 20(05) : 1037–1045, 2002.
- P. Banelli and S. Cacopardi. Theoretical Analysis and Performance of OFDM Signals in Nonlinear AWGN Channels. *IEEE Trans. Commun.*, 48(03) :430–441, 2000.
- P. Bello. Some Techniques for the Instantaneous Real-Time Measurement of Multipath and Doppler Spread. *IEEE Trans. Commun. Tech.*, 13(3) :285–292, 1965.
- P. A. Bello. Characterization of randomly time-variant linear channels. *IEEE Trans. Commun. Systems*, 11(4) :360–393, 1963.
- C. R. Berger, S. Zhou, J. C. Preisig, and Peter Willett. Sparse Channel Estimation for Multicarrier Underwater Acoustic Communication : From Subspace Methods to Compressed Sensing. *IEEE Trans. Signal Process.*, 58(3) :1708 – 1721, 2010.
- E. Biglieri, J.G. Proakis, and S. Shamai (Shitz). Fading channels : Information-theoretic and communication aspects. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 44 :2619–2692, 1998.
- C. Bjerrum-Niese and R. Lützen. Stochastic Simulation of Acoustic Communication in Turbulent Shallow Water. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 25(4), 2000.
- J.F. Bonnans, J.Ch. Gilbert, C. Lemaréchal, and C.A. Sagastizábal. *Numerical Optimization : Theoretical and Practical Aspects*. Springer, 2006.
- L. M. Brekhovskikh and Yu P. Lysanov. *Fundamentals of Ocean Acoustics*. Springer-Verlag, 1991.



- M. J. Buckingham. Ocean-acoustic propagation models. *Journal d'acoustique*, 5(3) :223–287, 1992.
- J. P. Burg. *Maximum Entropy Spectral Analysis*. PhD thesis, Department of Geophysics, Stanford University, 1975.
- S.-H. Byun, S.-M Kim, Y.-K. Lim, and W Seong. Time-varying Underwater Acoustic Channel Modeling for Moving Platform. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 2007.
- L. Chen and C. W. Letchford. Simulation of Multivariate Stationary Gaussian Stochastic Processes : Hybrid Spectral Representation and Proper Orthogonal Decomposition Approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 131(8) :801–808, 2005.
- M. Chitre. A high-frequency warm shallow water acoustic communications channel model and measurements. *J. Acoust. Soc. Am.*, 122(1), 2007.
- P. S. Chow, J. M. Cioffi, and J. A. C. Bingham. Practical discrete multitone transceiver loading algorithm for data transmission over spectrally shaped channels. *IEEE Trans. Commun.*, 43(2-4) :773–775, 1995.
- O. Christensen. *An Introduction to Frames and Riesz Bases*. Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2003.
- C.S. Clay and H. Medwin. *Acoustical Oceanography, principles and applications*. Wiley-Interscience, 1977.
- R. Coates. Underwater acoustic communications. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Oct. 1993.
- T. Cover and J. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, 1991.
- R. T. Cox. Probability, frequency and reasonable expectation. *American Journal of Physics*, 14(1) :1–13, 1946.
- X. Cristol. NARCISSUS-2005 : A Global Model of Fading Channel for Application to Acoustic Communication in Marine Environment. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, pages 655–662, Brest, Jun. 2005.
- X. Cristol and J.M. Passerieux. Caractérisation expérimentale et modélisation physique des fluctuations temporelles du canal acoustique sous-marin. In *Proc. Journées scientifiques 2009 d'URSI-France*, Mar. 2009.
- M. Debbah and R. R. Müller. MIMO Channel Modeling and the Principle of Maximum Entropy. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 51(5) :1667–1690, 2005.
- X. Deng and A. Haimovich. Information rates of time varying rayleigh fading channels. In *Proc. IEEE Int. Conf. on Communications (ICC)*, Jun. 2004.
- G. Deodatis. Simulation of Ergodic Multivariate Stochastic Processes. *Journal of Engineering Mechanics*, 122(8) :778–787, 1996.
- J. Dieudonné. *Eléments d'analyse, vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1965.

- A. M. Djafari. A Matlab Program to Calculate the Maximum Entropy Distributions. [http://djafari.free.fr/pdf/me91\\_1.pdf](http://djafari.free.fr/pdf/me91_1.pdf).
- M.C. Domingo. Overview of channel models for underwater wireless communication networks. *Physical Communication*, 1(3) :163 – 182, 2008.
- G. Durisi, U.G. Schuster, H. Bölcskei, and S. Shamai (Shitz). Noncoherent capacity of underspread fading channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 56(1), 2010.
- A. Essebbar, G. Loubet, and F. Vial. Underwater Acoustic Channel Simulations for Communication. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 1994.
- P.C. Etter. *Underwater Acoustic Modeling and Simulation*, 3rd ed. Spon Press, 2003.
- G. Eynard and C. Laot. Blind Doppler Compensation Techniques for single Carrier Digital Underwater Communications. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 2008.
- P. Fan and M. Darnell. *Sequence Design for communications applications*. Research Studies Press Ltd, 1996.
- I.C. Abou Faycal, M.D. Trott, and S. Shamai (Shitz). The Capacity of Discrete-Time Memoryless Rayleigh Fading Channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 47(4) :1290–1301, 2001.
- B. Le Floch, M. Alard, and C. Berrou. Coded orthogonal frequency-division multiplex. *Proc. IEEE*, 83, June 1995.
- F. Frassati, C. Lafon, P.A. Laurent, and J.M. Passerieux. Experimental assessment of OFDM and DSSS modulations for use in littoral waters underwater acoustic communications. In *Proc. IEEE Oceans'05*, Jun. 2005.
- R.G. Gallager. *Information Theory and Reliable Communication*. Wiley, 1968.
- R. Galvin and R.E.W. Coats. A stochastic underwater acoustic channel model. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 1996.
- X. Geng and A. Zielinski. An eigenpath underwater acoustic communication channel model. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Oct. 1995.
- A. Goalic, J. Trubuil, and N. Beuzelin. Long Range Real-Time Underwater Acoustic Communication at Low Bit Rate with Channel Coding protection. In *IEEE Military Communications Conference*, Nov. 2008a.
- A. Goalic, J. Trubuil, and N. Beuzelin. Long range underwater acoustic communication using melp speech coder with channel coding protection. In *Proc. IEEE MILCOM'08*, Nov. 2008b.
- A. Goldsmith. *Wireless Communications*. Cambridge University Press, 2005.
- J.P. Gomes and M. Stojanovic. Performance Analysis of Filtered Multitone Modulation Systems for Underwater Communication. In *Proc. IEEE Oceans'09 Conference*, Oct. 2009.
- R.M. Gray. *Toeplitz and Circulant Matrices : A review*. NOW Publisher Inc., Hanover, 2006.

- K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, MA, USA, 2001.
- M. Guillaud, M. Debbah, and A. L. Moustakas. A Maximum Entropy Characterization of Spatially Correlated MIMO Wireless Channels. In *Proc. IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, Mar. 2007.
- M. Gursoy, H.V. Poor, and S. Verdú. The noncoherent Rician fading channel Part I : Structure of the capacity-achieving input. *IEEE Trans. Wireless Commun*, 4(5), September 2005.
- R. Haas and J. C. Belfiore. A Time-Frequency Well-localized Pulse for Multiple Carrier Transmission. *Wireless Personal Communications*, 5 :1–18, 1997.
- S.H. Han and J.H. Lee. An overview of peak-to-average power ratio reduction techniques for multicarrier transmission. *IEEE Wireless Commun.*, 12(2) :56–65, 2005.
- T. Hayward and T.C. Yang. Underwater acoustic communication channel capacity : A simulation study. In *Proceeding of AIP Conference*, pages 114–121, Nov. 2004.
- F. Hlawatsch and G. Matz. *Wireless Communications Over Rapidly Time-Varying Channels*. Elsevier, 2011.
- J. Holtzman and A. Sampath. Adaptive Averaging Methodology for Handoffs in Cellular Systems. *IEEE Trans. Veh. Technol.*, 44(1), 1995.
- J. Huang, S. Zhou, and P. Willett. Nonbinary LDPC Coding for Multicarrier Underwater Acoustic Communication. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 26(9) :1684 – 1696, 2008.
- N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M.L. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu. The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis. *Proc. R. Soc. London A*, 454 :903–995, 1998.
- X. Huang. Capacity criterion-based power loading for underwater acoustic OFDM system with limited feedback. In *Proc. of IEEE Wireless Communications, Networking and Information Security*, Jun. 2010.
- S.-J. Hwang and P. Schniter. Efficient Multicarrier Communication for Highly Spread Underwater Acoustic Channels. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 26(9), 2009.
- E. T. Jaynes. *Probability Theory : The Logic of Science*. Cambridge Univ. Press, 2003.
- E.T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. *Physical review*, 106(4) :620–630, 1957.
- E.T. Jaynes. On The Rationale of Maximum Entropy Methods. *Proc. Of the IEEE*, 70(9) : 939–952, 1982.
- P. Juhel. *Histoire de l'acoustique sous-marine*. Vuibert, 2005.
- D. B. Kilfoyle and A. B. Baggeroer. The State of the Art in Underwater Acoustic Telemetry. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 25(1), 2000.

- W. Kozek. *Matched Weyl-Heisenberg Expansions of Nonstationary Environments*. PhD thesis, Dept. Elec. Eng., Vienna Univ. Technol., Vienna, Austria, 1997.
- W. Kozek and A. F. Molisch. Nonorthogonal pulseshapes for multicarrier communications in doubly dispersive channels. *IEEE J. Select. Areas Commun.*, 16(8), 1998.
- C. Laot, N. Beuzeulin, and Arnaud Bourre. Experimental results on MMSE turbo equalization in underwater acoustic communication using high order modulation. In *Proc. IEEE Oceans'10*, Sep. 2010.
- G. Leus and P. A. van Walree. Multiband OFDM for Covert Acoustic Communications. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 26(9), 2009.
- B. Li, S. Zhou, M. Stojanovic, L. Freitag, and P. Willett. Multicarrier Communication Over Underwater Acoustic Channels With Nonuniform Doppler Shifts. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 33(2), 2008.
- B. Li, J. Huang, S. Zhou, K. Ball, M. Stojanovic, L. Freitag, and P. Willett. MIMO-OFDM for High Rate Underwater Acoustic Communications. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 34(4) :634 – 645, 2009.
- K. Liu, T. Kadous, and A. M. Sayeed. Orthogonal Time-Frequency Signaling over Doubly Dispersive Channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 50(11), 2004.
- D. Lucani, M. Medard, and M. Stojanovic. On the relationship between transmission power and capacity of an underwater acoustic communication channel. In *Proc. IEEE Oceans 08 Conference*, Kobe, Japan, Apr. 2008.
- X. Lurton. *An introduction to underwater acoustics : principles and applications*. Springer, 2011.
- S.F. Mason, C. R. Berger, S. Zhou, and P. Willett. Synchronization and Doppler Scale Estimation with Multicarrier Waveforms in Underwater Acoustic Communication. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 26(9), 2008.
- S.R. Massel. *Ocean Surface Waves : Their Physics and Prediction*. World Scientific Pub Co Inc, Hanover, 1996.
- G. Matz, D. Schafhuber, K. Gröchenig, M. Hartmann, and F. Hlawatsch. Analysis, Optimization, and Implementation of Low-Interference Wireless Multicarrier Systems. *IEEE Trans. on Wireless Commun.*, 6(5), 2007.
- J. Max and J.-L. Lacoume. *Méthodes et techniques de traitement du signal*. Dunod, 2004.
- M. Medard. The effect upon channel capacity in wireless communications of perfect and imperfect knowledge of the channel. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 46(3), May 2000.
- H. Ochiai. Performance Analysis of Peak Power and Band-Limited OFDM System With Linear Scaling. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2(5), Sep. 2003.

- H. Ochiai and H. Imai. Performance Analysis of Deliberately Clipped OFDM Signals. *IEEE Trans. Commun.*, 50(1), Jan. 2002.
- N. Ophir, J. Tabrikian, and H. Messer. Capacity Analysis of Ocean Channels. In *Proc. of IEEE Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing*, Jul. 2006.
- R. Otnes and T.H. Eggen. Underwater Acoustic Communications : Long-Term Test of Turbo Equalization in Shallow Water. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 33(3) :321–334, 2008.
- R. Otnes, T. Jenserud, J.E. Voldhaug, and C. Soldberg. A Roadmap to Ubiquitous Underwater Acoustic Communications and Networking. In *Proc. Underwater Acoustic Measurement : Technologies and Results*, Jun. 2009.
- Ö. Oyman, R. U. Nabar, H. Bölcskei, and A. J. Paulraj. Tight lower bounds on the ergodic capacity of Rayleigh fading MIMO channels. In *Proc. IEEE Globecom*, Nov. 2002.
- N. Papandreou and T. Antonakopoulos. Bit and power Allocation in Constrained Multi-carrier Systems : the Single-User Case. *Eurasip J. on Adv. in Sig. Proc.*, 2008, 2008.
- J.-M. Passerieux, F.-X. Socheleau, and C. Laot. On the capacity of the Underwater Acoustic Communication Channel under Realistic Assumptions,. In *in Proc. IEEE European Wireless*, Apr. 2011.
- M. B. Porter and H. P. Bucker. Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields. *J. Acoust. Soc. Am.*, 82 :1349–1359, 1987.
- J.G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, 2001.
- P. Qarabaqi and M. Stojanovic. Statistical Modeling of a Shallow Water Acoustic Communication Channel. In *Underwater Acoustic Measurement : Technologies and Results*, Jun. 2009.
- F. Qu and L. Yang. Basis Expansion Model for Underwater Acoustic Channels. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 2008.
- O. Rabaste. *Estimation de canaux multitrajets. Application à la Tomographie Acoustique Océanique active discrète*. PhD thesis, SC - Dépt. Signal et Communications (Institut Télécom-Télécom Bretagne), UR1 - Université de Rennes 1, 2006.
- A. Radošević, J. G. Proakis, and M. Stojanovic. Statistical Characterization and Capacity of Shallow Water Acoustic Channels. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, May 2009.
- R. Raich, H. Qian, and G.T. Zhou. Optimization of SNDR for Amplitude-Limited Nonlinearities. *IEEE Trans. Commun.*, 53(11) :1964–1972, 2005.
- N. Rehman and D.P. Mandic. Empirical Mode Decomposition for Trivariate Signals. *IEEE Trans. Signal Process.*, 58(3), Mar. 2010.
- S. O. Rice. Mathematical analysis of random noise. *Bell Syst. Tech Journal*, 23 :282–332, 1944.

- J.S. Richters. Communication over fading dispersive channels. Technical Report 464, MIT Res. Lab. Electronics, Cambridge, MA, 1967.
- S. T. Rickard, R. V. Balan, H. V. Poor, and S. Verdu. Canonical time-frequency time-scale, and frequency-scale representation of time-varying channels. *Communic. in Inform. and Systems*, 5(2) :197–226, 2005.
- G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves, and J.M. Lilly. Bivariate Empirical Mode Decomposition. *IEEE Signal Process. Lett.*, 14(12) :936–939, 2007. software available at <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.
- A.R. Robinson and D. Lef. *Oceanography and Acoustics. Prediction and Propagation Models*. AIP Press, 1994.
- G. Rojo and M. Stojanovic. Peak-to-Average Power Ratio (PAR) Reduction for Acoustic OFDM Systems. *Marine Technology Society Journal*, 44(4) :30–41, 2010.
- S. Roy, T. Duman, V. McDonald, and J. G. Proakis. High-Rate Communication for Underwater Acoustic Channels Using Multiple Transmitters and Space-Time Coding : Receiver Structures and Experimental Results. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 32(3) :663–688, 2007.
- E. Sangfelt, T. Öberg, B. Nilsson, and M. Lundberg-Nordenvaad. Underwater acoustic communications in the Baltic sea. In *Proc. UDT Asia 2008*, Nov. 2008.
- S. Sethuraman, L. Wang, B. Hajek, and A. Lapidoth. Low-SNR Capacity of Noncoherent Fading Channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 55(4) :1555–1574, 2009.
- V. Sethuraman and B. Hajek. Capacity per unit energy of fading channels with a peak constraint. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 51(9), 2005.
- S. Shamai and I. Bar-David. The capacity of average and peak-power-limited quadrature gaussian channels. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 41(4), Jul. 1995.
- C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423, 1948.
- B.S. Sharif, J. Neasham, O.R. Hinton, and A.E. Adams. A Computationally Efficient Doppler Compensation System for Underwater Acoustic Communications. *IEEE J. Ocean. Eng.*, 25(1), 2000.
- J. Shore and R. Johnson. Axiomatic Derivation of the Principle of Maximum Entropy and the Principle of Minimum Cross-Entropy. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 26(1) :26–37, 1980.
- A.C. Singer, J.K. Nelson, and S.S. Kozat. Signal processing for underwater acoustic communications. *IEEE Commun. Mag.*, pages 90–96, Jan. 2009.
- F.-X. Socheleau, J.-M. Passerieux, and C. Laot. Characterisation of Time-Varying Underwater Acoustic Communication Channel with Application to Channel Capacity. In *Proc. Underwater Acoustic Measurement*, Jun. 2009.

- F.-X. Socheleau, C. Laot, and J.-M. Passerieux. Concise derivation of scattering function from channel entropy maximization. *IEEE Trans. Commun.*, 58(11), Nov. 2010.
- F.-X. Socheleau, C. Laot, and J.-M. Passerieux. Stochastic Replay of non-WSSUS Underwater Acoustic Communication Channels Recorded at Sea. *IEEE Trans. Signal Process.*, 59(10) :4838–4849, 2011a.
- F.-X. Socheleau, J.-M. Passerieux, and C. Laot. Acoustic Modems Performance Assessment via Stochastic Replay of at Sea Recorded underwater Acoustic Communication Channels. In *Proc. Underwater Acoustic Measurement : Technologies and Results*, Jun. 2011b.
- M.A. Stephens. EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons. *Journal of the American Statistical Association*, 69(347) :730–737, 1974.
- S. Stigler. Fisher and the 5% level. *Chance*, 21(4), 2008.
- M. Stojanovic. On the Relationship Between Capacity and Distance in an Underwater Acoustic Communication Channel. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review (MC2R)*, 11(4) :64–43, 2007.
- M. Stojanovic. Underwater Acoustic Communications : Design Considerations on the Physical Layer. In *Proc. IEEE Conf. on Wireless On demand Network Systems and Services*, Jan. 2008.
- M. Stojanovic and J. Preisig. Underwater Acoustic Communication Channels : Propagation Models and Statistical Characterization. *IEEE Commun. Mag.*, pages 84–89, Jan. 2009.
- M. Stojanovic, S. Shahabudeen, and M. Chitre. Underwater acoustic communications and networking : Recent advances and future challenges. *Marine Technology Society Journal*, 42(1), 2008.
- M. Stojanovic and L. Freitag. Integrated doppler tracking and efficient resampling for phase coherent acoustic communication. *available : [www.mit.edu/militsa/resources/pdfs/joedop.pdf](http://www.mit.edu/militsa/resources/pdfs/joedop.pdf)*.
- T. Strohmer and S. Beaver. Optimal OFDM design for time-frequency dispersive channels. *IEEE Trans. Commun.*, 51(7), July 2003.
- G. Tauböck and F. Hlawatsch. On the Capacity-Achieving input Covariance for Multicarrier Communications over Doubly Selective Channels. In *Proc. IEEE International Symposium on Information Theory*, June. 2007.
- B. Tomasi, J. Preisig, G. B. Deane, and M. Zorzi. A Study on the Wide-Sense Stationarity of the Underwater Acoustic Channel for Non-coherent Communication Systems. In *Proc. of IEEE European Wireless*, Apr. 2011.
- J. Trubuil, A. Goalic, N. Beuzelin, and C. Laot. Underwater acoustic communication using reed solomon block turbo codes channel coding to transmit images and speech. In *Proc. IEEE Oceans'10*, Sep. 2010.

- J. Uffink. Can the Maximum Entropy Principle be Explained as a Consistency Requirement. *Stud. Hist. Phil. Mod. Phys.*, 26(3) :223–261, 1996.
- P. van Walree. Channel sounding for acoustic communications : techniques and shallow-water examples. *Research report, Norwegian Defence Research Establishment (FFI)*, 2011.
- P. van Walree, P. Jenserud, and M. Smedsrud. A Discrete-Time Channel Simulator Driven by Measured Scattering Functions. *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 26(9) :1628–1637, 2008.
- S. Wei, D.L. Goeckel, and P.A. Kelly. Convergence of the Complex Envelope of Bandlimited OFDM Signals. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 56(10), Oct. 2010.
- Z. Wu, N. E. Huang, S. R. Long, and C.-K. Peng. On the trend, detrending, and variability of nonlinear and nonstationary time series. *Proc. of the National Academy of Sciences*, 104(38), 2007.
- G. Xie, J. Gibson, and L. Diaz-Gonzalez. Incorporating Realistic Acoustic Propagation Models in Simulation of Underwater Acoustic Networks : A Statistical Approach. In *Proc. IEEE Oceans Conf.*, Sep. 2006.
- Y. Yao and G.B. Giannakis. Rate-Maximizing power Allocation in OFDM Based on Partial Channel Knowledge. *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 4(3) :1073–1083, 2005.
- E. Zamanizadeh, J. Gomes, and J. Bioucas-Dias. Identification and matching of sparse delay-doppler spread functions from high-frequency communications signals. In *Proc. IEEE Oceans 2010*, Seattle, USA, Sep. 2010.
- R. Zamir and M. Feder. A generalization of the entropy power inequality with applications. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 39(5), Sep. 1993.
- J.J. Zhang, A. Papandreou-Suppappola, B. Gottin, and C. Ioana. Time-Frequency Characterization and Receiver Waveform Design for Shallow Water Environments. *IEEE Trans. Signal Process.*, 57(8) :2973–2985, 2009.





# A

## Solution numérique de l'équation (2.19)

Pour obtenir les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_p$  de l'équation (2.19), une méthode simple du type gradient, similaire à celle présentée dans [Djafari] est suggérée. Le vecteur  $\Lambda = [\lambda_p]_{p \in \mathcal{P}}$  est trouvé en résolvant le système

$$G_q(\Lambda) = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \frac{v^q}{\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p v^p} dv = \mu_q, \quad q \in \mathcal{P}. \quad (\text{A.1})$$

Cette équation est résolue itérativement en développant tout d'abord  $G_q(\Lambda)$  en série de Taylor autour d'un vecteur initial  $\Lambda^0$ .

$$G_q(\Lambda) \approx G_q(\Lambda^0) + (\Lambda - \Lambda^0)^T \text{grad}(G_q(\Lambda))_{(\Lambda=\Lambda^0)}. \quad (\text{A.2})$$

Si  $\epsilon$  et  $v$  sont définis comme

$$\epsilon = \Lambda - \Lambda^0, \quad (\text{A.3})$$

$$v = [\mu_q - G_q(\Lambda^0)]_{q \in \mathcal{P}}^T \quad (\text{A.4})$$

et

$$\Gamma = (\gamma_{qn}) = \left( \frac{\partial G_q(\Lambda)}{\partial \lambda_n} \right)_{(\Lambda=\Lambda^0)} \quad (\text{A.5})$$

alors,

$$\Gamma \epsilon = v. \quad (\text{A.6})$$

Notons que la matrice  $\Gamma$  est symétrique avec

$$\gamma_{qn} = \gamma_{nq} = - \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} \frac{v^{q+n}}{(\sum_{p \in \mathcal{P}} \lambda_p v^p)^2} dv \quad (\text{A.7})$$

A chaque itération,  $\epsilon$  est calculé et un nouveau  $\Lambda^0$  qui vérifie  $\Lambda^0 = \Lambda - \epsilon$  est fixé. Les itérations continues jusqu'à ce que  $\epsilon$  soit suffisamment petit.



## Décomposition modale empirique

La décomposition modale empirique, ou EMD pour empirical mode decomposition, cherche les modes d'oscillations intrinsèques d'un signal en se basant sur le principe de séparation à l'échelle locale. Cette méthode repose sur la décomposition d'un signal en une composante « basse fréquence » locale ou tendance  $\epsilon_0(t)$ , et d'une composante « haute fréquence » ou détail  $m_0(t)$  tel que n'importe quel signal  $x(t)$  à valeurs réelles s'exprime comme

$$x(t) = \epsilon_0(t) + m_0(t). \quad (\text{B.1})$$

En décomposant de la même manière la tendance  $\epsilon_0(t)$  comme  $\epsilon_0(t) = \epsilon_1(t) + m_1(t)$  et en répétant de façon récursive cette opération  $Q$  fois,  $x(t)$  peut se représenter comme

$$x(t) = \epsilon_{Q-1}(t) + \sum_{q=0}^{Q-1} m_q(t). \quad (\text{B.2})$$

La discrimination entre les oscillations lentes et rapides est obtenue à l'aide d'un algorithme dit de tamisage (ou « sifting »), qui fait itérer un opérateur non linéaire  $\mathbb{S}$  sur le signal jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit satisfait. L'opérateur  $\mathbb{S}$  opère comme suit :

1. Identification de tous les extrema de  $x(t)$ .
2. Interpolation (par une spline cubique) entre les minima (resp. maxima) pour définir une enveloppe  $e_{min}(t)$  (resp.  $e_{max}(t)$ ).
3. Calcul de la moyenne locale ou résidu  $\epsilon(t) = (e_{min}(t) + e_{max}(t))/2$ .
4. Extraction du détail par soustraction de la moyenne locale  $\mathbb{S}[x](t) = x(t) - \epsilon(t)$ .
5. Itération des étapes précédentes sur le détail  $\mathbb{S}[x](t)$  jusqu'à l'obtention d'un résidu final d'énergie insignifiante.

Si le critère d'arrêt est atteint après  $n$  itérations, le détail et la tendance locales sont définis comme  $m_0(t) = \mathbb{S}^n[x](t)$  and  $\epsilon_0(t) = x(t) - m_0(t)$ . Une illustration dynamique de l'EMD est disponible à <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>.

Une extension aux signaux bidimensionnels est proposée dans [Rilling et al., 2007]. Là où l'EMD classique extrait des composantes oscillantes, l'EMD bidimensionnelles extrait des composantes tournantes. Afin de séparer les composantes les plus rapides de

celles plus lentes, l'idée consiste une fois de plus à définir la composante tournante lente comme la moyenne d'une certaine enveloppe. L'enveloppe est alors un tube à trois dimensions qui entoure étroitement le signal. Le tube est obtenu en projetant le signal à deux dimensions dans plusieurs directions.

Pour plus de détails sur l'EMD, le lecteur peut se référer à [Rilling et al., 2007; Huang et al., 1998; Rehman and Mandic, 2010; Wu et al., 2007].

## C

## Détails sur la preuve du théorème 4.3.2

### C.1 Calcul de $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}}$

Notons tout d'abord que l'indépendance mutuelle de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{H}$  ainsi que l'utilisation de symboles à moyenne nulle implique  $\mathbb{E}\{\mathbf{y}\} = 0$ . De (4.3), il vient que

$$\Gamma_{\mathbf{y}} = \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sigma_x^2 \left( \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^\dagger + \mathbb{E} \left\{ (\mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}}) (\mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}})^\dagger \right\} \right), \quad (\text{C.1})$$

où  $\bar{\mathbf{H}} \triangleq \mathbb{E}\{\mathbf{H}\}$ . En utilisant l'hypothèse WSSUS, il peut être vérifié que

$$\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}}) (\mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}})^\dagger \right\} = \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (\text{C.2})$$

où  $\mathbf{v}$  est un vecteur  $N \times 1$  dont les éléments sont donnés par  $v_n = \sum_{i=0}^{\min(n, L-1)} \sigma_h^2(i)$ . Pour une valeur de  $L$  finie,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \|\mathbf{D}(\mathbf{v}) - \Xi_H^2 \mathbf{I}_N\|_F = 0$ , tel que les matrices  $\mathbf{D}(\mathbf{v})$  et  $\Xi_H^2 \mathbf{I}_N$  sont équivalentes asymptotiquement<sup>1</sup>. En utilisant [Gray, 2006, Corollaire 2.4], il s'en suit que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sigma_x^2 \left( \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^\dagger + \mathbf{D}(\mathbf{v}) \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \left( \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sigma_x^2 \left( \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^\dagger + \Xi_H^2 \mathbf{I}_N \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Désignons maintenant par  $\bar{\mathbf{T}}_H$  la matrice circulante cousine de  $\bar{\mathbf{H}}$ , i.e.,

$$\bar{\mathbf{T}}_H = \begin{pmatrix} \bar{h}_0 & & & \bar{h}_{L-1} & \dots & \bar{h}_1 \\ \bar{h}_1 & \bar{h}_0 & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \bar{h}_{L-1} \\ \bar{h}_{L-1} & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ & & & \bar{h}_{L-1} & \dots & \bar{h}_1 & \bar{h}_0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour l'équivalence asymptotique, nous supposons implicitement que  $\sigma_h(i) < +\infty$ ,  $\forall i$  (voir [Gray, 2006, Section 2.3] pour plus de détails).

Comme montré dans [Gray, 2006, Lemme 4.2],  $\bar{\mathbf{H}}$  et  $\bar{\mathbf{T}}_H$  sont équivalentes asymptotiquement. De plus,  $\bar{\mathbf{T}}_H \bar{\mathbf{T}}_H^\dagger$  et  $\bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{H}}^\dagger$  sont définies non-négatives et logdet est continu. Par conséquent, [Gray, 2006, Corollaire 2.4]

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}} = \log \sigma_w^2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \left( \left( 1 + \frac{\sigma_x^2 \Xi_H^2}{\sigma_w^2} \right) \mathbf{I}_N + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} \bar{\mathbf{T}}_H \bar{\mathbf{T}}_H^\dagger \right). \quad (\text{C.4})$$

La décomposition en valeurs propres de  $\bar{\mathbf{T}}_H$  est  $\bar{\mathbf{T}}_H = \mathbf{F}_N \cdot \mathcal{E}_H \cdot \mathbf{F}_N^\dagger$ , où  $\mathbf{F}_N$  est la matrice de Fourier de taille  $N$  et où  $\mathcal{E}_H$  est une matrice  $N \times N$  dont les éléments sont tous nuls exceptés les éléments de la diagonale qui sont égaux à la transformée de Fourier discrète de la réponse moyenne du canal, i.e.,

$$[\mathcal{E}_H]_{n,n} = \sum_{k=0}^{L-1} \bar{h}_k e^{-2j\pi kn/L}.$$

En utilisant ce dernier résultat, pour  $N \rightarrow \infty$ , la densité des valeurs propres de la matrice  $\bar{\mathbf{T}}_H \bar{\mathbf{T}}_H^\dagger$  tend vers une limite qui est le spectre  $|\psi_H(\theta)|^2$ . Nous obtenons finalement

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}} = \log \sigma_w^2 + \int_{-1/2}^{1/2} \log \left( 1 + \frac{\sigma_x^2}{\sigma_w^2} (\Xi_H^2 + |\psi_H(\theta)|^2) \right) d\theta. \quad (\text{C.5})$$

## C.2 Calcul de $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}|\mathbf{x}}$

D'après (4.5), nous avons

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathbf{y}|\mathbf{x}} &= \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \mathbb{E} \left\{ \sum_{p,l=0}^{L-1} [(\mathbf{h}_p - \bar{\mathbf{h}}_p) \odot \mathbf{x}_{\downarrow p}] [(\mathbf{h}_l - \bar{\mathbf{h}}_l) \odot \mathbf{x}_{\downarrow l}]^\dagger \right\} \\ &\stackrel{(a)}{=} \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sum_{p,l=0}^{L-1} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow p}) \mathbb{E} \{ [\mathbf{h}_p - \bar{\mathbf{h}}_p] [\mathbf{h}_l - \bar{\mathbf{h}}_l]^\dagger \} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow l})^\dagger \\ &\stackrel{(b)}{=} \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sum_{p,l=0}^{L-1} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow p}) \mathbf{R}_H(l) \delta(p-l) \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow l})^\dagger \\ &\stackrel{(c)}{=} \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow l}) \mathbf{R}_H(l) \mathbf{D}(\mathbf{x}_{\downarrow l})^\dagger \\ &\stackrel{(d)}{=} \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \sum_{l=0}^{L-1} \mathbf{R}_H(l) \odot \mathbf{x}_{\downarrow l} \mathbf{x}_{\downarrow l}^\dagger \end{aligned}$$

où (a) vient de l'indépendance mutuelle de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{w}$ , et aussi du fait que  $\mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \mathbf{u} \mathbf{D}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}(\mathbf{v}) \mathbf{u}$ , quels que soient les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de la même dimension; (b) et (c) découle de l'hypothèse WSSUS et (d) résulte des propriétés des produit d'Hadamard.

En notant que  $\mathbf{x}_{\downarrow l} \mathbf{x}_{\downarrow l}^\dagger$  est asymptotiquement équivalent<sup>2</sup> à  $\mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger$ , i.e.,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{N}} \|\mathbf{x}_{\downarrow l} \mathbf{x}_{\downarrow l}^\dagger - \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger\|_F = 0$ , il vient que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \Gamma_{\mathbf{y}|\mathbf{x}} = \log \sigma_w^2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \det \left( \mathbf{I}_N + \frac{1}{\sigma_w^2} \mathbf{R}_H \odot \mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger \right). \quad (\text{C.6})$$

2. On notera que la limitation de la puissance crête sur  $\mathbf{x}$  implique que la norme forte de  $\mathbf{x} \mathbf{x}^\dagger$ , telle que définie dans [Gray, 2006, Eq. (2.13)], est aussi bornée.

## Détails sur la preuve du théorème 4.3.3

Le terme  $I(\mathbf{y}; \mathbf{x} | \mathbf{H})$  de l'équation (4.24) peut se minorer en utilisant le lemme de Zamir et Feder qui peut s'énoncer comme suit.

**Lemme** (Zamir et Feder [Zamir and Feder, 1993]) : Tout vecteur  $\mathbf{u}$  de dimension  $N \times 1$  dont les éléments  $[u_0, \dots, u_{N-1}]^T$  sont mutuellement indépendants et à valeurs réelles et toute matrice réelle  $\mathbf{A}$  déterministe de taille  $M \times N$ , vérifient la relation

$$h_E(\mathbf{A}\mathbf{u}) \geq h_E(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{u}}) \quad (\text{D.1})$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  est un vecteur aléatoire de taille  $N \times 1$  avec des entrées gaussiennes indépendantes  $[\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N-1}]^T$ , telles que  $h_E(\tilde{u}_n) = h_E(u_n)$ ,  $\forall 0 \leq n \leq N-1$ .

Notons que le lemme s'applique uniquement pour une matrice  $\mathbf{A}$  et un vecteur  $\mathbf{u}$  réels. La première étape de la démonstration consiste donc à séparer les parties réelles et imaginaires.

$\forall \mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$  et  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ , nous posons

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{u}) \\ \Im(\mathbf{u}) \end{bmatrix} \text{ and } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{A}) & -\Im(\mathbf{A}) \\ \Im(\mathbf{A}) & \Re(\mathbf{A}) \end{bmatrix}, \quad (\text{D.2})$$

tel que la relation d'entrée-sortie du canal devienne

$$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{w}} = [\hat{\mathbf{H}} \mathbf{I}_{2N}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Notons que l'information mutuelle de  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{x}$  conditionnellement à  $\mathbf{H}$  satisfait

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x} | \mathbf{H}) = h_E(\mathbf{y} | \mathbf{H}) - h_E(\mathbf{y} | \mathbf{x}, \mathbf{H}) \quad (\text{D.4})$$

$$= h_E(\hat{\mathbf{y}} | \mathbf{H}) - N \log(\pi e \sigma_w^2). \quad (\text{D.5})$$

Considérons maintenant l'ensemble des vecteurs  $\hat{\mathbf{x}}$  qui correspondent à l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{x}$  satisfaisant (4.1) et (4.2) avec des entrées i.i.d à moyenne nulle et dont les parties réelles et imaginaires sont i.i.d. Pour borner  $h_E(\hat{\mathbf{y}} | \mathbf{H})$ , nous suggérons tout d'abord de trouver la distribution de  $\hat{\mathbf{x}}$ , au sein de cet ensemble, qui maximise l'entropie  $h_E(\hat{\mathbf{x}})$ . Cette distribution est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant



$$\begin{aligned}
& \max_{p_{\hat{\mathbf{x}}}} h_E(\hat{\mathbf{x}}), \\
& \text{sous contraintes} \quad \int_{\zeta^{2N}} p_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} = 1, \\
& \int_{\zeta^{2N}} \|\hat{\mathbf{x}}\|^2 p_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}} \leq \frac{N\Omega_x^2}{\beta},
\end{aligned} \tag{D.6}$$

où  $\zeta^{2N}$  est le support de la densité de probabilité  $p_{\hat{\mathbf{x}}}$ . Pour satisfaire (4.1) avec des composantes i.i.d à moyenne nulle,  $\zeta^{2N}$  est défini comme un hypercube de dimension  $2N$  où chaque côté est compris entre  $-\Omega_x/\sqrt{2}$  et  $\Omega_x/\sqrt{2}$ . En utilisant les conditions de Karush-Kuhn-Tucker, la solution à ce problème de maximisation est de la forme  $p_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}}) = \prod_{n=1}^{2N} K e^{-\gamma \hat{x}_n^2}$  où  $K$  et  $\gamma$  vérifient

$$\int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} d\hat{x}_n = 1, \tag{D.7}$$

$$\int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} \hat{x}_n^2 K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} d\hat{x}_n \leq \frac{\Omega_x^2}{2\beta}, \tag{D.8}$$

$$\gamma \left( \int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} \hat{x}_n^2 K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} d\hat{x}_n - \frac{\Omega_x^2}{2\beta} \right) = 0, \tag{D.9}$$

$$\gamma \geq 0. \tag{D.10}$$

A partir de cet ensemble d'équations, on peut vérifier que  $\gamma = 0$  et  $K = 1/(\sqrt{2}\Omega_x)$  sont les solutions du problème d'optimisation tant que  $1 \leq \beta \leq 3$ . Dans ce cas,  $p_{\hat{\mathbf{x}}}(\hat{\mathbf{x}})$  est une distribution uniforme sur le support  $\zeta^{2N}$ , impliquant  $\sigma_x^2 = \Omega_x^2/3$  (ce qui satisfait (4.2) tant que  $\beta \leq 3$ ). Pour  $\beta > 3$ ,  $p_{\hat{\mathbf{x}}}$  est une gaussienne tronquée où  $K$  et  $\gamma$  sont les solutions du système

$$\int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} d\hat{x}_n = 1, \tag{D.11}$$

$$\int_{-\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}}^{\frac{\Omega_x}{\sqrt{2}}} \hat{x}_n^2 K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} d\hat{x}_n = \frac{\Omega_x^2}{2\beta}, \tag{D.12}$$

qui peut être résolu numériquement.

Quel que soit  $\beta$ , l'entropie différentielle de chaque entrée de  $\hat{\mathbf{x}}$  est alors <sup>1</sup>

$$\begin{aligned}
h_E(\hat{x}_n) &= -\mathbb{E} \left\{ \log \left( K e^{-\gamma \hat{x}_n^2} \right) \right\}, \\
h_E(\hat{x}_n) &= -\log(K) + \gamma \mathbb{E} \{ \hat{x}_n^2 \}, \\
h_E(\hat{x}_n) &= -\log(K) + \gamma \frac{\Omega_x^2}{2\beta}.
\end{aligned} \tag{D.13}$$

1. Notons que dans le cas où  $\beta \leq 3$ ,  $\mathbb{E} \{ \hat{x}_n^2 \} = \Omega_x^2/6$  et non  $\Omega_x^2/(2\beta)$ . Cependant,  $\gamma$  étant nul pour  $\beta \leq 3$ , (D.13) reste valide pour tout  $\beta \geq 1$ .

Ceci est aussi l'entropie différentielle d'une variable aléatoire gaussienne à valeurs réelles de variance  $e^{\gamma\Omega_x^2/\beta}/(2\pi eK^2)$ .

Dénotons par  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{2N}$ , un vecteur gaussien à moyenne nulle avec  $\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{x}}\tilde{\mathbf{x}}^\dagger\} = e^{\gamma\Omega_x^2/\beta}\mathbf{I}_{2N}/(2\pi eK^2)$  et définissons  $\tilde{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{H}} & \mathbf{I}_{2N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{w}} \end{bmatrix}$ . L'entropie différentielle de  $\tilde{\mathbf{x}}$  étant égale à l'entropie différentielle de  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{w}}$  étant un vecteur gaussien indépendant de  $\tilde{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{x}}$ , nous obtenons  $h_E(\tilde{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{w}}) = h_E(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{w}})$ , de sorte que le lemme de Zamir et Feder s'applique. Par conséquent,

$$h_E(\hat{\mathbf{y}}|\mathbf{H}) \geq h_E(\tilde{\mathbf{y}}|\mathbf{H}). \quad (\text{D.14})$$

Conditionnellement à  $\mathbf{H}$ ,  $\tilde{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^{2N}$  est un vecteur gaussien de matrice de covariance

$$\mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{y}}^\dagger|\mathbf{H}\} = \frac{1}{2} \left( \sigma_w^2 \mathbf{I}_{2N} + \frac{e^{\gamma\Omega_x^2/\beta}}{\pi eK^2} \hat{\mathbf{H}}\hat{\mathbf{H}}^\dagger \right). \quad (\text{D.15})$$

D'après la définition de l'entropie conditionnelle, il s'en suit que

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H}) \geq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \frac{e^{\gamma\Omega_x^2/\beta}}{\pi eK^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \right) \right\}. \quad (\text{D.16})$$

Le théorème 4.3.3 est ainsi obtenu en substituant (D.16) dans (4.24). Notons que pour  $1 \leq \beta \leq 3$ ,  $\gamma = 0$  et  $K = 1/(\sqrt{2}\Omega_x)$  tel que (D.16) se simplifie comme

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}|\mathbf{H}) \geq \mathbb{E}_{\mathbf{H}} \left\{ \log \det \left( \sigma_w^2 \mathbf{I}_N + \frac{2\Omega_x^2}{\pi e} \mathbf{H}\mathbf{H}^\dagger \right) \right\}. \quad (\text{D.17})$$



## Bornes sur le rapport signal sur interférence

A partir de la définition du rapport signal sur interférence donnée à l'équation (5.18) et en remarquant que

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\min_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} |A_{\gamma, g}(\tau, \nu)|^2 \times \int \int_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) d\nu d\tau}_{\triangleq m_h} &\leq \int \int_{\nu} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) |A_{\gamma, g}(\tau, \nu)|^2 d\nu d\tau \\
 &\leq \underbrace{\max_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} |A_{\gamma, g}(\tau, \nu)|^2 \times \int \int_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) d\nu d\tau}_{\triangleq M_h}
 \end{aligned} \tag{E.1}$$

et que

$$\begin{aligned}
 &\underbrace{\min_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k', n') \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |A_{\gamma, g}(\tau + k'T, \nu + n'F)|^2 \times \int \int_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) d\nu d\tau}_{\triangleq m_I} \\
 &\leq \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k', n') \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \int \int_{\tau} |A_{\gamma, g}(\tau, \nu)|^2 S_{\mathbb{H}}(\tau - k'T, \nu - n'F) d\nu d\tau \\
 &\leq \underbrace{\max_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k', n') \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} |A_{\gamma, g}(\tau + k'T, \nu + n'F)|^2 \times \int \int_{(\tau, \nu) \in \mathcal{D}} S_{\mathbb{H}}(\tau, \nu) d\nu d\tau}_{\triangleq M_I}
 \end{aligned} \tag{E.2}$$

nous pouvons écrire  $L_{\overline{\text{SIR}}} \leq \overline{\text{SIR}} \leq U_{\overline{\text{SIR}}}$  avec

$$L_{\overline{\text{SIR}}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{m_h + \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau} A_{\gamma, g}^*(\tau, 0) e^{-j2\pi n F \tau} d\tau \right|^2}{M_I + \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k', n') \neq (0,0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau - k'T} A_{\gamma, g}^*(\tau, n'F) e^{-j2\pi(n'+n)(\tau - k'T)F} d\tau \right|^2} \tag{E.3}$$

et

$$U_{\text{SIR}} \triangleq \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{M_h + \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau} A_{\gamma, g}^*(\tau, 0) e^{-j2\pi n F \tau} d\tau \right|^2}{m_I + \sum_{\substack{k'=-\infty \\ (k', n') \neq (0, 0)}}^{\infty} \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \left| \int_{\tau} \bar{h}_{\tau - k' T} A_{\gamma, g}^*(\tau, n' F) e^{-j2\pi(n'+n)(\tau - k' T) F} d\tau \right|^2}. \quad (\text{E.4})$$