



HAL
open science

Dynamique des fluides de grade deux

Basma Jaffal

► **To cite this version:**

Basma Jaffal. Dynamique des fluides de grade deux. Equations aux dérivées partielles [math.AP].
Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT : . tel-00640385

HAL Id: tel-00640385

<https://theses.hal.science/tel-00640385>

Submitted on 11 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ
PARIS-SUD 11



Faculté des
sciences
d'Orsay

N° d'ordre : 10098

THESE

présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

par

Basma JAFFAL MOURTADA

Dynamique des fluides de grade deux.

Soutenue le 14 Décembre 2010 devant la Commission d'examen :

M.	THIERRY GALLAY	(Rapporteur)
M.	BERNARD HELFFER	(Président)
M.	DRAGOS IFTIMIE	(Rapporteur)
M.	MARIUS PAICU	(Examinateur)
Mme	GENEVIÈVE RAUGEL	(Directeur de thèse)

Table des matières

Remerciements	5
1 Introduction	8
1.1 Fluides de grade deux	9
1.1.1 Equations du mouvement des fluides de grade deux . .	10
1.1.2 Fluides de grade deux en rotation rapide	13
1.2 Comportement asymptotique en temps des fluides de grade deux	16
1.2.1 Tourbillon d'Oseen	17
1.3 Dynamique des fluides de grade deux	18
2 Historique et contributions de la thèse	19
2.1 Rappels sur les fluides de grade deux sur le tore	20
2.1.1 Rappels en dimension deux	22
2.1.2 Rappels en dimension trois	30
2.2 Fluides de grade deux en rotation rapide	33
2.2.1 Rappels sur les équations de Navier-Stokes en rotation rapide	35
2.2.2 Contributions de la thèse	36
2.3 Asymptotique des fluides de grade deux dans \mathbb{R}^2	41
2.3.1 Rappels sur l'asymptotique des équations de Navier- Stokes	42
2.3.2 Contribution de la thèse	45
2.4 Etude locale au voisinage d'un point d'équilibre	48
3 Global existence of the 3D rotating second grade fluid	49
3.1 Introduction	50
3.2 Various a priori estimates and local existence	58
3.2.1 Preliminary	58

3.2.2	Local existence	60
3.3	The filtered system	62
3.3.1	Study of the Coriolis force	63
3.3.2	Change of variables	65
3.3.3	The quadratic form	67
3.3.4	Diagonalization	70
3.4	Study of the limit system	71
3.4.1	The limit of (S^ϵ)	71
3.4.2	The limit of (S_{osc}^ϵ)	72
3.4.3	Global existence of the limit system	75
3.5	Convergence to the solution of the limit system and global existence of the 3D rotating second grade fluid	95
3.5.1	The V^3 -estimates	99
3.5.2	Global existence	102
4	Long-time asymptotics of the second grade fluid equations on \mathbb{R}^2	107
4.1	Introduction	108
4.2	Preliminaries	111
4.3	Local existence results for the regularized vorticity equation	112
4.4	Scaling variables	116
4.5	Asymptotic behavior of solutions	123
4.5.1	Energy estimates in $L^2(\mathbb{R}^2)$	123
4.5.2	Energy estimates in $L^2(2)$	134
4.5.3	Proof of Theorem 4.4.5 :	141
4.5.4	Proof of Corollary 4.4.6	144
4.6	Convergence when ϵ tends to zero	145
5	Etude locale au voisinage d'un point d'équilibre	150
5.1	Convergence des trajectoires	152
5.2	Comparaison des points d'équilibre	153
5.2.1	Résultats auxiliaires	156
5.2.2	Preuve du théorème 5.2.1	163
5.3	Variété locale instable autour du point d'équilibre	176
5.3.1	Estimations d'énergie	176
5.3.2	Construction des variétés locales instables	185
5.3.3	Comparaison des variétés locales instables	199

6 Bibliographie	206
------------------------	------------

Remerciements

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer ma profonde reconnaissance à Geneviève Raugel qui a dirigé cette thèse dans la continuité de mon stage de Master 2. Je la remercie de m'avoir fait profiter de son expérience et de m'avoir fait découvrir le monde passionnant de la mécanique des fluides et récemment le monde "dynamique" de la dynamique. Ses conseils, sa patience et son soutien constant ont largement contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je voudrais ensuite remercier Thierry Gallay et Dragos Iftimie d'avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Leurs remarques et suggestions lors de la lecture de ce manuscrit m'ont permis d'apporter des améliorations à ce dernier.

Je tiens aussi à remercier Bernard Helffer de m'avoir fait l'honneur de faire partie du jury de cette thèse. Je remercie également Marius Paicu d'avoir accepté de faire partie de mon jury ainsi que pour les discussions mathématiques enrichissantes qu'on a eues.

Je souhaiterais remercier tous les membres de l'équipe d'Analyse Numérique et EDP que j'ai eu le plaisir de rencontrer. Merci pour leur accueil et pour l'ambiance mathématique exceptionnel. Je remercie aussi Catherine Poupon et Valérie Lavigne de m'avoir aidé dans les démarches administratifs. Je remercie tous mes amis qui m'ont accompagné tout au long de ces années passées à Orsay. Merci à mon "grand frère" Van-Sang et à ceux avec qui j'ai partagé ce bureau tout au fond du couloir. Merci aussi à Ghayas d'avoir toujours ajouté une touche libanaise pendant les pauses déjeuners. Je n'oublierais certainement pas mes amies "Orsayaises" Racha et Mona.

Je voudrais aussi remercier Raafat Talhouk pour son aide et pour les mathématiques qu'il m'a appris ainsi que l'ensemble des enseignants à l'Université Libanaise qui ont contribué à ma formation. Je remercie le conseil régional d'Île de France de m'avoir offert une bourse pour venir faire mon Master 2 en France.

Je souhaite également remercier Amani d'avoir été mon amie de tous les temps, mes cousines Fadia et Hanane pour tous ces beaux moments qu'on

Chapitre 0 TABLE DES MATIÈRES

a passés ensemble. Je remercie aussi mon oncle Haidar et tante Rima pour leur aide et leur conseils surtout lors de mon arrivée en France.

En ces moments, mes pensées m'emportaient vers le Liban, vers ceux qui m'ont soutenu tout au long des années et que sans leur présence, rien de tout cela n'aura pu être possible.

Je remercie mon père et ma mère pour tout l'amour qu'ils m'ont donné, pour leurs sacrifices et leur soutien constant. C'est grâce à leur grande confiance que je suis arrivée là.

Je remercie mon frère Ali d'avoir été mon ami et de m'avoir toujours su me soutenir. Je suis fière de lui. Je remercie aussi ma soeur Rim pour sa tendresse et d'avoir toujours été ma confidente, ainsi que pour sa grande patience devant les caprices de Hanine.

Je remercie également ma tante Rajaa, qui, avec son beau sourire et sa belle humeur me faisait oublier tous mes soucis. Sans toi, les dimanches ne seront certainement pas si beaux.

Je voudrais remercier aussi mes beaux parents ainsi que mes beaux frères Firas et Zein et ma belle soeur Rim pour leur amour et leur soutien constant. Je remercie aussi ma tante Nadia et mon oncle Jaafar pour leur grande confiance en moi ainsi que mes grands-mères et tous mes oncles et tantes.

Merci à ma belle Hanine qui a rendu ma vie beaucoup plus signifiante. Les calins qu'elle me donnait tous les matins rendaient mes journées plus illuminantes.

Finalement, je me tourne vers toi Hussein, mon ultime refuge. Je te remercie pour ta patience et ton soutien surtout dans les moments difficiles. Avec toi, les "singularités" de la vie paraissent plus simples à résoudre. C'est à tes côtés que je veux vivre mes vies.

Chapitre 1

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude des fluides de grade deux. Ce chapitre se veut un aperçu rapide des motivations physiques et mathématiques à l'origine de ce travail. Nous commençons par rappeler la modélisation des équations des fluides de grade deux. Ensuite, nous présentons le système des fluides de grade deux en rotation rapide (où un terme de force de Coriolis est ajouté aux équations) et nous discutons de l'importance de la force de Coriolis sur le comportement du fluide. Dans la deuxième partie, nous abordons l'étude du profil asymptotique en temps long des écoulements des fluides de grade deux occupant l'espace \mathbb{R}^2 tout entier. Finalement, nous présentons le travail de la dernière partie de cette thèse qui concerne la dynamique des fluides de grade deux dans un tore bidimensionnel.

1.1 Fluides de grade deux

La théorie newtonienne des fluides incompressibles a fait l'objet d'un grand nombre d'études théoriques à cause de son importance dans la description du comportement d'un grand nombre de fluides.

Pourtant, cette théorie est incapable d'expliquer certaines propriétés observées dans de nombreux fluides présents dans la nature.

En effet, le comportement rhéofluidifiant (shear thinning en anglais) et le comportement rhéoépaississant (shear thickening en anglais) ne peuvent pas être expliqués par des lois newtoniennes.

Ainsi, tout fluide qui n'obéit pas à la théorie newtonienne est dit fluide non-newtonien. C'est le cas par exemple du sable, du caoutchouc, des polymères et beaucoup d'autres substances industrielles et alimentaires.

Ces dernières décennies, les fluides non newtoniens ont fait l'objet de recherches poussées, non seulement parce qu'ils sont présents dans la nature, mais aussi à cause de leurs applications pratiques dans l'industrie (la fabrication de matières plastiques, la réalisation de gilets pare-balles, l'industrie pétrolière, ...).

En raison de la grande diversité dans la structure physique des fluides non-newtoniens, plusieurs modèles ont été introduits afin d'expliquer et de décrire le comportement appelé "non newtonien". Parmi ces modèles, les fluides de type différentiel introduits par Rivlin-Erickson [48] ont attiré beaucoup d'intérêt d'un point de vue théorique et expérimental.

Pour ces fluides, les lois constitutives proposées impliquent des équations aux dérivées partielles avec des termes non linéaires d'ordre supérieur à celui de la nonlinéarité présente dans les équations de Navier-Stokes, ce qui rend l'étude du problème beaucoup plus compliquée.

En fait, le tenseur des contraintes d'un fluide de grade n n'est pas une fonction linéaire du gradient de la vitesse, il est donné par :

$$T = -pI + F(A_1, A_2, \dots, A_n), \quad (1.1)$$

où p est la pression dans le fluide, F est un polynôme de degré n et A_i sont les tenseurs de Rivlin-Ericksen définis par :

$$A_1 = 2D,$$

$$A_{k+1} = \frac{dA_k}{dt} + L^t A_k + A_k L,$$

où $\frac{d}{dt}$ désigne la dérivée matérielle $\frac{d}{dt} = \partial_t + u \cdot \nabla$, u est la vitesse du fluide,

$$L = (\partial_j u_i)_{i,j}, \quad D = \frac{1}{2}(L + L^t).$$

Il est clair que si $n = 1$, on retrouve les équations de Navier-Stokes.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse à l'étude d'une classe particulière de fluides de type différentiel, à savoir les fluides de grade deux. On trouvera ci-dessous une présentation succincte de la modélisation des équations du mouvement d'un fluide visqueux, incompressible, de grade deux.

1.1.1 Equations du mouvement des fluides de grade deux

Le tenseur de contraintes des fluides de grade deux est donné par

$$T = -pI + \mu A_1 + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2, \quad (1.2)$$

où μ est la viscosité, α_1 et α_2 sont deux coefficients matériels.

On considère ici que le fluide est incompressible. Cela signifie que le flot associé au champ des vitesses $u(x, t)$ préserve les volumes. Cette propriété s'écrit

$$\operatorname{div} u = 0. \quad (1.3)$$

Supposons que le fluide évolue de manière continue. Alors, la conservation de la masse implique que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot u) = 0 \quad (1.4)$$

Comme le fluide est homogène, ρ est constant en espace en $t = 0$. Les équations (1.3) et (4.7) impliquent que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire $\rho = \rho_0$. Donc la densité est également constante en temps.

D'autre part, en écrivant la conservation de la quantité de mouvement ou plus exactement un bilan des forces suivant la seconde loi de Newton, on obtient l'équation suivante

$$\operatorname{div} T + f = \rho_0 \frac{du}{dt}, \quad (1.5)$$

où $f = -\rho_0 \nabla \phi$ représente le terme de force volumique (telles que le potentiel de gravitation).

L'accélération $\frac{du}{dt}$ se calcule comme suit :

$$\frac{d}{dt}[u(x, t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + [u(x, t) \cdot \nabla]u(x, t).$$

En remplaçant le tenseur T par l'expression (1.2) dans (1.5), on obtient alors

$$\operatorname{div} T + f = \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right). \quad (1.6)$$

Finalement, on arrive aux équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u \\ - (\alpha_1 + \alpha_2)(A_1 \Delta u + 2 \operatorname{div}[(\nabla u)(\nabla u)^t]) = -\nabla P, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\rho_0}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho_0}$$

et

$$P = \frac{p}{\rho_0} - \alpha_1(u \cdot \Delta u) - \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{4\rho_0} |A_1|^2 + \frac{1}{2} |u|^2 + \phi.$$

L'étude des fluides de grade deux a été initiée par Dunn et Fosdick [17] en 1974. Dans [17], les auteurs ont effectué une étude approfondie de la thermodynamique des fluides de grade deux et ils ont montré que si le mouvement du fluide satisfait à l'inégalité de Clausius-Duhem (la deuxième loi de la thermodynamique) et que si l'énergie libre spécifique de Helmholtz est minimale à l'équilibre, alors les coefficients μ , α_1 et α_2 satisfont aux conditions

$$\mu \geq 0, \alpha_1 \geq 0 \text{ et } \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Il est clair que, lorsque α s'annule, (1.7) se réduit aux équations classiques de Navier-Stokes.

Il est bien connu que les équations de Navier-Stokes possèdent un effet régularisant en temps fini dû au terme visqueux $-\nu\Delta u$. En revanche, pour les équations des fluides de grade deux, on n'a plus d'effet régularisant en temps fini. En outre, le système décrivant les fluides de grade deux est un système vraiment non-linéaire. Tout cela rend l'étude de ce système beaucoup plus difficile que celle des équations de Navier-Stokes.

De nombreux travaux mathématiques ont été consacrés à l'étude de l'existence, l'unicité des solutions des équations des fluides de grade deux. A cet effet, on peut citer les références suivants : [16], [15], [20], [7], [23], [6], [22], etc...

Les premiers résultats d'existence locale (globale en dimension deux) et d'unicité des solutions des équations des fluides de grade deux remontent à Cioranescu et Ouazar [16]. Ensuite, Cioranescu et Girault [15] ont démontré l'existence globale des solutions des équations des fluide de grade deux, en dimension trois, pour des données petites, ainsi que la propagation de la régularité H^4 .

L'existence globale des solutions, en dimension trois d'espace, pour des données grandes, est toujours un problème ouvert.

Notons que lorsque $n = 3$ dans (1.1), on retrouve les fluides de grade trois. Ces fluides représentent une généralisation des fluides de grade deux, ils ont fait l'objet de plusieurs études mathématiques. A cet effet, on citera les références suivants : [37], [8], [9], [10], [43].

1.1.2 Fluides de grade deux en rotation rapide

La rotation joue un rôle fondamental dans divers phénomènes comme la météorologie, l'océanographie, la dynamique des fluides cosmiques et des fluides en géophysique, ...

Durant de longues années, de nombreuses études ont été consacrées à l'étude du mouvement décrivant les fluides newtoniens en rotation rapide. Il se trouve que l'effet de la force de Coriolis, dûe à la rotation de la terre, est significatif par rapport à la force d'inertie et à la force de viscosité. C'est pourquoi les études portant sur les fluides à grande échelle prennent en compte la force de Coriolis et montrent qu'elle modifie d'une manière considérable les propriétés du fluide.

Rappelons l'un des effets majeurs de la force de Coriolis sur les fluides newtoniens en rotation rapide : elle force le fluide à avoir une certaine rigidité verticale, au sens où, lorsque le fluide tourne rapidement, on observe des "mouvements en colonnes". Cette propriété a été découverte par G. I. Taylor. En d'autres termes, le comportement limite du fluide est celui d'un fluide bi-dimensionnel avec trois composantes. C'est le théorème de Taylor-Proudman, qui décrit l'effet principal de la rotation rapide.

Pour les fluides newtoniens, on retrouve cette propriété de Taylor dans les travaux de Babin, Mahalov et Nicolaenko [3] [2] [4], de Gallagher [21], de Paicu [45], etc...

L'étude des fluides non-newtoniens en rotation rapide a été peu abordée jusqu'ici. On citera cependant les travaux portant sur l'influence d'un champ magnétique sur les fluides de grade deux en rotation rapide [46], [34], [35], [33].

Pourtant, on retrouve l'écoulement des fluides non-Newtoniens en rotation rapide dans la géophysique comme le magma et dans beaucoup d'applications techniques comme les turbo-machines, l'industrie pétrolière et biomédicale. Une application commune, par exemple, consiste à utiliser une pompe centrifuge pour transporter le pétrole brut cireux qui est un fluide non newtonien (un fluide de Bingham).

Dans la première partie de cette thèse, nous nous intéressons à l'étude des équations décrivant les fluides de grade deux, en rotation rapide dans un

tore tridimensionnel.

Pour exprimer la force de Coriolis, on suppose que le fluide effectue un mouvement de rotation rapide à la vitesse u . Si on regarde le fluide à partir d'un repère fixe (absolu) qui n'est pas lié à la Terre (par exemple, un repère lié à une étoile qui est loin de la Terre), d'après le paragraphe précédent, nous pouvons décrire le mouvement du fluide par l'équation (1.7). Pourtant, il est plus commode d'observer le fluide dans un repère lié à la Terre, qui tourne avec la vitesse angulaire Ω (orientée selon l'axe des pôles, dirigée du sud vers le nord et supposée constante). Les évolutions d'un champ de vecteurs B exprimées dans les deux repères sont liées par l'équation suivante

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_A = \left(\frac{\partial B}{\partial t}\right)_R + \Omega \times B \quad (1.8)$$

où les indices A et R désignent les repères absolu et relatif respectivement. Soit r le vecteur de position d'une particule de fluide. Alors, d'après (1.8), on a

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_A = \left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_R + \Omega \times r$$

donc,

$$u_A = u_R + \Omega \times r.$$

En appliquant (1.8) au champ de vitesse, on obtient la relation suivante

$$\left(\frac{\partial u_A}{\partial t}\right)_A = \left(\frac{\partial u_R}{\partial t}\right)_R + 2\Omega \times u_R + \Omega \times (\Omega \times r). \quad (1.9)$$

Le deuxième terme du membre de droite représente l'accélération de Coriolis (que l'on appelle aussi "la force de Coriolis" de façon abusive) tandis que le troisième terme représente l'accélération centrifuge. Ce dernier terme peut s'écrire comme un terme de gradient

$$\Omega \times (\Omega \times r) = -\nabla\left(\frac{1}{2} |\Omega \times r|^2\right),$$

donc il peut être regroupé avec le gradient de la pression et le potentiel de gravitation.

Maintenant, en notant simplement u_R par u et en remplaçant l'expression de $\left(\frac{\partial u_A}{\partial t}\right)_A$ obtenue par (1.9) dans l'équation (1.7) en tenant compte que

donné par

$$\mathbb{T}^3 = \prod_{i=1}^3 (0, 2\pi a_i), \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Lorsque ϵ est très petit, on voit que la force de Coriolis devient le facteur dominant parmi les forces considérées. On se demande alors quelle sera son influence sur le mouvement du fluide.

La première partie de cette thèse donne une réponse à cette question. En s'inspirant des travaux qui ont été faits sur les équations de Navier-Stokes avec un terme de rotation (c'est à dire lorsqu'un terme de force de Coriolis $\frac{1}{\epsilon} e_3 \times u$ est ajouté aux équations, où $e_3 = (0, 0, 1)^t$), nous montrons que, lorsque le coefficient α est fixé et sous certaines conditions sur la troisième composante de la donnée initiale u_0 et de celle de f , le système (SG^ϵ) est globalement bien posé. Nous obtenons aussi le même résultat sans imposer des conditions sur les données initiales, en prenant α suffisamment petit .

1.2 Comportement asymptotique en temps des fluides de grade deux

Le comportement asymptotique en temps des fluides représente un aspect important de l'étude des fluides.

Dans ce contexte, les tourbillons constituent un point essentiel pour la compréhension de certains écoulements plus complexes.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude du comportement asymptotique en temps long des équations des fluides de grade deux bidimensionnels. On étudie le système suivant

$$(SGF) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u & = -\nabla p \\ \operatorname{div} u & = 0 \\ u(0) & = u_0 \end{cases}$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^2$ est la vitesse du fluide, $p = p(x, t)$ sa pression, α est un coefficient matériel, ν est la viscosité et $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$. On considère que les champs de vitesse sont nuls à l'infini.

Puisque le système (SGF) converge formellement vers les équations de Navier-Stokes, lorsque α tend vers zéro, il est intéressant de voir si le comportement asymptotique des solutions de (SGF) est semblable à celui des

solutions des équations de Navier-Stokes.

Notons que, grâce aux travaux de Gallay et Wayne [25], on sait que les petites solutions de l'équation de la vorticité associée aux équations de Navier-Stokes convergent asymptotiquement vers un écoulement auto-similaire appelé tourbillon d'Oseen, lorsque la masse totale de la vorticité est non nulle. Par la suite, ce résultat a été amélioré dans [26] pour obtenir la même convergence sans restriction sur la donnée initiale.

1.2.1 Tourbillon d'Oseen

Pour étudier le profil des solutions du système (*SGF*), on va suivre l'évolution du fluide via celle du rotationnel du champ de vitesse.

On précise que, si $v = (v_1, v_2)^t$ est un vecteur à deux composantes, alors le rotationnel de v , que l'on notera $\text{rot } v$ est donné par

$$\text{rot } v = (0, 0, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)^t.$$

Soit $w = \text{rot } u$.

En prenant le rotationnel de la première équation du système (*SGF*) et en remarquant qu'en dimension deux d'espace,

$$\text{rot}(\text{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u) = u \cdot \nabla (\text{rot}(u - \alpha \Delta u)),$$

on obtient l'équation suivante

$$\partial_t(w - \alpha \Delta w) - \nu \Delta w + u \cdot \nabla (w - \alpha \Delta w) = 0 \quad (1.13)$$

Pour reconstituer la vitesse u   partir de son rotationnel w , on utilise la loi de Biot-Savart. Cette loi indique qu'un champ de vecteur à divergence nulle peut être reconstitué à partir de son rotationnel suivant la relation

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} w_3(y) dy,$$

où $(x_1, x_2)^\perp = (-x_2, x_1)$ et $w = (0, 0, w_3)$.

On introduit aussi le tourbillon d'Oseen donné par

$$\Omega(x, t) = \frac{1}{t+T} G \left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}} \right)$$

et la vitesse associée

$$u^G(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t+T}} V^G \left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}} \right),$$

avec

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \quad \text{et} \quad V^G = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2} (1 - e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}).$$

Observons que le terme de convection $u^G \cdot \nabla \Omega = 0$, donc les tourbillons d'Oseen sont solutions de l'équation de la chaleur.

Ces tourbillons jouent un rôle essentiel dans le comportement asymptotique des solutions de (1.13) et nous montrons que, lorsque les données initiales sont petites, les solutions de l'équation (1.13) convergent vers le tourbillon d'Oseen et nous donnons aussi une estimation du taux de convergence.

1.3 Dynamique des fluides de grade deux

Comme les équations des fluides de grade convergent formellement vers les équations de Navier-Stokes lorsque α devient petit, la question de comparaison de la dynamique du système des fluides de grade deux avec celle des équations de Navier-Stokes se pose tout naturellement.

La dernière partie de cette thèse a pour but de donner une réponse partielle à cette question.

Nous nous intéressons à l'étude qualitative de la dynamique des équations des fluides de grade deux occupant un tore bidimensionnel.

On commence par comparer les points d'équilibre des équations des fluides de grade deux avec ceux des équations de Navier-Stokes, lorsque α tend vers zéro.

Ensuite, on s'intéresse à la construction de la variété locale instable autour d'un point d'équilibre hyperbolique pour le système des fluides de grade deux. Notons que les équations des fluides de grade deux définissent un système dynamique qui n'est pas régularisant en temps fini mais régularisant en temps infini.

On montre aussi un résultat de convergence des variétés locales instables vers celles des équations limites de Navier-Stokes, lorsque le coefficient α devient très petit.

Chapitre 2

Historique et contributions de la thèse

Avant de présenter en détails les contributions de cette thèse, on commence par rappeler des résultats connus sur les équations des fluides à grade deux. Certains de ces résultats ont été démontrés dans le cas où le fluide occupe un domaine borné dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 avec des conditions de Dirichlet sur le bord ([16], [15]), mais les mêmes démonstrations peuvent être adaptées au cas où des conditions de Dirichlet sont remplacées par des conditions périodiques ([44]).

2.1 Rappels sur les fluides de grade deux sur le tore

On considère le système d'équations décrivant le mouvement des fluides incompressibles de grade deux suivant

$$(FGD) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u = -\nabla p + f \text{ dans } \mathbb{T}^m \\ \operatorname{div} u = 0 \text{ dans } \mathbb{T}^m \\ u(0, x) = u_0(x) \end{array} \right.$$

où u représente la vitesse du fluide, p sa pression, f un terme de force extérieur, $\alpha > 0$ est un coefficient matériel fixé et \mathbb{T}^m ($m \in \{2, 3\}$) est le tore en dimension m donné par :

$$\mathbb{T}^m = \prod_{i=1}^m [0, 2\pi a_i] \quad (2.1)$$

où a_i , $1 \leq i \leq m$ sont des nombres positifs donnés.

On commence par introduire quelques notations ainsi que les espaces dans lesquels on travaille.

Pour tout $m \in \{2, 3\}$, et pour tout $s > 0$, on introduit l'espace $V^s(\mathbb{T}^m)$ qui est l'adhérence dans $H^s(\mathbb{T}^m)$ de l'espace

$$\{u \in [C^\infty(\mathbb{T}^m)] \mid u \text{ est périodique, } \operatorname{div} u = 0, \int_{\mathbb{T}^m} u \, dx = 0\}.$$

Soit aussi l'espace

$$W(\mathbb{T}^m) = \{u \in V^1(\mathbb{T}^m) \mid \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \in L^2(\mathbb{T}^m)\}.$$

Rappelons la définition du rotationnel d'un vecteur.

Pour tout $u = (u_1, u_2, u_3)^t$ dans \mathbb{R}^3 , on définit le rotationnel de u comme suivant

$$\text{rot } u = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)^t.$$

Dans cette thèse, on va aussi travailler avec des champs de vecteurs dans \mathbb{R}^2 , on identifie alors le vecteur $u = (u_1, u_2)^t$, à deux composantes, avec le vecteur \bar{u} à trois composantes, donné par $\bar{u} = (u_1, u_2, 0)^t$.

Dans ce cas, le rotationnel de u qui est un scalaire est identifié avec le vecteur $(0, 0, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)^t$.

Il est facile de démontrer que, pour tout $m \in \{2, 3\}$, si u appartient à $W(\mathbb{T}^m)$, alors u appartient à $V^3(\mathbb{T}^m)$ et on a l'inégalité suivante :

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\nabla \Delta u\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C} \|\text{rot } (u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 \quad (2.2)$$

où \tilde{C} est une constante qui ne dépend pas de α .

Considérons une donnée initiale et un terme de force à moyenne nulle, c'est à dire

$$\int_{\mathbb{T}^m} u_0 \, dx = 0 \text{ et } \int_{\mathbb{T}^m} f \, dx = 0,$$

On remarque que cette propriété est propagée par les équations des fluides de grade deux. En effet, en intégrant la première équation du système (FGD) sur le tore, on trouve que

$$\int_{\mathbb{T}^m} \partial_t u \, dx = 0,$$

par suite,

$$\int_{\mathbb{T}^m} u \, dx = \int_{\mathbb{T}^m} u_0 \, dx = 0.$$

L'intérêt de travailler avec des champs de vecteurs à moyenne nulle est qu'on a une inégalité de type Poincaré, c'est à dire qu'il existe une constante positive C_p telle que

$$\|u\|_{L^2} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2} \quad (2.3)$$

On note par $(., .)$ le produit scalaire usuel dans $L^2(\mathbb{T}^m)$.

Introduisons la forme trilinéaire suivante

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^m \int_{\mathbb{T}^m} u_j \partial_j v_i w_i \, dx \quad (2.4)$$

Par suite, pour tout $u \in V^3(\mathbb{T}^m)$ et pour tout $v \in L^2(\mathbb{T}^m)$, à divergence nulle, on peut écrire :

$$\int_{\mathbb{T}^m} (\text{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u) \cdot v dx = b(u, u, v) - \alpha b(u, \Delta u, v) + \alpha b(v, \Delta u, u).$$

La formulation variationnelle de la première équation du système (FGD) s'écrit alors

Pour u_0 et f donnés, trouver u solution de

$$(PV) \begin{cases} (\partial_t u, w) + \alpha(\partial_t \nabla u, \nabla w) + \nu(\nabla u, \nabla w) + b(u, u, w) - \alpha b(u, \Delta u, w) \\ + \alpha b(w, \Delta u, u) = (f, w), \quad \forall w \in V^3(\mathbb{T}^m) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

2.1.1 Rappels en dimension deux

Dans cette partie, on pose $m = 2$ et on considère le tore \mathbb{T}^2 défini par (2.1).

Existence globale de solutions

On commence par énoncer le théorème qui nous donnera l'existence globale de solutions des équations des fluides à grade deux en dimension deux (voir [16]).

Théorème 2.1.1. *Soit $\alpha > 0$. Supposons que f appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^2))$ et que la donnée initiale u_0 est dans $V^3(\mathbb{T}^2)$, alors il existe une unique solution u du problème variationnel (PV), qui satisfait*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \\ \partial_t u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^2)) \end{aligned}$$

De plus, $u \in C(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$.

Preuve: Dans [16], Cioranescu et Ouazar ont montré l'existence et l'unicité des solutions dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\Omega))$, où Ω est un ouvert borné régulier dans \mathbb{R}^2 (voir Théorème 1). Le fait que la solution appartient à l'espace $C(\mathbb{R}^+, V^3(\Omega))$ a été prouvé dans [41].

Donc, on va juste donner quelques idées de la démonstration. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter les références ci-dessus.

Commençons par établir des estimations a priori sur la solution. Ces estimations peuvent aussi être trouvées dans [44].

Supposons que u est une solution régulière du système (FGD). Alors, en prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de la première équation du système (PV) avec u , en utilisant (2.3) et en appliquant l'inégalité de Young, on retrouve

$$\partial_t (\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C_p^2}{\nu} \|f\|_{L^2}^2$$

où C_p est la constante de Poincaré.

En utilisant (2.3), on peut écrire

$$\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq (C_p^2 + \alpha) \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad (2.5)$$

Grâce à (2.5), l'estimation d'énergie devient

$$\partial_t (\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2) + \frac{\nu}{C_p^2 + \alpha} (\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2) \leq \frac{C_p^2}{\nu} \|f\|_{L^2}^2 \quad (2.6)$$

En intégrant en temps l'inégalité précédente et en appliquant l'inégalité de Gronwall, on obtient, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|^2 + \alpha \|\nabla u(t)\|^2 &\leq \exp\left(-\frac{\nu t}{C_p^2 + \alpha}\right) (\|u_0\|^2 + \alpha \|\nabla u_0\|^2) \\ &+ \frac{C_p^2}{\nu} \int_0^t \exp\left(-\frac{\nu(t-s)}{C_p^2 + \alpha}\right) \|f\|_{L^2}^2 ds \end{aligned} \quad (2.7)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 &\leq \exp\left(-\frac{\nu t}{C_p^2 + \alpha}\right) (\|u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u_0\|_{L^2}^2) \\ &+ \frac{C_p^2(C_p^2 + \alpha)}{\nu^2} \|f\|_{L_t^\infty(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Pour obtenir des estimations d'énergie dans l'espace $V^3(\mathbb{T}^2)$, on va borner le terme $\|\text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}$.

En prenant le rotationnel de la première équation du système (FGD), on trouve

$$\partial_t \text{rot} (u - \alpha \Delta u) - \nu \text{rot} \Delta u + \text{rot} (\text{rot} (u - \alpha \Delta u) \times u) = \text{rot} f \quad (2.9)$$

Un calcul simple montre que, si w_1 et w_2 sont deux champs de vecteurs réguliers dans \mathbb{R}^2 , tels que $\operatorname{div} w_1 = 0$, on a l'égalité suivante

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} w_2 \times w_1) = w_1 \cdot \nabla (\operatorname{rot} w_2) \quad (2.10)$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de l'équation (2.9) avec $\operatorname{rot}(u - \alpha\Delta u)$ et en utilisant l'identité (5.61) et le fait que $\operatorname{div} u = 0$, on trouve

$$\partial_t \|\operatorname{rot}(u - \alpha\Delta u)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot} u\|_{L^2}^2 + \alpha\nu \|\Delta \operatorname{rot} u\|_{L^2}^2 \leq \frac{C_p^2 + \alpha}{\nu} \|\operatorname{rot} f\|_{L^2}^2 \quad (2.11)$$

L'intégration en temps de l'inégalité précédente nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{rot}(u(t) - \alpha\Delta u(t))\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t (\|\nabla \operatorname{rot} u(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \operatorname{rot} u(s)\|_{L^2}^2) ds \leq \\ & \|\operatorname{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{C_p^2 + \alpha}{\nu} \|\operatorname{rot} f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

D'autre part, un calcul simple permet de montrer que $\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^2))$. En effet, en utilisant des injections de Sobolev, on a la borne suivante

$$\|\operatorname{rot}(u - \alpha\Delta u) \times u\|_{L^2} \leq C (\|\nabla u\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2} + \alpha \|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot} u\|_{L^2})$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de α .

Par suite, en prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de la première équation du système (FGD) avec $\partial_t u$ et en utilisant l'inégalité ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \partial_t u\|_{L^2}^2 & \leq C (\nu^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \alpha^2 \|\Delta u\|_{L^2}^2 \|\Delta \operatorname{rot} u\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

En utilisant (2.12), on conclut de l'inégalité ci-dessus que $\partial_t u$ appartient à l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^2))$.

Finalement, pour démontrer l'existence d'une solution du système (FGD), on utilise une méthode de Galerkin avec une base $(w_j)_{j \geq 1}$ de $W(\mathbb{T}^2)$, qui vérifie

$$\begin{aligned} (w_j, v) + \alpha(\nabla w_j, \nabla v) + (\operatorname{rot} (w_j - \alpha\Delta w_j), \operatorname{rot} (v - \alpha\Delta v)) \\ = \lambda_j((w_j, v) + \alpha(\nabla w_j, \nabla v)), \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Cette base nous permettra de décomposer le système en un problème de Stokes et une équation de transport vérifié par $w - \alpha\Delta w$, où w est le rotationnel de u . On montre alors que la solution approchée vérifie les mêmes estimations que celles trouvées sur u et on conclut la preuve de l'existence de solutions en utilisant un lemme de compacité.

L'unicité de la solution se démontre en utilisant le lemme de Gronwall.

Pour terminer la preuve du théorème, il reste à démontrer que $u \in C(\mathbb{R}, V^3(\mathbb{T}^2))$. Ceci a été fait dans [41] dans le cas d'un domaine borné dans \mathbb{R}^2 avec des conditions de Dirichlet sur le bord et un terme de force f qui ne dépend pas du temps. Mais la même preuve peut être faite dans le cas où on suppose des conditions périodiques sur le bord et où $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{T}^2))$.

En effet, comme $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$ et que $\partial_t u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^2))$, on en déduit que $u \in C(\mathbb{R}, V^1(\mathbb{T}^2))$.

De plus, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap C(\mathbb{R}, V^1(\mathbb{T}^2))$ implique que $u \in C_w(\mathbb{R}, V^3(\mathbb{T}^2))$, (pour plus de détails, voir [51], ch3).

D'autre part, en utilisant la réversibilité en temps dans la première équation du problème (PV) et en raisonnant comme dans la preuve du Théorème 4.1.2 dans [41], on peut montrer que la solution u du problème (1.1.4) vérifie l'égalité d'énergie suivante, $\forall t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 + \|\text{rot}(u(t) - \alpha\Delta u(t))\|_{L^2}^2 &= (\|u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u_0\|_{L^2}^2 \\ &+ \|\text{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2) e^{-\frac{2\nu}{\alpha}t} + \int_0^t K(u(s)) e^{-\frac{2\nu}{\alpha}(t-s)} ds \end{aligned}$$

où

$$\frac{1}{2}K(u) = \frac{\nu}{\alpha}\|u\|^2 + (f, u) + \left(\frac{\nu}{\alpha}\text{rot } u + \text{rot } f, \text{rot}(u - \alpha\Delta u)\right).$$

Cette égalité d'énergie implique que $\|\text{rot}(u(t) - \alpha\Delta u(t))\|_{L^2}$ converge vers $\|\text{rot}(u(t_0) - \alpha\Delta u(t_0))\|_{L^2}$ lorsque t converge vers t_0 , et comme $u \in C_w(\mathbb{R}, V^3(\mathbb{T}^2))$, on déduit que $u \in C(\mathbb{R}, V^3(\mathbb{T}^2))$. \square

Soit $S_\alpha(t)$ le semi-groupe non-linéaire défini par le système (FGD). En réalité, c'est un groupe non linéaire continu $S_\alpha(t) : u_0 \in V^3 \rightarrow S_\alpha(t)u_0 = u(t)$, où $u(t)$ est l'unique solution du système (FGD).

Cas où f ne dépend pas du temps

Dans cette partie, on va considérer que le terme de force f appartient à $V^1(\mathbb{T}^2)$. De plus, le semi-groupe $S_\alpha(t)$ admet un borné absorbant \mathcal{B}_α dans $V^3(\mathbb{T}^2)$. On rappelle qu'un ensemble \mathcal{B}_α est un borné absorbant pour le semi-groupe $S_\alpha(t)$ si \mathcal{B}_α absorbe tous les bornés de $V^3(\mathbb{T}^2)$, c'est-à-dire, pour tout borné B dans $V^3(\mathbb{T}^2)$, il existe un temps $T(B)$ tel que $S_\alpha(t)B \subset \mathcal{B}_\alpha$ pour tout $t \geq T(B)$.

Dans cette partie, on va rappeler ce résultat, les estimations élémentaires établies ci-dessous peuvent être aussi trouvées dans [44].

En reprenant l'inégalité (2.11) et en remarquant que

$$\begin{aligned} \|\text{rot } u\|_{L^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 &\leq (C_p^2 + 2\alpha) (\|\nabla \text{rot } u\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \alpha \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

on peut écrire, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \partial_t \|\text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2(C_p^2 + 2\alpha)} \|\text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} (\|\nabla \text{rot } u\|_{L^2}^2 \\ + \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2) \leq \frac{C_p^2 + \alpha}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Par suite, en intégrant en temps entre 0 et $t > 0$, et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient, pour tout $0 < \beta_0 \leq \frac{\nu}{2(C_p^2 + 2\alpha)}$,

$$\begin{aligned} \|\text{rot}(u(t) - \alpha \Delta u(t))\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \exp(\beta_0(s-t)) (\|\nabla \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2 \\ + \|\Delta \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2) ds \leq \exp(-\beta_0 t) \|\text{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 \\ + \frac{C_p^2 + \alpha}{\beta_0 \nu} \|\text{rot } f\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Régularité V^4 des solutions

Dans cette section, on va rappeler un résultat de propagation de la régularité V^4 contenu dans [44]. En effet, si f et u_0 sont plus réguliers, alors la solution u du système (PV) est aussi plus régulière, plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1.2. *Soit u une solution du système (PV). Supposons que f est dans $L^2(\mathbb{R}^+, V^2(\mathbb{T}^2))$ et que u_0 est dans $V^4(\mathbb{T}^2)$. Alors, u appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2))$.*

Preuve: Soit u une solution du problème (PV) appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$. Pour démontrer que $u \in V^4(\mathbb{T}^2)$, on va montrer que $\text{rot}(u - \alpha\Delta u) \in V^1(\mathbb{T}^2)$.

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de l'équation (2.9) avec $-\Delta\text{rot}(u - \alpha\Delta u)$, on trouve l'égalité suivante

$$\frac{1}{2} \partial_t \|\nabla \text{rot}(u - \alpha\Delta u)\|^2 + \nu \|\Delta \text{rot } u\|^2 + \nu \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } u\|^2 =$$

$$(u \cdot \nabla \text{rot}(u - \alpha\Delta u), -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u)) + (\text{rot } f, -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u))$$

On commence par estimer le terme $(u \cdot \nabla \text{rot}(u - \alpha\Delta u), -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u))$. En intégrant par parties et en utilisant le fait que $\text{div } u = 0$, on remarque que le terme $\sum_{k=1,2} (u \cdot \nabla \partial_k \text{rot}(u - \alpha\Delta u), \partial_k \text{rot}(u - \alpha\Delta u))$ s'annule et on obtient

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla \text{rot}(u - \alpha\Delta u), -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u)) &= \sum_{k=1,2} (\partial_k u \cdot \nabla \text{rot } u, \partial_k \text{rot } u) \\ &- \alpha \sum_{k=1,2} (\partial_k u \cdot \nabla \text{rot } \Delta u, \partial_k \text{rot } u) - \alpha \sum_{k=1,2} (\partial_k u \cdot \nabla \text{rot } u, \partial_k \text{rot } \Delta u) \\ &+ \alpha^2 \sum_{k=1,2} (\partial_k u \cdot \nabla \text{rot } \Delta u, \partial_k \text{rot } \Delta u) \end{aligned}$$

Par suite, les injections de Sobolev nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla \text{rot}(u - \alpha\Delta u), -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u)) &\leq C (\|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \text{rot } u\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2} \\ &+ \alpha \|\Delta u\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2} + \alpha^2 \|\nabla u\|_{V^2} \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de α .

Pour le terme de force, on a la borne suivante

$$(\text{rot } f, -\Delta \text{rot}(u - \alpha\Delta u)) \leq \|\text{rot } f\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2} + \alpha \|\nabla \text{rot } f\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2}$$

Finallement, en rassemblant toutes les bornes ci-dessus et en appliquant l'inégalité de Young, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \|\nabla \text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 + \nu \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 \leq \\
 & C \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta u\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \alpha^3 \|\nabla u\|_{V^2}^2 \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 \right) \\
 & + \frac{2}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L^2}^2 + \frac{2\alpha}{\nu} \|\nabla \text{rot } f\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

On remarque que

$$\|\nabla \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\nabla \Delta \text{rot } u\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla \text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 \tag{2.15}$$

Par suite, l'intégration en temps de l'inégalité (2.14) et l'application du lemme de Gronwall impliquent que, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \text{rot}(u(t) - \alpha \Delta u(t))\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \left(\|\Delta \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2 \right) ds \leq \\
 & \left(\|\nabla \text{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 + \frac{2\alpha}{\nu} \|\nabla \text{rot } f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \right) \\
 & \times \exp\left(C \int_0^t \left(\|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 + \|\Delta u(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u(s)\|_{V^2}^2 \right) ds\right)
 \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.12), on déduit que

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \text{rot}(u(t) - \alpha \Delta u(t))\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \left(\|\Delta \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } u(s)\|_{L^2}^2 \right) ds \leq \\
 & \left(\|\nabla \text{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 + \frac{2\alpha}{\nu} \|\nabla \text{rot } f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \right) \\
 & \times \exp\left(C_0 \left(\|\text{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{C_p^2 + \alpha}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^2))}^2 \right)\right)
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

où $C_0 > 0$ est une constante indépendante de α . \square

Existence et régularité de l'attracteur global

Contrairement aux équations de Navier-Stokes, le système des équations des fluides de grade deux ne possède pas la propriété de régularisation en temps fini. Toutefois, dans le cas des domaines bornés réguliers dans \mathbb{R}^2 , Moise, Rosa et Wang ont démontré dans [41] que lorsque le terme de force

ne dépend pas du temps, ce système est asymptotiquement compact et admet un attracteur global compact \mathcal{A}_α dans $V^3(\mathbb{T}^2)$. On rappelle que \mathcal{A}_α est UN attracteur global du système S_α si \mathcal{A}_α est un fermé, borné de $V^3(\mathbb{T}^2)$, invariant et s'il attire tous les bornés de $V^3(\mathbb{T}^2)$.

Plus tard, dans [44], Paicu, Raugel et Rekaló ont étudié le comportement asymptotique des fluides de grade deux dans le cas périodique. Ils ont démontré des propriétés régularisantes en temps infini du système des fluides de grade deux, ce qui entraîne que l'attracteur est en fait plus régulier que l'espace ambiant.

Dans cette section, on va rappeler ces résultats. Les théorèmes énoncés ci-dessous peuvent être trouvés dans [41] et [44].

Théorème 2.1.3. *Soit $\alpha > 0$. Etant donné f dans $V^1(\mathbb{T}^2)$ et u_0 dans $V^3(\mathbb{T}^2)$, le semi-groupe $S_\alpha(t)$ associé au système (FGD) admet un attracteur global compact \mathcal{A}_α dans $V^3(\mathbb{T}^2)$.*

Preuve: Il est clair que l'estimation d'énergie (2.13) implique l'existence d'un borné absorbant \mathcal{B}_α dans $V^3(\mathbb{T}^2)$.

De plus, en utilisant l'égalité d'énergie (2.13), Moise, Rosa et Wang prouvent dans [41], que le semi groupe non-linéaire $S_\alpha(t)$, défini par le système (FGD), est asymptotiquement compact.

Ces deux propriétés leur permettent ensuite de déduire l'existence d'un attracteur global compact \mathcal{A}_α dans $V^3(\mathbb{T}^2)$. \square

En décomposant le système (FGD) en deux systèmes linéaires non-autonomes et en supposant que f est assez régulier et que α est suffisamment petit, Paicu, Raugel et Rekaló démontrent, dans [44], que \mathcal{A}_α est borné dans un espace plus régulier que V^3 . Ce résultat est illustré par le théorème suivant :

Théorème 2.1.4. *1) Soit $f \in V^m(\mathbb{T}^2)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.*

Il existe une constante positive c_m ne dépendant que de m ($c_1 = 0$ et $c_2 = 1$) telle que si $2\nu - 2c_m\alpha \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \|\nabla z\|_{L^\infty} > 0$, alors l'attracteur global \mathcal{A}_α est borné dans $V^{m+2}(\mathbb{T}^2)$. De plus, il existe une constante positive M_m , indépendante de α telle que

$$\|u\|_{m+1}^2 + \inf(1, \alpha) \|u\|_{m+2}^2 \leq M_m \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{A}_\alpha.$$

2) Pour tout $\alpha > 0$, il existe un nombre positif $0 < \beta \leq 1$, qui dépend seulement de α et de la norme $\|f\|_{V^1}$, tel que, si f appartient à $V^{1+\beta}(\mathbb{T}^2)$, alors \mathcal{A}_α est borné dans $V^{3+\beta}(\mathbb{T}^2)$.

Preuve: La démonstration de ce théorème consiste à décomposer le système (FGD) en deux systèmes linéaires non-autonomes.

Plus précisément, si $u(t)$ est une trajectoire dans l'attracteur global, alors $u(t)$ peut être écrit comme $u(t) = v_n(t) + w_n(t)$, où $v_n(t)$ et $w_n(t)$ sont les solutions des deux systèmes suivants :

$$(S1) \begin{cases} \partial_t(v_n - \alpha\Delta v_n) - \nu\Delta v_n + \text{rot}(v_n - \alpha\Delta v_n) \times u & = -\nabla p_n + f \\ \text{div } v_n & = 0 \\ v_n(s_n, x) & = 0 \end{cases}$$

et

$$(S2) \begin{cases} \partial_t(w_n - \alpha\Delta w_n) - \nu\Delta w_n + \text{rot}(w_n - \alpha\Delta w_n) \times u & = -\nabla \tilde{p}_n \\ \text{div } w_n & = 0 \\ w_n(s_n, x) & = u(s_n, x) \end{cases}$$

où $s_n \in \mathbb{R}$ est un temps initial donné, qui va tendre vers $-\infty$.

Paicu, Raugel et Rekaló prouvent que le système (S2) admet une solution globale w_n sur $[s_n, +\infty)$ qui décroît exponentiellement dans V^3 lorsque $t - s_n$ tend vers l'infini.

En écrivant des estimations d'énergie dans V^4 sur la solution du système (S1), ils obtiennent, dans le cas où $2\nu - 2c_m \alpha \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \|\nabla z\|_{L^\infty} > 0$, que $v_n(t)$ est uniformément bornée dans V^4 , pour tout $t > 0$. Dans le cas contraire, la norme de $v_n(t)$ dans V^4 pouvait croître exponentiellement en temps mais comme elle décroît exponentiellement dans V^3 , ces deux propriétés impliquent que, dans certains espaces interpolés, on a toujours une décroissance exponentielle.

Par récurrence, ils ont aussi prouvé la propagation de la régularité V^{m+2} , où $m > 2$.

Finalement, pour achever la preuve du théorème, on passe à la limite dans $u(t) = v_n(t) + w_n(t)$. \square

2.1.2 Rappels en dimension trois

Dans cette partie, on pose $m = 3$ et on considère le tore \mathbb{T}^3 défini par (2.1).

Existence locale de solutions

On a vu dans la partie précédente que la solution des équations du fluide de grade deux est globale en temps, en dimension deux d'espace, ce qui n'est

pas le cas en dimension trois. On a, en fait, le théorème suivant (ce théorème est contenu dans le Théorème 2 de [16]).

Théorème 2.1.5. *Si f appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, T; V^1(\mathbb{T}^3))$ et si la donnée initiale u_0 est dans $V^3(\mathbb{T}^3)$, alors il existe un temps $0 < T^* \leq T$ tel que le problème (PV) admet une unique solution u satisfaisant*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0, T^*; V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, T^*; V^3(\mathbb{T}^3)) \\ \partial_t u &\in L^\infty(0, T^*; V^1(\mathbb{T}^3)) \end{aligned}$$

De plus,

$$u \in C^0(0, T^*; V^3(\mathbb{T}^3))$$

On rappelle rapidement la preuve contenu dans [16].

Preuve: En procédant comme dans la preuve du théorème 2.1.1, on obtient la même estimation d'énergie dans $V^1(\mathbb{T}^3)$ dans le cas tridimensionnel (voir estimation (2.8)).

Avant de commencer à établir des estimations dans $V^3(\mathbb{T}^3)$, il est important de rappeler que l'identité (2.10) était cruciale pour démontrer l'existence globale en dimension deux des solutions parce qu'elle permet d'éliminer, dans les estimations de type $V^3(\mathbb{T}^2)$, le mauvais terme $\text{rot}(u - \alpha\Delta u) \times u$, et par suite d'obtenir des estimations globales en temps sur la solution, ce qui n'est pas le cas en dimension trois d'espace.

En fait, en dimension trois, cette identité n'est plus valable et on a, pour tous champs de vecteurs réguliers w et \tilde{w} dans \mathbb{R}^3 , avec $\text{div } w = 0$

$$\text{rot}(\text{rot } \tilde{w} \times w) = w \cdot \nabla(\text{rot } \tilde{w}) - \text{rot } \tilde{w} \cdot \nabla w \quad (2.17)$$

Par suite, en prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ de l'équation (2.9) avec $\text{rot}(u - \alpha\Delta u)$ et en utilisant l'identité (2.17), on voit que le terme non linéaire ne disparaît pas de l'inégalité d'énergie et on obtient la borne suivante

$$\begin{aligned} (\text{rot}(u - \alpha\Delta u) \cdot \nabla u, \text{rot}(u - \alpha\Delta u)) &\leq \|\nabla u\|_{L^\infty(\mathbb{T}^3)} \|\text{rot}(u - \alpha\Delta u)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{\alpha^2} \|\text{rot}(u - \alpha\Delta u)\|_{L^2}^3 \end{aligned}$$

où $\tilde{C} > 0$ est la constante obtenue dans l'inégalité (2.2).

En utilisant la borne ci-dessus et en appliquant l'inégalité de Young, on peut

écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{\alpha} \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\nu}{\alpha} \|\operatorname{rot} u\|_{L^2} \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2} \\ + \frac{\tilde{C}}{\alpha^2} \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^3 + \|\operatorname{rot} f\|_{L^2} \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2} \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \partial_t \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2} + \frac{2\nu}{\alpha} \|\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2} &\leq \\ \frac{4\nu}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^2} + \frac{2\tilde{C}}{\alpha^2} \|w - \alpha \Delta w\|_{L^2}^2 + \frac{2\alpha}{\nu} \|\operatorname{rot} f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|\operatorname{rot}(u(t) - \alpha \Delta u(t))\|_{L^2} \leq \int_0^t g(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T^*$$

où $g(t)$ est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{2\tilde{C}}{\alpha^2} g^2(t) + \frac{4\nu}{\alpha} \|\nabla u\|_{L^2} + \frac{2\alpha}{\nu} \|\operatorname{rot} f\|_{L^2} \\ g(0) &= \|\operatorname{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2} \end{aligned}$$

et $[0, T^*]$ est l'intervalle d'existence de $g(t)$.

Après avoir établi les estimations a priori dans V^1 et V^3 , on peut utiliser une méthode de Galerkin identique à celle utilisée dans le cas bidimensionnel pour démontrer l'existence locale de solutions du système (PV) . La continuité dans V^3 se démontre aussi de la même façon comme dans le cas bidimensionnel.

□

Existence globale pour des données petites

Maintenant, on va aussi rappeler un résultat d'existence globale des solutions faibles du système des fluides de grade deux pour des données petites. En effet, dans [15], Cioranescu et Girault ont montré que si les données initiales et le terme de force sont "petits", alors le système (FGD) admet une unique solution globale en temps.

Posons

$$K = \left(\int_0^\infty (\|f(t)\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} f(t)\|_{L^2}^2) dt \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.18)$$

on a alors le théorème suivant.

Théorème 2.1.6. *Soit f appartenant à $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$ et la donnée initiale u_0 dans $V^3(\mathbb{T}^3)$. Supposons qu'il existe un réel $\theta \in (0, 1)$ tel que*

$$\frac{4(\alpha + C_p^2)}{\alpha^2} (\|u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u_0\|_{L^2}^2) + K^2 \left(\frac{2\alpha}{\nu} + \frac{4C_p^2(\alpha + C_p^2)}{\nu\alpha^2} \right) < \theta \left(\frac{\alpha\nu}{2\tilde{C}} \right)^2, \quad (2.19)$$

$$0 \leq \|\text{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2 < (1 - \theta) \left(\frac{\alpha\nu}{2\tilde{C}} \right)^2, \quad (2.20)$$

où K est défini par (2.18), et \tilde{C} est la constante qui apparaît dans l'inégalité (2.2), alors le problème (PV) admet une unique solution u satisfaisant

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, \mathbb{R}^+; V^1(\mathbb{T}^3)) \\ \partial_t u &\in L^\infty(0, \mathbb{R}^+; V^1(\mathbb{T}^3)) \end{aligned}$$

De plus,

$$\|\text{rot}(u - \alpha\Delta u)\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{\alpha\nu}{2\tilde{C}} \right).$$

Régularité V^4

Comme dans le cas bidimensionnel, les solutions du système des fluides de grade deux sont plus régulières si les données initiales le sont. Cioranescu et Girault [15] ont démontré le résultat suivant.

Théorème 2.1.7. *Soient $0 < T < \infty$ un temps fixé et u une solution du problème (PV) appartenant à l'espace $L^\infty(0, T; V^3(\mathbb{T}^3))$. Si u_0 est dans $V^4(\mathbb{T}^3)$ et f dans $L^2(0, T; V^2(\mathbb{T}^3))$, alors u appartient à $L^\infty(0, T; V^4(\mathbb{T}^3))$.*

2.2 Fluides de grade deux en rotation rapide

Il existe dans la nature des problèmes géophysiques dans lesquels la rotation joue un rôle essentiel dans le comportement du fluide. On peut citer par exemple le théorème bien connu de Taylor Proudman. Sous l'effet d'une rotation rapide, le fluide tridimensionnel tend à se comporter comme un fluide bidimensionnel.

L'étude du mouvement d'un fluide en rotation rapide, sur une échelle globale, nous amène à prendre en compte la force de Coriolis. Cette force est désignée

par le terme $\frac{1}{\epsilon} e_3 \times u$, où u est la vitesse du fluide, e_3 est le vecteur unité dans la direction de x_3 et ϵ est un petit paramètre, dit nombre de Rossby, qui représente l'inverse de la vitesse de rotation de la terre.

Dans la première partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude du mouvement d'un fluide de grade deux en rotation rapide dans \mathbb{R}^3 .

On considère alors le système d'équations suivant :

$$(SG^\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(u^\epsilon - \alpha \Delta u^\epsilon) - \nu \Delta u^\epsilon + \text{rot}(u^\epsilon - \alpha \Delta u^\epsilon) \times u^\epsilon + \frac{1}{\epsilon} e_3 \times u^\epsilon \\ \qquad \qquad \qquad = -\nabla p^\epsilon + f \quad \text{dans } \mathbb{T}^3 \\ \text{div } u^\epsilon = 0 \quad \text{dans } \mathbb{T}^3 \\ u^\epsilon |_{t=0} = u_0 \end{array} \right.$$

où $u^\epsilon = (u_1^\epsilon, u_2^\epsilon, u_3^\epsilon)$ représente la vitesse du fluide, p^ϵ sa pression et \mathbb{T}^3 est le tore tridimensionnel donné par

$$\mathbb{T}^3 = \prod_{i=1}^3 (0, 2\pi a_i), \quad a_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.21)$$

Lorsque ϵ devient très petit, on se demande alors quel sera l'effet de la force de Coriolis sur le mouvement du fluide.

La motivation de ce travail est la suivante.

Dans un premier temps, on a vu précédemment que, dans le cas tridimensionnel, l'existence globale de solutions faibles pour les fluides de grade deux sans rotation est toujours un problème ouvert.

En outre, lorsque α s'annule, on retrouve le système classique d'équations de Navier-Stokes tournant, qui a été largement étudié (voir par exemple [21], [3], [29], [2], [45]...). On sait grâce aux travaux de Babin, Mahalov et Nicolaenko [3], [2], et ensuite ceux de Gallagher [21], que dans le cas des domaines non résonnants, et lorsque ϵ est suffisamment petit, le système d'équations de Navier-Stokes en rotation rapide admet une (unique) solution globale forte, pour toute donnée initiale. Plus tard, des résultats d'existence globale dans des domaines résonnants ont été obtenus par Babin, Mahalov et Nicolaenko [4]. Dans le cas des fluides anisotropes tournants, Paicu a obtenu dans [45] des résultats similaires sur les tores non résonnants et certains tores résonnants.

La question naturelle qui se pose donc, est si l'on peut démontrer des résultats

d'existence globale de solutions pour le système (SG^ϵ) . Avant de répondre à cette question et avant de présenter les contributions de cette thèse, il est utile de rappeler les théorèmes obtenus dans le cadre de l'étude des équations de Navier-Stokes tournants.

2.2.1 Rappels sur les équations de Navier-Stokes en rotation rapide

Considérons maintenant le système d'équations de Navier-Stokes en rotation rapide donné par

$$(NS^\epsilon) \begin{cases} \partial_t u^\epsilon - \nu \Delta u^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon + \frac{e_3 \times u^\epsilon}{\epsilon} = -\nabla p^\epsilon + f & \text{dans } \mathbb{T}^3, t > 0 \\ \operatorname{div} u^\epsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{T}^3 \\ u^\epsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

On commence par observer que le terme de rotation $\frac{1}{\epsilon} e_3 \times u^\epsilon$ ne contribue pas aux estimations d'énergie, alors les preuves classiques d'existence de solutions des équations de Navier-Stokes sans rotation s'appliquent aussi au système (NS^ϵ) et on a le théorème suivant (voir [20]).

Théorème 2.2.1. *Si $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$, avec $s \geq \frac{1}{2}$, et $f \in C(\mathbb{R}^+, V^{s-2}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^{s-1}(\mathbb{T}^3))$, alors il existe un temps $T > 0$, indépendant de ϵ , et une unique solution forte u^ϵ du système (NS^ϵ) dans l'espace $C([0, T], V^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T], V^{s+1}(\mathbb{T}^3))$.*

Bien que le terme de rotation ne contribue pas aux estimations d'énergie, il a des effets importants sur le comportement du fluide, comme l'ont démontré de nombreux auteurs. On peut mentionner d'abord les travaux de Babin, Mahalov et Nicolaenko [3], [2], [4] qui ont étudié le système (NS^ϵ) dans des domaines périodiques résonnants et non résonnants et ont démontré l'existence globale de solutions régulières lorsque ϵ est petit.

Plus tard, Gallagher ([20]) a retrouvé les résultats de Babin, Mahalov et Nicolaenko dans le cas des tores non résonnants. Afin de démontrer l'existence globale de solutions fortes du système (NS^ϵ) , Gallagher a introduit les solutions filtrées données par

$$v^\epsilon = \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\epsilon}\right)u^\epsilon,$$

où $\mathcal{L}(t)$ est un groupe d'isométries.

Ensuite, elle a décomposé la solution filtrée v^ϵ en une partie bidimensionnelle Mv^ϵ , qui est la moyenne de v^ϵ suivant la variable x_3 , et une partie oscillante $(I - M)v^\epsilon$.

Après passage à la limite, dans le cas où le tore est non résonnant, Gallagher a trouvé deux systèmes limites couplés, $(NS2D)$ et (L_{osc}) , satisfaits par Mv et $(I - M)v$ respectivement, où Mv est la limite de Mv^ϵ et $(I - M)v$ celle de $(I - M)v^\epsilon$.

Le système $(NS2D)$ n'est autre que le système de Navier-Stokes à trois composantes et à deux variables, et (L_{osc}) est un système linéaire. Gallagher en conclut que la solution limite v existe globalement en temps.

Finalement, en utilisant la méthode de Schochet [50], elle montre un résultat de convergence des solutions v^ϵ vers les solutions limites v et obtient le théorème suivant.

Théorème 2.2.2. *Soient a_1 et a_2 deux nombres positifs fixés, alors, pour presque tous les a_3 , le résultat suivant est vrai :*

Si $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$, avec $s \geq \frac{1}{2}$, et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^{s-2}(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^{s-1}(\mathbb{T}^3))$, avec $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, V^{s-3}(\mathbb{T}^3))$, alors pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, le système (NS^ϵ) est globalement bien posé dans l'espace $C(\mathbb{R}^+, V^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^{s+1}(\mathbb{T}^3))$.

De plus, si u^ϵ est la solution du système (NS^ϵ) et v celle du système limite $(NS2D, L_0)$, alors

$$u^\epsilon - \mathcal{L}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v = o(1), \text{ dans } C(\mathbb{R}^+, V^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^{s+1}(\mathbb{T}^3)).$$

2.2.2 Contributions de la thèse

Dans la première partie de cette thèse, on s'intéresse à l'étude du mouvement des fluides de grade deux en rotation rapide dans un tore tridimensionnel. On considère alors le système d'équations suivant :

$$(SG^\epsilon) \left\{ \begin{array}{ll} \partial_t(u^\epsilon - \alpha \Delta u^\epsilon) + \operatorname{rot}(u^\epsilon - \alpha \Delta u^\epsilon) \times u^\epsilon - \nu \Delta u^\epsilon + \frac{e_3 \times u^\epsilon}{\epsilon} & \\ & = -\nabla p^\epsilon + f \quad \text{dans } \mathbb{T}^3, t > 0 \\ \operatorname{div} u^\epsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{T}^3 \\ u^\epsilon|_{t=0} = u_0 & \end{array} \right.$$

On peut remarquer que la nonlinéarité dans l'équation fait intervenir des dérivées d'ordre trois, ce qui rend l'étude de ce problème beaucoup plus difficile que celle des équations de Navier-Stokes tournant.

D'une part, les équations du fluide de grade deux ne possèdent pas la propriété de régularisation en temps fini.

D'autre part, le système des fluides de grade deux définit un groupe local continu $S_\alpha(t)$.

En s'inspirant des travaux qui ont été faits sur les équations de Navier-Stokes en rotation, on va démontrer que, sous l'effet d'une rotation rapide (lorsque ϵ est très petit), le système (SG^ϵ) est globalement bien posé dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$ quand les troisièmes composantes de Mu_0 et Mf ne sont pas "trop grandes" ou quand α est suffisamment petit, où Mu_0 et Mf sont les moyennes par rapport à la troisième variables de u_0 et f respectivement.

Soit L l'opérateur défini par

$$Lu = e_3 \times u. \quad (2.22)$$

Cet opérateur est anti-symétrique, ceci nous permet d'avoir un théorème d'existence locale de solutions du système (SG^ϵ) sur un intervalle de temps $[0, T]$, où T est indépendant de ϵ .

Comme dans [20], on introduit les solutions filtrées v^ϵ données par

$$v^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha\left(-\frac{t}{\epsilon}\right)u^\epsilon,$$

où $\mathcal{L}_\alpha(t) u_0$ est la solution du système

$$(SL) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha\Delta u) + \mathbb{P}L(u) = 0 \text{ dans } \mathbb{T}^3 \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

L est donné par (2.22) et \mathbb{P} désigne le projecteur de Leray sur l'espace des vecteurs à divergence nulle.

En procédant comme dans [20] et en diagonalisant la solution filtrée v^ϵ , on trouve que le système limite peut aussi être décomposé en un système de fluide de grade deux à trois composantes et à deux variables, que l'on note $(SG2D)$, et un système linéaire (L_{osc}) .

On commence par démontrer que le système limite $(SG2D) - (L_{osc})$ est globalement bien posé.

L'existence globale du système (L_{osc}) est facile à démontrer parce que c'est un système linéaire.

La difficulté que l'on rencontre est de prouver que le système ($SG2D$) est globalement bien posé.

En notant par v la solution limite lorsque ϵ tend vers zéro et par Mv sa moyenne par rapport à la troisième variable, on trouve que le système ($SG2D$) est donné par

$$(SG2D) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(Mv - \alpha\Delta Mv) - \nu\Delta Mv + \mathbb{P}\left(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv\right) \\ \qquad \qquad \qquad = \mathbb{P}(Mf) \\ \qquad \qquad \qquad \nabla_2 \cdot Mv = 0 \\ \qquad \qquad \qquad Mv(0) = Mu_0 \end{array} \right.$$

On rappelle que $Mv(x_1, x_2) = (Mv_1(x_1, x_2), Mv_2(x_1, x_2), Mv_3(x_1, x_2))^t$, alors,

$$\text{rot}Mv = (\partial_2 Mv_3, -\partial_1 Mv_3, \partial_1 Mv_2 - \partial_2 Mv_1)^t.$$

Par suite, on n'a plus les mêmes annulations que dans le cas bidimensionnel, qui avaient permis de démontrer l'existence globale de solutions du système des fluides de grade deux (l'identité 2.10 n'est plus valable).

Pour surmonter cette difficulté, on distinguera le cas où le coefficient α est arbitraire et celui où α est petit.

Premier cas : Le coefficient α est arbitraire

Dans ce cas, pour démontrer l'existence globale de solutions du système ($SG2D$), on suppose que les troisièmes composantes de Mu_0 et de Mf sont petites par rapport aux composantes horizontales de Mu_0 et de Mf .

Avant d'énoncer le théorème obtenu, on introduit les notations suivantes.

Pour tout $z = (z_1, z_2, z_3)$ dans \mathbb{R}^3 , on note par $z_h = (z_1, z_2)^t$ la composante horizontale de z .

Pour tout u_0 dans $V^3(\mathbb{T}^3)$ et f dans $L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{T}^3))$, on pose

$$K_0(u_0, f) = \|\text{rot}_h M(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))}$$

and

$$K_1(u_0, f) = \|\text{rot}_3 M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_3 Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))}$$

Alors, on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.2.3. *Il existe une constante positive r_0 assez petite telle que pour tout $Mu_0 \in V^3(\mathbb{T}^2)$ (respectivement $\in V^4(\mathbb{T}^2)$), pour tout $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{T}^2))$ (respectivement $\in L^2(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{T}^2))$), si*

$$K_0(u_0, f) \exp(C_2 K_0(u_0, f) + C_2 K_1(u_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3}$$

où C_2 est une constante qui ne dépend pas de α , alors la solution du système (SG2D) existe globalement dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$ (respectivement dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$).

Ensuite, en s'inspirant des idées de [20], on compare les solutions filtrées v^ϵ aux solutions v du système limite, qui existent globalement, et on démontre l'existence globale des solutions du système (SG^ϵ) .

Pour cela, on utilise la méthode de Schochet qui consiste à introduire un changement de variables donné par

$$y^\epsilon = v^\epsilon - v + \epsilon(Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon \quad (2.23)$$

où \tilde{R}_N^ϵ est un terme qui contient des basses fréquences.

L'idée est de prouver que la norme V^3 de y^ϵ converge vers zéro lorsque ϵ tend vers zéro.

Une difficulté apparaît alors lorsqu'on veut établir des estimations d'énergie dans $V^3(\mathbb{T}^3)$ sur y^ϵ .

En fait, le terme $\text{rot} \Delta v \times y^\epsilon$ est présent dans l'équation sur y^ϵ . Pour estimer la norme V^3 de y^ϵ , on prend le produit scalaire de l'équation satisfaite par y^ϵ avec $\Delta^2 y^\epsilon$. Le terme $(\text{rot} \Delta v \times y^\epsilon, \Delta^2 y^\epsilon)$ ne peut être défini que si la solution limite v appartient à V^4 .

Pour surmonter cette difficulté, on fixe un vecteur v_0 dans $V^4(\mathbb{T}^3)$ et on considère un terme de force f régulier. On suppose par la suite que Mf et Mv_0 vont satisfaire aux conditions du théorème 2.2.3, ce qui implique que la solution limite v existe globalement et est bornée dans V^4 . Alors, pour toute donnée initiale u_0 dans $V^3(\mathbb{T}^3)$, proche dans $V^3(\mathbb{T}^3)$ de v_0 , on obtient l'existence globale de solutions du système (SG^ϵ) .

On a donc le théorème suivant.

Théorème 2.2.4. *Soient a_1 et a_2 fixés, alors, pour presque tout a_3 , le résultat suivant est vrai.*

Il existe une constante positive r_0 assez petite telle que pour tout f dans $L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$ avec Mf dans $L^2(\mathbb{R}^+, V^2(\mathbb{T}^2))$ et $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$, pour tout v_0 dans $V^4(\mathbb{T}^3)$ satisfaisant

$$K_0(v_0, f) \exp(C_2 K_0(v_0, f) + C_2 K_1(v_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3},$$

où C_2 est une constante positive qui ne dépend pas de α , il existe deux nombres positifs η et ϵ_0 assez petits, tels que, pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, pour tout $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$ satisfaisant $\|u_0 - v_0\|_{V^2} + \sqrt{\alpha}\|u_0 - v_0\|_{V^3} \leq \eta$, le système (SG^ϵ) admet une solution unique u^ϵ dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$.

De plus, si v est la solution du système limite, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon}\right) v) = 0 \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)).$$

Deuxième cas : Le coefficient α est petit

On considère maintenant une donnée initiale u_0 et un terme de force f de tailles arbitraires. En prenant α suffisamment petit, on démontre l'existence globale de solutions du système $(SG2D)$ et on obtient le théorème suivant.

Théorème 2.2.5. *Pour tout $r > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que $\forall \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1_{per}(\mathbb{T}^2))$ et pour tout $Mu_0 \in V^3(\mathbb{T}^2)$ satisfaisant*

$$\|\nabla \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \|\text{rot } Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \leq r,$$

le système $(SG2D)$ admet une unique solution Mv dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$.

De plus, si Mf est dans $L^2(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{T}^2))$ et Mu_0 dans $V^4(\mathbb{T}^2)$, alors la solution du système $(SG2D)$ appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2))$.

Pour démontrer l'existence globale des solutions du système (SG^ϵ) , on décompose la donnée initiale u_0 en basses et hautes fréquences. Puisque les basses fréquences de u_0 , que l'on note $P_N(u_0)$, sont très régulières (en particulier $P_N(u_0) \in V^4(\mathbb{T}^3)$), on étudie le système limite avec $P_N(u_0)$ comme donnée initiale. D'après le théorème ci-dessus, la solution limite v appartient à V^4 . Mais dans ce cas, v va dépendre de N . On montre alors que, lorsque

α est suffisamment petit ($\alpha N^2 < 1$), on a une borne uniforme en N de $\|v(t)\|_{V^3}^2 + \alpha \|v(t)\|_{V^4}^2 + \int_0^t \|v(s)\|_{V^4}^2 ds$, pour tout $t > 0$.

On a donc le théorème suivant.

Théorème 2.2.6. *Soient a_1 et a_2 fixés, alors, pour presque tout a_3 , on a le résultat suivant.*

Si f appartient à $L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$ avec $M f \in L^2(\mathbb{R}^+, V^2(\mathbb{T}^2))$ et $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$ et si la donnée initiale u_0 appartient à $V^3(\mathbb{T}^3)$, alors il existe deux réels $\alpha_0 > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\alpha \leq \alpha_0$ et pour tout $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, le système (SG^ϵ) admet une solution unique u^ϵ dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$.

De plus, si v est la solution du système limite, alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}(\frac{t}{\epsilon})v) = 0 \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$$

et

$$\sqrt{\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}(\frac{t}{\epsilon})v) = 0 \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$$

2.3 Asymptotique des fluides de grade deux dans \mathbb{R}^2

Comme on l'a dit dans l'introduction de ce chapitre, la deuxième partie de cette thèse a pour objectif de décrire l'évolution asymptotique en grand temps de l'écoulement bidimensionnel des fluides de grade deux.

On a vu que, lorsque α est suffisamment petit, les équations des fluides de grade deux convergent vers les équations de Navier-Stokes dont le comportement asymptotique en temps a été largement étudié.

On citera, à cet effet, le travail de Gallay et Wayne [25] qui ont montré que pour des fluides homogènes bidimensionnels dont la vortacité est suffisamment localisée, il se forme, asymptotiquement en temps, un unique tourbillon d'Oseen, dès lors que la masse totale de la vortacité est non nulle.

Ce résultat a suscité la question suivante :

Peut-on obtenir un comportement similaire pour les équations des fluides de grade deux, lorsque le coefficient α est suffisamment petit ?

La deuxième partie de cette thèse apporte une réponse partielle dans cette direction.

On commence d'abord par rappeler des résultats obtenus par Gallay et

Wayne dans [25], dans le cadre de l'étude du comportement asymptotique des équations de Navier-Stokes.

2.3.1 Rappels sur l'asymptotique des équations de Navier-Stokes

On considère les équations de Navier-Stokes données par

$$\begin{aligned}\partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u &= -\nabla p \\ \operatorname{div} u &= 0\end{aligned}\tag{2.24}$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^2$ est la vitesse du fluide, $p = p(x, t) \in \mathbb{R}$ est la pression et $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$.

Posons $w = \operatorname{rot} u$. Alors, l'équation satisfaite par w est la suivante

$$\partial_t w - \nu \Delta w + u \cdot \nabla w = 0\tag{2.25}$$

où $w = w(x, t) \in \mathbb{R}$.

Notons que le vecteur vitesse u peut être reconstitué à partir du rotationnel w suivant la loi de Biot-Savart et on a, dans le cas bidimensionnel,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{|x - y|^2} w(y) dy\tag{2.26}$$

où pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on note $x^\perp = (-x_2, x_1)$.

L'analyse du comportement asymptotique en temps de l'équation (2.25) est basée sur l'utilisation des variables d'échelle suivantes : Soit $T > 0$ un temps fixé. On pose

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\nu(t + T)}}, \quad \tau = \log(t + T).\tag{2.27}$$

Si $w(x, t)$ est la solution de (2.25) et $u(x, t)$ est le vecteur vitesse correspondant, on définit alors les nouvelles variables $W(\xi, \tau)$ and $V(\xi, \tau)$ par

$$w(x, t) = \frac{1}{T + t} W\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t + T)}}, \log(t + T)\right)\tag{2.28}$$

and

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{T + t}} V\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t + T)}}, \log(t + T)\right)\tag{2.29}$$

Alors, $W(\xi, \tau)$ vérifie l'équation suivante

$$\partial_\tau W - \mathcal{L}W + V \cdot \nabla_\xi W = 0, \quad (2.30)$$

où

$$\mathcal{L}W = \Delta_\xi W + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla_\xi W + W.$$

Finalemment, on introduit les espaces dans lesquels l'étude asymptotique sera faite, à savoir les espaces L^2 à poids. Pour tout $m \geq 0$, on définit l'espace de Hilbert $L^2(m)$ par

$$L^2(m) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \mid \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f|^2 d\xi < \infty\} \quad (2.31)$$

On note

$$\|f\|_{L^2(m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Si $m > 1$, $L^2(m)$ s'injecte dans $L^1(\mathbb{R}^2)$. On note alors par $L_0^2(m)$ le sous espace de $L^2(m)$ donné par

$$L_0^2(m) = \{f \in L^2(m) \mid \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) d\xi = 0\}.$$

Le résultat qui suit est extrait du travail de T. Gallay et C.E. Wayne [25].

Proposition 2.3.1. *Soit $0 < \mu < \frac{1}{2}$. Alors, il existe deux constantes positives r_2 et C telles que, pour tout W_0 dans $L^2(2)$ vérifiant $\|W_0\|_{L^2(2)} \leq r_2$, la solution de l'équation (2.30) avec $W(\xi, \log T) = W_0$ satisfait*

$$\|W(\tau) - AG\|_{L^2(2)} \leq Ce^{-\mu\tau}, \quad \tau \geq \log T,$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi) d\xi$ et G est le tourbillon d'Oseen donné par

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}. \quad (2.32)$$

La démonstration de cette proposition utilise des outils de la théorie des systèmes dynamiques. En effet, T. Gallay et C.E. Wayne construisent des variétés centrales et montrent que les petites solutions de (2.30) convergent vers ces variétés. Ils donnent aussi une estimation du taux de convergence de ces solutions.

Ensuite, en étudiant les solutions de (2.30) sur ces variétés, les auteurs montrent que l'analyse du comportement asymptotique à tout ordre des solutions de (2.30) peut être réduite à l'étude d'un système d'équations différentielles ordinaires.

Posons

$$\Omega(x, t) = \frac{1}{T+t} G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(T+t)}}\right), \quad u^\Omega(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{T+t}} V^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(T+t)}}\right),$$

où V^G est le vecteur vitesse associé à G et qui est donné par

$$V^G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-|\xi|^2/4}}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

En revenant aux variables de départ, la proposition 2.3.1 s'écrit alors :

Corollaire 2.3.2. *Soit $0 < \mu < \frac{1}{2}$. Alors, il existe une constante positive r_2 telle que, pour tout w_0 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\|w_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq r_2$, la solution de l'équation (2.25) avec $w(0) = w_0$ satisfait*

$$\|w(t) - A\Omega(t)\|_{L^p} \leq \frac{C_p}{(T+t)^{1+\mu-\frac{1}{p}}}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad t \geq 0,$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(x) dx$. Si $u(x, t)$ est le vecteur vitesse associé à $w(x, t)$ suivant la loi de Biot-Savart, alors

$$\|u(t) - Av^\Omega(t)\|_{L^q} \leq \frac{C_q}{(T+t)^{\frac{1}{2}+\mu-\frac{1}{q}}}, \quad 1 < q < \infty, \quad t \geq 0.$$

Notons que des termes additionnels dans le développement asymptotique en temps des solutions ont été aussi calculés dans [25].

En 2004, T. Gallay et C.E. Wayne [26] ont démontré un résultat similaire au résultat énoncé ci-dessus, sans restriction sur la donnée initiale. Ils ont montré que toute solution de l'équation (2.25) ayant une donnée initiale intégrable, converge vers un tourbillon d'Oseen.

Théorème 2.3.3. *Si $w_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors la solution de l'équation (2.25) satisfait*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{1-\frac{1}{p}} \|w(\cdot, t) - \frac{A}{t} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\|_{L^p} = 0, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

où $A = \int_{\mathbb{R}^2} w_0(x) dx$. Si $u(x, t)$ est le vecteur vitesse associé à $w(x, t)$ suivant la loi de Biot-Savart, alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|u(\cdot, t) - \frac{A}{\sqrt{t}} V^G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)\|_{L^q} = 0, \quad 2 < q \leq \infty.$$

La démonstration de ce théorème est basée sur des arguments de compacité et sur l'existence d'une paire de fonctions de Lyapunov.

2.3.2 Contribution de la thèse

En s'inspirant des idées dans [25], j'ai étudié le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation des fluides de grade deux dans l'espace \mathbb{R}^2 .

Le système des équations décrivant les fluides de grade deux est donné par

$$(SGF) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases}$$

où $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^2$ est la vitesse du fluide, $p = p(x, t)$ est la pression, α est un coefficient matériel, ν est la viscosité et $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$.

On introduit aussi les espaces de Hilbert

$$H^1(m) = \{f \in L^2(m) / \partial_i f \in L^2(m), i = 1, 2\}$$

$$H^2(m) = \{f \in H^1(m) / \partial_i f \in H^1(m), i = 1, 2\}$$

Le but de ce travail est de démontrer que les petites solutions du système (SGF) s'approchent du tourbillon d'Oseen lorsque le temps devient grand.

Soit $w = \operatorname{rot} u$. Alors, l'équation satisfaite par w s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t(w - \alpha \Delta w) - \nu \Delta w + u \cdot \nabla (w - \alpha \Delta w) &= 0 \\ w(x, 0) &= w_0(x) \end{aligned} \quad (2.34)$$

En suivant les idées de Gallay et Wayne [25], on introduit les variables d'échelle (ξ, τ) données par (4.9) et les nouvelles fonctions $W(\xi, \tau)$ et $V(\xi, \tau)$ données par (4.10) et (4.11) respectivement.

Alors, $W(\xi, \tau)$ satisfait les équations suivantes

$$\begin{aligned} \partial_\tau(W - \frac{\alpha}{\nu}e^{-\tau}\Delta_\xi W) - \mathcal{L}W + V.\nabla_\xi(W - \frac{\alpha}{\nu}e^{-\tau}\Delta_\xi W) \\ + \frac{\alpha}{\nu}e^{-\tau}\Delta_\xi W + \frac{\alpha}{2\nu}e^{-\tau}\xi.\nabla_\xi\Delta_\xi W = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$W(\xi, \log T) = W_0(\xi) = Tw_0(x)$$

où

$$\mathcal{L}W = \Delta W + \frac{1}{2}\xi.\nabla W + W$$

et suivant la loi de Biot-Savart,

$$V(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\xi - \eta)^\perp}{|\xi - \eta|^2} W_3(\eta, \tau) d\eta,$$

où $W = (0, 0, W_3)$.

On obtient donc le théorème suivant.

Théorème 2.3.4. *Soient $\nu > 0$ et $T > 0$ un temps fixé. Alors, il existe une constante positive γ_0 telle que pour tout W_0 dans $H^2(2)$ satisfaisant*

$$\|W_0\|_{H^1}^2 + \frac{\alpha}{T\nu}e^{-\log T} \|\Delta W_0\|_{L^2}^2 + \|\|\xi\|^2 W_0\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{T\nu}e^{-\log T} \|\|\xi\|^2 \Delta W_0\|_{L^2}^2 \leq \gamma_0, \quad (2.36)$$

l'équation (2.35) admet une unique solution $W(\tau) \in C^0([\log T, +\infty[, H^2(2))$ avec $W(\log T) = W_0$.

De plus, l'inégalité suivante est satisfaite pour tout $\tau \geq \log T$,

$$\left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T\nu}e^{-\tau}\Delta\right)(W(\tau) - \beta G) \right\|_{L^2(2)}^2 \leq Ce^{-\theta\tau}$$

où $0 < \theta < \frac{1}{2}$,

$$\beta = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi) d\xi$$

et G est le tourbillon d'Oseen.

En revenant aux variables de départ (x, t) , on déduit alors le corollaire suivant :

Corollaire 2.3.5. *Soient $\nu > 0$ et $T > 0$ un temps fixé. Alors, il existe une constante positive γ_1 telle que, pour tout w_0 dans $H^2(2)$ satisfaisant*

$$\|w_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta w_0\|_{L^2}^2 + \|x^2 w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|x^2 \Delta w_0\|_{L^2}^2 \leq \gamma_1,$$

alors la solution $w(x, t)$ de l'équation (2.34) satisfait, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^p} &\leq \frac{C_p}{(T+t)^{\frac{\theta}{2} + 1 - \frac{1}{p}}}, \quad 1 \leq p \leq 2, \\ \left\| x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^2} &\leq \frac{C}{(T+t)^{\frac{\theta}{2} + 1}} \end{aligned} \quad (2.37)$$

où $0 < \theta < 1/2$ et C, C_p sont deux constantes positives.

Si $u(x, t)$ est le vecteur vitesse associé à $w(x, t)$ suivant la loi de Biot-Savart, alors

$$\left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(u(t) - \beta u^\Omega(t)) \right\|_{L^q} \leq \frac{C_q}{(1+t)^{\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}}, \quad 1 < q < \infty \quad (2.38)$$

où $C_q > 0$ est une constante.

La première étape dans la démonstration du théorème 2.3.4 est d'établir un résultat d'existence locale de solutions pour l'équation (2.34) dans les espaces $H^2(m)$ avec $m \geq 0$. La nonlinéarité présente dans l'équation et qui contient une dérivée d'ordre trois nous empêche d'utiliser la méthode classique de semi groupe. Pour surmonter cette difficulté, on va ajouter un terme régularisant à cette équation, à savoir le terme $\epsilon \Delta^2$, où ϵ est assez petit. Ainsi, l'étude du comportement asymptotique en temps sera faite sur les solutions de l'équation régularisée et on obtient un théorème similaire au théorème 2.3.4 pour les solutions régularisées.

On montrera par la suite, par le moyen des estimations d'énergie uniformes en ϵ , que les solutions régularisées que l'on note w^ϵ convergent vers une limite w qui sera solution de (2.34). On démontre aussi que, sous les conditions du théorème 2.3.4, la solution w va converger vers le tourbillon d'Oseen et qu'elle a le même taux de convergence que celui trouvé pour w^ϵ .

2.4 Etude locale au voisinage d'un point d'équilibre

La dernière partie de cette thèse est consacrée à la comparaison de la dynamique des équations des fluides de grade deux sur le tore \mathbb{T}^2 avec la dynamique des équations limites de Navier-Stokes.

On montre dans cette partie que, si z_0 est un point d'équilibre hyperbolique pour les équations de Navier-Stokes, alors pour α assez petit, le système des équations des fluides de grade deux admet un unique point d'équilibre z_α dans un certain voisinage de z_0 .

Ensuite, on va construire la variété locale instable de z_α et la comparer à celle de z_0 .

Chapitre 3

Global existence of the 3D rotating second grade fluid

3.1 Introduction

The study of non-newtonian fluids has attracted much attention because of their practical application in engineering and industry.

Indeed, in the nature and in the industry, there exists a large class of fluids that have not a Newtonian behavior. Certain features (like normal stress, shear thickening and shear thinning,...) observed in such fluids cannot be explained by Newtonian laws. Such fluids are called non-newtonian fluids. This is the case of many polymer solutions and many commonly found substances. Fluids of second grade belong to the particular class of non Newtonian fluids of differential type. Their study was initiated by J.E.Dunn and R.L.Fosdick [17], R.L.Fosdick and K.R.Rajagopal [18] [19]. For such fluids, the stress tensor T depends on $\text{grad } u$ (with u velocity field of the fluid) through the following relation

$$T = -pI + \nu A_1 + \alpha(A_2 - A_1^2)$$

where p is the pressure field, ν is the viscosity and the tensors A_1 and A_2 (called the first two Rivlin-Ericksen kinematical tensors) are defined through

$$A_1 = (\text{grad } u) + (\text{grad } u)^T,$$

$$A_2 = \frac{dA_1}{dt} + A_1(\text{grad } u) + (\text{grad } u)^T A_1$$

where $\frac{d}{dt} = \partial_t + u \cdot \nabla$.

During the last few decades, considerable efforts have been usefully devoted to the study of rotating Newtonian fluids (see [3], [2], [4], [27], [28]). It is well known that rotation plays an important role in various phenomena in meteorology and in geophysical fluid dynamics. It has been shown that the Coriolis force due to the earth's rotation significantly modifies the properties of the fluid flows.

However, very few studies which illustrate the rotating flows of non-Newtonian fluids have been reported (see [33], [46]).

In this work, we consider a rotating incompressible, non-Newtonian fluid flow of grade two in a three-dimensionnal torus. We study the effect of the Coriolis force on the motion of the fluid. The equations of a second grade fluid under

addition, they proved local existence and uniqueness of solutions, when the initial data belong to $H^3(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^2 or \mathbb{R}^3 . In the two dimensional case, they obtained global existence of solutions.

Applying the same decomposition method as in [16], D. Cioranescu and V. Girault [15] established global existence (and uniqueness) of solutions in the three dimensional case, for a small forcing term f and small initial data u_0 in $H^3(\Omega)$, where Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^3 . They also gave some propagation of regularity results (in particular, the propagation of regularity in $H^4(\Omega)$).

As in the case of the Navier-Stokes equations, the main difficulty in proving the global existence in the three dimensional case for arbitrary initial data is due to the non linear term $\text{rot}(u - \alpha\Delta u) \times u$. In fact, when estimating the solutions of the second grade fluid system in three dimensions, one cannot obtain the good estimates in H^3 that ensure the global existence of solutions, while in the two-dimensional case, due to some cancellations, the bad term $\text{rot}(u - \alpha\Delta u) \times u$ disappears.

The global existence and regularity of solutions of the second grade fluid flow in three dimensional case for large initial data is still an open problem.

As we already remarked, when α vanishes, we recover the classical system of Navier-Stokes equations, which has been widely studied ([21], [3], [29], [2], [45]...). A.Babin, A.Mahalov and B.Nicolaenko [3], [2], and then I.Gallagher [21] proved global existence of strong solutions for large initial data, in non-resonant domains, provided that $\epsilon > 0$ is small enough. Global existence results in resonant domains have been obtained later by A.Babin, A.Mahalov and B.Nicolaenko [4], and in the case of anisotropic rotating fluid, by M.Paicu [45].

In [21], I. Gallagher obtained a diagonalized limit system, which is globally well-posed, and in order to prove global existence of strong solutions of the rotating Navier-Stokes equations in \mathbb{T}^3 , she used the method of S. Schochet to approximate these solutions by solutions of the limit system.

The purpose of this paper is to use the same methods as in [21], in order to show the existence of global solutions, for large data, for the rotating second grade fluid system in \mathbb{T}^3 .

To be more specific, let us introduce the space $V^m(\mathbb{T}^3)$, $m \in \mathbb{N}$, which is the

closure of the space

$$\{u \in [C^\infty(\mathbb{T}^3)]^3 \mid u \text{ is periodic, } \operatorname{div} u = 0, \int_{\mathbb{T}^3} u(x) dx = 0\},$$

in $[H^m(\mathbb{T}^3)]^3$ and

$$H_{per}^m = \{u \in [H^m(\mathbb{T}^3)]^3 \mid u \text{ is periodic, } \int_{\mathbb{T}^3} u(x) dx = 0\}.$$

Let

$$Lu = e_3 \times u \tag{3.2}$$

This operator, which will be studied in some details in Section 3.1, is skew-symmetric, a fact that allows us to obtain local existence of solutions for the system (SG^ϵ) on an interval of time $[0, T]$ where T is independent of ϵ (see Theorem 3.2.1). The fast time oscillations in (SG^ϵ) prevent any result of convergence of solutions, that is the reason why, in Section 3, we will introduce a change of variables that eliminates the rotating term from the equation.

Let $s \geq 0$ and $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$. As in [21], let v^ϵ be the filtered vector field defined by $v^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{-t}{\epsilon}) u^\epsilon$, where $\mathcal{L}_\alpha(t) u_0$ is the solution of the system

$$(SL) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) + \mathbb{P}L(u) = 0 \text{ in } \mathbb{T}^3 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

where L is given by (3.2) and \mathbb{P} is the Leray projection on the space of divergence free vector fields.

Then, v^ϵ verifies the system given by

$$(S^\epsilon) \begin{cases} \partial_t(v^\epsilon - \alpha \Delta v^\epsilon) - \nu \Delta v^\epsilon + Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = \mathcal{L}_\alpha(\frac{-t}{\epsilon}) \mathbb{P}f \\ \operatorname{div} v^\epsilon = 0 \\ v^\epsilon(0) = u_0 \end{cases}$$

where

$$Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = \mathcal{L}_\alpha(\frac{-t}{\epsilon}) \mathbb{P} \left(\mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon}) \operatorname{rot}(v^\epsilon - \alpha \Delta v^\epsilon) \times \mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon}) v^\epsilon \right) \tag{3.3}$$

and

$$f^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)\mathbb{P}f \quad (3.4)$$

We will see in Section 3.2 that (S^ϵ) has a limit system, in a sense which will be made clear later, when ϵ tends to zero. This system is given by

$$(S_0) \begin{cases} \partial_t(v - \alpha\Delta v) - \nu\Delta v + Q(v, v) = Mf \text{ in } \mathbb{T}^3 \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \mathbb{T}^3 \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

where Mf is the x_3 -average of f and $Q(v, v)$ is the limit in \mathcal{D}' of $Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)$.

System (S_0) can be written in a simple way if one diagonalizes the filtered vector field v^ϵ . This diagonalization consists, as in [21], in writing v^ϵ as the sum of a bidimensional vector field Mv (which is the x_3 -average of v^ϵ) and a remainder v_{osc} . Then, for almost all values of a_i , $i = 1, 2, 3$ (for almost all tores), (S_0) can be decomposed into two coupled systems, a 2D second grade fluid system with three components, that we will note $(SG2D)$, and a linear system (L_{osc}) , the associate values of a_i , $i = 1, 2, 3$ define non resonant domains. This diagonalization is crucial to get the global existence of (S_0) . Systems $(SG2D)$ and (L_{osc}) can be written as follow.

$$(SG2D) \begin{cases} \partial_t(Mv - \alpha\Delta_2 Mv) - \nu\Delta_2 Mv + \mathbb{P}\left(\operatorname{rot}(Mv - \alpha\Delta_2 Mv) \times Mv\right) \\ = \mathbb{P}(Mf) \\ \nabla_2 \cdot Mv = 0 \\ Mv(0) = Mu_0 \end{cases}$$

where $\nabla_2 = (\partial_1, \partial_2, 0)^t$, and

$$(L_{osc}) \begin{cases} \partial_t(v_{osc} - \alpha\Delta v_{osc}) - \nu\Delta v_{osc} + Q(Mv, v_{osc}) + Q(v_{osc}, Mv) = 0 \\ \operatorname{div} v_{osc} = 0 \\ v_{osc}(0) = (I - M)u_0 \end{cases}$$

We begin our study by proving the global existence of the limit system $((SG2D) - (L_{osc}))$.

The solutions of System (L_{osc}) exists globally in time since it is a linear system. The main difficulty is in proving the global well-posedness of System $(SG2D)$.

Here, we obtain two different results of global existence of solutions of $(SG2D)$.

First, we consider an arbitrary coefficient α . Since the system $(SG2D)$ consists of three equations, but only depending on the horizontal variables, we need to restrict the size of the vertical components of the initial data and the forcing term. Under these conditions, we prove the global existence of System $(SG2D)$.

To be more precise, we introduce the following notations. For any vector field $z = (z_1, z_2, z_3)$ in \mathbb{R}^3 , we denote by Mz its vertical average given by

$$Mz = \frac{1}{2\pi a_3} \int_0^{2\pi a_3} z(x) dx_3.$$

Let also $z_h = (z_1, z_2)$ denote the horizontal component of z and z_3 its third component.

We next introduce the following notations, for all vector field $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$ and for all $f \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1_{per}(\mathbb{T}^2))$.

Let

$$K_0(u_0, f) = \|\text{rot}_h M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \quad (3.5)$$

and

$$K_1(u_0, f) = \|\text{rot}_3 M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_3 Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \quad (3.6)$$

where C_p is the Poincaré constant.

Then, we obtain the theorem below.

Theorem 3.1.1. *There exists a constant $r_0 > 0$ small enough such that for all $Mu_0 \in V^3(\mathbb{T}^2)$ (respectively $\in V^4(\mathbb{T}^2)$), for all $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H^1_{per}(\mathbb{T}^2))$ (respectively $\in L^2(\mathbb{R}^+, H^2_{per}(\mathbb{T}^2))$), if u_0 and f satisfy*

$$K_0(u_0, f) \exp(C_2 K_0(u_0, f) + C_2 K_1(u_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3} \quad (3.7)$$

where C_2 is a constant that does not depend on α and K_0, K_1 are given by (3.5) and (3.6) respectively, then the solution of System (SG2D) exists globally in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$ (respectively in $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$).

In a second time, we consider a forcing term of arbitrary size and large initial data in $V^3(\mathbb{T}^3)$. In this case, we need to restrict the size of α and we obtain the following theorem.

Theorem 3.1.2. *For all $r > 0$, there exists $\alpha_0 > 0$ such that $\forall \alpha \leq \alpha_0$, for all $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^2))$ and for all $Mu_0 \in V^3(\mathbb{T}^2)$ satisfying*

$$\|\nabla \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \|\text{rot } Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \leq r,$$

the system (SG2D) has a unique solution Mv in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$.

Moreover, if Mf and Mu_0 belong to $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$ and $V^4(\mathbb{T}^2)$ respectively, then the solution of System (SG2D) belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2))$.

Once the global existence of the limit system is established, we prove two different results of global existence of solutions of System (SG^ϵ) .

First, we consider the case of arbitrary coefficient α , and we suppose that the V^3 -norm of f_3 is small enough. Let v_0 in $V^4(\mathbb{T}^3)$ such that v_0 and f satisfy Inequality (3.7). Thus, for any initial data u_0 in V^3 such that u_0 is close in V^3 to v_0 , we obtain the global existence of solutions of System (SG^ϵ) .

The reason of this restriction on u_0 comes from the presence of the non-linear term $\text{rot} \Delta u_\epsilon \times u_\epsilon$. Actually, in order to apply the method of S. Schochet, we will introduce a new change of variable y^ϵ given by

$$y^\epsilon = v^\epsilon - v + \epsilon(\text{Id} - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon \tag{3.8}$$

where \tilde{R}_N^ϵ will be defined later (see (5.7)).

In order to obtain V^3 estimates on y^ϵ , we need to define the scalar product $(Q^\epsilon(v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)$, which is not well defined unless we impose the additional V^4 -regularity on v (see Section 5.1 for more details).

Then, we have the following theorem.

Theorem 3.1.3. *When a_1 and a_2 are fixed, then for almost all a_3 , we have the following result.*

There exists a positive constant r_0 small enough such that for all f in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ with Mf in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$ and $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$, for all v_0 in $V^4(\mathbb{T}^3)$ satisfying

$$K_0(v_0, f) \exp(C_2 K_0(v_0, f)) \exp(C_2 K_1(v_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3},$$

where C_2 is a constant that does not depend on α and K_0, K_1 are given by (3.41) and (3.42) respectively, there exists two small positive numbers η and ϵ_0 such that, for all $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, for all $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$ satisfying

$$\|u_0 - v_0\|_{V^2} + \sqrt{\alpha} \|u_0 - v_0\|_{V^3} \leq \eta,$$

the system (SG^ϵ) has a unique solution u^ϵ in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$.

Moreover, if v is the solution of the limit system (S_0) , then

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon}\right) v) = 0 \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)).$$

In a second part, we consider the case of a forcing term of arbitrary size and large initial data in $V^3(\mathbb{T}^3)$. But here, we do not impose any restriction on f , neither on u_0 . In this case, we need to restrict the size of α . Following the ideas of [44], we decompose the system into low and high modes. Since the low frequency part of u_0 , that we denote $P_N(u_0)$ (where N is the cut-off parameter), is very regular (in particular $P_N(u_0) \in V^4$), it is interesting to consider the limit system (S_0) with $P_N(u_0)$ as initial data. Then, the solution v of this system will depend on N . We emphasize that

$$\|(u_0)\|_{V^4} \leq N \|u_0\|_{V^3}$$

Thus, choosing α small enough (of the order $\frac{1}{N}$), we show that $\|v\|_{V^3} + \sqrt{\alpha} \|v\|_{V^4}$ is uniform with respect to N and we obtain the following theorem

Theorem 3.1.4. *When a_1 and a_2 are fixed, then for almost all a_3 , we have the following result.*

Let f be given in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ with $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$ and $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$ and let the initial velocity u_0 be given in $V^3(\mathbb{T}^3)$, then there exists $\alpha_0 > 0$ and $\epsilon_0 > 0$ such that for all $\alpha \leq \alpha_0$ and for all $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$,

the system (SG^ϵ) has a unique solution u^ϵ in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$.

Moreover, if v is the solution of the limit system (S_0) , then

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v) = 0 \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$$

and

$$\sqrt{\alpha} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (u^\epsilon - \mathcal{L}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v) = 0 \text{ in } L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)).$$

The paper is organized as follow. In Section 2, we introduce a few notations and prove a result of local existence of solutions of the system (SG^ϵ) . In Section 3, we study the Coriolis force and we introduce the filtered system (S^ϵ) (see Section 3.2) by using a change of variables that eliminates the rotating term in (S^ϵ) . Then, we will consider the quadratic form which appears in the filtered system (S^ϵ) , in order to determine the limit system. Finally, we decompose the system (S^ϵ) into two coupled systems by taking the x_3 average. Section 4 is devoted to the study of the limit system. In a first part, we show that this system decomposes into a system of second grade fluids in \mathbb{T}^2 with three components, and a linear system. In a second part, using this decomposition, we show the global existence of the limit system. In Section 5, we prove the convergence of $u_\epsilon(t)$ to the solution $v(t)$ of the limit system and we show the global existence results contained in Theorems 3.1.3 and 3.1.4.

3.2 Various a priori estimates and local existence

3.2.1 Preliminary

Before we state the first result on local existence and uniqueness of solutions of System (SG^ϵ) , we introduce some functional spaces and a few notations.

We recall that $V^m(\mathbb{T}^3)$, $m \in \mathbb{N}$, is the closure of the space

$$\{u \in [C^\infty(\mathbb{T}^3)]^3 \mid u \text{ is periodic, } \operatorname{div} u = 0, \int_{\mathbb{T}^3} u(x) dx = 0\},$$

in $[H^m(\mathbb{T}^3)]^3$ and

$$H_{per}^m = \{u \in [H^m(\mathbb{T}^3)]^3 \mid u \text{ is periodic, } \int_{\mathbb{T}^3} u(x) dx = 0\}.$$

We also introduce the space

$$V = \{u \in V^1 \mid \text{rot}(u - \alpha \Delta u) \in L^2(\mathbb{T}^3)^3\}.$$

One shows that, if u belongs to V , then u is in V^3 and the following inequality holds,

$$\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\nabla \Delta u\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C} \|\text{rot}(u - \alpha \Delta u)\|_{L^2}^2$$

where $\tilde{C} > 0$ is a constant that does not depend on α .

In what follows, we always consider a forcing term $f \in V^1(\mathbb{T}^3)$ and initial data in $V^3(\mathbb{T}^3)$ at least.

We remark that, if the solution u^ϵ exists, then integrating System (SG^ϵ) over \mathbb{T}^3 , we find that

$$\int_{\mathbb{T}^3} \partial_t u^\epsilon dx = 0,$$

thus,

$$\int_{\mathbb{T}^3} u^\epsilon dx = \int_{\mathbb{T}^3} u_0 dx = 0.$$

The advantage of considering vector fields with mean value zero is that we have a Poincaré type inequality, that is, there exists a positive constant C_p such that

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \quad (3.9)$$

In this paper, we use the following notations,

$$\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3) \text{ with } \tilde{n}_j = \frac{n_j}{a_j}, \quad j \in 1, 2, 3 \quad (3.10)$$

We denote (u, v) the scalar product of u and v in $L^2(\mathbb{T}^3)$. In terms of Fourier decomposition, this scalar product is given by :

$$(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} u_{\tilde{n}} \cdot \bar{v}_{\tilde{n}} \quad (3.11)$$

where $u_{\tilde{n}}$ (resp. $\bar{v}_{\tilde{n}} = v_{-\tilde{n}}$) are the Fourier coefficients of u (resp. \bar{v}).

Let us recall also the definition of Sobolev spaces on \mathbb{T}^3 .
A function h is in $H^s(\mathbb{T}^3)$ if

$$\|h\|_{H^s(\mathbb{T}^3)} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} (1 + |\tilde{n}|^2)^s |h_{\tilde{n}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Similarly h is in the homogeneous Sobolev space $\dot{H}^s(\mathbb{T}^3)$ if

$$\|h\|_{\dot{H}^s(\mathbb{T}^3)} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\tilde{n}|^{2s} |h_{\tilde{n}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

If h has mean value zero, then $h_0 = 0$ and thus homogeneous and inhomogeneous spaces coincide on \mathbb{T}^3 .

3.2.2 Local existence

We begin with a local existence of solutions of the system (SG^ϵ) .

Theorem 3.2.1. *Let $\epsilon > 0$ and f be given in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ and let u_0 be given in $V^3(\mathbb{T}^3)$, then there exists a time $T > 0$, independent of ϵ , and a unique solution u^ϵ of the system (SG^ϵ) in the space $L^\infty([0, T], V^3) \cap L^2([0, T], V^1)$.*

Moreover, u^ϵ belongs to $C(0, T; V^3(\mathbb{T}^3))$.

Proof . In fact, performing the same a priori estimates as in [16], we can show the local existence of solutions. For sake of completeness, we give these a priori estimates.

We denote $Lu = e_3 \times u$ the skew-symmetric linear operator. We remark that this skew-symmetric term does not appear in the energy estimates, since

$$\forall u, (L(u), u) = 0 \tag{3.12}$$

Taking the inner product in $L^2(\mathbb{T}^3)$ of the first equation of (SG^ϵ) with u^ϵ , and integrating in the time variable, using (3.12) and (3.9), we obtain

$$\|u^\epsilon(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u^\epsilon(t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0^\epsilon\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u_0^\epsilon\|_{L^2}^2 + \frac{(C_p)^2}{\nu} \int_0^t \|f(s)\|_{L^2}^2 ds, \tag{3.13}$$

where C_p is the Poincaré constant.

Next, we want to obtain a priori estimates of the V^3 -norm of the solution u^ϵ of system (SG^ϵ) . Assuming that u^ϵ is a smooth enough solution, we introduce the vorticity $w^\epsilon = \text{rot } u^\epsilon$. Taking the vorticity of the first equation of (SG^ϵ) , we find

$$\partial_t(w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon) - \nu \Delta w^\epsilon + \text{rot} \left(\text{rot} (u^\epsilon - \alpha \Delta u^\epsilon) \times u^\epsilon \right) - \frac{1}{\epsilon} \partial_3(u^\epsilon) = \text{rot } f \quad (3.14)$$

We notice that

$$\text{rot} \left(\text{rot } \tilde{v} \times v \right) = v \cdot \nabla (\text{rot } \tilde{v}) - (\text{rot } \tilde{v}) \cdot \nabla v \quad (3.15)$$

and that

$$(\partial_3 v, \text{rot} (v - \alpha \Delta v)) = 0. \quad (3.16)$$

for any divergence free smooth vector fields v and \tilde{v} .

Taking the L^2 -inner product of (3.14) with $w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon$ and using (3.15) and (3.16), we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{\alpha} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{\nu}{\alpha} \|\text{rot } u^\epsilon\|_{L^2} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2} + \|\nabla u^\epsilon\|_{L^\infty} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^2 \\ & \quad + \|\text{rot } f\|_{L^2} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{\nu}{2\alpha} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{\alpha} \|\text{rot } u^\epsilon\|_{L^2}^2 + \frac{\tilde{C}}{\alpha^2} \|w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon\|_{L^2}^3 \\ & \quad + \frac{\alpha}{\nu} \|\text{rot } f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Estimates (3.13) and (3.17) are the same estimates obtained in the study of existence of solutions for the second grade fluid system without rotation (see Estimates 16 and 25 in [16]). So the same proof of existence hold for the system (SG^ϵ) and we obtain Theorem 3.2.1 stated above.

The continuity of the solution is proved in the two dimensional case with a forcing term that does not depend on t (see [41]), but the same prove can be done in the three-dimensionnal case.

Indeed, the continuity property of $u^\epsilon(t)$ with respect to t in V^3 follows from the continuity of the norm $\|u^\epsilon(t)\|_{V^3}$ and from the fact that $u(t)$ is weakly continuous from $[0, T]$ into V^3 . The continuity of the V^3 -norm is a conse-

quence of the following energy equality,

$$\begin{aligned} \|\text{rot}(u^\epsilon(t) - \alpha\Delta u^\epsilon(t))\|_{L^2}^2 &= e^{-\frac{2\nu}{\alpha}t} \|\text{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2 \\ &+ \int_0^t e^{-\frac{2\nu}{\alpha}(t-s)} \left(2\text{rot} f(s) + \frac{2\nu}{\alpha} \text{rot} u^\epsilon(s) \right. \\ &\quad \left. + 2\text{rot}(u^\epsilon(s) - \alpha\Delta u^\epsilon(s)) \cdot \nabla u^\epsilon, \text{rot}(u^\epsilon(s) - \alpha\Delta u^\epsilon(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

□

3.3 The filtered system

Let us introduce the Leray projection \mathbb{P} on the space of divergence free vector fields, then the equation satisfied by u^ϵ can be written as follows

$$\partial_t(u^\epsilon - \alpha\Delta u^\epsilon) - \nu\Delta u^\epsilon + \mathbb{P}(\text{rot}(u^\epsilon - \alpha\Delta u^\epsilon) \times u^\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\mathbb{P}Lu^\epsilon = \mathbb{P}f \quad (3.17)$$

Let us just note that as we are in the periodic case, the operator \mathbb{P} introduced above commutes with the derivation operators.

Fast time oscillations prevent any result of strong convergence of the solution u^ϵ of (3.17) to a fixed function. In order to bypass this difficulty, and as in the case of rotating Navier-Stokes equations (see [21], [29], [3], [45], [14]), we are going to introduce a filtration procedure of the time oscillations. The purpose of this section is to define the filtering operator and the limit system.

As stated in Theorem 3.2.1, for initial data in V^3 , the system (3.17) has a unique solution u^ϵ , bounded in $L^\infty([0, T], V^3)$ uniformly with respect to ϵ , where T is independent of ϵ , and in the proof of this theorem, we show that $\partial_t u^\epsilon$ is bounded in $L^\infty([0, T], V^1)$ but not uniformly bounded with respect to ϵ in the space $L^\infty([0, T], V^1)$, this is the reason why one cannot take directly the limit of the equation.

Let $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$, $s \geq 0$.

As we explained above, we will introduce the filtered vector field defined by $v^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{-t}{\epsilon}) u^\epsilon$, where $\mathcal{L}_\alpha(t) u_0$ is the solution of the system :

$$(SL) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) + \mathbb{P}L(u) = 0, \text{ in } \mathbb{T}^3, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

We remark that the operator L writes in matricial form as follows :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.3.1 Study of the Coriolis force

Let us study more precisely the system (SL) introduced above. Since $\mathbb{P} = Id - \Delta^{-1} \nabla \text{div}$, the Fourier coefficients of the Leray projection are given by

$$\mathbb{P}_{\tilde{n}} = Id - \frac{1}{|\tilde{n}|^2} \begin{pmatrix} \tilde{n}_1^2 & \tilde{n}_1 \tilde{n}_2 & \tilde{n}_1 \tilde{n}_3 \\ \tilde{n}_2 \tilde{n}_1 & \tilde{n}_2^2 & \tilde{n}_2 \tilde{n}_3 \\ \tilde{n}_3 \tilde{n}_1 & \tilde{n}_3 \tilde{n}_2 & \tilde{n}_3^2 \end{pmatrix}$$

where $\tilde{n} = (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2, \tilde{n}_3)$ with $\tilde{n}_j = \frac{n_j}{a_j}$, $j \in \{1, 2, 3\}$.

Using these formulas, System (SL) can be written in terms of Fourier variables in the following form :

$$(SL_{\tilde{n}}) \begin{cases} \partial_t u_{\tilde{n}} + \frac{\mathbb{P}_{\tilde{n}} L}{1 + \alpha |\tilde{n}|^2} u_{\tilde{n}} = 0 \\ u_{\tilde{n}}(0) = (u_0)_{\tilde{n}} \end{cases}$$

A simple computation shows that the eigenvalues of $\frac{\mathbb{P}_{\tilde{n}} L}{1 + \alpha |\tilde{n}|^2}$ are :

$$0, \frac{i \tilde{n}_3}{|\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{n}|^2)} \text{ and } \frac{-i \tilde{n}_3}{|\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{n}|^2)}.$$

We denote e_n^0 , e_n^+ and e_n^- the corresponding eigenvectors, which are given by

$$e_n^0 = (0, 0, 1)^t$$

and

$$e_n^+ = \frac{1}{\sqrt{2} \|\tilde{n}\| \|\tilde{n}_h\|} (\tilde{n}_1 \tilde{n}_3 + i \tilde{n}_2 \|\tilde{n}\|, \tilde{n}_2 \tilde{n}_3 - i \tilde{n}_1 \|\tilde{n}\|, -\|\tilde{n}_h\|^2)^t$$

$$e_n^- = \frac{1}{\sqrt{2} |\tilde{n}| |\tilde{n}_h|} (\tilde{n}_1 \tilde{n}_3 - i \tilde{n}_2 |\tilde{n}|, \tilde{n}_2 \tilde{n}_3 + i \tilde{n}_1 |\tilde{n}|, -|\tilde{n}_h|^2)^t$$

where $\tilde{n}_h = \tilde{n}_1^2 + \tilde{n}_2^2$.

We have chosen e_n^+ and e_n^- such that $|e_n^+| = |e_n^-| = 1$.

Note that we are studying the operator $\mathbb{P}_{\tilde{n}} L$ defined on the divergence free vector fields (in the sense that $\tilde{n} \cdot u_{\tilde{n}} = 0$), the eigenvectors e_n^+ and e_n^- correspond to divergence-free vectors. Divergence-free elements of the kernel of L are therefore vectors which do not depend on the third variable ; we recover the well-known Taylor-Proudman theorem : under the influence of fast rotations, the three dimensional fluid tends to behave as a two-dimensional fluid. Therefore, we will only deal with the eigenvectors e_n^+ and e_n^- .

The solution of system $(SL_{\tilde{n}})$ can be written in the form :

$$(\mathcal{L}_\alpha(t)u_0)_{\tilde{n}} = \exp\left(\frac{-i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_{\tilde{n}}^0, e_n^+)e_n^+ + \exp\left(\frac{i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_{\tilde{n}}^0, e_n^-)e_n^-.$$

To show that the series $(\mathcal{L}_\alpha(t)u_0)_{\tilde{n}}$ converges in $L^2(\mathbb{T}^3)$, one just has to remark that

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |(\mathcal{L}_\alpha(t)u_0)_{\tilde{n}}|^2 \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |u_{\tilde{n}}^0|^2 = 2 \|u_0\|_{L^2}^2$$

It follows that, for any divergence free vector field $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\alpha(t)u_0)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(\exp\left(\frac{-i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_{\tilde{n}}^0, e_n^+)e_n^+ \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_{\tilde{n}}^0, e_n^-)e_n^- \right) e^{i\tilde{n} \cdot x}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Note that, if $u_0 \in V^s(\mathbb{T}^3)$, $\mathcal{L}_\alpha(t)u_0$ and $\mathcal{L}_\alpha(-t)u_0$ belong to $V^s(\mathbb{T}^3)$. Indeed, one has

$$\|\mathcal{L}_\alpha(t)u_0\|_{V^s}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\tilde{n}|^{2s} |(\mathcal{L}_\alpha(t)u_0)_{\tilde{n}}|^2 \leq 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |\tilde{n}|^{2s} |u_{\tilde{n}}^0|^2$$

and then,

$$\|\mathcal{L}_\alpha(t)u_0\|_{V^s}^2 \leq 2 \|u_0\|_{V^s}^2 \quad (3.19)$$

If we replace t by $-t$ in the expression of $\mathcal{L}_\alpha(t)u_0$, we obtain :

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\alpha(-t)u_0)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(\exp\left(\frac{i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_n^0, e_n^+)e_n^+ \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(\frac{-i\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}t\right) (u_n^0, e_n^-)e_n^- \right) e^{i\tilde{n} \cdot x}, \end{aligned}$$

and thus

$$\|\mathcal{L}_\alpha(-t)u_0\|_{V^s}^2 \leq 2 \|u_0\|_{V^s}^2 \quad (3.20)$$

3.3.2 Change of variables

We still assume that $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$.

We next introduce the change of variables that eliminates the rotation term $\frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}Lu^\epsilon$ in Equation (3.17).

Let $v^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) u^\epsilon$.

As remarked above, $v^\epsilon \in L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T], V^1(\mathbb{T}^3))$ and satisfies the system

$$(S^\epsilon) \begin{cases} \partial_t(v^\epsilon - \alpha\Delta v^\epsilon) - \nu\Delta v^\epsilon + Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) &= f^\epsilon \\ \operatorname{div} v^\epsilon &= 0 \\ v^\epsilon(0) &= u_0 \end{cases}$$

where

$$Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) \mathbb{P} \left(\operatorname{rot} \left(\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right) (v^\epsilon - \alpha\Delta v^\epsilon) \right) \times \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right) v^\epsilon \right) \quad (3.21)$$

and

$$f^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right) \mathbb{P}f \quad (3.22)$$

Since v^ϵ belongs to $L^\infty([0, T], L^\infty(\mathbb{T}^3))$, the quadratic form $Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)$ is in $L^\infty([0, T], L^2(\mathbb{T}^3))$ and we have for $0 \leq t \leq T$:

$$\|Q^\epsilon(v^\epsilon(t), v^\epsilon(t))\|_{L^2} \leq C(\|v^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|v^\epsilon\|_{V^2} \|v^\epsilon\|_{V^3})$$

Then taking the L^2 -inner product of the first equation of System (S^ϵ) with $\partial_t v^\epsilon$, we obtain :

$$\begin{aligned} \|\partial_t v^\epsilon\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \partial_t v^\epsilon\|_{L^2}^2 &\leq C \|\partial_t v^\epsilon\|_{L^2} (\nu \|\Delta v^\epsilon\|_{L^2} + \|v^\epsilon\|_{V^2}^2 \\ &\quad + \alpha \|v^\epsilon\|_{V^2} \|v^\epsilon\|_{V^3} + \|f^\epsilon\|_{L^2}) \end{aligned}$$

Applying Cauchy-Schwarz's inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \|\partial_t v^\epsilon\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \partial_t v^\epsilon\|_{L^2}^2 &\leq C(\nu^2 \|\Delta v^\epsilon\|_{L^2}^2 + \|v^\epsilon\|_{V^2}^4 + \|f^\epsilon\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \alpha^2 \|v^\epsilon\|_{V^2}^2 \|v^\epsilon\|_{V^3}^2) \end{aligned}$$

where C is a positive constant.

This inequality shows that $\partial_t v^\epsilon$ belongs to $L^\infty([0, T], V^1(\mathbb{T}^3))$ uniformly in ϵ . Then, we have :

$$\begin{aligned} \|v^\epsilon(t) - v^\epsilon(t')\|_{V^1} &= \left\| \int_t^{t'} \partial_s v^\epsilon(s) ds \right\|_{V^1} \leq \int_t^{t'} \|\partial_s v^\epsilon(s)\|_{V^1} ds \\ &\leq |t - t'| \cdot \|\partial_s v^\epsilon\|_{L^\infty([0, T], V^1)} \end{aligned}$$

This implies that v^ϵ is equicontinuous in $C^0([0, T], V^1(\mathbb{T}^3))$, and by application of Ascoli's theorem, there exists a function v and a subsequence of v^ϵ , still denoted v^ϵ , such that v^ϵ converges strongly to v in $C^0([0, T], V^{1-\sigma}(\mathbb{T}^3))$, with $\sigma > 0$.

Using the fact that v^ϵ is bounded in V^3 and interpolating between $V^3(\mathbb{T}^3)$ and $V^{1-\sigma}(\mathbb{T}^3)$, we show that v^ϵ converges strongly to v in $C^0([0, T], V^s(\mathbb{T}^3))$ for any $s < 3$.

On the other hand, since v^ϵ is bounded uniformly in ϵ in $L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3))$, there exists a subsequence denoted v^ϵ , such that

$$v^\epsilon \rightharpoonup v \text{ weak in } L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3)).$$

These convergences allow us to pass to the limit in the system (S^ϵ) and we find that the function v satisfies the following limit system :

$$(S_0) \begin{cases} \partial_t(v - \alpha \Delta v) - \nu \Delta v + Q(v, v) = Mf \text{ in } \mathbb{T}^3 \\ \operatorname{div} v = 0 \text{ in } \mathbb{T}^3 \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

where Mf is the vertical average of f and $Q(v, v)$ is the limit in D' of $Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)$.

Remark 3.3.1. *As the functions v and $\mathcal{L}_\alpha(t)v$ belong to the space $V^3(\mathbb{T}^3)$, one can define $Q(v, v)$ as the limit of $Q^\epsilon(v, v)$ in D' as ϵ tends to zero.*

To prove this remark, it is sufficient to show that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q^\epsilon(v, v).$$

According to (3.21),

$$\begin{aligned} Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) - Q^\epsilon(v, v) &= \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)\mathbb{P}\left(\text{rot}\left(\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right)(v - \alpha\Delta v)\right) \times \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right)(v^\epsilon - v)\right) \\ &\quad + \text{rot}\left(\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right)(v^\epsilon - v - \alpha\Delta(v^\epsilon - v))\right) \times \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right)v^\epsilon \end{aligned}$$

Using (3.19) and the fact that v^ϵ converges weakly (respectively strongly) to v in $L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3))$ (respectively in $C^0([0, T], V^s(\mathbb{T}^3))$ for any $s < 3$), we deduce that $\mathcal{L}_\alpha\left(\frac{t}{\epsilon}\right)(v^\epsilon - v)$ converges weakly (respectively strongly) to zero in $L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3))$ (respectively in $C^0([0, T], V^s(\mathbb{T}^3))$ for any $s < 3$). Therefore, $Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) - Q^\epsilon(v, v)$ converges to zero in D' and $Q(v, v)$ is the limit of $Q^\epsilon(v, v)$ in D' as ϵ tends to zero.

3.3.3 The quadratic form

We shall consider the limit of the system (S^ϵ) as ϵ goes to 0, it is therefore important to determine the limit of the quadratic form $Q^\epsilon(v, v)$ defined by (3.21).

We introduce the quantities

$$\omega^\pm(n) = \mp \frac{\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1 + \alpha|\tilde{n}|^2)} \quad (3.23)$$

$$\omega_{k,m,n}^{a,b,c} = \omega^b(k) + \omega^c(m) - \omega^a(n) \quad (3.24)$$

where a, b, c are either $+$ or $-$.

We also set

$$v_n^\pm = (v_{\tilde{n}}, e_n^\pm)e_n^\pm \quad (3.25)$$

where $v_{\tilde{n}}$ denotes the Fourier coefficient of v and e_n^\pm are orthonormal vectors. Using the expression of $\mathcal{L}_\alpha(t)u$ (see (3.18)), one can write

$$Q^\epsilon(v, v) = i \sum_{\substack{k+m=n \\ a,b,c \in \{\pm\}}} \exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n} \cdot x} \quad (3.26)$$

Lemma 3.3.2. *Let Q^ϵ be the quadratic form defined in (3.21), and let u and v be two smooth vector fields on \mathbb{T}^3 . Then the limit*

$$Q(u, v) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q^\epsilon(u, v)$$

exists in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3)$ and we have

$$Q(u, v) = i \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ a,b,c \in \{\pm\}}} \exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n} \cdot x} \quad (3.27)$$

where K is the resonant set defined as

$$K = \left\{ (k, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \mid \frac{\tilde{k}_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} \pm \frac{\tilde{m}_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} \pm \frac{\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} = 0, \right. \\ \left. k + m = n \right\} \quad (3.28)$$

Before proving this lemma, we recall a theorem known as the non-stationary phase theorem that will be useful to find the limit of the quadratic form (see Lemma 1 page 41 in [1]).

Theorem 3.3.3. *Let \tilde{K} be a compact set in \mathbb{R}^n and $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that $|\varphi'(\theta)| \geq c_0 > 0$ in \tilde{K} , then we have :*

$$\forall a \in C_0^\infty(\tilde{K}), \forall k \in \mathbb{N} \text{ and } \forall \lambda \geq 1;$$

$$\lambda^k \left| \int e^{i\lambda\varphi(\theta)} a(\theta) d\theta \right| \leq c_{k+1}(\varphi) c(c_0, \tilde{K}) \sup_{|\alpha| \leq k} |\partial^\alpha a|$$

where $c_{k+1}(\varphi)$ is a positive constant depending on the norm of φ in $C^{k+1}(\tilde{K})$.

Proof of Lemma 3.3.2. Let $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{T}^3)$. To find the limit of Q^ϵ in the sense of distributions as ϵ goes to zero, we have to find the limit of $\int Q^\epsilon \varphi \, dx dt$ as ϵ goes to zero.

In fact, by (3.21) and Theorem 3.3.3 (for $\lambda = \frac{1}{\epsilon}$), this integral goes to zero as ϵ goes to zero if $\omega_{k,m,n}^{a,b,c} = \omega^b(k) + \omega^c(m) - \omega^a(n)$ is not zero, that is, if

$$\frac{\tilde{k}_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} \pm \frac{\tilde{m}_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} \pm \frac{\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} \neq 0$$

We thus get

$$Q(u, v) = i \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ a,b,c \in \{\pm\}}} \exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}) (1+\alpha|\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n} \cdot x}$$

where K is defined by (3.28). □

We next want to describe the resonant set K in more details.

Performing computations, which are similar to those done in the case of the Navier-Stokes equations (see [21], [45]), we obtain the following result.

The set K can be written as : $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4$, with

$$K_1 = \{(k, m, n) \mid \frac{k_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} + \frac{m_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} + \frac{n_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} = 0, k + m = n\}$$

$$K_2 = \{(k, m, n) \mid \frac{k_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} - \frac{m_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} + \frac{n_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} = 0, k + m = n\}$$

$$K_3 = \{(k, m, n) \mid \frac{k_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} - \frac{m_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} - \frac{n_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} = 0, k + m = n\}$$

$$K_4 = \{(k, m, n) \mid \frac{k_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)} + \frac{m_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)} - \frac{n_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)} = 0, k + m = n\}$$

Denoting $K_{2D} = \{k_3 = m_3 = n_3 = 0\}$ and arguing as in [21], we obtain the following lemma.

Lemma 3.3.4. $K \cap \{(k, m, n) \in \mathbb{Z}^3 \mid k_3 m_3 n_3 = 0\} = K_{14} \cup K_{24} \cup K_{34} \cup K_{2D}$,

where

$$K_{ij} = K_i \cap K_j \cap K_{2D}.$$

A very important observation is that the resonant terms in $Q(u, v)$ with interactions restricted to K_{14} cancel.

Theorem 3.3.5. *The set K_{14} does not contribute to the resonances :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{\substack{(k,m,n) \in K_{14} \\ a,b,c \in \{\pm\}}} \exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n} \cdot x} = 0$$

Proof . The proof is similar to the one in the case of Navier-Stokes equations, (see, for instance, [21], [3] or [14]). □

3.3.4 Diagonalization

In order to prove that the solutions of the system (S^ϵ) defined in Section 3.2 exist globally, we will decompose (S^ϵ) into two coupled systems, which take into account that the vectors in $Ker \mathbb{P}L$ do not give any oscillations. Since $R(\mathbb{P}) \cap Ker \mathbb{P}L$ contains divergence-free vectors which do not depend on the third variable x_3 , we introduce the decomposition $v^\epsilon = Mv^\epsilon + v_{osc}^\epsilon$ where Mv^ϵ is the x_3 -average of v^ϵ .

Taking the x_3 -average of (S^ϵ) leads to the system,

$$(\bar{S}^\epsilon) \begin{cases} \partial_t(Mv^\epsilon - \alpha \Delta_2 Mv^\epsilon) - \nu \Delta_2 Mv^\epsilon + M(Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)) = Mf^\epsilon \\ \operatorname{div} Mv^\epsilon = 0 \\ Mv^\epsilon(0) = Mu_0 \end{cases}$$

where $\Delta_2 = \partial_1^2 + \partial_2^2$ and where

$$M(Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)) = \frac{1}{2\pi a_3} \int_0^{2\pi a_3} Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) dx_3 ,$$

and Mf^ϵ represents the vertical average of f^ϵ .

Thus v_{osc}^ϵ satisfies the following system

$$(S_{osc}^\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(v_{osc}^\epsilon - \alpha\Delta v_{osc}^\epsilon) - \nu\Delta v_{osc}^\epsilon + Q_{osc}^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = (I - M)f^\epsilon \\ \operatorname{div} v_{osc}^\epsilon = 0 \\ v_{osc}^\epsilon(0) = (I - M)u_0 \end{array} \right.$$

where $Q_{osc}^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) - M(Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon))$.

3.4 Study of the limit system

In this part, we shall prove that the limit system (S_0) obtained in Section 3.2 is globally well-posed in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1)$, for initial data in V^3 . We will use this result later to obtain global existence of solutions of the second grade rotating fluids in the three dimensional torus for sufficiently small ϵ .

As we mentioned in the previous section, if we define $v^\epsilon = Mv^\epsilon + v_{osc}^\epsilon$, we see that Mv^ϵ and v_{osc}^ϵ satisfy the Systems (\bar{S}^ϵ) and (S_{osc}^ϵ) respectively. The idea is then to pass to the limit in both systems.

3.4.1 The limit of (\bar{S}^ϵ)

Proposition 3.4.1. *The limit of System (\bar{S}^ϵ) is the following system of 3 equations depending only on the horizontal variable :*

$$(SG2D) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(Mv - \alpha\Delta_2 Mv) - \nu\Delta_2 Mv + \mathbb{P}\left(\operatorname{rot}(Mv - \alpha\Delta_2 Mv) \times Mv\right) \\ = \mathbb{P}(Mf) \\ \nabla_2 \cdot Mv = 0 \\ Mv(0) = Mu_0 \end{array} \right.$$

Proof . The essential point of the proof consists in the study of the limit of $M(Q^\epsilon)$. Considering the Fourier coefficients of $M(Q^\epsilon)$ corresponds to taking $n_3 = 0$, so the resonant set is included in $\bar{K} \equiv K \cap \{(k, m, n) \mid n_3 =$

0 and $k + m = n$ }.

According to Lemma 3.3.4, one has $\overline{K} \subset K_{14} \cup K_{24} \cup K_{34} \cup K_{2D}$.

On the other hand, Theorem 3.3.5 implies that K_{14} does not contribute to the resonances, that is equivalent to say that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} MQ^\epsilon(v_{osc}^\epsilon, v_{osc}^\epsilon) = 0.$$

Thus, we obtain that $\overline{K} \subset K_{24} \cup K_{34} \cup K_{2D}$.

We now prove that $\overline{K} \subset K_{2D}$.

Let us suppose that $(k, m, n) \in \overline{K} \cap K_{24}$. Then according to the definition of K_{24} , one has

$$\frac{m_3}{|\tilde{m}|(1 + \alpha|\tilde{m}|^2)} - \frac{n_3}{|\tilde{n}|(1 + \alpha|\tilde{n}|^2)} = 0 \quad \text{and } k_3 = 0.$$

Since $n_3 = 0$, this implies that $k_3 = m_3 = n_3 = 0$, which is not possible since $K_{24} \cap K_{2D} = \emptyset$.

By the same way, $K \cap K_{34} = \emptyset$.

Therefore, we have proved that $K \subset K_{2D}$, which means that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(Q^\epsilon(Mv^\epsilon, Mv^\epsilon)).$$

But if v is a vector field which does not depend on the third variable, then $\mathcal{L}_\alpha(t)v = v$. Therefore,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(Q^\epsilon(Mv^\epsilon, Mv^\epsilon)) = \mathbb{P}(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv) \text{ in } D'(\mathbb{R}^+, \mathbb{T}^3).$$

□

3.4.2 The limit of (S_{osc}^ϵ)

Let us define $v_{osc} = v - Mv$, where Mv is the solution of $(SG2D)$ and v is the limit of v^ϵ , then we have the following proposition :

Proposition 3.4.2. *For almost all values of a_3 , the limit equation of (S_{osc}^ϵ) is a linear equation in v_{osc} given by :*

$$(L_{osc}) \begin{cases} \partial_t(v_{osc} - \alpha\Delta v_{osc}) - \nu\Delta v_{osc} + Q(Mv, v_{osc}) + Q(v_{osc}, Mv) = 0 \\ \text{div } v_{osc} = 0 \\ v_{osc}(0) = (I - M)u_0 \end{cases}$$

Définition 3.4.3. A set of triples (a_1, a_2, a_3) is said to be non resonant if the following condition is satisfied :

$$(NR) \quad K \subset \{(k, m, n) \in \mathbb{Z}^9 \mid k_3 m_3 n_3 = 0 \text{ and } k + m = n\}$$

where K is defined in (3.28).

Lemma 3.4.4. For any $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, there exists a subset $R(a_1, a_2)$ of measure zero in \mathbb{R} , such that, for any $a_3 \in \mathbb{R} \setminus R(a_1, a_2)$ the condition of (NR) is satisfied.

Proof . We will follow the proof of [21] and define the functions

$$\begin{aligned} \gamma^1(e, f, g) &= e + f + g \\ \gamma^2(e, f, g) &= e + f - g \\ \gamma^3(e, f, g) &= e - f + g \\ \gamma^4(e, f, g) &= e - f - g \end{aligned}$$

where $e = \frac{\tilde{k}_3}{|\tilde{k}|(1+\alpha|\tilde{k}|^2)}$, $f = \frac{\tilde{m}_3}{|\tilde{m}|(1+\alpha|\tilde{m}|^2)}$ and $g = \frac{\tilde{n}_3}{|\tilde{n}|(1+\alpha|\tilde{n}|^2)}$.

We are going to prove that, if a_1 and a_2 are arbitrarily fixed, then for almost all a_3 , the product $\prod_{l=1}^{l=4} \gamma^l(e, f, g)$ is never zero, for any k, m, n , where $n = k + m$ and $k_3 m_3 n_3 \neq 0$.

We set $X = a_3^{-1}$. One notices that

$$\begin{aligned} & a_3^4 |\tilde{k}|^4 |\tilde{m}|^4 |\tilde{n}|^4 (1 + \alpha |\tilde{k}|^2)^4 (1 + \alpha |\tilde{m}|^2)^4 (1 + \alpha |\tilde{n}|^2)^4 \prod_{l=1}^{l=4} \gamma^l(e, f, g) \\ &= \prod_{l=1}^{l=4} \gamma^l(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= k_3 |\tilde{m}| |\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{m}|^2)(1 + \alpha |\tilde{n}|^2) \\ \Gamma_2 &= m_3 |\tilde{k}| |\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{k}|^2)(1 + \alpha |\tilde{n}|^2) \\ \Gamma_3 &= n_3 |\tilde{m}| |\tilde{k}| (1 + \alpha |\tilde{m}|^2)(1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\prod_{l=1}^{l=4} \gamma^l(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) = (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 - \Gamma_3^2)^2 - 4\Gamma_1^2 \Gamma_2^2$$

and Γ_1 , Γ_2 , and Γ_3 can be written as follows

$$\begin{aligned}\Gamma_1^2 &= k_3^2(|\tilde{m}_h|^2 + X^2 m_3^2)(|\tilde{n}_h|^2 + X^2 n_3^2)(1 + \alpha(|\tilde{m}_h|^2 + X^2 m_3^2))^2 \\ &\quad \times (1 + \alpha(|\tilde{n}_h|^2 + X^2 n_3^2))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_2^2 &= m_3^2(|\tilde{k}_h|^2 + X^2 k_3^2)(|\tilde{n}_h|^2 + X^2 n_3^2)(1 + \alpha(|\tilde{k}_h|^2 + X^2 k_3^2))^2 \\ &\quad \times (1 + \alpha(|\tilde{n}_h|^2 + X^2 n_3^2))^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_3^2 &= n_3^2(|\tilde{m}_h|^2 + X^2 m_3^2)(|\tilde{k}_h|^2 + X^2 k_3^2)(1 + \alpha(|\tilde{m}_h|^2 + X^2 m_3^2))^2 \\ &\quad \times (1 + \alpha(|\tilde{k}_h|^2 + X^2 k_3^2))^2\end{aligned}$$

where $|\tilde{n}_h|^2 = n_1^2/a_1^2 + n_2^2/a_2^2$,

Thus, if $k_3 m_3 n_3 \neq 0$, we are in fact considering a polynomial in X of degree 12 and of dominant coefficient $\alpha^4(k_3 m_3 n_3)^2(m_3 n_3)^4$ which is not zero, so which has at most 12 solutions.

Then, as k , m and n vary in a countable set, we have a countable set of values of a_3^{-1} such that $\prod_{l=1}^{l=4} \gamma^l(e, f, g) = 0$, so the lemma is proved. \square

Proof of proposition 3.4.2. We recall that

$$Q_{osc}^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) = Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) - M(Q^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon)).$$

Thus, in the Fourier decomposition of Q_{osc}^ϵ , n_3 is non zero. Therefore, if a_3 is non resonant (with a_1 and a_2 being two fixed values), the conditions $k_3 m_3 n_3 = 0$ and $n_3 \neq 0$, imply that $k_3 m_3 = 0$. Since $n_3 \neq 0$ and $k_3 + m_3 = n_3$, we deduce that k_3 and m_3 cannot be both zero.

Thus,

$$\begin{aligned}& \lim_{\epsilon \rightarrow 0} Q_{osc}^\epsilon(v^\epsilon, v^\epsilon) \\ &= i \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ k_3 m_3 = 0, n_3 \neq 0}} \exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i \tilde{n} \cdot x} \\ &= Q(Mv, v_{osc}) + Q(v_{osc}, Mv)\end{aligned}$$

On the other hand, using the non-stationary phase theorem (see Theorem 3.3.3), it is easy to prove that $(I - M)f^\epsilon = (I - M)\mathcal{L}_\alpha(-\frac{t}{\epsilon})f$ tends to zero in \mathcal{D}' since $n_3 \neq 0$ in its Fourier decomposition. Hence Proposition 3.4.2 is proved. □

3.4.3 Global existence of the limit system

The aim of this section is to study the global well-posedness of the limit system $(SG2D) - (L_{osc})$.

Global existence of solutions of System $(SG2D)$

We begin by the study of System $(SG2D)$. We distinguish the case of arbitrary coefficient α and the case of small α . We recall that, for all vector field $z = (z_1, z_2, z_3)$ in \mathbb{R}^3 , $z_h = (z_1, z_2)$ denote the horizontal component of z and z_3 its third component.

Case of arbitrary α

Let

$$K_0(u_0, f) = \|\text{rot}_h M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \quad (3.29)$$

and

$$K_1(u_0, f) = \|\text{rot}_3 M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_3 Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \quad (3.30)$$

Then, we have the following theorem.

Theorem 3.4.5. *There exists a constant $r_0 > 0$ small enough such that for all Mu_0 in $V^3(\mathbb{T}^2)$ (respectively $V^4(\mathbb{T}^2)$), for all Mf in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^2))$ (respectively $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$) satisfying*

$$K_0(u_0, f) \exp(C_2 K_0(u_0, f) + C_2 K_1(u_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3}$$

where C_2 is a constant that does not depend on α , the solution of System $(SG2D)$ exists globally in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$ (respectively in $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$).

Proof . To prove the existence of solutions of System (SG2D), one can use a Galerkin method with the same basis as the one used to prove global existence for the second grade fluid system in the three dimensional case (see [15]). In the following, we give the à-priori estimates that allow us to show the global existence of solutions under the conditions of Theorem 3.4.8.

The first system of equations in(SG2D) is a two-dimensional second grade fluid system with three components. For such systems, the V^1 -estimate is the same as for the second grade fluid equations in the two-dimensional case (with two components), since $(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv, Mv) = 0$, and we have

$$\begin{aligned} \|Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla Mv\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla Mv\|_{L^2}^2 ds &\leq \|Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla Mu_0\|_{L^2}^2 \\ &+ \frac{C_p^2}{\nu} \int_0^\infty \|Mf\|_{L^2}^2 dt \end{aligned} \quad (3.31)$$

In order to obtain V^3 -estimates on the solutions, we will bound the term $\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv)$.

Taking the vorticity of the first equation in (SG2D), we obtain

$$\partial_t(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv)) - \nu \text{rot}\Delta Mv + \text{rot}(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv) = \text{rot}\bar{f} \quad (3.32)$$

Let $Mv = (Mv_1, Mv_2, Mv_3)^t$.

Then,

$$\text{rot}Mv = (\partial_2 Mv_3, -\partial_1 Mv_3, \partial_1 Mv_2 - \partial_2 Mv_1)^t. \quad (3.33)$$

Using the fact that $\nabla_h.Mv = 0$, we show that

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv) &= Mv.\nabla_h(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv)) \\ &- (\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv)).\nabla_h Mv \end{aligned} \quad (3.34)$$

where $\nabla_h = (\partial_1, \partial_2, 0)$.

Remark 3.4.6. According to (3.34), one easily remarks that if we take the L^2 -inner product of (3.32) with $\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv)$, contrary to the case of the two dimensional second grade fluid system, the non linear term does not disappear in the V^3 -estimates (in fact, only the first nonlinear term in the right hand side of (3.34) disappears), therefore, we cannot obtain the global

existence of solutions without imposing some restriction on the data.

Let $\text{rot}_h Mv$ (respectively Mv_h) denote the horizontal component of $\text{rot} Mv$ (respectively Mv) and $\text{rot}_3 Mv$ (respectively Mv_3) the third component of $\text{rot} Mv$ (respectively Mv), that is, $\text{rot}_h Mv = (\partial_2 Mv_3, -\partial_1 Mv_3)^t$ and $\text{rot}_3 Mv = \partial_1 Mv_2 - \partial_2 Mv_1$.

Then, using (3.34), we can write the first two components of (3.32) as

$$\begin{aligned} \partial_t(\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) - \nu\text{rot}_h\Delta Mv + Mv_h \cdot \nabla_h(\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) \\ - (\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) \cdot \nabla_h Mv_h = \text{rot}_h \bar{f} \end{aligned}$$

We remark that $(Mv_h \cdot \nabla(\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)), \text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) = 0$ since $\nabla_h Mv_h = 0$.

We next estimate the term $((\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) \cdot \nabla Mv_h, \text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv))$. Applying Holder's inequality and using the fact that $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ is embedded into $L^4(\mathbb{T}^2)$ and then interpolating between $L^2(\mathbb{T}^2)$ and $H^1(\mathbb{T}^2)$, we obtain

$$\begin{aligned} (\text{rot}_h Mv \cdot \nabla_h Mv_h, \text{rot}_h Mv) &\leq \|\nabla_h Mv_h\|_{L^2} \|\text{rot}_h Mv\|_{L^4}^2 \\ &\leq C_S \|\nabla_h Mv_h\|_{L^2} \|\text{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

where C_S is a Sobolev constant.

On the other hand,

$$\begin{aligned} \alpha(\text{rot}_h \Delta Mv \cdot \nabla_h Mv_h, \text{rot}_h Mv) \\ \leq \alpha \|\text{rot}_h Mv\|_{L^4} \|\nabla_h Mv_h\|_{L^4} \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \\ \leq C_S \alpha \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

where we have used the fact that $\|\nabla_h Mv_h\|_{L^4} \leq \|\Delta_h Mv_h\|_{L^2} \leq \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}$. By the same way, we have

$$\begin{aligned} \alpha(\text{rot}_h Mv \cdot \nabla Mv_h, \text{rot}_h \Delta Mv) \\ \leq C_S \alpha \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \alpha^2(\text{rot}_h \Delta Mv \cdot \nabla Mv_h, \text{rot}_h \Delta Mv) &\leq \alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla Mv_h\|_{L^\infty} \\ &\leq C_S \alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

Collecting all these bounds, we can obtain the following inequality

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \partial_t \|\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \\
 & \leq C_S \|\nabla Mv_h\|_{L^2} \|\operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\
 & + \alpha C_S \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\
 & + \alpha^3 C_S \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} + \|\operatorname{rot}_h \bar{f}\|_{L^2} \|\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Now, we estimate the L^2 -norm of $\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)$.

By (3.34), the third component of Equation (3.32) is

$$\begin{aligned}
 \partial_t(\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)) - \nu \operatorname{rot}_3 \Delta Mv + Mv_h \cdot \nabla_h(\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)) \\
 - (\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha \Delta Mv)) \cdot \nabla_h Mv_3 = \operatorname{rot}_3 Mf
 \end{aligned}$$

Using (3.33), we have that $\operatorname{rot}_h Mv \cdot \nabla_h Mv_3 = 0$.

Taking the L^2 -inner product of the above equation with $\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)$ and performing estimates on the nonlinear term as above, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \partial_t \|\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \leq \\
 & \alpha C_S \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} \\
 & + \alpha^2 C_S \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} + \|\operatorname{rot}_3 \bar{f}\|_{L^2} \|\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Now, taking the sum of Inequalities (3.35) and (3.36) and applying Cauchy-Schwarz inequality yield

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \|\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \\
 & + \partial_t \|\operatorname{rot}_3(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \\
 & \leq \frac{C_0}{\nu} \|\nabla Mv_h\|_{L^2}^2 \|\operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{C_0}{\nu} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \\
 & + \alpha^3 \frac{C_0}{\nu} \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\operatorname{rot} Mf\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

where C_p is the Poincaré constant and C_0 is a constant that does not depend on α .

Suppose now that

$$\|\text{rot}_h(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 \leq \frac{r_0^2}{3}.$$

Then, there exists a time $T^* > 0$ such that

$$\|\text{rot}_h(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 < r_0^2 \text{ for all } t \leq T^*.$$

Let $r_0 > 0$ be small enough such that $\frac{C_0}{\nu}r_0^2 < \min(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2C_p^4})$.

Then, remarking that

$$\|\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)\|_{L^2}^2 = \|\text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2$$

we can write Inequality (3.37) as

$$\begin{aligned} & \partial_t \|\text{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \nu\alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \\ & + \partial_t \|\text{rot}_3(Mv - \alpha\Delta Mv)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}\alpha \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \\ & \leq \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot} Mf\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Then, integrating the inequality (3.38) in time between 0 and $t > 0$ yield

$$\begin{aligned} & \|\text{rot}(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\nu}{2} \int_0^t (\|\nabla \text{rot} Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mv(s)\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \|\text{rot}(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \int_0^t \|\text{rot} Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned} \tag{3.39}$$

It remains to show that $\|\text{rot}_h(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 < r_0^2, \forall t \leq T^*$.

Applying the Cauchy-Schwarz inequality to (3.35) and integrating in time, we obtain

$$\begin{aligned} & \|\text{rot}_h(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 \\ & + \nu \int_0^t (\|\nabla \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \|\text{rot}_h(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \int_0^t \|\text{rot}_h Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & + C_1 \int_0^t \left(\|\nabla Mv_h(s)\|_{L^2}^2 \|\text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha C_1 \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \right. \\ & \left. + \alpha^3 C_1 \|\Delta \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2 \right) ds \end{aligned}$$

Applying Gronwall lemma, we can write

$$\begin{aligned}
 & \|\text{rot}_h(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 \\
 & + \nu \int_0^t (\|\nabla \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2) ds \\
 & \leq (\|\text{rot}_h(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \int_0^t \|\text{rot}_h Mf(s)\|_{L^2}^2 ds) \\
 & \quad \times \exp\left(C_1 \int_0^t (\|\nabla Mv_h\|_{L^2}^2 + \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2) ds\right)
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Let

$$K_0(u_0, f) = \|\text{rot}_h(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \tag{3.41}$$

and

$$K_1(u_0, f) = \|\text{rot}_3(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}_3 Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))} \tag{3.42}$$

According to (3.39),

$$\begin{aligned}
 & \exp\left(C_1 \int_0^t (\|\nabla Mv_h(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2) ds\right) \leq \\
 & \exp\left(C_2 (\|\text{rot}(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{4(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot} Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^2))})\right) \leq \\
 & \exp(C_2(K_0 + K_1))
 \end{aligned}$$

Suppose now that

$$K_0(u_0, f) \exp(C_2 K_0(u_0, f) + C_2 K_1(u_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3}, \tag{3.43}$$

where K_0 and K_1 are given by (3.41), respectively (3.42).

Thus, Condition (3.43) and Inequality (3.40) imply, for all $t \leq T^*$,

$$\|\text{rot}_h(Mv(t) - \alpha\Delta Mv(t))\|_{L^2}^2 \leq \frac{r_0^2}{3}$$

The energy estimate (3.39) does not allow to conclude that Mv is bounded uniformly in α in the space $L^2(0, t; V^3)$, for $t > 0$, when α is taken very

small. In order to show a uniform bound in α on $\|Mv\|_{L^2(0,t;V^3)}$, we take the L^2 scalar product of (3.32) with $-\text{rot}\Delta Mv$.

Using (3.34) and the fact that $\text{div } Mv = 0$, we have

$$\begin{aligned} & (\text{rot}(\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \times Mv), \text{rot}\Delta Mv) = \\ & (Mv \cdot \nabla \text{rot} Mv, \text{rot}\Delta Mv) - (\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv) \cdot \nabla Mv, \text{rot}\Delta Mv) \end{aligned}$$

Therefore, the energy inequality becomes

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \left(\|\nabla \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 \leq \\ & C \left(\|Mv\|_{L^2} + \|\Delta Mv\|_{L^2} \right) \|\nabla \text{rot } Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2} \\ & + \alpha C \|\nabla \Delta Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + \|\text{rot } Mf\|_{L^2} \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

Applying Young's inequality yields

$$\begin{aligned} & \partial_t \left(\|\nabla \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 \right) + \nu \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 \leq C \|\text{rot } Mf\|_{L^2}^2 \\ & + C \left(\|Mv\|_{L^2}^2 + \|\Delta Mv\|_{L^2}^2 \right) \|\nabla \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + \alpha^2 C \|\nabla \Delta Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

According to Estimate (3.39), we have that Mv belongs to $L^2(0, t; L^2(\mathbb{T}^2))$, also ΔMv is in $L^2(0, t; L^2(\mathbb{T}^2))$ and $\sqrt{\alpha} \nabla \Delta Mv$ in $L^2(0, t; L^2(\mathbb{T}^2))$, for all $t > 0$.

Thus, integrating the above inequality between 0 and $t > 0$ and applying the Gronwall lemma we obtain

$$\begin{aligned} & \|\nabla \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\Delta \text{rot } Mv(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq \left(\|\nabla \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + C \int_0^\infty \|\text{rot } Mf(t)\|_{L^2}^2 dt \right) \\ & \quad \times \exp \left(C \|\text{rot}(Mu_0 - \alpha\Delta Mu_0)\|_{L^2}^2 + \frac{2C(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot } Mf\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^3))} \right) \end{aligned} \tag{3.44}$$

To finish the proof of this proposition, we need to show that if u_0 in V^4 and \bar{f} in $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^2)$, the solution of the limit system (*SG2D*) is in $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$.

We already know that the solution belongs to $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, V^4)$ (since this is the

case in the three dimensional case, see [15]), the goal is to prove that this bound is uniform in t .

We take the L^2 -inner product of Equation (3.32) with $\text{rot}\Delta^2 Mv$.

We set $I = (Mv.\nabla_h \text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv), \text{rot}\Delta^2 Mv)$

and $J = (\text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv).\nabla_h Mv, \text{rot}\Delta^2 Mv)$.

Integrating by parts, we have

$$\begin{aligned} I = & - \sum_{l=1,2} \int_{\mathbb{T}^2} \partial_l Mv.\nabla \text{rot}(Mv - \alpha\Delta Mv).\text{rot}\partial_l \Delta Mv \, dx \\ & - \sum_{l=1,2} \int_{\mathbb{T}^2} Mv.\nabla \text{rot}\partial_l (Mv - \alpha\Delta Mv).\text{rot}\partial_l \Delta Mv \, dx \end{aligned}$$

Since $\nabla_2.Mv = 0$, $\int_{\mathbb{T}^2} Mv.\nabla \text{rot}\partial_l \Delta Mv.\text{rot}\partial_l \Delta Mv \, dx = 0$.

Therefore, applying Holder's inequality and using the embeddings of $H^1(\mathbb{T}^2)$ into $L^4(\mathbb{T}^2)$ and of $H^2(\mathbb{T}^2)$ into $L^\infty(\mathbb{T}^2)$, we obtain the following bound on I

$$\begin{aligned} |I| \leq & C \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} (\|\Delta Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} \\ & + \alpha \|\nabla \Delta Mv\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}) \end{aligned}$$

Integrating by parts and using the same Sobolev embeddings as above, we obtain

$$\begin{aligned} |J| \leq & C \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} (\|\Delta Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} \\ & + \alpha \|\nabla \Delta Mv\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}) \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 \leq \\ C \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} (\|\Delta Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} \\ + \alpha \|\nabla \Delta Mv\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}) + \|\nabla \text{rot} Mf\|_{L^2} \|\nabla \Delta \text{rot} Mv\|_{L^2} \end{aligned}$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality and integrating between 0 and

$t > 0$ yield

$$\begin{aligned} & \|\Delta \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \Delta \text{rot } Mv(s)\|_{L^2}^2 \leq \\ & \|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + C \int_0^t (\|\Delta Mv(s)\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot } Mv(s)\|_{L^2}^2 \\ & + \alpha^2 \|\nabla \Delta Mv(s)\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta \text{rot } Mv(s)\|_{L^2}^2) ds + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|\nabla \text{rot } Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned}$$

Applying the Gronwall lemma and using Estimate (3.39), we obtain

$$\begin{aligned} & \|\Delta \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } Mv(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \Delta \text{rot } Mv(s)\|_{L^2}^2 \\ & \leq \left(\|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\nu} \int_0^t \|\nabla \text{rot } Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \right) K_3 \end{aligned} \quad (3.45)$$

where $K_3 = \exp\left(C \int_0^t (\|\Delta Mv(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta Mv(s)\|_{L^2}^2) ds\right)$ is a constant that depends only on $\|\text{rot}(Mu_0 - \alpha \Delta Mu_0)\|_{L^2}^2$ and on $\|Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^1)}$. \square

Case of small α

Theorem 3.4.7. *For all $r > 0$, there exists $\alpha_0 > 0$ such that $\forall \alpha \leq \alpha_0$, for all $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^2))$ and for all $Mu_0 \in V^3(\mathbb{T}^2)$ satisfying*

$$\|\nabla \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } Mu_0\|_{L^2} + \|\text{rot } Mf\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \leq r,$$

the system (SG2D) has a unique solution Mv in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^2))$.

Moreover, if Mf and Mu_0 belong to $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$ and $V^4(\mathbb{T}^2)$ respectively, then the solution of System (SG2D) belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2))$.

Proof . The V^1 -estimate is the same as in the case of arbitrary coefficient α and is thus given in (3.31).

We recall that

$$\|\text{rot}(Mv - \alpha \Delta Mv)\|_{L^2}^2 = \|\text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot } Mv\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot } Mv\|_{L^2}^2.$$

Thus, in order to estimate the V^3 -norm of the solution in the case of small α , it is interesting to bound the L^2 -norm of the term $\sqrt{\alpha} \text{rot}_h \Delta Mv$.

We recall that the first two components of Equation (3.32) can be written as

$$\begin{aligned} \partial_t(\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) - \nu\operatorname{rot}_h \Delta Mv + Mv_h \cdot \nabla_h(\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) \\ - (\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv)) \cdot \nabla_h Mv_h = \operatorname{rot}_h Mf \end{aligned} \quad (3.46)$$

Taking the L^2 -scalar product of (3.46) with $-\operatorname{rot}_h\Delta Mv$, we are led to estimate the term $(Mv_h \cdot \nabla \operatorname{rot}_h Mv, \operatorname{rot}_h\Delta Mv)$. Performing an integration by parts and using the fact that $\operatorname{div} Mv_h$ vanishes, we obtain

$$\begin{aligned} (Mv_h \cdot \nabla \operatorname{rot}_h Mv, \operatorname{rot}_h\Delta Mv) &\leq \|\nabla Mv_h\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq C \|\nabla Mv_h\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \end{aligned} \quad (3.47)$$

We also need to estimate the following term

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv) \cdot \nabla Mv_h, \operatorname{rot}_h\Delta Mv) \\ \leq \|\nabla Mv_h\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \|\operatorname{rot}_h Mv\|_{L^4(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\ + \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla_h Mv_h\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Using the continuous embedding of $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2)$ into $L^4(\mathbb{T}^2)$ and the fact that

$$\|\nabla Mv_h\|_{L^4} \leq C \|\nabla Mv_h\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\Delta Mv_h\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \leq \|\operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}},$$

we get

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot}_h(Mv - \alpha\Delta Mv) \cdot \nabla Mv_h, \operatorname{rot}_h \Delta Mv) \\ \leq C(\|\operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \\ + \alpha \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2}) \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\ \leq C \|\operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\ + C \|\operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2} \\ + C\alpha \|\Delta \operatorname{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \operatorname{rot}_3 Mv\|_{L^2} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Taking the L^2 scalar product of (3.46) with $\text{rot}_h \Delta Mv$ and taking into account the estimate (3.47), (3.48) and (3.49), we can write

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t (\|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \leq \\ & C \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \left(\|\nabla Mv_h\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2} + \|\text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \right. \\ & + \|\text{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2} + C\alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \\ & \left. + \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality yield

$$\begin{aligned} & \partial_t (\|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_3 \|\nabla Mv_h\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + C_3 \|\text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \\ & + C_3 \|\text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + C_3 \alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2}{\nu} \|\text{rot}_h Mf\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{3.50}$$

In a similar way, in order to estimate the term $\|\text{rot}_3 \Delta Mv\|_{L^2}$, we take the L^2 -scalar product of the third component of Equation (3.32) with $-\text{rot}_3 \Delta Mv$. Remarking that $\text{rot}_h Mv \cdot \nabla_h v_3$ vanishes, we get

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t (\|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \leq \\ & C_S \|\nabla Mv_h\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \end{aligned} \tag{3.51}$$

$$+ \alpha C_S \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 + \|\text{rot}_3 Mf\|_{L^2} \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}$$

Taking the sum of the estimates (3.50) and (3.51) and applying the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned} & \partial_t (\|\nabla \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 \leq \\ & C_4 \|\nabla Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 + \alpha^2 C_4 \|\Delta \text{rot}_h Mv\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}_3 Mv\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{2}{\nu} \|\text{rot} Mf\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Assume now that $\|\nabla \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 \leq \frac{R^2}{4}$.

Then, let α be small enough such that $\alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 \leq \alpha \frac{R^2}{4} \leq \frac{\nu}{4C_4}$, then by continuity of the solution, there exists a time $T^* > 0$ such that $\alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2C_4}$, for all $t \leq T^*$.

Thus, for all $t \leq T^*$,

$$\partial_t (\|\nabla \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2) + \frac{\nu}{2} \|\Delta \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 \leq$$

$$C_4 \|\nabla Mv\|_{L^2}^2 \|\nabla \text{rot} Mv\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \|\text{rot} Mf\|_{L^2}^2$$

Integrating the above inequality between 0 and $t \leq T^*$ and applying the Gronwall lemma, we obtain

$$\begin{aligned} & \|\nabla \text{rot} Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mv(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\Delta \text{rot} Mv(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq \left(\|\nabla \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|\text{rot} Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ & \quad \times \exp\left(C_4 \int_0^{+\infty} \|\nabla Mv(s)\|_{L^2}^2 ds\right) \end{aligned} \tag{3.52}$$

Using Estimate (3.31), we can write

$$\begin{aligned} & \|\nabla \text{rot} Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mv(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t \|\Delta \text{rot} Mv(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq \left(\|\nabla \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|\text{rot} Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \tag{3.53} \\ & \quad \times \exp\left(\frac{C_4}{\nu} \left(\|Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{C_p^2}{\nu} \int_0^\infty \|Mf\|_{L^2}^2 dt \right)\right) \end{aligned}$$

It remains to show that $\alpha^2 \|\text{rot}_h \Delta Mv(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2C_4}$, for all $t \leq T^*$.

Integrating in time Estimate (3.50) between 0 and $t \leq T^*$ and applying the Gronwall lemma, we get

$$\begin{aligned} & \|\nabla \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\Delta \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \\ & \left(\|\nabla \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|\text{rot}_h Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ & \quad \times \exp\left(C_3 \left(\int_0^t \|\nabla Mv_h(s)\|_{L^2}^2 + \|\text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2 + \|\nabla \text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \alpha \|\Delta \text{rot}_3 Mv(s)\|_{L^2}^2 \right) ds\right) \end{aligned} \tag{3.54}$$

Let

$$K_2(u_0, f) = \|Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{C_p^2}{\nu} \int_0^\infty \|Mf\|_{L^2}^2 dt$$

and

$$K_3(u_0, f) = \|\nabla \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^\infty \|\text{rot} Mf(s)\|_{L^2}^2 ds.$$

Then, using Estimates (3.53) and (3.31), inequality (3.54) can be written as

$$\begin{aligned} & \|\nabla \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\Delta \text{rot}_h Mv(s)\|_{L^2}^2 ds \leq \\ & \left(\|\nabla \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}_h Mu_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\nu} \int_0^t \|\text{rot}_h Mf(s)\|_{L^2}^2 ds \right) \\ & \times \exp\left(C_5 K_2(u_0, f) + C_5(\alpha + 1) K_3(u_0, f) \exp(C_5 K_2(u_0, f))\right) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Thus, multiplying Estimate (3.55) by α and choosing α small enough, we infer that

$$\alpha^2 \|\Delta \text{rot}_h Mv(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{\nu}{2C_4}, \forall t \leq T^*.$$

Finally, if $Mu_0 \in V^4(\mathbb{T}^2)$ and $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H^2(\mathbb{T}^2))$, then, the solution of System (SG2D) belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^2))$ and one can perform the same estimate in $V^4(\mathbb{T}^2)$ (see Estimate (3.45)) as in the case of arbitrary coefficient α . □

Global existence of the solutions of System (L_{osc})

Since the global existence of the solution v_{osc} of System (L_{osc}) will depend on the global existence of the solution Mv of System (SG2D), we distinguish the case of arbitrary α and the case of small α .

Case of arbitrary α

Proposition 3.4.8. *There exists a constant $r_0 > 0$ small enough such that for all $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$, for all $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^2))$, if*

$$K_0(u_0, f) \exp(C_2 K_0(u_0, f) + C_2 K_1(u_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3}$$

where C_2 is a constant that does not depend on α and K_0, K_1 are given by (3.41) and (3.42) respectively, then the solution of System (L_{osc}) exists globally in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$ and Estimate (3.64) below holds.

Moreover, if $(I - M)u_0$ belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$, then, the solution of System (L_{osc}) belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$ and Estimate (3.66) below holds.

Proof . The key to the proof is the absence of quadratic terms in v_{osc} , which enables us to find the result by performing energy estimates in $V^s, s = 2, 3$. Let $s = 2$.

Taking the scalar product in $L^2(\mathbb{T}^3)$ of the first equation in System (L_{osc}) with $\Delta^2 v_{osc}$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\|v_{osc}\|_{V^2}^2 + \alpha \|v_{osc}\|_{V^3}^2) + \nu \|v_{osc}\|_{V^3}^2 &= -(Q(Mv, v_{osc}), \Delta^2 v_{osc}) \\ &\quad - (Q(v_{osc}, Mv), \Delta^2 v_{osc}) \end{aligned} \quad (3.56)$$

Let $A = (Q(v_{osc}, Mv), \Delta^2 v_{osc})$, then according to Remark (3.3.1), L can be written as

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (Q^\epsilon(v_{osc}, Mv), \Delta^2 v_{osc}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\text{rot } v_{osc}^\epsilon \times \bar{v}^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) - \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\text{rot } \Delta v_{osc}^\epsilon \times \bar{v}^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

where $v_{osc}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon})v_{osc}$ and $\bar{v}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon})Mv$.

Using the following identity, true for any divergence free vector fields U and V in \mathbb{R}^3 ,

$$\text{rot } V \times U = U \cdot \nabla V - \nabla(U \cdot V) + \sum_{i=1}^3 V_i \nabla U_i \quad (3.57)$$

we see that

$$\mathbb{P}(\text{rot } V \times U) = \mathbb{P}(U \cdot \nabla V) + \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}(V_i \nabla U_i).$$

Thus, noting by $V_{osc}^\epsilon = \Delta v_{osc}^\epsilon$, we obtain

$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\bar{v}^\epsilon \cdot \nabla v_{osc}^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) - \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\bar{v}^\epsilon \cdot \nabla V_{osc}^\epsilon), \Delta V_{osc}^\epsilon \right) \\
 &+ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \left(\mathbb{P}(v_{osc,i}^\epsilon \nabla \bar{v}_i^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) - \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \left(\mathbb{P}(V_{osc,i}^\epsilon \nabla \bar{v}_i^\epsilon), \Delta V_{osc}^\epsilon \right)
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Now, we give a useful lemma that will help us to bound A .

Lemma 3.4.9. *For any two divergence-free vector fields X and Y in \mathbb{R}^3 , we note $X_{osc}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon})X_{osc}$ and $\bar{Y}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha(\frac{t}{\epsilon})\bar{Y}$.*

Then, we have

$$\forall s \geq 0, \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\bar{Y}^\epsilon \cdot \nabla X_{osc}^\epsilon), (-\Delta^s)X_{osc}^\epsilon \right) = 0.$$

Proof of Lemma 3.4.9. Let us note that applying $-\Delta^s$ is equivalent to multiplying Fourier coefficients by $|n|^{2s}$, and considering the Fourier coefficients of \bar{Y} (respectively v_{osc}) is equivalent to taking $n_3 = 0$ (respectively $n_3 \neq 0$) in the Fourier coefficients of Y .

$$\text{Let } I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\mathbb{P}(\bar{Y}^\epsilon \cdot \nabla X_{osc}^\epsilon), (-\Delta)^s X_{osc}^\epsilon \right).$$

Using (3.18) and the non-stationary phase theorem (Theorem 3.3.3), we can write

$$I = i \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) \bar{Y}_k^b \cdot \tilde{m} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} \cdot |\tilde{n}|^{2s} X_{osc,-\tilde{n}}$$

where a, b, c are either $+$ or $-$ and we have set

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_k^b &= (\bar{Y}_k^c, e_k^c) e_k^c, \\
 X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} &= (X_{osc,\tilde{m}}^c, e_m^c) (e_m^c, e_n^a) e_n^a
 \end{aligned}$$

and K is given by (3.28).

Since $k_3 = 0$, $n_3 \neq 0$ and $k + m = n$, we have $m_3 = n_3$, and according to Theorem 3.3.5, one can deduce that the summation in the scalar product is actually over the set K_{24} .

A simple computation shows that we have $|\tilde{m}| = |\tilde{n}|$.

In fact, the condition $(k, m, n) \in K_{24}$ is equivalent to

$$\frac{m_3}{|\tilde{m}| (1 + \alpha |\tilde{m}|^2)} = \frac{n_3}{|\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{n}|^2)}$$

Since $n_3 \neq 0$ and $m_3 = n_3$, we have $|\tilde{m}|(1 + \alpha|\tilde{m}|^2) = |\tilde{n}|(1 + \alpha|\tilde{n}|^2)$. That is equivalent to say that

$$|\tilde{m}| - |\tilde{n}| + \alpha(|\tilde{m}|^3 - |\tilde{n}|^3) = 0 \quad (3.59)$$

If we suppose that $|\tilde{m}| \neq |\tilde{n}|$, then, we deduce from Equality (3.59) that

$$1 + \alpha(|\tilde{m}|^2 - |\tilde{m}||\tilde{n}| + |\tilde{n}|^2) = 0,$$

which is not possible since $\alpha > 0$.

Now replacing n by $-n$ in the expression of the scalar product, we obtain :

$$I = i \sum_{\substack{k+m+n=0, k_3=0 \\ m_3=-n_3, |\tilde{m}|=|\tilde{n}|}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) \bar{Y}_{\tilde{k}}^b \cdot \tilde{m} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} \cdot |\tilde{n}|^{2s} X_{osc,\tilde{n}}$$

Interchanging m and n and observing that the domain of summation is invariant under this operation, we can write :

$$I = i \sum_{\substack{k+m+n=0, k_3=0 \\ m_3=-n_3, |\tilde{m}|=|\tilde{n}|}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) \bar{Y}_{\tilde{k}}^b \cdot \tilde{n} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} \cdot |\tilde{n}|^{2s} X_{osc,\tilde{n}}$$

Replacing n by $-m - k$, we have :

$$I = -i \sum_{\substack{k+m+n=0, k_3=0 \\ m_3=-n_3, |\tilde{m}|=|\tilde{n}|}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) \left(\bar{Y}_{\tilde{k}}^b \cdot \tilde{k} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} + \bar{Y}_{\tilde{k}}^b \cdot \tilde{m} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a}\right) \cdot |\tilde{n}|^{2s} X_{osc,\tilde{n}}$$

The first part of the summation vanishes since $\text{div } \bar{Y} = 0$ which is equivalent to $\tilde{k} \cdot \bar{Y}_{\tilde{k}} = 0$. It follows that

$$I = -i \sum_{\substack{k+m+n=0, k_3=0 \\ m_3=-n_3, |\tilde{m}|=|\tilde{n}|}} \exp\left(-i\frac{t}{\epsilon}\omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) \bar{Y}_{\tilde{k}}^b \cdot \tilde{m} X_{osc,\tilde{m}}^{c,a} \cdot |\tilde{n}|^{2s} X_{osc,\tilde{n}}$$

which implies that $I = 0$. □

Let us continue the proof of Proposition 3.4.8.

Using Lemma 3.4.9, (3.58) can be written as

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \left(\mathbb{P}(v_{osc,i}^\epsilon \nabla \bar{v}_i^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) + \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 \left(\mathbb{P}(V_{osc,i}^\epsilon \nabla \bar{v}_i^\epsilon), \Delta V_{osc}^\epsilon \right) \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Integrating by parts and using the injections of $H^1(\mathbb{T}^3)$ into $L^4(\mathbb{T}^3)$ and of $H^2(\mathbb{T}^3)$ into $L^\infty(\mathbb{T}^3)$, we get the following bound on I_1 .

$$| I_1 | \leq C \|Mv\|_{V^3} \|v_{osc}\|_{V^1} \|v_{osc}\|_{V^3}$$

By the same way, we have

$$| I_2 | \leq \alpha C \|Mv\|_{V^3} \|v_{osc}\|_{V^3}^2$$

Thus,

$$| A | \leq C \|Mv\|_{V^3} \|v_{osc}\|_{V^3} (\|v_{osc}\|_{V^1} + \alpha \|v_{osc}\|_{V^3})$$

Now, we bound the term $(Q(Mv, v_{osc}), \Delta^2 v_{osc})$.

Let $J = (Q(Mv, v_{osc}), \Delta^2 v_{osc})$. Then J can be written in the Fourier variables as,

$$J = - \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) ((\tilde{k} \times Mv_k^b) \times v_{osc,m}^{c,a}) |\tilde{n}|^4 v_{osc,-n}$$

Thus,

$$\begin{aligned} | J | &\leq \left(\sum_n \left(\sum_{\substack{k+m=n \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |\tilde{n}| |\tilde{k}| \|Mv_k\| \|v_{osc,m}\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_{osc}\|_{V^3} \\ &\leq \left(\sum_n \left(\sum_{\substack{k+m=n \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) (|\tilde{k}| + |\tilde{m}|) |\tilde{k}| \|Mv_k\| \|v_{osc,m}\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_{osc}\|_{V^3} \end{aligned}$$

It is clear that one needs V^4 regularity on Mv in order to bound J , but here, we will use the special form of the resonant set as we have done in the proof of Lemma 3.4.9.

In fact, if $k + m = n$, $k_3 = 0$ and $n_3 \neq 0$, then $|\tilde{m}| = |\tilde{n}|$ (see the proof of Lemma 3.4.9). Therefore, $|\tilde{k}| \leq 2 |\tilde{m}|$ and we obtain

$$| J | \leq 3 \left(\sum_n \left(\sum_{\substack{k+m=n \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |\tilde{m}| |\tilde{k}| \|Mv_k\| \|v_{osc,m}\| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_{osc}\|_{V^3}$$

Using Young's inequality for norms in L_p of convolutions given by

$$\| f \star g \|_{L_r} \leq \| f \|_{L_p} \| g \|_{L_q} \quad \text{where} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \quad (3.60)$$

with $r = 2$, $p = 2$, $q = 1$, we obtain :

$$| J | \leq 3 \left(\| v_{osc} \|_{V^1} \sum_m | k \| M v_k | + \alpha \| M v \|_{V^3} \sum_m | m \| v_{osc,m} | \right) \| v_{osc} \|_{V^3} .$$

Finally, we use the fact that for all vector $u \in V^\theta(\mathbb{T}^3)$, we have

$$\sum_m | m \| u_m | = \sum_m | m |^{1-\theta} | m |^\theta \| u_m | \leq C(\theta) \| u \|_{V^\theta} \quad (3.61)$$

where

$$C(\theta) = \left(\sum_m | m |^{2-2\theta} \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty \quad \text{if} \quad \theta > \frac{5}{2} .$$

Then, choosing $\theta = 3$, we obtain

$$J \leq C \left(\| M v \|_{V^3} \| v_{osc} \|_{V^1} + \alpha \| M v \|_{V^3} \| v_{osc} \|_{V^3} \right) \| v_{osc} \|_{V^3} \quad (3.62)$$

where $C > 0$ is a constant that does not depend on α .

Using (3.56), (3.60) and (3.62), we get the following estimation on v_{osc}

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\| v_{osc} \|_{V^2}^2 + \alpha \| v_{osc} \|_{V^3}^2) + \nu \| v_{osc} \|_{V^3}^2 &\leq C \| M v \|_{V^3} (\| v_{osc} \|_{V^1} \\ &+ \alpha \| v_{osc} \|_{V^3}) \| v_{osc} \|_{V^3} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\partial_t (\| v_{osc} \|_{V^2}^2 + \alpha \| v_{osc} \|_{V^3}^2) + \nu \| v_{osc} \|_{V^3}^2 \leq C \| M v \|_{V^3}^2 (\| v_{osc} \|_{V^1}^2 + \alpha^2 \| v_{osc} \|_{V^3}^2)$$

Integrating in time between 0 and $t > 0$ and using the Gronwall inequality, we infer that

$$\begin{aligned} \| v_{osc}(t) \|_{V^2}^2 + \alpha \| v_{osc}(t) \|_{V^3}^2 + \nu \int_0^t \| v_{osc}(s) \|_{V^3}^2 ds &\leq (\| (I - M) u_0 \|_{V^2}^2 \\ &+ \alpha \| (I - M) u_0 \|_{V^3}^2) \exp(C(1 + \alpha) \int_0^t \| M v(s) \|_{V^3}^2 ds) \end{aligned}$$

Therefore using (3.44), the above inequality can be written as

$$\begin{aligned}
 & \|v_{osc}(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|v_{osc}(t)\|_{V^3}^2 + \nu \int_0^t \|v_{osc}(s)\|_{V^3}^2 ds \leq (\|(I - M)u_0\|_{V^2}^2 \\
 & + \alpha \|(I - M)u_0\|_{V^3}^2) \exp\left[C(1 + \alpha) (\|\text{rot}\nabla M u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot}\Delta M u_0\|_{L^2}^2\right. \\
 & \quad \left. + C\|\text{rot}Mf\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^3))} \exp(C\|\text{rot}M(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2\right. \\
 & \quad \left. + \frac{2C(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot}Mf\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^3))})\right]
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

Suppose now that $(I - M)u_0$ belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$. We will prove that $v_{osc} \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4)$. In fact, we only need the V^3 -regularity on Mv in order to show the V^4 -regularity on v_{osc} .

First, we bound the term $B_1 = (Q(v_{osc}, Mv), \Delta^3 v_{osc})$.

Using Identity (3.57) and Lemma 3.4.9, we obtain

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \left(\mathbb{P}(v_{osc,j}^\epsilon \nabla \bar{u}_j^\epsilon), \Delta^3 v_{osc}^\epsilon \right) + \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \left(\mathbb{P}(\Delta v_{osc,j}^\epsilon \nabla \bar{u}_j^\epsilon), \Delta^3 v_{osc}^\epsilon \right) \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \left(\Delta(v_{osc,j}^\epsilon \nabla \bar{u}_j^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right) + \alpha \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{j=1}^3 \left(\Delta(\Delta v_{osc,j}^\epsilon \nabla \bar{u}_j^\epsilon), \Delta^2 v_{osc}^\epsilon \right)
 \end{aligned}$$

Using the continuous injections of $H^2(\mathbb{T}^3)$ into $L^\infty(\mathbb{T}^3)$ and of $H^1(\mathbb{T}^3)$ into $L^4(\mathbb{T}^3)$, we get

$$|B_1| \leq \|Mv\|_{V^3} \|v_{osc}\|_{V^4} (\|v_{osc}\|_{V^2} + \alpha \|v_{osc}\|_{V^4})$$

Now, we bound the term $B_2 = (Q(Mv, v_{osc}), \Delta^3 v_{osc})$.

B_2 can be written in the Fourier variables as,

$$B_2 = - \sum_{\substack{(k,m,n) \in K \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) ((\tilde{k} \times Mv_k^b) \times v_{osc,m}^{c,a}) |\tilde{n}|^6 v_{osc,-n}$$

Since $k + m = n$, $k_3 = 0$ and $n_3 \neq 0$, then $|\tilde{m}| = |\tilde{n}|$ (see the proof of Lemma 3.4.9). Therefore, we obtain

$$|B_2| \leq \left(\sum_n \left(\sum_{\substack{k+m=n \\ k_3=0, n_3 \neq 0}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |\tilde{m}|^2 |\tilde{k}| \|Mv_k\| |v_{osc,m}| \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v_{osc}\|_{V^4}$$

Using the Young inequality 3.60, we have

$$|B_2| \leq \|Mv\|_{V^3} \|v_{osc}\|_{V^4} (\|v_{osc}\|_{V^2} + \alpha \|v_{osc}\|_{V^4})$$

Collecting all these bounds, we get the following inequality

$$\begin{aligned} & \|v_{osc}(t)\|_{V^3}^2 + \alpha \|v_{osc}(t)\|_{V^4}^2 + \nu \int_0^t \|v_{osc}(s)\|_{V^4}^2 ds \leq \\ & (\|u_{0,osc}\|_{V^3}^2 + \alpha \|u_{0,osc}\|_{V^4}^2) \exp(C(1 + \alpha) \int_0^t \|Mv(s)\|_{V^3}^2 ds) \end{aligned} \quad (3.65)$$

According to (3.44), the above inequality can be written as

$$\begin{aligned} & \|v_{osc}(t)\|_{V^3}^2 + \alpha \|v_{osc}(t)\|_{V^4}^2 + \nu \int_0^t \|v_{osc}(s)\|_{V^4}^2 ds \leq (\|(I - M)u_0\|_{V^3}^2 \\ & + \alpha \|(I - M)u_0\|_{V^{34}}^2) \exp\left[C(1 + \alpha) (\|\text{rot} \nabla M u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta M u_0\|_{L^2}^2 \right. \\ & \left. + C \|\text{rot} M f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^3))} \exp(C \|\text{rot} M(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^2 \right. \\ & \left. + \frac{2C(C_p^2 + \alpha)}{\nu} \|\text{rot} M f\|_{L_t^2(L^2(\mathbb{T}^3))})\right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

Thus, the proposition is proved. □

Case of small α

The estimates that we have performed in the proof of Proposition 3.4.8 are uniform with respect to α . Then, using Theorem 3.4.7 and Inequalities (3.64), (3.66), we obtain the following proposition.

Proposition 3.4.10. *For all $r > 0$, there exists $\alpha_0 > 0$ such that $\forall \alpha \leq \alpha_0$, for all $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^2))$ and for all $u_0 \in V^3(\mathbb{T}^3)$ satisfying*

$$\|\nabla \text{rot} M u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot} M u_0\|_{L^2} + \|\text{rot} M f\|_{L^2(\mathbb{R}^+, L^2)} \leq r,$$

the system (L_{osc}) has a unique solution v_{osc} in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$ and Estimate (3.64) holds.

Moreover, if u_0 belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$, then the solution of System (L_{osc}) belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3))$ and Estimate (3.66) holds.

3.5 Convergence to the solution of the limit system and global existence of the 3D rotating second grade fluid

As we explained in the introduction, global existence of solutions of the limit system will be used in this section in order to control the life span of the solution u^ϵ of the second grade rotating fluid in the three dimensional case. Inequalities (3.19) and (3.20) allow us to work with the filtered solution v^ϵ rather than u^ϵ .

We note that the same study was made in the case of rotating 3D Navier-Stokes equations [21] and allowed to obtain global existence and regularity of the solutions.

In a similar way, we will prove that $(v^\epsilon - v)$ exists globally and tends to zero in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$ when ϵ is small enough.

The fact that, under some conditions, the solution v of the limit system exists globally allows us to prove that v^ϵ is globally defined in $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$, for ϵ sufficiently small.

We suppose that the torus \mathbb{T}^3 satisfies the non-resonance property (*NR*) given in Definition (3.4.3).

Let us introduce $w^\epsilon = v^\epsilon - v$. According to (S^ϵ) and (S_0) , w^ϵ verifies the following equations :

$$\begin{aligned} \partial_t(w^\epsilon - \alpha \Delta w^\epsilon) - \nu \Delta w^\epsilon + Q^\epsilon(w^\epsilon, w^\epsilon) + Q^\epsilon(w^\epsilon, v) + Q^\epsilon(v, w^\epsilon) = \\ Q(v, v) - Q^\epsilon(v, v) + g^\epsilon \quad (3.67) \\ \operatorname{div} w^\epsilon = 0 \\ w^\epsilon(0) = 0 \end{aligned}$$

where Q^ϵ and Q are given in (3.21) and (3.27) respectively and

$$g^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha\left(\frac{-t}{\epsilon}\right)\mathbb{P}f - Mf \quad (3.68)$$

In order to prove global existence of the solutions v^ϵ , we need to prove that the V^3 norm of w^ϵ remains small, when ϵ tends to zero. This property cannot be proved directly since the right-hand side in the first equation satisfied by w^ϵ converges only weakly to zero according to Theorem 3.3.3. Actually, we need strong convergence in order to pass to the limit in the energy estimates.

Following the ideas of [21], we will decompose the right-hand side of the equation (3.67) into two parts, namely the high frequency part and the low frequency part, cutting at an arbitrary frequency N . Then, we will show that the high frequency terms converge strongly to zero when N goes to infinity, whereas the low frequency terms are handled with the method introduced by S. Schochet. This method consists in considering a change of function which will eliminate the low frequency part from the equation.

Let $R^\epsilon = g^\epsilon + Q(v, v) - Q^\epsilon(v, v)$.

By (3.26) and (3.27), R^ϵ can be written as

$$\begin{aligned}
 R^\epsilon = & \sum_{a \in \{\pm\}, \omega^a \neq 0}^n \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega^a\right) \left((\mathbb{P}_{\tilde{n}} f_n, e^a(n)) e^a(n) \right) e^{i\tilde{n}.x} \\
 & -i \sum_{\substack{K+m=n \\ a,b,c \in \{\pm\}, \omega_{k,m,n}^{a,b,c} \neq 0}} \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n}.x}
 \end{aligned} \tag{3.69}$$

with the same notations as in Section 3.3.

Let us decompose R^ϵ into low and high frequency terms as follows

$$\begin{aligned}
 P_N(R^\epsilon) = & \sum_{a \in \{\pm\}, \omega^a \neq 0}^n \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega^a\right) 1_{\{|n| \leq N\}} \left((\mathbb{P}_{\tilde{n}} f_{\tilde{n}}, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n}.x} \\
 & -i \sum_{\substack{K+m=n \\ a,b,c \in \{\pm\}, \omega_{k,m,n}^{a,b,c} \neq 0}} 1_{\{|n| \leq N\}} 1_{\{|k| \leq N\}} \exp\left(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c}\right) (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \\
 & \quad \times \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i\tilde{n}.x}
 \end{aligned} \tag{3.70}$$

and

$$Q_N(R^\epsilon) = R^\epsilon - P_N(R^\epsilon) \tag{3.71}$$

Now, we introduce the following change of variable :

$$y^\epsilon = w^\epsilon + \epsilon (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon \tag{3.72}$$

where \tilde{R}_N^ϵ is defined by

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_N^\epsilon &= \sum_{\substack{n \\ a \in \{\pm\}, \omega^a \neq 0}} \frac{\exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega^a)}{i \omega^a} 1_{\{|n| \leq N\}} \left((\mathbb{P}_{\tilde{n}} f_{\tilde{n}}, e_n^a) e_n^a \right) e^{i \tilde{n} \cdot x} \\
 &- \sum_{\substack{K+m=n \\ a,b,c \in \{\pm\}, \omega_{k,m,n}^{a,b,c} \neq 0}} 1_{\{|n| \leq N\}} 1_{\{|k| \leq N\}} \frac{\exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c})}{\omega_{k,m,n}^{a,b,c}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \\
 &\quad \times \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i \tilde{n} \cdot x} \quad (3.73)
 \end{aligned}$$

One can justify the choice of \tilde{R}_N^ϵ by observing that $\epsilon \partial_t \tilde{R}_N^\epsilon$ eliminates the oscillating term $P_N(R^\epsilon)$. Indeed, differentiating \tilde{R}_N^ϵ , we obtain :

$$\partial_t \tilde{R}_N^\epsilon = -\frac{1}{\epsilon} P_N(R^\epsilon) + \mathcal{P}_N(t)$$

where

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_N(t) &= \sum_{\substack{n \\ a \in \{\pm\}, \omega^a \neq 0}} \frac{\exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega^a)}{i \omega^a} 1_{\{|n| \leq N\}} \partial_t \left((\mathbb{P}_{\tilde{n}} f_{\tilde{n}}, e_n^a) e_n^a \right) e^{i \tilde{n} \cdot x} \\
 &- \sum_{\substack{K+m=n \\ a,b,c \in \{\pm\}, \omega_{k,m,n}^{a,b,c} \neq 0}} 1_{\{|n| \leq N\}} 1_{\{|k| \leq N\}} \frac{\exp(-i \frac{t}{\epsilon} \omega_{k,m,n}^{a,b,c})}{\omega_{k,m,n}^{a,b,c}} (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) \\
 &\quad \times \partial_t \mathbb{P}_{\tilde{n}} \left(((\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^c, e_n^a) e_n^a \right) e^{i \tilde{n} \cdot x} \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

The equation satisfied by y^ϵ is the following

$$\begin{aligned}
 &\partial_t (y^\epsilon - \alpha \Delta y^\epsilon) - \nu \Delta y^\epsilon + Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon) + Q^\epsilon \left(y^\epsilon, -\epsilon (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon + v \right) \\
 &+ Q^\epsilon \left(-\epsilon (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon + v, y^\epsilon \right) = Q_N(R^\epsilon) + \epsilon G_N^\epsilon
 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
 G_N^\epsilon &= -\nu \Delta (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon - Q^\epsilon \left((Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon, \epsilon (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon \right) \\
 &+ Q^\epsilon \left((Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon, v \right) + Q^\epsilon \left(v, (Id - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon \right) + \mathcal{P}_N(t) \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

and $\mathcal{P}_N(t)$ is given by (3.74).

Thus, we are led to estimate the high and low frequencies terms.

Estimation of the high frequencies terms

Lemma 3.5.1. *Let the solution of the limit system v belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3)$ and the force f belongs to $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1)$, then the high frequency term $Q_N(R^\epsilon)$ goes to zero, uniformly in ϵ when N goes to infinity, in the space $L^2(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{T}^3))$.*

Proof . We use the fact that the high frequencies of an element in the space $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$ converge to zero uniformly in ϵ when N tends to infinity, according to Lebesgue's convergence theorem.

In fact, we have

$$\begin{aligned} \|Q_N(R^\epsilon)\|_{V^1}^2 &\leq \|f\|_{V^1}^2 + \sum_{n>N} \left(\sum_{k+m=n} |\tilde{n}| (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |(\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^{c,a}| \right)^2 \\ &\leq \|f\|_{V^1}^2 + \sum_{n>N} \left(\sum_{k+m=n} |\tilde{k}| (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |(\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^{c,a}| \right)^2 \\ &\quad + \sum_{n>N} \left(\sum_{k+m=n} |\tilde{m}| (1 + \alpha |\tilde{k}|^2) |(\tilde{k} \times v_k^b) \times v_m^{c,a}| \right)^2 \end{aligned}$$

Using Young's inequality (3.60), we obtain the following bound on $Q_N(R^\epsilon)$

$$\begin{aligned} \|Q_N(R^\epsilon)\|_{V^1}^2 &\leq \|f\|_{V^1}^2 + C \|v\|_{V^2}^2 (\|v\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|v\|_{V^4}^2) \\ &\quad + C \|v\|_{V^3}^2 (\|v\|_{V^1}^2 + \alpha^2 \|v\|_{V^3}^2) \end{aligned}$$

Thus, when v belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3)$, we conclude that $Q_N(R^\epsilon)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^+, V^1(\mathbb{T}^3))$. □

Estimation of the low frequencies terms

Lemma 3.5.2. *The term G_N^ϵ given by (3.75) belongs to the space $L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$ provided we take $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$ and we have the following estimate*

$$\begin{aligned} \|G_N^\epsilon\|_{L^2}^2 &\leq C_N (1 + \alpha N^2)^2 \left(\|f\|_{L^2}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2}^2 + (1 + \alpha^2) \|v\|_{L^2}^2 (1 + \right. \\ &\quad \left. \|\partial_t v\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 + (1 + \alpha^2)(1 + \epsilon) \|v\|_{L^2}^4 \right) \end{aligned}$$

where C_N is a constant that depends only on N .

Proof . Let us first note that, for all $(k, m, n) \in (\mathbb{Z}^3)^3$ such that $|k| \leq N$, $|n| \leq N$, respectively $|m| \leq N$, each of the terms $(\omega_{k,m,n}^{a,b,c})^{-1}$ given by (3.24) is bounded by a constant c_N depending on N , as $\omega_{k,m,n}^{a,b,c}$ takes a finite number of non zero values.

Then the result is simply due to the fact that all the terms in G_N^ϵ are defined on low frequencies only, hence they are as smooth as wanted and their norm estimated in $L^2(\mathbb{R}^+, L^2)$ will be bounded by a constant C_N which depends on N .

□

3.5.1 The V^3 -estimates

It is clear that y^ϵ has the same regularity as v^ϵ . Our goal in this section is to prove that $y^\epsilon = o(1)$ in $L^\infty([0, T], V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^1)$.

As we explained in the introduction, we cannot obtain V^3 -estimates on y^ϵ unless we suppose the V^4 -regularity on the limit solution v . In fact, to estimate the V^3 -norm of y^ϵ , one has to take the scalar product of Equation (3.75) with $\Delta^2 y^\epsilon$. When taking this scalar product, one see that $(Q^\epsilon(v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)$ has to be defined, which is only the case when v belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$.

On the other hand, we have obtained two different results of global existence and V^4 -regularity of the solutions of the limit system $(SG2D) - (L_{osc})$ when we have distinguished the case of arbitrary α and the case of small α . In both cases, the V^4 -regularity on the limit solution is obtained when u_0 belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$ and Mf belongs to $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$.

Therefore, it is interesting to consider the case of an arbitrary α and the case of a small α , and we will see that when we restrict the size of α , we can show that $y^\epsilon = o(1)$ in $L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$ without imposing additional regularity on the initial data u_0 .

In the next section, we suppose that the limit solution v belongs to $V^4(\mathbb{T}^3)$ and we begin by performing V^3 -estimates on y^ϵ that are uniform with respect to α .

In what follows, C will denote a constant that does not depend on N , ϵ , α or T .

Lemma 3.5.3. *Let $v \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3))$ and f be given in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ with $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$, then the solution of (3.75)*

satisfies the following inequality :

$$\begin{aligned}
 \partial_t (\|y^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) + \nu \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 &\leq C_0 (\|y^\epsilon\|_{V^2}^4 + \alpha^2 \|y^\epsilon\|_{V^3}^4) \\
 &+ C_0 \|y^\epsilon\|_{V^2}^2 (\|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^4}^2) \\
 &+ C_0 \alpha^2 \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^3}^2 + C_0 (\|Q_N(R^\epsilon)\|_{V^1}^2 + \epsilon^2 \|G_N\|_{V^1}^2)
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

where

$$V_N^\epsilon = (I - \alpha \Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon. \tag{3.77}$$

Proof . As we explained before, taking the scalar product of (3.75) with $\Delta^2 y^\epsilon$, we have

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\partial_t \|y^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) + \nu \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 &+ (Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) \\
 &+ (Q^\epsilon(y^\epsilon, -\epsilon V_N^\epsilon + v), \Delta^2 y^\epsilon) + (Q^\epsilon(-\epsilon V_N^\epsilon + v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) \\
 &= (Q_N(R^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)_{L^2} + \epsilon (G_N, \Delta^2 y^\epsilon)
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

We begin by estimating $(Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)$. In this term a derivative of order four of y^ϵ appears. But using an integration by parts, we can show that this bad term disappears and the order of derivative of y^ϵ is reduced.

Indeed, we have

$$\begin{aligned}
 (Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) &= \left(\mathcal{L}_\alpha \left(\frac{-t}{\epsilon} \right) \mathbb{P}(\text{rot } \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) (y^\epsilon - \alpha \Delta y^\epsilon) \times \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon \right) \\
 &= \left(\mathbb{P}(\text{rot } \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) (y^\epsilon - \alpha \Delta y^\epsilon) \times \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) y^\epsilon), \Delta^2 \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) y^\epsilon \right)
 \end{aligned}$$

Let $\tilde{y}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) y^\epsilon$, then, using Identity (3.57), we obtain

$$\begin{aligned}
 (Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) &= \left(\tilde{y}^\epsilon \cdot \nabla (\tilde{y}^\epsilon - \alpha \Delta \tilde{y}^\epsilon), \Delta^2 \tilde{y}^\epsilon \right) \\
 &+ \sum_{j=1}^3 \left((\tilde{y}_j^\epsilon - \alpha \Delta \tilde{y}_j^\epsilon) \nabla \tilde{y}_j^\epsilon, \Delta^2 \tilde{y}^\epsilon \right)
 \end{aligned}$$

Integrating by parts and using the fact that $\operatorname{div} \tilde{y}^\epsilon = 0$, we see that the term

$$\sum_{l=1}^3 \left(\tilde{y}^\epsilon \cdot \nabla \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon, \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon \right) = 0, \text{ thus, we get}$$

$$\begin{aligned} (Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) &= - \sum_{l=1}^3 \left(\tilde{y}^\epsilon \cdot \nabla \partial_l \tilde{y}^\epsilon + \partial_l \tilde{y}^\epsilon \cdot \nabla (\tilde{y}^\epsilon - \alpha \Delta \tilde{y}^\epsilon), \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon \right) \\ &\quad - \sum_{j,l=1}^3 \left(\partial_l (\tilde{y}_j^\epsilon - \alpha \Delta \tilde{y}_j^\epsilon) \nabla \tilde{y}_j^\epsilon - (\tilde{y}_j^\epsilon - \alpha \Delta \tilde{y}_j^\epsilon) \nabla \partial_l \tilde{y}_j^\epsilon, \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

Applying the Holder inequality and using the continuous injections of $H^1(\mathbb{T}^3)$ into $L^4(\mathbb{T}^3)$ and of $H^2(\mathbb{T}^3)$ into $L^\infty(\mathbb{T}^3)$, we obtain the following bound

$$| (Q^\epsilon(y^\epsilon, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) | \leq C(\|y^\epsilon\|_{V^2}^2 \|y^\epsilon\|_{V^3} + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^3)$$

Now, we give a bound of the term $(Q^\epsilon(y^\epsilon, -\epsilon V_N^\epsilon + v), \Delta^2 y^\epsilon)$.

Using (3.57) and integrating by parts, we see that the term

$$\sum_{l=1}^3 \left(\mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) (-\epsilon V_N^\epsilon + v) \cdot \nabla \partial_l \Delta \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \tilde{y}^\epsilon, \partial_l \Delta \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \tilde{y}^\epsilon \right) = 0.$$

Thus, we can write the following bound

$$\begin{aligned} | (Q^\epsilon(y^\epsilon, -\epsilon V_N^\epsilon + v), \Delta^2 y^\epsilon) | &\leq C(\|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^2} \|y^\epsilon\|_{V^2} \|y^\epsilon\|_{V^3} \\ &\quad + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^3} \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) \end{aligned}$$

Finally, to estimate the term $(Q^\epsilon(-\epsilon V_N^\epsilon + v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)$, we will need the V^4 regularity on the limit solution v . Actually,

$$\begin{aligned} (Q^\epsilon(-\epsilon V_N^\epsilon + v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) &= \\ &\quad \left(\mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \operatorname{rot}(-\epsilon V_N^\epsilon + v - \alpha \Delta(-\epsilon V_N^\epsilon + v)) \times \tilde{y}^\epsilon, \Delta^2 \tilde{y}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

where $\tilde{y}^\epsilon = \mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) y^\epsilon$.

Then, integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} & (Q^\epsilon(-\epsilon V_N^\epsilon + v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon) = \\ & - \sum_{l=1}^3 \left(\mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \partial_l \operatorname{rot} \left(-\epsilon V_N^\epsilon + v - \alpha \Delta(-\epsilon V_N^\epsilon + v) \right) \times \tilde{y}^\epsilon, \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon \right) \\ & - \sum_{l=1}^3 \left(\mathcal{L}_\alpha \left(\frac{t}{\epsilon} \right) \operatorname{rot} \left(-\epsilon V_N^\epsilon + v - \alpha \Delta(-\epsilon V_N^\epsilon + v) \right) \times \partial_l \tilde{y}^\epsilon, \partial_l \Delta \tilde{y}^\epsilon \right) \end{aligned}$$

Therefore, using Sobolev inequalities, we can write the following bound

$$\begin{aligned} |(Q^\epsilon(-\epsilon V_N^\epsilon + v, y^\epsilon), \Delta^2 y^\epsilon)_{L^2}| & \leq C \|y^\epsilon\|_{V^3} (\|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^2} \|y^\epsilon\|_{V^2} \\ & + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^3} \|y^\epsilon\|_{V^3} + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^4} \|y^\epsilon\|_{V^2}) \end{aligned}$$

Collecting all these estimates, and applying the Cauchy-Schwarz inequality, we can write the estimate (3.78) as

$$\begin{aligned} & \partial_t (\|y^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) + \nu \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 \leq C_0 (\|y^\epsilon\|_{V^2}^4 + \alpha^2 \|y^\epsilon\|_{V^3}^4) \\ & + C_0 \|y^\epsilon\|_{V^2}^2 (\|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^4}^2) \\ & + C_0 \alpha^2 \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^3}^2 + C_0 (\|Q_N(R^\epsilon)\|_{V^1}^2 + \epsilon^2 \|G_N\|_{V^1}^2) \end{aligned}$$

so the lemma is proved. □

3.5.2 Global existence

This section is devoted to the proof of Theorems 3.1.3 and 3.1.4 stated in the introduction.

We have already proved in Theorem 3.2.1 that there exists a time T independent of ϵ such that the solution u^ϵ of the system (SG^ϵ) belongs to $L^\infty([0, T], V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2([0, T], V^1(\mathbb{T}^3))$, therefore, y^ϵ exists also on $[0, T]$.

Our goal is to show that $\|y^\epsilon\|_{V^3}$ remains small on its maximal time of existence. We begin by proving the global existence of solutions of System (SG^ϵ) for an arbitrary coefficient α (Theorem 3.1.3) and later, we will explain how to adapt the proof to the case of small α in order to show Theorem 3.1.4.

Case of arbitrary α

Proof . Let f in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ with Mf in $L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$ and $\partial_t f \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{T}^3))$. Now, let v_0 in $V^4(\mathbb{T}^3)$ such that

$$K_0(v_0, f) \exp(C_2 K_0(v_0, f) + C_2 K_1(v_0, f)) \leq \frac{r_0^2}{3},$$

where C_2 is a constant that does not depend on α and where $K_0(v_0, f)$ and $K_1(v_0, f)$ have been defined in (3.41) and (3.42) respectively and where r_0 is the constant in Theorem 3.4.8.

Let η be a small positive number and C_8 a constant such that $C_7 > 1$ (we will precise the choice of η and C_7 later) and let u_0 be a vector in $V^3(\mathbb{T}^3)$ such that

$$\|u_0 - v_0\|_{V^2} + \alpha \|u_0 - v_0\|_{V^3} \leq \frac{\eta}{8C_8}.$$

Then, the limit system (S_0) will be studied with v_0 as initial data. According to Theorem 3.4.8 and Proposition 3.4.8, the limit solution v belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3))$ and Estimate (3.76) of Lemma 3.5.3 holds. Since $y^\epsilon(0) = u_0 - v_0 + \epsilon(Id - \alpha\Delta)^{-1} \tilde{R}_N^\epsilon$, one can find $\epsilon_1(N) > 0$ such that

$$\forall \epsilon \leq \epsilon_1, \|y^\epsilon(0)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(0)\|_{V^3}^2 \leq \frac{\eta}{4C_8}.$$

Thus, by continuity of the solutions, there exists a time $\bar{T}_\epsilon < T_\epsilon^*$ such that

$$\forall 0 \leq t < \bar{T}_\epsilon, \|y^\epsilon(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(t)\|_{V^3}^2 \leq \eta.$$

We will show, by contradiction, that $\bar{T}_\epsilon = +\infty$.

Suppose that $\bar{T}_\epsilon < +\infty$. Therefore,

$$\forall t < \bar{T}_\epsilon, \|y^\epsilon(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(t)\|_{V^3}^2 < \eta$$

and

$$\|y^\epsilon(\bar{T}_\epsilon)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(\bar{T}_\epsilon)\|_{V^3}^2 = \eta.$$

Then, Inequality (3.76) can be written as

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t (\|y^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) + \nu \|y^\epsilon\|_{V^3}^2 \leq C_6 \eta (\|y^\epsilon\|_{V^3}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) \\ & + C_6 (\|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^2}^2 + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^3}^2) \\ & + \alpha^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{V^4}^2 (\|y^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon\|_{V^3}^2) \\ & + C_6 (\|Q_N(R^\epsilon)\|_{V^1}^2 + \epsilon^2 \|G_N\|_{V^1}^2) \end{aligned} \tag{3.79}$$

Integrating in time the above inequality between 0 and \bar{T}^ϵ and applying the Gronwall lemma, we obtain

$$\begin{aligned} & \|y^\epsilon(\bar{T}^\epsilon)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(\bar{T}^\epsilon)\|_{V^3}^2 + \nu \int_0^{\bar{T}^\epsilon} \|y^\epsilon(s)\|_{V^3}^2 ds \leq \left[\|y_0^\epsilon\|_{V^2}^2 + \alpha \|y_0^\epsilon\|_{V^3}^2 \right. \\ & \quad \left. + C_6 (\|Q_N(R^\epsilon)\|_{L_t^2(V^1)}^2 + \epsilon^2 \|G_N\|_{L_t^2(V^1)}^2) \right] \exp\left(C_6 \int_0^{\bar{T}^\epsilon} (\|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^3}^2 + \alpha^2 \|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^4}^2) ds \right) \end{aligned}$$

Estimates (3.44) and (3.64) imply that

$$C_6 \int_{\mathbb{R}^+} (\|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^2}^2 + \alpha \|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^3}^2) ds \leq C_7(N),$$

where $C_7(N)$ is a positive constant that depends on N , $\|\nabla \text{rot } v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } v_0\|_{L^2}^2$ and $\|f\|_{L_t^2(H^1)}$.

On the other hand, we deduce from Estimates (3.45) and (3.66) that

$$C_6 \alpha^2 \int_{\mathbb{R}^+} \|-\epsilon V_N^\epsilon(s) + v(s)\|_{V^4}^2 ds \leq \tilde{C}_7(N),$$

where $\tilde{C}_7(N)$ is a positive constant that depends on N and $\|\Delta \text{rot } v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta \text{rot } v_0\|_{L^2}^2$.

Let

$$C_8 = \exp(C_7 + \tilde{C}_7). \quad (3.80)$$

According to Lemma 3.5.1, $\|Q_N(R^\epsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^1)}$ tends to zero as N goes to infinity. Thus, there exists N big enough such that

$$\|Q_N(R^\epsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^1)} \leq \frac{\eta}{8C_8}.$$

On the other hand, we can find an $\epsilon_2(N)$ small enough so that $\forall \epsilon \leq \epsilon_0$, $\epsilon^2 \|G_N\|_{L^2(\mathbb{R}^+, H^1)} \leq \frac{\eta}{8C_8}$.

All that leads to following inequality

$$\|y^\epsilon(\bar{T}^\epsilon)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(\bar{T}^\epsilon)\|_{V^3}^2 + \nu \int_0^{\bar{T}^\epsilon} \|y^\epsilon(s)\|_{V^3}^2 ds \leq \frac{\eta}{2},$$

which is not possible. Therefore, $\bar{T}_\epsilon = +\infty$ and y^ϵ tends to zero in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3(\mathbb{T}^3))$. Thus, Theorem 3.1.3 is proved. \square

Case of small coefficient α

Proof . In this section, we consider the case of large initial data u_0 in $V^3(\mathbb{T}^3)$ and arbitrary forcing term $f \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^1(\mathbb{T}^3))$ with $Mf \in L^2(\mathbb{R}^+, H_{per}^2(\mathbb{T}^2))$. Then, restricting the size of α , we will show the global existence of solutions of System (SG^ϵ) and we will prove Theorem 3.1.4.

Let $\alpha_0 < 1$ be a small constant that we will precise the choice later and suppose that $\alpha \leq \alpha_0$.

Let us decompose the initial data u_0 into low and high modes by writing

$$u_0 = P_N(u_0) + Q_N(u_0)$$

where

$$P_N(u_0) = \sum_{|n| \leq N} u_n^0 e^{i\tilde{n} \cdot x} \text{ and } Q_N(u_0) = u_0 - P_N(u_0).$$

Now we will study the limit system (S_0) with $P_N(u_0)$ as an initial data since it's very regular, in particular $P_N(u_0) \in V^4(\mathbb{T}^3)$. Then, Theorem 3.4.7 and Proposition 3.4.10 imply that the limit solution v belongs to $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^4(\mathbb{T}^3))$. Since the solution v depends on N , it is natural to understand how the V^3 and V^4 -norms of $v \equiv v(N)$ depends on N . One can notice that

$$\| P_N(u_0) \|_{V^3} \leq \| u_0 \|_{V^3} \tag{3.81}$$

and

$$\| P_N(u_0) \|_{V^4} \leq N \| u_0 \|_{V^3} \tag{3.82}$$

According to Estimates (3.53), (3.64) and Inequality (3.81), one remarks that

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|v(t)\|_{V^3}^2 + \nu \int_0^t \|v(s)\|_{V^3}^2 ds &\leq K_4 (\|u_0\|_{V^2}^2 + \alpha \|u_0\|_{V^3}^2) \\ &+ \|Mf\|_{L_t^2(H^1)}, \end{aligned} \tag{3.83}$$

where $K_4 > 0$ is a constant depending only on $\|Mu_0\|_{V^2}^2 + \alpha \|Mu_0\|_{V^3}^2$ and on $\|Mf\|_{L_t^2(H^1)}$. Thus, the solution v is uniformly bounded in α , in the norm $\|\cdot\|_{V^2} + \sqrt{\alpha} \|\cdot\|_{V^3}$.

It remains to show a uniform bound in N on the norm $\|\cdot\|_{V^3} + \sqrt{\alpha} \|\cdot\|_{V^4}$ of v . In fact, using Estimates (3.45), (3.66) and Inequality (3.82), we obtain

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{V^3}^2 + \alpha \|v(t)\|_{V^4}^2 + \nu \int_0^t \|v(s)\|_{V^4}^2 ds &\leq K_5 (\|u_0\|_{V^3}^2 + \alpha N^2 \|u_0\|_{V^3}^2) \\ &+ \|Mf\|_{L_t^2(H^2)}, \end{aligned} \tag{3.84}$$

where $K_5 > 0$ is a constant depending only on $\|Mu_0\|_{V^2}^2 + \alpha \|Mu_0\|_{V^3}^2$ and on $\|Mf\|_{L_t^2(H^1)}$. Choosing α small enough such that $\alpha N^2 < 1$, we obtain a uniform bound in N on $\|v(t)\|_{V^3} + \sqrt{\alpha} \|v(t)\|_{V^4} + \nu \int_0^t \|v(s)\|_{V^4}^2 ds$.

Let $\eta > 0$ and $C_8 > 1$ be two constants (the choice of η and C_8 will be fixed later). In order to prove that y^ϵ exists globally in time in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3)$, we choose N big enough so that

$$\|w^\epsilon(0)\|_{V^2}^2 + \alpha \|w^\epsilon(0)\|_{V^3}^2 \leq \frac{\eta}{8C_8},$$

where $w^\epsilon(0) = u_0 - P_N(u_0)$.

Then, one can find $\epsilon_1(N) > 0$ such that

$$\forall \epsilon \leq \epsilon_1, \|y^\epsilon(0)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(0)\|_{V^3}^2 \leq \frac{\eta}{4C_8}.$$

By continuity of the solutions, there exists a time $\bar{T}_\epsilon < T_\epsilon^*$ such that

$$\forall 0 \leq t < \bar{T}_\epsilon, \|y^\epsilon(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(t)\|_{V^3}^2 \leq \eta.$$

As in the case of arbitrary α , we will show that $\bar{T}_\epsilon = +\infty$.

Suppose that $\bar{T}_\epsilon < +\infty$. Therefore,

$$\forall t < \bar{T}_\epsilon, \|y^\epsilon(t)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(t)\|_{V^3}^2 < \eta$$

and

$$\|y^\epsilon(\bar{T}_\epsilon)\|_{V^2}^2 + \alpha \|y^\epsilon(\bar{T}_\epsilon)\|_{V^3}^2 = \eta.$$

Thus, Inequality (3.79) is satisfied.

Estimates (3.83) and (3.84) implies that

$$C_6 \|\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, V^2)} + \|\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, V^3)}^2 \leq C_7,$$

$$\text{and } \|\epsilon V_N^\epsilon + v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, V^4)}^2 \leq C_7,$$

where $C_7 \equiv C_7(N)$ is a positive constant depending on N , $\|Mu_0\|_{V^2}^2 + \alpha \|Mu_0\|_{V^3}^2$ and on $\|f\|_{L_t^2(H^1)}$.

Let $C_8 = \exp(2C_7)$. The remaining of the proof follows the same steps as in the case of arbitrary α and we obtain that y^ϵ exists globally in the space $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3) \cap L^2(\mathbb{R}^+, V^3)$. Thus, Theorem 3.1.4 is proved. \square

Chapitre 4

Long-time asymptotics of the second grade fluid equations on \mathbb{R}^2

4.1 Introduction

The classical theory of Newtonian fluids is unable to explain properties observed in some fluids in the nature. Most of such fluids are called non-Newtonian fluids. This is the case, for example, of many polymer solutions and many commonly substances found in the industry.

Several models have been introduced to describe and explain the behavior of non-Newtonian fluids.

Among these models, fluids of differential type introduced by Rivlin-Erickson [48] have attracted much attention from both theoretical and practical points of view.

In this article, we are interested in the study of a special class of non Newtonian fluids of differential type, namely fluids of second grade. Their study was initiated in 1974 by J.E.Dunn and R.L.Fosdick [17] and then by R.L.Fosdick and K.R.Rajakopal [18], [19].

For such fluids, the Cauchy stress tensor T is a polynomial of degree less than 2 in the first two Rivlin-Ericksen kinematical tensors A_1 and A_2 .

$$T = -pI + \nu A_1 + \alpha(A_2 - A_1^2)$$

where p is the pressure field, ν is the viscosity and the tensors A_1 and A_2 are defined through

$$\begin{aligned} A_1 &= (\text{grad } u) + (\text{grad } u)^T, \\ A_2 &= \frac{dA_1}{dt} + A_1(\text{grad } u) + (\text{grad } u)^T A_1 \end{aligned}$$

where u is the velocity and $\frac{d}{dt} = \partial_t + u \cdot \nabla$.

The second grade fluid equations are then given by the following system

$$(SGF) \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) + \text{rot}(u - \alpha \Delta u) \times u &= \nu \Delta u - \nabla p \\ \text{div } u &= 0 \\ u(0) &= u_0 \end{cases}$$

where $u = u(x, t) \in \mathbb{R}^2$ is the velocity field, $p = p(x, t)$ is the pressure field, α is the elasticity, ν is the viscosity and $x \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$.

Here we have used the following notations.

We have identified any two-component vector field $v = (v_1, v_2)^t$ with the three-component field $v = (v_1, v_2, 0)^t$ and denoted $\text{rot } v$ the 3-component vector field given by

$$\text{rot } v = (0, 0, \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)^t.$$

Several authors have been interested in the study of the second grade fluid equations ([7], [16], [15], [20], [38], [44]).

When Ω is a bounded domain in \mathbb{R}^2 , it has been proved that for divergence-free data u_0 in $(H^3(\Omega))^2 \cap (H_0^1(\Omega))^2$, the solution of the system (*SGF*) exists and is unique in $L^\infty(\mathbb{R}^+, (H^3(\Omega))^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, (H^1(\Omega))^2)$ (see [16], [15]). The existence and uniqueness results are the same in the case of periodic conditions, for more details, see [44]. When the equations are considered in the whole space, a similar result is proved [7].

In this paper, we are interested in studying the large time asymptotic behavior of the solution of (*SGF*) in the whole space \mathbb{R}^2 .

One can remark that, when α vanishes, we recover the classical system of the Navier-Stokes equations, for which the asymptotic behavior has been widely studied, see for example [39], [53], [11], [12], [25] and [26], [49].

In [25], the authors used ideas from the theory of dynamical systems in order to determine the long-time behavior of solutions of the Navier-Stokes equations on \mathbb{R}^2 . They showed that small solutions of the corresponding vorticity equation, with non-zero total vorticity, asymptotically approach the Oseen vortex. In their work, they construct finite-dimensional invariant manifolds of these equations, and prove that all solutions in a neighborhood of the origin approach one of these manifolds with a rate that can be computed. Thus, computing the asymptotics of solutions is reduced to the task of determining the asymptotics of the system of ordinary differential equations that result when the original partial differential equation is restricted to the invariant manifold.

This result was improved later in [26], where the authors showed that the Oseen vortices are not only locally stable but also globally stable. In other words, any solution of the two-dimensional vorticity equation whose initial vorticity is integrable will approach one of the Oseen vortices. The proof was based on the construction of a pair of Lyapunov functionals for the rescaled vorticity equation.

Then, in [49], Rodrigues gave an estimation of the time that take the solutions of the two-dimensional vorticity equation to reach a neighborhood of the Oseen vortex, when the initial data are integrable and well localized in space.

He also studied the case of slightly inhomogeneous incompressible fluids and established the asymptotic stability of the Oseen vortices with respect to localized perturbations.

In this paper, we will prove that the solutions of system (SGF) have the same behavior as the solutions of the Navier-Stokes equations, that is, their vorticity converge to an Oseen vortex when the time goes to infinity.

As in the case of the Navier-Stokes equations, we will determine the asymptotic of the solutions of the system (SGF) by studying the evolution of the vorticity, rather than the velocity. This is especially convenient in the two-dimensional case, where the vorticity is a scalar.

In fact, taking the curl of the first equation in (SGF) , and using the identity

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \tilde{u} \times u) = u \cdot \nabla (\operatorname{rot} \tilde{u}),$$

which is true for any divergence free smooth vector field u and \tilde{u} in \mathbb{R}^2 , we find the following equation satisfied by the vorticity $w = \operatorname{rot} u$

$$\partial_t(w - \alpha \Delta w) - \nu \Delta w + u \cdot \nabla (w - \alpha \Delta w) = 0 \quad (4.1)$$

One can then recover the solution $u(x, t)$ of (SGF) via the Biot-Savart law (see Section 4.2).

Another idea that helps to understand the long-time asymptotic of (SGF) is the introduction of scaling variables that were intensively used in studying the long-time behavior of parabolic equations, in particular to prove convergence to self-similar solutions (see for example [25], [26]) .

This paper is organized as follows. In the next section, we introduce the weighted Sobolev spaces that we use in our analysis. Then we will state the Biot-Savart law, which will help us to obtain some useful estimates for the velocity in terms of the vorticity. Section 4.3 is devoted to the proof of local existence of the solution of the vorticity equation, in which we have added a regularizing term for a reason which will be explained later. In section 4.4, we introduce the scaling variables, give the rescaled equations and state the main theorem which describes the first order asymptotic of small solutions of the regularized equation. Section 4.5 is devoted to the proof of this main theorem by introducing several functionals and deriving energy estimates. In the last section, we prove that the solution of the regularized equation admits a limit which is the solution of the original system (without regularizing

term). Using the energy estimates and the asymptotic behavior obtained in Section 4.5, we show that this limiting solution has the same rate of decay as the one of the regularized equation.

4.2 Preliminaries

In order to derive the long-time asymptotic of the solutions, we will work in weighted Sobolev spaces. For any $m \geq 0$, we define the Hilbert space $L^2(m)$ by

$$L^2(m) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \ / \ \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f|^2 d\xi < \infty\} \quad (4.2)$$

We note

$$\|f\|_{L^2(m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^m |f|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

If $m > 1$, $L^2(m)$ is embedded into $L^1(\mathbb{R}^2)$. We denote by $L_0^2(m)$ the closed subspace of $L^2(m)$ given by

$$L_0^2(m) = \{f \in L^2(m) / \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) d\xi = 0\}$$

We also define the higher order Hilbert spaces

$$H^1(m) = \{f \in L^2(m) / \partial_i f \in L^2(m), \ i = 1, 2\}$$

$$H^2(m) = \{f \in H^1(m) / \partial_i f \in H^1(m), \ i = 1, 2\}$$

Let

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ for all } p \geq 1.$$

As we explained in the introduction, our approach consists in first studying the behavior of the solutions of the vorticity equation (4.1), and then to derive information about the solutions of the system (SGF).

For this reason, we begin our study by recalling the relationship between the velocity field u and the associated vorticity w . In two dimensions, the velocity field u is defined in terms of the vorticity via the Biot-Savart law

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} w_3(y) dy \quad (4.3)$$

where $x^\perp = (-x_2, x_1)^T$ and $w = (0, 0, w_3)$.

The following lemma collects useful estimates for the velocity u in terms of the vorticity w (see [25], [49]).

Lemma 4.2.1. *Let u be the velocity field obtained from w via the Biot-Savart law (4.3).*

(a) *Assume that $1 < p < 2 < q < \infty$ and $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$. If $w \in L^p(\mathbb{R}^2)$, then $u \in L^q(\mathbb{R}^2)^2$, and there exists a positive constant C_p such that*

$$\|u\|_{L^q} \leq C_p \|w\|_{L^p}.$$

(b) *Assume that $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$ and define $\lambda \in (0, 1)$ by the relation $\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{q}$. If $w \in L^p(\mathbb{R}^2) \cap L^q(\mathbb{R}^2)$, then $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)^2$, and there exists $C > 0$ such that*

$$\|u\|_\infty \leq C \|w\|_{L^p}^\lambda \cdot \|w\|_{L^q}^{1-\lambda}.$$

(c) *Assume that $1 < p < \infty$. If $w \in L^p(\mathbb{R}^2)$, then $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^2)^4$, and there exists a positive constant \tilde{C}_p such that*

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq \tilde{C}_p \|w\|_{L^p}.$$

(d) *Let $s \in \mathbb{R}$ and $J = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}$.*

If $J^{s-1}w \in L^2(\mathbb{R}^2)$, then $J^s u \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$, and there exists a positive constant C such that

$$\|J^s u\|_{L^2} \leq C \|J^{s-1}w\|_{L^2}.$$

In addition, $\operatorname{div} u = 0$ and $\operatorname{rot} u = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 = w$.

For the proof of (a), (b) and (c), see [25]. For the proof of (d), it is sufficient to write the expression of the Biot-Savart law in Fourier variables.

$$\hat{u}(\eta) = \frac{i\eta^\perp}{|\eta|^2} \hat{w}(\eta).$$

4.3 Local existence results for the regularized vorticity equation

We begin by proving a result of local existence of the solution of Equation (4.1) in weighted Sobolev spaces. Since the equation contains a nonlinearity

that involves derivatives of order three, we cannot directly use the classical method of semi-group to obtain local existence.

In order to overcome this difficulty, we will add the smoothing term $\epsilon\Delta^2$ in the equation (4.1) and study the locally well-posedness in the space $H^2(m)$, $m \geq 0$, of the equation

$$\begin{aligned} \partial_t(w_\epsilon - \alpha\Delta w_\epsilon) + \epsilon\Delta^2 w_\epsilon - \nu\Delta w_\epsilon + u_\epsilon \cdot \nabla(w_\epsilon - \alpha\Delta w_\epsilon) &= 0 \\ w_\epsilon(0) &= w_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Theorem 4.3.1. *Let $\epsilon > 0$. There exists $t_{max} > 0$ such that, for all $w_0 \in H^2(m)$, $m \geq 0$, Equation (4.4) has a unique solution w_ϵ in the space $C^0([0, t_{max}], H^2(m)) \cap C^1((0, t_{max}], L^2(m))$, with $w_\epsilon(0) = w_0$.*

Proof . Let β be a small positive constant (we will precise later the choice of β). In order to prove the local existence of Equation (4.4), we introduce the new variable

$$X = \beta x, \text{ and } w_\epsilon(x, t) = s_\epsilon(\beta x, t),$$

and we will show the local existence of the equation satisfied by s_ϵ . We will see, in the proof, that this change of variable allows us to avoid the restriction of the size of α .

The equation satisfied by s_ϵ is given by

$$\partial_t(s_\epsilon - \alpha\beta^2\Delta_X s_\epsilon) - \nu\beta^2\Delta_X s_\epsilon + \epsilon\beta^4\Delta_X s_\epsilon + \beta u_\epsilon \cdot \nabla_X(s_\epsilon - \alpha\beta^2\Delta_X s_\epsilon) = 0 \quad (4.5)$$

Let $q(X) = (1 + |X|^2)^{m/2}$, and $z_\epsilon(t, X) = q(X)s_\epsilon(X, t)$.

Then $s_\epsilon \in C^0([0, t_{max}], H^2(m)) \cap C^1((0, t_{max}], L^2(m))$ is a solution of Equation (4.5) if and only if the function $z_\epsilon \in C^0([0, t_{max}], H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1([0, t_{max}], L^2(\mathbb{R}^2))$ is a solution of the following equations

$$\begin{aligned} \partial_t(z_\epsilon - \alpha\beta^2\Delta_X z_\epsilon - \alpha\beta^2q\Delta_X(q^{-1})z_\epsilon - 2\alpha\beta^2q\nabla_X(q^{-1})\nabla_X z_\epsilon) + \epsilon\beta^4\Delta_X^2 z_\epsilon \\ = P(z_\epsilon) \\ z_\epsilon(0) = q(X)w_0(X) = z_0 \in H^2(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

where $P(z_\epsilon) = \nu\beta^2\Delta_X z_\epsilon + q(X) \left[\nu\beta^2\Delta_X(q^{-1})z_\epsilon + 2\nu\beta^2\nabla_X(q^{-1}) \cdot \nabla_X z_\epsilon \right.$

$$\left. - \beta(u_\epsilon \cdot \nabla_X)(q^{-1}z_\epsilon) + \alpha\beta^3(u_\epsilon \cdot \nabla_X) \left(\Delta_X(q^{-1})z_\epsilon + 2\nabla_X(q^{-1}) \cdot \nabla_X(z_\epsilon) \right) \right.$$

$$\left. + \alpha\beta^3(u_\epsilon \cdot \nabla_X)(q^{-1}\Delta_X z_\epsilon) - \epsilon\beta^4\Delta_X \left(\Delta_X(q^{-1})z_\epsilon + 2\nabla_X(q^{-1}) \cdot \nabla_X z_\epsilon \right) \right.$$

$$- \epsilon \beta^4 \left(\Delta_X(q^{-1}) \Delta_X z_\epsilon + 2 \nabla_X(q^{-1}) \cdot \nabla_X \Delta_X z_\epsilon \right)].$$

Let A be the operator defined from $H^2(\mathbb{R}^2)$ into $L^2(\mathbb{R}^2)$ and given by

$$A = \alpha \beta^2 \Delta + \alpha \beta^2 q \Delta(q^{-1}).$$

If we suppose that β is small enough, then $Id - A$ is invertible from $L^2(\mathbb{R}^2)$ into $H^2(\mathbb{R}^2)$.

Indeed, let $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ and consider the following problem

Find $u \in H^2(\mathbb{R}^2)$ such that

$$(Id - A)u = f \tag{4.7}$$

Let a be the bilinear form given by

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^2} u(X) \cdot v(X) dX + \alpha \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(X) \cdot \nabla v(X) dX \\ &\quad - \alpha \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} q \Delta(q^{-1}) u(X) v(X) dX, \quad \forall u, v \in H^1(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Then, $\forall u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, we have

$$\begin{aligned} a(u, u) &\geq \int_{\mathbb{R}^2} |u(X)|^2 dX + \alpha \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(X)|^2 dX \\ &\quad - \alpha \beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} |q \Delta(q^{-1})| |u(X)|^2 dx \end{aligned}$$

Let us note that $|q \Delta(q^{-1})| \leq C_0$, where $C_0 > 0$ is a constant.

Thus,

$$a(u, u) \geq (1 - \alpha \beta^2 C_0) \|u\|_{L^2}^2 + \alpha \beta^2 \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Supposing that β is small enough such that $1 - \alpha \beta^2 C_0 > 0$, we obtain from the Lax-Milgram theorem that there exists a unique solution $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ for (4.7).

Since f belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$, we deduce from a regularity theorem that u belongs to $H^2(\mathbb{R}^2)$ and

$$\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$$

where $C > 0$ is a constant.

On the other hand, if β is small enough, we can show by the same way that

$(Id - A - \alpha\beta^2 q\nabla(q^{-1})\nabla)^{-1}$ exists and is defined from $L^2(\mathbb{R}^2)$ into $H^2(\mathbb{R}^2)$. In fact, remarking that $|q\nabla(q^{-1})| \leq C_1$, where $C_1 > 0$, we have

$$a(u, u) - \alpha\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} q\nabla(q^{-1})\nabla u(X)u(X)dX \geq (1 - \alpha\beta^2 C_0)\|u\|_{L^2}^2 + \alpha\beta^2\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \alpha\beta^2 C_1\|\nabla u\|_{L^2}\|u\|_{L^2}$$

Then, applying Young inequality and supposing that $1 - \alpha\beta^2 C_0 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 C_1^2 > 0$, we obtain,

$$a(u, u) - \alpha\beta^2 \int_{\mathbb{R}^2} q\nabla(q^{-1})\nabla u(x)u(x)dx \geq (1 - \alpha\beta^2 C_0 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2 C_1^2)\|u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\alpha\beta^2\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Then, using the Lax-Milgram theorem, we can show that the operator $(Id - A - \alpha\beta^2 q\nabla(q^{-1})\nabla)$ is invertible.

Now, let $B = -\alpha\beta^2 q\nabla(q^{-1})\nabla$.

Then, Equation(4.6) can be written as

$$\partial_t z_\epsilon + \epsilon(I - A + B)^{-1}\Delta^2 z_\epsilon = (I - A + B)^{-1} P(z_\epsilon) = \tilde{P}(z_\epsilon) \quad (4.8)$$

The operator $(I - A + B)^{-1}\Delta^2$ can be defined from $H^2(\mathbb{R}^2)$ into $L^2(\mathbb{R}^2)$ and can be written as

$$(I - A + B)^{-1}\Delta^2 = (I - A)^{-1}\Delta^2 - (I - A + B)^{-1}B(I - A)^{-1}\Delta^2$$

The operator $(I - A)^{-1}\Delta^2$ defined from $H^2(\mathbb{R}^2)$ into $L^2(\mathbb{R}^2)$ is self-adjoint and positive, thus, $-(I - A)^{-1}\Delta^2$ is the generator of an analytic semigroup in $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Let

$$R = -(I - A + B)^{-1}B(I - A)^{-1}\Delta^2 : H^1(\mathbb{R}^2) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^2).$$

Then, for all $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$\|Ru\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^1}.$$

Therefore, $(I - A)^{-1}\Delta^2 + R$ is the generator of an analytic semigroup in $L^2(\mathbb{R}^2)$ (see [45] Corollary 2.2 page 81).

Since $\tilde{P}(z_\epsilon)$ is a locally lipschitz continuous mapping from $H^1(\mathbb{R}^2)$ to $L^2(\mathbb{R}^2)$, we deduce, by a classical result [45], [13], that there exists a time $t_{max} > 0$ such that, for all $z_0 \in H^2(\mathbb{R}^2)$, Equation (4.6) has a unique classical solution $z_\epsilon \in C^0([0, t_{max}], H^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1((0, t_{max}], L^2(\mathbb{R}^2))$ satisfying $z_\epsilon(0) = z_0$. Therefore, we have proved the local existence and uniqueness of solutions of Equation (4.5) and thus, of the regularized vorticity equation (4.4). \square

To complete the proof of the local existence of the solution w of Equation (4.1), we need to take the limit of w_ϵ when ϵ tends to zero, but we do not know how to prove that the existence time of w_ϵ is independent of ϵ . Therefore in the next sections, the study of the asymptotic behavior will be done on w_ϵ . We will establish energy estimates on w_ϵ , which are uniform in ϵ . Then we pass to the limit when ϵ tends to zero and prove that the limit of w_ϵ is the solution of Equation (4.1) and satisfies the same energy estimates as w_ϵ . Taking $\epsilon = 0$ in all the above estimates, we find that the limit solution w has the same rate of time decay as w_ϵ .

In the following sections, we simply denote by $w(x, t)$ the solution $w_\epsilon(x, t)$ of the regularized vorticity equation (4.4).

4.4 Scaling variables

The main idea in our analysis of the long-time asymptotics of the equation (4.4) is based on rewriting this equation in terms of scaling variables. Let $T > 0$ be a fixed time (we will precise later the choice of T). We introduce the new variables :

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}}, \quad \tau = \log(t+T) \quad (4.9)$$

and we define, as in [25], [26], new functions $W(\xi, \tau)$ and $V(\xi, \tau)$ by

$$w(x, t) = \frac{1}{t+T} W\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}}, \log(t+T)\right) \quad (4.10)$$

and

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t+T}} V\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}}, \log(t+T)\right) \quad (4.11)$$

where $w(x, t) \equiv w_\epsilon(x, t)$ is a solution of (4.4) and $u(x, t)$ is the corresponding velocity field.

We remark that $t = 0$ corresponds to $\tau = \log T$.

Let

$$\tau_0 = \log T, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\nu T}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\nu^2 T}.$$

Then, $W(\xi, \tau)$ satisfies the following system

$$\begin{aligned} \partial_\tau(W - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W) - \mathcal{L}W + V \cdot \nabla_\xi(W - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W) + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}\Delta_\xi^2 W \\ + \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla_\xi \Delta_\xi W = 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$W(\xi, \tau_0) = W_0(\xi) = Tw_0(x)$$

where

$$\mathcal{L}W = \Delta W + \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla W + W$$

and according to the Biot-Savart law,

$$V(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(\xi - \eta)^\perp}{|\xi - \eta|^2} W_3(\eta, \tau) d\eta$$

where $W = (0, 0, W_3)$.

We point out that Equation (4.12) preserves the total mass of W . Indeed, integrating (4.12) over \mathbb{R}^2 , and using the fact that $\operatorname{div} V = 0$, we obtain

$$\int_{\mathbb{R}^2} W(\xi, \tau) d\xi = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi) d\xi. \quad (4.13)$$

The operator \mathcal{L}

Let us now explain the motivation for introducing the scaling variables.

If one looks at the spectrum of the operator \mathcal{L} acting on $L^2(m)$, one finds that it consists of a sequence of eigenvalues

$$\sigma_d = \left\{ -\frac{k}{2} \mid k = 0, 1, 2, \dots \right\}$$

and continuous spectrum

$$\sigma_c = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) \leq -\frac{m-1}{2} \right\}$$

(for more details, see Appendix A in [25]).

Choosing m large enough, we move the continuous spectrum to the left as much as wanted.

The eigenvectors corresponding to the isolated eigenvalues can be computed

explicitly and are rapidly decaying at infinity (see Appendix B in [25]).

In our study, we will consider the behavior of small solutions of (4.12) in the space $L^2(m)$ with $m = 2$. Actually, the operator \mathcal{L} has a simple isolated eigenvalue $\lambda_0 = 0$ in $L^2(2)$, with eigenfunction

$$G(\xi) = \frac{1}{4\pi} e^{-|\xi|^2/4}, \quad \xi \in \mathbb{R}^2. \quad (4.14)$$

For any $\beta \in \mathbb{R}$,

$$W(\xi) = \beta G(\xi) \quad (4.15)$$

is called the Oseen vortex. The corresponding velocity field V^G (such that $\text{rot } V^G = G$) is given by

$$V^G(\xi) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - e^{-|\xi|^2/4}}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Remark 4.4.1. *It is clear that $\xi \perp V^G$, therefore*

$$V^G \cdot \nabla G(\xi) = 0 \quad (4.17)$$

and

$$V^G \cdot \nabla \Delta G(\xi) = 0 \quad (4.18)$$

As a consequence of the equality (4.17), the Oseen vortex defined by (4.15) is a stationary solution of the equation

$$\partial_\tau W - \mathcal{L}W + V \cdot \nabla W = 0 \quad (4.19)$$

where V is the velocity field corresponding to the vorticity W .

Note that this equation is the vorticity of the Navier-Stokes equations in two dimension.

Remark 4.4.2. *We remark that $|V^G| \sim |\xi|^{-1}$ as $|\xi| \rightarrow +\infty$ so that $V^G \in L^q(\mathbb{R}^2)^2$, $\forall q > 2$.*

Since we are interested in studying the behavior of the solution of (4.12) with initial data W_0 near the Oseen vortex in the space $H^2(2)$, it is convenient to introduce the following change of functions :

$$W(\xi, \tau) = \beta G(\xi) + f(\xi, \tau), \quad (4.20)$$

where, due to the conservation (4.13), of mass property,

$$\beta(\tau) \equiv \beta(0) = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi) d\xi = \beta. \quad (4.21)$$

Thus, $f(\xi, \tau)$ belongs to $L_0^2(2)$ for any $\tau \geq 0$, where $L_0^2(m)$, $m > 1$, is defined in Section 2.

Taking into account (4.17) and (4.18), $f(\xi, \tau)$ satisfies the following equation

$$\begin{aligned} & \partial_\tau(f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) - \mathcal{L}f + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}\Delta^2 f + \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla \Delta f \\ & + K_f \cdot \nabla(f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) + \beta V^G \cdot \nabla(f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) + \beta K_f \cdot \nabla(G - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G) \\ & + \bar{\epsilon}\beta e^{-2\tau}\Delta^2 G + \beta \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G + \beta \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla \Delta G = 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

where $K_f(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) - \beta V^G$.

In what follows, we will establish various energy estimates for $f(\xi, \tau)$ in the spaces $H^2(2)$. So as a first step, it is necessary to control the L^2 -norm of f . Unfortunately, one cannot obtain good estimates on f in the space $L^2(\mathbb{R}^2)$. Indeed, if (\cdot, \cdot) denotes the scalar product in $L^2(\mathbb{R}^2)$, then we have,

$$(-\mathcal{L}f, f) = \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2.$$

In the paper [24] (where the asymptotic behavior was studied in the one-dimensional space), the authors considered the primitive of f , because it has a better decay than f .

In our study, since we are in the two-dimensional case, we will introduce the function

$$F(\xi, \tau) = (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f(\xi, \tau) \quad (4.23)$$

Before continuing our analysis, we give the following lemma that will be useful later.

Lemma 4.4.3. *Let f belong to $L^2(2)$ such that $\int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) d\xi = 0$, then $(-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$ and we have*

$$\left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f \right\|_{L^2} \leq C \|f\|_{L^2(2)} \quad (4.24)$$

Proof . Let $P(f)$ be the Fourier transform of f given by

$$P(f)(k) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) \exp(-ik \cdot \xi) d\xi. \quad (4.25)$$

Since $P(f)(0) = 0$, we can write

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|^3} |P(f)(k)|^2 dk \\ &\leq \int_{|k| \leq 1} \frac{1}{|k|^3} |P(f)(k)|^2 dk + \int_{|k| \geq 1} |P(f)(k)|^2 dk \\ &\leq \int_0^1 \int_{|k| \leq 1} \frac{1}{|k|} |\nabla P(f)(sk)|^2 dk ds + \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Applying Holder's inequality on the first term in the inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f \right\|_{L^2}^2 &\leq \int_0^1 \left(\int_{|k| \leq 1} |\nabla P(f)(sk)|^6 dk \right)^{\frac{1}{3}} \left(\int_{|k| \leq 1} \frac{1}{|k|^{\frac{3}{2}}} dk \right)^{\frac{2}{3}} ds \\ &\quad + \|f\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\nabla P(f)\|_{L^6}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|\nabla P(f)\|_{H^1}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f \right\|_{L^2}^2 \leq C \|(1 + |\xi|^2) f\|_{L^2}^2 \leq C \|f\|_{L^2(2)}^2$$

□

Lemma 4.4.4. *Let F be given by (4.23). We have*

$$((-\Delta)^{-\frac{3}{4}}(\xi \cdot \nabla f)) = -\frac{3}{2}F + \xi \cdot \nabla F$$

and

$$(-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \mathcal{L}f = \Delta F + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla F + \frac{1}{4} F.$$

Proof . Using the Fourier transformation and integrating by parts, we can write

$$\begin{aligned}
 P((-\Delta)^{-\frac{3}{4}}(\xi \cdot \nabla f))(k) &= -2P((-\Delta)^{-\frac{3}{4}}f)(k) \\
 &\quad + \frac{i}{|k|^{\frac{3}{2}}}k_i \int_{\mathbb{R}^2} \xi_i f(\xi) \exp(-ik \cdot \xi) d\xi \\
 &= -2P((-\Delta)^{-\frac{3}{4}}f)(k) \\
 &\quad - \frac{k_i}{|k|^{\frac{3}{2}}} \partial_{k_i} \int_{\mathbb{R}^2} f(\xi) \exp(-ik \cdot \xi) d\xi \\
 &= -\frac{3}{2}P((-\Delta)^{-\frac{3}{4}}f)(k) + P(\xi \cdot \nabla (-\Delta)^{-\frac{3}{4}}f)(k)
 \end{aligned}$$

Thus,

$$(-\Delta)^{-\frac{3}{4}}\mathcal{L}f = \Delta F + \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla F + \frac{1}{4}F.$$

□

Let us remark that

$$\left(-(-\Delta)^{-\frac{3}{4}}\mathcal{L}f, F \right) = \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\|F\|_{L^2}^2,$$

which will allow us to obtain good L^2 -estimates on F .

Using Lemma , we can write the equation satisfied by F as follows

$$\begin{aligned}
 &\partial_\tau(F - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta F) - \Delta F - \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla F - \frac{1}{4}F + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}\Delta^2 F + \frac{\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau}\Delta F \\
 &+ \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla \Delta F + (-\Delta)^{-\frac{3}{4}}\left((K_f + \beta V_G) \cdot \nabla \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}}F + \bar{\alpha}e^{-\tau}(-\Delta)^{\frac{7}{4}}F \right) \right) \\
 &+ \beta(-\Delta)^{-\frac{3}{4}}\left(K_f \cdot \nabla (G - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G) \right) \\
 &+ \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla (-\Delta)^{\frac{1}{4}}G + \bar{\epsilon}\beta e^{-2\tau}(-\Delta)^{\frac{5}{4}}G + \frac{\bar{\alpha}\beta}{4}e^{-\tau}(-\Delta)^{\frac{1}{4}}G = 0
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Theorem 4.4.5. *Let $\nu > 0$ and $T > 0$ a fixed time. Then, there exists a positive constant γ_0 such that for all W_0 in $H^2(2)$ satisfying*

$$\|W_0\|_{H^1}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau_0} \|\Delta W_0\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|W_0\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau_0} \|\xi\|^2 \|\Delta W_0\|_{L^2}^2 \leq \gamma_0, \quad (4.27)$$

where $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\nu T}$ and $\tau_0 = \log T$, Equation (4.12) has a unique solution $W(\tau) \in C^0([\tau_0, +\infty[, H^2(2))$ satisfying $W(\tau_0) = W_0$. Moreover, the following inequality is satisfied, for all $\tau \geq \tau_0$,

$$\|(1 - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta)(W(\tau) - \beta G)\|_{L^2(2)}^2 \leq Ce^{-\theta\tau}$$

where $C > 0$ is a constant, $0 < \theta < \frac{1}{2}$, $\beta = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi)d\xi$ and G is the Oseen vortex defined by (4.15).

This result can be written in the unscaled variables (x, t) .

Let

$$\Omega(x, t) = \frac{1}{t+T} G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}}\right) \quad (4.28)$$

and

$$u^\Omega(x, t) = \sqrt{\frac{\nu}{t+T}} V^G\left(\frac{x}{\sqrt{\nu(t+T)}}\right). \quad (4.29)$$

Thus, Ω is the solution of $\partial_t \Omega - \nu \Delta \Omega + u^\Omega \cdot \nabla \Omega = 0$, when u^Ω is the associated velocity field. From Theorem 4.4.5, we deduce the following result.

Corollary 4.4.6. *Let $\nu > 0$ and $T > 0$ a fixed time. Then, there exist a positive constant γ_1 such that for all w_0 in $H^2(2)$ satisfying*

$$\|w_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta w_0\|_{L^2}^2 + \|x^2 w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|x^2 \Delta w_0\|_{L^2}^2 \leq \gamma_1,$$

then the solution $w(x, t)$ of Equation 4.4 satisfies, for all $t \geq 0$,

$$\left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right) (w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^p} \leq \frac{C_p}{(T+t)^{\frac{\theta}{2} + 1 - \frac{1}{p}}}, \quad 1 \leq p \leq 2, \quad (4.30)$$

$$\left\| x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right) (w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^2} \leq \frac{C}{(T+t)^{\frac{\theta}{2} + 1}}$$

where $0 < \theta < 1/2$ and $C > 0$ and $C_p > 0$ are two constants.

If $u(x, t)$ is the velocity field obtained from $w(x, t)$ via the Biot-Savart law, then

$$\left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right) (u(t) - \beta u^\Omega) \right\|_{L^q} \leq \frac{C_q}{(1+t)^{\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{q}}}, \quad 1 < q < \infty \quad (4.31)$$

where $0 < \theta < 1/2$ and $C_q > 0$ is a constant.

4.5 Asymptotic behavior of solutions

This section is devoted to the proof of Theorem 4.4.5 which describes the asymptotics of small solutions of (4.1) as the time tends to infinity.

First, we will establish energy estimates of the solutions in the space $L^2(2)$. Next, using these estimates, we will prove the global existence of solutions of (4.1) and describe their behavior when the time tends to infinity.

For this purpose, let δ_0 be a positive constant (that will be fixed later) and let $0 < \delta \leq \delta_0$. We also assume that, for some $\tau_0 < \tau_1 < \hat{\tau}$, where $\hat{\tau} = \log(T + t_{\max})$, we are given a solution $f \in C([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ of Equation (4.22) satisfying the following bound

$$|\beta|^2 + \|f(\tau)\|_{H^1}^2 + \|\xi^2 f(\tau)\|_{L^2}^2 < \delta, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1 \quad (4.32)$$

where β is given by (4.21).

Let T be big enough (we will precise the choice of T later).

Our aim is to control the behavior of the solution f on the time interval $[\tau_0, \tau_1]$, using energy functionals.

4.5.1 Energy estimates in $L^2(\mathbb{R}^2)$

Estimates on F

Let F be given by (4.23). We introduce our first functional $E_0(\tau)$ given by

$$E_0(\tau) = \frac{1}{2} (\|F(\tau)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\nabla F(\tau)\|_{L^2}^2) \quad (4.33)$$

In order to establish a good decay rate of E_0 , we will use the following auxiliary lemma.

Lemma 4.5.1. *Let h belongs to $L^2(1)$, then $(-\Delta)^{-\frac{1}{4}}h$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$ and we have*

$$\left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} h \right\|_{L^2} \leq C \|h\|_{L^2(1)}$$

Proof . Using the Fourier transformation, we can write

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} h \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|} |P(h)(k)|^2 dk \\ &\leq \int_{|k| \leq 1} \frac{1}{|k|} |P(h)(k)|^2 dk + \int_{|k| \geq 1} |P(h)(k)|^2 dk \end{aligned}$$

On one hand, the second term in this inequality can be bounded $\|h\|_{L^2}^2$. On the other hand, applying Holder's inequality on the first term in the inequality, we obtain

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} h \right\|_{L^2}^2 &\leq \|P(h)\|_{L^6}^2 \left(\int_{|k| \leq 1} \frac{1}{|k|^{\frac{3}{2}}} dk \right)^{\frac{2}{3}} + \|h\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|P(h)\|_{H^1}^2 + \|h\|_{L^2}^2 \\ &\leq C \|(1 + |\xi|)h\|_{L^2}^2 \leq C \|h\|_{L^2(1)}^2 \end{aligned}$$

□

Remark 4.5.2. Using the Fourier transform, it is easy to remark that

$$\left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \partial_i f \right\|_{L^2} \leq \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} f \right\|_{L^2}, \quad i = 1, 2.$$

In fact, we have,

$$\begin{aligned} \left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \partial_i f \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|k_i|^2}{|k|^3} |P(f)(k)|^2 dk \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|k|} |P(f)(k)|^2 dk \\ &= \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} f \right\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Now, we give the following lemma for the functional E_0 .

Lemma 4.5.3. Assume that $f \in L^\infty([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ is a solution of (4.22) satisfying the bound (4.32). Then, there exists two constants $C_0 > 0$ and

$0 < \theta < \frac{1}{2}$ such that for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$,

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau E_0(\tau) + \theta E_0(\tau) + \left(1 + \frac{3\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau} - \frac{\theta\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}\left(\frac{3}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{-2\tau} \|\Delta F\|_{L^2}^2 \\
 & \leq C_0 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + C_0 |\beta|^2 \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\
 & \quad + C_0(\delta + |\beta|^2)(\|f\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2) \\
 & \quad + C_0(\delta + |\beta|^2)\bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} (\|\Delta f\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|\Delta f\|_{L^2}^2)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

Proof . In order to estimate the L^2 -norm of F , we take the scalar product in $L^2(\mathbb{R}^2)$ of Equation (4.26) with F . We obtain

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau E_0(\tau) + \frac{1}{4} \|F\|_{L^2}^2 + \left(1 - \frac{\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau}\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} \left(\xi \cdot \nabla \Delta F, F\right) \\
 & + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\Delta F\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\alpha}\beta}{2}e^{-\tau} \left(\xi \cdot \nabla (-\Delta)^{\frac{1}{4}} G, F\right) + \bar{\epsilon}\beta e^{-2\tau} \left((-\Delta)^{\frac{5}{4}} G, F\right) \\
 & + \frac{\bar{\alpha}\beta}{4}e^{-\tau} \left((-\Delta)^{\frac{1}{4}} G, F\right) + I_1 + I_2 + I_3 = 0
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

where

$$I_1 = \left((-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \left(K_f \cdot \nabla \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F + \bar{\alpha}e^{-\tau} (-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right), F \right), \tag{4.36}$$

$$I_2 = \beta \left((-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \left(K_f \cdot \nabla (G - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta G) \right) \right), F \right), \tag{4.37}$$

$$I_3 = \beta \left((-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \left(V^G \cdot \nabla \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F + \bar{\alpha}e^{-\tau} (-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right) \right), F \right). \tag{4.38}$$

Integrating by parts several times, we obtain

$$\begin{aligned}
 \left(\xi \cdot \nabla \Delta F, F \right) &= -2 \int_{\mathbb{R}^2} \Delta F \cdot F d\xi - \int_{\mathbb{R}^2} \xi \cdot \nabla F \cdot \Delta F d\xi \\
 &= 2 \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} \xi \cdot \nabla \partial_k F \cdot \partial_k F d\xi + \sum_{k=1}^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\partial_k F|^2 d\xi \\
 &= 2 \|\nabla F\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{4.39}$$

Now, we estimate the following terms

$$\left(\xi \cdot \nabla (-\Delta)^{\frac{1}{4}} G, F \right) \leq \left\| \left| \xi \right| \nabla (-\Delta)^{\frac{1}{4}} G \right\|_{L^2} \|F\|_{L^2} \leq C \|F\|_{L^2}, \quad (4.40)$$

$$\left((-\Delta)^{\frac{1}{4}} G, F \right) \leq \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{4}} G \right\|_{L^2} \|F\|_{L^2} \leq C \|F\|_{L^2}, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \left((-\Delta)^{\frac{5}{4}} G, F \right) &= - \left((-\Delta)^{\frac{1}{4}} G, \Delta F \right) \leq \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{4}} G \right\|_{L^2} \|\Delta F\|_{L^2} \\ &\leq C \|\Delta F\|_{L^2}. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Next, we bound the term I_1 . Using the fact that $\operatorname{div} K_f = 0$, we can write

$$I_1 = \left(\sum_{i=1}^2 (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \partial_i \left(K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F + \bar{\alpha} e^{-\tau} (-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right), F \right)$$

where K_f^i denotes the i^{th} component of K_f .

Therefore, applying Holder's inequality and using Lemma 4.5.1, we obtain

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|F\|_{L^2} \sum_{i=1}^2 \left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \partial_i \left(K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F \right) \right) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|F\|_{L^2} \sum_{i=1}^2 \left\| (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} \partial_i \left(K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq \|F\|_{L^2} \sum_{i=1}^2 \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} \left(K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F \right) \right) \right\|_{L^2} \\ &\quad + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|F\|_{L^2} \sum_{i=1}^2 \left\| (-\Delta)^{-\frac{1}{4}} \left(K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right) \right\|_{L^2} \\ &\leq C \|F\|_{L^2} \sum_{i=1}^2 \left(\left\| K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{3}{4}} F \right) \right\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha} e^{-\tau} \left\| K_f^i \left((-\Delta)^{\frac{7}{4}} F \right) \right\|_{L^2(1)} \right) \\ &\leq C \|F\|_{L^2} \|K_f\|_{L^\infty} \left(\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)} \right) \end{aligned}$$

Using Lemma 4.2.1, part (b), with $\lambda = \frac{1}{2}$, $p = \frac{6}{5}$, $q = 6$ and the fact that $H^1(\mathbb{R}^2)$ and $L^2(2)$ are continuously embedded into $L^6(\mathbb{R}^2)$ and $L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^2)$

respectively, we obtain

$$|I_1| \leq C \|F\|_{L^2} \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} (\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)})$$

Using the bound (4.32), we have

$$|I_1| \leq C\sqrt{\delta} \|F\|_{L^2} (\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)}) \quad (4.43)$$

The terms I_2 and I_3 are bounded by the same way as above and we get

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C |\beta| \|F\|_{L^2} \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} (\|G\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta G\|_{L^2(1)}) \\ &\leq C |\beta| (1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|F\|_{L^2} (\|f\|_{H^1} + \|f\|_{L^2(2)}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

and

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq C |\beta| \|F\|_{L^2} \|V^G\|_{L^\infty} (\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)}) \\ &\leq C |\beta| \|F\|_{L^2} (\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Collecting the bounds (4.39)-(4.45), we deduce from (4.35) that

$$\begin{aligned} \partial_\tau E_0(\tau) + \frac{1}{4} \|F\|_{L^2}^2 + (1 + \frac{3\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau}) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\Delta F\|_{L^2}^2 \\ \leq C |\beta| \bar{\alpha}e^{-\tau} \|F\|_{L^2} + C |\beta| \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\Delta F\|_{L^2} \\ + C(\sqrt{\delta} + |\beta|) \|F\|_{L^2} (\|f\|_{L^2(1)} + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)}) \\ + C |\beta| (1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|F\|_{L^2} (\|f\|_{H^1} + \|f\|_{L^2(2)}) \end{aligned}$$

Applying Young's inequality yield that for all $\mu_0 > 0$, we show that there exists a constant $C_{\mu_0} > 0$ such that

$$\begin{aligned} \partial_\tau E_0(\tau) + (\frac{1}{4} - \mu_0) \|F\|_{L^2}^2 + (1 + \frac{3\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau}) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(1 - \mu_0) \|\Delta F\|_{L^2}^2 \\ \leq C_{\mu_0} |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} \\ + C_{\mu_0}(\delta + |\beta|^2) (\|f\|_{L^2(1)}^2 + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2(1)}^2) \\ + C_{\mu_0} |\beta|^2 (1 + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau})(\|f\|_{H^1}^2 + \|f\|_{L^2(2)}^2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

Let us note that

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(1)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2) |f(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|f\|_{L^2(2)} \leq \frac{1}{2} (\|f\|_{L^2}^2 + \|\|\xi|^2 f\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Thus, using (4.47) and the fact that f satisfies the bound (4.32), we can write (4.46) as

$$\begin{aligned} \partial_\tau E_0(\tau) + \left(\frac{1}{4} - \mu_0\right) \|F\|_{L^2}^2 + \left(1 + \frac{3\bar{\alpha}}{4} e^{-\tau}\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon} e^{-2\tau} (1 - \mu_0) \|\Delta F\|_{L^2}^2 \\ \leq C_{\mu_0} |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-2\tau} + C_{\mu_0} |\beta|^2 \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\ + C_{\mu_0} (\delta + |\beta|^2) (\|f\|_{L^2}^2 + \|\|\xi|^2 f\|_{L^2}^2) \\ + C_{\mu_0} (\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} (\|\Delta f\|_{L^2}^2 + \|\|\xi|^2 \Delta f\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

Now, let $0 < \mu_0 < \frac{1}{4}$ and $\frac{\theta}{2} = \frac{1}{4} - \mu_0 < \frac{1}{4}$.

Therefore, the above inequality become

$$\begin{aligned} \partial_\tau E_0(\tau) + \theta E_0(\tau) + \left(1 + \frac{3\bar{\alpha}}{4} e^{-\tau} - \frac{\theta\bar{\alpha}}{2} e^{-\tau}\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon} \left(\frac{3}{4} + \frac{\theta}{2}\right) e^{-2\tau} \|\Delta F\|_{L^2}^2 \\ \leq C_0 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-2\tau} + C_0 |\beta|^2 \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\ + C_0 (\delta + |\beta|^2) (\|f\|_{L^2}^2 + \|\|\xi|^2 f\|_{L^2}^2) \\ + C_0 (\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} (\|\Delta f\|_{L^2}^2 + \|\|\xi|^2 \Delta f\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

□

Next, we will write estimates on f and Δf .

Estimates on f

Now, we introduce the functional $E_1(\tau)$ given by

$$E_1(\tau) = \frac{1}{2} (\|f(\tau)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\nabla f(\tau)\|_{L^2}^2) \quad (4.48)$$

Then, we have the following lemma.

Lemma 4.5.4. *Assume that $f \in L^\infty([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ is a solution of (4.22) satisfying the bound (4.32). Then, there exists a constant $C_1 > 0$ such that for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$,*

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_1(\tau) + E_1(\tau) + \left(\frac{1}{6} - \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\right) \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_1 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + \left(\frac{2}{3} + C_1 |\beta|^2\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 \\ & + C_1 |\beta|^2 \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + C_1(\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Proof . Taking the scalar product in $L^2(\mathbb{R}^2)$ of (4.22) with f , we obtain

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_1(\tau) + \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\ & + \beta \frac{\bar{\alpha}}{2} e^{-\tau} (\xi \cdot \nabla \Delta G, f) + \beta \bar{\epsilon} e^{-2\tau} (\Delta^2 G, f) + \beta \bar{\alpha} e^{-\tau} (\Delta G, f) \quad (4.49) \\ & + J_1 + \beta J_2 + \beta J_3 = 0 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} J_1 &= (K_f \cdot \nabla (f - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f), f) \\ J_2 &= (V^G \cdot \nabla (f - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f), f) \\ J_3 &= (K_f \cdot \nabla (G - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta G), f). \end{aligned}$$

Integrating by parts and applying the Holder inequality, we have the following bounds

$$|(\xi \cdot \nabla \Delta G, f)| \leq (2 \|\Delta G\|_{L^2} + \|\xi\| \|\Delta G\|_{L^2}) \|\nabla f\|_{L^2} \leq C \|\nabla f\|_{L^2} \quad (4.50)$$

$$|(\Delta^2 G, f)| \leq \|\Delta G\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \leq C \|\Delta f\|_{L^2} \quad (4.51)$$

$$|(\Delta G, f)| \leq \|\nabla G\|_{L^2} \|\nabla f\|_{L^2} \leq C \|\nabla f\|_{L^2} \quad (4.52)$$

Next, we bound the terms J_i , $i = 1, 2, 3$.

Integrating by parts and using the fact that $\operatorname{div} K_f = 0$, we can write

$$J_1 = -\bar{\alpha} e^{-\tau} (K_f \cdot \nabla f, \Delta f)$$

Thus, applying Holder's inequality and using Lemma 4.2.1 part b, we obtain the following bound

$$\begin{aligned}
 |J_1| &\leq \bar{\alpha}e^{-\tau} \|K_f\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C\bar{\alpha}e^{-\tau} \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \quad (4.53) \\
 &\leq C\sqrt{\delta}\bar{\alpha}e^{-\tau} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

since f satisfies the bound (4.32).

On the other hand, since $\operatorname{div} V^G = 0$, the term J_2 can be bounded as above and we have

$$\begin{aligned}
 |J_2| &\leq \bar{\alpha}e^{-\tau} \|V^G\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C\bar{\alpha}e^{-\tau} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

Finally, integrating by parts, using Lemma 4.2.1 part a and the continuous injection of $L^2(2)$ into $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$, we have the following bound on J_3

$$\begin{aligned}
 |J_3| &\leq \|K_f\|_{L^4} \|G - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G\|_{L^4} \|\nabla f\|_{L^2} \\
 &\leq C(1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|f\|_{L^{\frac{4}{3}}} \|\nabla f\|_{L^2} \quad (4.55) \\
 &\leq C(1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|f\|_{L^2(2)} \|\nabla f\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

Collecting the bounds (4.50)-(4.55) and applying Young's inequality on (4.49), we have that for all $\mu_1 > 0$, there exists a constant $C_{\mu_1} > 0$ such that

$$\begin{aligned}
 \partial_\tau E_1(\tau) &+ (1 - \mu_1) \|\nabla f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|f\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(1 - \mu_1) \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\
 &\leq C_{\mu_1} |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + C_{\mu_1} |\beta|^2 (1 + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau}) \|f\|_{L^2(2)}^2 \\
 &+ C_{\mu_1} (\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

Choosing $\mu_1 = \frac{1}{2}$ and remarking that

$$\|f\|_{L^2(2)}^2 \leq 2(\|f\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2), \quad (4.56)$$

the above inequality can be written as

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau E_1(\tau) + E_1(\tau) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\right) \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\
 & \leq C_1 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + (1 + C_1 |\beta|^2 (1 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau})) \|f\|_{L^2}^2 \\
 & + C_1 |\beta|^2 (1 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau}) \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + C_1(\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Let us note that in order to bound the L^2 -norm of f , it is sufficient to bound the L^2 -norms of ∇F and of ∇f .

In fact, applying Holder's inequality, we have

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} (-\Delta)^{\frac{1}{4}} f (-\Delta)^{\frac{1}{2}} (-\Delta)^{-\frac{3}{4}} f \\
 &\leq \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{4}} f \right\|_{L^2} \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} F \right\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

Then, using the fact that $\left\| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} F \right\|_{L^2} = \|\nabla F\|_{L^2}$ and applying Young's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
 \|f\|_{L^2}^2 &\leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \left\| (-\Delta)^{\frac{1}{2}} f \right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla F\|_{L^2} \\
 &\leq \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla F\|_{L^2} \\
 &\leq \frac{1}{2} \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|f\|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

Thus,

$$\|f\|_{L^2}^2 \leq \frac{2}{3} \|\nabla F\|_{L^2}^2 + \frac{1}{3} \|\nabla f\|_{L^2}^2 \tag{4.58}$$

Therefore, using (4.58), Inequality (4.57) can be written as

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau E_1(\tau) + E_1(\tau) + \left(\frac{1}{6} - \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\right) \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\
 & \leq C_1 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + \left(\frac{2}{3} + C_1 |\beta|^2\right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 \\
 & + C_1 |\beta|^2 \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + C_1(\delta + |\beta|^2) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

□

Estimates on Δf

The next functional is

$$E_2(\tau) = \frac{1}{2}(\|\nabla f(\tau)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\Delta f(\tau)\|_{L^2}^2) \quad (4.60)$$

Lemma 4.5.5. *Assume that $f \in L^\infty([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ is a solution of (4.22) satisfying the bound (4.32). Then, there exists a constant $C_2 > 0$ such that for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, we have*

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_2(\tau) + E_2(\tau) + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}e^{-\tau}\right) \|\Delta f\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}e^{-2\tau} \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_2 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + \left(\frac{3}{2} + C_2(\delta + |\beta|^2)\right) \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\ & \quad + C_2 |\beta|^2 (\|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

Proof . In order to obtain estimates on the L^2 -norm of Δf , we take the scalar product in $L^2(\mathbb{R}^2)$ of (4.22) with $-\Delta f$. We obtain

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_2(\tau) + (\mathcal{L}f, \Delta f) + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 - \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\ & \leq |\beta| \bar{\alpha}e^{-\tau} \left(\frac{1}{2} \|\xi\| \|\nabla \Delta G\|_{L^2} + \|\Delta G\|_{L^2}\right) \|\Delta f\|_{L^2} \quad (4.61) \\ & \quad + \bar{\epsilon}\beta e^{-2\tau} \|\Delta G\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} + K_1 + \beta K_2 + \beta K_3 \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} K_1 &= (K_f \cdot \nabla(f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f), \Delta f) \\ K_2 &= (V^G \cdot \nabla(f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f), \Delta f) \\ K_3 &= (K_f \cdot \nabla(G - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta G), \Delta f) \end{aligned}$$

Integrating by parts, we have

$$(\xi \cdot \nabla f, \Delta f) = 0,$$

thus,

$$(\mathcal{L}f, \Delta f) = \|\Delta f\|_{L^2}^2 - \|\nabla f\|_{L^2}^2.$$

Since $\operatorname{div} V^G = \operatorname{div} K_f = 0$, we remark that

$$(K_f \cdot \nabla \Delta f, \Delta f) = (V^G \cdot \nabla \Delta f, \Delta f) = 0.$$

Therefore, using Lemma 4.2.1 part b, with $\lambda = \frac{1}{2}$, and the injections of $L^2(2)$ and $H^1(\mathbb{R}^2)$ into $L^p(\mathbb{R}^2)$ and $L^q(\mathbb{R}^2)$ respectively, when $1 \leq p < 2 < q < \infty$, we can write

$$\begin{aligned}
 |K_1| &\leq \|K_f\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C\sqrt{\delta} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

We also have

$$\begin{aligned}
 |K_2| &\leq \|V^G\|_{L^\infty} \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C \|\nabla f\|_{L^2} \|\Delta f\|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Finally, using Lemma 4.2.1 part a, we can write

$$\begin{aligned}
 |K_3| &\leq \|K_f\|_{L^4} \|\nabla(G - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G)\|_{L^4} \|\Delta f\|_{L^2} \\
 &\leq C(1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|f\|_{L^2(2)} \|\Delta f\|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Thus, collecting the bound (4.62), (4.63) and (4.64) and applying the Cauchy Schwarz inequality on Estimate (4.61), we obtain that for all $\mu_2 > 0$, there exists a constant $C_{\mu_2} > 0$ such that

$$\begin{aligned}
 &\partial_\tau E_2(\tau) + (1 - \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} - \mu_2) \|\Delta f\|_{L^2}^2 - \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(1 - \mu_2) \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \\
 &\leq C_{\mu_2} |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + C_{\mu_2}(\delta + |\beta|^2) \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\
 &\quad + C_{\mu_2} |\beta|^2 (\|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2)
 \end{aligned}$$

Choosing $\mu_2 = \frac{1}{2}$, we get

$$\begin{aligned}
 &\partial_\tau E_2(\tau) + E_2(\tau) + (\frac{1}{2} - \bar{\alpha}e^{-\tau}) \|\Delta f\|_{L^2}^2 + \frac{\bar{\epsilon}}{2}e^{-2\tau} \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \\
 &\leq C_2 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon})e^{-2\tau} + (\frac{3}{2} + C_2(\delta + |\beta|^2)) \|\nabla f\|_{L^2}^2 \\
 &\quad + C_2 |\beta|^2 (\|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2)
 \end{aligned}$$

□

Now, let

$$E_3(\tau) = 5E_0(\tau) + 5E_1(\tau) + \frac{1}{2}E_2(\tau) \quad (4.65)$$

Then, Lemmas 4.5.3, 4.5.4, 4.5.5 and Inequality (4.58) imply that there exists a constant $C_3 > 0$ such that for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$, we have

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_3(\tau) + \theta E_3(\tau) + \bar{\epsilon} e^{-\tau} \left(\left(\frac{15}{4} + \frac{5\theta}{2} \right) \|\Delta F\|_{L^2}^2 + \frac{5}{2} \|\Delta f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4} \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \right) \\ & + \left(\frac{5}{3} + \frac{5\bar{\alpha}}{4} e^{-\tau} - \frac{5\theta\bar{\alpha}}{2} - C_3(|\beta|^2 + \delta) \right) \|\nabla F\|_{L^2}^2 \\ & + \left(\frac{1}{12} - \frac{5\bar{\alpha}}{2} - C_3(|\beta|^2 + \delta) \right) \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{\bar{\alpha}}{2} e^{-\tau} - C_3\bar{\alpha}^2(|\beta|^2 + \delta) \right) \|\Delta f\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_3 |\beta|^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-\tau} + C_3(|\beta|^2 + \delta) \|\xi\|^2 \|f\|_{L^2}^2 \\ & \quad + C_3(|\beta|^2 + \delta) \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\xi\|^2 \|\Delta f\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.66)$$

where $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

4.5.2 Energy estimates in $L^2(2)$

Finally, we define the weighted functional

$$E_4(\tau) = \frac{1}{2} \|\xi\|^2 \left(f(\tau) - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f(\tau) \right) \Big|_{L^2}^2. \quad (4.67)$$

Then, we have the following lemma.

Lemma 4.5.6. *Assume that $f \in L^\infty([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ is a solution of (4.22) satisfying the bound (4.32). Then, there exists a constant $C_4 > 0$ such that*

for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$,

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau E_4(\tau) + \frac{1}{2}E_4(\tau) + \left(\frac{1}{12} - C_4(\sqrt{\delta} + \bar{\alpha}e^{-\tau} + \delta) \right) \|\xi\|^2 f\|_{L^2}^2 \\
& + \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} - \bar{\epsilon}e^{-2\tau}C_4 \right) \|\xi\|^2 \nabla f\|_{L^2}^2 \\
& + \bar{\alpha}e^{-\tau} \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau} - \bar{\alpha}e^{-\tau}(\sqrt{\delta} + \frac{1}{12} + C_4\bar{\epsilon}e^{-2\tau}) \right) \|\xi\|^2 \Delta f\|_{L^2}^2 \\
& + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \left(\|\xi\|^2 \Delta f\|_{L^2}^2 + 32\|f\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \|\xi\|^2 \nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \right) \\
& \leq C_4\delta(\bar{\epsilon}^2 + \bar{\alpha}^2)e^{-2\tau} + (48 + C_4(\bar{\alpha}e^{-\tau} + \sqrt{\delta}))\|f\|_{L^2}^2 \\
& + C_4\bar{\epsilon}e^{-2\tau} \|\nabla f\|_{L^2}^2 + (C_4\bar{\epsilon}\bar{\alpha}e^{-3\tau} + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau}C_4\sqrt{\delta}) \|\Delta f\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Proof . In order to bound $\|\xi\|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)\|_{L^2}$, we take the scalar product of Equation (4.22) with $\|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)$.

We obtain

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau E_4(\tau) - (\mathcal{L}f, \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)) + \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(\Delta^2 f, \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)) \\
& + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}(\xi \cdot \nabla \Delta f, \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)) + \bar{\alpha}e^{-\tau}(\Delta f, \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)) \\
& \leq |M_1| + |M_2| + |M_3| \\
& + |\beta|e^{-\tau} \|\xi\|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)\|_{L^2} \left(\bar{\epsilon}e^{-\tau} \|\xi\|^2 \Delta^2 G\|_{L^2} + \bar{\alpha} \|\xi\|^2 \Delta G\|_{L^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\bar{\alpha}}{2} \|\xi\|^3 \nabla \Delta G\|_{L^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

where

$$\begin{aligned}
M_1 &= \beta(V^G \cdot \nabla (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f), \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)), \\
M_2 &= \beta(K_f \cdot \nabla (G - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta G), \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)), \\
M_3 &= (K_f \cdot \nabla (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f), \|\xi\|^4 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)).
\end{aligned}$$

We begin by computing the term $(\mathcal{L}f, \|\xi\|^4 f)$.

Using an integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} (\Delta f, |\xi|^4 f) &= -\| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 + 8 \| |\xi| f \|_{L^2}^2 \\ \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla f, |\xi|^4 f) &= -\frac{3}{2} \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Thus,

$$-(\mathcal{L}f, |\xi|^4 f) = \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 - 8 \| |\xi| f \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2. \quad (4.70)$$

Next, we compute the term $\frac{\alpha}{\nu} e^{-\tau} (\mathcal{L}f, |\xi|^4 \Delta f)$.

Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla f, |\xi|^4 \Delta f) &= -\frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla \Delta f, |\xi|^4 f) - 3(f, |\xi|^4 \Delta f) \\ &= -\frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla \Delta f, |\xi|^4 f) + 3 \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\ &\quad - 24 \| |\xi| f \|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Thus, using (4.69) and (4.71), we deduce

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} e^{-\tau} (\mathcal{L}f, |\xi|^4 \Delta f) &= \\ &= \bar{\alpha} e^{-\tau} \left(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + 2 \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 - 16 \| |\xi| f \|_{L^2}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\xi \cdot \nabla \Delta f, |\xi|^4 f) \right) \end{aligned}$$

The above equality implies that

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} e^{-\tau} (\mathcal{L}f, |\xi|^4 \Delta f) + \bar{\alpha} e^{-\tau} (\Delta f + \frac{1}{2} \xi \cdot \nabla \Delta f, |\xi|^4 f) \\ = \bar{\alpha} e^{-\tau} \left(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 - 8 \| |\xi| f \|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

On the other hand,

$$-\bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \left(\frac{1}{2} \xi \cdot \nabla \Delta f + \Delta f, |\xi|^4 \Delta f \right) = \frac{\bar{\alpha}^2}{2} e^{-2\tau} \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2,$$

and

$$\begin{aligned}
 \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(\Delta^2 f, |\xi|^4 f) &= \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + 16(\Delta f, |\xi|^2 f) \\
 &\quad + 8(\xi \cdot \nabla f, |\xi|^2 \Delta f)) \\
 &= \frac{\epsilon}{\nu^2}e^{-2\tau}(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 - 16 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 + 32 \| f \|_{L^2}^2 \\
 &\quad + 8(\xi \cdot \nabla f, |\xi|^2 \Delta f)).
 \end{aligned}$$

Integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
 8(\xi \cdot \nabla f, |\xi|^2 \Delta f) &= 8 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 - 16(\xi \cdot \nabla f, \xi \cdot \nabla f) \\
 &\geq 8 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 - 16 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 = -8 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2.
 \end{aligned}$$

Therefore,

$$\bar{\epsilon}e^{-2\tau}(\Delta^2 f, |\xi|^4 f) \geq \bar{\epsilon}e^{-2\tau}(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 - 24 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 + 32 \| f \|_{L^2}^2).$$

Finally,

$$-\bar{\epsilon}\bar{\alpha}e^{-3\tau}(\Delta^2 f, |\xi|^4 \Delta f) = \bar{\epsilon}\bar{\alpha}e^{-3\tau}(\| |\xi|^2 \nabla \Delta f \|_{L^2}^2 - 8 \| |\xi| \Delta f \|_{L^2}^2)$$

Next, we bound the term M_1 .

Integrating by parts and using the fact that $\operatorname{div} V_G = 0$, we obtain

$$M_1 = -2 \int_{\mathbb{R}^2} (V_G \cdot \xi) |\xi|^2 |f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f|^2 d\xi$$

Using remark 4.4.1, we deduce that $M_1 = 0$.

In order to bound M_2 , we use Lemma 4.2.1 part a and the injection of $L^2(2)$ into $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}^2)$. We obtain

$$\begin{aligned}
 |M_2| &\leq |\beta| \|K_f\|_{L^4} \| |\xi|^2 (G - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta G) \|_{L^4} \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f) \|_{L^2} \\
 &\leq C |\beta| \|f\|_{L^2(2)} \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f) \|_{L^2}
 \end{aligned}$$

Then, the Cauchy Schwarz inequality implies that for all $\lambda > 0$, there exists a constant $C_\lambda > 0$ such that

$$\begin{aligned}
 |M_2| &\leq C_\lambda |\beta|^2 \|f\|_{L^2(2)}^2 + \lambda \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau} \Delta f) \|_{L^2}^2 \\
 &\leq C_\lambda |\beta|^2 \|f\|_{L^2}^2 + (\lambda + C_\lambda |\beta|^2) \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 \\
 &\quad + \lambda \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2
 \end{aligned}$$

Finally, integrating by parts the term M_3 and remarking that, for all $\mu > 0$, there exists $C_\mu > 0$ such that

$$|\xi|^3 \leq \mu |\xi|^4 + C_\mu, \quad (4.72)$$

we can write

$$|M_3| \leq \|K_f\|_{L^\infty} (\mu \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) \|_{L^2}^2 + C_\mu \|f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f\|_{L^2}^2)$$

Then, using Lemma 4.2.1 part b, we have

$$\begin{aligned} |M_3| &\leq \mu \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) \|_{L^2}^2 \\ &\quad + C_\mu \|f\|_{H^1}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(2)}^{\frac{1}{2}} \|f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f\|_{L^2}^2 \\ &\leq \mu\sqrt{\delta} (\| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2) \\ &\quad + C_\mu\sqrt{\delta} (\|f\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\Delta f\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

since f satisfies the bound (4.32).

Replacing all these bound found above in (4.68) and applying the Cauchy Schwarz inequality yield that for all $\mu_4 > 0$, there exists a constant $C_{\mu_4} > 0$ such that

$$\begin{aligned} &\partial_\tau E_4(\tau) + \left(\frac{1}{2} - \mu_4 - C_{\mu_4}(\mu_4\sqrt{\delta} + |\beta|^2)\right) \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 \\ &+ \left(1 + \bar{\alpha}e^{-\tau}\right) \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\ &+ \bar{\alpha}e^{-\tau} \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} - \bar{\alpha}e^{-\tau}(\mu_4\sqrt{\delta} + \mu_4)\right) \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 \\ &+ \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \left(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + 32 \|f\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \| |\xi|^2 \nabla \Delta f \|_{L^2}^2\right) \\ &- \left(8 + 8\bar{\alpha}e^{-\tau}\right) \| |\xi| f \|_{L^2}^2 - \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \left(24 \| |\xi| \nabla f \|_{L^2}^2 + 8\bar{\alpha}e^{-\tau} \| |\xi| \Delta f \|_{L^2}^2\right) \\ &\leq C_{\mu_4} \frac{|\beta|^2}{\nu^2} (\bar{\epsilon}^2 + \bar{\alpha}^2) e^{-2\tau} + C_{\mu_4} (|\beta|^2 + \sqrt{\delta}) \|f\|_{L^2}^2 \\ &+ \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} C_{\mu_4} \sqrt{\delta} \|\Delta f\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (4.73)$$

We recall that for all $\lambda > 0$, we have

$$\| \xi | f \|_{L^2}^2 \leq \frac{\lambda}{2} \| \xi |^2 f \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\lambda} \| f \|_{L^2}^2$$

By the same way, for all $\eta > 0$, there exists a constant $C_\eta > 0$ such that

$$\bar{\epsilon} e^{-2\tau} \| \xi | \nabla f \|_{L^2}^2 \leq \bar{\epsilon} e^{-2\tau} (\eta \| \xi |^2 \nabla f \|_{L^2}^2 + C_\eta \| \nabla f \|_{L^2}^2)$$

$$\bar{\epsilon} \bar{\alpha} e^{-3\tau} \| \xi | \Delta f \|_{L^2}^2 \leq \bar{\epsilon} \bar{\alpha} e^{-3\tau} (\eta \| \xi |^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + C_\eta \| \Delta f \|_{L^2}^2)$$

Thus, for all $\mu > 0$ and for all $\lambda > 0$, there exists a constant $C_\mu > 0$ such that Inequality (4.73) can be written as

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_4(\tau) + \left(\frac{1}{2} - \mu - C_\mu (\mu \sqrt{\delta} + | \beta |^2) - 4\lambda (1 + \bar{\alpha} e^{-\tau}) \right) \| \xi |^2 f \|_{L^2}^2 \\ & + \left(1 + \bar{\alpha} e^{-\tau} - \bar{\epsilon} e^{-2\tau} C_\mu \right) \| \xi |^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\ & + \bar{\alpha} e^{-\tau} \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{2} e^{-\tau} - \bar{\alpha} e^{-\tau} (\mu \sqrt{\delta} + \mu + C_\mu \bar{\epsilon} e^{-2\tau}) \right) \| \xi |^2 \Delta f \|_{L^2}^2 \\ & + \bar{\epsilon} e^{-2\tau} \left(\| \xi |^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + 32 \| f \|_{L^2}^2 + \bar{\alpha} e^{-\tau} \| \xi |^2 \nabla \Delta f \|_{L^2}^2 \right) \\ & \leq C_\mu \frac{|\beta|^2}{\nu^2} (\bar{\epsilon}^2 + \bar{\alpha}^2) e^{-2\tau} + \left(\frac{4}{\lambda} (1 + \bar{\alpha}) + C_\mu (| \beta |^2 + \sqrt{\delta}) \right) \| f \|_{L^2}^2 \\ & + C_\mu \bar{\epsilon} e^{-2\tau} \| \nabla f \|_{L^2}^2 + (C_\mu \bar{\epsilon} \bar{\alpha} e^{-3\tau} + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} C_\mu \sqrt{\delta}) \| \Delta f \|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{4.74}$$

We recall that $| \beta | \leq \sqrt{\delta}$. We also remark that

$$\begin{aligned} \| \xi |^2 (f - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f) \|_{L^2}^2 & = \| \xi |^2 f \|_{L^2}^2 + 2\bar{\alpha} e^{-\tau} \| \xi |^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\ & \quad + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \| \xi |^2 \Delta f \|_{L^2}^2 - 16\bar{\alpha} e^{-\tau} \| \xi | f \|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \| \xi |^2 (f - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f) \|_{L^2}^2 & \leq \| \xi |^2 f \|_{L^2}^2 + 2\bar{\alpha} e^{-\tau} \| \xi |^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\ & \quad + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \| \xi |^2 \Delta f \|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{4.75}$$

Now, let $\mu = 4\lambda = \frac{1}{12}$.

Then, using (4.75), Inequality (4.74) can be written as follow

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau E_4(\tau) + \frac{1}{2}E_4(\tau) + \left(\frac{1}{12} - C_4(\sqrt{\delta} + \bar{\alpha}e^{-\tau} + \delta) \right) \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 \\
 & + \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau} - \bar{\epsilon}e^{-2\tau}C_4 \right) \| |\xi|^2 \nabla f \|_{L^2}^2 \\
 & + \bar{\alpha}e^{-\tau} \left(1 + \frac{\bar{\alpha}}{4}e^{-\tau} - \bar{\alpha}e^{-\tau}(\sqrt{\delta} + \frac{1}{12} + C_4\bar{\epsilon}e^{-2\tau}) \right) \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 \\
 & + \bar{\epsilon}e^{-2\tau} \left(\| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 + 32 \| f \|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \| |\xi|^2 \nabla \Delta f \|_{L^2}^2 \right) \\
 & \leq C_4\delta(\bar{\epsilon}^2 + \bar{\alpha}^2)e^{-2\tau} + (48 + C_4(\bar{\alpha}e^{-\tau} + \sqrt{\delta})) \| f \|_{L^2}^2 \\
 & + C_4\bar{\epsilon}e^{-2\tau} \| \nabla f \|_{L^2}^2 + (C_4\bar{\epsilon}\bar{\alpha}e^{-3\tau} + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau}C_4\sqrt{\delta}) \| \Delta f \|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

□

Before introducing the next functional, we remark that, according to (4.58), we have

$$48 \| f \|_{L^2}^2 \leq 32 \| \nabla F \|_{L^2}^2 + 16 \| \nabla f \|_{L^2}^2.$$

Thus, let $b > 12.16$ and let

$$E_5(\tau) = bE_3(\tau) + E_4(\tau). \tag{4.77}$$

Then, we have the following lemma.

Lemma 4.5.7. *There exist three constants $K_0 > 0$, $K_1 > 0$ and $K_2 > 0$ such that*

$$\| f \|_{H^1}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \| \Delta f \|_{L^2}^2 + \| |\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f) \|_{L^2}^2 \leq K_1 E_5(\tau) \tag{4.78}$$

and

$$E_5(\tau) \leq K_2 \left(\| f \|_{H^1}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau} \| \Delta f \|_{L^2}^2 + \| |\xi|^2 f \|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2e^{-2\tau} \| |\xi|^2 \Delta f \|_{L^2}^2 \right) \tag{4.79}$$

Moreover, $E_5(\tau)$ satisfies the following inequality for all $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$,

$$E_5(\tau) \leq e^{-\theta\tau} E_5(\tau_0) + \frac{K_0\delta}{1-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-4\theta\tau} \tag{4.80}$$

with $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Proof . Using the definition of E_5 , it is easy to see that Inequality (4.78) is verified.

In order to prove (4.79), we recall that, by lemmas 4.4.3 and 4.5.1, we have

$$\|F\|_{L^2}^2 \leq C \|f\|_{L^2(2)}^2$$

and

$$\|\nabla F\|_{L^2}^2 \leq C \|f\|_{L^2(1)}^2.$$

Thus, Inequality (4.79) is proved.

Now, we prove Inequality (4.80).

Using (4.66), (4.76) and choosing the constants $\bar{\epsilon}$, δ and $\bar{\alpha}$ sufficiently small, we can show that there exists a constant $K_0 > 0$ such that E_5 satisfies the following inequality

$$\begin{aligned} & \partial_\tau E_5(\tau) + \theta E_5(\tau) + \bar{\epsilon} e^{-2\tau} \left(b \left(\frac{15}{4} + \frac{5\theta}{2} \right) \|\Delta F\|_{L^2}^2 + \frac{5b}{2} \|\Delta f\|_{L^2}^2 + \frac{b}{4} \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \right) \\ & + \bar{\epsilon} e^{-2\tau} \left(\|\xi\|^2 \|\Delta f\|_{L^2}^2 + 32 \|f\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\xi\|^2 \|\nabla \Delta f\|_{L^2}^2 \right) \\ & \leq K_0 \delta (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-2\tau} \end{aligned}$$

where $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Integrating the above inequality between τ_0 and $\tau > \tau_0$ and applying the Gronwall inequality, we obtain

$$E_5(\tau) \leq e^{-\theta(\tau-\tau_0)} E_5(0) + \frac{K_0 \delta}{2-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-\theta\tau-3\theta\tau_0} (e^{-\tau_0(2-4\theta)} - e^{-\tau(2-4\theta)})$$

with $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Let $T > e$, then, we can obtain

$$E_5(\tau) \leq e^{-\theta(\tau-\tau_0)} E_5(0) + \frac{K_0 \delta}{2-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-4\theta\tau}$$

□

4.5.3 Proof of Theorem 4.4.5 :

Let γ be a small positive constant and let W_0 belong to $H^2(2)$. Theorem 4.3.1 implies that there exists a solution $W \in C([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$ of Equation (4.12) with $W(0) = W_0$, where $\hat{\tau} = \log(T + t_{\max})$.

Then, we also know that the solution f of Equation (4.22) exists on $[\tau_0, \tau_1]$ and belongs to $C([\tau_0, \tau_1], H^2(2))$.

We suppose that W_0 satisfies the bound (4.27).

Using the continuous injection of $L^2(2)$ into $L^1(\mathbb{R}^2)$, we can write that

$$|\beta| \leq C\gamma$$

where β is given by (4.21) and $C > 0$ is a constant.

Therefore, we have the following bound

$$|\beta|^2 + \|f(\tau_0)\|_{H^1}^2 + \bar{\alpha} \|\Delta f(\tau_0)\|_{L^2}^2 + \|\xi|^2 f(\tau_0)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha} \|\xi|^2 \Delta f(\tau_0)\|_{L^2}^2 \leq \tilde{C}\gamma, \quad (4.81)$$

where $\tilde{C} > 0$ is a constant.

Let $\delta = \frac{\tilde{C}\gamma}{\kappa}$, where $0 < \kappa < \frac{1}{4}$ is a constant that will be given later.

By continuity of the solutions, there exists a time $\tau_0 < \tau_2 \leq \tau_1$ such that for all $\tau \leq \tau_2$, f satisfies the bound (4.32) and according to (4.80), we have, for $\tau_0 \leq \tau \leq \tau_2$,

$$E_5(\tau) \leq e^{-\theta(\tau-\tau_0)} E_5(0) + \frac{K_0\delta}{2-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-4\theta\tau}$$

where $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

Let

$$A(\tau) = \|f(\tau)\|_{H^1}^2 + \|\xi|^2 f(\tau)\|_{L^2}^2.$$

In order to complete the proof of the global existence of f , it remains to show that $A(\tau) < \delta$, for all $e^{-\theta(\tau-\tau_0)} E_5(0) + \frac{K_0\delta}{2-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-4\theta\tau} \leq \tau \leq \tau_2$.

We recall that

$$\begin{aligned} \|\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)\|_{L^2}^2 &= \|\xi|^2 f\|_{L^2}^2 - 16\bar{\alpha}e^{-\tau} \|\xi| f\|_{L^2}^2 \\ &\quad + 2\bar{\alpha}e^{-\tau} \|\xi|^2 \nabla f\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\xi|^2 \Delta f\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Thus,

$$\|\xi|^2 f\|_{L^2}^2 \leq \|\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)\|_{L^2}^2 + 16\bar{\alpha}e^{-\tau} \|\xi| f\|_{L^2}^2$$

We also have, for all $\mu > 0$,

$$\|\xi| f\|_{L^2}^2 \leq \frac{\mu}{2} \|\xi|^2 f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L^2}^2$$

Choosing $\mu = \frac{1}{16}$, we can write

$$\frac{1}{2} \|\xi|^2 f\|_{L^2}^2 \leq \|\xi|^2 (f - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f)\|_{L^2}^2 + 128\bar{\alpha}e^{-\tau} \|f\|_{L^2}^2$$

Therefore, using Inequality (4.78) of Lemma 4.5.7, we obtain that there exists a constant $\tilde{K}_1 > 0$ such that

$$A(\tau) \leq \tilde{K}_1 E_5(\tau) \quad (4.82)$$

On the other hand, we have, by Inequality (4.79) of Lemma 4.5.7,

$$E_5(\tau) \leq K_2 (A(\tau) + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\Delta f(\tau)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2 e^{-2\tau} \|\xi\|^2 \|\Delta f(\tau)\|_{L^2}^2) \quad (4.83)$$

Now, let

$$K = \tilde{K}_1 \max(K_0, K_2) \quad (4.84)$$

and we choose

$$\kappa = \frac{1}{4} \min(1, K) \quad (4.85)$$

where K_0 is the constant given in Inequality (4.80). Suppose that T is big enough (which is equivalent to say that $\bar{\epsilon}$ and $\bar{\alpha}$ are small enough) such that

$$K(\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) \leq \frac{1}{8}, \text{ and } \bar{\alpha} \leq \frac{1}{4}.$$

Then, using Estimate (4.80) and Inequalities (4.82) (4.83), we obtain

$$\begin{aligned} A(\tau) &\leq K_1 E_5(\tau) \\ &\leq K_1 e^{-\theta(\tau-\tau_0)} E_5(\tau_0) + K_1 K_0 \frac{\delta}{2-\theta} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\epsilon}) e^{-4\theta\tau} \\ &\leq K e^{-\theta(\tau-\tau_0)} (A(\tau_0) + \bar{\alpha} \|\Delta f(\tau_0)\|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}^2 \|\xi\|^2 \|\Delta f(\tau_0)\|_{L^2}^2) + \frac{\delta}{4} e^{-4\theta\tau} \\ &< \delta \end{aligned}$$

Therefore, $A(\tau)$ remains small on $[\tau_0, \tau_2]$. We conclude that $\tau_1 = \tau_2$. On the other hand, (4.78) implies that the solution f of Equation (4.22) belongs to the space $L^\infty([\tau_0, +\infty[, H^2(2))$ and satisfies the following bound, for all $\tau \geq \tau_0$,

$$\|f(\tau)\|_{H^1}^2 + \bar{\alpha} e^{-\tau} \|\Delta f(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|f(\tau) - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f\|_{L^2(2)}^2 \leq \delta e^{-\theta\tau} \quad (4.86)$$

where $0 < \theta < \frac{1}{2}$.

4.5.4 Proof of Corollary 4.4.6

Before we begin our proof, we recall the proposition B.1 in [25] that will be useful later.

Proposition 4.5.8. *Let $w \in L^2(m)$ for some $m > 0$ and denote by v the velocity field obtained from w via the Biot-Savart law. Assume that either*

1) $0 < m \leq 1$, or

2) $1 < m \leq 2$, and $\int_{\mathbb{R}^2} w(\xi) d\xi = 0$

If $m \notin \mathbb{N}$, then for all $2 < q < \infty$, there exists $C > 0$ such that

$$\left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} - \frac{1}{q}} v \right\|_{L^q} \leq C \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} w \right\|_{L^2}.$$

For the proof of the above proposition, see [25].

Now, let $w(x, t)$ be the solution of (4.4) with $w(0) = w_0$ and let $W(\xi, \tau)$ be the solution of (4.12) with the same initial data. We recall that $L^2(2)$ is continuously embedded into $L^p(\mathbb{R}^2)$, for all $1 \leq p \leq 2$.

Then, using (4.10) and Theorem 4.4.5, we obtain

$$\begin{aligned} & \left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right) (w(t) - \beta \Omega(t)) \right\|_{L^p} \\ &= \nu^{\frac{1}{p}} (1+t)^{-1+\frac{1}{p}} \left\| (1 - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta) (W(\log(1+t)) - \beta G) \right\|_{L^p} \\ &\leq C (1+t)^{-1+\frac{1}{p}} \left\| (1 - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta) (W(\log(1+t)) - \beta G) \right\|_{L^2(2)} \\ &\leq C (1+t)^{-1-\theta+\frac{1}{p}} \end{aligned} \tag{4.87}$$

Using Lemma 4.2.1 part a, we see that (4.31) holds for all $2 < q < \infty$.

In order to show that (4.31) holds also for all $1 < q \leq 2$, we use Proposition B.1 in [25].

Now, assume that $1 < q \leq 2$ and fix $m \in (\frac{2}{q}, 2)$.

Therefore, using Proposition 4.5.8 and the Holder's inequality, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \left\| (1 - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta)(V(\tau) - \beta V^G(\tau)) \right\|_{L^q} \\
 & \leq \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2} - \frac{1}{4}} (1 - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta)(V(\tau) - \beta V^G(\tau)) \right\|_{L^4} \\
 & \leq C \left\| (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} (1 - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta)(W(\tau) - \beta G(\tau)) \right\|_{L^2} \\
 & \leq \left\| (1 - \bar{\alpha}e^{-\tau})(W(\tau) - \beta G(\tau)) \right\|_{L^2(2)} \leq Ce^{-\theta\tau}
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

Finally, using the change of variables (4.11), we obtain (4.31) for all $1 < q \leq 2$.

4.6 Convergence when ϵ tends to zero

We introduce the following system of equations

$$\begin{aligned}
 \partial_\tau(W - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W) - \mathcal{L}W + V \cdot \nabla_\xi(W - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W) \\
 + \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta_\xi W + \frac{\bar{\alpha}}{2}e^{-\tau}\xi \cdot \nabla_\xi \Delta_\xi W = 0
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$W(\tau_0) = w_0(x)$$

where

$$\mathcal{L}W = \Delta W + \frac{1}{2}\xi \cdot \nabla W + W.$$

Using Theorem 4.4.5, we will prove the following result.

Theorem 4.6.1. *Let $\nu > 0$ and $T > 0$ a fixed time. Then, there exists a positive constant γ_0 such that, for all W_0 in $H^2(2)$ satisfying*

$$\|W_0\|_{H^1}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau_0} \|\Delta W_0\|_{L^2}^2 + \| |\xi|^2 W_0 \|_{L^2}^2 + \bar{\alpha}e^{-\tau_0} \| |\xi|^2 \Delta W_0 \|_{L^2}^2 \leq \gamma_0, \tag{4.90}$$

where $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\nu T}$ and $\tau_0 = \log T$, Equation (4.89) has a unique solution $W(\tau) \in C^0([\tau_0, +\infty[, H^2(2))$ satisfying $W(\tau_0) = W_0$.

Moreover, the following inequality is satisfied, for all $\tau \geq \tau_0$,

$$\left\| (1 - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta)(W(\tau) - \beta G) \right\|_{L^2(2)}^2 \leq Ce^{-4\theta\tau}$$

where $\theta < \frac{1}{2}$, $C > 0$ is a constant,

$$\beta = \int_{\mathbb{R}^2} W_0(\xi) d\xi$$

and G is the Oseen vortex defined by (4.15).

Let us note that if we return to the unscaled variables (x, t) , we obtain from Theorem 4.6.1 the following result :

Corollary 4.6.2. *Let $\nu > 0$ and $T > 0$ a fixed time. Then, there exists a positive constant γ such that, for all w_0 in $H^2(2)$ satisfying*

$$\|w_0\|_{L^2}^2 + \|\nabla w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta w_0\|_{L^2}^2 + \|x^2 w_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|x^2 \Delta w_0\|_{L^2}^2 \leq \gamma,$$

then the solution $w(x, t)$ of Equation 4.1 satisfies, for all $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^p} &\leq \frac{C_p}{(1+t)^{\frac{\theta}{2}+1-\frac{1}{p}}}, \quad 1 \leq p \leq 2, \\ \left\| x^2 \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(w(t) - \beta \Omega) \right\|_{L^2} &\leq \frac{C}{(T+t)^{\frac{\theta}{2}+1}} \end{aligned} \tag{4.91}$$

where $0 < \theta < 1/2$, $C > 0$ and $C_p > 0$ are two constant and Ω is given by (4.28).

If $u(x, t)$ is the velocity field obtained from $w(x, t)$ via the Biot-Savart law, then

$$\left\| \left(1 - \frac{\alpha}{T} \Delta\right)(u(t) - \beta u^\Omega) \right\|_{L^q} \leq \frac{C_q}{(1+t)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}}, \quad 1 < q < \infty \tag{4.92}$$

where $0 < \theta < 1/2$, $C_q > 0$ is a constant and u^Ω is given by (4.29).

Once the existence of solutions and the inequality (4.90) are proved, Corollary 4.6.2 can be proved by the same way as the proof of Corollary 4.4.6. We prove now Theorem 4.6.1.

Proof . By the previous section, we have proved that the solution f^ϵ of Equation (4.22) belongs to the space $C([\tau_0, \tau], H^2(2))$, $\forall \tau \geq \tau_0$ and that Estimate (4.86) is satisfied.

It is clear that (4.86) implies that $\|f^\epsilon(\tau) - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f^\epsilon(\tau)\|_{L^2(2)}$ is bounded uniformly in ϵ .

On the other hand, one can show, according to Equation (4.22), that $\partial_\tau(f^\epsilon - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f^\epsilon)$ is uniformly bounded in ϵ in the space $L^\infty([\tau_0, \tau], H^{-2}(\mathbb{R}^2))$. Therefore,

$$\partial_\tau f^\epsilon \in L^\infty([\tau_0, \tau], L^2(\mathbb{R}^2)) \quad (4.93)$$

Let M be a bounded open set in \mathbb{R}^2 . Property (4.93) implies that f^ϵ are equicontinuous in $C^0([\tau_0, \tau], L^2(M))$.

Ascoli's theorem allows us to extract a subsequence still denoted by f^ϵ such that f^ϵ converges strongly to f in $C^0([\tau_0, \tau], H^{-1}(M))$.

Next, the interpolation between $H^{-1}(M)$ and $H^2(M)$ allows us to deduce that

$$f^\epsilon \longrightarrow f \text{ strongly in } C^0([\tau_0, \tau], H^s(M)), \quad \forall s < 2. \quad (4.94)$$

Let us note that, by the Holder inequality, we have

$$\left\| |\xi|^{\frac{3}{2}} f^\epsilon \right\|_{L^2} \leq \|f^\epsilon\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \left\| |\xi|^2 f^\epsilon \right\|_{L^2}^{\frac{3}{4}} \quad (4.95)$$

Then, using property (4.94) and the fact that f^ϵ is uniformly bounded in $L^\infty([\tau_0, \tau], L^2(2))$, we deduce that

$$|\xi|^{\frac{3}{2}} f^\epsilon \longrightarrow |\xi|^{\frac{3}{2}} f \text{ strongly in } C^0([0, \tau], L^2(M)). \quad (4.96)$$

Using Lemma 4.2.1 part b, with the properties (4.94) and (4.96), we deduce that

$$K_{f^\epsilon} \longrightarrow K_f \text{ strongly in } L^\infty([\tau_0, \tau], L^\infty(M)). \quad (4.97)$$

Also, using Lemma 4.2.1 part b and property (4.94), we deduce that

$$\nabla K_{f^\epsilon} \longrightarrow \nabla K_f \text{ strongly in } L^\infty([\tau_0, \tau], L^4(M)). \quad (4.98)$$

These convergences allow us to show that the equation (4.22) is satisfied in the weak sense in the limit $\epsilon = 0$.

To prove that f satisfies the equation (4.22) in the weak sense for $\epsilon = 0$, we take the L^2 product of (4.22) with any function $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ such that $\text{supp}(\phi) \subset [\tau_0, \tau] \times M$.

We will only prove the convergence of the nonlinear term

$\int_{\tau_0}^\tau \int_M K_{f^\epsilon} \cdot \nabla(f^\epsilon - \bar{\alpha}e^{-\tau}\Delta f^\epsilon) \cdot \phi d\xi d\tau$ since for the other terms, the convergence is easier.

Let $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ such that $\text{supp}(\phi) \subset [\tau_0, \tau] \times M$.

Then, integrating by parts, we obtain

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau_0}^{\tau} \int_M K_{f^\epsilon} \cdot \nabla (f^\epsilon - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f^\epsilon) \phi d\xi d\tau = \int_0^{\tau} \int_M K_{f^\epsilon} \cdot \nabla \phi (f^\epsilon - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f^\epsilon) d\xi d\tau \\
 & = \int_{\tau_0}^{\tau} \int_M K_{f^\epsilon} \cdot \nabla \phi f^\epsilon \\
 & + \bar{\alpha} e^{-\tau} \int_0^{\tau} \int_M \sum_{k=1}^2 (\partial_k K_{f^\epsilon} \cdot \nabla \phi \partial_k f^\epsilon + K_{f^\epsilon} \cdot \nabla \partial_k \phi \partial_k f^\epsilon) d\xi d\tau
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

Using Properties (4.97), (4.98) and (4.94), we deduce that

$$\int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} K_{f^\epsilon} \cdot \nabla \phi (f^\epsilon - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f^\epsilon) d\xi d\tau \rightarrow \int_{\tau_0}^{\tau} \int_{\mathbb{R}^2} K_f \cdot \nabla \phi (f - \bar{\alpha} e^{-\tau} \Delta f) d\xi d\tau.$$

Remarking that the estimates proved in the previous section are uniform with respect to ϵ , we can take $\epsilon = 0$ in these inequalities. We thus have shown that the limiting solution f satisfies the same decay rate in time as f^ϵ and we have

$$\|f(\tau)\|_{H^1}^2 + \frac{\alpha}{\nu} \|\Delta f(\tau)\|_{L^2}^2 + \|\xi\|^2 \|f(\tau) - \frac{\alpha}{\nu} e^{-\tau} \Delta f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \delta e^{-\theta\tau}$$

where $0 < \theta < \frac{1}{2}$ and $C > 0$ is a constant.

Now, we prove the unicity of solutions of Equation (4.89). For this purpose, we return to the unscaled variables. Equation (4.89) can be written in the original variables (x, t) as

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau (w - \alpha \Delta w) - \nu \Delta w + u \cdot \nabla (w - \alpha \Delta w) = 0 \\
 & w(0, x) = w_0(x)
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

where u is the velocity field associated to the vorticity w according to the Biot-Savart law.

Suppose that w_1 and w_2 are two solutions of Equation (4.100) such that $w_1(0, x) = w_2(0, x) = w_0(x)$ and let u_1 and u_2 be the velocity fields associated to the vorticities w_1 and w_2 respectively.

Then, $w = w_1 - w_2$ satisfies the following equation

$$\begin{aligned}
 & \partial_\tau (w - \alpha \Delta w) - \nu \Delta w + u_1 \cdot \nabla (w - \alpha \Delta w) + (u_1 - u_2) \cdot \nabla (w_2 - \alpha \Delta w_2) = 0 \\
 & w(0, x) = 0
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

Using (4.92), we have that $u_1 - u_2$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$. Using the Fourier transform of $u_1 - u_2$, we can show that

$$\|u_1 - u_2\|_{L^2} \leq C \| |x| w \|_{L^2}.$$

Thus, we remark that the unicity of solutions should be proved using a weighted norm.

In the following, we will explain the steps that we follow to prove the unicity of solutions. We will not give the details because they are complicated, but we will prove later the unicity of solutions when the initial data are in $H^3(2)$ since the proof is much easier.

In order to prove that $w = 0$ when $w_0 \in H^2(2)$, we begin by taking the scalar product of Equation (4.101) with w and we write an inequality on $\|w\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w\|_{L^2}^2$.

Next, we write Equation (4.101) in another form :

$$\begin{aligned} \partial_t w - \nu(I - \alpha\Delta)^{-1}w + (I - \alpha\Delta)^{-1}(u_1 \cdot \nabla(w - \alpha\Delta w)) \\ + (I - \alpha\Delta)^{-1}((u_1 - u_2) \cdot \nabla(w_2 - \alpha\Delta w_2)) = 0 \end{aligned} \quad (4.102)$$

We take the scalar product of the above equation with $x^4 w$ and we obtain an inequality on $\|x^2 w\|_{L^2}^2$. Then, taking the sum of this inequality with the one obtained before and using a Gronwall lemma, we can prove that $w = 0$ and thus, the solution of Equation (4.100) is unique.

Now, let us prove the unicity of solutions of Equation (4.100) when $w_0 \in H^3(2)$.

If we return to the regularized equation (4.4), we can show that the solution $w_\epsilon(t)$ belongs to $H^3(2)$ if $w_0 \in H^3(2)$ and we can obtain a uniform bound on $\|x^2 \nabla \Delta w_\epsilon\|_{L^2}$ with respect to ϵ . Thus, the limit solution $w \in H^3(2)$.

Now, taking the scalar product of Equation (4.101) with $(1 + x^4)(w - \alpha\Delta w)$, integrating by parts and using the bounds (4.91), (4.92), we obtain,

$$\begin{aligned} \partial_t \|(1 + x^2)(w - \alpha\Delta w)\|_{L^2}^2 + \nu \|(1 + x^2)\nabla w\|_{L^2}^2 + \nu\alpha \|(1 + x^2)\Delta w\|_{L^2}^2 \\ \leq C \|(1 + x^2)(w - \alpha\Delta w)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

where $C > 0$ is a constant.

Integrating the above inequality in time between 0 and $t > 0$ and using the Gronwall lemma, we deduce that $w = 0$. Thus, the solution of Equation (4.100) is unique. \square

Chapitre 5

Etude locale au voisinage d'un point d'équilibre

Ce chapitre est consacré à la comparaison de la dynamique des équations des fluides de grade deux sur le tore $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi a_1] \times [0, 2\pi a_2]$ avec la dynamique des équations limites de Navier-Stokes.

On utilisera les notations introduites au chapitre 2. En particulier l'espace V^m , $m \in \mathbb{N}$, est l'adhérence de

$$\{u \in [C^\infty(\mathbb{T}^2)]^2 \mid u \text{ est périodique, } \operatorname{div} u = 0, \int_{\mathbb{T}^2} u(x) dx = 0\},$$

dans $[H^m(\mathbb{T}^2)]^2$ et

$$H_{per}^m = \{u \in [H^m(\mathbb{T}^2)]^2 \mid u \text{ est périodique, } \int_{\mathbb{T}^2} u(x) dx = 0\}.$$

Rappelons que le système décrivant les fluides de grade deux dans \mathbb{T}^2 est donné par

$$(FGD) \begin{cases} \partial_t(u_\alpha - \alpha \Delta u_\alpha) - \nu \Delta u_\alpha + \operatorname{rot}(u_\alpha - \alpha \Delta u_\alpha) \times u_\alpha = -\nabla p_\alpha + f \\ \operatorname{div} u_\alpha = 0 \\ u_\alpha(0) = u_0 \end{cases}$$

et que si u_0 appartient à V^3 et f appartient à H_{per}^1 , alors le système (FGD) définit un groupe $S_\alpha(t)$, donné par

$$S_\alpha(t)u_0 = u_\alpha(t), \quad \forall t \geq 0$$

où $u_\alpha(t)$ est l'unique solution du système (FGD) telle que $u_\alpha(0) = u_0$. Lorsque α tend vers zéro, le système (FGD) tend formellement vers le système des équations de Navier-Stokes donné par

$$(NS) \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + \operatorname{rot} u \times u = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Il est bien connu que le système (NS) définit un semi-groupe $S_0(t)$ donné par

$$\forall u_0 \in V^3, S_0(t)u_0 = u(t), \quad \forall t \geq 0$$

où $u(t)$ est l'unique solution du système (NS) telle que $u(0) = u_0$.

Comme on l'a expliqué au chapitre 2, le système $S_\alpha(t)$ n'est pas régularisant en temps fini contrairement à $S_0(t)$.

Dans ce chapitre, on va montrer que le système (FGD) ne converge pas seulement formellement vers le système (NS) et que l'on peut comparer les dynamiques de $S_\alpha(t)$ et de $S_0(t)$. Plus précisément, en utilisant un résultat de convergence de $S_\alpha(t)$ vers $S_0(t)$ dans une norme plus faible que celle de V^3 [44], on va montrer que si le système (NS) a un point d'équilibre z_0 hyperbolique, alors pour α petit, le système (FGD) admet un unique point d'équilibre z_α dans un certain voisinage de z_0 .

En outre, on va comparer les propriétés de stabilité des points d'équilibre z_α et z_0 . En particulier, on va construire la variété locale instable de z_α et la comparer à celle de z_0 .

Pour pouvoir comparer les points d'équilibre, on rappellera d'abord, dans le paragraphe suivant, un résultat de convergence des trajectoires sur des intervalles de temps fini. Le paragraphe 2 est consacré à l'étude de la convergence des points d'équilibre et enfin dans le paragraphe 3, on construit la variété locale instable de z_α et on la compare à celle de z_0 .

5.1 Convergence des trajectoires

Dans cette partie, on rappelle un résultat de Paicu, Raugel et Rekaló ([44]) sur la convergence des solutions du système (FGD) vers celles du système (NS) sur des intervalles de temps fini lorsque α converge vers zéro.

On suppose que le terme de force f ne dépend pas du temps et appartient à H_{per}^2 . On rappelle que, si u_0 appartient à V^3 , alors le système (NS) admet une unique solution globale dans l'espace $C^0([0, +\infty), V^3) \cap C^1([0, +\infty), V^1)$. De plus, si $f \in H_{per}^2$, alors la solution du système (NS) est dans $C^0([0, +\infty), V^3) \cap L_{loc}^2((0, +\infty), V^4)$.

Soit $u_\alpha(t) = S_\alpha(t)u_0$ la solution des équations du fluide de grade deux et $u(t) = S_0(t)u_0$ la solution des équations de Navier-Stokes.

Pour estimer la norme V^2 de $u_\alpha(t) - u(t)$, Paicu, Raugel et Rekaló ont utilisé les estimations suivantes sur u_α .

Soit

$$\beta_1 = \min\left(\frac{\nu C_p^{-1}}{4}, \frac{\nu C_p^{-1}}{2(1 + 2C_p^{-1}\alpha)}\right). \quad (5.1)$$

où C_p est la constante apparaissant dans l'inégalité de Poincaré.
 Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{rot}u_\alpha(t)\|^2 + 2\alpha\|\nabla\operatorname{rot}u_\alpha(t)\|^2 + \alpha^2\|\Delta\operatorname{rot}u_\alpha(t)\|^2 \\ & + \frac{\nu}{2}\int_0^t \exp(\beta_0(s-t))(\|\nabla\operatorname{rot}u_\alpha(s)\|^2 + \alpha\|\Delta\operatorname{rot}u_\alpha(s)\|^2)ds \quad (5.2) \\ & \leq \exp(-\beta_0 t)\|\operatorname{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^2 + \frac{C_p+2\alpha}{\beta_0\nu}\|\operatorname{rot}f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha C_p^{-1} \leq 1$, Paicu, Raugel et Rekaló ont amélioré l'estimation (5.2) et ont obtenu l'inégalité ci-dessous, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} & \|\nabla\operatorname{rot}u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta\operatorname{rot}u_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \exp(\beta_1(s-t))\|\Delta\operatorname{rot}u_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq \exp(-\beta_1 t)(\|\nabla\operatorname{rot}u_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta\operatorname{rot}u_0\|_{L^2}^2) + \frac{2}{\beta_1\nu}\|\operatorname{rot}f\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{C}{\nu^2}\|\operatorname{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^4 + \frac{CC_p}{\beta_1^2\nu^4}\|\operatorname{rot}f\|_{L^2}^4. \quad (5.3) \end{aligned}$$

Le résultat de comparaison suivant est contenu dans le théorème 4.1 de [44].

Proposition 5.1.1. *Soient u_0 et f appartenant à V^3 et H_{per}^1 respectivement. Alors, si $\alpha C_p^{-1} \leq 1$, on a pour tout $t > 0$,*

$$\|\nabla(S_\alpha(t)u_0 - S_0(t)u_0)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta(S_\alpha(t)u_0 - S_0(t)u_0)\|_{L^2}^2 \leq \sqrt{\alpha}C_0 \exp(C_0 t)$$

où C_0 est une constante positive qui dépend seulement de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\nabla\operatorname{rot}u_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\operatorname{rot}\Delta u_0\|_{L^2}^2$.

5.2 Comparaison des points d'équilibre

Soit z_0 un point d'équilibre du système (NS) .

On veut montrer que, pour α petit, (FGD) admet un unique point d'équilibre z_α dans un certain voisinage de z_0 .

Dans ce but, on suppose que z_0 est hyperbolique. On rappelle que z_0 est un point d'équilibre hyperbolique si l'intersection du spectre de $D_u(S_0(1)z_0)$ avec le cercle unité $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ est vide (ce qui est équivalent à dire que le spectre de $D_u(S_0(T))z_0$ ne coupe pas le cercle unité pour tout $T > 0$).

Soit $T > 0$ un temps fixé (le choix de T sera précisé plus tard).

On rappelle que le spectre de $D_u(S_0(T)z_0)$ n'est composé que d'une suite de valeurs propres λ_n tendant vers 0 et que les vecteurs propres associés sont réguliers, c'est-à-dire appartiennent à V^4 si f appartient à H_{per}^2 .

On remarque que $D_u(S_0(t)z_0) \equiv \mathcal{L}_0(t)$ est le semi-groupe linéaire engendré par le système linéarisé (SL_0) ,

$$(SL_0) \begin{cases} \partial_t v - \nu \Delta v + \operatorname{rot} v \times z_0 + \operatorname{rot} z_0 \times v = -\nabla q \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v(0) = v_0, \end{cases}$$

c'est-à-dire $\mathcal{L}_0(t)v_0 = (D_u(S_0(t)z_0))v_0 = v(t)$, $\forall v_0 \in V^1$, où $v(t)$ est l'unique solution du système (SL_0) telle que $v(0) = v_0$. Dans cette partie, on va démontrer le théorème suivant.

Théorème 5.2.1. *Soient f dans H_{per}^3 et $z_0 \in V^3$ un point d'équilibre hyperbolique du système des équations de Navier-Stokes.*

Il existe des nombres réels positifs α_0 , r_0 et R_0 tels que pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, le système (FGD) a un unique point d'équilibre z_α satisfaisant

$$\|\nabla \operatorname{rot} z_\alpha\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \operatorname{rot} z_\alpha\|_{L^2} \leq R_0, \quad (5.4)$$

$$\|z_\alpha - z_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla(z_\alpha - z_0)\|_{L^2} \leq r_0$$

En outre,

$$\|z_\alpha - z_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla(z_\alpha - z_0)\|_{L^2} \leq \alpha c^* \quad (5.5)$$

où c^* est une constante positive indépendante de α .

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser le théorème du point fixe de Leray. A cause de la convergence singulière de $S_\alpha(t)$ vers $S_0(t)$ et du fait que $S_\alpha(t)$ n'est pas régularisant en temps fini, l'application du théorème de point fixe de contraction stricte ne semble pas être possible. On va chercher le point fixe z_α en utilisant une décomposition spectrale, c'est à dire, on va écrire z_α sous la forme

$$z_\alpha = z_0 + w_\alpha^s + w_\alpha^u,$$

où w_α^s appartient à l'espace de dimension infinie engendré par les vecteurs propres généralisés de $\mathcal{L}_0(T)$ associés aux valeurs propres généralisées λ de

norme inférieure à 1 et où w_α^u appartient à l'espace de dimension finie engendré par les vecteurs propres généralisés de $\mathcal{L}_0(T)$ associés aux valeurs propres généralisées λ de norme supérieure à 1. L'élément w_α^u a l'avantage d'appartenir à un espace de dimension finie sur lequel les normes V^1 et V^3 sont équivalentes et l'élément w_α^s appartient à l'espace stable sur lequel $\mathcal{L}_0(T)$ est une contraction.

Soit P_s (respectivement P_u) la projection, par rapport à la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla\cdot\|_{L^2}$, sur le sous-espace engendré par les vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres de module strictement inférieur à 1 (respectivement strictement supérieur à 1) de l'opérateur $D_u(S_0(T)z_0)$.

Soient $M_0 = M_0(T)$ et M_1 deux constantes positives telles que pour tout $w \in V^1$,

$$\|(I - \mathcal{L}_0(T))^{-1}P_u w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla((I - \mathcal{L}_0(T))^{-1}P_u w)\|_{L^2}^2 \leq M_0(\|w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w\|_{L^2}^2) \quad (5.6)$$

$$\|P_s w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(P_s w)\|_{L^2}^2 \leq M_1(\|w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w\|_{L^2}^2) \quad (5.7)$$

Puisque $P_u V^1$ est de dimension finie, il existe une constante positive M_2 telle que, pour tout w dans V^1 , on a

$$\|\nabla \text{rot}(P_u w)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta \text{rot}(P_u w)\|_{L^2}^2 \leq M_2(\|P_u w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(P_u w)\|_{L^2}^2) \quad (5.8)$$

Notons aussi qu'il existe deux constantes positives M_3 et λ^* telles que pour tout w dans $P_s V^1$, on a

$$\|\mathcal{L}_0(T)w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(\mathcal{L}_0(T)w)\|_{L^2}^2 \leq M_3 e^{-\lambda^* T} (\|w\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w\|_{L^2}^2) \quad (5.9)$$

Soient $r_1 > 0$ une "petite" constante et $R_1 > 0$ une grande constante (telle que, par exemple, $\|\nabla \text{rot} P_s z_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha_0}\|\Delta \text{rot} P_s z_0\|_{L^2} \leq \frac{R_1}{2}$).

On introduit les ensembles suivants

$$B_s(r_1, R_1) = \{w \in P_s V^3 / \|\nabla \text{rot}(w + P_s z_0)\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot}(w + P_s z_0)\|_{L^2} \leq R_1$$

$$\text{et } \|w\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla w\|_{L^2} \leq r_1\} \quad (5.10)$$

et

$$B_u(r_1) = \{w \in P_u V^1 / \|w\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla w\|_{L^2} \leq r_1\}, \quad (5.11)$$

On munit $B_s(r_1, R_1)$ et $B_u(r_1)$ de la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla\cdot\|_{L^2}$.

Si u_0 appartient à V^3 , $S_\alpha(t)$ est différentiable "au sens de V^2 ", c'est-à-dire pour tout $\delta \in V^3$,

$$\|S_\alpha(t)(u_0 + \delta) - S_\alpha(t)u_0 - D_u(S_\alpha(t)u_0)\delta\|_{V^2} = o(\|\delta\|_{V^3}).$$

De même, si u_0 appartient à V^4 , $S_\alpha(t)$ est différentiable "au sens de V^3 ", c'est-à-dire pour tout $\delta \in V^4$,

$$\|S_\alpha(t)(u_0 + \delta) - S_\alpha(t)u_0 - D_u(S_\alpha(t)u_0)\delta\|_{V^3} = o(\|\delta\|_{V^4}).$$

On montrera ci-dessous que $D_u(S_\alpha(t)u_0) \in \mathcal{L}(V^3, V^3)$ si $u_0 \in V^4$.

On remarque que $v_\alpha(t) \equiv D_u(S_\alpha(t)u_0)v_0$, pour $v_0 \in V^3$, est la solution du système linéarisé

$$(SL_{u_\alpha}) \begin{cases} \partial_t(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha) - \nu\Delta v_\alpha + \operatorname{rot}(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha) \times u_\alpha \\ \quad + \operatorname{rot}(u_\alpha - \alpha\Delta u_\alpha) \times v_\alpha = -\nabla q_\alpha \\ \operatorname{div} v_\alpha = 0 \\ v_\alpha(0) = v_0 \end{cases}$$

où $u_\alpha(t) \equiv S_\alpha(t)u_0$, $u_0 \in V^3$.

Avant de commencer la démonstration du théorème 5.2.1, on va donner des estimations d'énergie sur $v_\alpha(t)$, $\alpha \geq 0$, et ensuite on va comparer $D_u(S_\alpha(t))$ à $D_u(S_0(t))$.

5.2.1 Résultats auxiliaires

On commence par rappeler quelques identités qui nous seront utiles pour établir les estimations d'énergie (ces identités sont démontrées dans [44], voir lemme A.1).

Pour tous vecteurs assez réguliers $u = (u^1, u^2)^t$ et $v = (v^1, v^2)^t$ à divergence nulle, on a

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} v \times u, v) &= \int_{\mathbb{T}^2} (\partial_1 u^1 (v^1)^2 + \partial_2 u^2 (v^2)^2) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{T}^2} (\partial_1 u^2 + \partial_2 u^1) v^1 v^2 dx \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{rot} \Delta v \times u, v) &= \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{rot} v (\Delta u^1 v^2 - \Delta u^2 v^1) dx \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{T}^2} \operatorname{rot} v (\nabla u^1 \cdot \nabla v^2 - \nabla u^2 \cdot \nabla v^1) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

Lemme 5.2.2. Soit f dans H_{per}^1 . Pour tous u_0, \bar{u}_0 et v_0 dans V^3 , on a les estimations suivantes, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \| (D_u(S_\alpha(t)u_0))v_0 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla \left((D_u(S_\alpha(t)u_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 \\
 & + \nu \int_0^t \| \nabla \left((D_u(S_\alpha(s)u_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 ds \leq (\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla v_0 \|_{L^2}^2) \exp(K_{1\alpha}t).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \| \nabla \left((D_u(S_\alpha(t)u_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta \left((D_u(S_\alpha(t)u_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 \\
 & + \nu \int_0^t \| \Delta \left((D_u(S_\alpha(s)u_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 ds \leq (\| \nabla v_0 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta v_0 \|_{L^2}^2) \exp(K_{1\alpha}t).
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & \| (D_u(S_\alpha(t)u_0) - D_u(S_\alpha(t)\bar{u}_0))v_0 \|_{L^2}^2 \\
 & + \alpha \| \nabla \left((D_u(S_\alpha(t)u_0) - D_u(S_\alpha(t)\bar{u}_0))v_0 \right) \|_{L^2}^2 \\
 & \leq \left[\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2} (\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla v_0 \|_{L^2}^2) (K_{1\alpha}^{\frac{1}{2}} + \bar{K}_{1\alpha}^{\frac{1}{2}}) \right. \\
 & + \alpha^2 (\| \nabla v_0 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta v_0 \|_{L^2}^2) (K_{1\alpha} + \bar{K}_{1\alpha}) \\
 & \left. + \alpha (\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla v_0 \|_{L^2}^2) (K_{1\alpha} + \bar{K}_{1\alpha}) \right] \exp(K_{1\alpha}t + \bar{K}_{1\alpha}t),
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

où

$$\begin{aligned}
 K_{1\alpha} = K_\alpha(u_0, f) & \equiv C (\| \nabla \text{rot } u_0 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta \text{rot } u_0 \|_{L^2}^2 + \| \text{rot } f \|_{L^2}^2 \\
 & + \| \text{rot } (u_0 - \alpha \Delta u_0) \|_{L^2}^4 + \| \text{rot } f \|_{L^2}^4),
 \end{aligned}$$

$$\bar{K}_{1\alpha} = K_\alpha(\bar{u}_0, f),$$

et où C est une constante positive indépendante de $\alpha, u_0, \bar{u}_0, v_0$ et f .

Preuve: Soit $v_\alpha(t) = D_u(S_\alpha(t)u_0)v_0$ et $u_\alpha(t) = S_\alpha(t)u_0$.

Pour démontrer l'inégalité (5.14), on prend le produit scalaire de la première équation du système (SL_{u_α}) avec v_α . On obtient

$$\frac{1}{2} \partial_t (\|v_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla v_\alpha \|_{L^2}^2) + \nu \| \nabla v_\alpha \|_{L^2}^2 + (\text{rot}(v_\alpha - \alpha \Delta v_\alpha) \times u_\alpha, v_\alpha) = 0 \tag{5.17}$$

En utilisant les identités (5.12), (5.13) et les injections classiques de Sobolev, on a la borne suivante

$$\begin{aligned}
 & | (\text{rot}(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha) \times u_\alpha, v_\alpha) | \\
 & \leq \|v_\alpha\|_{L^4}^2 \|\nabla u_\alpha\|_{L^2} + C\alpha \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2} \\
 & \leq C \|v_\alpha\|_{L^2} \|\nabla v_\alpha\|_{L^2} \|\nabla u_\alpha\|_{L^2} + C\alpha \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2}
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit de (5.17) que

$$\begin{aligned}
 & \partial_t (\|v_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2 \\
 & \leq C \|v_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2 + C\alpha^2 \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2}^2 \quad (5.18) \\
 & \leq C (\|v_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2) (\|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2}^2)
 \end{aligned}$$

En intégrant en temps l'inégalité précédente entre 0 et $t \geq 0$ et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \|v_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\
 & \leq (\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_0\|_{L^2}^2) \exp(C \int_0^t (\|\nabla u_\alpha(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta u_\alpha(s)\|_{L^2}^2) ds)
 \end{aligned}$$

L'inégalité (5.3) implique alors que

$$\begin{aligned}
 & \|v_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla v_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\
 & \leq (\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_0\|_{L^2}^2) \exp \left[Ct (\|\nabla \text{rot} u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} u_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\beta_1 \nu} \|\text{rot} f\|_{L^2}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\nu^2} \|\text{rot}(u_0 - \alpha\Delta u_0)\|_{L^2}^4 + \frac{C_p}{\beta_1^2 \nu^4} \|\text{rot} f\|_{L^2}^4) \right]
 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (5.14).

Pour montrer (5.15), on procède de même. On prend le produit scalaire de la première équation du système (SL_{u_α}) avec $-\Delta v_\alpha$.

Pour montrer (5.16), on pose $\bar{v}_\alpha(t) = D_u(S_\alpha(t)\bar{u}_0)v_0$ et $\bar{u}_\alpha(t) = S_\alpha(t)\bar{u}_0$.

Alors, $w_\alpha(t) = v_\alpha(t) - \bar{v}_\alpha(t)$ est solution du système suivant

$$\begin{aligned} & \partial_t(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) - \nu\Delta w_\alpha + \operatorname{rot}(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) \times u_\alpha + \operatorname{rot}(u_\alpha - \alpha\Delta u_\alpha) \times w_\alpha \\ & + \operatorname{rot}(\bar{v}_\alpha - \alpha\Delta\bar{v}_\alpha) \times (u_\alpha - \bar{u}_\alpha) + \operatorname{rot}((u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - \alpha\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)) \times \bar{v}_\alpha \\ & = -\nabla(q_\alpha - \bar{q}_\alpha). \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec w_α et en utilisant les identités (5.12) et (5.13), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_t(\|w_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2 \leq C\|w_\alpha\|_{L^2}\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}\|\nabla u_\alpha\|_{L^2} \\ & + C\alpha\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta u_\alpha\|_{L^2} + |(\operatorname{rot}(\bar{v}_\alpha - \alpha\Delta\bar{v}_\alpha) \times (u_\alpha - \bar{u}_\alpha), w_\alpha)| \\ & + |(\operatorname{rot}((u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - \alpha\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)) \times \bar{v}_\alpha, w_\alpha)|. \end{aligned}$$

En intégrant par parties le terme $(\operatorname{rot}\Delta\bar{v}_\alpha \times (u_\alpha - \bar{u}_\alpha), w_\alpha)$ et en utilisant les injections classiques de Sobolev, on peut écrire

$$\begin{aligned} & |(\operatorname{rot}(\bar{v}_\alpha - \alpha\Delta\bar{v}_\alpha) \times (u_\alpha - \bar{u}_\alpha), w_\alpha)| \leq \\ & C\|\nabla\bar{v}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}\|\nabla w_\alpha\|_{L^2} + C\alpha\|\Delta\bar{v}_\alpha\|_{L^2}\|\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}. \end{aligned}$$

On a aussi la borne suivante

$$\begin{aligned} & |(\operatorname{rot}((u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - \alpha\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)) \times \bar{v}_\alpha, w_\alpha)| \leq \\ & C\|\operatorname{rot}((u_\alpha - \bar{u}_\alpha) - \alpha\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha))\|_{L^2}\|\nabla\bar{v}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla w_\alpha\|_{L^2} \leq \\ & C(\|\operatorname{rot}(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2} + \alpha\|\operatorname{rot}\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2})\|\nabla\bar{v}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}. \end{aligned}$$

En rassemblant les trois inégalités ci-dessus et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} & \partial_t(\|w_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2 \leq C\|w_\alpha\|_{L^2}^2\|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2 \\ & + C\alpha^2\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2\|\nabla\Delta u_\alpha\|_{L^2}^2 + C\|\nabla\bar{v}_\alpha\|_{L^2}^2\|\nabla(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 \\ & + C\alpha^2\|\Delta\bar{v}_\alpha\|_{L^2}^2\|\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 + C\alpha^2\|\operatorname{rot}\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}^2\|\nabla\bar{v}_\alpha\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

En intégrant en temps entre 0 et $t > 0$ et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
 \|w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 &\leq C \left[\|\nabla(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla \bar{v}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \right. \\
 &\quad + \alpha^2 \|\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\Delta \bar{v}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\
 &\quad \left. + \alpha^2 \|\operatorname{rot} \Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla \bar{v}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \right] \\
 &\quad \times \exp\left(C \int_0^t (\|\nabla u_\alpha(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \Delta u_\alpha(s)\|_{L^2}^2) ds\right). \tag{5.19}
 \end{aligned}$$

Maintenant, on va utiliser l'interpolation entre les espaces L^2 et H^2 pour faire apparaître le terme $\|u_\alpha - \bar{u}_\alpha\|_{L^2}$ dans le premier terme du membre de droite de l'inégalité (5.19).

En effet, on a

$$\|\nabla(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 \leq C \|\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L^2} \|u_\alpha - \bar{u}_\alpha\|_{L^2}$$

où C est une constante positive.

On introduit la notation suivante :

$$\begin{aligned}
 K_{1\alpha} \equiv K_\alpha(u_0, f) &= C(\|\nabla \operatorname{rot} u_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \operatorname{rot} u_0\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\beta_1 \nu} \|\operatorname{rot} f\|_{L^2}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{\nu^2} \|\operatorname{rot}(u_0 - \alpha \Delta u_0)\|_{L^2}^4 + \frac{C_p}{\beta_1^2 \nu^4} \|\operatorname{rot} f\|_{L^2}^4)
 \end{aligned}$$

et on pose $\bar{K}_{1\alpha} = K_\alpha(\bar{u}_0, f)$.

En utilisant (5.3), on a

$$\|\Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 + \alpha \|\nabla \Delta(u_\alpha - \bar{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \leq K_{1\alpha} + \bar{K}_{1\alpha}.$$

D'autre part, la formule de Taylor et l'inégalité (5.14) impliquent que

$$\begin{aligned}
 \|u_\alpha(t) - \bar{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 &= \int_0^1 D_u(S_\alpha(t)(\bar{u}_0 + \theta(u_0 - \bar{u}_0))(u_0 - \bar{u}_0) d\theta \\
 &\leq (\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(u_0 - \bar{u}_0)\|_{L^2}^2) \exp(K_{1\alpha} t + \bar{K}_{1\alpha} t)
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.3), (5.14) et (5.15), on peut écrire (5.19) sous la forme (5.16). \square

Remarque 5.2.3. Dans le membre de droite de l'inégalité (5.16) apparaît la quantité $\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta v_0\|_{L^2}^2$. Ceci pourrait poser un problème dans la

démonstration de l'unicité du point fixe puisque le membre de gauche de (5.16) ne contient que la norme $\|\cdot\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\cdot\|_{L^2}^2$. Mais, en fait cela n'est pas gênant car nous montrerons dans la suite que si U désigne la différence entre deux points fixes, alors la norme $\|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta U(t)\|_{L^2}^2$ est majorée par $C(\sup_{0 \leq s \leq t} \|U(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla U(s)\|_{L^2}^2)$, où C est une constante positive.

On donne maintenant un résultat de comparaison des linéarisés $D_u(S_\alpha(t))$ et $D_u(S_0(t))$.

Lemme 5.2.4. *Soit f dans H_{per}^1 . Alors, pour tout v_0 dans V^3 , on a l'estimation suivante, pour tout $t > 0$,*

$$\begin{aligned} & \| (D_u(S_\alpha(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0))v_0 \|_{L^2}^2 \\ & + \alpha \|\nabla \left((D_u(S_\alpha(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0))v_0 \right)\|_{L^2}^2 \\ & \leq K_2 \alpha \left(\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta v_0\|_{L^2}^2 \right) \exp(K_2 t) \end{aligned} \quad (5.20)$$

où $K_2 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\nabla \text{rot } z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } z_0\|_{L^2}^2$ et de $\|f\|_{V^1}$.

Preuve: Posons $v_\alpha(t) = (D_u(S_\alpha(t)z_0))v_0$, $v(t) = (D_u(S_0(t)z_0))v_0$ et $u_\alpha(t) = S_\alpha(t)z_0$.

Alors, $W_\alpha(t) = v_\alpha(t) - v(t)$ est solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \partial_t(W_\alpha - \alpha\Delta W_\alpha) - \nu\Delta W_\alpha + \text{rot}(W_\alpha - \alpha\Delta W_\alpha) \times u_\alpha \\ & + \text{rot}(u_\alpha - \alpha\Delta u_\alpha) \times W_\alpha + \text{rot}(u_\alpha - z_0) \times v + \text{rot}v \times (u_\alpha - z_0) \\ & - \alpha \text{rot}\Delta v \times u_\alpha - \alpha \text{rot}\Delta u_\alpha \times v - \alpha \partial_t \Delta v = -\nabla(q_\alpha - q) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Avant d'estimer la norme L^2 de W_α , on va donner une borne du terme $\int_0^t \|\partial_t \nabla v(s)\|_{L^2}^2 ds$, pour $t > 0$, qui nous sera utile dans la suite.

En prenant le produit scalaire de la première équation du système (SL_0) avec $-\partial_t \Delta v$ et en utilisant des injections classiques de Sobolev, on trouve

$$\begin{aligned} & \|\partial_t \nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\nu}{2} \|\partial_t \Delta v\|_{L^2}^2 \leq C \|\partial_t \nabla v\|_{L^2} \|\Delta v\|_{L^2} \|\Delta z_0\|_{L^2} \\ & \leq \frac{1}{2} \|\partial_t \nabla v\|_{L^2}^2 + C \|\Delta v\|_{L^2}^2 \|\Delta z_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

En intégrant en temps l'inégalité ci-dessus entre 0 et $t > 0$ et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\int_0^t \|\partial_s \nabla v(t)\|_{L^2}^2 ds + \nu \|\Delta v(t)\|_{L^2}^2 \leq \nu \|\Delta v_0\|_{L^2}^2 \exp(Ct \|\Delta z_0\|_{L^2}^2) \quad (5.22)$$

Montrons maintenant l'inégalité (5.20). En prenant le produit scalaire de (5.21) avec W_α et en utilisant les identités (5.12) et (5.13), on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2 &\leq C \|W_\alpha\|_{L^2} \|\nabla W_\alpha\|_{L^2} \|\nabla u_\alpha\|_{L^2} \\ &+ C\alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2} + C \|\nabla(u_\alpha - z_0)\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla W_\alpha\|_{L^2} \\ &+ \alpha C (\|\Delta v\|_{L^2} \|\Delta u_\alpha\|_{L^2} + \|\operatorname{rot} \Delta u_\alpha\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|\partial_t \nabla v\|_{L^2}) \|\nabla W_\alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial_t (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2 &\leq C \|W_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla u_\alpha\|_{L^2}^2 \\ &+ C\alpha^2 \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L^2}^2 + C \|\nabla(u_\alpha - z_0)\|_{L^2}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \\ &+ \alpha^2 C (\|\Delta v\|_{L^2}^2 \|\Delta u_\alpha\|_{L^2}^2 + \|\operatorname{rot} \Delta u_\alpha\|_{L^2}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \|\partial_t \nabla v\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (5.23)$$

En intégrant en temps l'inégalité précédente et en utilisant l'inégalité de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned} &\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla W_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &\leq \left[C \|\nabla(u_\alpha - z_0)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 ds + C\alpha^2 \|\Delta u_\alpha\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\Delta v(s)\|_{L^2}^2 ds \right. \\ &\quad \left. + C\alpha^2 \|\operatorname{rot} \Delta u_\alpha\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 ds + \alpha^2 C \int_0^t \|\partial_t \nabla v(s)\|_{L^2}^2 ds \right] \\ &\quad \times \exp(Ct (\|\nabla u_\alpha\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 + \alpha \|\nabla \Delta u_\alpha\|_{L_t^\infty(L^2)}^2)) \end{aligned} \quad (5.24)$$

En prenant $\alpha = 0$ dans l'inégalité (5.14) (respectivement (5.15)), on déduit que

$$\begin{aligned} \nu \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \|v_0\|_{L^2}^2 \exp(K_0(z_0, f)t) \\ \text{respectivement } (\nu \int_0^t \|\Delta v(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq \|\nabla v_0\|_{L^2}^2 \exp(K_0(z_0, f)t)). \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 5.1.1 implique que

$$\|\nabla(u_\alpha - u)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \leq \alpha C_0 \exp(C_0 t)$$

où C_0 est une constante positive qui dépend seulement de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\nabla \text{rot} z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta z_0\|_{L^2}^2$.

Par suite, en utilisant (5.3) et (5.22), on déduit que

$$\begin{aligned} & \|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \\ & \leq K_2(z_0, f) \alpha \left(\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta v_0\|_{L^2}^2 \right) \exp(K_2(z_0, f)t) \end{aligned} \quad (5.25)$$

où $K_2(z_0, f)$ est une constante qui ne dépend que de $\|\nabla \text{rot} z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} z_0\|_{L^2}^2$ et de $\|f\|_{V^1}$. D'où (5.20). \square

Remarque 5.2.5. On note que le terme $\|\nabla v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta v_0\|_{L^2}^2$ apparait dans le membre de droite de l'inégalité (5.20). Comme dans la remarque 5.2.3, cela ne pose pas de problème vu que, si U désigne la différence entre deux points fixes, on montrera que la norme $\|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta U(t)\|_{L^2}^2$ est majorée par $C(\sup_{0 \leq s \leq t} \|U(s)\|_{L^2}^2 + \alpha \sup_{0 \leq s \leq t} \|\nabla U(s)\|_{L^2}^2)$, où C est une constante positive.

5.2.2 Preuve du théorème 5.2.1

Soit z_0 un point d'équilibre hyperbolique du système (NS) . On cherche un point d'équilibre z_α du système (FGD) proche de z_0 lorsque α est suffisamment petit.

Posons $w_\alpha = z_\alpha - z_0$, alors w_α vérifie

$$S_\alpha(t)(w_\alpha + z_0) = w_\alpha + z_0, \quad \forall t \geq 0. \quad (5.26)$$

On va introduire les composantes $w_\alpha^s = P_s w_\alpha$ et $w_\alpha^u = P_u w_\alpha$. Cette décomposition nous permet d'utiliser le fait que w_α^u appartient à un espace de dimension finie et que w_α^s appartient à l'espace stable de $\mathcal{L}_0(T)$.

Dans la suite, on choisira $T > 1$ tel que

$$M_1 e^{-\beta_1 T} + M_1 M_3 e^{-\lambda^* T} \leq \frac{1}{20} \quad (5.27)$$

où β_1 est donnée par (5.1), M_1 est introduite dans (5.7), M_3 et λ^* sont introduites dans (5.9).

Rappelons une propriété du semi-groupe $\mathcal{L}_0(t)$ qui nous sera utile par la suite. Pour tout u dans V^1 , pour tout $t_1, t_2 \in [T-1, T+1]$, on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_0(t_1)u - \mathcal{L}_0(t_2)u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(\mathcal{L}_0(t_1)u - \mathcal{L}_0(t_2)u)\|_{L^2}^2 \\ \leq M_4 |t_1 - t_2| (\|u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

où $M_4 = M_4(T)$ est une constante positive.

L'équation (5.26) est équivalente au système

$$\begin{aligned} P_s(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - z_0) &= w_\alpha^s, \\ P_u(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - z_0) &= w_\alpha^u. \end{aligned} \quad (5.29)$$

La deuxième équation du système (5.29) peut être écrite sous la forme

$$(I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - z_0 - w_\alpha^u) = 0. \quad (5.30)$$

On introduit l'application $F_\alpha(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u)$ définie par

$$\begin{aligned} F_\alpha(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u) &= (F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u), F_{\alpha u}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u)), \quad \text{où} \\ F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u) &= P_s(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - z_0) \\ F_{\alpha u}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u) &= (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - z_0 - \mathcal{L}_0(T)w_\alpha^u) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Soit δ une constante positive fixée telle que

$$M_1 M_4 \delta + M_0 M_4 \delta \leq \frac{1}{20} \quad (5.32)$$

où M_0, M_1 et M_4 sont introduites dans (5.6), (5.7) et (5.28) respectivement. On rappelle que

$$\begin{aligned} B_s(r_1, R_1) &= \{w \in P_s V^3 / \|\nabla \text{rot}(w + P_s z_0)\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot}(w + P_s z_0)\|_{L^2} \leq R_1 \\ &\text{et } \|w\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla w\|_{L^2} \leq r_1\} \end{aligned} \quad (5.33)$$

et

$$B_u(r_1) = \{w \in P_u V^1 / \|w\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla w\|_{L^2} \leq r_1\}, \quad (5.34)$$

On va démontrer que l'application $F_\alpha(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u)$ admet un unique point fixe (w_α^s, w_α^u) dans $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$ pour des constantes r_1, R_1 bien choisies et pour tout t appartenant à $[T, T + \delta]$. Pour cela, on va utiliser le théorème de point fixe de Leray.

On commence par démontrer que $F_{\alpha s}(t)(B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)) \subset B_s(r_1, R_1)$ si $t \in [T, T + \delta]$. Soit $w_\alpha \in B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$.

En utilisant l'inégalité (5.3), on a

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \text{rot}(F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) + P_s z_0)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}(F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) + P_s z_0)\|_{L^2}^2 \\
 &= \|\nabla \text{rot}(P_s S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0))\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}(P_s S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0))\|_{L^2}^2 \\
 &\leq M_1 \left[\exp(-\beta_1 t) (R_1^2 + M_2 r_1^2 + \|P_u z_0\|_{V^2}^2 + \alpha \|P_u z_0\|_{V^3}^2) + \frac{1}{\beta_1 \nu} \|\text{rot } f\|_{L^2}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{C}{\nu^2} (R_1^2 (r_1^2 + \|\text{rot } P_s z_0\|_{L^2}^2) + \alpha^2 R_1^4 + \alpha^4 M_2^2 r_1^4 + \|\text{rot } P_u(z_0 - \alpha \Delta z_0)\|_{L^2}^4) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{CC_p}{\beta_1^2 \nu^4} \|\text{rot } f\|_{L^2}^4 \right]
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

où M_1 et M_2 ont été introduites dans (5.7) et (5.8) respectivement.

Alors, en utilisant (5.27) et en choisissant $R_1 > 0$ assez grand et ensuite $\alpha_0 = \alpha_0(R_1)$ et $r_1 = r_1(R_1)$ assez petits, on obtient, pour tout $\alpha \leq \alpha_0$ et pour tout $t \in [T, T + \delta]$, que

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \text{rot}(F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) + P_s z_0)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot}(F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) + P_s z_0)\|_{L^2}^2 \\
 & \leq R_1^2
 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que

$$\|F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 \leq r_1^2.$$

En remarquant que

$$F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) = P_s(S_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u + z_0) - S_\alpha(t)(z_0) + S_\alpha(t)(z_0) - z_0)$$

et que

$$P_s \mathcal{L}_0(T) w_\alpha^u = 0,$$

on peut écrire

$$F_{\alpha s}(t)(w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad (5.36)$$

où

$$\begin{aligned} I_1 &= P_s \left(\int_0^1 \left(D_u(S_{\alpha}(t)(\theta w_{\alpha}^s + \theta w_{\alpha}^u + z_0)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - D_u(S_{\alpha}(t)z_0) \right) (w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u) d\theta \right) \\ I_2 &= P_s \left(\left(D_u(S_{\alpha}(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0) \right) (w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u) \right) \\ I_3 &= P_s (D_u(S_0(t)z_0) - D_u(S_0(T)z_0)) (w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u) \\ I_4 &= P_s D_u(S_0(T)z_0) w_{\alpha}^s \\ I_5 &= P_s (S_{\alpha}(t)(z_0) - z_0) \end{aligned}$$

Pour borner I_1 , on utilise l'inégalité (5.16) du lemme 5.2.2. On obtient, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$,

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla I_1\|_{L^2}^2 &\leq \\ M_1 C_1 (r_1^3 + \alpha^2 (R_1^2 + \|\nabla P_s z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta P_s z_0\|_{L^2}^2) + \alpha^2 M_2 r_1^2 + \alpha r_1^2) \exp(C_1 t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

où M_1 est introduite dans (5.7) et $C_1 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|f\|_{V^1}$, de R_1 et de $\|\nabla \text{rot } z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } z_0\|_{L^2}^2$.

D'autre part, en utilisant l'inégalité (5.20) du lemme 5.2.4, on a, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$,

$$\|I_2\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla I_2\|_{L^2}^2 \leq M_1 C_2 \alpha (r_1^2 + \alpha M_2 r_1^2 + \alpha R_1^2 + \alpha \|\Delta P_s z_0\|_{L^2}^2) \exp(C_2 t) \quad (5.38)$$

où $C_2 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\nabla \text{rot } z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } z_0\|_{L^2}^2$.

Pour borner I_3 , on utilise (5.28). On a donc, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$,

$$\|I_3\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla I_3\|_{L^2}^2 \leq M_1 M_4 \delta (\|w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla (w_{\alpha}^s + w_{\alpha}^u)\|_{L^2}^2) \quad (5.39)$$

On déduit de (5.9) que

$$\|I_4\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla I_4\|_{L^2}^2 \leq M_3 e^{-\lambda^* T} r_1^2 \quad (5.40)$$

Finalement, en utilisant la proposition 5.1.1, on a, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$,

$$\|I_5\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla I_5\|_{L^2}^2 \leq M_1 \alpha C_0 \exp(C_0 t) \quad (5.41)$$

où C_0 est une constante positive qui dépend seulement de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\nabla \text{rot} z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta z_0\|_{L^2}^2$.

On choisit r_1 et ensuite α_0 assez petits tels que

$$r_1(M_0 + M_1)C_1 \exp(C_1(T + \delta)) \leq \frac{1}{20}, \quad (5.42)$$

et

$$\alpha_0(M_0 + M_1)(C_1 + C_2)(1 + M_2) \exp((C_1 + C_2)(T + \delta)) \leq \frac{1}{20},$$

$$\alpha_0(M_0 + M_1)[C_0 \exp(C_0(T + \delta))$$

$$+ \alpha_0(C_1 + C_2)(\alpha R_1^2 + \|\nabla P_s z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta P_s z_0\|_{L^2}^2) \exp(C_2(T + \delta)) \leq \frac{r_1^2}{20}. \quad (5.43)$$

Par suite, les inégalités (5.42), (5.43), (5.27) et (5.32) impliquent que

$$\|F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 \leq \frac{r_1^2}{3}.$$

Il reste à montrer que $F_{\alpha u}(t)(B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)) \subset B_s(r_1, R_1)$.

En remarquant que

$$P_u \mathcal{L}_0(T) w_\alpha^s = 0,$$

et en procédant comme dans l'égalité (5.36), on trouve

$$F_{\alpha u}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u) = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 \quad (5.44)$$

où

$$J_1 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \left(\int_0^1 \left(D_u(S_\alpha(t)(\theta w_\alpha^s + \theta w_\alpha^u + z_0)) \right. \right. \\ \left. \left. - D_u(S_\alpha(t)z_0) \right) (w_\alpha^s + w_\alpha^u) d\theta \right)$$

$$J_2 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \left(\left(D_u(S_\alpha(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0) \right) (w_\alpha^s + w_\alpha^u) \right)$$

$$J_3 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u (D_u(S_0(t)z_0) - D_u(S_0(T)z_0)) (w_\alpha^s + w_\alpha^u)$$

$$J_4 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u (S_\alpha(t)(z_0) - z_0)$$

Alors, en procédant comme dans les inégalités (5.37), (5.38), (5.39) et (5.41) et en utilisant les conditions (5.32), (5.42) et (5.43), on déduit que, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$,

$$\begin{aligned} & \|J_1\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla J_1\|_{L^2}^2 \leq \\ & M_0 C_1 (r_1^3 + \alpha^2 (R_1^2 + \|\nabla P_s z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta P_s z_0\|_{L^2}^2) + \alpha^2 M_2 r_1^2 + \alpha r_1^2) \exp(C_1 t) \\ & \|J_2\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla J_2\|_{L^2}^2 \leq M_0 C_2 \alpha (r_1^2 + \alpha M_2 r_1^2 + \alpha R_1^2 + \alpha \|\Delta P_s z_0\|_{L^2}^2) \exp(C_2 t) \\ & \|J_3\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla J_3\|_{L^2}^2 \leq M_0 M_4 \delta (\|w_\alpha^s + w_\alpha^u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla (w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2) \leq \frac{r_1^2}{20} \\ & \|J_4\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla J_4\|_{L^2}^2 \leq M_0 \alpha C_0 \exp(C_0 t) \leq \frac{r_1^2}{20} \end{aligned}$$

D'où,

$$\|F_{\alpha u}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_{\alpha u}(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 \leq \frac{r_1^2}{3}.$$

Par suite,

$$\|F_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_\alpha(t)(w_\alpha^s + w_\alpha^u)\|_{L^2}^2 \leq r_1^2.$$

Montrons maintenant que $F_\alpha(t)$ est continue pour la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla \cdot\|_{L^2}$.

Soient $w_{1\alpha}$ et $w_{2\alpha}$ deux vecteurs dans $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$.

On commence par estimer le terme

$$\begin{aligned} & \|F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u)\|_{L^2}^2 \\ & + \alpha \|\nabla (F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u))\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Posons $W_\alpha = w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u - w_{2\alpha}^s - w_{2\alpha}^u$.

Alors, on a

$$\begin{aligned} & F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u) \\ & = P_s (S_\alpha(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u + z_0) - S_\alpha(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) \\ & = P_s \left(\int_0^1 \left(D_u(S_\alpha(t)(\theta W_\alpha + w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) \right) W_\alpha d\theta \right) \end{aligned}$$

L'inégalité (5.14) implique que

$$\begin{aligned} & \|F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u)\|_{L^2}^2 \\ & + \alpha \|\nabla(F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{2\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u))\|_{L^2}^2 \\ & \leq M_1(\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2)\exp(C_3 t), \end{aligned}$$

où C_3 est une constante positive qui ne dépend que de R_1 , de $\|\nabla \text{rot } z_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta \text{rot } z_0\|_{L^2}^2$ et de $\|f\|_{H^1}$.

L'inégalité ci-dessus implique la continuité de $F_{\alpha s}(t)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla \cdot\|_{L^2}$.

Pour montrer la continuité de l'application $F_{\alpha u}(t)$, on écrit

$$\begin{aligned} & F_{\alpha u}(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha u}(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u) \\ & = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u (S_\alpha(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u + z_0) - S_\alpha(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0) \\ & \quad - \mathcal{L}_0(T)W_\alpha) \\ & = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \left(\int_0^1 D_u(S_\alpha(t)(\theta W_\alpha + w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) W_\alpha d\theta \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{L}_0(T)W_\alpha \right). \end{aligned}$$

Posons $N_1 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \int_0^1 D_u(S_\alpha(t)(\theta W_\alpha + w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) W_\alpha d\theta$.

L'inégalité (5.14) implique alors que

$$|N_1| \leq M_0 C_3 (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) \exp(C_3 t) \quad (5.45)$$

où $C_3 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|f\|_{H^1}$, de R_1 et de $\|\nabla \text{rot } z_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta \text{rot } z_0\|_{L^2}^2$.

D'autre part, en prenant $\alpha = 0$ dans les inégalités (5.14) et (5.15), on déduit que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}_0(T)W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(\mathcal{L}_0(T)W_\alpha)\|_{L^2}^2 \\ & \leq M_0 C_4 (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) \exp(C_3 T) \end{aligned} \quad (5.46)$$

où $C_4 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\Delta z_0\|_{L^2}^2$. Les inégalités (5.45) et (5.46) impliquent la continuité de $F_{\alpha u}(t)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla\cdot\|_{L^2}$. D'où la continuité de l'application $F_{\alpha}(t)$.

Par suite, le théorème du point fixe de Leray implique qu'il existe un point fixe $w_{\alpha} = (w_{\alpha}^s, w_{\alpha}^u)$ de l'application $F_{\alpha}(t)$ appartenant à $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$.

Avant de démontrer l'unicité de ce point fixe, on va montrer la proposition suivante.

Proposition 5.2.6. *Soient f appartenant à H_{per}^3 et u_1, u_2 deux solutions du système (FGD) telles que u_1 et u_2 sont bornés dans V^5 sur $] -\infty, t_1]$, où t_1 est un temps fixé. Alors, on a l'estimation suivante*

$$\begin{aligned} & \|\text{rot}(u_1(t_1) - u_2(t_1) - \alpha\Delta(u_1(t_1) - u_2(t_1)))\|_{L^2}^2 \\ & \leq C_5 \sup_{t \in]-\infty, t_1]} \left((\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(u_1(t) - u_2(t))\|_{L^2}^2) \right. \\ & \quad \left. \times \|\Delta \text{rot}(u_2(t) - \alpha\Delta u_2(t))\|_{L^2}^2 \right) \end{aligned}$$

où C_5 est une constante positive indépendante de α .

Preuve: Soit $U = u_1 - u_2$. Alors U est solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t(U - \alpha\Delta U) - \nu\Delta U + \text{rot}(U - \alpha\Delta U) \times u_1 + \text{rot}(u_2 - \alpha\Delta u_2) \times U \\ = -\nabla(p_{\alpha}^1 - p_{\alpha}^2) \end{aligned} \tag{5.47}$$

En prenant le rotationnel de l'équation ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned} \partial_t \text{rot}(U - \alpha\Delta U) - \nu \text{rot} \Delta U + u_1 \cdot \nabla \text{rot}(U - \alpha\Delta U) \\ + U \cdot \nabla \text{rot}(u_2 - \alpha\Delta u_2) = 0 \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire de l'équation ci-dessus avec $\text{rot}(U - \alpha\Delta U)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \|\text{rot}(U - \alpha\Delta U)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \text{rot} U\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \text{rot} U\|_{L^2}^2 \\ + (U \cdot \nabla \text{rot}(u_2 - \alpha\Delta u_2), \text{rot}(U - \alpha\Delta U)) = 0 \end{aligned} \tag{5.48}$$

L'intégration par parties et l'utilisation des injections classiques de Sobolev nous donnent

$$\begin{aligned}
& | (U \cdot \nabla \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2), \text{rot}(U - \alpha \Delta U)) | \\
& \leq | (U \cdot \nabla \text{rot} U, \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)) | + \alpha | (U \cdot \nabla \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2), \text{rot} \Delta U) | \\
& \leq \|U\|_{L^2} \|\Delta U\|_{L^2} \|\text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^\infty} \\
& \quad + \alpha \|U\|_{L^4} \|\Delta \text{rot} U\|_{L^2} \|\nabla \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^4} \\
& \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla \text{rot} U\|_{L^2}^2 + C \|U\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{\alpha \nu}{2} \|\Delta \text{rot} U\|_{L^2}^2 + \alpha C \|\nabla U\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Par suite, l'inégalité (5.48) s'écrit

$$\begin{aligned}
& \partial_t \|\text{rot}(U - \alpha \Delta U)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \text{rot} U\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \text{rot} U\|_{L^2}^2 \\
& \leq C \|U\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^2}^2 + \alpha C \|\nabla U\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2 - \alpha \Delta u_2)\|_{L^2}^2
\end{aligned} \tag{5.49}$$

L'intégration en temps entre $t_0 < t_1$ et t_1 et l'application du lemme de Gronwall impliquent alors que

$$\begin{aligned}
& \|\text{rot}(U(t_1) - \alpha \Delta U(t_1))\|_{L^2}^2 \leq \exp(-\beta_1(t - t_0)) \|\text{rot}(U(t_0) - \alpha \Delta U(t_0))\|_{L^2}^2 \\
& \quad + \frac{C}{\beta_1} \sup_{t \in]-\infty, t_1]} \left(\|U(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 \right) \|\Delta \text{rot}(u_2(t) - \alpha \Delta u_2(t))\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

où β_1 est donnée par (5.1).

En faisant tendre t_0 vers $-\infty$, l'inégalité ci-dessus devient

$$\begin{aligned}
& \|\text{rot}(U(t_1) - \alpha \Delta U(t_1))\|_{L^2}^2 \leq \\
& \quad \frac{C}{\beta_1} \left(\sup_{t \in]-\infty, t_1]} \|U(t)\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2(t) - \alpha \Delta u_2(t))\|_{L^2} \right. \\
& \quad \left. + \alpha \sup_{t \in]-\infty, t_1]} \|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 \|\Delta \text{rot}(u_2(t) - \alpha \Delta u_2(t))\|_{L^2}^2 \right)
\end{aligned}$$

□

Montrons maintenant que le point fixe w_α est unique.

Supposons que $w_{1\alpha}$ et $w_{2\alpha}$ sont deux points fixes de l'application $F_\alpha(t)$ dans la boule $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$.

Posons $W_\alpha = w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u - w_{2\alpha}^s - w_{2\alpha}^u$. D'une part, on a

$$\begin{aligned}
 w_{1\alpha}^s - w_{2\alpha}^s &= F_{\alpha s}(t)(w_{1\alpha}^s, w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha s}(t)(w_{2\alpha}^s, w_{2\alpha}^u) \\
 &= P_s(S_\alpha(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u + z_0) - S_\alpha(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) \\
 &= E_1 + E_2 + E_3 + E_4
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

où

$$\begin{aligned}
 E_1 &= P_s \left(\int_0^1 \left(D_u(S_\alpha(t)(\theta W_\alpha + w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - D_u(S_\alpha(t)z_0) \right) W_\alpha d\theta \right) \\
 E_2 &= P_s \left(\left(D_u(S_\alpha(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0) \right) W_\alpha \right) \\
 E_3 &= P_s \left(D_u(S_0(t)z_0) - D_u(S_0(T)z_0) \right) W_\alpha \\
 E_4 &= P_s \left(D_u(S_0(T)z_0) \right) (w_{2\alpha}^s - w_{1\alpha}^s)
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.16), (5.20), (5.28) et (5.9), on obtient les bornes suivantes, pour tout $T \leq t \leq T + \delta$

$$\begin{aligned}
 \|E_1\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla E_1\|_{L^2}^2 &\leq M_1 C_1 ((r_1 + \alpha)(\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) \\
 &\quad + \alpha^3 \|\Delta W_\alpha\|_{L^2}^2) \exp(C_1 t) \\
 \|E_2\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla E_2\|_{L^2}^2 &\leq M_1 C_2 \alpha (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta W_\alpha\|_{L^2}^2) \exp(C_2 t) \tag{5.51} \\
 \|E_3\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla E_3\|_{L^2}^2 &\leq M_1 M_4 \delta (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2) \\
 \|E_4\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla E_4\|_{L^2}^2 &\leq M_3 e^{-\lambda^* T} (\|W_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha\|_{L^2}^2)
 \end{aligned}$$

Posons $z_{i\alpha} = w_{i\alpha} + z_0$, $i = 1, 2$. Alors, $z_{i\alpha}$ sont deux points fixes du système $S_\alpha(t)$, $T \leq t \leq T + \delta$. Notons que $z_{i\alpha} \equiv z_{i\alpha}(t)$ peuvent être deux points

d'équilibre de $S_\alpha(t)$ ou deux orbites périodiques de même période ω . En supposant que le terme de force f appartient à H_{per}^3 et en prenant α assez petit, on sait, d'après les travaux de Paicu, Raugel et Rekaló (voir [44]) que l'attracteur global compact \mathcal{A}_α est borné dans V^5 . Par suite, $z_{i\alpha}$ $i = 1, 2$ appartiennent à V^5 et on a la borne suivante

$$\|z_{i\alpha}\|_{V^3}^2 + \alpha\|z_{i\alpha}\|_{V^4}^2 + \alpha^2\|z_{i\alpha}\|_{V^5}^2 \leq C_6, \quad i = 1, 2$$

où C_6 est une constante positive indépendante de α .

En utilisant la proposition 5.2.6, on déduit que

$$\begin{aligned} \alpha\|\Delta(z_{1\alpha}(t) - z_{2\alpha}(t))\|_{L^2}^2 &= \alpha\|\Delta(w_{1\alpha}(t) - w_{2\alpha}(t))\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_7 \sup_{t \in [0, \omega]} (\|w_{1\alpha}(t) - w_{2\alpha}(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(w_{1\alpha}(t) - w_{2\alpha}(t))\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (5.52)$$

où C_7 est une constante positive indépendante de α .

Par suite, les bornes sur E_1 et E_2 s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \|E_1\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla E_1\|_{L^2}^2 &\leq M_1 C_1 (r_1 + \alpha + \alpha^2 C_7) \exp(C_1(T + \delta)) \\ &\quad \times \sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2) \\ \|E_2\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla E_2\|_{L^2}^2 &\leq M_1 C_2 (1 + C_7) \alpha \exp(C_2(T + \delta)) \\ &\quad \times \sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

En supposant que α_0 et r_1 sont assez petits tels que

$$M_1 C_1 (r_1 + \alpha_0 + \alpha^2 C_7) \exp(C_1(T + \delta)) \leq \frac{1}{20},$$

$$M_1 C_2 (1 + C_7) \alpha \exp(C_2(T + \delta)) \leq \frac{1}{20}$$

et en utilisant les conditions (5.27) et (5.32), on déduit que, pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$,

$$\|P_s W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla P_s W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{4} \sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2) \quad (5.53)$$

D'autre part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 w_{1\alpha}^u - w_{2\alpha}^u &= F_{\alpha u}(t)(w_{1\alpha}^s, w_{1\alpha}^u) - F_{\alpha u}(t)(w_{2\alpha}^s, w_{2\alpha}^u) \\
 &= (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u (S_\alpha(t)(w_{1\alpha}^s + w_{1\alpha}^u + z_0) - S_\alpha(t)(w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0) \\
 &\quad - \mathcal{L}_0(T)W_\alpha) \\
 &= F_1 + F_2 + F_3
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \left(\int_0^1 \left(D_u(S_\alpha(t)(\theta W_\alpha + w_{2\alpha}^s + w_{2\alpha}^u + z_0)) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - D_u(S_\alpha(t)z_0) \right) W_\alpha d\theta \right) \\
 F_2 &= (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u \left(\left(D_u(S_\alpha(t)z_0) - D_u(S_0(t)z_0) \right) W_\alpha \right)
 \end{aligned}$$

$$F_3 = (I - \mathcal{L}_0(T))^{-1} P_u (D_u(S_0(t)z_0) - \mathcal{L}_0(T))W_\alpha$$

En faisant la même démonstration que celle faite ci-dessus pour borner les termes J_i , $i = 1, 2, 3$, et en utilisant (5.52), on peut montrer que

$$\|P_u W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla P_u W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \leq \frac{1}{4} \sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2) \quad (5.54)$$

Les inégalités (5.53) et (5.54) impliquent que

$$\begin{aligned}
 &\sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2) \\
 &\leq \frac{1}{2} \sup_{t \in [0, \omega]} (\|W_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla W_\alpha(t)\|_{L^2}^2)
 \end{aligned}$$

Donc, $W_\alpha(t) = 0$. Alors, $w_\alpha(t)$ est l'unique point fixe de l'application $F_\alpha(t)$, dans la boule $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$, pour tout $[T, T + \delta]$.

Le dernier point à démontrer est que $z_\alpha(t) = w_\alpha(t) + z_0$ est bien un point d'équilibre du semi-groupe $S_\alpha(\cdot)$ et non pas une orbite périodique, c'est-à-dire que $S_\alpha(\tau)z_\alpha(t) = z_\alpha(t), \forall \tau$.

Pour cela, on va montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit, pour tout $t > T$,

$$S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t) = z_\alpha(t).$$

Soit $t \in [T, T + \delta]$. D'une part, on a

$$S_\alpha(t + \epsilon)z_\alpha(t) = S_\alpha(\epsilon)S_\alpha(t)z_\alpha(t) = S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t),$$

et d'autre part,

$$S_\alpha(t + \epsilon)z_\alpha(t) = S_\alpha(t)S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t)$$

Par suite, $S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t)$ est un point fixe de $S_\alpha(t)$, $t \in [T, T + \delta]$.

Alors $\tilde{w}_\alpha = S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t) - z_0$ est un point fixe de l'application $F_\alpha(t)$.

Montrons maintenant que \tilde{w}_α appartient à $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$.

D'une part, on a $P_s\tilde{w}_\alpha + P_s z_0 = P_s S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t) = P_s S_\alpha(t + \epsilon)z_\alpha(t)$. Alors, on déduit de l'inégalité (5.35) que

$$\|\nabla \text{rot}(P_s\tilde{w}_\alpha + P_s z_0)\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot}(P_s\tilde{w}_\alpha + P_s z_0)\|_{L^2} \leq R_1.$$

D'autre part, on a

$$P_s\tilde{w}_\alpha = F_{\alpha s}(t)(\tilde{w}_\alpha^s, \tilde{w}_\alpha^u) = -P_s(S_\alpha(t + \epsilon)z_\alpha - z_0).$$

En prenant ϵ assez petit et en faisant une décomposition comme dans l'égalité (5.36), on déduit, en utilisant les bornes (5.37)-(5.41), que

$$\|\tilde{w}_\alpha^s\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{w}_\alpha^s\|_{L^2}^2 \leq r_1^2$$

On montrera de la même façon que $\|\tilde{w}_\alpha^u\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{w}_\alpha^u\|_{L^2}^2 \leq r_1^2$.

Par suite, $\tilde{w}_\alpha \in B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$ et comme w_α est le seul point fixe de $F_\alpha(t)$ dans $B_s(r_1, R_1) \times B_u(r_1)$, il en résulte que $\tilde{w}_\alpha = w_\alpha$ et $S_\alpha(\epsilon)z_\alpha(t) = z_\alpha(t)$.

Montrons maintenant l'inégalité (5.5).

On a

$$z_\alpha - z_0 = w_\alpha = F_\alpha(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u), \quad \forall t \in [T, T + \delta].$$

Donc,

$$\|w_\alpha^s\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha^s\|_{L^2}^2 \leq$$

$$\|F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u) - F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla(F_{\alpha s}(t)(w_\alpha^s, w_\alpha^u) - F_{\alpha s}(t)(0, 0))\|_{L^2}^2$$

$$+\|F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2$$

En décomposant comme dans l'égalité (5.50) (avec $w_{2\alpha} = 0$) et en procédant comme dans la démonstration de l'unicité du point fixe, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \|w_\alpha^s\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha^s\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{4}(\|w_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2) \\ &+ \|F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

De plus, on a $F_{\alpha s}(t)(0, 0) = P_s(S_\alpha(t)z_0 - z_0)$.

La proposition 5.1.1 implique alors que

$$\|F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla F_{\alpha s}(t)(0, 0)\|_{L^2}^2 \leq \alpha C_0 \exp(C_0(T + \delta)),$$

où C_0 est une constante positive qui dépend seulement de $\|f\|_{H^1}$ et de $\|\nabla \text{rot} z_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta z_0\|_{L^2}^2$.

Par suite,

$$\frac{3}{4}(\|w_\alpha^s\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha^s\|_{L^2}^2) \leq \alpha M_1 C_0 \exp(C_0(T + \delta)) \quad (5.55)$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\frac{3}{4}(\|w_\alpha^u\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha^u\|_{L^2}^2) \leq \alpha M_0 C_0 \exp(C_0(T + \delta)) \quad (5.56)$$

On déduit de (5.55) et (5.56) l'inégalité (5.5).

5.3 Variété locale instable autour du point d'équilibre

Dans cette partie, on construit la variété locale instable autour du point d'équilibre z_α obtenu précédemment. Ensuite, on la compare à la variété locale instable en z_0 associée aux équations limites de Navier-Stokes.

On rappelle que l'on avait supposé que z_0 est un point d'équilibre hyperbolique. On verra plus tard que z_α est hyperbolique (voir section 5.3.2).

Avant de commencer la construction de la variété locale instable associée aux équations des fluides de grade deux, on va établir des estimations d'énergie qui nous seront utiles par la suite.

5.3.1 Estimations d'énergie

Soit $\alpha_0 >$ une petite constante fixée (on précisera le choix de α_0 plus tard).

Comme on va étudier la dynamique de $S_\alpha(t)$ au voisinage du point d'équilibre $z_\alpha \neq 0$, lorsque $\alpha \leq \alpha_0$, il est utile d'introduire le changement de variable

$$\tilde{u}_\alpha(t) = u_\alpha(t) - z_\alpha$$

Donc, $\tilde{u}_\alpha(t)$ satisfait le système d'équations suivant

$$(F\tilde{G}D) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) - \nu\Delta\tilde{u}_\alpha + \text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha \\ \quad + \text{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha + \text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times z_\alpha = -\nabla\bar{p} \\ \text{div } \tilde{u}_\alpha = 0 \\ \tilde{u}_\alpha(0) = u_0 - z_\alpha \end{array} \right.$$

Notons par $\tilde{S}_\alpha(t)$ le système dynamique engendré par $(F\tilde{G}D)$, c'est à dire

$$\forall u_0 \in V^3, \tilde{S}_\alpha(t)u_0 = \tilde{u}_\alpha(t) = S_\alpha(t)(u_0 + z_\alpha) - z_\alpha$$

où $\tilde{u}_\alpha(t)$ est l'unique solution du système $(F\tilde{G}D)$ telle que $\tilde{u}_\alpha(0) = u_0$.

Soit $R(t) = \tilde{S}_\alpha(t) - \mathcal{L}_\alpha(t)$.

Alors,

$$\forall u_0 \in V^3, R(t)u_0 = w_\alpha(t) = \tilde{u}_\alpha(t) - v_\alpha(t)$$

où $\tilde{u}_\alpha(t)$ (respectivement $v_\alpha(t)$) est la solution du système $(F\tilde{G}D)$ (respectivement (SL_α)) avec $\tilde{u}_\alpha(0) = u_0$ (respectivement $v_\alpha(0) = u_0$) et où $w_\alpha(t)$ vérifie le système suivant

$$(E_\alpha) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) - \nu\Delta w_\alpha + \text{rot}(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) \times z_\alpha \\ \quad + \text{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha) \times w_\alpha + \text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha = -\nabla(\bar{p} - \tilde{q}) \\ \text{div } w_\alpha = 0 \\ w_\alpha(0) = 0 \end{array} \right.$$

On sait que la solution $u_\alpha(t)$ du système (FGD) , appartient à $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3)$ si $u_\alpha(0) \in V^3$ et $f \in H_{per}^1$. Par suite, $\tilde{u}_\alpha(t)$ appartient aussi à $L^\infty(\mathbb{R}^+, V^3)$. Dans la suite, C désigne une constante positive qui ne dépend pas de α et qui peut varier d'une ligne à une autre.

Remarque 5.3.1. On rappelle que le point d'équilibre z_α du système (*FGD*) appartient à l'attracteur global compact \mathcal{A}_α . D'après les travaux de Paicu, Raugel et Rekaló [44], on sait que si f appartient à H_{per}^2 et si α est suffisamment petit ($2\nu - c_2\alpha \sup_{z \in \mathcal{A}_\alpha} \|z\|_{L^\infty} > 0$), alors \mathcal{A}_α est borné dans V^4 (voir Théorème 1.1).

Alors, on peut écrire que

$$\|z_\alpha\|_{V^3}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^4}^2 \leq c_0$$

où $c_0 > 0$ est une constante qui ne dépend pas de α .

Lemme 5.3.2. *Soit x_0 et f appartenant à V^3 et H_{per}^3 respectivement. Alors, pour tout $t > 0$, pour tout $0 < \beta < \frac{\nu}{2(C_p + \alpha)}$, on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned} 1) \quad & \|\tilde{S}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \tilde{S}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \tilde{S}_\alpha(s)x_0\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq (\|x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla x_0\|_{L^2}^2) \exp(C_3 t) \end{aligned} \tag{5.57}$$

où $C_3 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^1}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3}^2$ et de $\|\text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2$.

$$\begin{aligned} 2) \quad & \|\text{rot}(\tilde{S}_\alpha(t)x_0 - \alpha \Delta \tilde{S}_\alpha(t)x_0)\|_{L^2}^2 \\ & + \int_0^t (\|\nabla \text{rot} \tilde{S}_\alpha(s)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} \tilde{S}_\alpha(s)x_0\|_{L^2}^2) ds \\ & \leq \|\text{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2 \exp(C_4 t) \end{aligned} \tag{5.58}$$

où $C_4 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|z_\alpha\|_{V^4}^2$.

$$\begin{aligned} 3) \quad & \|\nabla \text{rot} \tilde{S}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} \tilde{S}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 \leq \\ & \exp(-\beta t) (\|\nabla \text{rot} x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} x_0\|_{L^2}^2) + C_5 \exp(C_5 t) \|\text{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2 \end{aligned} \tag{5.59}$$

où $C_5 > 0$ est une constante qui dépend de $\|\text{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2$, de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|z_\alpha\|_{V^4}^2$.

Preuve: Pour démontrer l'inégalité (5.57), on prend le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de la première équation du système (*F \tilde{G} D*) avec \tilde{u}_α .

En remarquant que

$$\int_{\mathbb{T}^2} \text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha \cdot \tilde{u}_\alpha \, dx = 0,$$

on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_t(\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + (\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\alpha) \\ & + (\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times z_\alpha, \tilde{u}_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

En utilisant les identités (5.12) et (5.13), on trouve que

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times z_\alpha, \tilde{u}_\alpha)| & \leq \|\nabla z_\alpha\|_{L^2}\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^4}^2 + \alpha C\|z_\alpha\|_{V^3}\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \\ & \leq C\|\nabla z_\alpha\|_{L^2}\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} + \alpha C\|z_\alpha\|_{V^3}\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

D'autre part, on a la borne suivante

$$\begin{aligned} |(\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha, \tilde{u}_\alpha)| & \leq \|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^4}^2 \\ & \leq C\|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

En rassemblant les deux bornes trouvées ci-dessus et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire l'inégalité (5.60) sous la forme

$$\begin{aligned} & \partial_t(\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \\ & \leq C(\|z_\alpha\|_{V^1}^2\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha^2\|z_\alpha\|_{V^3}^2\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) + C\|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \\ & \leq C(\|z_\alpha\|_{V^1}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V^3}^2 + \|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2)(\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

L'intégration entre 0 et $t > 0$ et l'application du lemme de Gronwall impliquent que

$$\begin{aligned} & \|\tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla\tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \nu\int_0^t\|\nabla\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ & \leq (\|x_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla x_0\|_{L^2}^2)\exp\left[Ct(\|z_\alpha\|_{V^1}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V^3}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2)\right] \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (5.57).

Montrons maintenant (5.58).

Rappelons que, pour tous vecteurs v_1 et v_2 , dans \mathbb{R}^2 , à divergence nulle, on a

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v_1 \times v_2) = v_2 \cdot \nabla \operatorname{rot} v_1 \quad (5.61)$$

En prenant la rotationnel de la première équation du système $(F\tilde{G}D)$ et en tenant compte de (5.61), on peut écrire

$$\begin{aligned} \partial_t \operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha) - \nu \Delta \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha + \tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha) \\ + \tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha) + z_\alpha \cdot \nabla \operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de (5.62) avec $\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha)$ et en utilisant le fait que $\operatorname{div} \tilde{u}_\alpha = \operatorname{div} z_\alpha = 0$, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 = \\ -(\tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha), \operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha)) \end{aligned} \quad (5.63)$$

La remarque 5.3.1 implique que le terme $(\tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \operatorname{rot} \Delta z_\alpha, \operatorname{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha)$ est bien défini.

En utilisant les injections classiques de Sobolev, on peut écrire l'inégalité (5.63) sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t \|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha)\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \nu \alpha \|\Delta \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \\ \leq C(\|z_\alpha\|_{V^2} + \alpha \|z_\alpha\|_{V^4})(\|\nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \\ + \alpha \|\Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\operatorname{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}) \\ \leq \frac{\nu}{2} \|\nabla \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \frac{\nu}{2} \|\Delta \operatorname{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 \\ + C(\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|z_\alpha\|_{V^4}^2)(\|\nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (5.64)$$

En intégrant l'inégalité précédente entre 0 et $t > 0$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\begin{aligned} \|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha(t) - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha(t))\|_{L^2}^2 \leq \\ \|\operatorname{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2 \exp(Ct(\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2 \|z_\alpha\|_{V^4}^2)) \end{aligned}$$

D'où l'inégalité (5.58).

Pour démontrer l'inégalité (5.59), on prend le produit scalaire dans $L^2(T^3)$ de (5.62) avec $-\operatorname{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha$.

On trouve alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\|\text{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 &= (\tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \text{rot} \tilde{u}_\alpha, \text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha) \\ &+ (z_\alpha \cdot \nabla \text{rot} \tilde{u}_\alpha, \text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha) + (\tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha), \text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha) \end{aligned} \quad (5.65)$$

En intégrant par parties et en utilisant l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg, on obtient la borne suivante

$$\begin{aligned} |((\tilde{u}_\alpha + z_\alpha) \cdot \nabla \text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha \Delta \tilde{u}_\alpha), \text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha)| &\leq \\ C(\|\nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} + \|\nabla z_\alpha\|_{L^2}) \|\text{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

De plus, on a

$$|(\tilde{u}_\alpha \cdot \nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha), \text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha)| \leq C \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\tilde{u}_\alpha\|_{V^2} \|\nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}$$

Par suite, (5.65) devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t (\|\text{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\Delta \text{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2}^2 &\leq \\ C \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \left(\|\nabla \text{rot} \tilde{u}_\alpha\|_{L^2} (\|\tilde{u}_\alpha\|_{V^1} + \|z_\alpha\|_{V^1}) \right. \\ &\left. + \|\tilde{u}_\alpha\|_{V^2} \|\nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2} \right) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en intégrant en temps l'inégalité précédente, on trouve, pour tout $t \geq 0$ et tout $0 < \beta < \frac{\nu}{2(C_p + \alpha)}$,

$$\begin{aligned} \|\text{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \exp \beta(s-t) \|\Delta \text{rot} \tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ \leq \exp(-\beta t) (\|\text{rot} \nabla x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta x_0\|_{L^2}^2) + C (\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^\infty(0,t;V^1)} + \|z_\alpha\|_{V^1}^2 \\ + \|\nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2) \int_0^t \exp \beta(s-t) \|\tilde{u}_\alpha(s)\|_{V^2}^2 ds \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (5.58), on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\text{rot} \nabla \tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta \tilde{u}_\alpha(t)\|_{L^2}^2 &\leq \exp(-\beta t) (\|\text{rot} \nabla x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\text{rot} \Delta x_0\|_{L^2}^2) \\ &+ C \exp(C_4 t) \|\text{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2 (\|z_\alpha\|_{V^1}^2 + \|\nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2 \\ &+ \exp(C_4 t) \|\text{rot}(x_0 - \alpha \Delta x_0)\|_{L^2}^2) \end{aligned}$$

D' où l'inégalité (5.59). □

Lemme 5.3.3. *Soit x_0 et f appartenant à V^3 et H_{per}^3 respectivement. Alors, pour tout $t > 0$, pour tout $0 < \beta < \frac{\nu}{2(C_p + \alpha)}$, on a les inégalités suivantes*

$$\begin{aligned}
 & 1) \|\text{rot}(\mathcal{L}_\alpha(t)x_0 - \alpha\Delta\mathcal{L}_\alpha(t)x_0)\|_{L^2}^2 \\
 & \quad + \int_0^t (\|\nabla\text{rot}\mathcal{L}(s)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta\text{rot}\mathcal{L}_\alpha(s)x_0\|_{L^2}^2) ds \\
 & \quad \leq \|\text{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2 \exp(C_4 t)
 \end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
 & 2) \|\nabla\text{rot}\mathcal{L}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta\text{rot}\mathcal{L}_\alpha(t)x_0\|_{L^2}^2 \leq \\
 & \quad \exp(-\beta t) (\|\nabla\text{rot}x_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\Delta\text{rot}x_0\|_{L^2}^2) + C_4 \exp(C_4 t) \|\text{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

où $C_4 > 0$ est une constante qui dépend de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2\|z_\alpha\|_{V^4}^2$.

Preuve: L'inégalité (5.66) se démontre comme l'inégalité (5.58). En effet, en prenant le rotationnel de la première équation du système (SL_α) et en tenant compte de (5.61), on trouve

$$\begin{aligned}
 & \partial_t \text{rot}(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha) - \nu\Delta\text{rot}v_\alpha + v_\alpha \cdot \nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha) \\
 & \quad + z_\alpha \cdot \nabla \text{rot}(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha) = 0
 \end{aligned} \tag{5.68}$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de (5.68) avec $\text{rot}(v_\alpha - \alpha\Delta v_\alpha)$ et en utilisant le fait que $\text{div}z_\alpha = 0$, on trouve l'égalité (5.63) en remplaçant \tilde{u}_α par v_α . On obtient donc (5.66).

Pour démontrer l'inégalité (5.67), on procède comme dans la démonstration de l'inégalité (5.59).

En prenant le produit scalaire dans $L^2(T^3)$ de (5.68) avec $-\text{rot}\Delta v_\alpha$, on trouve

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \partial_t (\|\text{rot}\nabla v_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\text{rot}\Delta v_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\Delta\text{rot}v_\alpha\|_{L^2}^2 = \\
 & \quad (z_\alpha \cdot \nabla \text{rot}v_\alpha, \text{rot}\Delta v_\alpha) + (v_\alpha \cdot \nabla \text{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha), \text{rot}\Delta v_\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.69}$$

Notons que l'égalité (5.69) est plus simple que (5.65). Donc, en suivant les étapes de la démonstration de l'inégalité (5.59), on obtient l'inégalité (5.67). \square

Lemme 5.3.4. *Soit x_0 et f appartenant à V^3 et H_{per}^3 respectivement. Alors, on a les inégalités suivantes, pour tout $t > 0$, pour tout $0 < \beta < \frac{\nu}{2(C_p + \alpha)}$,*

$$1) \|R(t)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla R(t)x_0\|_{L^2}^2 \leq \|\text{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2 (\|x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla x_0\|_{L^2}^2) \exp(C_6 t) \quad (5.70)$$

où $C_6 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3}^2$, de $\alpha \|z_\alpha\|_{V^4}$ et de $\|\text{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}$.

$$2) \|\nabla \text{rot } R(t)x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } R(t)x_0\|_{L^2}^2 \leq 2 \exp(-\beta t) (\|\nabla \text{rot } x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } x_0\|_{L^2}^2) + C_7 \exp(C_7 t) \|\text{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2 \quad (5.71)$$

où $C_7 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\text{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2$, de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3}^2$.

$$3) \|R(t)x_0 - R(t)y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(R(t)x_0 - R(t)y_0)\|_{L^2}^2 \leq C_8 \left[(\|x_0\|_{L^2} + \|y_0\|_{L^2} + \alpha) (\|x_0 - y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(x_0 - y_0)\|_{L^2}^2) + \alpha^2 (\|\nabla x_0 - y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta(x_0 - y_0)\|_{L^2}^2) \right] \exp(C_8 t) \quad (5.72)$$

où $C_8 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\nabla \text{rot } x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } x_0\|_{L^2}^2$, de $\|\nabla \text{rot } y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } y_0\|_{L^2}^2$, de $\|\nabla \text{rot } z_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } z_\alpha\|_{L^2}^2$ et de $\|f\|_{V^1}$.

Preuve: On pose $w_\alpha(t) = R(t)x_0$ et $\tilde{u}_\alpha(t) = \tilde{S}_\alpha(t)x_0$. On rappelle que $w_\alpha(t) = \tilde{u}_\alpha(t) - \mathcal{L}_\alpha(t)x_0$.

Pour démontrer l'inégalité (5.70), on prend le produit scalaire dans L^2 de la première équation du système (E_α) avec w_α . On trouve

$$\frac{1}{2} \partial_t (\|w_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu \|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2 = (\text{rot}(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) \times z_\alpha, w_\alpha) + (\text{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta \tilde{u}_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha, w_\alpha)$$

En utilisant l'identité (5.12) et les injections classiques de Sobolev, on peut écrire

$$\left| (\text{rot}(w_\alpha - \alpha\Delta w_\alpha) \times z_\alpha, w_\alpha) \right| \leq C (\|z_\alpha\|_{V^1} \|w\|_{L^2} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2} + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2)$$

De plus,

$$\begin{aligned} & | (\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha) \times \tilde{u}_\alpha, w_\alpha) | \leq \\ & C \|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha)\|_{L^2} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

En rassemblant les deux bornes ci-dessus, on arrive à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t (\|w_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla w\|_{L^2}^2 &\leq C\|z_\alpha\|_{V^1} \|w_\alpha\|_{L^2} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2} \\ &+ \alpha C\|z_\alpha\|_{V^3} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2}^2 + C\|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2} \|w_\alpha\|_{L^2} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2} \\ &+ C\|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha)\|_{L^2} \|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \|\nabla w_\alpha\|_{L^2} \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en intégrant en temps entre 0 et $t > 0$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\begin{aligned} \|w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 &\leq C\|z_\alpha\|_{V^1}^2 \int_0^t \|w_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &+ \alpha^2 C\|z_\alpha\|_{V^3}^2 \int_0^t \|\nabla w_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds + C\|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2 \int_0^t \|w_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \\ &+ C\|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned}$$

Alors, en appliquant le lemme de Grownall, on peut écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\begin{aligned} \|w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 &\leq (\|\operatorname{rot}(\tilde{u}_\alpha - \alpha\Delta\tilde{u}_\alpha)\|_{L_t^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\nabla\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds) \\ &\times \exp [Ct(\|z_\alpha\|_{V^1}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V^3}^2 + \|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}^2)] \end{aligned}$$

Les inégalités (5.57) et (5.58) impliquent alors que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} & \|w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla w_\alpha(t)\|_{L^2}^2 \\ & \leq \|\operatorname{rot}(x_0 - \alpha\Delta x_0)\|_{L^2}^2 (\|x_0\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla x_0\|_{L^2}^2) \exp(C_6 t) \end{aligned}$$

où $C_6 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V^3}^2$, de $\alpha\|z_\alpha\|_{V^4}$ et de $\|\operatorname{rot}(z_\alpha - \alpha\Delta z_\alpha)\|_{L^2}$.

L'estimation (5.71) résulte de (5.59) et de (5.67).

Montrons maintenant (5.72).

On a

$$\begin{aligned}
 R(t)x_0 - R(t)y_0 &= \tilde{S}_\alpha(t)x_0 - \tilde{S}_\alpha(t)y_0 - (\mathcal{L}_\alpha(t)x_0 - \mathcal{L}_\alpha(t)y_0) \\
 &= S_\alpha(t)(x_0 + z_\alpha) - S_\alpha(t)(y_0 + z_\alpha) - \mathcal{L}_\alpha(t)(x_0 - y_0) \\
 &= N_1
 \end{aligned}$$

où

$$N_1 = \int_0^1 \left(D_u(S_\alpha(t)(y_0 + z_\alpha + \theta(x_0 - y_0))) - \mathcal{L}_\alpha(t) \right) (x_0 - y_0),$$

En utilisant l'inégalité (5.16), on déduit la borne suivante

$$\begin{aligned}
 \|N_1\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla N_1\|_{L^2}^2 &\leq \\
 C_8 \left[(\|x_0\|_{L^2} + \|y_0\|_{L^2} + \alpha) (\|x_0 - y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(x_0 - y_0)\|_{L^2}^2) \right. &\quad (5.73) \\
 \left. + \alpha^2 (\|\nabla x_0 - y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta(x_0 - y_0)\|_{L^2}^2) \right] \exp(C_8 t)
 \end{aligned}$$

où $C_8 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|\nabla \text{rot } x_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } x_0\|_{L^2}^2$, de $\|\nabla \text{rot } y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } y_0\|_{L^2}^2$, de $\|\nabla \text{rot } z_\alpha\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot } z_\alpha\|_{L^2}^2$ et de $\|f\|_{V^1}$. D'où l'inégalité (5.72). \square

5.3.2 Construction des variétés locales instables

Soit $z_\alpha \in V^3$ le point d'équilibre de $S_\alpha(t)$ obtenu dans le théorème 5.2.1. On rappelle que pour $\alpha > 0$ assez petit, z_α est proche du point d'équilibre z_0 de $S_0(t)$. On rappelle aussi que, d'après [44], $z_\alpha \in V^5$ si $f \in H_{per}^3$. Avant de commencer la construction des variétés locales instables, on donne un lemme qui montre que le point d'équilibre z_α est hyperbolique.

Lemme 5.3.5. *Il existe une constante positive c telle que pour tout $u \in V^3$, pour tout $i = 1, 2$, on a*

$$\begin{aligned}
 1) \sup_{|\lambda|=1} (\|(\lambda - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1}u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla((\lambda - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1}u)\|_{L^2}) &\quad (5.74) \\
 \leq c(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla u\|_{L^2})
 \end{aligned}$$

$$2) \|P_{i\alpha}u - P_{i0}u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(P_{i\alpha}u - P_{i0}u)\|_{L^2} \leq \epsilon(\alpha)(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}) \quad (5.75)$$

où $\epsilon(\alpha) > 0$ tend vers zéro lorsque α tend vers zéro.

Preuve: Les calculs qu'on va faire ci-dessous peuvent être aussi trouvés dans [31] et [40].

Pour démontrer (5.74), il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} \lambda - \mathcal{L}_\alpha(t_0)u &= (\lambda - \mathcal{L}_0(t_0))(Id - (\lambda - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1}(\mathcal{L}_\alpha(t_0) - \mathcal{L}_0(t_0)))u \\ &= (\lambda - \mathcal{L}_0(t_0))(Id - \mathcal{B}_\alpha)u \end{aligned}$$

Comme λ appartient à l'ensemble résolvant de $\mathcal{L}_0(t_0)$, alors $\lambda - \mathcal{L}_0(t_0)$ est inversible et il existe une constante \tilde{c} telle que

$$\begin{aligned} \sup_{|\lambda|=1} (\|(\lambda - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1}u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla((\lambda - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1}u)\|_{L^2}) \\ \leq \tilde{c}(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}). \end{aligned}$$

D'autre part, en choisissant α suffisamment petit, on a

$$\|\mathcal{B}_\alpha u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla \mathcal{B}_\alpha u\|_{L^2} \leq \frac{1}{2}(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}).$$

Par suite, on obtient (5.74).

Pour démontrer (5.75), il suffit de montrer que

$$\|P_{2\alpha}u - P_{20}u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(P_{2\alpha}u - P_{20}u)\|_{L^2} \leq \epsilon(\alpha)(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}).$$

En effet, on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z|=1$,

$$\begin{aligned} (z - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1} - (z - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1} \\ &= (z - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1} \left(Id - (z - \mathcal{L}_\alpha(t_0))(z - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1} \right) \\ &= (z - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1} (\mathcal{L}_\alpha(t_0) - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1} (z - \mathcal{L}_0(t_0))^{-1} \end{aligned}$$

En utilisant (5.74) et (5.20), on obtient

$$\|P_{2\alpha}u - P_{20}u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(P_{2\alpha}u - P_{20}u)\|_{L^2} \leq \epsilon(\alpha)(\|u\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla u\|_{L^2})$$

d'où (5.75). □

Revenons maintenant à la construction des variétés locales instables.

On rappelle que le système dynamique $\tilde{S}_\alpha(t)\varphi_0 = S_\alpha(t)(\varphi + z_\alpha) - z_\alpha$.

On remarque que $\tilde{S}_\alpha(t)$ a 0 pour point d'équilibre et que $D_u(\tilde{S}_\alpha(t)0)v = \mathcal{L}_\alpha(t)v$.

Soit $t_0 > 0$ un temps assez grand qui sera fixé dans la suite.

Soit $\sigma(\mathcal{L}_\alpha(t_0))$ le spectre de $\mathcal{L}_\alpha(t_0)$. L'hypothèse d'hyperbolicité de z_α implique que $\sigma(\mathcal{L}_\alpha(t_0))$ peut être écrit comme $\sigma(\mathcal{L}_\alpha(t_0)) = \sigma_1(\mathcal{L}_\alpha(t_0)) \cup \sigma_2(\mathcal{L}_\alpha(t_0))$, où

$$\sigma_1(\mathcal{L}_\alpha(t_0)) = \{z \in \sigma(\mathcal{L}_\alpha(t_0)); |z| > 1\}$$

et

$$\sigma_2(\mathcal{L}_\alpha(t_0)) = \{z \in \sigma(\mathcal{L}_\alpha(t_0)); |z| < 1\}.$$

On introduit alors les projections $P_{i\alpha} : V^3 \rightarrow V^3$, $i = 1, 2$, définies par

$$P_{2\alpha} = \int_{|z|=1} (z - \mathcal{L}_\alpha(t_0))^{-1} dz \text{ et } P_{1\alpha} = Id - P_{2\alpha}.$$

Posons $L_{i\alpha} = \mathcal{L}_\alpha(t_0)P_{i\alpha}$, alors $\sigma(L_{i\alpha}) = \sigma_i(\mathcal{L}_\alpha(t_0))$ et $L_{1\alpha}$ est inversible, d'inverse borné.

Par suite, il existe des constantes $\beta_1 > 1 > \beta_2 \geq 0$, $C_1 \geq 1$ et $C_2 \geq 1$ telles que, pour tout $u_0 \in V^3$, pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \|\nabla \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} u_0\|_{L^2} & \leq C_1 \beta_1^{-k} (\|\nabla \text{rot } u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } u_0\|_{L^2}) \\ \|\nabla \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} u_0\|_{L^2} & \leq C_2 \beta_2^k (\|\nabla \text{rot } u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } u_0\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{5.76}$$

Pour démontrer (5.76), il suffit d'utiliser le fait que le rayon spectral $\rho(T)$, d'un opérateur $T \in \mathcal{L}(X, X)$, où X est un espace de Banach, est donné par

$$\rho(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T^n\|_{\mathcal{L}(X, X)}^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|T^n\|_{\mathcal{L}(X, X)}^{\frac{1}{n}}.$$

Notons que les constantes β_1 , β_2 , C_1 et C_2 peuvent être choisies indépendantes de α .

En effet, en utilisant (5.67), on déduit que

$\|\nabla \text{rot } \mathcal{L}_\alpha(t_0)x_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } \mathcal{L}_\alpha(t_0)x_0\|_{L^2}$ est uniforme en α .

De plus, en utilisant les mêmes notations que précédemment et en remplaçant l'indice α par 0 pour faire référence aux équations de Navier-Stokes, on peut supposer que, pour $\alpha > 0$ assez petit,

$$\begin{aligned} \|\nabla \text{rot } L_{10}^{-k} P_{10} u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } L_{10}^{-k} P_{10} u_0\|_{L^2} \\ \leq C_1 \beta_1^{-k} (\|\nabla \text{rot } u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } u_0\|_{L^2}) \\ \|\nabla \text{rot } L_{20}^k P_{20} u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } L_{20}^k P_{20} u_0\|_{L^2} \\ \leq C_2 \beta_2^k (\|\nabla \text{rot } u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } u_0\|_{L^2}). \end{aligned} \tag{5.77}$$

Remarque 5.3.6. On remarque que la dimension de $P_{1\alpha}V^3$ est finie et pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$, la dimension de $P_{1\alpha}V^3$ est égale à celle de $P_{10}V^3$.

En outre, en raisonnant comme au paragraphe 2 de [44] (voir aussi [32]), on peut montrer que si $f \in H_{per}^3$ (ce qui entraîne que tout équilibre z_α est dans V^5 pour α petit), alors les vecteurs propres φ associés aux valeurs propres λ , $|\lambda| > 1$, appartiennent à V^4 et il existe une constante positive $C = C(\|f\|_{H^3})$ telle que pour $0 < \alpha \leq \alpha_0$,

$$\|\varphi\|_{V^3}^2 + \alpha\|\varphi\|_{V^4}^2 \leq C.$$

Maintenant, on va construire la variété locale instable comme point fixe d'une application. Pour cela, on va appliquer le théorème de point fixe de Leray. Soit $R > 0$ et $r > 0$ deux réels que l'on déterminera dans la suite. On introduit l'ensemble $\mathcal{V}(r)$ donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(r) = \{\varphi \in V^2 \ / \ \|\nabla \text{rot } (\varphi - z_\alpha)\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\Delta \text{rot } (\varphi - z_\alpha)\|_{L^2} \leq R \\ \text{et} \quad \|\varphi - z_\alpha\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(\varphi - z_\alpha)\|_{L^2} \leq r\} \end{aligned} \tag{5.78}$$

On munit $\mathcal{V}(r)$ de la norme $\|\cdot\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla\cdot\|_{L^2}$.

Soit $t_0 > 0$ un réel qui sera fixé dans la suite.

On note $\mathcal{R}_\alpha = R_\alpha(t_0)$.

En s'inspirant de [30] et de [47], pour construire les variétés locales instables, on considère d'abord le système dynamique discret $\tilde{S}_\alpha(t_0)$, ensuite on utilise la propriété du semi-groupe pour obtenir le même résultat pour $\tilde{S}_\alpha(t)$.

Ainsi, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 5.3.7. *Si $\{x_n, n \leq 0\}$ est une orbite négative bornée pour le système dynamique discret $\tilde{S}_\alpha(t_0)$, alors, pour tout $n \leq 0$, on a*

$$x_n = L_{1\alpha}^n P_{1\alpha} x_0 - \sum_{k=n}^{k=-1} L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha(x_k) + \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha(x_k). \quad (5.79)$$

Si $\{x_n, n \geq 0\}$ est une orbite positive bornée pour le système dynamique discret $\tilde{S}_\alpha(t_0)$, alors, pour tout $n \geq 0$, on a

$$x_n = - \sum_{k=n}^{k=\infty} L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha(x_k) + L_{2\alpha}^n P_{2\alpha} x_0 + \sum_{k=0}^{k=n-1} L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha(x_k). \quad (5.80)$$

De plus, toute suite donnée par (5.79) (respectivement (5.80)) est une orbite négative (respectivement positive) bornée pour le système dynamique discret S_α .

Preuve: La preuve de ce lemme peut être trouvée dans [30] et dans [47]. \square

On commence par introduire les notations suivantes.

Pour tout $x_1 \in P_{1\alpha} V^3$ et $x_2 \in P_{2\alpha} V^3$, on pose

$$\begin{aligned} & |x_1|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla x_1|_{L^2} \\ &= \sup_{k \geq 0} (\|L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x_1\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x_1\|_{L^2}) \beta_1^k, \\ & |\nabla \text{rot } x_1|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\Delta \text{rot } x_1|_{L^2} \\ &= \sup_{k \geq 0} (\|\nabla \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x_1\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x_1\|_{L^2}) \beta_1^k, \\ & |x_2|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla x_2|_{L^2} \\ &= \sup_{k \geq 0} (\|L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x_2\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x_2\|_{L^2}) \beta_1^k, \\ & |\nabla \text{rot } x_2|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\Delta \text{rot } x_2|_{L^2} \\ &= \sup_{k \geq 0} (\|\nabla \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x_2\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\Delta \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x_2\|_{L^2}) \beta_1^k. \end{aligned}$$

Finalement, on munit V^1 de la norme équivalente suivante

$$\begin{aligned} & |x|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla x|_{L^2} = \\ & \max(|P_{1\alpha} x|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla P_{1\alpha} x|_{L^2}, |P_{2\alpha} x|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla P_{2\alpha} x|_{L^2}), \end{aligned} \quad (5.81)$$

De plus, on munit V^3 de la norme équivalente suivante

$$\begin{aligned} & | \nabla \text{rot } x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } x |_{L^2} = \\ & \max(| \nabla \text{rot } P_{1\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } P_{1\alpha} x |_{L^2}, \\ & | \nabla \text{rot } P_{2\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } P_{2\alpha} x |_{L^2}), \end{aligned} \quad (5.82)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & | L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x |_{L^2} \leq \beta_1^{-k} (| x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla x |_{L^2}), \\ & | \nabla \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } L_{1\alpha}^{-k} P_{1\alpha} x |_{L^2} \\ & \leq \beta_1^{-k} (| \nabla \text{rot } x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } x |_{L^2}). \end{aligned} \quad (5.83)$$

De même,

$$\begin{aligned} & | L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x |_{L^2} \leq \beta_2^k (| x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla x |_{L^2}), \\ & | \nabla \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } L_{2\alpha}^k P_{2\alpha} x |_{L^2} \\ & \leq \beta_2^k (| \nabla \text{rot } x |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot } x |_{L^2}). \end{aligned} \quad (5.84)$$

On pose $\mathcal{V}^1(r) = P_{1\alpha} V^3 \cap \mathcal{V}(r)$ et $\mathcal{V}^2(r) = P_{2\alpha} V^3 \cap \mathcal{V}(r)$ où $\mathcal{V}(r)$ est donné par (5.78).

On fixe aussi deux nombres positifs γ_1 et γ_2 tels que

$$0 < \beta_2 < \gamma_2 < 1 < \gamma_1 < \beta_1, \quad (5.85)$$

On a le théorème suivant.

Théorème 5.3.8. *Soit z_α le point d'équilibre pour le système $S_\alpha(t)$, $t \geq 0$, obtenu dans la première partie, et soient $R > 0$, $t_0 > 0$ deux réels fixés assez grands. Alors, il existe deux constantes $\delta_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$ telles que pour tout $\alpha \leq \alpha_1$,*

il existe une application $h_1 : \mathcal{V}^1(\delta) \rightarrow \mathcal{V}^2(\delta)$, où $0 < \delta < \delta_1$, différentiable en 0, telle que $h_1(0) = 0$, $Dh_1(0) = 0$.

De plus, le graphe $\mathcal{G}_1(\delta) \subset \mathcal{V}(\delta)$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{G}_1(\delta) = \{x_0 \in \mathcal{V}(\delta); \exists \text{ une orbite négative } \gamma^-(x_0) \text{ passant par}$

x_0 telle que $\gamma^-(x_0) \subset \mathcal{V}(\delta)$,

(ii) Si $x_0 \in \mathcal{G}_1(\delta)$, alors, il existe une unique orbite négative $\gamma^-(x_0)$ de x_0 dans $\mathcal{V}(\delta)$ et

$$\limsup_{|n| \rightarrow -\infty} \frac{1}{n} \log(|\nabla \text{rot } \tilde{S}_\alpha(t_0)^n x_0|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\Delta \text{rot } \tilde{S}_\alpha(t_0)^n x_0|_{L^2}) \leq \log \beta_1,$$

(iii) L'application h_1 vérifiant les propriétés ci-dessus est unique et vérifie les inégalités (5.105) et (5.106) ci-dessous.

Preuve: Posons $\mathcal{S} = \{\xi = (\xi_0, \xi_{-1}, \dots, \xi_n, \dots) \mid \sup_{n \leq 0} (|\xi_n|_{V^2} + \sqrt{\alpha} |\xi_n|_{V^3}) < \infty\}$.

Soit y_1 fixé dans $P_{1\alpha}V^3$.

On note par \mathcal{S}_{y_1} l'ensemble $\mathcal{S}_{y_1} = \{\xi \in \mathcal{S} \mid P_{1\alpha}\xi_0 = y_1\}$.

D'après le lemme 5.3.7, $\xi \in \mathcal{S}$ est une orbite négative si et seulement si ξ satisfait la relation (5.79).

Pour y_1 fixé, on introduit alors l'application suivante

$$\mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$$

telle que

$$\mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)_n = L_1^n y_1 - \sum_{k=n}^{k=-1} L_1^{n-1-k} P_1 \mathcal{R}_\alpha(\xi_k) + \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} L_2^{n-1-k} P_2 \mathcal{R}_\alpha(\xi_k) \quad (5.86)$$

Pour tout $\delta > 0$ et tout $R > 0$, on introduit l'ensemble $\mathcal{S}_\gamma(\delta)$ défini par

$$\mathcal{S}_\gamma(\delta) = \{\xi \in \mathcal{S} \mid |\xi|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi|_{\mathcal{S}_\gamma} \leq \delta \text{ et } |\text{rot} \nabla \xi|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\text{rot} \Delta \xi|_{\mathcal{S}_\gamma} \leq R\},$$

où

$$|\xi|_{\mathcal{S}_\gamma} = \sup_{n \leq 0} |\xi_n|_{L^2} \gamma^{-n}, \quad (5.87)$$

et γ est une constante telle que $1 \leq \gamma \leq \gamma_1 < \beta_1$. On munit $\mathcal{S}_\gamma(\delta)$ de la norme $|\cdot|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \cdot|_{\mathcal{S}_\gamma}$.

Pour tout y_0 dans $\mathcal{V}(\delta)$, l'inégalité (5.70) montre que

$$\begin{aligned}
 & \|\mathcal{R}_\alpha y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla \mathcal{R}_\alpha y_0\|_{L^2}^2 \leq \\
 & \left[\|\text{rot}(y_0 - \alpha \Delta y_0)\|_{L^2}^2 (\|y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla y_0\|_{L^2}^2) \leq \right. \\
 & (\|\text{rot} y_0\|_{L^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot} y_0\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot} y_0\|_{L^2}^2) (\|y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla y_0\|_{L^2}^2) \exp(C_6 t_0) \leq \\
 & \left. C (\|y_0\|_{L^2} \|\Delta y_0\|_{L^2} + 2\alpha \|\nabla \text{rot} y_0\|_{L^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot} y_0\|_{L^2}^2) (\|y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla y_0\|_{L^2}^2) \right] \\
 & \quad \times \exp(C_6 t_0)
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

où $C > 0$ est une constante qui ne dépend pas de α et $C_6 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3}^2$, de $\alpha \|z_\alpha\|_{V^4}$ et de $\|\text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}$. Ceci est équivalent à dire que

$$\begin{aligned}
 & |P_{i\alpha} \mathcal{R}_\alpha y_0|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla P_{i\alpha} \mathcal{R}_\alpha y_0|_{L^2} \\
 & \leq A(\sqrt{\delta R} + \sqrt{\alpha R}) |y_0|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla y_0|_{L^2}
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

où A est une constante qui dépend de t_0 et de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha \|z_\alpha\|_{V^3}^2$, de $\alpha \|z_\alpha\|_{V^4}$ et de $\|\text{rot}(z_\alpha - \alpha \Delta z_\alpha)\|_{L^2}$.

Posons $\lambda(\delta, \alpha) = A(\sqrt{\delta R} + \sqrt{\alpha R})$.

Alors en choisissant δ et α assez petits, il existe $\delta_0 > 0$ et $\alpha_0 > 0$ telles que, pour tout $\delta \leq \delta_0$ et tout $\alpha \leq \alpha_0$, on a

$$K_{1,2}(\delta, \alpha) \leq K_{1,2}(\delta_0, \alpha_0) \leq \frac{1}{2}, \text{ où } K_{1,2}(\delta, \alpha) \equiv \lambda(\delta, \alpha) \max\left(\frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2 - \beta_2}\right). \tag{5.90}$$

Notons que le choix de δ_0 ne dépend pas de α .

D'autre part, pour tout y_0 dans $\mathcal{V}(\delta)$, l'inégalité (5.71) implique

$$\begin{aligned}
 & \|\nabla \text{rot} \mathcal{R}_\alpha y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} \mathcal{R}_\alpha y_0\|_{L^2}^2 \leq \\
 & 2\exp(-\beta t_0) (\|\nabla \text{rot} y_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\Delta \text{rot} y_0\|_{L^2}^2) \\
 & \quad + C_7 \exp(C_7 t_0) \|\text{rot}(y_0 - \alpha \Delta y_0)\|_{L^2}^2
 \end{aligned} \tag{5.91}$$

où $C_7 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V_2}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V_3}^2$ et de $\|\text{rot}(y_0 - \alpha\Delta y_0)\|_{L^2}^2$. Ce qui est équivalent à dire

$$\begin{aligned} & |\nabla \text{rot } P_{i\alpha} \mathcal{R}_\alpha y_0|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\Delta \text{rot } P_{i\alpha} \mathcal{R}_\alpha y_0|_{L^2} \\ & \leq B \exp(-\beta \frac{t_0}{2}) R + BC_7 \exp(C_7 \frac{t_0}{2}) (\sqrt{\delta} R + \sqrt{\alpha} R) \end{aligned}$$

où $B > 0$ est une constante.

Soit t_0 tel que

$$B \exp(-\beta \frac{t_0}{2}) < \frac{1}{6} \max(\frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2 - \beta_2}). \quad (5.92)$$

Ensuite, en choisissant δ et α assez petits, il existe $\bar{\delta} > 0$ et $\alpha_0 > 0$ tels que pour tout $\delta \leq \bar{\delta}$, pour tout $\alpha \leq \alpha_0$, on a

$$\begin{aligned} BC_7 \exp(C_7 \frac{t_0}{2}) \sqrt{\delta} & \leq \frac{\sqrt{R}}{6} \max(\frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2 - \beta_2}), \\ BC_7 \exp(C_7 \frac{t_0}{2}) \sqrt{\alpha} & \leq \frac{R}{6} \max(\frac{1}{\beta_1 - \gamma_1}, \frac{1}{\gamma_2 - \beta_2}). \end{aligned} \quad (5.93)$$

Notons que $\bar{\delta}$ ne dépend pas de α .

Posons $\delta_1 = \max(\delta_0, \bar{\delta})$. Soit $\delta \leq \delta_1$.

On va démontrer que pour tout y_1 fixé dans $\mathcal{V}^1(\delta)$, l'application $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$ définie par (5.86) admet un point fixe dans $\mathcal{S}_\gamma(D\delta)$, pour tout $D \geq 1$ tel que $D\delta \leq \delta_1$. Pour cela, on va appliquer le théorème de point fixe de Leray.

On commence par démontrer que $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)(\mathcal{S}_\gamma(D\delta)) \subset \mathcal{S}_\gamma(D\delta)$.

Tout d'abord,

$$|\mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} \leq D\delta.$$

En effet, en utilisant l'estimation (5.89), on a

$$\begin{aligned}
& \gamma^{-n} (| P_2 \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)_n |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla P_2 \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)_n |_{L^2}) \\
&= \gamma^{-n} (| \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha(\xi_k) |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} \nabla L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha(\xi_k) |_{L^2}) \\
&\leq \gamma^{-n} \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} \beta_2^{n-1-k} \lambda(D\delta, \alpha) \gamma^k (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \\
&\leq \frac{\lambda(D\delta, \alpha)}{\gamma - \beta_2} (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \\
&\leq K_{1,2}(D\delta) (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \leq \frac{1}{2} D\delta
\end{aligned} \tag{5.94}$$

et

$$\begin{aligned}
& \gamma^{-n} (| P_1 \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)_n |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla P_1 \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1)_n |_{L^2}) \\
&= \gamma^{-n} (| L_{1\alpha}^n y_1 - \sum_{k=n}^{k=-1} L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha(\xi_k) |_{L^2} \\
&\quad + \sqrt{\alpha} | \nabla (L_{1\alpha}^n y_1 - \sum_{k=n}^{k=-1} L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha(\xi_k)) |_{L^2}) \\
&\leq (\frac{\beta_1}{\gamma})^n (| y_1 |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla y_1 |_{L^2}) \\
&\quad + \lambda(D\delta, \alpha) \beta_1^{-1} \sum_{k=n}^{k=-1} (\frac{\beta_1}{\gamma})^{n-k} (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \tag{5.95} \\
&\leq (\frac{\beta_1}{\gamma})^n (| y_1 |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla y_1 |_{L^2}) \\
&\quad + (1 - (\frac{\beta_1}{\gamma})^n) \frac{\lambda(D\delta, \alpha)}{\beta_1 - \gamma} (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \\
&\leq \max \left(| y_1 |_{L^2} + \sqrt{\alpha} | \nabla y_1 |_{L^2}, \frac{\lambda(D\delta, \alpha)}{\beta_1 - \gamma} (| \xi |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \xi |_{\mathcal{S}_\gamma}) \right) \\
&< D\delta
\end{aligned}$$

Pour démontrer que

$$| \nabla \text{rot} \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \Delta \text{rot} \mathcal{F}_\alpha(\xi, y_1) |_{\mathcal{S}_\gamma} \leq R,$$

il suffit de procéder comme avant en utilisant l'inégalité (5.71) et les conditions (5.92) et (5.93).

Par suite, $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{S}_\gamma(D\delta)) \subset \mathcal{S}_\gamma(D\delta)$.

Montrons maintenant que $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$ est continue pour la norme $| \cdot |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \cdot |_{\mathcal{S}_\gamma}$. Soient ξ_1 et ξ_2 dans $\mathcal{S}_\gamma(D\delta)$.

L'inégalité (5.72) implique que

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{R}_\alpha \xi_1 - \mathcal{R}_\alpha \xi_2 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla (\mathcal{R}_\alpha \xi_1 - \mathcal{R}_\alpha \xi_2) \|_{L^2}^2 \\ & \leq C_8 \left[(D^2 \delta^2 + \alpha) (\| \xi_1 - \xi_2 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2) \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 (\| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2) \right] \exp(C_8 t_0) \end{aligned} \quad (5.96)$$

où $C_8 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\| \xi_1 \|_{V^2}^2 + \alpha \| \xi_1 \|_{V^3}^2$, de $\| \xi_2 \|_{V^2}^2 + \alpha \| \xi_2 \|_{V^3}^2$, de $\| z_\alpha \|_{V^2}^2 + \alpha \| z_\alpha \|_{V^3}^2$ et de $\| f \|_{V^1}$.

Ce qui est équivalent à dire

$$\begin{aligned} & | P_{i\alpha} (\mathcal{R}_\alpha \xi_1 - \mathcal{R}_\alpha \xi_2) |_{L^2}^2 + \alpha | \nabla P_{i\alpha} (\mathcal{R}_\alpha \xi_1 - \mathcal{R}_\alpha \xi_2) |_{L^2}^2 \\ & \leq C_9 \left[(D^2 \delta^2 + \alpha) (\| \xi_1 - \xi_2 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2) \right. \\ & \quad \left. + \alpha^2 (\| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2 + \alpha \| \Delta (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2) \right] \quad (5.97) \\ & \leq C_9 \left[(D^2 \delta^2 + \alpha) (\| \xi_1 - \xi_2 \|_{L^2}^2 + \alpha \| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2}^2) \right. \\ & \quad \left. + \alpha^3 \| \nabla (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2} \| \Delta (\xi_1 - \xi_2) \|_{L^2} \right] \end{aligned}$$

En procédant comme dans (5.94) et (5.95) et en utilisant l'inégalité (5.97), on conclut que $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$ est continue pour la norme

$$| \cdot |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla \cdot |_{\mathcal{S}_\gamma}.$$

Le théorème de point fixe de Leray implique alors qu'il existe un point fixe

$\xi^* \in \mathcal{S}_\gamma(D\delta)$ de $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$.

Montrons maintenant que ce point fixe est unique.

Supposons qu'il existe deux points fixes ξ^* et $\bar{\xi}$ de $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$ dans $\mathcal{S}_\gamma(D\delta)$. Alors, $\xi^* \equiv (\xi_k^*)_{n \leq 0}$ et $\bar{\xi} \equiv (\bar{\xi}_k)_{n \leq 0}$ sont deux orbites négatives bornées dans la norme $\|\cdot\|_{V^2} + \sqrt{\alpha}\|\cdot\|_{V^3}$. Donc, ξ^* et $\bar{\xi}$ appartiennent à l'attracteur global compact \mathcal{A}_α . Comme $f \in H_{per}^3$ et α est assez petit, on sait, d'après les travaux de Paicu, Raugel et Rekaló [44], que \mathcal{A}_α est borné dans V^5 . La proposition 5.2.6 implique alors que, pour tout $n \leq 0$,

$$\begin{aligned} \alpha \|\Delta(\xi_n^* - \bar{\xi}_n)\|_{L^2}^2 &\leq C_5 \sup_{k \in]-\infty, n]} \left(\|\xi_k^* - \bar{\xi}_k\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad \times \|\Delta_{rot}(\bar{\xi}_k - \alpha \Delta \bar{\xi}_k)\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (5.98)$$

où C_5 est une constante positive indépendante de α .

Par suite, on peut écrire

$$\|\xi_n^* - \bar{\xi}_n\|_{L^2} = \|\mathcal{F}_\alpha(\xi^*, y_1)_n - \mathcal{F}_\alpha(\bar{\xi}, y_1)_n\|_{L^2} \leq \|H_1\|_{L^2} + \|H_2\|_{L^2} \quad (5.99)$$

où

$$\begin{aligned} H_1 &= - \sum_{k=n}^{k=-1} L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha}(\mathcal{R}_\alpha(\xi_k^*) - \mathcal{R}_\alpha(\bar{\xi}_k)) \\ H_2 &= \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha}(\mathcal{R}_\alpha(\xi_k^*) - \mathcal{R}_\alpha(\bar{\xi}_k)) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.72) et (5.98), on peut écrire

$$\begin{aligned} &\|H_1\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla H_1\|_{L^2} \\ &\leq C \sum_{k=n}^{k=-1} \beta_1^{n-1-k} \left[(\delta + \sqrt{\alpha}) (\|\xi_k^* - \bar{\xi}_k\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2}) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^{\frac{3}{2}} \|\Delta(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2} \right] \\ &\leq C(\delta + \sqrt{\alpha} + \alpha) \sup_{k \leq 0} (\|\xi_k^* - \bar{\xi}_k\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2}) \end{aligned} \quad (5.100)$$

On montre de la même façon que

$$\begin{aligned}
 & \|H_2\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla H_2\|_{L^2} \\
 & \leq C \sum_{k=-\infty}^{k=n-1} \beta_2^{n-1-k} \left[(\delta + \sqrt{\alpha})(\|\xi_k^* - \bar{\xi}_k\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2}) \right. \\
 & \quad \left. + \alpha^{\frac{3}{2}}\|\Delta(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2} \right] \\
 & \leq C(\delta + \sqrt{\alpha} + \alpha)\sup_{k \leq 0} (\|\xi_k^* - \bar{\xi}_k\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla(\xi_k^* - \bar{\xi}_k)\|_{L^2})
 \end{aligned} \tag{5.101}$$

En choisissant α et δ assez petits tels que

$$C(\delta + \sqrt{\alpha} + \alpha) \leq \frac{1}{4},$$

on déduit que $\xi_* = \bar{\xi}$.

Donc, $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_1)$ admet un unique point fixe dans $\mathcal{S}_1(\delta_1)$. Par suite, le lemme 5.3.7 implique que $\xi^*(y_1, \delta_1)$ est l'unique orbite négative bornée de S_α dans $\mathcal{V}(\delta_1)$. On a donc, pour tout $\gamma \in [1, \gamma_1]$ et pour tout $D \geq 1$ avec $D\delta \leq \delta_1$,

$$\xi_{\gamma_1}^*(y_1, D\delta) = \xi_1^*(y_1, \delta_1) = \xi^*(y_1). \tag{5.102}$$

De plus, (5.94) et (5.95) impliquent que, pour tout $0 < \gamma \leq \gamma_1$,

$$\begin{aligned}
 & |\xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} \leq \\
 & \max \left(|y_1|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla y_1|_{L^2}, K_{1,2}(\delta, \alpha) (|\xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma}) \right),
 \end{aligned}$$

et comme $K_{1,2}(\delta, \alpha) < 1$, on a alors

$$|\xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi^*(y_1)|_{\mathcal{S}_\gamma} \leq |y_1|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla y_1|_{L^2}. \tag{5.103}$$

On pose maintenant, pour tout $y_1 \in \mathcal{V}(\delta)$, $0 < \delta \leq \delta_1$,

$$h_1(y_1) = P_{2\alpha}(\xi_1^*(y_1)_0), \text{ et } g_\alpha(y_1) = y_1 + h_1(y_1) = \xi_1^*(y_1)_0. \tag{5.104}$$

L'application $h_1 : \mathcal{V}^1(\delta) \rightarrow \mathcal{V}^2(\delta)$ satisfait les propriétés suivantes, pour tout y_1, y_1^* dans $\mathcal{V}^1(\delta)$:

$$|h_1(y_1)|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla h_1(y_1)|_{L^2} \leq K_{1,2}(\delta) (|y_1|_{L^2} + \sqrt{\alpha} |\nabla y_1|_{L^2}), \tag{5.105}$$

$$\begin{aligned} & \| h_1(y_1) - h_1(y_1^*) \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \nabla(h_1(y_1) - h_1(y_1^*)) \|_{L^2} \\ & \leq C(\delta + \sqrt{\alpha}) (\| y_1 - y_1^* \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \Delta(y_1 - y_1^*) \|_{L^2}). \end{aligned} \quad (5.106)$$

L'estimation (5.105) est une conséquence de (5.94) et de (5.103). L'estimation (5.106) se démontre en utilisant l'inégalité (5.97) et en procédant comme dans (5.94) et (5.95).

Notons que $h_1(0) = 0$ et que h_1 est différentiable en 0 et que $Dh_1(0) = 0$.

□

On considère maintenant le cas où $S_\alpha(t), t \geq 0$, est un système dynamique continu. Avant d'énoncer un théorème analogue au théorème 5.3.8, on démontre la propriété suivante :

Il existe deux constantes $d_0 > 0$ et $D_0 \geq 1$, telles que, pour tout $y \in \mathcal{V}(d_0)$, pour tout $s \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned} & \| \tilde{S}_\alpha(s)y \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \nabla \tilde{S}_\alpha(s)y \|_{L^2} \leq D_0 (\| y \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \nabla y \|_{L^2}) \\ & \| \nabla \text{rot } \tilde{S}_\alpha(s)y \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \Delta \text{rot } \tilde{S}_\alpha(s)y \|_{L^2} \\ & \leq D_0 (\| \nabla \text{rot } y \|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \| \Delta \text{rot } y \|_{L^2}) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Cette propriété provient des estimations (5.57) et (5.59).

Le passage des variétés locales instables pour $\tilde{S}_\alpha(t_0)$ à celles pour le système continu $\tilde{S}_\alpha(t)$ est classique. Il suffit maintenant d'utiliser des résultats du cours [47] (voir aussi [30]).

Théorème 5.3.9. *Pour tout δ tel que $0 < \delta \leq \delta_1$, $D_0\delta \leq \delta_1$, pour tout $\alpha \leq \alpha_1$, on a*

$$G_1(\delta) \equiv \{x_0 \in \mathcal{V}(\delta) \mid \tilde{S}_\alpha(t)x_0 \in \mathcal{V}(D_0\delta), t \leq 0\} = \mathcal{G}_1(\delta),$$

i.e. $G_1(\delta)$ est le graphe de l'application h_1 donnée dans le théorème 5.3.8.

Si $x_0 \in G_1(\delta)$, il existe une unique orbite négative $\gamma^-(x_0)$ de x_0 dans $\mathcal{V}(D_0\delta, \mathbb{R})$ et

$$\limsup_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{|t|} \log(\| \tilde{S}_\alpha(t)x_0 \|_{V^2} + \sqrt{\alpha} \| \tilde{S}_\alpha(t)x_0 \|_{V^3}) \leq \log \beta_1.$$

Remarque 5.3.10. En introduisant une application $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_2)$, pour tout $y_2 \in \mathcal{V}^2(\delta)$ comme on a fait dans la démonstration de la construction des variétés locales instables, on peut aussi démontrer que $\mathcal{F}_\alpha(\cdot, y_2)$ admet un point fixe (une orbite positive) mais on ne sait pas montrer l'unicité de ce point fixe.

5.3.3 Comparaison des variétés locales instables

Dans cette partie, on démontre un résultat de convergence des variétés locales instables correspondantes aux équations des fluides de grade deux vers celles associées aux équations de Navier-Stokes.

Résultats préliminaires

Lemme 5.3.11. *Pour tout $v_0 \in V^3$ et pour tout $i = 1, 2$, on a*

$$\|(L_{i\alpha} - L_{i0})v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla((L_{i\alpha} - L_{i0})v_0)\|_{L^2}^2 \leq \epsilon(\alpha)(\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_0\|_{L^2}^2) \quad (5.108)$$

$$\|(L_{1\alpha}^{-1} - L_{10}^{-1})v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla((L_{1\alpha}^{-1} - L_{10}^{-1})v_0)\|_{L^2}^2 \leq \epsilon(\alpha)(\|v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla v_0\|_{L^2}^2) \quad (5.109)$$

où $\epsilon(\alpha) > 0$ tend vers zéro lorsque α tend vers zéro.

Preuve: L'inégalité (5.108) se déduit en utilisant (5.75) et (5.20). Pour démontrer (5.109), il suffit de remarquer que

$$L_{1\alpha}^{-1} - L_{10}^{-1} = L_{1\alpha}^{-1}(Id - L_{1\alpha}L_{10}^{-1}),$$

et en utilisant (5.108),

$$\|(Id - L_{1\alpha}L_{10}^{-1})v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla((Id - L_{1\alpha}L_{10}^{-1})v_0)\|_{L^2}^2 \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \alpha \text{ tend vers zéro.}$$

Notons que pour tout $u_0 \in V^3$, $\|L_{1\alpha}^{-1}u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla L_{1\alpha}^{-1}u_0\|_{L^2}$ est uniforme par rapport à α parce que $\|L_{1\alpha}u_0\|_{L^2} + \sqrt{\alpha}\|\nabla L_{1\alpha}u_0\|_{L^2}$ est uniforme par rapport à α . \square

Lemme 5.3.12. *Pour tout $v_0 \in V^3$ et $f \in H_{per}^3$, on a*

$$\|(\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_0)v_0\|_{L^2}^2 + \alpha \|\nabla((\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_0)v_0)\|_{L^2}^2 \leq C_{10}\alpha \exp(C_{10}t_0) \quad (5.110)$$

où $C_{10} > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha\|z_\alpha\|_{V^3} + \alpha^2\|z_\alpha\|_{V^4}^2$, de $\|f\|_{V^1}$, de $\|z_0\|_{V^1}$ et de $\|\text{rot}(v_0 - \alpha\Delta v_0)\|_{L^2}$.

Preuve: On a

$$(\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_0)v_0 = (\tilde{S}_\alpha(t_0) - \tilde{S}_0(t_0))v_0 - (\mathcal{L}_\alpha(t_0) - \mathcal{L}_0(t_0))v_0 \quad (5.111)$$

Posons $\tilde{u}_\alpha(t) = \tilde{S}_\alpha(t_0)v_0$, $\tilde{u}(t) = \tilde{S}_0(t_0)v_0$ et $U(t) = \tilde{u}_\alpha(t) - \tilde{u}(t)$. Alors, U vérifie l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \partial_t(U - \alpha\Delta U) - \nu\Delta U + \operatorname{rot}U \times (U + z_\alpha + \tilde{u}) + \operatorname{rot}(z_\alpha + \tilde{u}) \times U \\ & + \operatorname{rot}(z_\alpha - z_0) \times \tilde{u} + \operatorname{rot}\tilde{u} \times (z_\alpha - z_0) - \alpha \operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha \times \tilde{u}_\alpha - \alpha \operatorname{rot}\Delta z_\alpha \times \tilde{u}_\alpha \\ & - \alpha \operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha \times z_\alpha - \alpha\partial_t\Delta\tilde{u} = -\nabla\bar{p} \end{aligned}$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^2)$ de l'équation (5.112) avec U et en utilisant l'identité (5.12), on trouve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\partial_t(\|U\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla U\|_{L^2}^2) + \nu\|\nabla U\|_{L^2}^2 \leq C\|U\|_{L^2}\|\nabla U\|_{L^2}(\|\nabla z_\alpha\|_{L^2} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2}) \\ & + C\|z_\alpha - z_0\|_{L^2}\|\Delta\tilde{u}\|_{L^2}\|\nabla U\|_{L^2} + C\alpha(\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}\|\operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} \\ & + \|\operatorname{rot}\Delta z_\alpha\|_{L^2}\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^2} + \|\operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha\|_{L^2}\|\nabla z_\alpha\|_{L^2} + \|\partial_t\nabla\tilde{u}\|_{L^2})\|\nabla U\|_{L^2} \end{aligned}$$

L'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégration en temps et l'utilisation du lemme de Gronwall implique que, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} & \|U(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 \leq C\left[\|z_\alpha - z_0\|_{L^2}^2 \int_0^t \|\Delta\tilde{u}(s)\|_{L^2}^2 ds \right. \\ & + \alpha^2(\|\nabla\tilde{u}_\alpha\|_{L^\infty(L^2)}^2 \int_0^t \|\operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 ds + \|\operatorname{rot}\Delta z_\alpha\|_{L^2}^2 \int_0^t \|\nabla\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 \\ & \left. + \|\nabla z_\alpha\|_{L^2}^2 \int_0^t \|\operatorname{rot}\Delta\tilde{u}_\alpha(s)\|_{L^2}^2 + \int_0^t \|\partial_t\nabla\tilde{u}(s)\|_{L^2}^2 ds\right] \\ & \times \exp(Ct\|\nabla z_\alpha\|_{L^2}^2 + C \int_0^t \|\nabla\tilde{u}(s)\|_{L^2}^2 ds) \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.5), (5.58) et la régularité de la solution \tilde{u} , on peut écrire que

$$\|U(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\|\nabla U(t)\|_{L^2}^2 \leq C_9\alpha \exp(C_9t) \quad (5.112)$$

où $C_9 > 0$ est une constante qui ne dépend que de $\|z_\alpha\|_{V^2}^2 + \alpha^2\|z_\alpha\|_{V^4}^2$, de $\alpha\|z_\alpha\|_{V^3}$, de $\|f\|_{V^1}$ et de $\|\operatorname{rot}(v_0 - \alpha\Delta v_0)\|_{L^2}$.

En utilisant (5.111), (5.112) et (5.20), on obtient l'inégalité (5.110). \square

Convergence des variétés locales instables

Maintenant, on énonce le théorème qui illustre la convergence des variétés locales instables des équations des fluides de grade deux vers celles des équations de Navier-Stokes.

Théorème 5.3.13. *Soit $0 < \delta < \delta_1$ où δ_1 est donné dans le théorème 5.3.8. Soit $y \in \mathcal{V}(\delta)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$| \xi_\alpha^*(P_{1\alpha}y) - \xi_0^*(P_{10}y) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\xi_\alpha^*(P_{1\alpha}y) - \xi_0^*(P_{10}y)) |_{\mathcal{S}_\gamma} \leq C\epsilon(\alpha), \quad (5.113)$$

où $\epsilon(\alpha)$ tend vers zéro lorsque α tend vers zéro.

De plus,

$$\|h_{1\alpha}(P_{1\alpha}y) - h_{10}(P_{10}y)\|_{L^2} + \sqrt{\alpha} \|\nabla(h_{1\alpha}(P_{1\alpha}y) - h_{10}(P_{10}y))\|_{L^2} \leq C\epsilon(\alpha). \quad (5.114)$$

Preuve: On a

$$\begin{aligned} & | \xi_\alpha^* - \xi_0^* |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\xi_\alpha^* - \xi_0^*) |_{\mathcal{S}_\gamma} = \\ & | \mathcal{F}_\alpha(\xi_\alpha^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\mathcal{F}_\alpha(\xi_\alpha^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0)) |_{\mathcal{S}_\gamma} \leq \\ & | \mathcal{F}_\alpha(\xi_\alpha^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) |_{\mathcal{S}_\gamma} + | \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0) |_{\mathcal{S}_\gamma} \\ & + \sqrt{\alpha} | \nabla(\mathcal{F}_\alpha(\xi_\alpha^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha)) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0)) |_{\mathcal{S}_\gamma} \end{aligned}$$

En utilisant (5.100) et (5.101), on obtient

$$\begin{aligned} & | \xi_\alpha^* - \xi_0^* |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\xi_\alpha^* - \xi_0^*) |_{\mathcal{S}_\gamma} \leq \\ & \frac{1}{2} (| (\xi_\alpha^* - \xi_0^*) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\xi_\alpha^* - \xi_0^*) |_{\mathcal{S}_\gamma}) \\ & + | \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0) |_{\mathcal{S}_\gamma} + \sqrt{\alpha} | \nabla(\mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0)) |_{\mathcal{S}_\gamma} \end{aligned} \quad (5.115)$$

On commence par borner le terme $| \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0) |_{\mathcal{S}_\gamma}$.

En utilisant (5.86), on peut écrire

$$\begin{aligned} & | \mathcal{F}_\alpha(\xi_0^*, y_1^\alpha) - \mathcal{F}_0(\xi_0^*, y_1^0) |_{S_\gamma} \leq \\ & | L_{1\alpha}^n y_1^\alpha - L_{10}^n y_1^0 |_{S_\gamma} + \left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha - L_{10}^{n-1-k} P_{10} \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} \\ & + \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha - L_{20}^{n-1-k} P_{20} \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{2\alpha}^{n-1-k} P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha - L_{20}^{n-1-k} P_{20} \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} = \\ & \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{2\alpha}^{n-1-k} - L_{20}^{n-1-k}) P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} + \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{20}^{n-1-k} (P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha - P_{20} \mathcal{R}_0)) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} \end{aligned}$$

Posons

$$I_1 = \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{2\alpha}^{n-1-k} - L_{20}^{n-1-k}) P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma}$$

et

$$I_2 = \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{20}^{n-1-k} (P_{2\alpha} \mathcal{R}_\alpha - P_{20} \mathcal{R}_0)) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} .$$

En remarquant que

$$L_{2\alpha}^{n-1-k} - L_{20}^{n-1-k} = \sum_{j=0}^{n-1-k} L_{2\alpha}^{n-1-k-j} (L_{2\alpha} - L_{20}) L_{20}^j, \quad (5.116)$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_1 & \leq \gamma^{-n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1-k} \beta_2^{n-k-1-j} \epsilon_1 \beta_2^j \lambda(r, \alpha) \gamma^k (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma}) \\ & = \frac{\epsilon_1}{\beta_2} \lambda(r, \alpha) \sum_{k=-\infty}^{n-1} (n-k) \left(\frac{\beta_2}{\gamma}\right)^{n-k} (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma}) \\ & = \frac{\epsilon_1}{\beta_2} \lambda(r, \alpha) \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{\beta_2}{\gamma}\right)^k (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma}) \end{aligned}$$

D'après le critère de D'Alembert, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} k(\frac{\beta_2}{\gamma})^k$ est convergente, donc il existe une constante M positive telle que $\sum_{k=1}^{+\infty} k(\frac{\beta_2}{\gamma})^k \leq M$ et on a

$$I_1 \leq \frac{\epsilon_1}{\beta_2} \lambda(r, \alpha) M (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma})$$

Maintenant, on va borner I_2 .

I_2 peut être écrite sous la forme suivante

$$\begin{aligned} I_2 &= \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{20}^{n-1-k} (P_{2\alpha} - P_{20}) \mathcal{R}_\alpha) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} + \left| \sum_{k=-\infty}^{n-1} (L_{20}^{n-1-k} P_{20} (\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_0)) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (5.89) et (5.75), on a

$$J_1 \leq \gamma^{-n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \beta_2^{n-k-1} \epsilon_2 \lambda(r, \alpha) \gamma^k (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma})$$

En utilisant le lemme 5.3.12

$$J_2 \leq \gamma^{-n} \sum_{k=-\infty}^{n-1} \beta_2^{n-k-1} \epsilon_3 \gamma^k$$

Par suite,

$$J_1 \leq \epsilon_2 \frac{\lambda(r, \alpha)}{\gamma - \beta_2} (|\xi_0^*|_{S_\gamma} + \sqrt{\alpha} |\nabla \xi_0^*|_{S_\gamma})$$

et

$$J_2 \leq \epsilon_3 \frac{\lambda(r, \alpha)}{\gamma - \beta_2}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} M_0 &= |L_{1\alpha}^n y_1^\alpha - L_{10}^n y_1^0|_{S_\gamma} + \left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{1\alpha}^{n-1-k} P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha - L_{10}^{n-1-k} P_{10} \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma} \leq \\ &\underbrace{|(L_{1\alpha}^n - L_{10}^n) y_1^\alpha|_{S_\gamma} + |L_{10}^n (y_1^\alpha - y_1^0)|_{S_\gamma}}_{M_1} \\ &+ \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{1\alpha}^{n-1-k} - L_{10}^{n-1-k}) P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma}}_{M_2} + \underbrace{\left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{10}^{n-1-k} (P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha - P_{10} \mathcal{R}_0)) \xi_{0,k}^* \right|_{S_\gamma}}_{M_3} \end{aligned} \tag{5.117}$$

On commence par borner M_1 .

On a

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \left| \sum_{k=0}^{-n} (L_{1\alpha}^{n+k} (L_{1\alpha}^{-1} - L_{10}^{-1}) L_{10}^{-k}) y_1^\alpha \right|_{\mathcal{S}_\gamma} + \left| L_{10}^n (y_1^\alpha - y_1^0) \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &\leq \epsilon_4 \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n (-n+1) \left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + \epsilon_4 \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n \left| y \right|_{V^3} \\
 &\leq \epsilon_4 \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n (\left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + \left| y \right|_{V^3}) - \epsilon_4 n \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n \left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3}
 \end{aligned}$$

Or, la suite $(-n(\frac{\beta_1}{\gamma})^n)_{n \leq 0}$ est convergente, donc il existe une constante positive \tilde{M} telle que $-n(\frac{\beta_1}{\gamma})^n \leq \tilde{M}, \forall n \leq 0$ et M_1 s'écrit

$$M_1 \leq \epsilon_4 \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n (\left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + \left| y \right|_{V^3}) + \epsilon_4 \tilde{M} \left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 M_2 &= \left| \sum_{k=n}^{-1} \sum_{j=0}^{k-n+1} (L_{1\alpha}^{n-k-1+j} (L_{1\alpha}^{-1} - L_{10}^{-1}) L_{10}^{-j}) P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha \xi_{0,k}^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &\leq \epsilon_4 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \sum_{k=n}^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^{n-k} (k-n+2) \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &\leq \epsilon_4 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \sum_{s=n+1}^0 \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^s (-s+2) \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &\leq 2\epsilon_4 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1 - \gamma} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \left(1 - \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n\right) + \epsilon_4 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \sum_{s=n+1}^0 (-s) \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^s \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma}
 \end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{s=-\infty}^0 (-s) \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^s$ est convergente, donc il existe une constante positive M telle que

$$\sum_{s=n+1}^0 (-s) \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^s \leq \sum_{s=-\infty}^0 (-s) \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^s \leq M,$$

et on a donc

$$M_2 \leq 2\epsilon_4 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1 - \gamma} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \left(1 - \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n\right) + \epsilon_4 M \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma}$$

Le terme M_3 peut être écrit de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 M_3 &= \left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{10}^{n-1-k} (P_{1\alpha} \mathcal{R}_\alpha - P_{10} \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &= \left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{10}^{n-1-k} (P_{1\alpha} - P_{10}) \mathcal{R}_\alpha \xi_{0,k}^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} + \left| \sum_{k=n}^{-1} (L_{10}^{n-1-k} P_{10} (\mathcal{R}_\alpha - \mathcal{R}_0) \xi_{0,k}^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \\
 &\leq \epsilon_5 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \sum_{k=n}^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^{n-k} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} + \frac{\epsilon_3}{\beta_1} \sum_{k=n}^{-1} \\
 &\leq \left(1 - \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n\right) \left(\epsilon_5 \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} + \frac{\epsilon_3}{\beta_1}\right) \left(\frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1 - \gamma}\right)
 \end{aligned}$$

Soit $\epsilon_0 = \max(\epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5)$. Par suite, (5.117) s'écrit

$$\begin{aligned}
 M_0 &\leq \epsilon (\tilde{M} \left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + M \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma}) \\
 &\quad + \epsilon (\left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + \left| y \right|_{V^3}) \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n \\
 &\quad + \epsilon \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1 - \gamma} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \left(2 + \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) \left(1 - \left(\frac{\beta_1}{\gamma}\right)^n\right) \\
 &\leq \epsilon (\tilde{M} \left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + M \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma}) \\
 &\quad + \epsilon \max \left(\left| y_1^\alpha \right|_{P_1 V^3} + \left| y \right|_{V^3}, \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1 - \gamma} \left| \xi_0^* \right|_{\mathcal{S}_\gamma} \left(2 + \frac{\lambda(r,\alpha)}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_1}\right) \right)
 \end{aligned}$$

En rassemblant toutes ces bornes, on obtient (5.113).

(5.114) se démontre en utilisant (5.113) et (5.75). \square

Chapitre 6

Bibliographie

Bibliographie

- [1] S.Alinhac et P. Gérard : *Pseudo-differential Operators and the Nash-Moser Theorem*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, volume 82
- [2] A.Babin, A.Mahalov et B.Nicolaenko : *Global splitting, integrability and regularity of 3D Euler and Navier-Stokes equations for uniformly rotating fluids*, Eur. J. Mech., B/Fluids, 1996, volume 3, pages 291–300
- [3] A.Babin, A.Mahalov et B.Nicolaenko : *Regularity and integrability of 3D Euler and Navier-Stokes equations for rotating fluids*, Asympt. Anal, 1997, volume 15, pages 103–150
- [4] A.Babin, A.Mahalov et B.Nicolaenko : *Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains*, Indiana Univ. Math. J., 1999, volume 48, pages 1133–1176
- [5] J.Y.Chemin, B.Desjardins, I.Gallagher et E.Grenier : *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Clarendon Press, Oxford Lectures Series In Mathematics And Its Applications 32, 2006
- [6] J.-M. Bernard : *Solutions globales variationnelles et classiques des fluides de grade deux*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1988, volume 327, pages 953–958
- [7] V.Busuioc : *Sur quelques problèmes en mécanique des fluides non newtoniens*, Université de Paris 6, 2000
- [8] V.Busuioc et D.Iftimie : *Global existence and uniqueness of solutions for the equations of third grade fluids*, Int. J. Non-Linear Mech. 39, 2004, volume 1, pages 1–12
- [9] V.Busuioc et D.Iftimie : *A non-Newtonian fluid with Navier boundary conditions*, Journal of Dynamics and Differential Equations 18, 2006, volume 2, pages 357–379

Bibliographie

- [10] V.Busuioc, D.Iftimie et M.Paicu : *On steady third grade fluids equations*, Nonlinearity 21, 2008, volume 7, pages 1621–1635
- [11] A.Carpio : *Asymptotic behavior for the vorticity equations in dimensions two and three*, Comm. Partial Differential Equations, 1994, volume 19(5-6), pages 827–872
- [12] A.Carpio : *Large-time behavior in incompressible Navier-Stokes equations*, SIAM J. Math. Anal., 1996, volume 27(2), pages 449–475
- [13] Th.Cazenave et A.Haraux : *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, Math. Appl.1, Ellipses, Paris, 1990
- [14] J.Y.Chemin, B.Desjardins, I.Gallagher et E.Grenier : *Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and the Navier-Stokes equations*, Clarendon Press, Oxford Lectures Series In Mathematics And Its Applications 32, 2006
- [15] D.Cioranescu et V.Girault : *Weak and classical solutions of a family of second grade fluids*, Int. J. Nonlinear Mechanics, 1997, volume 32, pages 317–335
- [16] D.Cioranescu et E.H.Ouazar : *Existence and uniqueness for fluids of second grade*, Nonlinear Partial Differential Equations, Collège de France Seminar Pitman, 1984, volume 109, pages 178–197
- [17] J.E.Dunn et R.L.Fosdick : *Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity two and fluids of second grade*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1974, volume 3, 56, pages 191–252
- [18] R.L.Fosdick et K.R.Rajakopal : *Anomalous features in the model of second order fluids*, Arch. Rat. Mech. Anal., 1979, volume 3, 70, pages 1–46
- [19] R.L.Fosdick et K.R.Rajakopal : *Thermodynamics and stability of fluids of and third grade*, Proc. Royal Soc. London, 1980, volume A 339, pages 351–377
- [20] G.P.Galdi : *Mathematical theory of second-grade fluids*, Stability and Wave propagation in Fluids and Solids, CISM Course and Lectures, springer-Verlag, New York, 1995, volume 344, pages 67–104
- [21] I.Gallagher : *Application of Schochet's methods to parabolic equations*, J. Math. Pures, Appl., 1998, volume 77, pages 989–1054
- [22] G.Galdi et A.Sequeira : *Further existence results for classical solutions of the equations of a second-grade fluid*, Arch. Rational Mech. Anal., 1994, volume 128, pages 297–312

- [23] G.Galdi, M. Grobbelaar-Van Dalsen et N.Sauer : *Existence and uniqueness of classical solutions of the equations of motion for second-grade fluids*, Arch. Rational Mech. Anal., 1993, volume 124, pages 221–237
- [24] Th.Gallay et G.Raugel : *Scaling variables and asymptotic expansions in damped wave equations*, J. Diff. Eq., 1998, volume 150, pages 42–97
- [25] Th.Gallay et C.Eugene Wayne : *Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on \mathbb{R}^2* , Arch. Ration. Mech. Anal., 2002, volume 163(3), pages 209–258
- [26] Th.Gallay et C.Eugene Wayne : *Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation*, Comm. Math. Phys., 2005, volume 255, pages 97–129
- [27] H.P. Greenspan : *The theory of Rotating fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1968
- [28] E.Grenier : *Rotating Fluids and Inertial Waves*, Proc. Acad. Sci, Paris, 1995, série 1 321, pages 711–714
- [29] E.Grenier : *Oscillatory perturbations of the Navier Stokes equations*, J. Math. Pures, Appl., 1997, volume 76, pages 477–498
- [30] J.Hale, R.Joly et G.Raugel : *manuscrit de livre*
- [31] J.Hale et G.Raugel : *Convergence in gradient-like systems with applications to PDE*, Z angew Math Phys.(ZAMP), 1992, volume 43, pages 63–124
- [32] J.Hale et G.Raugel : *A modified Poincaré method for the persistence of periodic orbits and applications*, J. Dyn. Diff. Equat. 2010, volume 22, pages 3–68
- [33] T.Hayat et K.Hutter : *Rotating flow of a second-order fluid on a porous plate*, Int. J. Non Lin. Mech., 2004, volume 39, pages 767–777
- [34] T.Hayat, K.Hutter, S.Nadeem et S.Asghar : *Unsteady hydromagnetic rotating flow of a conducting second grade fluid*, Z. angew. Math. Phys., 2004, volume 55, pages 626–641
- [35] T.Hayat, C.Fetecau et M.Sajid : *Analytic solution for MHD transient rotating flow of a second grade fluid in a porous space*, Nonlinear Analysis : Real World Applications, 2008, volume 9, pages 1619–1627
- [36] D.Henry : *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Mathematics, 1981, volume 840, Springer-Verlag edition

Bibliographie

- [37] D.Iftimie : *Existence et unicité globale des solutions pour les équations des fluides de grade 3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér.I Math. 330, 2000, volume 8, pages 741–744
- [38] D.Iftimie : *Remarques sur la limite $\alpha \rightarrow 0$ pour les fluides de grade deux*, Comm. Math. Phys., 2005, volume 255, pages 97–129
- [39] T.Kato : *Strong L^p - solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions*, Math. Z., 1984, volume 187(4), pages 471–480
- [40] T.Kato : *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer, 1995
- [41] I.Moise, R.Rosa et X.Wang : *Attractors for non-compact semigroups via energy equations*, Nonlinearity, 1998, volume 11, pages 1369–1393
- [42] M.Paicu : *Etude asymptotique pour les fluides anisotropes en rotation rapide dans le cas périodique*, J. Math. Pures Appl., 2004, volume 83, pages 163–242
- [43] M.Paicu et M. Hamza : *Global existence and uniqueness result of a class of third-grade fluids equations*, Nonlinearity, 2007, volume 20, No. 5, pages 1095-1114
- [44] M.Paicu, G.Raugel et A.Rekalo : *Regularity of the global attractor and finite-dimensional behavior for the second grade fluid equations*, 2008,
- [45] A.Pazy : *Semi groups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci 44. Springer. New-York, 1983
- [46] K.R.Rajagopal et A.S.Gupta : *Flows and stability of a second grade fluid between two parallel plates rotating about noncoincident axes*, Int. J. Eng. Sci., 1981, volume 19, pages 1401–1409
- [47] G.Raugel : *Dynamique des équations aux dérivées partielles*, cours de M2 à l'Université Paris Sud, 2010
- [48] R.S.Rivlin et Ericksen : *Stress-deformation relations for isotropic materials*, J. Rational Mech. Anal., 1955, volume 4, pages 323–425
- [49] L.M.Rodrigues : *Comportement en temps long des fluides visqueux bidimensionnels*, thèse, Grenoble, 2007
- [50] S.Schochet : *Fast singular limits of hyperbolic PDEs*, J. Differential Equations, 1994, volume 114, pages 476–512
- [51] R.Temam : *Navier-Stokes equations*, 3rd edn, Amsterdam North-Holland, 1984

Bibliographie

- [52] R.Temam : *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, Applied Mathematical Sciences, volume 68, Springer, 2nd edition, 1997
- [53] M.Wiegner : *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on \mathbb{R}^n* , J. Lond. Math. Soc., II. Ser., 1987, volume 35, pages 303–313