



HAL
open science

Contributions à l'Algèbre, à l'Analyse et à la Combinatoire des Endomorphismes sur les Espaces de Séries

Laurent Poinot

► **To cite this version:**

Laurent Poinot. Contributions à l'Algèbre, à l'Analyse et à la Combinatoire des Endomorphismes sur les Espaces de Séries. Combinatoire [math.CO]. Université Paris-Nord - Paris XIII, 2011. tel-00639676

HAL Id: tel-00639676

<https://theses.hal.science/tel-00639676v1>

Submitted on 9 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris XIII
Mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches
Spécialités : Mathématiques, Informatique

**Contributions à l'Algèbre, à l'Analyse et à la Combinatoire des
Endomorphismes sur les Espaces de Séries**

Laurent Poinot

Soutenue publiquement le 8 novembre 2011 devant Messieurs les membres du jury

Jacques Alev	Professeur des Universités, Université de Reims Champagne-Ardenne, Laboratoire de Mathématiques, EA 4535	Président
Claude Carlet	Professeur des Universités, Université Paris VIII Vincennes-Saint-Denis, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR CNRS 7539	Rapporteur
Frédéric Chapoton	Chargé de Recherche CNRS, HDR, Université Claude Bernard Lyon I, Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208	Examineur
Patrick Dehornoy	Professeur des Universités, Université de Caen, Directeur scientifique adjoint de l'INSMI (CNRS), Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresmes, UMR CNRS 6139	Examineur
Gérard H. E. Duchamp	Professeur des Universités, Université Paris XIII, Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord, UMR CNRS 7030	Rapporteur
Loïc Foissy	Maître de Conférences, HDR, Université de Reims Champagne-Ardenne, Laboratoire de Mathématiques, EA 4535	Rapporteur
Dominique Manchon	Chargé de Recherche CNRS, HDR, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6620	Rapporteur
Frédéric Patras	Directeur de Recherche CNRS, Université de Nice Sophia-Antipolis, Laboratoire de Mathématiques J. A. Dieudonné, UMR CNRS 6621	Examineur
Laurent Rigal	Professeur des Universités, Université Paris-Est Créteil, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR CNRS 7539	Examineur
Jean-Yves Thibon	Professeur des Universités, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Institut d'électronique et d'informatique Gaspard Monge, UMR CNRS 8049	Examineur

Après avis favorables émis par Messieurs les rapporteurs

Claude Carlet	Professeur des Universités, Université Paris VIII Vincennes-Saint-Denis, Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR CNRS 7539	Mathématiques
Gérard H. E. Duchamp	Professeur des Universités, Université Paris XIII Laboratoire d'Informatique de Paris-Nord, UMR CNRS 7030	Mathématiques
François Rodier	Directeur de Recherche CNRS, Université Aix-Marseille II, Institut de Mathématiques de Luminy, UMR CNRS 6206	Mathématiques
Allan Solomon	Professeur des Universités, The Open University, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire de Physique Théorique de la Matière Condensée, UMR CNRS 7600	Mathématiques
Loïc Foissy	Maître de Conférences, Université de Reims Champagne-Ardenne, Laboratoire de Mathématiques, EA 4535	Informatique
Dominique Manchon	Chargé de Recherche CNRS, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand, Laboratoire de Mathématiques, UMR CNRS 6620	Informatique
Jean-Christophe Novelli	Professeur des Universités, Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Institut d'électronique et d'informatique Gaspard Monge, UMR CNRS 8049	Informatique
Christophe Reutenauer	Professeur des Universités, Université du Québec à Montréal, Titulaire de la Chaire de recherche du Canada « Algèbre, combinatoire et informatique mathématique » Laboratoire de Combinatoire et d'Informatique Mathématique	Informatique

Remerciements

*Je ne connais pas la moitié d'entre vous à moitié
autant que je le voudrais, et j'aime moins de la moitié
d'entre vous à moitié autant que vous le méritez.*

JOHN RONALD REUEL TOLKIEN, *La communauté de
l'anneau, Le seigneur des anneaux*

Je voudrais dire deux mots avant de parler.

ÉRIC ANTOINE, *Mystérie*

Cher lecteur, nous nous retrouvons enfin, six ans après la soutenance de ma thèse. Le temps est passé si vite que j'ai peine à le croire. Quatre ans depuis mon recrutement comme maître de conférences à l'université Paris XIII, et le changement thématique qui s'en est suivi. Tu n'étais pas présent¹, mais lors de mon audition (celle après laquelle je fus recruté), j'exprimai mon ambition de soutenir à moyen terme une habilitation à diriger des recherches. Cet objectif est à présent accompli, et je me rappelle maintenant des quatre années qui l'ont vu mûrir, lentement mais sûrement². Je me souviens également de ces personnes, qui de près ou de loin, d'une manière ou d'une autre, m'ont accompagné dans la réalisation de ce projet scientifique. Alors, cher lecteur, permets-moi de t'abandonner pour quelques phrases afin que j'exprime des remerciements à leur endroit ; je reviendrai vers toi une fois cela fait.

Par qui, par où commencer ? Faisons au plus simple et débutons évidemment par ceux qui sont directement intervenus dans la concrétisation de mon habilitation à diriger des recherches.

Mille mercis³ à tous les membres du jury : sans vous, point d'habilitation ! J'ai souhaité soutenir devant un jury conséquent⁴, tant en génie(s) qu'en nombre, afin de confronter mes idées à divers points de vue, mais également pour illustrer la multitude de leurs origines, à la fois mathématiques et informatiques, à la fois algébriques et analytiques, à la fois catégoriques et combinatoires. Je ne prétends à l'évidence pas tout savoir des mathématiques, mais je dis simplement que les sources d'inspiration de mon travail furent très nombreuses, que nul mathématicien n'est tenu de n'employer que la seule technologie développée par sa communauté, si élégante soit elle, et que l'on a le droit, si ce n'est le devoir, d'utiliser les diverses mathématiques auxquelles on peut avoir accès. Mon jury présente donc diverses teintes : que vive la diversité !

À l'attention des dix membres du jury.

Cher Jacques Alev, je veux vous dire toute ma gratitude d'avoir accepté de siéger à mon jury, d'être toujours bienveillant à l'égard des combinatoriciens algébristes, et de les accepter comme membre à part entière du groupe de travail interuniversitaire en algèbre (GTIA). C'est pour moi toujours une chance de vous écouter parler les mathématiques, et d'apprendre de vous

1. Tu es lecteur, non auditeur.

2. *Chi va piano, va sano ; chi va sano, va bene ; chi va bene, va lontano.*

3. Répartis à parts égales, cela fait cent mercis par personnes.

4. Et cela a été bien au-delà de mes espérances !

la théorie des algèbres de Lie. Votre sens de l'écoute, votre enthousiasme, aussi bien scientifique que personnel, comme votre amabilité, vous honorent. Vos travaux sur les algèbres de Weyl font de vous un spécialiste mondialement reconnu (j'espère que mes propres travaux dans ce domaine vous siéent), néanmoins vous demeurez humble et naturel. C'est une attitude que j'admire.

Cher Claude Carlet, cher Claude, je te sais gré d'avoir accédé à ma demande de rapport afin de présenter mes travaux en relation à la cryptographie. Tu le sais, tes travaux ont profondément inspiré les miens en ce domaine. Tu as considérablement élargi le cadre mathématique de la cryptographie des systèmes de chiffrement à clef secrète en y introduisant les groupes (finis) abéliens généraux, en lieu et place des seuls \mathbb{Z}_2 -modules, et j'ai suivi la voie ainsi tracée pour parler de groupes non commutatifs, et d'anneaux de représentations, aux membres de cette communauté. Ta présence en tant que membre du jury corrige une anomalie : alors en déplacement, tu n'étais pas disponible pour être de mon jury de thèse. Merci cher Claude pour ta bienveillance et ta disponibilité.

Cher Frédéric Chapoton, nous nous sommes rencontrés lors de journées de combinatoire à Bordeaux où vous présentiez vos travaux en relation avec le treillis de Tamari. Cet objet, comme le groupe de Thompson, les polytopes de Stasheff, le pentagone de Mac Lane pour la cohérence des catégorie monoïdales ou l'opétrade associative, gouverne de façon très profonde la loi d'associativité à « isomorphisme près ». La compréhension de cette loi est l'un de mes principaux futurs objectifs en recherche et votre participation à mon jury y concourt déjà. Merci également pour les pistes de recherche que vous m'aviez fournies lors d'un échange de courriers électroniques. Il se peut que certaines d'entre elles comptent dans l'aboutissement de mon nouveau programme scientifique.

Cher Patrick Dehornoy, permettez-moi de vous témoigner toute ma reconnaissance d'être membre du jury bien que votre emploi du temps soit surchargé. J'en profite pour vous remercier également de la discussion, par voie électronique, relative à certains de vos articles traitant du groupe de Thompson, tenue un dimanche matin. Votre célérité, et la justesse de vos réponses, m'avaient alors enchanté. Ce fut de nouveau le cas lorsque vous avez si vite répondu positivement à mon invitation. Je suis fondé à penser que vous disposez de l'aptitude à dépasser la vitesse de la lumière ! Vos travaux sur les monoïdes de Garside ont inspiré les miens concernant les monoïdes partiels, et les liens entre la confluence d'un certain système de réécriture et la loi d'associativité pour une opération partiellement définie. Je vous avoue aussi que ma connaissance d'une partie de la théorie des ensembles vient en grande partie de vos cours en ligne à ce sujet. Je vous remercie enfin d'avoir également accepté l'invitation au séminaire de l'équipe CALIN, c'est à mes yeux une agréalable surprise.

Cher Gérard H. E. Duchamp, cher Gérard, je ne sais comment exprimer toute la gratitude que j'ai envers toi. Tu m'as épaulé pendant que s'opérait mon changement thématique. Tu m'as enseigné tout ce que je sais des algèbres de Hopf, et tu m'as suivi lorsque j'explorais les algèbres de Fréchet : combien d'écueils avons-nous évité en ne confondant pas les structures fréchétiennes aux structures banachiques et en se soumettant mutuellement nos idées à leur sujet ? Merci aussi de m'écouter quand je parle le langage des catégories. Tu sais protéger, voire cultiver, les « fils rouges » de tes collègues. Je suis admiratif de ta capacité de travail et de compréhension, de ton amour des mathématiques et de l'informatique en égale façon qui se manifeste notamment par le format « à la Russe » de nos séminaires. Tu as également accepté d'effectuer un rapport afin de présenter la partie de mes travaux concernant l'algèbre et la combinatoire, travaux que tu connais fort bien, et je t'en suis extrêmement reconnaissant. Je suis fier d'être l'un de tes co-auteurs. Merci enfin d'appliquer le principe de collégialité pour ton animation scientifique de l'équipe.

Cher Loïc Foissy, je vous remercie très sincèrement d'avoir accepté de rédiger un rapport sur mon mémoire d'habilitation malgré son format inhabituel. C'est pour moi un honneur que

vous soyez membre du jury tant vos travaux sur les algèbres de Hopf, notamment l'emploi de structures dendriformes pour l'étude d'éléments primitifs, forcent mon admiration. J'apprécie également votre sens aigu de la pédagogie qui s'exprime non seulement lors de chacune vos interventions scientifiques (je garde un excellent souvenir de celle concernant les algèbres pré-Lie et algèbres de Lie tordues d'après T. Schedler, donnée dans le cadre du GTIA) mais aussi par la clarté de votre mémoire d'habilitation. Je voudrais m'inspirer, autant que faire se peut, de votre esprit créatif.

Cher Dominique Manchon, cher Dominique, tu as toujours répondu positivement à chacune de mes requêtes : en premier lieu, pour rédiger un rapport, puis, ensuite, pour être membre de mon jury. Nous avons également interagi par mél sur des questions techniques concernant les algèbres de Hopf (groupe de renormalisation, produit/coproduct smash), et tu avais suivi mes travaux exploratoires concernant deux structures d'algèbres de Hopf sur l'algèbre d'une (petite) catégorie, généralisant l'algèbre de Faà di Bruno (j'espère concrétiser cela par une collaboration). Je sais donc pouvoir compter sur toi. Ta présence tant au titre de membre du jury qu'à celui de rapporteur est un grand privilège.

Cher Frédéric Patras, autant vous avouer dès à présent l'immense honneur que j'éprouve à vous compter parmi les membres du jury. Je me souviens de l'un de vos exposés, intitulé « Descentes hyperoctaédrales et hamiltoniens effectifs », donné lors de journées du GDR Renormalisation à Reims, au cours duquel vous évoquiez l'anneau des représentations d'un groupe. Cela avait aiguisé ma curiosité et abouti à l'emploi de cet anneau dans un autre contexte, à savoir celui de l'étude de la non-linéarité d'applications ensemblistes entre deux groupes finis, notion essentielle en cryptographie. L'approche en termes de groupes (et algèbres) de Lie de la renormalisation, dans l'un de vos travaux, avec sa notion de caractères infinitésimaux, m'a fasciné ; j'en reste admiratif comme si un nouveau continent, dont je soupçonnais seulement l'existence, se dressait soudainement devant moi.

Cher Laurent Rigal, cher Laurent, tu fus l'une des premières personnes contactées au sujet de mon aspiration à soutenir une habilitation. Tu m'as alors parlé avec franchise, simplicité et profondeur m'indiquant la voie à suivre. Je te remercie non seulement pour cela mais également de m'avoir autorisé à devenir membre du GTIA, et, bien entendu, d'être membre de mon jury. Je ne connais pas aussi bien que toi, loin s'en faut, les algèbres de polynômes gauches et, notamment, les algèbres quantiques, aussi j'ose parfois à espérer que nous puissions travailler ensemble sur une algébrisation (modulo une probable complétion topologique) de la notion d'opérateurs d'échelle généralisés tant leur commutateur semble indiquer une possible notion de déformation.

Cher Jean-Yves Thibon, vous me faites un immense honneur d'accepter d'être de mon jury. Vous êtes à mes yeux, comme à ceux de nombreux chercheurs, l'un des principaux inspirateurs de la combinatoire algébrique mondiale. Nombreux sommes-nous à nous être emparés de la notion d'algèbres de Hopf combinatoires, chère à Gian-Carlo Rota, dont votre équipe, et vous-même à sa tête, lui a décerné ses lettres de noblesse. Je regrette de ne pas être disponible plus souvent pour assister au séminaire à Marne tant cela me semble être un lieu d'appartition spontanée d'idées et d'approches originales et innovantes. Vos travaux magnifiques sur les algèbres de Hecke restent un modèle du genre. Vous êtes, comme Gérard, un digne héritier de Marcel-Paul Schützenberger, et, en génie, vous lui avez succédé. Suite à ma soutenance, j'espère avoir le courage de rompre la timidité que je ressens à votre égard, afin de discuter et de bénéficier de votre immense intuition.

En amont de la soutenance d'habilitation sont les rapporteurs qui ont accepté la charge de donner leur avis sur les travaux retenus, et présentés, dans ce mémoire. Je leur dois le privilège de soutenir, et d'accéder à la qualité d'habilité. Je les remercie tous infiniment, et chacun chaleureusement. Avant cela, je me dois de donner quelques brèves explications concernant le nombre important de mes rapporteurs. De façon quelque peu inhabituelle, mais que je pense

naturelle, j'ai souhaité m'inscrire en habilitation dans deux disciplines : les mathématiques et l'informatique ; je saisis l'occasion pour remercier monsieur le vice-président du conseil scientifique Charles Desfrancois, madame la directrice du LAGA Laurence Halpern, et monsieur le directeur du LIPN Christophe Fouqueré pour m'avoir encouragé dans ma démarche. Les procédures d'inscription sont très différentes dans ces deux disciplines. En informatique, les rapporteurs sont choisis par le candidat puis nommés par le Conseil Scientifique de l'université Paris XIII. En mathématiques, l'administration des dossiers est délocalisée et mutualisée ; c'est au niveau de la région Île-de-France que les dossiers sont traités. Les travaux sont présentés par un rapporteur (dont le choix est laissé à la discrétion du candidat) devant la commission des habilitations (en mathématiques) des universités parisiennes, laquelle se charge de désigner deux rapporteurs indépendants supplémentaires. Puisque mes recherches s'articulent autour de deux thèmes bien distincts, la cryptographie et la combinatoire algébrique, elles ont été présentées par deux rapporteurs : Claude Carlet (cryptographie) et Gérard H. E. Duchamp (combinatoire algébrique), et la commission des habilitations a quant elle nommé MM. Rodier (cryptographie) et Solomon (combinatoire algébrique). Ajoutons les quatre collègues qui m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche de rapporter mon travail dans le cadre de la procédure côté informatique, et on obtient un total, somme toute peu ordinaire, de huit rapporteurs : Claude Carlet, Gérard H. E. Duchamp, François Rodier et Allan Solomon (en mathématiques) et Loïc Foissy, Dominique Manchon, Jean-Christophe Novelli et Christophe Reutenauer (en informatique). Le temps est maintenant venu de les remercier.

À l'attention de mes quatre rapporteurs en mathématiques.

Cher Claude, cher Gérard, je vous remercie infiniment⁵ d'avoir assumé la responsabilité de présenter mes travaux, sous la forme de rapports, l'un en cryptographie, l'autre en combinatoire algébrique, devant la commission des habilitations parisiennes. Vous m'avez soutenu et encouragé dans ma démarche, avec constance et sincérité. Je suis donc votre obligé.

Cher François Rodier, vous connaissez bien mes travaux en cryptographie puisque vous étiez l'un des rapporteurs de ma thèse. Je vous remercie d'avoir accepté la demande de la commission des habilitations parisiennes d'examiner à nouveau mes travaux avec toute l'attention et la rigueur qui vous caractérisent.

Dear Allan Solomon, I had the opportunity to meet you during an ANR meeting in Strasbourg, while we previously worked together (thanks to the Web) on a paper in honor of Philippe Flajolet's sixtieth birthday. In Strasbourg we talked, and I learned so much, about ladder operators with generalized commutation rules, the so-called ultra-commutation rules in physics. I hope that I will have the pleasure to realize these informal discussions into a new joint-work since the first experience was great. I am grateful that you accepted the proposition from la commission des habilitations parisiennes to review my work. I hope to see you soon. Best regards.

À l'attention de mes quatre rapporteurs en informatique.

Cher Loïc, cher Dominique, merci une nouvelle fois d'avoir accepté très spontanément ma proposition d'être rapporteurs de mes travaux en vue d'une habilitation. Je vous en suis très reconnaissant.

Cher Jean-Christophe Novelli, cher Jean-Christophe, je suis fier de te compter parmi les

5. Un \aleph_0 de mercis !

rapporteurs de mes travaux non seulement puisque tu es le responsable de notre groupe de travail « combinatoire algébrique » du groupe de recherche « Informatique Mathématique » mais surtout parce que tu es à la fois brillant en combinatoire et en algèbre. J'admire ta recherche productive et toujours innovante. Je voudrais posséder la même aisance que toi lors des exposés (en particulier ceux en langue anglaise).

Cher Christophe Reutenauer, ma gratitude vous est acquise. Vous avez accepté de rapporter mes travaux alors que nous ne nous sommes jamais rencontrés. Je regrette que vous ne puissiez assister à la soutenance (un océan sépare le Québec de la France, pourtant si proches par leur culture). Cependant j'espère avoir un jour l'occasion de vous remercier de vive-voix. Sachez que les livres dont vous êtes l'auteur (ou l'un des auteurs) ont été fondamentaux lors de ma reconversion : ma connaissance de la combinatoire algébrique vient en grande partie de leur lecture.

Outre les membres du jury et les rapporteurs de mon habilitation à diriger des recherches, nombreux sont celles et ceux à avoir compté dans la réussite de ce projet, que ce soit dans le milieu professionnel ou au sein de ma famille.

Merci Sami de m'avoir toujours soutenu et encouragé y compris après ma thèse et mon changement partiel de thématique de recherche. Merci Silvia, Adrian, Christophe, Matthieu, Minh, membres du CIP canal historique. Muchas gracias, Mario. Merci Vonjy (courage, tu y es presque!), merci Omar. Merci à tous les membres de l'équipe CALIN. Jalila, Hichem, je vous souhaite de réussir dans tout ce que vous entreprendrez. Merci à tous les habitants du couloir A 100 (Gérard, j'espère que Lens reviendra rapidement en L1⁶, Vlady merci de m'avoir si bien accueilli). Merci à mes collègues de bureau : teşekkür edrim Ferhan, grazie Laura (ciao Sicilia) e Beniamino. Merci au directeur actuel et à la future directrice du laboratoire, Christophe et Laure. Merci à Younès, président du département d'informatique, et à Pierre, son vice-président. Tanemirt Mustapha. Obrigado Christophe (je dois m'occuper tout seul des projets maintenant!). Merci à tous les collègues de travail du LIPN. Merci à Françoise et Jean-Stéphane, respectivement ancien et nouveau présidents du département de mathématiques. Merci Yueyun de m'avoir tant aidé et conseillé au sujet du master math-info. Merci Daniel pour ces discussions enrichissantes au sujet des mathématiques dans le bus, sur la ligne 13, et bien sûr en séminaire. Merci à tous les collègues du LAGA. Grazie Alessandra pour tes réponses si précieuses au sujet des schémas en groupe pro-affine algébrique. Merci aux collègues de travail des GT Combinatoire Algébrique et Codes et Cryptographie⁷, du GDR Renormalisation et du GTIA.

Merci au personnel administratif et technique de l'université Paris XIII. Jocelyne, merci pour tous vos sourires et votre joie. Je ne boude pas mon plaisir de travailler avec vous. Merci au personnel du BRED dans son intégralité. Merci à Fanny du PEB et à Jean-Philippe de la bibliothèque de recherche math-info. Merci au personnel des bibliothèques de mathématiques-informatique, à Chevaleret ou à Jussieu, où j'ai passé tant de temps, comme à celle de l'Institut Henri Poincaré.

Qu'ils soient de l'ENAC, de l'université de Toulon (pré- comme post-ENAC), de Luminy, de ClearSy, d'Aix-en-Provence, je remercie tous mes collègues même si les aléas de la vie nous ont séparés.

Merci à mes amis les plus proches. Ils ne sont pas très nombreux à avoir ce courage et cette

6. Désolé mais Lens sera battu par l'Olympique de Marseille!

7. Notamment pour avoir organisé les journées C2 2006 à Eymoutiers...

constance alors je peux les nommer ! Carole, David (l'homme élastique), Mathieu et la jolie petite promesse en gestation, vous formez une famille formidable. J'espère que tous vos projets se réaliseront (l'euromillions y compris). Manolo (la femme invisible), j'espère qu'on aura l'occasion de refaire de belles petites marches en montagne. Bon travail au CNRS. Hasta pronto, amigo. Thierry (la chose), danke pour ce séjour à Munich, mein Freund, mais merci encore plus pour ta fidèle amitié. Merci aux quatre dramatiques (de la part de la torche humaine) !

Merci à tous les membres de ma famille. Merci à mes tantes, mes oncles, mes cousines, mes cousins, et leurs conjoints (ce fut une belle fête cet été en particulier grâce à vous). Merci à mes grands-parents qu'ils soient ici ou là-haut. Merci à mes parents (je vous suis redevable pour tout et bien plus encore), à mes frères, Fred et Mathieu alias Anthony (on a réussi l'exploit de tous monter à Paris, ce qui n'est pas trop dur⁸ en soi, mais aussi d'habiter dans le même immeuble!), et à leurs conjoints Olivier (toutes mes félicitations Mr. O pour une reconversion plus que réussie) et Saloua (c'est où Saint-Lubin-des-Joncherets?).

*Nadia, lahelek habilti*⁹.

$$1 + 1 + 162 = 1$$

8. Un petit bémol : quitter ce paradis sur Terre qu'est la Seyne-sur-Mer n'est pas si aisé.

9. À la puissance $\kappa_\infty = \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_{\dots}}}}$, où $\kappa_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n$ (dans la topologie de l'ordre des ordinaux) avec $\kappa_0 = \aleph_0$ et $\kappa_{n+1} = \aleph_{\kappa_n}$ pour tout entier naturel n (en particulier $\kappa_\infty = \aleph_{\kappa_\infty}$, et en plus d'être un ordinal, c'est un cardinal).

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Cadre général de ma recherche	2
1.2	Thème « Cryptographie »	3
1.3	Contributions à l'analyse, à l'algèbre et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries	8
1.3.1	Introduction	8
1.3.2	Notations, définitions et résultats généraux	9
1.3.3	Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre	9
1.3.4	Algèbres de matrices infinies	9
1.3.5	Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus	10
1.3.6	Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro	10
1.3.7	Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique	10
1.3.8	Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés	11
1.4	Conclusion	11
2	Notations, définitions et résultats généraux	13
2.1	Catégories	14
2.2	Notations ensemblistes	14
2.3	Semi-groupes, monoïdes et groupes	15
2.4	Anneaux, algèbres et modules	16
2.5	Brefs rappels de topologie	17
2.6	Anneaux, algèbres et modules topologiques	18
2.7	Sommabilité	18
2.8	Polynômes et séries formelles	19
3	Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre	23
3.1	Introduction	23
3.2	Rappels sur les espaces de Fréchet	24
3.3	Rappels sur les algèbres de Fréchet	25
3.4	Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet	27
3.4.1	Analyticité des chemins à valeurs dans une algèbre de Fréchet	27
3.4.2	Séries entières dans les espaces de Fréchet	29
3.4.3	Exponentielle et logarithme dans une algèbre de Fréchet	31
3.4.4	Existence et unicité d'une solution d'un certain problème de Cauchy	33
3.4.5	Espaces/algèbres de Fréchet comme limites projectives d'espaces/algèbres de Banach	33
3.4.6	Calcul fonctionnel analytique dans une algèbre de Fréchet	36

3.4.7	Sous-groupes à un paramètre tracés dans une algèbre de Fréchet	37
3.5	Conclusion et perspectives	39
4	Algèbres de matrices infinies	41
4.1	Introduction	41
4.2	Matrices infinies en toute généralité	43
4.3	Algèbre des matrices finies en ligne	44
4.3.1	Généralités	44
4.3.2	Applications linéaires associées	45
4.3.3	Propriétés topologiques de $R^{X \times (Y)}$	47
4.3.4	Produit tensoriel complété	48
4.3.5	Compositions ombrales généralisée et classique	49
4.4	Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies	51
4.4.1	Généralités algébriques	51
4.4.2	Quelques isomorphismes	53
4.4.3	Propriétés topologiques	53
4.4.4	Limites projectives	54
4.5	Conclusion et perspectives	57
5	Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus	59
5.1	Introduction	59
5.2	Quelques notations	61
5.3	Le théorème principal	62
5.4	La preuve du théorème 5.3	63
5.5	Les conséquences du théorème 5.3 sur les opérateurs linéaires continus	66
5.6	Dual topologique et complétion	68
5.7	Topologie faible	69
5.8	Conclusion et perspectives	70
6	Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro	73
6.1	Introduction	73
6.2	Monoïdes à zéro	75
6.3	Algèbre contractée d'un monoïde à zéro	77
6.4	L'algèbre contractée large d'un monoïde à zéro à décomposition finie	79
6.5	Monoïdes à zéro localement finis	81
6.6	Opération étoile et formule d'inversion de Möbius	83
6.7	Quelques remarques au sujet des séries de Hilbert	86
6.8	Conclusion et perspectives	87
7	Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique	89
7.1	Introduction	89
7.2	Les algèbres de Weyl	91
7.2.1	Définition formelle et premières propriétés	91
7.2.2	Graduation de l'algèbre de Weyl	92
7.3	Ordre normal et nombres de Stirling généralisés	93
7.4	Représentations	95
7.5	Exponentielle de mots bosoniques « conjugués » $(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$	96
7.5.1	Cas $w = \lambda \mathbf{a}$	97
7.5.2	Cas $w = \lambda \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$	97

Table des matières

7.5.3	Cas $w = \lambda \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger$	99
7.5.4	Cas $w = \lambda (\mathbf{a}^\dagger)^n \mathbf{a}$, $n > 1$	99
7.5.5	Cas $w = \lambda (\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$, $n > 0$, $m > 1$, $m - n \geq 0$	100
7.6	Sous-groupes à un paramètre et matrices de Stirling	101
7.7	Conclusion et perspectives	103
8	Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés	105
8.1	Introduction	105
8.2	Notations	106
8.3	Retour sur le résultat classique	107
8.4	Développement des endomorphismes en termes d'opérateurs d'échelle	108
8.5	Extension au cas des combinaisons linéaires infinies	113
8.5.1	Préliminaires : topologie et dualité	113
8.5.2	Extension du théorème 8.7 aux combinaisons linéaires infinies	117
8.6	Conclusion et perspectives	119
9	Conclusion et perspectives	121
9.1	Conclusion	121
9.2	Perspectives	122
	Index	126
	Bibliographie	131

Chapitre 1

Introduction

Le début ne laisse pas présager la fin.

HÉRODOTE, *Histoires*

[...] car on a au moins une certitude, ce ne peut pas être pire ; donc ce sera mieux, donc on avait raison. Belle tautologie !

PASCAL PICQ, *Football : de l'euphorie au lynchage*

Sommaire

1.1	Cadre général de ma recherche	2
1.2	Thème « Cryptographie »	3
1.3	Contributions à l'analyse, à l'algèbre et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries	8
1.4	Conclusion	11

Ce chapitre est à la fois une introduction et une synthèse des travaux présentés dans ce manuscrit. On y traite également, et brièvement, des travaux relevant de la cryptographie, absents de ce texte.

Note à l'attention du lecteur : Ce chapitre se révèle être singulier par son style, au titre de l'emploi du pronom personnel de la première personne du singulier. Dans la suite du manuscrit, le pronom personnel de la première personne du pluriel ainsi que le pronom indéfini « on » sont systématiquement utilisés malgré l'aspect impersonnel qui en résulte. Ce choix est fait sciemment dans la mesure où il illustre le caractère collaboratif de certains des travaux présentés. L'évocation des travaux de cryptographie constitue une autre particularité de ce chapitre.

Préambule

Mon travail de recherche gravite autour de deux axes : la cryptographie (depuis 2002, date du début de ma thèse de doctorat de mathématiques) et la combinatoire algébrique (depuis 2007, date de mon recrutement en tant que maître de conférences). Mes contributions dans ces deux domaines n'ont aucun lien direct en commun ; en bref, elles constituent moralement une somme disjointe.

Très clairement, le dossier de chercheur m'ayant permis de prétendre à une habilitation à diriger des recherches repose sur la totalité de mon apport scientifique. Aussi, en toute logique, mon manuscrit devrait traiter des deux thématiques d'égale façon.

Cependant, le choix du contenu et de l'organisation d'un manuscrit ne prétend nullement ne relever que de la seule logique aussi importante fut-elle ; l'élégance de la forme, l'accessibilité et, plus encore, la compréhension me semblent bien plus fondamentales, et doivent, à mon sens, guider l'auteur. À mon avis, une forme de dissonance se détacherait du mélange brut des deux domaines. Évidemment, un travail d'uniformisation pourrait conférer un aspect plus cohérent à cet amalgame, mais je crains que cela ne ferait que dissimuler une juxtaposition par trop artificielle.

Ainsi, faisant contre mauvaise fortune bon cœur, le choix a été fait de ne dédier le contenu de ce manuscrit qu'à la fraction de mes travaux concernant la combinatoire algébrique. Mais parce qu'il faut être scientifiquement intègre, dans le numéro 1.2 de ce chapitre introductif, j'aborde, pour la première et dernière fois dans ce manuscrit, la partie de mes travaux relevant de la cryptographie. Une fois cela fait, ce sujet n'est plus même mentionné, et la totalité du manuscrit – exception faite de ce maigre reliquat – ne concerne que l'algèbre et la combinatoire. Je prie donc le lecteur algébriste et/ou combinatoricien, non spécialiste de cryptographie (ou pousser par le désir d'aller vite et à l'essentiel), de me pardonner pour cette courte incise¹ : la suite du manuscrit n'est dédiée qu'aux mathématiques qu'il affectionne.

Au lecteur cryptologue, je veux dire mon attachement, et le profond respect que je témoigne, à sa discipline malgré la portion congrue qui lui est réservée au sein de ce texte ; je n'oublie pas qu'elle fut ma thématique d'origine. J'espère qu'il explorera ce manuscrit avec curiosité, sinon avec plaisir, et qu'il aura à cœur de déchiffrer le message que j'aspire à transmettre.

Mes travaux d'algèbre et de combinatoire, présentés dans le texte, reposent essentiellement sur les publications Duchamp *et al.* (2010); Poinso *et al.* (2010a,b,c); Poinso (2011b). Toujours dans la volonté de servir le lecteur, et mû par un profond désir de convaincre de la cohérence interne et globale de mes travaux, j'ai préféré traduire et enrichir une partie de ces articles plutôt que de les juxtaposer ainsi que le veut la tradition. Chaque chapitre de mon texte correspond ainsi à l'intégralité ou seulement à une fraction d'une publication, mais également à un recueil formaté de différents résultats apparaissant dans plusieurs articles et relevant tous d'une même unité théorique (offrant de la sorte une aisance à la fois pour la compréhension et pour la lisibilité).

1.1 Cadre général de ma recherche

Depuis mon recrutement en tant que maître de conférences à l'université Paris XIII, au sein de l'équipe CALIN (« Combinatoire, Algorithme et Interactions »), mon activité en tant que chercheur s'articule autour de deux thèmes indépendants, à savoir, l'analyse harmonique sur les groupes finis et son application à la cryptographie, et la combinatoire algébrique ; le premier m'ayant été proposé par le professeur Sami Harari, de l'Université du Sud Toulon-Var, comme sujet pour mon doctorat de mathématiques.

Le travail de cryptographie, débuté en thèse, se poursuit jusqu'à aujourd'hui (j'en veux pour preuve mes publications récentes : les articles Poinso (2009a,b, 2010a, 2011a); Poinso et Pott (2011), l'ouvrage Poinso (2010b) et la participation à un ouvrage collectif spécialisé Harari et Poinso (2011) dans cette thématique).

Néanmoins, lors de mon intégration au sein de l'équipe CALIN en septembre 2007, l'opportunité me fut offerte d'effectuer une reconversion thématique, largement encouragée, et appuyée, par mes collègues et les directions de l'équipe et du laboratoire, vers des sujets propres à la combinatoire algébrique.

1. Et, si le pardon ne m'est pas accordé, alors je propose à ce même lecteur de considérer la possibilité d'oublier momentanément de compter (le drame pour un combinatoricien!), et de sauter directement du numéro 1.1 au numéro 1.3, enjambant de la sorte cette absconse portion de manuscrit qu'est le numéro 1.2.

1.2. Thème « Cryptographie »

D'un point de vue quantitatif, je peux estimer à un tiers mon taux d'implication actuel en cryptographie ; la fraction restante concernant donc mon travail d'algèbre et de combinatoire. Ceci explique, et souligne, la particularité de mon profil de recherche dichotomique, ainsi que le caractère spécifique de mes publications dans deux domaines.

Organisation du chapitre

La synthèse de mes travaux de recherche en cryptographie est exposée dans le numéro 1.2. Il s'agit de la seule partie de ce manuscrit traitant de ce thème. Après une courte synthèse des travaux présentés dans ce manuscrit, le numéro 1.3 reprend, chapitre après chapitre, le contenu de ce texte, lequel ne concerne que la combinatoire algébrique (avec un *chouïa* d'analyse).

1.2 Thème « Cryptographie »

Les systèmes cryptographiques sont de deux types : les procédés à clefs secrètes, et ceux à clefs publiques. Les outils mathématiques pour les traiter sont fondamentalement distincts ; la cryptographie à clefs secrètes faisant la part belle à l'utilisation des groupes finis (en général les groupes 2-abéliens, ou les corps finis), la transformée de Fourier et la combinatoire des caractères, alors que le monde de la cryptographie à clefs publiques nécessite l'emploi de la théorie de la complexité, de la calculabilité, et, parfois, d'une portion de géométrie algébrique sous la forme de courbes (hyper-)elliptiques.

Le travail qui me fut proposé en septembre 2005 par Sami Harari, professeur des universités, comme sujet de thèse, relève du premier type. L'idée de départ consistait à utiliser la dualité de Pontryagin (restreinte aux groupes finis) afin d'établir des critères de résistance de certaines fonctions face à des classes de cryptanalyses bien déterminées. Cette approche de l'étude théorique de la solidité cryptographique n'est pas nouvelle en soi puisque déjà en 1976, O. S. Rothaus (Rothaus (1976)) proposait les fonctions courbes – définies *via* la transformée de Fourier – comme composants de systèmes cryptographiques immunisés contre les attaques linéaires.

Commençons donc par mentionner les concepts relatifs à ceux de mes travaux qui font partie de la cryptographie, et, en premier lieu, la notion combinatoire de non-linéarité parfaite. Supposons donnés deux groupes finis abéliens, notés additivement, G et H . On pose G^* pour $G \setminus \{0\}$ (et de même pour H). La *dérivée* $d_\alpha f \in H^G$ de $f \in H^G$ suivant $\alpha \in G$ est donnée par $d_\alpha f(x) = f(\alpha + x) - f(x)$.

On dira que f est *parfaitement non linéaire* si, et seulement si, quels que soient $\alpha \in G^*$ et $\beta \in H$, le nombre de solutions x à l'équation $d_\alpha(f(x)) = \beta$ est exactement le rapport du cardinal de G par celui de H . Cette notion fut à l'origine proposée dans le cadre des groupes finis 2-abéliens (et avec H réduit à \mathbb{Z}_2) dans Dillon (1974); Rothaus (1976) puis généralisée au cadre des groupes finis commutatifs quelconques notamment par C. Carlet et C. Ding dans Carlet et Ding (2004). Ce type de fonctions manifeste la résistance maximale à l'attaque dite « différentielle » formalisée dans Biham et Shamir (1991).

Le second ingrédient essentiel à mes travaux est la notion de fonctions courbes. Étant donné $f \in H^G$ (où G et H sont comme ci-dessus), l'application f est dite *courbe* si, et seulement si, pour tout caractère non trivial $\chi \in \widehat{H}$ (où \widehat{H} désigne le groupe des caractères de H , isomorphe à H puisque ce dernier est supposé abélien fini), $|\widehat{\chi \circ f}(x)| = \sqrt{|G|}$ pour tout $x \in G$, où $\widehat{\phi}$ désigne la *transformée de Fourier* d'une application $\phi \in \mathbb{C}^G$ (autrement dit, la décomposition de ϕ dans la base des caractères des fonctions centrales sur G , soit ici, \mathbb{C}^G tout entier dans la mesure où G est commutatif). Cette notion fut également tout d'abord introduite dans le cadre de la caractéristique deux avant d'être étendue aux groupes finis abéliens quelconques (Logachev et al. (1997); Carlet et Ding (2004)).

Au même titre que les fonctions parfaitement non linéaires, les fonctions courbes présentent la résistance maximale face à une autre cryptanalyse, à savoir, l'attaque linéaire (Matsui (1994)). Or ceci n'est en rien étonnant car les deux concepts se trouvent être équivalents (Dillon (1974); Rothaus (1976) ont prouvé cela de façon indépendante, et Carlet et Ding (2004) l'ont obtenu dans le cadre des groupes finis abéliens en toute généralité).

De part leur caractère extrémal, il existe de nombreuses obstructions à l'existence de ces fonctions courbes (ou parfaitement non linéaires, peu importe). Par exemple, dans le cadre de la caractéristique deux, laquelle a été longtemps très étudiée, une condition nécessaire à l'existence des fonctions courbes de \mathbb{Z}_2^m dans \mathbb{Z}_2^n est que m soit un nombre impair et supérieur à $2n$. Aucun espoir de construire des fonctions parfaitement non linéaires dans les autres configurations! Ceci est fâcheux dans la mesure où dans la pratique apparaissent souvent les cas $m = n$ ou m est pair.

Afin de contourner cette difficulté théorique, plusieurs solutions sont envisageables. La première, privilégiée jusqu'à présent, a été d'affaiblir d'une façon ou d'une autre la notion de fonctions courbes ou celle de non-linéarité parfaite en changeant les bornes (on obtient de la sorte des fonctions « presque courbes » ou des fonctions « presque parfaitement non linéaires ») qui ne présentent plus la résistance maximale face à l'une ou à l'autre (et encore moins aux deux simultanément) des attaques précédemment citées mais simplement une résistance seulement sous-optimale.

L'autre approche, que j'ai initiée et développée dans mes travaux, consiste à remplacer la représentation régulière d'un groupe sur lui-même par une action plus générale, tout en conservant à l'identique la notion de non-linéarité parfaite. Cette généralisation, que je présente ci-après, passe en outre au cadre des groupes finis non abéliens, et possède le bon goût de conserver l'équivalence traditionnelle entre non-linéarité parfaite et fonctions courbes.

Implicite à la définition de la non-linéarité parfaite est l'action d'un groupe sur lui-même par translation (action régulière). Supposons maintenant qu'un groupe fini G (abélien ou non) agisse fidèlement (quitte à passer au quotient par le noyau de l'action) sur un ensemble X . On note « $g \cdot x$ » cette action, où $g \in G$ et $x \in X$. Supposons donnée une application $f \in H^X$, où H est un groupe fini (abélien ou non). On définit la *dérivée de f suivant $g \in G$* comme $d_g f \in H^X$ telle $d_g f(x) = f(g \cdot x)f(x)^{-1}$ (où H est noté multiplicativement afin de garder à l'esprit la possibilité qu'il ne soit pas commutatif).

Nous dirons alors que f est *G -parfaitement non linéaire* si, et seulement si, quels que soient $g \in G^*$, et $h \in H$, le nombre de solutions $x \in X$ à l'équation $d_g f(x) = h$ est exactement $\frac{|X|}{|H|}$. Il est clair qu'il s'agit simplement de la notion de non-linéarité parfaite dans laquelle l'action de G sur X se substitue à l'action régulière de G sur lui-même. Il s'avère néanmoins que ce type de relaxations permet de construire des fonctions avec de bonnes propriétés cryptographiques dans des cas impossibles en théorie classique.

Dans ma thèse Poinot (2005) (H est alors supposé abélien), puis dans ma récente publication Poinot (2011a) (cette fois G et H sont non commutatifs), et également dans l'article Poinot (2006a) (dans lequel j'étudie les applications d'un groupe fini non commutatif à valeurs dans le corps des complexes), je démontre l'équivalence entre la G -non-linéarité parfaite et la notion de fonctions courbes adéquate à ce contexte. Pour cela, encore est-il nécessaire d'utiliser la dualité de Tannaka-Krein, plutôt que celle de Pontryagin, soit, en d'autres termes, la notion de représentations linéaires (irréductibles) d'un groupe non commutatif, et l'analyse harmonique qui lui est attachée.

Pour simplifier supposons que l'on considère, comme dans le cas usuel, la représentation régulière (gauche, puisqu'on est en non commutatif). Étant donné deux groupes non commutatifs G, H , soient \tilde{G} (respectivement, \tilde{H}) un système de représentants de représentations unitaires irréductibles de G (respectivement, de H) pour la relation d'équivalence des représentations. Soit

1.2. Thème « Cryptographie »

$f \in H^G$. Cette application est parfaitement non linéaire si, et seulement si, pour tout $\gamma \in \tilde{G}$,

$$\sum_{k=1}^{\dim(\rho)} \widetilde{(\rho_{ik} \circ f)}(\gamma) \circ \widetilde{(\rho_{jk} \circ f)}(\gamma)^* = |G| \text{Id}_\gamma \delta_{i,j} 0_{\text{End}(\rho)} \quad (1.1)$$

pour $i, j \leq \dim(\rho)$ (où $\rho \in \tilde{H}$ non triviale, et ρ_{ij} désigne le coefficient matriciel (i, j) de ρ , $0_{\text{End}(\rho)}$ est l'endomorphisme nul de l'espace vectoriel support de la représentation ρ , $\tilde{\phi}$ représente la transformée de Fourier au sens des représentations d'une fonction à valeurs complexes, développée dans ma thèse Poinot (2005), $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker, et « $*$ » est l'adjoint d'un opérateur). Pour comparaison avec le cas classique des fonctions courbes, je rappelle que l'on a pour tout caractère non trivial de H ,

$$|\widehat{\chi \circ f}(g)|^2 = |G| \quad (1.2)$$

pour tout $g \in G$. C'est en ce sens que, d'une part, la notion de fonction courbe a été généralisée, et, d'autre part, que la correspondance traditionnelle « non-linéarité parfaite » \Leftrightarrow « fonctions courbes » est maintenue dans le monde non commutatif.

Revenons à ce stade à la substitution de l'action régulière par une action fidèle quelconque. Cela permet de construire des objets combinatoires nouveaux : il est connu que les fonctions courbes à valeurs dans \mathbb{Z}_2 (et définies sur \mathbb{Z}_2^n pour un certain entier naturel n) sont en correspondance avec certaines constructions combinatoires dont voici la définition : soient $(G, +)$ un groupe fini abélien d'ordre v , et un ensemble $D \subseteq G$ de cardinal k . On dit que D est un (v, k, λ) -ensemble à différences si pour chaque $\alpha \in G^*$, l'équation $x - y = \alpha$ admet exactement λ solutions $(x, y) \in D^2$ distinctes. L'existence de ces objets, à la définition combinatoire très contrainte, rencontre, comme pour la non-linéarité parfaite, certaines obstructions. Par ailleurs, la généralisation subie par les fonctions courbes, à savoir, la prise en compte d'une action fidèle quelconque, peut de façon évidente être appliquée au concept d'ensembles à différences. Cette approche nous a permis, à James A. Davis et moi-même dans l'article Davis et Poinot (2008), de construire de nouveaux ensembles à différences avec des paramètres (v, k, λ) violant les obstructions classiques (ce qui est déjà intéressant en soi), mais également de nouvelles fonctions courbes dans les cas impossibles (voir également à ce sujet mon article Poinot (2006b)), telles que la dimension paire ou le cas des fonctions de \mathbb{Z}_2^m dans lui-même. Dans ce même travail, nous montrons également que l'on peut adosser à certaines structures algébriques similaires aux corps (avec des axiomes affaiblis pour l'associativité ou la distributivité), telles que les semi-corps, les quasi-corps, les presque-corps (« nearfields »), des constructions d'applications parfaitement non linéaires complètement nouvelles.

Si les notions de fonctions parfaitement non linéaires et courbes peuvent être généralisées, il est également possible d'étendre les concepts cryptographiques de fonctions presque parfaitement non linéaires et maximale-ment non linéaires. Il s'agit précisément du travail effectué récemment avec Alexander Pott (Poinot et Pott (2011)). À toute fonction $f : K \rightarrow N$ nous associons son graphe ensembliste $D_f \subseteq G = K \times N$ (où K et N sont deux groupes abéliens finis) :

$$D_f = \{(g, f(g)) | g \in K\} .$$

On peut évidemment le voir comme un élément de l'algèbre du groupe $\mathbb{C}[G]$ de G . Les caractères de G peuvent naturellement être étendus par linéarité en des homomorphismes d'algèbres de $\mathbb{C}[G]$ dans \mathbb{C} : si $D = \sum_{g \in G} d_g g \in \mathbb{C}[G]$ et χ est un caractère de G , alors

$$\chi(D) = \sum_{g \in G} d_g \chi(g) .$$

En utilisant les caractères, on obtient un autre critère de non-linéarité : une fonction $f : K \rightarrow N$ (où K et N sont tous deux des groupes finis abéliens) est dite *maximalement non linéaire* si, et seulement si,

$$\max_{\chi_N \neq \chi_0} |\chi(D_f)| \leq \max_{\chi_N \neq \chi_0} |\chi(D_g)| \quad \forall g : K \rightarrow N$$

ou, de façon équivalente,

$$\max_{\chi_N \neq \chi_0} |\chi(D_f)| = \min_{g:K \rightarrow N} \max_{\chi_N \neq \chi_0} |\chi(D_g)| .$$

La valeur $\sqrt{|K|}$ est une borne inférieure pour la quantité $\max_{\chi_N \neq \chi_0} |\chi(D_f)|$, ce qui provient facilement de la relation de Parseval pour les groupes abéliens. Une fonction qui atteint cette borne théorique est courbe.

Finalement, les caractères nous permettent d'introduire la notion de fonctions presque parfaitement non linéaires :

Théorème 1.1. *Soient K et N deux groupes finis commutatifs. Une fonction $f : K \rightarrow N$ est presque parfaitement non linéaire si, et seulement si,*

$$\sum_{\chi} |\chi(D_f)|^4 \leq \sum_{\chi} |\chi(D_g)|^4, \quad \forall g : K \rightarrow N .$$

Le but de Poinso et Pott (2011) est précisément d'étendre ces notions au cas des groupes non commutatifs. Les classes d'isomorphisme de représentations linéaires (de dimension finie sur le corps des complexes) d'un groupe G fini forment un anneau : il suffit de considérer le groupe commutatif librement engendré par toutes les classes d'isomorphisme des représentations de G , quotienté par le sous-groupe engendré par les éléments de la forme $\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 \oplus \rho_2)$, où $\rho_1 \oplus \rho_2$ est la somme directe des (classes de) représentations. On peut démontrer que les représentations irréductibles \tilde{G} forment une base de ce \mathbb{Z} -module (qui est donc libre). La structure d'anneau, appelée *l'anneau des représentations de G* (groupe de Grothendieck de la catégorie des G -modules de dimension finie sur \mathbb{C}), est alors donnée simplement par le produit tensoriel : $\rho_1 \otimes \rho_2 : g \in G \mapsto \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \in GL(V_1 \otimes V_2)$, définie sur ses générateurs et étendue par linéarité.

Notons V_ρ l'espace de la représentation ρ . Pour $D \in \mathbb{C}[G]$ on peut définir sa *transformée de Fourier* par $\tilde{D} = \sum_{\rho \in \tilde{G}} \rho(D) \rho$, qui est un élément de $\bigoplus_{\rho \in \tilde{G}} End(V_\rho)$ (où $\rho(D) = \sum_{g \in G} d_g \rho(g)$). Alors la transformation de Fourier est l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbb{C}[G] &\rightarrow \bigoplus_{\rho \in \tilde{G}} End(V_\rho) \\ D &\mapsto \tilde{D} . \end{aligned}$$

Notons que dans le cas où G est un groupe fini abélien, on retrouve la notion usuelle de transformation de Fourier.

En utilisant ces notions, on étend les concepts de fonctions courbes, presque parfaitement non linéaires et maximalement non linéaires données par les bornes correspondantes dans le cas non commutatif (N, K sont des groupes finis possiblement non abéliens).

- *Non linéarité presque parfaite* : fonctions $f : K \rightarrow N$, où $G = K \times N$, qui minimisent la quantité

$$\sum_{\rho \in \tilde{G}} \dim \rho \|\rho(D_f)\|^4 .$$

1.2. Thème « Cryptographie »

– *Non linéarité maximale* : fonctions $f : K \rightarrow N$ minimisant le maximum de

$$\sqrt{\dim \rho} \|\rho(D_f)\|$$

où $\dim \rho$ désigne la dimension de la représentation irréductible ρ .

– *Fonctions courbes* : fonctions $f : K \rightarrow N$ telles que

$$\forall \rho|_N \neq \rho_0, \|\rho(D_f)\|^2 = \frac{m^2(n-1)}{\dim \rho | \widetilde{K} | (|\widetilde{N}| - 1)}$$

où ρ_0 désigne la représentation triviale, et $\rho|_N$ désigne la restriction à N d'une représentation irréductible ρ .

En utilisant les logiciels de calcul formel GAP et MAGMA, nous avons découvert des fonctions satisfaisant ces critères dans le contexte non commutatif. On considère les deux groupes d'ordre 6, le groupe cyclique \mathbb{Z}_6 et le groupe symétrique \mathfrak{S}_3 . Dans la table suivante sont listées les meilleures valeurs (en gras) de la non linéarité presque parfaite et de la non linéarité maximum.

K	N	$\min_{g:K \rightarrow N} \sum_{\rho \in \widehat{G}} \dim \rho \ \rho(D_g)\ ^4$	$\min_{g:K \rightarrow N} \max_{\rho _N \neq \rho_0} \sqrt{\dim \rho} \ \rho(D_g)\ $
\mathfrak{S}_3	\mathbb{Z}_6	2376	4
\mathbb{Z}_6	\mathfrak{S}_3	3972	$4\sqrt{2}$
\mathfrak{S}_3	\mathfrak{S}_3	3552	$2\sqrt{14}$
\mathbb{Z}_6	\mathbb{Z}_6	2808	$2\sqrt{3}$

Il est remarquable que la mesure de la non linéarité presque parfaite est de loin la plus petite dans le cas $(K, N) = (\mathfrak{S}_3, \mathbb{Z}_6)$ et non dans le cas abélien. De plus, si $(K, N) = (\mathfrak{S}_3, \mathbb{Z}_6)$ chaque fonction presque parfaitement non linéaire est également maximale non linéaire. Cette situation n'est pas vraie dans tous les autres cas où aucune fonction presque parfaitement non linéaire n'est maximale non linéaire.

Nous avons également cherché les fonctions courbes de \mathfrak{S}_3 dans un groupe N tel que $1 < |N| \leq 5$. Notons que, contrairement au cas abélien, l'existence de fonctions courbes $K \rightarrow N$ a du sens si $|N|$ n'est pas un diviseur de $|K|$. Les résultats obtenus sont les suivants : en premier lieu, il n'existe aucune fonction courbe si $N \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_5\}$. Mais il existe (au moins) une fonction courbe $f : \mathfrak{S}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_3$. En effet on peut vérifier que l'application f donnée par $f(id) = f((1, 2)) = f((2, 3)) = f((1, 3)) = 0$ et $f((1, 2, 3)) = f((1, 3, 2)) = 1$ est courbe, c'est-à-dire, $\sqrt{\dim \rho} \|\rho(D_f)\| = 2\sqrt{3}$ pour tout $\rho|_{\mathbb{Z}_3} \neq \rho_0$. Le groupe \mathfrak{S}_3 possède deux représentations irréductibles de dimension un, et une représentation irréductible de dimension deux, et \mathbb{Z}_3 a trois caractères. Ainsi, $\frac{|\mathfrak{S}_3|^2(|\mathbb{Z}_3|-1)}{|\mathfrak{S}_3|(|\mathbb{Z}_3|-1)} = 12$. Nous avons $\sqrt{\dim \rho} \|\rho(D_f)\| = 2\sqrt{3}$ pour chaque représentation $\rho \in \widetilde{\mathfrak{S}_3 \times \mathbb{Z}_3}$ non triviale sur \mathbb{Z}_3 . Puisque \mathfrak{S}_3 a une représentation de dimension plus grande que un, f ne peut pas être parfaitement non linéaire (voir Poinot et Pott (2011)).

Dans le cadre de mon activité de recherche en cryptographie, avec mon ancien directeur de thèse, Sami Harari, nous avons rédigé deux chapitres de cryptographie Harari et Poinot (2008); Poinot (2011b) dans des ouvrages collectifs (le premier en français, et le second en langue anglaise). J'ai également publié un ouvrage Poinot (2010b) qui reprend, et étend, les travaux effectués durant ma thèse.

1.3 Contributions à l'analyse, à l'algèbre et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries

1.3.1 Introduction

Les travaux de combinatoire algébrique, collectés afin d'en constituer ce texte, traitent tous, sans exception, des « espaces de séries » et de leurs « endomorphismes ». Le titre du manuscrit contient ainsi ces mots-clefs, lesquels sont abordés sous différents points de vue :

- sous l'angle de l'analyse, presque fonctionnelle, qui nous permet de construire un cadre formel dans lequel sont conduits certains de nos calculs (notamment, la dérivation et l'exponentiation de certains opérateurs),
- sous l'éclairage de l'algèbre (*via* les monoïdes, les algèbres), dans la mesure où cette dernière est bien souvent suffisante pour traiter nos objets²,
- dans l'optique de la combinatoire, puisque les sujets de mon étude sont justement ces séries si précieuses dans la discipline du calcul.

D'autres concepts, ne figurant pas comme mots-clefs dans le titre, sont fondamentaux, à plus d'un titre, dans ce manuscrit. Je peux citer les expressions « sommabilité », « topologie produit » et « dualité ».

Dans ce texte, les séries considérées sont bien souvent des fonctions usuelles représentées, et manipulées, sous la forme d'écritures sommatoires. Les notions inséparables de « sommabilité » et de « somme d'une famille sommable » sont impératives pour donner un sens à ces sommes infinies, indicées bien souvent par des ensembles non ordonnés (elles doivent donc être indépendantes de l'ordre de sommation choisi).

Ce manuscrit traite également des représentations des opérateurs linéaires sous forme de sommes infinies exprimant soit une notion d'analyticité (en dimension infinie), soit une décomposition selon des opérateurs plus fondamentaux (les opérateurs d'échelle).

La topologie est consubstantielle de la sommabilité. Cette dernière s'exprimant généralement dans un cadre topologique (bien qu'il existe d'autres approches basées sur l'ordre – séries de Hahn-Mal'cev-Neumann – ou sur une axiomatique d'un opérateur abstrait de sommation infini sur les monoïdes et les semi-anneaux). Pour ce qui est du ressort de l'écriture sommatoire des fonctions, une topologie naturelle s'impose, la « topologie produit », également connue sous le terme de « topologie de la convergence simple ». Il faut se garder de croire qu'il n'y a qu'une seule topologie produit (qui n'est, de surcroît, qu'un cas particulier de topologie faible ou initiale) dans la mesure où elle repose sur les topologies particulières de chaque facteur direct.

En combinatoire, ou en algèbre, les séries considérées sont souvent les fonctions sur le monoïde libre, ou l'algèbre tensorielle complétée, sur un alphabet **fini**, de sorte que la topologie produit se confond avec la topologie usuelle de la valuation des séries ou avec une limite projective (d'espaces de dimension finie), dite *topologie de Krull*. Dès que l'alphabet est infini (ce qui se rencontre, par exemple, dans le cadre des polylogarithmes), ces topologies ne sont plus identiques.

En analyse, on s'intéresse à la topologie dite de « Fréchet », donnée par une famille dénombrable de semi-normes, mais qui est facilement décrite comme la topologie la moins fine rendant continues des projections (à valeurs dans les corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , équipés de leurs topologies usuelles). Dans tous les cas, la notion de sommabilité s'exprime idéalement dans le cadre de la topologie produit.

Une autre topologie, souvent considérée dans ce manuscrit, est celle, plus algébrique, liée aux concepts de graduation et de filtration. Cette topologie, en général plus forte que la topologie

2. On verra que l'analyse se localise uniquement dans la diagonale des matrices infinies.

1.3. Contributions à l'analyse, à l'algèbre et à la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries

produit, permet de définir l'opération étoile d'une série sans terme constant.

Le concept de « dualité » (topologique) est, à l'évidence, lié à la topologie produit (ou, au moins, aux topologies initiale et faible) puisqu'il permet d'observer un vecteur au travers de formes linéaires (et continues), et que, dans bien des cas, le vecteur lui-même peut être confondu avec ces observations. Les polynômes et les séries, et, plus généralement, les fonctions à support fini et les fonctions générales, sont souvent mis en dualité (le coefficient d'une série formelle par rapport à un mot peut être vu comme la mise en dualité de ce mot et de la série) par le célèbre crochet de dualité

$$\langle S | P \rangle = \sum_{w \in X^*} S_w P_w$$

où $S = \sum_{w \in X^*} S_w w$ et $P = \sum_{w \in X^*} P_w w$ sont respectivement une série et un polynôme (non commutatifs dans les deux cas). Dans ce texte, j'emploie également une telle dualité dans le contexte plus général de l'accouplement d'un espace vectoriel (de dimension infinie dénombrable) et de son complété, pour une topologie relative à une filtration, dont les éléments sont des combinaisons linéaires *infinies*.

Pour finir, je souhaite également citer le concept de « matrices finies en ligne » qui, ainsi que le verra le lecteur, permet de caractériser tous les opérateurs linéaires qui sont continus pour les topologies produits (quelle que soit la topologie de corps séparée choisie sur le corps de base).

J'effectue maintenant un survol panoramique, assez bref, du contenu de chaque chapitre de ce manuscrit, dans l'ordre de lecture, dans un numéro homonyme.

1.3.2 Notations, définitions et résultats généraux

Dans le chapitre 2, j'introduis les notations générales utilisées dans le texte, ainsi que des résultats de base, lesquels sont admis et appliqués sans autre forme de procès. On y retrouve notamment le nom des catégories (ainsi que la définition de leurs flèches) et les structures algébriques et topologiques qui jouent un rôle dans ce texte, ainsi que des résumés relatifs aux notions de topologie et de sommabilité. Enfin, le chapitre s'achève par les notations concernant spécifiquement les polynômes et les séries. D'autres notations sont introduites au cours du texte, et leur liste est donnée en index (à la fin du manuscrit).

1.3.3 Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

Dans le chapitre 3, je rappelle les définitions et résultats fondamentaux concernant les espaces et algèbres de Fréchet, lesquels généralisent les espaces et algèbres de Banach. Comme exemples de telles algèbres, je peux citer les algèbres (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) des séries formelles et des matrices triangulaires inférieures infinies ; ces deux algèbres de Fréchet apparaissent à plusieurs reprises dans ce texte. L'aspect analytique est développé (un calcul différentiel et intégral élémentaire est notamment développé pour donner un sens à la notion de fonctions lisses dans ce cadre). Le résultat central de ce chapitre est l'existence et l'analyticité des fonctions exponentielle et logarithme dans le cadre des algèbres de Fréchet. J'étudie également les sous-groupes à un paramètre tracés dans le groupe des unités d'une algèbre de Fréchet. Ce chapitre constitue la partie dans laquelle l'analyse est la plus présente.

1.3.4 Algèbres de matrices infinies

Dans le chapitre 4, je m'intéresse à la notion de matrices infinies (c'est-à-dire, indicées par des ensembles quelconques, possiblement infinis). Je démontre que les matrices dont chaque ligne est

finie (ou chaque colonne est finie) forment une algèbre (algèbre des matrices à lignes – ou colonnes – finies), mais qui n'est pas topologique (la multiplication n'est généralement pas continue). Je considère ensuite une sous-algèbre de cette dernière, celle des matrices triangulaires inférieures infinies, qui se trouve être à la fois topologique et complète (et même une algèbre de Fréchet). À l'aide des résultats énoncés au chapitre 3, on sait que les matrices de ce type admettent une exponentielle et, parfois, un logarithme. J'en profite pour expliquer quels calculs nécessitent la topologie d'espace de Fréchet, et ceux pour lesquels l'algèbre (et la topologie produit sur le corps de base discret) suffisent, mais également pour introduire les notions d'applications linéaires associées à une matrice infinie, de matrices infinies d'un opérateur linéaire (pour les chapitres 5 et 8), et les suites de dénominateurs (pour le chapitre 8).

1.3.5 Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

Le chapitre 5 est dédié à l'étude et la caractérisation du dual topologique de l'espace des fonctions définies sur un ensemble et à valeurs dans un corps topologique (l'espace supportant la structure d'algèbre des séries formelles, par exemple), cet espace de fonctions étant équipé de la topologie produit. Les principaux résultats de ce chapitre sont les suivants :

1. Le dual topologique de l'espace des fonctions (à valeurs dans un corps de base topologique séparé) avec la topologie produit est l'espace de fonctions à support fini, les polynômes. Le dual est donc indépendant du choix de la topologie de corps Hausdorff sur le corps de base.
2. Une application linéaire entre deux tels espaces de fonctions est continue si, et seulement si, elle admet une représentation sous la forme d'une matrice à lignes finies. Autrement dit, l'algèbre des matrices à lignes finies correspond exactement à l'algèbre des applications linéaires et continues (entre ces espaces). Là encore, ce résultat est indépendant du choix de la topologie séparée sur le corps de base, et mieux, un opérateur est continu pour une topologie produit si, et seulement si, il l'est vis-à-vis de toutes les topologies produits.

1.3.6 Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

Je complète l'étude des espaces de séries au chapitre 6 par l'introduction d'une notion adéquate d'algèbre large d'un monoïde à zéro. L'algèbre contractée d'un monoïde à zéro (un monoïde avec un élément absorbant bilatère), connue dans la littérature, est celle des applications à support fini du monoïde dans un anneau (commutatif) qui s'annulent sur le zéro du monoïde, en d'autres termes, les polynômes dont chaque monôme est un élément non nul du monoïde. L'algèbre contractée large est obtenue par complétion de l'algèbre contractée relativement à la topologie produit, de sorte que l'on obtient une algèbre de séries dont chaque monôme est un élément non nul du monoïde. Pour un certain type de monoïdes à zéro, qui sont dits être « localement finis », une fois cette algèbre de séries obtenue, et équipée d'une topologie liée à une valuation, je démontre la formule d'inversion de Möbius, et l'utilise pour calculer certaines séries de Hilbert.

1.3.7 Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

Au chapitre 7, je m'intéresse à certains endomorphismes sur l'espace des séries formelles en la variable x , à savoir, à l'algèbre de Weyl, réalisée sous la forme de l'algèbre engendrée par l'opérateur d'« intégration formelle », la multiplication par la variable x , et l'opérateur de dérivation formelle. Cette algèbre, non commutative et de dimension infinie, admet une base

1.4. Conclusion

algébrique³ dite de l'*ordre normal*, et la physique mathématique s'intéresse depuis longtemps à l'écriture des opérateurs bosoniques, éléments de l'algèbre de Weyl, dans cette base ; il s'agit du *problème de l'ordre normal bosonique*. Les résultats collectés dans les chapitres 3, 4 et 5 permettent de garantir l'existence de l'exponentielle de certains de ces opérateurs (dont quelques unes sont même calculées), vus comme des matrices triangulaires infinies, appelée *opérateurs d'évolution* en mécanique quantique. Le résultat central de ce chapitre est l'observation d'un lien entre la mise sous forme normale des puissances d'un opérateur bosonique et la forme de l'opérateur d'évolution associé.

1.3.8 Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

Le chapitre 8 est conçu dans la continuité de l'étude de l'algèbre de Weyl menée au chapitre 7. Les opérateurs qui engendrent l'algèbre de Weyl sont remplacés par des opérateurs plus généraux, des *opérateurs d'échelle* sur un espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable et muni de bases distinguées : un *opérateur montant* (augmentant le « degré » le long d'une des bases), et un opérateur descendant (abaissant le degré). Dans ce chapitre, je démontre notamment que tout endomorphisme sur l'espace V peut être obtenu comme la somme d'une famille sommable constituée de polynômes en l'opérateur montant et de puissances de l'opérateur descendant. Ce théorème est ensuite étendu au cas des opérateurs **continus** sur une complétion de V dont les éléments sont des combinaisons linéaires infinies (relativement à une base fixée de V). Pour réaliser cela, j'introduis une notion de valuation sur V , laquelle permet de construire le complété, et je mets en dualité (topologique) V et son complété (d'une façon analogue à ce qui est accompli au chapitre 5). Cette dualité induit, d'une part, une topologie faible sur le complété, et, d'autre part, une notion de transposition d'opérateurs. J'utilise ces deux concepts comme ingrédients essentiels à l'extension au cas des opérateurs linéaires et continus sur des combinaisons linéaires infinies du théorème précédemment évoqué.

1.4 Conclusion

Il semble pour le moins curieux de terminer un chapitre introductif par une conclusion, aussi vais-je au plus court. Cette introduction a pour seuls objectifs d'aborder une, et une fois seulement, mes travaux de cryptographie, et de présenter un panorama des travaux de combinatoire algébrique reproduits (et mis à jour) dans le manuscrit.

Une partie de mes travaux en relation avec l'analyse, l'algèbre et la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries est donc déployée dans le contenu du texte que vous vous apprêtez à consulter. J'ai essayé, dans la mesure du possible⁴, de rendre le plus cohérent⁵ possible ce document par factorisation dans des chapitres spécifiques de résultats relevant d'une même unité logique mais figurant dans des publications distinctes. J'espère, en faisant cela, ne pas avoir trahi l'esprit de mes collaborateurs.

Il est temps maintenant d'abandonner le « je » pour un « nous » ou un « on » moins personnels⁶ mais qui rappellent que ce travail est, pour une large part, le produit d'une intelligence collective et collaborative.

Je remercie le lecteur et lui souhaite un agréable parcours le long de l'analyse, de l'algèbre et de la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries.

3. Évidemment, elle en admet beaucoup !

4. Et surtout dans la mesure de mes possibilités !

5. La cohérence interne est aussi importante pour les catégories monoïdales qu'elle l'est pour les manuscrits d'habilitation à diriger des recherches.

6. Sauf si vous êtes portés sur les titres !

Chapitre 2

Notations, définitions et résultats généraux

Dans la plupart des cas, c'est le nom de la partie du corps utilisée qui sert à nommer le nombre : il ne s'agit pas vraiment à l'origine d'un nom de nombre, mais du nom d'un doigt, ou de la main.

LOUIS-JEAN CALVET, *Histoire de l'écriture*

Je suis le duc mec, c'est comme ça qu'il faut m'appeler... ça ou grand duc, ou archiduc... ou je sais pas moi... votre altesse si vous êtes portés sur les titres...

LES FRÈRES COEN, *The Big Lebowski*

Sommaire

2.1	Catégories	14
2.2	Notations ensemblistes	14
2.3	Semi-groupes, monoïdes et groupes	15
2.4	Anneaux, algèbres et modules	16
2.5	Brefs rappels de topologie	17
2.6	Anneaux, algèbres et modules topologiques	18
2.7	Sommabilité	18
2.8	Polynômes et séries formelles	19

Aux notations employées dans ce texte sont parfois ajoutés des signes diacritiques, par exemple des accents, ou des indices, ou des éléments graphiques de petite taille qui peuvent se trouver avant (préfixe), après (postfixe), au-dessus (superfixe), au-dessous (suffixe) ou à l'intérieur (infixe), afin essentiellement de différencier les occurrences d'un même symbole pour en préciser le sens ou de nommer plusieurs objets d'un même type. Dans la mesure du possible, on se contente ici de traiter les signes graphiques dépourvus de toute décoration supplémentaire. L'ensemble des notations utilisées dans ce manuscrit est reporté dans l'index.

2.1 Catégories

Comme de coutume lorsqu'il s'agit de parler de catégories, on suppose une fois pour toute fixé un univers (se référer à Mac Lane (1998) par exemple) duquel on ne dit mot¹, les catégories considérées sont larges mais en général localement petites (au sens où les classes de flèches entre deux objets sont de petits ensembles). Les capitales A, B du début de l'alphabet latin désignent des objets dans une catégorie \mathcal{C} quelconque, alors que les minuscules f, g, h font référence à des flèches (ou morphismes) de \mathcal{C} . La notation « $A \in \mathcal{O}(\mathcal{C})$ » (respectivement, « $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$ ») signifie « A est un objet de \mathcal{C} » (respectivement, « f est une flèche de \mathcal{C} »). En particulier $\mathcal{O}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ désignent respectivement les classes d'objets et de morphismes de \mathcal{C} . Dans la suite du texte, on se passe parfois de la référence à \mathcal{C} quand le contexte suffit à lever l'ambiguïté. Étant donné une catégorie \mathcal{C} , la classe des morphismes de A dans B , A et B tous deux membres de la classe des objets de \mathcal{C} , est notée $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (sauf si \mathcal{C} désigne la catégorie des ensembles ; cf. numéro 2.2). Lorsque le contexte permet d'écartier tout risque de confusion², on se contente de noter $\text{Hom}(A, B)$ cette classe (qui, rappelons le, se trouve être un petit ensemble en général). La relation d'isomorphisme entre objets de la catégorie \mathcal{C} est notée par $\cong_{\mathcal{C}}$ ou \cong si le risque de confusion est faible (bien que dans la pratique la tendance sera d'utiliser une phrase telle que « A est isomorphe (en tant qu'objet de telle ou telle catégorie) à B »). Les classes $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$ et $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$ (et les mêmes sans la référence à la catégorie \mathcal{C}) possèdent leur signification naturelle. Le foncteur d'oubli (lorsqu'il existe) d'une catégorie \mathcal{C} sur une catégorie \mathcal{D} n'est jamais noté ; on préfère utiliser une tournure de la forme « l'objet de \mathcal{D} sous-jacent » comme par exemple « le groupe additif sous-jacent à un module » ou « le monoïde multiplicatif sous-jacent à un anneau ». Le nom des catégories apparaissant dans ce texte est indiqué dans le tableau 2.1.

2.2 Notations ensemblistes

Tout ensemble pourra être appelé *alphabet* en cas de besoin. Les lettres de la fin de l'alphabet latin X, Y, Z sont préposées à la dénomination d'ensembles, les lettres I, J, K, L désignent des ensembles d'indices dont les lettres i, j, k, ℓ en sont des éléments quelconques (une famille³ d'éléments de X est notée sous la forme $(x_i)_{i \in I}$) ; un ensemble étant un objet de la catégorie (large et localement petite) $\mathcal{E}ns$ de tous les petits ensembles. Le cardinal de l'ensemble X est représenté par $|X|$. L'ensemble des applications⁴ de X dans Y est noté Y^X plutôt que $\text{Hom}_{\mathcal{E}ns}(X, Y)$. Les lettres f, g et h désignent des applications (ensemblistes) quelconques. Si $Y \subseteq X$, et $f: X \rightarrow Z$, on note $f|_Y: Y \rightarrow Z$ la restriction de f à Y .

Étant donné deux ensembles X et Y , $X \setminus Y$ est l'ensemble $\{x \in X: x \notin Y\}$. Cependant lorsque X désigne un monoïde, un groupe ou un anneau (objets respectifs des catégories $\mathcal{M}on$, $\mathcal{G}rp$ et $\mathcal{A}nn$, voir numéros 2.3 et 2.4), alors X^* est l'ensemble X privé de son identité (additive lorsqu'il s'agit d'un anneau). Malgré l'ambiguïté qui en résulte, si X est un ensemble, alors X^* représente le monoïde libre sur X (l'étoile sera également utilisée pour noter le dual algébrique d'un module ou l'opération étoile des séries sans terme constant).

1. Il est donc inutile de le nommer.

2. With a vengeance.

3. On utilise également une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'objets d'une certaine catégorie.

4. On se conforme à la plupart des écrits modernes en confondant, plus par paresse que par philosophie et par un abus de langage critiquable, les termes « application » et « fonction ». Si besoin est, on précise le caractère partiel d'une fonction.

2.3. Semi-groupes, monoïdes et groupes

Nom de la catégorie	Description	Numéro
\mathcal{Ab}	Groupes abéliens et homomorphismes de groupes	2.4
\mathcal{Ann}	Anneaux commutatifs avec unité et homomorphismes (unitaires) d'anneaux	2.4
\mathcal{AnnTop}	Anneaux topologiques et homomorphismes continus	2.4
$R\text{-}\mathcal{Alg}$	R -algèbres associatives unitaires et homomorphismes (unitaires) d'algèbres	2.4
$R\text{-}\mathcal{AlgTop}$	R -algèbres topologiques et homomorphismes continus	2.6
\mathcal{Ens}	Ensembles et applications (ensemblistes)	2.2
\mathcal{Grp}	Groupes et homomorphismes de groupes	2.3
\mathcal{GrpTop}	Groupes topologiques et homomorphismes continus	2.6
$A\text{-}\mathcal{Mod}$	A -modules (à gauche) et homomorphismes de A -modules	2.4
$A\text{-}\mathcal{ModTop}$	A -modules (à gauche) topologiques et homomorphismes continus	2.6
\mathcal{Mon}	Monoïdes et homomorphismes de monoïdes	2.3
\mathcal{MonTop}	Monoïdes topologiques et homomorphismes continus	2.6
\mathcal{SemGrp}	Semi-groupes et homomorphismes de semi-groupes	2.3
$\mathbb{K}\text{-}\mathcal{Vect}$	\mathbb{K} -espaces vectoriels et applications \mathbb{K} -linéaires	2.4
$\mathbb{K}\text{-}\mathcal{VectTop}$	\mathbb{K} -espaces vectoriels topologiques et applications \mathbb{K} -linéaires et continues	2.4

FIGURE 2.1 – Noms des catégories

2.3 Semi-groupes, monoïdes et groupes

Le lecteur – même si on doute qu'il en éprouve le besoin – pourra se référer à Bourbaki (2007a) pour les définitions de base concernant ce numéro et le numéro 2.4. Les lettres G et H représentent des groupes (objets de la catégorie \mathcal{Grp}). Les lettres M , N , respectivement, S , T , désignent des monoïdes (objets de \mathcal{Mon}), respectivement, des semi-groupes (objets de \mathcal{SemGrp}) quelconques; évidemment il y a des foncteurs d'oubli $\mathcal{Grp} \rightarrow \mathcal{Mon} \rightarrow \mathcal{SemGrp} \rightarrow \mathcal{Ens}$. Si M est un monoïde non nécessairement commutatif, alors sa loi est notée multiplicativement (ou simplement par juxtaposition) et son identité est 1_M (l'indice pourra être absent); en particulier l'identité (multiplicative) d'un anneau R (ou d'une algèbre A) unitaire est 1_R (ou 1_A). Si la lettre « M » désigne un monoïde commutatif, alors la loi de ce dernier est notée additivement, et son identité est 0_M , cependant si S est un semi-groupe avec zéro (voir Clifford et Preston (1961)), alors 0_S désigne son zéro⁵ (et la loi du semi-groupe, même commutative, est notée

5. Ici aussi l'indice pourra être omis.

multiplicativement de sorte que si S dispose d'une identité, c'est-à-dire que S est un monoïde, alors elle est notée 1_S ; ceci est compatible avec la notation usuelle 0_R (ou 0_A) pour désigner le zéro d'un anneau R (ou d'une algèbre A).

Le semi-groupe libre sur X est X^+ . Le monoïde (respectivement, commutatif) libre sur X est noté X^* (respectivement, $\mathbb{N}^{(X)}$, cf. 2.4).

2.4 Anneaux, algèbres et modules

La lettre majuscule R désigne un anneau commutatif avec unité. À ce propos, le terme « anneau » désigne toujours, sauf mention explicite, un « anneau commutatif avec unité ». Étant donné un anneau R , une R -algèbre, notée A ou B , est considérée comme associative avec unité⁶ (mais non nécessairement commutative); un anneau est évidemment une \mathbb{Z} -algèbre. Les modules, M , N , sur une algèbre A (ou A -modules) sont tous des modules à gauche unitaires (dans la suite le qualificatif « unitaire » peut être omis). Les homomorphismes entre A -modules sont également appelés « applications A -linéaires » (ou, plus simplement, « linéaires »). La catégorie $R\text{-Alg}$ des R -algèbres est celle des monoïdes internes⁷ à la catégorie monoïdale $R\text{-Mod}$, la catégorie des R -modules (avec le produit tensoriel sur R); en particulier la catégorie des anneaux Ann est la catégorie des monoïdes internes à \mathcal{Ab} (groupes abéliens) avec le produit tensoriel sur \mathbb{Z} (notons en passant que \mathcal{Ab} est une sous-catégorie pleine de Grp , et que le foncteur d'inclusion admet un adjoint à gauche, à savoir, le foncteur d'abélianisation). La lettre majuscule \mathbb{K} désigne un corps commutatif (de caractéristique comme de cardinal quelconque). Les lettres V et W sont employées pour dénoter un \mathbb{K} -espace vectoriel, objet de la catégorie $\mathbb{K}\text{-Vect}$.

Soient M un monoïde, et X un ensemble. Le *support* d'une application $f: X \rightarrow M$ est l'ensemble des éléments $x \in X$ pour lesquels l'image par f est distincte de l'identité de M ; il est désigné par $\text{Supp}(f)$. L'ensemble des applications de M^X dont le support est un ensemble fini est noté $M^{(X)}$ et appelé l'ensemble des applications à *support fini* de X dans M . Supposons maintenant que R soit un anneau et A une R -algèbre. À l'évidence $A^{(X)}$ (où le support se réfère ici au groupe additif sous-jacent à A) est un sous- A -module de A^X . Si $x \in X$, alors δ_x est la masse ponctuelle⁸ en x . Plus généralement, étant donné $Y \subseteq X$, on note δ_Y la fonction caractéristique de Y . Le symbole de Kronecker est noté par $\delta_{x,x'}$ (pour $x, x' \in X$).

Supposons que A soit une R -algèbre et que M désigne un A -module libre. Soit \mathcal{B} une base de M sur A . Un élément générique v de M s'écrit de façon unique sous la forme d'une combinaison linéaire (finie) $v = \sum_{e \in \mathcal{B}} \langle v | e \rangle_{\mathcal{B}} e$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls) de sorte que la notation « $\langle v | e \rangle$ », dite de « Dirac-Schützenberger », désigne le coefficient de v suivant l'élément e de la base \mathcal{B} ; en d'autres termes, l'application $v \mapsto \langle v | e \rangle_{\mathcal{B}}$ est la projection, que l'on notera également π_e ou plus simplement $v \mapsto \langle v | e \rangle$, de M sur A suivant e . (Remarquons que pour des raisons de clarté, au chapitre 8, nous utiliserons la notation $\langle v, e_i \rangle$ plutôt que $\langle v | e_i \rangle$.) On remarque que l'on dispose des isomorphismes $M \cong_{A\text{-Mod}} A^{(\mathcal{B})} \cong_{A\text{-Mod}} \bigoplus_{e \in \mathcal{B}} Ae$, où Ae est le

A -module monogène engendré par e . Le A -module libre $A^{(X)}$ des fonctions à support fini admet $\{\delta_x : x \in X\}$ comme base canonique.

Étant donné une famille $(M_i)_{i \in I}$ de A -modules, on désigne par $\prod_{i \in I} M_i$ le produit de cette

6. Excepté, bien évidemment, s'il s'agit d'une algèbre de Lie auquel cas l'expression « de Lie » sera systématiquement employée.

7. De même, la catégorie Mon est celle des monoïdes internes à Ens avec le produit cartésien comme bifoncteur monoïdal.

8. Indifféremment appelée *masse de Dirac* en x ou *fonction caractéristique* ou *indicatrice* de $\{x\}$.

2.5. Brefs rappels de topologie

famille, avec les projections canoniques $\pi_i: (v_i)_{i \in I} \mapsto v_i$. Le coproduit $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est un sous A -module du produit. Lorsque $M_i = A$ pour tout $i \in I$, et $I = X$, alors $A^X \cong_{A\text{-Mod}} \prod_{x \in X} A$, et $A^{(X)} \cong_{A\text{-Mod}} \bigoplus_{x \in X} A$ (où A est traité comme un A -module à gauche).

2.5 Brefs rappels de topologie

Ce numéro concerne la notion de topologie initiale, centrale à bien des égards dans nos travaux, que l'on emploie à plusieurs reprises dans ce texte. Les références citées à la fin de ce numéro permettent au lecteur de s'instruire davantage.

Tout d'abord, afin d'alléger les notations, on se permet de confondre un espace topologique avec son ensemble sous-jacent tirant ainsi profit, de façon implicite, du foncteur d'oubli de la catégorie des espaces topologiques sur celle des ensembles. Évidemment par nécessité de précision, on notera parfois (mais très peu) (E, τ) un espace topologique (E désigne l'ensemble sous-jacent et τ sa topologie, généralement donnée sous la forme de l'ensemble des ouverts). Les termes « voisinage » et « voisinage ouvert » possèdent leur signification habituelle en topologie.

Soit X un ensemble et \mathcal{F} une famille d'applications $f: X \rightarrow E_f$, où chaque E_f est un espace topologique. La *topologie initiale* induite par \mathcal{F} sur X est la topologie la moins fine rendant continue chaque application f . Cette topologie est Hausdorff si, et seulement si, chaque E_f est séparé, et \mathcal{F} sépare les points de X (c'est-à-dire que que quels que soient $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{F}$ tel que $f(x) \neq f(y)$). Une base locale de voisinages (ouverts) de $x \in X$ est donnée par les ensembles de la forme $\bigcap_{f \in F} f^{-1}(U_f)$ où $F \subseteq \mathcal{F}$ est un ensemble fini, et U_f est un ouvert de

E_f tel que $f(x) \in U_f$. Cette topologie est caractérisée par un problème universel : étant donné un espace topologique F , et une application ensembliste $g: F \rightarrow X$, celle-ci est continue si, et seulement si, quel que soit $f \in \mathcal{F}$, $f \circ g: F \rightarrow E_f$ est continue.

Considérons maintenant le cas où l'ensemble X est de la forme E^X avec E un espace topologique. La *topologie produit* (ou *topologie de la convergence simple* ou, en anglais, *function topology*) sur E^X est la topologie initiale induite par les projections canoniques $\pi_x: f \mapsto f(x)$, $x \in X$. Cette topologie est séparée dès lors que E est Hausdorff. Une base locale de $f \in E^X$ est donnée par $\bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}(U_x)$ où $F \subseteq X$ est un ensemble fini, et U_x est un ouvert de E tel que

$f(x) \in U_x$. Elle est caractérisée par la propriété universelle suivante. Soient F un espace topologique, et $f: F \rightarrow E^X$ une application ensembliste. Elle est continue, si, et seulement si, quel que soit $x \in X$, l'application $\pi_x \circ f: F \rightarrow E$ est continue. Notons que la topologie initiale donnée par les projections peut être définie sur $A^{(X)}$ (où A est une algèbre) bien qu'il ne s'agisse pas à strictement parler de la topologie produit (on l'appellera néanmoins ainsi par abus de langage ; l'application π_x pour $x \in X$ devrait en toute rigueur être appelée *forme coordonnée d'indice x* , et l'ensemble de ces formes constitue un système libre – qui est évidemment une base quand X est fini – du A -module $A^{(X)}$). Dans la suite du texte, l'expression « E discret » signifie que E est un espace topologique pour la topologie discrète.

D'autres rappels relatifs à des concepts topologiques sont effectués au numéro 2.7. La littérature classique sur ce sujet est riche et très intéressante. Voici une petite liste qui ne prétend évidemment pas à l'exhaustivité. En langue française, on peut citer Tisseron (1985); Bourbaki (2007d). Pour l'anglais, on dispose de Kowalsky (1964); Kelley (1975); Steen et Seebach (1995); Munkres (2000). En ce qui concerne la langue de Goethe, Alexandroff et Hopf (1935) a longtemps fait autorité.

2.6 Anneaux, algèbres et modules topologiques

Le lecteur peut se référer aux ouvrages suivants Warner (1989, 1993); Bourbaki (2007d) pour obtenir plus de détails concernant les brèves définitions que l'on rappelle ici.

Soit un groupe G (respectivement, un monoïde M) qui est également un espace topologique. On rappelle qu'il s'agit d'un *groupe topologique* (respectivement, un *monoïde topologique*) dès que les opérations de groupes – la loi du groupe et l'application d'inversion – sont continues (respectivement, la loi du monoïde est continue); pour la continuité de la loi du groupe (respectivement, du monoïde) on suppose que $G \times G$ (respectivement, $M \times M$) est équipé de la topologie produit. Un anneau R est un *anneau topologique* pour peu qu'il dispose d'une topologie pour laquelle son groupe additif et son monoïde (à zéro) multiplicatif sous-jacents sont respectivement, un groupe et un monoïde topologiques. Un corps \mathbb{K} qui est également un anneau topologique est un *corps topologique* quand l'application $x \mapsto x^{-1}$ est continue sur \mathbb{K}^* (ce dernier étant muni de la topologie de sous-espace). Étant donné un anneau topologique R (respectivement, un corps topologique \mathbb{K}), un R -module (respectivement, un \mathbb{K} -espace vectoriel) M est un *R -module* (respectivement, un *\mathbb{K} -espace vectoriel*) *topologique* s'il est équipé d'une topologie qui rend continues les applications de modules $x \mapsto -x$, $(x, y) \mapsto x + y$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ (pour l'addition $+$ et la multiplication externe, on suppose que $M \times M$ et $R \times M$ ou $\mathbb{K} \times M$ possèdent les topologies produits, et la lettre grecque « λ » désigne un élément quelconque de l'anneau, ou du corps, de base). Une algèbre A sur un anneau topologique R est une *R -algèbre topologique* si, et seulement si, elle est à la fois un anneau topologique et un R -module topologique. Dans la suite du texte, on note \mathcal{CTop} , pour $\mathcal{C} \in \{ \mathit{Grp}, \mathit{Mon}, \mathit{Ann}, \mathit{R-Alg}, \mathit{A-Mod}, \mathit{K-Vect} \}$, les catégories de structures algébrico-topologiques introduites. Leurs flèches, des applications continues, sont également des homomorphismes pour les structures algébriques sous-jacentes.

Si R désigne un anneau, on notera parfois (quoique assez rarement) R_d pour signaler qu'il s'agit de l'anneau topologique R avec la topologie discrète. On en déduit au passage que \mathcal{C} peut être vu comme une sous-catégorie pleine de \mathcal{CTop} , et que le foncteur d'oubli admet un adjoint à gauche (respectivement, à droite), à savoir, le foncteur qui équipe une structure de la topologie discrète (respectivement, grossière).

Notons que si on considère une topologie initiale (en particulier la topologie produit) par rapport à une famille de flèches de la catégorie \mathcal{C} à valeurs dans des objets de la catégorie \mathcal{CTop} , alors on obtient un objet de cette dernière catégorie.

La formule « X Hausdorff » ou « X séparé » (où X parcourt la liste « semi-groupe, monoïde, groupe, anneau, corps, algèbre, module, espace vectoriel », avec ou sans les qualificatifs « abélien » ou « commutatif ») signifie « X topologique et séparé ».

2.7 Sommabilité

On opère ici une incise afin de rappeler des notions de base (voir Warner (1989, 1993)) relatives au concept de sommabilité que l'on retrouve plusieurs fois dans le texte.

Définition 2.1. Soit G un groupe abélien Hausdorff, et $(g_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de G . Un élément $g \in G$ est la somme de la famille sommable $(g_i)_{i \in I}$ si, et seulement si, pour tout voisinage V de g dans G il existe un sous-ensemble fini $J_V \subseteq I$ pour lequel $\sum_{j \in J_V} g_j \in V$.

La somme g de la famille sommable $(g_i)_{i \in I}$ est habituellement notée $\sum_{i \in I} g_i$.

Remarque 2.2. La notion de famille localement finie (cf. Berstel et Reutenauer (1988, 2011); Lothaire (1997) et voir le numéro 2.8) dans le cadre des séries formelles (sur un anneau discret)

2.8. Polynômes et séries formelles

correspond à la notion de sommabilité de la définition 2.1 lorsque l'espace des séries formelles est muni de la topologie produit où l'anneau de base possède la topologie discrète. Pour rappel, dire qu'une famille $(g_i)_{i \in I}$ est localement finie signifie que quel que soit l'élément g du groupe, il n'existe qu'un nombre fini d'indices i pour lesquels $g_i = g$.

On donne maintenant des résultats sans démonstration (que l'on peut retrouver dans les références Warner (1989, 1993)) et qui seront, la plupart du temps, utilisés de façon implicite.

Proposition 2.3. *Si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille sommable d'un groupe abélien Hausdorff ayant g pour somme, alors quelle que soit la permutation σ de I , g est également la somme de la famille sommable $(g_{\sigma(i)})_{i \in I}$.*

Proposition 2.4. *Si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille sommable d'un groupe abélien séparé, alors pour tout voisinage V de zéro, $g_i \in V$ pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini.*

Proposition 2.5. *Soit G le produit cartésien d'une famille $(G_\ell)_{\ell \in L}$ de groupes commutatifs Hausdorff (G possède la topologie produit). Alors, g est la somme de la famille $(g_i)_{i \in I}$ d'éléments de G si, et seulement si, $\pi_\ell(g)$ est la somme de $(\pi_\ell(x_i))_{i \in I}$ pour chaque $\ell \in L$ (on rappelle ici que π_ℓ est la projection canonique de G sur sa composante G_ℓ).*

Proposition 2.6. *Si ϕ est un homomorphisme continu d'un groupe abélien séparé G_1 dans un groupe abélien séparé G_2 , et si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille sommable d'éléments de G_1 , alors $(\phi(g_i))_{i \in I}$*

est sommable dans G_2 , et $\sum_{i \in I} \phi(g_i) = \phi\left(\sum_{i \in I} g_i\right)$.

En guise d'exemple, on peut citer le lemme suivant (il s'agit du lemme 5.9 démontré au chapitre 5) :

Lemme 2.7. *Supposons que R soit un anneau topologique Hausdorff, que X soit un ensemble, et que R^X dispose de la topologie produit. Pour tout $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f .*

Ce lemme justifie l'écriture sommatoire⁹ $f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x$ des applications, et il sera utilisé librement bien avant sa démonstration au chapitre 5.

2.8 Polynômes et séries formelles

Soient R un anneau (commutatif et unifié) que l'on suppose discret, et X un ensemble. Le R -module libre¹⁰ $R^{(X^*)}$ est naturellement muni d'une structure de R -algèbre, notée $R\langle X \rangle$, qui n'est autre que l'algèbre tensorielle $\mathbb{T}(R^{(X)})$ de $R^{(X)}$ sur R , et appelée algèbre des polynômes non commutatifs sur l'alphabet X . Il s'agit de l'algèbre du monoïde libre X^* sur R . Plus généralement, si $S \in \mathcal{O}(\text{SemGrp})$, alors $R[S]$ désigne l'algèbre du semi-groupe S sur R (cf. Gilmer (1984); Okniński (1991)) qui s'identifie à $R^{(S)}$, de sorte que l'on a $R[X^*] = R\langle X \rangle$. L'algèbre symétrique $S(R^{(X)})$ s'identifie quant à elle à l'abélianisé $R[X]$ de $R\langle X \rangle$; c'est donc l'algèbre des polynômes commutatifs sur l'alphabet X (attention, la notation $R[X]$ est ambiguë compte tenu de la notion d'algèbre d'un semi-groupe), mais également l'algèbre du monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(X)}$ (c'est-à-dire $R[X] = R^{(\mathbb{N}^{(X)})} = R[\mathbb{N}^{(X)}]$). Si on considère pour $R\langle X \rangle$ la topologie initiale par rapport aux projections $\pi_x: f \mapsto f(x)$ (pour R discret), alors le complété, pour cette topologie, de $R\langle X \rangle$ est l'algèbre $R\langle\langle X \rangle\rangle$ des séries formelles à variables non commutatives dans

9. Ce type d'écritures constitue en somme le cœur des travaux présentés dans ce texte.

10. Rappel : X^* est le monoïde libre sur X .

Chapitre 2. Notations, définitions et résultats généraux

X , qui, en tant qu'ensemble, s'identifie à R^{X^*} . Son abélianisé $R[[X]]$, également obtenu comme complété pour la topologie initiale par rapport aux projections de $R[X]$, est l'algèbre des séries formelles à variables commutatives (ou, simplement, séries formelles commutatives) dans X (voir Schützenberger (1959–1960); Fliess (1971); Stanley (1999, 2007); Benhissi (2003), ainsi que les ouvrages Berstel et Reutenauer (1988, 2011) dans le cas où l'alphabet X est fini et R est un semi-anneau, Eilenberg (1974); Wilf (2006) pour les séries formelles en une variable et Lothaire (1997), Bourbaki (2007a,b) pour les séries formelles à variables commutatives, et Cohn (1995) pour les séries formelles gauches), qui s'identifie à $R^{\mathbb{N}^{(X)}}$. Ces topologies initiales sont les topologies produits pour $R\langle\langle X \rangle\rangle$ et $R[[X]]$. Lorsque X est fini, la topologie initiale est identique à une topologie (métrisable) induite par une valuation (donnée par la longueur d'un mot ou le degré total d'un monôme). Plus généralement, étant donné un semi-groupe S vérifiant la condition (D) de Bourbaki (2007a) (les semi-groupe et monoïde – commutatif ou non – libres vérifient à l'évidence cette condition), à savoir que quel que soit $x \in S$, l'ensemble $\{(y, z) \in S \times S : x = yz\}$ est fini, alors on peut considérer l'algèbre large de S sur R , que l'on note $R[[S]]$, dont le R -module sous-jacent est R^S . Il s'agit de la complétion de $R[S]$ pour la topologie produit (toujours avec R discret). On a donc $R[[X^*]] = R\langle\langle X \rangle\rangle$, et $R[[\mathbb{N}^{(X)}]] = R[[X]]$ (attention aux notations confusantes). Les algèbres $R[[S]]$, $R\langle\langle X \rangle\rangle$ et $R[[X]]$ sont des R -algèbres topologiques Hausdorff (et complètes) pour les topologies produits. Suivant Berstel et Reutenauer (1988, 2011); Lothaire (1997), une famille $(S_i)_{i \in I}$ de séries formelles de $R\langle\langle X \rangle\rangle$ (respectivement, de $R[[X]]$) est dite *localement finie* si, et seulement si, quel que soit $w \in X^*$ (respectivement, $w \in \mathbb{N}^{(X)}$), l'application $i \in I \mapsto S_i(w) \in R$ est à support fini. Il est aisé de vérifier que la famille $(S_i)_i$ est alors sommable (pour la topologie produit), et sa somme est la série $w \mapsto \sum_{i \in I} S_i(w)$ (somme avec un nombre fini

de termes non nuls), notée, comme d'habitude, $\sum_{i \in I} S_i$. Il est clair que si S est une série (respectivement, commutative), alors la famille $(S(w)\delta_w)_{w \in X^*}$ (respectivement, $(S(w)\delta_w)_{w \in \mathbb{N}^{(X)}}$) est localement finie, et sa somme n'est autre que S . Cela justifie l'écriture usuelle des séries formelles $S = \sum_{x \in L(X)} S(w)w$ (où $L(X) \in \{\mathbb{N}^{(X)}, X^*\}$ selon que S est commutative ou non) où w

et δ_w sont identifiés. Dans la suite, pour S une série formelle (commutative ou non) la notation $\langle S \mid w \rangle$ est employée plutôt que $S(w)$, étendant ainsi l'écriture de Dirac-Schützenberger (comme dans Berstel et Reutenauer (1988)), $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$, vue au numéro 2.4 du coefficient par rapport à un élément d'une base. On écrit donc $S = \sum_{w \in L(X)} \langle S \mid w \rangle w$ (avec $L(X) \in \{\mathbb{N}^{(X)}, X^*\}$ selon que S

est commutative ou non). Lorsque X est un ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\}$, on note $R\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ et $R\{\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}\}$ où l'on remplace « $\{$ » par « $[$ » ou par « \langle » (respectivement, « $\}$ » par « $]$ » ou « \rangle »).

Plus généralement, supposons que M soit un R -module, et soit \mathbf{x} une variable formelle. L'ensemble des applications du monoïde libre $\{\mathbf{x}^n : n \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans M , isomorphe à $M^{\mathbb{N}} \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{n \in \mathbb{N}} M\mathbf{x}^n$, est un R -module, dénoté $M[[\mathbf{x}]]$. Il est clairement isomorphe au complété

du R -module $M[\mathbf{x}] \cong_{R\text{-Mod}} M^{(\mathbb{N})} \cong_{R\text{-Mod}} \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M\mathbf{x}^n$ pour la topologie produit (avec M , et R , discrets). En tant qu'applications, les éléments de $M[\mathbf{x}]$ s'écrivent de façon unique sous la forme d'une somme (d'un nombre fini de termes non nuls) $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\langle p \mid \mathbf{x}^n \rangle}_{\in M} \mathbf{x}^n$ (où $\langle p \mid \mathbf{x}^n \rangle = p(n) \in M$).

On note $\deg(p)$ le *degré* d'un élément de $M[\mathbf{x}]$. À l'évidence, un élément $f \in M[[\mathbf{x}]]$ s'écrit alors sous la forme de la somme $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f \mid \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n$ (toujours avec $\langle f \mid \mathbf{x}^n \rangle = f(n) \in M$) de la famille sommable $(f(n)\mathbf{x}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (une combinaison linéaire infinie). De telles identifications seront

2.8. Polynômes et séries formelles

notamment effectuées au chapitre 5. Les lois de module sont données par $\lambda \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda \langle f | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n + \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle g | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\langle f | \mathbf{x}^n \rangle + \langle g | \mathbf{x}^n \rangle) \mathbf{x}^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f + g | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n$ et

$\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f | \delta_x \rangle \delta_x$ où $\langle f | \delta_x \rangle \in R^{(Y)}$, et où l'on adapte la définition de δ_x comme suit : $\delta_x(x')$ est l'application nulle de $R^{(Y)}$ dès que $x \neq x'$, sinon c'est l'application constante de $R^{(Y)}$ égale à 1_R (élément neutre de la R -algèbre $R^{(Y)}$ pour le produit ponctuel, dit de *Hadamard*). Cette notation sera utilisée au chapitre 4.

Les lettres P et Q désignent des polynômes (commutatifs ou non) et, plus généralement, des combinaisons linéaires (finies), S et T sont des séries (commutatives ou non) ainsi que des « combinaisons linéaires » infinies, et f, g, h représentent un polynôme ou une série lorsque l'on a en tête l'application sous-jacente. La lettre p pourra être employée pour désigner une application à support fini (et donc un « polynôme »). Le fait que P et S désignent respectivement un élément de $M[\mathbf{x}]$ et de $M[[\mathbf{x}]]$ pourra être marqué par des écritures pratiques de la forme $P(\mathbf{x})$ et $S(\mathbf{x})$.

Chapitre 3

Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

*Bien entendu le signe de sommation qui figure dans
cette notation ne correspond à aucune opération
algébrique, puisqu'il porte en général sur une infinité
de termes $\neq 0$.*

NICOLAS BOURBAKI, *Algèbre - Chapitres 1 à 3*

L'analyse ne change rien au réel.

JACQUES LACAN, *Écrits*

Sommaire

3.1	Introduction	23
3.2	Rappels sur les espaces de Fréchet	24
3.3	Rappels sur les algèbres de Fréchet	25
3.4	Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet	27
3.5	Conclusion et perspectives	39

Ce chapitre est en partie constitué de notes diverses non publiées et constitue également un recueil de résultats contenus dans plusieurs de nos articles, regroupés dans un souci de clarté. Il contient de surcroît des résultats fondamentaux utilisés aux chapitres 4 et 7.

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour principal but d'établir certains résultats fondamentaux nécessaires aux chapitres 4 et 7, notamment l'existence d'une application exponentielle dans une algèbre de Fréchet (proposition 3.18), l'existence et l'unicité d'un sous-groupe à un paramètre réel tracé dans les inversibles d'une algèbre de Fréchet (lemme 3.39), ainsi que les points (2) et (5) de l'exemple 3.4 (et la remarque 3.41) qui révèlent les structures d'algèbres de Fréchet de l'algèbre des séries formelles (à coefficients complexes ou réels) et de celle des matrices triangulaires infinies.

Un espace de Fréchet est un espace vectoriel (complexe ou réel) localement convexe et (séparé) complet dont la topologie est donnée par une famille (au plus dénombrable) de semi-normes. Une algèbre de Fréchet est une algèbre qui est également un espace de Fréchet, et pour laquelle

les semi-normes (qui définissent sa topologie) sont sous-multiplicatives. Ces espaces et algèbres sont assez similaires aux espaces et algèbres de Banach ; d'ailleurs ils peuvent être vus comme limites projectives de telles structures (voir le numéro 3.4.5), et un espace (respectivement, une algèbre) de Banach est de Fréchet. Ils autorisent notamment certains grands théorèmes classiques de l'analyse fonctionnelle (théorèmes de l'application ouverte, du graphe fermé ou de Hahn-Banach). Comme pour les structures banachiques, on peut définir un calcul différentiel et intégral (élémentaire) des fonctions numériques (réelles ou complexes) à valeurs dans un espace de Fréchet à partir duquel on exprime des notions d'analyticité ou de classes de fonctions lisses. De même les structures fréchétiennes autorisent un calcul analytique basé sur le spectre des opérateurs. Ces outils sont employés afin de prouver l'existence de l'application exponentielle dans une algèbre de Fréchet, d'en énoncer les propriétés rudimentaires, mais également d'étudier les sous-groupes à un paramètre à valeurs dans le groupe des unités d'une algèbre de Fréchet.

Ces notions seront essentiellement spécialisées au cas particulier de l'algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies (voir le numéro 4.4 du chapitre 4), lesquelles sont fondamentales dans la résolution du problème de l'ordre normal bosonique (voir le numéro 7.3 du chapitre 7) en physique combinatoire, et pour donner un sens rigoureux aux opérateurs d'évolution de certains systèmes de particules (quantiques) de la seconde quantification.

Évidemment, lorsque les matrices triangulaires inférieures sont à diagonale (principale) nulle, l'algèbre seule permet de traiter la convergence de séries en ces matrices (par nilpotence locale). Néanmoins les outils d'analyse (en termes d'espaces et d'algèbres de Fréchet) développés dans ce chapitre sont absolument nécessaires – dans la suite du manuscrit – dès lors que se pose le cas des matrices triangulaires inférieures à diagonale non nulle.

Organisation du chapitre

Ce chapitre est articulé comme suit : les numéros 3.2 et 3.3 contiennent les rappels nécessaires et élémentaires concernant la théorie des espaces et algèbres fréchétiennes (ces numéros ne prétendent pas à l'exhaustivité et jettent simplement les bases fondamentales). Dans le numéro 3.4 est introduit le calcul différentiel et intégral (au sens des sommes de Riemann), voir 3.4.1, puis les séries entières dans les espaces de Fréchet (voir 3.4.2), et enfin les définitions et propriétés élémentaires de l'exponentielle et du logarithme dans les algèbres de Fréchet (*cf.* 3.4.3) à partir desquelles on démontre l'existence et l'unicité des solutions d'un certain problème de Cauchy (voir 3.4.4). Dans ce même numéro 3.4, on utilise la caractérisation des espaces (et algèbres) de Fréchet comme limites projectives d'espaces (et algèbres) de Banach (voir 3.4.5) afin d'étudier les sous-groupes à un paramètre (voir 3.4.7). On y mentionne également un calcul fonctionnel analytique (le numéro 3.4.6).

3.2 Rappels sur les espaces de Fréchet

Pour l'intégralité de ce chapitre on suppose que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ est muni de sa topologie (métrique) usuelle. La plupart des résultats succinctement rappelés dans ce numéro se trouvent détaillés dans les références classiques Horváth (1966); Trèves (1967); Hamilton (1982); Schaefer et Wolff (1999); Rudin (2000); Bourbaki (2006).

Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel. Une *semi-norme* est une application $p: V \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les axiomes suivants : pour tous $x, y \in V$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ (sous-additivité).
2. $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$ (homogénéité).

Si V est un espace vectoriel avec une semi-norme p , et si l'on note $\ker p = \{x \in V : p(x) = 0\}$ le *noyau de la semi-norme* p , alors $V/\ker p$ devient un espace normé pour la norme $\|x + \ker p\| =$

3.3. Rappels sur les algèbres de Fréchet

$p(x)$.

Une famille \mathcal{P} de semi-normes de V est dite *séparante* si, et seulement si, pour chaque $x \in V$, $p(x) = 0$ quel que soit $p \in \mathcal{P}$, implique $x = 0$. La donnée d'un espace vectoriel V et d'une famille séparante de semi-normes définit une structure d'espace vectoriel localement convexe séparé dont une base locale de voisinages de zéro est donnée par

$$U_p(\epsilon) = \{ x \in V : p(x) < \epsilon \}$$

pour chaque $p \in \mathcal{P}$, et chaque $\epsilon > 0$. On montre que tout espace vectoriel localement convexe (séparé) s'obtient de cette façon. Un *espace de Fréchet* E est un espace vectoriel topologique localement convexe métrisable (donc séparé) et complet. Sa topologie peut être définie par une famille (séparante) dénombrable de semi-normes. Cette famille se note usuellement $\mathcal{P} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemple 3.1.

1. Un espace de Banach ou de Hilbert est donc de Fréchet.
2. L'ensemble $\mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{K})$ est un espace de Fréchet avec $p_k(f) = \sum_{i=0}^k \sup_{x \in [a, b]} |f^{(i)}(x)|$.
3. L'ensemble $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est un espace de Fréchet avec $p_k(f) = \sup\{|f(x)| : -k \leq x \leq k\}$.

Sur un espace de Fréchet, on dispose du critère de convergence suivant : une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E converge vers x si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_k(x_n - x) = 0 .$$

Lemme 3.2. *Soit (E, \mathcal{P}) un espace de Fréchet. Toute série, de terme général $x_n \in E$, absolument convergente (i.e. pour laquelle pour chaque entier naturel k , la série réelle positive de terme général $p_k(x_n)$ converge dans \mathbb{R}) converge dans E .*

Démonstration. Cela provient de l'inégalité :

$$p(x_{n+1} + \cdots + x_{n+k}) \leq p(x_{n+1}) + \cdots + p(x_{n+k}) \quad (p \in \mathcal{P}) .$$

□

Dans un espace de Fréchet E , on peut toujours choisir la famille de semi-normes $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que quel que soit $x \in E$, $p_k(x) \leq p_{k+1}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (ainsi si $k \leq \ell$, alors pour tout x , $p_k(x) \leq p_\ell(x)$, ce que l'on note volontiers $p_k \leq p_\ell$); on dit que la famille de semi-normes est *croissante*. Cela conduit à une définition équivalente de ces espaces comme limite projective d'espace de Banach (voir le numéro 3.4.5). En particulier, si E est (isomorphe) au produit direct d'une famille (au plus) dénombrable d'espaces de Banach, alors c'est un espace de Fréchet (lorsqu'il se trouve équipé de la topologie produit). En particulier \mathbb{K}^X est un espace de Fréchet lorsque X est au plus dénombrable (si X est de cardinal transfini strictement plus grand que \aleph_0 , alors avec la topologie produit, \mathbb{K}^X est un espace vectoriel séparé, localement convexe et complet).

3.3 Rappels sur les algèbres de Fréchet

Le lecteur trouvera toutes les informations concernant les algèbres de Fréchet dans les références suivantes Arens (1947); Michael (1952); Waelbroeck (1971); Mallios (1986); Goldmann (1990); Helemskii (1993); Fragoulopoulou (2005). D'autres rappels concernant les espaces et algèbres de Fréchet seront effectués au numéro 3.4.5.

Chapitre 3. Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

Une *algèbre de Fréchet* A est une \mathbb{K} -algèbre topologique (les lois d'algèbres sont donc continues) dont l'espace vectoriel topologique sous-jacent se trouve être un espace de Fréchet, et telle que sa topologie peut être donnée par une famille $\mathcal{P} = (p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de semi-normes *sous-multiplicatives*, i.e. telles que $p_k(xy) \leq p_k(x)p_k(y)$ quels que soient $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in A$ (notons que l'on peut toujours se ramener au cas où $p_k(1_A) = 1$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, lorsque A est unitaire).

Remarque 3.3. *Il n'est pas suffisant que l'espace vectoriel topologique sous-jacent à une algèbre topologique soit un espace de Fréchet pour que l'algèbre soit elle-même de Fréchet (cf. Porcelli (1966); Husain et Watson (1980); Husain (1983); Fragoulopoulou (2005) ainsi que Arens (1946a)), autrement dit, il n'est pas toujours possible de construire une famille de semi-normes sous-multiplicatives définissant la même topologie.*

Comme pour les espaces de Fréchet, on peut toujours choisir une famille de semi-normes sous-multiplicatives croissante afin de définir la topologie d'une algèbre de Fréchet.

Exemple 3.4.

1. Une algèbre de Banach (unitaire) est une algèbre de Fréchet.
2. Soit \mathbf{x} une variable formelle. Alors $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ est une algèbre de Fréchet avec la famille de semi-normes $p_k(S) = \sum_{n=0}^{k-1} |\langle S \mid \mathbf{x}^n \rangle|$, $k \in \mathbb{N}$, pour $S \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. Il s'agit de la topologie produit sur $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ (voir également Allan (1972)).
3. Une autre façon d'obtenir le résultat du point (2) est de considérer $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ comme la limite projective des algèbres de Banach¹ de dimension finie $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]/(\mathbf{x}^k)$ ($k > 0$) où (\mathbf{x}) dénote l'unique idéal maximal $\mathbf{x}\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ des séries sans terme constant. On remarque au passage que pour chaque $k > 0$ l'algèbre $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]/(\mathbf{x}^k)$ s'identifie à une sous-algèbre de l'algèbre $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille k *via* sa représentation régulière dans $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$ (en particulier, toute série est vue comme un endomorphisme sur $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ agissant par multiplication). Plus précisément, si $P \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]/(\mathbf{x}^k)$, alors on le représente fidèlement par une matrice triangulaire inférieure (voir Henrici (1974) pour une idée similaire que l'on reprend au chapitre 4) dont les éléments matriciels sont $\langle P \mid \mathbf{x}^{i-j} \rangle$ pour $0 \leq j \leq i \leq k-1$ (évidemment P s'identifie au polynôme de degré au plus $k-1$, $\sum_{i=0}^{k-1} \langle P \mid \mathbf{x}^i \rangle \mathbf{x}^i$). C'est une algèbre de Banach pour la norme spectrale induite par celle usuelle de $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$. Clairement, les éléments diagonaux sont tous égaux au coefficient constant $\langle P \mid 1 \rangle$ de P .
4. Plus généralement, soit X un alphabet fini, et posons pour tout entier $k > 0$, $\mathfrak{M}_k = \{ S \in A : \langle S \mid w \rangle = 0, \text{ pour tout } |w| \geq k \}$, où $A \in \{ \mathbb{K}\langle X \rangle, \mathbb{K}[[X]] \}$. Évidemment (puisque X est fini), A est la limite projective des A/\mathfrak{M}_k , $k > 0$. L'algèbre de polynômes (commutatifs ou non) A/\mathfrak{M}_k tronqués à la longueur k est une algèbre de Banach (de dimension finie) de sorte que A devient une algèbre de Fréchet.
5. Soit R un anneau. Considérons la R -algèbre d'incidence $I(\mathbb{N}, R)$ de l'ensemble ordonné \mathbb{N} des entiers naturels, i.e., $I(\mathbb{N}, R) = \{ f : \mathbb{N}^2 \rightarrow R : f(i, j) = 0_R \text{ si } i > j \}$ (voir Berge (1971); Rota (1975); Spiegel et O'Donnell (1997)). Il s'agit ni plus ni moins de l'algèbre contractée large du semi-groupe à zéro (cf. chapitre 6) des intervalles d'entiers². Cette algèbre est

1. Voir le numéro 3.4.5 pour la caractérisation d'une algèbre de Fréchet comme limite projective d'algèbres de Banach.

2. Soit un ensemble ordonné (P, \leq) quelconque. Pour $x \leq y$, soit l'intervalle fermé $[x, y] = \{ z \in P : x \leq z \leq y \}$. Notons $\text{Int}(P)$ l'ensemble $\{ [x, y] : x \leq y \}$ des intervalles fermés (comme \leq est symétrique, on peut identifier un intervalle fermé avec ses bornes). On lui adjoint un élément $0 \notin \text{Int}(P)$ qui joue le rôle de l'intervalle vide. Pour $[x, y], [w, z] \in \text{Int}(P)$, on pose $[x, y][w, z] = [x, z]$ quand $y = w$, et 0 autrement, puis $I0 = 0 = 0I$ quel que soit $I \in \text{Int}(P) \cup \{0\}$. On obtient ainsi le semi-groupe à zéro des intervalles fermés de P .

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

anti-isomorphe à l'algèbre des matrices triangulaires inférieures $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ indicées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et à coefficients dans R (voir le chapitre 4) : il suffit d'associer à $f \in I(\mathbb{N}, R)$ la matrice $(M_f(i, j))_{(i, j) \in \mathbb{N}^2}$ dont les entrées sont données par $M_f(i, j) = f(j, i)$ (un autre façon de voir cela est de considérer l'ordre opposé sur \mathbb{N} , qui est également localement fini Rota (1975); Spiegel et O'Donnell (1997), que l'on note \mathbb{N}^{op} , plutôt que son ordre naturel³; dans ce cas, $I(\mathbb{N}^{\text{op}}, R) \cong_{R\text{-alg}} \text{ti}(\mathbb{N}, R)$). Clairement, $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ est la limite projective des algèbres de matrices triangulaires inférieures $\text{ti}([0 \cdots k], R)$ de taille $k + 1$ indicées de 0 à k (où $[0 \cdots k]$ désigne l'intervalle $\{n \in \mathbb{N} : 0 \leq n \leq k\}$). La projection canonique $\pi_k : \text{ti}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \text{ti}([0 \cdots k], R)$ envoie la matrice infinie $(M(i, j))_{0 \leq j \leq i < \infty}$ sur la matrice triangulaire finie $(M(i, j))_{0 \leq j \leq i \leq k}$; cela consiste donc à restreindre à $[0 \cdots k]^2$ un élément f de $I(\mathbb{N}^{\text{op}}, R)$. Prenons pour R le corps \mathbb{K} . En tant que sous-algèbre de matrices finies $\text{ti}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ est de façon naturelle une algèbre de Banach. Il en résulte que $I(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une algèbre de Fréchet comme limite projective (dénombrable) d'algèbres de Banach (voir le numéro 3.4.5 ainsi que Cheballah et al. (2008)).

3.4 Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

3.4.1 Analyticité des chemins à valeurs dans une algèbre de Fréchet

Les résultats énoncés ici peuvent se déduire relativement aisément de Hamilton (1982); Balachandran (2000). Notons même que l'existence d'un calcul analytique est démontrée dans Balachandran (2000) pour des algèbres topologiques beaucoup plus générales (appelées « algèbres localement pseudo-convexes complètes »). Néanmoins, il semble pertinent de spécialiser ces résultats génériques au cas simple qui nous intéresse afin d'obtenir un *calculus* défini avec exactitude bien que fort limitée.

Supposons que $(E, (p_k)_{k \in \mathbb{N}})$ désigne un espace de Fréchet. Dans cette partie, I désigne un intervalle ouvert de \mathbb{R} et U un ouvert quelconque de la droite réelle ou du plan complexe (pour leurs topologies usuelles).

Définition 3.5. Une application $f : U \rightarrow E$ est dérivable en $z_0 \in U$ si, et seulement si,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z + z_0) - f(z_0)}{z} \quad (3.1)$$

existe dans E . On note alors cette limite $f'(z_0)$. Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in U$, on dit que f est un chemin (ou une courbe) dérivable sur U , et que l'application $z \in U \mapsto f'(z)$ est la dérivée de f .

La dérivée $f'(z_0)$ de f en z_0 est parfois notée $\frac{d}{dz}|_{z=z_0} f(z)$, et, plus généralement, $\frac{d}{dz} f = f'$.

Lemme 3.6. Si $f : U \rightarrow E$ est dérivable en $z_0 \in U$, alors f est continue en z_0 .

Démonstration. D'après la définition de la dérivabilité, on a

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f'(z_0) = 0, \quad (3.2)$$

ce qui prouve que f est continue en z_0 . □

Lemme 3.7. Soient $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Soient $U \subseteq \mathbb{K}$ et $U' \subseteq \mathbb{K}'$ deux ouverts. Soient $\gamma : U \rightarrow U'$ et $f : U' \rightarrow E$ des applications dérivables, avec $\gamma(U) \subseteq U'$. Alors $f \circ \gamma : U \rightarrow E$ est dérivable, et $(f \circ \gamma)'(z) = f'(\gamma(z))\gamma'(z)$.

3. Il s'agit de l'inclusion restreinte aux ordinaux finis, voir Holz et al. (2010).

Chapitre 3. Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

Démonstration. Soient $z \in U$ et $h \in \mathbb{K}$ tel que $z + h \in U$. On a $\lim_{h \rightarrow 0} (f(\gamma(z+h)) - f(\gamma(z))) = \lim_{h \rightarrow 0} f'(\gamma(z))(\gamma(z+h) - \gamma(z))$. Or $\lim_{h \rightarrow 0} (\gamma(z+h) - \gamma(z)) = \lim_{h \rightarrow 0} h\gamma'(z) = 0$. On en déduit donc que $(f \circ \gamma)'(z) = f'(\gamma(z))\gamma'(z)$. \square

On dit qu'un chemin $f : U \rightarrow F$ dérivable sur U est de classe \mathcal{C}^1 (sur U) si, et seulement si, sa dérivée

$$\begin{aligned} f' : U &\rightarrow F \\ z &\mapsto f'(z) \end{aligned} \tag{3.3}$$

est continue. Les classes \mathcal{C}^n ($n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$) sont définies récursivement de façon complètement analogue aux cas classiques. Pour le lemme qui suit, nous avons besoin d'une théorie de l'intégration. On choisit pour ce faire l'intégrale de Riemann usuelle – voir Lang (1969); Keller (1974); Hamilton (1982); Glöckner (2005) – largement suffisante pour nos besoins, pour les fonctions continues d'une variable réelle dans les espaces vectoriels localement convexes séparés complets. On peut étendre ce concept à l'intégration sur le champ complexe que l'on introduit ici rapidement (voir par exemple Pabion (1995)). On rappelle qu'un *arc paramétré* est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, où a et b sont deux nombres réels. L'image du compact $[a, b]$ par l'arc paramétré γ est son *support*. Un *chemin* est un arc paramétré de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Il en résulte que sa dérivée γ' existe (c'est une fonction réglée). Soit f une application continue sur le support d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. On pose

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \tag{3.4}$$

où l'intégrale du second membre existe au sens de Riemann (rappelé ci-avant). On montre facilement que cette intégrale est invariante par changement de paramètre (démonstration usuelle).

Lemme 3.8. *Soit f une fonction complexe de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$. Étant donné un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, dont le support est contenu dans U , on a :*

$$\int_{\gamma} f'(z)dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) . \tag{3.5}$$

Démonstration. Posons pour $t \in [a, b]$, $g(t) = f(\gamma(t))$. On a, sauf sur un ensemble fini de points, $g'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ (lemme 3.7). D'où

$$\int_a^b g'(t)dt = \int_a^b f'(\gamma(t))\gamma'(t)dt .$$

Or $\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, et par définition de l'intégration le long d'un chemin $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{\gamma} f(z)dz$. \square

Lemme 3.9. *Soient $f : U \rightarrow F$ un chemin de classe \mathcal{C}^1 , et U un domaine (i.e., U est un ouvert et deux quelconques de ses points peuvent toujours être reliés par un chemin tracé dans U). Si $f'(z) = 0$ quel que soit $z \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. Soient $a, b \in U$. Soit γ un chemin de a vers b (qui existe puisque U est un domaine). On a $f(b) - f(a) = \int_{\gamma} f'(z)dz = 0$ (lemme 3.8). Donc $f(a) = f(b)$. \square

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

Lemme 3.10. Soient E, F, G trois espaces de Fréchet sur \mathbb{K} (rappel : $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Soit $B: E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire et continue. Soient $u: U \subseteq \mathbb{K} \rightarrow E$ et $v: U \subseteq \mathbb{K} \rightarrow F$ dérivables sur U . L'application

$$\begin{aligned} w: U &\rightarrow G \\ z &\mapsto B(u(z), v(z)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

est dérivable sur U et $w'(z) = B(u'(z), v(z)) + B(u(z), v'(z))$ quel que soit $z \in U$.

Démonstration. Soient $z \in U$ et $h \in \mathbb{K}$ tels que $z + h \in U$.

$$\begin{aligned} B(u(z+h), v(z+h)) - B(u(z), v(z)) &= B(u(z+h) - u(z) + u(z), v(z+h)) \\ &\quad - B(u(z), v(z+h) - v(z) + v(z)) \\ &= B(u(z+h) - u(z), v(z+h)) \\ &\quad + B(u(z), v(z+h) - v(z)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Donc $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} B(u(z+h), v(z+h)) - B(u(z), v(z)) = B(u'(z), v(z)) + B(u(z), v'(z))$. \square

On déduit du lemme précédent que si u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur U , alors $B(u(\cdot), v(\cdot))$ l'est également.

Lemme 3.11. Soit A une algèbre de Fréchet. Si u et v sont deux chemins dérivables de $U \subseteq \mathbb{K}$ dans A , alors uv est dérivable sur U et $(uv)'(z) = u'(z)v(z) + u(z)v'(z)$ quel que soit $z \in U$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme 3.10 à la multiplication de l'algèbre de Fréchet A . \square

Lemme 3.12. Soit ϕ une application linéaire continue d'un espace de Fréchet E dans un espace de Fréchet F . Soit $f: U \rightarrow E$ une application dérivable (respectivement, de classe \mathcal{C}^1) sur U , alors $\phi \circ f$ est dérivable (respectivement, de classe \mathcal{C}^1) sur U et sa dérivée est $\phi \circ f'$.

Démonstration. On a $\frac{1}{h}(\phi(f(z+h)) - \phi(f(z))) = \phi(\frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)))$ d'où $\frac{d}{dz}\phi(f(z)) = \phi(f'(z))$. Si f' est continue, alors $\phi \circ f'$ l'est également et donc $\phi \circ f$ est de classe \mathcal{C}^1 . \square

Lemme 3.13. Soit ϕ une application linéaire continue d'un espace de Fréchet E dans un espace de Fréchet F . Soit $f: U \rightarrow E$ un chemin de classe \mathcal{C}^∞ sur U . Alors $\phi \circ f$ est un chemin de classe \mathcal{C}^∞ sur U et quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(\phi \circ f)^{(n)} = \phi \circ f^{(n)} \quad (3.8)$$

où l'on a noté $g^{(k)}$ la dérivée d'ordre k d'un chemin g .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le chemin $f^{(n)}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur U , et donc $\phi \circ f^{(n)}$ l'est également, et sa dérivée est $\phi \circ f^{(n+1)}$ (par le lemme 3.12) qui est continue. \square

3.4.2 Séries entières dans les espaces de Fréchet

Dans le cadre des algèbres de Fréchet, il est possible de considérer deux types de séries : les séries entières à coefficients dans l'espace de Fréchet sous-jacent, qui ne nécessitent que sa seule structure linéaire, et que l'on introduit dans ce numéro, et les séries entières à coefficients dans \mathbb{K} qui agissent, au sens où l'on dispose d'un calcul fonctionnel analytique, sur l'algèbre, et qui sont décrites aux numéros 3.4.3 et 3.4.6.

Supposons que $(E, (p_k)_{k \in \mathbb{N}})$ soit un espace de Fréchet.

Définition 3.14. Soit $S(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{z}^n \in E[[\mathbf{z}]]$ (i.e., $x_n \in E$ pour tout n). Posons $R = \inf_{k \in \mathbb{N}} R_k$ où $\frac{1}{R_k} = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_k(x_n)^{\frac{1}{n}}$. Alors R est le rayon de convergence de la série entière $S(\mathbf{z})$.

Proposition 3.15. 1. La série entière $S(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{z}^n$ converge absolument (et donc aussi dans E) pour tout z dans le disque ouvert $D(0; R) = \{z \in \mathbb{K} : |z| < R\}$ (autrement dit, la série de terme général⁴ $x_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in D(0; R)$, ou encore la série d'éléments de A obtenue par spécialisation de la variable \mathbf{z} à un élément de $D(0; R)$ est absolument convergente).

2. La série entière $\sum_{n=1}^{\infty} n x_n \mathbf{z}^{n-1}$, obtenue par dérivation terme à terme à partir de $S(\mathbf{z})$, possède le même rayon de convergence R .

Démonstration. 1. Si $|z| < R$ alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|z| < R_k$ et donc la série numérique de terme général $p_k(x_n)|z|^n$ est convergente (selon le lemme d'Abel classique). Or on a $p_k(x_n z^n) = p_k(x_n)|z|^n$, donc la série de terme général $x_n z^n$ est absolument convergente.

2. Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $r'_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_k((n+1)x_{n+1})^{\frac{1}{n}}$. Alors

$$r'_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^{\frac{1}{n+1}} p_k(x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}})^{\frac{n+1}{n}} = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_k(x_{n+1})^{\frac{1}{n+1}} = r_k$$

(car $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ quand $n \rightarrow \infty$). Les deux séries possèdent donc le même rayon de convergence. \square

Proposition 3.16. La fonction $z \mapsto S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n z^n$ est dérivable sur $D(0; R)$ et sa dérivée S' est $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} x_n$ pour tout $z \in D(0; R)$ (les deux applications S et $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} x_n$ existent d'après le lemme 3.15).

Démonstration. Si $R = 0$, alors il n'y a rien à prouver. Supposons donc $R > 0$. Soit $z \in \mathbb{K}$ tel que $|z| < r < R$ pour un certain r . Posons $R(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} x_n$. Pour $|z'| < r$,

$$\frac{S(z') - S(z)}{z' - z} - R(z) = \sum_{n \geq 1} \beta_n x_n \tag{3.9}$$

où $\beta_n = \frac{(z')^n - z^n}{z' - z} - n z^{n-1}$. Clairement $\beta_1 = 0$ et pour $n \geq 2$, on a

$$\beta_n = (z' - z) \sum_{k=1}^{n-1} k z^{k-1} (z')^{n-k-1} . \tag{3.10}$$

Puisque $|z|, |z'| < r$ et $\sum_{k=1}^{n-1} k \leq n^2$, on obtient à partir de l'équation (3.10)

$$|\beta_n| \leq |z' - z| \left(\sum_{k=1}^{n-1} k \right) r^{n-2} \leq |z' - z| n^2 r^{n-2} \quad (n \geq 2) . \tag{3.11}$$

4. Rappelons que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel à gauche mais puisque \mathbb{K} est commutatif, il est également, et de façon naturelle, un espace vectoriel à droite.

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

Ainsi,

$$\begin{aligned}
p_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n| p_k(x_n) \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} |\beta_n| p_k(x_n) \quad (\text{puisque } \beta_1 = 0) \\
&\leq |z' - z| \sum_{n=2}^{\infty} n^2 r^{n-2} p_k(x_n) \quad (\text{en utilisant l'inégalité (3.11)})
\end{aligned} \tag{3.12}$$

i.e.,

$$p_k\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n\right) \leq |z' - z| \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 r^n p_k(x_{n+2}). \tag{3.13}$$

Pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)^2 z^n x_{n+2}$ nous avons $r'_k = \limsup_{n \rightarrow \infty} (n+2)^2 p_k(x_{n+2}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_k(x_n)^{\frac{1}{n}} = r_k$.

Il s'ensuit que $R' = \inf_k \frac{1}{r'_k} = \inf_k \frac{1}{r_k} = R$. Comme $r < R' = R$, la série dans le membre de droite de l'égalité (3.13) converge, et donc par les équations (3.9) et (3.13), lorsque $z' \rightarrow z$, on obtient $S'(z) = R(z)$. \square

Il résulte des propositions précédentes que $z \mapsto S'(z)$ est continue (puisque dérivable sur $D(0; R)$) donc S est de classe \mathcal{C}^1 . Par récurrence on obtient ainsi le fait que S est de classe \mathcal{C}^∞ .

3.4.3 Exponentielle et logarithme dans une algèbre de Fréchet

Définition 3.17. Soit (A, \mathcal{P}) une algèbre de Fréchet (unitaire, avec 1_A comme identité). La fonction exponentielle de A est définie par

$$\text{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x^0 = 1_A) \tag{3.14}$$

en tout point $x \in A$ où le membre de droite de l'égalité est une somme d'une série convergente. On dénote le domaine de Exp par \mathcal{D} et son image par \mathcal{R} .

Puisque $0_A \in \mathcal{D}$ et $1_A \in \mathcal{R}$, ni \mathcal{D} ni \mathcal{R} ne sont vides.

Proposition 3.18. L'exponentielle est définie sur tout A , i.e., $\mathcal{D} = A$, et de plus la série $\text{Exp}(x)$ converge absolument pour tout $x \in A$ (i.e., pour chaque $x \in A$, la série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente).

Démonstration. Posons $u_n = p\left(\frac{x^n}{n!}\right)$ pour $p \in \mathcal{P}$. Puisque la semi-norme est sous-multiplicative, on a $u_n \leq \frac{p(x)^n}{n!}$. Par ailleurs $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{p(x)}{n+1} \rightarrow 0$, la série pour $\text{Exp}(x)$ converge absolument et donc converge dans A quel que soit $x \in A$. \square

Remarque 3.19. Pour chaque $x \in A$, posons $\gamma_x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} z^n \in A[[z]]$. Il est clair que le rayon de convergence de cette série est $+\infty$, et $\text{Exp}(x) = \gamma_x(1)$ pour chaque $x \in A$.

Proposition 3.20. 1. $\text{Exp}(0_A) = 1_A$, $\text{Exp}(\lambda 1_A) = e^\lambda 1_A$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

2. $\text{Exp}(x+y) = \text{Exp}(x)\text{Exp}(y)$ si x et y commutent.

3. Quel que soit $x \in A$, $\text{Exp}(x)$ est inversible, et $\text{Exp}(-x) = \text{Exp}(x)^{-1}$.

Chapitre 3. Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

Démonstration. 1. Les deux premiers résultats sont clairs.

2. $Exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$. En développant la partie droite, à l'aide du théorème du binôme, et en regroupant les termes (ce qui est valide par absolue convergence) nous trouvons que la coefficient de $\frac{y^n}{n!}$ n'est autre que $1_A + x + \frac{x^2}{2!} + \dots = Exp(x)$. Ainsi $Exp(x+y) = Exp(x)(1_A + y + \frac{y^2}{2!} + \dots) = Exp(x)Exp(y)$.
3. Cela provient du point (2) en prenant $y = -x$ et en utilisant (1). □

Remarque 3.21. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors, comme on s'y attend, l'application exponentielle n'est pas injective. En effet, $Exp(x + 2i\pi 1_A) = Exp(x)Exp(2i\pi 1_A) = Exp(x)e^{2i\pi} 1_A = Exp(x)$ quel que soit x (d'après la proposition 3.20). On ne peut donc définir la fonction logarithme par la relation $Log(y) = x$ si, et seulement, si $y = Exp(x)$.

Introduisons maintenant le logarithme en tant qu'application bien définie. Pour ce faire la quantité suivante, correspondant à une notion « locale » de rayon spectral pour un élément de l'algèbre de Fréchet A , est définie.

Définition 3.22. Soit $(A, (p_k)_{k \in \mathbb{N}})$ une algèbre de Fréchet. Soit $x \in A$. Pour chaque entier naturel k , on définit $\nu_k(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_k(x^n)^{\frac{1}{n}}$.

Il est évident que $\nu_k(x) = R_k^{-1}$ pour la série entière $\sum_{n \geq 0} x^n z^n \in E[[z]]$ (voir la définition 3.14).

On peut facilement démontrer de façon analogue au cas des algèbres de Banach (cf. Rickart (1960)) que quel que soit l'entier naturel k , $\nu_k(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_k(x^n)^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} p_k(x^n)^{\frac{1}{n}}$.

Lemme 3.23. 1. La série de terme général $\frac{1}{n}(1_A - x)^n$ (pour $n \geq 1$) est absolument convergente, on note la somme $Log(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}(1_A - x)^n$, pour tout $x \in A$ tel que $\nu_k(1_A - x) < 1$ pour chaque $k \in \mathbb{N}$.

2. $Exp(Log(x)) = x$.

Démonstration. 1. Supposons que pour chaque k , $\nu_k(1_A - x) < \epsilon_k < 1$. Alors $p_k((1_A - x)^n) < \epsilon_k$ pour n suffisamment grand. Il s'ensuit que

$$p_k\left(\frac{(1_A - x)^n}{n}\right) = \frac{1}{n}p_k((1_A - x)^n) < \frac{\epsilon_k^n}{n} < \epsilon_k^n.$$

Puisque la série de terme général (par rapport à n) ϵ_k^n converge, il en résulte que la série pour $Log(x)$ converge absolument pour x tel que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\nu_k(1_A - x) < 1$.

2. L'identité (2) peut être vérifiée, comme dans le cas classique, en substituant la série pour $Log(x)$ dans chaque terme de la série

$$Exp(Log(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Log(x))^n}{n!}$$

et en simplifiant (les étapes de simplifications sont justifiées par l'absolue convergence). □

Remarque 3.24. La série $Log(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}(1_A - x)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x - 1_A)^n$ est donc la série de Mercator usuelle.

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

3.4.4 Existence et unicité d'une solution d'un certain problème de Cauchy

Dans cette partie A désigne une algèbre de Fréchet (encore unitaire).

Lemme 3.25. *Quel que soient $x \in A$ et $z \in \mathbb{K}$,*

$$x \text{Exp}(zx) = \text{Exp}(zx)x . \quad (3.15)$$

L'application $z \mapsto \text{Exp}(zx)x$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Nous ne faisons rien qui mérite d'en parler (on utilise la continuité de la multiplication). \square

Lemme 3.26. *Pour tout $x \in A$, le chemin*

$$\begin{aligned} \gamma_x : \mathbb{K} &\rightarrow A \\ z &\mapsto \text{Exp}(zx) \end{aligned} \quad (3.16)$$

est dérivable et sa dérivée est $\frac{d}{dz}\gamma_x(z) = x\text{Exp}(zx)(= \text{Exp}(zx)x)$. En fait γ_x est de classe \mathcal{C}^∞ .

Démonstration. Il est facile de vérifier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n z^n}{n!} \in$

$E[[z]]$ est $+\infty$. D'après la proposition 3.15, γ_x est dérivable sur \mathbb{K} et sa dérivée est $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \frac{x^n}{n!} =$

$\sum_{n=0}^{\infty} x z^n \frac{x^n}{n!} = x \gamma_x(z)$ (par continuité de la multiplication). Pour la dernière assertion, il suffit ensuite d'appliquer *ad infinitum* la proposition 3.16. \square

Proposition 3.27. *Soient $x, x_0 \in A$ fixés. L'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants (et avec condition initiale)*

$$\begin{cases} u'(z) = xu(z) \\ u(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

admet une unique solution dérivable $u(z) = \text{Exp}(zx)x_0$.

Démonstration. – Existence : Soit $v(z) = \text{Exp}(zx)x_0$. Alors v est dérivable (et même de classe \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{K} et $v'(z) = x\text{Exp}(zx)x_0 = xv(z)$, $v(0) = x_0$.

– Unicité : Soit $u(z)$ une autre solution de l'équation différentielle. Posons $w(z) = \text{Exp}(-zx)u(z)$.

On a

$$\begin{aligned} w'(z) &= -x\text{Exp}(-zx)u(z) + \text{Exp}(-zx)u'(z) \\ &= -x\text{Exp}(-zx)u(z) + \text{Exp}(-zx)xu(z) \\ &= 0 . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Donc w est constante (par le lemme 3.9). Or $w(0) = u(0) = u_0$ donc $u_0 = \text{Exp}(-zx)u(z)$ c'est-à-dire $\text{Exp}(zx)u_0 = \text{Exp}(zx)\text{Exp}(-zx)u(z) = \text{Exp}(zx - zx)u(z) = u(z)$. \square

3.4.5 Espaces/algèbres de Fréchet comme limites projectives d'espaces/algèbres de Banach

Dans ce numéro, on utilise le fait qu'une algèbre de Fréchet peut être vue comme une limite projective d'algèbres de Banach. Ce résultat est brièvement rappelé ci-après (le lecteur trouvera dans les références Arens (1947); Michael (1952); Goldmann (1990); Fragoulopoulou

Chapitre 3. Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

(2005) les détails dont il pourrait avoir besoin au sujet de la notion d'algèbres de Fréchet et ses généralisations ; en particulier, il y trouvera le fait qu'un espace de Fréchet peut être caractérisé comme une limite projective d'un système projectif dénombrable d'espaces de Banach). Soit $(A, (p_k)_k)$ une algèbre de Fréchet (unifère⁵). On rappelle que l'on peut toujours choisir la famille de semi-normes $(p_k)_k$ de sorte que l'on ait :

1. $p_k(x) \leq p_{k+1}(x)$ quel que soit $x \in A$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. $p_k(1_A) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (cette hypothèse est omise si A n'est pas unifère).

Soit B_k l'algèbre de Banach (unifère, 1_k est l'identité) obtenue par complétion de l'algèbre normée⁶ $A/\ker p_k$ pour la norme $\|x + \ker p_k\|_k = p_k(x)$ où $\ker p_k = \{x \in A : p_k(x) = 0\}$ (voir numéro 3.2). Soit π_k l'épimorphisme canonique

$$\begin{aligned} \pi_k: A &\rightarrow B_k \\ x &\mapsto x + \ker p_k . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Pour tout $\ell \geq k$, on définit $\pi_{\ell,k}: B_\ell \rightarrow B_k$ comme l'extension (par uniforme continuité) de l'application

$$\begin{aligned} A/\ker p_\ell &\rightarrow A/\ker p_k \\ x + \ker p_\ell &\mapsto x + \ker p_k . \end{aligned} \tag{3.20}$$

Les applications π_k (respectivement, $\pi_{\ell,k}$) sont des homomorphismes d'algèbres continus, et pour tout $x \in B_\ell$,

$$\|\pi_{\ell,k}(x)\|_k \leq \|x\|_\ell \tag{3.21}$$

puisque $p_k \leq p_\ell$.

La famille $(B_k, \pi_{k+1,k})_{k \in \mathbb{N}}$ définit un système projectif d'algèbres de Banach (unifères), dont on note A' la limite projective. Le produit $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$ est une algèbre (unifère) pour les opérations composante par composante. C'est une algèbre de Fréchet pour la topologie définie par la famille de semi-normes $p_k^*((x)_\ell) = \max\{\|x_\ell\|_\ell : \ell \leq k\}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Bien évidemment il s'agit de la topologie initiale associée aux projections de $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$ sur chacun des B_k (la topologie produit).

L'algèbre A' est une sous-algèbre (unifère) fermée de $\prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$, et est donc également une algèbre de Fréchet unifère.

Soit alors

$$\begin{aligned} \Phi: A &\rightarrow A' \\ x &\mapsto (\pi_k(x))_k . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Nous avons $p_k^*(\Phi(x)) = \|\Phi(x)\|_k = p_k(x)$ quels que soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in A$. Donc Φ est injective et continu. On peut même montrer que Φ est en fait un isomorphisme topologique.

Remarque 3.28. *Réciproquement, la limite projective d'un système projectif dénombrable d'algèbres de Banach définit également une algèbre de Fréchet (la famille de semi-normes est alors donnée de sorte que $p_k(x) = \|\pi_k\|_k$, $k \in \mathbb{N}$). Ce résultat tient également si on remplace le mot « algèbre » par « espace » (dans ce dernier cas, évidemment, les normes et semi-normes ne sont pas supposées sous-multiplicatives).*

Dans la suite, on identifie A et A' . Cette description nous permet au passage d'obtenir un critère simple pour la continuité des fonctions (en utilisant la topologie initiale associée aux projections) à savoir :

5. Cependant toute algèbre de Fréchet non unitaire est également limite projective d'un système dénombrable d'algèbres de Banach qui sont non unitaires. Les résultats se démontrent de façon complètement similaire.

6. L'algèbre quotient $A/\ker p_k$ est complète pour la topologie quotient (puisque $\ker p_k$ est fermé par continuité de p_k) mais pas nécessairement pour la norme déduite de p_k .

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

Lemme 3.29. *Soit E un espace topologique et $f: E \rightarrow A$. L'application f est continue si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k \circ f: E \rightarrow B_k$ est continu.*

Étant donné une algèbre (quelconque) unifère A , on note $\mathcal{G}(A)$ son groupe des unités.

Lemme 3.30. *On a $x \in \mathcal{G}(A)$ si, et seulement si, $\pi_k(x) \in \mathcal{G}(B_k)$ quel que soit k .*

Démonstration. Supposons que x soit inversible dans $\mathcal{G}(A)$. Il existe donc $y \in A$ tel que $xy = 1_A = yx$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $1_k = \pi_k(1_A) = \pi_k(xy) = \pi_k(x)\pi_k(y)$. Donc $\pi_k(y)$ est un inverse à droite dans B_k pour $\pi_k(x)$. On montre de même qu'il s'agit d'un inverse à gauche et donc $\pi_k(x^{-1}) = (\pi_k(x))^{-1}$. Réciproquement, supposons que quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k(x) \in \mathcal{G}(B_k)$. Notons $y_k = (\pi_k(x))^{-1} \in B_k$ et soit $y = (y_k)_k \in \prod_{k \in \mathbb{N}} B_k$. Montrons que $y \in A$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $\pi_{k+1,k}(y_{k+1})\pi_{k+1,k}(\pi_{k+1}(x)) = \pi_{k+1,k}(y_{k+1}\pi_{k+1}(x)) = \pi_{k+1,k}(1_{k+1}) = 1_k$. De même, $\pi_{k+1,k}(\pi_{k+1}(x))\pi_{k+1,k}(y_{k+1}) = 1_k$. Il en résulte que $\pi_{k+1,k}(y_{k+1})$ est l'inverse dans B_k de $\pi_{k+1,k}(\pi_{k+1}(x)) = \pi_k(x)$ (puisque $x \in A$). Donc $\pi_{k+1,k}(y_{k+1}) = y_k$ soit encore $y \in A$. \square

On peut utiliser les deux lemmes précédents afin de montrer que le groupe des inversibles $\mathcal{G}(A)$ de l'algèbre A est un groupe topologique (séparé) lorsqu'on le munit de la topologie de sous-espace induite par A (nous verrons, au chapitre 4, que si A est une algèbre de Fréchet qui n'est pas une algèbre de Banach, alors $\mathcal{G}(A)$ n'est pas nécessairement ouvert ; on remarque en effet que le groupe $\mathcal{G}(A)$ s'écrit, d'après le lemme 3.30, comme l'intersection $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \pi_k^{-1}(\mathcal{G}(B_k))$ d'un nombre possiblement infini d'ouverts, et rien n'indique *a priori* qu'une telle intersection soit ouverte). En effet l'application

$$i: \begin{array}{ccc} \mathcal{G}(A) & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & x^{-1} \end{array} \quad (3.23)$$

est continue puisque $i_k \circ \pi_k = \pi_k \circ i: \mathcal{G}(B_k) \rightarrow B_k$ est continu (où l'on a noté i_k l'application d'inversion de l'algèbre de Banach B_k). Comme par ailleurs on sait que la multiplication est continue, on en déduit le résultat escompté. Le lemme suivant est presque immédiat.

Lemme 3.31. *Soit A une algèbre unitaire, limite projective d'algèbres A_i . Alors $\mathcal{G}(A)$ est la limite projective des groupes $\mathcal{G}(A_i)$.*

Le critère précédent du lemme 3.29 peut être étendu à la dérivabilité des chemins :

Lemme 3.32. *Soit $f: U \subseteq \mathbb{K} \rightarrow A$. La fonction f est dérivable (respectivement, de classe \mathcal{C}^1) si, et seulement si, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $\pi_k \circ f: U \rightarrow B_k$ est dérivable (respectivement, de classe \mathcal{C}^1). Si f est dérivable, alors $f'(z) = (\pi_k(f'(z)))_{k \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. La preuve, aisée, est laissée au lecteur. \square

Enfin, on remarque que la caractérisation des espaces (respectivement, algèbres) de Fréchet comme limite projective d'un système projectif dénombrable d'espaces (respectivement, algèbres) de Banach est utile pour obtenir un critère de convergence des séries entières. Ce résultat allant de soi, sa preuve est omise.

Lemme 3.33. *Soit $(E, (p_k)_k)$ un espace de Fréchet qui est la limite projective d'un système projectif dénombrable d'espaces de Banach $(E_k, \|\cdot\|_k)$ (on note π_k la projection canonique de E sur E_k de sorte que $p_k(x) = \|\pi_k(x)\|_k$). Soit $S(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbf{z}^n \in E[[\mathbf{z}]]$, et posons pour*

tout k , $S_k(\mathbf{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_k(x_n) \mathbf{z}^n \in E_k[[\mathbf{z}]]$, et R_k le rayon de convergence de $S_k(\mathbf{z})$. Pour tout $z \in \bigcap_k D(0; R_k)$, $S(z)$ est absolument convergente.

3.4.6 Calcul fonctionnel analytique dans une algèbre de Fréchet

Rappelons en premier lieu quelques notions relatives au spectre d'un élément d'une algèbre de Banach *complexe* $(B, \|\cdot\|)$, ainsi qu'au calcul fonctionnel analytique dans une algèbre de Banach. Pour $x \in A$, le *rayon spectral* $\nu(x)$ de x est algébriquement déterminé comme le maximum des modules des éléments de son *spectre* $\sigma(x)$, où $\sigma(x) = \{z \in \mathbb{C} : x - z1_B \notin \mathcal{G}(B)\}$ (c'est un compact non vide). Il est donné analytiquement comme $\nu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. Si B est une algèbre de Banach *réelle*, alors le spectre d'un élément $x \in B$ est donné comme le spectre de x en tant qu'élément dans le complexifié de B (voir Rickart (1960)), afin d'éviter certaines pathologies, telles qu'un spectre vide (voir Maddox (1988) p. 161). Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle z^n \in \mathbb{K}[[z]]$ une série entière usuelle, et notons R_S son rayon de convergence. Si pour $x \in B$, $\|x\| < R_S$, alors la série de terme général $\langle S | z^n \rangle x^n$ converge absolument dans B (et donc est convergente dans B). Sa somme est notée $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle x^n$ (la preuve de ce fait est évidente : puisque $\|x\| < R_S$, il en résulte que la série $S(\|x\|) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle \|x\|^n$ est convergente dans \mathbb{K} ; or $\|x^n\| \leq \|x\|^n$, de sorte que la série de terme général $\|\langle S | z^n \rangle x^n\|$ est convergente dans \mathbb{R}).

Supposons que $(A, (p_k)_k)$ soit une algèbre de Fréchet, vue comme limite projective des algèbres de Banach $(B_k, \|\cdot\|_k)$. Soit π_k la projection canonique de A sur B_k de sorte que $p_k(x) = \|\pi_k(x)\|_k$.

Théorème 3.34. *Soit $x \in A$, et $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle z^n \in \mathbb{K}[[z]]$. Si quel que soit k , $p_k(x) < R_S$, alors la série de terme général $\langle S | z^n \rangle x^n$ est absolument convergente (donc convergente dans A). On note la somme de cette série $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle x^n \in A$.*

Démonstration. Le fait que pour chaque k , $\|\pi_k(x)\|_k = p_k(x) < R_S$, implique que la série, notée $S_k(x)$, $\sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle \pi_k(x)^n$ est absolument convergente dans B_k . Comme $p_k(\langle S | z^n \rangle x^n) \leq \|\langle S | z^n \rangle x^n\| \|\pi_k(x)\|_k^n$, il en résulte que $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle x^n$ est absolument convergente dans A . \square

Remarque 3.35. *Si on applique le théorème 3.34 à la série entière $Exp(z)$, on retrouve la proposition 3.18.*

Corollaire 3.36. *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 3.34 (et en utilisant les mêmes notations que celles de sa démonstration), $S(x) = (S_k(x))_k$.*

Démonstration. Il s'agit donc de démontrer que $S(x) = (\pi_k(S(x)))_k$. Soit k fixé. On a

$$\begin{aligned}
 \pi_k(S(x)) &= \pi_k\left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle x^n\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle S | z^n \rangle \pi_k(x)^n \\
 &\quad \text{(puisque } \pi_k \text{ est un homomorphisme continu d'algèbres)} \\
 &= S_k(x).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

\square

3.4. Sur l'existence, l'unicité et l'analyticité des sous-groupes à un paramètre tracés sur une algèbre de Fréchet

Remarque 3.37.

1. Le corollaire 3.36 nous dit que la série exponentielle $\text{Exp}(x)$ d'un élément de A est la limite projective des séries exponentielles habituelles dans une algèbre de Banach. Cette remarque, qui semble anodine, est en fait essentielle pour la description de l'algèbre de Lie de certains groupes de Lie-Fréchet (voir au chapitre 4, le numéro 4.4.4).

2. Considérons la série entière $L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ qui admet un rayon de convergence égal à 1.

D'après le théorème 3.34, quel que soit $x \in A$ tel que $p_k(x) < 1$ pour tout k , $L(x) \in A$ est absolument convergent. En particulier, quel que soit $x \in A$ tel que pour tout k , $p_k(1_A - x) < 1$, $L(1_A - x)$ est défini, et est donc égal à $\text{Log}(x)$. En appliquant le corollaire 3.36, il en résulte immédiatement que $\text{Log}(x)$ est la limite projective des logarithmes de $\pi_k(x)$ dans les algèbres de Banach B_k (pour les éléments $y \in B_k$ tels que $\|1_k - y\|_k < 1$).

3. Rappelons que dans une algèbre de Banach (unifère), $\nu(x) < 1$ est une condition suffisante, mais non nécessaire (voir Rickart (1960)) à la convergence absolue de la série $\text{Log}(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1_A - x)^n$. Soit A une algèbre de Fréchet (vue comme limite projective d'algèbres de Banach). On a $\nu_k(x) = \nu(\pi_k(x))$. Si on suppose que quel que soit k , $\nu_k(1_A - x) < 1$, alors $\text{Log}(1_k - \pi_k(x))$ est absolument convergent dans B_k . Puisque $p_k(\frac{1}{n}(1_A - x)^n) \leq \frac{1}{n} p_k(1_A - x)^n = \frac{1}{n} \|1_k - \pi_k(x)\|^n$, on en déduit que $\text{Log}(x)$ est absolument convergent dans A .

3.4.7 Sous-groupes à un paramètre tracés dans une algèbre de Fréchet

Les notations du numéro 3.4.5 sont reprises dans celui-ci. On appelle *sous-groupe à un paramètre réel (tracé) sur A* un homomorphisme γ de groupes topologiques de $(\mathbb{R}, +)$ dans $\mathcal{G}(A)$ (en particulier, γ est continu). On souhaite démontrer qu'une telle application est nécessairement de classe \mathcal{C}^1 . Or quel que soit k , $\pi_k \circ \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}(B_k)$ est un sous-groupe à un paramètre sur B_k dont on montre dans le lemme 3.38 qu'il est alors de classe \mathcal{C}^1 . D'après le lemme 3.32, γ est alors lui-même de classe \mathcal{C}^1 .

La preuve du lemme suivant est adaptée d'un résultat en dimension finie de Kosmann-Schwarzbach (2005).

Lemme 3.38. *Soit B une algèbre de Banach (unitaire). Soit $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}(B)$ un sous-groupe à un paramètre tracé dans B . Alors γ est de classe \mathcal{C}^1 .*

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Le sous-groupe γ étant continue, $\Gamma_a(0)$, donnée par $\int_0^a \gamma(t) dt$, existe. Plus généralement pour tout $s \in \mathbb{R}$, $\Gamma_a(s)$, définie par $\int_s^{s+a} \gamma(t) dt$, existe. On a

$$\int_0^a \gamma(t+s) dt = \gamma(s) \int_0^a \gamma(t) dt = \int_s^{s+a} \gamma(t) dt. \quad (3.25)$$

Soit encore $\Gamma_a(s) = \gamma(s) \Gamma_a(0)$. Le chemin $s \mapsto \Gamma_a(s)$ est dérivable. Puisque γ est continu en particulier en 0 et $\gamma(0) = 1_B$, il existe $a > 0$ tel que pour tout t , $|t| < a$, $\|\gamma(t) - 1_B\| \leq \frac{1}{2}$, d'où

$$\left\| \frac{1}{a} \left(\int_0^a \gamma(t) dt \right) - 1_B \right\| = \left\| \frac{1}{a} \int_0^a (\gamma(t) - 1_B) dt \right\| \leq \frac{1}{2} < 1, \quad (3.26)$$

donc pour ce a , $\Gamma_a(0)$ est inversible. Il en résulte que $\gamma(s) = \Gamma_a(s) \Gamma_a(0)^{-1}$. Donc γ est lui-même dérivable. Enfin $\frac{1}{h} \gamma(t+h) - \gamma(t) = \gamma(t) \left(\frac{\gamma(h) - \gamma(0)}{h} \right)$. Donc $\gamma'(t) = \gamma(t) \gamma'(0)$. En particulier γ est de classe \mathcal{C}^1 . \square

Chapitre 3. Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre

Revenons à un sous-groupe à un paramètre $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{G}(A)$ tracé dans une algèbre de Fréchet. Comme dans le cas des algèbres de Banach, on a $\gamma'(t) = \gamma'(0)\gamma(t)$. Donc γ est solution du problème de Cauchy du numéro 3.4.4 avec pour condition initiale $\gamma(0) = 1_A$. Il en résulte que $\gamma(t) = \text{Exp}(tx)$ où $x = \gamma'(0) \in A$. L'élément $x \in A$ ainsi défini s'appelle le *générateur infinitésimal* du sous-groupe à un paramètre γ ou encore *vecteur tangent à $\mathcal{G}(A)$ en l'identité*.

Le lemme suivant est parfois appelé « paradigme du vecteur tangent ».

Lemme 3.39. *Soient γ et ι deux sous-groupes à un paramètre tels que $\gamma'(0) = \iota'(0) = x \in A$, alors $\gamma = \iota$.*

Démonstration. Le sous-groupe à un paramètre γ (respectivement ι) est solution du problème de Cauchy $\gamma'(t) = \gamma(t)x$ et $\gamma(0) = 1_A$ (respectivement $\iota'(t) = \iota(t)x$ et $\iota(0) = 1_A$). Donc $\gamma(t) = \text{Exp}(tx) = \iota(t)$. \square

Enfin il est remarquable de voir que même si un sous-groupe à un paramètre est automatiquement de classe \mathcal{C}^1 , on peut faire mieux. En effet puisque γ est de la forme $\text{Exp}(t\gamma'(0))$ il est de classe \mathcal{C}^∞ en tant que fonction entière.

Remarque 3.40. *Notons que si on pose $\gamma_x: z \in \mathbb{C} \rightarrow \text{Exp}(zx) \in \mathcal{G}(A)$, où A est une algèbre de Fréchet complexe et $x \in A$ est fixé, alors γ_x est un sous-groupe à un paramètre complexe, de classe \mathcal{C}^∞ (voir le lemme 3.26) et $\gamma'_x(z) = x\text{Exp}(zx) = x\gamma_x(z)$ de sorte que $\gamma'(0) = x$, et donc x est le vecteur tangent de γ_x .*

Remarque 3.41.

1. *Voici tout d'abord une condition suffisante très simple pour l'existence du logarithme d'une série formelle. On sait, d'après l'exemple 3.4, que $\mathbb{K}[[x]]$ est une algèbre de Fréchet. En utilisant la représentation matricielle de l'algèbre de Banach $\mathbb{K}[[x]]/(\mathfrak{x}^k)$ (pour $k > 0$), il est clair que le rayon spectral de $P \in \mathbb{K}[[x]]/(\mathfrak{x}^k)$ est le module (ou la valeur absolue) $|\langle P | 1 \rangle|$ du coefficient constant de P . Il résulte de cela que si $|1 - \langle P | 1 \rangle| < 1$, alors $\text{Log}(P)$ existe dans $P \in \mathbb{K}[[x]]/(\mathfrak{x}^k)$. On en déduit immédiatement que pour chaque $S \in \mathbb{K}[[x]]$, si $|1 - \langle S | 1 \rangle| < 1$, alors $\text{Log}(S) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}(1 - S)^n$ existe (en effet, toutes les projections convergent). On peut noter au passage que l'on obtient dans ce cadre une classe évidemment plus large de séries formelles admettant un logarithme que celle habituellement considérée en combinatoire et en algèbre, à savoir, les séries formelles de terme constant égal à 1. Ceci justifie ici l'utilisation de la topologie de Fréchet plutôt que la topologie usuelle de la valuation (avec \mathbb{K} discret). Cependant, afin d'éviter un biais intellectuel par trop flagrant, on se doit de constater que l'existence du logarithme d'une série formelle ne requiert que la condition que son terme constant soit 1 lorsque les coefficients sont supposés appartenir à un corps de caractéristique zéro quelconque (ou mieux, quel que soit l'anneau de coefficients contenant \mathbb{Q} comme sous-corps).*
2. *On montre de façon identique que si $|1 - \langle S | 1 \rangle| < 1$, alors S est inversible, et son inverse est calculé comme la somme de la série absolument convergente $\sum_{n \geq 0} S^n$.*
3. *Étant donné une série formelle S , si $|1 - \langle S | 1 \rangle| < 1$, alors on peut définir le sous-groupe à un paramètre (complexe ou réel) $\gamma_{\text{Log}(S)}: z \mapsto \text{Exp}(z\text{Log}(S))$, que l'on peut évidemment noter S^z , de vecteur tangent $\text{Log}(S)$. Il vérifie donc $S^{z+z'} = S^z S^{z'}$, $S^0 = 1$, et la dépendance en z de S^z est analytique. En particulier, par toute série dont le terme constant satisfait $|1 - \langle S | 1 \rangle| < 1$ passe un sous-groupe à un paramètre. En effet, on a $S = \text{Exp}(\text{Log}(S))$ de sorte que $\gamma_{\text{Log}(S)}(1) = S$.*

3.5. Conclusion et perspectives

4. De façon tout à fait similaire, si X est un ensemble fini, et $A \in \{ \mathbb{K}\langle X \rangle, \mathbb{K}[[X]] \}$, alors on sait que A est une algèbre de Fréchet, limite projective des algèbres de Banach $B_k = A/\mathfrak{M}_k$ (voir l'exemple 3.4). Le spectre d'un élément $P \in B_k$ est réduit à $\{ \langle P | 1 \rangle \}$. Il en résulte que pour $S \in A$, dès lors que $|1 - \langle S | 1 \rangle| < 1$, $\text{Log}(S)$ existe comme dans le cas univarié. De cette façon, on définit également le sous-groupe à un paramètre $S^z = \text{Exp}(z \text{Log}(S))$.
5. Le spectre d'un élément de $\text{ti}([0 \dots k], \mathbb{K})$ (voir exemple 3.4) est évidemment l'ensemble de ses éléments diagonaux, et son rayon spectral est donc la plus grande, en module, de ses valeurs propres. Il résulte de ce fait que si tous les éléments diagonaux $f(i, i)$ de $f \in I(\mathbb{N}^{\text{op}}, \mathbb{K}) \cong_{\mathbb{K}\text{-alg}} \text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (qui en forment le spectre) satisfont $|1 - f(i, i)| < 1$, alors $\text{Log}(f)$ existe. Puis on peut construire un sous-groupe à un paramètre $z \mapsto \text{Exp}(z \text{Log}(f))$ que l'on note encore f^z (de tels sous-groupes à un paramètre furent étudiés dans Duchamp *et al.* (2004), et ils reviennent au chapitre 7).

3.5 Conclusion et perspectives

Ce chapitre, et le suivant, servent de socle et de référence pour la suite de ce texte dans la mesure où on y introduit les définitions fondamentales, et on y prouve des résultats généraux.

Les algèbres de Fréchet (et plus précisément, celles des matrices triangulaires infinies et des séries formelles) jouent un rôle majeur dans les travaux présentés par la suite. Elles fournissent le cadre théorique pour traiter de la question de l'exponentiation d'opérateurs.

Évidemment, si on considère des opérateurs bornés sur un espace de Banach ou de Hilbert, alors les calculs différentiel et intégral (ou encore les variétés) banachique ou hilbertien sont très largement suffisants pour exprimer leurs exponentielles.

Dès lors que sont considérés des opérateurs non bornés des difficultés apparaissent. Une façon de les contourner est de voir certains opérateurs non bornés sur les espaces de Banach (ou de Hilbert) comme continus sur des espaces de Fréchet (c'est exactement le voie choisie au chapitre 7 dans lequel on introduit la représentation de Bargmann-Fock de l'algèbre de Weyl). Dans ce cas, on peut donner un sens rigoureux à l'exponentiation, et donc à la notion d'opérateurs d'évolution.

Le calcul analytique (très) élémentaire, que nous avons introduit ici, et ses relations avec le spectre des éléments d'une algèbre de Fréchet, demandent à être développés. Tout comme la fonction logarithme dont nous pourrions déterminer les prolongements analytiques en utilisant la monodromie usuelle. Par manque de temps et d'espace, cela ne fut effectué ni dans les publications, ni dans le présent texte.

Au chapitre suivant, nous étudions, avec plus de précisions, l'algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies, et certains de ses sous-groupes (des unités) et sous-algèbres.

Chapitre 4

Algèbres de matrices infinies

« When the basic formulae of the quantum theory were set up by Heisenberg, Born and Jordan some mathematicians in Göttingen claimed, somewhat sneeringly, that such formulae could not be valid. They claimed that they could prove this by using Hilbert's theory of infinite matrices. »

KURT O. FRIEDRICHS (1979)

Et chaque livre saint se comprend entre les lignes.

IAM, J'aurais pu croire

Sommaire

4.1	Introduction	41
4.2	Matrices infinies en toute généralité	43
4.3	Algèbre des matrices finies en ligne	44
4.4	Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies . .	51
4.5	Conclusion et perspectives	57

Ce chapitre est en partie constitué de notes non publiées et constitue également un recueil de résultats contenus dans plusieurs de nos articles, regroupés dans un souci de clarté. Il contient de surcroît des résultats fondamentaux utilisés au chapitre 7, et dans une moindre mesure, aux chapitres 5 et 8.

4.1 Introduction

Les matrices infinies sont apparues dès le début de la mécanique quantique *via* Werner Karl Heisenberg et sa « mécanique des matrices ». La richesse de la littérature concernant ces matrices dénote de leur importance. On peut citer Cooke (1955) comme ouvrage de référence (ainsi que Kaplansky (1954)) et les papiers historiques Hellinger et Toeplitz (1910); Köthe et Toeplitz (1934); Ulm (1937); Allen (1952); Körber (1969), Linder (2006) pour les opérateurs de Fredholm, Congxin et Peng-Yee (1998) en ce qui concerne les algèbres topologiques de matrices infinies (sur le corps des complexes), Swartz (1996) pour l'étude des matrices infinies à valeurs dans un groupe topologique, Williamson (1951); Lemmert et Weckbach (1984) qui introduisent leur analyse spectrale et Jabotinsky (1953); Henrici (1974); Bacher (2006) en ce qui concerne la représentation des séries formelles comme matrices infinies.

Ce type d'objets permet de représenter des opérateurs sur des espaces de dimension infinie d'une façon analogue à l'algèbre linéaire ordinaire en dimension finie. Cependant, une matrice

infinie quelconque ne caractérise généralement pas un opérateur de façon biunivoque. De plus, puisque l'on ne dispose plus de la finitude des bases, on se doit naturellement d'opérer des considérations d'ordre topologique, de continuité ou de convergence afin de rendre légaux certains calculs. Si l'addition de deux matrices infinies ne pose aucun souci, il en va tout autrement de leur multiplication. Pour cette opération en effet, des sommes infinies doivent être évaluées, ce qui pose le problème du choix de la topologie. À première vue, mais à première vue seulement, cette difficulté semble être contournée à l'aide de la famille des matrices dont chaque ligne est à support fini (*cf.* le numéro 4.3). Ces matrices se prêtent facilement au jeu de la multiplication dans la mesure où toutes les sommes à évaluer ne sont que superficiellement infinies (elles ne comportent qu'un nombre fini de termes non nuls), de sorte que l'algèbre seule suffit pour s'en tirer. C'est une assertion qui n'est pas fausse mais demande à être relativisée. Il se trouve en effet que le produit dans cette algèbre de matrices n'est pas continu (voir la remarque 4.10), ce qui rend laborieux, et pour le moins risqué, les calculs de sommes de séries en ces matrices (et leurs puissances). Or nous rencontrerons à plusieurs reprises la notion de sommabilité pour des opérateurs sur des espaces de dimension infinie ou des matrices elles-mêmes infinies. Nous ne pouvons donc pas nous satisfaire de cette solution ; il convient ainsi de considérer d'autres algèbres. Le candidat idoine est celui de l'algèbre des matrices triangulaires inférieures infinies (voir le numéro 4.4) déjà rencontrée brièvement au chapitre 3. Dans cette algèbre, la multiplication est continue comme souhaité, mais mieux, il s'agit d'une algèbre topologique complète (pour sa topologie de Fréchet) ce qui fournit un cadre particulièrement bienveillant et sécurisant à l'endroit du traitement de la convergence des suites et des séries. En outre, si on ne considère que les seules de ces matrices triangulaires dont la diagonale principale est identiquement nulle, alors – par une propriété de nilpotence – on peut se passer d'analyse¹ et se contenter de la topologie de la convergence simple (sur un corps de base discret) pour évaluer nos sommes infinies.

Organisation du chapitre

Nous entamons ce chapitre par la notion de matrice associée à un opérateur sur un espace de dimension infinie (le numéro 4.2) ; le concept de *suites de dénominateurs* nous permettant de considérer d'autres « bases » que la base canonique des fonctions caractéristiques. Néanmoins il se trouve que l'on peut construire un endomorphisme non nul pour lequel la matrice le « représentant » est nulle (voir la remarque 4.1) de sorte que l'on ne caractérise pas ces opérateurs à l'aide de leurs matrices. Le numéro 4.3 traite spécifiquement de la notion de matrices finies en ligne, lesquelles constituent une algèbre (non topologique). Tirant profit de la finitude des lignes, à toute matrice de ce type, on peut associer un opérateur linéaire (voir le numéro 4.3.2). L'application linéaire associée à une matrice et la matrice d'une application linéaire seront étudiées dans le détail au chapitre 5. Dans ce numéro sont énoncées quelques propriétés topologiques élémentaires de ces matrices (numéro 4.3.3), mais également des caractérisations en termes de produit tensoriel complété (numéro 4.3.4) et de composition ombrale généralisée (numéro 4.3.5). Enfin le numéro 4.4 introduit l'algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies pour lesquelles on obtient quelques isomorphismes (numéro 4.4.2) mais également des caractérisations en termes de limites projectives (voir le numéro 4.4.4) qui nous permettent, par spécialisations de résultats obtenus au chapitre 3, d'étudier la correspondance groupe/algèbre de Lie (au sens de Fréchet ou de Lazard) dans ce contexte, à l'aide notamment de l'application exponentielle si importante au chapitre 7.

1. L'analyse se localise dans la diagonale des matrices triangulaires inférieures infinies.

4.2. Matrices infinies en toute généralité

4.2 Matrices infinies en toute généralité

Comme au chapitre 3, la lettre \mathbb{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} avec sa topologie usuelle (à une exception près dans la remarque 4.1). Soient X, Y deux ensembles quelconques, et R un anneau. Une *matrice* de format $X \times Y$ à coefficients dans R est simplement un élément de $R^{X \times Y}$. À l'évidence ce dernier ensemble constitue un R -module pour les opérations ponctuelles. On a d'ailleurs de manière évidente $R^{X \times Y} \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in X} \prod_{y \in Y} R_{(x,y)}$ où $R_{(x,y)} = R$ quel que soit

$(x, y) \in X \times Y$, ce dont on déduit immédiatement qu'une fois R vu comme discret, $R^{X \times Y}$ devient un R -module topologique complet pour la topologie produit.

Soient $\alpha = (\alpha_x)_{x \in X} \in \mathcal{G}(R)^X$, et $\beta = (\beta_y)_{y \in Y} \in \mathcal{G}(R)^Y$ (où $\mathcal{G}(R)$ désigne le groupe des inversibles de l'anneau R ; voir le numéro 3.4.5 du chapitre 3), deux *suites de dénominateurs*². Une application linéaire $\phi \in \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R^X, R^Y)$ admet une matrice $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta} \in R^{Y \times X}$ donnée par

$$\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta}(y, x) = (\alpha_x)^{-1} \beta_y \langle \phi(\delta_x) \mid \delta_y \rangle$$

où l'on rappelle que $\langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$ quel que soient $f \in R^X$ et $x \in X$ (cette même notation est également utilisée pour dénoter le coefficient d'un vecteur par rapport à un élément d'une base, voir le numéro 2.4 au chapitre 2). Lorsque quels que soient $x \in X$ et $y \in Y$, $\alpha_x = \beta_y = 1_R$, on note cette matrice tout simplement \mathcal{M}_ϕ , et $\mathcal{M}_{\phi, \alpha}$ pour $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \alpha}$ lorsque $X = Y$. On remarque que l'on a

$$\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta}(y, x) = (\alpha_x)^{-1} \beta_y \mathcal{M}_\phi(y, x) \quad (4.1)$$

quels que soient $x \in X, y \in Y$. Introduisons les notations suivantes. Soit $\gamma = (\gamma_z)_{z \in Z}$ une suite de dénominateurs. On pose $D_\gamma \in R^{Z \times Z}$ la matrice « diagonale » dont les éléments diagonaux sont $D_\gamma(z, z) = \gamma_z$ (et donc $D_\gamma(z, z') = 0$ dès que $z \neq z'$). À l'évidence une telle matrice est inversible, et son inverse est $D_\gamma^{-1} = D_{\gamma^{-1}}$ où γ^{-1} désigne la suite de dénominateurs $(\gamma_z^{-1})_{z \in Z}$ (la multiplication usuelle des matrices dont les lignes sont à support fini, ce qui est le cas pour D_γ et $D_{\gamma^{-1}}$, est définie, ainsi que la notion d'inverse, comme on le voit au numéro 4.3). Il est clair que l'équation (4.1) implique

$$D_{\beta^{-1}} \mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta} D_\alpha = \mathcal{M}_\phi \quad (4.2)$$

de sorte que l'on a, comme on s'y attendait, une équation de changement de bases (les produits matriciels infinis donnés dans l'équation (4.2) sont facilement vus comme bien définis, et que l'associativité ici fonctionne).

Ce type de représentations matricielles sera étudié plus en détail au chapitre 5, et utilisé au chapitre 7.

Remarque 4.1. *La matrice $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta}$ ne caractérise pas ϕ . La cause profonde en est que $((\alpha_x)^{-1} \delta_x)_{x \in X}$ et $((\beta_y)^{-1} \delta_y)_{y \in Y}$ ne sont pas des bases algébriques de R^X et de R^Y dès que X et Y sont infinis (ce sont évidemment des bases de $R^{(X)}$ et de $R^{(Y)}$). Il est ainsi possible de construire une application linéaire non nulle dont la matrice est nulle. Pour simplifier, supposons que :*

1. $X = Y, \alpha_x = \beta_x = 1_R$ pour tout $x \in X$.
2. X est infini.
3. R est un corps quelconque \mathbb{K} (pour cet exemple seulement, on ne suppose pas que $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).

2. Cette notion nous sera utile au chapitre 7 lorsque l'on s'intéressera à des séries génératrices mixtes, ordinaires et exponentielles. On en fera également usage dans un autre contexte, et pour d'autres besoins, au chapitre 8.

La famille $(\delta_x)_{x \in X}$ est linéairement indépendante (c'est une base algébrique de $\mathbb{K}^{(X)}$). D'après l'axiome du choix, la famille $(\delta_x)_x$ peut être étendue en une base algébrique \mathcal{B} de \mathbb{K}^X . Soit V le sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^X engendré par $\emptyset \neq \mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{\delta_x : x \in X\}$. Il est clair que $\mathbb{K}^X = \mathbb{K}^{(X)} \oplus V$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. Alors f admet une représentation unique sous la forme d'une combinaison linéaire finie $f = \sum_{e \in \mathcal{B}} \langle f | e \rangle_{\mathcal{B}} e = \underbrace{\sum_{x \in X} \langle f | \delta_x \rangle_{\mathcal{B}} \delta_x}_{\in \mathbb{K}^{(X)}} + \underbrace{\sum_{e' \in \mathcal{B}'} \langle f | e' \rangle_{\mathcal{B}} e'}_{\in V}$.

sur V parallèlement à $\mathbb{K}^{(X)}$, i.e., $\pi_V(f) = \sum_{e' \in \mathcal{B}'} \langle f | e' \rangle_{\mathcal{B}} e'$ (combinaison linéaire finie). Clairement

$\text{im}(\pi_V) = V$ de sorte que $\pi_V \neq 0$, et $\mathbb{K}^{(X)} = \ker \pi_V$. Finalement, $\mathcal{M}_{\pi_V}(y, x) = \langle \pi_V(\delta_x) | \delta_y \rangle = \langle 0 | \delta_y \rangle = 0$ pour tout $(x, y) \in X \times X$. Conclusion : π_V est non nul mais \mathcal{M}_{π_V} est la matrice nulle. De plus si l'on se donne α et β deux suites de dénominateurs, alors $\mathcal{M}_{\pi_V, \alpha, \beta}$ est évidemment également la matrice nulle à cause de l'égalité (4.1).

Il existe une opération R -linéaire de transposée évidente de $R^{X \times Y}$ dans $R^{Y \times X}$, $M \mapsto M^\dagger$, $(y, x) \in Y \times X \mapsto M^\dagger(y, x) = M(x, y)$ (lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ il est usuel de considérer l'adjoint d'une matrice plutôt que sa transposée : $M^\dagger(y, x) = \overline{M(x, y)}$ quels que soient $x \in X$, $y \in Y$; et l'application devient anti-linéaire). Comme d'habitude $(M^\dagger)^\dagger = M$ de sorte que cette application est un isomorphisme de R -modules (et si $R = \mathbb{C}$ et que l'on considère l'adjoint, alors on obtient un isomorphisme anti-linéaire).

4.3 Algèbre des matrices finies en ligne

4.3.1 Généralités

Soient X, Y, Z et W quatre ensembles quelconques, et R un anneau. En toute généralité, si $M \in R^{X \times Y}$ et $N \in R^{Y \times Z}$, la définition usuelle du produit matriciel, à savoir

$$(MN)(x, z) = \sum_{y \in Y} M(x, y)N(y, z) \quad (4.3)$$

n'a évidemment aucun sens (ni algébrique, ni dans la topologie produit). Et même lorsque dans certains cas ces sommes sont définies, l'associativité d'un produit n'est pas garantie (voir Cooke (1955)). Pour que la somme précédente soit valide, il est donc nécessaire de restreindre cette multiplication à un sous-ensemble de $R^{X \times Y}$. On remarque que si pour chaque $x \in X$, l'application $y \mapsto M(x, y)$ est un élément de $R^{(Y)}$, autrement dit, elle a un support fini, alors le membre de droite de l'équation (4.3) existe quels que soient $x \in X$, $z \in Z$ et $N \in R^{Y \times Z}$. Une matrice possédant cette propriété de finitude par « ligne » est appelée *matrice finie en ligne* ou à *lignes finies* (connue sous le terme anglo-saxon « row-finite », voir Cooke (1955)). L'ensemble de ces matrices est alors noté $R^{X \times (Y)}$. Très clairement, on peut également considérer l'espace $R^{(X) \times Y}$ des matrices finies en colonne ou à colonnes finies. Le second membre de l'équation (4.3) est également défini dans ce cas (il est même défini si M est une matrice quelconque et que seule N est à colonnes finies).

Remarque 4.2. Soit $M \in R^{X \times Y}$.

1. $M \in R^{X \times (Y)}$ si, et seulement si, pour chaque $x \in X$, l'application $M(x, \cdot) : y \in Y \mapsto M(x, y)$ appartient à $R^{(Y)}$. (L'application $M(x, \cdot)$ est également notée M_x dans la suite.)
2. $M \in R^{(X) \times Y}$ si, et seulement si, pour chaque $y \in Y$, l'application $M(\cdot, y) : x \in X \mapsto M(x, y)$ appartient à $R^{(X)}$.

4.3. Algèbre des matrices finies en ligne

Ce résultat est immédiat³. Il en résulte que si $M \in R^{X \times (Y)}$ (respectivement, $M \in R^{(X) \times Y}$), alors pour tout $x \in X$, $\sum_{y \in Y} M(x, y) \delta_y$ (respectivement, pour tout $y \in Y$, $\sum_{x \in X} M(x, y) \delta_x$) est une somme ne contenant qu'un nombre fini de termes non nuls, autrement dit, pour chaque $x \in X$, $M(x, \cdot) = \sum_{y \in Y} M(x, y) \delta_y$ (respectivement, pour chaque $y \in Y$, $M(\cdot, y) = \sum_{x \in X} M(x, y) \delta_x$) est une application à support fini.

Le résultat suivant est facilement démontré ; on en omet la démonstration qui est plus longue que difficile.

Lemme 4.3. Soient $M, M' \in R^{X \times (Y)}$, $N, N' \in R^{Y \times (Z)}$ et $P \in R^{Z \times (W)}$. Les assertions suivantes sont satisfaites :

1. $MN \in R^{X \times (Z)}$.
2. $M(NP) = (MN)P$.
3. $(M + M')N = MN + M'N$.
4. $M(N + N') = MN + MN'$.

On déduit directement de ce lemme que $R^{X \times (X)}$ constitue une R -algèbre (non commutative en général) appelée la R -algèbre des matrices à lignes finies. Bien évidemment l'identité de cette algèbre est la matrice identique telle qu'on l'imagine. De façon complètement similaire, $R^{(X) \times X}$ est également une R -algèbre. L'application R -linéaire de transposition du numéro 4.2, $M \mapsto M^\dagger$, est un anti-isomorphisme d'algèbres lorsque $X = Y$, et si $R = \mathbb{C}$, et que l'on considère l'adjoint à la place de la transposée, alors on obtient un anti-isomorphisme anti-linéaire.

Remarque 4.4. Soit (P, \leq) un ensemble ordonné, avec un minimum $\hat{0}$, et vérifiant la propriété d'être localement fini (i.e., chacun de ses intervalles fermés est fini) ; par exemple, \mathbb{N} est un tel ensemble ordonné. Alors l'algèbre d'incidence $I(P, R)$ est une sous-algèbre de $R^{(P) \times P}$, alors que $I(P^{\text{op}}, R)$, où P^{op} désigne l'ensemble P avec son ordre opposé (voir Birkhoff (1995)), est une sous-algèbre de $R^{P \times (P)}$.

4.3.2 Applications linéaires associées

La remarque 4.2 peut être utilisée pour interpréter les matrices finies en ligne ou en colonne comme des applications linéaires (on verra au chapitre 5 que ce sont exactement les applications linéaires continues).

Définition 4.5. Soient $M \in R^{X \times (Y)}$, et deux suites de dénominateurs (voir le numéro 4.2) $\alpha \in \mathcal{G}(R)^X$ et $\beta \in \mathcal{G}(R)^Y$. On définit $\phi_{M, \alpha, \beta} \in \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R^Y, R^X)$ par

$$\phi_{M, \alpha, \beta}(f) = \sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in Y} M(x, y) f(y) \beta_y \right) (\alpha_x)^{-1} \delta_x \quad (4.4)$$

pour $f \in R^Y$ (par la remarque 4.2, on sait que la somme indicée par $y \in Y$ ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls, alors que la somme portant sur $x \in X$ est la somme d'une famille sommable, par exemple pour R discret et R^X avec la topologie produit ; voir le lemme 5.9 démontré au chapitre 5 et rappelé au numéro 2.7 du chapitre 2).

3. Il ne s'agit que des faits évidents : $R^{X \times (Y)} \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in X} \bigoplus_{y \in Y} R$ par $M \mapsto (M(x, \cdot))_{x \in X}$, et $R^{(X) \times Y} \cong_{R\text{-Mod}}$

$\prod_{y \in Y} \bigoplus_{x \in X} R$ par $M \mapsto (M(\cdot, y))_{y \in Y}$.

Remarque 4.6.

1. Lorsque quels que soient $x \in X$, $y \in Y$, $\alpha_x = 1_R = \beta_y$, l'application $\phi_{M,\alpha,\alpha}$ est simplement notée ϕ_M . Notons au passage que si l'on pose $M'(x, y) = M(x, y)\beta_y(\alpha_x)^{-1}$ ($x \in X$, $y \in Y$), de sorte que $M \in R^{X \times (Y)}$ si, et seulement si, $M' \in R^{X \times (Y)}$, alors

$$\phi_{M,\alpha,\beta} = \phi_{M'} . \quad (4.5)$$

(La notation M' est trompeuse car le lecteur pourrait croire⁴ que la matrice ainsi dénotée ne dépend que de M mais évidemment elle dépend également du couple de suites de dénominateurs donné. Cette dépendance respecte la multiplication comme on le voit ci-dessous.) Il est clair que l'on en déduit de façon immédiate que (en utilisant les notations du numéro 4.2)

$$D_{\alpha^{-1}} M' D_{\beta} = M . \quad (4.6)$$

Il s'agit donc encore une fois du même mécanisme de changement de bases. Plus explicitement, si l'on se donne $f = \sum_{y \in Y} f_y(\beta_y)^{-1} \delta_y \in R^Y$ (autrement dit, $f_y = \langle f \mid (\beta_y)^{-1} \delta_y \rangle =$

$(\beta_y)^{-1} f(y)$), alors $\phi_{M,\alpha,\beta}(f) = \sum_{x \in X} g_x(\alpha_x)^{-1} \delta_x \in R^X$ avec $g_x = \langle \phi_{M,\alpha,\beta}(f) \mid (\alpha_x)^{-1} \delta_x \rangle = \sum_{y \in Y} M(x, y) f_y$.

2. Détaillons brièvement ce mécanisme de « changement de bases ». Notons $[f]_{\beta} \in R^{\{0\} \times Y}$ la « matrice » de $f \in R^Y$ à une « ligne » et Y « colonnes » exprimée dans la « base » $(\beta_y^{-1} \delta_y)_{y \in Y}$ (avec une définition similaire pour $[\cdot]_{\alpha}$), autrement dit, $[f]_{\beta} = (f(y)\beta_y)_{(0,y) \in \{0\} \times Y}$ (dans la mesure où f s'exprime sous la forme de la somme $\sum_{y \in Y} f(y)\beta_y(\beta_y^{-1} \delta_y)$ d'une famille sommable).

Si on considère la transposition $[f]_{\beta}^{\dagger} \in R^{Y \times \{0\}}$ usuelle, alors $\phi_{M,\alpha,\beta}(f) = \pi_X([M[f]_{\beta}^{\dagger}]_{\alpha}^{\dagger}) \in R^X$ où $\pi_X((\lambda_{(0,x)})_{(0,x) \in \{0\} \times X} = (\lambda'_x)_{x \in X} \in R^X$ (avec $\lambda'_x = \lambda_{(0,x)}$).

3. Supposons que $X = \mathbb{N} = Y$, de sorte que l'on peut identifier $R^{(X)}$ avec le R -module sous-jacent à $R[[x]]$ (via $\delta_n \leftrightarrow x^n$). Soient alors $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de dénominateurs. Nous avons donc $\phi_{M,\alpha,\beta} \left(\sum_{n \geq 0} f_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} M(n, k) f_k \beta_k \right) (\alpha_n)^{-1} x^n$.

Supposons que R soit une \mathbb{Q} -algèbre, et que l'on a nos deux suites de dénominateurs $\mathbf{d} = (d_n)_n \in \mathbb{Q}1_R$, et $\mathbf{e} = (e_n)_n \in \mathbb{Q}1_R$. On a, dans ce cas,

$$\phi_{M,\mathbf{d},\mathbf{e}} \left(\sum_{n \geq 0} f_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} M(n, k) f_k e_k \right) \frac{x^n}{d_n} .$$

4. Si on dispose de trois suites de dénominateurs $\alpha \in \mathcal{G}(R)^X$, $\beta \in \mathcal{G}(R)^Y$ et $\gamma \in \mathcal{G}(R)^Z$, alors quels que soient $M \in R^{X \times (Y)}$ et $N \in R^{Y \times (Z)}$,

$$(MN)' = M'N' \quad (4.7)$$

où le symbole « ' » fait référence de façon implicite à (α, γ) pour $(MN)'$, (α, β) pour M' et (β, γ) pour N' . De même, on définit $\psi_M \in \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(R^{(X)}, R^{(Y)})$ donnée par

$$\psi_M(\delta_x) = \sum_{y \in Y} M(x, y) \delta_y \in R^{(Y)}$$

(là encore, c'est par la remarque 4.2 que l'on sait que la somme portant sur y n'a qu'un nombre fini de termes non nuls). Les applications $M \mapsto \phi_{M,\alpha,\beta}$ et $M \mapsto \psi_M$ sont à l'évidence R -linéaires et injectives.

4. « Imprudence! ».

4.3. Algèbre des matrices finies en ligne

Le lemme suivant se démontre simplement en posant les calculs.

Lemme 4.7. *Soient $M \in R^{X \times (Y)}$, et $N \in R^{Y \times (Z)}$. Les assertions suivantes sont satisfaites.*

1. $\phi_{MN} = \phi_M \circ \phi_N$.
2. Si $X = Y = Z$, alors l'application $\phi: M \in R^{X \times (X)} \mapsto \phi_M \in \text{End}_{R\text{-Mod}}(R^X)$ est un homomorphisme de R -algèbres⁵, dit autrement, $\phi \in \text{Hom}_{R\text{-Alg}}(R^{X \times (X)}, \text{End}_{R\text{-Mod}}(R^X))$.
3. $\psi_{MN} = \psi_N \circ \psi_M$.
4. Si $X = Y = Z$, alors l'application $\psi: M \in R^{X \times (X)} \mapsto \psi_M \in \text{End}_{R\text{-Mod}}(R^X)$ est un anti-homomorphisme de R -algèbres, dit autrement, $\psi \in \text{Hom}_{R\text{-Alg}}((R^{X \times (X)})^{\text{op}}, \text{End}_{R\text{-Mod}}(R^X))$ (où $(R^{X \times (X)})^{\text{op}}$ désigne l'algèbre opposée à $R^{X \times (X)}$).

Remarque 4.8. *Supposons données trois suites de dénominateurs $\alpha \in \mathcal{G}(R)^X$, $\beta \in \mathcal{G}(R)^Y$ et $\gamma \in \mathcal{G}(R)^Z$, et les matrices $M \in R^{X \times (Y)}$, $N \in R^{Y \times (Z)}$. Alors par le lemme 4.7 et l'égalité (4.7), on a $\phi_{MN, \alpha, \gamma} = \phi_{(MN)'} = \phi_{M'N'} = \phi_{M'} \circ \phi_{N'} = \phi_{M, \alpha, \beta} \circ \phi_{N, \beta, \gamma}$. De plus, d'après l'égalité (4.6), $I' = D_\alpha ID_{\alpha^{-1}} = I$, où I désigne la matrice identité de $R^{X \times X}$. Il en résulte que l'application $M \mapsto \phi_{M, \alpha} \in \text{Hom}_{R\text{-Alg}}(R^{X \times (X)}, \text{End}_{R\text{-Mod}}(R^X))$, où l'on a noté $\phi_{M, \alpha} = \phi_{M, \alpha, \alpha}$.*

4.3.3 Propriétés topologiques de $R^{X \times (Y)}$

Étudions à présent des questions topologiques. Si, comme cela a été écrit au numéro 4.2, $R^{X \times Y}$ est un R -module topologique complet pour la topologie produit avec R discret, ce n'est pas le cas de $R^{X \times (Y)}$ (ni $R^{(X) \times Y}$) puisque l'on a $R^{X \times (Y)} \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in X} \bigoplus_{y \in Y} R$ (et $R^{(X) \times Y} \cong_{R\text{-Mod}}$

$\prod_{y \in Y} \bigoplus_{x \in X} R$); ainsi, pour ces topologies initiales, ni $R^{X \times (Y)}$ ni $R^{(X) \times Y}$ ne sont complets. Un peu d'analyse à présent. Si X et Y sont au plus dénombrables (de sorte que $X \times Y$ le soit également), alors $\mathbb{K}^{X \times Y}$ est un espace de Fréchet pour la topologie produit. On note, comme d'habitude, $\pi_{(x,y)}$ la projection canonique de $\mathbb{K}^{X \times Y}$ sur \mathbb{K} qui associe à une matrice M son entrée $M(x, y)$.

Remarque 4.9. *L'espace de Fréchet $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ n'est pas un espace de Banach. En effet il est facile de voir que tout voisinage de zéro contient un sous-espace vectoriel non trivial (par exemple, si on choisit un voisinage de la forme $\bigcap_{(i,j) \in F} \pi_{(i,j)}^{-1}(D(0; r_{(i,j)}))$ où F est une partie finie non vide de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$,*

et $D(0; r_{(i,j)})$ est la boule ouverte de rayon $r_{(i,j)}$, alors $V_J = \{M \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}; M(i, j) = 0, \forall (i, j) \in J\}$ est un tel sous-espace vectoriel); il ne peut pas être borné, et donc $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ n'est pas normable, et d'autant moins banachique⁶.

Toujours sous les hypothèses de dénombrabilité de X et Y , $\mathbb{K}^{X \times (Y)}$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique séparé pour la topologie induite par $\mathbb{K}^{X \times Y}$. Il est aisé de vérifier que ce ne peut pas être un espace de Fréchet quand X et Y ont la puissance \aleph_0 . Dans ce cas, on peut supposer sans perte de généralité que $X = Y = \mathbb{N}$. Soit $(i, j) \in \mathbb{N}$ fixé. La masse de Dirac $\delta_{(i,j)}$ en (i, j) est à l'évidence un élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$. Soit $M_n = \sum_{k=0}^n \delta_{(0,k)} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$. Clairement quel que soit $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $(\pi_{(x,y)}(M_n))_n$ est une suite de Cauchy de \mathbb{K} (il s'agit même d'une suite de Cauchy pour \mathbb{K} discret et donc d'autant plus pour \mathbb{K} avec sa topologie usuelle). Il en résulte donc que $(M_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$. Cependant cette suite converge dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ vers la matrice M telle que $M(0, j) = 1$ quel que soit j , et $M(i, j) = 0$ pour tout $i \neq 0$. Cette matrice

5. C'est en particulier un homomorphisme de monoïdes à zéro (voir le chapitre 6 puisqu'il envoie la matrice identiquement nulle sur l'endomorphisme nul).

6. Et ce n'est pas un argument d'autorité!

n'est donc pas finie en ligne, et de ce fait $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ ne saurait être complet, et donc un espace de Fréchet. On peut remarquer que la suite précédente est également de Cauchy pour la topologie produit avec \mathbb{K} discret, et converge (dans cette topologie et dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$) aussi vers M . Il en résulte que $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ n'est pas non plus complet pour cette topologie.

Remarque 4.10.

1. On peut également démontrer que $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ n'est pas une algèbre de Fréchet pour la topologie produit usuelle. Ceci repose sur la non continuité jointe de la multiplication. On définit deux matrices à lignes finies $M_n = \delta_{(0,n)}$ et $N_n = \delta_{(n,0)}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Ces deux suites possèdent une limite nulle, mais $M_n N_n = \delta_{(0,0)}$ pour tout n , de sorte que $(M_n N_n)_n$ ne converge pas vers la matrice nulle. Il en résulte que $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ n'est pas un algèbre topologique (le produit n'est pas continue simultanément en ses deux variables) et donc ce n'est pas non plus une algèbre de Fréchet. On peut facilement montrer que la multiplication est en revanche continue pour sa seconde variable (la première étant fixée). Puisqu'il s'agit d'un espace métrique (la distance induite par l'espace de Fréchet $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$), il est suffisant de montrer que pour chaque suite $(N_n)_n$ tendant vers zéro, et pour chaque matrice M à lignes finies, la suite $(M N_n)_n$ tend également vers zéro. Or quels que soient i, j , $\pi_{i,j}(M N_n) = \sum_{k \geq 0} \pi_{i,k}(M) \pi_{k,j}(N_n)$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls puisque M est à lignes finies; il y en a au plus $\max\{j \in \mathbb{N} : M(i, j) \neq 0\}$, borne large qui ne dépend que de M). Puisque $\pi_{k,j}(N_n) \rightarrow 0$ avec $n \rightarrow \infty$, on en déduit que $\pi_{i,j}(M N_n) \rightarrow 0$ avec $n \rightarrow \infty$. Cependant on peut vérifier que la multiplication n'est pas continue en sa première variable : soit $M_n = \delta_{(0,n)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, et soit N une matrice à lignes finies pour laquelle $N(i, 0) = 1$ quel que soit i , et $N(i, j) = 0$ pour tout $j \neq 0$. Alors $M_n N = \delta_{(0,0)}$ qui ne converge évidemment pas vers la matrice nulle.
2. On peut remarquer que les preuves et contre-exemples du point précédent tiennent si \mathbb{K} est remplacé par R discret de sorte que pour la topologie produit sur $R^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ (qui est métrisable comme produit d'une famille au plus dénombrable d'espaces métriques), la multiplication n'est pas continue, ni continue en sa première variable; elle est continue en sa seconde variable.
3. De manière totalement similaire, le résultat suivant est obtenu : la multiplication de $R^{(\mathbb{N}) \times \mathbb{N}}$ n'est pas continue en sa première variable, et est continue en sa seconde variable, pour la topologie produit, que R soit discret ou que $R = \mathbb{K}$ avec la topologie usuelle.

4.3.4 Produit tensoriel complété

Si donc $R^{X \times (Y)}$ n'est pas complet pour la topologie produit, il l'est en revanche pour la topologie la moins fine rendant continue, pour tout $x \in X$, l'application $\ell_x : M \mapsto M(x, \cdot) \in R^{(Y)}$ (cf. remarque 4.2), avec $R^{(Y)}$ discret (de même que R pour avoir un R -module topologique complet). Cela vient de l'identification $R^{X \times (Y)} \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in X} R^{(Y)}$. Ainsi, $R^{X \times (Y)}$ se trouve être le

complété du R -module topologique discret $R^{(X \times Y)}$. Symétriquement, $R^{(X) \times Y}$ est complet pour la topologie initiale relative aux applications $c_y : M \mapsto M(\cdot, y) \in R^{(X)}$ pour chaque $y \in Y$, et pour $R^{(X)}$, R discrets, et $R^{(X) \times Y}$ est alors le complété du R -module discret $R^{(X \times Y)}$.

Clairement $R^{(X \times Y)}$ est isomorphe au produit tensoriel $R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)}$ en tant que R -module. Soient alors les applications R -linéaires $\ell'_x : \delta_x \otimes \delta_y \in R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)} \mapsto \delta_y \in R^{(Y)}$ ($x \in X$), et $c'_y : \delta_x \otimes \delta_y \in R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)} \mapsto \delta_x$ ($y \in Y$). Elles correspondent évidemment aux projections ℓ_x et c_y . Si on donne à $R^{(X)} \otimes_R R^{(Y)}$ la topologie initiale associée à la famille $(\ell'_x)_{x \in X}$ (respectivement, $(c'_y)_{y \in Y}$) pour $R^{(Y)}$ et R discrets (respectivement, $R^{(X)}$ et R discrets), alors son complété est le R -module $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$ (respectivement, $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^c R^{(Y)}$) isomorphe à $R^{X \times (Y)}$

4.3. Algèbre des matrices finies en ligne

(respectivement, à $R^{(X) \times Y}$) dont les éléments s'écrivent comme sommes de familles sommables

$\sum_{x \in X} \delta_x \otimes \left(\sum_{y \in Y} p_x(y) \delta_y \right)$ où $p_x(y) \in R$ et la somme portant sur y n'a qu'un nombre fini de

termes non nuls (respectivement, $\sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} p_y(x) \delta_x \right) \otimes \delta_y$, et $\sum_{x \in X} p_y(x) \delta_x \in R^{(X)}$). Très précie-

sément, on a $R^{X \times (Y)} \cong_{R_d\text{-ModTop}} R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$ (pour les topologies initiales que l'on vient d'in-

troduire) donné par $M \mapsto \sum_{x \in X} \delta_x \otimes \left(\sum_{y \in Y} M(x, y) \delta_y \right) = \sum_{x \in X} \delta_x \otimes M(x, \cdot)$ (cf. remarque 4.2).

L'application réciproque envoie $\sum_{x \in X} \delta_x \otimes \left(\sum_{y \in Y} p_x(y) \delta_y \right)$ sur M donnée par $M(x, y) = p_x(y)$

(évidemment, $M \in R^{X \times (Y)}$ puisque $p_x = \sum_{y \in Y} p_x(y) \delta_y \in R^{(Y)}$). De même, $R^{(X) \times Y} \cong_{R_d\text{-ModTop}}$

$R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^c R^{(Y)}$ via $M \mapsto \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} M(x, y) \delta_x \right) \otimes \delta_y = \sum_{y \in Y} M(\cdot, y) \otimes \delta_y$. L'application réciproque

envoie $\sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} p_y(x) \delta_x \right) \otimes \delta_y$ sur $M: (x, y) \mapsto p_y(x)$ (clairement, $M \in R^{(X) \times Y}$ puisque $p_y =$

$\sum_{x \in X} p_y(x) \delta_x \in R^{(X)}$).

Remarque 4.11. Par raison de sommabilité relativement aux topologies initiales, on a toujours pour $p_x \in R^{(Y)}$ ($x \in X$), et $f \in R^X$, $\sum_{x \in X} f(x) \delta_x \otimes p_x = \sum_{x \in X} \delta_x \otimes f(x) p_x$. De même, pour $p_y \in R^{(X)}$

($y \in Y$), et $f \in R^Y$, $\sum_{y \in Y} p_y \otimes f(y) \delta_y = \sum_{y \in Y} p_y f(y) \otimes \delta_y$.

En résumé, $(R^{(Y)})^X \cong_{R\text{-Mod}} R^{X \times (Y)} \cong_{R\text{-Mod}} R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$. On remarque qu'à un élément quelconque $\sum_{x \in X} \delta_x \otimes p_x \in R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$ correspond (de manière biunivoque) l'application en

notation sommatoire⁷ $\sum_{x \in X} \left(\sum_{y \in Y} \langle p_x | \delta_y \rangle \delta_y \right) \delta_x$ (la somme portant sur y ne comporte qu'un

nombre fini de termes non nuls, $\langle p_x | \delta_y \rangle = p_x(y)$, la somme sur x étant la somme d'une famille sommable, et δ_x est utilisée comme dans le numéro 2.8 du chapitre 2). Remarquons au passage que l'on obtient de la sorte un genre de série génératrice de la famille $(p_x)_{x \in X}$ de fonctions à support fini de Y dans R .

4.3.5 Compositions ombrales généralisée et classique

Étant donné deux familles de fonctions à support fini (à valeurs dans un anneau R), $\mathbf{p} = (p_x)_{x \in X} \in (R^{(Y)})^X \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in X} R^{(Y)}$ et $\mathbf{q} = (q_y)_{y \in Y} \in (R^{(Z)})^Y \cong_{R\text{-Mod}} \prod_{x \in Y} R^{(Z)}$, c'est-à-dire, quel que soit $x \in X$, $p_x \in R^{(Y)}$, et quel que soit $y \in Y$, $q_y \in R^{(Z)}$, on définit leur *composition*

7. Cette application en notation fonctionnelle est donnée par

$$\begin{aligned} X &\rightarrow R^{(Y)} \\ x &\mapsto p_x: \begin{pmatrix} Y &\rightarrow R \\ y &\mapsto p_x(y) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

ombrale (généralisée), notée $(p_x(\mathbf{q}))_{x \in X}$, et égale à $\mathbf{r} = (r_x)_{x \in X} \in (R^{(Z)})^X$ où $r_x = \sum_{y \in Y} p_x(y)q_y$

quel que soit $x \in X$. Il va de soi que $r_x \in R^{(Z)}$ pour chaque $x \in X$. La composition ombrale est donc définie sur $(R^{(Y)})^X \times (R^{(Z)})^Y$ et à valeurs dans $(R^{(Z)})^X$.

Lemme 4.12. Soient $M \in R^{X \times (Y)}$ et $N \in R^{Y \times (Z)}$. Alors

$$(M_x)_{x \in X} = (\psi_M(\delta_x))_{x \in X}$$

et

$$(M_x((N_y)_{y \in Y}))_{x \in X} = (\psi_N(\psi_M(\delta_x)))_{x \in X} .$$

Démonstration. Tout d'abord $\psi_M(\delta_x) = \sum_{y \in Y} M(x, y)\delta_y = M_x$ (cf. la remarque 4.2 et la définition 4.5). D'une part,

$$\begin{aligned} M_x((N_y)_{y \in Y}) &= \sum_{y \in Y} M(x, y)N_y \\ &= \underbrace{\sum_{y \in Y} M(x, y)}_{\in R^{(Y)}} \sum_{z \in Z} N(y, z)\delta_z . \end{aligned} \quad (4.9)$$

D'autre part, $\psi_M(\delta_x) = \sum_{y \in Y} M(x, y)\delta_y$ (somme avec un nombre fini de termes non nuls), puis

$$\psi_N(\psi_M(\delta_x)) = \psi_N\left(\sum_{y \in Y} M(x, y)\delta_y\right) = \sum_{y \in Y} M(x, y)\psi_N(\delta_y) = \sum_{y \in Y} M(x, y) \sum_{z \in Z} N(y, z)\delta_z . \quad \square$$

Lemme 4.13. Avec la composition ombrale (généralisée), le R -module $(R^{(X)})^X$ est une R -algèbre isomorphe à $R^{X \times (X)}$.

Démonstration. L'application R -linéaire suivante

$$\begin{aligned} \Theta: R^{X \times (X)} &\rightarrow (R^{(X)})^X \\ M &\mapsto (M_x)_{x \in X} \end{aligned} \quad (4.10)$$

est évidemment un isomorphisme pour les structures linéaires. Il suffit maintenant de vérifier qu'elle respecte les multiplications. Soient $M, N \in R^{X \times (X)}$. On a $\Theta(MN) = (\psi_N(\psi_M(\delta_x)))_{x \in X} = (\psi_{MN}(\delta_x))_{x \in X}$ d'après les lemmes 4.7 et 4.12. \square

Remarque 4.14.

1. Si on utilise la notation sommatoire vue à la fin du numéro 4.3.4 pour les éléments de $(R^{(Y)})^X$ et ceux de $(R^{(Z)})^Y$, alors le produit ombral s'écrit de la façon suivante :

$$\left(\sum_{x \in X} \underbrace{p_x}_{\in R^{(Y)}} \delta_x \right) \left(\sum_{y \in Y} \underbrace{q_y}_{\in R^{(Z)}} \delta_y \right) = \sum_{x \in X} \left(\underbrace{\sum_{y \in Y} p_x(y)q_y}_{\in R^{(Z)}} \right) \delta_x . \quad (4.11)$$

2. En utilisant la construction du produit tensoriel complété du numéro 4.3.4, on voit immédiatement que $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(X)}$ est équipé d'une structure de R -algèbre (transportée par isomorphisme) donnée par

$$\left(\sum_{x \in X} \delta_x \otimes p_x \right) \left(\sum_{x \in X} \delta_x \otimes q_x \right) = \sum_{x \in X} \delta_x \otimes p_x(\mathbf{q}) = \sum_{x \in X} \delta_x \otimes \left(\sum_{y \in X} p_x(y)q_y \right) \quad (4.12)$$

4.4. Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies

où pour chaque $x \in X$, $p_x, q_x \in R^{(X)}$. Évidemment, et toujours par isomorphisme, on peut multiplier un élément de $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$ par un élément de $R^{(Y)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Z)}$, afin d'obtenir un membre de $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Z)}$, par la formule :

$$\left(\sum_{x \in X} \delta_x \otimes p_x \right) \left(\sum_{y \in Y} \delta_y \otimes q_y \right) = \sum_{x \in X} \delta_x \otimes \left(\sum_{y \in Y} p_x(y) q_y \right). \quad (4.13)$$

3. Si maintenant on suppose que $X = Y = \mathbb{N}$, alors on peut évidemment identifier $R^{(Y)} = R^{(\mathbb{N})}$ avec le R -module $R[x]$ des polynômes via $\delta_n = x^n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. La composition ombrale généralisée sur $(R[x])^{\mathbb{N}}$ est alors donnée pour $\mathbf{p} = (p_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{q} = (q_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ par $(p_n(\mathbf{q}))_{n \in \mathbb{N}} = (r_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ où $r_n(\mathbf{x}) = \sum_{k \geq 0} \langle p_n \mid \mathbf{x}^k \rangle q_k(\mathbf{x})$. Il s'agit de la notion classique

de composition ombrale quand on l'applique aux suites de polynômes, c'est-à-dire une suite $(p_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\deg(p_n(\mathbf{x})) = n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (voir Rota (1975); Roman (1984); He et al. (2007)).

Considérons les ensembles $R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle = \left\{ \sum_{n \geq 0} \mathbf{x}^n p_n(\mathbf{y}) : \forall n, p_n(\mathbf{y}) \in R[\mathbf{y}] \right\} \subseteq R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$ ainsi

que $R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle = \left\{ \sum_{n \geq 0} p_n(\mathbf{x}) \mathbf{y}^n : \forall n, p_n(\mathbf{x}) \in R[\mathbf{x}] \right\} \subseteq R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$ (avec $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ des indéterminées).

Il s'agit clairement de sous- R -modules de $R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$. On a $R[x] \widehat{\otimes}^\ell R[y] \cong_{R\text{-Mod}} R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$, alors que $R[x] \widehat{\otimes}^c R[y] \cong_{R\text{-Mod}} R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$ (où l'on considère les structures de R -modules sous-jacentes à $R[x]$ et $R[y]$). Le point précédent en notation sommatoire permet de munir le R -module $R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$ du produit (associatif) suivant :

$$\left(\sum_{m \geq 0} \mathbf{x}^m \underbrace{P_m}_{\in R[\mathbf{y}]} \right) \left(\sum_{m \geq 0} \mathbf{x}^m \underbrace{Q_m}_{\in R[\mathbf{y}]} \right) = \sum_{m \geq 0} \mathbf{x}^m \underbrace{\left(\sum_{n \geq 0} \langle P_m \mid \mathbf{y}^n \rangle Q_n \right)}_{\in R[\mathbf{y}]}. \quad (4.14)$$

4.4 Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies

4.4.1 Généralités algébriques

Considérons à présent ce que l'on sait déjà être une algèbre (anti-isomorphe à l'algèbre d'incidence de l'ensemble totalement ordonné des entiers naturels), et même une algèbre de Fréchet si $R = \mathbb{K}$ (voir l'exemple 3.4 du chapitre 3), à savoir, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures infinies $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) = \{ M \in R^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})} : \forall i, j \in \mathbb{N}, i > j \Rightarrow M(i, j) = 0 \}$. Il s'agit bien sûr d'une sous-algèbre de $R^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ et d'un sous-module de $R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, et son groupe des inversibles $\mathfrak{TI}(\mathbb{N}, R) = \mathcal{G}(\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)) = \{ M \in \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) : M(i, i) \in \mathcal{G}(R) \forall i \in \mathbb{N} \}$. On note $\mathfrak{UNI}(\mathbb{N}, R) = \{ M \in \mathfrak{TI}(\mathbb{N}, R) : M(i, i) = 1_R \forall i \in \mathbb{N} \}$ le sous-groupe des *matrices unipotentes*⁸, et $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R) = \{ M \in \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) : M(i, i) = 0_R \forall i \in \mathbb{N} \}$ est l'idéal bilatère (propre, si $R \neq (0)$) des *matrices nilpotentes*⁹. Soit enfin, $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R) = \{ M \in \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R) : M(i, j) = 0, \forall i < j \}$ l'algèbre commutative des matrices diagonales, qui est bien entendu isomorphe à $R^{\mathbb{N}}$ avec les opérations composante par composante, et $\mathfrak{DIAG}(\mathbb{N}, R) = \mathcal{G}(\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)) = \{ D \in \mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R) : D(i, i) \in \mathcal{G}(R) \forall i \in \mathbb{N} \}$ (isomorphe au produit direct $\mathcal{G}(R^{\mathbb{N}}) = (\mathcal{G}(R))^{\mathbb{N}}$). Il est également évident que si $D \in \mathfrak{DIAG}(\mathbb{N}, R)$, alors D^{-1} est la matrice diagonale E telle que $E(i, i) = D(i, i)^{-1}$ quel que soit $i \in \mathbb{N}$.

8. Suivant la terminologie de Bourbaki (2007a), $\mathfrak{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ pourrait être nommé *groupe trigonal large inférieur (infini)*, et $\mathfrak{UNI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ le *groupe trigonal strict inférieur (infini)*.

9. Ces matrices ne sont évidemment pas nilpotentes au sens usuel du terme.

Lemme 4.15. *Le groupe $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, R)$ est produit semi-direct $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R) \ltimes \mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, R)$ de $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, R)$ par $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$, où le premier agit sur le second par automorphismes intérieurs.*

Démonstration. Soit $M \in \mathcal{TI}(\mathbb{N}, R)$. Posons $D_M \in \mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, R)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont ceux (inversibles) de M . La matrice inversible MD_M^{-1} est unipotente, et $M = (MD_M^{-1})D_M$. La fin de la démonstration est classique (il est en particulier facile de vérifier que $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, R)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$). \square

Il est facile de vérifier que $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$ et $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$ sont deux sous-algèbres de Lie de la R -algèbre de Lie¹⁰ $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)$ (pour le crochet sous-jacent à la structure d'algèbre associative de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)$), $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$ est même un idéal de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)$, et $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$ est une R -algèbre de Lie commutative (le crochet est identiquement nul).

Lemme 4.16. *L'algèbre de Lie $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)$ est le produit semi-direct $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R) \times \mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$ par l'algèbre de Lie $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$.*

Démonstration. Toute matrice triangulaire M s'écrit de façon unique comme la somme de sa diagonale D et $M - D \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$. Il est aisé de vérifier que l'application adjointe usuelle $\text{ad} : \mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R))$, où $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ désigne l'algèbre de Lie des dérivations d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , restreinte à $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$ dans $\mathfrak{der}(\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R))$. Si $M_i = N_i + D_i$, $M_i \in \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, R)$, $N_i \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$, et $D_i \in \mathfrak{diag}(\mathbb{N}, R)$, $i = 1, 2$, alors on vérifie par simple calcul que $[M_1, M_2] = \underbrace{[N_1, N_2]}_{\in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)} + \underbrace{\text{ad}_{D_1}(N_2) - \text{ad}_{D_2}(N_1)}_{=0} + \underbrace{[D_1, D_2]}_{=0}$. \square

Remarque 4.17.

1. Soit $N \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$. Alors la famille $(N^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans la topologie produit (induite par $R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$) pour R discret, et la somme $\sum_{n \geq 0} N^n \in \mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$ (car $\pi_{(i,i)}(N^0) = 1$, et $\pi_{(i,i)}(N^n) = 0$ quel que soit $n > 0$ pour chaque $i \in \mathbb{N}$). On remarque que $N^n \rightarrow 0$ dès que $n \rightarrow \infty$. Ainsi les éléments de $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$ sont topologiquement nilpotents.
2. Plus généralement, si $S(x) \in R[[x]]$. Alors la famille $(\langle S | x^n \rangle N^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans la topologie de la convergence simple pour R discret. On note la somme de cette famille $S(N) = \sum_{n \geq 0} \langle S | x^n \rangle N^n$. En d'autres termes, l'algèbre (non unitaire) des matrices nilpotentes admet un calcul formel. Dans ce cas, l'analyse développée au chapitre 3 est superflue.
3. Ici \mathbb{Q} est un sous-corps de R . Pour $M \in \mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$, on pose $M = I + N$ où I est la matrice identique et $N \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$. On a $\text{Log}(M) = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N^k$ sommable dans le produit des topologies discrètes. Très clairement $\text{Log}(M) \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, R)$. Pour les mêmes raisons de sommabilité, quel que soit $\lambda \in R$, $M^\lambda = \sum_{n \geq 0} \binom{\lambda}{n} N^n = \text{Exp}(\lambda \text{Log}(M)) \in \mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$, où $\binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-k+1)}{k!}$ est le coefficient binomial généralisé (voir Duchamp et al. (2004); Bacher (2006)).
4. Le lemme 4.15 ainsi que les points précédents de cette remarque indiquent clairement que l'analyse développée au chapitre 3 n'est nécessaire que pour traiter le cas des matrices triangulaires inversibles non unipotentes. On pourrait ainsi exprimer cela par le fait que l'analyse se loge à la frontière, exactement sur la diagonale!

10. Il s'agit simplement de la notion usuelle d'algèbre de Lie où l'on remplace le corps de base et la structure d'espace vectoriel par l'anneau R et une structure de R -module; voir Bourbaki (2007c). On prend néanmoins soin de considérer des crochets alternés (et donc nécessairement anti-commutatifs) afin d'éviter des pathologies dues à une torsion additive d'ordre deux, cf. Kaplansky (1971).

4.4. Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies

4.4.2 Quelques isomorphismes

D'après l'exemple 3.4, on sait que $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ est isomorphe à l'algèbre d'incidence de l'opposé du bon ordre \mathbb{N} . À l'aide des constructions vues au numéro 4.3, d'autres isomorphismes sont maintenant exhibés.

Composition ombrale : Convenons d'identifier $R^{(\mathbb{N})}$ avec l'espace sous-jacent à $R[\mathbf{x}]$ à l'aide de $\delta_n \mapsto \mathbf{x}^n$. Considérons l'ensemble des éléments $(p_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ de $(R[\mathbf{x}])^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\deg(p_n(\mathbf{x})) \leq n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (il s'agit d'une version de la notion de suites de polynômes rappelée dans la remarque 4.14 relaxée en permettant l'inégalité large plutôt que l'égalité pour le degré des polynômes; une telle suite est appelée dans ce texte *suite incidente de polynômes*). La restriction de l'application Θ de la preuve du lemme 4.13 fournit un isomorphisme d'algèbres de $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ dans $(R[\mathbf{x}])^{\mathbb{N}}$; son image est l'ensemble des suites incidentes de polynômes.

Séries génératrices de polynômes : On peut également identifier les éléments de $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ avec les éléments de $R\langle y, x \rangle$ (où $x \neq y$) de la forme $\sum_{n \geq 0} p_n \mathbf{x}^n$, où $p_n \in R[y]$ ($n \in \mathbb{N}$) et $\deg(p_n(y)) \leq n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (une telle série peut être appelée *séries incidente de polynômes*). Dans ce cas, la composition ombrale donne

$$\left(\sum_{n \geq 0} p_n \mathbf{x}^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} q_n \mathbf{x}^n \right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} \langle p_n | y^k \rangle q_k \right) \mathbf{x}^n. \quad (4.15)$$

Produit tensoriel : Considérons l'ensemble des éléments de $R[\mathbf{x}] \widehat{\otimes}_R R[\mathbf{x}]$ de la forme $\sum_{n \geq 0} \mathbf{x}^n \otimes p_n(\mathbf{x})$ où $(p_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite incidente de polynômes (comme au premier point). Avec la composition ombrale (également donnée dans la remarque 4.14)

$$\left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{x}^n \otimes p_n(\mathbf{x}) \right) \left(\sum_{n \geq 0} \mathbf{x}^n \otimes q_n(\mathbf{x}) \right) = \sum_{n \geq 0} \mathbf{x}^n \otimes \left(\sum_{k \geq 0} \langle p_n(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^k \rangle q_k(\mathbf{x}) \right) \quad (4.16)$$

on obtient une sous-algèbre isomorphe à $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$.

4.4.3 Propriétés topologiques

La première observation est que l'algèbre de Fréchet $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est pas une algèbre de Banach pour la topologie produit (la preuve de ce fait est identique à celle donnée dans la remarque 4.9). Une autre manière de vérifier cela est de montrer que $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est pas ouvert. En fait on a un résultat un peu plus fort.

Proposition 4.18. *Le groupe $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. Supposons au contraire que $\widehat{\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})}$ soit non vide. Soit $M \in \widehat{\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})}$. Alors il existe U un ouvert de $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ tel que $M \in U \subseteq \mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Comme U est un ouvert, il existe F sous-ensemble fini non vide de \mathbb{N} tel que $M \in \bigcap_{(i,j) \in F} \pi_{(i,j)}^{-1}(U_{(i,j)}) \subseteq U$ avec $U_{(i,j)}$ ouvert de \mathbb{K} . Si

on choisit $M \in \text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ tel que $M(i, j) = 0$ quel que soit $(i, j) \notin F$ et $M(i, j) \in U_{(i,j)}$ quel que soit $(i, j) \in F$, alors $M \in \bigcap_{(i,j) \in F} \pi_{(i,j)}^{-1}(U_{(i,j)}) \subseteq U \subseteq G$. Cependant comme F est fini, il existe

$i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(i_0, i_0) \notin F$. De ce fait M n'est pas inversible, ce qui est une contradiction. Donc

$\widehat{\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})} = \emptyset$. □

Comme $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est pas vide, il n'est pas ouvert. Mais il n'est pas fermé non plus.

Proposition 4.19. *Le groupe $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est pas fermé.*

Démonstration. On pose $D_n \in \mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ donné par $D_n(0,0) = \frac{1}{n}$, $D_n(i,i) = 1$ quel que soit $i > 0$, et $D_n(i,j) = 0$ pour tout $(i,j) \neq (0,0)$, $i \neq j$. Clairement la suite $(D_n)_n$ converge vers la matrice diagonale D telle que $D(0,0) = 0$, et tous les autres termes diagonaux sont égaux à 1. Il en résulte que $D \notin \mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. \square

Les groupes $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des groupes topologiques (pour la topologie produit de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$) séparés (en particulier, l'inversion est continue, cf. Waelbroeck (1971); Mallios (1986)). Le groupe des matrices unipotentes est fermé¹¹ donc complet. L'idéal $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est un groupe additif et un monoïde topologiques séparés : c'est en fait une R -algèbre (sans identité) topologique Hausdorff; il est également fermé (la preuve est similaire à celle de fermeture de $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$), donc complet (donc un espace de Fréchet). L'algèbre $\mathfrak{diag}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une algèbre topologique séparée et fermée (algébriquement isomorphe et homéomorphe à l'algèbre de Fréchet $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pour les opérations composante par composante, cf. Fragoulopoulou (2005)). Son groupe des inversibles $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ n'est ni ouvert (il est d'intérieur vide) ni fermé (les preuves sont tout à fait similaires à celles des propositions 4.18 et 4.19). En revanche $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, de même que $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, est fermé dans $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

4.4.4 Limites projectives

Soit R un anneau commutatif (unitaire) quelconque. Pour $k \in \mathbb{N}$, notons :

- $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R)$: algèbre des matrices carrées triangulaires inférieures indicées sur $[0 \cdots k]$ (qui est évidemment une algèbre de Lie).
- $\mathfrak{nil}([0 \cdots k], R)$: idéal bilatère de $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R)$ des matrices nilpotentes (sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R)$).
- $\mathfrak{diag}([0 \cdots k], R)$: algèbre des matrices diagonales, isomorphe (en tant qu'algèbre pour les opérations composante par composante) à R^{k+1} (sous-algèbre de Lie, commutative, de $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R)$).
- $\mathcal{TI}([0 \cdots k], R)$: groupe des inversibles de $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R)$.
- $\mathcal{UN}([0 \cdots k], R)$: groupe des matrices carrées unipotentes indicées par $[0 \cdots k]$.
- $\mathcal{DIAG}([0 \cdots k], R)$: groupe des inversibles de $\mathfrak{diag}([0 \cdots k], R)$.

Il est clair qu'en tant qu'algèbres de Lie $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], R) = \mathfrak{nil}([0 \cdots k], R) \times \mathfrak{diag}([0 \cdots k], R)$ (produit semi-direct des algèbres de Lie), et qu'en tant que groupes, $\mathcal{TI}([0 \cdots k], R) = \mathcal{UN}([0 \cdots k], R) \times \mathcal{DIAG}([0 \cdots k], R)$ (produit semi-direct de groupes). Par ailleurs (avec $R = \mathbb{K}$), $\mathcal{TI}([0 \cdots k], \mathbb{K})$, $\mathcal{DIAG}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ et $\mathcal{UN}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ sont des groupes de Lie (comme sous-groupes fermés de $\mathcal{GL}_{k+1}(\mathbb{K})$, groupe des matrices inversibles¹² de taille $k+1$ à coefficients dans \mathbb{K} , lorsque ce dernier est équipé de la topologie induite par la norme d'opérateurs sur \mathbb{K}^{k+1} de $\mathfrak{gl}_{k+1}(\mathbb{K})$) dont les algèbres de Lie sont respectivement $\mathfrak{ti}([0 \cdots k], \mathbb{K})$, $\mathfrak{diag}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ et $\mathfrak{nil}([0 \cdots k], \mathbb{K})$.

Pour chaque $X \in \{ \mathfrak{ti}, \mathfrak{nil}, \mathfrak{diag}, \mathcal{TI}, \mathcal{UN}, \mathcal{DIAG} \}$, et chaque $k \in \mathbb{N}$, posons $X_k = X([0 \cdots k], R)$. On définit également pour chaque $\ell \leq k$ (ℓ et k entiers), l'application $\pi_{\ell,k} : X_k \rightarrow X_\ell$ qui associe à une matrice $M \in X_k$, la matrice $(M(i,j))_{(i,j) \in [0 \cdots \ell]^2} \in X_\ell$. Il est évident que si X_k est une algèbre – avec ou sans unité – alors $\pi_{\ell,k}$ est un homomorphisme d'algèbres, qui respecte l'identité lorsqu'il y en a une, et si X_k est un groupe, alors $\pi_{\ell,k}$ est un homomorphisme de groupes.

11. Supposons que $M_n \in \mathcal{UN}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et que $M_n \rightarrow M \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Quel que soit $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, et quel que soit $\epsilon_{(i,j)} > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n > k$, $|M_n(i,j) - M(i,j)| < \epsilon_{(i,j)}$. En particulier, pour tout $i < j$, $M(i,j) = 0$, et pour $i = j$, $M(i,j) = 1$. Il en résulte que $M \in \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

12. Plus généralement, étant donné un anneau R , et n un entier strictement positif, on note $\mathcal{GL}_n(R)$ le groupe des éléments de $\mathfrak{gl}_n(R)$ inversibles. Évidemment, $\mathcal{GL}_n(R) \cong_{\text{grp}} \mathcal{G}(\text{End}_{R\text{-Mod}}(R^n))$.

4.4. Algèbre de Fréchet des matrices triangulaires inférieures infinies

On vérifie facilement que $(X_k, \pi_{\ell,k})_{0 \leq \ell \leq k < \infty}$ nous fournit un système projectif d'algèbres ou de groupes (cela dépend de X).

Lemme 4.20. *Pour $X \in \{ \text{ti}, \text{nil}, \text{diag}, \mathcal{TI}, \mathcal{U}\mathcal{N}\mathcal{I}, \mathcal{DIAG} \}$, $X(\mathbb{N}, R) = \varprojlim_k (X_k, \pi_{\ell,k})$ (limite projective dans la catégorie $R\text{-Alg}$, éventuellement sans unité, ou dans $\mathcal{G}rp$).*

Démonstration. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons $p_k: \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k \rightarrow X_k$ la projection canonique. La limite projective $(X_k, \pi_{\ell,k})_{0 \leq \ell \leq k < \infty}$ peut être réalisée par $X' = \{ m \in \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k : \pi_{\ell,k}(p_k(m)) = p_\ell(m) \}$.

Nous montrons qu'elle est isomorphe à $X(\mathbb{N}, R)$. Pour cela introduisons l'application (morphisme dans la catégorie qui convient)

$$\begin{aligned} \Phi: X(\mathbb{N}, R) &\rightarrow X' \\ M &\mapsto (\pi_k(M))_{k \in \mathbb{N}} \end{aligned} \quad (4.17)$$

où l'on rappelle que π_k désigne l'application qui envoie une matrice infinie (indicée sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) sur sa restriction à $[0 \cdots k] \times [0 \cdots k]$ (voir l'exemple 3.4 du numéro 3.3 du chapitre 3). Il s'agit tout d'abord de montrer que Φ est bien à valeurs dans X' . Soient ℓ, k avec $\ell \leq k$, et $M \in X(\mathbb{N}, R)$. On a $\pi_{\ell,k}(p_k(\Phi(M))) = \pi_{\ell,k}(\pi_k(M)) = \pi_\ell(M) = p_k(\Phi(M))$. Soit $M \in \ker \Phi$ (on note e l'élément neutre de $X(\mathbb{N}, R)$ qui peut être 0 ou 1 selon que $X(\mathbb{N}, R)$ est une algèbre ou un groupe). Cela signifie que $\pi_k(M)$ est l'élément neutre de $X([0 \cdots k], R)$ pour tout k , et donc que M est l'identité de $X(\mathbb{N}, R)$ de sorte que Φ est injective. Pour $m \in X'$, on définit $M_m \in R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ tel que quel que soit i , $M(i, j) = p_i(m)(i, j)$ pour $j \in [0 \cdots i]$, et $M(i, j) = 0$ pour tout $j > i$. Clairement $M \in X(\mathbb{N}, R)$ et $\Phi(M) = m$. \square

Remarque 4.21.

1. Pour $R = \mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$, on déduit immédiatement du lemme 4.20 que $X(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est une algèbre de Fréchet¹³ pour $X \in \{ \text{ti}, \text{nil}, \text{diag} \}$ (sans unité pour $X = \text{nil}$).
2. Bien évidemment, $\text{diag}(\mathbb{N}, R)$ est isomorphe à l'algèbre produit $R^{\mathbb{N}}$.
3. Comme $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ (respectivement, $\text{diag}(\mathbb{N}, R)$) est la limite projective de $\text{ti}([0 \cdots k], R)$ (respectivement, $\text{diag}([0 \cdots k], R)$), il résulte directement du lemme 3.31 (chapitre 3) que $\mathcal{G}(\text{ti}(\mathbb{N}, R)) = \mathcal{TI}(\mathbb{N}, R)$ (respectivement, $\mathcal{G}(\text{diag}(\mathbb{N}, R)) = \mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, R) \cong_{\mathcal{A}b} (\mathcal{G}(R))^{\mathbb{N}}$) est la limite projective des groupes $\mathcal{G}(\text{ti}([0 \cdots k], R)) = \mathcal{TI}([0 \cdots k], R)$ (respectivement, $\mathcal{G}(\text{diag}([0 \cdots k], R))$ est le groupe $\mathcal{DIAG}([0 \cdots k], R) \cong_{\mathcal{A}b} \mathcal{G}(R)^k$).

Nous pouvons utiliser la caractérisation contenue dans le lemme 4.20 pour retrouver les applications exponentielle et logarithme introduites au chapitre 3, numéro 3.4.3. Pour cela introduisons les notations suivantes : soient $X \in \{ \text{ti}, \text{nil}, \text{diag} \}$, $Y(\text{ti}) = \mathcal{TI}$, $Y(\text{nil}) = \mathcal{U}\mathcal{N}\mathcal{I}$, $Y(\text{diag}) = \mathcal{DIAG}$ (de sorte que $Y(X) \in \{ \mathcal{TI}, \mathcal{U}\mathcal{N}\mathcal{I}, \mathcal{DIAG} \}$ et que $Y(X)_k$ soit défini comme ci-avant), et pour $k \in \mathbb{N}$, posons $\text{exp}_k: X_k \rightarrow Y(X)_k$, l'application exponentielle usuelle dans des groupes de Lie banachiques (en dimension finie), et $\text{Exp}_k: X(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow Y(X)_k$ donnée par $\text{Exp}_k(M) = \text{exp}_k(\pi_k(M))$. De même, on pose $\text{log}_k: Y(X)_k \rightarrow X_k$ la fonction (partiellement définie) $\text{log}_k(M) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1_k - M)^n$ (où 1_k est la matrice identité de $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$) pour M telle que $\nu_k(1_k - M) < 1$ (ν_k est le rayon spectral dans $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$, cf. le numéro 3.4.6 au chapitre 3), donc le logarithme usuel dans le cadre des algèbres de Banach, et soit enfin $\text{Log}_k: Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow X_k$ donné par $\text{Log}_k(M) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1_k - \pi_k(M))^n = \text{log}_k(\pi_k(M))$ (défini si $\nu_k(1_k - \pi_k(M)) < 1$).

13. Ce n'est pas une nouvelle : nous le savions déjà depuis le numéro 4.4.3.

Remarquons immédiatement que pour tout $\ell \leq k$, et tout $M \in X(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\pi_{\ell,k}(Exp_k(M)) = \pi_{\ell,k}(exp_k(\pi_k(M))) = \sum_{n \geq 0} \frac{\pi_{\ell,k}(\pi_k(M))^n}{n!} = exp_\ell(\pi_\ell(M)) = Exp_\ell(M)$ (par continuité de l'homomorphisme $\pi_{\ell,k}$). Autrement dit, le diagramme (4.18) commute (pour $\ell \leq k$).

$$\begin{array}{ccc}
 X(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{Exp_k} & Y(X)_k \\
 & \searrow^{Exp_\ell} & \downarrow \pi_{\ell,k} \\
 & & Y(X)_\ell
 \end{array} \tag{4.18}$$

De même, $\pi_{\ell,k}(Log_k(M)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} (\pi_{\ell,k}(1_k - \pi_k(M)))^n = log_\ell(\pi_\ell(M)) = Log_\ell(M)$ (sous les conditions que $\nu_i(1_i - \pi_i(M)) < 1$ pour $i = \ell, k$, et toujours par continuité de l'homomorphisme $\pi_{\ell,k}$). Cela assure ainsi la commutativité du diagramme (4.19) (pour $\ell \leq k$).

$$\begin{array}{ccc}
 Y(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{Log_k} & X_k \\
 & \searrow^{Log_\ell} & \downarrow \pi_{\ell,k} \\
 & & X_\ell
 \end{array} \tag{4.19}$$

On en déduit donc – d'après le problème universel de la limite projective – l'existence des fonctions suivantes :

Lemme 4.22. *Avec les notations introduites ci-avant,*

1. *Il existe une, et une seule, application $\mathcal{E}: X(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ telle que $\pi_k \circ \mathcal{E} = Exp_k$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*
2. *Il existe une, et une seule, fonction (définie pour tout $M \in Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ tel que $\nu_k(1_{\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})} - M) < 1$ pour tout entier naturel k) $\mathcal{L}: Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow X(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ telle que $\mathcal{L} \circ \pi_k = Log_k$ quel que soit $k \in \mathbb{N}$.*

Il s'avère, comme on pouvait s'y attendre, que E et L coïncident respectivement avec les fonctions Exp et Log introduites au chapitre 3 (numéro 3.4.3).

Lemme 4.23. *Nous avons l'égalité entre fonctions (avec égalité des domaines) :*

1. $Exp = \mathcal{E}$.
2. $Log = \mathcal{L}$.

Démonstration. Commençons par le cas de l'exponentielle. Soit $M \in X(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Nous avons $\pi_k(Exp(M)) = \pi_k\left(\sum_{n \geq 0} \frac{M^n}{n!}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{\pi_k(M)^n}{n!} = Exp_k(M)$ (par continuité de la flèche π_k dans la topologie d'espaces de Fréchet). Par unicité de \mathcal{E} , $Exp = \mathcal{E}$. Soit maintenant $M \in Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ tel que $\nu_k(1_{\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})} - M) < 1$ pour tout k . Nous avons $\pi_k(Log(M)) = \pi_k\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(1_{\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})} - M)^n}{n}\right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (1_k - \pi_k(M))^n = Log_k(M)$. Encore par unicité, $Log = \mathcal{L}$. □

4.5. Conclusion et perspectives

En termes diagrammatiques, la commutativité de chaque diagramme de (4.20) est notamment garantie par le lemme 4.23 (pour tout entier k).

$$\begin{array}{ccccc}
 X(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{Exp}} & Y(X)(\mathbb{N}, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\text{Log}} & X(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \\
 & \searrow \text{Exp}_k & \downarrow \pi_k & \searrow \text{Log}_k & \downarrow \pi_k \\
 & & Y_k & & X_k
 \end{array} \quad (4.20)$$

Remarque 4.24. *Les développements basés sur l'analyse ne sont pas nécessaires pour traiter le cas de l'exponentielle et du logarithme de $\text{nil}(\mathbb{N}, R)$ et $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$ pour R un anneau unitaire contenant \mathbb{Q} comme sous-corps. En effet, très clairement les applications $\mathcal{E}: \text{nil}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$ et $\mathcal{L}: \mathcal{UN}(\mathbb{N}, R) \rightarrow \text{nil}(\mathbb{N}, R)$ peuvent être définies comme ci-avant sans utiliser la topologie de \mathbb{K} : il suffit de munir $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$ et $\text{nil}(\mathbb{N}, R)$ des topologies induites par la topologie initiale de $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$ relative aux applications π_k , et avec R discret ; en effet très clairement $\text{exp}_k: \text{nil}([0 \cdots k], R) \rightarrow \mathcal{UN}([0 \cdots k], R)$ est calculé par une somme finie¹⁴ puisque $\text{nil}([0 \cdots k], R)$ est un groupe nilpotent de classe $\leq k$ (et même de classe k si R n'est pas trivial ; cf. Bourbaki (2007a)) et, de même, $\text{log}_k: \mathcal{UN}([0 \cdots k], R) \rightarrow \text{nil}([0 \cdots k], R)$ (défini sur tout $\mathcal{UN}([0 \cdots k], R)$) est également calculé par une somme finie pour les mêmes raisons. Par ailleurs le domaine du logarithme est alors dans ce cas $\mathcal{UN}(\mathbb{N}, R)$ tout entier. Ce type de développements apparaît dans le cadre général des groupes nilpotents (généralisés) et leurs algèbres de Lie pour lequel aucune structure différentielle analytique n'est requise. Le lecteur pourra consulter les écrits de référence sur ce sujet tels que Mal'cev (1948); Lazard (1954); Kurosh (1956); Quillen (1969); Warfield, Jr. (1976). A contrario, le cadre dédié à l'étude des groupes de Lie tels que $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ou $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ est celui des groupes de Lie-Fréchet (voir Hamilton (1982); Galanis (1996); Omori (1997)).*

4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié plusieurs algèbres de matrices infinies. La première¹⁵, celle des algèbres finies en ligne, se trouve être non topologique (la multiplication n'est pas continue) et donc insuffisante pour effectuer des calculs de sommes infinies (si importantes dans ce manuscrit), elle permet néanmoins d'introduire la notion de matrice d'une application linéaire.

Très vite, nous nous sommes intéressés à l'algèbre des matrices triangulaires inférieures infinies, laquelle possède le bon goût d'être une algèbre de Fréchet. Par le chapitre 3, nous savons en particulier que l'exponentiation y est bien définie.

Cette algèbre de Fréchet possède des sous-algèbres (matrices nilpotentes et diagonales), et des sous-groupes d'unités (matrices unipotentes et diagonales inversibles), qui permettent d'établir une correspondance algèbre de Lie/groupe de Lie. On note, en particulier, que les calculs d'exponentielles et de logarithmes dans le cas des matrices nilpotentes/unipotentes ne nécessitent pas d'analyse (sous la forme de la topologie de Fréchet) mais simplement la topologie, de type algébrique, produit de copies de la topologie discrète sur le corps de base (l'analyse se localise dans la diagonale des matrices infinies!).

On établit également des isomorphismes algébriques vers des structures combinatoires légèrement modifiées (calcul ombral, et produit tensoriel complété de façon gauche... ou droite). Seulement, nous n'avons pas poussé plus en avant leur étude, notamment l'interprétation de certains de nos résultats en termes de calcul ombral (généralisé), ou encore l'utilisation de nos

14. Pour faire pédant, on pourrait dire « $\text{exp}_k(M)$ converge dans la topologie discrète quel que soit $M \in \text{nil}([0 \cdots k], R)$ ».

15. Plus précisément, la plus grande pour l'ordre d'inclusion de sous-algèbres.

séries génératrices incidentes de polynômes. Par ailleurs, il semble intéressant d'étudier en toute généralité la notion d'opérateurs « triangulaires » sur un espace de Fréchet (probablement liée aux espaces de Fréchet plats de Hamilton (1982)), et d'établir le fait qu'ils forment, ou non, une algèbre de Fréchet. De plus, et toujours dans le cadre généralisé, nous pourrions observer les opérateurs nilpotents et unipotents, ainsi que les structures de groupes de Lie-Fréchet et celles liées aux travaux de Lazard, dans ce contexte. Enfin, il est possible d'envisager une autre topologie pour l'ensemble des matrices infinies diagonales sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , à savoir la topologie de somme directe de l'ensemble des matrices à diagonale nulle avec le produit des topologies discrètes sur le corps de base, et de l'ensemble des matrices diagonales avec la topologie de Fréchet. Cependant dans ce cas le corps de base porte deux topologies, et *a priori* on ne dispose plus d'un espace vectoriel topologique.

Ce chapitre offre les définitions de base concernant la matrice infinie d'une application linéaire ou encore l'opérateur associé à une matrice infinie utiles au chapitre suivant. En effet, au chapitre 5, nous étudions le dual topologique de l'espace de toutes les fonctions définies sur un ensemble quelconque, et à valeurs dans un corps topologique (séparé), muni de la topologie produit. Ceci conduit à une caractérisation des opérateurs linéaires et continus sur ce type d'espaces en termes de matrices finies en ligne (telles qu'introduites dans le présent chapitre).

Chapitre 5

Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

Cependant, par-delà le gouffre de l'espace, des esprits qui sont à nos esprits ce que les nôtres sont à ceux des bêtes qui périssent, des intellects vastes, calmes et impitoyables, considéraient cette terre avec des yeux envieux, dressaient lentement et sûrement leurs plans pour la conquête de notre monde.

HERBERT GEORGE WELLS, *La Guerre des mondes*

Sommaire

5.1	Introduction	59
5.2	Quelques notations	61
5.3	Le théorème principal	62
5.4	La preuve du théorème 5.3	63
5.5	Les conséquences du théorème 5.3 sur les opérateurs linéaires continus	66
5.6	Dual topologique et complétion	68
5.7	Topologie faible	69
5.8	Conclusion et perspectives	70

Ce chapitre est tiré de Poinso (2011b). Les positions des fonctions (séries) et des fonctions à support fini (polynômes) sont échangées dans l'application de dualité par rapport à la notation employée dans le document susmentionné.

5.1 Introduction

Contrairement à ce que pourrait laisser penser le qualificatif « formel », certaines manipulations de séries formelles nécessitent des notions topologiques afin de valider des calculs, notamment des sommes de familles sommables. Par exemple, la substitution usuelle des séries sans terme constant, ou l'existence d'une opération étoile liée à la formule d'inversion de Möbius (*cf.* le chapitre 6), sont habituellement traitées soit à l'aide d'une fonction d'ordre (une valuation) ou, de façon équivalente, en disant que seul un nombre fini de termes contribue au calcul à chaque degré. Dans les deux cas c'est la topologie induite par la filtration usuelle (un type particulier de topologie de Krull) : l'ordre des sommes partielles doit croître indéfiniment pour que la somme soit définie et que l'opération soit légale. Assez naturellement, d'autres topologies peuvent être

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

envisagées : par exemple si X est un ensemble infini, alors la complétion de l'algèbre $R\langle X \rangle$ des polynômes en des variables non commutatives pour la topologie de la valuation relative à l'idéal engendré par l'alphabet n'est pas $R\langle\langle X \rangle\rangle$ mais l'ensemble des séries formelles dont chaque composante homogène est un polynôme ; en particulier la somme de l'alphabet $\sum_{x \in X} x$ n'appartient pas à ce complété.

Pour prendre en compte des séries dont les composantes homogènes ne sont pas astreintes à être des polynômes, il faut considérer le complété pour la topologie produit, ou bien graduer l'alphabet de sorte à n'avoir qu'un nombre fini de lettres d'un degré donné. La topologie choisie, on le voit, conduit à des constructions manifestement très différentes¹. Lorsque des questions d'analyse fonctionnelle, et plus simplement d'analyse (rayon de convergence, équation différentielle et convergence des solutions formelles), sont soulevées, la topologie discrète de l'anneau ou du corps de base n'est plus pertinente ; la structure de corps valué (non discret, voir Bourbaki (2007e)), devient alors incontournable. D'autres topologies (par exemple, des limites projectives) peuvent être employées pour des besoins spécifiques. En particulier, au chapitre 6 nous utilisons deux topologies (en général) distinctes sur l'algèbre (contractée) large d'un monoïde à zéro, qui en tant que module, n'est autre que l'ensemble des applications (sans restriction sur le support) du monoïde privé de son zéro à valeurs dans un anneau.

Étant donné une topologie, compatible avec les opérations algébriques, de l'espace des séries formelles à coefficients dans un corps topologique, il peut être utile de considérer des endomorphismes continus puisqu'ils possèdent la propriété de commuter aux sommes infinies. Assez étonnamment à première vue, pour une classe conséquente de topologies (à savoir, les topologies produits par rapport aux topologies séparées sur le corps de base), il apparaît que les applications linéaires continues peuvent être représentées comme des matrices (bi-)infinies d'un genre particulier² (chaque « ligne » est finiment supportée) et ce, indépendamment de la topologie produit choisie. En d'autres termes, une application linéaire peut être représentée sous la forme d'une matrice à « lignes » finies (voir le chapitre 4) si, et seulement si, elle est continue pour une (et alors pour toutes (!) les) topologie(s) produit(s). Il résulte directement de cela que pour démontrer la continuité d'un opérateur, il suffit de le faire pour la topologie la mieux à propos. Réciproquement, si un opérateur est donné sous la forme d'une matrice infinie du type convenable, sa continuité – relativement à toutes les topologies produits relatives à un corps de base Hausdorff – tombe alors gratuitement (notons au passage que le nombre de topologies de corps distinctes d'un corps infini est la puissance du cardinal de l'ensemble des parties de celui du corps, voir la remarque 5.14, ce qui fait, et le doute n'est pas permis, un nombre très élevé de topologies!).

L'explication de ce phénomène repose sur le fait que le dual topologique de l'espace des séries formelles est le même quelle que soit la topologie produit choisie : il s'agit de l'espace des polynômes, ou, plus rigoureusement, des fonctions à support fini. Ce théorème (théorème 5.3), énoncé au numéro 5.3 et prouvé au numéro 5.4, constitue le résultat principal de ce chapitre. Plusieurs de ses conséquences, notamment à l'endroit des opérateurs linéaires et continus, sont ensuite développées. On démontre en particulier que l'espace $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$ des applications linéaires et continues est isomorphe au complété, pour une certaine topologie (voir le numéro 4.3.4 au chapitre 4), du produit tensoriel $\mathbb{K}^{(X)} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^Y$ étendant de la sorte le résultat connu en dimension finie. Cela repose sur l'algèbre des matrices infinies à lignes finies (voir le nu-

1. Notons que cet aspect topologique est bien souvent négligé, et parfois même ignoré, y compris dans les plus brillants des manuels de combinatoire (ce qui ne retire rien de leur utilité ni de leur élégance). À cet égard il suffit de lire la phrase « Algebraically inclined readers can think of $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ as the completion of the monoid algebra of the free monoid X^* with respect to the ideal generated by X . » page 196 de Stanley (1999) (pour contourner cette difficulté il suffit d'ajouter l'hypothèse de finitude de l'alphabet ou bien, si l'alphabet est infini, de distinguer la construction de l'espace des séries de sa « topologisation » : compléter les polynômes par la topologie produit, puis munir l'ensemble obtenu de la topologie usuelle de l'ordre des séries).

2. Une espèce !

5.2. Quelques notations

méro 4.3 du chapitre 4), qui se trouve être isomorphe, en tant qu'algèbre, à celle des applications linéaires et continues ; l'algèbre de ces matrices jouera aussi un rôle fondamental au chapitre 7.

Dans ce chapitre, la plupart de nos propos sont relatifs à l'espace linéaire des séries (ou des polynômes), raison pour laquelle on emploie de préférence les termes de « fonctions » et de « fonctions à support fini » au lieu de « séries » et « polynômes ». On s'autorise toutefois d'utiliser les deux dernières expressions en tant que synonymes.

Organisation du chapitre

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans le numéro 5.2 sont présentées les notations de base relatives à la dualité topologique entre fonctions et fonctions à support fini. Au numéro 5.3 est énoncé le théorème principal de ce chapitre, à savoir, l'isomorphisme (linéaire) entre le dual topologique de l'espace \mathbb{K}^X (avec la topologie produit, et \mathbb{K} un corps topologique séparé) et l'espace $\mathbb{K}^{(X)}$ des fonctions finiment supportées. La preuve de ce théorème est donnée sous la forme d'une série de lemmes au numéro 5.4. Les conséquences sur les opérateurs linéaires et continus de \mathbb{K}^X dans \mathbb{K}^Y sont étudiées au numéro 5.5 ; en particulier, on y montre que l'algèbre des matrices à lignes finies est exactement l'algèbre des opérateurs linéaires et continus (quelle que soit la topologie de corps séparée sur \mathbb{K}). Le chapitre est terminé par un résultat mineur concernant le dual (topologique) faible (voir le numéro 5.7).

5.2 Quelques notations

Ici, comme souvent dans ce texte, les lettres « R » et « \mathbb{K} » désignent respectivement un anneau commutatif unitaire, avec 1_R son identité (et 0_R l'identité additive), et un corps (commutatif, de cardinal comme de caractéristique quelconques). Les lettres « X » et « Y » représentent des ensembles. La *dual algébrique* $\text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, R)$ d'un R -module M (où R est traité comme un module sur lui-même) est dénoté par M^* . Lorsque $R \in \mathcal{O}(\text{AnnTop})$, *i.e.*, R est un anneau topologique (voir, au chapitre 2, le numéro 2.6), et $M \in \mathcal{O}(R\text{-ModTop})$ (en d'autres termes, M est un R -module topologique), alors M' désigne le *dual topologique* de M , soit le R -sous-module $\text{Hom}_{R\text{-ModTop}}(M, R)$ de M^* des formes linéaires et continues³.

Remarque 5.1. *Malgré la confusion qui pourrait en découler, on s'autorise à noter « 0 » l'application identiquement nulle, i.e., le zéro 0_{R^X} du R -module R^X .*

Introduisons à présent l'*application de dualité* (ou *d'évaluation*) usuelle, fondamentale au chapitre 8,

$$\begin{aligned} \text{ev}: R^X \otimes_R R^{(X)} &\rightarrow R \\ f \otimes p &\mapsto \sum_{x \in X} f(x)p(x). \end{aligned} \tag{5.1}$$

De façon traditionnelle, elle est vue comme une application R -bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ appelée *accouplement* (ou parfois *couplage*) de *dualité* ou *forme bilinéaire canonique* (voir Köthe (1966); Bourbaki (2007a)), *i.e.*,

$$\text{ev}(f \otimes p) = \langle f | p \rangle.$$

Cette forme bilinéaire joue un rôle éminemment important dans les travaux de Steven Roman concernant le calcul ombral (Roman (1984)); elle fut aussi employée par Richard P. Stanley (Stanley (1988)) dans son étude des « ensembles partiellement ordonnés différentiels » ainsi que par Gérard H. E. Duchamp et Christophe Reutenauer afin de démontrer une conjecture d'Alain Connes (Duchamp et Reutenauer (1997)). Il va de soi qu'il s'agit de l'extension linéaire

3. De façon triviale, M^* est le dual topologique de M , quand M et R possèdent tous deux la topologie discrète.

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

de l'application ensembliste $x \in X \mapsto \pi_x \in (R^X)^*$, qui associe à x la projection suivant x , introduite au chapitre 2, numéro 2.4, puisque pour chaque $x \in X$, $\text{ev}(f \otimes \delta_x) = \langle f \mid \delta_x \rangle = f(x)$ (d'où le nom porté par ev), et ainsi $\pi_x : f \mapsto \langle f \mid \delta_x \rangle$ est la projection de R^X sur $R\delta_x \cong_{R\text{-Mod}} R$. L'application de dualité dispose de propriétés évidentes de non dégénérescence :

1. pour tout $p \in R^{(X)} \setminus \{0\}$, il existe $f \in R^X$ tel que $\langle f \mid p \rangle \neq 0_R$,
2. pour tout $f \in R^X \setminus \{0\}$, il existe $p \in R^{(X)}$ tel que $\langle f \mid p \rangle \neq 0_R$.

Remarque 5.2. *La première propriété de non dégénérescence signifie que $R^{(X)}$ s'identifie à un sous-module du dual algébrique de R^X , alors que la seconde propriété de non dégénérescence implique que R^X se plonge comme sous-module du dual algébrique de $R^{(X)}$. Un résultat classique entraîne que R^X est en fait isomorphe au dual algébrique de $R^{(X)}$. Ainsi $S \mapsto \langle S \mid \cdot \rangle$ est non seulement un plongement de R^X dans $(R^{(X)})^*$ mais également un isomorphisme R -linéaire.*

5.3 Le théorème principal

L'objectif de ce chapitre est de démontrer le résultat énoncé ci-après, puis d'observer quelques unes de ses conséquences.

Théorème 5.3. *Soit \mathbb{K} un corps topologique séparé⁴, et X un ensemble. Alors, le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ de \mathbb{K}^X , pour la topologie produit sur ce dernier espace, est isomorphe (comme espace vectoriel sur \mathbb{K}) à $\mathbb{K}^{(X)}$ (en abrégé, $(\mathbb{K}^X)' \cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \mathbb{K}^{(X)}$).*

Démonstration. La preuve provient de l'application directe des lemmes 5.7 et 5.13 énoncés et démontrés au numéro 5.4. □

Remarque 5.4. *Stefan Banach (voir Banach (1932)) avait déjà démontré en 1932 l'isomorphisme vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})' \cong_{\mathbb{R}\text{-Vect}} \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ mais seulement dans le cas où \mathbb{R} est équipé de sa topologie naturelle.*

Afin d'illustrer la portée de ce résultat, supposons, pour un instant seulement, que \mathbb{K} soit un corps discret (on note cela \mathbb{K}_d pour montrer que le corps porte la topologie discrète), et que V soit un \mathbb{K}_d -espace vectoriel topologique. La topologie de V est dite *linéaire* si, et seulement si, elle admet une base de voisinages de zéro constituée de sous-espaces ouverts (dans cette topologie).

Proposition 5.5 (Lefschetz (1942); Dieudonné (1951)). *Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel avec une topologie linéaire. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. V est complet, et tous ses sous-espaces ouverts sont de codimension finie.
2. V est la limite projective d'espaces vectoriels discrets de dimension finie, avec la topologie de la limite projective.
3. V est isomorphe, comme \mathbb{K}_d -espace vectoriel topologique, au dual algébrique W^* d'un espace vectoriel discret W , avec la topologie de la convergence simple. De façon équivalente, V est isomorphe à \mathbb{K}_d^X , avec la topologie produit, pour un ensemble X donné.

Un espace vectoriel topologique satisfaisant l'une de ces propriétés équivalentes est dit *linéairement compact*. Ce type d'espaces n'est pas essentiel ni à ce chapitre ni à ce texte, cependant une caractérisation de leurs espaces duals est obtenue comme conséquence immédiate du théorème 5.3 : le dual topologique de tout espace vectoriel linéairement compact est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{(X)}$ de base X pour un certain ensemble X .

Il est également possible de déduire un corollaire facile qui peut être vu comme une réciproque partielle du théorème 5.3.

4. Le corps topologique peut être non discret, la seule restriction étant que sa topologie de corps ne soit pas indiscrete ou grossière.

5.4. La preuve du théorème 5.3

Corollaire 5.6. *Soient \mathbb{K} un corps topologique, et X un ensemble. Supposons que \mathbb{K}^X admette la topologie produit, et que X soit infini. Le dual topologique $(\mathbb{K}^X)'$ est isomorphe (comme \mathbb{K} -espace vectoriel) à $\mathbb{K}^{(X)}$ si, et seulement si, \mathbb{K} est séparé.*

Démonstration. Si \mathbb{K} est Hausdorff, alors d'après le théorème 5.3 $(\mathbb{K}^X)' \cong_{\mathbb{K}\text{-vect}} \mathbb{K}^{(X)}$. Concernant l'implication réciproque, supposons que l'on ait $(\mathbb{K}^X)' \cong_{\mathbb{K}\text{-vect}} \mathbb{K}^{(X)}$ et que la topologie de corps de \mathbb{K} ne soit pas séparée. Comme les topologies d'anneaux sur un corps (et en particulier les topologies de corps) ne peuvent être que séparées ou la topologie grossière (voir Warner (1989, 1993)), on peut supposer que \mathbb{K} admet la topologie triviale. Or, si R est un anneau topologique grossier, alors, par rapport à la topologie produit relative à la topologie triviale sur R , $(R^X)' = (R^X)^*$. Comme X est infini, l'égalité ne peut avoir lieu de sorte qu'une contradiction est ainsi soulevée. \square

5.4 La preuve du théorème 5.3

La preuve du théorème 5.3 est menée à travers une succession de six lemmes intermédiaires dont voici le premier.

Lemme 5.7. *Soient R un anneau (commutatif unifié), et X un ensemble. Définissons*

$$\begin{aligned} \Phi: R^{(X)} &\rightarrow R^{R^X} \\ p &\mapsto \left(\begin{array}{ccc} \Phi(p): R^X &\rightarrow R \\ f &\mapsto \langle f | p \rangle \end{array} \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Alors, pour tout $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p) \in (R^X)^$, Φ est R -linéaire et injective.*

Démonstration. Les premières et secondes assertions vont de soi. Soit $p \in R^{(X)}$ appartenant au noyau de Φ . Alors pour tout $f \in R^X$, $\Phi(p)(f) = 0$, et en particulier, pour chaque $x \in X$, $0_R = \Phi(p)(\delta_x) = \langle \delta_x | p \rangle = p(x)$, de sorte que $p = 0$. \square

Lemme 5.8. *Supposons que R soit un anneau topologique (peu importe qu'il soit ou non Hausdorff), et que R^X possède la topologie produit. Alors pour chaque $p \in R^{(X)}$, $\Phi(p)$ est continu, i.e., $\Phi(p) \in (R^X)'$.*

Démonstration. C'est clair dans la mesure où $\Phi(p)$ est une somme avec un nombre fini de multiples scalaires non nuls de projections. \square

Lemme 5.9. *Supposons que R soit un anneau topologique Hausdorff, que X soit un ensemble, et que R^X dispose de la topologie produit. Pour tout $f \in R^X$, la famille $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f .*

Démonstration. Il est suffisant de voir que pour chaque $x_0 \in X$ la famille

$$(\langle f(x)\delta_x | \delta_{x_0} \rangle)_{x \in X} = (f(x)\delta_x(x_0))_{x \in X}$$

est sommable dans R de somme $\langle f | \delta_{x_0} \rangle = f(x_0)$ ce qui est immédiat. \square

Le lemme 5.9 donne un sens, en tant que somme d'une famille sommable, à l'écriture d'une application $f \in R^X$ sous la forme $f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x$.

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

Remarque 5.10. *Le lemme 5.9 s'étend sans aucune difficulté à l'assertion suivante : Étant donné un anneau (unitaire) topologique Hausdorff, X un ensemble, $\alpha \in R^X$ une suite de dénominateurs (voir le numéro 4.2 au chapitre 4) et $f \in R^X$, si on suppose que R^X est muni de la topologie produit, alors f est la somme d'une famille sommable $(f_x \alpha_x^{-1} \delta_x)_{x \in X}$ (il suffit de prendre $f_x = f(x) \alpha_x$). On peut donc écrire f dans la « base » $(\alpha_x^{-1} \delta_x)_{x \in X}$ sous la forme d'une somme $\sum_{x \in X} f_x \alpha_x^{-1} \delta_x$ d'une famille sommable.*

Lemme 5.11. *Sous les mêmes hypothèses que celles du lemme 5.9, si $\ell \in (R^X)'$, alors l'ensemble*

$$Y_\ell = \{x \in X : \ell(\delta_x) \text{ est inversible dans } R\}$$

est fini.

Démonstration. Puisque ℓ est continue (et linéaire), et $(f(x)\delta_x)_{x \in X}$ est sommable de somme f , la famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x \in X}$ est sommable dans R de somme $\ell(f)$ pour chaque $f \in R^X$. Prenons alors pour application f :

$$f: X \rightarrow R$$

$$x \mapsto \begin{cases} \ell(\delta_x)^{-1} & \text{si } x \in Y_\ell, \\ 0_R & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.3)$$

La famille $(f(x)\ell(\delta_x))_{x \in X}$ est donc sommable de somme $\ell(f)$ dans R . D'après les propriétés de sommabilité, pour chaque voisinage U de 0_R dans R , $f(x)\ell(\delta_x) \in U$ pour tous $x \in X$ sauf un nombre fini d'entre eux (cf. Warner (1989, 1993)). Comme R a été supposé Hausdorff, il doit exister un voisinage U de 0_R pour lequel $1_R \notin U$. Si Y_ℓ n'est pas fini, alors $1_R = f(x)\ell(\delta_x) \notin U$ pour tout $x \in Y_\ell$ ce qui est une contradiction manifeste. \square

Lemme 5.12. *Soient \mathbb{K} un corps topologique Hausdorff, X un ensemble et supposons que \mathbb{K}^X soit donné avec la topologie produit. Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)^*$. Si $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$, alors $\ell(\delta_x) = 0$ pour tous, sauf un nombre fini, les éléments $x \in X$.*

Démonstration. Par le lemme 5.11, l'ensemble $\{x \in X : \ell(\delta_x) \text{ est inversible dans } \mathbb{K}\} = \{x \in X : \ell(\delta_x) \neq 0\}$ est fini. \square

Lemme 5.13. *Sous des hypothèses identiques à celles du lemme 5.12, Φ est surjective.*

Démonstration. Soit $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$. Définissons

$$p_\ell: X \rightarrow \mathbb{K}$$

$$x \mapsto \ell(\delta_x).$$
(5.4)

A priori $p_\ell \in \mathbb{K}^X$. Cependant d'après le lemme 5.12, $p_\ell \in \mathbb{K}^{(X)}$. Soit $f \in \mathbb{K}^X$. On a

$$\Phi(p_\ell)(f) = \langle f | p_\ell \rangle = \sum_{x \in X} p_\ell(x) f(x) = \sum_{x \in X} \ell(\delta_x) f(x) = \ell(f)$$

et donc $\Phi(p_\ell) = \ell$. \square

Remarque 5.14.

1. *Le dual algébrique de \mathbb{K}^X est, en général, distinct de $\mathbb{K}^{(X)}$. En effet, soit $(e_i)_{i \in I}$ une base algébrique de \mathbb{K}^X sur \mathbb{K} (l'existence d'une telle base requiert l'axiome du choix pour des ensembles X de cardinal transfini arbitrairement grand quelconque). Ainsi, chaque application $f \in \mathbb{K}^X$ peut être écrite (de façon unique) sous la forme d'une combinaison linéaire finie*

5.4. La preuve du théorème 5.3

$\sum_{i \in I} \langle f | e_i \rangle e_i$, avec $\langle f | e_i \rangle \in \mathbb{K}$ pour chaque $i \in I$ (voir au chapitre 2 le numéro 2.4).

Considérons l'application $\ell: \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}$ telle $\ell(f) = \sum_{i \in I} \langle f | e_i \rangle$. Clairement, ℓ est une forme

linéaire, c'est-à-dire un élément du dual algébrique $(\mathbb{K}^X)^*$ de \mathbb{K}^X . La famille $(\delta_x)_{x \in X}$ est linéairement indépendante (sur \mathbb{K}) dans \mathbb{K}^X . Ainsi on peut considérer une base algébrique de \mathbb{K}^X qui étend $\{\delta_x: x \in X\}$. Maintenant la forme linéaire correspondante ℓ est non nulle pour chaque δ_x . Il en résulte que si X est infini, alors ℓ n'appartient pas à l'image de Φ , ou, en d'autres termes, $\ell \notin (\mathbb{K}^X)'$. En particulier, dès que \mathbb{K} est un corps topologique séparé, que \mathbb{K}^X dispose de la topologie produit, et que X est infini, ℓ est discontinue en zéro (et donc sur tout \mathbb{K}^X).

2. Un corps topologique possède une topologie (d'anneau) qui est soit Hausdorff, soit triviale. Il semble que cela laisse peu de choix. En fait, on sait que tout corps infini \mathbb{K} admet $2^{2^{|\mathbb{K}|}}$ topologies distinctes (voir Kiltinen (1973); Podewski (1973)).
3. Soit R un anneau discret, et X un ensemble. Rappelons que X^* est le monoïde libre sur l'alphabet X , que ϵ désigne le mot vide, et que $|w|$ est la longueur du mot $w \in X^*$. On définit $\mathfrak{M}_{\geq n} = \{f \in R^X: \nu(f) \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, où $\nu(f) = \inf\{n \in \mathbb{N}: \exists w \in X^*, |w| \neq n, \text{ et } f(w) \neq 0_R\}$ pour chaque $f \in R^X$ non nul (l'infimum étant pris sur $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, avec $\infty > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il en résulte que $\nu(0) = \infty$). L'ensemble R^X , vu comme la R -algèbre $R\langle\langle X \rangle\rangle$ des séries formelles en des variables non commutatives, peut être « topologisé » (en que R -algèbre topologique – voir Warner (1989, 1993) – et, ainsi, comme un R -module topologique) par la filtration décroissante par les idéaux $\mathfrak{M}_{\geq n}$: il s'agit d'un exemple de la fameuse topologie de Krull (voir Eisenbud (1995)), et c'est la topologie habituelle des séries formelles en combinatoire et en algèbre; dans le cas où X est réduit à un unique élément x , on retrouve la topologie \mathfrak{M} -adique de $\mathbb{K}[[x]]$ (ordre des séries formelles), où $\mathfrak{M} = \langle x \rangle$ est l'idéal principal engendré par x . Pour peu que X soit fini, cette topologie de Krull coïncide avec la topologie produit pour R discret⁵. D'après le théorème 5.3, dans le cas où X est fini et R est un corps topologique Hausdorff \mathbb{K} , le dual topologique de $\mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle$ (qui est aussi un espace linéairement compact) est l'espace $\mathbb{K}\langle X \rangle$ des polynômes non commutatifs.
4. Prenons un monoïde à zéro (voir Clifford et Preston (1961)) vérifiant la propriété (D) (Bourbaki (2007a)) légèrement modifiée (voir Poinot et al. (2010b) ainsi que le chapitre 6), et soit R un anneau. Considérons la R -algèbre contractée large $R_0[[M]]$ du monoïde à zéro M (voir Poinot et al. (2010b) et encore une fois le chapitre 6) qui est, en tant que R -module, l'ensemble $\{f \in R^M: f(0_M) = 0_R\}$, où 0_M est le zéro de M , alors que 0_R est celui de l'anneau R . Il est clair que $R_0[[M]] \cong_{R\text{-Mod}} R^{M \setminus \{0_M\}}$. Maintenant, supposons que \mathbb{K} soit un corps topologique Hausdorff. La topologie produit sur \mathbb{K}^M induit la topologie produit sur $\mathbb{K}^{M \setminus \{0_M\}}$, qui correspond à celle de $\mathbb{K}_0[[M]]$. Le dual topologique de $\mathbb{K}^{M \setminus \{0_M\}}$ étant $\mathbb{K}^{(M \setminus \{0_M\})}$ on vérifie aisément que $(\mathbb{K}_0[[M]])'$ est isomorphe à l'algèbre contracté (usuelle, voir Clifford et Preston (1961)) $\mathbb{K}_0[M]$ du monoïde à zéro M .
5. Le théorème 5.3 peut être appliqué lorsque $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ porte la topologie discrète, mais également pour sa topologie usuelle, de sorte que les espaces duals $(\mathbb{R}^X)'$ ou $(\mathbb{C}^X)'$ pour la topologie discrète ou celle induite par la valeur absolue sont identiques. Notons que si X est au plus dénombrable, alors \mathbb{K}^X est un espace de Fréchet (voir Trèves (1967) et également le chapitre 3), réel ou complexe selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, lorsque l'on considère la topologie produit relative aux valeurs absolues, et donc en tant qu'espaces fonctionnels des théorèmes

5. Remarquons bien que lorsque X est infini les deux topologies sont distinctes: par exemple, soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de X deux à deux distincts, alors on voit sans effort que cette famille est sommable dans la topologie produit pour R discret, alors qu'elle ne converge même pas dans la topologie de Krull.

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

tels que ceux de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte ou du graphe fermé s'appliquent dans ce contexte (ce qui n'est évidemment pas le cas quand \mathbb{K} est discret).

5.5 Les conséquences du théorème 5.3 sur les opérateurs linéaires continus

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, la rigidité du dual par rapport au changement de topologies force les applications linéaires et continues à être représentées par des matrices finies en ligne (voir le chapitre 4).

Soient \mathbb{K} un corps topologique séparé, X et Y deux ensembles quelconques. Supposons que \mathbb{K}^Z possède la topologie produit pour $Z \in \{X, Y\}$. Rappelons (voir les notations au chapitre 2 et principalement son numéro 2.1) que l'ensemble de toutes les applications linéaires (respectivement, et continues) de \mathbb{K}^X dans \mathbb{K}^Y est noté $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$ (respectivement, $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$). Rappelons également (voir le chapitre 4) que $\mathbb{K}^{Y \times (X)}$ est l'ensemble des matrices à lignes finies (voir le numéro 4.3 du chapitre 4), soit les applications⁶ $M: Y \times X \rightarrow \mathbb{K}$ telles que pour chaque $y \in Y$, l'ensemble $\{x \in X: M(y, x) \neq 0\}$ est fini. Rappelons enfin que si $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, alors son support (voir le numéro 2.4 du chapitre 2) est donné par

$$\text{supp}(p) = \{x \in X: p(x) \neq 0\}. \quad (5.5)$$

Soit $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$. Introduisons l'application suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\phi: Y \times X &\rightarrow \mathbb{K} \\ (y, x) &\mapsto \langle \phi(\delta_x) \mid \delta_y \rangle. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Cette application a déjà été introduite au chapitre 4 dans un cadre plus général des opérateurs linéaires non nécessairement continus (en restreignant son domaine à celui des opérateurs continus, on montre qu'elle est bijective ce qui n'est évidemment pas le cas en toute généralité, voir pour cela la remarque 4.1 du chapitre 4).

Lemme 5.15. *Pour chaque $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$, $\mathcal{M}_\phi \in \mathbb{K}^{Y \times (X)}$, et l'application $\phi \mapsto \mathcal{M}_\phi$ est \mathbb{K} -linéaire et injective.*

Démonstration. Pour tout $y \in Y$, l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^X &\rightarrow \mathbb{K} \\ f &\mapsto \langle \phi(f) \mid \delta_y \rangle \end{aligned} \quad (5.7)$$

est un membre de $(\mathbb{K}^X)'$ (car il s'agit de la composition de ϕ et de la projection sur $\mathbb{K}\delta_y$). D'après le théorème 5.3, il existe un, et un seul, $p_{\phi, y} \in \mathbb{K}^{(X)}$ pour lequel quel que soit $f \in \mathbb{K}^X$, $\langle f \mid p_{\phi, y} \rangle = \langle \phi(f) \mid \delta_y \rangle$. En particulier, pour tout $x \in X$,

$$\begin{cases} p_{\phi, y}(x) & \text{si } x \in \text{supp}(p_{\phi, y}) \\ 0_R & \text{sinon} \end{cases} = \sum_{z \in X} p_{\phi, y}(z) \delta_x(z) = \langle \delta_x \mid p_{\phi, y} \rangle = \langle \phi(\delta_x) \mid \delta_y \rangle. \quad (5.8)$$

Il s'ensuit que $\{x \in X: \langle \phi(\delta_x) \mid \delta_y \rangle \neq 0\} = \text{supp}(p_{\phi, y})$, et donc $\mathcal{M}_\phi \in \mathbb{K}^{Y \times (X)}$. Vérifier que l'application $\phi \mapsto \mathcal{M}_\phi$ est linéaire ne pose aucune difficulté. Supposons que $\mathcal{M}_\phi = \mathcal{M}_{\phi'}$, alors pour tout $(y, x) \in Y \times X$, $\langle \phi(\delta_x) \mid \delta_y \rangle = \langle \phi'(\delta_x) \mid \delta_y \rangle$. Par bilinéarité, $\phi(\delta_x)(y) - \phi'(\delta_x)(y) =$

6. Le lecteur aura probablement noté l'inversion de X et de Y dans les notations, par rapport à celles du chapitre 4. La cause en est que l'on considère les applications linéaire de \mathbb{K}^X dans \mathbb{K}^Y et que leur représentation matricielle tranpose les positions de X et de Y .

5.5. Les conséquences du théorème 5.3 sur les opérateurs linéaires continus

$\langle \phi(\delta_x) - \phi'(\delta_x) | \delta_y \rangle = 0$. Puisque la dernière égalité est satisfaite pour tout $y \in Y$, $\phi(\delta_x) = \phi'(\delta_x)$ pour tout $x \in X$. Maintenant, soit $f \in \mathbb{K}^X$. Or ϕ est continu, et le sous-espace engendré par $(\delta_x)_{x \in X}$, i.e., $\mathbb{K}^{(X)}$, est dense⁷ dans \mathbb{K}^X , donc $\phi = \phi'$. \square

Théorème 5.16. *Les \mathbb{K} -espaces vectoriels $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Mod}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$ et $\mathbb{K}^{Y \times (X)}$ sont isomorphes. Plus précisément, l'application $\phi \mapsto \mathcal{M}_\phi$ du lemme 5.15 est surjective.*

Démonstration. Soit $M \in \mathbb{K}^{Y \times (X)}$. On définit $\phi_M: \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}^Y$ par

$$\phi_M(f) = \phi_M\left(\sum_{x \in X} f(x)\delta_x\right) = \sum_{y \in Y} \left(\sum_{x \in X} M(y, x)f(x)\right) \delta_y .$$

(Clairement la somme portant sur $x \in X$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls puisque $M \in \mathbb{K}^{Y \times (X)}$, et donc définit bien un élément de \mathbb{K} .) Cette application a été introduite dans la définition 4.5 au chapitre 4. Il est aisé de vérifier que l'application ϕ_M est linéaire. Démontrons à présent qu'elle est continue. Par définition de la topologie produit, il suffit de prouver que quel que soit $y \in Y$, $\ell_{M,y}: \mathbb{K}^X \rightarrow \mathbb{K}$, donné par $\ell_{M,y}(f) = \langle \phi_M(f) | \delta_y \rangle = \sum_{x \in X} M(y, x)f(x)$, est continu. C'est bien le cas puisque $\ell_{M,y}$ est une somme finie de multiples scalaires de projections. Ainsi $\phi_M \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$. Finalement prouvons que $\mathcal{M}_{\phi_M} = M$. Soit $(y, x) \in Y \times X$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\phi_M}(y, x) &= \langle \phi_M(\delta_x) | \delta_y \rangle \\ &= \left\langle \sum_{y' \in Y} \left(\sum_{z \in X} M(y', z)\delta_x(z) \right) \delta_{y'} \mid \delta_y \right\rangle \\ &= \sum_{z \in X} M(y, z)\delta_x(z) \\ &= M(y, x) . \end{aligned} \tag{5.9}$$

L'application $\phi \mapsto \mathcal{M}_\phi$ est donc surjective, et, par le lemme 5.15, c'est un isomorphisme. \square

Le résultat suivant se déduit assez facilement du théorème 5.16.

Théorème 5.17. *Quels que soient $\phi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}^Y)$, $\psi \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^Y, \mathbb{K}^Z)$, on a $\mathcal{M}_{\psi \circ \phi} = \mathcal{M}_\psi \mathcal{M}_\phi$, et en particulier, les algèbres $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X)$ et $\mathbb{K}^{X \times (X)}$ sont isomorphes.*

Remarque 5.18.

1. Si $X = Y$, et si $\alpha \in \mathcal{G}(R)^X$ est une suite de dénominateurs (voir le numéro 4.2 au chapitre 4), alors $\phi \mapsto \mathcal{M}_{\phi, \alpha} = D_\alpha \mathcal{M}_\phi D_\alpha^{-1}$ nous donne également un isomorphisme d'algèbres par composition d'isomorphismes (voir aussi le numéro 4.2 au chapitre 4 pour les notations utilisées). L'inverse de cet isomorphisme est tout simplement $M \mapsto \phi_{D_\alpha^{-1} M D_\alpha} = \phi_{M, \alpha}$.
2. Si Y est réduit à un unique élément y , alors

$$\begin{aligned} (\mathbb{K}^X)' &= \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}) \\ &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^X, \mathbb{K}\{y\}) \\ &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \mathbb{K}\{y\} \times (X) \\ &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \mathbb{K}^{(X)} \end{aligned} \tag{5.10}$$

ce qui redonne le théorème 5.3.

7. En effet, soit $f \in \mathbb{K}^X$, et U un voisinage ouvert de f . Alors il existe une partie finie $F \subseteq X$ et, quel que soit $x \in F$, des ouverts U_x de \mathbb{K} avec $f(x) \in U_x$, et $\bigcap_{x \in F} \pi_x^{-1}(U_x) \subseteq U$ (π_x est la projection usuelle, voir le numéro 2.4 au chapitre 2). Alors, quel que soit $x \in F$, $f(x)\delta_x \in U$.

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

3. D'après les résultats vus au chapitre 4, les algèbres de matrices $\text{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\text{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\text{diag}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) \cong_{\mathbb{K}\text{-Alg}} \text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$, et les groupes de matrices inversibles $\mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, $\mathcal{UI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\mathcal{DIAG}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ sont des sous-groupes du groupe des automorphismes (linéaires) $\text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) \cong_{\text{Grp}} \text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$.
4. Les théorèmes 5.3 et 5.16 ainsi que la notion de produit tensoriel complété introduite au numéro 4.3.4 du chapitre 4 permettent d'étendre le résultat classique $V^* \otimes_{\mathbb{K}} W \cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(W, V)$ où V et W sont deux espaces vectoriels, et l'un au moins d'entre eux est de dimension finie (voir par exemple Kassel (1995)). En effet, pour \mathbb{K} un corps topologique séparé,

$$\begin{aligned}
 (\mathbb{K}^X)' \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}^Y &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \mathbb{K}^X \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}^Y \\
 &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \mathbb{K}^{X \times Y} \\
 &\cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^Y, \mathbb{K}^X) .
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pour le premier isomorphisme, on suppose que \mathbb{K}^X est muni de la topologie produit et \mathbb{K} est discret (puisqu'il est par le théorème 5.3 peu importe la topologie de corps séparée sur \mathbb{K}).

5.6 Dual topologique et complétion

Dans ce numéro est construit un isomorphisme naturel explicite entre les duals topologiques de $\mathbb{K}^{(X)}$ et de \mathbb{K}^X en utilisant le fait que le second est le complété du premier.

Rappelons la définition suivante : soient \mathbb{K} un corps topologique séparé, et V un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique Hausdorff. La *complétion* de V est la⁸ paire (\widehat{V}, i) où \widehat{V} est un \mathbb{K} -espace vectoriel séparé et complet, et $i: V \rightarrow \widehat{V}$ telle que

1. L'application i est un isomorphisme pour les structures de \mathbb{K} -espaces vectoriels topologiques de V dans \widehat{V} , *i.e.*, i est à la fois un isomorphisme (algébrique) et un homéomorphisme dans \widehat{V} (en d'autres termes, i est une application \mathbb{K} -linéaire bicontinue, ou i est une application linéaire continue et injective et son inverse $i^{-1}: i(V) \rightarrow V$ est continu où $i(V)$ possède la topologie de sous-espace induite par \widehat{V}).
2. L'image $i(V)$ est dense dans \widehat{V} .
3. Quel que soit le \mathbb{K} -espace vectoriel complet (Hausdorff) W et pour toute application linéaire et continue $\phi: V \rightarrow W$, il existe une unique application $\widehat{\phi}: \widehat{V} \rightarrow W$ linéaire et continue telle que $\widehat{\phi} \circ i = \phi$.

Autrement dit, le foncteur d'oubli de la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels topologiques séparés (avec applications linéaires et continue) dans celle des \mathbb{K} -espaces vectoriels topologiques complets admet un adjoint à gauche qui associe à V « son » complété \widehat{V} . En termes de diagrammes commutatifs, nous avons :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\phi} & W \\
 \downarrow i & \nearrow \exists! \widehat{\phi} & \\
 \widehat{V} & &
 \end{array} \tag{5.12}$$

Nous rencontrons aux chapitres 6 (numéro 6.4) et 8 (numéro 8.5) de telles complétions.

Remarque 5.19. D'après Bourbaki (2007d), \mathbb{K}^X est complet et séparé (par rapport à la topologie produit) si, et seulement si, \mathbb{K} est lui-même un corps séparé complet.

8. Unique à isomorphisme près.

5.7. Topologie faible

Supposons maintenant que \mathbb{K} possède la topologie discrète (de sorte que ce soit un corps topologique séparé complet). Clairement, \mathbb{K}^X est le complété de $\mathbb{K}^{(X)}$ (ce dernier étant muni de la topologie initiale par rapport aux projections qui coïncide avec la topologie de sous-espace induite par la topologie produit de \mathbb{K}^X). Par définition de la complétion, en prenant \mathbb{K} à la place de W , il est clair qu'il existe un isomorphisme canonique Ψ entre les duals topologiques de $\mathbb{K}^{(X)}$ et de \mathbb{K}^X . L'isomorphisme

$$\Psi: \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}^{(X)})' & \rightarrow & (\mathbb{K}^X)' \\ \ell & \mapsto & \widehat{\ell} \end{array} \quad (5.13)$$

a l'inverse $\Psi^{-1}(\ell) = \ell \circ i = \ell|_{\mathbb{K}^{(X)}}$ pour $\ell \in (\mathbb{K}^X)'$. On peut donner une définition précise à Ψ . Soit $\ell \in (\mathbb{K}^{(X)})'$. Alors on a

$$\Psi(\ell) = \widehat{\ell}: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^X & \rightarrow & \mathbb{K} \\ f & \mapsto & \sum_{x \in X} f(x)\ell(\delta_x) . \end{array} \quad (5.14)$$

En effet puisque $f = \sum_{x \in X} f(x)\delta_x$ (somme d'une famille sommable), il en résulte que

$$\begin{aligned} \Psi(\ell)(f) &= \widehat{\ell}(f) \\ &= \widehat{\ell}\left(\sum_{x \in X} f(x)\delta_x\right) \\ &= \sum_{x \in X} f(x)\widehat{\ell}(\delta_x) \\ &\quad (\text{puisque } \widehat{\ell} \text{ est continu}) \\ &= \sum_{x \in X} f(x)\ell(\delta_x) . \\ &\quad (\text{puisque } \delta_x \in \mathbb{K}^{(X)}) \end{aligned} \quad (5.15)$$

En utilisant les notations introduites, $\Psi(\ell)(f) = \widehat{\ell}(f) = \langle f | p_{\Psi(\ell)} \rangle$, où l'on rappelle que $p_{\Psi(\ell)} \in \mathbb{K}^{(X)}$ est défini par $p_{\Psi(\ell)}(x) = \Psi(\ell)(\delta_x) = \widehat{\ell}(\delta_x) = \ell(\delta_x)$ (puisque $\delta_x \in \mathbb{K}^{(X)}$). Remarquons que $p_{\Psi(\ell)} = \Phi^{-1}(\Psi(\ell)) = \Phi^{-1}(\widehat{\ell})$. L'application $\Phi^{-1} \circ \Psi: (\mathbb{K}^{(X)})' \rightarrow \mathbb{K}^{(X)}$ est un isomorphisme (en tant que composition d'isomorphismes). Le « polynôme » $\Phi^{-1}(\Psi(\ell)) \in \mathbb{K}^{(X)}$ pour $\ell \in (\mathbb{K}^{(X)})'$ est ainsi donné par $\Phi^{-1}(\Psi(\ell))(x) = \ell(\delta_x)$ pour $x \in X$. On peut vérifier que $\ell(p) = \langle i(p) | \Phi^{-1}(\Psi(\ell)) \rangle$ quels que soient $\ell \in (\mathbb{K}^{(X)})'$, et $p \in \mathbb{K}^{(X)}$. En effet, $\ell(p) = \Psi(\ell)(i(p)) = \langle i(p) | \Phi^{-1}(\Psi(\ell)) \rangle$.

5.7 Topologie faible

Soient \mathbb{K} un corps topologique, (V, τ) un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique et V' son dual topologique. On appelle *V' -topologie faible* la topologie la plus faible sur V pour laquelle les éléments de V' sont continus. (Cette topologie est également utilisée au numéro 8.5 du chapitre 8.) Notons τ_w cette topologie (le « w » est une référence à l'adjectif « faible » en anglais, à savoir, « weak »). Puisque les éléments de V' sont continus (pour τ), il en résulte que $\tau_w \subseteq \tau$. On peut montrer facilement que (V, τ_w) est encore un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique, séparé si \mathbb{K} l'est et si V' sépare les points de V (voir le numéro 2.5 au chapitre 2). Le dual topologique V'_w de (V, τ_w) est appelé le *dual faible* de V .

Corollaire 5.20. *Soit (\mathbb{K}, τ) un corps topologique Hausdorff, X un ensemble, et \mathbb{K}^X avec la topologie produit, que l'on note ici $\pi(X, \tau)$, de $|X|$ copies de (\mathbb{K}, τ) . Le dual faible $(\mathbb{K}^X)'_w$ de (\mathbb{K}^X, τ_w) est (isomorphe à) $\mathbb{K}^{(X)}$.*

Chapitre 5. Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus

Démonstration. Un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ est évidemment une forme linéaire et continue (*via* l'isomorphisme entre $(\mathbb{K}^X)'$ et $\mathbb{K}^{(X)}$ du théorème 5.3) par définition de la $\mathbb{K}^{(X)}$ -topologie faible. Ainsi, $\mathbb{K}^{(X)} \subseteq (\mathbb{K}^X)'_w$. Prouvons que la topologie produit et la topologie faible sont égales. La topologie faible τ_w est, par définition, la topologie la plus faible pour laquelle toutes les formes linéaires $\langle \cdot | p \rangle: \mathbb{K}^X \rightarrow (\mathbb{K}, \tau)$ sont continues ($p \in \mathbb{K}^{(X)}$). En particulier, les projections $\langle \cdot | \delta_x \rangle$ sont également continues. Ainsi τ_w est plus forte que $\pi(X, \tau)$ (puisque cette dernière est la moins fine ayant de telles propriétés). Ainsi $\pi(X, \tau) \subseteq \tau_w$. Prouvons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il est suffisant de prouver que l'application identique $\text{Id}: (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau)) \rightarrow (\mathbb{K}^X, \tau_w)$ est continue, ce qui est équivalent (d'après les propriétés usuelles des topologies initiales) au fait que quel que soit $p \in \mathbb{K}^{(X)}$, l'application

$$\begin{aligned} \langle \cdot | p \rangle: (\mathbb{K}^X, \pi(X, \tau)) &\rightarrow (\mathbb{K}, \tau) \\ f &\mapsto \langle f | p \rangle \end{aligned} \quad (5.16)$$

est continue, ce qui est vraisemblablement le cas dans la mesure où ces applications sont des sommes finies de multiples scalaires de projections. Ainsi une forme linéaire $\ell: \mathbb{K}^X \rightarrow (\mathbb{K}, \tau)$ est continue pour la topologie faible si, et seulement si, elle l'est pour la topologie produit, et est donc un élément de $\mathbb{K}^{(X)}$ (théorème 5.3). \square

5.8 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons démontré un résultat fondamental, et un corollaire tout aussi important. En bref, si on considère les espaces de fonctions définies sur un ensemble (quelconque) et à valeurs dans un corps topologique séparé, avec la topologie produit, alors l'espace dual de ses formes linéaires et continues est isomorphe à l'espace des fonctions finiment supportées (sur le même ensemble) et à valeurs dans le corps de base. Autrement dit, pour qu'une forme linéaire soit continue (pour une quelconque, et alors pour toutes les topologies produits) il faut, et il suffit, qu'elle soit représentée (*via* une application de dualité) par une fonction à support fini. Cela implique, toujours au travers d'une mise en dualité entre un espace et son complété (également utilisée au chapitre 8), une caractérisation des opérateurs linéaires et continus (sur ce même type d'espaces de fonctions) comme matrices infinies à lignes finies (introduites au chapitre 4).

Le produit tensoriel complété (défini au chapitre 4) permet d'obtenir l'isomorphisme suivant (voir la remarque 5.18), qui est une généralisation du résultat usuel en dimension finie,

$$(\mathbb{K}^X)' \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}^{(Y)} \cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^{(Y)}, \mathbb{K}^{(X)}).$$

Cet isomorphisme offre la perspective de doter l'espace $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}\langle Y \rangle, \mathbb{K}\langle X \rangle)$ des applications linéaires et continues d'une structure d'algèbre obtenue en considérant le produit tensoriel complété $\mathbb{K}\langle X \rangle \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}\langle Y \rangle$ où le facteur $\mathbb{K}\langle X \rangle$ a le produit de battage, alors que $\mathbb{K}\langle Y \rangle$ possède le produit de concaténation usuel. En fait, il devrait être possible d'équiper cette algèbre d'un coproduit et d'une coïunité, qui en feraient une bigèbre, en considérant la structure d'algèbre de Hopf usuelle de $\mathbb{K}\langle Y \rangle$, et celle d'algèbre de Hopf de battage de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ (avec le produit de déconcaténation). Ce produit tensoriel complété peut également être intéressant dans le cadre de l'étude du dual de Sweedler d'une algèbre (topologique).

Nous poursuivons l'étude des espaces de séries au chapitre 6 dans lequel est considéré le complété, pour la topologie produit, de l'algèbre contractée d'un monoïde à zéro. Ce chapitre nous offre donc l'opportunité de manipuler une nouvelle fois la topologie produit, et de voir qu'elle n'est pas toujours équivalente à la topologie de Krull (la topologie de l'ordre des séries),

5.8. Conclusion et perspectives

et même jamais dès que l'alphabet des séries est infini. Cela permet notamment de rejeter cette croyance folklorique, et de mettre en valeur l'intérêt que l'on peut trouver par l'emploi de la topologie pour des questions algébriques et de combinatoire.

Chapitre 6

Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

Le zéro, ce « rien qui peut tout ».

DENIS GUEDJ, *Le théorème du perroquet*

Sommaire

6.1	Introduction	73
6.2	Monoïdes à zéro	75
6.3	Algèbre contractée d'un monoïde à zéro	77
6.4	L'algèbre contractée large d'un monoïde à zéro à décomposition finie	79
6.5	Monoïdes à zéro localement finis	81
6.6	Opération étoile et formule d'inversion de Möbius	83
6.7	Quelques remarques au sujet des séries de Hilbert	86
6.8	Conclusion et perspectives	87

Ce chapitre est tiré de l'article Poinso et al. (2010b).

6.1 Introduction

La formule d'inversion de Möbius classique de la théorie des nombres, introduite au XIX^e siècle, énonce que, pour toutes fonctions à valeurs complexes ou réelles f, g définies sur les entiers strictement positifs $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- Pour tout n , $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.
- Pour tout n , $f(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d)g(d)$.

Dans chaque formule, les sommes sont prises sur tous les diviseurs positifs d de n , et μ est la fonction de Möbius usuelle. Ce résultat utilise le fait que μ et ζ sont des applications inverses l'une de l'autre par rapport au produit de convolution de Dirichlet traditionnel, où ζ est la fonction caractéristique des entiers strictement positifs (voir par exemple Apostol (1976)).

La version classique de la formule d'inversion de Möbius fut généralisée de différentes manières par différents auteurs. P. Doubilet, G.-C. Rota, et R. P. Stanley ont proposé un traitement systématique de ce problème pour les ensembles partiellement ordonnés localement finis dans Doubilet et al. (1975); Stanley (2007), alors que P. Cartier et D. Foata dans Cartier et Foata (1969) ont démontré qu'une telle formule est valide pour une large classe de monoïdes dits *localement finis* (voir Eilenberg (1974)), et la fonction de Möbius fut même explicitement calculée pour certains

d'entre eux. Ce chapitre est une contribution à l'étude de la formule d'inversion de Möbius, encore dans le contexte des monoïdes localement finis mais pour le cas particulier de monoïdes à zéro. Par exemple, soit M l'ensemble $\{0, 1, a, b, c, ab, ac, ba, bc, ca, cb, abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$. Cela devient un monoïde à zéro lorsqu'on l'équipe de la concaténation des mots sans lettres communes, également appelés *mots standard*; les autres produits donnent 0. Soit ζ_0 la fonction caractéristique de $M_0 = M \setminus \{0\}$. Alors, ζ_0 est inversible – par rapport à la convolution – dans l'algèbre $\mathbb{Z}_0[M]$ de toutes les fonctions de M dans \mathbb{Z} s'annulant en 0, ce qui est plus ou moins la \mathbb{Z} -algèbre des polynômes en des variables non commutatives $\{a, b, c\}$ dont les monômes sont tous constitués de mots standard.

En effet, $\zeta_0 = 1 + \zeta_0^+$, où 1 est la fonction caractéristique du singleton $\{1\}$, et comme ζ_0^+ n'a pas de terme constant, en tant que polynôme non commutatif (c'est-à-dire $\zeta_0^+(1) = 0$), ζ_0 est inversible, d'inverse $\mu_0 = \sum_{n \geq 0} (-\zeta_0^+)^n$. De part la multiplication particulière dans M , la « partie propre » ζ_0^+ de ζ_0 est en fait nilpotente, et la somme précédente s'annule après quatre étapes. Ainsi μ_0 peut être calculé « à la main », et nous obtenons $\mu_0 = 1 - a - b - c$.

De façon assez surprenante, μ_0 – interprété comme la fonction de Möbius du monoïde à zéro M – est identique à celle du monoïde non commutatif libre $\{a, b, c\}^*$. De plus ce phénomène apparaît également pour des monoïdes à zéro moins accommodants. Par exemple, considérons un monoïde similaire à M mais sur un alphabet infini X : il s'agit de l'ensemble de tous les mots de X sans occurrences multiples d'une même lettre, et dont le produit $w \times w'$ est égal à la concaténation usuelle ww' lorsque chaque lettre apparaît au plus une fois dans le mot résultant, et 0 sinon. Contrairement à M , ce monoïde est infini. Néanmoins, nous pouvons démontrer que sa fonction caractéristique est inversible, et que son inverse est encore égal à la fonction de Möbius usuelle du monoïde libre X^* . Dans ce cas, elle n'est pas aussi facile à calculer car la « partie propre » correspondante n'est plus nilpotente, et la somme d'une série infinie doit être évaluée dans une topologie qui convient (induite par une filtration).

L'explication de ce phénomène général est donnée dans ce chapitre dont le sujet principal concerne le développement d'une boîte à outils algébriques et topologiques pour le traitement systématique et rigoureux de la formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro localement finis.

Organisation du chapitre

Au numéro 6.2 est rappelée la notion de monoïdes à zéro puis, au numéro 6.3, on introduit la notion idoine d'algèbre d'un monoïde à zéro, appelée *algèbre contractée*, obtenue par identification des zéros de l'algèbre et du monoïde. Le numéro 6.4 concerne la construction de l'algèbre contractée large, complétion de l'algèbre contractée d'un monoïde à zéro (à décomposition finie) pour la topologie produit avec l'anneau de base discret (voir le chapitre 5 pour une utilisation approfondie de ce type de topologies) : on obtient une algèbre de « séries formelles » sur le monoïde à zéro. La notion de finitude locale pour un monoïde à zéro, généralisation du concept similaire pour les monoïdes usuels, est introduite au numéro 6.5. Cela nous permet d'équiper l'algèbre contractée large d'une autre topologie (que la topologie produit) donnée par une filtration (relative à la « longueur » des mots) et similaire à la topologie usuelle (de Krull) des séries formelles. Dans cette topologie, on peut définir une opération étoile laquelle nous permet de prouver la formule d'inversion de Möbius dans ce contexte (numéro 6.6). Enfin, ce chapitre s'achève au numéro 6.7 par des remarques concernant les séries de Hilbert de certaines algèbres contractées larges.

6.2 Monoïdes à zéro

Un monoïde à zéro est un monoïde ordinaire avec un élément absorbant bilatère, appelé le *zéro*. De telles structures apparaissent évidemment dans la théorie des anneaux (le monoïde multiplicatif d'un anneau associatif avec unité est un monoïde à zéro), mais elles sont également utilisées pour résoudre des problèmes de cohomologie Novikov (2008); Novikov et Polyakova (2009), et principalement dans l'étude des extensions par idéaux des semi-groupes Clifford et Preston (1961); Clifford (1965); Arendt et Stuth (1970).

Ces structures sont définies comme suit : soit M un monoïde ordinaire (avec 1_M comme identité) tel que $|M| \geq 2$. Alors, M est un *monoïde à zéro* si, et seulement si, il possède un élément absorbant bilatère, noté 0_M , *i.e.*, $x0_M = 0_M = 0_Mx$ pour tout $x \in M$, avec $1_M \neq 0_M$. L'élément particulier 0_M est appelé le *zéro* de M (l'unicité va de soi). Si en outre M est commutatif (en tant que monoïde usuel), alors M est dit *monoïde à zéro commutatif*. Dans la suite, pour tout monoïde à zéro, avec 0_M comme zéro, M_0 représente $M \setminus \{0_M\}$.

Exemple 6.1.

1. L'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels avec la multiplication usuelle est un monoïde à zéro commutatif.
2. Le monoïde multiplicatif d'un anneau (associatif) R avec unité 1_R est un monoïde à zéro avec 0_R comme zéro.
3. Si M est un monoïde quelconque (avec ou sans zéro), alors pour tout $0 \notin M$ (prendre $0 = \{M\}$ par exemple, en présence de l'axiome de fondation²), $M^0 = M \cup \{0\}$ est un monoïde à zéro, avec comme zéro $0 : x0 = 0 = 0x$ pour tout $x \in M^0$ étendant la loi de composition interne de M . Il est commutatif si, et seulement si, M l'est. La transformation de M en M^0 est appelée *adjonction d'un zéro*, et M^0 est un monoïde avec un *zéro (bilatère) adjoint*. Notons que M^0 est évidemment isomorphe à M^z pour tout $z \notin M$, où z joue le même rôle que 0 . En fait, l'adjonction d'un zéro se trouve être l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des monoïdes à zéro (avec pour flèches les homomorphismes de monoïdes préservant le zéro) dans celle des monoïdes³.
4. L'ensemble $\aleph_0 \cup \{\aleph_0\}$ de tous les cardinaux inférieurs ou égaux au cardinal \aleph_0 (le premier cardinal transfini et donc le seul infini dénombrable), soit le segment initial fermé $[0, \aleph_0]$, avec l'addition usuelle des cardinaux (rappelons que $\aleph_0 = [0, \aleph_0[= \mathbb{N}$ et $n + \aleph_0 = \aleph_0 = \aleph_0 + n$ pour tout $n \leq \aleph_0$) est un monoïde à zéro commutatif avec \aleph_0 pour zéro. Plus généralement, étant donné un nombre cardinal transfini κ , l'ensemble $[0, \kappa]$ de tous les cardinaux qui lui sont inférieurs, avec l'addition, est aussi un monoïde à zéro commutatif, avec κ pour zéro.
5. Soit \mathcal{C} une petite catégorie (voir Mac Lane (1998)). Alors l'ensemble de ses flèches $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, avec un zéro 0 et une identité 1 adjoints ($0 \neq 1$), est un monoïde à zéro lorsque la composition des flèches est étendue par $f \circ g = 0$ dès que $\text{dom}(f) \neq \text{codom}(g)$ pour tous $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{C})$, et $f \circ 1 = f = 1 \circ f$, $f \circ 0 = 0 = 0 \circ f$ pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathcal{C}) \cup \{0, 1\}$. Maintenant si on se donne un ensemble partiellement ordonné P , et $\text{Int}(P)$ l'ensemble de ses intervalles $[x, y] = \{z \in P : x \leq z \leq y\}$ pour tout $x \leq y$ dans P (voir Doubilet et al. (1975); Stanley (2007)). Un intervalle $[x, y]$ peut être vu comme une flèche de x vers y , et une composition peut être définie : $[x, z] \circ [z, y] = [x, y]$. Il s'ensuit que P devient une petite catégorie, et $\text{Int}(P) \cup \{0, 1\}$, où $0, 1 \notin \text{Int}(P)$ et $0 \neq 1$, devient un monoïde à zéro. Une autre spécialisation est possible : soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ fixé, et considérons l'ensemble I de tous

1. La condition que $|M| \geq 2$ permet simplement d'éviter de traiter le cas dégénéré d'un monoïde à zéro trivial.

2. Sinon il suffit de considérer $M^0 = M \sqcup \{0\}$ où \sqcup est la somme disjointe ensembliste.

3. De façon très pompeuse, on pourrait dire que M^0 est le « monoïde à zéro librement engendré par le monoïde M », et l'unité de l'adjonction serait alors l'injection canonique $M \hookrightarrow M^0$.

Chapitre 6. Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

les couples (i, j) d'entiers tels que $1 \leq i, j \leq n$. Toute *unité matricielle*⁴ $E_{(i,j)}$ de format n par n peut être vue comme une flèche de i vers j , et de telles flèches sont composées de façon usuelle par $E_{(i,k)} \circ E_{(k,j)} = E_{(i,j)}$. Alors I devient une petite catégorie, et l'ensemble des unités matricielles, avec 0 et 1 adjoints, peut être interprété comme un monoïde à zéro assez similaire aux groupoïdes de A. Connes (voir Connes (1994)).

Une classe très importante de monoïdes à zéro, qui mérite un paragraphe pour elle seule, est fournie par les fameux quotients de Rees (voir Clifford et Preston (1961); Arendt et Stuth (1970); Grillet (1995)). Soit M un monoïde et I un idéal bilatère de M , c'est-à-dire $IM \subseteq I \supseteq MI$, qui est propre (I est *propre* si, et seulement si, $I \neq M$, ou, en d'autres termes, $1_M \notin I$). Une congruence θ_I sur M est définie comme suit : $(x, y) \in \theta_I$ si, et seulement si, $x, y \in I$ ou $x = y$. La classe d'équivalence de $x \in M$ modulo θ_I est

$$\begin{cases} \{x\} & \text{si } x \notin I \\ I & \text{si } x \in I \end{cases} \quad (6.1)$$

de sorte que I joue le rôle d'un zéro dans le monoïde quotient M/θ_I , de façon telle qu'il se trouve être isomorphe au monoïde à zéro $(M \setminus I) \cup \{0\}$, où $0 \notin M \setminus I$, avec la loi de composition interne

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{pour } xy \notin I \\ 0 & \text{pour } xy \in I \end{cases} \quad (6.2)$$

quels que soient $x, y \in M \setminus I$, et $x \times 0 = 0 = 0 \times x$ pour tout $x \in (M \setminus I) \cup \{0\}$. Ce monoïde, unique à isomorphisme près (le choix du zéro adjoint ou encore en utilisant le coproduit ensembliste), est appelé le *quotient de Rees de M par I* , et dénoté par M/I . Dans la suite, nous identifions les ensembles sous-jacents aux deux monoïdes isomorphes M/θ_I et $(M \setminus I) \cup \{0\}$, et utilisons la juxtaposition pour les multiplications dans M/I et dans M .

Remarque 6.2. *Le fait que I soit propre assure que $1_M \in M \setminus I$, et donc $1_M \neq 0$.*

Exemple 6.3. Soit $X = \{a, b, c\}$ et $I = \{w \in X^* : \exists x \in X, \text{ tel que } |w|_x \geq 2\}$, où l'on rappelle que $|w|_x$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre x dans le mot w . Alors X^*/I est le monoïde à zéro M décrit dans l'introduction (voir le numéro 6.1).

Remarque 6.4. *Pour terminer ce point, voici quelques mots au sujet de la catégorie des monoïdes à zéro. Il est tout d'abord facile de vérifier que nos monoïdes à zéro (avec $0 \neq 1$) plus le monoïde trivial – donné par $0 = 1$ – forment exactement la catégorie des monoïdes internes à la catégorie monoïdale des ensembles et fonctions partielles, ou, de façon équivalente, des ensembles pointés et des applications qui envoient le point de base sur le point de base (le zéro du monoïde étant son point de base), où la structure monoïdale est le produit cartésien ensembliste usuel (dans le cas des ensembles pointés, c'est le produit smash usuel, voir Hatcher (2002), qui donne la structure monoïdale). Notons bien qu'il ne s'agit pas du produit catégorique dans la catégorie des ensembles et fonctions partielles (de même le produit smash n'est pas le produit catégorique pour les ensembles pointés). Ces monoïdes « partiels » sont utilisés dans Poinot et al. (2010a) pour donner un cadre rigoureux à la formule exponentielle, alors que dans Poinot et al. (2010c) sont étudiées les relations entre associativité « partielle » et confluence dans un système particulier de réécriture. Les flèches dans cette catégorie sont ainsi données comme des homomorphismes de monoïdes usuels qui s'annulent en zéro (ce sont donc en particulier des applications entre ensembles pointés). Si le monoïde trivial est évidemment l'objet terminal de cette catégorie, il n'est bien sûr pas initial (la classe des flèches de (0) dans un monoïde à zéro N est vide dès que N n'est lui-même pas trivial). L'objet initial est le monoïde $\{0, 1\}$ (avec l'opération évidente de multiplication) obtenu soit par adjonction libre*

4. Il s'agit d'une matrice $E_{(i,j)} = (\delta_{(i,j)}(\ell, k))_{(\ell, k) \in [1 \dots n]^2}$.

6.3. Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

d'un zéro à (1) soit par adjonction libre d'une unité à (0). Plus généralement, étant donné un semi-groupe S , les adjonctions libres d'une unité et d'un zéro commutent (à isomorphisme près). Il va de soi que l'adjonction d'un zéro constitue l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli (du zéro) de la catégorie des monoïdes (respectivement, des semi-groupes) à zéro dans celle des monoïdes (respectivement, des semi-groupes). Notons au passage que ce dernier foncteur n'est pas plein dans la mesure où un homomorphisme de monoïdes usuels, pour les structures de monoïdes sous-jacentes à des monoïdes à zéro, ne respecte pas nécessairement les zéros. Pour finir, puisque la catégorie des ensembles pointés n'est pas cartésienne mais seulement monoïdale avec le produit smash, il n'est pas possible de définir directement la notion de groupes avec un zéro comme objets groupes internes à cette catégorie (il manque l'élément terminal et l'application diagonale naturelle). En revanche, il est possible de considérer une notion d'algèbres de Hopf internes à cette catégorie. Il s'agit donc de munir un monoïde à zéro d'un coproduit Δ , d'une coïunité ϵ et d'une antipode S (qui doivent être des applications respectant les points de base) lesquels vérifient les diagrammes commutatifs usuels. En guise d'exemple, considérons $\Delta(x) = (x, x)$ pour tout $x \neq 0$ et $\Delta(0) = 0$, $\epsilon(x) = 1$ si $x \neq 0$ et $\epsilon(0) = 0$, et enfin $S(0) = 0$, et $S(x)x = 1 = xS(x)$ pour tout $x \neq 0$. Alors il est clair que la structure obtenue est soit le groupe trivial (0) soit un groupe G avec un zéro adjoint, et, dans ce cas, les applications Δ et ϵ sont des homomorphismes de monoïdes à zéro, et S est un anti-homomorphisme de monoïdes à zéro. Cet exemple d'algèbre de Hopf (cocommutative) interne aux ensembles pointés n'est pas si anodin que cela car un rapide calcul montre que tout ensemble pointé dispose d'une unique structure de comonoïde (pour le produit smash) qui est triviale si l'ensemble est lui-même réduit à un singleton, et qui est donnée par les applications Δ et ϵ précédentes dans les autres cas. Il est alors clair qu'une algèbre de Hopf dans les ensembles pointés ne peut être que le groupe trivial ou un groupe avec un zéro adjoint. On en déduit presque immédiatement l'existence d'un foncteur adjoint à gauche du foncteur d'oubli des algèbres de Hopf commutatives internes aux ensembles pointés dans les monoïdes à zéro commutatifs⁵ : il s'agit d'une généralisation de la complétion de Grothendieck usuelle ; voir Atiyah (1967) pour la définition habituelle du complété de Grothendieck d'un monoïde commutatif. On l'obtient par localisation d'un monoïde à zéro à l'ensemble de ses éléments non nuls, de sorte que par exemple si le monoïde à zéro commutatif admet des diviseurs de zéro, alors le groupe abélien (c'est-à-dire l'algèbre de Hopf commutative interne) qui lui correspond, par complétion, est le groupe trivial.

6.3 Algèbre contractée d'un monoïde à zéro

Convention (rappel) : Rappelons que dans ce document, un anneau R est supposé associatif, commutatif et unitaire avec 1_R comme unité ; le zéro de l'anneau étant quant à lui noté 0_R . Une R -algèbre A est supposée associative (mais non nécessairement commutative) et possède une unité (sauf mention explicite) 1. Son zéro est noté 0.

L'objectif principal de ce numéro est de rappeler la notion pertinente d'algèbre d'un monoïde pour un monoïde à zéro sur un anneau donné : en bref, les zéros du monoïde et de l'anneau sont identifiés. Soient R un anneau, et X un ensemble. Comme d'habitude, le support de $f \in R^X$ est l'ensemble $\{x \in X : f(x) \neq 0_R\}$. Soit également M un monoïde à zéro (avec 0_M comme zéro). Considérons l'algèbre du monoïde usuelle $R[M]$ de M sur R , qui est, en tant que R -module, l'ensemble $R^{(M)}$ de toutes les applications de M dans R à support fini, doté du produit de Cauchy usuel (voir par exemple Bourbaki (2007a)). L'algèbre contractée du monoïde (à zéro) M sur R (voir Clifford et Preston (1961); Okniński (1991)) est l'algèbre quotient $R_0[M] = R[M]/R0_M$, où $R0_M$ est l'idéal bilatère $R[(0_M)] = \{\alpha 0_M : \alpha \in R\}$. Ainsi, $R_0[M]$ peut être identifié à l'ensemble

5. Puisque le produit smash munit la catégorie des ensembles pointés d'une structure monoïdale symétrique, on peut naturellement parler de monoïdes commutatifs internes à celle-ci.

Chapitre 6. Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

des sommes (avec un nombre fini de termes non nuls) $\sum_{x \in M_0} \alpha_x x$, sujet à la table de multiplication donnée par la règle

$$x \times y = \begin{cases} xy & \text{si } xy \neq 0_M, \\ 0 & \text{si } xy = 0_M \end{cases}, \quad (6.3)$$

définie sur la base M_0 (la formule (6.3) fournit les constantes de structure, voir Bourbaki (2007a), de l'algèbre $R_0[M]$). Dans ce qui suit, usage est fait de la juxtaposition de préférence à « \times » pour les produits. Par définition, il s'ensuit directement que pour tout monoïde ordinaire M , $R_0[M^0] \cong_{R\text{-alg}} R[M^0]/R0 \cong_{R\text{-alg}} R[M]$. Cette assertion peut être étendue aux quotients de Rees ainsi qu'il suit.

Lemme 6.5. (*Clifford et Preston (1961); Okniński (1991)*) Soient M un monoïde et I un idéal bilatère propre de M . Alors $R_0[M/I] \cong_{R\text{-alg}} R[M]/R[I]$. (Notons que $R[I]$ est l'algèbre du semi-groupe de l'idéal bilatère I , qui peut être vue comme une algèbre sans unité.)

Exemple 6.6. Soient X un ensemble non vide et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit I l'idéal (bilatère) propre de X^* de tous les mots w de longueur $|w| \geq n$. Alors $R_0[X^*/I]$ est l'ensemble de tous les polynômes non commutatifs tronqués à la longueur n (c'est-à-dire que tous les monômes sont de longueur strictement inférieure à n).

La notion d'algèbre contractée d'un monoïde est suffisante pour traiter le problème de la formule de Möbius pour des monoïdes à zéro finis et localement finis (voir le numéro 6.5). Néanmoins des monoïdes à zéro infinis apparaissent également, et des séries formelles doivent être considérées dans ce cas.

Remarque 6.7. Soit R un anneau. L'algèbre contractée $R_0[M]$ du monoïde à zéro M possède une structure naturelle de « bigèbre » au sens suivant (extension évidente de la notion usuelle de bigèbre d'un monoïde ordinaire). Définissons l'homomorphisme de R -modules $\Delta: R_0[M] \rightarrow R_0[M] \otimes_R R_0[M]$ donné par ses valeurs sur la base M_0 : $\Delta(x) = x \otimes x$ pour tout $x \in M_0$, i.e., chaque élément non nul du monoïde M est de type groupe. L'application Δ est à l'évidence coassociative et cocommutative. De plus, Δ est un homomorphisme de R -algèbres puisque $\Delta(xy) = (xy) \otimes (xy) = (x \otimes x)(y \otimes y) = \Delta(x)\Delta(y)$, et $\Delta(1_M) = 1_M \otimes 1_M$. On définit également l'homomorphisme de R -modules suivant $\epsilon: R_0[M] \rightarrow R$ par $\epsilon(x) = 1_R$ pour tout $x \in M_0$. On voit immédiatement que ϵ est une coïunité, et $(R_0[M], \Delta, \epsilon)$ est une cogèbre cocommutative. Supposons que $x, y \in M_0$ tels que $xy = 0_M$ (i.e., M , et donc $R_0[M]$, possèdent des diviseurs de zéro). Alors, avec le coproduit et la coïunité précédentes, $R_0[M]$ n'est pas une bigèbre. En effet, $\epsilon(xy) = \epsilon(0_R) = 0_R \neq 1_R = \epsilon(x)\epsilon(y)$, et donc ϵ n'est pas un homomorphisme de R -algèbres. De plus, ϵ est l'unique choix possible pour faire de $(R_0[M], \Delta, \epsilon)$ une cogèbre. Pour cela, il faut que $\epsilon(x) \otimes \Delta(x) = 1_R \otimes \Delta(x)$ pour tout $x \in M_0$ (d'après l'axiome de la coïunité), ce qui implique que $(\epsilon(x) - 1_R)x = 0$ dans $R_0[M]$, et donc $\epsilon(x) = 1_R$ pour tout $x \in M_0$. En particulier, il n'existe aucune structure de bigèbre sur $R_0[M]$ avec Δ comme coproduit dès que M admet des diviseurs de zéro. A contrario, si $M = N^0$, où N est un monoïde usuel, alors ϵ est un homomorphisme de R -algèbres, et donc $(R_0[M], \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est une bigèbre (où μ est la multiplication, et η est la multiplication externe par des scalaires, de $R_0[M]$) si, et seulement si, M est un monoïde avec un zéro adjoint (ou sans diviseur de zéro); dans ce cas, $R_0[M^0] \cong_{R\text{-alg}} R[M]$, et nous retrouvons la bigèbre d'un monoïde usuelle. Néanmoins nous notons que pour chaque paire $(x, y) \in M_0 \times M_0$ telle que $xy \neq 0_M$, alors $\epsilon(xy) = 1_R = \epsilon(x)\epsilon(y)$, de telle sorte que $(R_0[M], \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ est « proche » d'être une bigèbre. Enfin, si G est un groupe, alors $R_0[G^0] \cong_{R\text{-alg}} R[G]$, et nous retrouvons l'algèbre de Hopf usuelle d'un groupe (avec la structure de bigèbre précédente, et l'antipode évidente).

Remarque 6.8. Il est facile de vérifier que $R_0[M]$ est la R -algèbre (unitaire) librement engendrée par le monoïde à zéro M . Autrement dit, elle est universelle au sens suivant : quelle que soit la

6.4. L'algèbre contractée large d'un monoïde à zéro à décomposition finie

R -algèbre A , et quel que soit l'homomorphisme de monoïdes à zéro ϕ de M dans le monoïde à zéro multiplicatif sous-jacent à A , il existe un unique homomorphisme de R -algèbres $\widehat{\phi}: R_0[M] \rightarrow A$ tel que $\widehat{\phi} \circ j = \phi$ où j est l'inclusion naturelle de M dans $R_0[M]$ (qui est un homomorphisme de monoïdes à zéro de M dans le monoïde à zéro multiplicatif sous-jacent à $R_0[M]$). En d'autres termes, $R_0[\cdot]$ est l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des algèbres sur R dans celle des monoïdes à zéro.

6.4 L'algèbre contractée large d'un monoïde à zéro à décomposition finie

Soit R un anneau, et M un monoïde usuel. L'ensemble de toutes les applications R^M possède une structure naturelle de R -module. Par abus de notation⁶, toute application $f \in R^M$ peut être noté de façon sommatoire $\sum_{x \in M} \langle f | x \rangle x$, où⁷ $\langle f | x \rangle = f(x) = \pi_x(f)$ (π_x est la projection canonique sur Rx). La structure de R -module sous-jacente à l'algèbre $R[M]$ du monoïde M est alors vue comme un sous-module de R^M . Prenons maintenant M un monoïde à zéro. On peut toujours considérer $R[M]$, néanmoins nous souhaiterions identifier 0_M avec le zéro 0 (la fonction identiquement nulle) de R^M comme cela fut fait pour $R_0[M]$. Considérons alors l'ensemble $R0_M = \{f \in R^M : \forall x \neq 0_M, \langle f | x \rangle = 0_R\}$, i.e., $R0_M$ est le sous-module cyclique (monogène) engendré par 0_M . Alors le module quotient $R^M/R0_M$ peut être identifié au R -module R^{M_0} de toutes les sommes « infinies »⁸ $\sum_{x \in M_0} \langle f | x \rangle x$, ou encore à l'espace de toutes les applications de

M_0 dans R , i.e., $R^{M_0} = \{f \in R^M : f(0_M) = 0_R\}$. Ce module quotient est le complété $\widehat{R_0[M]}$ du module topologique $R_0[M]$ équipé de la topologie produit (R reçoit la topologie discrète), également appelée « topologie de la convergence simple » ou « topologie finie »⁹. Remarquons que la topologie quotient de R^{M_0} induite par celle de R^M est équivalente à sa topologie produit.

Rappelons qu'un semi-groupe (respectivement, monoïde) ordinaire M est dit être un *semi-groupe à décomposition finie* (respectivement, *un monoïde à décomposition finie*), ou posséder la *propriété de décomposition finie*, si, et seulement si, il satisfait la condition suivante (équivalente au fait que le produit dans le semi-groupe est à fibres finies)

$$\forall x \in M, |\{(y, z) \in M \times M : yz = x\}| < +\infty . \quad (6.4)$$

Cette condition est appelée *condition (D)* dans Bourbaki (2007a). Si (6.4) est satisfait, alors R^M peut être équipé du produit de Cauchy usuel ou produit de convolution : ainsi la R -algèbre $R[[M]]$ de toutes les séries formelles sur M à coefficients dans R est obtenue, et est également appelée *algèbre large du semi-groupe* (respectivement, *monoïde*) M sur R . Cette notion est maintenant adaptée au cas des monoïdes à zéro.

Définition 6.9. *Un monoïde à zéro M (avec 0_M comme zéro) est dit être un monoïde à zéro à décomposition finie si, et seulement si, il satisfait la condition suivante*

$$\forall x \in M_0 = M \setminus \{0_M\}, |\{(y, z) \in M \times M : yz = x\}| < +\infty . \quad (6.5)$$

6. Quand R^M est doté de la topologie de la convergence simple, R étant discret, la famille $(f(x))_{x \in M}$ est sommable, et $f = \sum_{x \in M} f(x)x$; voir le lemme 5.9 du chapitre 5

7. Rappelons que la notation « $\langle f | x \rangle$ », dite « crochet de Dirac » fut employée avec succès par Marcel-Paul Schützenberger pour développer sa théorie des automates (cf. Berstel et Reutenauer (1988)).

8. Comme dans la note de bas de page 6, on prouve facilement que ces sommes sont en fait des sommes de séries sommables dans la topologie produit de $R^M/R0_M$, avec R discret.

9. En fait $R_0[M]$ est doté de la topologie initiale par rapport aux projections laquelle coïncide avec la topologie produit induite par R^{M_0} sur $R_0[M]$; par un abus déjà mentionné au numéro 2.5 du chapitre 2, nous l'appelons *topologie produit* de $R_0[M]$.

Chapitre 6. Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

Exemple 6.10. Soit P un ensemble partiellement ordonné localement fini (Doubilet et al. (1975); Stanley (2007)), *i.e.*, pour lequel tout intervalle $[x, y] \in \text{Int}(P)$ est fini. Alors le monoïde à zéro $\text{Int}(P) \cup \{0, 1\}$ de l'exemple 6.1.5 est un monoïde à zéro à décomposition finie.

Suivent maintenant quelques résultats évidents énoncés sans preuve.

Lemme 6.11. 1. Soit M un monoïde à zéro qui possède la propriété de décomposition finie en tant que monoïde ordinaire. Alors M est fini.

2. Supposons que M soit un monoïde à décomposition finie. Alors M^0 est un monoïde à zéro à décomposition finie.

3. Supposons que M soit un monoïde à décomposition finie et que I soit un idéal bilatère propre de M . Alors le quotient de Rees M/I est un monoïde à zéro à décomposition finie.

Supposons que M soit un monoïde à zéro à décomposition finie. Soient $f, g \in R^M/R0_M$. Alors nous pouvons définir le produit de Cauchy correspondant :

$$fg = \sum_{x \in M_0} \left(\sum_{yz=x} \langle f | y \rangle \langle g | z \rangle \right) x . \quad (6.6)$$

L'algèbre $R^M/R0_M$ est alors dénotée par $R_0[[M]]$ et appelée l'*algèbre contractée large du monoïde (à zéro) M sur R* . Le R -module $R_0[[M]]$ est la complétion de $R_0[M]$ et, parce que le produit de Cauchy des « séries formelles » dans $R_0[[M]]$ est l'extension continue de sa version polynômiale dans $R_0[M]$ (ce produit est séparément continue et continue en zéro, Bourbaki (2007d)), le lemme suivant est vérifié.

Lemme 6.12. Soit M un monoïde à zéro à décomposition finie. Alors l'algèbre $R_0[[M]]$ est le complété de l'algèbre $R_0[M]$, et, en particulier, $R_0[[M]]$ est une algèbre topologique (séparée complète).

Soient M un monoïde ordinaire et I un idéal bilatère propre de M . Alors le R -module $R^{M/I}/R0$ est isomorphe à l'ensemble des combinaisons linéaires sur R « formelles infinies » $\sum_{x \notin I} \langle f | x \rangle x$, où $f \in R^M$. Maintenant supposons que M soit un monoïde à décomposition finie.

Par le lemme 6.11, M/I est un monoïde à zéro à décomposition finie. Nous pouvons définir les deux algèbres larges $R[[M]]$ et $R_0[[M/I]]$, avec respectivement R^M et $R^{M/I}/R0$ comme ensembles supports. Le produit de $R^{M/I}/R0$ est alors donné par

$$\left(\sum_{x \notin I} \langle f | x \rangle x \right) \left(\sum_{x \notin I} \langle g | x \rangle x \right) = \sum_{x \notin I} \left(\sum_{yz=x} \langle f | y \rangle \langle g | z \rangle \right) x . \quad (6.7)$$

Définissons

$$\begin{aligned} \Phi: R[[M]] &\rightarrow R_0[[M/I]] \\ \sum_{x \in M} \langle f | x \rangle x &\mapsto \sum_{x \notin I} \langle f | x \rangle x . \end{aligned} \quad (6.8)$$

Alors Φ est un homomorphisme de R -algèbres, surjectif et à l'évidence continue (par rapport aux topologies de la convergence simple). De plus $\ker(\Phi) = R[[I]]$, et donc $R_0[[M/I]] \cong_{R\text{-AlgTop}} R[[M]]/R[[I]]$. D'après le lemme 6.12, $R_0[[M/I]]$ est complète (en tant que R -algèbre) pour la topologie produit. En bref nous avons obtenu :

Proposition 6.13. Soient M un monoïde à décomposition finie et I un idéal bilatère propre de M . Alors,

$$\begin{aligned} R_0[[M/I]] &\cong_{R\text{-AlgTop}} \widehat{R_0[M/I]} \\ &\cong_{R\text{-AlgTop}} \widehat{R[[M]]/R[[I]]} . \end{aligned} \quad (6.9)$$

6.5 Monoïdes à zéro localement finis

Afin d'étudier la formule d'inversion de Möbius des monoïdes à zéro, nous devons caractériser les séries inversibles dans l'algèbre contractée large. Cela peut être effectué en exploitant l'opération étoile des séries sans terme constant (*i.e.*, pour lesquelles $\langle f \mid 1_M \rangle = 0$). Cette opération étoile peut facilement être définie quand la topologie sur l'algèbre des séries est donnée par une filtration généralisant la valuation ordinaire. Une classe particulière de monoïdes à zéro permet de définir une telle filtration. Rappelons dans un premier temps des résultats classiques qui seront par la suite étendus au cadre des monoïdes à zéro.

Un monoïde *localement fini* M (Cartier et Foata (1969); Eilenberg (1974)) est un monoïde tel que

$$\forall x \in M, |\{(n, x_1, \dots, x_n) : x = x_1 \cdots x_n, x_i \neq 1_M\}| < +\infty. \quad (6.10)$$

Par exemple, tout monoïde partiellement commutatif libre (Cartier et Foata (1969)) est localement fini. Un monoïde localement fini est évidemment à décomposition finie, mais la réciproque est fautive dans la mesure où tout groupe fini non trivial possède la propriété de décomposition finie, mais n'est pas localement fini car il possède de la torsion. De plus, dans un monoïde localement fini, $xy = 1_M$ entraîne $x = y = 1_M$, ou, en d'autres termes, $M \setminus \{1_M\}$ est un semi-groupe (et en fait un semi-groupe localement fini en un sens naturel), ou, de façon équivalente, le seul élément inversible de M est son identité (de telles monoïdes sont parfois appelés *conicaux*, Cohn (1995), terminologie provenant des monoïdes ordonnés).

Remarque 6.14. Dans Shevrin (1965); Brown (1968) les auteurs – L. N. Shevrin et T. C. Brown – utilisent une autre notion, bien connue en algèbre universelle. Ils appellent *localement fini* un semi-groupe dans lequel tout sous-semi-groupe finiment engendré est fini. Ce concept est complètement différent de celui utilisé dans ce manuscrit lequel provient de Eilenberg (1974).

Lorsque M est localement fini, la R -algèbre $R[[M]]$ peut être équipée d'une *opération étoile* définie pour toute *série propre* f (*i.e.*, telle que $\langle f \mid 1_M \rangle = 0_R$) par

$$f^* = \sum_{x \in M} \left(\sum_{n \geq 0} \sum_{x_1 \cdots x_n = x} \langle f \mid x_1 \rangle \cdots \langle f \mid x_n \rangle \right) x$$

(*i.e.*, par $f^* = \sum_{n \in \mathbb{N}} f^n$). Il s'ensuit que l'*idéal d'augmentation* $\mathfrak{M} = \{f \in R[[M]] : f \text{ est propre}\}$,

noyau de l'application d'augmentation usuelle $\epsilon(f) = \langle f \mid 1_M \rangle$ pour tout $f \in R[[M]]$, possède la propriété que $1 + \mathfrak{M}$ est un groupe (pour la multiplication; l'inverse de $1 - f \in 1 + \mathfrak{M}$, quand f est propre, est précisément f^*), appelé *groupe de Magnus* (voir Duchamp et Krob (1990) par exemple). Pour ce type de monoïdes, nous pouvons définir une notion naturelle de *fonction d'ordre*. Soit $x \in M$, alors $\omega_M(x) = \max\{n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_n \in M \setminus \{1_M\}, x = x_1 \cdots x_n\}$. Par exemple, si M est un monoïde partiellement commutatif libre $M(X, C)$, alors $\omega_M(w)$ est la longueur $|w'|$ de $w' \in X^*$ élément quelconque de la classe w .

Adaptons cette situation au cas des monoïdes à zéro. Dans ce qui suit, si M est un monoïde (ordinaire ou avec zéro), alors $M^+ = M \setminus \{1_M\}$. Un *monoïde à zéro localement fini* (voir Ésik (2008) pour une notion similaire) est un monoïde à zéro M tel que

$$\forall x \in M_0, |\{(n, x_1, \dots, x_n) : x = x_1 \cdots x_n, x_i \neq 1_M\}| < +\infty. \quad (6.11)$$

Un monoïde à zéro localement fini est évidemment également un monoïde à zéro à décomposition finie. Encore une fois, comme pour les monoïdes usuels, la réciproque ne tient pas. Par ailleurs, si M est un monoïde localement fini et I est un idéal bilatère propre de M , alors le quotient de Rees M/I est un monoïde à zéro localement fini.

Contre-exemple 6.15. Le monoïde à zéro $\text{Int}(P) \cup \{0, 1\}$ d'un ensemble partiellement ordonné non vide localement fini n'est pas un monoïde à zéro localement fini puisque pour chaque $x \in P$, $1 \neq [x, x] = [x, x] \cdot [x, x]$.

Comme dans le cas classique, on peut définir une notion naturelle de *fonction d'ordre* pour un monoïde à zéro localement fini : soit $x \in M_0$, alors $\omega_M(x) = \max\{n \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_n \in M^+, x = x_1 \cdots x_n\}$ (on utilise la notation « $\omega(x)$ » lorsque le risque de confusion est faible). Ainsi $\omega(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1_M$. De plus, pour tout $x \in M_0$, si $x = yz$, alors $\omega(x) \geq \omega(y) + \omega(z)$. Si M est un monoïde localement fini et I est un idéal bilatère propre de M , alors nous savons déjà que M/I est un monoïde à zéro localement fini, et plus précisément pour tout $x \in M \setminus I$, $\omega_{M/I}(x) = \omega_M(x)$.

Exemple 6.16. Soit $M = X^*/I$. Alors $\omega_{M/I}(w) = |w|$ pour tout $w \in X^* \setminus I$.

Soit maintenant $f \in R_0[[M]]$ (l'algèbre contractée large de M existe car M est un monoïde à zéro à décomposition finie dans la mesure où c'est un monoïde à zéro localement fini). Nous définissons une *fonction d'ordre* ou *pseudo-valuation* (qui étend la fonction d'ordre ω_M de M) : $\omega(f) = \inf\{\omega_M(x) : x \in M_0, \langle f | x \rangle \neq 0_R\}$, où l'infimum est pris sur $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. En particulier, $\omega(f) = +\infty$ si, et seulement si, $f = 0$. Les assertions suivantes sont satisfaites :

1. $\omega(1) = 0$;
2. $\omega(f + g) \geq \min\{\omega(f), \omega(g)\}$;
3. $\omega(fg) \geq \omega(f) + \omega(g)$.

Introduisons $\mathfrak{M} = \{f \in R_0[[M]] : \langle f | 1_M \rangle = 0_R\} = \{f \in R_0[[M]] : \omega(f) \geq 1\}$. Cet ensemble est évidemment un idéal bilatère de $R_0[[M]]$, appelé – comme dans le cas usuel – l'*idéal d'augmentation*¹⁰. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathfrak{M}_{\geq n} = \{f \in R_0[[M]] : \omega(f) \geq n\}$ (similaire à l'idéal introduit dans la remarque 5.14 du numéro 5.4 du chapitre 5), de telle sorte que $\mathfrak{M}_{\geq 0} = R_0[[M]]$, et $\mathfrak{M}_{\geq 1} = \mathfrak{M}$. Le lemme suivant est évident.

Lemme 6.17. *Pour tout n , $\mathfrak{M}_{\geq n}$ est un idéal bilatère de $R_0[[M]]$, et la suite $(\mathfrak{M}_{\geq n})_n$ est une filtration décroissante, exhaustive et séparante de $R_0[[M]]$, i.e., $\mathfrak{M}_{\geq n+1} \subseteq \mathfrak{M}_{\geq n}$, $\bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{M}_{\geq n} = R_0[[M]]$, et $\bigcap_{n \geq 0} \mathfrak{M}_{\geq n} = (0)$.*

D'après le lemme 6.17, $R_0[[M]]$ avec la topologie \mathcal{F} définie par la filtration $(\mathfrak{M}_{\geq n})_n$ (les idéaux $\mathfrak{M}_{\geq n}$ forment une base locale de voisinages de zéro) est un anneau topologique Hausdorff (notons également que cette topologie est métrisable, voir Bourbarki (2006)), et même une R -algèbre topologique Hausdorff pour R discret.

Remarque 6.18. *On peut facilement montrer que si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(n) = \{x \in M_0 : \omega_M(x) = n\}$ est fini, alors la topologie de la convergence simple et la topologie \mathcal{F} de $R_0[[M]]$ sont équivalentes. Dans tous les cas, la topologie définie par la filtration est toujours plus fine que la topologie produit (en particulier, chaque projection $\pi_x : R_0[[M]] \rightarrow R$ est continue pour la filtration), et peut être même strictement plus fine comme le montre l'exemple suivant.*

Exemple 6.19. Considérons un ensemble dénombrable $X = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ (donc $x_i \neq x_j$ pour tous $i \neq j$). Considérons également le monoïde M défini comme X^* avec un zéro 0 adjoint, soit $M = (X^*)^0$. C'est évidemment un monoïde à zéro localement fini mais le nombre des éléments d'un ordre (strictement positif) donné n'est pas fini (par exemple le nombre de ses éléments

¹⁰ Il s'agit du noyau du caractère d'algèbre $\epsilon : R_0[[M]] \rightarrow R$ donné par $\epsilon(f) = \langle f | 1_M \rangle = \pi_{1_M}(f)$, pour $f \in R_0[[M]]$.

6.6. Opération étoile et formule d'inversion de Möbius

d'ordre 1 est \aleph_0). Nous dénotons comme d'habitude par $|w|$ la longueur usuelle d'un mot de X^* . Maintenant on considère la suite de séries $f_n = \sum_{k=0}^n x_k \in R_0[M] \subset R_0[[M]]$ qui converge vers la somme $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k$ dans $R_0[[M]]$ avec sa topologie produit (f est la fonction caractéristique de l'alphabet X). Mais cette série ne converge pas dans $R_0[[M]]$ avec la topologie définie par la filtration car $\omega(f - f_n) = 1$ pour tout n . Néanmoins f appartient à $R_0[[M]]$ puisque ce dernier est la complétion de $R_0[M]$ pour la topologie produit.

Le lemme suivant est obtenu sans aucune difficulté technique.

Lemme 6.20. *L'algèbre $R_0[[M]]$ avec la topologie \mathcal{F} est complète.*

Remarque 6.21. *Supposons que M soit un monoïde localement fini (avec ou sans zéro) qui est également fini, alors il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\aleph_{\geq n} = (0)$. Dans ce cas, la topologie définie par la filtration coïncide avec la topologie discrète sur $R[[M]] = R[M]$ (ou $R_0[[M]] = R_0[M]$). Aussi, toujours dans ce cas, aucune topologie n'est requise comme expliqué en introduction (numéro 6.1).*

6.6 Opération étoile et formule d'inversion de Möbius

Dans ce numéro, M est supposé être un monoïde à zéro localement fini.

Lemme 6.22. *Pour tout $f \in \mathfrak{M}$, $(1 - f)$ est inversible et $(1 - f)^{-1} = \sum_{n \geq 0} f^n$.*

Démonstration. En premier lieu, $\sum_{n=0}^{+\infty} f^n$ est convergent dans $R_0[[M]]$ (dans la topologie induite par la filtration), et est même sommable, car $\omega(f^n) \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ (voir Bourbarki (2006)). Maintenant pour tout $N \in \mathbb{N}$, $(1 - f) \sum_{n=0}^N f^n = 1 - f^{N+1} \rightarrow 1$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Puisque $\sum_{n \geq 0} f^n$ est sommable, et que $R_0[[M]]$ est une algèbre topologique (complète), nous obtenons asymptotiquement $(1 - f) \sum_{n \geq 0} f^n = 1$. □

D'après le lemme 6.22, pour tout élément $f \in \mathfrak{M}$, nous pouvons définir, comme dans le cas ordinaire, l'opération étoile $f^* = \sum_{n \geq 0} f^n$.

Remarque 6.23. *Supposons que M soit un monoïde localement fini qui est également fini. Alors pour tout $f \in \mathfrak{M}$, f est nilpotent (puisque $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans la topologie discrète). Ainsi dans ce cas particulier, il n'y a aucun besoin de topologie pour calculer f^* , comme dans l'exemple donné en introduction.*

Lemme 6.24. *L'ensemble $1 + \mathfrak{M}$ est un groupe pour la multiplication.*

Démonstration. Il est suffisant de prouver que $\langle f^* \mid 1_M \rangle = 1_R$ pour tout $f \in \mathfrak{M}$. Pour tout $n > 0$, $\langle f^n \mid 1_M \rangle = 0$. Puisque la projection π_{1_M} est continue, nous avons

$$\langle f^* \mid 1_M \rangle = \langle 1 + \sum_{n \geq 1} f^n \mid 1_M \rangle = \langle 1 \mid 1_M \rangle + \sum_{n \geq 1} \langle f^n \mid 1_M \rangle = 1_R. \quad (6.12)$$

□

Chapitre 6. Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

Si M est un monoïde ordinaire localement fini, la *série caractéristique* de M est définie comme la série $\zeta = \sum_{x \in X} x \in R[[M]]$. Si $X \subseteq M$, alors $\underline{X} = \sum_{x \in X} x$ est la *séries caractéristique* de X . Plus généralement, si M est un monoïde à zéro localement fini, alors nous définissons la *série caractéristique* de M par $\zeta_0 = \sum_{x \in M_0} x \in R_0[[M]]$, et si $X \subseteq M$, alors sa série caractéristique est définie par $\underline{X}_0 = \sum_{x \in X_0} x$ où $X_0 = X \setminus \{0_M\}$. Nous sommes maintenant en position d'énoncer la formule d'inversion de Möbius dans le cadre des monoïdes à zéro (localement finis).

Proposition 6.25 (Formule d'inversion de Möbius). *La série caractéristique ζ_0 est inversible.*

Démonstration. Il est suffisant de démontrer que $\zeta_0 \in 1 + \mathfrak{M}$, ce qui est évidemment le cas puisque $\zeta_0 = 1 + \zeta_0^+$, où $\zeta_0^+ = \underline{M^+}_0 = \sum_{x \in M_0 \setminus \{1_M\}} x \in \mathfrak{M}$. \square

Appliquons maintenant plusieurs des résultats précédents aux quotients de Rees. Soient ainsi M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère propre de M de telle sorte que M/I soit un monoïde à zéro localement fini. Dénotons par \mathfrak{M}_I (respectivement, \mathfrak{M}) l'idéal d'augmentation de M/I (respectivement, de M). Soit $\Phi : R[[M]] \rightarrow R_0[[M/I]]$ l'épimorphisme de R -algèbres défini dans l'équation (6.8). Nous savons qu'il est continu lorsque $R[[M]]$ et $R_0[[M/I]]$ ont tous deux la topologie de la convergence simple. Il est également continu pour les topologies induites par les filtrations $(\mathfrak{M}_{\geq n})_n$ et $((\mathfrak{M}_I)_{\geq n})_n$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$, alors pour tout $f \in \mathfrak{M}_{\geq n}$, $\Phi(f) \in ((\mathfrak{M}_I)_{\geq n})$. Il admet une section s de $R_0[[M/I]]$ dans $R[[M]]$ (donc $\Phi(s(f)) = f$ pour tout $f \in R_0[[M/I]]$) définie par $\langle s(f) \mid x \rangle = \begin{cases} \langle f \mid x \rangle & \text{si } x \notin I, \\ 0_R & \text{sinon.} \end{cases}$ Cette application est évidemment un homomorphisme de R -modules mais en général pas un homomorphisme d'anneaux.

Lemme 6.26. *Soit $f \in 1 + \mathfrak{M}_I$, alors $s(f) \in 1 + \mathfrak{M}$, et $f^{-1} = \Phi(s(f))^{-1}$.*

Démonstration. Puisque $\langle f \mid 1_{M/I} \rangle = 1_R$, alors $\langle s(f) \mid 1_M \rangle = 1_R$ (car $1_{M/I} = 1_M$). Ainsi $s(f) \in 1 + \mathfrak{M}$. Donc $s(f)^{-1} \in 1 + \mathfrak{M}$, et $\Phi(s(f)^{-1}) = \Phi(s(f))^{-1}$ (car Φ est un homomorphisme d'anneaux). Finalement, $f\Phi(s(f))^{-1} = \Phi(s(f))\Phi(s(f))^{-1} = 1$ et $\Phi(s(f))^{-1}$ est un inverse à droite de f . On montre de façon identique qu'il est aussi un inverse à gauche. \square

Dans le cas ordinaire, *i.e.*, lorsque M est un monoïde (localement fini), l'inverse $(-\zeta^+)^*$ de la série caractéristique $\zeta = 1 + \zeta^+$ est appelée la *série de Möbius*, et est dénoté par $\mu(M)$. Par analogie, on définit la *série de Möbius* d'un monoïde à zéro localement fini M comme la série $\mu_0(M) = (-\zeta_0^+)^*$, inverse de $\zeta_0 = 1 + \zeta_0^+$ dans $R_0[[M]]$. Ainsi elle satisfait $\mu_0(M)\zeta_0 = \zeta_0\mu_0(M) = 1$.

Lemme 6.27. *Soient M un monoïde localement fini et I un idéal bilatère propre de M . Alors, $\mu_0(M/I) = \Phi(\mu(M))$. De plus, si $\langle \mu(M) \mid x \rangle = 0_R$ pour tout $x \in I$, alors $\mu_0(M/I) = \mu(M)$.*

Démonstration. Le quotient de Rees M/I est un monoïde à zéro localement fini, et ainsi sa série de Möbius existe. De plus, $\zeta_0 = \underline{M/I}_0 \in 1 + \mathfrak{M}_I$, et d'après le lemme 6.26, $s(\zeta_0) \in 1 + \mathfrak{M}$, et $(\zeta_0)^{-1} = \Phi(s(\zeta_0))^{-1}$. Nous avons

$$\begin{aligned} s(\zeta_0) &= \sum_{x \notin I} x \\ &= \underline{M \setminus I} \\ &= \underline{M} - \underline{I} \\ &= \zeta - \underline{I}. \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.6. Opération étoile et formule d'inversion de Möbius

La série $\zeta^+ - \underline{I} \in R[[M]]$ appartient à l'idéal d'augmentation \mathfrak{M} de $R[[M]]$ (comme nous le savons déjà), donc la série $\zeta - \underline{I} = 1 + \zeta^+ - \underline{I}$ est inversible dans $R[[M]]$ avec inverse $(\underline{I} - \zeta^+)^*$. Ainsi, d'après le lemme 6.26,

$$\begin{aligned}
\mu_0(M/I) &= \Phi(s(\zeta_0))^{-1} \\
&= \Phi(s(M/I_0))^{-1} \\
&= \Phi(s(\underline{M}/\underline{I}_0))^{-1} \\
&= \Phi((\underline{I} - \underline{M}^+)^*) \\
&= \Phi((\underline{I} - \zeta^+)^*) \\
&= (\Phi(\underline{I} - \zeta^+))^* \\
&\quad (\text{car } \Phi \text{ est un homomorphisme d'algèbres, continu pour les filtrations}) \quad (6.14) \\
&= \underbrace{(\Phi(\underline{I}) - \Phi(\zeta^+))^*}_{=0} \\
&= \Phi((- \zeta^+)^*) \\
&= \Phi((1 + \zeta^+)^{-1}) \\
&= \Phi(\zeta^{-1}) \\
&= \Phi(\mu(M)) .
\end{aligned}$$

Maintenant, si $\langle \mu(M) \mid x \rangle = 0_R$ pour tout $x \in I$, alors $\mu_0(M) = \Phi(\mu(M)) = \mu(M)$. \square

Corollaire 6.28. *Soit X un ensemble non vide. Soit I un idéal bilatère propre de X^* . Alors,*

$$\mu_0(X^*/I) = \begin{cases} \mu(X^*) & \text{si } X \cap I = \emptyset , \\ \mu((X \setminus I)^*) & \text{si } X \cap I \neq \emptyset . \end{cases} \quad (6.15)$$

Démonstration. Nous pouvons appliquer le lemme 6.27 pour obtenir $\mu_0(X^*/I) = \Phi(\mu(X^*))$. D'après Cartier et Foata (1969), $\mu(X^*) = 1 - \sum_{x \in X} x$. Si $X \cap I = \emptyset$, alors $\mu_0(X^*/I) = \Phi(\mu(X^*)) = \mu(X^*)$, et si $X \cap I \neq \emptyset$, alors posons $Y = X \setminus I$. Nous avons $\Phi(\mu(X^*)) = 1 - \sum_{y \in Y} y = \mu(Y^*)$. \square

Exemple 6.29.

1. Soit X un ensemble non vide. Soit $I = \{w \in X^* : \exists x \in X, |w|_x \geq 2\}$. L'ensemble X^*/I consiste en tous les mots standard, *i.e.*, les mots sans répétition d'aucune lettre. Alors d'après le corollaire 6.28, $\mu_0(X^*/I) = \mu(X^*) = 1 - \underline{X}$ comme annoncé au numéro 6.1.
2. Soit X un ensemble. Une congruence \equiv de X^* est dite être *multi-homogène* (Duchamp et Krob (1990, 1994)) si, et seulement si, $w \equiv w'$ implique $|w|_x = |w'|_x$ pour tout $x \in X$. Le monoïde quotient X^*/\equiv de X^* par une congruence multi-homogène est dit *monoïde multi-homogène*. Par exemple, tout monoïde partiellement commutatif libre, les monoïdes plaxique (Lascoux et Schützenberger (1981)), Chinois (Duchamp et Krob (1994)), hypoplaxique (Krob et Thibon (1997); Novelli (2000)) et sylvestre (Hivert *et al.* (2002)) sont multi-homogènes. Un tel monoïde $M = X^*/\equiv$ est localement fini et admet donc une fonction de Möbius μ avec $\mu(1_M) = 1$ et $\mu(x) = -1$ pour tout $x \in X$. Un épimorphisme Ev de M sur le monoïde commutatif libre $\mathbb{N}^{(X)}$, l'*image commutative*, est donné par $\text{Ev}(w) = \sum_{x \in X} |w|_x \delta_x$, où δ_x la fonction indicatrice de x . Tout idéal bilatère propre I de $\mathbb{N}^{(X)}$ donne lieu à un idéal bilatère propre $\text{Ev}^{-1}(I)$ de M . Soit par exemple $I = \{f \in \mathbb{N}^{(X)} : \sum_{x \in X} f(x) \geq 2\}$. Alors, en tant qu'ensembles, $M/\text{Ev}^{-1}(I) = \{0, 1_M\} \cup X$ et $\mu_0(M/\text{Ev}^{-1}(I)) = 1 - \underline{X}$.

6.7 Quelques remarques au sujet des séries de Hilbert

Maintenant, soient X un ensemble fini, et I un idéal bilatère propre de X^* . Pour tout $S \subseteq X^*$ ou $S \subseteq X^*/I$, nous introduisons la notation $S(n) = \{w \in S : |w| = n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (Signalons que la notation $M(n)$ est consistante avec celle donnée dans la remarque 6.18 pour $M = X^*/I$.) Soit un corps \mathbb{K} . Définissons $A_n = \mathbb{K}X^*(n)$ (le \mathbb{K} -espace vectoriel librement engendré par $X^*(n)$), et $B_n = \mathbb{K}(X^*/I)(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de telle sorte que $\mathbb{K}[X^*] = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ et $\mathbb{K}_0[X^*/I] = \bigoplus_{n \geq 0} B_n$. (Notons que pour tous $w, w' \in X^*/I$, nous avons $|ww'| = |w| + |w'|$ si $ww' \neq 0$, de sorte que $B_m B_n \subseteq B_{m+n}$ puisque $0 \in B_i$ pour tout i .) Comme X est fini, pour tout entier naturel, $X^*(n)$ et $(X^*/I)(n)$ sont finis, et donc A_n et B_n sont des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. De plus $\dim(B_n) = \dim(A_n) - |I(n)|$ parce que $(X^*/I)(n) = X^*(n) \setminus I(n)$. Donc en particulier les séries de Hilbert-Poincaré ou, simplement, séries de Hilbert¹¹ respectives sont reliées par

$$\mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}_0[X^*/I]}(\mathbf{t}) = \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[X^*]}(\mathbf{t}) - \sum_{n \geq 0} |I(n)| \mathbf{t}^n = \frac{1}{1 - |X| \mathbf{t}} - \sum_{n \geq 0} |I(n)| \mathbf{t}^n. \quad (6.16)$$

Notons que puisque I est un idéal propre, $I(0) = \emptyset$, et $\sum_{n \geq 1} |I(n)| \mathbf{t}^n$ peut être interprétée de façon assez naturelle comme la série de Hilbert de l'idéal $\mathbb{K}[I] = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbb{K}I(n)$ (il s'ensuit également que $\mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[I]}(\mathbf{t})$ n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$). Nous avons

$$\mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}_0[X^*/I]}(\mathbf{t}) = \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[X^*]}(\mathbf{t}) - \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[I]}(\mathbf{t}). \quad (6.17)$$

Cette équation peut être retrouvée depuis l'équation (6.13), à savoir $s(\zeta_0) = \zeta - \underline{I}$, en utilisant une application d'évaluation. Supposons maintenant que \mathbb{K} soit un corps de caractéristique zéro, et que \mathbf{t} soit une variable. Soit $e: X^* \rightarrow \{\mathbf{t}^i : i \in \mathbb{N}\}$ l'unique homomorphisme de monoïdes tel que $e(x) = \mathbf{t}$ pour tout $x \in X$. Nous l'étendons comme une application \mathbb{Z} -linéaire de $\mathbb{Z}[X^*]$ dans $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$ par $e\left(\sum_{w \in X^*} n_w w\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{w \in X^*, |w|=n} n_w\right) \mathbf{t}^n$. De plus, puisque X est fini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X(n)$ est également fini (de cardinal $|X|^n$), et donc pour toute série $f = \sum_{w \in X^*} n_w w \in \mathbb{Z}[[X^*]]$, par sommabilité, nous avons $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$, où $f_n = \sum_{w \in X^*(n)} n_w w \in \mathbb{Z}[X^*]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et étendons e (par continuité) comme application linéaire de $\mathbb{Z}[[X^*]]$ dans $\mathbb{Z}[[\mathbf{t}]]$ par $e(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e(f_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{w \in X^*(n)} n_w\right) \mathbf{t}^n$. Maintenant, en appliquant e sur les deux membres de

11. Soit $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un R -module gradué, où pour tout n , M_n est un R -module libre de rang fini. La *série de Hilbert de M* (en la variable \mathbf{t}) est définie par $\mathcal{Hilb}_M(\mathbf{t}) = \sum_{n \geq 0} \dim(M_n) \mathbf{t}^n$ où $\dim(M_n)$ désigne le rang de M_n , qui est bien défini puisque l'anneau R est unitaire et commutatif de sorte que tout module libre admet un rang unique.

6.8. Conclusion et perspectives

l'équation (6.13), nous obtenons (notons que $s(\zeta_0)$, ζ et I appartiennent à $\mathbb{Z}[[X^*]]$)

$$\begin{aligned}
& e(s(\zeta_0)) &= e(\zeta) - e(I) \\
\Leftrightarrow e\left(\sum_{w \notin I} w\right) &= e\left(\sum_{w \in X^*} w\right) - e\left(\sum_{w \in I} w\right) \\
\Leftrightarrow e\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X(n) \setminus I(n)}{n}\right) &= e\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{X(n)}{n}\right) - e\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{I(n)}{n}\right) \quad (6.18) \\
\Leftrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} (|X(n)| - |I(n)|) \mathbf{t}^n &= \sum_{n \in \mathbb{N}} |X(n)| \mathbf{t}^n - \sum_{n \in \mathbb{N}} |I(n)| \mathbf{t}^n \\
\Leftrightarrow \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}_0[X^*/I]}(\mathbf{t}) &= \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[X]}(\mathbf{t}) - \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[I]}(\mathbf{t}).
\end{aligned}$$

La dernière égalité n'est rien d'autre que la relation évidente entre les séries génératrices ordinaires des classes combinatoires $X^* \setminus I$, X^* et I , où la notion de taille est la longueur des mots (voir Flajolet et Sedgewick (2009), théorème I.5 « Spécifications implicites »).

Exemple 6.30.

1. Supposons que $I = \{w \in X^* : \exists x \in X, |w|_x \geq 2\}$. Il est clair que pour tout $n > |X|$,

$$|I(n)| = X(n). \text{ Pour tout } n \leq |X|, |(X^*/I)(n)| = \prod_{i=0}^{n-1} (|X| - i) = |X|^{\underline{n}} \text{ (en particulier,}$$

$$|(X^*/I)(0)| = |\{\epsilon\}| = 1, \text{ et } |(X^*/I)(1)| = |X|). \text{ Il s'ensuit que } \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}_0[X^*/I]}(\mathbf{t}) = \sum_{n=0}^{|X|} |X|^{\underline{n}} \mathbf{t}^n$$

(où on désigne par $x^{\underline{n}}$ la n -ème puissance factorielle descendante de x), et donc $\mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[I]}(\mathbf{t}) = \sum_{n \geq 2} (|X|^n - |X|^{\underline{n}}) \mathbf{t}^n$.

2. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geq 1$. Soit $I = \{w \in X^* : |w| > n_0\}$. Alors $\mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}_0[X^*/I]}(\mathbf{t}) =$

$$\sum_{n=0}^{n_0} |X|^n \mathbf{t}^n, \mathcal{Hilb}_{\mathbb{K}[I]}(\mathbf{t}) = \sum_{n \geq n_0+1} |X|^n \mathbf{t}^n.$$

6.8 Conclusion et perspectives

La notion pertinente d'algèbre pour un monoïde à zéro est celle d'algèbre contractée, connue dans la littérature, qui n'est autre que l'algèbre usuelle du monoïde dans laquelle sont identifiés le zéro de l'anneau et celui du monoïde. En tant que module, il s'agit de l'espace des fonctions finiment supportées définies sur le monoïde, sauf en zéro, et à valeurs dans l'anneau. Ce module peut être équipé de la topologie produit (où l'anneau de base est discret), et, lorsque la multiplication du monoïde est à fibres finies (pour ses valeurs non nulles), on peut considérer son complété, qui est en fait une algèbre, l'*algèbre contractée large* du monoïde à zéro, très similaire à l'algèbre large d'un monoïde usuel à décomposition finie. Une fois équipée d'une topologie induite par une valuation (dans le cas de monoïdes à zéro localement finis), cette algèbre (devenue topologique) convient parfaitement aux calculs de l'étoile d'une série sans terme constant, et à la formule d'inversion de Möbius.

Comme parfois, après coup, on s'aperçoit que les théories développées n'ont pas exactement le niveau de généralité souhaité. C'est exactement le cas ici. Les monoïdes à zéro sont assez similaires aux (petites) catégories, excepté le fait qu'ils disposent d'une identité totale (et non de plusieurs identités locales comme pour les catégories). Ce n'est pas surprenant dans la mesure où un monoïde à zéro est un monoïde interne à la catégorie des ensembles et fonctions partielles, alors qu'une petite catégorie (avec ensemble d'objets fixé) est un monoïde interne à

Chapitre 6. Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro

la catégorie des (multi-)graphes orientés dont l'ensemble des sommets est précisément celui des objets (catégorie monoïdale pour le produit fibré des graphes, au-dessus de l'ensemble commun des sommets, pour les applications de domaine et codomaine). Il semble donc que les notions d'algèbres contractée et contractée large puissent être adaptées sans trop de difficultés au cas des petites catégories, et notamment, les catégories dites de Möbius (Content *et al.* (1980); Lawvere et Menni (2010)). Un prolongement possible de ces travaux est donc d'effectuer cette généralisation (et, en particulier, de définir l'analogue des quotients de Rees pour les catégories).

Ce chapitre peut être vu comme prolongement de l'étude des espaces de séries, avec la topologie produit, menée au chapitre 5. En quelque sorte, cette étude s'achève ici dans le manuscrit. Au chapitre 7, nous nous intéressons à l'algèbre de Weyl réalisée comme une algèbre d'opérateurs continus sur un espace de Fréchet. Du coup, le prochain chapitre est à rapprocher des chapitres 3 et 4 pour ce qui concerne l'aspect algèbre de Fréchet, et au chapitre 5 pour la caractérisation des opérateurs linéaires et continus par des matrices infinies mais finies en ligne.

Chapitre 7

Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

Se anihilacion est possible, creacion de niant est possible.

NICOLE ORESME, *Essai sur la vie et les ouvrages de Nicole Oresme. Thèse pour le Doctorat ès-lettres(1857)*, Francis Meunier

Sommaire

7.1	Introduction	89
7.2	Les algèbres de Weyl	91
7.3	Ordre normal et nombres de Stirling généralisés	93
7.4	Représentations	95
7.5	Exponentielle de mots bosoniques « conjugués » $(a^\dagger)^{m-n}a(a^\dagger)^n$. . .	96
7.6	Sous-groupes à un paramètre et matrices de Stirling	101
7.7	Conclusion et perspectives	103

Ce chapitre est une version allongée des sections 1 à 3 de l'article Duchamp et al. (2010).

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous employons les outils développés aux chapitres 3 (sous-groupes à un paramètre dans les algèbres de Fréchet), 4 (algèbres des matrices finies en ligne et triangulaires inférieures) et 5 (isomorphisme entre les applications linéaires et continues sur les séries et les matrices finies en ligne).

En partant de l'algèbre de Weyl, si fondamentale en physique quantique, nous montrons notamment comment l'ordonnancement des opérateurs non commutatifs, intrinsèque à cette algèbre, donne lieu à des généralisations des nombres de Stirling de la combinatoire. Ceux-ci peuvent être exprimés en termes de matrices infinies, mais à lignes finies (introduites au numéro 4.3 du chapitre 4), lesquelles peuvent être considérées comme des endomorphismes continus sur l'espace des séries formelles (voir le numéro 5.5 du chapitre 5).

En physique quantique de la seconde quantification, les systèmes de particules bosoniques sont observés à l'aide d'opérateurs (non commutatifs) bosoniques. Ceux-ci sont engendrés par deux opérateurs fondamentaux : un opérateur de création a^\dagger , qui permet d'ajouter une particule au système, et un opérateur d'annihilation a , qui retire une particule, lesquels, bien que ne

Chapitre 7. Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

commutant pas, satisfont à la relation de commutation particulière¹ $[a, a^\dagger] = \text{Id}$. On le voit, la non commutativité est ici très bien contrôlée et ne diffère que très peu de la commutativité. Ce faible défaut de commutativité fait de l'algèbre engendrée par ces opérateurs, l'*algèbre de Weyl*, un objet algébrique et combinatoire privilégié.

L'algèbre de Weyl dispose d'une base (algébrique²) particulière, dite de l'*ordre normal*, donnée par les « mots »³ $(a^\dagger)^i a^j$; l'intérêt des physiciens pour cette base provient de ce que l'opérateur d'annihilation admet une analyse spectrale non triviale. Ainsi apparaît naturellement le *problème* dit de l'*ordre normal* consistant en l'écriture, dans la base de l'ordre normal, des opérateurs bosoniques.

Ce type de physique vise également à comprendre le comportement dynamique d'un système de particules au cours du temps (ou par rapport à la température). Ceci est réalisé par l'étude de l'opérateur d'évolution du système, obtenu à partir de son hamiltonien Ω . Un tel opérateur d'évolution, produit par intégration d'une équation différentielle (en dimension infinie), se révèle être, en général, un semi-groupe $e^{t\Omega}$ à un paramètre.

Les opérateurs bosoniques sont habituellement représentés comme opérateurs sur un espace de Hilbert (de dimension hilbertienne infinie dénombrable), et a^\dagger est non borné. Dans ce chapitre, nous introduisons une autre représentation, dite de *Bargmann-Fock* : ces opérateurs vivent dans une algèbre de Fréchet, celle des matrices bi-infinies (indicées par $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$) et finies en ligne, et peuvent ainsi être considérés comme des applications continues sur l'espace $\mathbb{K}[[x]]$ des séries formelles. L'opérateur de création est alors incarné sous la forme de la multiplication par la variable x , alors que a est représenté par la dérivation (formelle) des séries formelles. Aux chapitres 3 et 4 nous avons obtenu un certain nombre de résultats positifs concernant la fonction exponentielle, et ses propriétés, dont nous tirons partie dans le présent chapitre pour donner un sens rigoureux aux opérateurs d'évolution $e^{t\Omega}$, et, dans le cas où on a au plus une annihilation, pour les calculer explicitement (voir le numéro 7.5).

Précisément afin de déterminer l'exponentielle⁴ $e^{t\Omega} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \Omega^n$, on peut tirer profit de l'écriture des puissances Ω^n dans la base de l'ordre normal. Réciproquement, dans ce chapitre nous montrons également que l'opérateur d'évolution $e^{t\Omega}$ résout le problème de l'ordre normal pour Ω^n (pour être exact et plus précis, cela ne concerne que ces opérateurs qui sont gradués ; cf. numéro 7.6).

Organisation du chapitre

Dans le numéro 7.2 sont énoncés les définitions et résultats basiques concernant les algèbres de Weyl (on introduit notamment une graduation sur l'algèbre de Weyl d'indice 1, très utile pour la suite ; cf. le numéro 7.2.2). Nous introduisons ensuite la notion d'ordre normal et les matrices de Stirling généralisées correspondant grossièrement à une série génératrice des coefficients, dans la base de l'ordre normal, des puissances d'un opérateur bosonique (le numéro 7.3). Au numéro 7.4 nous prouvons que la représentation matricielle d'un opérateur bosonique (lui-même vu au travers de sa représentation de Bargmann-Fock) est une matrice infinie finie en ligne, et donc un opérateur continu. Cela nous permet en outre de démontrer que les opérateurs homogènes (par rapport à la graduation donnée au numéro 7.2.2) de degré positif (ou nul) admettent une exponentielle (et donc l'opérateur d'évolution associé est correctement défini). Nous calculons explicitement ces opérateurs d'évolution dans le cas de « mots » bosoniques ayant au

1. C'est précisément cette relation de commutation qui caractérise les particules de type bosonique.
2. Cela peut sembler remarquable dans la mesure où l'algèbre de Weyl est de dimension infinie, mais en fait il s'agit d'un résultat général concernant les algèbres de polynômes gauches.
3. Une définition précise de cela est présentée au numéro 7.3.
4. Pour le moment, cette notation exponentielle n'est pas rigoureusement définie !

7.2. Les algèbres de Weyl

plus une annihilation (voir le numéro 7.5). Enfin, au numéro 7.6, nous énonçons le théorème 7.17 lequel relie les matrices de Stirling généralisées (numéro 7.3) aux sous-groupes à un paramètre (vus au chapitre 3).

7.2 Les algèbres de Weyl

7.2.1 Définition formelle et premières propriétés

Convention : Une fois n'est pas coutume, jusqu'au numéro 7.5 non inclus, sauf précision, \mathbb{K} désigne un corps de caractéristique zéro. À partir du numéro 7.5, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. La \mathbb{K} -algèbre de Weyl $A_n(\mathbb{K})$ (ou, plus simplement, A_n) d'indice n sur \mathbb{K} est l'algèbre associative unifière sur \mathbb{K} définie par $2n$ générateurs $\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i, i = 1, \dots, n$ et les relations

$$\begin{aligned} [\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i] &= 1 \\ [\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j] &= [\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j] = [\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_j] = 0 \text{ pour } i \neq j \end{aligned} \tag{7.1}$$

où $i, j \in [1 \cdots n]$. Autrement dit, si on note R l'union des relations (7.1), $A_n(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\langle \{\mathbf{p}_i : i \in [1 \cdots n]\} \cup \{\mathbf{q}_i : i \in [1 \cdots n]\} \rangle / (R)$, où (R) désigne l'idéal bilatère engendré par R . En particulier, $A_0(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$. Sa dimension de Gelfand-Kirillov est égale à $2n$ (voir Mac Connell et al. (2001)), alors que sa dimension de Krull est n (voir Gabriel et Rentzchler (1967)). C'est un anneau simple (ses seuls idéaux bilatères sont (0) et A_n), ainsi qu'un domaine de Ore bilatère (Ore (1933); Mac Connell et al. (2001); Li (2002); Goodearl et Warfield, Jr. (2004)), de sorte qu'elle admet donc un corps gauche de fractions (Cohn (1995)). Cette algèbre non commutative apparaît dans le cadre de la mécanique quantique (Friedrichs (1953)). Si on note ∂_i la dérivation \mathbb{K} -linéaire de l'algèbre de polynômes (commutatifs) $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ par rapport à la variable \mathbf{x}_i pour $i = 1, \dots, n$, alors l'anneau des opérateurs \mathbb{K} -linéaires sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n]$ engendrés par les dérivations ∂_i et les opérateurs de multiplication par les variables \mathbf{x}_i est isomorphe à $A_n(\mathbb{K})$ (voir Björk (1979)). Cette réalisation, ou l'un de ses avatars, reviendra souvent dans ce chapitre ainsi qu'au chapitre 8, avec $n = 1$.

Intéressons-nous justement à $A_1(\mathbb{K})$. Dans ce cas, on note $\mathbf{a} = \mathbf{p}_1$ et $\mathbf{a}^\dagger = \mathbf{q}_1$ (le signe « \dagger » rappelle la transposition, et est une réminiscence des opérateurs quantiques sur des espaces hilbertiens), \mathbf{a}^\dagger est appelé *opérateur (d'échelle) montant* et \mathbf{a} , *opérateur (d'échelle) descendant* pour des raisons qui deviendront claires au chapitre 8 (mais déjà dans la remarque 7.2). La terminologie tirée de la physique quantique est respectivement *opérateur de création* et *d'annihilation*. Un mot quelconque de $\{\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger\}^*$ est parfois appelé *mot bosonique* toujours en référence à la physique sous-jacente. La combinatoire de l'algèbre de Weyl d'indice 1 est déjà assez riche (voir Stanley (1988); Fomin (1994)).

Supposons un instant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On remarque immédiatement, à cause de la trace, que l'on ne peut pas avoir de représentation matricielle de dimension finie (strictement positive) de $A_1(\mathbb{C})$. Le cas d'une représentation linéaire dans une algèbre de Banach unitaire (complexe et non triviale) tombe également. L'argument est plus difficile et repose sur la notion de dérivation bornée et nilpotente généralisée sur une algèbre de Banach (la preuve se trouve dans Wintner (1947); Wielandt (1949); Sakai (1991)). En fait, si on veut une représentation linéaire fidèle de $A_1(\mathbb{C})$, alors on a le choix entre la représentation, dite de *Bargmann-Fock*, par des opérateurs linéaires non bornés sur un espace de Hilbert (séparable) de fonctions analytiques (voir Bargmann (1961)), et celle, présentée dans ce chapitre au numéro 7.4, comme opérateurs linéaires et continus sur une algèbre de Fréchet.

Remarque 7.1. *Il est possible de représenter \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger comme opérateurs dont les domaines respectifs sont inclus dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Si on désigne par \mathcal{H}_0 l'espace pré-hilbertien engendré par*

Chapitre 7. Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

$\{\delta_n : n \in \mathbb{N}\}$, alors on peut définir $\mathbf{a}^\dagger(\delta_n) = \sqrt{n+1}\delta_{n+1}$ et $\mathbf{a}(\delta_{n+1}) = \sqrt{n+1}\delta_n$, $\mathbf{a}\delta_0 = 0$ pour tout entier n .

Notons $\pi: \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle \rightarrow A_1(\mathbb{K})$ l'épimorphisme canonique. Il est possible de montrer qu'une base (algébrique) de $A_1(\mathbb{K})$ est donnée par $(e_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ où $e_{i,j} = \pi((\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j)$, voir le numéro 7.3 (en fait, un résultat de ce type existe dans un cadre plus général, Kassel (1995)); elle est traditionnellement appelée *base de l'ordre normal*. Cette base est importante en physique théorique, car lorsque \mathbf{a} est réalisé comme un opérateur agissant sur un espace de Hilbert, il dispose de valeurs spectrales non nulles (ce qui n'est pas le cas de \mathbf{a}^\dagger) et ses vecteurs propres sont appelés *états cohérents*. Les constantes de structure sont calculées dans Blasiak et al. (2008) (et, dans un cadre plus général, dans Kassel (1995))

$$e_{i_1, j_1} e_{i_2, j_2} = \sum_{k \geq 0} k! \binom{j_1}{k} \binom{j_2}{k} e_{i_1+i_2-k, j_1+j_2-k} \cdot \quad (7.2)$$

Notons que la somme dans le membre de droite de l'équation (7.2) est une fausse somme infinie puisqu'il s'avère que l'indice de sommation k parcourt l'intervalle $[0 \cdots \min\{j_1, j_2\}]$ (à cause des coefficients binomiaux).

7.2.2 Graduation de l'algèbre de Weyl

Replaçons-nous pour le moment avec \mathbb{K} un corps de caractéristique zéro. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, posons

$$A_1^{(\ell)}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}\{e_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}, i - j = \ell\} \quad (7.3)$$

c'est-à-dire que $A_1^{(\ell)}(\mathbb{K})$ est le \mathbb{K} -espace vectoriel librement engendré par la base $\{e_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}, i - j = \ell\}$. Si $i - j = \ell$, on dit que ℓ est l'*excès* du monôme $e_{i,j}$. Il est assez clair que nous avons

$$A_1(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\ell \in \mathbb{Z}} A_1^{(\ell)}(\mathbb{K}), \text{ et } A_1^{(\ell_1)}(\mathbb{K})A_1^{(\ell_2)}(\mathbb{K}) \subseteq A_1^{(\ell_1+\ell_2)}(\mathbb{K}) \quad (7.4)$$

pour tous $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$. Ce qui fait de $A_1(\mathbb{K})$ une algèbre \mathbb{Z} -graduée.

Il est possible de représenter \mathbf{a} et \mathbf{a}^\dagger comme des opérateurs linéaires sur les séries formelles $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ de la façon suivante : soit $\rho_{BF} \in \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-Alg}}(\mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle, \text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$) défini par $\rho_{BF}(\mathbf{a}) = \frac{d}{dx}$ (la dérivée formelle des séries formelles), et $\rho_{BF}(\mathbf{a}^\dagger): S \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]] \mapsto \mathbf{x}S$ (opérateur de multiplication par \mathbf{x}), que l'on note simplement X . Comme $\rho_{BF}([\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger]) = [\rho_{BF}(\mathbf{a}), \rho_{BF}(\mathbf{a}^\dagger)] = 1$, l'homomorphisme d'algèbres ρ_{BF} passe au quotient modulo l'idéal bilatère engendré par $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] - 1$. On a donc un homomorphisme d'algèbres, toujours noté ρ_{BF} , de $A_1(\mathbb{K})$ dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$.

Remarque 7.2. Cette représentation, dite de Bargmann-Fock⁵, est graduée, lorsqu'elle est restreinte à $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, puisque dans ce cas $\rho_{BF}(\mathbf{a})$ est de degré⁶ -1 , et $\rho_{BF}(\mathbf{a}^\dagger)$ de degré 1 .

En général, on peut associer de nombreux opérateurs de la physique quantique (de la seconde quantification) à des éléments de $A_1(\mathbb{C})$ (le corps des complexes joue un rôle important dans cette discipline). En particulier, étant donné $\Omega \in A_1(\mathbb{C})$, on aimerait considérer son groupe (ou opérateur) d'évolution

$$t \in \mathbb{R} \mapsto e^{t\Omega}$$

5. Bien que ce ne soit pas la même que celle évoquée plus haut dans le texte. Les deux représentations coïncident sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

6. Étant donné deux R -modules gradués, disons sur \mathbb{Z} , $M_i = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M_i^{(k)}$, $i = 1, 2$, on dit que $\phi \in \text{Hom}_{R\text{-Mod}}(M_1, M_2)$ est gradué de degré d si, et seulement si, quels que soient k , et $x \in M_1^{(k)}$, $\phi(x) \in M_2^{(k+d)}$.

7.3. Ordre normal et nombres de Stirling généralisés

lequel procure des renseignements sur l'hamiltonien du système quantique (Friedrichs (1953); Dattoli et al. (1997)). De tels sous-groupes à un paramètre sont importants en dynamique quantique où t joue le rôle du temps ; ou en mécanique statistique quantique où t est la température. Des questions apparaissent à l'endroit de ces objets, parmi lesquelles :

1. Ce groupe est-il défini ? Sur quel domaine ?
2. Quelle combinatoire peut-elle être extraite de la connaissance de ce groupe ?

Nous tachons de répondre, au moins en partie, à ces questions dans ce chapitre. Mais, puisqu'il s'agit de décrire une exponentielle, il nous faut connaître les puissances Ω^n de l'opérateur Ω .

7.3 Ordre normal et nombres de Stirling généralisés

Avant de définir le sous-groupe à un paramètre $t \mapsto e^{t\Omega}$, nous pouvons considérer le problème de l'ordre normal pour les puissances de Ω . Tout $P \in A_1(\mathbb{K})$ peut s'écrire dans la base de l'ordre normal $(e_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$, où $e_{i,j} = \pi((\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j)$ quels que soient i, j . Cela signifie qu'il existe une application bien définie⁷ $s: A_1(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ donnée par $s(P) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle P | e_{i,j} \rangle (\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j$

(nombre fini de termes non nuls), qui permet de relever un opérateur bosonique en un polynôme non commutatif. On remarque que $\pi \circ s$ est l'application identique de $A_1(\mathbb{K})$. Étant donné $\Omega \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$, on définit $\mathcal{N}(\Omega) \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ comme l'unique élément Ω' de la classe de Ω modulo $\ker \pi$ tel que $s(\pi(\Omega)) = \Omega'$, c'est-à-dire $\mathcal{N}(\Omega) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \langle \pi(\Omega) | e_{i,j} \rangle (\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j$ (somme avec un nombre

fini de termes non nuls). Par définition, $\pi(\mathcal{N}(\Omega)) = \pi(\Omega)$, et donc $\rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega))) = \rho_{BF}(\pi(\Omega))$ (puisque $\ker \pi \subseteq \ker \rho$). Bien que $\mathcal{N}(\Omega) \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$, on peut le considérer (et c'est ce que l'on va faire) comme un opérateur, et le même que celui pour Ω , au travers de la représentation de Bargmann-Fock.

Appliquant cela au cas des puissances de $\Omega \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$, on obtient

$$\mathcal{N}(\Omega^n) = \sum_{i,j \in \mathbb{N}} \lambda_n(i,j) (\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j, \quad \lambda_n(i,j) \in \mathbb{K}, \quad i, j, n \in \mathbb{N}. \quad (7.5)$$

En toute généralité, il s'agit d'un problème à trois paramètres (i, j et n), mais en utilisant la graduation introduite au numéro 7.2.2, on peut simplifier le problème en s'intéressant aux opérateurs homogènes. Soit donc $\ell \in \mathbb{Z}$ fixé. Un élément $\pi(\Omega) \in A_1(\mathbb{K})$ (pour un certain $\Omega \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$) est dit *homogène d'excès ℓ* si, et seulement si, quels que soient $i, j \in \mathbb{N}$, $\langle \pi(\Omega) | e_{i,j} \rangle \neq 0$ implique $i - j = \ell$, dit autrement, $\pi(\Omega) \in A_1^{(\ell)}(\mathbb{K})$. Dans ce cas, on remarque (voir Blasiak et al. (2003a,b)) que l'on a pour tout n

$$\mathcal{N}(\Omega^n) = (\mathbf{a}^\dagger)^{n\ell} \sum_{k=0}^{\infty} S_\Omega(n,k) (\mathbf{a}^\dagger)^k \mathbf{a}^k$$

si $\ell \geq 0$, et

$$\mathcal{N}(\Omega^n) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} S_\Omega(n,k) (\mathbf{a}^\dagger)^k \mathbf{a}^k \right) \mathbf{a}^{n|\ell}$$

si $\ell < 0$ (les deux sommes n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls). Ceci fut utilisé pour la définition des « nombres de Stirling généralisés » comme introduits dans Blasiak et al. (2003a,b) tout d'abord pour des mots bosoniques puis pour des opérateurs homogènes dans Duchamp et al. (2004). La raison pour la dénomination de *nombres de Stirling* apparaît dans le premier

⁷ Rappelons que $\langle P | e_{i,j} \rangle$ est la valeur suivant $e_{i,j}$ de la décomposition de P dans la base de l'ordre normal ; cf. chapitre 2, numéro 2.4.

Chapitre 7. Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

exemple suivant, après lequel nous proposons deux autres exemples. Nous y représentons les nombres $(S_\Omega(n, k))_{n, k \in \mathbb{N}}$ sous la forme d'une matrice (infinie), avec n pour indiquer les lignes, et k les colonnes. Pour finir, étant donné un mot bosonique $w \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ quelconque, la somme (avec un nombre fini de termes non nuls) suivante est obtenue

$$\mathcal{N}(w) = (\mathbf{a}^\dagger)^{|w|_{\mathbf{a}^\dagger}} \mathbf{a}^{|w|_{\mathbf{a}}} + \sum_{|w'| < |w|} \lambda_{w'} w' \quad (7.6)$$

où, en toute généralité, pour X un ensemble et $w \in X^*$, $|w|$ est la longueur du mot w , $|w|_x$ est le nombre d'occurrences de la lettre $x \in X$ dans ce mot. Il fut observé dans Varvak (2004) que les nombres λ_Ω sont les *nombre de placements de tours non attaquantes sur un échiquier*⁸.

Pour $\Omega = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$, la matrice des nombres de Stirling de seconde espèce usuels est obtenue.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 15 & 25 & 10 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 31 & 90 & 65 & 15 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

Pour $\Omega = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger$, nous avons

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 6 & 18 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 24 & 96 & 72 & 16 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 120 & 600 & 600 & 200 & 25 & 1 & 0 & \dots \\ 720 & 4320 & 5400 & 2400 & 450 & 36 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

Pour $\Omega = \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}^\dagger$, cela donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 12 & 60 & 54 & 14 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 144 & 1296 & 2232 & 1296 & 306 & 30 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2880 & 40320 & 109440 & 105120 & 45000 & 9504 & 1016 & 52 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (7.9)$$

Dans tous les cas (Duchamp et al. (2004)), la matrice $S_\Omega = (S_\Omega(i, j))_{i, j \in \mathbb{N}}$ a toutes ses lignes $(S_\Omega(i, j))_{j \in \mathbb{N}}$ à support fini, autrement dit, S_Ω est une matrice à lignes finies (numéro 4.3 du chapitre 4) appelée *matrice de Stirling*. Les matrices S_Ω sont toutes *en escalier*, et la « marche » dépend du nombre d'occurrences de \mathbf{a} dans le mot bosonique Ω . Plus précisément, à cause de l'équation (7.6), on peut démontrer que chaque ligne se termine avec un « 1 » dans la case $(i, i\ell)$ où $\ell = |\Omega|_{\mathbf{a}}$ (si les lignes et les colonnes sont indicées par \mathbb{N}). Remarquons par ailleurs que les

8. Les « rook numbers » en anglais, Stanley (2007)

7.4. Représentations

deux premiers exemples fournissent des matrices qui appartiennent à $\mathcal{T}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (numéro 4.4 du chapitre 4). Plus généralement, les matrices sont finies en ligne et trigonales inférieures strictes (chapitre 4) si, et seulement si, $\ell = 1$. De plus, $S_w(0, 0) = 1$, $S_w(n, 0) = 0$ pour $n > 0$ si, et seulement, si $w \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ se termine avec une lettre \mathbf{a} (cela signifie que $\mathcal{N}(\omega^n)$ est sans terme constant pour tout $n > 0$). Ce type d'opérateurs est étudié au numéro 7.6.

Notons que l'on peut utiliser l'ordre normal afin de prouver la fidélité de la représentation de Bargmann-Fock (numéro 7.2.2).

Lemme 7.3. *La représentation ρ_{BF} est fidèle.*

Démonstration. Soit $\pi(\Omega) \in \ker \rho_{BF}$. Par définition de ρ_{BF} , nous avons $\pi(\mathcal{N}(\Omega)) \in \ker \rho_{BF}$ (puisque Ω et $\mathcal{N}(\Omega)$ sont égaux modulo $\ker \pi$). L'ordre normal implique que $\mathcal{N}(\Omega) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} (\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j$

(combinaison linéaire finie). Bien sûr, $\rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega))) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \mathbf{X}^i \frac{d^i}{d\mathbf{x}} = 0$. Or, d'après Björk

(1979), on en déduit que $\lambda_{i,j} = 0$ pour tout i, j (puisque les $\mathbf{X}^i \frac{d^j}{d\mathbf{x}}$ forment une base algébrique), de sorte que $\mathcal{N}(\Omega) = 0$, et donc $\pi(\mathcal{N}(\Omega)) = 0 = \pi(\Omega)$. \square

7.4 Représentations

Nous avons introduit au numéro 7.2.2, la représentation ρ_{BF} de Bargmann-Fock de $A_1(\mathbb{K})$ dans les endomorphismes d'algèbre de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. Introduisons à présent une représentation matricielle (infinie) des opérateurs bosoniques. Dans le cas général, si $M \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ (c'est-à-dire que M est une matrice finie en ligne ; voir le numéro 4.3.2, chapitre 4), on sait construire un élément de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ec\text{Top}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$, *i.e.*, un endomorphisme (de l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$; voir au chapitre 2 le numéro 2.1) continue (pour la topologie produit avec \mathbb{K} discret ou muni d'une topologie de corps séparée, ou la topologie usuelle de l'ordre des séries, sur $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$) $\phi_{M, \alpha, \beta}$ où α et β désignent deux suites de dénominateurs⁹ (voir la remarque 5.18 du chapitre 5). Rappelons que l'on a

$$\phi_{M, \alpha, \beta}(S) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} M(n, k) \langle S | \mathbf{x}^n \rangle \beta_n \right) (\alpha_n)^{-1} \mathbf{x}^n \quad (7.10)$$

où $S = \sum_{n \geq 0} \langle S | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, et où l'on a identifié les \mathbb{K} -espaces vectoriels $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ et $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (voir l'égalité (4.4) du numéro 4.3.2, chapitre 4). Rappelons également que la correspondance $M \mapsto \phi_{M, \alpha, \alpha} = \phi_{M, \alpha}$ définit un isomorphisme d'algèbres de $\mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ec\text{Top}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$ (théorème 5.17, chapitre 5). À partir d'un élément $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ec\text{Top}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$, on construit également $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ par $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta}(i, j) = (\alpha_j)^{-1} \beta_i \langle \phi(\mathbf{x}^j) | \mathbf{x}^i \rangle$. Enfin, rappelons que la matrice $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \alpha}$ est notée $\mathcal{M}_{\phi, \alpha}$, et dans le cas où $\alpha_n = 1$ quel que soit n , \mathcal{M}_{ϕ} représente la matrice $\mathcal{M}_{\phi, \alpha}$ (*cf.* le numéro 4.2 du chapitre 4).

Lemme 7.4. *Soient $\alpha \in (\mathbb{K}^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de dénominateurs et $\Omega \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$. Alors*

$$\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})},$$

de sorte que pour toute topologie de corps séparée sur \mathbb{K} , et avec $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ muni de la topologie produit,

$$\rho_{BF}(\pi(\Omega)) \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ec\text{Top}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]) .$$

9. Par exemple, $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments inversibles de \mathbb{K} .

Démonstration. Nous avons $\rho_{BF}(\pi(\Omega)) = \rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega)))$. Posons $\mathcal{N}(\Omega) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} (\mathbf{a}^\dagger)^i \mathbf{a}^j$ (combinaison linéaire finie). Il en résulte que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha}(n, k) &= \mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega))), \alpha, \alpha}(n, k) \\ &= (\alpha_k)^{-1} \alpha_n \langle \rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega))) (\mathbf{x}^k) \mid \mathbf{x}^n \rangle \\ &= (\alpha_k)^{-1} \alpha_n \sum_{i,j} \lambda_{i,j} \langle \mathbf{X}^i \frac{d^j}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^k \mid \mathbf{x}^n \rangle. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Évidemment, $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$. Il résulte, du théorème 5.16 et de la remarque 5.18, que $\rho_{BF}(\pi(\Omega))$ est continu quelle que soit la topologie de corps séparée sur \mathbb{K} , et avec $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ équipé de la topologie produit. \square

Remarque 7.5. Notons que pour tout $\pi(\Omega) \in A_1(\mathbb{K})$, si on trouve une suite de dénominateurs α pour laquelle $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha}$ est une matrice finie en ligne, alors quelle que soit la suite de dénominateurs γ , $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \gamma}$ est une matrice finie en ligne. En effet, par le lemme 7.4 on sait que $\rho_{BF}(\pi(\Omega))$ est continu, ce qui conduit au fait que $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega))}$ est fini en ligne (théorème 5.16, chapitre 5). Puis, $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \gamma} = D_\gamma \mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega))} D_\gamma^{-1}$ (remarque 5.18, chapitre 5) qui est aussi à lignes finies.

Le lemme suivant (dont la preuve est laissée au lecteur) permet de donner un sens aux opérateurs d'évolution pour des éléments homogènes.

Lemme 7.6. Soient $\alpha \in (\mathbb{K}^*)^{\mathbb{N}}$ une suite de dénominateurs et $\Omega \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ tel que $\pi(\Omega)$ soit un opérateur homogène d'excès ℓ . Alors, la matrice $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha}$ est

1. triangulaire supérieure stricte¹⁰ si $\ell < 0$,
2. diagonale si $\ell = 0$,
3. triangulaire inférieure stricte si $\ell > 0$.

Lorsque $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, on déduit du lemme 7.6 que $\rho_{BF}(\pi(\Omega)) \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]) \cong_{\mathbb{K}\text{-Alg}} \mathbb{K}^{\mathbb{N} \times (\mathbb{N})}$ admet une exponentielle dès que $\pi(\Omega)$ est homogène d'excès positif ou nul. Si l'excès est nul, alors son exponentielle est calculée dans la topologie de Fréchet de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et se trouve être un élément de $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, alors que si l'excès est strictement positif, la topologie de la convergence simple (pour \mathbb{K} discret) est suffisante puisque dans ce cas $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\pi(\Omega)), \alpha} \in \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, et son exponentielle est donc un élément de $\mathcal{UI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

7.5 Exponentielle de mots bosoniques « conjugués » $(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$

Convention : À partir de maintenant, et jusqu'à la fin du chapitre, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Dans ce numéro sont calculées les exponentielles $e^{t\rho_{BF}(\pi(\lambda w))}$, $t \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, et $w \in \mathbb{K}\langle \mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger \rangle$ de la forme $w = (\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$ avec $0 \leq n \leq m$. Très clairement, la matrice caractérisant l'application linéaire et continue $\rho_{BF}(\pi(\lambda w))$ est un élément de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dès que $m - n \neq 0$ ou $n \neq 0$ de sorte que son exponentielle existe dans $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (en tant qu'algèbre de Fréchet, voir les chapitres 3 et 4). Le cas $w = \lambda \mathbf{a}$, $\lambda \neq 0$, est à cet égard assez particulier (voir le numéro 7.5.1). Dans la suite, on identifie l'endomorphisme continue $\rho_{BF}(\lambda w)$ et sa matrice infinie $\mathcal{M}_{\rho_{BF}(\lambda w)}$ (sans s'occuper de la suite de dénominateurs choisie).

Évidemment si w est le mot vide ou $\lambda = 0$, alors $\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\lambda w)))$ est l'application identique de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. À partir de maintenant on suppose donc que $\lambda \neq 0$.

10. Le terme « strict » signifie que les éléments diagonaux sont nuls.

7.5. Exponentielle de mots bosoniques « conjugués » $(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n}\mathbf{a}(\mathbf{a}^\dagger)^n$

7.5.1 Cas $w = \lambda \mathbf{a}$

Il s'agit du cas où $m = n = 0$. Nous avons $\rho_{BF}(\pi(\lambda \mathbf{a})) = \lambda \frac{d}{dx}$. Bien qu'il s'agisse d'un endomorphisme continu, ce n'est pas un élément de l'algèbre de Fréchet $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ puisque sa matrice est, comme on le vérifie facilement, triangulaire supérieure stricte. On ne peut donc pas utiliser les outils développés dans les chapitres 3 et 4 pour définir $\text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})$. Évidemment, $\text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})$ existe en tant qu'opérateur sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ pour la topologie de la convergence simple, avec $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ discret : $\text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})(P) = P(\mathbf{x} + t\lambda)$ pour tout $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

Remarque 7.7. *Il n'y aucun espoir d'étendre $\text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})$ comme opérateur sur $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ de façon naïve. En effet, $\text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})$ n'est pas continue sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ dans la mesure où sa matrice $(\langle \text{Exp}(t\lambda \frac{d}{dx})(\mathbf{x}^j) | \mathbf{x}^i \rangle)_{i,j}$ n'est pas finie en ligne dès que $t \neq 0$.*

7.5.2 Cas $w = \lambda \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}$

Nous avons $\rho_{BF}(\pi(\lambda \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a})) = \lambda \mathbf{x} \frac{d}{dx}$. Il est clair cette fois que la matrice représentant cet opérateur est un élément de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \setminus \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (les éléments diagonaux sont de la forme $\lambda(i-1)$ pour $i > 0$, et 0 pour $i = 0$). Quoiqu'il en soit, $\text{Exp}(t\lambda \mathbf{x} \frac{d}{dx})$ existe et est un élément de $\mathcal{T}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Le lemme suivant généralise le fait connu que l'exponentielle d'une dérivation nilpotente ou localement nilpotente est un automorphisme d'algèbre. Dans le lemme suivant, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, $P \frac{d}{dx}$ désigne l'opérateur de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ composé de la dérivation formelle et de la multiplication par le polynôme P .

Lemme 7.8. *Soit $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ de degré ≥ 1 . Alors $P \frac{d}{dx}$ est un élément de $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, et $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx}) \in \text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-AlgTop}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$ pour tout $t \in \mathbb{K}$.*

Démonstration. On a $\langle P \frac{d}{dx}(\mathbf{x}^j) | \mathbf{x}^i \rangle = j \langle P \mathbf{x}^{j-1} | \mathbf{x}^i \rangle$ si $j > 0$, et 0 si $j = 0$. Si $\deg(P) = 1$, alors cette matrice est dans $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \setminus \mathfrak{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, et dès que $\deg(P) > 1$, c'est un élément de $\mathfrak{nil}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$. Il en résulte que $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})$ est un automorphisme (de \mathbb{K} -espace vectoriel) continu. Il s'agit maintenant de montrer que c'est un automorphisme d'algèbre, soit, que pour $f, g \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(fg) = \text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(f) \text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(g)$. Clairement, par définition de la topologie produit, $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(f) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (P \frac{d}{dx})^n(f)$ est la somme d'une famille sommable dans $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ (avec sa topologie produit) pour chaque f . Posons $D = P \frac{d}{dx}$. On a

$$\begin{aligned}
 \text{Exp}(tD)(f) \text{Exp}(tD)(g) &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} D^n(f) \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} D^n(g) \right) \\
 &= \sum_{m,n} \frac{t^{m+n}}{m!n!} D^m(f) D^n(g) \\
 &= \sum_{m,n} \frac{t^{m+n}}{(m+n)!} \binom{m+n}{n} D^m(f) D^n(g) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{m+n=k} \binom{m+n}{n} D^m f D^n g \right) \\
 &= \sum_{k \geq 0} \frac{t^k}{k!} D^k(fg) \\
 &= \text{Exp}(tD)(fg)
 \end{aligned} \tag{7.12}$$

où l'on a utilisé le fait que le produit de familles sommables est sommable de somme égale au produit des sommes, et que D est une dérivation de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. \square

Corollaire 7.9. *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 7.8, $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})$ est une substitution, i.e., il existe une série formelle s_t de terme constant nul et dont le terme $\langle s_t | \mathbf{x} \rangle = 1$ telle que $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(f) = f \circ s_t$ quel que soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$.*

Démonstration. Par le lemme 7.8, on sait que $\text{Exp}(tP \frac{d}{dx}) \in \text{Aut}_{\mathbb{K}\text{-AlgTop}}(\mathbb{K}[[\mathbf{x}]])$. Il en résulte (par continuité et respect de la multiplication) que

$$\begin{aligned} \text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(f) &= \text{Exp}(tP \frac{d}{dx}) \left(\sum_{n \geq 0} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle (\text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(\mathbf{x}))^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \langle f | \mathbf{x}^n \rangle s_t^n \\ &= f \circ s_t \end{aligned} \tag{7.13}$$

où l'on a posé $s_t = \text{Exp}(tP \frac{d}{dx})(\mathbf{x})$. Clairement, $\langle s_t | 1 \rangle = 0$ et $\langle s_t | \mathbf{x} \rangle = 1$. □

Remarque 7.10.

1. On déduit du corollaire 7.9, et de ce que l'on sait déjà des exponentielles dans les algèbres de Fréchet (voir chapitre 3) que l'application $t \mapsto s_t$ est de classe C^∞ (lorsque s_t est vu comme un opérateur de substitution sur $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$), $s_{t+t'}(x) = s_t \circ s_{t'}$, et $\frac{d}{dt} s_t = P \frac{d}{dx} s_t$ (composition d'opérateurs) puisque s_t est le sous-groupe à un paramètre de vecteur tangent $P \frac{d}{dx}$.
2. Si on suppose que $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ est de degré ≥ 2 , alors $P \frac{d}{dx}$ est même topologiquement nilpotent pour \mathbb{K} discret. En effet, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, pour chaque $P \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ de degré ≥ 1 , $\pi_k(P \frac{d}{dx}) \in \mathfrak{ti}([0 \cdots k], \mathbb{K})$, et si le degré de P est ≥ 2 , $\pi_k(P \frac{d}{dx}) \in \mathfrak{nil}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ (où l'on rappelle que $\pi_k : \mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathfrak{ti}([0 \cdots k], \mathbb{K})$ est la projection canonique; voir l'exemple 3.4 du numéro 3.3 du chapitre 3 et le numéro 4.4.4 du chapitre 4). Par ailleurs, $\pi_k(P \frac{d}{dx})$ est une dérivation de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]/(x^k)$ quel que soit le degré de P (il s'agit simplement de la dérivation $(P + (x^k)) \frac{d}{dx}$), et en particulier, si $\deg(P) \geq 2$, cette dérivation est nilpotente (au sens usuel). Enfin, $\text{exp}_k((P + (x^k)) \frac{d}{dx}) = \text{Exp}_k(P \frac{d}{dx})$ (voir le numéro 4.4.4 du chapitre 4), de sorte que si $\deg(P) \geq 2$, alors $\text{Exp}(P \frac{d}{dx})$ est l'exponentielle d'une dérivation topologiquement nilpotente, et donc un automorphisme d'algèbre. Il en ressort encore une fois que nous n'avons nul besoin de l'analyse dans ce cas.

L'objectif est maintenant de calculer la série s_t pour ce numéro (7.5.2) et les suivants, néanmoins nous ne suivons pas ici la technique employée dans la suite. Cela résulte du fait que $\lambda \mathbf{X} \frac{d}{dx}$ n'est pas nilpotent (topologiquement), pour $\lambda \neq 0$, contrairement aux autres cas.

Calculons $\text{Exp}(t\lambda \mathbf{X} \frac{d}{dx})(x)$ (cela fait sens par définition des topologies de Fréchet choisies pour $\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$). Nous avons donc :

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t\lambda \mathbf{X} \frac{d}{dx})(x) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} (\mathbf{X} \frac{d}{dx})^n(x) \\ &= \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \right) \mathbf{x} \\ &= e^{\lambda t \mathbf{x}} \end{aligned} \tag{7.14}$$

où l'on voit que l'on a besoin, ici, des topologies d'espaces de Fréchet. Il en résulte, par continuité, que $\text{Exp}(t\lambda \mathbf{X} \frac{d}{dx})(f) = f(e^{\lambda t \mathbf{x}})$ pour tout $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$.

7.5. Exponentielle de mots bosoniques « conjugués » $(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n}\mathbf{a}(\mathbf{a}^\dagger)^n$

7.5.3 Cas $w = \lambda\mathbf{a}\mathbf{a}^\dagger$

Nous avons $\pi(w) = \lambda\pi(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a} + 1)$. Comme $[\pi(\mathbf{a}^\dagger\mathbf{a}), 1] = 0$, il en résulte naturellement que quel que soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t\lambda\pi(w))(f) &= \text{Exp}(t\lambda\mathbf{X}\frac{d}{d\mathbf{x}} + t\lambda 1)(f) \\ &= \left(\text{Exp}(t\lambda\mathbf{X}\frac{d}{d\mathbf{x}})\text{Exp}(t\lambda 1) \right)(f) \\ &= \text{Exp}(t\lambda\mathbf{X}\frac{d}{d\mathbf{x}})(e^{\lambda t}f) \\ &= e^{\lambda t}f(e^{\lambda t}\mathbf{x}) \\ &\quad (\text{d'après le numéro (7.5.2).}) \end{aligned} \tag{7.15}$$

Notons qu'ici aussi la topologie de Fréchet est inévitable.

7.5.4 Cas $w = \lambda(\mathbf{a}^\dagger)^n\mathbf{a}$, $n > 1$

Dans ce cas, nous allons suivre l'intuition donnée par l'intégration de champs de vecteurs liée au problème de Cauchy dont nous rappelons ici les définitions élémentaires.

Soit $f: U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}$, où U_1 et U_2 sont deux ouverts de \mathbb{R} , une application continue. Le *problème de Cauchy pour f avec valeur initiale* est l'équation différentielle (avec condition initiale) suivante

$$\begin{cases} \gamma'(t) = f(t, \gamma(t)) , \\ \gamma(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{7.16}$$

où $(t_0, x_0) \in U_1 \times U_2$.

On appelle *solution* de l'équation (7.16) dans un intervalle ouvert $I_{t_0} \subseteq U_1$ contenant t_0 une application $\gamma: I_{t_0} \rightarrow U_2$ satisfaisant :

1. $\gamma(t_0) = x_0$.
2. $\gamma \in \mathcal{C}^1(I_{t_0}, U_2)$.
3. Pour tout $t \in I_{t_0}$, $\gamma'(t) = f(t, \gamma(t))$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy. Néanmoins il est possible d'intégrer une telle équation différentielle en dehors des conditions de Cauchy-Lipschitz (mais avec une hypothèse de non-singularité) comme l'indique le lemme suivant (légère variation d'un résultat de Agarwal et Lakshmikantham (1993)).

Lemme 7.11. *Soit I un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} . Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue (non identiquement nulle). Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$. Soit $x_0 \in I$. Définissons*

$$\begin{aligned} u: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_{x_0}^x \frac{dy}{f(y)} . \end{aligned} \tag{7.17}$$

Alors u est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de I sur $u(I)$, et, en particulier, $u(I)$ est un intervalle ouvert qui contient 0 (= $u(x_0)$). De plus l'application

$$\begin{aligned} \gamma: u(I) &\rightarrow I \\ t &\mapsto u^{-1}(t) \end{aligned} \tag{7.18}$$

est l'unique solution définie sur $u(I)$ au problème de Cauchy pour

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} \times I &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

avec pour valeur initiale $\gamma(0) = x_0$.

Chapitre 7. Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

Démonstration. Puisque pour chaque $x \in I$, $f(x) \neq 0$, $\frac{\gamma'(t)}{f(\gamma(t))} = 1$ pour tout $t \in u(I)$, et il s'ensuit donc que

$$u(\gamma(t)) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{f(\gamma(s))} ds = \int_{x_0}^{\gamma(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_0^t d\tau = t. \quad (7.19)$$

Évidemment, u est strictement monotone, et donc la conclusion provient de ce que

$$\gamma(t) = u^{-1}(t). \quad (7.20)$$

□

Il est clair que si on pose $s_t(x) = u^{-1}(u(x) + t)$ pour (x, t) dans un ouvert qui convient, alors on obtient une déformation de l'identité puisque $(x, t) \mapsto s_t(x)$ est continu (et même de classe \mathcal{C}^1) sur son domaine et $s_0(x) = x$. Par ailleurs, nous avons $s_{t+t'}(x) = (s_t \circ s_{t'})(x)$ pour t, t' suffisamment petits, de sorte que l'on obtient un sous-groupe local à un paramètre. Il est également clair que s_t ne dépend pas du pied d'intégration x_0 choisi. Lorsque f est le monôme λx^n , on obtient $s_t(x) = \frac{x}{(1-\lambda t(n-1)x^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}}$. Il s'avère que $s_t(x)$ fait sens en tant que

série formelle. En effet pour un corps \mathbb{K} de caractéristique zéro, $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ tel que $\langle f | 1 \rangle = 0$, $\alpha \in \mathbb{K}$, la *puissance fractionnaire* $(1+f)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} f^k$ (somme qui converge pour \mathbb{K} discret,

et $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ avec la topologie produit), avec $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ le coefficient binomial généralisé, est de la forme $1 + \mathbf{x}g$ et donc inversible, de sorte que $s_t(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{(1-\lambda t(n-1)\mathbf{x}^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ vérifie

$\langle s_t(\mathbf{x}) | 1 \rangle = 0$, et $\langle s_t(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \rangle = 1$. On obtient ainsi une série admettant un inverse au sens de la substitution des séries formelles. Clairement, quels que soient $t, t' \in \mathbb{K}$, $s_{t+t'}(\mathbf{x}) = s_t(s_{t'}(\mathbf{x}))$ (sous-groupe à un paramètre tracé dans le groupe des séries inversibles pour la substitution). On a évidemment quels que soient $t, t' \in \mathbb{K}$ et quel que soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, $f \circ s_t \circ s_{t'} = f \circ s_{t+t'}$.

Lemme 7.12. *L'exponentielle $Exp(t\lambda X^n \frac{d}{dx})$ est l'opérateur de substitution par la série sans terme constant $s_t(\mathbf{x})$.*

Démonstration. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On peut montrer que l'opérateur de substitution par $s_t(\mathbf{x})$ est dérivable par rapport à t , et que l'on a quel que soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, $\frac{d}{dt}(f \circ s_t(\mathbf{x})) = f'(s_t(\mathbf{x})) \frac{d}{dt} s_t(\mathbf{x})$ (où f' désigne la dérivation usuelle de la série formelle f , et $\frac{d}{dt} s_t(\mathbf{x})$ la dérivation de l'application $t \mapsto s_t(\mathbf{x})$ à valeurs dans l'espace de Fréchet $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$). Par ailleurs, $(\frac{d}{dt})|_{t=0} s_t(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}^n$, de sorte que $(\frac{d}{dt})|_{t=0} (f \circ s_t(\mathbf{x})) = f'(\mathbf{x}) \lambda \mathbf{x}^n$. L'application qui associe à t l'opérateur de substitution par $s_t(\mathbf{x})$ est donc solution du même problème de Cauchy que $t \mapsto Exp(t\lambda X^n \frac{d}{dx})$, ces deux opérateurs sont donc égaux. Si on se place dans le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors il suffit de voir que l'application qui associe t à l'opération de substitution par $s_t(\mathbf{x})$ est un sous-groupe à un paramètre tracés dans $\mathcal{G}(\mathfrak{ti}(\mathbb{N}, \mathbb{K})) = \mathcal{TI}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ dont le générateur infinitésimal est $\mathbf{x}^n \frac{d}{dx}$, il s'agit donc de $Exp(t\lambda \mathbf{x}^n \frac{d}{dx})$ (voir, dans les deux cas, les numéros 3.4.4 et 3.4.7 du chapitre 3). □

Exemple 7.13. Soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$. Nous avons :

1. $Exp(t\lambda X^2 \frac{d}{dx})(f) = f(\frac{\mathbf{x}}{1-t\lambda \mathbf{x}})$ (homographie).
2. $Exp(t\lambda X^3 \frac{d}{dx})(f) = f(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-2t\lambda \mathbf{x}^2}})$.

7.5.5 Cas $w = \lambda(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a}(\mathbf{a}^\dagger)^n$, $n > 0$, $m > 1$, $m - n \geq 0$

Soit $w = \lambda(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a}(\mathbf{a}^\dagger)^n$, $n > 0$, $m > 1$, $m - n \geq 0$. Il est clair qu'en raison de ces paramètres $\rho_{BF}(\pi(w))$ est caractérisé par une matrice nilpotente. Il en résulte que $Exp(t\lambda \rho_{BF}(\pi(w)))$ existe

7.6. Sous-groupes à un paramètre et matrices de Stirling

dans $\mathcal{U}\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (avec \mathbb{K} discret, et donc aussi dans la topologie de Fréchet). Pour calculer cette exponentielle nous utilisons l'opération de conjugaison de la façon suivante.

Posons $P(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}^{m-n}$ et $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^n$. En tant qu'opérateurs, nous avons

$$\rho_{BF}(\pi(w)) = P(\mathbf{x}) \frac{d}{d\mathbf{x}} Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{Q(\mathbf{x})} \left(P(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}) \frac{d}{d\mathbf{x}} \right) Q(\mathbf{x})$$

où $\frac{1}{Q(\mathbf{x})}$ désigne l'application inverse de l'opération (injective) de multiplication à gauche par le monôme $Q(\mathbf{x})$ (définie sur l'image de cette dernière), soit la division par $Q(\mathbf{x})$. Il en résulte donc que l'on a

$$\rho_{BF}(\pi(w)) = (\mathbf{X}^n)^{-1} \left(\mathbf{X}^m \frac{d}{d\mathbf{x}} \right) \mathbf{X}^n .$$

On sait déjà, d'après le numéro 7.5.4, que $Exp(t\lambda \mathbf{X}^m \frac{d}{d\mathbf{x}})(f) = f(s_t(\mathbf{x}))$ (puisque $m > 1$) pour tout $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, où $s_t(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{(1-\lambda t(m-1)\mathbf{x}^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}$. Or l'exponentielle commute à la conjugaison, c'est-à-dire,

$$Exp(t\rho_{BF}(\pi(w))) = Exp(t(\mathbf{X}^n)^{-1} \left(\lambda \mathbf{X}^m \frac{d}{d\mathbf{x}} \right) \mathbf{X}^n) = (\mathbf{X}^n)^{-1} \left(Exp(t\lambda \mathbf{X}^m \frac{d}{d\mathbf{x}}) \right) \mathbf{X}^n$$

de sorte que

$$Exp(t\rho_{BF}(\pi(w)))(f) = \left(\frac{s_t(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \right)^n f(s_t(\mathbf{x})) .$$

Exemple 7.14. Soit $w = (\mathbf{a}^\dagger)^2 \mathbf{a} \mathbf{a}^\dagger$. Nous avons donc $\rho_{BF}(w) = (\mathbf{X})^{-1} \left(\mathbf{X}^3 \frac{d}{d\mathbf{x}} \right) \mathbf{X}$ et donc pour chaque $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$,

$$Exp(t\rho_{BF}(w))(f) = \frac{1}{\sqrt{1-2t\mathbf{x}^2}} f \left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{1-2t\mathbf{x}^2}} \right) .$$

Remarque 7.15.

1. Notons que le mot bosonique $w = \lambda(\mathbf{a}^\dagger)^{m-n} \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$ est équivalent au polynôme $\lambda(n(\mathbf{a}^\dagger)^{m-1} + (\mathbf{a}^\dagger)^m \mathbf{a})$ modulo $[\mathbf{a}, \mathbf{a}^\dagger] - 1$. Il en résulte donc que

$$Exp(t\rho_{BF}(\pi(w))) = Exp(tn\lambda \mathbf{X}^{m-1} + tn\lambda \mathbf{X}^m \frac{d}{d\mathbf{x}}) .$$

2. Le cas où on a $w = \lambda \mathbf{a} (\mathbf{a}^\dagger)^n$, $n > 1$, se résout également par conjugaison. En effet, on a $\rho_{BF}(w) = (\mathbf{X}^n)^{-1} \left(\lambda \mathbf{X}^n \frac{d}{d\mathbf{x}} \right) \mathbf{X}^n$. Puis $Exp(t\lambda \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{X}^n) = (\mathbf{X}^n)^{-1} \left(Exp(t\lambda \mathbf{X}^n \frac{d}{d\mathbf{x}}) \right) \mathbf{X}^n$. On en déduit donc que pour chaque $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$,

$$\begin{aligned} Exp(t\rho_{BF}(\pi(w)))(f) &= \left(\frac{s_t(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \right)^n f(s_t(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{(1-\lambda t(n-1)\mathbf{x}^{n-1})^{\frac{n}{n-1}}} f \left(\frac{\mathbf{x}}{(1-\lambda t(n-1)\mathbf{x}^{n-1})^{\frac{1}{n-1}}} \right) . \end{aligned} \tag{7.21}$$

7.6 Sous-groupes à un paramètre et matrices de Stirling

Revenons au cas d'un opérateur bosonique $\pi(\Omega)$ homogène d'excès $\ell \geq 0$. On sait, par le lemme 7.6, que $Exp(t\pi(\Omega))$ existe (soit dans $\mathcal{T}\mathcal{I}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, en utilisant la topologie de Fréchet, si $\ell = 0$, soit dans $\mathcal{U}\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$, en utilisant la topologie de la convergence simple avec \mathbb{K} discret, si $\ell > 0$).

Lemme 7.16. Soit $\pi(\Omega)$ homogène d'excès $\ell \geq 0$. Alors

$$\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega))) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega^n))) .$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega))) &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} (\rho_{BF}(\pi(\Omega)))^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \rho_{BF}(\pi(\Omega^n)) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega^n))) . \end{aligned} \tag{7.22}$$

□

Le problème de l'ordre normal pour les opérateurs homogènes d'excès ≥ 0 peut être résolu dans certains cas à l'aide des sous-groupes à un paramètre (tels que ceux calculés au numéro 7.5).

Théorème 7.17. Soit $\pi(\Omega)$ homogène d'excès $\ell \geq 0$. Soient $g, s \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ tels que $g(0) \neq 0$ et $s(0) = 0, s'(0) \neq 0$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Dans $\mathbb{K}[[\mathbf{x}, \mathbf{y}]]$, $\sum_{n, k \geq 0} S_{\Omega}(n, k) \frac{\mathbf{x}^n}{n!} \mathbf{y}^k = g(\mathbf{x}) e^{y s(\mathbf{x})}$.
2. $\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega)))(f) = g(t\mathbf{x}^{\ell}) f(x(1 + s(t\mathbf{x}^{\ell})))$ pour tout $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$.

Démonstration. On sait déjà que l'exponentielle de $\pi(\Omega)$ existe. D'après le lemme 7.16,

$$\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega))) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} \rho_{BF}(\pi(\mathcal{N}(\Omega^n))) .$$

Comme $\pi(\Omega)$ est homogène d'excès $\ell \geq 0$, on a $\mathcal{N}(\Omega^n) = (\mathbf{a}^{\dagger})^{n\ell} \sum_{k \geq 0} S_{\Omega}(n, k) (\mathbf{a}^{\dagger})^k \mathbf{a}^k$ (voir le numéro 7.3). Il en résulte, qu'en tant qu'opérateurs sur les séries formelles,

$$\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega))) = \sum_{n, k \geq 0} S_{\Omega}(n, k) \frac{t^n}{n!} \mathbf{x}^{n\ell} \mathbf{x}^k \left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^k . \tag{7.23}$$

Supposons que l'assertion (1) soit vraie, et démontrons le point (2). On a pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega)))(\mathbf{x}^j) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^j S_{\Omega}(n, k) \frac{(t\mathbf{x}^{\ell})^n}{n!} \frac{j!}{(j-k)!} \mathbf{x}^j \\ &= \mathbf{x}^j \sum_{k=0}^j \left(\langle g(t\mathbf{x}^{\ell}) e^{y s(t\mathbf{x}^{\ell})} \mid \mathbf{y}^k \rangle \right) \frac{j!}{(j-k)!} \\ &= g(t\mathbf{x}^{\ell}) \mathbf{x}^j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (s(t\mathbf{x}^{\ell}))^k \\ &= g(t\mathbf{x}^{\ell}) (\mathbf{x}(1 + s(t\mathbf{x}^{\ell})))^j . \end{aligned} \tag{7.24}$$

Maintenant, puisque les deux membres de (7.23) sont continus et linéaires, et que $\{\mathbf{x}^j : j \in \mathbb{N}\}$ est dense dans la topologie de $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$ (de Fréchet ou pour la topologie usuelle des séries formelles), nous obtenons (2). Réciproquement, si on suppose (2), alors on a

$$\text{Exp}(t\rho_{BF}(\pi(\Omega)))(e^{y\mathbf{x}}) = g(t\mathbf{x}^{\ell}) e^{y\mathbf{x}(1+s(t\mathbf{x}^{\ell}))} \tag{7.25}$$

7.7. Conclusion et perspectives

et, de (7.24), on obtient

$$\sum_{n,k \geq 0} S_{\Omega}(n, k) \frac{(t\mathbf{x}^{\ell})^n}{n!} (\mathbf{xy})^k = g(t\mathbf{x}^{\ell}) e^{y\mathbf{x}s(t\mathbf{x}^{\ell})}. \quad (7.26)$$

Par le changement de variables valide $t\mathbf{x}^{\ell} \rightarrow \mathbf{x}$ et $\mathbf{xy} \rightarrow \mathbf{y}$ on obtient (1). \square

Exemple 7.18. Soient $n > 0$, $m > 1$, $m - n \geq 0$. Soit $\Omega = n(\mathbf{a}^{\dagger})^{m-1} + (\mathbf{a}^{\dagger})^m \mathbf{a}$. Clairement, $\mathcal{N}(\Omega) = \Omega$ de sorte que l'on a un opérateur homogène d'excès $m - 1$. Soit $\Omega' = (\mathbf{a}^{\dagger})^{m-n} \mathbf{a}(\mathbf{a})^n$. On a $\pi(\Omega') = \pi(\Omega)$, et donc $\mathcal{N}(\Omega') = \Omega$. D'après le numéro 7.5.5, quel que soit $f \in \mathbb{K}[[\mathbf{x}]]$, $Exp(t\rho_{BF}(\pi(\Omega')))(f) = \left(\frac{s_t(\mathbf{x})}{\mathbf{x}} \right)^n f(s_t(\mathbf{x}))$ avec $s_t(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{(1 - t(m-1)\mathbf{x}^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}}$. Posons $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{(1 - (m-1)\mathbf{x})^{\frac{n}{m-1}}}$ et $s(\mathbf{x}) = \sum_{k \geq 1} \binom{\frac{1}{1-m}}{k} ((1-m)\mathbf{x})^k$. Avec ces notations, $Exp(t\rho_{BF}(\pi(\Omega')))(f) = g(t\mathbf{x}^{m-1})f(\mathbf{x}(1 + s(t\mathbf{x}^{m-1})))$. D'après le théorème 7.17,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j \geq 0} S_{\Omega}(i, j) \frac{\mathbf{x}^i}{i!} \mathbf{y}^j &= g(\mathbf{x}) e^{y s(\mathbf{x})} \\ &= \frac{1}{(1 - (m-1)\mathbf{x})^{\frac{n}{m-1}}} e^{y \sum_{k \geq 1} \binom{\frac{1}{1-m}}{k} ((1-m)\mathbf{x})^k}. \end{aligned} \quad (7.27)$$

7.7 Conclusion et perspectives

La relation de commutation $AB - BA = \text{Id}$ entre deux opérateurs A et B (par exemple, les opérateurs de création et d'annihilation de la théorie de la seconde quantification) est essentielle aux fondements de la physique quantique. Dans ce chapitre, nous avons montré, en partant de cette égalité de base, que des calculs d'opérations à première vue élémentaires, telles que l'exponentiation d'opérateurs associés à la dynamique et à la thermodynamique quantiques, conduisent immédiatement aux concepts combinatoires traditionnels tels que les nombres de Stirling, et leur généralisation, que nous avons décrite. Nous donnons une forme explicite pour le sous-groupe à un paramètre engendré par les exponentielles de tels opérateurs (cruciaux pour le calcul quantique) dans certains cas restreints (en particulier, les opérateurs ne contiennent qu'au plus une annihilation). Cette question de l'exponentiation d'opérateurs (continus sur un espace de Fréchet) a par ailleurs été reliée au problème de l'ordre normal classique de la physique quantique.

Cette relation (le théorème 7.17) utilise une paire de séries, (g, s) , l'une, g , inversible pour la multiplication, et l'autre, s , inversible pour la substitution. Ces paires constituent un groupe (produit semi-direct du groupe des séries inversibles pour la substitution par celles multiplicativement inversibles), parfois appelé le *groupe de Riordan*, qui agit sur l'algèbre des séries formelles comme suit : $f \mapsto g(f \circ s)$. Il est lié aux fameuses *suites de Sheffer* associées à un opérateur delta (opérateur différentiel qui commute aux translations). Tout laisse à penser que ce groupe n'est autre que le groupe de Lie de l'algèbre de Lie (en dimension infinie) des champs affines $q(\mathbf{x}) \frac{d}{d\mathbf{x}} + v(\mathbf{x})$ où $q(\mathbf{x})$ est une série d'ordre ≥ 2 , et $v(\mathbf{x})$ une série d'ordre ≥ 1 . Il semble donc pertinent de démontrer cela de façon rigoureuse. Par ailleurs, afin de déterminer l'exponentielle d'un opérateur « conjugué », nous avons utilisé l'intégration d'un champ de vecteurs continu. Ceci nous a conduit à un sous-groupe (de substitutions) local à un paramètre (il se trouve que ce dernier a également un sens formel, ce dont nous avons tiré profit). Un prolongement possible

Chapitre 7. Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique

pour ces travaux serait l'étude du groupe de Lie et de son algèbre (de fonctions continues ou analytiques) qui semblent n'être qu'esquissés. Une piste possible est de considérer les champs de vecteurs continus sur un intervalle ouvert $]a, b[$ comme des dérivations du $\mathcal{C}^\infty(]a, b[)$ -bimodule $\mathcal{C}^0([a, b])$. On peut donc les intégrer en utilisant le lemme 7.11. La difficulté consiste ensuite à donner un sens à l'exponentielle d'un tel champ de vecteurs continus (puisque, *a priori*, l'ensemble des dérivations de bimodule n'est pas une algèbre associative).

Les opérateurs de création et d'annihilation de l'algèbre de Weyl sont un cas particulier d'opérateurs d'échelle introduits au chapitre 8. Au prochain chapitre, nous démontrons que les endomorphismes d'un espace vectoriel (gradué) de dimension infinie dénombrable peuvent être représentés comme sommes de familles sommables en des opérateurs d'échelle. En tirant profit d'une mise en dualité entre un espace et son complété (de façon identique à ce qui est appliqué au chapitre 5), nous étendons le résultat mentionné ci-dessus au cas des endomorphismes continus sur un espace des combinaisons linéaires infinies (sorte de séries formelles).

Chapitre 8

Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

*Quand tu montes à l'échelle, souris à tous ceux que tu
dépasses, car tu croiseras les mêmes en redescendant.*

PROVERBE, États-unis d'Amérique

Sommaire

8.1	Introduction	105
8.2	Notations	106
8.3	Retour sur le résultat classique	107
8.4	Développement des endomorphismes en termes d'opérateurs d'échelle	108
8.5	Extension au cas des combinaisons linéaires infinies	113
8.6	Conclusion et perspectives	119

Ce chapitre reprend, presque à l'identique, les sections 4 et 5 de l'article Duchamp et al. (2010).

8.1 Introduction

La représentation de Bargmann-Fock de l'algèbre de Weyl (voir le numéro 7.2.2 du chapitre 7), sous la forme d'opérateurs d'intégration (multiplication par la variable formelle) et de dérivation, permet d'interpréter les opérateurs de création et d'annihilation comme des opérateurs d'échelle au sens suivant. L'algèbre des polynômes (en une indéterminée) est naturellement graduée par le degré. L'opérateur de création incrémente de un le degré d'un polynôme, alors que l'opérateur d'annihilation le décrémente d'une unité. Ces deux opérateurs parcourent l'échelle de tous les degrés ; l'un monte, pendant que l'autre descend.

Une application classique du célèbre théorème de densité de Jacobson montre que l'algèbre de Weyl (ou sa réalisation de Bargmann-Fock) est un anneau qui agit densément sur l'algèbre des endomorphismes (linéaires) sur l'espace des polynômes. En d'autres termes, l'algèbre de Weyl est dense dans cette dernière algèbre (pour la topologie compact-ouvert où l'espace des polynômes est supposé discret). Dans le cas où le corps de base est de caractéristique zéro, pour chaque endomorphisme, il est même possible de construire une approximation de celui-ci par des éléments de l'algèbre de Weyl, ou, de façon équivalente, une suite dans l'algèbre

de Weyl convergeant vers cet endomorphisme (en fait, il s'agit d'une série dont la somme est l'endomorphisme donné; voir Kurbanov et Maksimov (1986) et le numéro 8.3).

Dans ce chapitre, nous montrons notamment que ce résultat de densité ne repose ni sur la caractéristique du corps ni même sur une éventuelle structure d'algèbre dont disposerait l'espace vectoriel (comme c'est le cas de celui des polynômes). Pour ce faire, nous introduisons une notion assez naturelle d'opérateurs d'échelle (montant/descendant) associés à une base d'un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable, et démontrons que, lorsqu'on dispose de deux bases indicées par \mathbb{N} qui coïncident en degré zéro, la décomposition classique dans le cas de l'algèbre de Weyl s'étend à ce contexte.

Ceci fait, on peut se poser la question d'une telle décomposition dans le cadre d'opérateurs sur des combinaisons linéaires **infinies**. La graduation (en strates unidimensionnelles) de l'espace vectoriel induit une filtration (par des sous-espaces de dimension infinie dénombrable). Le complété de l'espace vectoriel pour la topologie relative à cette filtration n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires infinies (dans la base liée à la graduation). Il est alors possible de considérer un crochet de dualité, similaire à celui employé au chapitre 5, entre l'espace vectoriel (gradué) et sa complétion. Ceci nous amène naturellement à considérer la notion de transposition d'opérateurs dans ce contexte. Finalement, à l'aide de ce concept et en utilisant le fait essentiel que le transposé d'un opérateur montant (respectivement, descendant) est l'extension au complété par uniforme continuité d'un opérateur descendant (respectivement, montant), nous montrons que l'on dispose d'une décomposition des endomorphismes (continus) du complété en termes d'opérateurs d'échelle presque identique à celle obtenue pour l'espace gradué.

Organisation du chapitre

Après avoir redonné les notations de base au numéro 8.2, le résultat de Kurbanov et Maksimov concernant la décomposition des endomorphismes sur les polynômes dans l'algèbre de Weyl (voir le numéro 8.3) est étendu au cadre plus général des opérateurs d'échelle sur un espace vectoriel gradué sur \mathbb{N} (chaque composante homogène de la graduation étant unidimensionnelle), voir le numéro 8.4. Enfin, le cas d'opérateurs continus sur des combinaisons linéaires infinies est traité au numéro 8.5.

8.2 Notations

Soit \mathbb{K} un corps (commutatif) et $\mathbb{K}[x]$ le \mathbb{K} -espace vectoriel des polynômes en l'indéterminée x . Rappelons que l'on dénote par $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(V)$ l'algèbre des endomorphismes linéaires de n'importe quel \mathbb{K} -espace vectoriel V . Si ϕ et ψ sont des éléments de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(V)$, alors $\phi\psi$ représente la composition usuelle « $\phi \circ \psi$ » des applications linéaires, et pour tout entier naturel n , nous avons

$$\phi^n = \begin{cases} \text{Id}_V & \text{si } n = 0, \\ \underbrace{\phi \circ \dots \circ \phi}_{n \text{ fois}} & \text{si } n > 0 \end{cases} \quad (8.1)$$

où Id_V est l'application identique de V . Soit $\mathbf{e} = (e_i)_{i \in I}$ une base V sur \mathbb{K} (V est supposé ne pas être réduit à (0)). Nous dénotons la décomposition d'un vecteur $v \in V$ dans la base \mathbf{e} par

$$\sum_{i \in I} \langle v, e_i \rangle e_i \quad (8.2)$$

où $\langle v, e_i \rangle$ est le coefficient de la projection de v sur le sous-espace $\mathbb{K}e_i$ engendré par e_i dans V . Le lecteur remarquera l'emploi d'une virgule « , » pour séparer les deux membres du crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle$ plutôt que la barre verticale « | » utilisée jusqu'à présent dans ce manuscrit. En effet dans ce

8.3. Retour sur le résultat classique

chapitre la notation $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est spécifiquement dédiée à un crochet de dualité (voir le numéro 8.5.1). Évidemment, tous, sauf un nombre fini, les coefficients $\langle v, e_i \rangle$ sont égaux à zéro. Si (I, \leq) est un ensemble (non vide) totalement ordonné borné inférieurement (avec $\widehat{0}$ comme minimum¹), et, si $v \neq 0$, alors le *degré* de v (par rapport à \mathbf{e}) est défini par

$$\deg_{\mathbf{e}}(v) = \max\{i \in I : \langle v, e_i \rangle \neq 0\} \quad (8.3)$$

et

$$\deg_{\mathbf{e}}(0) = -\infty \quad (8.4)$$

où $-\infty \notin I$, et la relation $-\infty < i$ pour chaque $i \in I$ (et, en particulier, $-\infty < \widehat{0}$) étend l'ordre total de I à $\bar{I} = I \cup \{-\infty\}$. Si $v \neq 0$, alors tout ensemble fini non vide $\{i \in I : \langle v, e_i \rangle \neq 0\}$ admet un plus grand élément, puisque I est totalement ordonné, de telle sorte que $\deg_{\mathbf{e}}(v)$ est bien défini. En particulier, $\deg_{\mathbf{e}}(e_{\widehat{0}}) = \widehat{0}$. Ainsi, l'égalité suivante est vraie (pour tout $v \neq 0$)

$$v = \sum_{\widehat{0} \leq i \leq \deg_{\mathbf{e}}(v)} \langle v, e_i \rangle e_i \quad (8.5)$$

avec $\langle v, e_{\deg_{\mathbf{e}}(v)} \rangle \neq 0$. En particulier, en prenant $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^n)_{n \geq 0}$ comme base de $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$, tout polynôme non nul P peut être écrit comme la somme

$$P = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \langle P, \mathbf{x}^n \rangle \mathbf{x}^n \quad (8.6)$$

où $\deg(P)$ est le degré habituel de P (et $I = \mathbb{N}$).

8.3 Retour sur le résultat classique

On sait depuis l'ouvrage de Pincherle et Amaldi (Pincherle et Amaldi (1901)) que, pour un corps \mathbb{K} de caractéristique zéro, tout endomorphisme linéaire $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(\mathbb{K}[\mathbf{x}])$ peut s'exprimer comme la somme d'une série convergente en les opérateurs \mathbf{X} de multiplication par la variable \mathbf{x} et en la dérivée (formelle) des polynômes $\frac{d}{d\mathbf{x}}$. Dans Kurbanov et Maksimov (1986) (voir également Di Bucchianico et Loeb (1996) pour des généralisations) Kurbanov et Maksimov ont donné une formule explicite – rappelée ci-après – pour cette somme.

Théorème 8.1 (Kurbanov et Maksimov (1986)). *Supposons que \mathbb{K} soit un corps de caractéristique zéro. Soit $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(\mathbb{K}[\mathbf{x}])$. Alors ϕ est la somme de la famille sommable (dans la topologie de la convergence simple de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(\mathbb{K}[\mathbf{x}])$ avec $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ discret) $\sum_{k \geq 0} P_k(\mathbf{X}) \left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^k$ où $(P_k(\mathbf{x}))_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynômes qui satisfait l'équation récurrente :*

$$\begin{aligned} P_0(\mathbf{x}) &= \phi(1), \\ P_{n+1}(\mathbf{x}) &= \phi\left(\frac{\mathbf{x}^{n+1}}{(n+1)!}\right) - \sum_{k=0}^n P_k(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}^{n+1-k}}{(n+1-k)!}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Exemple 8.2. En utilisant le théorème ci-dessus, on peut écrire l'opérateur d'intégration formelle $I \left(\sum_{k=0}^n a_k \mathbf{x}^k \right) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{\mathbf{x}^{k+1}}{k+1}$ comme un opérateur différentiel de degré infini (ce qui peut paraître un tantinet déconcertant). On montre (par exemple par récurrence) que $I = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\mathbf{X}^{k+1}}{(k+1)!} \left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^k$.

1. Nous utilisons la notation de Stanley (2007) pour l'élément minimum.

Dans ce qui suit, nous généralisons ce résultat à n'importe quel \mathbb{K} -espace vectoriel avec une base dénombrable en utilisant une paire d'opérateurs d'échelle généralisés au lieu de ceux usuellement considérés, à savoir, X et $\frac{d}{dx}$. L'objectif fondamental est d'exhiber les seules propriétés des endomorphismes qui rendent possible un développement similaire au cas classique, et donc de se passer de ce qui est superflu.

8.4 Développement des endomorphismes en termes d'opérateurs d'échelle

À partir de maintenant, exception faite de l'exemple 8.10, le corps \mathbb{K} n'est pas supposé être de caractéristique zéro. Considérons un \mathbb{K} -espace vectoriel V de dimension infinie dénombrable. Soit $\mathbf{e} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base algébrique de cet espace. On peut définir deux types d'opérateurs d'échelle par rapport à \mathbf{e} , à savoir, un opérateur descendant $L_{\mathbf{e}} \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(V)$, par

$$\begin{cases} L_{\mathbf{e}}e_0 &= 0, \\ L_{\mathbf{e}}e_{n+1} &= e_n \end{cases} \quad (8.8)$$

et, un opérateur montant $R_{\mathbf{e}} \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-vect}}(V)$, par

$$R_{\mathbf{e}}e_n = e_{n+1}. \quad (8.9)$$

De tels opérateurs ont été considérés par Katriel et Duchamp (Katriel et Duchamp (1995)) mais aussi par Dubin, Hennings et Solomon (Dubin et al. (1997, 1998)) dans un contexte plus général, et sont similaires aux opérateurs de création et d'annihilation agissant sur un espace de Fock interactif d'Accardi et Bożejko (Accardi et Bożejko (1998)). Les endomorphismes $L_{\mathbf{e}}$ et $R_{\mathbf{e}}$ peuvent également être interprétés comme les opérateurs D et U décrits dans Fomin (1994), associés aux graphes gradués orientés $e_0 \leftarrow e_1 \leftarrow e_2 \leftarrow \dots$ et $e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow e_2 \rightarrow \dots$.

Définition 8.3. Soient $P \in \mathbb{K}[x]$ et $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de V . On définit $P(\mathbf{u}) \in V$ par

$$P(\mathbf{u}) = \sum_{n \geq 0} \langle P, \mathbf{x}^n \rangle u_n = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \langle P, \mathbf{x}^n \rangle u_n. \quad (8.10)$$

Lemme 8.4. Soit $\mathbf{e} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V . L'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathbf{e}} : \mathbb{K}[x] &\rightarrow V \\ P &\mapsto P(\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

est un isomorphisme linéaire

Démonstration. Évident. □

Lemme 8.5. Soient $\mathbf{e} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V et $R_{\mathbf{e}}$ l'opérateur montant qui lui est associé. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[x]$ on peut définir l'opérateur $P(R_{\mathbf{e}}) = \sum_{n \geq 0} \langle P, \mathbf{x}^n \rangle R_{\mathbf{e}}^n$. Alors nous avons

$$P(R_{\mathbf{e}})e_0 = P(\mathbf{e}), \quad (8.12)$$

de sorte que

$$R_{\mathbf{e}}^n e_0 = e_n. \quad (8.13)$$

Démonstration. Laissée au lecteur. □

8.4. Développement des endomorphismes en termes d'opérateurs d'échelle

Supposons maintenant que V soit discret (tout comme \mathbb{K}) et que $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(V)$, en tant que sous-ensemble de V^V , soit équipé de la topologie² compact-ouvert Eilenberg (1937); Fox (1945); Arens (1946b,c); Arens et Dugundji (1951); Jackson (1952); Mostert (1961); c'est-à-dire, dans ce cas, de la topologie (de sous-espace) de la convergence simple (puisque les sous-ensembles compacts de V discret sont ses parties finies). Il s'ensuit que $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(V)$ devient un \mathbb{K} -espace vectoriel topologique (Hausdorff) complet (et même une \mathbb{K} -algèbre topologique complète). En utilisant cette topologie, on peut considérer des familles sommables d'opérateurs sur V . Le lecteur pourra se référer au numéro 2.7 du chapitre 2 pour les résultats de base concernant la sommabilité. Nous rappelons néanmoins un résultat nécessaire dans la suite de ce chapitre.

Rappel : Soient G un groupe commutatif topologique séparé et complet. La condition suivante, dite de *Cauchy*, est équivalente à la sommabilité (sous réserve que G soit complet). Une famille $(g_i)_{i \in I}$ de G satisfait la *condition de Cauchy* si, et seulement si, pour tout voisinage U de zéro, il existe un ensemble fini J_U de I tel que

$$\sum_{k \in K} g_k \in U \quad (8.14)$$

pour tout sous-ensemble fini K de I disjoint de J_U .

Par exemple, soit $\mathbf{e} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V . Alors pour toute suite $(\phi_n)_{n \geq 0} \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(\mathbb{K}[\mathbf{x}])^{\mathbb{N}}$ d'éléments de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(V)$, la famille $(\phi_n L_{\mathbf{e}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. À cause du choix de la topologie, du fait que \mathbf{e} soit une base de V , et par des propriétés générales de la sommabilité, il est suffisant de prouver que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la famille $((\phi_n L_{\mathbf{e}}^n)(e_k))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans V . Puisque V est discret et donc complet, il est suffisant de vérifier que la condition de Cauchy est satisfaite. On peut prendre $U = \{0\}$ comme voisinage de zéro dans V (discret). Soit $J_U = \{0, \dots, k\}$. Puisque pour tout $n > k$, $L_{\mathbf{e}}^n(e_k) = 0$, alors $\sum_{n \in K} (\phi_n L_{\mathbf{e}}^n)(e_k) = 0$ dès que K est un sous-ensemble fini de I tel que $K \cap J_U = \emptyset$. Dans ce qui suit, la somme de la famille $(\phi_n L_{\mathbf{e}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est l'élément de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(V)$ dénoté par $\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n L_{\mathbf{e}}^n$ où pour chaque $v \in V$ non nul,

$$\left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \phi_n L_{\mathbf{e}}^n \right) (v) = \sum_{n=0}^{\deg_{\mathbf{e}}(v)} \phi_n (L_{\mathbf{e}}^n(v)) . \quad (8.15)$$

Remarque 8.6. Très clairement, l'opérateur $L_{\mathbf{e}}$ est topologiquement nilpotent dans la topologie de la convergence simple, et donc localement nilpotent comme l'indique l'égalité (8.15). C'est la raison profonde pour laquelle $(\phi_n L_{\mathbf{e}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille sommable.

Nous sommes maintenant en position d'énoncer le résultat principal concernant le développement des endomorphismes de V en termes d'opérateurs d'échelle.

Théorème 8.7 (Développement d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle). *Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux bases de V telles que $b_0 \in \mathbb{K}a_0$; c'est-à-dire qu'il existe un scalaire non nul $\lambda = \langle b_0, a_0 \rangle$ tel que $\lambda a_0 = b_0$. Alors, chaque $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ct}(V)$ est la somme d'une famille sommable $(P_n(R_{\mathbf{a}})L_{\mathbf{b}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^{\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes satisfaisant l'équation récurrente*

$$\begin{aligned} \lambda P_0(\mathbf{a}) &= \phi(b_0) , \\ \lambda P_{n+1}(\mathbf{a}) &= \phi(b_{n+1}) - \sum_{k=0}^n P_k(R_{\mathbf{a}})b_{n+1-k} . \end{aligned} \quad (8.16)$$

(Notons que, par le lemme 8.4, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $P_n(\mathbf{a})$ détermine de façon unique $P_n \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$.)

2. Clairement, lorsque V est discret, $V^V = \mathcal{C}^0(V, V)$ (ensemble des applications continues de V dans lui-même), et on peut donc considérer la topologie compact-ouvert sur V^V .

Chapitre 8. Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

Démonstration. Puisque \mathbf{b} est une base, il est suffisant de prouver que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(b_n) = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_n) . \quad (8.17)$$

1. Cas $n = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_0) &= P_0(R_{\mathbf{a}})(b_0) \\ &= \lambda P_0(R_{\mathbf{a}})(a_0) \\ &= \lambda P_0(\mathbf{a}) \text{ (d'après le lemme 8.5)} \\ &= \phi(b_0) \text{ (par hypothèse)} . \end{aligned} \quad (8.18)$$

2. Cas $n + 1$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n+1} P_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} \\ &= P_{n+1}(R_{\mathbf{a}})(b_0) + \sum_{k=0}^n P_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} \\ &= \lambda P_{n+1}(R_{\mathbf{a}})(a_0) + \sum_{k=0}^n P_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} \\ &= \lambda P_{n+1}(\mathbf{a}) + \sum_{k=0}^n P_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} \\ &= \phi(b_{n+1}) . \end{aligned} \quad (8.19)$$

□

Lemme 8.8. *Supposons que nous sommes sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 8.7. Soient $(P_n)_n$ et $(Q_n)_n$ deux suites de polynômes telles que $\sum_{k \geq 0} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k = \sum_{k \geq 0} Q_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k$ (en tant que sommes de familles sommables). Alors quel que soit n , $P_n = Q_n$.*

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, par hypothèse, $\left(\sum_{k \geq 0} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_0) =$

$\left(\sum_{k \geq 0} Q_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_0)$. Ceci est équivalent à $P_0(\mathbf{a}) = Q_0(\mathbf{a})$ et donc $P_0 = Q_0$. Supposons que

$P_k = Q_k$ tout $k \leq n$, et montrons-le pour $n+1$. Toujours par hypothèse, $\left(\sum_{k \geq 0} P_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_{n+1}) =$

$\left(\sum_{k \geq 0} Q_k(R_{\mathbf{a}}) L_{\mathbf{b}}^k \right) (b_{n+1})$ de sorte que

$$\lambda P_{n+1}(\mathbf{a}) + \sum_{k=0}^n P_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} = \lambda Q_{n+1}(\mathbf{a}) + \sum_{k=0}^n Q_k(R_{\mathbf{a}}) b_{n+1-k} .$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $P_{n+1}(\mathbf{a}) = Q_{n+1}(\mathbf{a})$ de sorte que $P_{n+1} = Q_{n+1}$.

□

8.4. Développement des endomorphismes en termes d'opérateurs d'échelle

Remarque 8.9. Par le lemme 8.8, la suite de polynômes $(P_n)_n$ associée à un endomorphisme ϕ de telle sorte que ϕ soit la somme de la famille $(P_n(R_{\mathbf{a}})L_{\mathbf{b}}^n)_{n \geq 0}$ (dont l'existence est garantie par le théorème 8.7) est unique (sous réserve de fixer les bases \mathbf{a} et \mathbf{b}). On montre facilement que cette correspondance est un isomorphisme \mathbb{K} -linéaire de l'espace vectoriel $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-Vect}}(V)$ dans l'espace vectoriel $(\mathbb{K}[\mathbf{x}])^{\mathbb{N}}$.

Exemple 8.10. Supposons que \mathbb{K} soit un corps de caractéristique zéro³. Considérons $V = \mathbb{K}[\mathbf{x}]$, $a_n = \mathbf{x}^n$ et $b_n = \frac{\mathbf{x}^n}{n!}$. Alors $R_{\mathbf{a}} = \mathbf{x}$, l'opérateur de multiplication par \mathbf{x} , et $L_{\mathbf{b}} = \frac{d}{d\mathbf{x}}$, la dérivée formelle des polynômes, qui sont les données classiques rappelées dans le numéro 8.3. Considérons la forme linéaire $\epsilon: \mathbb{K}[\mathbf{x}] \rightarrow \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ qui envoie un polynôme sur la somme de ses coefficients.

Par le théorème 8.7, nous savons que $\epsilon = \sum_{n \geq 0} P_n(\mathbf{x}) \left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^n$ et que

$$P_{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^n P_k(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{x}^{n+1-k}}{(n+1-k)!}. \quad (8.20)$$

Nous pouvons montrer par récurrence que $P_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{n!}(1-\mathbf{x})^n$, et on vérifie facilement que $\epsilon = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}(1-\mathbf{x})^n \left(\frac{d}{d\mathbf{x}}\right)^n$. Alternativement, nous notons que cet opérateur est $\epsilon = (e^{y \frac{d}{d\mathbf{x}}})|_{y=1-\mathbf{x}}: \mathbf{x}^n \mapsto ((\mathbf{x}+y)^n)|_{y=1-\mathbf{x}}$.

Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux bases de V . Considérons les opérateurs suivants

$$L_{\mathbf{b},\beta} b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \beta_n b_{n-1} & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad (8.21)$$

et

$$R_{\mathbf{a},\alpha} a_n = \alpha_n a_{n+1} \quad (8.22)$$

où $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\beta_0 = 1$, et $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de dénominateurs (donc des suites de scalaires non nuls; voir le numéro 4.2 du chapitre 4).

Exemple 8.11. $L_{(\frac{\mathbf{x}^n}{n!})_n, (1)_n} = L_{(\mathbf{x}^n)_n, (\beta_n)_n}$, où $\beta_n = n$ si $n > 0$, et $\beta_0 = 1$, est l'opérateur de dérivation $\frac{d}{d\mathbf{x}}$, et $R_{(\mathbf{x}^n)_n, (1)_n} = R_{(\frac{\mathbf{x}^n}{n!})_n, (\frac{1}{n+1})_n}$ est l'opérateur de multiplication par \mathbf{x} , tous deux agissant sur $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$.

Ces opérateurs, qui sont respectivement appelés *opérateur descendant relativement à \mathbf{b} avec suite de coefficients β* et *opérateur montant relativement à \mathbf{a} avec suite de coefficients α* , semblent être une généralisation évidente des opérateurs d'échelle introduits précédemment; cependant, ce n'est pas tout à fait le cas. En fait, $L_{\mathbf{b},\beta}$ et $R_{\mathbf{a},\alpha}$ sont égaux respectivement à des opérateurs

d'échelle « usuels » $L_{\beta^{-1} \cdot \mathbf{b}}$ et $R_{\alpha \cdot \mathbf{a}}$ où $\beta^{-1} \cdot \mathbf{b} = (b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $b'_n = \left(\prod_{i=0}^n \beta_i\right)^{-1} b_n$ (respectivement,

$\alpha \cdot \mathbf{a} = (a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $a'_n = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i\right) a_n$ pour $n > 0$, et $a'_0 = a_0$). Si $b'_0 \in \mathbb{K}a'_0$ (ou, de façon équivalente, si $b_0 \in \mathbb{K}a_0$, puisque $b'_0 = \frac{b_0}{\beta_0} = b_0$ et $a'_0 = a_0$), alors le théorème 8.7 peut être appliqué avec ces opérateurs $L_{\mathbf{b},\beta}$ et $R_{\mathbf{a},\alpha}$, simplement en remplaçant \mathbf{a} par $\alpha \cdot \mathbf{a}$ et \mathbf{b} par $\beta^{-1} \cdot \mathbf{b}$. Lorsque $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, nous disons que $L_{\mathbf{a},\beta}$ et $R_{\mathbf{a},\alpha}$ sont des *opérateurs d'échelle relativement à \mathbf{a} avec coefficients β*

3. Cette hypothèse sur la caractéristique de \mathbb{K} est nécessaire ici puisque l'on considère des dénominateurs de la forme $n!$.

Chapitre 8. Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

et α respectivement. De telles paires d'opérateurs - utilisées dans le numéro suivant - satisfont une règle de commutation générale

$$D_{\mathbf{a},\beta,\alpha} = [L_{\mathbf{a},\beta}, R_{\mathbf{a},\alpha}] = L_{\mathbf{a},\beta}R_{\mathbf{a},\alpha} - R_{\mathbf{a},\alpha}L_{\mathbf{a},\beta} \quad (8.23)$$

où $D_{\mathbf{a},\beta,\alpha}$ est l'opérateur défini par

$$D_{\mathbf{a},\beta,\alpha}a_n = \begin{cases} (\alpha_0\beta_1)a_0 & \text{si } n = 0, \\ (\alpha_n\beta_{n+1} - \alpha_{n-1}\beta_n)a_n & \text{si } n > 0, \end{cases} \quad (8.24)$$

que l'on nomme *opérateur diagonal* associé à $L_{\mathbf{a},\beta}$ et $R_{\mathbf{a},\alpha}$.

Remarque 8.12. *Il est possible de définir un opérateur similaire $D_{\mathbf{b},\mathbf{a}} \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ associé à deux opérateurs d'échelle quelconques $L_{\mathbf{b}}$ et $R_{\mathbf{a}}$ par $D_{\mathbf{b},\mathbf{a}} = [L_{\mathbf{b}}, R_{\mathbf{a}}]$, qui définit une relation de commutation entre $L_{\mathbf{b}}$ et $R_{\mathbf{a}}$. (En particulier, $D_{\mathbf{a},\beta,\alpha} = D_{\beta^{-1}\cdot\mathbf{a},\alpha\cdot\mathbf{a}}$.) Qui plus est, lorsque les deux bases \mathbf{a} et \mathbf{b} sont liées par $b_0 \in \mathbb{K}a_0$ comme dans le théorème 8.7, alors, comme opérateur de V , $D_{\mathbf{b},\mathbf{a}}$ est la somme d'une famille sommable $(P_n(R_{\mathbf{a}})L_{\mathbf{b}}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, et donc la relation de commutation est donnée par*

$$L_{\mathbf{b}}R_{\mathbf{a}} = R_{\mathbf{a}}L_{\mathbf{b}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(R_{\mathbf{a}})L_{\mathbf{b}}^n. \quad (8.25)$$

Rien n'indique que la suite de polynômes $(P_n)_n$ se stabilise à zéro en un nombre fini d'étapes comme c'est le cas pour l'algèbre de Weyl, et, plus généralement, pour des algèbres de polynômes gauches.

Remarque 8.13.

1. Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension dénombrable. Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux bases de V telles que $b_0 \in \mathbb{K}a_0$, et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\beta_0 = 1$, et $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de dénominateurs. On sait que le produit tensoriel complété (introduit au numéro 4.3.4 du chapitre 4) $\mathbb{K}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \widehat{\otimes}^c \mathbb{K}\langle \mathbf{y} \rangle$ (où l'on considère les espaces vectoriels sous-jacents aux algèbres) est isomorphe (en tant que \mathbb{K} -espace vectoriel) à $\mathbb{K}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ (voir la remarque 4.14). Soit le sous- \mathbb{K} -espace vectoriel $W = \left\{ \sum_{n \geq 0} p_n(\mathbf{x})\mathbf{y}^n : \forall n, p_n(\mathbf{x}) \in \mathbb{K}\langle \mathbf{x} \rangle, p_n(\mathbf{x}) = 0 \text{ sauf un nombre fini} \right\} \subseteq \mathbb{K}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$. Il admet

$(\mathbf{x}^m \mathbf{y}^n)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} \in (\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}^*)^{\mathbb{N}^2}$ comme base sur \mathbb{K} . Il peut également être vu comme $\mathbb{K}\langle \mathbf{x} \rangle$ -module (à gauche) libre avec $(\mathbf{y}^n)_n$ comme base. Considérons l'application d'évaluation (ou de spécialisation) $\text{ev}(\mathbf{x}) = R_{\mathbf{a},\alpha}$ et $\text{ev}(\mathbf{y}) = L_{\mathbf{b},\beta}$ que l'on étend en un homomorphisme de \mathbb{K} -espaces vectoriels $\text{ev}: W \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$. Puisque $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ est un espace vectoriel complet pour la topologie de la convergence simple (avec \mathbb{K} discret), que ev est continue (pour la topologie produit de $W \cong_{\mathbb{K}\langle \mathbf{x} \rangle\text{-Mod}} \bigoplus_{n \geq 0} \mathbb{K}\langle \mathbf{x} \rangle$ avec $\mathbb{K}\langle \mathbf{x} \rangle$ discret) et que $\mathbb{K}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ est le complété

de W , on étend ev par continuité en un homomorphisme continue de \mathbb{K} -espaces vectoriels topologiques $\widehat{\text{ev}}: \mathbb{K}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \rightarrow \overline{\text{im}(\text{ev})} = \text{im}(\widehat{\text{ev}}) \subseteq \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$. Posons $\mathbb{K}\langle R_{\mathbf{a},\alpha}, L_{\mathbf{b},\beta} \rangle = \text{im}(\widehat{\text{ev}})$ (même si cette notation peut être trompeuse dans la mesure où, contrairement à \mathbf{x} et \mathbf{y} , $R_{\mathbf{a},\alpha}$, $L_{\mathbf{b},\beta}$ possèdent nécessairement une relation de commutation; voir la remarque 8.12). Alors le théorème 8.7 indique simplement que $\mathbb{K}\langle R_{\mathbf{a},\alpha}, L_{\mathbf{b},\beta} \rangle = \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ (en tant que \mathbb{K} -espaces vectoriels).

2. Sous les conditions du point précédent, on peut facilement montrer, par le théorème 8.7, que le \mathbb{K} -espace vectoriel $\text{im}(\text{ev})$ agit densément sur $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$ (il s'agit donc d'une incarnation du théorème de densité de Jacobson; voir par exemple Jacobson (1980); Farb et Dennis (1993); Herstein (2005)). Plus précisément, l'adhérence séquentielle (c'est-à-dire l'ensemble des limites des suites d'éléments de $\text{im}(\text{ev})$ qui convergent dans la topologie compact-ouvert de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$) de $\text{im}(\text{ev})$ est $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$, soit, en d'autres termes, $\text{im}(\text{ev})$ est séquentiellement dense, et donc dense (pour la topologie compact-ouvert) dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V)$.

8.5 Extension au cas des combinaisons linéaires infinies

8.5.1 Préliminaires : topologie et dualité

Soit \mathbb{K} un corps (de caractéristique quelconque). Soit V un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension dénombrable, et $\mathbf{e} = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V . L'espace vectoriel V peut être considéré comme un espace vectoriel \mathbb{N} -gradué (en dimension un) particulier $V_{\mathbf{e}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}e_n$. Il existe une filtration

décroissante naturelle associée à cette graduation qui est définie par⁴ $V = V_{\mathbf{e}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(V_{\mathbf{e}})$

où $F_n(V_{\mathbf{e}}) = \bigoplus_{k \geq n} \mathbb{K}e_k$. Cette filtration est séparante, *i.e.*, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n(V_{\mathbf{e}}) = (0)$. Supposons main-

tenant que \mathbb{K} possède la topologie discrète. Les sous-ensembles $F_n(V_{\mathbf{e}})$ définissent un système fondamental de voisinages de zéro d'une topologie séparée de \mathbb{K} -espace vectoriel sur $V = V_{\mathbf{e}}$ (voir Bourbarki (2006)). Cette topologie (métrisable) peut être décrite de façon équivalente en termes de fonction d'ordre. Définissons $\omega_{\mathbf{e}} : V_{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ par

$$\omega_{\mathbf{e}}(v) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : \langle v, e_n \rangle \neq 0\} & \text{si } v \neq 0, \\ +\infty & \text{si } v = 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

pour $v \in V$. La complétion $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ de $V_{\mathbf{e}}$ pour cette topologie est canoniquement identifiée au \mathbb{K} -espace vectoriel $\prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}e_n$ – c'est-à-dire, l'ensemble des familles $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $v_n \in \mathbb{K}e_n$ pour chaque

entier naturel n – équipé de la topologie produit des topologies discrètes sur chaque facteur $\mathbb{K}e_n$. Chaque élément S de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ peut être vu de façon unique comme une combinaison linéaire infinie « formelle » $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle S, e_n \rangle e_n$, où $\langle S, e_n \rangle e_n = v_n$ et $S = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}e_n$ (il n'est pas difficile

de prouver que la famille $(\langle S, e_n \rangle e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable). La topologie induite par $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ sur $V_{\mathbf{e}}$ est identique à celle définie par la filtration. La fonction d'ordre est étendue à $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ par

$$\omega_{\mathbf{e}}(S) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} : \langle S, e_n \rangle \neq 0\} & \text{si } S \neq 0, \\ +\infty & \text{si } S = 0 \end{cases} \quad (8.27)$$

pour $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, et peut être utilisée pour décrire la topologie de la complétion. Par exemple, une suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de combinaisons linéaires infinies formelles converge vers zéro si, et seulement si, $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\mathbf{e}}(S_n) = +\infty$; en d'autres termes, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il y a seulement un nombre fini de $k \in \mathbb{N}$ tels que $\langle S_k, e_n \rangle \neq 0$. Cette topologie est parfois appelée *topologie formelle* (voir Chen (1961);

Kac (1994)), et, $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ est alors la *complétion formelle* de l'espace vectoriel \mathbb{N} -gradué $V_{\mathbf{e}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}e_n$.

Remarque 8.14. Si $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux bases de V , alors l'automorphisme (linéaire) Φ de V qui envoie a_n sur b_n pour chaque $n \in \mathbb{N}$ est également un homéomorphisme de $V_{\mathbf{a}}$ dans $V_{\mathbf{b}}$ considérés comme les espaces topologiques avec leurs filtrations respectives. Il s'ensuit que Φ peut être étendu comme un homéomorphisme $\widehat{\Phi}$ de $\widehat{V}_{\mathbf{a}}$ dans $\widehat{V}_{\mathbf{b}}$. Bien que les deux espaces soient homéomorphes, nous ne pouvons pas les identifier de façon canonique. En effet, considérons la suite

$\mathbf{b} = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $b_n = \sum_{k=0}^n a_k$, où $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une autre base. Alors \mathbf{b} est une base de V :

supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$, nous ayons $\sum_{i=0}^n \alpha_i b_i = 0$ avec $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Alors $\sum_{i=0}^n \alpha_i \left(\sum_{k=0}^i a_k \right) = 0$ ce

4. Cette filtration est assez similaire à un drapeau (infini) de sous-espaces vectoriels, tous de dimension infinie dénombrable, $\dots \subsetneq F_2(V_{\mathbf{e}}) \subsetneq F_1(V_{\mathbf{e}}) \subsetneq F_0(V_{\mathbf{e}}) = V$. Notons également que cette filtration ressemble à celle donnée par $(\mathfrak{M}_{\geq n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'introduite au numéro 6.5 du chapitre 6, la longueur minimale d'une décomposition d'un élément d'un monoïde à zéro localement fini est remplacée par le degré (suivant une base).

Chapitre 8. Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

qui est équivalent à $(\sum_{i=0}^n \alpha_i)a_0 + (\sum_{i=1}^n \alpha_i)a_1 + \cdots + (\alpha_{n-1} + \alpha_n)a_{n-1} + \alpha_n a_n = 0$. Alors $\alpha_i = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, et $\{b_i : i = 0, \dots, n\}$ est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. À l'aide de la formule d'inversion de Möbius usuelle, nous obtenons

$$a_n = \begin{cases} b_0 & \text{si } n = 0, \\ b_n - b_{n-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}, \quad (8.28)$$

ce qui prouve que V est engendré par \mathbf{b} . Maintenant nous avons $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ dans la topologie de $V_{\mathbf{b}}$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dans $\widehat{V}_{\mathbf{a}}$. (Notons cependant que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ également dans $V_{\mathbf{b}}$ car $\omega_{\mathbf{b}}(a_n) = n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_{\mathbf{b}}(a_n) = +\infty$.) Ce problème d'isomorphisme non naturel est la conséquence du fait que la fonction d'ordre dépend du choix de la base de V .

Introduisons maintenant un crochet de dualité $\langle \cdot | \cdot \rangle : \widehat{V}_{\mathbf{e}} \times V_{\mathbf{e}} \rightarrow \mathbb{K}$ défini par $\langle S | P \rangle = \sum_{n=0}^{\deg_{\mathbf{e}}(P)} \langle S, e_n \rangle \langle P, e_n \rangle$, pour $P \in V_{\mathbf{e}}$ et $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$ (il possède les mêmes propriétés de non dégénérescence que celles rencontrées au chapitre 5, numéro 5.2). Cet accouplement, également considéré dans Stanley (1988) (de même qu'au chapitre 5), satisfait en particulier

$$\langle e_i | e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}, \quad (8.29)$$

pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, et, plus généralement, $\langle e_i | P \rangle = \langle P, e_i \rangle$, $\langle S | e_i \rangle = \langle S, e_i \rangle$ pour tous $P \in V_{\mathbf{e}}$, $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$.

Le dual algébrique $V_{\mathbf{e}}^*$ de $V_{\mathbf{e}}$ est isomorphe à $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$. En effet, soit $\ell \in V_{\mathbf{e}}^*$ et définissons $S_{\ell} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(e_n) e_n \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$. Alors $\ell(P) = \langle S_{\ell} | P \rangle$. L'application linéaire $\ell \mapsto S_{\ell}$ est clairement injective.

Elle est également surjective puisque pour chaque $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, $P \mapsto \langle S | P \rangle$ est facilement vue comme une forme linéaire sur $V_{\mathbf{e}}$.

Le dual topologique $\widehat{V}'_{\mathbf{e}}$ de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ est isomorphe à $V_{\mathbf{e}}$. En effet, considérons une forme linéaire et continue ℓ de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$. Puisque ℓ est continue, pour tout $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, $\ell(S) = \sum_{n \geq 0} \langle S, e_n \rangle \ell(e_n)$ et la

somme est convergente dans \mathbb{K} discret. Ainsi, il existe un entier naturel \bar{N} tel que pour tout $n \geq \bar{N}$, $\langle S, e_n \rangle \ell(e_n) = 0$. Si on choisit $S = \sum_{n \geq 0} e_n$, alors cela signifie que pour n suffisamment

grand, $\ell(e_n) = 0$. Il en résulte que $P_{\ell} = \sum_{n \geq 0} \ell(e_n) e_n$ est en fait un élément de $V_{\mathbf{e}}$ qui vérifie

$\langle S | P_{\ell} \rangle = \ell(S)$ pour toute combinaison linéaire infinie S . Supposons maintenant que $P_{\ell} = 0$ pour $\ell \in \widehat{V}'_{\mathbf{e}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ell(e_n) = \langle e_n | P_{\ell} \rangle = \langle P_{\ell}, e_n \rangle = 0$. La forme linéaire est nulle sur le sous-ensemble dense $V_{\mathbf{e}}$ de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$, et, par continuité, ℓ est également égale à zéro sur l'adhérence. Soit $P \in V_{\mathbf{e}}$. Alors $\ell : S \mapsto \langle S | P \rangle$ est une forme linéaire sur $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$ telle que $P_{\ell} = P$. De plus, ℓ est clairement continu. En résumé, la couplage réalise les isomorphismes suivants.

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{e}}^* &\cong_{\mathbb{K}\text{-vect}} \widehat{V}_{\mathbf{e}}, \\ \widehat{V}'_{\mathbf{e}} &\cong_{\mathbb{K}\text{-vect}} V_{\mathbf{e}}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Les isomorphismes respectifs sont donnés par

$$\Phi : V_{\mathbf{e}}^* \rightarrow \widehat{V}_{\mathbf{e}} \quad (8.31)$$

et

$$\Psi : \widehat{V}'_{\mathbf{e}} \rightarrow V_{\mathbf{e}} \quad (8.32)$$

8.5. Extension au cas des combinaisons linéaires infinies

tels que pour tous $P \in V_{\mathbf{e}}$, $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, si $\ell \in V_{\mathbf{e}}^*$, alors

$$\langle \Phi(\ell) \mid P \rangle = \ell(P) \quad (8.33)$$

alors que

$$\Phi^{-1}(S)(P) = \langle S \mid P \rangle \quad (8.34)$$

et si $\ell \in \widehat{V}'_{\mathbf{e}}$, alors

$$\langle S \mid \Psi(\ell) \rangle = \ell(S) \quad (8.35)$$

et

$$\Psi^{-1}(P)(S) = \langle S \mid P \rangle . \quad (8.36)$$

Nous pouvons utiliser ces isomorphismes pour définir une notion naturelle de *transposition* dans ce cadre. Le *transposé* de $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_{\mathbf{e}})$ est $\phi^\dagger \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\widehat{V}_{\mathbf{e}})$ tel que pour tout $P \in V_{\mathbf{e}}$ et tout $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, $\langle S \mid \phi(P) \rangle = \langle \phi^\dagger(S) \mid P \rangle$. En fait, ϕ^\dagger est défini par

$$\begin{aligned} \phi^\dagger : \widehat{V}_{\mathbf{e}} &\rightarrow \widehat{V}_{\mathbf{e}} \\ S &\mapsto \Phi(\Phi^{-1}(S) \circ \phi) . \end{aligned} \quad (8.37)$$

En effet, pour tout $P \in V_{\mathbf{e}}$, on a :

$$\begin{aligned} \langle \phi^\dagger(S) \mid P \rangle &= \langle \Phi(\Phi^{-1}(S) \circ \phi) \mid P \rangle \\ &= (\Phi^{-1}(S))(\phi(P)) \\ &= \langle S \mid \phi(P) \rangle . \end{aligned} \quad (8.38)$$

Par dualité, il est également possible de définir le transposé de $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(\widehat{V}_{\mathbf{e}})$ mais la continuité doit être prise en compte. En effet, soit $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_{\mathbf{e}})$ un endomorphisme continu. On peut définir ${}^\dagger\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_{\mathbf{e}})$ par

$${}^\dagger\phi(P) = \Psi(\Psi^{-1}(P) \circ \phi) \quad (8.39)$$

pour tout $P \in V_{\mathbf{e}}$. Notons que puisque ϕ est continue (et linéaire), $\Psi^{-1}(P) \circ \phi \in \widehat{V}'_{\mathbf{e}}$. Alors, pour tous $P \in V_{\mathbf{e}}$ et $S \in \widehat{V}_{\mathbf{e}}$, nous avons

$$\langle \phi(S) \mid P \rangle = \langle S \mid {}^\dagger\phi(P) \rangle . \quad (8.40)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \langle S \mid {}^\dagger\phi(P) \rangle &= \langle S \mid \Psi(\Psi^{-1}(P) \circ \phi) \rangle \\ &= (\Psi^{-1}(P))(\phi(S)) \\ &= \langle \phi(S) \mid P \rangle . \end{aligned} \quad (8.41)$$

Lemme 8.15. *Pour chaque $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_{\mathbf{e}})$, ϕ^\dagger est un endomorphisme (linéaire) continu de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$, c'est-à-dire $\phi^\dagger \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_{\mathbf{e}})$. Quels que soient $\phi, \psi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_{\mathbf{e}})$, $(\phi\psi)^\dagger = \psi^\dagger\phi^\dagger$. De plus, $\phi = {}^\dagger({}^\dagger\phi)$. Dualement, pour tout endomorphisme continu ϕ de $\widehat{V}_{\mathbf{e}}$, $\phi = ({}^\dagger\phi)^\dagger$. Quels que soient $\phi, \psi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_{\mathbf{e}})$, ${}^\dagger(\phi\psi) = {}^\dagger\psi^\dagger\phi^\dagger$.*

Démonstration. Soient $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_{\mathbf{e}})$ et $(S_n)_n$ une suite de combinaisons linéaires infinies convergeant vers zéro. Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition de la transposition,

$$\langle \phi^\dagger(S_n), e_k \rangle = \sum_{i \geq 0} \langle \phi(e_k), e_i \rangle \langle S_n, e_i \rangle .$$

Comme $S_n \rightarrow 0$, pour chaque i , il existe un entier N_i tel que pour tout $n \geq N_i$, $\langle S_n, e_i \rangle = 0$. Il s'ensuit que l'on peut trouver N_k tel que $n \geq N_k$ implique $\langle S_n, e_i \rangle = 0$ pour tout $i \leq \deg_{\mathbf{e}}(\phi(e_k))$,

et donc pour un tel n , $\langle \phi^\dagger(S_n), e_k \rangle = 0$, de sorte que $\phi^\dagger(S_n) \rightarrow 0$, et ϕ^\dagger est continu. Démontrons maintenant que $\phi = \dagger(\phi^\dagger)$. Pour tous P, S , nous avons $\langle S | \phi(P) \rangle = \langle \phi^\dagger(S) | P \rangle = \langle S | \dagger(\phi^\dagger)(P) \rangle$ (la seconde égalité est valide dans la mesure où l'on vient de prouver la continuité de ϕ^\dagger). Aussi pour tous i, j , $\langle \phi(e_i), e_j \rangle = \langle e_j | \phi(e_i) \rangle = \langle e_j | \dagger(\phi^\dagger)(e_i) \rangle = \langle \dagger(\phi^\dagger)(e_i), e_j \rangle$ ce qui est suffisant pour démontrer l'égalité attendue. Finalement, soit $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\widehat{V}_e)$ un endomorphisme continu de \widehat{V}_e . Pour tous P, S , nous avons $\langle \phi(S) | P \rangle = \langle S | \dagger\phi(P) \rangle = \langle (\dagger\phi)^\dagger(S) | P \rangle$, et en particulier pour tout i , $\langle \phi(S), e_i \rangle = \langle \phi(S) | e_i \rangle = \langle (\dagger\phi)^\dagger(S) | e_i \rangle = \langle (\dagger\phi)^\dagger(S), e_i \rangle$, ce qui prouve que $\phi(S) = (\dagger\phi)^\dagger(S)$ (par définition de \widehat{V}_e). Pour finir les égalités $(\phi\psi)^\dagger = \psi^\dagger\phi^\dagger$ et $\dagger(\phi\psi) = \dagger\psi^\dagger\phi$ sont évidentes. \square

Remarque 8.16. *Le lecteur peut facilement se persuader que cette opération de transposition de $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\widehat{V}_e)$ n'est qu'une incarnation de celle introduite au chapitre 4 pour les matrices à lignes finies puisque ces dernières sont des endomorphismes continus (voir le chapitre 5).*

Soient \mathbf{a} et \mathbf{b} deux bases de V . Soit $L_{\mathbf{b},\beta}$ (respectivement, $R_{\mathbf{a},\alpha}$) l'opérateur descendant relativement à \mathbf{b} (respectivement, l'opérateur montant relativement à \mathbf{a}) avec suite de coefficients $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $\beta_0 = 1$ (respectivement, $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Cet opérateur est clairement continu sur $V_{\mathbf{b}}$ (respectivement, sur $V_{\mathbf{a}}$), et s'étend donc de façon unique en un endomorphisme continu de la complétion $\widehat{V}_{\mathbf{b}}$ (respectivement, $\widehat{V}_{\mathbf{a}}$). Les extensions respectives $\widehat{L}_{\mathbf{b},\beta}$ et $\widehat{R}_{\mathbf{a},\alpha}$ sont précisément définies par

$$\widehat{L}_{\mathbf{b},\beta}(S) = \sum_{n \geq 0} \langle S, b_n \rangle L_{\mathbf{b},\beta} b_n = \sum_{n \geq 1} \langle S, b_n \rangle \beta_n b_{n-1} = \sum_{n \geq 0} \langle S, b_{n+1} \rangle \beta_{n+1} b_n \quad (8.42)$$

et

$$\widehat{R}_{\mathbf{a},\alpha}(S) = \sum_{n \geq 0} \langle S, a_n \rangle R_{\mathbf{a},\alpha} a_n = \sum_{n \geq 0} \langle S, a_n \rangle \alpha_n a_{n+1} = \sum_{n \geq 1} \langle S, a_{n-1} \rangle \alpha_{n-1} a_n. \quad (8.43)$$

Ils correspondent aux opérateurs D et U de Stanley (1988) associés aux ensembles partiellement ordonnés (localement finis) gradués (qui ne sont que des chaînes avec minimum) $b_0 < b_1 < \frac{1}{\beta_1} b_2 < \frac{1}{\beta_1 \beta_2} b_3 < \dots$ et $a_0 < \alpha_0 a_1 < \alpha_0 \alpha_1 a_2 < \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 a_3 < \dots$

Nous pouvons utiliser le crochet de dualité afin de déterminer les transposés de $L_{\mathbf{b},\beta}$ et de $R_{\mathbf{a},\alpha}$. C'est précisément le contenu des deux lemmes suivants. Notons au passage que le premier sert également de définition pour $\alpha \downarrow$ et $\beta \uparrow$.

Lemme 8.17. *Soit $R_{\mathbf{a},\alpha}$ l'opérateur montant relativement à \mathbf{a} avec suite de coefficients $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le transposé de $R_{\mathbf{a},\alpha}$ est l'extension (par uniforme continuité) $\widehat{L}_{\mathbf{a},\alpha \downarrow}$ au complété $\widehat{V}_{\mathbf{a}}$ de l'opérateur descendant $L_{\mathbf{a},\alpha \downarrow}$ relativement à \mathbf{a} avec suite de coefficients $\alpha \downarrow = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où*

$$\gamma_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \alpha_{n-1} & \text{si } n > 0. \end{cases} \quad (8.44)$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $S \in \widehat{V}_{\mathbf{a}}$. D'après l'équation (8.22), $\langle S | R_{\mathbf{a},\alpha} a_n \rangle = \alpha_n \langle S | a_{n+1} \rangle = \alpha_n \langle S, a_{n+1} \rangle = \left\langle \sum_{k \geq 0} \langle S, a_{k+1} \rangle \alpha_k a_k | a_n \right\rangle = \langle \widehat{L}_{\mathbf{a},\alpha \downarrow}(S) | a_n \rangle$ (la dernière égalité provient de l'équation 8.42). En multipliant les deux membres (le premier et le dernier de la suite d'égalités) par $\langle a_n | P \rangle$ (pour $P \in V_{\mathbf{a}}$) et en sommant sur tous les entiers n , on obtient le résultat escompté. \square

Lemme 8.18. *Soit $L_{\mathbf{b},\beta}$ l'opérateur descendant relativement à \mathbf{b} avec suite de coefficients $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le transposé $L_{\mathbf{b},\beta}^\dagger$ de $L_{\mathbf{b},\beta}$ est l'extension (par uniforme continuité) $\widehat{R}_{\mathbf{b},\beta \uparrow}$ à $\widehat{V}_{\mathbf{b}}$ de l'opérateur montant $R_{\mathbf{b},\beta \uparrow}$ relativement à \mathbf{b} avec suite de coefficients $\beta \uparrow = (\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = \beta_{n+1}$.*

8.5. Extension au cas des combinaisons linéaires infinies

Démonstration. La preuve est similaire à celle du lemme 8.17 ; elle est donc omise. \square

Il est également possible de déterminer les transposés des extensions des opérateurs d'échelle à la complétion \widehat{V}_e . Plusieurs lemmes sont ainsi énoncés ci-dessous pour obtenir cette description. Le premier ne mérite pas de démonstration (notons que les définitions $\alpha \downarrow$ et $\beta \uparrow$ sont implicitement étendues à des suites de scalaires quelconques, pas forcément de dénominateurs).

Lemme 8.19. *Soit $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} telle que $\beta_0 = 1$. Nous avons*

$$\beta = \beta \uparrow \downarrow . \quad (8.45)$$

Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . Nous avons

$$\alpha = \alpha \downarrow \uparrow . \quad (8.46)$$

Lemme 8.20. *Soit $e = (e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V . Soient $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires non nuls telle que $\beta_0 = 1$, et $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires non nuls. Alors*

$$\dagger \widehat{L}_{e,\beta} = R_{e,\beta \uparrow} \text{ et } \dagger \widehat{R}_{e,\alpha} = L_{e,\alpha \downarrow} . \quad (8.47)$$

Démonstration. Puisque $\widehat{L}_{e,\beta}$ et $\widehat{R}_{e,\alpha}$ sont des opérateurs linéaires et continus de \widehat{V}_e , ils admettent des transposés qui sont des endomorphismes de V_e . D'après les lemmes 8.17 et 8.19, $R_{e,\beta \uparrow}^\dagger = \widehat{L}_{e,\beta \uparrow \downarrow} = \widehat{L}_{e,\beta}$. Alors, $\dagger \widehat{L}_{e,\beta} = \dagger (R_{e,\beta \uparrow}^\dagger) = R_{e,\beta \uparrow}$ (par le lemme 8.15). Le cas de $\dagger \widehat{R}_{e,\alpha}$ est traité de façon en tout point similaire. \square

Exemple 8.21. Passons temporairement en caractéristique zéro. Posons $R(\frac{x^n}{n!}) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, et soit D l'opérateur de dérivation (formelle) des séries formelles. On a $\dagger D = \dagger \left(\frac{d}{dx} \right) = R$. En caractéristique quelconque, si on définit $L(x^{n+1}) = x^n$ et $L(1) = 0$, alors $\dagger \widehat{X} = L$ (et on note que \widehat{X} est l'opérateur de multiplication par la variable x sur les séries formelles).

8.5.2 Extension du théorème 8.7 aux combinaisons linéaires infinies

Dans la suite, notre objectif est d'étendre le théorème 8.7 au cas des endomorphismes continus sur les combinaisons linéaires infinies. Pour cela, nous supposons que \widehat{V}_e est équipé de la topologie faible relativement à V_e , c'est-à-dire, la topologie la plus faible pour laquelle les applications $\Psi^{-1}(P) : S \in \widehat{V}_e \mapsto \langle S | P \rangle \in \mathbb{K}$, définies pour un $P \in V_e$ donné, sont continues. Puisque V_e est isomorphe au dual topologique \widehat{V}_e' (lorsque \widehat{V}_e possède sa topologie formelle comme introduite précédemment), il s'agit de la topologie $*$ -faible. Avec cette topologie \widehat{V}_e se trouve être un espace vectoriel topologique Hausdorff (avec \mathbb{K} discret) et complet. Il est évident que le crochet de dualité $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est séparément continu sur $\widehat{V}_e \times V_e$ où V_e est discret et \widehat{V}_e a la topologie faible relativement à V_e . Ainsi, une famille $(S_i)_{i \in I} \in \widehat{V}_e^I$ est sommable dès que pour tout $P \in V_e$, la famille $(\langle S_i | P \rangle)_{i \in I}$ est sommable dans \mathbb{K} , et dans ce cas, $\langle \sum_{i \in I} S_i | P \rangle = \sum_{i \in I} \langle S_i | P \rangle$. Par ailleurs, il est clair qu'en fait la topologie $*$ -faible n'est rien d'autre que la topologie produit sur \widehat{V}_e , avec \mathbb{K} discret (rappelons que \widehat{V}_e est naturellement équipé de cette topologie lorsqu'il est vu comme complété de V_e). Les endomorphismes de \widehat{V}_e continus pour la topologie $*$ -faible sont exactement les endomorphismes de \widehat{V}_e continus pour la topologie produit.

Supposons maintenant que l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\widehat{V}_e)$ des endomorphismes continus de \widehat{V}_e possède la topologie de la convergence simple. (Nous le supposons

Chapitre 8. Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés

aussi pour $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_e)$, avec V_e doté de la topologie discrète.) Dans cette topologie particulière, chaque famille d'endomorphismes continus $(\widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_e)^{\mathbb{N}}$, où ϕ_n est un endomorphisme continu de \widehat{V}_e pour chaque entier naturel n , est une famille sommable. Pour vérifier cela, prenons $P \in V_e$ et $S \in \widehat{V}_e$. Nous avons $\dagger(\widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n) = \dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_e)$. La famille $(\dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable dans $\text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ect}(V_e)$, et nous avons

$$\begin{aligned}
 \langle S \mid \sum_{n \in \mathbb{N}} \dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n(P) \rangle &= \langle S \mid \sum_{n=0}^{\deg_e(P)} \dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n(P) \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\deg_e(P)} \langle S \mid \dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n(P) \rangle \\
 &= \sum_{n=0}^{\deg_e(P)} \langle \widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n S \mid P \rangle \\
 &= \langle \sum_{n=0}^{\deg_e(P)} \widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n S \mid P \rangle .
 \end{aligned} \tag{8.48}$$

De plus pour tout $m > \deg_e(P)$,

$$\langle \sum_{n=\deg_e(P)}^m \widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n S \mid P \rangle = \langle S \mid \sum_{n=\deg_e(P)}^m \dagger\phi_n L_{e,\alpha\downarrow}^n(P) \rangle = 0 . \tag{8.49}$$

Ainsi, nous obtenons une série sommable dans \mathbb{K} discret, et donc la famille $(\widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est également sommable.

Remarque 8.22. *L'opérateur $\widehat{R}_{e,\alpha}$ est topologiquement nilpotent au sens où quels que soient $S \in \widehat{V}_e$ et $P \in V_e$, il existe un entier N tel que quel que soit $n \geq N$, $\langle \widehat{R}_{e,\alpha}^n S \mid P \rangle = 0$. C'est la raison profonde pour laquelle la famille $(\widehat{R}_{e,\alpha}^n \phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable.*

La généralisation du théorème 8.7 au cas des opérateurs continus sur les combinaisons linéaires infinies est donnée ci-après.

Théorème 8.23. *Soient $\alpha = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires non nuls, et $\beta = (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de scalaires non nuls avec $\beta_0 = 1$. Soit $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_e)$. Alors il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^{\mathbb{N}}$ telle que ϕ soit égal à la somme de la famille sommable $(\widehat{R}_{e,\beta\uparrow}^n P_n(\widehat{L}_{e,\alpha\downarrow}))_{n \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. D'après le théorème 8.7, $\dagger\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} P_n(R_{e,\alpha}) L_{e,\beta}^n$ (somme d'une famille sommable). Alors, en utilisant le crochet de dualité, on vérifie que $\phi = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{R}_{e,\beta\uparrow}^n P_n(\widehat{L}_{e,\alpha\downarrow})$ (somme d'une famille sommable). □

Corollaire 8.24. *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 8.23, tout endomorphisme continu $\phi \in \text{End}_{\mathbb{K}\text{-}\mathcal{V}ectTop}(\widehat{V}_e)$ est égal à la somme d'une famille sommable $(\widehat{R}_{e,\alpha}^n P_n(\widehat{L}_{e,\beta}))_{n \in \mathbb{N}}$ pour une certaine suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^{\mathbb{N}}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 8.23 avec $\beta = \alpha \downarrow$ et $\alpha = \beta \uparrow$. □

Remarque 8.25. *Notons que la famille de polynômes $(P_n(\mathbf{x}))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]^{\mathbb{N}}$ du théorème 8.23 ou du corollaire 8.24 satisfait la même relation de récurrence que celle du théorème 8.7 pour l'opérateur $\dagger\phi$.*

8.6. Conclusion et perspectives

Remarque 8.26. *Sans aucune difficulté, il est possible de vérifier que l'extension continue $\widehat{D}_{\mathbf{e},\beta,\alpha}$ de l'opérateur diagonal $D_{\mathbf{e},\beta,\alpha} = [L_{\mathbf{e},\beta}, R_{\mathbf{e},\alpha}]$ est égale à $[\widehat{L}_{\mathbf{e},\beta}, \widehat{R}_{\mathbf{e},\alpha}]$. En tant qu'endomorphisme continu, $\widehat{D}_{\mathbf{e},\beta,\alpha} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{R}_{\mathbf{e},\alpha}^n P_n(\widehat{L}_{\mathbf{e},\beta})$. Donc la relation de commutation devient*

$$\widehat{L}_{\mathbf{e},\beta} \widehat{R}_{\mathbf{e},\alpha} = \widehat{R}_{\mathbf{e},\alpha} \widehat{L}_{\mathbf{e},\beta} + \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{R}_{\mathbf{e},\alpha}^n P_n(\widehat{L}_{\mathbf{e},\beta}) . \quad (8.50)$$

8.6 Conclusion et perspectives

En physique, les opérateurs de création et d'annihilation agissent sur les espaces d'états des particules, progressant d'un étage à un autre, et sont donc considérés comme une forme spéciale d'opérateurs d'échelle. Dans ce chapitre, nous avons généralisé ce concept, en considérant les endomorphismes d'espaces linéaires qui « respectent » une graduation. En particulier, nous notons que les espaces vectoriels de dimension infinie (dénombrable) semblent être un cadre assez naturel pour les opérateurs d'échelle généralisés. Toute base indicée par l'ensemble des entiers naturels fournit ce cadre d'une façon assez évidente : on peut considérer un opérateur montant (création) et descendant (annihilation), sans prescription d'aucune sorte de relation de commutation (au contraire de l'algèbre de Weyl). Nous avons démontré qu'en prenant deux opérateurs d'échelle, l'un montant, et l'autre descendant, associés à des bases possiblement différentes (mais avec le même étage initial), il est possible de développer n'importe quel endomorphisme en termes d'itérés de ces opérateurs d'échelle. Ce résultat a ensuite été étendu au cadre des endomorphismes, cette fois continus, sur l'espace des combinaisons linéaires, cette fois infinies (à l'aide d'une complétion de l'espace gradué pour une topologie liée à une filtration, et d'une mise en dualité entre l'espace gradué et son complété).

Dans ce chapitre, nous avons brièvement évoqué l'opérateur diagonal $D_{\mathbf{a},\beta,\alpha}$ associé aux opérateurs d'échelle relatifs à la base \mathbf{a} (et de suites de coefficients β et α) défini par

$$D_{\mathbf{a},\beta,\alpha} a_n = \begin{cases} (\alpha_0 \beta_1) a_0 & \text{si } n = 0 , \\ (\alpha_n \beta_{n+1} - \alpha_{n-1} \beta_n) a_n & \text{si } n > 0 . \end{cases}$$

Ceci généralise la relation de commutation de l'algèbre de Weyl. Des questions naturelles se posent alors : peut-on définir une notion d'ordre normal (liée à cette commutation), et donc de problème de l'ordre normal relatif ? Si oui, qu'en est-il du lien entre opérateurs d'évolution et mise en forme normale des puissances d'un opérateur dans ce contexte ? De plus, comme l'opérateur diagonal peut également se développer en termes d'opérateurs d'échelle, cela conduit à une relation de commutation sous la forme d'une série infinie qui n'entre pas dans le cadre traditionnel des algèbres de polynômes gauche de Ore (qui généralisent l'algèbre de Weyl). Il semble donc pertinent d'étendre ce dernier pour prendre en compte ce type de commutations, et de vérifier si les algèbres que l'on obtient sont toujours des domaines de Ore (ou, au moins, sous quelles conditions elles le sont).

Ce chapitre ne constitue pas, factuellement, le dernier du manuscrit puisqu'il est suivi du chapitre 9 de conclusion et perspectives. Néanmoins, c'est bien, moralement, le dernier chapitre de la partie mathématique du texte.

Chapitre 9

Conclusion et perspectives

En second lieu, il n'y a point de particulier qui ait le droit d'envahir, ou de diminuer en aucune manière les biens civils d'un autre, sous prétexte que celui-ci est d'une autre Église, ou d'une autre religion. [...] Si un homme s'écarte du droit chemin, c'est un malheur pour lui, et non un dommage pour vous; et vous ne devez pas le dépouiller des biens de cette vie, parce que vous supposez qu'il sera misérable dans celle qui est à venir.

JOHN LOCKE, *Lettre sur la tolérance*

Sommaire

9.1 Conclusion	121
9.2 Perspectives	122

Ce chapitre est à la fois une conclusion et les perspectives de travaux à venir, liés, ou non, à ceux présentés dans ce texte.

9.1 Conclusion

Le lecteur, qu'il soit algébriste, combinatoricien ou cryptologue, arrive au terme de son voyage sur les bords de l'algèbre, de l'analyse et de la combinatoire des endomorphismes sur les espaces de séries. Qu'il soit las ou non, nous ne lui offrons qu'une courte conclusion, suivie d'une brève suite d'éléments de communication concernant les futurs travaux envisagés, qu'ils soient ou non, en rapport direct avec ceux présentés dans ce texte.

Les travaux collectés afin de constituer le corps de ce manuscrit relèvent tous de l'algèbre et de la combinatoire, avec une pincée d'analyse, et traitent principalement d'écritures sommatoires infinies que ce soit pour les fonctions (les séries) ou pour les endomorphismes. La notion de sommabilité repose pour l'essentiel sur la topologie. Certaines topologies sont considérées comme algébriques, disons, pour faire simple, celles relatives à un corps (ou un anneau) de base discret, et celles relevant de l'analyse (les topologies des espaces de fonctions réelles ou complexes, avec les topologies usuelles de ces corps; par exemple, la topologie d'espace de Fréchet).

Dans nos travaux, les deux types de topologies furent indispensables pour rendre valides certaines convergences de séries (en précisant à chaque fois quelle topologie était nécessaire pour calculer la somme de telle ou telle série; pour rappel, l'analyse se localise sur la diagonale des matrices infinies!).

Un autre ingrédient essentiel à ces travaux est celui de la dualité (algébrique ou topologique) que nous avons employé de façon décisive à deux reprises (aux chapitres 5 et 8). Celle-ci est intrinsèque des séries et des polynômes (fonctions et fonctions à support fini), et permet de définir les opérateurs (continus) comme des matrices infinies mais à lignes finies (si utiles pour certains des résultats obtenus).

Nous espérons que le message que nous avons souhaité transmettre au lecteur fut reçu sans modification. L'aspect topologique (voire analytique) de travaux d'algèbre et de combinatoire ne devrait pas être négligé, mais plutôt placé à la juste valeur qui est la sienne : essentielle parfois et toujours à portée limitée.

La démarche que nous espérons avoir défendue est celle qui permet de résoudre un problème de mathématiques par extraction de sa partie purement algébrique ou combinatoire de façon à obtenir une solution « formelle », sans oublier la fraction, souvent localisée, d'analyse de laquelle on tire un argument de convergence permettant de rabattre la solution formelle sur une vraie solution du problème initial.

9.2 Perspectives

Chapitre 3 Autour des algèbres de Fréchet : sous-groupes à un paramètre. Le calcul analytique (très) élémentaire, que nous avons introduit ici, et ses relations avec le spectre des éléments d'une algèbre de Fréchet, demandent à être développés. Tout comme la fonction logarithme dont nous pourrions déterminer les prolongements analytiques en utilisant la monodromie usuelle. Par manque de temps et d'espace, cela ne fut effectué ni dans les publications, ni dans le présent texte.

Chapitre 4 Algèbres de matrices infinies. On établit des isomorphismes algébriques entre les algèbres de matrices infinies et des structures combinatoires légèrement modifiées (calcul ombral, et produit tensoriel complété de façon gauche... ou droite). Seulement, nous n'avons pas poussé plus en avant leur étude, notamment l'interprétation de certains de nos résultats en termes de calcul ombral (généralisé), ou encore l'utilisation de nos séries génératrices incidentes de polynômes. Par ailleurs, il semble intéressant d'étudier en toute généralité la notion d'opérateurs « triangulaires » sur un espace de Fréchet (probablement liée aux espaces de Fréchet plats de Hamilton (1982)), et d'établir le fait qu'ils forment, ou non, une algèbre de Fréchet. De plus, et toujours dans le cadre généralisé, nous pourrions observer les opérateurs nilpotents et unipotents, ainsi que les structures de groupes de Lie-Fréchet et celles liées aux travaux de Lazard, dans ce contexte. Enfin, il est possible d'envisager une autre topologie pour l'ensemble des matrices infinies diagonales sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , à savoir la topologie de somme directe de l'ensemble des matrices à diagonale nulle avec le produit des topologies discrètes sur le corps de base, et de l'ensemble des matrices diagonales avec la topologie de Fréchet. Cependant dans ce cas le corps de base porte deux topologies, et *a priori* on ne dispose plus d'un espace vectoriel topologique.

Chapitre 5 Sur le dual topologique de l'espace des séries formelles, et sur ses opérateurs linéaires et continus. Le produit tensoriel complété (défini au chapitre 4) permet d'obtenir l'isomorphisme suivant (voir la remarque 5.18), qui est une généralisation du résultat usuel en dimension finie,

$$(\mathbb{K}^X)' \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}^{(Y)} \cong_{\mathbb{K}\text{-Vect}} \text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}^{(Y)}, \mathbb{K}^{(X)}) .$$

Cet isomorphisme offre la perspective de doter l'espace $\text{Hom}_{\mathbb{K}\text{-VectTop}}(\mathbb{K}\langle\langle Y \rangle\rangle, \mathbb{K}\langle\langle X \rangle\rangle)$ des applications linéaires et continues d'une structure d'algèbre obtenue en considérant le pro-

9.2. Perspectives

duit tensoriel complété $\mathbb{K}\langle X \rangle \widehat{\otimes}_{\mathbb{K}}^{\ell} \mathbb{K}\langle Y \rangle$ où le facteur $\mathbb{K}\langle X \rangle$ a le produit de battage, alors que $\mathbb{K}\langle Y \rangle$ possède le produit de concaténation usuelle. En fait, il devrait être possible d'équiper cette algèbre d'un coproduit et d'une coïunité, qui en feraient une bigèbre, en considérant la structure d'algèbre de Hopf usuelle de $\mathbb{K}\langle Y \rangle$, et celle d'algèbre de Hopf de battage de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ (avec le produit de déconcaténation). Ce produit tensoriel complété peut également être intéressant dans le cadre de l'étude du dual de Sweedler d'une algèbre (topologique).

Chapitre 6 Formule d'inversion de Möbius pour les monoïdes à zéro. Comme parfois, après coup, on s'aperçoit que les théories développées n'ont pas exactement le niveau de généralité souhaité. C'est exactement le cas ici. Les monoïdes à zéro sont assez similaires aux (petites) catégories, excepté le fait qu'ils disposent d'une identité totale (et non de plusieurs identités locales comme pour les catégories). Ce n'est pas surprenant dans la mesure où un monoïde à zéro est un monoïde interne à la catégorie des ensembles et fonctions partielles, alors qu'une petite catégorie (avec ensemble d'objets fixé) est un monoïde interne à la catégorie des (multi-)graphes orientés dont l'ensemble des sommets est précisément celui des objets (catégorie monoïdale pour le produit fibré des graphes, au-dessus de l'ensemble commun des sommets, pour les applications de domaine et codomaine). Il semble donc que les notions d'algèbres contractée et contractée large puissent être adaptées sans trop de difficultés aux cas des petites catégories, et notamment, les catégories dites de Möbius. Un prolongement possible de ces travaux est donc d'effectuer cette généralisation (et, en particulier, de définir l'analogie des quotients de Rees pour les catégories).

Chapitre 7 Algèbre de Weyl et problème de l'ordre normal bosonique. La relation (le théorème 7.17) entre la forme de l'opérateur d'évolution et les coefficients dans la base de l'ordre normal d'un opérateur homogène utilise une paire de séries, (g, s) , l'une, g , inversible pour la multiplication, et l'autre, s , inversible pour la substitution. Ces paires constituent un groupe (produit semi-direct du groupe des séries inversibles pour la substitution par celles multiplicativement inversibles), parfois appelé le *groupe de Riordan*, qui agit sur l'algèbre des séries formelles comme suit : $f \mapsto g(f \circ s)$. Il est lié aux fameuses *suites de Sheffer* associées à un opérateur delta (opérateur différentiel qui commute aux translations). Tout laisse à penser que ce groupe n'est autre que le groupe de Lie de l'algèbre de Lie (en dimension infinie) des champs affines $q(x) \frac{d}{dx} + v(x)$ où $q(x)$ est une série d'ordre ≥ 2 , et $v(x)$ une série d'ordre ≥ 1 . Il semble donc pertinent de démontrer cela de façon rigoureuse. Par ailleurs, afin de déterminer l'exponentielle d'un opérateur « conjugué », nous avons utilisé l'intégration d'un champ de vecteurs continu. Ceci nous a conduit à un sous-groupe (de substitutions) local à un paramètre (il se trouve que ce dernier a également un sens formel, ce dont nous avons tiré profit). Un prolongement possible pour ces travaux serait l'étude du groupe de Lie et de son algèbre (de fonctions continues ou analytiques) qui semblent n'être qu'esquissés. Une piste possible est de considérer les champs de vecteurs continus sur un intervalle ouvert $]a, b[$ comme des dérivations du $\mathcal{C}^{\infty}(]a, b[)$ -bimodule $\mathcal{C}^0(]a, b[)$. On peut donc les intégrer en utilisant le lemme 7.11. La difficulté consiste ensuite à donner un sens à l'exponentielle d'un tel champ de vecteurs continus (puisque, *a priori*, l'ensemble des dérivations de bimodule n'est pas une algèbre associative).

Chapitre 8 Décomposition d'endomorphismes par des opérateurs d'échelle généralisés. Dans ce chapitre, nous avons brièvement évoqué l'opérateur diagonal $D_{\mathbf{a}, \beta, \alpha}$ associé aux opérateurs d'échelle relatifs à la base \mathbf{a} (et de suites de coefficients β et α) défini par

$$D_{\mathbf{a}, \beta, \alpha} a_n = \begin{cases} (\alpha_0 \beta_1) a_0 & \text{si } n = 0, \\ (\alpha_n \beta_{n+1} - \alpha_{n-1} \beta_n) a_n & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Ceci généralise la relation de commutation de l'algèbre de Weyl. Des questions naturelles se posent alors : peut-on définir une notion d'ordre normal (liée à cette commutation), et

donc de problème de l'ordre normal relatif? Si oui, qu'en est-il du lien entre opérateurs d'évolution et mise en forme normale des puissances d'un opérateur dans ce contexte? De plus, comme l'opérateur diagonal peut également se développer en termes d'opérateurs d'échelle, cela conduit à une relation de commutation sous la forme d'une série infinie qui n'entre pas dans le cadre traditionnel des algèbres de polynômes gauche de Ore (qui généralisent l'algèbre de Weyl). Il semble donc pertinent d'étendre ce dernier pour prendre en compte ce type de commutations, et de vérifier si les algèbres que l'on obtient sont toujours des domaines de Ore (ou, au moins, sous quelles conditions elles le sont).

Autres travaux.

- Assez récemment, dans des travaux en cours (non encore publiés), la notion d'algèbre contractée large a été généralisée au cas des (petites) catégories. Les fonctions sur le groupe des éléments inversibles (au sens de la multiplication) de cette algèbre forment une algèbre de Hopf; il s'agit du dual fini de l'algèbre du groupe (ce dernier étant un groupe pro-affine algébrique). Dans certains cas, il est possible de définir une notion de substitution (généralisation de la substitution des séries formelles), et de construire le produit semi-direct du groupe des séries multiplicativement inversibles par ce groupe (cela généralise ce qui se passe dans le cas classique avec le groupe de Riordan). Cette structure se reflète sous la forme d'une structure de coproduit « smash » sur les algèbres de Hopf de fonctions représentatives.
- Une autre piste possible est également l'étude « combinatoire » d'objets algébriques internes à des catégories. Un tel exemple d'objets est mentionné dans la remarque 6.4 du chapitre 6 où nous indiquons qu'un monoïde interne à la catégories des ensembles pointés, avec le produit smash comme bifoncteur monoïdal, est un monoïde à zéro, alors que ses objets algèbres de Hopf internes sont des groupes avec un zéro adjoint (ou le groupe trivial). On peut aussi citer les algèbres de Banach (unitaires) qui sont des monoïdes dans la catégorie des espaces de Banach avec le produit tensoriel projectif pour structure monoïdale, les anneaux de Hopf qui sont des anneaux internes à la catégorie des cogèbres cocommutatives (ou encore des monoïdes internes à la catégorie des algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives), les espaces annelés qui sont des anneaux dans la catégorie des faisceaux sur un espace topologique, ou encore les schémas en groupe qui sont des groupes internes à une catégorie de schémas. Une fois la structure algébrique interne à une catégorie identifiée, l'idée est d'étudier comment des notions usuelles, c'est-à-dire celles relatives à la catégorie des ensembles, peuvent être « relevées » à celles de ces structures internes. En guise d'exemple, on peut montrer que le mécanisme d'adjonction d'une unité à un semi-groupe interne (pour en donner un monoïde interne) est, modulo une notion de distributivité du bifoncteur tensoriel sur le coproduit catégorique, presque identique aux constructions usuelles (semi-groupes et monoïdes, anneaux non unitaires et anneaux, algèbres de Banach non unitaires et algèbres de Banach, cogèbres non coïtaires et cogèbres).
- Une étude du groupe de Thompson d'homéomorphismes de l'intervalle unité a été débütée. Ce groupe est important car il correspond au groupe de géométrie de la relation d'associativité. L'objectif est ici de construire une représentation de ce groupe (en tant que groupe discret), et d'en déduire une algèbre de fonctions représentatives, afin de mieux appréhender la notion d'associativité à équivalence naturelle près des catégories monoïdales (cohérentes). Afin de construire cette représentation linéaire, on peut commencer par étendre l'action partielle du groupe de Thompson sur les arbres binaires par associativité en une action de groupe totalement définie, puis de la linéariser en une

9.2. Perspectives

représentation (comme solution du problème universel induit par l'existence de l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli de la catégorie des $R[G]$ -modules, où l'anneau R et le groupe G sont fixés, dans celle des G -ensembles et applications équivariantes à l'action par permutations de G).

- Il est également envisagé d'étendre les résultats du chapitre 8 au cas des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert, voire sur un espace de Banach avec une base de Schauder. Évidemment, dans ce cas, la convergence au sens L^2 doit être obtenue.

Index

- $(p_x(\mathbf{q}))_{x \in X}$, 50
- $(x_i)_{i \in I}$, 14
- 0_M , 15
- 0_S , 15
- 1_M , 15
- $A\text{-ModTop}$, 15
- $A\text{-Mod}$, 15
- $A_1^{(\ell)}(\mathbb{K})$, 92
- A_n , 91
- $A_n(\mathbb{K})$, 91
- $D(0; R)$, 30
- D_γ , 43
- $D_{\mathbf{a}, \beta, \alpha}$, 112
- $I(P, R)$, 45
- $I(\mathbb{N}, R)$, 26
- $L_{\mathbf{e}}$, 108
- $L_{\mathbf{b}, \beta}$, 111
- $M(\cdot, y)$, 44
- $M(n)$, 82
- $M(x, \cdot)$, 44
- M/I , 76
- $M[[\mathbf{x}]]$, 20
- M^* , 61
- $M^{(X)}$, 16
- M^+ , 81
- M^0 , 75
- M^\dagger , 44
- M' , 61
- M_0 , 75
- M_x , 44
- $P(R_{\mathbf{e}})$, 108
- $P(\mathbf{u})$, 108
- P^{op} , 45
- $R\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, 51
- $R[S]$, 19
- $R[[S]]$, 20
- $R\langle X \rangle$, 19
- $R\langle\langle X \rangle\rangle$, 19
- $R\langle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\rangle$, 51
- $R\text{-AlgTop}$, 15
- $R\text{-Alg}$, 15
- $R^{(X) \times Y}$, 44
- $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^\ell R^{(Y)}$, 48
- $R^{(X)} \widehat{\otimes}_R^c R^{(Y)}$, 48
- $R^{X \times (Y)}$, 44
- $R_0[M]$, 77
- $R_0[[M]]$, 80
- R_d , 18
- $R_{\mathbf{e}}$, 108
- $R_{\mathbf{a}, \alpha}$, 111
- $S(n)$, 86
- S_Ω , 94
- S_ℓ , 114
- V'_w , 69
- $V_{\mathbf{e}}$, 113
- $X \setminus Y$, 14
- X^* , 14, 16
- X^+ , 16
- X_0 , 84
- Y^X , 14
- Y_ℓ , 64
- $[0 \cdots k]$, 27
- $\alpha \cdot \mathbf{a}$, 111
- $\alpha \downarrow$, 116
- $\beta \uparrow$, 116
- $\beta^{-1} \cdot \mathbf{b}$, 111
- $\deg(p)$, 20
- $\deg_{\mathbf{e}}(v)$, 107
- δ_Y , 16
- δ_x , 16
- $\delta_{x, x'}$, 16
- $\sum_{i \in I} S_i$, 20
- $\sum_{i \in I} g_i$, 18
- ℓ_x , 48
- ℓ'_x , 48
- $\frac{d}{dz} \Big|_{z=z_0} f(z)$, 27
- $\frac{d}{dz} f$, 27
- $\ker p$, 24

Index

- $\langle S \mid w \rangle$, 20
 $\langle v \mid e \rangle$, 16
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$, 16
 \mathbb{N}^{op} , 27
 \mathbb{K} , 16
 $\mathbb{K}\text{-VectTop}$, 15
 $\mathbb{K}\text{-Vect}$, 15
 $\mathbb{N}^{(X)}$, 16
 \mathcal{C}^1 , 28
 \mathcal{C}^n , 28
 \mathcal{F} , 82
 $\mathcal{M}_{\phi, \alpha, \beta}$, 43
 $\mathcal{M}_{\phi, \alpha}$, 43
 \mathcal{M}_{ϕ} , 43
 \mathcal{P} , 25
 $\mathfrak{gl}_k(\mathbb{K})$, 26
 $\text{ti}(\mathbb{N}, R)$, 27
 \mathfrak{M} , 82
 \mathfrak{M}_I , 84
 $\mathfrak{M}_{\geq n}$, 82
 $\det(\mathfrak{g})$, 52
 $\text{diag}([0 \cdots k], R)$, 54
 $\text{diag}(\mathbb{N}, R)$, 51
 $\text{nil}([0 \cdots k], R)$, 54
 $\text{nil}(\mathbb{N}, R)$, 51
 $\text{ti}([0 \cdots k], R)$, 54
 Exp , 31
 $\text{Log}(x)$, 32
 $\mathcal{GL}_n(R)$, 54
 $\text{Hilb}_M(\mathfrak{t})$, 86
 $\mathcal{A}b$, 15
 AnnTop , 15
 Ann , 15
 $\text{DIA}\mathcal{G}([0 \cdots k], R)$, 54
 $\text{DIA}\mathcal{G}(\mathbb{N}, R)$, 51
 Ens , 15
 GrpTop , 15
 Grp , 15
 $\mathcal{G}(A)$, 35
 MonTop , 15
 Mon , 15
 $\mathcal{N}(\Omega)$, 93
 SemGrp , 15
 $\mathcal{TI}([0 \cdots k], R)$, 54
 $\mathcal{TI}(\mathbb{N}, R)$, 51
 $\mathcal{U}\mathcal{NI}([0 \cdots k], R)$, 54
 $\mathcal{U}\mathcal{NI}(\mathbb{N}, R)$, 51
 $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, 14
 $\mathcal{O}(\mathcal{C})$, 14
 $\text{Int}(P)$, 26
 $\text{Aut}_{\mathcal{C}}(A)$, 14
 $\text{End}_{\mathcal{C}}(A)$, 14
 $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, 14
 $\text{Supp}(f)$, 16
 x , 92
 \mathbf{a} , 91
 \mathbf{a}^\dagger , 91
 $|w|_x$, 94
 $\mu(M)$, 84
 $\mu_0(M)$, 84
 $\nu(f)$, 65
 $\nu_k(x)$, 32
 $\omega_M(x)$, 81
 ω_e , 113
 ϕ_M , 46
 $\phi_{M, \alpha}$, 47
 ϕ^\dagger , 115
 $\phi_{M, \alpha, \beta}$, 45
 π , 92
 π_e , 16
 ψ_M , 46
 ρ_{BF} , 92
 \underline{X} , 84
 \underline{X}_0 , 84
 $\widehat{0}$, 107
 \widehat{V} , 68
 \widehat{V}_e , 113
 ζ , 84
 ζ_0 , 84
 c'_y , 48
 c_y , 48
 $e_{i, j}$, 92
 f^* , 81
 $f'(z_0)$, 27
 p_ℓ , 64
 $p_{\phi, y}$, 66
 s (section de π), 93
 s_t , 98
 $f|_Y$, 14
 $\dagger\phi$, 115
 Adjoint (zéro), 75
 Adjonction (d'un zéro), 75
 Algèbre contractée d'un monoïde à zéro, 77
 Algèbre contractée large (d'un monoïde à zéro),
 80
 Algèbre de Weyl, 91
 Algèbre des matrices à lignes finies, 45

- Algèbre des matrices triangulaires inférieures infinies, 27
 Algèbre topologique, 18
 Anneau topologique, 18
 Application de dualité, 61
 Application linéaire associée à une matrice (à lignes finies), 45
 Arc paramétré, 28
 Bargmann-Fock (représentation de), 92
 Chemin, 28
 Colonnes finies (matrice à), 44
 Complétion, 68
 Complétion formelle, 113
 Condition (D), 79
 Convergence simple (topologie de la), 17
 Corps topologique, 18
 Couplage (ou accouplement) de dualité, 61
 Croissante (famille de semi-normes), 25
 Dérivée (d'un chemin), 27
 Décomposition finie (monoïde à zéro à), 79
 Décomposition finie (semi-groupe ou monoïde à), 79
 Degré, 20
 Degré (par rapport à une base), 107
 Dérivable (chemin), 27
 Dual algébrique, 61
 Dual topologique, 61
 Espace de Fréchet, 25
 Espace vectoriel topologique, 18
 Étoile (opération), 81
 Excès, 92
 Exponentielle (dans une algèbre de Fréchet), 31
 Famille sommable, 18
 Finie en colonne (matrice), 44
 Finie en ligne (matrice), 44
 Fonction caractéristique, 16
 Fonction d'ordre, 81
 Forme bilinéaire canonique, 61
 Générateur infinitésimal, 38
 Gradué (espace vectoriel), 113
 Gradué (opérateur), 92
 Groupe topologique, 18
 Homogène (opérateur), 93
 Idéal d'augmentation, 81
 Lignes finies (matrice à), 44
 Linéaire (topologie), 62
 Linéairement compact, 62
 Localement fini (monoïde à zéro), 81
 Localement fini (monoïde), 81
 Logarithme (dans une algèbre de Fréchet), 32
 Matrice de Stirling, 94
 Module topologique, 18
 Monoïde topologique, 18
 Monoïde à zéro, 75
 Mot bosonique, 91
 Mot standard, 74
 Multi-homogène (congruence ou monoïde), 85
 Nilpotente (matrice), 51
 Nombres de Stirling généralisés, 93
 Non dégénérescence, 62
 Noyau (d'une semi-norme), 24
 Opérateur d'annihilation, 91
 Opérateur d'échelle, 108
 Opérateur de création, 91
 Opérateur descendant, 108
 Opérateur descendant relativement à \mathbf{b} avec suite de coefficients β , 111
 Opérateur diagonal, 112
 Opérateur montant, 108
 Opérateur montant relativement à \mathbf{a} avec suite de coefficients α , 111
 Ordre normal (base de l'), 92
 Propre (idéal), 76
 Puissance fractionnaire, 100
 Quotient de Rees, 76
 Rayon de convergence (d'une série entière), 30
 Semi-norme, 24
 Séparante (famille de semi-normes), 25
 Série caractéristique, 84
 Série de Hilbert, 86
 Série de Möbius, 84
 Série incidente de polynômes, 53
 Série propre, 81
 Somme (d'une famille sommable), 18
 Sous-groupe à un paramètre, 37
 Sous-multiplicative (semi-norme), 26
 Suite de dénominateurs, 43
 Suite incidente de polynômes, 53
 Support (d'un arc paramétré), 28

Index

- Support (d'une application), 16
- Support fini (application à), 16

- Topologie faible, 69
- Topologie formelle, 113
- Topologie initiale, 17
- Topologie produit, 17
- Topologiquement nilpotent, 52
- Transposé (opérateur), 115
- Transposée (d'une matrice infinie), 44
- Transposition (d'opérateurs), 115
- Trigonal large inférieur, 51
- Trigonal strict inférieur, 51

- Unipotente (matrice), 51

- Vecteur tangent, 38

Bibliographie

- L. ACCARDI et M. BOŹEJKO : Interacting Fock space and gaussianization of probability measures. Infinite Dimensional Analysis, Quantum probability and Related Topics, 1(4):663–670, 1998.
- R. P. AGARWAL et V. LAKSHMIKANTHAM : Uniqueness and nonuniqueness criteria for ordinary differential equations, vol. 6 de Series in Real Analysis. World Scientific, 1993.
- P. ALEXANDROFF et H. HOPF : Topologie, vol. 45 de Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1935.
- G. R. ALLAN : Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra. Proceedings of the London Mathematical Society, 25(3):329–340, 1972.
- H. S. ALLEN : Groups of infinite matrices. Proceedings of the London Mathematical Society, 2(1):111–134, 1952.
- T. M. APOSTOL : Introduction to analytic number theory. Undergraduate texts in mathematics. Springer, 1976.
- B. D. ARENDT et C. J. STUTH : On partial homomorphisms of semigroups. Pacific Journal of Mathematics, 35(1):7–9, 1970.
- R. ARENS : Linear topological division algebras. Transactions of the American Mathematical Society, 53:623–630, 1947.
- R. ARENS : The space L^ω and convex topological rings. Bulletin of the American Mathematical Society, 52:931–935, 1946a.
- R. ARENS : Topologies for homeomorphism groups. American Journal of Mathematics, 68(4):593–610, 1946b.
- R. ARENS : A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics, 47(3):480–495, 1946c.
- R. ARENS et J. DUGUNDJI : Topologies for function space. Pacific Journal of Mathematics, 1(1):5–31, 1951.
- M. F. ATIYAH : K-theory. W. A. Benjamin, Inc., 1967.
- R. BACHER : Sur le groupe d'interpolation. URL <http://arxiv.org/abs/math/0609736>. Pré-publication, 2006.
- V. K. BALACHANDRAN : Topological algebras, vol. 185 de North-Holland mathematical studies. Elsevier, 2000.
- S. BANACH : Théorie des opérations linéaires. Monografie Matematyczne, 1:19–219, 1932.

- V. BARGMANN : On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform - part I. Communications on Pure and Applied Mathematics, 14:187–214, 1961.
- A. BENHISSI : Les anneaux de séries formelles, vol. 124 de Queen’s paper in pure and applied mathematics. Campus Bookstore, 2003.
- C. BERGE : Principles of combinatorics, vol. 72 de Mathematics in science and engineering. Elsevier, 1971.
- J. BERSTEL et C. REUTENAUER : Rational series and their languages, vol. 12 de EATCS monographs on theoretical computer science. Springer, 1988.
- J. BERSTEL et C. REUTENAUER : Noncommutative rational series with applications, vol. 137 de Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 2011.
- A. BIHAM et A. SHAMIR : Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems. Journal of Cryptology, 4(1):3–72, 1991.
- G. BIRKHOFF : Lattice theory, vol. 25 de Colloquium publications. American Mathematical Society, 3ème édn, 1995.
- J.-E. BJÖRK : Rings of differential operators. North-Holland mathematical library. North-Holland Publishing Company, 1979.
- P. BLASIAK, G. H. E. DUCHAMP, A. HORZELA, K. A. PENSON et A. I. SOLOMON : Heisenberg-Weyl algebra revisited: combinatorics of words and paths. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41:415204, 2008.
- P. BLASIAK, K. A. PENSON et A. I. SOLOMON : The boson normal ordering problem and generalized Bell numbers. Physics Letters A, 309:198–205, 2003a.
- P. BLASIAK, K. A. PENSON et A. I. SOLOMON : The general boson normal ordering problem. Physics Letters A, 309:198–205, 2003b.
- N. BOURBAKI : Espaces vectoriels topologiques - Chapitres 1 à 5. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2006.
- N. BOURBAKI : Algèbre - Chapitres 1 à 3. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2007a.
- N. BOURBAKI : Algèbre - Chapitres 4 à 7. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2007b.
- N. BOURBAKI : Groupes et algèbres de Lie - Chapitre 1. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2007c.
- N. BOURBAKI : Topologie générale - Chapitres 1 à 4. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2007d.
- N. BOURBAKI : Topologie générale - Chapitres 5 à 10. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2007e.
- N. BOURBAKI : Algèbre commutative - Chapitres 1 à 4. Éléments de mathématique. Springer, 2nde édn, 2006.

Bibliographie

- T. C. BROWN : On locally finite semigroups. Ukrainian Mathematical Journal, 20:631–636, 1968.
- C. CARLET et C. DING : Highly nonlinear mappings. Journal of Complexity, 20(2):205–244, 2004.
- P. CARTIER et D. FOATA : Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements, vol. 85 de Lecture Notes in Mathematics. Springer, 1969.
- H. CHEBALLAH, G. H. E. DUCHAMP et K. A. PENSON : Approximate substitutions and the normal ordering problem. In Journal of Physics : Conference Series, vol. 104, p. 1–8. IOP Publishing, 2008.
- K.-T. CHEN : Formal differential equations. Annals of Mathematics, 73(1):110–133, 1961.
- A. H. CLIFFORD : Partial homomorphic images of Brandt groupoids. Proceedings of the American Mathematical Society, 16(3):538–544, 1965.
- A. H. CLIFFORD et G. B. PRESTON : The algebraic theory of semigroups, vol. 7 de Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 1961.
- P. M. COHN : Skew fields - Theory of general division rings, vol. 57 de Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 1995.
- W. CONGXIN et L. PENG-YEE : Topological algebras of infinite matrices. In P. K. JAIN, éd. : Functional analysis - Selected topics, p. 23–31. Narosa Publishing House, 1998.
- A. CONNES : Noncommutative geometry. Academic Press, 1994.
- M. CONTENT, F. LEMAY et P. LEROUX : Catégories de Möbius et functorialités : un cadre général pour l'inversion de möbius. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 28(2):169–190, 1980.
- R. G. COOKE : Infinite matrices and sequence spaces. Dover Publications, inc., 1955.
- G. DATTOLI, P. L. OTTAVIANI, A. TORRE et L. VÁSQUEZ : Evolution operator equations : integration with algebraic and finite difference methods. La Rivista del Nuovo Cimento, 20(1):3–133, 1997.
- J. A. DAVIS et L. POINSOT : G -perfect nonlinear functions. Designs, Codes and Cryptography, 46(1):83–96, 2008.
- A. DI BUCCHIANICO et D. E. LOEB : Operator expansion in the derivative and multiplication by x . Integral Transforms and Special Functions, 4(1):49–68, 1996.
- J. DIEUDONNÉ : Linearly compact vector spaces and double vector spaces over sfields. American Journal of Mathematics, 73:13–19, 1951.
- J. F. DILLON : Elementary Hadamard difference sets. Thèse de doctorat, University of Maryland, 1974.
- P. DOUBILET, G.-C. ROTA et R. P. STANLEY : The idea of generating function. In G.-C. ROTA, éd. : Finite operator calculus, p. 83–134. Academic Press, 1975.
- D. DUBIN, M. HENNINGS et A. I. SOLOMON : Integrable representations of the ultra-commutation relations. Journal of Mathematical Physics, 38:3238–3262, 1997.

- D. DUBIN, M. HENNINGS et A. I. SOLOMON : The ultra-commutation relations. International Journal of Theoretical Physics, 37:585–591, 1998.
- G. H. E. DUCHAMP et D. KROB : Partially commutative formal power series. In Proceedings of the LITP spring school on theoretical computer science on Semantics of systems of concurrent processes, p. 256–276, 1990.
- G. H. E. DUCHAMP et D. KROB : Plactic-growth-like monoids. In M. I. et H. JÜRGENSEN, éd. : Words, Languages and Combinatorics II, Kyoto, Japan 1992, p. 124–142, 1994.
- G. H. E. DUCHAMP, K. A. PENSON, A. I. SOLOMON, A. HORZELA et P. BLASIAK : One-parameter groups and combinatorial physics. In Proceedings of the Third International Workshop on Contemporary Problems in Mathematical Physics : Cotonou, Republic of Benin, 1-7 November 2003, p. 436–449. World Scientific Pub Co Inc, 2004.
- G. H. E. DUCHAMP, L. POINSOT, A. I. SOLOMON, K. A. PENSON, P. BLASIAK et A. HORZELA : Ladder operators and endomorphisms in combinatorial physics. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 12(2):23–46, 2010.
- G. H. E. DUCHAMP et C. REUTENAUER : Un critère de rationalité provenant de la géométrie non-commutative. Inventiones Mathematicae, 128:613–622, 1997.
- S. EILENBERG : Sur les groupes compacts d’homéomorphies. Fundamenta Mathematicae, 28:75–80, 1937.
- S. EILENBERG : Automata, languages and machines - volume A. Academic Press, 1974.
- D. EISENBUD : Commutative algebra with a view toward algebraic geometry, vol. 150 de Graduate texts in mathematics. Springer, 1995.
- Z. ÉSIK : Iteration semirings. In Proceedings of the 12th international conference on Developments in Language Theory, Kyoto, Japan, vol. 5257 de Lecture Notes in Computer Science, p. 1–20, 2008.
- B. FARB et R. K. DENNIS : Noncommutative algebra, vol. 144 de Graduate texts in mathematics. Springer, 1993.
- P. FLAJOLET et R. SEDGEWICK : Analytic combinatorics. Cambridge University Press, 2009.
- M. FLIESS : Séries formelles. Mathématiques et sciences humaines, 35:39–42, 1971.
- S. FOMIN : Duality of graded graphs. Journal of Algebraic Combinatorics : An International Journal, 3(4):357–404, 1994.
- R. H. FOX : On topologies for function spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, 51:429–432, 1945.
- M. FRAGOULOPOULOU : Topological algebras with involution, vol. 200 de North-Holland mathematical studies. North-Holland, 2005.
- K. O. FRIEDRICHS : Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Interscience Publishers, inc., 1953.
- P. GABRIEL et R. RENTZCHLER : Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés. Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, série A, 265:712–715, 1967.

Bibliographie

- G. N. GALANIS : Projective limits of Banach-Lie groups. Periodica Mathematica Hungarica, 32:179–191, 1996.
- R. GILMER : Commutative semigroup rings. Chicago lectures in mathematics. The University of Chicago Press, 1984.
- H. GLÖCKNER : Infinite-dimensional Lie groups. Notes d'un cours donné à TU Darmstadt, 2005.
- H. GOLDMANN : Uniform Fréchet algebras, vol. 162 de North-Holland mathematics studies. Elsevier, 1990.
- K. R. GOODEARL et R. B. WARFIELD, JR. : An introduction to noncommutative Noetherian rings, vol. 61 de Student texts. London Mathematical Society, 2nde éd., 2004.
- P. A. GRILLET : Semigroups : an introduction to the structure theory. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Marcel Dekker, Inc., 1995.
- R. S. HAMILTON : The inverse function theorem of Nash and Moser. Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society, 7(1), 1982.
- S. HARARI et L. POINSOT : Cryptographie et procédés de chiffrement, chap. 7. Lavoisier, 2008. Livre Systèmes répartis en action, de l'embarqué aux systèmes à large échelle.
- S. HARARI et L. POINSOT : Enforcing security with cryptography, chap. 20. Hermes, 2011. Chapitre d'un ouvrage collectif.
- A. HATCHER : Algebraic topology. Cambridge University Press, 2002.
- T.-X. HE, L. C. HSU et P. J.-S. SHIUE : The Sheffer group and the Riordan group. Discrete Applied Mathematics, 155(15):1895–1909, 2007.
- A. Y. HELEMSKII : Banach and locally convex algebras. Oxford Science Publications, 1993.
- E. HELLINGER et O. TOEPLITZ : Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Mathematische Annalen, 69(3):289–330, 1910.
- P. HENRICI : Applied and computational complex analysis, volume 1. A Wiley-Interscience publication. John Wiley & Sons, inc., 1974.
- I. N. HERSTEIN : Noncommutative rings. The Carus mathematical monographs. The Mathematical Association of America, 5ème éd., 2005.
- F. HIVERT, J.-C. NOVELLI et J.-Y. THIBON : Un analogue du monoïde plaxique pour les arbres binaires de recherche. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, série I Mathématiques, 332:577–580, 2002.
- M. HOLZ, K. STEFFENS et E. WEITZ : Introduction to cardinal arithmetic. Modern Birkhäuser classics. Birkhäuser, 2010.
- J. HORVÁTH : Topological vector spaces and distributions, volume I. Addison-Wesley, 1966.
- T. HUSAIN : Multiplicative functionals on topological algebras, vol. 85 de Pitman research notes in mathematics. Pitman, 1983.
- T. HUSAIN et S. WATSON : Topological algebras with Schauder bases. Pacific Journal of Mathematics, p. 339–347, 1980.

- E. JABOTINSKY : Representation of functions by matrices. application to Faber polynomials. Proceedings of the American Mathematical Society, 4(4):546–553, 1953.
- J. R. JACKSON : Comparison of topologies on function spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 3(1):156–158, 1952.
- N. JACOBSON : Basic algebra II. W. H. Freeman and Company, 1980.
- V. G. KAC : Infinite-dimensional Lie algebras. Cambridge University Press, 1994.
- I. KAPLANSKY : Infinite Abelian groups. The University of Michigan Press, 1954.
- I. KAPLANSKY : Lie algebras and locally compact groups. University of Chicago Press, 1971.
- C. KASSEL : Quantum groups, vol. 155 de Graduate texts in mathematics. Springer, 1995.
- J. KATRIEL et G. H. E. DUCHAMP : Ordering relations for q -boson operators, continued fractions techniques and the q -cbh enigma. Journal of Physics A : Mathematical and General, 28:7209–7225, 1995.
- H. H. KELLER : Differential calculus in locally convex spaces, vol. 417 de Lecture notes in mathematics. Springer, 1974.
- J. L. KELLEY : General topology, vol. 27 de Graduate texts in mathematics. Springer, 2nde éd., 1975.
- J. O. KILTINEN : On the number of field topologies on an infinite field. Proceedings of the American Mathematical Society, 40(1):30–36, 1973.
- Y. KOSMANN-SCHWARZBACH : Groupes et symétries. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.
- G. KÖTHER : Topological vector spaces I, vol. 159 de Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1966.
- H. J. KOWALSKY : Topological spaces. Academic Press, 1964.
- D. KROB et J.-Y. THIBON : Noncommutative symmetric functions IV : quantum linear groups and Hecke algebras at $q = 0$. Journal of Algebraic Combinatorics, 6(4):339–376, 1997.
- S. G. KURBANOV et V. M. MAKSIMOV : Mutual expansions of differential operators and divided difference operators. Doklady Akademii Nauk SSSR, 4:8–9, 1986.
- G. KUROSH : Theory of groups, vol. II. Chelsea Publishing Company, 1956.
- K. KÖRBER : Das spektrum zeilenfiniter matrizen. Mathematische Annalen, 181(1):8–34, 1969.
- G. KÖTHER et O. TOEPLITZ : Lineare räume mit unendlich vielen koordinaten und ringe unendlicher matrizen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 171:193–226, 1934.
- S. LANG : Real analysis. Addison-Wesley, 1969.
- A. LASCoux et M. P. SCHÜTZENBERGER : Le monoïde plaxique. In A. D. LUCA, éd. : Non-commutative structures in algebra and geometric combinatorics, vol. 109 de Quaderni de la ricerca scientifica, C. N. R., p. 129–156, 1981.

Bibliographie

- F. W. LAWVERE et M. MENNI : The Hopf algebra of Möbius intervals. Theory and Applications of Categories, 24(10):221–265, 2010.
- M. LAZARD : Sur les groupes nilpotents et les anneaux de Lie. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 71:101–190, 1954.
- S. LEFSCHETZ : Algebraic topology, vol. 27 de Colloquium publications. American Mathematical Society, 1942.
- R. LEMMERT et Ä. WECKBACH : Charakterisierungen zeilenendlicher matrizen mit abzählbarem spektrum. Mathematische Zeitschrift, 188(1):119–124, 1984.
- H. LI : Noncommutative Gröbner bases and filtered-graded transfer, vol. 1795 de Lecture notes in mathematics. Springer, 2002.
- M. LINDER : Infinite matrices and their finite sections - An introduction to the limit operator method. Frontiers in mathematics. Birkhäuser, 2006.
- O. A. LOGACHEV, A. A. SALNIKOV et V. V. YASCHCHENKO : Bent functions on a finite Abelian group. Discrete Mathematics and Applications, 7(6):547–564, 1997.
- M. LOTHAIRE : Combinatorics on words. Cambridge University Press, 1997.
- J. C. MAC CONNELL, J. C. ROBSON et L. W. SMALL : Noncommutative Noetherian rings, vol. 30 de Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2001.
- S. MAC LANE : Categories for the working mathematician, vol. 5 de Graduate texts in mathematics. Springer, 2ème éd., 1998.
- I. J. MADDOX : Elements of functional analysis. CUP Archive, 2ème éd., 1988.
- A. I. MAL'CEV : Groupes nilpotents sans torsion. Izvestiya Akademii Nauk S. S. S. R., 13:745–748, 1948.
- A. MALLIOS : Topological algebras : Selected topics, vol. 124 de North-Holland Mathematics studies. Elsevier, 1986.
- M. MATSUI : Linear cryptanalysis method for des cipher. In Advances in cryptology - Eurocrypt'93, vol. 765 de Lectures Notes in Computer Science, p. 386–397, 1994.
- E. A. MICHAEL : Locally multiplicatively-convex topological algebras. American Mathematical Society, 1952.
- P. S. MOSTERT : Reasonable topologies for homeomorphism groups. Proceedings of the American Mathematical Society, 12(14):598–602, 1961.
- J. R. MUNKRES : Topology. Prentice Hall, 2nde éd., 2000.
- J.-C. NOVELLI : On the hypoplactic monoid. Discrete Mathematics, 217(1):315–336, 2000.
- B. V. NOVIKOV : 0-cohomology of semigroups. In M. HAZEWINKEL, éd. : Handbook of algebra, vol. 5, p. 189–210. Elsevier, 2008.
- B. V. NOVIKOV et L. Y. POLYAKOVA : On 0-homology of categorical at zero semigroups. Central European Journal of Mathematics, 7(2):165–175, 2009.

- J. OKNIŃSKI : Semigroup algebras, vol. 138 de Pure and applied mathematics. Marcel Dekker, inc., 1991.
- H. OMORI : Infinite-dimensional Lie groups, vol. 158 de Translations of mathematical monographs. American Mathematical Society, 1997.
- O. ORE : Theory of non-commutative polynomials. Transactions of the American Mathematical Society, 34:480–508, 1933.
- J.-F. PABION : Éléments d’analyse complexe. Ellipses, 1995.
- S. PINCHERLE et U. AMALDI : Le operazioni distributive e le loro applicazioni all’analisi. N. Zanichelli, Bologna, 1901.
- K.-P. PODEWSKI : The number of field topologies on countable fields. Proceedings of the American Mathematical Society, 39(1):33–38, 1973.
- L. POINSOT : Non linéarité parfaite généralisée au sens des actions de groupes : contribution aux fondements de la solidité cryptographique. Thèse de doctorat, Institut de Mathématiques de Toulon, 2005. Sous la direction de Sami Harari, Professeur des Universités.
- L. POINSOT : Bent functions on a finite nonabelian group. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 9(2):349–364, 2006a.
- L. POINSOT : Boolean bent functions in impossible cases : odd and pland dimensions. International Journal of Computer Science and Network Security, 6(8):18–26, 2006b.
- L. POINSOT : $GF(2^n)$ -bent functions. Advances and Applications in Discrete Mathematics, 3(1):1–46, 2009a.
- L. POINSOT : A new characterization of group action-based perfect nonlinearity. Discrete Applied Mathematics, 157(8):1848–1857, 2009b.
- L. POINSOT : Doubly perfect nonlinear boolean permutations. Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography, 13(6):571–582, 2010a.
- L. POINSOT : Non linéarité parfaite généralisée au sens des actions de groupe : contribution aux fondements de la solidité cryptographique. Éditions Universitaires Européennes, 2010b.
- L. POINSOT : Non abelian bent functions. Cryptography and Communications, Discrete Structures, Boolean Functions and Sequences, 2011a. URL <http://arxiv.org/abs/1012.4079>. À paraître.
- L. POINSOT : Rigidity of the topological dual spaces of formal series with respect to product topologies. URL <http://arxiv.org/abs/1012.4076>. Pré-publication, 2011b.
- L. POINSOT, G. H. E. DUCHAMP et S. GOODENOUGH : Statistics on graphs, exponential formula and combinatorial physics. Journal of Nonlinear Systems and Applications, 1:58–62, 2010a.
- L. POINSOT, G. H. E. DUCHAMP et C. TOLLU : Möbius inversion formula for monoids with zero. Semigroup Forum, 81(3):446–460, 2010b.
- L. POINSOT, G. H. E. DUCHAMP et C. TOLLU : Partial monoids: associativity and confluence. Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications, 3(2):265–285, 2010c.

Bibliographie

- L. POINSOT et A. POTT : Non-boolean almost perfect nonlinear functions on non-abelian groups. International Journal of Foundations of Computer Science, 22(6):1351–1367, 2011.
- P. PORCELLI : Linear spaces of analytic functions. Rand Mac Nally & Company, 1966.
- D. QUILLEN : Rational homotopy theory. Annals of Mathematics, 90(2):205–295, 1969.
- C. E. RICKART : General theory of Banach algebras. The University Series in Higher Mathematics. D. van Nostrand Company, inc., 1960.
- S. ROMAN : The umbral calculus. Academic Press, 1984.
- G.-C. ROTA : Finite operator calculus. Academic Press, inc., 1975.
- O. S. ROTHBAUS : On « bent » functions. Journal of Combinatorial Theory Serie A, 20:300–305, 1976.
- W. RUDIN : Analyse fonctionnelle. Édiscience International, 2000.
- S. SAKAI : Operators algebras in dynamical systems, vol. 41 de Encyclopedia of mathematics and its applications. Cambridge University Press, 1991.
- H. H. SCHAEFER et M. P. WOLFF : Topological vector spaces, vol. 3 de Graduate texts in mathematics. Springer, 1999.
- M. P. SCHÜTZENBERGER : Un problème de la théorie des automates. Séminaire Dubreuil. Algèbre et théorie des nombres, 13(1):1–16, 1959–1960.
- L. N. SHEVRIN : On locally finite semigroups. Soviet Mathematics Doklady, 6:769–772, 1965.
- E. SPIEGEL et C. J. O'DONNELL : Incidence algebras, vol. 206 de Pure and applied mathematics. Marcel Dekker, inc., 1997.
- R. P. STANLEY : Differential posets. Journal of the American Mathematical Society, p. 919–961, 1988.
- R. P. STANLEY : Enumerative combinatorics - volume 2, vol. 62 de Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1999.
- R. P. STANLEY : Enumerative combinatorics - volume 1, vol. 49 de Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 8ème éd., 2007.
- L. A. STEEN et J. A. SEEBACH : Counterexamples in topology. Dover Publications, 2nde éd., 1995.
- C. SWARTZ : Infinite matrices and the gliding hump. World Scientific, 1996.
- C. TISSERON : Notions de topologie : introduction aux espaces fonctionnels, vol. 42 de Méthodes. Hermann, 1985.
- F. TRÈVES : Topological vector spaces, distributions and kernels, vol. 25 de Pure and applied mathematics. Academic Press, 1967.
- H. ULM : Elementarteilertheorie unendlicher matrizen. Mathematische Annalen, 114(1):493–505, 1937.

- A. VARVAK : Rook numbers and the normal ordering problem. In Proceedings of FPSAC '04, p. 259–267, 2004.
- L. WAELBROECK : Topological vector spaces and algebras, vol. 230 de Lecture notes in mathematics. Springer, 1971.
- R. B. WARFIELD, JR. : Nilpotent groups, vol. 513 de Lectures notes in mathematics. Springer, 1976.
- S. WARNER : Topological fields, vol. 157 de North-Holland mathematics studies. Elsevier, 1989.
- S. WARNER : Topological rings, vol. 178 de North-Holland mathematics studies. Elsevier, 1993.
- H. WIELANDT : Über der unbeschränktheit der operatoren der quantum mechanik. Mathematische Annalen, 121:21, 1949.
- H. S. WILF : Generatingfunctionology. A. K. Peters, Ltd., 3ème édn, 2006.
- J. H. WILLIAMSON : Spectral representation of linear transformations in ω . Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 47(3):461–472, 1951.
- A. WINTNER : The unboundedness of quantum mechanical matrices. Physical Review, 71 (10):738–739, 1947.

Résumé. Le dual topologique de l'espace des séries en un nombre quelconque, éventuellement infini, de variables non commutatives avec un corps topologique séparé de coefficients, pour la topologie produit, n'est autre que l'espace des polynômes. Il en résulte de façon immédiate que les endomorphismes continus sur les séries sont exactement les matrices infinies mais finies en ligne. Les matrices triangulaires infinies, puisque formant une algèbre de Fréchet, disposent quant à elles d'un calcul intégral et différentiel, que nous développons dans un cadre assez général, et qui permet d'établir une correspondance exponentielle-logarithme de type Lie. Nous déployons ces outils sur l'algèbre de Weyl (à deux générateurs) réalisée fidèlement comme une algèbre d'opérateurs agissant continûment sur l'espace des séries formelles (en une variable). Puis nous démontrons que chaque endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable peut s'obtenir explicitement sous la forme de la somme d'une famille sommable en des opérateurs plus élémentaires, les opérateurs d'échelle (généralisation de l'algèbre de Weyl), précisant de la sorte le théorème de densité de Jacobson. Par dualité (topologique) un résultat similaire concernant les opérateurs continus sur un espace de combinaisons linéaires infinies tombent presque gratuitement. Par ailleurs nous développons la notion d'algèbre (contractée) large d'un monoïde à zéro (obtenue par complétion de l'algèbre contractée) qui nous permet de calculer de nouvelles formules d'inversion de Möbius ainsi que des séries de Hilbert.

Mots-clefs. Algèbre de Fréchet, matrice infinie, dual topologique, topologie initiale, sommabilité, algèbre de Weyl, monoïde à zéro, algèbre contractée, opérateur d'échelle.

Abstract. The topological dual of the space of formal series with any number, even infinite, of noncommutative variables over an Hausdorff topological field, under the product topology, is the space of polynomials. It implies that continuous endomorphisms on series are exactly the infinite but row-finite matrices. Because their totality is a Fréchet algebra, a basic integral and differential calculus can be defined for infinite triangular matrices ; such a calculus is furthermore developed in a general way and leads to an exponential-logarithm Lie-like correspondence. These analytic tools are then successfully applied on the first Weyl algebra faithfully represented as an algebra of continuous operators on the space of formal power series (in one variable). Afterwards we prove that every endomorphism of an infinite (countable) dimensional vector space may be explicitly obtained as the sum of a summable family of elementary operators, called ladder operators (generalizing the Weyl algebra) in a way similar to Jacobson's density theorem. By (topological) duality we obtain the same result for continuous operators on a space of infinite linear combinations. Besides we introduce the total (contracted) algebra of a monoid with a zero (as a completion of the usual contracted algebra) which is used to compute new Möbius inversion formulæ along with some Hilbert series.

Keywords. Fréchet algebra, infinite matrix, topological dual, initial topology, summability, Weyl algebra, monoid with a zero, contracted algebra, ladder operator.
