



**HAL**  
open science

# Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks

Yannick Fischer

► **To cite this version:**

Yannick Fischer. Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks. Analyse fonctionnelle [math.FA]. Université Nice Sophia Antipolis, 2011. Français. NNT: . tel-00643239

**HAL Id: tel-00643239**

**<https://theses.hal.science/tel-00643239v1>**

Submitted on 21 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION  
ET DE LA COMMUNICATION  
UNIVERSITÉ NICE-SOPHIA ANTIPOLIS

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

docteur de l'Université Nice-Sophia Antipolis

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

**Yannick Fischer**

---

# Approximation dans des classes de fonctions analytiques généralisées et résolution de problèmes inverses pour les tokamaks

---

Soutenue publiquement le 3 Novembre 2011  
devant le jury composé de :

<b>Directrice de thèse :</b>	Juliette Leblond	Directrice de recherche, INRIA Sophia Antipolis
<b>Rapporteurs :</b>	Housseem Haddar Emmanuel Russ	Directeur de recherche, INRIA Saclay Professeur, Université Joseph Fourier Grenoble
<b>Examineurs :</b>	Laurent Baratchart Jacques Blum François Saint-Laurent Michael Vogelius	Directeur de recherche, INRIA Sophia Antipolis Professeur, Université Nice-Sophia Antipolis Ingénieur de recherche, CEA/IRFM Cadarache Professeur, Université de Rutgers



# Remerciements

Et voilà, nous y sommes enfin ! J'ai bien attendu le dernier moment pour rédiger ces remerciements mais j'avoue en rêver depuis déjà bien longtemps. A dire vrai, maintenant que je suis confronté à cette page blanche, je me rends compte à quel point il peut s'agir d'un exercice ardu, peut être même le plus difficile de cette thèse. C'est donc la main un peu tremblante que je vais essayer avec ces quelques lignes de remercier le plus sincèrement possible l'ensemble des personnes qui m'ont aidé au cours de ces trois années.

Avant tout merci Juliette ! Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à ma directrice de thèse Juliette Leblond qui m'a accueilli au sein d'APICS il y a maintenant trois ans. Je la remercie vraiment de m'avoir fait confiance le jour où je suis venu plaider ma cause dans son bureau en costard-cravatte, d'avoir fait preuve d'une disponibilité et d'une patience sans limite à mon égard, de m'avoir fait profiter de son expérience ainsi que d'avoir su accompagner de la façon la plus juste mes premiers pas dans la recherche. Au-delà des aspects scientifiques, je la remercie aussi pour son soutien sans faille lors des quelques phases de doute qui ont ponctué cette thèse, pour la liberté de travail qu'elle m'a offerte mais aussi pour avoir toujours veillé à me placer dans les meilleures conditions afin que ma vie personnelle se déroule au mieux. Je garderai un souvenir particulièrement fort de ces quelques années passées à ses côtés.

Il est évident que cette thèse n'aurait pu voir le jour sans Laurent Baratchart. En compagnie de Juliette, il a participé à l'encadrement de ma thèse au jour le jour et cela a été un véritable bonheur d'apprendre à connaître ce mathématicien génial. Ses idées fulgurantes (que je mettais toujours au moins deux mois à intégrer), son souci de parfaire la rédaction des articles au-delà du raisonnable (!!), sa gentillesse ainsi que son humilité en font pour moi un modèle. Il a su me donner plus que jamais le goût de la recherche. Merci Laurent !

Je remercie Houssein Haddar et Emmanuel Russ d'avoir accepté de rapporter cette thèse. C'est un honneur pour moi qu'ils aient lu avec autant d'attention mon travail. Je les remercie tout particulièrement pour leurs critiques et suggestions qui ont grandement contribué à clarifier et améliorer ce manuscrit.

Je remercie Jacques Blum d'avoir accepté de présider mon jury, ainsi que François Saint-Laurent et Michael Vogelius d'y avoir participé. Le fait qu'ils aient montré de l'intérêt pour mes recherches me remplit de fierté. Au delà des mathématiques, ils ont fait preuve d'une patience énorme pour me faire comprendre la physique de la fusion nucléaire.

Toujours concernant le travail de cette thèse, je tiens à remercier chaleureusement Jean-Paul Marmorat. C'est peu dire que sans lui je serais actuellement perdu dans les limbes de Matlab. Au cours de nos discussions, j'ai pu admirer son talent de programmeur mais aussi de mathématicien. Sa précision scientifique a su m'éclairer à de nombreuses

---

reprises. Paulo, merci pour ta disponibilité et ta patience ! Je profite aussi de ces quelques lignes pour remercier Jonathan Partington avec qui j'ai beaucoup apprécié travailler ainsi que Sylvain Brémond qui a contribué à mon intérêt pour cette machine complètement folle qu'est le tokamak.

Toujours en ce qui concerne le côté scientifique, je remercie le meilleur professeur de mathématiques que j'ai pu avoir, Antoine Henrot. Si le début de cette thèse doit être attribué à quelqu'un, c'est bien à lui, qui a su m'enlever une grosse épine du pied il y a trois ans.

Si j'ai pu bénéficier au cours de ces trois années des conditions idéales de travail, c'est en grande partie grâce à tous les membres de l'équipe APICS. Je remercie donc Stéphanie pour sa patience et sa gentillesse au quotidien (et bienvenue à Lise !) ainsi que son rougail qui arrache ; Fabien le boursicotier pour son sens du chambrage (par couloir interposé notamment) et sa nostalgie de l'Allemagne (tu vas t'ennuyer sans moi mon petit) ; Martine (ou Martoche, ça dépend des jours) la randonneuse extrême pour sa bonne humeur, son envie de me voir acheter un reflex et les délicieuses pommes bien entendu ; Jean-Baptiste pour me rappeler au quotidien que finalement il y aura toujours plus tête-en-l'air que moi (spéciale dédicace au coup de la «Jean-Bat» à la cantine) ; Sylvain que je ne connais que depuis peu mais dont la gentillesse à mon égard et sa détermination à faire que ma soutenance soit la meilleure possible m'ont beaucoup touché ; Ahed, Ana-Maria, Slah et Jonathan (lui c'est un intrus de chez BIOCORE) qui vont bientôt mettre fin au dur labeur du thésard. J'ai bien entendu aussi une pensée pour le vénérable sage José Grimm, alias Monsieur Latex, sûrement l'homme le plus intelligent que j'ai pu rencontrer et avec qui j'attends toujours de fêter ma soutenance autour d'un bon verre de Gewürtz. C'est avec plaisir que je remercie aussi les personnes qui ont été ou sont actuellement de passage dans l'équipe : David et Max mes co-bureaux désormais partis sous d'autres horizons ; Alban pour tous ses conseils sur la recherche ; Ludovic avec qui je me suis vraiment bien marré notamment lors des passages devant la salière de la cantine ; Bernard qui a égayé ma fin de thèse comme jamais et dont je reste admiratif devant tant de talent culinaire. Et puis je n'oublie pas Vincent Gomis qui s'est plié en quatre pour me préparer une salle de soutenance aux petits oignons.

Enfin je voudrais remercier tous mes amis, parents proches et toutes les personnes que j'ai rencontrées au cours de la thèse qui, même s'ils ne le savent pas, m'ont apporté de la joie et du bonheur depuis trois ans et souvent plus. Je me suis souvent remotivé en pensant à eux. Merci donc à Guillaume, Auriane, Claudine et Jean-Jacques ; à tous mes potes de Franca pour s'être chargés de me vider la tête avec risque d'avoir tout oublié le lendemain au réveil ; à Canit El Pible de Oro mon voisin de toujours avec qui j'ai sûrement vécu l'un de mes plus grands fous rires (sacré tacle !) ; à Alexis le désormais marathonien auprès de qui la vie semble aussi belle qu'une chanson de Goldman ; à Gilles et Pierre que j'ai encore du mal à imaginer en nouveaux papas ; à Alex le parigot pour nous avoir souvent simplifié la vie à Laurène et à moi ainsi que pour les escapades cavalières ; à Aurélien le niçois dont l'appétit insatiable m'a toujours étonné ; à Frédérique et Yannick les survivants des Mines qui vont assurément devenir de grands chercheurs ; à John la frite belge d'Anvers pour sa bonne humeur et son accent. Je remercie aussi tout particulièrement Nicole et Jean-Claude qui m'ont toujours très bien accueilli, m'ont donné des forces pour la thèse (ahhh le gruyère et le beaufort de Savoie), ont écouté mes doutes et avec qui la vie semble toujours heureuse.

---

Et pour finir je tiens à remercier les personnes qui comptent le plus pour moi. Mes parents pour m'avoir toujours soutenu, encouragé, motivé et entouré d'une aura bienfaisante. En particulier, ma mère, Marie-José, pour être à l'écoute de tous mes petits soucis mais aussi pour cette délicieuse odeur de tarte au fromage lorsque je grimpe les escaliers de la maison ; mon père, Grégoire, pour m'avoir fait plonger dans la marmite des maths lorsque j'étais petit et pour m'avoir convaincu qu'il est important de garder un peu de son âme d'enfant lorsqu'on grandit (peut être que je jouerai moi aussi aux avions plus tard ?). Ma bienveillante soeur Estelle et Bertrand pour leur soutien précieux, leur joie de vivre et à qui je souhaite d'avoir la vie de famille la plus heureuse possible. Et bien sûr Laurène pour son amour, sa présence et son soutien dans les moments difficiles, pour sa gentillesse, pour tous ses fous rires que je n'ai jamais compris, pour m'avoir entraîné aux quatre coins du globe et surtout pour avoir eu la bonne idée de m'emmener au Portugal ; plus simplement pour m'avoir convaincu qu'elle est mon bonheur.

J'ai prétendu avoir terminé au paragraphe précédent, mais j'ai en fait encore quelque chose à ajouter. Un siège est en effet resté vide lors de ma soutenance. Il s'agit de celui de ma grand-mère Elise qui s'est malheureusement éteinte au début de ma thèse. J'aurais tant voulu lui rendre une infime part de tout le bonheur qu'elle a su m'offrir en partageant ce moment avec elle. Néanmoins, je reste persuadé que la Nature est bien faite puisque qu'elle a dédaigné échanger cette vie contre celle de deux petits bouts, Antoine et Thomas, à qui je promets d'être le meilleur tonton de la Terre. C'est avec beaucoup de modestie que je leur dédicace à tous les trois ce manuscrit.

---



# Résumé

Cette thèse traite de la résolution théorique et constructive de problèmes inverses pour des équations de diffusion isotropes dans des domaines plan simplement et doublement connexes. A partir de données de Cauchy (potentiel, flux) disponibles sur une partie de la frontière du domaine, il s'agit de retrouver ces quantités sur la partie du bord où l'on ne dispose pas d'information, ainsi qu'à l'intérieur du domaine. L'approche mise au point consiste à considérer les solutions de l'équation de diffusion comme les parties réelles des solutions complexes d'une équation de Beltrami conjuguée. Ces fonctions analytiques généralisées d'un type particulier permettent de définir des classes de Hardy, dans lesquelles le problème inverse est régularisé en étant reformulé comme un problème de meilleure approximation sous contrainte (ou encore problème extrémal borné, d'adéquation aux données). Le caractère bien posé de celui-ci est assuré par des résultats d'existence et de régularité auxquels s'ajoutent des propriétés de densité à la frontière. Une application au calcul de la frontière libre d'un plasma sous confinement magnétique dans le tokamak Tore Supra (CEA-IRFM Cadarache) est proposée. La résolution du problème extrémal à partir d'une base de fonctions adaptées (harmoniques toroïdales) fournit un critère permettant de qualifier les estimations de la frontière plasma. Un algorithme de descente permet de le faire décroître, en améliorant l'estimation de la frontière. Cette méthode, qui ne requiert pas d'intégration de l'équation dans le domaine, fournit de très bons résultats et semble appelée à connaître des extensions pour d'autres tokamaks tels que JET et ITER.

---



# Abstract

This thesis concerns both the theoretical and constructive resolution of inverse problems for isotropic diffusion equation in planar domains, simply and doubly connected. From partial Cauchy boundary data (potential, flux), we look for those quantities on the remaining part of the boundary, where no information is available, as well as inside the domain. The proposed approach proceeds by considering solutions to the diffusion equation as real parts of complex valued solutions to some conjugated Beltrami equation. These particular generalized analytic functions allow to introduce Hardy classes, where the inverse problem is stated as a best constrained approximation issue (bounded extremal problem), and thereby is regularized. Hence, existence and smoothness properties, together with density results of traces on the boundary, ensure well-posedness. An application is studied, to a free boundary problem for a magnetically confined plasma in the tokamak Tore Supra (CEA-IRFM Cadarache). The resolution of the approximation problem on a suitable basis of functions (toroidal harmonics) leads to a qualification criterion for the estimated plasma boundary. A descent algorithm makes it decrease, and refines the estimations. The method does not require any integration of the solution in the overall domain. It furnishes very accurate numerical results, and could be extended to other devices, like JET or ITER.

---



---

# Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vii
Abstract	ix
Notations	xv
<b>I Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Rappels sur l'étude des problèmes inverses . . . . .	4
1.2 De l'équation de conductivité à l'équation de Beltrami conjuguée . . . . .	9
1.3 Problèmes extrémaux bornés . . . . .	18
1.4 Problèmes inverses pour la fusion nucléaire . . . . .	21
1.5 Organisation du manuscrit . . . . .	28
1.6 Publications . . . . .	30
<b>II Espaces de Hardy généralisés dans des domaines simplement et doublement connexes</b>	<b>31</b>
<b>2 Rappels sur les espaces de Hardy classiques</b>	<b>33</b>
2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	34
2.1.1 Définitions . . . . .	34
2.1.2 Limites non-tangentielles . . . . .	36
2.1.3 Caractérisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	38
2.2 Quelques propriétés structurelles supplémentaires . . . . .	39
2.2.1 Factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	39
2.2.2 Représentation intégrale des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	41
2.2.3 Equations de Cauchy-Riemann et fonctions conjuguées . . . . .	42
2.3 L'espace $H^p(\mathbb{A})$ . . . . .	44
2.3.1 Holomorphicité à l'infini . . . . .	44
2.3.2 Décomposition de $H^p(\mathbb{A})$ . . . . .	45
<b>3 Espaces de Hardy généralisés</b>	<b>47</b>
3.1 Les espaces $H^p_\nu(\Omega)$ . . . . .	48

---

3.1.1	Définition et notations . . . . .	48
3.1.2	$\nu$ -Holomorphie à l'infini . . . . .	49
3.2	Les espaces $G_\alpha^p(\Omega)$ . . . . .	50
3.2.1	Définition . . . . .	50
3.2.2	Lien avec les espaces $H_\nu^p(\Omega)$ . . . . .	51
3.2.3	Propriétés . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Problèmes de Dirichlet et généralisation de l'opérateur de conjugaison</b>	<b>61</b>
4.1	Problèmes de Dirichlet dans des domaines simplement connexes . . . . .	62
4.1.1	Quelques résultats préliminaires . . . . .	63
4.1.2	Théorèmes de Dirichlet dans $\mathbb{D}$ . . . . .	64
4.1.3	Décomposition des espaces $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . . . . .	68
4.2	Conjugaison harmonique généralisée . . . . .	75
4.2.1	Cas simplement connexe . . . . .	75
4.2.2	Conditions de compatibilité pour le cas doublement connexe . . . . .	79
4.2.3	L'espace $\mathcal{S}$ . . . . .	82
4.3	Problèmes de Dirichlet dans des domaines doublement connexes . . . . .	83
4.3.1	Résolution dans le cas réel . . . . .	83
4.3.2	Résolution dans le cas complexe . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Résultats de densité</b>	<b>91</b>
5.1	Densité des traces sur un sous ensemble strict du bord . . . . .	92
5.1.1	Cas simplement connexe . . . . .	92
5.1.2	Cas doublement connexe . . . . .	93
5.2	Vers le problème extrémal borné . . . . .	104
5.2.1	Situation idéale : données compatibles . . . . .	104
5.2.2	Problème de Cauchy mal posé pour des données non compatibles . . . . .	105
5.2.3	Formalisation du problème extrémal borné . . . . .	106
<b>III</b>	<b>Résolution théorique et constructive du problème extrémal borné</b>	<b>111</b>
<b>6</b>	<b>Résolution théorique du problème extrémal borné</b>	<b>113</b>
6.1	Existence et unicité de la solution du problème extrémal borné . . . . .	114
6.1.1	Quelques propriétés de l'espace $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . . . . .	115
6.1.2	Résolution . . . . .	116
6.2	Le cas hilbertien . . . . .	118
6.2.1	Opérateur de projection analytique généralisé . . . . .	118
6.2.2	Formulation "explicite" de la solution du problème extrémal borné . . . . .	120
6.2.3	Discussion autour du paramètre de Lagrange $\gamma$ . . . . .	124
6.2.4	Un algorithme de calcul de la solution du problème extrémal borné . . . . .	127
<b>7</b>	<b>Résolution constructive du problème extrémal borné</b>	<b>129</b>
7.1	Stratégie de calcul de solutions explicites réelles . . . . .	131
7.1.1	Formes attendues des solutions explicites . . . . .	131
7.1.2	Lien avec l'équation de Laplace . . . . .	133
7.2	Solutions explicites en coordonnées toroïdales . . . . .	136

7.2.1	Les coordonnées toroïdales . . . . .	136
7.2.2	Familles complètes dans $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$ . . . . .	140
7.2.3	Familles complètes dans $H^2_{\nu}(\Omega)$ . . . . .	145
<b>IV</b>	<b>Applications au tokamak Tore Supra</b>	<b>151</b>
<b>8</b>	<b>Algorithme de résolution du problème extrémal borné</b>	<b>153</b>
8.1	Le tokamak Tore Supra . . . . .	154
8.1.1	Limiteur et géométrie de la machine dans une section poloïdale . . . . .	154
8.1.2	Données mesurées et hypothèse de modélisation . . . . .	156
8.2	Description de l'algorithme de résolution . . . . .	158
8.2.1	Etape n°1 : définition du système de coordonnées toroïdales . . . . .	159
8.2.2	Etape n°2 : Approximation du flux magnétique poloïdal . . . . .	161
8.2.3	Etape n°3 : Construction d'une estimée de la frontière plasma . . . . .	165
8.2.4	Etape n°4 : Résolution du problème extrémal borné . . . . .	167
8.2.5	Etape n°5 : Mise à jour de la frontière plasma et itération . . . . .	172
<b>9</b>	<b>Résultats numériques</b>	<b>177</b>
9.1	Mise en œuvre de l'algorithme et notations . . . . .	177
9.2	Choc n°45496 au temps $t = 8.0285$ s . . . . .	178
9.2.1	Acquisition et interpolation des données mesurées . . . . .	179
9.2.2	Estimation de la frontière plasma . . . . .	180
9.2.3	Utilisation du problème extrémal borné . . . . .	187
9.3	Choc n°45496 au temps $t = 8.0285$ s avec données bruitées . . . . .	192
9.3.1	Niveau de bruit : 5 % . . . . .	193
9.3.2	Niveau de bruit : 10 % . . . . .	195
<b>V</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>199</b>
<b>VI</b>	<b>Annexes</b>	<b>207</b>
<b>A</b>	<b>Fonctions de Legendre associées et harmoniques toroïdales</b>	<b>209</b>
<b>B</b>	<b>Intégrales elliptiques</b>	<b>213</b>
<b>C</b>	<b>Preuve du Lemme 7.2.3.1</b>	<b>217</b>
<b>D</b>	<b>Preuve du Lemme 7.2.3.2</b>	<b>231</b>
<b>E</b>	<b>Etape n°2–D de l'algorithme de résolution du problème extrémal borné</b>	<b>237</b>
	Table des figures	247
	Liste des tableaux	249
	Bibliographie	251



# Notations

## Notations générales

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$	ouvert
$\overline{\Omega}$	Fermeture de $\Omega$
$\partial\Omega$	Frontière de $\Omega$
$E'$	Espace dual de l'espace $E$
$\ \cdot\ _E$	Norme définie sur l'espace $E$
$\langle, \rangle$	Produit de dualité entre $E$ et $E'$
$\wedge$	Produit vectoriel de deux vecteurs du plan complexe
$\vee$	Concaténation. Si $f$ est une fonction définie sur un ensemble $\Omega_1 \subset \Omega$ et $h$ une fonction définie sur $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ , la notation $f \vee h$ désigne la fonction concaténée sur $\Omega$ qui vaut $f$ sur $\Omega_1$ et $h$ sur $\Omega_2$
$\chi_I$	Fonction caractéristique de l'ensemble $I$
$Im(z)$	Partie imaginaire de $z \in \mathbb{C}$
$Re(z)$	Partie réelle de $z \in \mathbb{C}$
$B(z, \varrho)$	Boule ouverte de centre $z \in \mathbb{C}$ et de rayon $\varrho$
$\mathbb{D}_\varrho$	Disque ouvert ayant pour centre le point $(0, 0)$ et pour rayon $\varrho$ . Lorsque $\varrho = 1$ , on parlera du disque unité $\mathbb{D}$
$\mathbb{D}_{x,\varrho}$	Disque ayant pour centre le point $(x, 0)$ et pour rayon $\varrho$
$\mathbb{T}_\varrho = \partial\mathbb{D}_\varrho$	Cercle ayant pour centre le point $(0, 0)$ et pour rayon $\varrho$ . Lorsque $\varrho = 1$ , on parlera du cercle unité $\mathbb{T}$
$\mathbb{T}_{x,\varrho} = \partial\mathbb{D}_{x,\varrho}$	Cercle ayant pour centre le point $(x, 0)$ et pour rayon $\varrho$
$\mathbb{A} = \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$	Anneau constitué du disque unité $\mathbb{D}$ privé du disque fermé $\overline{\mathbb{D}_\varrho}$ de centre $(0, 0)$ et de rayon $\varrho \in (0, 1)$
$\mathbb{P}_d$	Demi-plan droit $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$
$Ker(T)$	Noyau de l'opérateur $T$
$Ran(T)$	Image de l'opérateur $T$

$\partial^\lambda u$  Dérivée partielle d'ordre  $\lambda$  de  $u$ . Par exemple, pour  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$  un multi-indice avec  $|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2$ , et  $u$  une fonction des variables  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  à valeurs réelles, on a

$$\partial^\lambda u = \frac{\partial^{\lambda_1 + \lambda_2}}{\partial x^{\lambda_1} \partial y^{\lambda_2}} u$$

$\partial_x, \partial_y$  Dérivée partielle par rapport à la variable réelle  $x$

$\frac{d}{dx}$  Dérivée droite par rapport à la variable réelle  $x$

$\partial_z = \partial$  Dérivée partielle par rapport à la variable complexe  $z = x + iy$ . On rappelle que

$$\partial = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$$

$\partial_{\bar{z}} = \bar{\partial}$  Dérivée partielle par rapport à la variable complexe  $\bar{z} = x - iy$ . On rappelle que

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$$

$\partial_n u$  Dérivée normale extérieure de  $u$

$\partial_t u$  Dérivée tangentielle de  $u$

$\nabla$  Opérateur gradient

$\nabla \cdot$  Opérateur divergence

$\Delta = \nabla \cdot \nabla$  Opérateur Laplacien

$dm$  (Différentielle de la) mesure planaire de Lebesgue. En utilisant la notation  $\xi = x + iy$  pour les coordonnées du plan  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ , on a

$$dm(\xi) = dx dy = \frac{i}{2} d\xi \wedge d\bar{\xi}$$

p.p. Presque partout

p.p.t. Pour presque tout

## Espaces fonctionnels

D'une façon générale, les espaces considérés sont des espaces de fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Lorsque les fonctions sont à valeurs réelles, l'indice " $\mathbb{R}$ " sera utilisé, comme dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$  par exemple.

$C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})$  Espace des fonctions  $k$  fois continuellement différentiables (pour  $k \in \mathbb{N}$ ) telles que leurs dérivées d'ordre  $k$  satisfassent une condition de Hölder d'exposant  $\gamma \in (0, 1]$ . Ces fonctions et leurs dérivées de degré au plus  $k$  s'étendent continuellement à  $\bar{\Omega}$ . L'espace est équipé de la norme

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}(\bar{\Omega})} = \sup_{0 \leq |\lambda| \leq k} \|\partial^\lambda f\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\substack{|\lambda|=k \\ \xi \neq \zeta}} \frac{|\partial^\lambda f(\xi) - \partial^\lambda f(\zeta)|}{|\xi - \zeta|^\gamma}$$

$$C^\infty(\overline{\Omega}) = \bigcap_k C^{k,1}(\overline{\Omega})$$

$C_{loc}^{k,\gamma}(\Omega)$  Espaces des fonctions dont la restriction à tout ouvert relativement compact  $\Omega_0$  de  $\Omega$  appartient à  $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega_0})$

$\mathcal{D}(\Omega)$  Espace des fonctions appartenant à  $C^\infty(\Omega)$  et à support compact dans  $\Omega$

$\mathcal{D}'(\Omega)$  Espace des distributions sur  $\Omega$

$L^p(\Omega)$  Pour  $1 \leq p < +\infty$ , espace des fonctions mesurables sur  $\Omega$  et telles que, si  $|\Omega|$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\Omega$ ,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f|^p dm \right)^{1/p} < \infty$$

$L^p(\Gamma)$  Pour  $1 \leq p < +\infty$  et pour  $\Gamma$  un sous ensemble ouvert d'une courbe de Jordan de régularité  $C^1$ , espace de Lebesgue par rapport à l'abscisse curviligne normalisée. Dans le cas où  $\Gamma = \partial\mathbb{A} = \partial(\mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$ , on a  $L^p(\partial\mathbb{A}) = L^p(\mathbb{T}) \times L^p(\rho\mathbb{T})$  et

$$\|f\|_{L^p(\partial\mathbb{A})} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$$

$W^{1,p}(\Omega)$  Espace de Sobolev des fonctions  $f \in L^p(\Omega)$  dont les dérivées  $\partial f$  et  $\bar{\partial} f$  au sens des distributions appartiennent aussi à  $L^p(\Omega)$ . L'espace est équipé de la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p = \|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\partial f\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\bar{\partial} f\|_{L^p(\Omega)}^p$$

$W_{loc}^{1,p}(\Omega)$  Espace des fonctions dont la restriction à tout ouvert relativement compact  $\Omega_0$  de  $\Omega$  appartient à  $W^{1,p}(\Omega_0)$

$W^{1,\infty}(\Omega)$  Pour  $\Omega$  à frontière régulière, espace des applications bornées et lipschitziennes sur  $\Omega$ . Tout élément de cet espace s'étend continuellement à  $\overline{\Omega}$



**Première partie**  
**Introduction générale**

---



---

# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Rappels sur l'étude des problèmes inverses . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>1.2</b>	<b>De l'équation de conductivité à l'équation de Beltrami conjuguée . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.3</b>	<b>Problèmes extrémaux bornés . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>1.4</b>	<b>Problèmes inverses pour la fusion nucléaire . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.5</b>	<b>Organisation du manuscrit . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>1.6</b>	<b>Publications . . . . .</b>	<b>30</b>

---

Le fil rouge de ce manuscrit est l'étude du problème inverse de Cauchy en dimension 2 pour des équations aux dérivées partielles elliptiques avec coefficient de diffusion isotrope. Autrement dit, la question qui a motivé ce travail de thèse peut être formulée de la façon suivante : est-il possible, à partir de données de Dirichlet et de Neumann disponibles sur la même partie du bord d'un domaine et correspondant aux valeurs frontière d'une solution à ces équations, de retrouver :

- Les données de Dirichlet et de Neumann sur la partie du bord où l'on ne dispose pas de mesures ?
- Les valeurs de la fonction solution dans tout le domaine ?

Il s'agit là d'un problème de complétion de données tenant un rôle central dans la famille des problèmes inverses à la frontière. On le retrouve en effet dans de nombreuses applications du monde de l'ingénierie telles que l'imagerie acoustique, la tomographie sismique, électrostatique, électromagnétique ou encore par rayons X pour n'en citer que quelques unes et pour lesquelles les données de Dirichlet et Neumann mesurées correspondent souvent aux valeurs d'un flux ainsi que d'un potentiel. Pour une description plus complète des questions physiques se posant en termes de problèmes inverses de Cauchy, nous invitons le lecteur à se référer à [104]. D'une manière générale, les difficultés rencontrées lorsque l'on essaie de répondre à ces questions sont bien identifiées et proviennent des travaux de Hadamard [81] qui ont mené à la définition de la notion de problème inverse bien (ou mal) posé.

L'équation que nous étudions s'écrit

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 ,$$


---

où  $\sigma$  est une fonction régulière dans le domaine sur lequel est posée l'équation. Notons que le problème de Cauchy a un sens pour des équations autres que celle-ci, mais que nous n'étudierons pas dans ce manuscrit.

Le travail réalisé au cours de cette thèse se divise en trois parties qui se succèdent de manière naturelle.

La première d'entre elles fournit les résultats théoriques nécessaires à la résolution du problème inverse lorsque celui-ci est formulé comme un problème de meilleure approximation sous contrainte dans des classes de fonctions généralisant les classes de Hardy classiques. Ces espaces fonctionnels, introduits dans [25], fournissent le cadre approprié à la résolution du problème de complétion pour des données frontière de régularité  $L^p$  avec  $p \in (1, \infty)$ . D'un point de vue théorique, le fait que nous traitions une régularité  $L^p$  à la frontière constitue une amélioration par rapport aux hypothèses jusqu'à présent effectuées pour ces problèmes, à savoir celles de données frontière Sobolev. Une des particularités de ce travail tient avant tout au point de vue adopté, à savoir l'utilisation de techniques dérivant de l'analyse complexe. Son originalité et sans doute sa principale contribution se trouve par ailleurs dans le fait que nous étendons les résultats de [25] au cas de domaines doublement connexes.

Dans la deuxième partie, nous résolvons entièrement le problème d'approximation dans des classes de Hardy généralisées. Dans le cas hilbertien, nous en fournissons une solution s'exprimant au moyen de différents opérateurs de projection. Cette dernière est alors calculée au moyen de bases explicites de solutions dans le cas d'une conductivité particulière.

Finalement, dans la troisième partie, nous proposons une application des précédents résultats pour le domaine de la fusion nucléaire. Plus précisément, il s'agit d'identifier des données magnétiques (flux magnétique et sa dérivée normale) dans le tokamak Tore Supra actuellement en service au CEA de Cadarache (France) à partir de mesures de même nature effectuées sur la paroi externe de la machine. Ceci nous conduit en définitive à formuler un algorithme de descente calculant une estimée de la frontière libre d'un plasma sous confinement magnétique.

Cette introduction a plusieurs objectifs. Il nous paraît important d'effectuer dans un premier temps une présentation de la notion de problème inverse ainsi que des difficultés inhérentes à leur résolution. Ceci sera aussi l'occasion de faire un rappel des travaux existants sur le sujet ainsi que de situer les nôtres. Dans un deuxième temps, nous allons introduire le formalisme adopté dans ce manuscrit en présentant les équations mises en œuvre, les notations utilisées et surtout la démarche adoptée pour la résolution du problème de complétion de données. La mise en place de ces éléments constitutifs sera aussi l'occasion d'exposer les principales contributions de ce travail. Enfin, nous donnerons quelques éléments nécessaires à la compréhension de l'application au tokamak Tore Supra envisagée durant cette thèse. Nous exposerons ainsi les principes de base de la fusion nucléaire ainsi que ceux du confinement magnétique des plasmas dans les tokamaks.

## 1.1 Rappels sur l'étude des problèmes inverses

### Notion de problème inverse

Pour s'intéresser à la résolution du problème de complétion qui fait l'objet de cette

---

thèse, il convient de définir tout d'abord la notion de problème inverse. Ce concept peut sembler simple en apparence dans la mesure où on l'associe généralement à la résolution d'un problème émanant du monde «réel». Ainsi, du point de vue de l'expérimentation physique, il n'est pas faux d'utiliser le terme «problème inverse» pour qualifier une situation visant à évaluer une (ou des) quantité(s) physique(s), que l'on notera symboliquement  $\mathbf{D}_e$  (pour «données d'entrée»), à partir d'une autre (ou d'autres) quantité(s) physique(s) directement obtenue(s) par l'expérience, notées quant à elle(s)  $\mathbf{D}_s$  (pour «données de sortie»). Cela ne suffit cependant pas. L'évaluation des quantités inconnues est en effet subordonnée à la connaissance d'un modèle théorique  $\mathbf{M}$  non pas du problème inverse mais du problème direct, symbole du lien causes/conséquences et non pas conséquences/causes, ce qui se formule encore sous la forme

$$\mathbf{D}_s = \mathbf{M}(\mathbf{D}_e) .$$

Ce modèle  $\mathbf{M}$  représente les équations de la physique du problème considéré. Ainsi, formellement et en ayant en tête pour l'instant seulement l'interprétation physique qui peut en être faite, il paraît naturel d'associer la notion de problème inverse à celle de la recherche d'un modèle «réciproque» de  $\mathbf{M}$  permettant d'obtenir les quantités  $\mathbf{D}_e$  à partir des mesures  $\mathbf{D}_s$ .

Néanmoins, une telle définition est beaucoup trop vaste car l'adopter signifierait que la résolution de toute équation mathématique peut être vue celle d'un problème inverse. Comment définir alors rigoureusement la notion de problème inverse ? La réponse à cette question réside dans le fait que les problèmes qui peuvent se formuler ainsi se classent en deux catégories. Il y a tout d'abord les problèmes dits «bien posés». Il s'agit de ceux pour lesquels à toute donnée  $\mathbf{D}_s$  correspond une unique solution  $\mathbf{D}_e$  via le modèle  $\mathbf{M}$  et telle que celle-ci soit continue (dans une certaine topologie) par rapport à  $\mathbf{D}_s$ . Viennent ensuite les problèmes dits «mal posés» auxquels on réserve généralement le terme de «problème inverse». Pour ceux-ci, l'une au moins de ces trois conditions n'est pas vérifiée :

- L'existence : pour une mesure  $\mathbf{D}_s$ , il n'existe pas de donnée  $\mathbf{D}_e$  telle que  $\mathbf{D}_s = \mathbf{M}(\mathbf{D}_e)$ . Cela revient à dire que le modèle  $\mathbf{M}$  n'est pas inversible.
- L'unicité : pour une mesure  $\mathbf{D}_s$ , il existe au moins deux données  $\mathbf{D}_e^{(1)}$  et  $\mathbf{D}_e^{(2)}$  telles que  $\mathbf{D}_s = \mathbf{M}(\mathbf{D}_e^{(1)}) = \mathbf{M}(\mathbf{D}_e^{(2)})$ . Cela revient à dire que le modèle  $\mathbf{M}$  ne possède pas un inverse unique.
- La continuité par rapport aux mesures : une petite perturbation de la mesure  $\mathbf{D}_s$  peut engendrer de fortes variations de la solution  $\mathbf{D}_e$ .

Cette définition des problèmes inverses a été proposée pour la première fois par Hadamard [81] et il est désormais courant de parler de problèmes inverses mal posés au «sens de Hadamard». Remarquons que le problème de l'existence d'une solution ne représente pas une difficulté majeure. Il est en effet habituellement possible de la rétablir en relaxant la notion de solution, ce qui constitue un procédé classique en mathématique. La non-unicité est quant à elle plus problématique. Si un problème inverse a plusieurs solutions, il faut disposer de moyens permettant de discriminer d'éventuelles solutions non adaptées et donc se doter d'informations supplémentaires (informations *a priori*). Enfin la continuité de la solution par rapport aux données constitue sans doute le point le plus difficile à assurer, en particulier lorsque la résolution du problème inverse a vocation à être implémentée numériquement. Hadamard fournit en 1923 [82] un exemple désormais

célèbre illustrant la non-continuité du problème de Cauchy pour l'opérateur de Laplace. Sa relative simplicité nous permet de le rappeler ici afin d'illustrer ce phénomène.

On cherche donc une fonction de deux variables  $u(x, y)$  définie sur  $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  telle que

$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & x \in \mathbb{R} \\ \partial_y u(x, 0) &= \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Ce problème entre dans la catégorie des problèmes mal posés. Il s'agit bien d'un problème de Cauchy puisqu'une partie de la frontière de  $\Omega$ , à savoir la droite  $y = 0$ , supporte à la fois une condition de Dirichlet et de Neumann alors qu'aucune condition n'est imposée quand  $y \rightarrow \infty$ . Ce problème admet la solution triviale  $u = 0$  lorsque  $\varphi = \psi = 0$ . Mais si on impose désormais les conditions limites  $\varphi_a = 0$  et  $\psi_a(x) = \frac{1}{a} \sin(ax)$  pour  $a > 0$ , la technique de séparation des variables mène facilement à la solution

$$u_a(x, y) = \frac{1}{a^2} \sin(ax) \sinh(ay) .$$

On observe alors que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\psi_a(x) \rightarrow 0$  lorsque  $a \rightarrow \infty$ . Donc si la solution du problème était continue par rapport aux données, la fonction  $u_a$  devrait prendre des valeurs infiniment petites lorsque  $a \rightarrow \infty$ . Or ce n'est pas le cas puisque la solution  $u_a$  explose pour tout  $x, y > 0$  fixés, c'est-à-dire

$$\lim_{a \rightarrow \infty} u_a = +\infty .$$

On comprend aisément que les trois conditions réclamées par Hadamard sont naturelles lorsque l'on modélise un problème d'origine physique. Hadamard laisse par ailleurs entendre que seul un problème bien posé peut modéliser correctement un phénomène physique. Il semble que cette opinion était largement répandue jusqu'à récemment entraînant ainsi un manque d'intérêt certain de la physique mathématique pour ces problèmes mal posés. On considèrerait en effet que ces derniers étaient soit dénués de sens physique, soit que leur formulation résultait de l'utilisation d'un modèle inadapté. Toutefois, il est désormais bien connu que ces considérations ne peuvent être retenues, du moins au sens premier où elles ont été formulées. Après réflexion, cela ne semble pas si surprenant dans la mesure où les sources d'incertitudes responsables en grande partie du caractère mal posé, sont multiples :

- Fondamentalement, l'origine expérimentale des mesures effectuées implique obligatoirement l'existence d'erreurs de mesures. Ainsi, à un modèle physique fixé, il n'est *a priori* pas évident de dire si les mesures réalisées proviennent bien de l'application du modèle à un certain ensemble de paramètres.
- La nature même des appareils de mesures fait qu'il n'est techniquement possible d'en effectuer qu'un nombre limité. Or, les modèles mathématiques utilisés requièrent en général l'usage de fonctions. Le problème du passage des mesures ponctuelles à des fonctions plus ou moins régulières peut par exemple trouver solution avec des techniques d'interpolation. Néanmoins, ceci implique la création et l'usage d'informations dont on ne dispose pas au départ, ce qui est souvent source d'erreurs supplémentaires.

- Le modèle utilisé est généralement lui aussi source d'incertitudes. Ce dernier est en effet souvent le résultat de plusieurs hypothèses simplificatrices et ne peut dès lors être un moyen exact de représenter l'expérience physique réelle. Les simplifications effectuées lors de la phase de modélisation relèvent en général de problèmes ultérieurs liés à la résolution numérique envisagée traduisant ainsi la recherche d'un compromis entre précision et complexité des algorithmes mis en place. Par ailleurs, il arrive que certains paramètres du modèle proviennent d'expérimentations et ne soient donc connus qu'approximativement.

Ainsi, même si les problèmes mal posés résultent d'erreurs de mesures ou bien de modèles incomplets, il est admis que ces derniers restent dans beaucoup de situations le seul et unique moyen que nous possédions pour décrire une expérience physique. C'est pourquoi leur résolution a fait l'objet de nombreuses études. Nous allons tenter d'en donner un bref aperçu, au moins dans le cas qui nous concerne du problème de Cauchy.

### Quelques techniques de résolution

Comme nous venons de le voir dans l'exemple fourni par Hadamard, le problème de Cauchy et plus généralement tous les problèmes inverses sont sensibles aux incertitudes. Dès lors, il se peut que la mesure  $\mathbf{D}_s$  ne puisse être associée à aucune quantité  $\mathbf{D}_e$  à travers le modèle  $\mathbf{M}$ , aussi bon que celui-ci puisse être. Un moyen de contourner cet obstacle consiste à remettre en cause le concept même de solution tel que nous l'admettons au sens classique. La démarche pratiquée est la suivante : on s'autorise désormais à considérer comme solution admissible toute quantité  $\mathbf{D}_e$  reproduisant aux incertitudes près la mesure  $\mathbf{D}_s$  via le modèle  $\mathbf{M}$ . On parlera de quasi-solution dans ce cas là. De cette manière, la situation où un problème inverse mal posé, pour un modèle et une mesure donnés, peut n'avoir aucune solution au sens classique mais plusieurs solutions reproduisant la mesure donnée à «peu de choses près» devient acceptable. Ce «peu de choses» doit bien entendu être quantifié par l'introduction d'une topologie ainsi que d'une tolérance que nous nous accordons.

En définitive, la mise en place d'une technique de résolution d'un problème inverse mal posé doit tenir compte des incertitudes sur les données qui résultent généralement de leur caractère imprécis voire incomplet (comme ceci est le cas pour le problème de Cauchy). Néanmoins, une fois cette idée acceptée, la résolution d'un problème mal posé ne s'en retrouve que partiellement facilitée. En effet, la démarche consiste désormais à faire l'inventaire de toutes les quasi-solutions puis à opérer un choix parmi celles-ci. Mais il est clair que chercher l'ensemble complet des quasi-solutions peut s'avérer extrêmement coûteux d'un point de vue calcul si par exemple la donnée  $\mathbf{D}_e$  à identifier est composée d'un grand nombre de variables scalaires. Remarquons aussi que le choix parmi toutes les quasi-solutions doit être effectué à partir d'informations extérieures, autrement dit non contenues dans le modèle initial généralement établi à partir des lois de la physique. Il peut s'agir par exemple d'une information supplémentaire sur le comportement de la solution cherchée. Hadamard, en citant des travaux antérieurs aux siens [119], avait déjà fait référence [83] au fait qu'il était possible de rétablir la continuité de la solution au problème de Cauchy pour le Laplacien en lui imposant une borne. Nous invitons le lecteur à se référer à [8] pour une revue complète des problèmes de stabilité liés au problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques écrits sous forme divergente.

---

Il existe de nombreuses méthodes permettant de mettre en place un modèle de résolution à la fois approprié et suffisamment souple pour y incorporer des informations *a priori* synonymes d'un choix à effectuer parmi les quasi-solutions. Il est toutefois possible de classer ces méthodes selon trois catégories générales [117] :

1. Les méthodes proposant de transformer un problème mal posé en un problème bien posé en choisissant judicieusement les espaces dans lesquels vont appartenir les variables considérées ainsi que leurs topologies qui vont servir à formaliser la notion d'écart ou d'erreur (et donc de donner un véritable sens à la notion de quasi-solution). Ces méthodes relèvent essentiellement de l'analyse fonctionnelle et permettent d'introduire avantageusement des contraintes globales sur les classes de solutions utilisées. L'ajout de ces contraintes n'est pas dicté par les mathématiques mais plutôt par la connaissance physique que nous avons du problème.
2. Les méthodes de régularisation des problèmes mal posés. Le pionnier de cette théorie est Tikhonov [131]. Il s'agit vraisemblablement de la méthode la plus utilisée à ce jour. Son but est de régulariser l'inversion de telle sorte que la solution obtenue dépende continuellement des données. Cette solution a vocation à être proche de la solution exacte lorsque que cette dernière existe pour des mesures proches de celles effectivement réalisées. Cette méthode se démarque de la première dans la mesure où le problème initial est remplacé par un problème «proche» et bien posé mais aussi parce qu'il n'est pas question ici de jouer sur les espaces fonctionnels de résolution (l'hypothèse communément admise dans le cadre variationnel étant celle de solutions Sobolev).
3. Les méthodes issues de l'inversion stochastique [130]. Cette approche consiste à intégrer les incertitudes directement dans les variables modélisées en les considérant comme des variables aléatoires. La méthode consiste alors à déterminer la fonction densité de probabilité associée à  $\mathbf{D}_e$  et  $\mathbf{D}_s$  qui permet à son tour d'avoir accès à certaines quantités caractéristiques de la théorie des probabilités (valeur moyenne, écart-type, plus grande probabilité de réalisation d'un événement, etc...).

Le problème de Cauchy, en particulier, a généré ces dernières années une quantité considérable de travaux ayant abouti à la formulation de nombreuses méthodes. Les plus connues à ce jour, du moins en vue d'applications, sont essentiellement issues de la théorie de Tikhonov. Dans le principe, cette méthode de régularisation consiste à fixer l'une des conditions à la frontière, par exemple celle de Dirichlet, puis à introduire une fonctionnelle évaluant le coût (au sens des moindres carrés) entre les conditions de Neumann mesurées et celles calculées. La décroissance de la fonctionnelle ne suffit en général pas à assurer le caractère bien posé du problème, c'est pourquoi on rajoute un terme de correction visant à faire tendre la solution cherchée vers un certain objectif. Il existe des techniques permettant de choisir de manière efficace ce paramètre de régularisation et nous citons pour exemple celles des L-curve [86] ou bien de Morozov [114]. Citons aussi les travaux [55, 56, 65] qui appliquent ces méthodes au problème de Cauchy.

Citons aussi d'autres techniques de résolution appelant de près ou de loin aux résultats de Tikhonov :

- La méthode développée par Lions [110] et inspirée du contrôle optimal. De cette méthode est notamment née la fonctionnelle de type Kohn-Vogelius introduite dans

[96] pour un problème d'identification de paramètre et utilisée plus tard pour le problème de Cauchy [19, 32].

- La méthode de quasi-réversibilité. Elle fut initialement introduite par Lattès et Lions [103]. Le problème de Cauchy est régularisé au moyen d'une famille de problèmes variationnels d'ordre 4 ayant une seule condition au limite de type Dirichlet et dépendant d'un paramètre de régularisation qui assure la convergence vers le problème originel. Cette méthode a été reprise par de nombreux auteurs [44, 45, 95].
- Les méthodes utilisant des transformations conformes. Celles-ci sont particulièrement adaptées à la résolution du problème de Cauchy dans des domaines doublement connexes dont une des frontières est inconnue. L'idée consiste à résoudre dans un premier temps un problème non linéaire permettant d'obtenir une fonction harmonique contenant l'information mesurée sur la frontière connue. Dans une deuxième étape on résout un problème de Cauchy dans un anneau concentrique qui est l'image du domaine initial par transformation conforme. Cette méthode est illustrée dans [84, 101] et le lecteur pourra trouver des applications à l'imagerie électrostatique et l'impédance tomographique [7, 85].
- Enfin mentionnons sans détails les méthodes itératives [98] ou bien encore la méthode des level-sets [31, 49, 109].

Précisons que cette liste de techniques n'est pas exhaustive tout comme celle des références mentionnées. Les travaux présentés dans ce manuscrit, quant à eux, relèvent exclusivement de l'approche 1 (voir la classification ci-dessus) ce qui contribue en partie à leur originalité. Cette approche est en effet classiquement consacrée à l'analyse théorique des problèmes inverses et la mise en place de résultats généraux. Mais il est rare que ces derniers puissent avoir une application pratique.

## 1.2 De l'équation de conductivité à l'équation de Beltrami conjuguée

Formulons maintenant mathématiquement le problème étudié dans ce manuscrit ainsi que la démarche employée pour le résoudre (voir Chapitre 3). Le plan  $\mathbb{R}^2 = (xOy)$  est identifié au plan complexe  $\mathbb{C} = \{z = x + iy; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ . Les exposants  $p$  considérés appartieront toujours à  $(1, \infty)$ .

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un domaine simplement ou doublement connexe dont la frontière est de régularité  $C^1$ . Les résultats de ce manuscrit seront généralement énoncés pour  $\Omega = \mathbb{D}$  ou bien  $\Omega = \mathbb{A}$  dans la mesure où ils sont préservés par composition avec des transformations conformes. On note  $\vec{n}$  le vecteur unitaire normal sortant à  $\Omega$  et défini sur  $\partial\Omega$ .

Soit  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  le coefficient de diffusion encore appelé «conductivité». Il s'agit d'une fonction strictement positive telle qu'il existe deux constantes  $0 < c < C < \infty$  vérifiant

$$c \leq \sigma \leq C \quad \text{dans } \Omega . \tag{1.1}$$

Soit aussi  $I \subsetneq \partial\Omega$  un sous ensemble strict du bord du domaine dont le complémentaire  $J = \partial\Omega \setminus I$  est de mesure strictement positive. L'équation elliptique à laquelle nous nous

intéressons est la suivante :

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega, \quad (1.2)$$

la divergence et le gradient (par rapport aux variables réelles  $x, y \in \mathbb{R}^2$ ) étant compris au sens des distributions.

Plus précisément, le problème de Cauchy que nous étudions est le suivant :

Soient  $\varphi, \psi \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$  avec  $p \in (1, \infty)$ . Existe-t-il une (unique) solution au système

$$(PC) : \quad \begin{cases} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } I \\ \partial_n u = \psi & \text{sur } I \end{cases} ? \quad (1.3)$$

Il s'agit bien d'un problème de Cauchy dans la mesure où la partie  $I$  du bord supporte les deux conditions aux limites de Dirichet et de Neumann. Précisons que lorsque  $\Omega = \mathbb{A}$ , nous restreindrons les configurations possibles de l'intervalle  $I$  à celles de l'hypothèse  $(H_{I,J})$  donnée par (voir Figure 1.1) :

$$(H_{I,J}) : \quad I \subseteq \mathbb{T} \quad \text{ou bien} \quad I \subseteq \mathbb{T}_\rho.$$

Le cas  $I = I_1 \cup I_\rho$  avec  $I_1 \subsetneq \mathbb{T}$  et  $I_\rho \subsetneq \mathbb{T}_\rho$  est quant à lui toujours en cours d'étude.

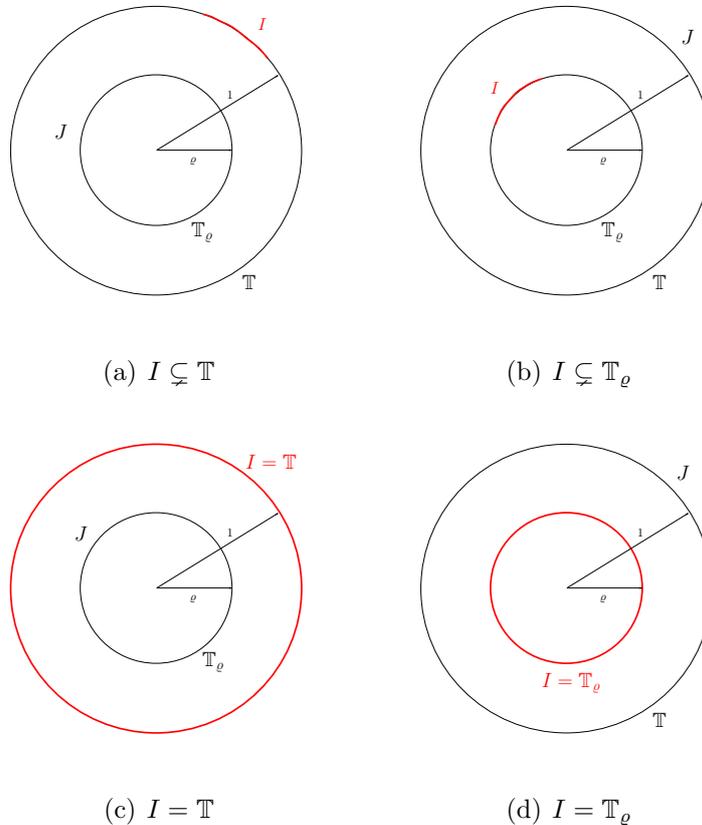


FIG. 1.1 – Support  $I$  des données du problème de Cauchy.

Notons que si les données  $(\varphi, \psi)$  représentaient une paire de données compatibles, c'est-à-dire telles qu'elles soient effectivement les valeurs sur  $I$  (en un sens qui sera précisé par la suite) d'une certaine fonction  $u$  solution de (1.2) dans  $\Omega$  et de sa dérivée normale, alors cette dernière serait l'unique solution au problème de Cauchy ( $PC$ ). En réalité, cette situation est celle d'un problème bien posé dont la solution s'obtient par un prolongement harmonique généralisé dans  $\Omega$  des données disponibles sur  $I$  qui déterminent donc entièrement la fonction. Que la solution du problème de Cauchy soit reliée à l'existence d'un tel prolongement est un fait bien connu dans le cas du Laplacien en dimension 2 [52].

Le point de vue que nous adoptons pour la résolution du problème ( $PC$ ) procède d'une connexion entre l'équation (1.2) et une équation aux dérivées partielles complexe d'ordre 1 [15]. Pour établir ce lien, supposons pour l'instant que les fonctions considérées ont toutes une régularité suffisante pour justifier les calculs qui suivent et que le domaine  $\Omega$  est simplement connexe. Soit  $u$  une solution à valeurs réelles de (1.2). On a alors que  $(-\sigma\partial_y u, \sigma\partial_x u)$  est une forme différentielle fermée. Le théorème de Poincaré nous assure avec la simple connexité de  $\Omega$  qu'il existe donc une fonction  $v$  à valeurs réelles telle que

$$\begin{cases} \partial_x v = -\sigma\partial_y u \\ \partial_y v = \sigma\partial_x u \end{cases} \quad \text{dans } \Omega . \quad (1.4)$$

Par conséquent la fonction  $v$  vérifie

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sigma} \nabla v \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega . \quad (1.5)$$

De plus, en posant

$$\nu = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \in \mathbb{R} , \quad (1.6)$$

on obtient finalement que la fonction  $f = u + iv$  satisfait l'équation

$$\bar{\partial} f = \nu \partial f \quad \text{dans } \Omega , \quad (1.7)$$

avec la majoration suivante pour  $\nu$  grâce à (1.1)

$$\|\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa \quad \text{pour } \kappa \in (0, 1) . \quad (\kappa)$$

Réciproquement, si  $f = u + iv$ , avec  $u$  et  $v$  à valeurs réelles, désigne une solution de (1.7), on obtient alors facilement par le calcul, en posant  $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ , que  $u$  et  $v$  satisfont respectivement (1.2) et (1.5). De plus, l'hypothèse  $(\kappa)$  implique (1.1).

L'équation (1.7) est appelée équation de Beltrami conjuguée. Il s'agit d'une équation  $\mathbb{R}$ -linéaire en raison de la présence du terme conjugué au second membre. Il convient de remarquer que les solutions de cette équation diffèrent considérablement des quasi-régulières qui vérifient l'équation de Beltrami (usuelle)

$$\bar{\partial} f = \nu \partial f .$$


---

Pour un aperçu des propriétés des solutions de l'équation de Beltrami, le lecteur pourra se référer à [6, 12, 13, 41, 57, 62, 80, 91, 92, 108, 115].

Avant de commenter plus en détail les liens entre l'équation de conductivité (1.2) et l'équation de Beltrami conjuguée (1.7), arrêtons nous un instant sur le sens à donner aux équations rencontrées jusqu'à présent. Toutes les classes de fonctions envisagées dans ce manuscrit seront contenues dans l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  pour  $p \in (1, \infty)$ . Dès lors, les solutions aux équations (1.2), (1.5) et (1.7) sont à prendre au sens distributionnel, ce qui requiert de pouvoir définir les distributions du type  $\sigma \partial_x u$  ou encore  $\nu \bar{\partial} f$ . Or il est possible de leur donner un sens de manière naturelle au moyen de la règle de Leibniz, en utilisant le fait que  $\sigma, \nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$ . Ainsi, par exemple, l'élément  $\nu \bar{\partial} f$  pour  $f \in L^p(\Omega)$  est défini pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$  comme la distribution

$$\langle \nu \bar{\partial} f, \phi \rangle = - \int_{\Omega} (\nu \bar{f} \bar{\partial} \phi + \bar{\partial} \nu \bar{f} \phi) \, dm .$$

On donnera par ailleurs un sens à la dérivée normale  $\partial_n u$  de toute fonction  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$  solution de (1.2) en tant élément de  $W^{-1,p}(\partial\Omega)$  (voir Lemme 4.3.2.1).

Observons maintenant que le système (1.4) est une généralisation des équations de Cauchy-Riemann qu'on retrouve en effet lorsque  $\sigma = 1$ . Dans ce cas particulier, et sous la condition  $\Omega$  simplement connexe supposée pour l'instant, la fonction  $f = u + iv$  est holomorphe dans  $\Omega$ . Notons que nous retrouvons bien cette caractérisation au moyen de l'équation de Beltrami conjuguée puisque cette dernière se réduit à  $\bar{\partial} f = 0$  ( $\sigma = 1 \implies \nu = 0$ ) qui traduit en effet l'holomorphie de  $f$ . En un sens, les équations (1.2) et (1.7) traduisent respectivement une généralisation des notions d'harmonicité et d'holomorphie. C'est pourquoi les solutions de (1.2) seront désormais qualifiées de  $\sigma$ -**harmoniques** et celles de (1.7) de  $\nu$ -**holomorphes**.

Le fait que l'équation de conductivité (1.2) puisse être reliée à l'équation de Beltrami conjuguée (1.7) présente des avantages considérables pour ce qui est de la résolution du problème de Cauchy (*PC*).

Pour illustrer ceci, supposons dans un premier temps  $\Omega = \mathbb{D}$  par souci de simplicité. Par des résultats de régularité à la frontière [63, Chap. 2] et un calcul rapide, on observe que le système de Cauchy-Riemann g en eralis e (1.4) peut encore s'écrire presque partout sur  $\mathbb{T}$

$$\partial_t v = \sigma \partial_n u ,$$

où  $\partial_t$  représente la dérivée tangentielle. Mais alors être en possession de données de Cauchy pour le problème (*PC*) signifie en particulier avoir accès à  $\partial_t v$ , et donc en particulier à  $v$ , cette dernière étant alors définie à une constante réelle près. On en conclut finalement que traiter des données de Cauchy sur  $I$  pour l'équation (1.2) revient à poser une condition aux limites de Dirichlet seule pour l'équation (1.7). De cette façon, en cherchant à approcher les mesures disponibles sur  $I$  par des solutions de (1.7) (ce qui nous allons effectivement faire par la suite), on constate que l'information disponible est prise en compte sans qu'aucune préférence ne soit accordée à la condition de Dirichlet  $\varphi$  ou à la condition de Neumann  $\psi$ . Au regard des applications envisagées dans ce manuscrit, ceci représente un avantage puisque l'une comme l'autre sont soumises aux incertitudes inhérentes aux appareils de mesures. Ajoutons que cela contraste notamment avec les techniques classiques de régularisation de type Tikhonov où comme nous l'avons déjà  evoqu e il s'agit

d'approcher par exemple la condition de Neumann en résolvant un problème bien posé pour lequel la condition de Dirichlet est fixée (et donc considérée *a priori* comme la valeur au bord d'une véritable solution de (1.2)).

Un autre avantage du lien entre les équations (1.2) et (1.7) réside dans le fait que l'étude des solutions de cette dernière permet la mise en place de nouveaux espaces fonctionnels permettant de traiter avantageusement les problèmes aux limites de type Dirichlet, Neumann ou bien Cauchy pour des données frontière de régularité  $L^p$  avec  $p \in (1, \infty)$ . En effet, pour transformer le problème de Cauchy initial (PC) en un problème bien posé sous ces conditions de régularité au bord, nous allons avoir besoin de prouver deux types de résultats, à savoir :

- Des résultats de type Dirichlet pour l'équation (1.7) lorsqu'une donnée  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$  est prescrite sur tout le bord  $\partial\Omega$ .
- Des résultats de densité dans  $L^p(I)$  des valeurs au bord (qui seront en fait des traces) des solutions de (1.7).

C'est en fait l'étude du problème de Dirichlet qui soulève la question du choix d'espaces fonctionnels adaptés à notre problème. Précisons qu'historiquement, le problème de Dirichlet est en principe lié à l'équation de Laplace. Nous utiliserons néanmoins cette dénomination à la fois pour le problème consistant à trouver  $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$  solution de (1.2) à partir de sa valeur prescrite sur  $\partial\Omega$  ou bien pour celui consistant à trouver  $f \in L^p(\Omega)$  solution de (1.2) à partir de la donnée de sa partie réelle sur  $\partial\Omega$ .

Il est connu depuis les travaux de Campanato [51] que le problème de Dirichlet pour (1.2) avec une donnée au bord  $\varphi \in W^{1-1/p,p}_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$  admet une unique solution  $u \in W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  dont la norme est contrôlée par celle de  $\varphi$ , soit

$$\|u\|_{W^{1,p}_{\mathbb{R}}(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{W^{1-1/p,p}_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)} .$$

De ce résultat découle une version adaptée à l'équation (1.7) avec [25, Thm. 4.1.1] (voir le Théorème 4.1.1.2). Cela dit, que deviennent ces propriétés lorsque  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$ ? La piste suivie par [25] pour répondre à cette question dans le cas de domaines simplement connexes procède de l'analogie existant entre le système (1.4) et les équations de Cauchy-Riemann. Ainsi, dans le cadre holomorphe classique (donc pour  $\nu = 0$ ), le problème de Dirichlet pour (1.7) admet une solution dans les espaces de Hardy  $H^p(\Omega)$  [63]. Les propriétés de ces espaces sont rappelées dans le Chapitre 2. Retenons ici simplement le fait que les fonctions de  $H^p(\Omega)$  admettent en presque tout point de  $\partial\Omega$  une limite non-tangentielle, résultat bien connu depuis Fatou [66]. Il se trouve que cette propriété est encore vraie pour les solutions du problème de Dirichlet pour (1.2) lorsque l'on suppose que  $\sup_{0 < r < 1} \left( \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < +\infty$ . Dès lors, les travaux de ce manuscrit s'inscrivent dans la continuité de ceux de [25] dans lesquels est introduite la classe de fonctions  $H^p_{\nu}(\Omega)$  pour  $\Omega$  simplement connexe. Celle-ci se définit comme suit :

**Definition 1.2.1** *Soit  $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  satisfaisant ( $\kappa$ ). On note  $H^p_{\nu}(\mathbb{D})$  l'espace de Hardy généralisé des fonctions  $f$  mesurables sur  $\mathbb{D}$  vérifiant (1.7) au sens des distributions et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{D}$ , soit*

$$\sup_{0 < r < 1} \operatorname{ess} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} = \sup_{0 < r < 1} \operatorname{ess} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < +\infty .$$

L'espace  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  est muni de la norme

$$\|f\|_{H_\nu^p(\Omega)} := \sup_{0 < r < 1} \operatorname{ess} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} .$$

Les espaces  $H_\nu^p$  sont des espaces de Banach réels qui étendent la notion d'analyticité. Il est prouvé dans [25] que les fonctions de  $H_\nu^p$  ont un lien avec les fonctions pseudoanalytiques. Ces dernières ont été particulièrement étudiées par Bers et Nirenberg [33, 34] ou encore Vekua [132] car elles permettent de généraliser de nombreuses propriétés des fonctions analytiques de la variable complexe. Elles sont par ailleurs le sujet de nouvelles investigations en raison de l'intérêt qu'elles suscitent du point de vue applicatif [99].

Il est établi dans [25] que les espaces de Hardy généralisés  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  partagent un nombre important de propriétés des espaces de Hardy classiques  $H^p(\mathbb{D})$ . En particulier, les fonctions de  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  admettent des limites non-tangentes dans  $L^p(\mathbb{T})$ , appelées traces, en presque tout point de  $\mathbb{T}$ . Chaque élément de  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  peut être identifié avec sa trace par équivalence des normes  $\|\cdot\|_{H_\nu^p(\mathbb{D})}$  et  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . L'espace  $tr_{\mathbb{T}} H_\nu^p(\mathbb{D})$  constitue ainsi un sous-espace fermé de  $L^p(\mathbb{T})$ . Finalement, les espaces  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  permettent de rendre bien posé le problème de Dirichlet pour (1.7) pour des données frontière dans  $L^p(\partial\Omega)$  [25, Thm. 4.4.2.1].

Le premier travail de cette thèse a consisté à étendre les propriétés des espaces  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  au cas de domaines  $\Omega$  doublement connexes. Nous obtenons ainsi la proposition suivante :

### Proposition 1.2.1

1. Tout élément  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  admet une limite non-tangentielle presque partout sur  $\partial\Omega$ . Cette dernière appartient à  $L^p(\partial\Omega)$ , est appelée trace de  $f$  et est notée  $tr_{\partial\Omega} f$  (ou encore  $tr f$ ).
2. La norme  $\|\cdot\|_{H_\nu^p(\Omega)}$  définit une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$ . De plus si  $\partial\Omega = \mathbb{A}$  avec  $\partial\mathbb{A} = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}_\varrho$  on a pour tout élément  $f \in H_\nu^p(\mathbb{D})$

$$\lim_{r \rightarrow \varrho} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = \lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0 ,$$

3. L'espace  $tr_{\partial\Omega} H_\nu^p(\Omega)$  est fermé dans  $L^p(\partial\Omega)$ .
4. Tout élément de  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  vérifie  $\log |tr_{\partial\Omega} f| \in L^1(\partial\Omega)$  à moins que  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .
5. Si  $f \in H_\nu^{p,0}(\Omega)$  vérifie  $Re tr_{\partial\Omega} f = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ , alors  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .
6. Lorsque  $f \in H_\nu^p(\Omega)$ , on a pour presque tout  $z \in \Omega$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \frac{\nu \overline{\partial f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} .$$

On observe notamment que la propriété d'unicité de l'extension analytique se généralise avec le point 4 et que les fonctions de  $H_\nu^p(\Omega)$  admettent une représentation qui étend la formulation intégrale de Cauchy pour les fonctions holomorphes avec le point 6.

Enfin toujours dans l'optique d'étendre certaines propriétés des espaces de Hardy classiques, nous prouvons une décomposition de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  en somme d'espaces de Hardy généralisés élémentaires. Ce résultat s'appuie notamment sur le résultat de Dirichlet pour (1.7) énoncé dans [25]. Ainsi nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors il existe  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  et  $\nu_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  satisfaisant des hypothèses de type  $(\kappa)$  telles que  $\nu_{i|\mathbb{A}} = \nu_{e|\mathbb{A}} = \nu$  et*

$$H_\nu^p(\mathbb{A}) = H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})|_{\mathbb{A}} \oplus H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})|_{\mathbb{A}} .$$

*De plus, cette décomposition est topologique.*

Notons que dans ce théorème, l'espace  $H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  désigne l'ensemble des fonctions  $f$  de  $H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  soumises à la condition de normalisation

$$\int_0^{2\pi} \text{tr}_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) = 0 .$$

### Problèmes de Dirichlet

Une fois ces propriétés établies, nous avons étudié le problème de Dirichlet pour (1.7) dans le cas  $\Omega = \mathbb{A}$  (voir Chapitre 4). Notons que ce résultat ne peut être obtenu directement à partir de celui formulé dans  $\mathbb{D}$ . Pour comprendre ceci, il convient de remarquer le lien existant entre la possibilité de résoudre le problème de Dirichlet et l'existence de l'opérateur de conjugaison harmonique. L'analyse du résultat de Dirichlet dans  $\mathbb{D}$  mène en effet à la conclusion que pour toute donnée  $\varphi \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$ , il existe une fonction  $\Psi \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  tel que la fonction  $f = u + iv$  vérifie  $f \in H_\nu^p(\mathbb{D})$ ,  $\text{Re}(tr_{\mathbb{T}} f) = \varphi$  et  $\text{Im}(tr_{\mathbb{T}} f) = \Psi$  (la fonction  $\Psi$  pouvant être définie de manière unique si on impose une condition de normalisation à  $f$ , par exemple  $\int_0^{2\pi} \text{Im}(tr_{\mathbb{T}} f)(e^{i\theta}) d\theta = 0$ ). Il devient alors possible de définir l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\nu : L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) &\quad \rightarrow \quad L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) \\ \text{Re}(tr_{\mathbb{T}} f) &\quad \mapsto \quad \text{Im}(tr_{\mathbb{T}} f) \end{aligned} .$$

Cet opérateur a été introduit dans [15] pour des fonctions de  $W^{1/2,2}(\mathbb{T})$ , donc plus régulières que celles que nous regardons, mais pour une conductivité  $\sigma$  seulement mesurable. Lorsque  $\nu = 0$ , il s'agit de l'opérateur de conjugaison harmonique classique qui associe à la partie réelle d'une fonction holomorphe sa partie imaginaire [63, 75]. Finalement, la résolution du problème de Dirichlet dans  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  traduit le fait que toute fonction de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  admet une conjuguée harmonique généralisée que l'on appellera **conjuguée  $\sigma$ -harmonique**. En définitive, ce résultat n'est rien d'autre que la traduction du fait que lorsque  $\Omega$  est simplement connexe, le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4) est toujours intégrable. Le théorème de M. Riesz [75, Chap. III, Thm. 2.3] permet de déduire de plus la bornitude de  $\mathcal{H}_\nu$  sur  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  mais il reste encore borné sur  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$  et  $W_{\mathbb{R}}^{1,p}(\mathbb{T})$  [25, Cor. 4.4.2.1].

Cette équivalence entre la résolution du problème de Dirichlet pour (1.7) dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  et la possibilité d'associer à toute donnée réelle appartenant à  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  une conjuguée

$\sigma$ -harmonique est par contre problématique. En effet, lorsque  $\Omega = \mathbb{A}$ , il est clair que le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4) n'est pas toujours intégrable (tout en le restant toujours localement). Cela signifie que certains éléments de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  n'admettent pas de conjuguées  $\sigma$ -harmoniques. Afin d'identifier ces éléments, nous avons d'abord résolu le problème de Dirichlet pour (1.2) dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . Ainsi nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 1.2.2** *Soient  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant (1.1) et  $(u_1, u_\varrho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . Il existe une unique fonction  $u$  solution de (1.2) et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{A}$  telle que  $tr_{\mathbb{T}} u = u_1$  presque partout sur  $\mathbb{T}_\varrho$  et  $tr_{\mathbb{T}} u = u_1$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ .*

Au cours de la démonstration de ce théorème nous obtenons notamment la décomposition suivante :

$$L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) = \mathcal{S} \oplus \text{Ran}(I + K) ,$$

où  $K$  est un opérateur compact de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  et  $\mathcal{S}$  est défini par

$$\mathcal{S} = \{(u_1, u_\varrho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}); u_1 = C \text{ and } u_\varrho = -C, C \in \mathbb{R}\} .$$

On obtient aussi les corollaires suivants :

**Corollaire 1.2.1**  $\text{Ran}(I + K) = \text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}))$  .

**Corollaire 1.2.2** *L'espace  $\text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}))$  des éléments de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  admettant une conjuguée  $\sigma$ -harmonique est de codimension 1. En particulier, l'espace  $\mathcal{S}$  est isomorphe à l'espace quotient  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) \setminus \text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}))$ .*

Ces résultats permettent de résoudre complètement le problème de Dirichlet pour (1.7) dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . On obtient de plus que l'espace  $\text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}))$  est de codimension 1 dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . Un représentant de l'espace quotient  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})/\text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}))$  est en particulier  $\mathcal{S}$  mais nous montrons de façon plus générale dans ce manuscrit que seules les solutions  $u$  de (1.2) dans  $\mathbb{A}$  vérifiant la condition de compatibilité  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n u = 0$  admettent une conjuguée. Ces fonctions définissent un espace isomorphe à  $\mathcal{S}$  telles que les fonctions qu'il est possible de leur associer via les équations (1.4) sont en fait multivaluées dans  $\mathbb{A}$ .

En conclusion de l'étude de cette problématique, nous démontrons le théorème :

**Théorème 1.2.3** *Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  associée à  $\nu$  par (1.6). Soient aussi  $u = (u_1, u_\varrho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  et  $U$  la solution du problème de Dirichlet dans  $\mathbb{A}$  pour (1.2) associée à  $u$ . Alors, si  $U$  vérifie la condition de compatibilité  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U = 0$ , il existe une unique fonction  $f \in H_\nu^{p,0}(\mathbb{A})$  telle que*

$$\text{Re}(tr_{\mathbb{T}} f) = u_1 \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T} \quad \text{et} \quad \text{Re}(tr_{\mathbb{T}_\varrho} f) = u_\varrho \quad \text{p.p. sur } \mathbb{T}_\varrho .$$

De plus, il existe  $c = c_{p,\sigma} > 0$  ne dépendant que de  $p$  et  $\sigma$  telle que

$$\|f\|_{H_\nu^p(\mathbb{A})} \leq c_{p,\sigma} \|u\|_{L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})} ,$$

et on a  $f \in W_{loc}^{1,l}(\mathbb{A})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Si par contre  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U \neq 0$ , le problème de Dirichlet pour (1.7) dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  n'admet pas de solution.

### Résultats de densité

Après la résolution du problème de Dirichlet, un des outils fondamentaux pour transformer le problème de Cauchy (*PC*) en un problème d'approximation bien posé dans les classes  $H_\nu^p$  est un résultat de densité (voir Chapitre 5). Grossièrement parlant, il s'agit de prouver que lorsque l'intervalle  $I$  n'est pas trop large, alors il est possible d'approximer toute fonction de  $L^p(I)$  par la trace d'une solution de (1.7) dans  $\Omega$ . Ce problème a été très largement étudié dans le cas des espaces de Hardy classiques  $H^p(\mathbb{D})$  pour  $p \in (1, \infty)$  [23] (et même  $p = \infty$  [22] que nous n'envisageons pas dans cette thèse) ainsi que pour  $H^p(\mathbb{A})$  [54, 123, 124]. Concernant la géométrie simplement connexe, ces résultats ont été généralisés dans  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  [25, Thm. 4.5.2.1]. Un des résultats importants de cette thèse consiste alors en l'extension de cette dernière propriété à une géométrie doublement connexe.

Comme cela a déjà été constaté lors de la résolution du problème de Dirichlet, le passage d'une géométrie simplement connexe à une géométrie doublement connexe fait apparaître certaines difficultés. En particulier, il est possible d'étendre de manière naturelle à  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  le résultat de densité concernant  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  uniquement dans le cas particulier où  $I \subsetneq \mathbb{T}$  (ou encore  $I \subsetneq \mathbb{T}_\rho$ ). Pour prouver cette partie, nous nous appuyons sur le Théorème 1.2.1 en effectuant un passage à la trace sur  $I$  dans la décomposition de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  et en utilisant finalement le résultat de densité dans  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  [25, Thm. 4.5.2.1]. Le passage au cas  $I = \mathbb{T}$  (ou encore  $I = \mathbb{T}_\rho$ ) est quant à lui beaucoup plus délicat. Il n'est en effet pas possible d'utiliser les mêmes arguments qu'auparavant dans la mesure où les traces de  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  sur  $\mathbb{T}$  forment un sous-ensemble fermé de  $L^p(\mathbb{T})$ . Pour remédier à ceci nous prouvons dans un premier temps le théorème suivant :

**Théorème 1.2.4** *Soit  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors  $(H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}))_{|\mathbb{D}_\rho}$  est dense dans  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}_\rho)$ .*

Suite à quoi il nous est possible de prouver complètement le théorème de densité voulu.

**Théorème 1.2.5** *Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  et  $I$  satisfaisant respectivement  $(\kappa)$  et  $(H_{I,J})$ . Alors  $(tr H_\nu^p(\mathbb{A}))_{|I}$  est dense dans  $L^p(I)$ .*

Ce résultat de densité mène directement à la nouvelle formulation que nous allons proposer pour le problème de Cauchy. Ainsi, nous savons désormais approcher aussi près qu'on le souhaite toute donnée de  $L^p(I)$ , que nous notons désormais  $F_d$ , par une solution de (1.7) dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . Toutefois, une telle approximation se fait aux dépens du comportement sur la partie complémentaire  $J = \partial\mathbb{A} \setminus I$  de la fonction de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  recherchée, exception faite du cas où la donnée mesurée sur  $L^p(I)$  est déjà la restriction à  $I$  de la trace d'un élément de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . On montre en effet pour  $\Omega$  simplement ou doublement connexe, la proposition suivante :

**Proposition 1.2.2** *Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  et  $I$  satisfaisant respectivement  $(\kappa)$  et  $(H_{I,J})$ . Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_\nu^p(\Omega)$  est telle que  $(tr f_n|_I)_n$  converge vers  $F_d \in L^p(I)$  en norme  $L^p(I)$  et si  $F_d$  n'est pas la restriction à  $I$  d'une fonction de  $H_\nu^p(\Omega)$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|tr_J f_n\|_{L^p(J)} = \infty .$$

Remarquons que ce résultat n'est rien d'autre que la traduction du caractère mal posé du problème de Cauchy pour l'équation (1.2) mais reformulé en termes d'approximation dans les classes de fonctions analytiques généralisées  $H_\nu^p$ . Pour remédier à ce problème et rétablir la stabilité sur la partie  $J$  de l'approximant recherché, nous allons appliquer à ce dernier une contrainte en norme  $L^p(J)$ . Cette contrainte constitue donc l'ajout d'une information supplémentaire dans le modèle que nous utilisons et rejoint bien les remarques que nous avons faites dans la Section 1.1 quant à la nécessité d'apporter une information *a priori* pour rendre le problème de Cauchy bien posé.

### 1.3 Problèmes extrémaux bornés

Le Théorème 1.2.5 et la Proposition 1.2.2 nous indiquent donc que plus on cherche à approcher de près la donnée  $F_d \in L^p(I) \setminus (tr H_\nu^p(\mathbb{A}))|_I$  par une solution de (1.7) dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ , plus cette dernière aura tendance à être instable et à diverger sur la partie  $J$  du bord. Afin de rendre ce problème d'approximation bien posé, nous le reformulons comme un problème de meilleure approximation sous contrainte dans les classes  $H_\nu^p$  (voir Chapitre 6).

On procède alors de la façon suivante. On se donne  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$ , et on note

$$\mathcal{B}_{M,\Phi}^p = \left\{ g \in tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^p(\mathbb{A}); \|Re(g) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M \right\}|_I \subset L^p(I).$$

L'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  représente l'espace dans lequel nous allons chercher une solution au problème de meilleure approximation de la donnée fournie sur  $I$ . Remarquons que nous ne cherchons qu'à contraindre les éléments de cet espace en partie réelle sur  $J$ . Nous aurions pu choisir d'appliquer une contrainte sur la solution cherchée toute entière comme dans [22, 23] ou bien encore sur les parties réelles et imaginaires séparément comme dans [107]. Néanmoins nous avons fait le choix d'une contrainte en partie réelle car cette dernière va se révéler adaptée à l'algorithme que nous allons mettre en place pour retrouver la frontière du plasma dans le tokamak Tore Supra. Remarquons aussi que l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  dépend des deux paramètres  $M$  et  $\Phi$  qui sont à fixer en amont du problème. Concernant ce dernier point, on fait les deux constatations suivantes :

- Plus  $M$  est grand, plus la solution  $g$  cherchée est libre d'évoluer par rapport à la fonction  $\Phi$  sur  $J$ . Donc plus  $M$  augmente, plus l'erreur d'approximation en norme  $L^p(I)$  entre un élément de  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  et la donnée  $F_d$  sera petite. A la limite, c'est-à-dire pour  $M \rightarrow \infty$ , cette erreur va tendre vers 0 (on est en fait dans le cadre du Théorème 1.2.5). Au contraire, plus  $M$  devient petit, plus le comportement des éléments de  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  est contraint à approcher celui de  $\Phi$  en norme  $L_{\mathbb{R}}^p(J)$ , et donc plus l'erreur d'approximation sur  $I$  va augmenter. Finalement, il est justifié de dire que la résolution du problème d'approximation sous contrainte dans l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  s'apparente à un problème de relaxation par rapport au paramètre  $M$ .
- Le choix de la fonction  $\Phi$  repose avant tout sur la manière dont on souhaite influencer le comportement de la solution cherchée dans  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . Du point de vue applicatif, il s'agit donc d'un choix provenant de considérations extra-mathématiques qui sont dictées par les phénomènes physiques mis en jeu.

Du point de vue de la terminologie, chercher une solution au problème d'approximation dans la classe  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  revient à résoudre un «problème extrémal borné». Cette dénomination

prend sa source dans les problèmes extrémaux duaux dont l'archétype est le problème de Nehari consistant à trouver une fonction de  $g \in H^\infty(\mathbb{D})$  approchant au mieux une fonction  $f \in L^\infty(\mathbb{T})$  [63, 75, 97]. Pour une revue historique détaillée de la résolution des problèmes extrémaux duaux, le lecteur pourra se référer à [63, Chap. 8, Notes].

Les problèmes extrémaux bornés sont donc une extension des problèmes extrémaux duaux au cas où la partie sur laquelle on cherche à approximer est un sous-ensemble strict du bord. Une des principales motivations pour la résolution de ce genre de problèmes, du moins dans le cas harmonique classique, provient de l'identification des systèmes dynamiques linéaires où il est question de construire un modèle stable d'une fonction de transfert reproduisant avec suffisamment de précision ses valeurs à certaines fréquences de la bande passante  $I$  obtenues avec des procédures classiques d'identification harmonique.

### Résolution théorique

La résolution des problèmes extrémaux bornés dans le cas des fonctions analytiques sur des domaines simplement et doublement connexes a fait l'objet de très nombreux résultats [4, 16, 23, 22, 21, 24, 26, 27, 54, 93, 100, 106, 107, 125]. Les travaux de cette thèse s'appuient sur ces derniers tout en les généralisant au cadre des espaces de Hardy généralisés (voir Chapitre 6). Nous prouvons ainsi que pour toute donnée  $F_d \in L^p(I)$ , il existe une fonction  $g_0 \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  réalisant la distance minimale avec  $F_d$  au sens de la norme  $L^p(I)$ . Plus précisément, on obtient :

**Théorème 1.3.1** *Soient  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^p(I)$ , il existe une unique fonction  $g_0 \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  telle que*

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p} \|F_d - g\|_{L^p(I)} .$$

*De plus, si  $F_d \notin \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , alors  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} = M$  (contrainte saturée).*

Sa preuve procède de l'observation suivante : l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  est un sous-ensemble convexe et fermé de  $L^p(I)$ . Ce point est précisément démontré au moyen du Théorème 1.2.3. Comme l'espace  $L^p(I)$  est uniformément convexe, il existe donc bien une unique projection de  $L^p(I)$  sur  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  réalisant une distance minimale [29, Part 3, Chap. II, §1, Prop. 5]. De plus lorsque  $F_d \in L^p(I) \setminus \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , le Théorème de densité 1.2.5 permet de prouver que  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)}$  sature la contrainte  $M$ .

Dans le cas hilbertien, nous obtenons avec le Théorème 1.3.1 une formulation de la solution  $g_0$  au moyen d'une équation faisant intervenir l'opérateur de projection  $P_\nu : L^2(\partial\mathbb{A}) \rightarrow tr_{\partial\mathbb{A}} H_\nu^2(\mathbb{A})$ .

**Corollaire 1.3.1** *Soit  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^2(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathcal{B}_{M,\Phi}^2$ , la solution  $g_0$  du problème extrémal borné est donnée par l'équation*

$$P_\nu(\chi_I g_0) + \gamma P_\nu(\chi_J Re(g_0)) = P_\nu(\chi_I F_d) + \gamma P_\nu(\chi_J \Phi) ,$$

*pour l'unique  $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$  ajusté tel que  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^2(J)} = M$ .*

Ce résultat est formulé sous la forme d'un corollaire car il est dérivé de la résolution d'un problème extrémal borné lorsque la contrainte porte sur toute la solution cherchée

et non pas seulement sur sa partie réelle. La solution  $g_0$  est ainsi fournie par une équation variationnelle dépendant d'un paramètre  $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$  de type Lagrange qui sature la contrainte  $M$ . La difficulté dans cette formule réside avant tout dans son caractère implicite en  $\gamma$  qu'il est difficile d'exprimer en fonction de  $M$ . Pour tirer parti du Corollaire 1.3.1, nous adopterons alors un point de vue consistant à considérer  $\gamma$  comme un paramètre du problème et on associera alors à chaque valeur de  $\gamma$  la contrainte  $M = \|Re(g_0) - \Phi\|_{L^2_{\mathbb{R}}(J)}$ . Nous montrerons aussi que la fonction  $\gamma \mapsto M(\gamma)$  est strictement décroissante de  $\mathbb{R}_*^+$  dans  $\mathbb{R}_*^+$  ouvrant ainsi la voie à un premier algorithme de calcul de la solution  $g_0$ .

### Résolution constructive

Au terme de l'étape précédente, la résolution théorique du problème extrémal borné est entièrement achevée. De plus, l'exploitation de ce résultat d'un point de vue constructif est possible dans le cas  $p = 2$  (voir Chapitre 7). Remarquons que le fait de considérer des valeurs frontières de régularité  $L^2$  (donc d'énergie finie) est une hypothèse valide lorsqu'il s'agit d'utiliser ces résultats pour une application physique. Afin de développer les outils nécessaires à l'identification des paramètres magnétiques ainsi que de la frontière plasma dans le tokamak Tore Supra, nous nous plaçons désormais dans le cas où les domaines annulaires étudiés sont tous contenus dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ . La conductivité est par ailleurs choisie telle que  $\sigma(x, y) = \frac{1}{x}$  (ce qui implique  $\nu = \frac{x-1}{x+1}$ ).

Alors, pour calculer la solution  $g_0$  avec le Corollaire 1.3.1, il est nécessaire de caractériser le mode opératoire de l'opérateur de projection  $P_\nu$ . Pour y parvenir, nous déterminons une famille complète de fonctions de l'espace de Hilbert réel  $H^2_\nu(\mathbb{A})$ , sur laquelle nous allons projeter les éléments de  $L^2(\partial\mathbb{A})$  au moyen du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\partial\mathbb{A}} = Re \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) \overline{g(\varrho e^{i\theta})} d\theta \right) .$$

Précisons que l'expression «famille complète de  $H^2_\nu(\mathbb{A})$ » renvoie à une famille de fonctions dénombrable engendrant un sous-espace dense de l'espace  $H^2_\nu(\mathbb{A})$ . En particulier, la famille exhibée dans le Chapitre 7 ne sera pas une base hilbertienne. La détermination de celle-ci procède d'une analogie faite avec le théorème de décomposition en série de Laurent des fonctions holomorphes sur des espaces doublement connexes [18]. Il s'agit en effet d'exhiber des fonctions solutions de (1.7) possédant une singularité dans exactement une des composantes connexes du domaine  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{A}}$ . La recherche de ces solutions explicites se traite de manière classique en faisant usage de la technique de séparation des variables dans les équations (1.2) et (1.5). Nous calculons donc ces solutions en les exprimant dans un système de coordonnées adapté aux applications que nous envisageons pour le tokamak Tore Supra [9, 113]. Il s'agit du système de coordonnées toroïdales  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0, 2\pi]$  reliées aux coordonnées cartésiennes  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  [116] par

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} \quad \text{et} \quad y = a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta} ,$$

où le point de coordonnées  $(x, y) = (a, 0)$  désigne le foyer du système de coordonnées toroïdales.

Finalement, nous prouvons le théorème suivant, énoncé dans un domaine annulaire  $\mathbb{A}'$  composé de deux cercles non concentriques mais qui reste valable dans tout domaine doublement connexe à frontière régulière contenu dans  $\mathbb{P}_d$  :

**Théorème 1.3.2** Soient  $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}_*^+$  tels que  $\tau_0 < \tau_1$ . Soit  $\mathbb{A}'$  l'anneau constitué des deux cercles d'équation  $\tau = \tau_0$  et  $\tau = \tau_1$ . Les ensembles

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{array}{l} u_{k,c}^{1,int} + iv_{k,c}^{1,int} \quad , \quad (u_{k+1,c}^{1,ext} - u_{0,c}^{1,ext}) + i(v_{k+1,c}^{1,int} - v_{0,c}^{1,ext}) \quad , \\ u_{k+1,s}^{1,int} + iv_{k+1,s}^{1,int} \quad , \quad u_{k+1,s}^{1,ext} + iv_{k+1,s}^{1,ext} \end{array} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

et

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{array}{l} u_{k,c}^{0,int} + iv_{k,c}^{0,int} \quad , \quad (u_{k+1,c}^{0,ext} - u_{0,c}^{0,ext}) + i(v_{k+1,c}^{0,int} - v_{0,c}^{0,ext}) \quad , \\ u_{k+1,s}^{0,int} + iv_{k+1,s}^{0,int} \quad , \quad u_{k+1,s}^{0,ext} + iv_{k+1,s}^{0,ext} \end{array} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

constituent deux familles complètes de fonctions dans  $H_\nu^2(\mathbb{A}')$ .

Les fonctions  $u$  et  $v$  intervenant dans ce théorème sont en fait des combinaisons linéaires à coefficients réels de produits entre des harmoniques toroïdales, qui s'expriment elles-mêmes à l'aide de fonctions de Legendre associées [3, 105, 116] (les indices «*ext*» et «*int*» renvoient respectivement aux fonctions de Legendre associées de première ou de deuxième espèce), avec les fonctions circulaires  $\cos$  et  $\sin$  (repérées avec les indices «*c*» et «*s*»). Soulignons que les fonctions de Legendre associées de deuxième espèce ont une singularité en tout point de l'axe  $x = 0$  (ou encore  $\tau = 0$ ) alors que celles de première espèce sont singulières au foyer du système de coordonnées toroïdales situé à l'intérieur du petit disque de  $\mathbb{A}'$ .

Le Théorème 1.3.2 fournit ainsi tous les outils nécessaires à la résolution constructive du problème extrémal borné et ouvre la voie à la mise en place d'un algorithme de calcul appliqué à la résolution de problèmes inverses pour le tokamak Tore Supra.

**Remarque 1.3.1** Mentionnons que certains travaux réalisés pendant la thèse, que nous n'exposons pas dans ce manuscrit, ont consisté à résoudre constructivement le problème extrémal borné dans des domaines simplement connexes. Grâce à la même technique que celle utilisée pour le cas des domaines doublement connexes, on obtient des familles de fonctions complètes dans les espaces  $H_\nu^2(\mathbb{D})$  s'exprimant comme des produits de fonctions de Bessel par des exponentielles. Ce travail a donné lieu aux publications [71, 72].

## 1.4 Problèmes inverses pour la fusion nucléaire

### Contexte

La fusion nucléaire représente une source prometteuse d'énergie en vue de combler la demande mondiale en perpétuelle croissance dûe notamment au développement industriel rapide de nombreux pays émergents. Les réactions de fusion nucléaire alimentent la production d'énergie du soleil et des autres étoiles. Au cours de celles-ci, des noyaux de faibles masses fusionnent pour former des noyaux plus lourds. Le défaut de masse entre les états final et initial de la réaction se traduit par la libération d'énergie selon la célèbre loi d'Einstein  $E = mc^2$ . La réaction de fusion la plus simple à envisager, car la plus probable en termes de probabilité d'occurrence, est la réaction entre le deutérium  ${}^2H$  et le

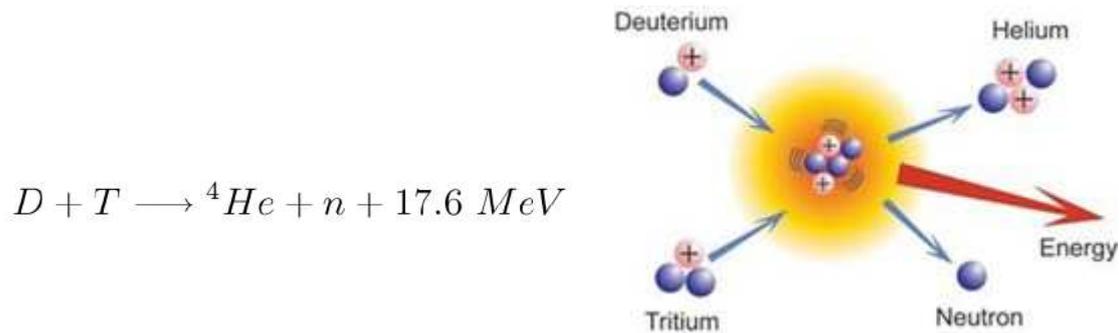


FIG. 1.2 – Réaction de fusion deutérium-tritium. Source : <http://www.iter.org/>

tritium  ${}^3H$ , deux isotopes de l'hydrogène (voir Figure 1.2 où  $He$  représente l'hélium et  $n$  un neutron).

Le principe inverse correspondant aux réactions de fission et consistant à casser des noyaux lourds en plusieurs noyaux légers est depuis longtemps connu et utilisé dans les réacteurs nucléaires actuels. Néanmoins les réactions de fusion nucléaire restent par leur nature beaucoup plus sûres que celles de fission. Elles produisent certes aussi des déchets radioactifs mais le traitement de ces derniers est grandement simplifié par rapport à ceux de la fission. Néanmoins, le fait que les réactions de fusion nucléaire conduisant à un bilan énergétique positif ne soient pas encore complètement maîtrisées représente un frein à leur exploitation d'un point de vue industriel.

Pour comprendre la physique de ces réactions [127], il convient avant tout de s'intéresser à la notion de plasma. Ainsi, dans la mesure où les noyaux sont chargés positivement, ils se repoussent les uns les autres. Afin de les faire fusionner, il est nécessaire que ces derniers franchissent une barrière énergétique appelée barrière de Coulomb. Or le dépassement de cette barrière ne peut se faire qu'en apportant un surplus d'énergie aux noyaux. Concrètement, on augmente l'énergie cinétique de ces derniers en les chauffant à des températures avoisinant les 100 millions de degrés. A ces températures, les électrons se séparent de leurs noyaux qui dès lors s'ionisent pour entrer dans le quatrième état de la matière appelé plasma. Même si la description qui vient d'en être faite ne le laisse pas supposer, le plasma représente l'état de la matière le plus répandu dans l'univers.

Pour pouvoir exploiter l'énergie de la fusion nucléaire, il faut donc être en mesure de porter les noyaux à des températures suffisamment élevées mais aussi surtout de les confiner afin de produire suffisamment de réactions et ainsi compenser l'énergie dépensée pour les chauffer. Les techniques de confinement existantes sont de deux types :

- Le confinement inertiel : cela consiste à porter à très haute pression et très haute température un faible volume de combustible, et ce dans un temps très court pour éviter la dispersion du plasma. Ces expériences sont réalisées au moyen de lasers comprimant une cible à une densité très élevée.
- Le confinement magnétique : cela consiste à confiner le plasma dans une région limitée de l'espace en utilisant les interactions entre les particules chargées de ce dernier avec un champ magnétique produit par des sources extérieures.

L'approche par confinement magnétique est celle qui est actuellement utilisée dans les tokamaks [134]. Ces machines de géométrie toroïdale, inventées dans les années 1950

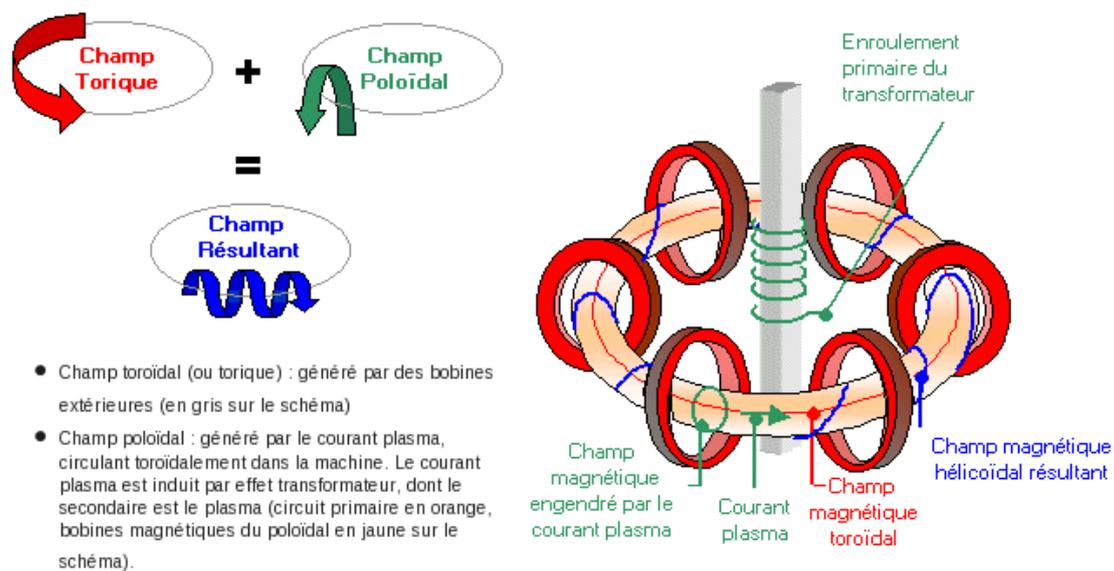


FIG. 1.3 – Principe de fonctionnement d'un tokamak. Source : <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>

en Union Soviétique, constituent la voie de recherche la plus étudiée pour la maîtrise du confinement magnétique. Plusieurs tokamaks sont actuellement exploités pour la recherche. Citons notamment Tore Supra (France), JET (Angleterre), DIII-D (Etats-Unis), FTU (Italie) et TCV (Suisse). Enfin mentionnons la construction de ITER (France) conçu pour être le premier dispositif de fusion capable de générer de l'énergie de manière effective.

Le principe de fonctionnement des tokamaks repose sur la création de deux types de champs magnétiques (voir Figure 1.3). Il y a tout d'abord un champ magnétique poloïdal  $B_p$  créé par le courant du plasma, lui-même obtenu par induction en faisant varier un courant dans des bobines du circuit primaire. Ce type de circuit magnétique peut s'effectuer avec ou sans noyau de fer. Au champ  $B_p$  s'ajoute un champ toroïdal  $B_T$  produit par des bobines enroulées autour du tore. La superposition de ces deux champs fait que les particules s'enroulent autour de lignes de champ hélicoïdales qui engendrent des surfaces magnétiques ayant la forme de tores emboîtés [74] (voir Figure 1.4).

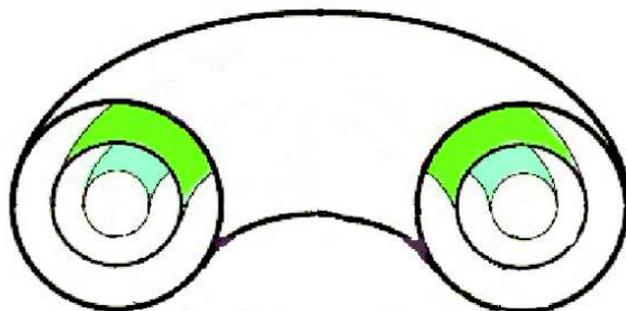


FIG. 1.4 – Surfaces magnétiques définies par les lignes de champ.

On appelle aussi «axe magnétique» le cas limite où la surface magnétique dégénère en une ligne fermée. Il s'agit de l'endroit du plasma où la pression est la plus élevée.

Le tokamak comporte de plus une multitude de pièces mécaniques. Il est notamment composé d'une chambre à vide dont la paroi  $\Gamma_e$  délimite la frontière extérieure du tokamak, mais aussi d'une paroi  $\Gamma_l$  interne à la chambre à vide, appelée limiteur, qui délimite le volume total occupé par la plasma et qui empêche ce dernier, de frontière  $\Gamma_p$ , d'entrer en contact avec la chambre à vide (voir Figure 1.5-(b)).

Les applications que nous avons envisagées dans cette thèse concernent le tokamak Tore Supra. Une description plus précise de ce dernier est donnée dans le Chapitre 8. Pour encore davantage de détails, nous renvoyons le lecteur à [1].

### Modèle mathématique pour l'équilibre du plasma

Nous notons  $(r, \varphi, z)$  le système de coordonnées cylindriques où  $r$  désigne la coordonnée radiale,  $\varphi$  l'angle toroïdal et  $z$  la hauteur ;  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_z$  représentent les vecteurs unitaires des différents axes. Alors, pour tout vecteur  $\vec{A}$ , ses composantes le long des vecteurs unitaires sont notées respectivement  $A_r$ ,  $A_\varphi$  et  $A_z$ , de telle manière que

$$\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\varphi \vec{e}_\varphi + A_z \vec{e}_z.$$

Comme le tokamak est une machine axisymétrique, nous pouvons supposer que toutes les quantités magnétiques ne dépendent pas de l'angle toroïdal  $\varphi$ . Cela légitime notamment que l'équilibre du plasma puisse être étudié dans n'importe quelle section transversale  $(r, z)$ , encore appelée section poloïdale (voir Figure 1.5).

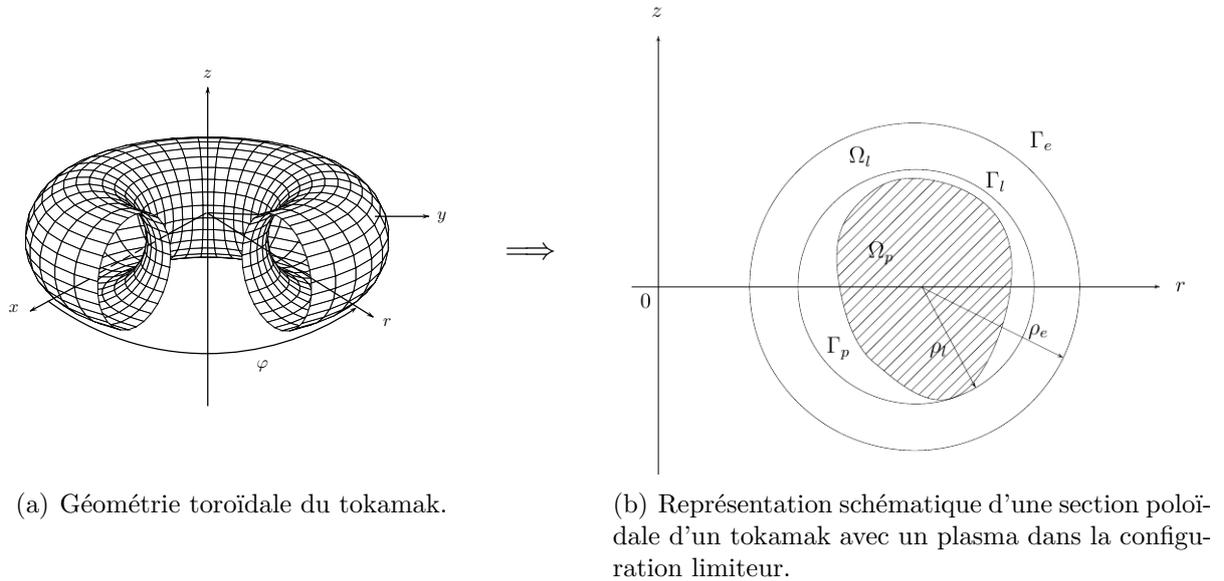


FIG. 1.5 – Hypothèse d'axisymétrie du tokamak.

Maintenant en notant  $\vec{B}$  l'induction magnétique et  $u$  le flux magnétique poloïdal, ainsi que

$$\nabla \cdot \vec{B} = \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z}, \quad \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial B_z}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial z} \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

on obtient facilement à partir des équations de Maxwell [35], et plus particulièrement de la loi de Gauss  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ , dans le vide correspondant au domaine  $\Omega_l$  situé entre la frontière extérieure  $\Gamma_e$  et le limiteur  $\Gamma_l$  (voir Figure 1.5-(b)), les équations suivantes

$$B_r = -\frac{1}{r}\partial_z u \quad \text{et} \quad B_z = \frac{1}{r}\partial_r u \quad \text{dans } \Omega_l . \quad (1.8)$$

En combinant ces relations avec la loi d'Ampère  $\nabla \times \vec{B} = 0$ , on obtient l'équation suivante pour le flux magnétique poloïdal  $u$

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \nabla u \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_l \quad (1.9)$$

qui est l'équation (1.2) écrite avec la conductivité  $\sigma(r, z) = \frac{1}{r} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega_l)$  qui vérifie bien l'hypothèse (1.1). Observons que l'équation (1.9) n'est pas vérifiée dans tout le domaine intérieur au tokamak à cause de la présence de courant  $\vec{j}$  dans le plasma. En notant  $j_T$  sa composante toroïdale, l'équation (1.9) devient dans le plasma l'équation de Grad-Shafranov [126]

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{r} \nabla u \right) = j_T ,$$

qui est une équation elliptique non-linéaire. Dans ce manuscrit nous considérons uniquement l'équation (1.9).

La frontière du plasma  $\Gamma_p$  quant à elle peut être définie en ces termes [35] : il s'agit de la dernière surface magnétique, comptée en partant de l'axe magnétique du plasma, entièrement contenue dans le limiteur  $\Gamma_l$ . Dans une section poloïdale, cette frontière a la particularité de correspondre à une ligne de niveau du flux magnétique poloïdal  $u$ . Dès lors deux situations peuvent avoir lieu pour ce qui est de l'équilibre du plasma dans le tokamak :

- Le cas du limiteur : ici  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_l$  ont au moins un point de contact. Comme la valeur du flux magnétique poloïdal sur chaque surface magnétique diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'axe magnétique, l'équipotentielle  $u$  définissant la frontière plasma  $\Gamma_p$  est donnée par le maximum de  $u$  sur le limiteur  $\Gamma_l$ . A chaque point de contact, le limiteur et le plasma sont tangents.
- Le cas du divertor :  $\Gamma_p$  et  $\Gamma_l$  n'ont pas de point en commun. Le plasma est strictement inclus dans le limiteur. Sa frontière  $\Gamma_p$  présente une configuration en point X et est en fait une séparatrice entre les lignes de niveau ouvertes et fermées de  $u$ . Du point de vue topologique, le point X est un point selle de  $u$ .

Dans cette thèse, nous nous intéressons uniquement à la configuration limiteur et plus particulièrement au cas où il n'y a qu'un seul point de contact entre le plasma et le limiteur. Néanmoins, les outils développés dans ce manuscrit permettent aussi d'envisager le cas où les points de contact sont multiples. Pour ce qui est du cas du divertor, des pistes d'étude sont évoquées en conclusion.

**Remarque 1.4.1** *Une précision s'impose au niveau des notations adoptées. Pour ce qui est des aspects théoriques de cette thèse, soit les Chapitres 2, 3, 4, 5, 6 et 7, les coordonnées cartésiennes du plan sont notées  $(x, y)$ . En revanche, concernant les aspects appliqués de*

cette thèse, soit les Chapitres 8 et 9, nous conservons le formalisme introduit dans la Section 1.4 en notant les coordonnées cartésiennes du plan  $(r, z)$ .

### Reconstruction de quantités magnétiques et de la frontière plasma

Les applications envisagées dans cette thèse sont issues de deux problématiques rencontrées sur le tokamak Tore Supra (voir Figure 1.6) par les chercheurs du CEA/IRFM. Il s'agit de retrouver à partir de mesures magnétiques (composantes tangentielles et radiales du champ magnétique) faites sur la paroi  $\Gamma_e$  de la chambre à vide les quantités magnétiques équivalentes en tout point situé entre  $\Gamma_e$  et la frontière plasma  $\Gamma_p$ , qui est elle-aussi une inconnue du problème. Remarquons que ce problème inverse est plus général que celui de la complétion de données exposé dans la Section 1.2. Il s'agit en effet d'un problème inverse à frontière libre, cette dernière désignant la frontière plasma. Signalons aussi que ces problèmes ont fait l'objet de nombreuses recherches et que le lecteur pourra se référer à [35] pour un descriptif complet des techniques actuellement utilisées.

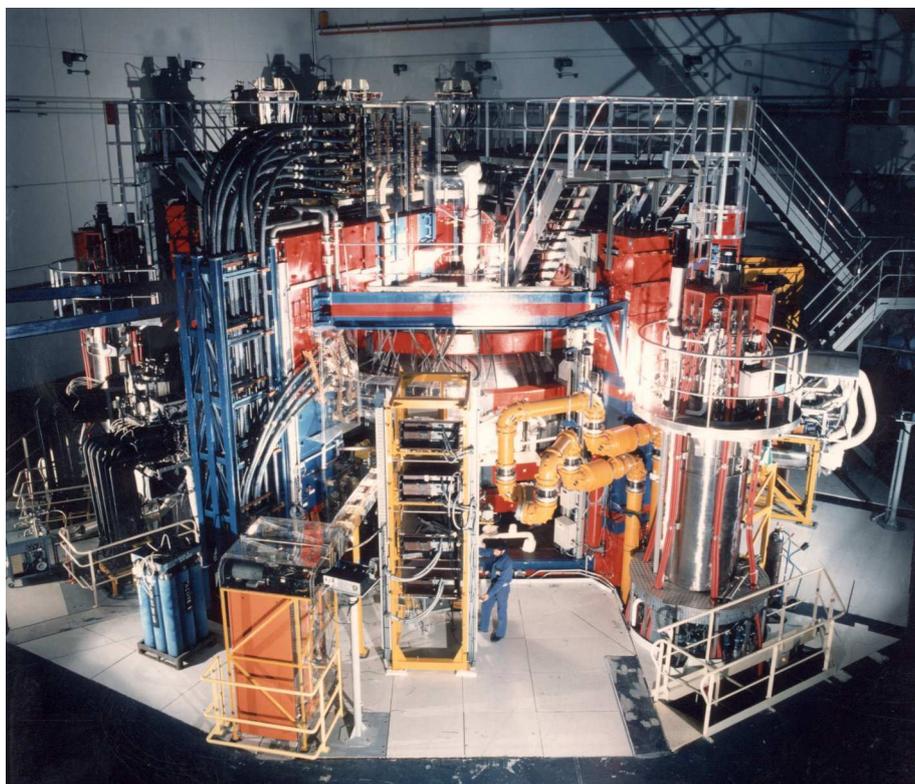


FIG. 1.6 – Le tokamak Tore Supra. Source : <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>

Afin de tester la pertinence d'une approche de ce problème à frontière libre par les problèmes extrémaux bornés, nous avons écrit et codé un algorithme le résolvant (voir Chapitre 8). Pour faire le lien avec les résultats de la partie théorique de cette thèse, il convient dans un premier temps de constater que les équations (1.8) peuvent se réécrire dans  $\Omega_p$

$$\partial_r v = -\frac{1}{r} \partial_z u \quad \text{et} \quad \partial_z v = \frac{1}{r} \partial_r u, \quad (1.10)$$

où  $v$  désigne le potentiel scalaire. Le problème de l'existence de  $v$  relève des résultats obtenus pour la résolution du problème de Dirichlet dans  $H_\nu^2(\Omega_p)$  avec le Théorème 1.2.3. On observe en effet que l'intégration des équations (1.10) fournit une quantité  $v$  multivaluée dans  $\Omega_p$ . Afin de traiter des quantités physiques monovaluées et bien définies en tant que fonctions, nous exhibons une solution fondamentale, en coordonnées toroïdales, de l'opérateur  $\nabla \cdot (\frac{1}{r}\nabla)$  que nous retranchons de manière adéquate aux données mesurées sur  $\Gamma_e$ . Suite à quoi nous résolvons de manière itérative plusieurs problèmes extrémaux bornés fournissant un critère qualifiant une estimée donnée de la frontière libre du plasma. Le fonctionnement de l'algorithme est le suivant :

1. On interpole les mesures ponctuelles de  $u$  et  $\partial_n u$  sur  $\Gamma_e$  par des splines. Ces fonctions permettent d'obtenir une décomposition  $\tilde{u}$  de  $u$  sous formes d'harmoniques toroïdales en projetant sur un sous-espace de dimension finie de  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$ .
2. La fonction  $\tilde{u}$  est étendue dans le domaine intérieur au tokamak par un prolongement analytique généralisé. La détermination du maximum de ce prolongement sur le limiteur  $\Gamma_l$  fournit une première estimation  $\tilde{u}^{(0)}$  de la ligne de niveau correspondant à la frontière plasma, et donc aussi une première estimation  $\Gamma_p^{(0)}$  de cette dernière. Même si au cours de cette étape nous n'introduisons pas de contrainte sur  $\tilde{u}$ , il se trouve que les premières estimations obtenues sont bonnes et ce en raison de la qualité des mesures effectuées sur  $\Gamma_e$  (bruit  $< 1$  %).
3. On résout un problème extrémal borné dans le domaine  $\Omega_p^{(0)}$  délimité par  $\Gamma_e$  et l'estimation  $\Gamma_p^{(0)}$  de la frontière plasma à l'aide des familles de fonctions complètes dans  $H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$  fournies par le Théorème 1.3.2. En référence aux notations de la Figure 1.1, nous nous situons dans le cas (c) avec  $I = \Gamma_e$  et  $J = \Gamma_p^{(0)}$ . La contrainte appliquée sur la partie  $\Gamma_p^{(0)}$  est du type  $\|Re(g_0^{(1)}) - \tilde{u}^{(0)}\|_{L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_p^{(0)})} = M$  où  $M$  est choisi petit. Le Théorème 1.3.1 nous assure alors que la solution  $g_0^{(1)}$  fait baisser le critère d'approximation des données magnétiques sur  $\Gamma_e$ .
4. En calculant le maximum de la partie réelle de  $g_0^{(1)}$  sur  $\Gamma_l$ , on obtient une nouvelle estimation  $\tilde{u}^{(1)}$  de la ligne de niveau correspondant à une nouvelle frontière plasma  $\Gamma_p^{(1)}$ . En revenant à l'étape 2, on peut donc résoudre un nouveau problème extrémal borné dans le domaine délimité par  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_p^{(1)}$ .
5. L'algorithme se termine lorsque le critère d'approximation sur  $\Gamma_e$ , qui décroît à chaque itération du problème extrémal borné, atteint une valeur seuil (cette valeur est petite en raison de la précision des mesures).

Cet algorithme fait donc évoluer à chaque itération la frontière plasma de telle façon que la solution fournie améliore l'approximation des mesures magnétiques effectuées sur  $\Gamma_e$ . En contraignant ainsi l'estimation de la frontière plasma, nous avons ainsi pu mettre en place une méthode de résolution pleinement adaptée au cas du tokamak. Les simulations numériques réalisées (voir Chapitre 9) montrent que nous arrivons à reconstruire avec précision la frontière plasma. Par ailleurs, la solution  $g_0$  obtenue est calculée sur un faible nombre d'éléments de la famille  $\mathcal{B}_1$  (voir Théorème 1.3.2) garantissant ainsi sa facilité d'utilisation. Il est alors possible d'évaluer avec précision le flux magnétique poloïdal ainsi que sa dérivée normale en tout point du domaine situé entre  $\Gamma_e$  et la frontière plasma.

## 1.5 Organisation du manuscrit

Outre l'introduction, le manuscrit est composé de 8 chapitres organisés de la façon suivante.

### Chapitre 2

Ce chapitre est entièrement consacré à quelques rappels sur les espaces de Hardy classiques  $H^p(\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$ . Tout d'abord, lorsque  $\Omega = \mathbb{D}$ , nous donnons la définition de ces espaces et nous présentons les résultats concernant l'existence des limites non-tangentielles, les théorèmes de représentation en série ainsi que de factorisation en fonctions intérieures/fonctions extérieures. Nous rappelons aussi certaines représentations intégrales ainsi que les propriétés de bornitude de l'opérateur de conjugaison. Enfin nous terminons avec une décomposition des espaces  $H^p(\mathbb{A})$ .

Soulignons que le lecteur familier avec les espaces de Hardy peut se dispenser de la lecture de ce chapitre. Nous avons tout de même souhaité placer ce chapitre en préambule du manuscrit afin qu'un lecteur peu au fait de ces résultats puisse percevoir en quoi les résultats du Chapitre 3 s'inscrivent dans la continuité de ceux-ci tout en disposant d'un sens de lecture uniforme.

### Chapitre 3

Nous introduisons les espaces de Hardy généralisés  $H_v^p(\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$  et  $\Omega$  simplement et doublement connexes. Nous donnons alors l'extension des résultats du Chapitre 2 à ces espaces, hormis la factorisation en fonctions intérieures/fonctions extérieures, tout d'abord dans le cas simplement connexe avec les travaux de [25]. Nous étendons ensuite ces résultats aux domaines doublement connexes. Pour exporter les propriétés des fonctions de  $H^p(\Omega)$  à celles de  $H_v^p(\Omega)$ , nous faisons appel à un espace «intermédiaire»  $G_\alpha^p(\Omega)$  dont les fonctions  $w$ , solutions de l'équation  $\bar{\partial}w = \alpha w$ , présentent les propriétés de se factoriser sous la forme  $w = e^s F$ , avec  $s$  régulière sur  $\Omega$  et  $F \in H^p(\Omega)$ , ainsi que d'être directement reliées aux fonctions de  $H_v^p(\Omega)$ .

### Chapitre 4

Nous commençons par donner une décomposition des espaces  $H_v^p(\mathbb{A})$  qui généralise le cas analytique en faisant usage de la résolution du problème de Dirichlet dans  $H_v^p(\mathbb{D})$ . Le reste du chapitre est consacré à l'étude des problèmes de Dirichlet pour l'équation de conductivité (1.2) ainsi que pour l'équation de Beltrami conjuguée (1.7) dans des domaines doublement connexes et pour des données de régularité  $L^p$  à la frontière. Nous les résolvons complètement ce qui nous permet d'introduire un opérateur de conjugaison généralisé dont on prouve aussi la bornitude  $L^p$ . Enfin, nous mettons en évidence les éléments de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{A})$  n'admettant pas de conjuguée harmonique généralisée.

### Chapitre 5

Ce chapitre est consacré aux propriétés de densité  $L^p$  des traces des fonctions de  $H_v^p(\Omega)$  pour  $\Omega$  simplement et doublement connexes. Le résultat majeur que nous prouvons est que la restriction des espaces  $tr H_v^p(\mathbb{A})$  à un sous-ensemble  $I$  du bord, dont le complémentaire  $J$  est de mesure positive, est dense dans  $L^p(I)$ . Mentionnons que seul le cas où  $I$  est l'union de deux ensembles appartenant chacun à une frontière de  $\mathbb{A}$  n'a pas été traité. Ces résultats de densité ouvrent la voie à la formulation du problème extrémal borné. Nous

prouvons en effet que l'approximation dans  $L^p(I)$  par des restrictions à  $I$  de fonctions de  $H_v^p(\mathbb{A})$  ne peut se faire qu'au détriment d'un comportement divergent sur  $J$ .

### Chapitre 6

Dans ce chapitre, nous reformulons le problème de Cauchy initial en un problème de meilleur approximation sous contrainte dans les classes de Hardy généralisées. Ce problème extrémal borné est exprimé sur des domaines doublement connexes avec une contrainte en partie réelle sur le bord où l'on ne dispose pas d'informations. Nous prouvons avec les résultats de Dirichlet et de densité des Chapitres 4 et 5 que ce problème admet une unique solution qui s'exprime en fonction d'un paramètre de Lagrange  $\gamma$  traduisant la saturation de la contrainte lorsque les données disponibles ne sont pas déjà la trace d'éléments de  $H_v^p(\mathbb{A})$ . Nous obtenons de plus dans le cas hilbertien une expression de cette solution en fonction de l'opérateur de projection analytique généralisé. Nous discutons ensuite du comportement et du sens de variation du paramètre  $\gamma$  lorsque celui-ci est vu comme une fonction de la contrainte, ce qui nous conduit à la formulation d'un premier algorithme formel de calcul de la solution du problème extrémal borné.

### Chapitre 7

Ce chapitre est consacré à la résolution constructive du problème extrémal borné dans le cas hilbertien pour  $\Omega$  doublement connexe. Nous prouvons que les solutions à obtenir doivent avoir une singularité dans l'une des composantes connexes de  $\mathbb{C} \setminus \bar{\Omega}$ . Nous faisons ensuite le lien entre les équations (1.2) et (1.5) et celle de Laplace en dimension 3 afin de chercher des solutions de (1.2) et (1.5) à variables séparées. Nous exprimons ces solutions dans le système de coordonnées toroïdales choisi pour sa capacité à modéliser les phénomènes physiques ayant lieu dans les tokamaks, et plus généralement dans toute machine ayant une configuration axisymétrique. Nous prouvons ensuite que ces familles de solutions forment des familles complètes de  $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ , ce qui nous permet finalement d'exhiber des familles complètes de fonctions dans  $H_v^2(\Omega)$  pour résoudre numériquement le problème extrémal borné.

### Chapitre 8

Dans ce chapitre, nous présentons en détails l'algorithme que nous avons mis en place pour résoudre le problème extrémal borné relatifs à certains problèmes inverses posés pour le tokamak Tore Supra. Nous montrons tout d'abord comment nous traitons le cas de mesures donnant lieu à des fonctions multivaluées après interpolation sur la frontière extérieure de la machine. Ensuite nous expliquons comment nous décomposons ces mesures sur les différentes familles d'harmoniques toroïdales exhibées dans le Chapitre 7. A partir de ces décompositions, nous calculons une première estimée de la frontière plasma qui permet de définir un domaine doublement connexe dans lequel nous résolvons un problème extrémal borné. Ce dernier est posé de telle façon qu'il fasse évoluer itérativement la frontière plasma tout en diminuant le critère d'approximation par rapport aux mesures initiales.

### Chapitre 9

Ce dernier chapitre est consacré aux résultats numériques obtenus avec l'algorithme présenté dans le Chapitre 8. Ces derniers montrent que le code mis en place permet

de reconstruire la frontière plasma avec une bonne précision tout en garantissant un bon critère d'adéquation aux mesures. Ces simulations sont réalisées à l'aide de mesures fournies par le CEA/IRFM provenant directement d'expériences réalisées avec Tore Supra. Nous réalisons par ailleurs des tests sur des données bruitées afin de montrer la robustesse de notre méthode de résolution. Tous nos résultats sont comparés à ceux des codes EFIT et APOLO.

## 1.6 Publications

Le travail effectué lors de cette thèse a donné lieu aux publications suivantes :

1. *Some inverse inverse problems around the Tokamak Tore Supra*, Yannick Fischer, Benjamin Marteau and Yannick Privat. A paraître dans Communications on Pure and Applied Analysis.
2. *Bounded extremal problems in Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in simply connected domains*, Yannick Fischer, Juliette Leblond, J.R. Partington and Eva Sincich. Applied and Computational Harmonic Analysis, **31**, 264–285, 2011.
3. *Solutions to conjugate Beltrami equations and approximation in generalized Hardy spaces*, Yannick Fischer and Juliette Leblond. Advances in Pure and Applied Mathematics, **2**, 47–63, 2010.

Un article est de plus en cours de rédaction :

4. *Dirichlet problem for  $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$  and generalized Hardy spaces in annular domains*, Laurent Baratchart, Yannick Fischer, and Juliette Leblond
-

## Deuxième partie

# Espaces de Hardy généralisés dans des domaines simplement et doublement connexes

---



## Chapitre 2

# Rappels sur les espaces de Hardy classiques

### Sommaire

---

<b>2.1 Définitions et premières propriétés . . . . .</b>	<b>34</b>
2.1.1 Définitions . . . . .	34
2.1.2 Limites non-tangentes . . . . .	36
2.1.3 Caractérisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	38
<b>2.2 Quelques propriétés structurelles supplémentaires . . . . .</b>	<b>39</b>
2.2.1 Factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	39
2.2.2 Représentation intégrale des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$ . . . . .	41
2.2.3 Equations de Cauchy-Riemann et fonctions conjuguées . . . . .	42
<b>2.3 L'espace <math>H^p(\mathbb{A})</math> . . . . .</b>	<b>44</b>
2.3.1 Holomorphie à l'infini . . . . .	44
2.3.2 Décomposition de $H^p(\mathbb{A})$ . . . . .	45

---

Ce chapitre est consacré au rappel de quelques propriétés fondamentales des espaces de Hardy classiques. De nombreux ouvrages traitent ce sujet d'une manière très exhaustive. Ce travail de thèse s'appuie ainsi pour une large part sur les travaux de [63, 75, 97, 123]. Nous choisissons d'exposer ici ces propriétés car, comme nous le verrons au Chapitre 3, elles serviront à énoncer des résultats similaires pour des classes de fonctions plus générales.

Précisons dans un premier temps le cadre de travail utilisé. Classiquement le plan  $\mathbb{R}^2 = (xOy)$  est identifié avec le plan complexe  $\mathbb{C}$ , et est orienté dans le sens trigonométrique. Tout point du plan est repéré soit par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  soit par son affixe  $z = x + iy$ . L'ensemble  $\mathbb{D}$  désigne le disque unité de centre  $O = (0, 0)$ , et  $\mathbb{T}$  sa frontière. Nous notons par ailleurs  $\mathbb{D}_\varrho$  le disque de centre  $O$  et de rayon  $\varrho$ , ainsi que  $\mathbb{T}_\varrho$  sa frontière. Enfin l'anneau constitué du disque unité privé du disque fermé de centre  $O$  et de rayon  $\varrho \in (0, 1)$  est noté  $\mathbb{A} = \mathbb{D} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$  avec  $\mathbb{D}$  et  $\overline{\mathbb{D}_\varrho}$  respectivement orientés positivement (i.e dans le sens trigonométrique) et négativement. Précisons enfin que la lettre  $\varrho$  fera toujours référence à un nombre réel appartenant à  $(0, 1)$  dans ce manuscrit, si aucune autre indication n'est donnée.

Les résultats énoncés dans ce chapitre, qui peuvent tous être retrouvés dans [63], concernent essentiellement les espaces de Hardy du disque unité  $\mathbb{D}$ , notés  $H^p(\mathbb{D})$ . Il s'agit

---

là d'une approche classique envisagée dans la majeure partie des ouvrages traitant du sujet. Ces résultats peuvent néanmoins être formulés sur des ouverts bornés  $\Omega$  simplement connexes à frontière lisse (régularité  $C^1$ ) autres que  $\mathbb{D}$  sans difficulté aucune. En effet si  $\Omega$  est un tel domaine et si  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$  désigne une transformation conforme de  $\Omega$  en le disque unité  $\mathbb{D}$ , alors toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  vérifie  $f \circ \varphi \in H^p(\Omega)$  [63]. Mentionnons enfin que les résultats énoncés dans  $H^p(\mathbb{D})$  admettent des formulations analogues dans les espaces de Hardy du demi-plan supérieur, ce que nous n'envisageons pas ici. Pour plus d'informations à ce sujet, nous renvoyons le lecteur à [75]. Concernant les espaces de Hardy sur des domaines doublement connexes à frontière lisse, là aussi les seules propriétés que nous énoncerons concerneront les espaces  $H^p(\mathbb{A})$  étant donné que l'argumentation par composition avec une transformation conforme tient toujours.

Concluons cette brève introduction en mentionnant que les résultats de ce chapitre sont tous énoncés pour un exposant  $p \in (1, \infty)$ . Il se pourra que certains d'entre eux admettent une extension pour les exposants  $p = 1, \infty$ , auquel cas cela sera pris en compte.

## 2.1 Définitions et premières propriétés

Nous donnons ici une définition des espaces de Hardy du disque unité  $\mathbb{D}$  telle qu'introduite dans [63], tout en mentionnant que ces derniers peuvent aussi être définis en utilisant la notion de majorant harmonique. Nous introduisons ensuite la notion fondamentale de limite non-tangentielle qui va nous permettre d'étudier le comportement au bord des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$ . Enfin nous donnons une caractérisation des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$  tout d'abord dans le cas particulièrement simple du cadre hilbertien, soit  $p = 2$ , puis plus généralement pour  $p \in (1, \infty)$ .

### 2.1.1 Définitions

Une définition couramment utilisée des fonctions  $f$  des espaces de Hardy de  $\mathbb{D}$  consiste à imposer la bornitude des intégrales de  $|f|^p$  sur toute suite de courbes de Jordan "tendant" vers la frontière  $\mathbb{T}$ . Ainsi

**Définition 2.1.1.1** *Pour  $p \in [1, \infty)$ , on note  $H^p(\mathbb{D})$  l'espace de Hardy des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  vérifiant*

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} := \sup_{0 < r < 1} \text{ess} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} < +\infty$$

où *ess sup* désigne le supremum essentiel et où

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}.$$

Il est bien entendu possible d'étendre cette définition au cas où  $p = \infty$ . Pour un tel exposant, on aura classiquement que  $H^\infty(\mathbb{D})$  est l'espace des fonctions holomorphes bornées dans  $\mathbb{D}$ .

Remarquons qu'un résultat de Hardy, appelé Théorème de convexité, permet de donner une formulation équivalente de la norme  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$  [63, Thm. 1.5].

**Proposition 2.1.1.1** *Si  $f \in H^p(\mathbb{D})$  pour  $p \in [1, \infty]$ , la fonction  $(0, 1) \ni r \mapsto \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)}$  est une fonction croissante de  $r$ .*

De cette propriété, on déduit immédiatement que  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})} := \lim_{r \rightarrow 1^-} \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}_r)}$ .

Afin de ne pas surcharger ce manuscrit de notations, introduisons maintenant la dénomination suivante :

**Définition 2.1.1.2** *On dira qu'une fonction  $f$  mesurable sur  $\mathbb{D}$  satisfait une condition de Hardy d'ordre  $p \in (1, \infty)$  si ess  $\sup_{0 < r < 1} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} < +\infty$ .*

Mentionnons tout de suite qu'il est possible de définir les espaces de Hardy classiques du disque unité d'une manière différente de celle qui vient d'être donnée. Il suffit pour cela d'introduire les concepts de sous-harmonicité ainsi que de majorant harmonique. Ainsi il est bien connu que si  $f$  est une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , alors  $|f|^p$  est sous-harmonique dans  $\mathbb{D}$ . Ceci signifie que sur chaque disque  $\mathbb{D}'$  tel que  $\overline{\mathbb{D}'} \subset \mathbb{D}$ ,  $|f|^p$  est dominée par une fonction harmonique, qui se révèle être en fait l'intégrale de Poisson de ses valeurs prises sur le bord  $\mathbb{T}'$ . Il apparaît alors clairement que cette définition n'assure pas l'existence d'une unique fonction harmonique dominant  $|f|^p$  sur tout  $\mathbb{D}$ . Ainsi nous dirons que  $|f|^p$  admet un majorant harmonique dans  $\mathbb{D}$  s'il existe une fonction  $g$  harmonique dans  $\mathbb{D}$  telle que  $|f(z)|^p \leq g(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . On a alors la définition suivante

**Définition 2.1.1.3** *Pour  $p \in [1, \infty)$ , l'espace  $H^p(\mathbb{D})$  peut aussi être défini comme l'espace des fonctions  $f$  holomorphes sur  $\mathbb{D}$  telles que  $|f|^p$  admette un majorant harmonique dans  $\mathbb{D}$ .*

L'équivalence des Définitions 2.1.1.1 et 2.1.1.3 peut être mise en défaut lorsqu'on considère les espaces de Hardy sur des domaines plus généraux (voir la discussion sur les classes de Smirnov dans [63]). Pour ce manuscrit, nous choisissons d'adopter la Définition 2.1.1.1 et ceci sans perte de généralité. On peut dès lors énoncer quelques propriétés basiques des espaces  $H^p(\mathbb{D})$  tels qu'ils viennent d'être définis.

**Remarque 2.1.1.1** *Les Définitions 2.1.1.1 et 2.1.1.3 sont équivalentes dans le cas du disque  $\mathbb{D}$  mais plus généralement dans le cas de domaines ouvert bornés  $\Omega$  simplement connexes dont la frontière est une courbe de Jordan de régularité  $C^1$ . Rappelons qu'une telle courbe fermée est l'image injective de  $\mathbb{T}$  par une application  $\varphi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  continuellement différentiable. Que les définitions et propriétés évoquées dans ce manuscrit dans  $\mathbb{D}$  soient valables dans ce type de domaines est la conséquence d'un célèbre résultat de Carathéodory affirmant que toute transformation conforme envoyant  $\mathbb{D}$  sur  $\Omega$  admet une extension conforme de régularité  $C^1$  de  $\overline{\mathbb{D}}$  sur  $\overline{\Omega}$  [118, Thm. 3.5].*

**Proposition 2.1.1.2** *Pour  $p \in [1, \infty]$ ,  $H^p(\mathbb{D})$  est un espace de Banach.*

*Preuve.* Soit  $p \in [1, \infty]$ . Pour vérifier que  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$  définit bien une norme, le seul point à confirmer est qu'elle vérifie bien l'inégalité triangulaire, les autres propriétés étant évidentes. Or pour toutes fonctions  $f$  et  $g$  mesurables sur le cercle  $\mathbb{T}_r$  avec  $r \in (0, 1)$ , on a, en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\|f + g\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} + \|g\|_{L^p(\mathbb{T}_r)}.$$

Ainsi pour toutes fonctions  $f, g \in H^p(\mathbb{D})$ , l'inégalité  $\|f + g\|_{H^p(\mathbb{D})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D})} + \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}$  est vérifiée. Finalement, le fait que les espaces vectoriels  $H^p(\mathbb{D})$  munis de la norme  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D})}$  soient complets est contenu dans [63, Thm. 3.3, Cor. 1]. ■

Par ailleurs toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  appartient aussi à  $L^p(\mathbb{D})$ . En fait la proposition suivante donne le lien entre les différents espaces de Hardy selon l'indice  $p$ .

**Proposition 2.1.1.3** *Pour  $1 < s < p < \infty$ , on a les inclusions suivantes*

$$H^\infty(\mathbb{D}) \subset H^p(\mathbb{D}) \subset H^s(\mathbb{D}) \subset H^1(\mathbb{D}).$$

Maintenant que ces premières propriétés ont été rappelées, il est intéressant d'étudier le comportement des éléments de  $H^p(\mathbb{D})$  près du bord du domaine. Nous allons voir en particulier que toute fonction  $f$  admet une limite non-tangentielle, notion que nous développons dans la section suivante.

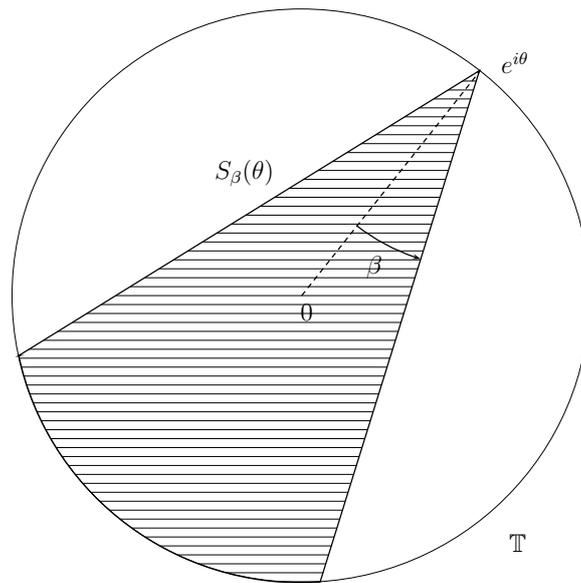
## 2.1.2 Limites non-tangentielles

Les éléments de  $H^p(\mathbb{D})$  étant définis presque partout dans  $\mathbb{D}$ , une question naturelle qui vient à l'esprit est de se demander ce que deviennent ces éléments lorsqu'on se rapproche de  $\mathbb{T}$ . Bien sûr, la notion "se rapprocher du bord" n'a de sens en soit que si la direction et le sens de rapprochement vers le bord sont précisés et il existe bien entendu une infinité de façon de le faire. Toutefois une première réponse quant au comportement des éléments de  $H^p(\mathbb{D})$  au voisinage de  $\mathbb{T}$  peut être apportée en considérant le cas de limites radiales. En effet, toute fonction harmonique réelle satisfaisant une condition de Hardy d'ordre 1 admet une limite radiale presque partout sur  $\mathbb{T}$  [63, Cor. 1]. Ce résultat est en fait encore vrai pour toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  avec  $p \in (1, \infty)$  en vertu d'un théorème dû à M. Riesz [121] qui affirme que si  $u = \operatorname{Re}(f)$  satisfait une condition de Hardy d'ordre  $p$  alors c'est aussi le cas de  $v = \operatorname{Im}(f)$  (voir Théorème 2.2.3.1). Il suffit alors de conclure avec la Proposition 2.1.1.3.

On peut encore raffiner ce résultat en considérant non plus le cas de limites radiales mais plutôt celui de limites le long de tout chemin non tangent à  $\mathbb{T}$ . Pour cela, définissons pour  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , le secteur  $S_\beta(\theta)$  de sommet le point  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , d'angle  $2\beta$ , symétrique par rapport au segment reliant l'origine 0 au point  $e^{i\theta}$  et contenu dans  $\mathbb{D}$  (voir Figure 2.1).

On dit alors d'une fonction  $f$  mesurable sur  $\mathbb{D}$  qu'elle admet une limite non-tangentielle  $l$  au point  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  si et seulement si  $f(z) \rightarrow l$  lorsque  $z \rightarrow e^{i\theta}$  à l'intérieur de tout secteur  $S_\beta(\theta)$  avec  $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ . Il est alors clair que si  $f$  admet une limite radiale au point  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$ , cette dernière coïncide avec la limite non-tangentielle.

A partir de cette définition, on peut alors énoncer le résultat fondamental suivant dû à F. Riesz [120]

FIG. 2.1 – Secteur  $S_\beta(\theta)$ .

**Théorème 2.1.2.1** *Pour  $p \in [1, \infty]$  et  $f \in H^p(\mathbb{D})$ , la limite non-tangentielle  $f(e^{i\theta})$  existe presque partout sur  $\mathbb{T}$  et appartient à  $L^p(\mathbb{T})$ . On a de plus que  $\log |f(e^{i\theta})| \in L^1(\mathbb{T})$  à moins que  $f \equiv 0$  sur  $\mathbb{D}$ .*

Ce théorème est en fait la généralisation d'un résultat prouvé en premier lieu par Fatou dans le cas  $H^\infty$  [66] et ensuite amélioré par M. Riesz dans le cas  $H^1$  [121]. La seconde partie de ce résultat nous indique en fait que  $f$  ne peut pas s'annuler sur un ensemble de mesure strictement positive du bord  $\mathbb{T}$  à moins d'être identiquement nulle dans tout  $\mathbb{D}$ . Cela revient à dire que toute fonction d'un espace  $H^p(\mathbb{D})$  est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur  $\mathbb{T}$ .

**Remarque 2.1.2.1** *Le Théorème 2.1.2.1 est finalement vrai pour  $p \in (0, \infty]$ . Comme nous venons de le dire, le cas  $p = \infty$  a été établi par Fatou. Le cas  $p \in (0, 1)$  quant à lui nécessite d'introduire une nouvelle classe  $\mathcal{N}$  de fonctions appelée classe de Nevanlinna. Nous renvoyons à [63] ou bien [75] pour plus de détails.*

Il est cependant possible d'aller plus loin en ce qui concerne l'étude de la convergence au bord des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$ . En effet, F. Riesz a aussi montré que la convergence radiale restait vraie au sens de la convergence en moyenne  $L^p$ . Plus précisément

**Théorème 2.1.2.2** *Pour  $p \in [1, \infty)$  et  $f \in H^p(\mathbb{D})$ , on a*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta = \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta .$$

*Ceci implique en particulier que*

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0 .$$

Ce résultat implique en particulier que la norme d'une fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  telle que donnée par la Définition 2.1.1.1 correspond en fait à la norme  $L^p$  de la fonction au bord. Il est alors naturel d'identifier tout élément  $f \in H^p(\mathbb{D})$  avec la fonction au bord  $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$ . Nous allons voir que le développement en série de Fourier de cette dernière permet une caractérisation efficace des éléments des espaces de Hardy.

### 2.1.3 Caractérisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Nous débutons cette section par le cas où  $p = 2$  car celui-ci est particulièrement simple. En effet soit  $f$  une fonction holomorphe dans  $\mathbb{D}$ . On peut la développer en série entière. Notons alors  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Il est dès lors facile de vérifier que  $f \in H^2(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$ . En effet, grâce au théorème de Plancherel-Parseval, il vient que pour tout  $r \in (0, 1)$

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T}_r)}^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Or nous avons vu avec la Proposition 2.1.1.1 que la fonction  $(0, 1) \ni r \mapsto L^2(\mathbb{T}_r)$  était croissante. On déduit donc par convergence monotone discrète que

$$\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2$$

et par conséquent, avec la Définition 2.1.1.1 et Théorème 2.1.2.2, on en conclut que  $f \in H^2(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\sum_{n \geq 0} |a_n|^2 < \infty$ . Indiquons maintenant que ce résultat se généralise au cas  $p \in [1, \infty]$  avec

**Théorème 2.1.3.1** *Soit  $p \in [1, \infty]$ . Si  $f = \sum_{n \geq 0} a_n z^n \in H^p(\mathbb{D})$  et si  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  désigne la suite des coefficients de Fourier de la fonction  $f(e^{i\theta}) \in L^p(\mathbb{T})$ , alors  $c_n = a_n$  pour  $n \geq 0$  et  $c_n = 0$  pour  $n < 0$ . De plus l'espace  $H^p(\mathbb{T}) = \{f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\theta} \in L^p(\mathbb{T}) / a_n = 0, n < 0\}$  s'identifie isométriquement avec  $H^p(\mathbb{D})$ .*

En vertu de ce résultat, il est dorénavant possible d'identifier complètement les espaces  $H^p(\mathbb{D})$  et  $H^p(\mathbb{T})$ . Ainsi on rencontre souvent dans la littérature la notation  $H^p$  seule pour signifier indifféremment un des deux espaces. Nous choisissons de ne pas adopter ce formalisme mais plutôt de toujours parler des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$ . Ces considérations nous permettent d'affirmer que dans le cas  $p = 2$ ,  $H^2(\mathbb{D})$  est un espace de Hilbert muni du produit scalaire usuel

$$\langle f, g \rangle_{H^2(\mathbb{D})} = \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta.$$

Concluons cette section avec le corollaire suivant qui découle directement du Théorème 2.1.3.1 ainsi que de la Proposition 2.1.1.2.

**Corollaire 2.1.3.1** *Pour  $p \in [1, \infty]$ ,  $H^p(\mathbb{D})$  est un sous espace vectoriel fermé de  $L^p(\mathbb{T})$ .*

## 2.2 Quelques propriétés structurelles supplémentaires

Cette section prolonge la précédente en fournissant quelques propriétés essentielles liées à la structure des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$ . Il ne s'agit pas là de fournir l'ensemble des propriétés actuellement connues pour ce type de fonctions mais plutôt de citer celles qui seront généralisées dans ce manuscrit à une classe de fonctions plus grande (voir Chapitre 3).

Ainsi nous donnons dans un premier temps un résultat de factorisation dans  $H^p(\mathbb{D})$  qui est dû à Smirnov [128]. Grossièrement parlant, il s'agit de montrer que toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  peut s'écrire comme le produit d'une fonction tenant compte à la fois des zéros de  $f$  dans  $\mathbb{D}$  et du comportement de  $f$  sur  $\mathbb{T}$  par une fonction ne tenant compte quant à elle que des valeurs de  $|f|$  sur  $\mathbb{T}$ . Il s'agit là d'un résultat central dans la théorie des espaces de Hardy. Nous faisons le choix de l'introduire dans cette section même si la démonstration de plusieurs résultats énoncés à la section précédente le requièrent. Nous poursuivrons par un résultat de représentation intégrale qui n'est autre que la célèbre formule intégrale de Cauchy. Enfin nous rappelons les équations de Cauchy-Riemann qui lient partie réelle et partie imaginaire d'une fonction holomorphe tout en introduisant la notion de fonction conjuguée.

### 2.2.1 Factorisation des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Commençons tout d'abord par donner la définition d'un produit de Blaschke dont nous allons faire usage par la suite.

**Définition 2.2.1.1** *Un produit de Blaschke est un produit de la forme*

$$B(z) = e^{i\lambda} z^k \prod_n \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z},$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $(\alpha_n)_n$  est une suite vide, finie ou infinie de points de  $\mathbb{D} \setminus \{0\}$  tels que  $\sum_n (1 - |\alpha_n|) < \infty$  lorsque  $(\alpha_n)_n$  est infinie. Par ailleurs, on adopte la convention que  $\prod_n \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n} \frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha_n}z} = 1$  lorsque la suite  $(\alpha_n)_n$  est vide.

La première factorisation des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$  a été découverte par F. Riesz [120], ce qui lui a permis par ailleurs de démontrer le Théorème 2.1.2.1. Elle assure que toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$  peut s'écrire sous la forme  $f = Bg$  où  $B$  est un produit de Blaschke et  $g$  est une fonction de  $H^p(\mathbb{D})$  ne s'annulant pas sur  $\mathbb{D}$ .

Il est cependant possible de raffiner ce résultat. Pour cela introduisons les deux notions suivantes :

#### Fonction intérieure

Une fonction intérieure est par définition une fonction  $S \in H^\infty(\mathbb{D})$  telle que  $|S| = 1$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ . Mentionnons qu'il faudrait en réalité parler de la limite radiale de  $S$  qui est de module 1 sur  $\mathbb{T}$  mais en vertu du Théorème 2.1.2.1 nous avons que la limite radiale de  $S$  coïncide avec la fonction  $S(e^{i\theta})$ .

Il existe une description complète des fonctions intérieures. En effet, toute fonction intérieure (la réciproque restant vraie) peut se mettre sous la forme

$$S(z) = c B(z) \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

où  $c$  est un nombre complexe de module 1,  $B$  un produit de Blaschke et  $d\mu$  une mesure positive portée par  $\mathbb{T}$  et singulière par rapport  $d\theta$ . Cette écriture permet notamment d'en déduire que tout produit de Blaschke est une fonction intérieure. Et il en est de même des fonctions du type

$$S(z) = c \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

qui elles ne s'annulent pas dans  $\mathbb{D}$  et sont encore appelées fonctions intérieures singulières.

### Fonction extérieure

Une fonction extérieure est par définition une fonction  $F$  holomorphe dans  $\mathbb{D}$  de la forme

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log \psi(e^{it}) dt\right), \quad z \in \mathbb{D}$$

où  $c$  est un nombre complexe de module 1 et  $\psi$  une fonction positive mesurable telle que  $\log \psi \in L^1(\mathbb{T})$ . Une des propriétés des fonctions extérieures est que si  $\psi \in L^p(\mathbb{T})$  avec  $p \in (0, \infty]$  alors  $F \in H^p(\mathbb{D})$ . En utilisant le Théorème 2.1.2.1, on montre que si  $f \in H^p(\mathbb{D})$  est non identiquement nulle, alors la fonction

$$F(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \log |f(e^{it})| dt\right), \quad z \in \mathbb{D} \quad (2.1)$$

appartient à  $H^p(\mathbb{D})$ . Il est courant de l'appeler facteur extérieur de la fonction  $f$ .

Nous possédons désormais tous les outils pour énoncer le résultat de factorisation dû à F. Riesz

**Théorème 2.2.1.1** *Soit  $p \in (1, \infty)$ . Pour toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{D})$ , il existe une fonction intérieure  $S$  telle que  $f$  se factorise sous la forme  $f = SF$  où  $F$  représente le facteur extérieur de  $f$ .*

Remarquons que, comme annoncé en début de section, la fonction intérieure  $S$  tient compte des zéros de  $f$  puisqu'elle s'écrit en fait avec le produit de Blaschke associé à  $f$ . Pour voir que  $S$  dépend aussi du comportement de  $f$  sur  $\mathbb{T}$  nous renvoyons à la preuve de ce résultat, dans [75] par exemple. Dans la continuité des définitions données plus haut,  $S$  est généralement appelé facteur intérieur de  $f$ . Terminons en ajoutant que  $F$ , le facteur extérieur de  $f$ , ne dépend lui que des valeurs de  $|f|$  sur  $\mathbb{T}$  (voir formule (2.1)).

### 2.2.2 Représentation intégrale des fonctions de $H^p(\mathbb{D})$

Nous donnons dans cette section un résultat de représentation des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$  sous la forme d'une intégrale de Cauchy. Notons qu'en vertu de l'identification des fonctions de  $H^p(\mathbb{D})$  avec leur trace sur  $\mathbb{T}$  d'après le Théorème 2.1.3.1, on notera indifféremment  $tr f(\zeta)$  ou  $f(\zeta)$  pour  $\zeta \in \mathbb{T}$  sans que cela ne crée de confusion. Commençons alors par la définition suivante.

**Définition 2.2.2.1** *Pour tout  $\psi \in L^1(\mathbb{T})$  et tout  $z \in \mathbb{D}$ , l'opérateur de Cauchy  $\mathcal{C}$  est défini par*

$$\mathcal{C}\psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta . \quad (2.2)$$

On a classiquement que  $\mathcal{C}\psi$  définit une fonction holomorphe dans  $\mathbb{D}$ , qui par ailleurs s'annule identiquement dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Maintenant, grâce notamment aux Théorèmes 2.1.2.1 et 2.1.2.2, nous avons le résultat suivant.

**Théorème 2.2.2.1** *Pour  $p \in [1, \infty]$  et  $f \in H^p(\mathbb{D})$ , on a pour tout  $z \in \mathbb{D}$*

$$f(z) = \mathcal{C}f(z) . \quad (2.3)$$

*Il est de plus possible de dériver sous le signe somme. Alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta . \quad (2.4)$$

Ce résultat peut se réécrire sous une autre forme, à savoir que toute fonction  $f$  de  $H^p(\mathbb{D})$  avec  $p \in (1, \infty)$  s'écrit comme l'intégrale de Poisson de sa limite radiale, c'est-à-dire pour tout  $z = re^{i\theta} \in \mathbb{D}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta - t) f(e^{it}) dt ,$$

où  $P_r(\theta - t) = \operatorname{Re} \left( \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right)$  est le noyau de Poisson.

Il convient de noter par ailleurs une propriété importante de l'opérateur de Cauchy  $\mathcal{C}$ . En conséquence d'un résultat de M. Riesz (voir Théorème 2.2.3.1), on a en effet que  $\mathcal{C}$  envoie continuellement  $L^p(\mathbb{T})$  sur  $H^p(\mathbb{D})$  lorsque  $p \in (1, \infty)$ . Ce résultat a été étendu par [25, Prop. 5.2.1] où il est prouvé qu'en fait  $\mathcal{C}$  est un opérateur continu de  $W^{1-1/p, p}(\mathbb{T})$  sur  $W^{1, p}(\mathbb{D})$  encore pour  $p \in (1, \infty)$ . Toujours est-il qu'en se souvenant que  $H^p(\mathbb{D})$  est un sous espace vectoriel fermé de  $L^p(\mathbb{T})$  (voir Corollaire 2.1.3.1), cette propriété de  $\mathcal{C}$  fait de lui l'opérateur de projection naturel de  $L^p(\mathbb{T})$  sur  $H^p(\mathbb{D})$ .

Il est aussi intéressant d'étudier la manière dont  $\mathcal{C}$  agit sur les fonctions de  $L^p(\mathbb{T})$ . Supposons en effet que  $f \in L^p(\mathbb{T})$ , avec  $p \in (1, \infty)$ , admette un développement en série de Fourier sur  $\mathbb{T}$  de la forme

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta} .$$

Alors le Théorème 2.1.3.1 nous indique qu'appliquer l'opérateur  $\mathcal{C}$  à  $f$ , donc projeter  $f$  sur  $H^p(\mathbb{D})$ , revient à annuler tous les coefficients de Fourier d'ordre négatif de  $f$ , soit pour tout  $z \in \mathbb{D}$  :

$$\mathcal{C}f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n .$$

### 2.2.3 Equations de Cauchy-Riemann et fonctions conjuguées

Nous abordons dans cette section la notion de fonction conjuguée qui va revêtir une place centrale dans toute la suite de ce manuscrit. Pour définir cette notion, il convient dans un premier temps de rappeler une propriété des fonctions holomorphes. Soit donc  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$  une telle fonction sur un ouvert  $\Omega$  quelconque de  $\mathbb{C}$  (nous faisons cette précision car jusqu'à maintenant nous avons uniquement énoncé des résultats sur  $\mathbb{D}$  ou bien sur tout ouvert simplement connexe du plan complexe ; voir l'introduction de ce chapitre). On a classiquement que les fonctions  $u$  et  $v$  sont harmoniques réelles dans  $\Omega$  et qu'elles sont liées par

$$\begin{cases} \partial_x v = -\partial_y u \\ \partial_y v = \partial_x u \end{cases} \quad \text{dans } \Omega . \quad (2.5)$$

Il s'agit là des équations de Cauchy-Riemann liant partie réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe. A la vue de ce système d'équations, il devient légitime de se poser la question suivante : si  $u$  désigne une fonction harmonique réelle dans  $\Omega$ , existe-t-il toujours une fonction  $v$  harmonique réelle dans  $\Omega$  elle aussi telle que la fonction  $f = u + iv$  soit holomorphe dans  $\Omega$  ? Cette question admet une réponse positive à la condition que  $\Omega$  soit un ouvert simplement connexe puisque dans ce cas le système (2.5) devient intégrable en vertu du théorème de Poincaré. La fonction  $v$  alors obtenue est définie à une constante additive réelle près. Il existe une infinité de manière de normaliser la fonction  $v$ . Ainsi lorsque  $\Omega = \mathbb{D}$ , on rencontre souvent dans la littérature le choix  $v(0) = 0$  et la fonction  $v$  vérifiant ceci désigne alors la fonction conjuguée de  $u$ .

Le cas où  $\Omega$  est un ouvert borné doublement connexe, disons  $\Omega = \mathbb{A}$ , est quant à lui plus compliqué à traiter. Les remarques précédentes nous indiquent en effet que le système (2.5) reste intégrable localement dans  $\mathbb{A}$ . Toutefois l'existence de  $v$  comme fonction monovaluée (on pourra accessoirement parler de "bonne" fonction ; voir 4.2) dans  $\mathbb{A}$  tout entier, c'est-à-dire telle que pour tout point  $(x, y)$  de  $\mathbb{A}$  il existe un unique  $c \in \mathbb{R}$  tel que  $v(x, y) = c$ , n'est absolument pas garantie. Nous ne développons pas plus ce point à ce stade de l'étude mais mentionnons que le cas de l'anneau peut être résolu modulo certaines conditions supplémentaires à imposer sur la fonction  $u$  du système (2.5), voir par exemple [106] pour le cas harmonique avec des données de Dirichlet et de Neumann dans des classes de Sobolev. Précisons toutefois que le cas annulaire sera entièrement traité et résolu dans le Chapitre 4 où nous déterminerons les conditions pour que le système plus général (1.4) soit intégrable pour une fonction  $u \in L^p(\partial\Omega)$  avec  $p \in (1, \infty)$ .

L'unique fonction  $v$  ainsi définie est alors appelée fonction conjuguée de  $u$ , ou encore conjuguée harmonique de  $u$ . Il n'est pas forcément aisé de calculer la conjuguée harmonique d'une fonction harmonique car il faut bien entendu être en mesure d'intégrer

alors explicitement le système (2.5). On peut toutefois donner un exemple simple avec les fonctions définies dans  $\mathbb{D}$  par

$$u(z) = a_0 + \sum_{n \geq 1} r^n (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta))$$

et

$$v(z) = \sum_{n \geq 1} r^n (-b_n \cos(n\theta) + a_n \sin(n\theta))$$

où  $(r, \theta)$  font référence aux coordonnées polaires. Dans cet exemple  $u$  correspond à la solution du laplacien dans  $\mathbb{D}$  en coordonnées polaires et  $v$  a été obtenue après intégration des équations de Cauchy-Riemann (2.5) écrites elles aussi en coordonnées polaires.

L'intérêt que nous portons aux fonctions conjuguées dans ces travaux doit beaucoup à un théorème de M. Riesz [121] qui sera étendu ultérieurement à des classes de Hardy généralisées.

**Théorème 2.2.3.1** *Soit  $p \in (1, \infty)$ . Si  $u$  est une fonction harmonique sur  $\mathbb{D}$  satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$ , alors sa fonction conjuguée  $v$  est aussi une fonction harmonique satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$ . De plus, on a*

$$\|v\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq A_p \|u\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

où  $A_p$  est une constante ne dépendant que de  $p$ .

Plusieurs enseignements peuvent à ce stade être tirés de ce résultat. Tout d'abord nous pouvons en déduire que toute fonction  $f = u + iv \in H^p(\mathbb{D})$  voit son comportement en norme  $H^p(\mathbb{D})$ , et donc en norme  $L^p(\mathbb{T})$  par identification avec la trace, contrôlé par  $\|u\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . Nous verrons par la suite comment tirer parti de cette propriété, non seulement d'un point de vue théorique lorsqu'il s'agira de rendre bien posé un problème inverse de type Cauchy dans des classes de Hardy généralisées pour lesquelles le Théorème 2.2.3.1 s'étendra (à partir de données de  $u$  et de sa dérivée normale prescrites sur une partie du bord d'un domaine simplement ou doublement connexe), ou bien encore d'un point de vue numérique lorsqu'il s'agira de résoudre constructivement et algorithmiquement ce problème inverse à partir de l'intégration du système (1.4) uniquement sur la frontière du domaine de résolution envisagé.

Enfin la bornitude de l'opérateur de conjugaison assure que si l'on dispose d'une famille  $(u_n|_{\mathbb{T}})_n$  complète dans  $L^p(\mathbb{T})$  de solutions de l'équation de Laplace  $\Delta u = 0$  avec  $p \in (1, \infty)$ , alors la famille  $(v_n|_{\mathbb{T}})_n$  des conjuguées harmoniques de ces fonctions sera elle aussi complète dans  $L^p(\mathbb{T})$ . De plus la famille  $(u_n + iv_n)_n$  aura l'avantage d'être complète dans  $H^p(\mathbb{D})$ . Ce dernier point se révélera d'une grande importance lorsqu'il sera question de résolution numérique de certains problèmes inverses liés à l'équation de Beltrami conjuguée (voir Chapitre 7). En regard de cette observation, remarquons que l'exemple de fonctions conjuguées en coordonnées polaires donné au-dessus illustre le résultat de densité des polynômes, au sens de la norme  $L^p(\mathbb{T})$ , dans  $H^p(\mathbb{D})$  [63, Thm. 3.3].

**Remarque 2.2.3.1** *D'après la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques, on constate que la condition de normalisation classiquement imposée sur  $v$  dans  $\mathbb{D}$  pour en faire la fonction conjuguée de  $u$ , soit  $v(0) = 0$ , revient à*

$$\int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) d\theta = 0 . \quad (2.6)$$

Cette normalisation sous forme intégrale sera celle que nous choisirons dans le reste de ce manuscrit lorsque nous traiterons de fonctions harmoniques généralisées.

## 2.3 L'espace $H^p(\mathbb{A})$

Nous terminons ce chapitre par un résultat concernant les espaces de Hardy sur des domaines doublement connexes. Comme précisé auparavant, il est suffisant de travailler sur l'anneau  $\mathbb{A}$ . Nous allons voir en fait que l'espace de Hardy de l'anneau  $H^p(\mathbb{A})$  se décompose en somme d'espaces de Hardy "élémentaires". Cette propriété nous sera utile dans le Chapitre 3 lorsque nous l'étendrons à une classe de fonctions d'un espace de Hardy généralisé. Dans toute cette section  $p \in (1, \infty)$  uniquement.

### 2.3.1 Holomorphie à l'infini

Avant d'énoncer le résultat, il convient de s'attarder sur le cas des espaces de Hardy définis sur des domaines non bornés du type  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . En effet jusqu'à maintenant nous avons uniquement considéré le cas de domaines ouverts bornés, tels que le disque unité  $\mathbb{D}$ , pour lesquels la propriété d'holomorphie ne souffrait d'aucune ambiguïté. Par contre dans le cas où  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , il est nécessaire de définir l'holomorphie à l'infini. Pour cela nous introduisons la fonction  $\check{f}$  vérifiant

$$\check{f}(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \quad (2.7)$$

que nous appelons "fonction réfléchie" de  $f$ . On a alors la propriété suivante

**Proposition 2.3.1.1**  $f$  appartient à  $H^p(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\check{f}$  appartient à  $H^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ .

*Preuve.* Il est clair que satisfaire une condition de Hardy d'ordre  $p$  pour  $f$  est équivalent à la même propriété pour  $\check{f}$  au regard de la Définition 2.1.1.1 et de (2.7). Supposons maintenant que  $f$  soit holomorphe dans  $\mathbb{D}$ . Alors pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , on a tout d'abord

$$\bar{\partial}\check{f}(z) = \overline{\partial f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \overline{\partial f\left(\frac{1}{z}\right)} .$$

Or

$$\begin{aligned} \partial f\left(\frac{1}{z}\right) &= \partial f\left(\frac{1}{z}, \frac{1}{z}\right) = (\partial f)\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \partial\left(\frac{1}{z}\right) + (\bar{\partial} f)\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \partial\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= -\frac{1}{z^2} \cdot (\bar{\partial} f)\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= 0 , \end{aligned}$$

la dernière égalité se justifiant par l'holomorphie de  $f$  sur  $\mathbb{D}$ . Avec le calcul précédent, il reste donc

$$\bar{\partial}\check{f}(z) = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$$

ce qui permet de conclure à l'holomorphie de  $\check{f}$  sur  $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$ . La réciproque se prouve de la même manière, ce qui achève la preuve. ■

La Proposition 2.3.1.1 permet donc de définir l'holomorphie à l'infini de la fonction  $f \in H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  comme l'holomorphie au point 0 de la fonction réfléchie  $\check{f}$ . Rajoutons que les fonctions  $f$  de  $H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  sont généralement normalisées de telle manière que  $f(\infty) = 0$ , ce qui correspond à  $\check{f}(0) = 0$  et donc d'après la propriété de la moyenne pour les fonctions harmoniques à  $\int_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) d\theta = 0$ .

### 2.3.2 Décomposition de $H^p(\mathbb{A})$

Nous sommes désormais en mesure de donner la définition des espaces de Hardy de l'anneau. Nous fournissons la définition formulée par Sarason [124]. Mentionnons que Rudin donne une définition équivalente mais en terme de majorant harmonique [123].

**Théorème 2.3.2.1** *L'espace de Hardy de l'anneau  $H^p(\mathbb{A})$  se définit de la façon suivante*

$$H^p(\mathbb{A}) = H^p(\mathbb{D})|_{\mathbb{A}} \oplus H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})|_{\mathbb{A}} \quad (2.8)$$

où les fonctions  $f$  de  $H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  sont normalisées de telle façon que  $f(\infty) = 0$  et où la somme directe est topologique pour tout  $p \in (1, \infty)$ , et orthogonale dans le cas hilbertien  $p = 2$ .

Il est à noter que cette définition fait écho au théorème de Laurent sur la décomposition des fonctions holomorphes sur un anneau  $\mathbb{A} = \mathbb{D} \setminus \bar{\mathbb{D}}_a$ . Ainsi toute fonction  $f \in H^p(\mathbb{A})$  admet une décomposition de la forme

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - a)^n + \sum_{n > 0} c_{-n} \frac{1}{(z - a)^n}, \quad z \in \mathbb{A}$$

avec  $a$  choisi arbitrairement dans  $\mathbb{D}_a$ . La première somme est donc composée de fonctions ayant une singularité à l'infini alors que dans la deuxième somme les fonctions ont une singularité en  $a$ . Nous verrons dans le Chapitre 3 que ce résultat s'étend au cas des classes de Hardy généralisées et qu'il est possible, dans le cadre particulier appliqué au tokamak, de fournir une famille de fonctions sur laquelle développer n'importe quel élément de ces classes. Grossièrement parlant, on peut dire que cette famille de fonctions jouera le même rôle que la famille des  $(z^n)_{n \in \mathbb{Z}}$  dans le cas analytique.

**Remarque 2.3.2.1** *Nous avons vu à la Section 2.2.3 que tout élément  $u \in \text{Re}(H^p(\mathbb{D}))$  admettait une unique fonction conjuguée  $v$ , l'unicité de  $v$  étant assurée par la normalisation  $v(0) = 0$  lors de l'intégration du système (2.5). Remarquons que de la même manière, tout élément  $u \in \text{Re}(H^p(\mathbb{A}))$  admet une unique fonction conjuguée  $v$  en faisant le choix d'une normalisation appropriée. Ainsi si la fonction  $f = u + iv \in H^p(\mathbb{A})$  se décompose sous la forme  $f = f_i + f_e$  avec  $f_i$  et  $f_e$  appartenant respectivement à  $H^p(\mathbb{D})$  et  $H^p(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$ , on pourrait très imposer  $\text{Im}(f_i(0)) = 0$  et  $\text{Im}(f_e(\infty)) = 0$ . Nous faisons cependant le*

*choix de lever la contrainte de normalisation sur  $Im(f_i)$  et de la reporter sur les éléments de  $H^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Dans la mesure où les éléments de  $Im(H^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}))$  sont déjà contraints, on impose que  $Re(f_e(\infty)) = 0$  de sorte que finalement  $f_e(\infty) = 0$ . Nous garderons ce choix dans toute la suite de ce manuscrit pour ce qui est des espaces de Hardy classiques.*

---

# Chapitre 3

## Espaces de Hardy généralisés

### Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Les espaces <math>H_\nu^p(\Omega)</math></b>	<b>48</b>
3.1.1	Définition et notations	48
3.1.2	$\nu$ -Holomorphie à l'infini	49
<b>3.2</b>	<b>Les espaces <math>G_\alpha^p(\Omega)</math></b>	<b>50</b>
3.2.1	Définition	50
3.2.2	Lien avec les espaces $H_\nu^p(\Omega)$	51
3.2.3	Propriétés	52

Ce chapitre est consacré à l'introduction de deux nouvelles classes de fonctions tel que cela est effectué dans [25]. Celles-ci vont permettre de généraliser les notions d'harmonicité et d'holomorphie vues au Chapitre 2. Nous reprenons ici l'ensemble des définitions adoptées au Chapitre 2. Ajoutons que dorénavant les cas simplement et doublement connexes renverront respectivement aux cas  $\Omega = \mathbb{D}$  (ou  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ) et  $\Omega = \mathbb{A}$  sans qu'il y ait perte de généralité (voir l'introduction du Chapitre 2 et la Remarque 2.1.1.1 qui restent vraies pour les classes de fonctions introduites dans ce chapitre; voir [25]). Dans toute la suite de ce manuscrit, lorsque  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ne sera pas précisé, il renverra indifféremment à l'un de ces espaces.

Nous avons déjà établi dans la Section 1.2 le lien existant entre l'équation elliptique (1.2)

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{p.p. dans } \Omega ,$$

et l'équation de Beltrami conjuguée (1.7)

$$\bar{\partial} f = \nu \bar{\partial} f \quad \text{p.p. dans } \Omega .$$

Rappelons que les solutions de (1.2) sont qualifiées de  $\sigma$ -harmoniques et celles de (1.7) de  $\nu$ -holomorphes. L'objectif est dorénavant de s'intéresser plus spécifiquement à la classe des solutions de l'équation (1.7) lorsque  $f$  mesurable satisfait une condition de Hardy d'ordre  $p$ , classe que nous noterons  $H_\nu^p(\Omega)$  afin de notifier explicitement la dépendance en le coefficient  $\nu$ . Nous allons voir que l'ensemble des propriétés énoncées au Chapitre 2 pour les espaces de Hardy classiques peuvent être étendues ici (notons que ces résultats

sont énoncés dans [25] dans le cas où  $\Omega$  est simplement connexe et que nous les étendons de manière naturelle au cas où  $\Omega$  est doublement connexe [20]). Pour réaliser ceci, nous introduirons une deuxième classe de fonctions équivalente, notée elle  $G_\alpha^p(\Omega)$ , ayant la particularité d'admettre une représentation faisant intervenir les fonctions de  $H^p(\Omega)$ . Ce dernier résultat servira d'outil de calcul dans la plupart des démonstrations des propriétés des fonctions de  $H_\nu^p(\Omega)$ , et ce grâce à un lien explicite entre les espaces  $H_\nu^p(\Omega)$  et  $G_\alpha^p(\Omega)$ .

**Note importante : Nous faisons le choix définitif, et ce jusqu'à la fin de ce manuscrit, de considérer uniquement le cas  $p \in (1, \infty)$ .**

Il faut noter que le cas des exposants  $p = 1, \infty$  a généré de nombreuses études ces quelques dernières années, pour la plupart centrées autour de la classe de fonctions BMO vue comme dual de  $H^1$  [68] (ou encore autour de la classe BMOA [63, p. 240]). Toutefois aucune tentative n'a été entreprise pour généraliser d'éventuels résultats des espaces de Hardy classiques pour ces exposants aux classes de fonctions plus générales introduites dans ce chapitre.

### 3.1 Les espaces $H_\nu^p(\Omega)$

Nous donnons dans un premier temps la définition des espaces de Hardy généralisés et introduisons quelques notations qui auront cours tout au long de ce manuscrit. Par ailleurs, nous discutons de la notion de solution à l'infini comme cela a été envisagé dans la Section 2.3.1.

#### 3.1.1 Définition et notations

Nous notons  $\varrho_1, \varrho_2 \in \mathbb{R}^+$  les deux rayons des cercles délimitant le domaine  $\Omega$  et vérifiant  $\varrho_1 < \varrho_2$ . Ainsi lorsque  $\Omega = \mathbb{D}$  (ou bien  $\mathbb{D}_\varrho$ ), on aura  $\varrho_1 = 0$  alors que quand  $\Omega = \mathbb{A}$  on aura  $(\varrho_1, \varrho_2) = (\varrho, 1)$ . De même, si  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  (ou bien  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$ ), alors on aura  $\varrho_2 = +\infty$ . En utilisant les notations des Définitions 2.1.1.1 et 2.1.1.2, nous avons

**Définition 3.1.1.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . On note  $H_\nu^p(\Omega)$  l'espace de Hardy généralisé des fonctions  $f$  mesurables sur  $\Omega$  vérifiant (1.7) au sens des distributions et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\Omega$ . L'espace  $H_\nu^p(\Omega)$  est muni de la norme*

$$\|f\|_{H_\nu^p(\Omega)} := \sup_{\varrho_1 < r < \varrho_2} \text{ess} \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} .$$

Il est clair que cette définition impose notamment que tout élément de  $H_\nu^p(\Omega)$  appartienne à  $L^p(\Omega)$ . Toutefois une première différence peut être notée avec les espaces de Hardy classiques. En effet, ces derniers sont des espaces vectoriels normés complexes car l'opérateur  $\bar{\partial}$  étant  $\mathbb{C}$ -linéaire, si  $f, g \in H^p(\Omega)$ , alors  $\bar{\partial}(f + ig) = 0$ . Toutefois cette propriété n'est plus vraie dans le cas des espaces  $H_\nu^p(\Omega)$  dans la mesure où l'équation (1.7) est quant à elle seulement  $\mathbb{R}$ -linéaire (en raison du terme conjugué au second membre). Cette constatation mène directement au résultat suivant :

**Proposition 3.1.1.1** *Les espaces de Hardy généralisés  $H_\nu^p(\Omega)$  sont des espaces de Banach réels.*

Dans le cas particulier où  $p = 2$  et si  $\Omega = \mathbb{D}$  ou bien  $\mathbb{A}$ , l'espace  $H_\nu^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert réel dont la norme découle du produit scalaire suivant

$$\langle f, g \rangle_{\partial\Omega} = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\theta + \frac{\delta_\varrho}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varrho e^{i\theta}) \overline{g(\varrho e^{i\theta})} d\theta \right), \quad (3.1)$$

$\delta_\varrho$  valant 0 ou bien 1 selon que  $\Omega = \mathbb{D}$  ou bien  $\mathbb{A}$ .

Remarquons que la formule (3.1) fait intervenir les valeurs sur  $\partial\Omega$  d'éléments de  $H_\nu^2(\Omega)$ . Nous verrons en effet dans ce qui va suivre que tout comme dans le cas des espaces de Hardy classiques, les fonctions de  $H_\nu^p(\Omega)$  admettent une limite non-tangentielle presque partout sur  $\partial\Omega$  que nous nommerons la trace de  $f$  et qui sera notée  $\operatorname{tr} f$  (cette notation ayant été omise dans (3.1) dans un souci de lisibilité). Profitons du fait que nous avons annoncé que les limites non-tangentielles existent pour tout  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  pour introduire de nouvelles notations. Ainsi nous notons  $H_\nu^{p,0}(\Omega)$  le sous espace de  $H_\nu^p(\Omega)$  dont les fonctions  $f$  vérifient

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Im}(\operatorname{tr}_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta})) d\theta = 0. \quad (3.2)$$

Nous introduisons de plus  $H_\nu^{p,00}(\Omega)$  comme sous espace de  $H_\nu^{p,0}(\Omega)$  dont les fonctions  $f$  vérifient

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{tr}_{\mathbb{T}} f(e^{i\theta}) d\theta = 0. \quad (3.3)$$

La mise en place de ces notations est justifiée par le fait qu'il a été établi dans la Section 1.2 que les parties réelle et imaginaire des éléments de  $H_\nu^p(\Omega)$  vérifient des équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4). Il en découle que, sous l'hypothèse que ce système d'équation soit intégrable sur  $\Omega$ , les parties imaginaires des éléments de  $H_\nu^p(\Omega)$  sont définies à une constante additive près. Comme cela a été fait pour les espaces de Hardy classiques (voir Section 2.2.3 et Remarque 2.3.2.1), il est possible d'imposer une condition de normalisation permettant d'étendre la notion de conjuguée harmonique (voir Section 4.2). Remarquons simplement que la condition (3.3) imposée aux éléments  $f \in H_\nu^p(\mathbb{D})$  n'implique pas  $f(0) = 0$  contrairement au cas des fonctions harmoniques qui vérifient la propriété de la moyenne.

### 3.1.2 $\nu$ -Holomorphie à l'infini

Nous allons voir qu'il est possible de définir rigoureusement la notion de  $\nu$ -holomorphie à l'infini avec des arguments similaires à ceux de la Section 2.3.1. Nous notons toujours  $\check{f}$  la fonction réfléchie de  $f$ , c'est-à-dire la fonction définie sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  (ou bien  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$ ) vérifiant (2.7). La  $\nu$ -holomorphie à l'infini est donc définie grâce à

**Proposition 3.1.2.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors  $f$  appartient à  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  si et seulement si  $\check{f}$  appartient à  $H_\nu^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  où  $\check{\nu}$  est la fonction réfléchie de  $\nu$ .*

*Preuve.* Comme dans la preuve de la Proposition 2.3.1.1, l'argument de la condition de Hardy d'ordre  $p$  tient toujours. Il reste donc à prouver que les équations (1.7) relatives à  $f$  et  $\check{f}$  sont vérifiées. Nous établissons uniquement la condition nécessaire, la condition suffisante se prouvant exactement de la même manière. Ainsi, soit  $f$  une fonction  $\nu$ -holomorphe. Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , on a

$$\begin{aligned} \overline{\partial \check{f}(z)} &= \partial f \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) = \partial f \left( \frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z} \right) = (\partial f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \cdot \partial \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) + (\bar{\partial} f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \cdot \partial \left( \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{1}{z^2} \cdot (\bar{\partial} f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \end{aligned}$$

et en utilisant la  $\nu$ -holomorphie de  $f$ , il reste

$$\overline{\partial \check{f}(z)} = -\frac{1}{z^2} \nu \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \overline{(\partial f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right)},$$

soit finalement en conjuguant des deux côtés sachant que  $\nu$  est à valeurs réelles

$$\bar{\partial} \check{f}(z) = -\frac{1}{\bar{z}^2} \cdot \nu \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) (\partial f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right).$$

On calcule par ailleurs

$$\begin{aligned} \overline{\partial \check{f}(z)} &= \bar{\partial} f \left( \frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z} \right) = (\partial f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \cdot \bar{\partial} \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) + (\bar{\partial} f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \cdot \bar{\partial} \left( \frac{1}{z} \right) \\ &= -\frac{1}{\bar{z}^2} \cdot (\partial f) \left( \frac{1}{\bar{z}} \right), \end{aligned}$$

de sorte qu'en croisant avec le premier calcul, on ait

$$\bar{\partial} \check{f}(z) = \nu \left( \frac{1}{\bar{z}} \right) \overline{\partial \check{f}(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}.$$

ce qui conclut la preuve car  $\check{\nu}(z) = \nu(\frac{1}{\bar{z}})$  ( $\nu \in \mathbb{R}$ ). ■

Ces premières définitions ne permettent toutefois pas encore d'étendre les propriétés des espaces de Hardy classiques à ces nouveaux espaces  $H_\nu^p$ . Nous allons voir dans la Section suivante dans quelle mesure il est possible de formaliser un lien entre ces deux classes de fonctions.

## 3.2 Les espaces $G_\alpha^p(\Omega)$

Nous introduisons dans cette section un nouvel espace de fonctions que l'on peut voir comme "un espace intermédiaire" entre les espaces de Hardy classiques et les espaces de Hardy généralisés.

### 3.2.1 Définition

L'idée générale consiste à introduire une équation du même type que (1.7) mais ne faisant pas intervenir de dérivée au second membre. Il s'agit là d'un changement de fonctions dû à [34]. Cette technique est par exemple utilisée par [28, 48] pour l'étude du problème de Calderón via l'équation de Schrödinger.

**Définition 3.2.1.1** Soit  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ . On note  $G_\alpha^p(\Omega)$  l'espace des fonctions  $w$  mesurables sur  $\Omega$  vérifiant

$$\bar{\partial}w = \alpha\bar{w} \quad (3.4)$$

au sens des distributions sur  $\Omega$  et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\Omega$ . L'espace  $G_\alpha^p(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|w\|_{G_\alpha^p(\Omega)} := \sup_{\varrho_1 < r < \varrho_2} \text{ess} \|w\|_{L^p(\mathbb{T}_r)} .$$

Le premier lien évident entre les espaces  $G_\alpha^p(\Omega)$  et  $H_\nu^p(\Omega)$  est qu'ils sont équipés de la même norme. Toutefois la dérivée apparaissant au second membre dans (1.7) n'existe plus dans (3.4). L'équation vérifiée par  $w$  étant elle aussi  $\mathbb{R}$ -linéaire, on a que  $G_\alpha^p(\Omega)$  est aussi un espace de Banach réel. Enfin, parmi les constatations évidentes qui peuvent être faites suite à cette définition, on a clairement que

$$G_0^p(\Omega) = H_0^p(\Omega) = H^p(\Omega) .$$

### 3.2.2 Lien avec les espaces $H_\nu^p(\Omega)$

Il existe un lien explicite entre les espaces  $G_\alpha^p(\Omega)$  et  $H_\nu^p(\Omega)$ . Il s'agit d'un calcul s'appuyant sur une transformation introduite par [34] et que nous explicitons dans

**Proposition 3.2.2.1** Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Si  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  est définie par  $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}$  et  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$  par

$$\alpha := -\frac{\bar{\partial}\nu}{1-\nu^2} = \frac{\bar{\partial}\sigma}{2\sigma} = \bar{\partial} \log \sigma^{1/2} , \quad (3.5)$$

alors  $f = u + iv \in L^p(\Omega)$  est solution de (1.7) au sens des distributions si et seulement si  $w \in L^p(\Omega)$  définie par

$$w := \frac{f - \nu\bar{f}}{\sqrt{1-\nu^2}} = \sigma^{1/2}u + i\sigma^{-1/2}v \quad (3.6)$$

l'est aussi pour (3.4).

*Preuve.* La première partie résulte d'un simple calcul. En effet, montrons dans un premier temps la condition nécessaire. Supposons que  $f \in H_\nu^p(\Omega)$ . Comme  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  et satisfait  $(\kappa)$ , il est clair que  $\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$ . Dès lors la règle de Leibniz s'applique (voir Section 1.2) et on a pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}w, \phi \rangle &= \left\langle \bar{\partial} \left( \frac{f - \nu\bar{f}}{\sqrt{1-\nu^2}} \right), \phi \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\nu\bar{\partial}\nu}{(1-\nu^2)^{3/2}} (f - \nu\bar{f}), \phi \right\rangle + \left\langle \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \bar{\partial}(f - \nu\bar{f}), \phi \right\rangle \\ &= \left\langle f - \nu\bar{f}, \frac{\nu\bar{\partial}\nu}{(1-\nu^2)^{3/2}} \phi \right\rangle + \left\langle \bar{\partial}(f - \nu\bar{f}), \frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \phi \right\rangle . \end{aligned}$$

En appliquant à nouveau la règle de Leibniz dans le deuxième crochet de distribution puis en utilisant l'hypothèse que  $f$  est solution de (1.7) au sens des distributions, il reste que

$$\langle \bar{\partial}w, \phi \rangle = \langle f - \nu \bar{f}, \frac{\nu \bar{\partial}\nu}{(1 - \nu^2)^{3/2}} \phi \rangle - \langle \bar{f}, \frac{\bar{\partial}\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \phi \rangle$$

soit après simplification

$$\langle \bar{\partial}w, \phi \rangle = - \langle \frac{\bar{\partial}\nu}{(1 - \nu^2)^{3/2}} (\bar{f} - \nu f), \phi \rangle = - \langle \frac{\bar{\partial}\nu}{1 - \nu^2} w, \phi \rangle .$$

On a donc bien que  $w$  est solution de (3.4) au sens des distributions avec  $\alpha$  définie par (3.5). En remarquant maintenant que comme  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfait ( $\kappa$ ) il est possible d'inverser (3.6) pour obtenir

$$f = \frac{w + \nu \bar{w}}{\sqrt{1 - \nu^2}} . \quad (3.7)$$

La conduite de calculs identiques mènent facilement à la preuve de la condition suffisante.

■

Les expressions (3.6) ou bien (3.7) permettent de conclure directement quant au fait qu'appliquer une condition de Hardy d'ordre  $p$  pour  $f$  est équivalent à le faire pour  $w$ . Une conséquence évidente du résultat précédent est le :

**Corollaire 3.2.2.1** *Sous les mêmes hypothèses que celles de la Proposition 3.2.2.1, on a que*

$$f \in H_{\nu}^p(\Omega) \iff w = \frac{f - \nu \bar{f}}{\sqrt{1 - \nu^2}} \in G_{\alpha}^p(\Omega) . \quad (3.8)$$

Ce résultat, et notamment aussi les relations (3.6) et (3.7), nous indiquent donc que travailler dans les espaces  $H_{\nu}^p(\Omega)$  ou bien  $G_{\alpha}^p(\Omega)$  est finalement équivalent. En effet, on conçoit assez facilement que si les propriétés rappelées pour les espaces de Hardy classiques dans le Chapitre 2 sont exportables aux fonctions de  $G_{\alpha}^p(\Omega)$ , il en sera de même pour les fonctions de  $H_{\nu}^p(\Omega)$ . La premier résultat de la section suivante va rendre explicite ce lien entre  $H_{\nu}^p(\Omega)$  et  $G_{\alpha}^p(\Omega)$ .

### 3.2.3 Propriétés

Nous énonçons dans un premier temps un résultat de factorisation des fonctions de  $G_{\alpha}^p(\Omega)$ . Ce dernier renvoie dans une certaine mesure au Théorème 2.2.1.1 puisque comme nous allons le voir toute fonction  $w \in G_{\alpha}^p(\Omega)$  peut s'écrire comme le produit d'une fonction ne s'annulant jamais sur  $\Omega$  par une fonction de  $H^p(\Omega)$  (cette dernière prenant donc en compte les zéros de  $w$ ).

**Théorème 3.2.3.1** *Soit  $w \in G_{\alpha}^p(\Omega)$ . Alors  $w$  admet une factorisation de la forme*

$$w(z) = \exp(s(z))F(z), \quad z \in \Omega$$

où  $s \in W_{loc}^{1,l}(\mathbb{C})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  et  $F \in H^p(\Omega)$ . De plus  $s$  peut être choisie telle que sa partie réelle ou bien sa partie imaginaire soit nulle sur  $\partial\mathbb{A}$ . Enfin  $w \in W_{loc}^{1,l}(\Omega)$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  et  $s$  satisfait

$$\|s\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|\alpha\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (3.9)$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $\Omega$ .

Une conséquence immédiate du Théorème 3.2.3.1 et des théorèmes d'injection de Sobolev [5] est le

**Corollaire 3.2.3.1** *Soit  $w = e^s F \in G_\alpha^p(\Omega)$  donné par le Théorème 3.2.3.1. Alors  $s \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$  et  $w \in C_{loc}^{0,\gamma}(\Omega)$  pour tout  $\gamma \in (0, 1)$ .*

Le Théorème 3.2.3.1 permet donc de relier les espaces de Hardy classiques  $H^p(\Omega)$  aux espaces  $G_\alpha^p(\Omega)$ , et donc aux espaces  $H_\nu^p(\Omega)$  d'après la Proposition 3.2.2.1. Avant de tirer pleinement parti de ce lien pour généraliser les propriétés de  $H^p(\Omega)$  à  $H_\nu^p(\Omega)$ , faisons quelques observations concernant tout d'abord une formulation possible de la fonction  $s$  puis une estimation possible de la constante  $C$  intervenant dans la majoration (3.9).

### Commentaires concernant le Théorème 3.2.3.1

- Pour la démonstration de ce résultat dans un domaine simplement connexe, nous renvoyons à [25, Thm. 4.2.1]. Mentionnons simplement, car nous en aurons besoin dans certaines démonstrations ultérieures, que la preuve du résultat s'appuie sur une forme particulière de la fonction  $s$ , à savoir

$$s(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \left( \frac{r(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z\overline{r(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z} \right) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.10)$$

où  $r$  est la fonction définie par

$$r(z) = \begin{cases} \alpha(z) \frac{\overline{w(z)}}{w(z)} & \text{si } w(z) \neq 0 \\ 0 & \text{si } w(z) = 0 \text{ ou } z \notin \Omega. \end{cases} \quad (3.11)$$

Il convient de noter que ce choix de la fonction  $s$  est adapté à la preuve dans le cas simplement connexe. On remarque en effet que cette dernière est construite telle que sa partie réelle soit nulle uniquement sur  $\mathbb{T}$ . On peut cependant l'adapter facilement au cas doublement connexe, c'est-à-dire lui ajouter un terme correctif afin de la rendre nulle sur tout  $\partial\Omega$ . En effet, la preuve du Théorème 4.1.2.2 montre qu'une des propriétés de  $s$  que nous allons utiliser est que  $\overline{\partial}s = r$ . Dès lors, ajouter une fonction analytique à (3.10) ne changera pas ce résultat. Considérons alors la fonction  $\varphi$  définie par

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \mathbb{T} \quad \text{et} \quad \varphi = \operatorname{Re} s \quad \text{sur } \mathbb{T}_\varrho.$$

On résout pour la fonction  $\varphi$  définie sur  $\partial\mathbb{A}$ , qui est de régularité Hölder étant donné le Corollaire 3.2.3.1, un problème de Dirichlet (au sens du Laplacien usuel) et on note  $\Phi_1$  la fonction harmonique dans  $\mathbb{A}$  dont la valeur au bord vaut  $\varphi$  (une telle fonction existe par des résultats de Dirichlet classiques [18]). Alors si  $\int_{\mathbb{T}_\rho} \partial_n \Phi_1 = 0$ , la fonction  $\Phi_1$  admet une conjuguée harmonique dans  $\mathbb{A}$  [18] que l'on note  $\Phi_2$ , et la fonction  $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$  est analytique dans  $\mathbb{A}$ . On en déduit que la fonction  $s' = s - \Phi$  remplit la condition souhaitée. Si par contre  $\int_{\mathbb{T}_\rho} \partial_n \Phi_1 \neq 0$ , la fonction  $\Phi_1$  n'admet pas de conjuguée harmonique dans  $\mathbb{A}$  et il convient de procéder comme dans [64, Sec. 5].

- Notons qu'une question importante et encore pour l'instant ouverte reste celle du paramétrage des fonctions de  $G_\alpha^p(\Omega)$ . Plus précisément, la question est la suivante : étant donné  $s$  (resp.  $F$ ), est-il possible de déterminer l'ensemble des fonctions  $F$  (resp.  $s$ ) telle que  $w = e^s F \in G_\alpha^p(\Omega)$ .
- On propose ici de fournir une borne supérieure pour la constante  $C$  intervenant dans (3.9). Traitons dans un premier temps le cas simplement connexe  $\Omega = \mathbb{D}$ . En reprenant les formules (3.10) et (3.11) introduites auparavant, on a alors clairement que  $r \in L^\infty(\mathbb{D})$  avec  $\|r\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}$ . Il s'en suit que pour  $z \in \mathbb{C}$

$$|s(z)| \leq \frac{\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} \left( \frac{1}{|\zeta - z|} + \frac{1}{|\zeta - \frac{1}{z}|} \right) dm \quad (3.12)$$

puisque  $d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = -2i dm$ . Calculons le premier terme de l'intégrale dans (3.12). Soit  $z \in \mathbb{D}$ . On note  $\mathbb{D}_{z,1}$  le disque ouvert de centre le point d'affixe  $z$  et de rayon 1. Ainsi

$$\mathbb{D}_{z,1} = \{\zeta; |\zeta - z| < 1\} = \left\{ \zeta; \frac{1}{|\zeta - z|} > 1 \right\}.$$

On a donc que

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm = \iint_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm + \iint_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm$$

cependant que pour tout  $\zeta \in \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{z,1}$ , l'inégalité  $\frac{1}{|\zeta - z|} \leq 1$  est vérifiée par définition. Ainsi

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm \leq \iint_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm + \iint_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{z,1}} dm.$$

Comme les disques ouverts  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{D}_{z,1}$  ont la même aire, on en déduit que

$$\iint_{\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{z,1}} dm = \iint_{\mathbb{D}_{z,1} \setminus \mathbb{D}} dm,$$

de sorte que

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm \leq \iint_{\mathbb{D} \cap \mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm + \iint_{\mathbb{D}_{z,1} \setminus \mathbb{D}} dm$$

et finalement, toujours avec la définition de  $\mathbb{D}_{z,1}$ ,

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm \leq \iint_{\mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm .$$

La dernière intégrale double se calcule aisément puisque par translation, on se ramène à l'intégrale de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{|z|}$  sur  $\mathbb{D}$ , soit en faisant usage des coordonnées polaires

$$\iint_{\mathbb{D}_{z,1}} \frac{1}{|\zeta - z|} dm = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r dr d\theta}{r} = 2\pi .$$

La majoration de la deuxième intégrale dans (3.12) se conduit de façon identique, si bien que nous obtenons

$$\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq 4\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})} . \quad (3.13)$$

Cette majoration obtenue pour  $s$  précise donc, dans le cas simplement connexe  $\Omega = \mathbb{D}$ , celle indiquée dans le Théorème 3.2.3.1. De plus, il est clair que cette majoration reste vraie dans le cas  $\Omega = \mathbb{A}$  par restriction.

Introduisons maintenant deux opérateurs dont nous aurons l'usage dans la suite de ce manuscrit.

**Définition 3.2.3.1** Soit  $f \in L^p(\Omega)$ . L'opérateur  $T$  est défini par

$$Tf(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} , \quad z \in \Omega .$$

On notera  $\mathcal{T}$  l'extension de  $T$  à tout  $\mathbb{C}$ , soit

$$\mathcal{T}f(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} , \quad z \in \mathbb{C} .$$

Pour des questions de facilité d'écriture qui interviendront par la suite, nous utiliserons la notation suivante

$$T_\alpha(w) = T(\alpha\bar{w}), \quad \forall \alpha \in L^\infty(\Omega), \forall w \in L^p(\Omega) . \quad (3.14)$$

**Définition 3.2.3.2** Soit  $f \in L^p(\mathbb{C})$ . L'opérateur  $\mathcal{S}$  est défini par

$$Sf(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\zeta \in \mathbb{C}, |\zeta - z| \geq \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} , \quad p.p.t. \ z \in \mathbb{C} .$$

L'opérateur  $S$  est connu sous le nom de transformée de Beurling et est défini comme une valeur principale. Il s'agit d'un opérateur de type Calderón-Zygmund [50]. Le lecteur pourra trouver une justification de l'existence de cette intégrale pour  $f \in L^p(\mathbb{C})$  et presque tout  $z \in \mathbb{C}$  dans [129, Chap. II, Thm. 4].

Profitions de ces définitions pour énoncer quelques unes des propriétés de ces opérateurs mais aussi de l'opérateur de Cauchy  $\mathcal{C}$  défini par (2.2), car comme nous allons le voir dans la Proposition 3.2.3.2, les opérateurs  $T$  et  $\mathcal{C}$  vont intervenir dans la représentation des fonctions de  $H_v^p(\Omega)$ .

### Proposition 3.2.3.1

1. L'opérateur de Cauchy  $\mathcal{C}$  est borné de  $L^p(\partial\Omega)$  dans  $H^p(\Omega)$  et de  $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ .
2. L'opérateur  $T$  est borné de  $L^p(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$  et compact de  $L^p(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$ . De plus, pour tout  $w \in L^p(\Omega)$  et tout  $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ , on a que  $\bar{\partial}T(w) = w$ . Enfin, si  $\Omega$  est simplement connexe, l'opérateur  $w \mapsto w - T(\alpha\bar{w})$  est un isomorphisme de  $L^p(\Omega)$ .
3. L'opérateur  $\mathcal{S}$  est borné de  $L^p(\mathbb{C})$  dans  $L^p(\mathbb{C})$ . Il transforme l'opérateur  $\bar{\partial}$  en l'opérateur  $\partial$ , c'est-à-dire  $\mathcal{S}(\bar{\partial}w) = \partial w$  pour tout  $w \in L^p(\Omega)$ . Par conséquent, en regard de la propriété 2 au-dessus, on a que  $\partial Tw = \mathcal{S}w$  pour tout  $w \in L^p(\Omega)$ .

Nous renvoyons à [25, Prop. 5.2.1] pour la preuve de ces résultats. Signalons simplement que la première partie de la propriété 1 de la Proposition 3.2.3.1 correspond au théorème de M. Riesz déjà énoncé avec le Théorème 2.2.3.1. La dernière partie de la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 n'est quant à elle vraie que dans le cas simplement connexe et dévoile son utilité lorsqu'il est question de résoudre des problèmes de type Dirichlet pour l'équation (3.4) dans les espaces  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$ , et donc par extension dans les espaces  $H_v^p(\mathbb{D})$  avec le Corollaire 3.2.2.1 (voir Section 4.1.2). Toutefois un analogue de cette propriété sera montré à la Section 4.3.1.

On a alors le résultat suivant généralisant les propriétés des fonctions des espaces de Hardy classiques, et que nous énonçons uniquement dans le cadre des espaces  $H_v^p(\Omega)$  sachant qu'il reste valable dans les espaces  $G_\alpha^p(\Omega)$ .

### Proposition 3.2.3.2

1. Tout élément  $f \in H_v^p(\Omega)$  admet une limite non-tangentielle presque partout sur  $\partial\Omega$ . Cette dernière appartient à  $L^p(\partial\Omega)$ , est appelée trace de  $f$  et est notée  $tr_{\partial\Omega} f$ .
2. La norme  $\|\cdot\|_{H_v^p(\Omega)}$  définit une norme équivalente à  $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$ . De plus si  $\partial\Omega = \mathbb{T}$ , on a pour tout élément  $f \in H_v^p(\mathbb{D})$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta}) - f(e^{i\theta})|^p d\theta = 0 ,$$

le cas  $\Omega = \mathbb{A}$  s'écrivant quant à lui avec les limites de  $f$  dans  $L^p(\partial\mathbb{A})$ , c'est-à-dire pour  $r \rightarrow \varrho^+$  et  $r \rightarrow 1^-$ .

3. L'espace  $tr_{\partial\Omega} H_v^p(\Omega)$  est fermé dans  $L^p(\partial\Omega)$ .
4. Tout élément de  $f \in H_v^p(\Omega)$  vérifie  $\log |tr_{\partial\Omega} f| \in L^1(\partial\Omega)$  à moins que  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .

5. Si  $f \in H_\nu^{p,0}(\Omega)$  vérifie  $\operatorname{Re} \operatorname{tr}_{\partial\Omega} f = 0$  presque partout sur  $\partial\Omega$ , alors  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .
6. Lorsque  $f \in H_\nu^p(\Omega)$ , on a pour presque tout  $z \in \Omega$

$$\begin{aligned} f(z) &= \mathcal{C}(\operatorname{tr}_{\partial\Omega} f)(z) + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \frac{\overline{\nu \partial f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= \mathcal{C}(\operatorname{tr}_{\partial\Omega} f)(z) + T(\bar{\partial} f)(z) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}$  est l'opérateur de Cauchy défini par (2.2).

**Remarque 3.2.3.1** Afin d'alléger les notations, nous prendrons quelquefois la liberté de noter la trace sur  $\partial\Omega$  d'un élément  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  par  $\operatorname{tr} f$ , sans que cela n'introduise de confusion. Autrement dit, la trace non indicée fera toujours référence à la trace prise sur tout le bord du domaine sur lequel l'élément prend ses valeurs. Dans les cas où il pourrait y avoir confusion, la notation traditionnelle indicée sera reprise.

La Proposition 3.2.3.2 appellent bien entendu à certains commentaires en regard des propriétés similaires énoncées au Chapitre 2 pour les espaces de Hardy classiques.

### Commentaires concernant la Proposition 3.2.3.2

Nous formulons ces commentaires en respectant l'ordre d'énonciation des différentes propriétés.

1. Ce résultat généralise le Théorème 2.1.2.1. Il reste toutefois une ambiguïté à lever dans la mesure où nous choisissons d'appeler "trace" la limite non-tangentielle des éléments de  $H_\nu^p(\Omega)$ . Remarquons alors que cette liberté que nous prenons n'entre pas en conflit avec la notion de trace prise au sens de Sobolev. En effet, notons tout d'abord que la limite non-tangentielle de tout élément de  $W^{1,p}(\Omega)$ , lorsqu'elle existe, coïncide avec la trace au sens de Sobolev de celui-ci (voir la discussion dans la preuve de [25, Prop. 4.3.3]). Par ailleurs nous verrons au Chapitre 4 que tout élément de  $W^{1,p}(\Omega)$  satisfaisant (1.7) appartient à  $H_\nu^p(\Omega)$  (voir Proposition 4.1.1.1), et possède donc une limite non-tangentielle. Ainsi il devient naturel de prolonger la définition de la trace à tous les éléments de  $H_\nu^p(\Omega)$ .
2. L'équivalence des normes signifie ici qu'il existe  $c_\nu \in \mathbb{R}_*^+$  ne dépendant que de  $\nu$  tel que

$$\|\operatorname{tr} f\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq \|f\|_{H_\nu^p(\Omega)} \leq c_\nu \|\operatorname{tr} f\|_{L^p(\partial\Omega)}. \quad (3.15)$$

La propriété de convexité de Hardy (voir Proposition 2.1.1.1) nous assure que lorsque  $\nu = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $f$  est holomorphe, alors  $(0, 1) \ni r \mapsto \|f\|_{L^p(\mathbb{T}_r)}$  est une fonction croissante de  $r$ . Dès lors, il est clair que la meilleure constante dans (3.15) pour le cas holomorphe est  $c_0 = 1$ . Suite aux calculs effectués dans les commentaires du Théorème 3.2.3.1 et ayant menés à l'estimation (3.13), il est possible de déterminer une borne supérieure pour le coefficient  $c_\nu$  dans l'inégalité (3.15). Traitons le cas  $\Omega = \mathbb{D}$ . Soit  $0 < \varrho < 1$ . D'après (3.7), on a en effet que

$$\|tr f\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} = \left\| tr \left( \frac{w + \nu \bar{w}}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq \left\| \frac{1}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \|tr(w + \nu \bar{w})\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} .$$

Or, dans la mesure où  $\nu$  satisfait  $(\kappa)$ , on en déduit que

$$\|\sqrt{1 - \nu^2}\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \geq \sqrt{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}^2} ,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \|tr f\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} &= \left\| tr \left( \frac{w + \nu \bar{w}}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right) \right\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq \frac{1 + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{\sqrt{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}^2}} \|tr w\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}} \|tr w\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilisons maintenant la décomposition du Théorème 3.2.3.1 pour poursuivre le calcul. En écrivant  $w = e^s F$  avec  $F \in H^p(\mathbb{D})$  et  $s \in C^{0,\gamma}(\mathbb{D})$  pour tout  $\gamma \in (0, 1)$ , on peut effectuer la majoration suivante

$$\|tr w\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq e^{\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \|F\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} .$$

D'après le théorème de convexité de Hardy (voir Proposition 2.1.1.1), la fonction  $F$  vérifie  $\|F\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq \|F\|_{L^p(\mathbb{T})}$ . Alors, en utilisant successivement l'égalité  $F = e^{-s} w$  et (3.13),

$$\|tr w\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq e^{2\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \|tr w\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq e^{8\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \|tr w\|_{L^p(\mathbb{T})} , \quad (3.17)$$

cependant que (3.6) fournit l'inégalité

$$\|tr w\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \sqrt{\frac{1 + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}} \|tr f\|_{L^p(\mathbb{T})} . \quad (3.18)$$

On peut dorénavant conclure en combinant les relations (3.16), (3.17) et (3.18)

$$\|tr f\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)} \leq \frac{1 + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} e^{8\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \|tr f\|_{L^p(\mathbb{T})} .$$

En passant au sup sur  $\varrho$  dans la dernière inégalité, on conclut donc que dans le cas  $\Omega = \mathbb{D}$ , le terme  $c_\nu$  intervenant dans (3.15) vérifie

$$|c_\nu| \leq \frac{1 + \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}}{1 - \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} e^{8\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} . \quad (3.19)$$

Ce résultat est en accord avec le fait que le terme  $c_\nu$  ne dépende que de  $\nu$  étant donné la relation (3.5). Enfin, il est clair que la majoration (3.19) étant vraie dans  $\mathbb{D}$ , elle le reste dans  $\mathbb{A}$ .

De plus, l'équivalence des normes (3.15) nous permet d'identifier une fonction de  $H_\nu^p(\Omega)$  avec sa trace.

Concluons en signalant que la dernière partie de la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2, est l'extension du Théorème 2.1.2.2 aux espaces de Hardy généralisés. Elle nous indique que la limite non-tangentielle de  $f$  coïncide en fait avec la limite radiale de  $f$  dans  $L^p(\partial\Omega)$ .

3. Ce résultat se déduit directement des inégalités (3.15) et du fait que  $H_\nu^p(\Omega)$  soit un espace de Banach. Il étend le Corollaire 2.1.3.1.
4. Ce résultat généralise aux espaces  $H_\nu^p(\Omega)$  la même propriété d'unicité énoncée dans le Théorème 2.1.2.1. A nouveau on en déduit que si  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  s'annule sur un ensemble  $I \subset \partial\Omega$  de mesure strictement positive, alors  $f \equiv 0$  sur  $\Omega$ .
5. Cette propriété précise le rapport entre une fonction  $f = u + iv \in H_\nu^p(\Omega)$  et les valeurs que prend cette dernière sur le bord  $\partial\Omega$ . Plus précisément, une telle fonction  $f$  est entièrement déterminée par les valeurs que prend sa partie réelle  $u$  sur tout  $\partial\Omega$ . Ce résultat étend bien entendu le fait que si  $F \in H^p(\Omega)$  a une partie réelle nulle sur  $\partial\Omega$ , alors cette dernière est en fait identiquement nulle sur  $\Omega$  du fait de sa représentation de Poisson [75]. Dès lors, si  $f \in H_\nu^p(\Omega)$  est telle que sa partie réelle est nulle sur tout  $\partial\Omega$  et que par ailleurs aucune hypothèse de normalisation n'existe pour sa partie imaginaire, alors  $f$  n'est plus identiquement nulle sur  $\Omega$  mais égale à une constante imaginaire pure, c'est-à-dire  $f \equiv ic$  avec  $c \in \mathbb{R}$ .
6. La encore il s'agit d'une généralisation d'une propriété des espaces de Hardy classiques, plus précisément du Théorème 2.2.2.1. Les solutions de (1.7) ne sont en effet pas holomorphes, à moins que  $\nu = 0$ , et ne peuvent donc plus s'écrire uniquement au moyen de leur intégrale de Cauchy. Notons qu'il s'agit là d'une formule de type Cauchy-Green classique pour les fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$  [89] que l'on étend facilement aux fonctions de  $W^{1,p}(\Omega)$  [25, Lem. 5.3.2]. Que cette propriété garde finalement un sens pour les fonctions de  $H_\nu^p(\Omega)$  relève de plusieurs points. Tout d'abord la partie concernant l'opérateur de Cauchy a bien un sens car comme nous venons de le voir avec la propriété 1 de la Proposition 3.2.3.2, les fonctions de  $H_\nu^p(\Omega)$  admettent une trace définie presque partout sur  $\partial\Omega$  et appartenant à  $L^p(\partial\Omega)$ . La propriété 1 de la Proposition 3.2.3.1 permet donc d'affirmer que l'opérateur de Cauchy est bien défini. Pour traiter la partie relative à l'opérateur  $T$ , considérons le cas où  $\Omega = \mathbb{D}$ . Il convient de remarquer que tout élément  $f \in H_\nu^p(\mathbb{D})$  appartient à  $W_{loc}^{1,l}(\mathbb{D})$  puisque ceci est le cas pour les fonctions de  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$  avec le Théorème 3.2.3.1 et (3.7). Maintenant, pour  $0 < \varrho < 1$  et  $f \in W^{1,p}(\mathbb{D}_\varrho)$ , nous pouvons écrire, d'après [25, Lem. 5.3.2], pour presque tout  $z \in \mathbb{D}_\varrho$

$$f(z) = \mathcal{C}(tr_{\mathbb{T}_\varrho} f)(z) + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}_\varrho} \frac{\bar{\partial}f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} .$$

Il suffit désormais de conclure en faisant tendre  $\varrho$  vers 1 et en utilisant des arguments classiques de convergence dominée ainsi que les propriétés 2 des Propositions 3.2.3.1 et 3.2.3.2. Le cas où  $\Omega = \mathbb{A}$  se traite de la même manière. Nous concluons cette partie en remarquant que comme les fonctions  $w \in G_\alpha^p(\Omega)$  satisfont l'équation (3.4),

et compte tenu des notations précédemment introduites, il est possible d'écrire pour toute fonction  $w \in G_\alpha^p(\Omega)$  et presque tout  $z \in \Omega$ ,

$$w(z) = \mathcal{C}(tr w)(z) + T(\alpha\bar{w})(z) = \mathcal{C}(tr w)(z) + T_\alpha(w)(z) .$$

Ces propriétés permettent en définitive de généraliser les résultats de Fatou [63, Cor. 1] quant à la limite non-tangentielle des solutions de (1.2) satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  dans  $\Omega$ . Nous avons en effet, comme conséquence directe de la Proposition 3.2.3.2, le résultat suivant [25, Thm. 4.4.2.2] qui se généralise naturellement au cas doublement connexe :

**Théorème 3.2.3.2** *Soit  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant (1.1). Alors tout élément de  $L_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$  solution de (1.2) et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  dans  $\Omega$  admet une limite non-tangentielle notée  $tr u$  presque partout sur  $\partial\Omega$ . De plus,*

– Si  $\Omega = \mathbb{D}$

$$tr u = \lim_{r \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}) \text{ dans } L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) .$$

– Si  $\Omega = \mathbb{A}$

$$tr u = \left( \lim_{r \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}), \lim_{r \rightarrow \rho^+} u(re^{i\theta}) \right) \text{ dans } L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) .$$

Il est à noter que, comme dans la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2, la limite non-tangentielle donnée par le Théorème 3.2.3.2 coïncide avec la limite radiale de  $u$ .

L'ensemble des propriétés de la Proposition 3.2.3.2 vont nous servir dorénavant à énoncer des résultats fondamentaux : ceux de type Dirichlet (voir Chapitre 4) et ceux de densité (voir Chapitre 5). Ces résultats vont jouer un rôle majeur dans la régularisation du problème inverse de Cauchy ( $PC$ ) formulé dans la Section 1.2.

## Chapitre 4

# Problèmes de Dirichlet et généralisation de l'opérateur de conjugaison

### Sommaire

---

<b>4.1 Problèmes de Dirichlet dans des domaines simplement connexes</b>	<b>62</b>
4.1.1 Quelques résultats préliminaires . . . . .	63
4.1.2 Théorèmes de Dirichlet dans $\mathbb{D}$ . . . . .	64
4.1.3 Décomposition des espaces $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$ . . . . .	68
<b>4.2 Conjugaison harmonique généralisée</b> . . . . .	<b>75</b>
4.2.1 Cas simplement connexe . . . . .	75
4.2.2 Conditions de compatibilité pour le cas doublement connexe . .	79
4.2.3 L'espace $\mathcal{S}$ . . . . .	82
<b>4.3 Problèmes de Dirichlet dans des domaines doublement connexes</b>	<b>83</b>
4.3.1 Résolution dans le cas réel . . . . .	83
4.3.2 Résolution dans le cas complexe . . . . .	87

---

Ce chapitre traite de la résolution des problèmes de Dirichlet relatifs aux équations (1.2) et (1.7) dans des domaines ouverts  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  simplement et doublement connexes pour des données au bord de régularité  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$  et  $L^p(\partial\Omega)$  (soulignons à nouveau que seuls les exposants  $p \in (1, \infty)$  sont envisagés). Lorsqu'il y aura besoin de distinguer ces deux situations, nous traiterons à nouveau les cas  $\Omega = \mathbb{D}$  ou bien  $\Omega = \mathbb{A}$  sans que cela n'entraîne de restriction. Comme cela a été mentionné dans la Section 1.2, nous pratiquerons un abus de langage en appelant problèmes de Dirichlet ceux se référant à la fois aux équations (1.2) et (1.7), même si historiquement le terme est employé dans le cas réel uniquement. A ce titre, donnons la terminologie employée pour se référer aux cas réels et complexes :

#### Cas réel

*Soit  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant (1.1). Pour toute fonction  $\varphi \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$ , (PDu) : existe-t-il une unique fonction  $u$  solution de (1.2) et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  dans  $\Omega$  telle que  $tr_{\partial\Omega} u = \varphi$  sur  $\partial\Omega$  ?*

---

**Cas complexe**

Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Pour toute fonction  $\varphi \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$ ,  
*(PDF)* : existe-t-il une unique fonction  $f \in H_{\nu}^p(\Omega)$  telle que  $Re(tr_{\partial\Omega} f) = \varphi$  sur  $\partial\Omega$  ?

Soulignons que la formulation des problèmes *(PDu)* et *(PDF)* a bien un sens dans la mesure où la Proposition 3.2.3.2 ainsi que le Théorème 3.2.3.2 assurent que les traces des éléments envisagés existent. Il s'agit là de problèmes, du moins dans le cas réel, largement étudiés pour des données frontières plus régulières que celles que nous envisageons. Ainsi nous rappellerons dans un premier temps les résultats donnés par [51] pour une régularité au bord de type Sobolev. Ces derniers ont par ailleurs été étendus au cas de conductivité appartenant à l'espace  $VMO(\Omega)$  [17]. Ce chapitre va être l'occasion de mettre en avant que les espaces de Hardy généralisés introduits au Chapitre 3 sont les espaces appropriés pour traiter les problèmes *(PDu)* et *(PDF)* pour des données au bord de régularité  $L^p(\partial\Omega)$  (nécessitant par conséquent des conditions d'intégrabilité plus faibles que celles données par [51]).

Ce chapitre s'organise donc de la façon suivante. Dans un premier temps, nous donnons les solutions de *(PDu)* et *(PDF)* dans le cas simplement connexe. Ces résultats ont été établis dans [25]. Nous les rappelons tout en affinant celui de *(PDu)*. Nous énonçons ensuite un résultat de décomposition de l'espace  $L^p(\mathbb{T})$  qui nous sera utile pour décomposer les espaces  $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$  dans le même esprit qu'au Théorème 2.3.2.1. Précisons que ce dernier résultat n'est pas utile à la résolution de *(PDF)* dans le cas doublement connexe mais que sa place dans ce chapitre se trouve justifiée par la fait que sa démonstration fait appel à la solution du problème de Dirichlet dans le cas simplement connexe.

Dans un deuxième temps, nous tenterons d'étendre aux espaces de Hardy généralisés la notion de conjugée harmonique explicitée dans la Section 2.2.3. Nous verrons en effet que résoudre un problème de Dirichlet de type *(PDF)* revient finalement à être en mesure d'intégrer le système d'équations (1.4), donc de définir l'opérateur Dirichlet-Neumann qui associe de manière univoque  $Re(tr H_{\nu}^p(\Omega))$  à  $Im(tr H_{\nu}^p(\Omega))$ . Nous avons déjà évoqué le fait qu'intégrer le système (2.5) était toujours possible dans le cas simplement connexe mais que le cas doublement connexe présentait des difficultés (voir les commentaires après le Théorème 2.2.3.1). Il est clair que ces difficultés, que nous expliciterons et chercherons à caractériser, restent valables pour l'intégration de (1.4).

Cette réflexion sur la possibilité ou non d'étendre la conjugée harmonique aux espaces de Hardy généralisés sur des domaines doublement connexes nous permettra alors d'aborder la question de la résolution de *(PDu)* et *(PDF)* dans  $\mathbb{A}$  à laquelle nous apporterons une réponse positive sous certaines conditions [20].

## 4.1 Problèmes de Dirichlet dans des domaines simplement connexes

Dans cette section, nous nous consacrons exclusivement à la résolution des problèmes *(PDu)* et *(PDF)* dans le cas où  $\Omega = \mathbb{D}$ , ou plus généralement dans des domaines simplement connexes (voir l'introduction du Chapitre 2 ainsi que la Remarque 2.1.1.1). Afin de bien comprendre pourquoi les espaces de Hardy généralisés constituent un cadre de

travail idéal pour traiter ces questions, nous rappelons tout d'abord un résultat valable pour des données au bord appartenant à  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$ . Suite à quoi nous montrons que l'espace engendré par les fonctions solutions de ce problème «régulier» est strictement inclus dans ceux répondant à  $(PDu)$  et  $(PDf)$ . Enfin nous considérons la résolution de ces deux derniers.

### 4.1.1 Quelques résultats préliminaires

Le premier résultat que nous donnons est dû à [51] et constitue le point de départ pour la résolution de  $(PDu)$  et  $(PDf)$  dans  $\mathbb{D}$ . Il s'agit du

**Théorème 4.1.1.1** *Soit  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$ . Pour chaque fonction  $\varphi \in W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$ , il existe une unique fonction  $u \in W_{\mathbb{R}}^{1,p}(\mathbb{D})$  solution de (1.2) telle  $tr u = \varphi$  sur  $\mathbb{T}$ .*

Le passage au cas complexe se fait grâce à [25, Thm. 4.1.1]

**Théorème 4.1.1.2** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Pour chaque fonction  $\varphi \in W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$ , il existe une fonction  $f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$  solution de (1.7) telle  $Re(tr f) = \varphi$  sur  $\mathbb{T}$ . La fonction  $f$ , définie à une constante additive près, vérifie par ailleurs lorsqu'elle est normalisée par la condition (3.2)*

$$\|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} \leq c_{p,\nu} \|\varphi\|_{W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})} ,$$

où  $c_{p,\nu} > 0$  ne dépend que de  $p$  et  $\nu$ .

Le Théorème 4.1.1.2 nous renseigne donc sur le fait que pour des données au bord Sobolev, la solution du problème de Dirichlet satisfaisant (1.7) est elle-même de régularité Sobolev. On constate donc que ce résultat n'est pas suffisant pour envisager des données au bord ayant moins de régularité. Avant de voir que les espaces  $H_{\nu}^p$  permettent de combler ce manque, il convient de s'interroger plus en détail sur la nature des solutions de (1.7). Plus précisément, est-il vrai que les solutions de (1.7) appartenant à  $W^{1,p}(\mathbb{D})$  appartiennent déjà à  $H_{\nu}^p(\mathbb{D})$ ? La réponse positive est apportée par [25, Prop. 4.3.3].

**Proposition 4.1.1.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $f \in W^{1,p}(\mathbb{D})$  une solution de (1.7). Alors  $f \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et il existe  $c_{p,\nu} > 0$  ne dépendant que de  $p$  et  $\nu$  telle que*

$$\|f\|_{H_{\nu}^p(\mathbb{D})} \leq c_{p,\nu} \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} .$$

La Proposition 4.1.1.1 met donc en avant l'inclusion suivante

$$\{f \in W^{1,p}(\mathbb{D}); f \text{ solution de (1.7)}\} \subset H_{\nu}^p(\mathbb{D}) . \quad (4.1)$$

Il n'est toutefois pas encore clair que cette inclusion soit stricte. La preuve de ce dernier point va être apportée par les résultats de la section suivante.

**Remarque 4.1.1.1** *Rappelons que l'inclusion (4.1) ne crée pas d'ambiguïté lorsqu'il s'agit de parler de la trace des éléments de  $W^{1,p}(\mathbb{D})$  solutions de (1.7) vus comme éléments de  $H_{\nu}^p(\mathbb{D})$ . En effet, nous avons déjà évoqué le fait que la trace d'une telle fonction prise au sens de  $H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  coïncide avec la trace prise classiquement au sens Sobolev (voir les commentaires de la propriété 1 de la Proposition 3.2.3.2).*

### 4.1.2 Théorèmes de Dirichlet dans $\mathbb{D}$

Pour résoudre  $(PDu)$  et  $(PDF)$  dans  $\mathbb{D}$ , il est commode de les traiter dans un premier temps dans les espaces  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$  puis de conclure grâce au Corollaire 3.2.2.1. Ainsi on peut formuler le problème suivant

$(PDw)$  : Soit  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$ . Pour toute fonction  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ , existe-t-il une fonction  $w \in G_\alpha^p(\mathbb{D})$  telle que  $Re(tr w) = \varphi$  sur  $\mathbb{T}$  ?

Cette question admet une réponse positive et nous renvoyons le lecteur à [25, Thm. 4.4.1.2] pour les détails des preuves. Rappelons-en tout de même les grandes lignes. Pour cela, définissons tout d'abord un nouvel opérateur avec la

**Définition 4.1.2.1** Soit  $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$ . L'opérateur  $P_+$ , encore appelé opérateur de projection analytique [75], est défini par

$$P_+\varphi = tr(\mathcal{C}\varphi) . \quad (4.2)$$

L'opérateur  $P_+$  est une projection continue de  $L^p(\mathbb{T})$  sur  $tr H^p(\mathbb{D})$ , d'où le nom de projection analytique. Le comportement de cet opérateur a déjà fait l'objet de la Section 2.2.2. Nous avons vu en effet qu'appliquer l'opérateur à une fonction  $\varphi \in L^p(\mathbb{T})$  admettant un développement de Fourier de la forme  $\varphi(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\theta}$  revenait en fait à annuler tous les coefficients  $\{c_{-n}; n \in \mathbb{N}^*\}$ .

**Remarque 4.1.2.1** Au regard de la propriété 6 de la Proposition 3.2.3.2, la projection analytique  $P_+$  coïncide avec l'opérateur  $f \mapsto tr(I - T \circ \bar{\partial})(f)$ . On note par ailleurs que la restriction à  $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$  de  $\mathcal{T}(f)$  pour  $f \in L^p(\mathbb{D})$  (voir Définition 3.2.3.1) est holomorphe et s'annule à l'infini, donc appartient à  $H^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  selon (3.3). Ces considérations nous permettent de voir  $\mathcal{T}$  comme une projection anti-analytique de  $L^p(\mathbb{D})$  sur  $H^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$ .

Selon la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1, l'opérateur  $(I - T_\alpha)$  est un isomorphisme de  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$  dans  $H^p(\mathbb{D})$ , ce qui peut se reformuler, au regard de la Remarque 4.1.2.1, en affirmant que l'opérateur associant à  $w \in G_\alpha^p(\mathbb{D})$  sa projection analytique  $P_+(w)$  est un isomorphisme. Notons que lorsque nous affirmons que  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$  s'identifie de façon isomorphe à  $H^p(\mathbb{D})$  au moyen de l'opérateur  $w \mapsto P_+(w)$ , nous utilisons le fait que les éléments de ces espaces s'identifient à leur trace sur  $\mathbb{T}$  avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2.

Il est dès lors possible de résoudre un problème de Dirichlet pour l'équation (3.4) pour une valeur prescrite de la projection analytique sur  $\mathbb{T}$ . Plus précisément, si  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$  et si  $\varphi \in H^p(\mathbb{D})$ , il existe une unique fonction  $w \in G_\alpha^p(\mathbb{D})$  telle que [25, Thm. 4.4.1.1]

$$P_+(tr w) = tr \varphi ,$$

avec de plus

$$\|w\|_{G_\alpha^p(\mathbb{D})} \leq c_{p,\alpha} \|\varphi\|_{H^p(\mathbb{D})} .$$

A partir de la solution de ce problème de Dirichlet, on en déduit celle, plus générale, pour une donnée au bord appartenant à  $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  [25, Thm. 4.4.1.2].

**Théorème 4.1.2.1** *Soit  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$  et  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ . Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , il existe une unique fonction  $w \in G^p_\alpha(\mathbb{D})$  telle que  $\operatorname{Re} \operatorname{tr} w = \varphi$  presque partout  $\mathbb{T}$  et  $\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} \operatorname{tr} w(e^{i\theta}) d\theta = c$ . On a de plus que*

$$\|\operatorname{tr} w\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c_{p,\alpha} \|\varphi\|_{L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})} + c'_{p,\alpha} |c| \quad (4.3)$$

avec  $c_{p,\alpha}$  et  $c'_{p,\alpha}$  ne dépendant que de  $p$  et  $\alpha$  et  $c \in \mathbb{R}^+$ .

Précisons que le Théorème 4.1.2.1 résout à la fois l'existence et l'unicité de la solution du problème de Dirichlet. Par ailleurs, comme les éléments de  $H^p_{\mathbb{V}}(\mathbb{D})$  ont une partie imaginaire définie à une constante additive près d'après les équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4), il est clair que c'est aussi le cas pour les fonctions de  $G^p_\alpha(\mathbb{D})$  avec le Corollaire 3.2.2.1. On peut alors par exemple imposer à la solution du Théorème 4.1.2.1 de vérifier une condition de type (3.2) auquel cas la constante  $c$  intervenant dans l'inégalité (4.3) est nulle, et l'unicité est assurée.

Par une mécanique désormais établie, on a finalement que tous ces résultats permettent de résoudre  $(PDu)$  et  $(PDf)$  dans  $\mathbb{D}$ . On a en effet :

**Théorème 4.1.2.2** *Soit  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ , et  $\sigma$  et  $\nu$  appartenant tous les deux à  $W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$  et satisfaisant respectivement (1.1) et  $(\kappa)$ . Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

(i) *Il existe une unique solution  $u$  de (1.2) satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{D}$  telle que  $\operatorname{tr} u = \varphi$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ . De plus, pour tout sous-ensemble  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{D}$  telle que  $\bar{\mathcal{K}} \subset \mathbb{D}$  et pour tout  $l \in (1, \infty)$ , il existe une constante  $c = c(\mathcal{K}, \sigma, l, p) > 0$  telle que*

$$\|u\|_{W^{1,l}_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})} \leq c \|\varphi\|_{L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})} . \quad (4.4)$$

(ii) *Il existe une unique fonction  $f \in H^{p,0}_{\mathbb{V}}(\mathbb{D})$  telle que  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} f) = \varphi$  presque partout sur  $\mathbb{T}$  et telle que*

$$\|\operatorname{tr} f\|_{H^p_{\mathbb{V}}(\mathbb{D})} \leq c_{p,\sigma} \|\varphi\|_{L^p(\mathbb{T})}$$

avec  $c_{p,\sigma} > 0$  ne dépendant que de  $p$  et  $\sigma$ . De plus  $f \in W^{1,l}_{loc}(\mathbb{D})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ .

*Preuve.* La première assertion du point (i) est l'objet de [25, Thm. 4.4.2.2] alors que la première du point (ii) est celle de [25, Thm. 4.4.2.1]. Regardons dans un premier temps la seconde assertion du point (ii). Soit donc  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  et  $f = u + iv \in H^{p,0}_{\mathbb{V}}(\mathbb{D})$  l'unique fonction telle que  $\operatorname{Re}(\operatorname{tr} f) = \varphi$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ . Notons par ailleurs  $w$  la fonction de  $G^p_\alpha(\mathbb{D})$  associée à  $f$  par le Corollaire 3.2.2.1. Selon le Théorème 3.2.3.1,  $w \in W^{1,l}_{loc}(\mathbb{D})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Cette propriété est donc encore vraie pour  $f$  de par la relation (3.7) et le fait que  $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{D})$  satisfait  $(\kappa)$ .

Il reste donc à prouver la dernière assertion du point (i) ce que nous faisons dans le détail. Rappelons dans un premier temps que  $w = e^s F$  avec  $F \in H^p(\mathbb{D})$  et  $s \in C^{0,\gamma}(\overline{\mathbb{D}})$  en vertu du Théorème 3.2.3.1 et du Corollaire 3.2.3.1. Faisons le choix de la formulation (3.10) pour la représentation de  $s$

$$s(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \left( \frac{r(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{\overline{zr(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z} \right) d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Soit alors  $\mathcal{K}$  un sous-ensemble de  $\mathbb{D}$  telle que  $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathbb{D}$ . Il est clair que pour tout  $l \in (1, \infty)$

$$\|w\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq \|e^s F\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq \|e^s\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \|F\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{K})} \tag{4.5}$$

cependant que

$$\begin{aligned} \|e^s\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} &\leq \|e^s\|_{W^{1,l}(\mathbb{D})} \\ &\leq \|e^s\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|\partial(e^s)\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|\overline{\partial}(e^s)\|_{L^l(\mathbb{D})} \\ &\leq \|e^s\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|e^s \partial s\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|e^s \overline{\partial} s\|_{L^l(\mathbb{D})} \\ &\leq e^{\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \left( 1 + \|\partial s\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|\overline{\partial} s\|_{L^l(\mathbb{D})} \right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Nous allons montrer que le membre de droite dans la dernière égalité est borné par un terme positif ne dépendant que de  $\sigma$  et  $l$ . En effet, la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{C}$  par

$$\psi(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{zr(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z} d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

est holomorphe dans  $\mathbb{D}$  puisque si  $\zeta, z \in \mathbb{D}$ , alors le produit  $\overline{\zeta}z \in \mathbb{D}$  et par conséquent  $|\overline{\zeta}z| < 1$ . La fonction  $s$  peut donc s'écrire sur  $\mathbb{D}$

$$s(z) = Tr(z) + \psi(z),$$

où  $T$  est l'opérateur donné par la Définition 3.2.3.1. D'après la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 et le fait que  $\psi$  soit holomorphe sur  $\mathbb{D}$ , il reste que  $\overline{\partial} s = r$  dans  $\mathbb{D}$ . Comme  $\|r\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq \|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}$  (voir Commentaire 2 de la preuve de la Proposition 3.2.3.2), l'inégalité (4.6) devient

$$\|e^s\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq e^{\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})}} \left( 1 + \|\partial s\|_{L^l(\mathbb{D})} + \|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \right). \tag{4.7}$$

Il reste maintenant à régler le cas de  $\partial s$ . En notant  $B(z, \varepsilon)$  le disque de centre  $z$  et de rayon  $\varepsilon$ , on obtient que

$$\partial s(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D} \setminus B(z, \varepsilon)} \frac{r(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \wedge d\overline{\zeta} + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{r(\zeta)}}{(1 - \overline{\zeta}z)^2} d\zeta \wedge d\overline{\zeta},$$

où l'existence de la première intégrale est justifiée par celle de la transformée de Beurling  $S$  (voir la Définition 3.2.3.2 ainsi que la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.1). Il est alors possible de prouver grâce aux propriétés de bornitude des opérateurs de Cauchy et de Beurling que  $\partial s$  vérifie sur  $\mathbb{D}$  une condition de Hardy d'ordre  $l$  pour tout  $l \in (1, \infty)$

[25, Lemme 5.7.4], ce qui signifie que  $\partial s \in L^l(\mathbb{D})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . En utilisant cette information couplée au fait que  $\|s\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq 4\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})}$  d'après (3.13), l'inégalité (4.7) peut s'écrire finalement

$$\|e^s\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq c_1(\sigma, l) . \quad (4.8)$$

Majorons maintenant le terme  $\|F\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{K})}$  présent dans le membre de droite de l'inégalité (4.5). Comme  $F \in H^p(\mathbb{D})$ , on a  $\bar{\partial}F = 0$ . D'après la formule de Cauchy (2.3), il vient que pour  $z \in \mathbb{D}$

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{et} \quad \partial F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta . \quad (4.9)$$

On en déduit donc avec l'inégalité de Hölder que

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \left| \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} \right| d\zeta \\ &\leq C \|F\|_{L^p(\mathbb{T})} \left\| \frac{1}{\zeta - z} \right\|_{L^q(\mathbb{T})} , \end{aligned}$$

avec  $C$  une constante due au fait que nous faisons le choix de normaliser  $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T})}$  par la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{T}$  et  $q$  l'exposant conjugué de  $p$ , c'est-à-dire tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Maintenant, pour  $z \in \mathbb{D}$  et  $\zeta \in \mathbb{T}$ , l'application  $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$  appartient à  $L^q(\mathbb{T})$ ,  $q \geq 1$ . En passant à la norme uniforme, il reste donc

$$\|F\|_{L^\infty(\mathcal{K})} \leq \|F\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq c_2(\mathcal{K}, \sigma, p) \|F\|_{L^p(\mathbb{T})} ,$$

et avec les mêmes arguments, on obtient une majoration strictement identique pour  $\|\partial F\|_{L^\infty(\mathcal{K})}$  au regard de la deuxième égalité dans (4.9), si bien que

$$\|F\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{K})} \leq c_3(\mathcal{K}, \sigma, p) \|F\|_{L^p(\mathbb{T})} .$$

En injectant ces éléments dans (4.5) combinés à (4.8), et en utilisant le fait que  $F = e^{-s}w$  avec  $s \in C^{0,\gamma}(\mathbb{D})$  pour tout  $\gamma \in (1, \infty)$ , on obtient

$$\|w\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq c_4(\mathcal{K}, \sigma, l, p) \|w\|_{L^p(\mathbb{T})} ,$$

et finalement avec (3.18)

$$\|w\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq c_5(\mathcal{K}, \sigma, l, p) \|\varphi\|_{L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})} . \quad (4.10)$$

Utilisons maintenant que  $w = \sigma^{1/2}u + i\sigma^{-1/2}v$  avec (3.6). On a que  $|\sigma^{1/2}u| \leq |w|$  sur  $\mathcal{K}$ , et par conséquent, en se souvenant que  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  et que  $\sigma > 0$ ,

$$\|u\|_{L^l_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})} \leq c_6(\sigma) \|w\|_{L^l(\mathcal{K})} . \quad (4.11)$$

Remarquons maintenant, toujours grâce à la relation (3.6), que  $\partial_x(\sigma^{1/2}u) = \partial_x(\operatorname{Re} w)$ . On en déduit que la norme  $L^l_{\mathbb{R}}(\mathcal{K})$  est contrôlée par la norme  $W^{1,l}(\mathcal{K})$  de  $w$ . Bien entendu,

l'argumentation et le résultat restent analogues pour ce qui est de  $\partial_y(\sigma^{1/2}u)$ . On en conclut que la norme  $W_{\mathbb{R}}^{1,l}(\mathcal{K})$  de  $u$  est donc bien contrôlée par la norme  $W^{1,l}(\mathcal{K})$  de  $w$ . Finalement, la régularité de  $\sigma$ , et donc *a fortiori* celle de  $\sigma^{-1/2}$  permet d'obtenir que

$$\|u\|_{W_{\mathbb{R}}^{1,l}(\mathcal{K})} \leq c_7(\sigma)\|w\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} .$$

Il suffit désormais d'injecter ceci dans (4.10) pour terminer la preuve de (4.4). ■

Le Théorème 4.1.2.2 résout donc les problèmes  $(PDu)$  et  $(PDf)$  dans  $\mathbb{D}$  et fournit par ailleurs une information supplémentaire sur la régularité des solutions de  $(PDu)$  par rapport aux résultats de [25]. Il faut noter toutefois le fait que  $u \in W_{\mathbb{R}}^{1,l}(\mathcal{K})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  coïncide avec le point (ii) du Théorème 4.1.2.2. Il était cependant nécessaire d'établir l'estimation (4.4) qui renforce ce résultat et dont nous ferons usage dans la résolution de  $(PDu)$  dans  $\mathbb{A}$  (voir Section 4.3.1).

Du Théorème 4.1.2.2 nous pouvons tirer directement deux résultats. Le premier répond à la question posée à la suite de la Proposition 4.1.1.1

#### Corollaire 4.1.2.1

$$\{f \in W^{1,p}(\mathbb{D}); f \text{ solution de (1.7)}\} \subsetneq H_{\nu}^p(\mathbb{D}) .$$

Le Corollaire 4.1.2.1 montre que le Théorème 4.1.2.2 est une amélioration du Théorème 4.1.1.2 puisque dorénavant nous sommes en mesure de traiter le problème  $(PDf)$  pour des données au bord ayant une régularité affaiblie par rapport à la régularité Sobolev initialement supposée. Le Théorème 4.1.2.2 prouve donc que les espaces de Hardy généralisés sont les espaces appropriés à la résolution de problème de Dirichlet pour des données au bord de régularité  $L^p$ .

Une conséquence supplémentaire de ces résultats est la suivante

#### Corollaire 4.1.2.2

$$L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) = \text{Re}(H_{\nu}^p(\mathbb{D})) .$$

Ce résultat traduit finalement le fait que le problème  $(PDf)$  admet toujours une solution dans  $\mathbb{D}$ , c'est-à-dire que tout élément de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  peut être vu comme la partie réelle d'un élément de  $H_{\nu}^p(\mathbb{D})$ . Il est fondamental de se rendre compte que ce résultat est propre au cas simplement connexe et ne peut être étendu tel quel pour des géométries doublement connexes. Ceci constituera l'objet de la Section 4.2.

Nous allons voir maintenant que les résultats de Dirichlet prouvés dans cette section permettent notamment de décomposer les espaces  $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$ .

### 4.1.3 Décomposition des espaces $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$

Dans cette section, nous continuons de prolonger certaines propriétés des espaces de Hardy classiques aux espaces de Hardy généralisés, et plus précisément le Théorème 2.3.2.1. Nous allons voir en effet que les espaces  $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$  se décomposent en sommes d'espaces de Hardy généralisés élémentaires. Toutefois, la non-unicité de cette décomposition

ne proviendra cette fois-ci plus seulement de la condition de normalisation imposée aux parties imaginaires des éléments de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  (voir Remarque 2.3.2.1), mais aussi du fait qu'il sera nécessaire d'effectuer un choix dans la manière de prolonger régulièrement la conductivité  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  à  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$ .

Le résultat que nous allons démontrer dans cette section est le suivant

**Théorème 4.1.3.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors il existe  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  et  $\nu_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho})$  satisfaisant  $(\kappa)$  respectivement sur  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$  telles que  $\nu_{i|\mathbb{A}} = \nu_{e|\mathbb{A}} = \nu$  et*

$$H_\nu^p(\mathbb{A}) = H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})|_{\mathbb{A}} \oplus H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho})|_{\mathbb{A}} . \quad (4.12)$$

*De plus, cette décomposition est topologique.*

Afin de démontrer le Théorème 4.1.3.1, nous aurons besoin de deux résultats intermédiaires. Le premier est donné par le

**Lemme 4.1.3.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors*

$$f \in H_\nu^p(\Omega) \iff g = if \in H_{-\nu}^p(\Omega)$$

*Preuve.* On a tout d'abord la suite d'équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f = \nu\bar{\partial}f &\iff i\bar{\partial}f = i\nu\bar{\partial}f \\ &\iff \bar{\partial}(if) = -\nu i\bar{\partial}f = -\nu\bar{\partial}(if) . \end{aligned}$$

Il est par ailleurs clair que  $f$  satisfait une condition de Hardy d'ordre  $p$  (voir Définition 2.1.1.2) si et seulement si  $g$  en satisfait une aussi, d'où le résultat.  $\blacksquare$

Le second résultat dont nous ferons usage va nous fournir une décomposition de l'espace  $L^p(\mathbb{T})$  [72, Cor. 3].

**Proposition 4.1.3.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors*

$$L^p(\mathbb{T}) = tr_{\mathbb{T}} H_\nu^p(\mathbb{D}) \oplus tr_{\mathbb{T}} H_{\check{\nu}}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) ,$$

*où  $\check{\nu}$  est la fonction réfléchie de  $\nu$  (voir (2.7)). De plus cette décomposition est topologique.*

*Preuve.* Notons que les propriétés énoncées dans la Proposition 3.2.3.2 pour les espaces  $H_\nu^p(\mathbb{D})$  sont encore vraies dans les espaces  $H_\nu^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  en vertu de la Proposition 3.1.2.1. En particulier, la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2 assure que

$$tr_{\mathbb{T}} H_\nu^p(\mathbb{D}) + tr_{\mathbb{T}} H_{\check{\nu}}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \subset L^p(\mathbb{T}) .$$

Montrons alors l'inclusion réciproque. Soit  $\phi = \varphi + i\psi \in L^p(\mathbb{T})$  avec  $(\varphi, \psi) \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$ . D'après le point (ii) du Théorème 4.1.2.2, il existe une unique fonction  $f \in H_\nu^{p,0}(\mathbb{D})$  telle que presque partout sur  $\mathbb{T}$  on ait  $Re(tr_{\mathbb{T}} f) = \frac{\varphi}{2}$ . Soit  $\check{f}$  la fonction réfléchie de

$f$ , c'est-à-dire telle que  $\check{f}(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$  pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Cette définition de  $\check{f}$  assure que  $Re(tr_{\mathbb{T}} \check{f}) = Re(tr_{\mathbb{T}} f)$  et  $Im(tr_{\mathbb{T}} \check{f}) = -Im(tr_{\mathbb{T}} f)$ . Cela implique que  $\check{f} \in H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  et que presque partout sur  $\mathbb{T}$

$$Re(tr_{\mathbb{T}}(f + \check{f})) = \varphi \quad \text{et} \quad Im(tr_{\mathbb{T}}(f + \check{f})) = 0. \quad (4.13)$$

Remarquons au passage que  $\check{f}$  est la solution de  $(PDf)$  pour  $\check{\nu}$  normalisée par (3.2) dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  avec la donnée  $\frac{\varphi}{2} \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$ . La première égalité dans (4.13) montre déjà que

$$L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) \subset Re(tr_{\mathbb{T}} H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{D})) + Re(tr_{\mathbb{T}} H_{\check{\nu}}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})).$$

Toujours d'après le point (ii) du Théorème 4.1.2.2, il existe une unique fonction  $g \in H_{-\nu}^{p,0}(\mathbb{D})$  telle que  $Re(tr_{\mathbb{T}} g) = \frac{\psi}{2}$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ . A nouveau on en déduit que

$$Re(tr_{\mathbb{T}}(g + \check{g})) = \psi \quad \text{et} \quad Im(tr_{\mathbb{T}}(g + \check{g})) = 0. \quad (4.14)$$

Maintenant avec le Lemme 4.1.3.1, on a que  $ig \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et  $i\check{g} \in H_{\check{\nu}}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Comme  $Re(g) = Im(ig)$  et  $Im(g) = -Re(ig)$ , les formules (4.14) s'écrivent encore

$$Re(i tr_{\mathbb{T}}(g + \check{g})) = 0 \quad \text{et} \quad Im(i tr_{\mathbb{T}}(g + \check{g})) = \psi. \quad (4.15)$$

Alors avec (4.13) et (4.15) on a presque partout sur  $\mathbb{T}$

$$\begin{aligned} \phi = \varphi + i\psi &= tr(f + \check{f}) + i tr(g + \check{g}) \\ &= tr(f + ig) + c_{f,g} + tr(\check{f} + i\check{g}) - c_{f,g} \end{aligned}$$

où

$$c_{f,g} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(tr f(e^{i\theta})) d\theta + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} Re(tr g(e^{i\theta})) d\theta.$$

Dans la mesure où les fonctions réelles constantes satisfont l'équation de Beltrami conjuguée (1.7), il est facile de voir que  $tr_{\mathbb{T}}(f + ig) + c_{f,g} \in tr_{\mathbb{T}} H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et  $tr_{\mathbb{T}}(\check{f} + i\check{g}) - c_{f,g} \in tr_{\mathbb{T}} H_{\check{\nu}}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ , soit  $\phi \in tr_{\mathbb{T}} H_{\nu}^p(\mathbb{D}) + tr_{\mathbb{T}} H_{\check{\nu}}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Ceci permet de conclure quant à l'inclusion voulue.

Prouvons maintenant que la décomposition est directe. Soient donc  $f \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et  $g \in H_{\check{\nu}}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  telles que presque partout  $tr_{\mathbb{T}} f = tr_{\mathbb{T}} g$ . Par définition de la fonction réfléchie,  $\check{g} \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$ , et donc  $f + \check{g} \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$ . De plus  $Im(tr_{\mathbb{T}} \check{g}) = -Im(tr_{\mathbb{T}} g) = -Im(tr_{\mathbb{T}} f)$ , de sorte que  $Im(tr_{\mathbb{T}}(f + \check{g})) = 0$ . Il n'est pas difficile de voir que la propriété 5 de la Proposition 3.2.3.2 écrite avec les parties imaginaires et sans condition de normalisation implique que  $f + \check{g}$  est identiquement égal dans  $\mathbb{D}$  à une constante réelle  $c$ . Donc

$$c = f + \check{g} = Re tr_{\mathbb{T}}(f + \check{g}) = 2Re tr_{\mathbb{T}} f = 2Re tr_{\mathbb{T}} g = 2Re tr_{\mathbb{T}} \check{g}.$$

Maintenant comme  $\check{g} \in H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ , la normalisation (3.3) implique finalement que  $c = 0$ . La propriété 4 de la Proposition 3.2.3.2 permet de conclure que  $f \equiv 0$  et  $\check{g} \equiv 0$  respectivement sur  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ , ce qui prouve la somme directe.

Reste enfin le caractère topologique de la décomposition. Celui-ci s'obtient en remarquant tout d'abord avec la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2 que les espaces  $tr_{\mathbb{T}} H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et  $tr_{\mathbb{T}} H_{\nu}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  sont tous les deux fermés dans  $L^p(\mathbb{T})$ . On conclut alors grâce au [46, Thm. II.8] qui assure la continuité des projecteurs sur chaque sous espace  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et  $H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho})$ . ■

Nous mentionnons ici qu'il aurait été possible de prouver que la somme est directe dans la Proposition 4.1.3.1 d'une autre manière. Le résultat qui aurait pu être employé est une généralisation d'un résultat connu pour les fonctions holomorphes, à savoir le théorème de Liouville. Nous ferons usage de ce dernier dans la preuve du Théorème 4.1.3.1. On a en effet [15, Prop. 3.3] :

**Proposition 4.1.3.2** *Soit  $F \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$  et  $\gamma \in L_{loc}^p(\mathbb{C})$  avec  $p > 2$ . Supposons que pour une constante  $0 \leq \kappa < 1$ , on ait*

$$|\overline{\partial}F(z)| \leq \kappa|\partial F(z)| + \gamma(z)|F(z)|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Alors

- si  $F(z) \rightarrow 0$  lorsque  $|z| \rightarrow \infty$  et  $\gamma$  est à support compact, alors  $F \equiv 0$ .
- si pour  $|z|$  grand,  $F(z) = \lambda z + \varepsilon(z)z$  où la constante  $\lambda \neq 0$  et  $\varepsilon(z) \rightarrow 0$  lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ , alors  $F(z) = 0$  en exactement un point  $z_0 \in \mathbb{C}$ .

Nous pouvons désormais prouver la décomposition des espaces  $H_{\nu}^p(\mathbb{A})$ .

**Preuve du Théorème 4.1.3.1.** Le fait que

$$H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}) + H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}) \subset H_{\nu}^p(\mathbb{A})$$

sous les hypothèses faites sur  $\nu_i$  et  $\nu_e$  résulte directement de la définition de  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et  $H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho})$ .

Montrons l'inclusion réciproque. Soit donc  $f \in H_{\nu}^p(\mathbb{A})$ . La propriété 1 de la Proposition 3.2.3.2 assure que  $tr_{\mathbb{T}} f \in L^p(\mathbb{T})$ . Soit maintenant  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  une extension régulière de  $\nu$  à tout  $\mathbb{D}$  telle que  $\|\nu_i\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq \kappa' < 1$  avec  $\kappa' \in (0, 1)$ . D'après la Proposition 4.1.3.1, il est possible d'écrire

$$tr_{\mathbb{T}} f = tr_{\mathbb{T}} f_i + tr_{\mathbb{T}} f_e, \quad (4.16)$$

avec  $f_i \in H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et  $f_e \in H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Introduisons alors les fonctions  $\mathcal{F}_i = f - f_{i|_{\mathbb{A}}} \in H_{\nu}^p(\mathbb{A})$  et  $\mathcal{F}_e$  telle que

$$\mathcal{F}_e = \mathcal{F}_i \vee f_e = \begin{cases} \mathcal{F}_i & \text{sur } \mathbb{A} \\ f_e & \text{sur } \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases} \quad \text{et} \quad tr_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_e = tr_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_i = tr_{\mathbb{T}} f_e,$$

ainsi que la conductivité  $\nu_e$  définie sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$  par

$$\nu_e = \nu \vee \check{\nu}_i = \nu_i \vee \check{\nu}_i = \begin{cases} \nu & \text{sur } \mathbb{A} \\ \check{\nu}_i & \text{sur } \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \end{cases} \quad \text{et} \quad tr_{\mathbb{T}} \nu_e = tr_{\mathbb{T}} \nu = tr_{\mathbb{T}} \check{\nu}_i.$$

Donc par définition,  $\nu_{e|\mathbb{A}} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  et  $\nu_{e|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}}} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Remarquons que

$$\check{\nu}_i(z) = \overline{\nu_i\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} = \nu_i\left(\frac{1}{\bar{z}}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}},$$

car  $\nu_i$  est réelle. Cela implique  $tr_{\mathbb{T}} \nu = tr_{\mathbb{T}} \check{\nu}_i$  et nous assure par absolue continuité le long de toute ligne en coordonnées polaires [135, Rem. 2.1.5] que  $\nu_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varrho)$ . Il en découle aussi que  $\nu_e$  vérifie une condition de type  $(\kappa)$  sur tout  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varrho$ .

Etablissons à présent que  $\mathcal{F}_e \in H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varrho)$ . Par hypothèse,  $\mathcal{F}_e$  vérifie une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ . Comme  $tr_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_{e|\mathbb{A}} = tr_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_{e|_{\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}}} \in L^p(\mathbb{T})$ ,  $\mathcal{F}_e$  vérifie finalement une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur tout  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varrho = \mathbb{A} \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \cup \mathbb{T}$ . Il faut à présent vérifier que  $\mathcal{F}_e$  vérifie (1.7) pour la conductivité  $\nu_e$  sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_\varrho$ , sachant qu'elle vérifie déjà cette équation sur  $\mathbb{A}$  pour la conductivité  $\nu$  et sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  pour la conductivité  $\check{\nu}_i$ . Pour prouver ceci, il suffit de montrer que  $\bar{\partial}\mathcal{F}_e = \nu_e \bar{\partial}\overline{\mathcal{F}_e}$  au sens des distributions sur un anneau ouvert  $\mathcal{A}$  de frontière  $\partial\mathcal{A} = \mathbb{T}_r \cup \mathbb{T}_R$  avec  $\varrho < r < 1$  et  $R > 1$ , ce qui se reformule en :

$$I_{\mathcal{A}}(\phi) = \langle -\bar{\partial}\mathcal{F}_e + \nu_e \bar{\partial}\overline{\mathcal{F}_e}, \phi \rangle = 0, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),$$

soit

$$I_{\mathcal{A}}(\phi) = \iint_{\mathcal{A}} (-\mathcal{F}_e \bar{\partial}\phi + \overline{\mathcal{F}_e} \bar{\partial}(\nu_e \phi)) \, dm = 0, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).$$

Dès lors notons  $\mathcal{A}_r = \mathcal{A} \cap \mathbb{A}$  et  $\mathcal{A}_R = \mathcal{A} \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  deux anneaux contenus dans  $\mathcal{A}$  de sorte que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_r \cup \mathcal{A}_R \cup \mathbb{T}$ . De la même manière, introduisons les anneaux  $\mathcal{A}_{r,\varepsilon} = \mathcal{A}_r \cap \mathbb{D}_{1-\varepsilon}$  et  $\mathcal{A}_{R,\varepsilon} = \mathcal{A}_R \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}_{1+\varepsilon})$  avec  $\varepsilon < 1 - r$  et  $\varepsilon < R - 1$  (voir Figure 4.1).

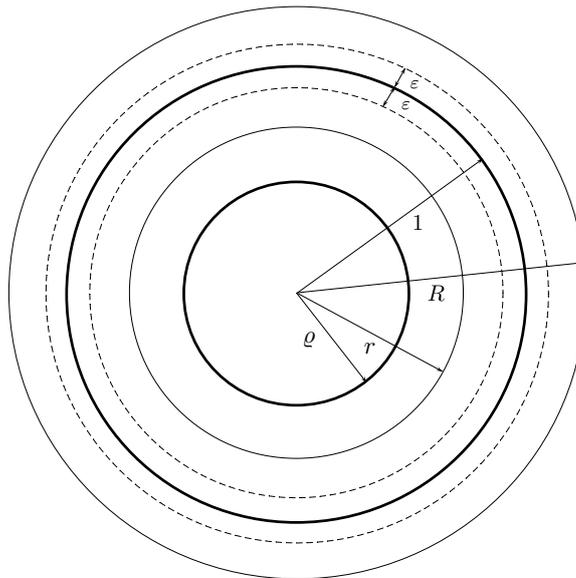


FIG. 4.1 – Cercles  $\mathbb{T}_\varrho, \mathbb{T}_r, \mathbb{T}_{1-\varepsilon}, \mathbb{T}, \mathbb{T}_{1+\varepsilon}$  et  $\mathbb{T}_R$ .

Alors il vient que pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$

$$I_{\mathcal{A}}(\phi) = \iint_{\mathcal{A}_r} (-\mathcal{F}_i \bar{\partial}\phi + \overline{\mathcal{F}_i} \bar{\partial}(\nu\phi)) dm + \iint_{\mathcal{A}_R} (-f_e \bar{\partial}\phi + \overline{f_e} \bar{\partial}(\check{\nu}_i\phi)) dm .$$

Les régularités des conductivités  $\nu$  et  $\check{\nu}_i$  ainsi que des fonctions  $\mathcal{F}_i$  et  $f_e$  permettent donc par application de l'inégalité de Hölder ainsi que de la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2 d'écrire la relation aux limites suivante

$$I_{\mathcal{A}}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\iint_{\mathcal{A}_{r,\varepsilon}} (-\mathcal{F}_i \bar{\partial}\phi + \overline{\mathcal{F}_i} \bar{\partial}(\nu\phi)) dm}_{I_{\mathcal{A}_{r,\varepsilon}}(\phi)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underbrace{\iint_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}} (-f_e \bar{\partial}\phi + \overline{f_e} \bar{\partial}(\check{\nu}_i\phi)) dm}_{I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}(\phi)} ,$$

Portons notre attention sur le calcul de  $I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}$ . On remarque dans un premier temps que comme  $f_e \in H_{\check{\nu}_i}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ , elle admet avec le Théorème 4.1.2.2 un surplus de régularité, soit  $f_e \in W_{loc}^{1,l}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Dans la mesure où  $\overline{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}} \subset (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ , on a donc que  $f_e \in W^{1,l}(\mathcal{A}_{R,\varepsilon})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ , ce qui nous autorise à intégrer par parties avec le théorème de Stokes [89, Section 1.2] (rappelons que  $-2idm = dz \wedge d\bar{z}$ )

$$I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}(\phi) = \langle \bar{\partial}f_e - \check{\nu}_i \bar{\partial} \overline{f_e}, \phi \rangle + \frac{i}{2} \int_{\partial \mathcal{A}_{R,\varepsilon}} (f_e - \check{\nu}_i \overline{f_e}) \phi dz , \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) .$$

Comme  $f_e$  est solution de (1.7) dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}} \supset \mathcal{A}_{R,\varepsilon}$  pour la conductivité  $\check{\nu}_i$ , il reste que

$$\begin{aligned} I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}(\phi) &= \frac{i}{2} \int_{\mathbb{T}_R} (f_e - \check{\nu}_i \overline{f_e}) \phi dz - \frac{i}{2} \int_{\mathbb{T}_{1+\varepsilon}} (f_e - \check{\nu}_i \overline{f_e}) \phi dz \\ &= -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{T}_{1+\varepsilon}} (f_e - \check{\nu}_i \overline{f_e}) \phi dz , \end{aligned}$$

la dernière égalité se justifiant par le fait que  $\phi$  est à support compact dans  $\mathcal{A}$ , donc s'annule sur  $\mathbb{T}_R$ . En passant à la limite avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2, il vient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}(\phi) = -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{T}} (f_e - \check{\nu}_i \overline{f_e}) \phi dz .$$

Par un calcul en tout point similaire, on obtient aussi

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\mathcal{A}_{r,\varepsilon}}(\phi) = \frac{i}{2} \int_{\mathbb{T}} (\mathcal{F}_i - \nu \overline{\mathcal{F}_i}) \phi dz .$$

Finalement la relation (4.16) montre que  $tr_{\mathbb{T}} f_e = tr_{\mathbb{T}} \mathcal{F}_i$  cependant que par définition  $\nu|_{\mathbb{T}} = \nu_{i|_{\mathbb{T}}} = \check{\nu}_{i|_{\mathbb{T}}}$ . Cela permet de conclure que

$$I_{\mathcal{A}}(\phi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\mathcal{A}_{R,\varepsilon}}(\phi) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\mathcal{A}_{r,\varepsilon}}(\phi) = 0 , \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) ,$$

ce qui assure que  $\mathcal{F}_e \in H_{\nu_e}^p(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$ . Il reste finalement à normaliser  $\mathcal{F}_e$  en lui retirant la quantité appropriée de sorte que finalement la fonction

$$f = \left( f_{i|\mathbb{A}} + \int_{\mathbb{T}_\rho} \text{tr}_{\mathbb{T}_\rho} \mathcal{F}_e \, dz \right) + \left( \mathcal{F}_{e|\mathbb{A}} - \int_{\mathbb{T}_\rho} \text{tr}_{\mathbb{T}_\rho} \mathcal{F}_e \, dz \right)$$

appartienne à  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  et se décompose bien sous la forme (4.12).

Prouvons que la somme est directe. Soit donc  $F \in H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}) \cap H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$ . Cela signifie que  $F$  est solution de (1.7) sur  $\mathbb{C}$  pour la conductivité  $\nu_i \vee \check{\nu}_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C})$  et donc appartient à  $W_{loc}^{1,p}(\mathbb{C})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  avec le Théorème 4.1.2.2. Comme  $F \in H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  en particulier, il résulte de la définition de la  $\nu$ -holomorphicité à l'infini (voir Proposition 3.1.2.1) que  $F$  admet une limite finie  $L$  lorsque  $|z| \rightarrow \infty$ . En appliquant la Proposition 4.1.3.2 à la fonction  $F - L$ , on en conclut que  $F \equiv L$ . Il suffit désormais de se souvenir que  $F$  est soumise à la condition de normalisation (3.3) pour en déduire que finalement  $F \equiv 0$ , ce qui prouve la somme directe.

Il reste enfin à prouver que la décomposition (4.12) est topologique. Soit donc  $(\phi_n)_n$  une suite d'éléments de  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  où  $\nu_i$  est toujours une extension régulière de  $\nu$  à  $\mathbb{D}$ . Supposons que  $(\phi_n)_n$  converge dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  vers  $\phi$ . On en déduit que  $(\phi_n)_n$  est une suite de Cauchy dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . Or par définition,

$$\| \text{tr}_{\partial\mathbb{A}} \phi_n \|_{L^p(\partial\mathbb{A})}^p = \| \text{tr}_{\mathbb{T}} \phi_n \|_{L^p(\mathbb{T})}^p + \| \text{tr}_{\mathbb{T}_\rho} \phi_n \|_{L^p(\mathbb{T}_\rho)}^p ,$$

si bien qu'avec (3.15) on obtient

$$\| \text{tr}_{\mathbb{T}} \phi_n \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \| \text{tr}_{\partial\mathbb{A}} \phi_n \|_{L^p(\partial\mathbb{A})} \leq \| \phi_n \|_{H_\nu^p(\mathbb{A})} .$$

La même justification fournit de plus

$$\| \phi_n \|_{H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})} \leq c_{\nu_i} \| \text{tr}_{\mathbb{T}} \phi_n \|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c_{\nu_i} \| \phi_n \|_{H_\nu^p(\mathbb{A})} .$$

Donc la suite  $(\phi_n)_n$  est aussi de Cauchy dans  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et par conséquent y converge par complétude de cet espace. Par unicité de la limite, on a finalement que  $\phi \in H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et que  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  est fermé dans  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . Il est bien entendu possible de prouver la même propriété pour l'espace  $H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$ . Il suffit alors de conclure avec [46, Thm. II.8] pour en déduire que les projecteurs sur chaque sous espace  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  et  $H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  sont linéaires et continus. ■

Le Théorème 4.1.3.1 constitue le dernier résultat que nous énonçons en conséquence de la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{D}$ . Nous allons maintenant envisager la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{A}$  et constater que celle-ci, contrairement au cas simplement connexe (voir les commentaires faisant suite au Corollaire 4.1.2.2), ne peut être réalisée que sous certaines conditions que nous allons détailler.

**Remarque 4.1.3.1** *La preuve du Théorème 4.1.3.1 a été réalisée à partir d'un choix fait pour les conductivités  $\nu_i$  et  $\nu_e$  intervenant dans la décomposition (4.12). Il convient d'observer que ce choix n'est pas unique. En particulier, nous aurions pu choisir d'étendre dans un premier temps régulièrement  $\nu$  à  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho}$  pour définir  $\nu_e$ , puis ensuite de réflechir  $\nu_e$  à travers  $\mathbb{T}_\rho$  pour définir  $\nu_i$ . Cette remarque trouvera tout d'abord son importance lorsque*

*l'on cherchera à représenter les fonctions de  $H_v^p(\mathbb{A})$  à l'aide d'une famille complète de fonctions (voir Chapitre 7) et restera par ailleurs valable lors de l'énoncé du Théorème 5.1.2.1.*

## 4.2 Conjugaison harmonique généralisée

Avant de passer véritablement à la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{A}$ , nous allons tenter de généraliser la notion de conjuguée harmonique explicitée dans la Section 2.2.3. Le choix d'un tel angle d'attaque n'est pas surprenant étant donné que formellement, trouver une fonction  $f \in H_v^p(\mathbb{A})$  tel que  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}} f) = u$  avec  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  donnée revient en fait à trouver la fonction  $v \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  telle qu'on ait effectivement  $f = u + iv \in H_v^p(\mathbb{A})$ , la fonction  $f$  étant identifiée à sa trace sur  $\partial\mathbb{A}$  (voir propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2). Or, trouver cette fonction  $v$  revient à intégrer le système (1.4), ce qui, rappelons-le, est toujours possible sur des domaines simplement connexes.

Etudier l'intégrabilité du système (1.4) sur  $\mathbb{A}$  va nous permettre de mettre en avant les conditions nécessaires à la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{A}$ . Avant d'entreprendre cette étude, introduisons une définition.

**Définition 4.2.0.1** *Soient  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant (1.1) et  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$ . Alors la fonction  $v \in L_{\mathbb{R}}^p(\Omega)$  vérifiant le système (1.4) est appelée conjuguée  $\sigma$ -harmonique de  $u$ . Le couple  $(tr u, tr v)$  désigne alors une paire de données à la frontière compatibles pour le système d'équations (1.4).*

**Remarque 4.2.0.2** *La Définition 4.2.0.1 coïncide avec la définition de la fonction conjuguée harmonique donnée dans la Section 2.2.3 dans le cas holomorphe puisqu'alors  $\sigma = 1$ . Nous précisons que l'objet mathématique  $f = u + iv$  donnée par cette définition est bien une fonction, c'est-à-dire qu'il ne peut associer à un même argument deux valeurs distinctes. Nous verrons effectivement au Chapitre 7 que dans le cas particulier du tokamak, donc pour une conductivité  $\sigma = \frac{1}{x}$  dans un anneau décentré et non concentrique, nous serons en mesure d'exhiber des couples  $(u, v) \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{A})$  satisfaisant le système (1.4), mais tels que l'élément  $f = u + iv$  ne puisse être définie comme une fonction dans l'anneau  $\mathbb{A}$ . Ces objets mathématiques que nous rencontrerons sont généralement appelés "fonctions multivaluées", même si le terme "fonction" ne doit pas induire en erreur ici. Pour être un peu plus précis, signalons que les fonctions multivaluées peuvent être vues comme de véritables fonctions (on parle à cet effet de fonctions monovaluées ou encore univaluées) de la variable complexe à conditions de les définir non plus sur le plan complexe mais plutôt sur une variété complexe de dimension 1. Ce domaine de définition porte alors le nom de surface de Riemann.*

Il est par ailleurs possible de formaliser le problème de la recherche de la fonction  $\sigma$ -harmonique conjuguée grâce à l'introduction d'un opérateur, ce que nous faisons dans la section suivante.

### 4.2.1 Cas simplement connexe

Le fait que  $(PDf)$  admette toujours une solution dans  $\mathbb{D}$  avec le Corollaire 4.1.2.2, nous conduit à formuler la définition suivante :

**Définition 4.2.1.1** Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $f \in H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{D})$  l'unique solution au problème (PDf) donnée par le Théorème 4.1.2.2. On note alors  $\mathcal{H}_{\nu}$  l'opérateur de conjugaison  $\sigma$ -harmonique défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\nu} : L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) &\rightarrow L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) \\ \operatorname{Re}(tr f) &\mapsto \operatorname{Im}(tr f) \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{H}_{\nu}$  est introduit dans [15] pour des données au bord appartenant à  $W_{\mathbb{R}}^{1/2,2}(\mathbb{T})$ , donc plus régulières que celles que nous traitons. Lorsque  $\nu = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\operatorname{Re}(f)$  et  $f$  sont respectivement harmonique et holomorphe dans  $\mathbb{D}$ ,  $\mathcal{H}_0(\operatorname{Re}(tr f))$  n'est rien d'autre que la conjuguée harmonique classique de  $\operatorname{Re}(tr f)$  (voir Section 2.2.3).

Mentionnons que l'unicité dans la définition de  $\mathcal{H}_{\nu}$  est assurée par le fait que  $f \in H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{D})$ . En effet, en notant  $f = u + iv$ , on sait que  $v$  est solution du système différentiel (1.4) et par conséquent est définie à une constante additive près. L'unicité de l'opérateur  $\mathcal{H}_{\nu}$  est alors imposée en faisant le choix que  $v = \mathcal{H}_{\nu}u$  soit soumis à la condition (3.2). Une caractérisation possible des fonctions de  $H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  est alors la suivante

**Corollaire 4.2.1.1** Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors

$$f = u + iv \in H_{\nu}^p(\mathbb{D}) \iff v = \mathcal{H}_{\nu}u + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) d\theta ,$$

avec la convention de normalisation des intégrales curvilignes que nous avons choisie.

Pour l'instant, l'opérateur  $\mathcal{H}_{\nu}$  n'est défini que pour des fonctions à valeurs réelles. Il est en fait possible d'étendre sa définition aux fonctions à valeurs complexes. En effet, au regard du Lemme 4.1.3.1, il est naturel de poser

$$\mathcal{H}_{\nu}(if) = i\mathcal{H}_{-\nu}(f) , \quad f \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{D}) . \quad (4.17)$$

**Remarque 4.2.1.1** Notons que dans [15], cet opérateur est introduit sous le nom de  $\nu$ -transformée de Hilbert ce qui peut prêter à confusion. En effet, dans le cas holomorphe ( $\nu = 0$ ), la transformée de Hilbert est en fait l'opérateur  $\mathfrak{H}$  défini sur  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$

$$\mathfrak{H}u(\theta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon < |\phi - \theta| < \pi} \frac{u(\phi)}{\theta - \phi} d\phi .$$

Cet opérateur a le même comportement que l'opérateur de conjugaison harmonique  $\mathcal{H}_0$  dans la mesure où ces deux opérateurs intégraux ont des noyaux ne différant que d'un terme borné, soit pour  $u \in L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T})$

$$|\mathcal{H}_0u(\theta) - \mathfrak{H}u(\theta)| \leq \frac{2}{\pi} \|u\|_{L_{\mathbb{R}}^1(\mathbb{T})} .$$

Il serait bien entendu possible de généraliser la transformée de Hilbert aux fonctions de  $\operatorname{Re}(H_{\nu}^p(\mathbb{T}))$  comme cela a été fait pour le passage de  $\mathcal{H}_0$  à  $\mathcal{H}_{\nu}$ . Toutefois, dans ce manuscrit, seul l'opérateur de conjugaison  $\sigma$ -harmonique  $\mathcal{H}_{\nu}$  sera utilisé. Pour plus de détails sur la transformée de Hilbert, nous renvoyons le lecteur à [75, Chap. III]

Constatons maintenant qu'il est possible d'étendre le résultat de M. Riesz, c'est-à-dire le Théorème 2.2.3.1, aux espaces de Hardy généralisés. On a en effet le résultat suivant [25, Cor. 4.4.2.1, Prop. 4.4.3.1]

**Théorème 4.2.1.1** *L'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  est borné de  $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  dans  $L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ , de  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$  dans  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p}(\mathbb{T})$  ainsi que de  $W_{\mathbb{R}}^{1,p}(\mathbb{T})$  dans  $W_{\mathbb{R}}^{1,p}(\mathbb{T})$ .*

Cette propriété de bornitude de l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  est importante. Elle confirme en effet que le comportement des fonctions de  $H^p_{\nu}(\mathbb{D})$  est conditionné par celui de leurs parties réelles. Nous attachons par ailleurs beaucoup d'importance à la description précise de  $\mathcal{H}_\nu$  dans la mesure où la détermination de son mode opératoire sur une famille complète de  $Re(H^2_{\nu}(\partial\Omega))$  (que l'on calculera comme combinaisons de fonctions spéciales dans le Chapitre 7) lorsque  $\Omega$  est un domaine doublement connexe, nous donnera une formulation explicite de la solution du problème extrémal borné toutefois uniquement valable dans le cas  $p = 2$ . La résolution numérique du problème extrémal borné est même entièrement subordonnée à notre capacité à caractériser l'action de  $\mathcal{H}_\nu$ .

Nous venons d'évoquer le fait qu'au cours du Chapitre 7, le comportement de  $\mathcal{H}_\nu$  sera étudié dans le cas spécifique  $p = 2$ . On peut d'ores et déjà constater que  $\mathcal{H}_\nu$  s'exprime de façon générale comme une perturbation de  $\mathcal{H}_0$ . Il convient pour cela de rappeler en premier lieu la proposition suivante [75].

**Proposition 4.2.1.1** *Soient  $f \in L^p(\mathbb{T})$  et  $P_+$  l'opérateur de projection analytique de  $L^p(\mathbb{T})$  sur  $tr(H^p(\mathbb{D}))$  donné par la Définition 4.1.2.1. Alors*

$$P_+f = \frac{1}{2} \left( (I + i\mathcal{H}_0)f + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \right). \quad (4.18)$$

Il est alors possible d'obtenir la formule suivante

**Proposition 4.2.1.2** *Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ . On a pour tout  $z \in \mathbb{T}$  :*

$$\mathcal{H}_\nu u(z) - \mathcal{H}_0 u(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{D}} (1 - \sigma(\zeta)) (\partial_x \log |\zeta - z| \partial_y u(\zeta) - \partial_y \log |\zeta - z| \partial_x u(\zeta)) dm(\zeta). \quad (4.19)$$

*Preuve.* Soit  $f \in H^{p,0}_{\nu}(\mathbb{D})$  la solution de  $(PDf)$  pour la donnée  $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  (voir Théorème 4.1.2.2). Posons  $tr f = u + iv$ . D'après la Définition 4.2.1.1, on a  $v = \mathcal{H}_\nu u$ . Avec la propriété 6 de la Proposition 3.2.3.2, il vient pour  $z \in \mathbb{T}$

$$v(z) = Im(tr f)(z) = Im \left[ P_+(tr f)(z) + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right]. \quad (4.20)$$

Avec la Proposition 4.2.1.1, on a de plus

$$P_+(tr f) = \frac{1}{2} \left( (I + i\mathcal{H}_0)(tr f) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta \right),$$

ce qui implique que

$$\operatorname{Im}(P_+(tr f)) = \frac{1}{2} \operatorname{Im}((I + i\mathcal{H}_0)(tr f)) ,$$

étant donné que  $f \in H_\nu^{p,0}(\mathbb{D})$ . Maintenant avec (4.17), on arrive à

$$\operatorname{Im}(P_+(tr f)) = \frac{1}{2}(v + \mathcal{H}_0 u) .$$

En combinant avec (4.20), on voit que

$$\frac{1}{2}(v(z) - \mathcal{H}_0 u(z)) = \operatorname{Im} \left( \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\bar{\partial} f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right) . \quad (4.21)$$

Remarquons maintenant que  $f \in H_\nu^{p,0}(\mathbb{D})$  vérifie l'équation

$$\bar{\partial} f = (1 - \sigma) \bar{\partial} u , \quad (4.22)$$

avec  $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$ . En effet  $Re(tr f) = u$  satisfait l'équation de conductivité (1.2) pour  $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ . Donc si  $\zeta = x + iy$  désigne la variable du plan complexe

$$\begin{aligned} \bar{\partial} f = \nu \bar{\partial} f &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right) \overline{\partial_x f - i \partial_y f} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right) \overline{\partial_x(u + iv) - i \partial_y(u + iv)} , \end{aligned}$$

et en utilisant les équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4)

$$\bar{\partial} f = \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \right) \overline{(1 + \sigma)(\partial_x u - i \partial_y u)} ,$$

qui donne bien (4.22) car  $\sigma$  est à valeurs réelles. Finalement, comme

$$\begin{aligned} 2\partial \log |\zeta - z| = \partial \log |\zeta - z|^2 &= \partial \log(\zeta - z) + \underbrace{\partial \log \overline{(\zeta - z)}}_{=0} \\ &= \frac{1}{\zeta - z} , \end{aligned}$$

on obtient la formule souhaitée en injectant ces calculs dans (4.21). ■

Remarquons que même si le résultat de la Proposition 4.2.1.2 donne un lien effectif entre la conjugaison  $\sigma$ -harmonique et la conjugaison harmonique classique, son exploitation reste difficile. Cela sous-entend en effet d'être en mesure de déterminer la quantité  $\mathcal{H}_0 u$  pour  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$ . Il n'est pas *a priori* clair que ce calcul soit facile puisque cela revient à intégrer les équations de Cauchy-Riemann classiques. Il est bien sûr toujours possible de donner une formulation intégrale de  $\mathcal{H}_0 u$ , mais son utilisation pour le calcul numérique risque alors de ne pas aisée. Par ailleurs cela ne suffit pas à déterminer complètement  $\mathcal{H}_\nu u$  puisqu'il faut encore calculer l'intégrale double du membre de droite dans (4.19). Il est

facile de se convaincre qu'un tel calcul est en général compliqué à mener, et ce d'autant plus que la fonction  $\sigma$  y intervenant n'est pas spécifiée.

Nous reportons désormais les aspects liés à la détermination du mode opératoire de l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$ . Ces derniers, dans le cas d'une conductivité  $\sigma = \frac{1}{x}$ , seront pleinement envisagés dans le Chapitre 7. Retenons néanmoins l'information suivante, à savoir que l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  peut toujours être défini sur des géométries simplement connexes puisque, comme nous l'avons constaté, son existence est liée à la possibilité d'intégrer les équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4). Comme nous allons le voir au travers de deux exemples à suivre, cette observation ne tient plus dans le cas annulaire ou plus généralement multiplement connexe, révélant ainsi les conditions à imposer pour la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{A}$ .

### 4.2.2 Conditions de compatibilité pour le cas doublement connexe

Au regard de la Définition 4.2.0.1 et du Corollaire 4.1.2.2, les conditions à vérifier pour qu'une paire de données  $(u, v) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$  soit compatible dans le cas où  $\Omega$  est simplement connexe sont uniquement les équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4). Une question légitime est alors de se demander si cela est toujours le cas pour des domaines doublement connexes.

Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  et  $u$  régulière sur  $\partial\mathbb{A}$ . Observons que nous supposons une régularité supérieure sur  $u$  comparée à l'hypothèse ayant cours dans ce manuscrit, à savoir  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{A})$ . On note  $\sigma = \frac{1-\nu}{1+\nu} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$ . D'après le Théorème 4.1.1.2 et la Proposition 4.1.1.1, il est toujours possible de définir localement une fonction  $v$  telle que  $f = u + iv$  soit localement monovaluée et solution de (1.7) pour la conductivité  $\nu$  (on a alors aussi que  $u$  est solution de (1.2) pour la conductivité  $\sigma$ ). Une telle solution locale monovaluée peut par exemple être définie en pratiquant une coupe sur l'anneau  $\mathbb{A}$ , c'est-à-dire en traçant une demi-droite de centre  $(0,0)$  qui prive  $\partial\mathbb{A}$  de deux points et  $\mathbb{A}$  de tout un segment (voir Figure 4.2).

Le domaine formé de l'anneau privé de la coupure constitue un domaine simplement connexe sur lequel  $f$  est bien une fonction monovaluée. Cherchons alors à exprimer les conditions qui permettraient de définir  $f$  comme fonction monovaluée sur tout  $\mathbb{A}$ . Réécrivons pour cela les équations (1.4) sur  $\partial\mathbb{A} = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}_\rho$  privé des deux points liés à la coupure. On oriente  $\partial\mathbb{A}$  de façon canonique, c'est-à-dire tel que le domaine reste sur la gauche lorsqu'on se déplace sur sa frontière. On note aussi  $\vec{e}_n = (e_{n_1}, e_{n_2})$  le vecteur normal unitaire sortant à  $\mathbb{A}$  ainsi que  $\vec{e}_t = (e_{t_1}, e_{t_2})$  le vecteur unitaire tangentiel (voir Figure 4.2). Sur  $\mathbb{T}$  privé du point lié à la coupure, on a

$$\begin{cases} e_{n_1}^{\vec{}} &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ e_{t_1}^{\vec{}} &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases},$$

si bien que

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} v &= \nabla v \cdot e_{t_1}^{\vec{}} &= (\partial_x v \vec{e}_x + \partial_y v \vec{e}_y) \cdot e_{t_1}^{\vec{}} \\ & &= -\partial_x v \sin \theta + \partial_y v \cos \theta, \end{aligned}$$

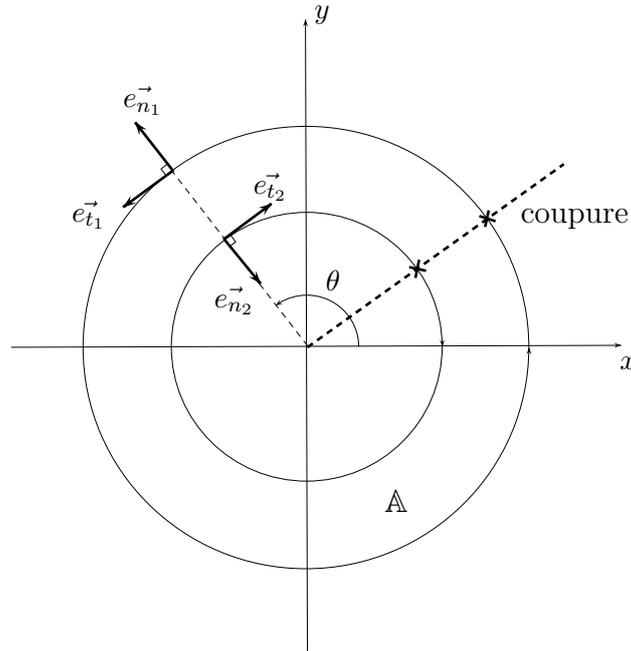


FIG. 4.2 – Anneau  $\mathbb{A}$ , vecteurs normaux et tangents et coupure privant son bord de deux points.

et donc avec les équations (1.4)

$$\begin{aligned} \partial_{t_1} v &= -(-\sigma \partial_y u) \sin \theta + (\sigma \partial_x u) \cos \theta \\ &= \sigma \nabla u \cdot \vec{e}_{n_1} \\ &= \sigma \partial_{n_1} u . \end{aligned}$$

Ces calculs peuvent être reconduits sur le bord  $\mathbb{T}_\rho$  privé lui aussi du point lié à la coupure pour prouver que  $\partial_{t_2} v = \sigma \partial_{n_2} u$ . On peut donc résumer ceci en disant que sur le bord  $\partial \mathbb{A}$  privé des deux points liés à la coupure, on a  $\partial_t v = \sigma \partial_n u$ . Par ailleurs comme  $u$  est régulière sur  $\partial \mathbb{A}$ , l'application de [78, Thm. 2.4.2.6] nous assure que  $u \in W_{\mathbb{R}}^{2,l}(\mathbb{A})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Il est donc possible d'appliquer la formule de Green à la fonction  $u$  ainsi qu'à la fonction constante 1. Alors en remarquant que, sous réserve d'existence,  $\partial_{t_1} v$  coïncide sur  $\mathbb{T}$  avec  $\partial_\theta v / 2\pi$  où  $v$  est alors écrite comme une fonction de  $e^{i\theta}$  (on a de même que  $\partial_{t_2} v$  coïncide sur  $\mathbb{T}_\rho$  avec  $-\partial_\theta v / 2\pi\rho$ ), il vient, en notant  $d\gamma$  la mesure de contour sur  $\partial \mathbb{A}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\mathbb{A}} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) \, dm = \int_{\partial \mathbb{A}} \sigma \partial_n u \, d\gamma = \int_0^{2\pi} \sigma \partial_{n_1} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sigma \partial_{n_2} u(\rho e^{i\theta}) \rho \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \sigma \partial_{n_1} u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} - \int_0^{2\pi} \partial_\theta v(\rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} . \end{aligned}$$

Cela implique que

$$\mathbb{R} \ni c = \int_0^{2\pi} \sigma \partial_{n_1} u(e^{i\theta}) d\theta = \int_0^{2\pi} \partial_\theta v(\varrho e^{i\theta}) d\theta = v(\varrho, 2\pi) - v(\varrho, 0).$$

Par conséquent, si  $c \neq 0$  alors  $v$  est multivaluée (la valeur de  $v$  en un point de l'anneau diffère de celle prise en ce même point après un tour effectuée sur une courbe fermée contenue dans l'anneau et passant par ce point). Or si  $v$  est multivaluée,  $f$  l'est *a fortiori* aussi. Dans ce cas, la conjuguée  $\sigma$ -harmonique de  $u$  dans  $\mathbb{A}$  n'est donc pas définie en tant que fonction monovaluée, et donc l'opérateur de  $\sigma$ -conjugaison  $\mathcal{H}_\nu$  n'a pas de sens. Ainsi la condition

$$\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_{n_1} u = 0$$

peut être vue comme une condition de compatibilité pour l'intégration du système (1.4) dans le cas annulaire.

Nous affirmons toutefois qu'il est toujours possible de voir  $u$  comme la partie réelle d'une fonction monovaluée appartenant à  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ . En effet, considérons une autre fonction  $u_m$  monovaluée solution de (1.2) pour la conductivité  $\sigma$  dans  $\mathbb{A}$  telle que  $u_m \not\equiv \beta u$  pour  $\beta \in \mathbb{R}^*$ . Supposons de plus que  $u_m$  ne vérifie pas la condition de compatibilité, à savoir  $c_m = \int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_{n_1} \text{tr} u_m \neq 0$ . Ainsi la fonction  $v_m$  associée à  $u_m$  par les équations (1.4) est multivaluée dans  $\mathbb{A}$ , entraînant la même conséquence pour la fonction  $f_m = u_m + iv_m$ . Posons alors

$$F(z) = f(z) - \frac{c}{c_m} f_m(z), \quad z \in \mathbb{A}. \quad (4.23)$$

La fonction  $F$  est monovaluée sur  $\mathbb{A}$  et satisfait (1.7). Bien sûr, pour mener un tel raisonnement, il faut être en mesure de pouvoir trouver une fonction  $f_m \neq f$  elle-même multivaluée. Le fait qu'une telle fonction existe sera rendu effectif dans avec le Corollaire 4.3.1.2. Nous en exhiberons d'ailleurs un exemple dans le cas particulier  $\sigma = \frac{1}{x}$  du tokamak avec le Lemme 7.2.3.2. Ceci nous permet de conclure qu'il existe une fonction  $F$  monovaluée et solution de (1.7) dans  $\mathbb{A}$  telle que  $u = \text{Re}(F) + \frac{c}{c_m} u_m$ . Par construction  $F$  n'est pas unique car elle dépend de  $f_m$ .

Illustrons ce que nous venons d'exposer dans le cas particulier holomorphe. Dans cette situation, il est classique de prendre comme coupure pour l'anneau la demi-droite des réels négatifs. Une fois une détermination de l'argument fixé sur le plan complexe privé de la coupure (la détermination correspondant à l'intervalle  $(-\pi, \pi)$  est par exemple qualifiée de principale), un choix approprié pour la fonction  $f_m$  devient alors  $f_m(z) = \log(z)$ . On a en effet que  $z \mapsto \text{Re} f(z) = \log |z|$  est une fonction monovaluée ce qui n'est clairement pas le cas de  $z \mapsto \text{Im} f(z) = \arg(z)$ . Ainsi dans (4.23), la constante  $c_m$  prend la valeur  $2\pi$  et finalement la fonction  $F$  définie par

$$F(z) = f(z) - \frac{c}{2\pi} \log(z), \quad z \in \mathbb{A},$$

est clairement holomorphe dans l'anneau et monovaluée. Et donc  $u(z) = \text{Re}(f(z))$  qui vérifie  $c = \int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_{n_1} \text{tr} u \neq 0$  peut s'écrire

$$u(z) = \text{Re}(F(z)) + \frac{c}{2\pi} \log |z|.$$

En notant que  $F$  est holomorphe dans l'anneau et y admet donc une décomposition sous forme de série de Laurent, on obtient une représentation classique des fonctions harmoniques dans  $\mathbb{A}$  [18, Thm. 9.14]

$$u(re^{i\theta}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} r^k (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) + a_0 + \frac{c}{2\pi} \log(r) , \quad (4.24)$$

où  $(r, \theta)$  représentent les coordonnées polaires.

### 4.2.3 L'espace $\mathcal{S}$

Dans cette section, nous continuons à étudier sur un exemple concret les problèmes de la généralisation au cas annulaire de l'opérateur de conjugaison  $\sigma$ -harmonique  $\mathcal{H}_\nu$ . Nous allons exhiber un espace dont les éléments n'admettent pas de conjuguées  $\sigma$ -harmoniques.

**Définition 4.2.3.1** *On note  $\mathcal{S}$  l'espace défini par*

$$\mathcal{S} = \{(u_1, u_\varrho) \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{A}); u_1 = C \text{ and } u_\varrho = -C, C \in \mathbb{R}\} .$$

On a alors la

**Proposition 4.2.3.1** *Soit  $\sigma \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  satisfaisant (1.1) et  $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  associé à  $\sigma$  avec (1.6). Le seul élément  $u \in \mathcal{S}$  admettant une conjuguée  $\sigma$ -harmonique  $\mathcal{H}_\nu u \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{A})$  est  $u \equiv 0$ .*

*Preuve.* Soit  $u \in \mathcal{S}$ . Dans la mesure où  $u$  est régulière sur  $\partial\mathbb{A}$  (puisqu'à valeurs constantes), on en déduit que  $u$  est la trace d'une unique fonction  $U$  solution de (1.2) pour la conductivité  $\sigma$  avec  $U \in W^{2,l}_{\mathbb{R}}(\mathbb{A})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  [78, Thm. 2.4.2.5].

Supposons maintenant que  $u$  admette une conjuguée  $\sigma$ -harmonique que l'on note  $v = \mathcal{H}_\nu u \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{A})$ . Par hypothèse,  $u$  est à valeurs constantes réelles sur  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{T}_\varrho$ . Par conséquent  $\partial_t u = 0$  presque partout sur  $\partial\mathbb{A}$ . Nous avons vu dans la Section 4.2.2 que le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4) pouvait se réécrire  $\partial_t v = \sigma \partial_n u$  sur  $\partial\mathbb{A}$ . En utilisant le même type d'arguments, on a encore  $-\sigma \partial_t u = \partial_n v$ . Cela implique  $\sigma^{-1} \partial_n v = 0$  presque partout sur  $\partial\mathbb{A}$ . On note maintenant  $V$  la fonction associée à  $U$  par les équations (1.4) et dont  $v$  est donc la trace sur  $\partial\mathbb{A}$ . Comme  $V$  est par ailleurs solution de (1.5) dans  $\mathbb{A}$  (voir Section 1.2) et a la même régularité que  $U$ , on peut appliquer la formule de Green

$$0 = \iint_{\mathbb{A}} V \nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla V) \, dm = \int_{\partial\mathbb{A}} \sigma^{-1} v \partial_n V \, d\gamma - \iint_{\mathbb{A}} \sigma^{-1} |\nabla V|^2 \, dm .$$

Il reste finalement

$$\iint_{\mathbb{A}} \sigma^{-1} |\nabla V|^2 \, dm = 0 . \quad (4.25)$$

Il suffit de constater maintenant que  $\sigma$  satisfait (1.1) si bien que  $\sigma^{-1} > 0$  sur  $\mathbb{A}$ . L'égalité (4.25) implique donc que  $\nabla V = 0$  presque partout dans  $\mathbb{A}$ , et par conséquent  $V$  est égale presque partout à une constante. En reportant cette information dans les équations (1.4), il vient que  $U$  est aussi constante. On en conclut que  $u = (tr_{\mathbb{T}} U, tr_{\mathbb{T}_\varrho} U) = (C, C)$  avec  $C \in \mathbb{R}$  cependant que  $u \in \mathcal{S}$  par hypothèse. Ceci implique  $C = 0$ . ■

Cet exemple fournit un cas concret de fonctions dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  n'admettant pas de conjuguée  $\sigma$ -harmonique. Le lien entre cet espace et celui des fonctions ayant une conjuguée  $\sigma$ -harmonique multivaluée de la section précédente va apparaître dans la section suivante.

### 4.3 Problèmes de Dirichlet dans des domaines doublement connexes

Cette section est consacrée à la résolution complète des problèmes  $(PDU)$  et  $(PDF)$  dans  $\mathbb{A}$ . Les considérations sur l'extension de l'opérateur de conjugaison  $\sigma$ -harmonique dans la Section 4.2 nous ont permis de constater que la résolution des problèmes  $(PDU)$  et  $(PDF)$  dans  $\mathbb{A}$  allait nécessiter des conditions supplémentaires par rapport à celle du cas simplement connexe.

Nous allons énoncer deux résultats que l'on pourra voir comme l'extension des deux parties du Théorème 4.1.2.2 au cas annulaire.

#### 4.3.1 Résolution dans le cas réel

Nous résolvons ici entièrement le problème  $(PDU)$  dans  $\mathbb{A}$ . Commençons par donner la définition suivante.

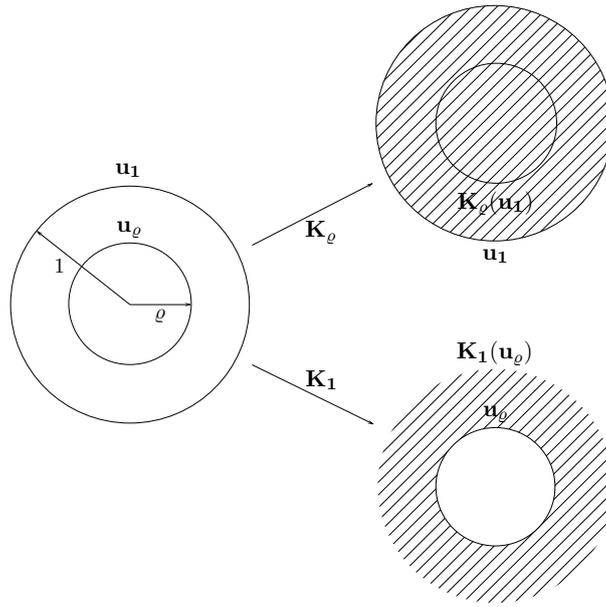
**Définition 4.3.1.1** *Soit  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant (1.1). On appelle  $\mathcal{U}_{\sigma}^p(\mathbb{A})$  le sous ensemble de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{A})$  des fonctions solutions de l'équation (1.2) pour la conductivité  $\sigma$  et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{A}$ .*

Considérons tout d'abord une donnée réelle sur le bord de l'anneau, soit  $u = (u_1, u_{\varrho}) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ , ainsi qu'une conductivité  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$ . Il existe de multiples possibilités pour trouver des extensions régulières de cette dernière à  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\varrho}}$ . Choisissons, pour fixer les idées, de définir  $\sigma_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  et  $\sigma_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\varrho}})$  comme dans la preuve du Théorème 4.1.3.1. Il est désormais possible de résoudre deux problèmes  $(PDU)$  avec le Théorème 4.1.2.2 : pour  $\mathbb{D}$  avec la donnée au bord  $u_1$  et la conductivité  $\sigma_i$  ainsi que pour  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\varrho}}$  avec la donnée au bord  $u_{\varrho}$  et la conductivité  $\sigma_e$ . Notons alors  $u_i$  et  $u_e$  les deux solutions respectives de ces deux problèmes de Dirichlet. On définit alors l'opérateur  $K_{\varrho} : L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) \rightarrow L_{\mathbb{R}}^p(\varrho\mathbb{T})$  tel que  $K_{\varrho}(u_1) = u_{i|_{\varrho\mathbb{T}}}$ . De la même manière, on définit l'opérateur  $K_1 : L_{\mathbb{R}}^p(\varrho\mathbb{T}) \rightarrow L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  tel que  $K_1(u_{\varrho}) = u_{e|_{\mathbb{T}}}$  (voir Figure 4.3).

Finalement on appelle  $K$  l'opérateur donné par

$$K = \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_{\varrho} & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) = L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}) \times L_{\mathbb{R}}^p(\varrho\mathbb{T}) . \quad (4.26)$$

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le résultat principal. Notons que celui-ci ne contient pas d'estimation de la norme de la solution du problème  $(PDU)$  mais que ce point est néanmoins traité ultérieurement avec la Proposition 4.3.2.1.

FIG. 4.3 – Fonctionnement des opérateurs  $K_\rho$  et  $K_1$ .

**Théorème 4.3.1.1** Soient  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant (1.1) et  $(u_1, u_\rho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . Il existe une unique fonction  $u \in \mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{A})$  telle que  $tr_{\mathbb{T}_\rho} u = u_\rho$  presque partout sur  $\mathbb{T}_\rho$  et  $tr_{\mathbb{T}} u = u_1$  presque partout sur  $\mathbb{T}$ .

*Preuve.* Nous reprenons l'ensemble des notations introduites à la suite de la Définition 4.3.1.1. On note aussi  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$ ,  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  et  $\nu_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  les conductivités associées à  $\sigma, \sigma_i$  et  $\sigma_e$  grâce à (1.6).

Comme  $\overline{\mathbb{D}_\rho} \subset \mathbb{D}$ , la relation (4.4) s'applique pour  $u_i$ . De plus, avec la continuité de l'opérateur trace [5], on a finalement pour tout  $l \in (1, \infty)$

$$\|tr_{\mathbb{T}_\rho} u_i\|_{W_{\mathbb{R}}^{1-1/l, l}(\mathbb{T}_\rho)} \leq C_i \|u_i\|_{W_{\mathbb{R}}^{1, l}(\mathbb{D}_\rho)} \leq C'_i \|u_1\|_{L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})}, \quad (4.27)$$

avec  $C_i(\rho, \sigma_i, l, p), C'_i(\rho, \sigma_i, l, p) > 0$ . A nouveau, comme  $\overline{\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}} \subset (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$ , le même type de résultat existe pour  $u_e$ , soit

$$\|tr_{\mathbb{T}} u_e\|_{W_{\mathbb{R}}^{1-1/l, l}(\mathbb{T})} \leq C_e \|u_e\|_{W_{\mathbb{R}}^{1, l}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})} \leq C'_e \|u_\rho\|_{L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}_\rho)}, \quad (4.28)$$

avec  $C_e(\rho, \sigma_i, l, p), C'_e(\rho, \sigma_i, l, p) > 0$ .

On note maintenant  $u = u_{i|\mathbb{A}} + u_{e|\mathbb{A}}$ , mais aussi  $f_i \in H_{\nu_i}^{p,0}(\mathbb{D})$  et  $f_e \in H_{\nu_e}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  les solutions de (PDF) données par le Théorème 4.1.2.2 et associées à  $u_i$  et  $u_e$ . On peut donc écrire  $u = Re(f_{i|\mathbb{A}}) + Re(f_{e|\mathbb{A}})$  ce qui implique que  $u \in Re(H_{\nu}^{p,0}(\mathbb{A}))$  car  $\nu_{e|\mathbb{A}} = \nu_{i|\mathbb{A}} = \nu$ . On a alors presque partout sur  $\partial\mathbb{A}$

$$\begin{pmatrix} tr_{\mathbb{T}} u \\ tr_{\mathbb{T}_\rho} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + u_{e|\mathbb{T}} \\ u_\rho + u_{i|\mathbb{T}_\rho} \end{pmatrix} = \left[ I + \begin{pmatrix} 0 & K_1 \\ K_\rho & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_\rho \end{pmatrix} = (I + K) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_\rho \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Ainsi

$$\text{Ran}(I + K) \subset \text{Re}(tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A})) \subset tr_{\partial\mathbb{A}} \mathcal{U}_{\sigma}^p(\mathbb{A}) . \quad (4.30)$$

Montrons que l'opérateur  $K$  est compact de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . D'après l'inégalité (4.27), l'opérateur  $K_{\varrho}$  est borné de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  dans  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/l,l}(\mathbb{T}_{\varrho})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . L'inégalité (4.28) implique quant à elle que l'opérateur  $K_1$  est borné de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}_{\varrho})$  dans  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/l,l}(\mathbb{T})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Ces propriétés sont en particulier vraies pour  $l = p$ . La compacité de l'injection  $W_{\mathbb{R}}^{1-1/p,p} \rightarrow L_{\mathbb{R}}^p$  [78, Thm. 1.4.3.2] permet alors de conclure que les opérateurs  $K_{\varrho}$ ,  $K_1$  sont compacts, de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}_{\varrho})$ , et de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T}_{\varrho})$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  respectivement. Nous allons maintenant voir que  $\text{Ker}(I + K) = \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est donné par la Définition 4.2.3.1. Choisissons en effet une paire  $(u_1, u_{\varrho}) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  telle que

$$(I + K) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_{\varrho} \end{pmatrix} = 0 .$$

Comme  $(u_1, u_{\varrho}) \in \text{Ker}(I + K)$ , on a presque partout sur  $\partial\mathbb{A}$

$$\text{Re} tr_{\partial\mathbb{A}} (f_i + f_e)|_{\mathbb{A}} = tr_{\partial\mathbb{A}} u = 0 .$$

Mais avec la propriété 5 de la Proposition 3.2.3.2, il vient que

$$(f_i + f_e)|_{\mathbb{A}} \equiv ic \quad \text{avec } c_1 \in \mathbb{R} . \quad (4.31)$$

Or on peut encore écrire

$$f_i + f_e = \underbrace{\left( f_i + \int_0^{2\pi} \text{Re} tr_{\mathbb{T}} f_e(e^{i\theta}) d\theta \right)}_{h_i} + \underbrace{\left( f_e - \int_0^{2\pi} \text{Re} tr_{\mathbb{T}} f_e(e^{i\theta}) d\theta \right)}_{h_e} .$$

Cette décomposition est bien celle fournie par le Théorème 4.1.3.1 puisque  $h_i \in H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$ ,  $h_e \in H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\varrho}})$  (rappelons que l'on a déjà  $f_e \in H_{\nu_e}^{p,0}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{\varrho}})$ ). Par unicité de cette décomposition, on en déduit au regard de (4.31) que

$$h_i = ic \quad \text{et} \quad h_e = 0 .$$

De la deuxième égalité ci-dessus, on obtient dans un premier temps que  $f_e$  est une constante réelle que l'on note  $c_2$ . La première égalité quant à elle donne après passage à la partie réelle

$$\text{Re} h_i = 0 \implies \text{Re} f_i = -c_2 ,$$

ce qui s'écrit encore

$$-u_{i|_{\mathbb{A}}} = c_2 = u_{e|_{\mathbb{A}}} .$$

Le passage aux traces sur  $\mathbb{T}$  et  $\mathbb{T}_{\varrho}$  montre donc bien que  $\text{Ker}(I + K) \subset \mathcal{S}$ . L'inclusion réciproque est quant à elle directe avec (4.29) et le fait que les fonctions constantes sont solutions de (1.2).

Le troisième théorème de F. Riesz [59, Thm. 1.15] indique, en notant  $r$  le nombre de Riesz de l'opérateur  $(I + K)$ , que

$$L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) = Ker (I + K)^r \oplus Ran (I + K)^r .$$

Prouvons que  $r = 1$ . Il est suffisant de prouver que

$$Ker (I + K) = Ker (I + K)^2 .$$

L'inclusion  $Ker (I + K) \subset Ker (I + K)^2$  est évidente. Soit donc  $x \in Ker (I + K)^2$ . On a que  $u = (I + K)x \in Ker (I + K) \cap Ran (I + K)$ . Or on a montré que  $Ker (I + K) = \mathcal{S}$  et aussi constaté que  $Ran (I + K) \subset Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A}))$  avec (4.30). Donc  $u \in \mathcal{S} \cap Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A}))$ . Mais la Proposition 4.2.3.1 nous indique que  $\mathcal{S} \cap Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A})) = \{0\}$ . Finalement  $u = 0$  ce qui signifie que  $x \in Ker (I + K)$  prouvant ainsi que  $Ker (I + K)^2 \subset Ker (I + K)$ . On a donc bien  $r = 1$  et par conséquent

$$L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A}) = \mathcal{S} \oplus Ran (I + K) . \tag{4.32}$$

Pour prouver l'unicité et l'existence annoncée dans le théorème, remarquons dans un premier temps que toute fonction appartenant à  $\mathcal{S}$  est bien la trace d'un unique élément de  $\mathcal{U}_{\sigma}^p(\mathbb{A})$  avec [78, Thm. 2.4.2.5]. Il reste alors à régler le cas des éléments de  $Ran (I + K)$ . La suite d'inclusions (4.30) assurent l'existence. L'unicité provient quant à elle de [59, Thm. 1.16] puisque ce dernier assure que la restriction de l'opérateur  $(I + K)$  à son image est bijective. ■

Remarquons que la décomposition (4.32) nous indique que tout élément de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  se décompose de manière unique en la somme d'éléments de  $\mathcal{S}$  et de  $Ran (I + K)$ . C'est donc en particulier le cas des éléments de  $Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A}))$  cependant que la Proposition 4.2.3.1 indiquent que les éléments de  $\mathcal{S}$  n'admettent pas de conjuguées  $\sigma$ -harmoniques. Par conséquent, on a directement le résultat suivant.

**Corollaire 4.3.1.1**

$$Ran (I + K) = Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A})) .$$

Le Théorème 4.3.1.1, et surtout la décomposition (4.32), révèlent la structure de l'espace  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  quant à l'éventuelle possibilité de conjuguer ses éléments. Cette décomposition est bien entendu à comparer avec celle du Corollaire 4.1.2.2 et permet de comprendre pourquoi l'opérateur de conjugaison  $\mathcal{H}_{\nu}$  n'existe pas toujours dans le cas doublement connexe. Les preuves fournies dans cette section nous permettent de préciser ces observations. En effet, comme  $Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A}))$  et  $\mathcal{S}$  sont fermés dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ , on a par des arguments classiques le

**Corollaire 4.3.1.2** *L'espace  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})/Re (tr_{\partial\mathbb{A}} H_{\nu}^p(\mathbb{A}))$  des éléments de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  n'admettant pas de conjuguée  $\sigma$ -harmonique est de dimension 1. Ce dernier est isomorphe à  $\mathcal{S}$ .*

L'espace  $\mathcal{S}$  constitue donc un supplémentaire topologique de  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}} H_v^p(\mathbb{A}))$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$ . De plus tout autre supplémentaire topologique de  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}} H_v^p(\mathbb{A}))$  dans  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  est isomorphe à  $\mathcal{S}$ . On peut illustrer ceci grâce aux exemples fournis dans les Sections 4.2.2 et 4.2.3. Notons en effet  $\tilde{\mathcal{S}}_C$  l'espace des fonctions  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  tels que les éléments  $v$  qui leur sont associés via les équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4) satisfont dans  $\mathbb{A}$  pour tout  $\varrho \leq r \leq 1$

$$v(r, 2\pi) - v(r, 0) = C .$$

Alors  $\mathcal{S}$  et  $\tilde{\mathcal{S}}_C$  sont isomorphes.

**Remarque 4.3.1.1** *En notant  $\mathcal{V}_\sigma^p(\mathbb{A})$  le sous ensemble de  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{A})$  des fonctions solutions de l'équation (1.5) pour la conductivité  $\sigma^{-1}$  et satisfaisant une condition de Hardy d'ordre  $p$  sur  $\mathbb{A}$ , il serait possible de résoudre l'équivalent du problème (PDu) dans cet espace. Nous le signalons simplement, les démonstrations étant identiques. Consécutivement, les Corollaires 4.3.1.1 et 4.3.1.2 restent vrais si formulés de façon adaptée aux solutions de l'équation (1.5).*

### 4.3.2 Résolution dans le cas complexe

Nous disposons désormais des résultats nécessaires à la résolution de  $(PDf)$  dans  $\mathbb{A}$ . Néanmoins, avant d'énoncer le résultat principal de cette section, il convient de pouvoir caractériser de manière explicite les éléments de  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  n'admettant pas de conjuguée  $\sigma$ -harmonique. Dans cet esprit, commençons par donner le résultat suivant qui fournit une définition rigoureuse de la dérivée normale sur  $\mathbb{T}$  d'une fonction de  $\mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{D})$ .

**Lemme 4.3.2.1** *Pour tout  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$ , il existe une unique distribution  $\partial_n U \in W^{-1,p}(\mathbb{T})$  telle que*

$$\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U \varphi := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \sigma \nabla U \cdot \nabla \varphi < \infty , \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}) , \quad (4.33)$$

où  $U \in \mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{D})$  est l'unique solution de (1.2) vérifiant  $tr_{\mathbb{T}} U = u$ .

*Preuve.* On sait avec le Théorème 4.1.2.2 que  $U|_{\mathbb{D}_\varepsilon} \in W_{\mathbb{R}}^{1,l}(\mathbb{D}_\varepsilon)$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Dès lors, la dérivée normale  $\partial_n U$  est classiquement définie sur  $\mathbb{T}_\varepsilon$  comme l'unique membre de l'espace dual  $W_{\mathbb{R}}^{-1/l,l}(\mathbb{T}_\varepsilon)$  vérifiant la relation

$$\int_{\mathbb{T}_\varepsilon} \sigma \partial_n U \varphi = \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \sigma \nabla U \cdot \nabla \varphi , \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}) . \quad (4.34)$$

Remarquons aussi que la conjuguée  $\sigma$ -harmonique  $v$  de  $u$  existe et appartient à  $L_{\mathbb{R}}^p(\mathbb{T})$  avec le Théorème 4.2.1.1. On note alors  $V$  la solution de  $\nabla \cdot (\sigma^{-1} \nabla V) = 0$  dans  $\mathbb{D}$  telle que  $tr_{\mathbb{T}} V = v$ . La relation (4.34) peut encore s'écrire, grâce aux équations de Cauchy-Riemann,

$$\int_{\mathbb{T}_\varepsilon} \sigma \partial_n U \varphi = - \int_{\mathbb{T}_\varepsilon} V \partial_t \varphi = \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \sigma \nabla U \cdot \nabla \varphi . \quad (4.35)$$

Maintenant, la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2 indique que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} |v(e^{i\theta}) - V(\varepsilon e^{i\theta})|^p d\theta = 0 ,$$

si bien qu'en appliquant l'inégalité de Hölder et en passant à la limite dans (4.35), on a que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \sigma \nabla U \cdot \nabla \varphi = - \int_{\mathbb{T}} v \partial_t \varphi < \infty .$$

La dérivée normale de  $U$  comme élément de  $W^{-1,p}(\mathbb{T})$  est alors définie de manière unique par

$$\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\mathbb{D}_\varepsilon} \sigma \nabla U \cdot \nabla \varphi < \infty .$$

■

Notons maintenant que le résultat du Lemme 4.3.2.1 se généralise au cas doublement connexe. En effet, soit  $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{A})$ . D'après la relation (4.32), on a que  $u$  se décompose de manière unique en

$$u = u_h + u_s , \quad u_h \in \text{Retr}_{\partial\mathbb{A}} H^p_{\nu}(\mathbb{A}) \quad \text{et} \quad u_s \in \mathcal{S} .$$

Désignons alors par  $U_h$  et  $U_s$  les fonctions de  $\mathcal{U}^p_{\sigma}(\mathbb{A})$  ayant pour trace respective  $u_h$  et  $u_s$  (l'existence de ces fonctions est justifiée par le Théorème 4.3.1.1 ainsi que par [78, Thm. 2.4.2.5]). On sait aussi, avec le Théorème 4.1.3.1 que

$$U_h = U_h^{int} + U_h^{ext} , \quad U_h^{int} \in H^p_{\nu_i}(\mathbb{D}) \quad \text{et} \quad U_h^{ext} \in H^p_{\nu_e}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) .$$

Finalement  $U = U_h^{int} + U_h^{ext} + U_s$  et il est possible de donner un sens à la dérivée normale de  $U$  sur  $\partial\mathbb{A}$ . En effet, avec le Théorème 4.1.2.2, on a que  $U_h^{int}$  et  $U_h^{ext}$  sont de régularité  $W^{1,l}_{\mathbb{R}}$  pour tout  $l \in (1, \infty)$  au voisinage de  $\mathbb{T}_\rho$  et  $\mathbb{T}$  respectivement, ce qui permet de définir leur dérivée normale au sens classique sur  $\mathbb{T}_\rho$  et  $\mathbb{T}$  respectivement. Mais on peut aussi définir la dérivée normale de  $U_h^{int}$  sur  $\mathbb{T}$  (resp. de  $U_h^{ext}$  sur  $\mathbb{T}_\rho$ ) avec le Lemme 4.3.2.1. Ceci permet finalement de donner un sens à la dérivée normale de  $U_h$  sur  $\partial\mathbb{A}$  et de conclure puisque la régularité de  $u_s$ , et donc a fortiori celle de  $U_s$ , garantissent une définition de la dérivée normale.

Introduisons maintenant une définition supplémentaire.

**Définition 4.3.2.1** *On note  $\mathcal{U}^{p,0}_{\sigma}(\mathbb{A})$  le sous ensemble de  $\mathcal{U}^p_{\sigma}(\mathbb{A})$  composé des fonctions  $U$  satisfaisant la condition de compatibilité  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U = 0$ . Par analogie, on note aussi  $\mathcal{V}^{p,0}_{\sigma}(\mathbb{A})$  le sous ensemble de  $\mathcal{V}^p_{\sigma}(\mathbb{A})$  composé des fonctions  $V$  satisfaisant la condition de compatibilité  $\int_{\mathbb{T}} \sigma^{-1} \partial_n V = 0$ .*

Nous sommes désormais en mesure d'énoncer le résultat suivant qui fournit la réponse au problème ( $PDF$ ) dans le cas doublement connexe.

**Théorème 4.3.2.1** Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  associée à  $\nu$  par (1.6). Soient aussi  $u = (u_1, u_\rho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  et  $U \in \mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{A})$  la solution de  $(PDu)$  associée à  $u$ . Alors, si  $U \in \mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$ , il existe une unique fonction  $f \in H_\nu^p(\mathbb{A})$  telle que

$$Re(tr_{\mathbb{T}} f) = u_1 \quad p.p \text{ sur } \mathbb{T} \quad \text{et} \quad Re(tr_{\mathbb{T}_\rho} f) = u_\rho \quad p.p \text{ sur } \mathbb{T}_\rho .$$

De plus, il existe  $c = c_{p,\sigma} > 0$  telle que

$$\|f\|_{H_\nu^p(\mathbb{A})} \leq c_{p,\sigma} \|u\|_{L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})} , \quad (4.36)$$

et on a  $f \in W_{loc}^{1,l}(\mathbb{A})$  pour tout  $l \in (1, \infty)$ . Si par contre  $U \notin \mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$ , alors le problème  $(PDf)$  n'admet pas de solution.

*Preuve.* Soit  $u = (u_1, u_\rho) \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  vérifiant la condition de compatibilité  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U = 0$ . D'après la discussion de la Section 4.2.2, l'unique fonction  $U$  solution de  $(PDu)$  et associée à  $u$ , fournie par le Théorème 4.3.1.1, appartient à  $Re(H_\nu^p(\mathbb{A})) \subset \mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{A})$ . Notons  $f \in H_\nu^p(\mathbb{A})$  telle que  $Re(f) = U$ . L'appartenance de  $f$  à  $H_\nu^p(\mathbb{A})$  assure que la fonction  $V = Im(f)$  est bien définie dans  $\mathbb{A}$ , à une constante additive près, comme une fonction monovaluée. En imposant à  $v = tr_{\partial\mathbb{A}} V$  la normalisation (3.2), on obtient de plus l'unicité de  $f$ . Pour continuer la preuve, il est suffisant de considérer les solutions de l'équation (3.4) d'après le Corollaire 3.2.2.1. En fait, par les mêmes arguments que ceux exposés dans la preuve du [25, Thm. 4.4.1.2], à laquelle nous renvoyons le lecteur pour plus de détails, nous obtenons que l'unique fonction  $w \in G_\alpha^p(\mathbb{A})$  associée à  $f$  avec (3.6) vérifie

$$\|tr_{\partial\mathbb{A}} w\|_{L^p(\partial\mathbb{A})} \leq c'_{p,\sigma} \|\sigma^{1/2} u\|_{L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})} .$$

L'inégalité (4.36) s'obtient finalement grâce à (3.7), (1.1) et la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2. Finalement  $f \in W_{loc}^{1,l}(\mathbb{A})$  est aussi une conséquence directe du Théorème 3.2.3.1 et de (3.7). La preuve se conclut en remarquant que si  $\int_{\mathbb{T}} \sigma \partial_n U \neq 0$ , alors  $U$  n'admet pas de conjuguée  $\sigma$ -harmonique (voir encore la Section 4.2.2). ■

La première partie du Théorème 4.1.2.2 peut maintenant être généralisée au cas annulaire sans difficulté. Ainsi, sur le même schéma que celui utilisé pour la preuve du Théorème 4.1.2.2, on a immédiatement la proposition suivante :

**Proposition 4.3.2.1** Soient  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$ ,  $u \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\mathbb{A})$  et  $U \in \mathcal{U}_\sigma^p(\mathbb{A})$  telle que  $tr_{\partial\mathbb{A}} U = u$  presque partout sur  $\partial\mathbb{A}$ . Alors si  $U \in \mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$ , on a que pour tout sous-ensemble  $\mathcal{K}$  de  $\mathbb{A}$  tel que  $\overline{\mathcal{K}} \subset \mathbb{A}$  et tout  $l \in (1, +\infty)$ , il existe  $c = c(\mathcal{K}, l, \sigma, p) > 0$  tel que

$$\|u\|_{W^{1,l}(\mathcal{K})} \leq c \|(u_1, u_\rho)\|_{L^p(\partial\mathbb{A})} .$$

Ces résultats permettent d'étendre rigoureusement la notion de conjugaison  $\sigma$ -harmonique. On peut en effet affirmer maintenant que l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  (voir Section 4.2.1) donné par

$$\mathcal{H}_\nu : \mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A}) \quad \rightarrow \quad \mathcal{V}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$$

$$Re(tr f) \quad \mapsto \quad Im(tr f)$$

est bien défini. A nouveau l'unicité de  $\mathcal{H}_\nu$  provient du fait que les fonctions  $v$  dans  $\mathcal{V}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$  sont normalisées telles que  $\int_{\partial\mathbb{A}} v = 0$ .

Nous concluons cette suite de résultats généralisant ceux obtenus dans le cas simplement connexe en mettant l'accent sur le fait que les propriétés de bornitude de l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  énoncés dans le Théorème 4.2.1.1 restent vraies dans le cas annulaire avec le corollaire suivant :

#### Corollaire 4.3.2.1

*L'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$  est borné de  $\mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$  dans  $\mathcal{V}_\sigma^{p,0}(\mathbb{A})$ .*

Nous renvoyons à nouveau le lecteur à [25] pour la preuve dans le cas simplement connexe sachant que celle-ci s'étend ici naturellement au cas doublement connexe. Ajoutons qu'un véritable analogue du Théorème 4.2.1.1 aurait pu être formulé moyennant l'utilisation de données au bord présentant plus de régularité. Néanmoins, réaliser ceci aurait nécessiter l'introduction de nouvelles notations ce que nous n'avons pas souhaiter faire par soucis de lisibilité et de clarté.

La résolution des problèmes ( $PDu$ ) et surtout ( $PDf$ ) constitue une des étapes clef pour la régularisation du problème de Cauchy ( $PC$ ) présenté dans la Section 1.2. Toutefois ces derniers ne suffisent pas dans la mesure où nous avons encore besoin d'énoncer des propriétés de densité, ce qui va être fait dans le Chapitre 5. Terminons juste ici en faisant remarquer que les Théorèmes 4.3.1.1 et 4.3.2.1 s'étendent sans problème aux cas de domaines multiplement connexes.

**Remarque 4.3.2.1** *Mentionnons l'existence de résultats récents [64] sur un problème de Dirichlet pour l'équation (1.7) dont la formulation diffère de la notre, à savoir trouver une (l'unique) fonction de  $H_p^p(\mathbb{A})$  à partir de la prescription de sa partie réelle sur  $\mathbb{T}$  et de sa partie imaginaire sur  $\mathbb{T}_\varrho$ .*

# Chapitre 5

## Résultats de densité

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Densité des traces sur un sous ensemble strict du bord . . .</b>	<b>92</b>
5.1.1	Cas simplement connexe . . . . .	92
5.1.2	Cas doublement connexe . . . . .	93
<b>5.2</b>	<b>Vers le problème extrémal borné . . . . .</b>	<b>104</b>
5.2.1	Situation idéale : données compatibles . . . . .	104
5.2.2	Problème de Cauchy mal posé pour des données non compatibles	105
5.2.3	Formalisation du problème extrémal borné . . . . .	106

---

Ce chapitre est consacré à l'étude de certaines propriétés de densité des espaces de Hardy généralisés  $H_v^p(\Omega)$  pour un domaine ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  simplement ou doublement connexe. A nouveau, seuls les cas  $\Omega = \mathbb{D}$  et  $\Omega = \mathbb{A}$  seront traités. Formalisons le problème étudié afin d'introduire les notations qui nous seront utiles tout au long de ce chapitre.

Soit donc  $I \subset \partial\Omega$  une partie du bord de  $\Omega$  telle que son complémentaire  $J = \partial\Omega \setminus I$  soit de mesure strictement positive. Rappelons que dans le cas doublement connexe  $\Omega = \mathbb{A}$ , les configurations de l'intervalle  $I$  seront restreintes à celles de l'hypothèse  $(H_{I,J})$  donnée dans la Section 1.2 (voir Figure 1.1). Ces cas sont suffisants pour envisager la résolution du problème de Cauchy dans le cadre de l'application qui en sera faite dans les Chapitres 8 et 9. Le problème que nous allons étudier et que nous noterons désormais  $(PDens)$  est le suivant :

$(PDens)$  : Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Est-il vrai que  $(tr H_v^p(\Omega))|_I$  est dense dans  $L^p(I)$  ?

Autrement dit, est-il possible d'approcher arbitrairement près une fonction de  $L^p(I)$  par la restriction à  $I$  de fonctions de  $H_v^p(\Omega)$  ? Cette question est une étape préliminaire à la résolution du problème de Cauchy visant à approximer des données fournies sur  $I$  par des fonctions solutions de (1.7) tout en leur garantissant un comportement non divergent sur  $J$ . Remarquons néanmoins que la résolution de  $(PDens)$  se fera sans qu'aucune contrainte ne soit appliquée sur la partie  $J$ .

Ce chapitre est organisé d'une manière assez similaire à celle du Chapitre 4. En effet, nous conservons, dans la présentation des résultats, la dualité existante entre les cas

---

simplement et doublement connexe. Ceci se justifie par le fait qu'il n'est pas possible de résoudre (*PDens*) dans le cas doublement connexe à partir d'une simple généralisation de la résolution dans le cas simplement connexe. Le passage de l'un à l'autre relève en effet de difficultés techniques qui seront surmontées avec le Théorème 5.1.2.1.

Nous indiquerons donc dans un premier temps la résolution de (*PDens*) dans le cas  $\Omega = \mathbb{D}$  et  $I \subsetneq \mathbb{T}$ . Il s'agit d'un résultat obtenu dans [25]. Nous en rappellerons une preuve seulement dans le cadre des espace de Hardy classiques, c'est-à-dire lorsque  $\nu = 0$ . En effet, cet exercice aura l'avantage de nous permettre de rappeler certains résultats classiques de dualité dans les espaces  $H^p(\Omega)$  dont nous ferons encore usage dans la résolution de (*PDens*) pour le cas  $\Omega = \mathbb{A}$ .

Enfin nous constaterons que la résolution de (*PDens*) dans  $\mathbb{D}$  ou bien  $\mathbb{A}$  ne permet d'apporter qu'une réponse partielle au problème de Cauchy. On prouvera en effet que le fait de vouloir approximer au plus près une donnée fournie sur le bord  $I$  par des éléments de  $(tr H^p_\nu(\Omega))|_I$  impliquera, dans l'hypothèse où la donnée au bord n'est pas déjà la trace d'une fonction de  $H^p_\nu(\Omega)$ , un comportement divergent de l'approximant sur la partie  $J$  où on ne dispose pas de mesures. Pour venir à bout de cet obstacle, nous serons naturellement conduits vers le concept de problème extrémal borné que nous introduirons donc dans ce chapitre, mais dont la résolution, à la fois théorique mais aussi constructive dans le cas hilbertien ( $p = 2$ ), seront envisagées dans les Chapitres 6 et 7.

## 5.1 Densité des traces sur un sous ensemble strict du bord

Il est important de voir qu'une réponse positive au problème (*PDens*) ne peut être envisagée que sur des sous-ensembles stricts  $I$  du bord  $\partial\Omega$ . En effet, l'espace  $tr_{\partial\Omega} H^p_\nu(\Omega)$  est clairement strictement inclus dans  $L^p(\partial\Omega)$  en plus d'y être fermé avec la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2. Ceci implique que pour qu'une fonction de  $L^p(\partial\Omega)$  puisse être vue comme la limite d'une suite de fonctions de  $tr_{\partial\Omega} H^p_\nu(\Omega)$ , il est nécessaire que celle-ci soit déjà la trace d'une fonction de  $H^p_\nu(\Omega)$ .

### 5.1.1 Cas simplement connexe

Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, regardons dans un premier temps le cas holomorphe qui est simple à traiter et permet de fixer les idées. Soit donc  $1 < q < \infty$  l'exposant conjugué de  $p$ . En regardant  $L^p(\mathbb{T})$  et  $L^q(\mathbb{T})$  comme des espaces vectoriels complexes, définissons un produit de dualité sur  $L^p(\mathbb{T}) \times L^q(\mathbb{T})$  avec

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) d\theta . \quad (5.1)$$

D'après le théorème de représentation de Riesz, ce produit de dualité identifie  $L^q(\mathbb{T})$  avec le dual de  $L^p(\mathbb{T})$ . Par ailleurs, avec ce produit de dualité, on a encore

$$(tr H^p(\mathbb{D}))^\perp = e^{i\theta}(tr H^q(\mathbb{D})) .$$

En effet, rappelons que toute fonction  $f \in tr H^p(\mathbb{D})$  admet un développement en série sur  $\mathbb{T}$  de la forme (voir Théorème 2.1.3.1)

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e^{in\theta} .$$

Ainsi une fonction  $g \in L^q(\mathbb{T})$  appartient à l'orthogonal de  $tr H^p(\mathbb{D})$  si et seulement si

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} g(e^{i\theta}) d\theta = 0 , \quad n \in \mathbb{N} . \quad (5.2)$$

En développant  $g$  en série de Fourier, la relation (5.2) implique que tous les coefficients de Fourier de  $g$  d'indices  $n \leq 0$  sont nuls.

Forts de cette remarque, regardons ce qui se passe lorsqu'on cherche à résoudre le problème (*PDens*) dans les espaces de Hardy classiques. Munissons nous donc d'une fonction  $g \in L^q(I)$  orthogonale à  $(tr H^p(\mathbb{D}))|_I$  et considérons la fonction  $G = (g \vee 0)$  définie sur tout  $\mathbb{T}$ . On a ainsi pour toute  $f \in \dot{H}^p(\mathbb{D})$

$$\langle f, G \rangle_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})(g(e^{i\theta}) \vee 0) d\theta = 0 .$$

D'après ce qui a été dit juste au-dessus, cela signifie en particulier que la fonction  $G \in H^q$ . Comme elle est identiquement nulle sur  $J = \mathbb{T} \setminus I$ , on en conclut avec le Théorème 2.1.2.1 que  $G$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{D}$ , donc *a fortiori*  $g$  aussi. En conséquence du théorème de Hahn-Banach, il vient finalement que  $(tr H^p(\mathbb{D}))|_I$  est dense dans  $L^p(I)$ .

En regardant cette fois-ci les espaces  $L^p(\mathbb{T})$  et  $L^q(\mathbb{T})$  comme des espaces vectoriels réels et en utilisant comme produit de dualité

$$Re \langle f, g \rangle_{\mathbb{T}} = Re \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) g(e^{i\theta}) d\theta \right) , \quad (5.3)$$

les arguments utilisés pour la résolution de (*PDens*) dans le cadre des espaces de Hardy classiques restent identiques. De là, il est possible d'étendre ce résultat aux espaces de Hardy généralisés [25, Thm. 4.5.2.1] :

**Théorème 5.1.1.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $I \subsetneq \mathbb{T}$  tel que  $J = \mathbb{T} \setminus I$  soit de mesure strictement positive. Alors  $(tr H_{\nu}^p(\mathbb{D}))|_I$  est dense dans  $L^p(I)$ .*

Nous renvoyons le lecteur à [25] pour la preuve dans le cas général  $\nu \neq 0$ . Comme nous allons le constater dans la section suivante, l'extension de ce résultat au cas annulaire n'est pas triviale.

### 5.1.2 Cas doublement connexe

Cette section est consacrée à la preuve de la version annulaire du Théorème 5.1.1.1, soit

**Théorème 5.1.2.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $I \subsetneq \partial\mathbb{A}$  satisfaisant  $(H_{I,J})$ . Alors  $(tr H_{\nu}^p(\mathbb{A}))|_I$  est dense dans  $L^p(I)$ .*

La démonstration de ce résultat est longue et fait appel à plusieurs résultats intermédiaires. Remarquons que, comme dans la Section 5.1.1, le cas holomorphe  $\nu = 0$  peut être isolé de par sa relative simplicité. Nous n'en donnons pas les détails, mais signalons que cette dernière fait principalement appel aux propriétés de densité des polynômes trigonométriques. Le lecteur intéressé pourra se référer à [54, Thm. 4.1].

Pour la démonstration du Théorème 5.1.2.1, nous distinguons deux cas :

$$\underline{\text{Cas 1}} : I \subsetneq \mathbb{T} \text{ ou } I \subsetneq \mathbb{T}_\varrho \quad | \quad \underline{\text{Cas 2}} : I = \mathbb{T} \text{ ou } I = \mathbb{T}_\varrho$$

La démonstration du Cas 1 est plus rapide que celle du Cas 2 et ne nécessite pas de résultat intermédiaire. Nous commençons donc par celle-ci.

**Preuve du Théorème 5.1.2.1 dans le Cas 1.**

Supposons que  $I \subsetneq \mathbb{T}$  et que  $\nu_i$  et  $\nu_e$  sont définies comme dans la preuve du Théorème 4.1.3.1. Ce dernier permet alors d'écrire que

$$H_\nu^p(\mathbb{A}) = H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}) \oplus H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}) . \quad (5.4)$$

Il suffit alors de passer à la trace sur  $\mathbb{T}$  ou bien sur  $\mathbb{T}_\varrho$  des deux côtés de l'égalité (5.4) et de conclure directement avec le Théorème 5.1.1.1. ■

Il est clair que les arguments qui viennent d'être utilisés pour prouver le Théorème 5.1.2.1 dans le Cas 1 ne s'appliquent plus dans le Cas 2. En effet, supposons cette fois-ci que  $I = \mathbb{T}$ . On sait que  $\text{tr}_{\mathbb{T}} H_{\nu_i}^p(\mathbb{D})$  est un sous espace fermé de  $L^p(\mathbb{T})$  avec la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2. Par conséquent la décomposition (5.4) ne permet plus de conclure. Le même raisonnement tient encore là pour  $I = \mathbb{T}_\varrho$ .

En fait, pour achever la démonstration du Théorème 5.1.2.1 dans le Cas 2, nous allons recourir au

**Théorème 5.1.2.2** *Soit  $\nu_i \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D})$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Alors  $\left( H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}) \right)_{|\mathbb{D}_\varrho}$  est dense dans  $H_{\nu_i}^p(\mathbb{D}_\varrho)$ .*

La preuve de ce résultat sera donnée plus loin. **Supposons pour l'instant comme acquis le contenu du Théorème 5.1.2.2.** On peut dès lors achever la démonstration du Théorème 5.1.2.1.

**Preuve du Théorème 5.1.2.1 dans le Cas 2.**

Supposons que  $I = \mathbb{T}_\varrho$ . Par hypothèse  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A})$  et satisfait  $(\kappa)$ . Construisons des conductivités  $\nu_i$  et  $\nu_e$  régulières sur  $\mathbb{D}_\varrho$  et  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_\varrho$  respectivement en suivant cette fois les indications de la Remarque 4.1.3.1. Choisissons ainsi pour  $\nu_e$  une extension régulière de  $\nu$  à  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_\varrho$  et y satisfaisant une condition de type  $(\kappa)$ . On définit alors  $\nu_i$  sur  $\mathbb{D}_\varrho$  comme la fonction réfléchie de  $\nu_e$  par rapport au cercle  $\mathbb{T}_\varrho$ . On note alors pour tout  $z \in \mathbb{D}_\varrho$

$$\nu_{i|\mathbb{D}_\varrho} = \check{\nu}_e^\varrho \quad \text{avec} \quad \check{\nu}_e^\varrho(z) = \nu_e\left(\frac{\varrho^2}{z}\right) .$$

Il est clair que  $\check{\nu}_e^g$  vérifie aussi une condition de type  $(\kappa)$  sur  $\mathbb{D}_\rho$ . D'après le Théorème 4.1.3.1 réécrit avec les nouvelles conductivités et après restriction à  $\mathbb{T}_\rho$ , on a

$$(tr H_\nu^p(\mathbb{A}))|_{\mathbb{T}_\rho} = (H_{\check{\nu}_e^g \vee \nu}^p(\mathbb{D}))|_{\mathbb{T}_\rho} \oplus tr_{\mathbb{T}_\rho} H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho}) , \quad (5.5)$$

cependant que la Proposition 4.1.3.1 nous fournit

$$L^p(\mathbb{T}_\rho) = tr_{\mathbb{T}_\rho} H_{\check{\nu}_e^g}^p(\mathbb{D}_\rho) \oplus tr_{\mathbb{T}_\rho} H_{\nu_e}^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho}) . \quad (5.6)$$

Or le Théorème 5.1.2.2 nous indique que  $(H_{\check{\nu}_e^g \vee \nu}^p(\mathbb{D}))|_{\mathbb{D}_\rho}$  est dense dans  $H_{\check{\nu}_e^g \vee \nu}^p(\mathbb{D}_\rho) = H_{\check{\nu}_e^g}^p(\mathbb{D}_\rho)$ , la dernière égalité se justifiant par le fait que  $(\check{\nu}_e^g \vee \nu)|_{\mathbb{D}_\rho} = \check{\nu}_e^g$ . L'application trace sur  $\mathbb{T}_\rho$  étant continue, il vient finalement que

$$(H_{\check{\nu}_e^g \vee \nu}^p(\mathbb{D}))|_{\mathbb{T}_\rho} \text{ est dense dans } tr_{\mathbb{T}_\rho} H_{\check{\nu}_e^g}^p(\mathbb{D}_\rho) .$$

Ceci permet alors de conclure au regard des égalités (5.5) et (5.6). Le cas  $I = \mathbb{T}$  se traite de la même manière. ■

Le Théorème 5.1.2.1 est de cette façon complètement prouvé. Toutefois nous n'avons pas encore démontré le Théorème 5.1.2.2 sur lequel s'appuie la preuve du Théorème 5.1.2.1 dans le **Cas 2. Le reste de cette section est donc entièrement dédié à la preuve du Théorème 5.1.2.1.**

Faisons tout d'abord remarquer que nous n'allons pas directement prouvé le Théorème 5.1.2.2 mais plutôt son analogue dans les espaces  $G_\alpha^p(\mathbb{A})$ . On a déjà constaté avec le Corollaire 3.2.2.1 que les propriétés fonctionnelles des éléments de  $G_\alpha^p(\mathbb{A})$  s'exportaient aux éléments de  $H_\nu^p(\mathbb{A})$ , et réciproquement. Le résultat auquel nous portons notre attention dorénavant est le suivant :

**Théorème 5.1.2.3** *Soit  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$ . Alors  $(G_\alpha^p(\mathbb{D}))|_{\mathbb{D}_\rho}$  est dense dans  $G_\alpha^p(\mathbb{D}_\rho)$ .*

Avant de donner la démonstration de ce résultat, nous introduisons quelques notations et prouvons trois lemmes.

Soit donc toujours  $1 < q < \infty$  l'exposant conjugué de  $p$ , c'est-à-dire tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . En regardant cette fois-ci  $L^p(\mathbb{D})$  et  $L^q(\mathbb{D})$  comme des espaces vectoriels complexes, définissons de manière classique un produit de dualité sur  $L^p(\mathbb{D}) \times L^q(\mathbb{D})$  par la formule

$$\langle f, g \rangle_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} f(z) \overline{g(z)} dz \wedge d\bar{z} . \quad (5.7)$$

Notons que le crochet de dualité est cette fois-ci indicé par  $\mathbb{D}$  pour notifier qu'il s'agit ici d'intégrales de surface. Cette notation est introduite afin de ne pas créer de conflit avec les précédentes.

Soient maintenant  $h \in L^p(\mathbb{D})$  et  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$ . Rappelons qu'avec la Définition 3.2.3.1 et la formule (3.14), on a

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \frac{\alpha(\zeta) \overline{h(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \begin{cases} \mathcal{T}_\alpha h(z) , & z \in \mathbb{C} \\ \mathcal{T}_\alpha h(z) , & z \in \mathbb{D} : \mathcal{T}_\alpha h = (\mathcal{T}_\alpha h)|_{\mathbb{D}} \end{cases} .$$

On rappelle que  $T_\alpha$  et  $\mathcal{T}_\alpha$  sont anti-linéaires pour la structure d'espace vectoriel complexe de  $L^p(\mathbb{D})$ . Notons alors  $T_\alpha^* : L^q(\mathbb{D}) \rightarrow L^q(\mathbb{D})$  l'opérateur adjoint de  $T_\alpha : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^p(\mathbb{D})$ , soit l'opérateur tel que, pour  $h \in L^p(\mathbb{D})$  et  $g \in L^q(\mathbb{D})$ ,

$$\langle T_\alpha h, g \rangle_{\mathbb{D}} = \langle T_\alpha^* g, h \rangle_{\mathbb{D}} .$$

Cet opérateur adjoint est obtenu avec le lemme suivant.

**Lemme 5.1.2.1** *L'adjoint de  $T_\alpha$  est l'opérateur  $T_\alpha^* = -\alpha T_1$ .*

*Preuve.* Il suffit d'appliquer le théorème de Fubini. Soient donc  $h \in L^p(\mathbb{D})$  et  $g \in L^q(\mathbb{D})$ . On a

$$\begin{aligned} \langle T_\alpha^* g, h \rangle_{\mathbb{D}} = \langle T_\alpha h, g \rangle_{\mathbb{D}} &= -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{D}} \left( \iint_{\mathbb{D}} \frac{\alpha(\xi) \overline{h(\xi)}}{\xi - z} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) \overline{g(z)} dz \wedge d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{D}} \left( \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{g(z)}}{\xi - z} dz \wedge d\bar{z} \right) \alpha(\xi) \overline{h(\xi)} d\xi \wedge d\bar{\xi} \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{D}} \left( -\alpha(\xi) \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{g(z)}}{z - \xi} dz \wedge d\bar{z} \right) \overline{h(\xi)} d\xi \wedge d\bar{\xi} \end{aligned}$$

et donc finalement, on a la relation

$$T_\alpha^* g = -\alpha T_1 g. \quad \blacksquare$$

Notons maintenant  $\alpha_\rho \in L^\infty(\mathbb{D})$  la fonction qui vaut 0 sur  $\mathbb{D}_\rho$  et  $\alpha$  sur  $\mathbb{A}$ . Il est clair que l'image de l'opérateur  $T_{\alpha_\rho}$  est composée de fonctions dont la restriction à  $\mathbb{D}_\rho$  est holomorphe et appartient de plus à l'espace  $W^{1,p}(\mathbb{D}_\rho)$  avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1. On en déduit avec la Proposition 4.1.1.1 que l'image de  $T_{\alpha_\rho}$  appartient à l'espace de Hardy classique  $H^p(\mathbb{D}_\rho)$ .

Introduisons enfin deux nouveaux opérateurs. On note tout d'abord

$$\begin{aligned} A_\rho : L^p(\mathbb{D}) &\rightarrow L^p(\mathbb{D}) \\ f &\mapsto (I + T_{\alpha_\rho}(I - T_\alpha)^{-1})(f) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Remarquons que l'opérateur  $A_\rho$  est bien défini puisque la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 nous assure que  $(I - T_\alpha)$  est inversible de  $L^p(\mathbb{D})$  lui-même. On note par ailleurs  $R_\rho : L^p(\mathbb{D}) \rightarrow L^p(\mathbb{D}_\rho)$  l'opérateur de restriction naturelle et enfin

$$\begin{aligned} B_\rho : L^p(\mathbb{D}) &\rightarrow L^p(\mathbb{D}_\rho) \\ f &\mapsto (R_\rho \circ A_\rho)(f) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Les commentaires faits ci-dessus permettent d'affirmer que l'opérateur  $B_\rho$  envoie l'espace  $H^p(\mathbb{D})$  dans  $H^p(\mathbb{D}_\rho)$ ; par un léger abus de notation, nous conservons la notation  $B_\rho$  pour la restriction de ce dernier à  $H^p(\mathbb{D})$ .

On peut dès à présent énoncer le lemme suivant.

**Lemme 5.1.2.2** *Si les fonctions  $\alpha$  et  $\frac{1}{\alpha}$  appartiennent toutes les deux à  $L^\infty(\mathbb{D})$ , alors l'image de  $B_\rho : H^p(\mathbb{D}) \rightarrow H^p(\mathbb{D}_\rho)$  est dense.*

*Preuve.* Avec le théorème de Hahn-Banach, il est équivalent de prouver que si  $\Psi \in H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho})$  satisfait

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}_\rho} \Psi(z) B_\rho g(z) dz = 0, \quad g \in H^p(\mathbb{D}), \quad (5.10)$$

alors  $\Psi = 0$ . En effet, nous avons vu dans la Section 5.1.1 que l'orthogonal de  $H^p(\mathbb{D}_\rho)$  pour le produit de dualité (5.1) était l'espace  $e^{i\theta} H^q(\mathbb{D}_\rho)$ . Or  $e^{i\theta} H^q(\mathbb{D}_\rho)$  est le sous-ensemble des fonctions de  $H^q(\mathbb{D}_\rho)$  s'annulant en 0, et s'identifie donc par réflexion à l'espace  $H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_\rho)$  dont les fonctions sont nulles à l'infini. Que le dual de  $H^p(\mathbb{D}_\rho)$  soit alors (non-isométriquement mais avec équivalences des normes) isomorphe à  $H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{D}_\rho)$  pour le produit de dualité (5.1) est classique avec [63, Thm. 7.3].

Soient donc  $g \in H^p(\mathbb{D})$  et  $\xi_0 \in \mathbb{A}$ . Il est clair que la propriété 6 de la Proposition 3.2.3.2 s'applique à la fonction  $\xi \mapsto (\xi - \xi_0)\Psi(\xi)A_\rho g(\xi)$  (voir les commentaires au sujet de la propriété 6 de la Proposition 3.2.3.2), si bien qu'au point  $\xi = \xi_0$  on a

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi_0 - \xi_0)\Psi(\xi_0)A_\rho g(\xi_0) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{A}} \Psi(z)A_\rho g(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{A}} \frac{\bar{\partial}((z - \xi_0)\Psi(z)A_\rho g(z))}{z - \xi_0} dz \wedge d\bar{z}. \end{aligned}$$

Les définitions (5.8) et (5.9) de  $A_\rho$  et  $B_\rho$  indiquent qu'ils coïncident sur  $\mathbb{T}_\rho$ . Comme de plus  $\Psi$  est holomorphe sur  $\mathbb{A}$ , soit  $\bar{\partial}\Psi = 0$  sur  $\mathbb{A}$ , il vient que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}_\rho} \Psi(z)B_\rho g(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z)A_\rho g(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{A}} \Psi(z)\bar{\partial}A_\rho g(z) dz \wedge d\bar{z}. \quad (5.11)$$

Calculons dans un premier temps l'intégrale double intervenant dans le membre de droite de (5.11). On a

$$\bar{\partial}A_\rho g = \bar{\partial}g + \bar{\partial}(T_{\alpha_\rho}(I - T_\alpha)^{-1}g).$$

Mais  $g$  est holomorphe sur  $\mathbb{A}$  cependant qu'avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1,  $\bar{\partial}T_{\alpha_\rho}w = \bar{\partial}T(\alpha_\rho \bar{w}) = \alpha_\rho \bar{w}$  pour tout  $w \in L^p(\mathbb{D})$ . Il reste donc

$$\bar{\partial}A_\rho g = \alpha \overline{(I - T_\alpha)^{-1}g}.$$

Si on note alors  $\Psi_\rho$  la fonction qui vaut 0 sur  $\mathbb{D}_\rho$  et  $\Psi$  sur  $\mathbb{A}$ , montrons que l'intégrale double du membre de droite dans (5.11) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{A}} \Psi(z)\bar{\partial}A_\rho g(z) dz \wedge d\bar{z} &= \langle \alpha \Psi_\rho, (I - T_\alpha)^{-1}g \rangle_{\mathbb{D}} \\ &= \langle g, (I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha \Psi_\rho) \rangle_{\mathbb{D}} + C, \end{aligned} \quad (5.12)$$

où  $C$  est un terme imaginaire pur (qui dépend en fait de  $\Psi_\rho$  et  $g$ , mais cela importe peu pour la suite des calculs). Pour cela, considérons l'ensemble  $E_\alpha$  des fonctions  $\alpha \in L^p(\mathbb{D})$

validant l'affirmation précédente. On a dans un premier temps que  $E_\alpha$  est non vide. En effet, soit  $\alpha \in L^p(\mathbb{D})$  choisi tel que  $\|T_\alpha\| < 1$ , où  $\|\cdot\|$  désigne la norme d'opérateur  $L^p(\mathbb{D}) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{D})$ , ce qui est bien entendu toujours possible. Alors, l'opérateur  $((I - T_\alpha)^{-1})$  est développable en série géométrique de telle sorte que

$$\langle \alpha \Psi_\varrho, (I - T_\alpha)^{-1} g \rangle_{\mathbb{D}} = \langle \alpha \Psi_\varrho, \sum_{n=0}^{\infty} T_\alpha^n g \rangle_{\mathbb{D}} .$$

On remarque alors grâce à la définition de  $T_\alpha^*$  que

$$\begin{cases} \langle \alpha \Psi_\varrho, T_\alpha^k g \rangle_{\mathbb{D}} = \overline{\langle g, T_\alpha^{*k}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}}}, & \text{si } k \text{ est pair} \\ \langle \alpha \Psi_\varrho, T_\alpha^k g \rangle_{\mathbb{D}} = \langle g, T_\alpha^{*k}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}}, & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} .$$

Dès lors, lorsque  $k$  est pair, on a que

$$\langle \alpha \Psi_\varrho, T_\alpha^k g \rangle_{\mathbb{D}} = \langle g, T_\alpha^{*k}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}} - 2i \operatorname{Im} \langle g, T_\alpha^{*k}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}} .$$

En combinant ceci avec le fait que  $\|T_\alpha^*\| < 1$  par des propriétés classiques de l'adjoint et que par conséquent  $(I - T_\alpha^*)^{-1}$  est lui aussi développable en série géométrique, on obtient finalement que

$$\langle \alpha \Psi_\varrho, (I - T_\alpha)^{-1} g \rangle_{\mathbb{D}} = \langle g, (I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}} + C ,$$

avec  $C$  une constante imaginaire pure, ce qui est bien la forme souhaitée.

Il est par ailleurs clair que l'ensemble  $E_\alpha$  est fermé. Montrons finalement qu'il est ouvert. Soit donc  $\alpha \in E_\alpha$  et considérons une fonction  $\varepsilon \in L^p(\mathbb{D})$  de norme petite. L'utilisation de l'identité  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$  permet d'obtenir que

$$(I - T_{\alpha+\varepsilon})^{-1} = \left( I - (I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon \right)^{-1} (I - T_\alpha)^{-1} .$$

Dès lors, on calcule successivement avec la structure hermitienne du produit de dualité, la définition de l'adjoint ainsi que le fait que  $\alpha \in E_\alpha$  par hypothèse

$$\begin{aligned} \langle \alpha \Psi_\varrho, (I - T_{\alpha+\varepsilon})^{-1} g \rangle_{\mathbb{D}} &= \overline{\langle (I - (I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon)^{-1} (I - T_\alpha)^{-1} g, \alpha \Psi_\varrho \rangle_{\mathbb{D}}} \\ &= \overline{\langle (I - (I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon)^{-1*}(\alpha \Psi_\varrho), (I - T_\alpha)^{-1} g \rangle_{\mathbb{D}}} \\ &= \overline{\langle g, (I - T_\alpha^*)^{-1} (I - (I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon)^{-1*}(\alpha \Psi_\varrho) \rangle_{\mathbb{D}}} + C' , \end{aligned}$$

avec  $C'$  une constante imaginaire pure. Observons maintenant qu'en ayant pris soin de choisir  $\varepsilon$  de norme suffisamment petite (cette quantité dépendant de  $\alpha$ ), il devient licite de développer en série géométrique  $(I - (I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon)^{-1}$ . Or il est facile de montrer que

$$((I - T_\alpha)^{-1} T_\varepsilon)^* = T_\varepsilon^* (I - T_\alpha^*)^{-1} + \mathcal{O} ,$$

avec  $\mathcal{O}$  un opérateur imaginaire pur. Comme on a de plus que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( T_{\varepsilon}^* (I - T_{\alpha}^*)^{-1} \right)^n = (I - T_{\varepsilon}^* (I - T_{\alpha}^*)^{-1})^{-1}$$

ainsi que

$$(I - T_{\alpha}^*)^{-1} (I - T_{\varepsilon}^* (I - T_{\alpha}^*)^{-1})^{-1} = ((I - T_{\alpha}^*) - T_{\varepsilon}^* (I - T_{\alpha}^*)^{-1} (I - T_{\alpha}^*))^{-1} = (I - T_{\alpha+\varepsilon}^*)^{-1},$$

on arrive finalement à la forme recherchée pour  $\varepsilon$  de norme suffisamment petite, ce qui signifie bien que  $E_{\alpha}$  est ouvert. Comme il est de plus fermé et non vide, il est égal à  $L^p(\mathbb{D})$  tout entier justifiant ainsi l'égalité (5.12).

En représentant alors  $g$  par son intégrale de Cauchy (voir Théorème 2.2.2.1) dans le premier crochet de dualité de l'égalité (5.12), on obtient

$$\begin{aligned} \langle g, (I - T_{\alpha}^*)^{-1} (\alpha \Psi_{\varrho}) \rangle_{\mathbb{D}} &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}} \left( \int_{\mathbb{T}} \frac{g(z)}{z - \xi} dz \right) \overline{(I - T_{\alpha}^*)^{-1} (\alpha \Psi_{\varrho})(\xi)} d\xi \wedge d\bar{\xi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} g(z) \left( \iint_{\mathbb{D}} \frac{\overline{(I - T_{\alpha}^*)^{-1} (\alpha \Psi_{\varrho})(\xi)}}{z - \xi} d\xi \wedge d\bar{\xi} \right) dz. \end{aligned}$$

Finalement, il en résulte que

$$\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{A}} \Psi(z) \bar{\partial} A_{\varrho} g(z) dz \wedge d\bar{z} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} g(z) T_1 (I - T_{\alpha}^*)^{-1} (\alpha \Psi_{\varrho})(z) dz + C. \quad (5.13)$$

Regardons maintenant la première intégrale du membre de droite de (5.11). D'après la définition de  $A_{\varrho}$ , on a que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) A_{\varrho} g(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) g(z) dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) T_{\alpha_{\varrho}} (I - T_{\alpha})^{-1} g(z) dz. \quad (5.14)$$

Le second terme du membre de droite de (5.14) peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) \mathcal{T}_{\alpha_{\varrho}} (I - T_{\alpha})^{-1} g(z) dz.$$

Or les restrictions à  $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$  des fonctions de  $\mathcal{T}_{\alpha_{\varrho}}(L^p(\mathbb{D}))$  appartiennent à  $H^{p,00}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  tandis que  $\Psi \in H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_{\varrho})$  par hypothèse. Donc en appliquant le théorème de Cauchy (continuellement déformé jusqu'à l'infini), on en déduit que le second terme du membre de droite de (5.14) est nul. La première intégrale du membre de droite de (5.11) se réduit donc à

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) A_{\varrho} g(z) dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} \Psi(z) g(z) dz. \quad (5.15)$$

Ainsi, si (5.10) est vraie, on a en la combinant avec (5.11), (5.13) et (5.15)

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} g(z) \left( (\Psi(z) - T_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho)(z)) \right) dz = -C, \quad g \in H^p(\mathbb{D}). \quad (5.16)$$

Or cette dernière équation est complexe linéaire en  $g$  (puisque si  $g \in H^p(\mathbb{D})$  alors  $ig \in H^p(\mathbb{D})$ ). Donc le membre de gauche de (5.16) est imaginaire pur à la fois lorsqu'il écrit avec  $g$  et  $ig$ , ce qui n'est possible qu'à la condition que  $C = 0$ . On a donc finalement

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{T}} g(z) \left( (\Psi(z) - T_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho)(z)) \right) dz = 0, \quad g \in H^p(\mathbb{D}). \quad (5.17)$$

Remarquons alors que la fonction  $G$  définie par (rappelons que  $T_1 = \mathcal{T}_{1|\mathbb{D}}$ )

$$G := \Psi - \mathcal{T}_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho),$$

appartient à  $H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ . Ceci provient du fait que  $\Psi$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$ . Que  $\mathcal{T}_1$  vérifie aussi cette propriété a déjà été mentionné plus haut où on a remarqué que les fonctions de  $\mathcal{T}_1(L^q(\mathbb{D}))$  restreintes à  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$  appartaient à  $H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}})$ .

De plus, on a avec (5.17) et par dualité que la fonction  $G$  a même trace sur  $\mathbb{T}$  qu'une fonction de  $H^q(\mathbb{D})$ . Cette trace coïncide avec la limite dans  $W^{1-1/q,q}(\mathbb{T})$ , donc *a fortiori* dans  $L^q(\mathbb{T})$ , de  $G(se^{i\theta})$  lorsque  $s \rightarrow 1^+$  aussi bien que lorsque  $s \rightarrow 1^-$  puisque  $G \in W^{1,q}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_r})$  pour tout  $r > s$  (voir les commentaires concernant la propriété 1 de la Proposition 3.2.3.2). On a donc nécessairement

$$G|_{\mathbb{T}} \in \left( H^{q,00}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \right)|_{\mathbb{T}} \cap (H^q(\mathbb{D}))|_{\mathbb{T}} = \{0\},$$

c'est-à-dire que

$$\Psi(z) - \mathcal{T}_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho)(z) = 0 \quad \text{pour } |z| = 1. \quad (5.18)$$

Il est clair que la première occurrence de  $\Psi$  dans (5.18) peut être remplacée par  $\Psi_\varrho$  dans la mesure où cela ne change pas la valeur en dehors de  $\mathbb{D}_\varrho$ . Par conséquent

$$F(z) := \Psi_\varrho(z) - \mathcal{T}_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho)(z) = 0 \quad \text{pour } |z| = 1. \quad (5.19)$$

A nouveau, il résulte de (5.19) que la limite dans  $L^q(\mathbb{T})$  de  $F(se^{i\theta})$  lorsque  $s \rightarrow 1^-$  est nulle. En considérant maintenant  $F$  comme un élément de  $L^q(\mathbb{D})$  et en utilisant le Lemme 5.1.2.1, il vient que

$$\alpha F = \alpha\Psi_\varrho - \alpha\mathcal{T}_1(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho) = \alpha\Psi_\varrho + T_\alpha^*(I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho),$$

et donc avec l'aide de l'identité  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$ , on obtient

$$\alpha F = (I - T_\alpha^*)^{-1}(\alpha\Psi_\varrho). \quad (5.20)$$

Ceci peut toujours se réécrire dans  $\mathbb{D}$

$$\alpha F - T_\alpha^*(\alpha F) = \alpha \Psi_\varrho. \quad (5.21)$$

Comme le Lemme 5.1.2.1 et la définition de  $T$  fournissent de plus

$$T_\alpha^*(\alpha F) = -\alpha T_1(\alpha F) = -\alpha T_{\bar{\alpha}}(F),$$

il reste finalement dans (5.21), après multiplication par  $\frac{1}{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{D})$  par hypothèse,

$$F + T_{\bar{\alpha}}(F) = \Psi_\varrho.$$

En appliquant maintenant l'opérateur  $\bar{\partial}$  et en tenant compte à la fois de l'holomorphicité de  $\Psi_\varrho$  sur  $\mathbb{A}$  ainsi que de la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1, on a au sens des distributions

$$\bar{\partial}F = -\bar{\alpha}\bar{F} \quad \text{dans } \mathbb{A}. \quad (5.22)$$

Soit donc  $r \in (\varrho, 1)$  et notons  $\mathbb{A}_r = \{r < |z| < 1\}$ . Comme  $\Psi \in H^{q,0,0}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_\varrho)$ , il est clair que  $\Psi_\varrho$  est  $C^\infty$  sur un voisinage de  $\mathbb{A}_r$ . De plus avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1, on a  $T_1(L^q(\mathbb{D})) \subset W^{1,q}(\mathbb{D})$ . Tout ceci implique que  $F$  satisfait une condition de Hardy d'ordre  $q$  sur  $\mathbb{A}_r$ . On en conclut avec (5.22) que  $F \in G_{-\bar{\alpha}}^q(\mathbb{A}_r)$ . Mais comme la trace de  $F$  est nulle sur  $\mathbb{T}$  avec (5.19), on en déduit que  $F$  est identiquement nulle sur  $\mathbb{A}_r$  avec la propriété 4 de la Proposition 3.2.3.2. On en tire la même conclusion pour  $\alpha F$  sur  $\mathbb{A}_r$  et finalement aussi pour  $\Psi_\varrho$  avec (5.20). On peut alors affirmer que  $\Psi|_{\mathbb{A}_r} = \Psi_\varrho|_{\mathbb{A}_r} = 0$  cependant que  $\Psi \in H^{q,0,0}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_\varrho)$  par hypothèse. En définitive,  $\Psi$  est identiquement nulle toujours avec le Théorème 2.1.2.1. ■

Le Lemme 5.1.2.2 étant maintenant prouvé, nous allons tenter de nous défaire de l'hypothèse  $\frac{1}{\alpha} \in L^\infty(\mathbb{D})$  avec le

**Lemme 5.1.2.3** *Si  $\alpha \in L^\infty(\mathbb{D})$ , alors l'image de  $B_\varrho : H^p(\mathbb{D}) \rightarrow H^p(\mathbb{D}_\varrho)$  est dense.*

*Preuve.* Désignons par  $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  la suite telle que pour  $z \in \mathbb{D}$

$$\alpha^{(n)}(z) = \begin{cases} \alpha(z) & \text{si } |\alpha(z)| > \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \text{sinon} \end{cases}.$$

On a clairement que

$$\|\alpha^{(n)} - \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leq \frac{2}{n}$$

si bien que  $(\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $\alpha$  dans  $\mathbb{D}$ . De plus  $\frac{1}{\alpha^{(n)}} \in L^\infty(\mathbb{D})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Nous avons déjà vu que pour tout  $\beta \in L^\infty(\mathbb{D})$  et pour tout  $h \in L^p(\mathbb{D})$ , les restrictions à  $\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}$  des fonctions de  $\mathcal{T}_\beta(L^p(\mathbb{D}))$  appartiennent à  $H^{p,0,0}(\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}})$  (voir par exemple la preuve

du Lemme 5.1.2.2) et s'annulaient donc en particulier à l'infini. Il en découle que (voir la Section 2.3.1)

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{T}_\beta h(e^{i\theta}) d\theta = 0 .$$

Comme par définition,  $T_\beta$  et  $\mathcal{T}_\beta$  ont même trace sur  $\mathbb{T}$ , on a donc aussi par passage à la limite  $L^p(\mathbb{T})$  dans  $\mathcal{T}_\beta h(se^{i\theta})$  lorsque  $s \rightarrow 1^+$ ,

$$\int_0^{2\pi} T_\beta h(e^{i\theta}) d\theta = 0 . \quad (5.23)$$

Donc avec (5.23), la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 et l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, il vient que pour tout  $\beta \in L^\infty(\mathbb{D})$  et pour tout  $h \in L^p(\mathbb{D})$

$$\|T_\beta h\|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} \leq C_1 \|\nabla T_\beta h\|_{L^p(\mathbb{D})} . \quad (5.24)$$

Toujours avec la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 on a que  $\bar{\partial}T_\beta(h) = \bar{\partial}T(\beta\bar{h}) = \beta\bar{h}$ . La propriété 3 de la Proposition 3.2.3.1 nous donne quant à elle  $\partial T_\beta(h) = S(\beta\bar{h})$ , où  $S$  est l'opérateur de Beurling (voir la Définition 3.2.3.2). Finalement la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.1 permet de poursuivre la majoration dans (5.24) de telle façon que

$$\|T_\beta h\|_{W^{1,p}(\mathbb{D})} \leq C_2 \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \|h\|_{L^p(\mathbb{D})}$$

avec  $C_2$  une constante ne dépendant pas de  $\beta$ . Ceci peut encore s'écrire

$$\| \|T_\beta\| \| \leq C_2 \|\beta\|_{L^\infty(\mathbb{D})}$$

où  $\| \|T_\beta\| \|$  désigne la norme d'opérateur  $L^p(\mathbb{D}) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{D})$ . Il suffit alors de mentionner que l'ensemble des opérateurs inversibles est ouvert dans l'espace de Banach constitué des opérateurs bornés entre deux espaces de Banach avec le théorème de l'application ouverte pour que la continuité de l'inversion, couplée à la bornitude uniforme des opérateurs  $T_{\alpha_\varrho^{(n)}}$  en norme d'opérateurs, nous assure que  $T_{\alpha_\varrho^{(n)}}(I - T_{\alpha_\varrho^{(n)}})^{-1}$  converge vers  $T_{\alpha_\varrho}(I - T_{\alpha_\varrho})^{-1}$  pour la norme d'opérateur  $L^p(\mathbb{D}) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{D})$ . Par restriction et avec les commentaires faisant suite au Lemme 5.1.2.1, on en déduit que la suite d'opérateurs  $\left( B_\varrho^{(n)} = R_\varrho \circ (I + T_{\alpha_\varrho^{(n)}}(I - T_{\alpha_\varrho^{(n)}})^{-1}) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $B_\varrho$  avec la norme d'opérateur  $H^p(\mathbb{D}) \rightarrow H^p(\mathbb{D}_\varrho)$ . On peut à présent conclure en appliquant le Lemme 5.1.2.2 à chaque opérateur  $B_\varrho^{(n)}$ . ■

Nous sommes désormais en mesure d'utiliser les Lemmes 5.1.2.2 et 5.1.2.3 pour démontrer le Théorème 5.1.2.3.

### **Preuve du Théorème 5.1.2.3.**

Soit  $0 < \varrho \leq 1$ . Définissons l'opérateur  $T_{\alpha,\varrho} : L^p(\mathbb{D}_\varrho) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{D}_\varrho)$  tel que

$$T_{\alpha,\varrho} f(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{D}_\varrho} \frac{\alpha(\zeta) \overline{f(\zeta)}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} , \quad z \in \mathbb{D}_\varrho . \quad (5.25)$$

Remarquons qu'alors  $T_{\alpha,1} = T_\alpha$ . En référence à l'opérateur de projection analytique  $P_+$  donné par la Définition 4.1.2.1, notons aussi  $P_{+,\varrho}$  l'opérateur de projection analytique de  $L^p(\mathbb{T}_\varrho)$  sur  $tr_{\mathbb{T}_\varrho} H^p(\mathbb{D}_\varrho)$ . Rappelons que toute fonction de  $H^p(\mathbb{D}_\varrho)$  peut être identifiée avec sa trace sur  $\mathbb{T}_\varrho$  en vertu de l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{H^p(\mathbb{D}_\varrho)} \sim \|\cdot\|_{L^p(\mathbb{T}_\varrho)}$  (voir propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2). Nous étendons cet abus de notation à l'opérateur  $P_{+,\varrho}$ . On remarque une fois de plus que  $P_{+,1} = P_+$ .

D'après la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.1 et les commentaires de la propriété 6 de la Proposition 3.2.3.2 (voir encore la Remarque 4.1.2.1), l'application

$$\begin{aligned} (I - T_{\alpha,\varrho})^{-1} : H^p(\mathbb{D}_\varrho) &\rightarrow G_{\alpha|_{\mathbb{D}_\varrho}}^p(\mathbb{D}_\varrho) \\ P_{+,\varrho}(w|_{\mathbb{D}_\varrho}) &\mapsto w|_{\mathbb{D}_\varrho} \end{aligned} \quad . \quad (5.26)$$

est un isomorphisme. Soit donc  $w_\varrho \in G_{\alpha|_{\mathbb{D}_\varrho}}^p(\mathbb{D}_\varrho)$  telle que  $w_\varrho$  soit la restriction à  $\mathbb{D}_\varrho$  d'une fonction  $w \in G_\alpha^p(\mathbb{D})$ . Posons  $g = P_+(w)$  et  $\tilde{\alpha}_\varrho = \chi_{\mathbb{D}_\varrho}\alpha$ . On a alors

$$(I - T_{\alpha,\varrho})^{-1}P_{+,\varrho}(w_\varrho) = w_\varrho = w|_{\mathbb{D}_\varrho} = \left((I - T_\alpha)^{-1}g\right)|_{\mathbb{D}_\varrho} .$$

Comme de plus

$$T_{\alpha,\varrho}(h|_{\mathbb{D}_\varrho}) = (T_{\tilde{\alpha}_\varrho}h)|_{\mathbb{D}_\varrho} , \quad h \in L^p(\mathbb{D}) ,$$

il reste que

$$P_{+,\varrho}(w_\varrho) = \left((I - T_{\tilde{\alpha}_\varrho})(I - T_\alpha)^{-1}g\right)|_{\mathbb{D}_\varrho} . \quad (5.27)$$

Observons maintenant que  $\alpha = \alpha_\varrho + \tilde{\alpha}_\varrho$ , ce qui entraîne

$$T_\alpha = T_{\alpha_\varrho} + T_{\tilde{\alpha}_\varrho} .$$

En faisant usage de l'identité  $(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(A - B)^{-1}$ , on obtient

$$(I - T_\alpha)^{-1} = (I - T_{\tilde{\alpha}_\varrho})^{-1} + (I - T_{\tilde{\alpha}_\varrho})^{-1}T_{\alpha_\varrho}(I - T_\alpha)^{-1} .$$

On injecte ceci dans (5.27) pour obtenir

$$P_{+,\varrho}(w_\varrho) = B_\varrho g$$

ce qui nous permet de conclure avec le Lemme 5.1.2.3 que les éléments de  $H^p(\mathbb{D}_\varrho)$  qui sont projection analytique de la restriction à  $\mathbb{D}_\varrho$  d'une fonction de  $G_\alpha^p(\mathbb{D})$  forment un ensemble dense dans  $H^p(\mathbb{D}_\varrho)$ . L'isomorphisme  $(I - T_{\alpha,\varrho})^{-1} : H^p(\mathbb{D}_\varrho) \rightarrow G_{\alpha|_{\mathbb{D}_\varrho}}^p(\mathbb{D}_\varrho)$  achève donc la preuve. ■

Le passage du Théorème 5.1.2.3 au Théorème 5.1.2.2 se fait sans aucune difficulté avec le Corollaire 3.2.2.1, et par conséquent, le Théorème 5.1.2.1 (c'est-à-dire le problème (*PDens*)) est finalement entièrement prouvé, ce qui était l'objectif de cette section.

Nous allons maintenant constater que le Théorème 5.1.2.1 fournit une explication quant au fait que le problème de Cauchy soit mal posé. Ceci va nous mener alors à

formuler ce dernier sous la forme d'un problème de meilleur approximation dans des classes de fonctions appropriées.

## 5.2 Vers le problème extrémal borné

Nous étudions dans cette section quelques conséquences du Théorème 5.1.2.1. Plus précisément nous allons voir que les résultats de densité de la Section 5.1 permettent certes d'approcher au plus près n'importe quelle donnée fournie (ou bien mesurée) sur le bord  $I$ , mais que cette approximation se fait au détriment du comportement sur le bord  $J$ .

Commençons par introduire quelques notations propres à cette section. Supposons que nous disposions de données de Dirichlet et de Neumann surdéterminées, c'est-à-dire sur une même partie  $I$  du bord  $\partial\Omega$ , de l'équation (1.2). Nous les notons respectivement  $\varphi \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$  et  $\psi \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$ . A partir de ces données à valeurs réelles, introduisons la donnée au bord complexe  $F_d \in L^p(I)$  telle que

$$\operatorname{Re}(F_d) = \varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(\partial_t F_d) = \sigma\psi .$$

Nous allons maintenant distinguer deux cas.

### 5.2.1 Situation idéale : données compatibles

Supposons dans cette section que les données  $\varphi$  et  $\psi$  désignent une paire de données compatibles pour le problème de Cauchy. Cela signifie donc qu'il existe une unique fonction  $u \in L^p_{\mathbb{R}}(\Omega)$  solution de (1.2) dans  $\Omega$  telle que

$$(\operatorname{tr} u)|_I = \varphi \quad \text{et} \quad (\operatorname{tr} \partial_n u)|_I = \psi .$$

Maintenant, au regard de la Définition 4.2.0.1, dire que la paire  $(\varphi, \psi)$  est compatible signifie aussi que le système (1.4), qui rappelons-le s'écrit encore sur  $I$  (voir Section 4.2.2)

$$\begin{cases} \partial_n v = -\sigma\partial_t\varphi \\ \partial_t v = \sigma\psi \end{cases}, \quad (5.28)$$

est intégrable. Pour plus de détails sur les conditions d'intégration dans les cas simplement et doublement connexes (ou de façon équivalente, sur les conditions de compatibilité), nous renvoyons aux Sections 4.2.1 et 4.3 respectivement. La connaissance de données compatibles  $\varphi$  et  $\psi$  est ainsi équivalente à celle de  $(\operatorname{tr} f)|_I = F_d$  où  $f = u + iv$  est une fonction de  $H^p_{\nu}(\Omega)$  définie à une constante imaginaire pure près et  $F_d = \varphi + i \int_I \sigma\psi \in L^p(I)$ .

En imposant une condition de normalisation, on observe donc que les données  $\varphi$  et  $\psi$  déterminent de façon unique la fonction  $f$ .

**Proposition 5.2.1.1** *Soient  $\nu \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$  et  $\sigma \in W^{1,\infty}_{\mathbb{R}}(\Omega)$  la conductivité associée à  $\nu$  par (1.6). Soient  $(\varphi, \psi) \in L^p_{\mathbb{R}}(I)$  une paire de données compatibles pour le système (1.4). Alors il existe une unique fonction  $f = u + iv \in H^p_{\nu}(\Omega)$ , normalisée avec la condition  $\int_I v = 0$ , solution du problème de Cauchy, c'est-à-dire telle que*

$$(tr u)|_I = \varphi \quad \text{et} \quad (tr \partial_n u)|_I = (tr \frac{1}{\sigma} \partial_t v)|_I = \psi .$$

*Preuve.* L'existence de solution dans  $H_v^p(\Omega)$  au problème de Cauchy sous l'hypothèse de données compatibles a été discutée juste au-dessus, et rappelons-le, provient du fait que le système (1.4) est intégrable. Désignons par  $f$  et  $g$  deux telles solutions. Alors la fonction  $h = f - g$  appartient toujours à  $H_v^p(\Omega)$  et comme  $\sigma^{-1}$  est à valeurs strictement positives, elle satisfait

$$(tr Re h)|_I = 0 \quad \text{et} \quad (tr Im \partial_t h)|_I = 0 .$$

Comme  $h$  est aussi normalisée par  $\int_I Im h = 0$ , on a finalement que  $h|_I = 0$ . Donc d'après la propriété 4 de la Proposition 3.2.3.2, on en déduit que  $h \equiv 0$  sur  $\Omega$ , et finalement que  $f \equiv g$  sur  $\Omega$ . ■

Le cas des données compatibles au bord représente en quelque sorte un cas idéal lorsqu'on en vient à résoudre des problèmes de Cauchy, puisque dans cette situation très particulière, ces derniers se révèlent être finalement de «simples» problèmes d'extrapolation de données. La question du comportement des solutions trouvées sur la partie du bord où aucune mesure n'a été effectuée devient alors caduque puisque le problème inverse initial était en fait bien posé. Nous allons voir dans la Section 5.2.2 que cette situation reste uniquement réservée au cas des données compatibles.

### 5.2.2 Problème de Cauchy mal posé pour des données non compatibles

Comme  $F_d \in L^p(I)$ , il existe d'après les Théorèmes 5.1.1.1 et 5.1.2.1 une suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_v^p(\Omega)$  telle que

$$\|tr f_n|_I - F_d\|_{L^p(I)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 .$$

Si les données au bord sont compatibles, les résultats de la Section 5.2.1 nous indiquent que  $F_d$  est déjà la trace sur  $I$  d'une fonction de  $H_v^p(\Omega)$ . **Supposons alors que la paire  $(\varphi, \psi)$  ne soit pas compatible, soit  $F_d \notin tr H_v^p(\Omega)|_I$ .** La non-compatibilité des données au bord peut être le fait de multiples causes, les plus courantes étant :

- l'origine expérimentale des données impliquant l'existence d'erreurs de mesure,
- le nombre fini de mesures ponctuelles alors que les données sont décrites sous la forme de fonctions dans le modèle mathématique (la création de fonctions à partir de données ponctuelles peut, par exemple, être effectuée numériquement au moyen d'un algorithme d'interpolation).

Que les Théorèmes 5.1.1.1 et 5.1.2.1 soient alors un moyen de mettre en évidence le caractère mal posé du problème de Cauchy est connu. Citons par exemple, pour le cas des espaces de Hardy classiques, les résultats figurant dans [22, 23] dans le cas simplement connexe ou bien encore dans [54] pour le cas doublement connexe. Nous étendons ces résultats aux espaces de Hardy généralisés sur des domaines simplement et doublement connexes avec la proposition suivante.

**Proposition 5.2.2.1** *Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Si  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{\nu}^p(\Omega)$  est telle que  $(tr f_n|_I)_n$  converge vers  $F_d \in L^p(I)$  en norme  $L^p(I)$  et si  $F_d$  n'est pas la restriction à  $I$  d'une fonction de  $H_{\nu}^p(\Omega)$ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|tr_J f_n\|_{L^p(J)} = \infty .$$

*Preuve.* Raisonnons par l'absurde en supposant que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|tr_J f_n\|_{L^p(J)} \neq \infty .$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite  $(tr_J f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^p(J)$  cependant qu'elle l'est déjà dans  $L^p(I)$  par hypothèse. Il en découle alors que  $(tr_{\partial\Omega} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^p(\partial\Omega)$  et par conséquent aussi dans  $H_{\nu}^p(\Omega)$  avec l'équivalence des normes provenant de la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2.

Comme l'espace  $L^p(\partial\Omega)$  est réflexif [46, Thm. IV.10] et que  $tr_{\partial\Omega} H_{\nu}^p(\Omega)$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $L^p(\partial\Omega)$  (voir la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2), on en déduit que  $tr_{\partial\Omega} H_{\nu}^p(\Omega)$  est lui aussi réflexif. Par conséquent, la bornitude de  $(tr_{\partial\Omega} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $L^p(\partial\Omega)$  implique qu'il existe une sous-suite  $(tr_{\partial\Omega} f_{n_p})_{p \in \mathbb{N}}$  convergeant faiblement vers une certaine fonction  $f \in tr H_{\nu}^p(\Omega)$  avec le théorème de Banach-Alaoglu [46]. Il est alors clair que par restriction, on a que  $(tr_{\partial\Omega} f_{n_p}|_I)_{p \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $f|_I$  dans  $L^2(I)$ . Mais comme  $F_d$  est déjà la limite forte de  $(tr_{\partial\Omega} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dans  $L^p(I)$ , on en conclut que  $F_d = f|_I$  presque partout sur  $I$ . Donc  $F_d$  est la trace sur  $I$  d'une fonction de  $H_{\nu}^p(\Omega)$ , ce qui amène la contradiction et finalement achève la preuve. ■

Ce comportement de l'approximant fourni par le Théorème 5.1.2.1 sur la partie  $J$  du bord montre que le problème de Cauchy est mal-posé (ou encore instable) pour des données au bord non compatibles. La Proposition 5.2.2.1 traduit donc le fait que la précision recherchée dans l'approximation de données de classe  $L^p$  sur un sous-ensemble strict du bord par des fonctions de  $H_{\nu}^p(\Omega)$  s'effectue au détriment du comportement de cette approximation sur le reste du bord du domaine.

A ce stade de l'étude, il est donc naturel de se demander s'il est néanmoins possible, dans le cas de données non compatibles, de trouver une fonction  $f \in H_{\nu}^p(\Omega)$  suffisamment proche en norme  $L^p$  des données au bord et gardant une certaine stabilité sur la partie du bord où aucune donnée n'est fournie. La formalisation de ce problème fait l'objet de la Section 5.2.3.

### 5.2.3 Formalisation du problème extrémal borné

Cette section est uniquement consacrée à l'introduction de notations ainsi qu'à la formulation mathématique du problème extrémal borné. Afin d'alléger les notations, nous prenons désormais la liberté pour toute fonction de  $H_{\nu}^p(\Omega)$  de ne pas mentionner sa trace sur  $\partial\Omega$  ou bien la restriction de celle-ci à un sous-ensemble strict du bord lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Nous savons dorénavant que la question

*"Quelle est la fonction  $f \in H_{\nu}^p(\Omega)$  la plus proche possible de  $F_d$  en norme  $L^p(I)$  ? "*

n'admet en général pas de réponse, à moins que  $F_d$  soit la trace sur  $I$  d'un élément de  $H_\nu^p(\Omega)$ . En effet, les Théorèmes 5.1.1.1 et 5.1.2.1 assurent que si  $F_d$  n'est pas une donnée compatible, alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe bien une fonction  $g_0 \in H_\nu^p(\Omega)$  telle que

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon . \quad (5.29)$$

A cela s'ajoute le fait que si  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans (5.29), alors  $\|g_0\|_{L^p(J)} \rightarrow \infty$  avec la Proposition 5.2.2.1. En revanche, et contrairement au cas  $I = \partial\Omega$ , il n'est pas possible de trouver une fonction  $g_0 \in H_\nu^p(\Omega)$  réalisant

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \inf_{g \in H_\nu^p(\Omega)} \|F_d - g\|_{L^p(I)} . \quad (5.30)$$

Il est donc légitime de se demander si l'existence d'un minimum dans (5.30) peut être assurée sous une certaine condition de bornitude sur  $J$  de l'approximant cherché. Traduisons cette question en termes mathématiques.

Introduisons tout d'abord le sous-espace  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  de  $H_\nu^p(\Omega)$  de la façon suivante.

**Définition 5.2.3.1** Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Soient aussi  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L^p(J)$ . On note alors  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  l'espace défini par

$$\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p = \left\{ g \in \text{tr}_{\partial\Omega} H_\nu^p(\Omega); \|g - \Phi\|_{L^p(J)} \leq M \right\}_I \subset L^p(I) .$$

L'espace  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  est donc composé de traces sur  $I$  de fonctions dans  $H_\nu^p(\Omega)$  auxquelles on impose d'être bornées en norme  $L^p$  sur  $J$  par rapport à une fonction de référence  $\Phi$ . Cette définition appelle plusieurs commentaires.

### Commentaires concernant la Définition 5.2.3.1

- L'espace  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  constitue l'espace sur lequel nous allons tenter de rendre bien posé le problème de Cauchy. On constate que celui-ci dépend des paramètres  $\Phi$  et  $M$ . Il est facile d'imaginer que les choix de ces deux paramètres jouent un rôle important sur la nature des solutions que nous serons amenés à envisager. Ainsi, lorsque le problème de Cauchy modélise un phénomène physique, il est avantageux de connaître avec précision les mécanismes mis en jeu. Ceci permet en effet d'obtenir des informations complémentaires utiles à l'ajustement des paramètres  $\Phi$  et  $M$ . Imaginons en effet que le problème modélisé nous amène à chercher des solutions  $g_0$  telles que  $\|g_0\|_{L^p(J)} \leq 1$ . Il serait alors toujours possible de trouver une fonction  $g_0$  satisfaisant  $\|g_0\|_{L^p(J)} \leq 1000$  et réalisant un minimum sur  $\mathfrak{B}_{1000,0}^p$  dans (5.30) (voir les résultats du Chapitre 6). Cependant la trop grande latitude laissée à la fonction  $g_0$  sur la partie  $J$  du bord fera que la solution trouvée sera très éloignée de la vraie solution physique dans tout le domaine.
- Nous avons fait le choix de choisir  $M \in \mathbb{R}_*^+$  mais il est bien entendu possible de considérer le cas  $M = 0$ . Notons simplement que d'une manière générale, lorsque l'on cherche à résoudre un problème inverse de Cauchy ayant une origine physique, il est difficile de connaître avec précision le comportement à imposer sur le bord  $J$  dans la mesure où on ne dispose pas d'information sur cette partie du bord. On

peut tout au plus en donner une estimation à partir d'expériences passées. C'est pourquoi nous choisissons désormais de ne pas prendre en compte le cas  $M = 0$ .

- Observons qu'il est tout à fait possible d'envisager une contrainte seulement en partie réelle sur la partie  $J$  du bord. On a en effet déjà vu avec les Théorème 4.2.1.1 et Corollaire 4.3.2.1 que l'opérateur de conjugaison était borné en norme  $L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$ . De ce fait, contrôler la norme  $L_{\mathbb{R}}^p$  des parties réelles des fonctions de  $H_{\nu}^p(\Omega)$  permet de contrôler les fonctions toutes entières. Cela a donc du sens d'envisager la résolution du problème de Cauchy dans les classes  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  définies pour  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$  par

$$\mathcal{B}_{M,\Phi}^p = \left\{ g \in \text{tr}_{\partial\Omega} H_{\nu}^p(\Omega); \| \text{Re}(g) - \Phi \|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M \right\}_{|_I} \subset L^p(I) .$$

Bien sûr, le fait d'envisager une contrainte seulement en partie réelle peut aussi être le fruit d'une adéquation avec le problème physique modélisé. Nous verrons en effet dans la Partie IV de ce manuscrit qu'une contrainte en partie réelle est particulièrement bien adaptée au problème de Cauchy pour les tokamaks.

Terminons en notant qu'il est encore possible d'imposer des contraintes en parties imaginaires seulement ou bien encore avec des combinaisons du type

$$\beta \| \text{Re}(g) - \Phi_r \|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} + \delta \| \text{Im}(g) - \Phi_i \|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M ,$$

pour  $\Phi_r, \Phi_i \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$  et  $\beta, \delta \geq 0$  avec  $\beta + \delta > 0$  (voir [107] pour le cas analytique).

- Remarquons que nous ne disposons pas actuellement du résultat de densité adéquat nous permettant d'affirmer que l'espace  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  est non vide pour toutes les configurations possibles de l'intervalle  $I$  dans le cas doublement connexe. Supposons dans un premier temps que  $I = \mathbb{T}$ . Alors  $J = \mathbb{T}_{\varrho} \subsetneq \partial\mathbb{A}$  est de mesure strictement positive. Par conséquent, on a que  $(\text{tr } H_{\nu}^p(\mathbb{A}))_{|_J}$  est dense dans  $L^p(J)$  avec le Théorème 5.1.2.1. Ce qui signifie en particulier que pour  $M > 0$  et  $\Phi \in L^p(J)$ , il existe  $g_0 \in H_{\nu}^p(\Omega)$  telle que

$$\|g_0 - \Phi\| \leq M .$$

On note alors qu'il n'est pas possible d'arriver à une telle conclusion dans le cas où  $I$  est strictement inclus dans  $\mathbb{T}$  ou bien  $\mathbb{T}_{\varrho}$  puisqu'alors  $J$  n'est ni strictement inclus dans  $\mathbb{T}$  ou  $\mathbb{T}_{\varrho}$ , ni égal à  $\mathbb{T}$  ou  $\mathbb{T}_{\varrho}$ . Par contre, il est bel et bien possible d'affirmer que l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  est non vide. Pour constater ceci, il suffit de considérer deux cas. Si  $\|\Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M$ , alors la fonction  $g$  identiquement nulle est clairement dans  $\text{tr } H_{\nu}^p(\Omega)$  et satisfait la contrainte sur  $J$  (notons que dans ce cas particulier, ces arguments fonctionnent encore pour prouver que  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  est non vide). Sinon on pose  $g = (\Phi \vee \Phi_I) + i\mathcal{H}_{\nu}(\Phi \vee \Phi_I)$  où  $\Phi_I \in L_{\mathbb{R}}^p(I)$  est choisie telle que  $\Phi \vee \Phi_I \in L_{\mathbb{R}}^p(\partial\Omega)$  admette une conjuguée  $\sigma$ -harmonique (voir le Théorème 4.3.2.1). Alors on a aussi  $g \in \text{tr } H_{\nu}^p(\Omega)$  et la contrainte est satisfaite sur  $J$ .

L'introduction de la classe  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  nous permet maintenant de transformer le problème de Cauchy, vu initialement comme un problème de prolongement analytique généralisé

de données au bord, en un problème de meilleure approximation sous contrainte dans celle-ci. Ce dernier, que nous nommerons désormais «problème extrémal borné» (PEB) se formule de la façon suivante :

(PEB) : Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ ,  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L^p(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^p(I)$ , existe-t-il une unique fonction  $g_0 \in \mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  telle que

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \min_{g \in \mathfrak{B}_{M,\Phi}^p} \|F_d - g\|_{L^p(I)} ?$$

Répondre positivement à cette question va être un moyen d'assurer l'existence, l'unicité et la stabilité d'une solution au problème de Cauchy. La résolution théorique du problème (PEB) fait l'objet du Chapitre 6. Nous allons alors constater que dans le cas particulier  $p = 2$ , il est possible de donner explicitement la fonction  $g_0$  solution de (PEB) en fonction d'une généralisation de l'opérateur de projection analytique  $P_+$  (voir Définition 4.1.2.1). La détermination de cet opérateur de projection dans le cas particulier du tokamak Tore Supra se fera dans le Chapitre 7 grâce à l'introduction d'une famille complète de solutions de l'équation (1.7) dans un système de coordonnées adapté à la géométrie annulaire considérée.



## Troisième partie

# Résolution théorique et constructive du problème extrémal borné

---



## Chapitre 6

# Résolution théorique du problème extrémal borné

### Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Existence et unicité de la solution du problème extrémal borné</b>	<b>114</b>
6.1.1	Quelques propriétés de l'espace $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$	115
6.1.2	Résolution	116
<b>6.2</b>	<b>Le cas hilbertien</b>	<b>118</b>
6.2.1	Opérateur de projection analytique généralisé	118
6.2.2	Formulation "explicite" de la solution du problème extrémal borné	120
6.2.3	Discussion autour du paramètre de Lagrange $\gamma$	124
6.2.4	Un algorithme de calcul de la solution du problème extrémal borné	127

Ce chapitre est consacré à l'étude théorique du problème extrémal borné formulé dans la Section 5.2.3. Nous reprenons ainsi l'ensemble des notations introduites dans le Chapitre 5. Pour rappel, l'ensemble  $I \subsetneq \partial\Omega$  désigne la partie du bord sur laquelle les données de Dirichlet et Neumann sont disponibles et est soumis à l'hypothèse  $(H_{I,J})$  dans le cas doublement connexe. On note aussi  $J = \partial\Omega \setminus I$ , de mesure strictement positive, la partie du bord où aucune information n'est connue.

Nous avons vu en effet que le problème de Cauchy ne pouvait être résolu par extrapolation de données au bord lorsque ces dernières n'étaient pas compatibles. Nous avons donc été amenés à reformuler ce problème sous la forme d'un problème de meilleure approximation dans une classe de fonctions analytiques généralisées, à savoir la classe  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  (voir Définition 5.2.3.1). Mentionnons que dorénavant (excepté les fois où nous le préciserons explicitement), nous nous intéressons uniquement à une version équivalente du (PEB) décrite dans la section 5.2.3. En effet, nous avons déjà évoqué le fait qu'il était possible de contraindre seulement en partie réelle sur le bord  $J$  les éventuelles solutions recherchées au problème de Cauchy (voir commentaires de la Définition 5.2.3.1). A partir de maintenant on adopte définitivement la notation suivante :

**Définition 6.0.3.2** Soient  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ . Soient aussi  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$ . On note alors  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  l'espace défini par

$$\mathcal{B}_{M,\Phi}^p = \left\{ g \in \text{tr}_{\partial\Omega} H_{\nu}^p(\Omega); \| \text{Re}(g) - \Phi \|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M \right\}_{|I} \subset L^p(I) .$$

La question à laquelle ce chapitre va apporter une réponse est alors la suivante :

*Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ ,  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^p(I)$ , existe-t-il une unique fonction  $g_0 \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  telle que*

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p} \|F_d - g\|_{L^p(I)} ?$$

A nouveau nous insistons sur le fait que choisir de contraindre seulement en partie réelle sur  $J$  sera pleinement justifié lors de l'application des résultats de ce chapitre à la situation du tokamak Tore Supra (voir Partie IV).

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, nous allons répondre positivement au problème  $(PEB)$ . La preuve de ce point fera explicitement appel aux résultats de Dirichlet et de densité énoncés dans les Chapitres 4 et 5. Nous conclurons alors définitivement la résolution du problème de Cauchy dans la classe  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  en prouvant que la solution trouvée dépend continuellement des données  $F_d$  et  $M$  ( $\Phi$  aura été supposée ajustée indépendamment de celles-ci).

Dans un deuxième temps, nous porterons notre attention sur le cas hilbertien, à savoir  $p = 2$ . Nous évoquerons ainsi des résultats de [10] et [23] nous permettant de donner une formulation explicite de la solution du  $(PEB)$  en termes d'opérateurs de projection. Toutefois le caractère « explicite » de la solution sera nuancé par le fait qu'elle s'exprime en fonction d'un paramètre  $\lambda$  de type Lagrange lui-même fonction de la contrainte  $M$  que l'on s'est fixée sur le bord  $J$ . Cette dépendance en  $\lambda$  fait *a priori* office d'obstacle à la résolution puisque comme nous l'avons déjà mentionné dans les commentaires de la Définition 5.2.3.1, le choix du paramètre  $M$  aura une influence certaine sur la solution calculée du  $(PEB)$ . Afin de contourner cette difficulté, nous mettrons en avant le caractère monotone et régulier de la fonction  $M \mapsto \lambda(M)$  ce qui conduira aux prémices de l'algorithme mis en place pour l'identification de la frontière du plasma dans le tokamak Tore Supra (voir Partie IV).

### **Précision sur les notations**

Tout au long de chapitre, nous supposons que  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfait  $(\kappa)$ ,  $\Omega$  changeant bien entendu selon que l'on se trouve dans le cas simplement connexe ou bien doublement connexe. De même,  $\sigma \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  désignera toujours la conductivité associée à  $\nu$  avec la relation (1.6). Nous faisons le choix de ne plus rappeler les hypothèses concernant ces deux fonctions tout d'abord pour alléger les notations, mais aussi car cela n'entraînera aucune confusion contrairement à certains résultats des précédents chapitres où on était quelquefois amené à manipuler des conductivités  $\nu_i \in H_{\nu}^p(\mathbb{D})$  et  $\nu_e \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\rho}$ .

## **6.1 Existence et unicité de la solution du problème extrémal borné**

Cette section est consacrée en premier lieu à la démonstration de certaines propriétés de l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . Il n'est en effet pas difficile de se rendre compte de certaines conditions

nécessaires à l'existence et l'unicité de la solution du problème extrémal borné. Ainsi,  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  est clairement un sous ensemble de  $L^p(I)$  et nous avons déjà fait remarquer que celui-ci n'était pas vide (voir les commentaires de la Définition 5.2.3.1). Aussi, comme le but est de réaliser une meilleure approximation d'un élément  $F_d \in L^p(I)$  dans l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , il est classique de voir la solution du problème extrémal borné, si elle existe, comme la projection (réalisant la distance minimale) de  $F_d$  sur  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ .

L'existence d'une telle projection est abordée dans la Section 6.1.1 où nous prouvons la convexité ainsi que le caractère fermé pour la norme  $L^p(I)$  de l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . Nous concluons alors la résolution du problème extrémal borné dans la Section 6.1.2 en prouvant par ailleurs le fait que si  $F_d$  n'appartient pas déjà à  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  alors la solution trouvée sature la contrainte.

### 6.1.1 Quelques propriétés de l'espace $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$

Le résultat clef qui va nous servir à résoudre le problème extrémal borné est le suivant :

**Proposition 6.1.1.1**  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  est un espace convexe et fermé pour la norme  $L^p(I)$ .

*Preuve.* Par convexité de l'application  $g \mapsto \|g\|_{L^p(J)}$ , on obtient directement celle de  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . Passons alors au caractère fermé de  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  pour la norme  $L^p(I)$ . Soit  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $tr H_v^p(\Omega)$  telle que  $g_{k|I} \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et aussi telle que

$$g_{k|I} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} g_I, \quad g_I \in L^p(I).$$

Notons  $u_k = Re(g_k)$ . La convergence de  $g_{k|I}$  vers  $g_I$  assure que  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $L^p(I)$ . Mais par appartenance de  $g_{k|I}$  à  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ ,  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est aussi bornée dans  $L^p(J)$ , donc dans  $L^p(\partial\Omega)$ . Comme  $g_k$  est la solution au problème de Dirichlet ( $PDf$ ) pour la donnée réelle au bord  $u_k$ , on a avec les Théorèmes 4.1.2.2 et 4.3.2.1 que  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée dans  $tr H_v^p(\Omega)$  qui est un sous-espace fermé de l'espace de Banach réflexif  $L^p(\partial\Omega)$  avec la propriété 3 de la Proposition 3.2.3.2. Donc il existe une sous-suite, que par un abus de langage on nomme encore  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , qui converge faiblement vers  $G \in tr H_v^p(\Omega)$  avec le théorème de Banach-Alaoglu [46]. Par convergence forte de  $g_{k|I}$  vers  $g_I \in L^p(I)$ , on a nécessairement que  $g_I = G|I \in (tr H_v^p(\Omega))|I$ . Finalement comme  $u_k = Re(g_k)$  satisfait la contrainte en partie réelle sur  $J$ , c'est aussi le cas de  $Re(G)$ . Ceci permet de conclure au fait que  $g_I$  est la restriction à  $I$  d'une fonction  $G \in tr H_v^p(\Omega)$  dont la partie réelle vérifie

$$\|Re(G) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M,$$

ce qui prouve l'appartenance de  $g_I$  à  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  et par conséquent le caractère fermé en norme  $L^p(I)$  de ce dernier. ■

La Proposition 6.1.1.1 fournit donc les arguments conditionnant l'existence d'une projection des éléments de  $L^p(I)$  sur  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ . La résolution complète du ( $PEB$ ) est finalement achevée dans la Section 6.1.2.

### 6.1.2 Résolution

Suite à la Proposition 6.1.1.1, nous pouvons désormais énoncer le

**Théorème 6.1.2.1** *Soient  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^p(I)$ , il existe une unique fonction  $g_0 \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  telle que*

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \min_{g \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p} \|F_d - g\|_{L^p(I)} .$$

*De plus, si  $F_d \notin \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , alors la contrainte est saturée, c'est-à-dire*

$$\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} = M .$$

*Preuve.* Remarquons tout d'abord que l'espace  $L^p(I)$  est un espace de Banach uniformément convexe [29, Part 3, Chap. II, §1, Prop. 8]. Cette remarque combinée aux résultats de la Proposition 6.1.1.1 nous assurent l'existence et l'unicité de  $g_0$ . En effet, il existe une projection (ou encore meilleure approximation) sur tout sous-ensemble convexe fermé d'un espace de Banach uniformément convexe [29, Part 3, Chap. II, §1, Prop. 5].

Prouvons maintenant que si  $F_d \notin \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , alors  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} = M$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} < M$ . Comme  $F_d$  n'est pas une donnée compatible par hypothèse, cela implique que  $\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} > 0$ . Alors avec les Théorèmes 5.1.1.1 et 5.1.2.1, il existe une fonction  $h \in tr H_{\nu}^p(\Omega)$  telle que

$$\|F_d - g_0 - h\|_{L^p(I)} < \|F_d - g_0\|_{L^p(I)} .$$

Et grâce à l'inégalité triangulaire, on obtient pour tout  $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \|F_d - g_0 - \lambda h\|_{L^p(I)} &= \|\lambda(F_d - g_0 - h) + (1 - \lambda)(F_d - g_0)\|_{L^p(I)} \\ &\leq |\lambda| \|F_d - g_0 - h\|_{L^p(I)} + |1 - \lambda| \|F_d - g_0\|_{L^p(I)} \\ &< \|F_d - g_0\|_{L^p(I)} . \end{aligned}$$

Maintenant, comme  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} < M$  par hypothèse, il en découle que pour  $\lambda$  suffisamment petit, on a encore

$$\|Re(g_0 + \lambda h) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^p(J)} \leq M .$$

Pour résumer,  $g_0 + \lambda h \in \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  cependant que

$$\|F_d - (g_0 + \lambda h)\|_{L^p(I)} < \|F_d - g_0\|_{L^p(I)} .$$

Ceci contredit clairement l'optimalité de  $g_0$ , ce qui est absurde. ■

Ce résultat répond donc de façon positive à la question posée par le problème (PEB). Il est intéressant de s'interroger sur la qualité de l'approximation effectuée dans la classe  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  en fonction de la seule valeur du paramètre  $M$  (et donc lorsque la fonction  $\Phi$

est fixée). En effet, notons  $e(M)$  l'erreur d'approximation sur  $I$  de la projection de  $F_d$ , supposée être une donnée non compatible, sur  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^p$ , c'est-à-dire

$$e(M) = \|F_d - g_0\|_{L^p(I)}. \quad (6.1)$$

Comme pour chaque  $M > 0$  l'inclusion suivante tient

$$\mathcal{B}_{M_1,\Phi}^p \subset \mathcal{B}_{M_2,\Phi}^p, \quad M_1 \leq M_2,$$

on en déduit que

$$e(M_1) \geq e(M_2), \quad M_1 \leq M_2.$$

Cela signifie donc que pour une contrainte  $M_2 \geq M_1$ , on est sûr de réaliser une approximation au moins aussi bonne que celle obtenue avec la contrainte  $M_1$ . Il n'était cependant pas *a priori* clair que l'erreur ne devienne pas constante à partir d'une certaine valeur de  $M$ . C'est à cette question que répond la deuxième partie du Théorème 6.1.2.1 dans la mesure où la saturation de la contrainte lorsque  $F_d \notin \mathcal{B}_{M,\Phi}^p$  nous assure que  $M \mapsto e(M)$  est une fonction strictement décroissante. Grossièrement parlant, cette saturation confirme que l'approximant cherché utilise bien le supplément d'information mis à sa disposition par son appartenance à la classe  $\mathcal{B}_{M_2,\Phi}^p$  par rapport à la classe  $\mathcal{B}_{M_1,\Phi}^p$ .

Maintenant il est facile de voir que le cas où  $M \rightarrow \infty$  n'est qu'une confirmation des résultats de densité des Théorèmes 5.1.1.1 et 5.1.2.1, à savoir qu'il est possible d'approcher arbitrairement près sur  $I$  la fonction  $F_d$  en norme  $L^p(I)$  à condition de n'imposer à  $g_0$  aucune contrainte d'évolution par rapport à la fonction  $\Phi$  (ce qui signifie encore que  $e(M) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ ). Bien sûr on ne peut se satisfaire de cette dernière remarque puisqu'il a déjà été constaté que vouloir approcher trop bien  $F_d$  sur  $I$  se faisait au détriment du comportement de  $g_0$  sur  $J$  (voir Proposition 5.2.2.1). On comprend alors que le paramètre  $M$  sert en quelque sorte de jauge entre la précision de l'approximant recherché sur  $I$  et le comportement souhaité de ce dernier sur  $J$ .

Même si nous ne l'avons pas évoqué jusqu'à présent, la fonction  $F_d$  du Théorème 6.1.2.1 peut aussi être vue comme un paramètre dont va dépendre la solution  $g_0$  du (PEB). En fait, dans les applications que nous envisageons du Théorème 6.1.2.1, seule la fonction  $\Phi$  sera un paramètre ajusté au début du problème grâce à notre connaissance des mécanismes physiques régissant le système modélisé. Cela n'empêche toutefois pas de se poser la question de la continuité de  $g_0$  en fonction des données initiales  $(F_d, M)$ . En effet, l'existence, l'unicité et la stabilité sur  $J$  fournies par le Théorème 6.1.2.1 ne permettent pas encore de dire si pour deux couples de paramètres  $(F_{d_1}, M_1)$  et  $(F_{d_2}, M_2)$  proches au sens de la norme de  $L^p(I) \times \mathbb{R}_+^*$ , les solutions  $g_1$  et  $g_2$  associées (pour une même fonction  $\Phi$ ) sont elles aussi proches au sens de la norme  $H_v^p(\Omega)$  (ou bien encore  $L^p(I)$ ). Répondre à cette question permet non seulement d'achever la résolution au sens de Hadamard du problème de Cauchy posé initialement mais s'avère aussi crucial pour la mise en place d'un algorithme robuste de recherche d'une solution  $g_0$  convenable.

La continuité de la solution  $g_0$  du (PEB) par rapport aux données  $F_d$  et  $M$  est fournie par [93, Thm. 3.5]. Nous en donnons un énoncé adapté aux espaces de Hardy généralisés dont la preuve est strictement identique et que par conséquent nous ne reformulons pas. Pour les besoins du résultat annoncé, faisons un abus de notation en notant à nouveau  $g_0$  l'application définie par

$$\begin{aligned} g_0 : L^p(I) \times \mathbb{R}_*^+ &\rightarrow H_\nu^p(\Omega) \\ (F_d, M) &\mapsto g_0(F_d, M) \end{aligned}$$

où  $g_0$  est la solution du (*PEB*) associé aux paramètres  $(F_d, M)$ . Enfin, on note

$$\mathcal{D}_{M,\Phi}^p = \left\{ h \in \text{tr } H_\nu^p(\Omega); \| \text{Re}(h) - \Phi \|_{L^p_{\mathbb{R}}(J)} < M \right\}_I.$$

On a alors le

**Théorème 6.1.2.2** *L'application  $g_0$  est continue sur  $(L^p(I) \times \mathbb{R}_*^+) \setminus \mathcal{D}_{M,\Phi}^p$ , mais pas sur tout  $L^p(I) \times \mathbb{R}_*^+$ . Toutefois, si  $(F_{d_n}, M_n)$  converge vers  $(F_d, M)$  dans  $L^p(I) \times \mathbb{R}_*^+$  alors  $g_0(F_{d_n}, M_n)$  converge faiblement vers  $g_0(F_d, M)$  dans  $L^p(\partial\Omega)$  et fortement vers  $g_0(F_d, M)$  dans  $L^p(I)$ .*

Maintenant que l'importance du choix de  $M$  a été discutée et que la continuité par rapport aux données initiales a été établie, il convient bien entendu d'élaborer une stratégie permettant d'optimiser le choix de  $M$  (puisque finalement  $F_d$  sera une donnée fixe dans les applications que nous allons traiter). On remarque alors que même si le Théorème 6.1.2.1 résout la question de l'existence et de l'unicité d'une solution  $g_0$  au (*PEB*), nous n'avons pas pour l'instant la possibilité d'exhiber cette dernière. Ceci constitue donc la prochaine étape dans la résolution du problème extrémal borné à laquelle nous allons répondre dans un cas particulier.

## 6.2 Le cas hilbertien

Il n'est *a priori* pas aisé d'expliciter la fonction  $g_0$  donnée par le Théorème 6.1.2.1 lorsque  $p \in (1, \infty)$  est quelconque. Toutefois, dans le cas hilbertien, c'est-à-dire lorsque  $p = 2$ , il est possible de donner une formule pour le calcul de  $g_0$  faisant intervenir un opérateur de projection qui généralise l'opérateur de projection analytique  $P_+$  déjà rencontré dans le cas des espaces de Hardy classiques (voir Définition 4.1.2.1).

**Dorénavant, et jusqu'à la fin de ce manuscrit, nous munissons  $L^2(\partial\Omega)$  et  $H_\nu^2(\Omega)$  de la structure réelle d'espace Hilbertien au moyen du produit scalaire défini par (3.1).**

### 6.2.1 Opérateur de projection analytique généralisé

La généralisation de l'opérateur de projection analytique  $P_+$  a été proposée par [14] avec celle de l'opérateur de conjugaison harmonique classique  $\mathcal{H}_0$ . Nous avons vu à la Section 4.2 qu'il était possible d'étendre la notion de conjugaison harmonique pour les solutions de l'équation (1.7). Ceci a été fait au cours de cette thèse tout d'abord en reprenant les travaux de [14] pour  $p = 2$  puis ceux de [25] pour  $p \in (1, \infty)$  dans le cas simplement connexe, puis ensuite en résolvant le problème de Dirichlet (*PDF*) dans le cas doublement connexe (voir Section 4.3.2). Notons que dans le cas hilbertien, la projection analytique généralisée de  $f \in L^2(\partial\Omega)$  peut être construite à partir de la connaissance d'une famille complète de fonctions de  $\text{tr } H_\nu^2(\Omega)$  comme cela est explicitée dans l'introduction

du Chapitre 7. Il est néanmoins possible d'étendre la formule (4.18) dans le cas où  $Re f$  et  $Im f$  vérifient certaines conditions de compatibilité, ce que nous exposons dès à présent.

Commençons par introduire quelques notations supplémentaires.

**Définition 6.2.1.1** *On note  $L : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$  l'opérateur (borné) de moyenne sur  $\mathbb{T}$ . On a pour tout  $f \in L^2(\partial\Omega)$*

$$L(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta .$$

En concordance avec la Section 4.3.2, on peut naturellement étendre la définition de l'opérateur  $P_+$  dans le cas doublement connexe avec la

**Définition 6.2.1.2** *On note  $P_\nu$  l'opérateur de projection analytique généralisée de  $L^2(\partial\Omega)$  sur  $tr H_\nu^2(\Omega)$ . Pour tout  $f = u + iv \in L^2(\partial\Omega)$  telle que  $u \in \mathcal{U}_\sigma^{p,0}(\Omega)$  et  $v \in \mathcal{V}_\sigma^{p,0}(\Omega)$ , celui-ci est donné par*

$$P_\nu f = \frac{1}{2} ((I + i\mathcal{H}_\nu)f + L(f)) . \quad (6.2)$$

La relation (6.2) est la généralisation au cas doublement connexe de (4.18) où l'on a simplement remplacé  $\mathcal{H}_0$  par  $\mathcal{H}_\nu$ . Il est important de noter que dans le cas simplement connexe, cette formule est valable pour tout  $f = u + iv \in L^2(\mathbb{D})$  sans restriction sur  $u$  et  $v$  dans la mesure où toute fonction de  $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$  admet une conjuguée  $\sigma$ -harmonique d'après le Théorème 4.1.2.2 et la Définition 4.2.1.1.

Rappelons alors quelques unes des propriétés de l'opérateur  $P_\nu$  données dans [14]. Pour comprendre celles-ci, il convient en premier lieu de faire quelques remarques supplémentaires concernant l'opérateur de conjugaison  $\sigma$ -harmonique  $\mathcal{H}_\nu$  qui le caractérise totalement.

Concernant l'opérateur  $\mathcal{H}_\nu$ , on a pour  $u \in L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$  admettant une conjuguée  $\sigma$ -harmonique (l'existence de cette dernière ayant été discutée dans les Sections 4.2 et 4.3.2) :

$$- \quad (\mathcal{H}_\nu \circ L)(u) = (L \circ \mathcal{H}_\nu)(u) = 0 . \quad (6.3)$$

Le fait que  $(L \circ \mathcal{H}_\nu)(u) = 0$  est contenu dans la définition de  $\mathcal{H}_\nu$  puisque  $\mathcal{H}_\nu(u)$  est l'élément solution du système (1.4) normalisé pour que cette égalité soit vraie. Enfin, comme la conjuguée  $\sigma$ -harmonique des fonctions constantes est clairement aussi une constante  $C$ , normaliser cette dernière par  $L(C) = 0$  implique que  $C = 0$ .

$$- \quad (\mathcal{H}_{-\nu} \circ \mathcal{H}_\nu)(u) = (\mathcal{H}_\nu \circ \mathcal{H}_{-\nu})(u) = -u + L(u) . \quad (6.4)$$

En effet, désignons par  $v$  une solution, définie à une constante additive près, du système (1.4). Alors il vient que  $\mathcal{H}_\nu(u) = v - L(v)$  avec le Corollaire 4.2.1.1. Donc avec le point précédent, on a  $\mathcal{H}_{-\nu}(v - L(v)) = \mathcal{H}_{-\nu}(v)$ . Maintenant avec le Lemme 4.1.3.1, on sait que comme  $f = u + iv \in H_\nu^p(\Omega)$  alors  $-if = v - iu \in H_{-\nu}^p(\Omega)$ . Ce qui signifie encore que  $\mathcal{H}_{-\nu}(v) = -u - L(-u) = -u + L(u)$ . La seconde égalité se montre de la même manière.

$$- \quad (\mathcal{H}_\nu + L)^{-1} = -\mathcal{H}_{-\nu} + L, \quad (6.5)$$

ceci provenant directement de la relation (6.4).

On peut alors énoncer quelques propriétés de l'opérateur  $P_\nu$  :

$$- \quad P_\nu \circ L = L \circ P_\nu = L. \quad (6.6)$$

Ceci s'obtient directement de la relation (6.3) et du fait que  $L \circ L = L$ .

- L'opérateur  $P_\nu$  est bien une projection [14, Lemme 2.2]. On vérifie en effet que  $P_\nu^2 = P_\nu$  à l'aide des formules (6.3), (6.4), (6.6) et du Lemme 4.1.3.1. Finalement on en déduit l'équivalence  $g \in \text{tr } H_\nu^2(\Omega) \iff P_\nu(g) = g$ .
- La formule (6.2) admet une formulation matricielle. Soit en effet  $f = u + iv \in L^2(\partial\Omega)$ , comme dans la Définition 6.2.1.2 alors

$$P_\nu(f) = P_\nu \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} u - \mathcal{H}_{-\nu}(v) \\ \mathcal{H}_\nu(u) + v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L(u) \\ L(v) \end{pmatrix} \right]. \quad (6.7)$$

**Remarque 6.2.1.1** *Il convient de remarquer que ces propriétés de  $\mathcal{H}_\nu$  et  $P_\nu$  sont énoncés dans une section qui traite du cadre hilbertien mais sont néanmoins valables pour tout  $p \in (1, \infty)$ . Notons alors que nous n'avons pas introduit l'opérateur  $P_\nu$  dans le Chapitre 4 dans la mesure où nous allons en faire usage uniquement pour expliciter la solution du problème (PEB) lorsque  $p = 2$  (voir Section 6.2.2). Néanmoins il est important de remarquer que la formule (6.2) n'est applicable que sous certaines conditions, ce qui aura pour conséquences dans les chapitres suivants que nous donnerons notre préférence à une détermination de l'opérateur  $P_\nu$  au moyen d'une famille complète de  $\text{tr } H_\nu^2(\Omega)$ .*

## 6.2.2 Formulation “explicite” de la solution du problème extrémal borné

La résolution explicite du problème extrémal borné dans le cadre hilbertien a déjà été considérée par plusieurs auteurs. **Les résultats que nous rappelons maintenant, et jusqu'à mention du contraire, concernent la résolution d'un problème extrémal borné lorsque la contrainte est appliquée à toute la fonction, soit dans les espaces  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  (voir Définition 5.2.3.1). Conformément aux commentaires faisant suite à la Définition 5.2.3.1, nous supposons dorénavant que  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  est un espace non vide. Par ailleurs, nous verrons à la fin de cette section comment dériver ces résultats dans les espaces  $\mathfrak{B}_{M,\Phi}^p$  (voir Définition 6.0.3.2).**

Ainsi, pour ce qui est du cas  $F_d = 0$  et lorsque l'espace de travail est l'espace de Hardy classique du demi-plan supérieur, nous renvoyons à [100]. Par la suite, [10] ont généralisé ces résultats à la situation  $F_d \in L^2(\mathbb{T})$  et  $\Phi = 0$  mais toujours dans le cadre des espaces de Hardy classiques. Nous proposons de rappeler ces derniers afin que le lecteur puisse comprendre comment est obtenue la solution du problème extrémal borné, sans pour autant donner tous les détails des preuves. Mentionnons simplement que l'extension de ces résultats au cas des espaces de Hardy généralisés (sur des domaines simplement et

doublement connexes) est naturelle et ne nécessite pas de détails supplémentaires. Nous les énonçons donc dans ce cadre.

Concernant les notations utilisées, rappelons que dorénavant la notation  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  fait référence au produit scalaire donné par (3.1) et que celui-ci sera généralement indexé par l'ensemble sur lequel le produit scalaire est effectué afin qu'il n'y ait pas de confusion. Par ailleurs, nous utiliserons à plusieurs reprises la notation  $\chi_E f$  où  $f \in L^2(E)$  avec  $E \subsetneq \partial\Omega$ . Il s'agit là d'un abus de notation dans la mesure où il convient plutôt de parler de  $\chi_E \tilde{f}$  où  $\tilde{f}$  désigne n'importe quelle extension de  $f$  à tout  $\partial\Omega$  de telle sorte que  $\tilde{f} \in L^2(\partial\Omega)$  (on peut par exemple prolonger  $f$  par 0 en dehors de  $E$ ). **Néanmoins, dans un souci de simplification des notations, nous pratiquerons l'abus consistant à identifier les fonctions  $\chi_E f$  et  $(f \vee 0) \in L^2(\partial\Omega)$ .**

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi = 0$ . Soit  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathfrak{B}_{M,0}^2$ . D'après le Théorème 6.1.2.1, il existe une unique fonction  $g_0 \in \mathfrak{B}_{M,0}^2$  solution du problème extrémal borné dans  $\mathfrak{B}_{M,0}^2$ , qui est donc la projection orthogonale de  $F_d$  sur  $\mathfrak{B}_{M,0}^2$ . En reprenant la notation (6.1) pour l'erreur  $e$ , mais en considérant cette fois-ci, ce qui est bien entendu possible, qu'il s'agit d'une fonction de  $g \in \mathfrak{B}_{M,0}^2$ , on a que l'application

$$\begin{aligned} e : \mathfrak{B}_{M,0}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \|F_d - g\|_{L^2(I)}^2 \end{aligned}$$

est de classe  $C^1$ . Par ailleurs,  $g \in \mathfrak{B}_{M,0}^2$  est un point critique de  $e$  si et seulement si

$$\langle F_d - g, u \rangle_{L^2(I)} = 0, \quad u \in \mathcal{T}_M(g), \quad (6.8)$$

où  $\mathcal{T}_M(g)$  représente l'espace tangent à  $\mathfrak{B}_{M,0}^2$  au point  $g$ , c'est-à-dire  $\mathcal{T}_M(g) = \text{Ker } D_g \psi$  avec (on note  $D_g \psi(u)$  la dérivée directionnelle de l'application  $\psi$  au point  $g$  suivant le vecteur  $u$ )

$$\begin{aligned} \psi : \text{tr } H_\nu^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\ g &\mapsto \|g\|_{L^2(J)}^2 \end{aligned} .$$

Au moyen de la relation suivante

$$\langle F_d - g_0, w - g_0 \rangle_{L^2(I)} \leq 0, \quad w \in \mathfrak{B}_{M,0}^2$$

qui est une propriété classique des projections (voir [29, Part 2, Chap. I, Prop. 2]), on en déduit que  $g_0$  est l'unique point critique de l'application  $e$  sur  $\mathfrak{B}_{M,0}^2$  satisfaisant [10, Prop. 3]

$$\langle F_d - g_0, g_0 \rangle_{L^2(I)} \geq 0. \quad (6.9)$$

Soit maintenant  $u \in H_\nu^2(\Omega)$  un élément de  $\mathcal{T}_M(g_0)$ . Avec (6.8), on obtient

$$\langle \chi_I F_d - g_0, u \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle F_d - g_0, u \rangle_{L^2(I)} - \langle g_0, u \rangle_{L^2(J)} = 0.$$

Par ailleurs, avec (6.9), il vient que

$$\langle \chi_I F_d - g_0, g_0 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle F_d - g_0, g_0 \rangle_{L^2(I)} - \langle g_0, g_0 \rangle_{L^2(J)} \geq -M^2,$$

puisque  $\|g_0\|_{L^2(J)} = M$  par hypothèse (on rappelle que  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathfrak{B}_{M,0}^2$ , et que par conséquent la contrainte est saturée). Il est bien entendu possible de réécrire ces deux dernières relations sous la forme

$$\langle P_\nu(\chi_I F_d) - g_0, u \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = 0, \quad u \in \mathcal{T}_M(g_0) \quad (6.10)$$

et

$$\langle P_\nu(\chi_I F_d) - g_0, g_0 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \geq -M^2, \quad (6.11)$$

étant donné que  $g_0$  et  $u$  appartiennent à  $tr H_\nu^2(\Omega)$ , que l'opérateur  $P_\nu$  est l'identité sur cet espace (voir Définition 6.2.1.2) et qu'il est de plus auto-adjoint en tant que projection orthogonale.

Constatons maintenant que

$$\langle P_\nu(\chi_J g_0), u \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle g_0, u \rangle_{L^2(J)} = 0, \quad u \in \mathcal{T}_M(g_0), \quad (6.12)$$

mais aussi que  $P_\nu(\chi_J g_0) \neq 0$ . En effet, si c'était le cas, alors on aurait  $\chi_J g_0 \in (tr H_\nu^2(\Omega))^\perp$ , ce qui signifierait que pour tout  $h \in tr H_\nu^2(\Omega)$

$$0 = \langle \chi_J g_0, h \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \langle g_0, h \rangle_{L^2(J)} .$$

Donc en prenant  $h = g_0$ , on obtient que  $M^2 = \|g_0\|_{L^2(J)}^2 = 0$ , ce qui contredit l'hypothèse sur  $M$ . Finalement, à la vue des équations (6.10) et (6.12), et comme on a à la fois que  $\mathcal{T}_M(g_0)$  est de codimension réelle 1 et que  $P_\nu(\chi_J g_0) \neq 0$ , on déduit l'existence d'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que

$$g_0 + \lambda P_\nu(\chi_J g_0) = P_\nu(\chi_I F_d) .$$

Un dernier calcul montre alors que

$$\langle P_\nu(\chi_I F_d) - g_0, g_0 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \lambda \langle P_\nu(\chi_J g_0), g_0 \rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \lambda \langle g_0, g_0 \rangle_{L^2(J)} = \lambda M^2, \quad (6.13)$$

si bien qu'avec (6.11), on obtient finalement  $\lambda \geq -1$ . Montrons maintenant que le cas  $\lambda = -1$  peut être exclu. Supposons donc que  $\lambda = -1$  et reportons ceci dans (6.13). Après simplification, il reste que

$$P_\nu \chi_I (g_0 - F_d) = 0 ,$$

ce qui signifie que  $\chi_I (g_0 - F_d) \in (tr H_\nu^2(\Omega))^\perp$ , ou encore que  $g_0 - F_d \in (tr H_\nu^2(\Omega)|_I)^\perp$ .

Or, comme  $(tr H_\nu^2(\Omega)|_I)^\perp = \{0\}$  avec le résultat de densité du Théorème 5.1.2.1, on a finalement que  $g_0 = F_d$  sur  $I$  ce qui contredit l'hypothèse faite sur  $F_d$ . Par conséquent le cas  $\lambda = -1$  doit être exclu.

On peut désormais conclure en remarquant que la relation

$$\langle P_\nu(\chi_J g), g \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \geq 0, \quad g \in tr H_\nu^2(\Omega),$$

entraîne que  $P_\nu \chi_J$  est un opérateur borné auto-adjoint, positif, de norme 1 et avec un spectre contenu dans  $[0, 1]$  [122, Chap. 3]. En particulier  $I + \lambda P_\nu \chi_J$  admet un inverse borné sur  $tr H_\nu^2(\Omega)$  pour  $\lambda \in (-1, \infty)$ .

Pour résumer, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 6.2.2.1** *Soit  $M \in \mathbb{R}_*^+$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathfrak{B}_{M,0}^2$ , il existe un unique  $\lambda \in (-1, \infty)$  tel que si*

$$g_0 = (I + \lambda P_\nu \chi_J)^{-1} P_\nu(\chi_I F_d) ,$$

alors  $\|g_0\|_{L^2(J)} = M$ . La fonction  $g_0$  est la solution du problème extrémal borné.

Une première généralisation de ce résultat a été apportée par [23] en considérant une contrainte de type  $\|g_0 - \Phi\|_{L^2(J)} = M$  avec  $\Phi \in L^2(J)$ . Son énoncé dans le cadre des espaces de Hardy généralisés est donné par

**Corollaire 6.2.2.1** *Soit  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L^2(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathfrak{B}_{M,\Phi}^2$ , il existe un unique  $\lambda \in (-1, \infty)$  tel que si*

$$g_0 = (I + \lambda P_\nu \chi_J)^{-1} P_\nu(F_d \vee (\lambda + 1)\Phi) ,$$

alors  $\|g_0 - \Phi\|_{L^2(J)} = M$ . La fonction  $g_0$  est la solution du problème extrémal borné.

**Revenons maintenant au problème (PEB) dans les espaces  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^2$ , c'est-à-dire celui pour lequel la contrainte sur  $J$  est exprimée en partie réelle.**

A partir du Corollaire 6.2.2.1, on a le

**Corollaire 6.2.2.2** *Soit  $M \in \mathbb{R}_*^+$  et  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^2(J)$ . Pour toute fonction  $F_d \in L^2(I) \setminus \mathcal{B}_{M,\Phi}^2$ , il existe un unique  $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$  tel que si*

$$P_\nu(\chi_I g_0) + \gamma P_\nu(\chi_J Re(g_0)) = P_\nu(\chi_I F_d) + \gamma P_\nu(\chi_J \Phi) , \quad (6.14)$$

alors  $\|Re(g_0) - \Phi\|_{L^2(J)} = M$ . La fonction  $g_0$  est la solution du problème extrémal borné.

*Preuve.* Notons  $g_0$  la solution du problème extrémal borné formulé avec la contrainte

$$\|Re(g) - \Phi\|_{L_{\mathbb{R}}^2(J)} \leq M .$$

qui est donnée par le Théorème 6.1.2.1. Remarquons que cette contrainte est bien équivalente à

$$\|g - (\Phi + iIm(g))\|_{L^2(J)} \leq M$$

En posant  $\Psi = \Phi + iIm(g_0)$  ainsi que  $\lambda + 1 = \gamma$ , on a donc que

$$(I + (\gamma - 1)P_\nu \chi_J)(g_0) = P_\nu(F_d \vee \gamma\Psi) . \quad (6.15)$$

Comme  $g_0 \in tr H_\nu^2(\Omega)$ , il est clair que  $P_\nu(g_0) = g_0$ . Donc le membre de gauche dans (6.15) peut encore s'écrire

$$\begin{aligned}
(I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)(g_0) &= P_\nu(g_0) + (\gamma - 1)P_\nu(\chi_J g_0) \\
&= P_\nu(\chi_I g_0) + P_\nu(\chi_J g_0) \\
&\quad + (\gamma - 1)(P_\nu(\chi_J Re(g_0)) + P_\nu(\chi_J iIm(g_0))) \\
&= P_\nu(\chi_I g_0) + P_\nu(\chi_J g_0) - P_\nu(\chi_J iIm(g_0)) \\
&\quad + (\gamma - 1)P_\nu(\chi_J Re(g_0)) + \gamma P_\nu(\chi_J iIm(g_0)) \\
&= P_\nu(\chi_I g_0) + P_\nu(\chi_J Re(g_0)) \\
&\quad + (\gamma - 1)P_\nu(\chi_J Re(g_0)) + \gamma P_\nu(\chi_J iIm(g_0)) \\
&= P_\nu(\chi_I g_0) + \gamma P_\nu(\chi_J Re(g_0)) + \gamma P_\nu(\chi_J iIm(g_0)) .
\end{aligned}$$

Concernant le membre de droite de (6.15), on obtient

$$\begin{aligned}
P_\nu(F_d \vee \gamma\Psi) &= P_\nu(F_d \vee \gamma(\Phi + iIm(g_0))) \\
&= P_\nu(\chi_I F_d) + \gamma P_\nu(\chi_J \Phi) + \gamma P_\nu(\chi_J iIm(g_0)) . \tag{6.16}
\end{aligned}$$

La conclusion provient de l'égalité entre les expressions obtenues pour les membres de gauche et de droite de (6.16). ■

La résolution du (*PEB*) est dorénavant complètement achevée, du moins d'un point de vue théorique. Avant d'étudier la possibilité de construire effectivement la fonction  $g_0$  pour une conductivité particulière, soit celle associée au problème du tokamak (voir Chapitre 7), remarquons toutefois que la formulation donnée par le Corollaire 6.2.2.2 reste implicite au sens où elle ne fait pas apparaître le paramètre  $M$  qui était pourtant une donnée initiale. Bien entendu, la dépendance en  $M$  est symbolisée par le paramètre de Lagrange  $\gamma$  qui est ajusté pour que la contrainte soit saturée. Cependant cela ne nous fournit pas *a priori* une méthode permettant d'évaluer le "bon"  $\gamma$  correspondant à un paramètre  $M$  choisi. Nous allons proposer quelques éléments de réponse à cette question dans la Section 6.2.3.

### 6.2.3 Discussion autour du paramètre de Lagrange $\gamma$

Dans cette section, nous étendons le résultat de [23, Prop. 4] au cas des espaces de Hardy généralisés.

Nous constatons que même si nous disposons maintenant d'une formule pour le calcul de la fonction  $g_0$  solution du (*PEB*) (voir Corollaire 6.2.2.2), cette dernière semble difficile à exploiter par son caractère implicite en le paramètre  $\gamma$ . On comprend aisément qu'il n'est pas raisonnable de tester une infinité de valeurs pour  $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$  dans l'espoir de

trouver celle qui fournira une contrainte en partie réelle saturant un paramètre  $M$  fixé. Pour contourner cet obstacle, nous choisissons dans cette section de voir le paramètre  $M$  comme une fonction de la variable  $\gamma \in (0, \infty)$  et d'étudier l'évolution de  $M : \gamma \mapsto M(\gamma)$ . Remarquons que pour étudier cette évolution dans le cas doublement connexe, nous allons nous placer dans le cas particulier où le résultat de densité du Théorème 5.1.2.1 est à la fois vrai sur  $I$  et sur  $J$ , cette hypothèse étant en accord avec l'application envisagée pour le tokamak Tore Supra dans le Chapitre 8.

**Proposition 6.2.3.1** *Soit  $I \subsetneq \partial\Omega$  tel que  $I = \mathbb{T}, J = \mathbb{T}_\rho$  ou bien  $I = \mathbb{T}_\rho, J = \mathbb{T}$  dans le cas  $\Omega = \mathbb{A}$ . Alors la fonction  $\gamma \mapsto M(\gamma) = \|Re(g_0(\gamma)) - \Phi\|_{L^2_{\mathbb{R}}(J)}$ , obtenue grâce au calcul de la fonction  $\gamma \mapsto g_0(\gamma)$  avec le Corollaire 6.2.2.2, est une fonction strictement décroissante de  $\mathbb{R}_*^+$  dans  $\mathbb{R}_*^+$ .*

*Preuve.* Soient  $\Phi \in L^2_{\mathbb{R}}(J)$  et  $g_0$  la fonction fournie par le Corollaire 6.2.2.2. En reprenant la démonstration de ce dernier, on a que  $g_0$  est encore solution du problème extrémal borné formulé avec la contrainte saturée

$$\|g_0 - \Psi\|_{L^2(J)} = M, \quad (6.17)$$

où  $\Psi = \Phi + iIm(g_0)$ . Donc avec le Corollaire 6.2.2.1, on peut encore écrire que

$$g_0 = (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu(F_d \vee \gamma\Psi). \quad (6.18)$$

Cette écriture implique notamment que l'application

$$\begin{aligned} g_0 : (0, \infty) &\rightarrow tr H_\nu^2(\Omega) \\ \gamma &\mapsto g_0(\gamma) \end{aligned}$$

est régulière de  $(0, \infty)$  dans  $tr H_\nu^2(\Omega)$ . Dès lors avec (6.18), on a que

$$\begin{aligned} \frac{dg_0}{d\gamma} &= -(I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-2}P_\nu\chi_J P_\nu(F_d \vee \gamma\Psi) + (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu(\chi_J\Psi) \\ &= -(I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1} \left[ (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu\chi_J P_\nu(F_d \vee \gamma\Psi) - P_\nu(\chi_J\Psi) \right] \end{aligned}$$

et toujours avec (6.18) et le fait que  $P_\nu\chi_J$  est un opérateur borné auto-adjoint (voir Section 6.2.2) qui commute avec  $(I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)$ , il reste que

$$\frac{dg_0}{d\gamma} = -(I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi).$$

Observons maintenant qu'avec (6.17), on calcule

$$\begin{aligned} \frac{dM^2}{d\gamma} &= 2 \left\langle \frac{dg_0}{d\gamma}, g_0 - \Psi \right\rangle_{L^2(J)} \\ &= -2 \left\langle (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi), g_0 - \Psi \right\rangle_{L^2(J)}, \end{aligned}$$

que l'on peut écrire au moyen du produit scalaire sur tout  $\partial\Omega$  avec

$$\frac{dM^2}{d\gamma} = -2 \langle (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi), P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi) \rangle_{L^2(\partial\Omega)} ,$$

soit en posant  $\delta = P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi) \in H_\nu^2(\Omega)$

$$\frac{dM^2}{d\gamma} = -2 \langle (I + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)^{-1}\delta, \delta \rangle_{L^2(\partial\Omega)} . \quad (6.19)$$

Comme l'espace  $tr H_\nu^2(\Omega)$  est un espace de Hilbert et que l'opérateur  $P_\nu\chi_J$  est borné auto-adjoint de norme 1, une application du théorème spectral [123] nous donne que

$$\langle (1 + (\gamma - 1)P_\nu\chi_J)\delta, \delta \rangle_{L^2(\partial\Omega)} \geq \min(1, \gamma)\|\delta\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 , \quad \delta \in tr H_\nu^2(\Omega) ,$$

ce qui finalement conduit à  $\frac{dM^2}{d\gamma} \leq 0$ . Maintenant,  $\frac{dM^2}{d\gamma}$  est nul si et seulement si  $\delta = 0$  d'après (6.19). Or dire que  $\delta = 0$  est équivalent à dire que

$$P_\nu\chi_J(g_0 - \Psi) = 0 ,$$

qui n'est possible que si  $\chi_J(g_0) = \chi_J(\Psi)$  en raisonnant de la même manière que dans les calculs faits dans la Section 6.2.2 et puisque  $J$  satisfait les hypothèses nécessaires au résultat de densité du Théorème 5.1.2.1. En injectant ceci dans (6.17), on a finalement que  $M = 0$ . On en déduit donc la décroissance stricte de  $\gamma \mapsto M(\gamma)$  de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$ . ■

Au-delà du comportement de la fonction  $M : \gamma \mapsto M(\gamma)$ , la Proposition 6.2.3.1 nous fournit aussi des renseignements sur le comportement de l'erreur d'approximation sur  $I$  donnée par (6.1). Dans la mesure où  $M$  dépend de  $\gamma$ , on peut bien entendu voir cette erreur d'approximation comme une fonction de  $\gamma$  elle-aussi en notant

$$e(\gamma) = \|F_d - g_0(\gamma)\|_{L^2(I)} . \quad (6.20)$$

Nous avons constaté (voir les commentaires faisant suite au Théorème 6.1.2.1) que  $e(\gamma)$  était une fonction décroissante de  $M$ . Par conséquent, la Proposition 6.2.3.1 permet d'affirmer que  $e(\gamma)$  est une fonction croissante de  $\gamma$ . Ce comportement peut d'ailleurs être précisé puisque  $e(\gamma) \rightarrow 0$  lorsque  $M \rightarrow \infty$ , donc *a fortiori* lorsque  $\gamma \rightarrow 0$ .

On peut conclure cette section en affirmant que la stricte monotonie de la fonction  $M : \gamma \mapsto M(\gamma)$  permet de mettre en place une méthode d'ajustement du paramètre  $\gamma$  dans le but de trouver celui fournissant une fonction  $g_0$  satisfaisant une contrainte en partie réelle saturant un paramètre  $M$  fixé. Ceci est l'objet de la Section 6.2.4 .

Remarquons toutefois que les résultats de cette section ne donnent pas de renseignements précis sur le comportement des fonctions  $M : \gamma \mapsto M(\gamma)$  et  $e : \gamma \mapsto e(\gamma)$  lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  au sens où aucune estimation asymptotique n'a été trouvée. Des réponses partielles ont pu être apportées à cette question dans le cas des espaces de Hardy classiques et nous renvoyons le lecteur à [10, 100] pour les détails. L'obtention de résultats au moins similaires dans le cadre des espaces de Hardy généralisés serait bien entendu un moyen d'affiner la recherche du paramètre  $\gamma$  associé à une contrainte  $M$  fixée.



mise à jour de  $\gamma$ . Toutefois, comme nous souhaitons obtenir une contrainte  $M'$  très proche de  $M$  (voir commentaire précédent), il est probable que le fait de disposer d'un pas constant  $\varepsilon_2$  nous empêche d'atteindre la précision  $\varepsilon_1$ . Ce qui aurait pour conséquence que l'Algorithme 1 ne terminerait pas. Il est bien entendu possible de palier à ce problème en introduisant une méthode de dichotomie. En effet, la première utilisation du point 4 nous renseigne sur la monotonie de la suite des paramètres  $\gamma$  calculés. Dès lors, il suffit de faire un test sur cette monotonie afin de détecter sa mise en défaut. La dichotomie serait alors initialisée au moyen des deux derniers paramètres  $\gamma$  obtenus au moment de cette mise en défaut.

- L'Algorithme 1 répond à la question du calcul de  $g_0$  pour une contrainte  $M$  fixée. Toutefois, il se peut très bien que pour cette valeur de  $M$ , le critère d'approximation sur  $I$ , c'est-à-dire  $\|F_d - g_0\|_{L^2(I)}$ , ne nous donne pas satisfaction. Nous avons déjà remarqué que relâcher la contrainte  $M$  permettait d'améliorer le critère d'approximation sur  $I$  (voir Section 6.1.2). On comprend alors qu'idéalement, l'Algorithme 1 doit être inclus dans une boucle sur  $M$  et que cette dernière doit être arrêtée lorsqu'un compromis (défini par l'utilisateur) entre la qualité de l'approximation sur  $I$  et le comportement de l'approximant sur  $J$  a été atteint. Il s'agit là bien entendu d'un dilemme fortement dépendant de la qualité des données  $F_d$  mises à disposition. Si ces dernières s'avèrent être très bonnes (au sens "peu bruitées") alors on aura intérêt à privilégier une bonne approximation sur  $I$  tout en sachant que la qualité des données assurera un comportement raisonnable de l'approximant sur  $J$ . A contrario, si les données sont très bruitées, alors on aura intérêt à ne pas exiger un critère d'approximation trop petit mais plutôt à privilégier un comportement stable sur  $J$  sous peine de fournir une solution  $g_0$  approchant suffisamment bien, au sens de la norme  $L^2(I)$ , l'erreur introduite par le bruit sur les données.

Les résultats de cette section, et plus généralement de ce chapitre, ont permis la résolution théorique complète du (PEB) mais aussi la mise en place d'un algorithme de calcul de solution à contrainte fixée lorsque  $p = 2$ . Néanmoins, il reste que l'équation (6.14) permettant l'obtention de  $g_0$  demeure peu exploitable, au moins d'un point de vue numérique. Celle-ci nécessite en effet de déterminer la fonction  $P_\nu(f)$  pour toute  $f \in L^2(\partial\Omega)$ , avec  $P_\nu$  l'opérateur de projection analytique généralisé donné par la Définition 6.2.1.2. Cette question va être abordée et résolue dans le Chapitre 7 où nous allons déterminer une famille complète de l'espace  $H_\nu^2(\Omega)$  pour  $\Omega$  simplement ou doublement connexe. Cela aura pour conséquence la construction effective de l'opérateur de projection  $P_\nu$  et sera le point de départ de la résolution du problème de Cauchy formulé dans le cadre de l'application pour le tokamak Tore Supra (voir Partie IV).

# Chapitre 7

## Résolution constructive du problème extrémal borné

### Sommaire

<b>7.1</b>	<b>Stratégie de calcul de solutions explicites réelles . . . . .</b>	<b>131</b>
7.1.1	Formes attendues des solutions explicites . . . . .	131
7.1.2	Lien avec l'équation de Laplace . . . . .	133
<b>7.2</b>	<b>Solutions explicites en coordonnées toroïdales . . . . .</b>	<b>136</b>
7.2.1	Les coordonnées toroïdales . . . . .	136
7.2.2	Familles complètes dans $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$ . . . . .	140
7.2.3	Familles complètes dans $H^2_{\nu}(\Omega)$ . . . . .	145

Ce chapitre est consacré à la recherche de familles de fonctions complètes dans les espaces  $H^2_{\nu}(\Omega)$  (ou bien encore  $tr H^2_{\nu}(\Omega)$  par identification des éléments de  $H^2_{\nu}(\Omega)$  avec leur trace selon la propriété 2 de la Proposition 3.2.3.2) pour  $\Omega$  simplement et doublement connexe. Mentionnons que par “complète”, nous désignons une famille de fonctions denses dans  $H^2_{\nu}(\Omega)$ .

L'objectif de cette recherche est avant tout de mettre en place les outils nécessaires à la résolution effective du (*PEB*) qui sera abordée dans la Partie IV lors de l'application au tokamak Tore Supra. Cette étude est ainsi restreinte au cadre particulier décrit dans la Section 1.4.

**Note importante** : Nous supposons désormais jusqu'à la fin de ce manuscrit que  $\sigma = \frac{1}{x}$  et  $p = 2$ .

Le choix de la conductivité  $\sigma$  entraîne bien sûr celle de  $\nu$  avec (1.6). Par ailleurs, afin d'être en accord avec les résultats des chapitres précédents, il convient d'assurer la régularité de  $\sigma$  et  $\nu$  dans le domaine d'étude. Ce dernier ne peut donc pas contenir la droite d'équation  $x = 0$ . Par conséquent nous faisons le choix de travailler uniquement dans des domaines ouverts  $\Omega$  inclus dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$ . Ainsi, le complémentaire de  $\Omega$ , lorsque ce dernier n'est pas égal à  $\mathbb{P}_d$  tout entier, sera le domaine  $\mathbb{P}_d \setminus \bar{\Omega}$ .

Dans ce chapitre, nous souhaitons donner un moyen de décrire toute fonction de  $H_\nu^2(\Omega)$  comme une combinaison de fonctions d'une famille complète. Ceci aura pour effet la détermination de l'opérateur de projection  $P_\nu : L^2(\partial\Omega) \rightarrow \text{tr } H_\nu^2(\Omega)$  (voir Définition 6.2.1.2) qui, comme on a pu le remarquer dans la Section 6.2, conditionne celle de la solution du problème extrémal borné.

Expliquons un peu plus en détail ce que nous entendons par «détermination de l'opérateur de projection  $P_\nu$ ». Supposons que nous soyons en possession d'une famille infinie de fonctions  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  qui soit complète dans  $H_\nu^2(\Omega)$ . Nous aimerions mettre en place une méthode numérique permettant de fournir la fonction  $g_0$  solution de l'équation (6.14) dans le Corollaire 6.2.2.2. Bien entendu, d'un point de vue numérique, il n'est pas envisageable de calculer les différentes projections intervenant dans (6.14) sous la forme de combinaisons linéaires infinies d'éléments de  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ . Le passage à une résolution numérique impose donc de calculer l'opérateur de projection  $P_\nu$  sur un sous-espace de dimension finie de  $L^2(\partial\Omega)$ . En conservant les mêmes notations, ceci revient encore à chercher la projection sous la forme

$$P_\nu(f) = \sum_{i=1}^N \alpha_i b_i, \quad f \in L^2(\partial\Omega),$$

où  $N$  représente la dimension finie de l'espace  $\mathcal{B}^N = \text{Vect}\{b_i; i = 1 \dots N\}$  sur lequel on projette  $f$  et pour lequel les fonctions  $(b_i)_{i=1 \dots N}$  sont indépendantes. Pour l'instant nous ne discutons pas le choix de la valeur de  $N$  ni la manière dont sont choisis les éléments de  $(b_i)_{i=1 \dots N}$  formant  $\mathcal{B}^N$  (voir Partie IV pour plus de détails). Remarquons simplement que calculer la projection de  $f \in L^2(\partial\Omega)$  sur  $\mathcal{B}^N$  peut être classiquement vu comme la détermination au sens des moindres carrés du meilleur approximant de  $f$  par un élément de  $\mathcal{B}^N$ . Cela revient alors à trouver une fonction  $\varphi \in \mathcal{B}^N$  telle que

$$\|f - \varphi\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \langle f - \varphi, f - \varphi \rangle \quad \text{soit minimale}, \quad (7.1)$$

où, rappelons-le, le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\partial\Omega)}$  est donné par (3.1) puisque  $\text{tr } H_\nu^2(\Omega)$  est un sous-espace vectoriel réel de  $L^2(\partial\Omega)$  que nous voyons comme un espace vectoriel réel lui aussi. En supposant que  $\varphi = \sum_{i=1}^N \alpha_i b_i$ , cette dernière réalise un minimum de (7.1) si et seulement si

$$\langle f - \sum_{i=1}^N \alpha_i b_i, b_j \rangle = 0, \quad j = 1 \dots N.$$

De façon équivalente, cela revient à résoudre en les  $(\alpha_i)_{i=1 \dots N}$  les équations dites «normales» suivantes

$$\sum_{i=1}^N \langle b_i, b_j \rangle \alpha_i = \langle f, b_j \rangle, \quad j = 1 \dots N. \quad (7.2)$$

On en conclut donc que déterminer la projection de la fonction  $f$  sur le sous-espace  $\mathcal{B}^N$  est équivalent à trouver les coefficients  $(\alpha_i)_{i=1 \dots N}$  solution de la relation matricielle (7.2). Mais comme nous venons de le constater, ceci n'est réalisable qu'à la seule condition de connaître une famille  $(b_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  complète dans  $H_\nu^2(\Omega)$  dont on va pouvoir extraire certains éléments afin de constituer  $\mathcal{B}^N$ .

Ce chapitre s'organise de la façon suivante. Dans un premier temps, nous allons décrire formellement le type de solutions aux équations (1.2) et (1.5) que nous cherchons à construire. Plus précisément, nous discuterons de la forme que doivent présenter ces solutions, notamment dans le cas d'un domaine doublement connexe, c'est-à-dire dans le cas adapté au problème physique du tokamak. Cette description, nécessaire pour comprendre la structure des solutions cherchées, peut être vue comme une première validation des calculs qui vont suivre. Cette étape préliminaire achevée, nous décrivons la stratégie adoptée pour la recherche de solutions explicites aux équations réelles (1.2) et (1.5) dans des domaines  $\Omega$  simplement et doublement connexes. Nous verrons qu'il sera possible de ramener la recherche de solutions explicites de ces équations à celle de l'équation classique de Laplace en dimension 3. Il est bien connu que la méthode de séparation des variables permet d'obtenir des solutions explicites de l'équation de Laplace. Toutefois la réussite de cette technique, et plus particulièrement sa capacité à fournir une famille complète adaptée à la géométrie considérée, est fortement corrélée au système de coordonnées employé.

La seconde partie est quant à elle consacrée au calcul de solutions des équations (1.2) et (1.5) dans un système de coordonnées adapté à une géométrie annulaire (ces solutions permettant aussi de traiter le cas simplement connexe). Pour ce faire, nous introduirons les coordonnées toroïdales [116] du plan et nous prouverons que celles-ci permettent, après séparation des variables, d'exhiber des familles complètes de solutions pour (1.2) et (1.5). Toutefois, posséder des familles complètes de solutions à ces équations réelles ne signifie pas pour autant disposer d'une famille complète de l'espace  $H^2_v(\Omega)$ . Répondre à cette question nécessite en effet d'être capable d'associer à toute fonction  $u$  (à variables séparées) solution de (1.2) la fonction  $v$  (à variables séparées) solution de (1.5) au travers des équations de Cauchy-Riemann généralisées (1.4), ce que nous ferons en intégrant ce système. Enfin, les calculs menés nous permettront de conclure ce chapitre en exhibant une fonction multivaluée solution de (1.7) dans un domaine doublement connexe qui nous permettra d'ajuster d'éventuelles données au bord non compatibles (voir Section 4.2.2).

## 7.1 Stratégie de calcul de solutions explicites réelles

Dans cette section, nous présentons la méthode que nous allons employer dans la Section 7.2. Nous allons tout d'abord revenir sur le fait que toute solution de (1.2) ou (1.5) dans un anneau contenu dans le demi-plan  $\mathbb{P}_d$  peut être décomposée comme la somme de deux fonctions, l'une étant solution dans le grand disque de l'anneau pour la conductivité  $\sigma$ , l'autre dans l'intersection de  $\mathbb{P}_d$  et du domaine extérieur au petit disque toujours pour la même conductivité  $\sigma$ .

Ce premier résultat indique que la recherche de solutions explicites dans un domaine doublement connexe doit permettre d'exhiber des fonctions admettant chacune une singularité dans l'une ou l'autre des composantes connexes du complémentaire de ce domaine. La recherche de ces solutions se fera au moyen d'une séparation des variables.

### 7.1.1 Formes attendues des solutions explicites

Avant de présenter les calculs de solutions aux équations (1.2) ou (1.5), discutons dans cette section des résultats que nous espérons obtenir grâce à la séparation des variables.

Le point de départ de cette réflexion procède d'une analogie avec un résultat classique d'analyse harmonique en dimension 2. Il s'agit d'un théorème de décomposition pour les fonctions harmoniques [18, Thm. 9.14].

**Théorème 7.1.1.1** *Soit  $u$  une fonction harmonique sur  $\mathbb{A}$ . Alors  $u$  admet une décomposition unique de la forme*

$$u = u_1 + u_2 ,$$

avec  $u_1$  harmonique dans  $\mathbb{D}$  et  $u_2$  harmonique dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$  telle que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [u_2(z) - c \log |z|] = 0 ,$$

où  $c$  est une constante.

Ce résultat est la formulation abstraite d'une étude que nous avons menée dans la Section 4.2.2 et qui avait abouti à l'expression (4.24). Remarquons que cette dernière est classiquement obtenue en effectuant une séparation des variables en coordonnées polaires dans l'équation de Laplace en dimension 2 formulée sur l'anneau  $\mathbb{A}$ . La réussite de cette méthode est par ailleurs due au fait que l'anneau  $\mathbb{A}$  s'exprime simplement dans ce système de coordonnées comme le produit cartésien  $] \varrho, 1[ \times [0, 2\pi[$ . Ajoutons que le Théorème 7.1.1.1 peut être vu comme la «version réelle» de la décomposition de Laurent des fonctions holomorphes sur un anneau.

L'enseignement apporté par ces quelques remarques peut alors être résumé ainsi : pour exhiber une famille complète de solutions à l'équation de Laplace en dimension 2, la méthode de séparation des variables doit fournir des solutions harmoniques

- soit dans  $\mathbb{D}$  : ce sont les fonctions de type  $u(re^{i\theta}) = r^k \cos(k\theta)$  ou  $r^k \sin(k\theta)$  avec  $k \geq 0$  (ces fonctions ont une singularité à l'infini),
- soit dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_\varrho}$  : ce sont les fonctions de type  $u(re^{i\theta}) = r^k \cos(k\theta)$  ou  $r^k \sin(k\theta)$  avec  $k < 0$  (ces fonctions ont une singularité en 0).

Plaçons nous maintenant dans un domaine  $\Omega$  doublement connexe et à frontière lisse contenu dans le demi-plan  $\mathbb{P}_d$ . Pour des raisons de simplicité dans les notations, ramenons ce domaine, par transformation conforme, à un anneau  $\mathbb{A}' = \mathbb{D}_{x_0,1} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0,\varrho}}$  avec  $x_0 > 1$ . Au regard des remarques précédentes, il est naturel de se demander si nous sommes en droit d'attendre le même type de résultats pour les équations plus générales (1.2) ou (1.5) formulées sur  $\mathbb{A}'$ . Il se trouve que la réponse à cette question a déjà été apportée dans ce manuscrit, plus précisément dans la preuve du Théorème 4.3.1.1. Le diagnostic de cette dernière nuance cependant la généralisation du Théorème 7.1.1.1 dans la mesure où la décomposition qui y est fournie dépend de la façon dont la conductivité  $\nu = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{A}')$  (et donc *a priori*  $\sigma$ ) est étendue régulièrement aux domaines  $\mathbb{D}_{x_0,1}$  et  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0,\varrho}}$ . Néanmoins, la conductivité  $\sigma$  considérée dans ce chapitre est régulière dans tout le demi-plan  $\mathbb{P}_d$ , nous permettant ainsi de donner une formulation analogue, mais toutefois affaiblie, du Théorème 7.1.1.1. Il suffit pour cela de choisir pour les solutions dans  $\mathbb{D}_{x_0,1}$  la conductivité intérieure  $\sigma_i = \frac{1}{x} \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{D}_{x_0,1})$ . Les solutions à (1.2) et (1.5) dans  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0,\varrho}}$  sont elles aussi calculées avec la conductivité extérieure  $\sigma_e \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0,\varrho}})$  telle que  $\sigma_{e|\mathbb{P}_d} = \frac{1}{x}$ . Même si cette généralisation du Théorème 7.1.1.1 ne permet pas de

donner le comportement au voisinage de l'axe imaginaire  $x = 0$  et de l'infini des fonctions solutions sur  $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0, \varrho}}$ , il reste que comme dans le cas harmonique, la méthode de séparation des variables que nous allons appliquer pour les équations (1.2) ou (1.5) dans  $\mathbb{A}'$  sera jugée satisfaisante une fois obtenues des solutions explicites respectivement dans  $\mathbb{D}_{x_0, 1}$  et  $\mathbb{P}_d \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0, \varrho}})$  pour la même conductivité  $\sigma = \frac{1}{x}$ .

Nous pouvons donc conclure que l'ambiguïté relative à l'extension des conductivités dans la preuve du Théorème 4.3.1.1 est entièrement levée par le fait que nous considérons désormais une conductivité  $\sigma$  régulière dans tout le demi-plan  $\mathbb{P}_d$ . Cela nous assure que lorsque nous allons séparer les variables, il n'y aura pas lieu de distinguer des conductivités différentes selon le domaine sur lequel les équations seront regardées.

**Remarque 7.1.1.1** *Pour des estimations du comportement des solutions des équations (1.2) ou (1.5) au voisinage de l'axe imaginaire  $x = 0$  et de l'infini, nous renvoyons le lecteur à [53] où ces questions sont étudiées en détail.*

## 7.1.2 Lien avec l'équation de Laplace

Il pourrait être tentant de chercher des solutions explicites directement pour les équations (1.2) et (1.5). Il est toutefois plus intéressant de transformer ces dernières pour se ramener au calcul, plus classique, de solutions de l'équation de Laplace en dimension 3. Nous allons donc montrer dans un premier temps le lien existant entre ces équations.

Rappelons tout d'abord que les variables  $(x, y, \varphi)$  font référence au système de coordonnées cylindriques (voir Remarque 1.4.1). Alors une application des résultats de [90] fournit la

**Proposition 7.1.2.1** *Soit  $u$  et  $v$  des solutions respectives de (1.2) et (1.5) dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{P}_d$ . Alors les fonctions  $U$  et  $V$  définies par*

$$U(x, y, \varphi) = \frac{1}{x}u(x, y) \cos \varphi \quad \text{et} \quad V(x, y, \varphi) = v(x, y)$$

*sont harmoniques (pour le Laplacien pris en coordonnées cylindriques) dans le domaine  $\Omega' \subset \mathbb{R}^3$  obtenu par rotation de  $\Omega$  autour de l'axe  $x = 0$ .*

*Preuve.* Faisons les calculs pour une solution  $u$  de (1.2). Soit donc  $U$  la fonction définie comme dans la proposition. Son laplacien en coordonnées cylindriques s'écrit

$$\Delta U = \frac{1}{x} \partial_x (x \partial_x U) + \frac{1}{x^2} \partial_\varphi^2 U + \partial_y^2 U .$$

Or l'expression de  $U$  permet de calculer

$$\partial_x U(x, y, \varphi) = \frac{1}{x} \left( \partial_x u(x, y) - \frac{1}{x} u(x, y) \right) \cos \varphi ,$$

soit

$$\frac{1}{x} \partial_x (x \partial_x U)(x, y, \varphi) = \frac{1}{x} \left( \partial_x^2 u(x, y) - \frac{1}{x} \partial_x u(x, y) + \frac{1}{x^2} u(x, y) \right) \cos \varphi .$$

Il reste finalement que

$$\Delta U(x, y, \varphi) = \frac{1}{x} \left( \partial_x^2 u(x, y) + \partial_y^2 u(x, y) - \frac{1}{x} \partial_x u(x, y) \right) \cos \varphi ,$$

le membre de droite de la dernière expression étant finalement nul étant donné que  $u$  est solution de (1.2) pour la conductivité  $\sigma = \frac{1}{x}$ .

Les calculs pour la fonction  $V$  se mènent de la même manière pour finalement arriver au résultat voulu. ■

Le fait d'avoir ramené la recherche de solutions des équations (1.2) et (1.5) à celle de l'équation de Laplace en dimension 3 est un avantage certain d'un point de vue calculatoire. En effet, la difficulté à trouver des solutions explicites à cette dernière réside avant tout dans la forme du domaine sur lequel l'équation est posée. Si ce domaine s'avère avoir une forme relativement simple, ce qui peut être compris au sens où celui-ci présente certaines symétries, on peut alors envisager une résolution analytique de l'équation  $\Delta U = 0$  en cherchant  $U$  sous la forme

$$U(x_1, x_2, x_3) = f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) , \quad (7.3)$$

où  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  représente le système de coordonnées orthogonales utilisé. Dès lors, si cette hypothèse permet la séparation de l'équation de Laplace en trois équations différentielles ordinaires, elle est alors qualifiée de "séparable". Cette technique permet d'obtenir, lorsqu'elle est menée avec succès, des solutions explicites s'exprimant généralement sous la forme de combinaisons linéaires infinies de fonctions spéciales. Bien sûr, ces fonctions diffèrent selon le système de coordonnées employé. Il existe en réalité onze systèmes de coordonnées pour lesquels l'équation de Laplace est séparable au sens de la définition que nous venons de donner (voir Tableau 7.1). Nous renvoyons le lecteur à [116] pour plus de détails sur la façon d'obtenir ces résultats.

Observons maintenant qu'il est possible d'étendre la notion de séparabilité de l'équation de Laplace (mais en fait plus généralement pour toute équation aux dérivées partielles) en cherchant des solutions  $U$  non plus sous la forme (7.3) mais plutôt sous la forme

$$U(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{R(x_1, x_2, x_3)} f_1(x_1) f_2(x_2) f_3(x_3) . \quad (7.4)$$

Etendre ainsi la notion de séparabilité permet l'utilisation de systèmes de coordonnées supplémentaires, à savoir les systèmes bisphérique et toroïdal. On parle alors de recherche de solutions quasi-séparables.

Voyons maintenant quel système de coordonnées serait le plus approprié à la résolution du problème de Cauchy dans le tokamak Tore Supra. Nous avons constaté dans la Section 1.4 que les surfaces correspondant à des équipotentielles du flux magnétique étaient des tores emboîtés eux-mêmes inclus dans l'enceinte extérieure circulaire du tokamak (voir Figure 1.4). La particularité de ces tores étant qu'ils ne sont pas emboîtés de manière concentrique, mais plutôt autour d'un foyer correspondant au maximum de pression dans le plasma. Comme le but de ce chapitre est de trouver des solutions analytiques des équations (1.2) et (1.5) dans le domaine plan  $\Omega$ , compris entre l'enceinte extérieure du tokamak

Système de coordonnées	Solutions issues de la séparation des variables
Cartésien	Fonctions circulaires, exponentielles et hyperboliques
Cylindrique	Fonctions circulaires, de Bessel
Conique	Harmoniques elliptiques
Elliptique	Harmoniques elliptiques
Cylindrique elliptique	Fonctions circulaires, de Mathieu
Parabolique	Fonctions circulaires, de Bessel
Parabolique cylindrique	Fonctions circulaires, de Bessel et paraboliques cylindriques
Paraboloïdal	Fonctions circulaires
Sphérique	Fonctions circulaires, polynômes de Legendre
Sphéroïdale aplatie (oblate)	Fonctions circulaires, polynômes de Legendre
Sphéroïdale allongée (prolate)	Fonctions circulaires, polynômes de Legendre

TAB. 7.1 – Fonctions spéciales issues de la séparation des variables dans l'équation de Laplace pour différents systèmes de coordonnées

et la frontière du plasma (cette dernière correspondant à la première équipotentielle de flux magnétique, en partant de l'extérieur du tokamak, entièrement contenue dans le limiteur), il est naturel de chercher un système de coordonnées dans lequel  $\Omega$  puisse s'écrire simplement. Nous allons voir dans la Section 7.2 que le système toroïdal est le mieux adapté à cette géométrie.

**Remarque 7.1.2.1** *Même si nous portons désormais notre attention sur le système de coordonnées toroïdales, il est bien entendu possible d'envisager la recherche de solutions explicites dans d'autres systèmes de coordonnées. Nous faisons part de cette observation car les premiers travaux de cette thèse avaient constitué à chercher ces dites solutions en effectuant une séparation des variables non pas sur l'équation de Laplace en dimension 3 mais directement sur les équations (1.2) et (1.5). Ces dernières étant en effet formulées dans ce manuscrit en les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$ , une tentative a été faite de chercher des solutions sous la forme*

$$u(x, y) = f_1(x)f_2(y) \quad \text{et} \quad v(x, y) = f_3(x)f_4(y) . \quad (7.5)$$

*Le résultat de cette approche a été la mise en évidence d'une famille complète de fonc-*

tions dans l'espace  $tr H_\nu^2(\mathbb{D}_{x_0,1})$  avec  $x_0 > 1$ . Par contre, il n'a pas été possible d'exhiber une famille complète de l'espace  $tr H_\nu^2(\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}_{x_0,\varrho}})$ . Cet angle d'attaque se révèle inadapté au cas de domaines doublement connexes inclus dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$ , ce qui n'est pas vraiment suprenant étant donné le manque d'adéquation entre le système de coordonnées choisi et la forme du domaine étudié. Il n'en reste pas moins que ces résultats permettent de traiter efficacement le cas de domaines simplement connexes inclus dans  $\mathbb{P}_d$ , que ce soit d'un point de vue théorique ou bien numérique. De plus, la séparation des variables en  $(x, y)$  présente le bénéfice de faire apparaître des solutions sous la forme de produits entre des fonctions exponentielles, circulaires et de Bessel qui sont bien plus connues et faciles à manipuler que les harmoniques toroïdales que nous allons mettre en évidence dans la Section 7.2.

L'ensemble de ces travaux ont fait l'objet des publications [71, 72].

## 7.2 Solutions explicites en coordonnées toroïdales

Dans cette section, nous définissons le système de coordonnées toroïdales à partir de celui des coordonnées bipolaires [116]. Nous donnerons alors les solutions obtenues par quasi-séparation des variables pour l'équation de Laplace ce qui nous permettra d'en déduire des familles de solutions des équations (1.2) et (1.5) qui seront complètes dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\Omega)$  pour  $\Omega$  simplement et doublement connexe. Enfin nous intégrerons ces solutions dans le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4) afin de trouver des familles complètes de  $H_\nu^2(\Omega)$ .

### 7.2.1 Les coordonnées toroïdales

Commençons par définir les coordonnées bipolaires dans le plan  $(xOy)$ . Il s'agit d'un système orthogonal tel qu'un point  $M(x_M, y_M)$  est déterminé par ses distances  $MA$  et  $MB$  à deux points fixes  $A, B$  appelés foyers, ou encore pôles, situés sur l'axe réel  $y = 0$  et à équidistance du point  $O$  (voir Figure 7.1).

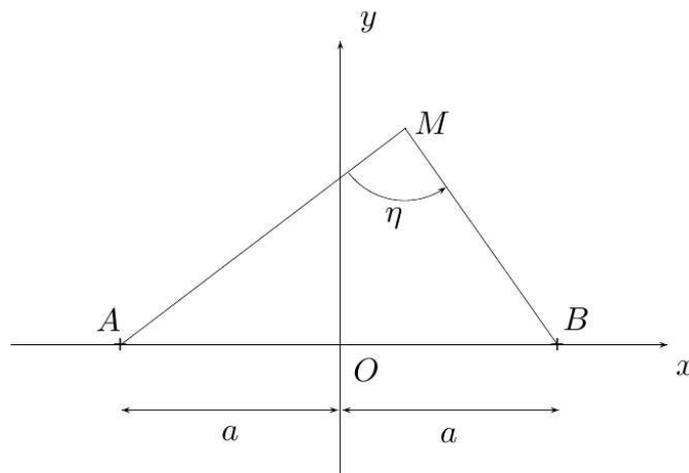


FIG. 7.1 – Coordonnées bipolaires.

Les coordonnées bipolaires du point  $M$  sont alors notées  $(\tau_M, \eta_M)$  et données par les relations

$$\tau_M = \log \left( \frac{MA}{MB} \right) \quad \text{et} \quad \eta_M = \widehat{AMB}. \quad (7.6)$$

Au moyen de formules trigonométriques classiques, il n'est pas difficile de relier les coordonnées cartésiennes  $(x, y)$  et bipolaires du point  $M$ , si bien qu'on obtient la

**Définition 7.2.1.1** *Les coordonnées bipolaires  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi]$  sont définies à partir des coordonnées cartésiennes à l'aide de la transformation*

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} \quad \text{et} \quad y = a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta} \quad (7.7)$$

où le point de coordonnées cartésiennes  $(a, 0)$  représente le foyer du système de coordonnées. La transformation inverse est quant à elle donnée par

$$\tanh \tau = \frac{2ax}{a^2 + x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \tan \eta = \frac{-2ay}{a^2 - x^2 - y^2}. \quad (7.8)$$

On a de plus que

$$\begin{cases} \tau = 0 & \iff x = 0 \\ \tau = \infty & \iff x = a, y = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \eta = 0 \quad \text{ou} \quad 2\pi & \iff y = 0, x > a \\ \eta = \pi & \iff y = 0, x < a \end{cases} \quad (7.9)$$

Par un abus de langage, nous associerons désormais le terme «foyer» à la constante  $a$  (et éventuellement  $-a$  aussi) sans que cela n'entraîne de confusion.

La Définition 7.2.1.1 permet de voir que l'existence du système bipolaire est reliée à celle du foyer  $a$ . Nous constaterons dans la Partie IV que le choix de ce dernier joue un rôle capital dans la modélisation du système physique lié au tokamak Tore Supra puisque de lui vont dépendre les familles complètes de fonctions pour les équations (1.2) et (1.5) que nous allons exhiber.

Donnons maintenant quelques propriétés de ce système de coordonnées.

- Les équations (7.6) indiquent que la coordonnée  $\tau$  appartient à  $\mathbb{R}$  lorsqu'aucune restriction n'est faite sur l'emplacement du point  $M$ . Ceci n'est pas le cas de ce chapitre pour lequel nous avons choisi de nous limiter au demi-plan droit  $\mathbb{P}_a$ . Cela entraîne que les valeurs de  $\tau$  que nous considérerons seront comprises dans  $\mathbb{R}_*^+$ .
- A partir des relations (7.7), on obtient facilement que

$$x^2 + (y - a \cot \eta)^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \eta}. \quad (7.10)$$

Cette équation indique que le lieu des points pour lesquels  $\eta$  est constant correspond à un cercle de centre  $(x, y) = (0, a \cot \eta)$  et de rayon  $\frac{a}{|\sin \eta|}$ . Ces cercles passent tous par le foyer  $a$  et son symétrique par rapport à la droite  $x = 0$ . On a aussi la relation

$$(x - a \coth \tau)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sinh^2 \tau} . \quad (7.11)$$

permettant d'affirmer que le lieu des points pour lesquels  $\tau$  est constant correspond à un cercle de centre  $(x, y) = (a \coth \tau, 0)$  et de rayon  $\frac{a}{\sinh \tau}$ . Il s'agit de cercles symétriques par rapport à l'axe  $y = 0$ , entourant le foyer  $a$  et qui convergent vers ce dernier lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

Ainsi tout point du plan est repéré grâce à l'intersection de deux cercles correspondant à des valeurs constantes de  $\tau$  et  $\eta$  qui deviennent alors les coordonnées bipolaires du point. Ajoutons que les faisceaux de cercles donnés par (7.10) et (7.11) correspondent à une famille de cercles d'Apollonius [112, Chap. 17, Sec. 5] et ont la particularité que chaque cercle associé à une valeur constante de  $\eta$  est orthogonal à tous les cercles obtenus pour des valeurs constantes de  $\tau$ , et vice versa (voir Figure 7.2).

Ceci justifie que le système de coordonnées bipolaires soit orthogonal.

- Dans la Définition 7.2.1.1, nous faisons le choix de prendre la coordonnée angulaire  $\eta$  dans  $[0, 2\pi]$ . Ceci entraîne une légère ambiguïté. En effet, si  $\eta_c$  est une constante, les cercles  $\mathcal{C}_{\eta_c}$  et  $\mathcal{C}_{\eta_c + \pi}$  d'équation (7.10) avec  $\eta = \eta_c$  et  $\eta = \eta_c + \pi$  sont identiques. Pour rendre la coordonnée  $\eta$  bien définie, il faut choisir une convention. Remarquons alors que tout cercle d'équation (7.10) pour  $\eta \neq \{0, \pi, 2\pi\}$  intersecte la droite réelle  $y = 0$  en seulement deux points, à savoir les foyers  $a$  et  $-a$ . Nous faisons alors le choix suivant : si  $\eta_c < \pi$ , les points situés sur la partie du cercle  $\mathcal{C}_{\eta_c}$  se trouvant dans le demi-plan supérieur  $y > 0$  ont pour coordonnée angulaire  $\eta = \eta_c$ , alors que ceux situés sur la partie du cercle  $\mathcal{C}_{\eta_c}$  se trouvant dans le demi-plan inférieur  $y < 0$  ont pour coordonnée angulaire  $\eta = \eta_c + \pi$ . De la même manière, si  $\eta_c > \pi$ , les points situés sur la partie du cercle  $\mathcal{C}_{\eta_c}$  se trouvant dans le demi-plan supérieur  $y > 0$  ont pour coordonnée angulaire  $\eta = \eta_c - \pi$ , alors que ceux situés sur la partie du cercle  $\mathcal{C}_{\eta_c}$  se trouvant dans le demi-plan inférieur  $y < 0$  ont pour coordonnée angulaire  $\eta = \eta_c$ .

Voyons maintenant comment définir le système de coordonnées toroïdales. Ce dernier s'obtient en fait très simplement par rotation du système de coordonnées bipolaires autour de l'axe  $x = 0$ .

**Définition 7.2.1.2** *Les coordonnées cylindriques  $(x, y, \varphi)$  sont reliées aux coordonnées toroïdales  $(\tau, \eta, \varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$  par la transformation*

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} , \quad y = a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta} \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi \quad (7.12)$$

où la constante  $a$  fait référence au foyer du système de coordonnées bipolaires.

Les caractéristiques de ce système de coordonnées sont donc les mêmes que celles du système de coordonnées bipolaires, à quelques détails près.

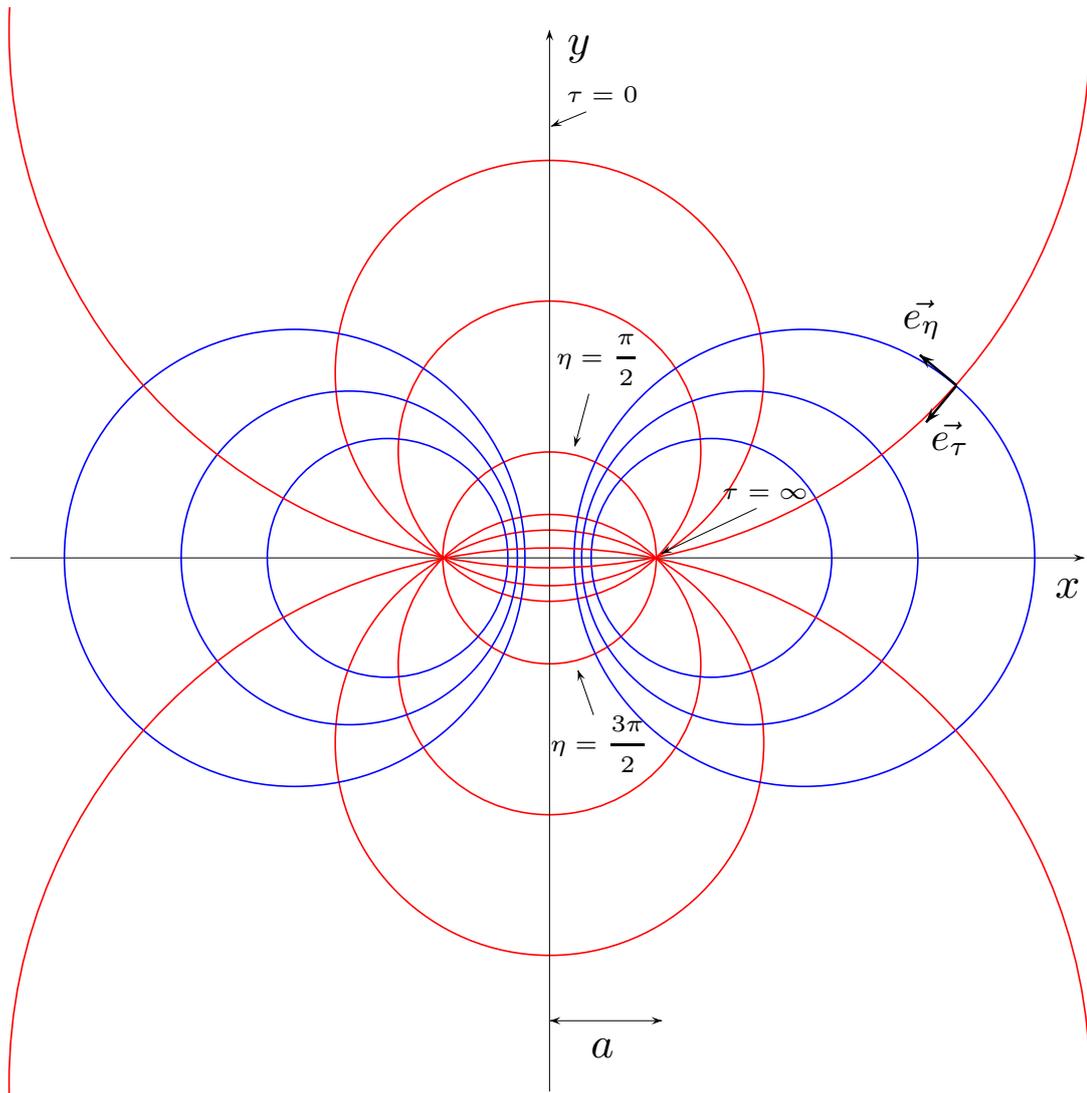


FIG. 7.2 – Les cercles bleus correspondent à différentes valeurs de  $\tau$  constant. Les cercles rouges correspondent à différentes valeurs de  $\eta$  constant. Les vecteurs unitaires  $\vec{e}_\tau$  et  $\vec{e}_\eta$  constituent le repère mobile du système de coordonnées bipolaires.

- La symétrie de révolution autour de l'axe  $x = 0$  justifie le fait que ce système soit adapté à la modélisation d'un problème dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$ . En particulier, on retrouve le fait que la coordonnée  $\tau$  est à considérer uniquement pour des valeurs strictement positives (voir les commentaires concernant les caractéristiques des coordonnées bipolaires).
- Les surfaces de niveau correspondant à une valeur constante de  $\eta$  renvoient donc à des sphères obtenues par rotation autour de l'axe  $x = 0$  des cercles d'équation (7.10) dans le plan  $(xOy)$ . Parallèlement, les surfaces correspondant à une valeur de  $\tau$  constante représentent des tores obtenues par rotation autour de l'axe  $x = 0$  des cercles d'équation (7.11) dans le plan  $(xOy)$ . Par conséquent, tout point de

l'espace est repéré par l'intersection d'une sphère, d'un tore et d'un plan, ce dernier renvoyant à une valeur constante de  $\varphi$ .

La configuration des surfaces de niveau semble donc indiquer que le système de coordonnées toroïdales est le plus adapté à la description de la géométrie des équipotentielles de flux magnétique dans le tokamak Tore Supra (voir Section 1.4 et Section 7.1.2).

Concluons cette section en notant que nous ne parlerons désormais plus que du système de coordonnées toroïdales, que ce soit pour repérer un point dans l'espace ou bien dans un plan  $\varphi = \text{constante}$ . On identifiera donc, par un abus de langage, les coordonnées bipolaires aux coordonnées toroïdales sans que cela n'entraîne de confusion étant donné la similarité entre ces deux systèmes.

## 7.2.2 Familles complètes dans $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\Omega)$

Cette section est consacrée à la recherche de solutions quasi-séparables des équations (1.2) et (1.5). Nous allons appliquer la méthode de calcul présentée dans la Proposition 7.1.2.1. Observons simplement que la recherche de solutions à l'équation de Laplace en dimension 3 en coordonnées toroïdales est bien connue [116].

### Recherche de solutions pour l'équation (1.2)

On pose donc

$$U(x, y, \varphi) = \frac{1}{x} u(x, y) \cos \varphi$$

avec  $u$  une solution de (1.2) dans  $\Omega$ . On transforme cette équation par passage aux coordonnées toroïdales, en accord avec la Définition 7.2.1.2,

$$\begin{aligned} \tilde{U}(\tau, \eta, \varphi) &= \frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \tilde{u} \left( a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta}, a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta} \right) \cos \varphi \\ &= F(\tau, \eta) \cos \varphi . \end{aligned} \quad (7.13)$$

D'après la Proposition 7.1.2.1, la fonction  $\tilde{U}$  est harmonique dans le domaine  $\Omega'$  obtenu par rotation autour de l'axe  $x = 0$  du domaine  $\Omega$ . Cela signifie que dans  $\Omega'$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{U} &= \frac{(\cosh \tau - \cos \eta)^3}{a^2 \sinh \tau} \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \tau} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sinh \tau \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{\cosh \tau - \cos \eta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{\sinh \tau (\cosh \tau - \cos \eta)} \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial \varphi^2} \right] = 0 . \end{aligned} \quad (7.14)$$

L'astuce consiste maintenant à chercher  $F$  sous la forme quasi-séparée

$$F(\tau, \eta) = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} G(\tau, \eta) . \quad (7.15)$$

L'injection de cette forme particulière de  $F$  dans (7.14) permet d'obtenir après calcul que la fonction  $G$  est solution de l'EDP :

$$\Delta G + \coth \tau \frac{\partial G}{\partial \tau} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right) G = 0 \quad (7.16)$$

où le Laplacien renvoie cette fois-ci au Laplacien planaire en les coordonnées  $(\tau, \eta)$ . La recherche de solutions explicites pour l'équation (7.16) est quant à elle possible en séparant de façon classique les variables. On pose alors  $G(\tau, \eta) = A(\tau)B(\eta)$  lorsque  $G$  est non nul, si bien qu'on obtient

$$\frac{A''(\tau)}{A(\tau)} + \frac{B''(\eta)}{B(\eta)} + \coth \tau \frac{A'(\tau)}{A(\tau)} + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\sinh^2 \tau} \right) = 0 .$$

Les fonctions  $A$  et  $B$  étant indépendantes de  $\eta$  et  $\tau$  respectivement, il reste finalement qu'elles satisfont chacune une équation différentielle donnée par

$$\begin{cases} A''(\tau) + \coth \tau A'(\tau) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{\sinh^2 \tau} - k^2 \right) A(\tau) = 0 \\ B''(\eta) + k^2 B(\eta) = 0 \end{cases} \quad (7.17)$$

où  $k$  est une constante.

Commençons par étudier l'équation en  $B$  de (7.17). Rappelons que les solutions  $\tilde{u}$  que l'on cherche (et qui sont obtenus par passage aux coordonnées toroïdales dans  $u$ ) modélisent l'évolution spatiale du flux magnétique poloidal. Comme quantité physique fonction de  $(\tau, \eta)$ , ce dernier est bien entendu  $2\pi$ -périodique en la variable angulaire  $\eta$ . Il en est donc de même de la fonction  $F$  avec (7.13), et par conséquent aussi de la fonction  $G$  avec (7.15). Il en résulte que la fonction  $B$  est aussi  $2\pi$ -périodique en  $\eta$ , ce qui finalement conduit à la restriction  $k \in \mathbb{Z}$ . Une famille complète de fonctions pour les solutions de l'équation en  $B$  est donc  $\{e^{ik\eta}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ .

L'équation en  $A$  se traite quant à elle différemment. Il faut pour cela poser le changement de variable  $X = \cosh \tau$  si bien que la fonction  $C(X) = A(\tau)$  obéit à l'équation

$$(1 - X^2)C'''(X) - 2XC''(X) + \left[ \left( k - \frac{1}{2} \right) \left( k + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{1 - X^2} \right] C(X) = 0 . \quad (7.18)$$

Il s'agit là de la formulation classique de l'équation différentielle de Legendre généralisée (voir (A.1)). Celle-ci admet pour solutions les fonctions de Legendre associées  $\tau \mapsto P_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$  et  $\tau \mapsto Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$ , encore appelées harmoniques toroïdales. Nous renvoyons le lecteur à l'Annexe A pour plus de détails. Rappelons simplement que ces fonctions sont qualifiées de première et deuxième espèce respectivement et qu'elles constituent une famille complète de solutions pour l'équation (7.18), donc *a fortiori* pour l'équation en la fonction  $A$  dans (7.17). Précisons aussi que nous ne faisons plus mention de l'argument de ces fonctions dans un souci de simplification des notations, sauf lorsqu'il pourra y avoir confusion. On notera donc dorénavant

$$P_{k-\frac{1}{2}}^1 = P_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau) \quad \text{et} \quad Q_{k-\frac{1}{2}}^1 = Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau) .$$

En reportant les expressions de  $A$  et  $B$  successivement dans (7.15) et (7.13) et en faisant usage des formules (A.8) et (A.9), on peut alors conclure que l'ensemble

$$\left\{ a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} P_{k-\frac{1}{2}}^1 \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\eta) \\ \sin(k\eta) \end{array} \right\}, a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\eta) \\ \sin(k\eta) \end{array} \right\} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (7.19)$$

forme une famille complète de solutions pour l'équation (1.2).

### Recherche de solutions pour l'équation (1.5)

On pose cette fois-ci

$$V(x, y, \varphi) = v(x, y)$$

avec  $v$  une solution de (1.5) dans  $\Omega$ . On passe alors aux coordonnées toroïdales en posant, en accord avec la Définition 7.2.1.2,

$$\tilde{V}(\tau, \eta, \varphi) = \tilde{v} \left( a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta}, a \frac{\sin \eta}{\cosh \tau - \cos \eta} \right).$$

Maintenant, même si certains termes peuvent différer, les calculs se mènent de façon identique à ceux effectués pour la recherche de solutions à l'équation (1.2).

On obtient finalement que l'ensemble

$$\left\{ \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} P_{k-\frac{1}{2}}^0 \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\eta) \\ \sin(k\eta) \end{array} \right\}, \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \left\{ \begin{array}{c} \cos(k\eta) \\ \sin(k\eta) \end{array} \right\} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (7.20)$$

forme une famille complète de solutions pour l'équation (1.5). A nouveau, les fonctions de Legendre associées  $P_{k-\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau)$  et  $Q_{k-\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau)$  sont appelées harmoniques toroïdales et on choisira de ne plus mentionner leur argument. On les distinguera des précédentes en mentionnant leur degré si nécessaire.

Il convient toutefois de nous demander si la forme des solutions obtenues est bien en accord avec les observations faites dans la Section 7.1.1. Remarquons que les calculs qui viennent d'être menés l'ont été sans que nous nous soyons préoccupés de la simple ou double connexité du domaine  $\Omega$ . Or nous avons évoqué le fait que lorsque  $\Omega$  est doublement connexe, l'utilisation de la méthode de (quasi-)séparation des variables se révélerait fructueuse si elle était à même de fournir des solutions régulières dans  $\Omega$  et possédant une singularité dans chaque composante connexe de  $\mathbb{P}_d \setminus \bar{\Omega}$ . Il se trouve que les familles de fonctions (7.19) et (7.20) apportent satisfaction quant à ces remarques (ce qui n'est pas le cas lorsque la séparation des variables est pratiquée directement sur les coordonnées  $(x, y)$ ; voir [72]). On a en effet que [105]

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} P_{k-\frac{1}{2}}^m(\cosh \tau) = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} Q_{k-\frac{1}{2}}^m(\cosh \tau) = \infty, \quad m \in \{0, 1\}. \quad (7.21)$$

Ceci signifie en particulier que si  $\mathcal{C}_{\tau_0}$  désigne le cercle d'équation  $\tau = \tau_0$  (l'équation du cercle en les coordonnées  $(x, y)$  est donnée par (7.11)), alors les fonctions  $\left(P_{k-\frac{1}{2}}^m\right)_{k \in \mathbb{N}, m \in \{0,1\}}$  sont régulières à l'extérieur de  $\mathcal{C}_{\tau_0}$ . Elles admettent une singularité lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire au foyer  $a$  du système de coordonnées toroïdales. Les fonctions  $\left(Q_{k-\frac{1}{2}}^1\right)_{k \in \mathbb{N}, m \in \{0,1\}}$  sont quant à elles régulières à l'intérieur de  $\mathcal{C}_{\tau_0}$  et admettent une singularité lorsque  $\tau \rightarrow 0$ , c'est-à-dire partout sur l'axe  $x = 0$ .

Il est désormais possible de répondre à la question posée dans ce chapitre, à savoir trouver des familles de fonctions complètes dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\Omega)$ . Il suffit pour cela de rassembler les résultats obtenus dans cette section et les éléments de la preuve du Théorème 4.3.1.1, puis de faire appel à la Remarque 4.3.1.1. On peut alors énoncer le

**Théorème 7.2.2.1** *Soient  $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}_*^+$  tels que  $\tau_0 < \tau_1$ . Soit  $\mathbb{A}'$  l'anneau dont la frontière est constituée des deux cercles d'équation  $\tau = \tau_0$  et  $\tau = \tau_1$ . Alors toute fonction  $u \in L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}')$  est la trace sur  $\partial\mathbb{A}'$  d'une unique fonction  $U \in \mathcal{U}_{\sigma}^2(\mathbb{A}')$ , qui admet une unique décomposition de la forme  $U = U_1 + U_2$  avec*

$$U_1 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \sum_{k \geq 0} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 (\alpha_{k,c}^1 \cos(k\eta) + \alpha_{k,s}^1 \sin(k\eta)) \quad (7.22)$$

et

$$U_2 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \sum_{k \geq 0} P_{k-\frac{1}{2}}^1 (\beta_{k,c}^1 \cos(k\eta) + \beta_{k,s}^1 \sin(k\eta)) . \quad (7.23)$$

De la même manière, toute fonction  $v \in L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}')$  est la trace sur  $\partial\mathbb{A}'$  d'une unique fonction  $V \in \mathcal{V}_{\sigma}^2(\mathbb{A}')$ , qui admet une unique décomposition de la forme  $V = V_1 + V_2$  avec

$$V_1 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \sum_{k \geq 0} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 (\alpha_{k,c}^0 \cos(k\eta) + \alpha_{k,s}^0 \sin(k\eta)) \quad (7.24)$$

et

$$V_2 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \sum_{k \geq 0} P_{k-\frac{1}{2}}^0 (\beta_{k,c}^0 \cos(k\eta) + \beta_{k,s}^0 \sin(k\eta)) . \quad (7.25)$$

Faisons quelques commentaires sur le Théorème 7.2.2.1.

### Commentaires concernant le Théorème 7.2.2.1

- Remarquons avec (7.21) que quelque soit leur degré, les harmoniques toroïdales de première espèce sont régulières dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  privé du foyer  $a$ . Dès lors, le Théorème 7.2.2.1 s'étend naturellement à des domaines  $\Omega$  doublement connexes à frontière régulière plus généraux que  $\mathbb{A}'$ . En particulier, la décomposition à l'aide des familles (7.19) et (7.20) reste valable dans un domaine doublement connexe ayant pour frontière extérieure un cercle d'équation  $\tau = \text{constante}$  et pour frontière intérieure une courbe régulière entourant le foyer  $a$  (la courbe intérieure peut être

réduite au foyer  $a$ ). Dans la Partie IV, nous serons effectivement amenés à résoudre des problèmes extrémaux bornés dans des domaines similaires à ceux que nous venons d'envisager, à savoir compris entre la frontière extérieure du tokamak et la frontière  $\Gamma_p$  du plasma. Cette dernière, pour laquelle on supposera suffisamment de régularité, ne correspond en général pas à une isovaleur de  $\tau$  dans le système de coordonnées toroïdales imposé par le foyer  $a$ , lui-même calculé tel que la frontière extérieure du tokamak admette pour équation (7.11).

En résumé, la condition qu'il faudra respecter pour que la solution du problème extrémal borné dans le domaine compris entre la frontière extérieure du tokamak et la frontière du plasma puisse s'écrire au moyen des familles (7.19) et (7.20) sera que le plasma (donc le domaine dans lequel les équations (1.2) et (1.5) ne sont pas satisfaites) contienne le foyer  $a$  (voir Figure 7.3 pour laquelle nous n'avons pas essayé de représenter une configuration limiteur ou bien en point X).

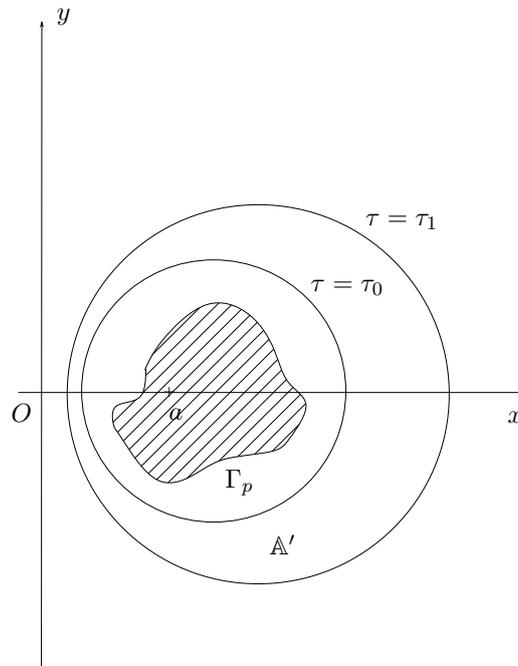


FIG. 7.3 – Coupe schématique dans un plan poloïdal du tokamak Tore Supra. La courbe  $\tau = \tau_1$  est la frontière extérieure du tokamak qui définit le foyer  $a$ . La courbe  $\tau = \tau_0$  est obtenue avec (7.11). Le domaine  $\mathbb{A}'$  a pour frontière les isovaleurs  $\tau_1$  et  $\tau_0$ . La frontière du plasma est  $\Gamma_p$ .

- Le Théorème 7.2.2.1 est énoncé dans un domaine doublement connexe mais admet bien entendu une version dans des domaines simplement connexes. En effet, les singularités des harmoniques toroïdales données par (7.21) impliquent que si  $\Omega$  est un ouvert borné simplement connexe contenu dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  et contenant le foyer  $a$  (qui aura été défini indépendamment du choix de  $\Omega$ ), alors toute fonction  $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\partial\Omega)$  est la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $\mathcal{U}^2_{\sigma}(\Omega)$  (resp. de  $\mathcal{U}^2_{\sigma}(\mathbb{P}_d \setminus \overline{\Omega})$ ) qui se décompose sous la forme (7.22) (resp. sous la forme (7.23)). Par ailleurs,  $f$  peut encore être vue comme la trace sur  $\partial\Omega$  d'une fonction de  $\mathcal{V}^2_{\sigma}(\Omega)$  (resp. de  $\mathcal{V}^2_{\sigma}(\mathbb{P}_d \setminus \overline{\Omega})$ ).

qui se décompose sous la forme (7.24) (resp. sous la forme (7.25)). Observons alors que le choix d'une famille de fonctions pour décomposer un signal mesuré sur  $\partial\Omega$  relève à la fois du domaine dans lequel on désire résoudre le problème extrémal borné mais aussi de notre connaissance du problème physique. Ces points seront développés en détail dans la Partie IV.

- Observons que les fonctions constantes sur  $\partial\Omega$ , pour  $\Omega$  simplement et doublement connexe, se décomposent bien à l'aide des fonctions exhibées dans le Théorème 7.2.2.1 (et plus particulièrement de (7.22) et (7.24)) ainsi qu'avec les deux formules de Heine (A.16) et (A.17).

Nous sommes désormais en possession de familles complètes de fonctions dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ . Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, cela ne signifie pas pour autant que ces familles de fonctions soient aussi complètes dans  $H_{\nu}^2(\Omega)$ . Il serait en effet appréciable, au moins du point de vue calculatoire, qu'à chaque fonction de type (7.22) (resp. de type (7.23)) pour  $k$  fixé corresponde la fonction de type (7.24) (resp. de type (7.25)) pour le même  $k$  dans le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4). L'étude de cette correspondance fait l'objet de la Section 7.2.3.

### 7.2.3 Familles complètes dans $H_{\nu}^2(\Omega)$

Cette section est consacrée à la recherche de familles complètes de fonctions dans  $H_{\nu}^2(\Omega)$ . Pour cela, nous allons intégrer les familles de fonctions (7.19) et (7.20) dans le système de Cauchy-Riemann généralisé (1.4). Il est important de remarquer que l'intégration de ce système sera faite indépendamment de la simple ou double connexité du domaine  $\Omega$ . Or on sait (voir Section 4.2.2, 4.2.3 et 4.3.2) que si  $\Omega$  est doublement connexe, toutes les fonctions des familles (7.19) et (7.20) n'admettent pas forcément de conjuguée  $\sigma$ -harmonique. Alors, un second objectif de cette section sera d'identifier ces objets.

On suppose dans toute cette section que le foyer  $a$  est fixé. Comme nous travaillons désormais dans le système de coordonnées toroïdales défini à partir du foyer  $a$ , il convient dans un premier temps d'y exprimer les équations de Cauchy-Riemann généralisées. Par un abus de langage, nous identifions désormais toute fonction  $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in L_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$  avec la fonction  $\tilde{f} : (\tau, \eta) \mapsto \tilde{f}(\tau, \eta) \in L_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$  obtenue par passage en coordonnées toroïdales avec la transformation (7.12). On a alors la

**Proposition 7.2.3.1** *Soient  $u, v \in L_{\mathbb{R}}^2(\Omega)$ . Alors le système (1.4) se réécrit en coordonnées toroïdales*

$$\begin{cases} \partial_{\tau} v = \frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \partial_{\eta} u \\ \partial_{\eta} v = -\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \partial_{\tau} u \end{cases} \quad \text{dans } \Omega . \quad (7.26)$$

*Preuve.* La transformation (7.12) permet de calculer

$$\partial_{\tau} x = a \frac{1 - \cosh \tau \cos \eta}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} = -\partial_{\eta} y$$

ainsi que

$$\partial_\eta x = -a \frac{\sinh \tau \sin \eta}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} = -\partial_\tau y .$$

En utilisant successivement ces deux dernières relations ainsi que celles du système (1.4), on a que

$$\begin{aligned} \partial_\tau v &= \partial_x v \partial_\tau x + \partial_y v \partial_\tau y \\ &= \partial_x v (-\partial_\eta y) + \partial_y v \partial_\eta x \\ &= \frac{1}{x} \partial_y u \partial_\eta y + \frac{1}{x} \partial_x u \partial_\eta x \\ &= \frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \partial_\eta u . \end{aligned}$$

Le calcul de  $\partial_\eta v$  se fait de la même manière. ■

Il reste maintenant à intégrer le système (7.26) lorsque  $u$  et  $v$  prennent les formes (7.22), (7.23), (7.24) et (7.25). Commençons par rappeler que nous notons  $F$  et  $E$  les intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèces écrites sous forme de Jacobi (voir Annexe B). De plus, dans un souci de lisibilité, les harmoniques toroïdales de degré  $m \in \{0, 1\}$  et d'ordre  $k - \frac{1}{2}$ , qu'elles soient de première ou de deuxième espèce, sont regroupées sous l'écriture  $\mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^m$  quand il n'y a pas lieu de les distinguer (rappelons que nous oublions volontairement de mentionner l'argument « $\cosh \tau$ » des fonctions de Legendre généralisées). On a alors le

**Lemme 7.2.3.1** *La résolution du système (7.26) pour les familles de fonctions (7.19) et (7.20) conduit aux associations suivantes (où les quantités notées  $C$  désignent des constantes) :*

Pour la famille de fonctions (7.19)

$$\begin{aligned} - \text{Si } u_{0,c}^1 &= a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 \text{ alors} \\ v_{0,c}^1 &= -\frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + C_{0,c}^1 . \end{aligned}$$

- Si  $u_{k+1,c}^1 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{k+\frac{1}{2}}^1 \cos((k+1)\eta)$  pour  $k \geq 0$  alors

$$v_{k+1,c}^1 = -\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}_{k+\frac{1}{2}}^0 \sin((k+1)\eta) - \sum_{j>0}^k \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) \right] + v_{0,c,0}^1 + C_{k,c}^1,$$

$$\text{où } v_{0,c,0}^1 = v_{0,c}^1 - C_{0,c}^1.$$

- Si  $u_{k,s}^1 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta)$  pour  $k \geq 1$  alors

$$v_{k,s}^1 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 - \sum_{j>0}^{k-1} \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^1.$$

Pour la famille de fonctions (7.20)

- Si  $v_{0,c}^0 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0$  alors

$$u_{0,c}^0 = 2a \left[ \frac{\sin \eta}{2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} \mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] + C_{0,c}^0.$$

- Si  $v_{k+1,c}^0 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{k+\frac{1}{2}}^0 \cos((k+1)\eta)$  pour  $k \geq 0$  alors

$$u_{k+1,c}^0 = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \frac{2}{2k+1} \mathcal{L}_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) + \sum_{j>0}^k \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin(j\eta) \right] + u_{0,c,0}^0 + C_{k,c}^0,$$

$$\text{où } u_{0,c,0}^0 = u_{0,c}^0 - C_{0,c}^0.$$

- Si  $v_{k,s}^0 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta)$  pour  $k \geq 1$  alors

$$u_{k,s}^0 = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ -\frac{2}{2k-1} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos(k\eta) + 2\mathcal{L}_{-\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j>0}^{k-1} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} \mathcal{L}_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^0.$$

La preuve du Lemme 7.2.3.1 est donnée en Annexe C.

Le Lemme 7.2.3.1 ne suffit cependant pas à exhiber des familles complètes de fonctions dans  $H_\nu^2(\Omega)$ . En effet, si  $\Omega$  est doublement connexe, nous avons vu avec le Corollaire 4.3.1.2 que l'espace  $Re(tr_{\partial\Omega} H_\nu^2(\Omega))$ , sous espace fermé de  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\Omega)$ , était de codimension 1. Donc pour être en mesure de fournir une famille de fonctions complète dans  $H_\nu^2(\Omega)$ , il nous faut trouver dans un premier temps parmi les fonctions  $f = u + iv$  formées de couples  $(u, v)$  du Lemme 7.2.3.1 celles qui ne peuvent être vues comme des fonctions de  $H_\nu^2(\Omega)$ . Les parties réelles de ces éléments appartiendront alors à un supplémentaire de  $Re(tr_{\partial\Omega} H_\nu^2(\Omega))$  dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\Omega)$ , isomorphe à l'espace  $\mathcal{S}$  (voir Corollaire 4.3.1.2). Nous allons en fait prouver que ces éléments ne respectent pas la condition de compatibilité évoquée dans la Section 4.2.2, à savoir que sur tout cercle d'équation  $\tau$  constante (voir (7.11)), la fonction  $(u + iv)(\eta)$  est multivaluée (la constante de multivaluation étant la même pour tous ces cercles).

Il est manifeste que parmi toutes les fonctions  $(u + iv)$  du Lemme 7.2.3.1, celles appartenant aux familles  $\{u_{k,s}^1 + iv_{k,s}^1\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $\{u_{k,s}^0 + iv_{k,s}^0\}_{k \in \mathbb{N}^*}$  sont monovaluées sur tout cercle d'équation  $\tau$  constante (la périodicité en  $\eta$  provenant clairement de celle des fonctions circulaires). Pour ce qui est des autres fonctions, commençons par introduire la notation indicielle "ext" ou bien "int" lorsque ces dernières font intervenir des fonctions de Legendre associées de première ou bien de deuxième espèce respectivement. On a alors le

**Lemme 7.2.3.2** *En reprenant les notations du Lemme 7.2.3.1, on a que*

$$\begin{cases} v_{0,c}^{1,int}(\tau, 2\pi) - v_{0,c}^{1,int}(\tau, 0) = 0 \\ v_{0,c}^{1,ext}(\tau, 2\pi) - v_{0,c}^{1,ext}(\tau, 0) = \sqrt{2} \end{cases}, \quad \tau \in \mathbb{R}_*^+. \quad (7.27)$$

On a par ailleurs que

$$\begin{cases} u_{0,c}^{0,int}(\tau, 2\pi) - u_{0,c}^{0,int}(\tau, 0) = 0 \\ u_{0,c}^{0,ext}(\tau, 2\pi) - u_{0,c}^{0,ext}(\tau, 0) = 2a\sqrt{2} \end{cases}, \quad \tau \in \mathbb{R}_*^+. \quad (7.28)$$

La preuve du Lemme 7.2.3.2 est donnée en Annexe D.

Grâce aux résultats des Lemmes 7.2.3.1 et 7.2.3.2 ainsi qu'aux notations qui y sont introduites, nous sommes désormais en mesure de donner deux familles complètes de fonctions dans  $H_\nu^2(\Omega)$  avec le

**Théorème 7.2.3.1** *Soient  $\tau_0, \tau_1 \in \mathbb{R}_*^+$  tels que  $\tau_0 < \tau_1$ . Soit  $\mathbb{A}'$  l'anneau constitué des deux cercles d'équation  $\tau = \tau_0$  et  $\tau = \tau_1$ . Les ensembles (où les indices «ext» et «int» renvoient respectivement à une écriture faisant usage des fonctions de Legendre associées de première ou de deuxième espèce)*

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ u_{k,c}^{1,int} + iv_{k,c}^{1,int}, \quad (u_{k+1,c}^{1,ext} - u_{0,c}^{1,ext}) + i(v_{k+1,c}^{1,int} - v_{0,c}^{1,ext}), \right. \\ \left. u_{k+1,s}^{1,int} + iv_{k+1,s}^{1,int}, \quad u_{k+1,s}^{1,ext} + iv_{k+1,s}^{1,ext} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (7.29)$$

et

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{array}{l} u_{k,c}^{0,int} + iv_{k,c}^{0,int} \quad , \quad (u_{k+1,c}^{0,ext} - u_{0,c}^{0,ext}) + i(v_{k+1,c}^{0,int} - v_{0,c}^{0,ext}) \quad , \\ u_{k+1,s}^{0,int} + iv_{k+1,s}^{0,int} \quad , \quad u_{k+1,s}^{0,ext} + iv_{k+1,s}^{0,ext} \end{array} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \quad (7.30)$$

constituent deux familles complètes de fonctions dans  $H_\nu^2(\mathbb{A}')$ .

*Preuve.* D'après le Lemme 7.2.3.2, la fonction  $u_{0,c}^{1,ext}$ , et donc *a fortiori* les fonctions  $(u_{k+1,c}^{1,ext})_{k \in \mathbb{N}}$  ne satisfont pas la condition de compatibilité  $\int_{\mathcal{C}_{\tau_0}} \sigma \partial_n u = 0$  (voir Section 4.2.2) puisque les fonctions qui leur sont associées avec le système (7.26) sont multivaluées dans  $\mathbb{A}'$ . Donc si on note

$$\tilde{\mathcal{S}}^1 = Vect\{u_{0,c}^{1,ext}\} \ ,$$

on a avec le Corollaire 4.3.1.2 que l'espace  $\tilde{\mathcal{S}}^1$  est isomorphe à l'espace  $\mathcal{S}$  (voir Définition 4.2.3.1) et constitue un espace supplémentaire de  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}'} H_\nu^2(\mathbb{A}'))$  dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}')$ . Par conséquent, toute fonction de  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}')$  s'écrit comme la somme d'une fonction de  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}'} H_\nu^2(\mathbb{A}'))$  et (de la trace) d'une fonction de  $\tilde{\mathcal{S}}^1$ . Dans la mesure où les fonctions de  $Re(tr_{\partial\mathbb{A}'} H_\nu^2(\mathbb{A}'))$  doivent toutes être monovaluées et avoir des conjuguées  $\sigma$ -harmoniques monovaluées, le Théorème 7.2.2.1 et le Lemme 7.2.3.1 prouvent que la famille  $\mathcal{B}_1$  constitue bien une famille complète de fonctions dans  $H_\nu^2(\mathbb{A}')$ .

Observons maintenant qu'avec la Remarque 4.3.1.1, on a aussi

$$L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}') = \mathcal{S}' \oplus Im(tr_{\partial\mathbb{A}'} H_\nu^2(\mathbb{A}'))$$

où il est rapide de vérifier (en reprenant la preuve du Théorème 4.3.1.1 et en l'adaptant aux solutions de (1.5)) que  $\mathcal{S}'$  est identique à  $\mathcal{S}$ . Or le Lemme 7.2.3.2 nous indique que la fonction  $v_{0,c}^{0,ext}$ , et donc *a fortiori* les fonctions  $(v_{k+1,c}^{0,ext})_{k \in \mathbb{N}}$  ne satisfont pas la condition de compatibilité  $\int_{\mathcal{C}_{\tau_0}} \sigma^{-1} \partial_n v = 0$  puisque les fonctions qui leur sont associées avec le système (7.26) sont aussi multivaluées dans  $\mathbb{A}'$ . Donc si on note

$$\tilde{\mathcal{S}}^0 = Vect\{v_{0,c}^{0,ext}\} \ ,$$

on a avec le Corollaire 4.3.1.2 que l'espace  $\tilde{\mathcal{S}}^0$  est isomorphe à l'espace  $\mathcal{S}'$  et constitue un espace supplémentaire de  $Im(tr_{\partial\mathbb{A}'} H_\nu^2(\mathbb{A}'))$  dans  $L_{\mathbb{R}}^2(\partial\mathbb{A}')$ . En concluant comme dans la première partie de la preuve, on a donc bien que la famille  $\mathcal{B}_2$  est une famille complète de fonctions dans  $H_\nu^2(\mathbb{A}')$ . ■

**Remarque 7.2.3.1** *Les commentaires faits pour le Théorème 7.2.2.1 concernant l'extension du Théorème 7.2.3.1 à des domaines doublement connexes plus généraux restent valables. Toujours dans la continuité des commentaires du Théorème 7.2.2.1, précisons que si  $\Omega$  est un ouvert borné simplement connexe du demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  et contenant le foyer  $a$ , alors les ensembles*

$$\mathcal{B}_1^{int} = \left\{ u_{k+1,c}^{1,int} + iv_{k+1,c}^{1,int} \quad , \quad u_{k+1,s}^{1,int} + iv_{k+1,s}^{1,int} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

et

$$\mathcal{B}_2^{int} = \left\{ u_{k+1,c}^{0,int} + iv_{k+1,c}^{0,int} \quad , \quad u_{k+1,s}^{0,int} + iv_{k+1,s}^{0,int} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

constituent des familles complètes de fonctions de  $H_\nu^2(\Omega)$ . De la même façon, les ensembles

$$\mathcal{B}_1^{ext} = \left\{ (u_{k+1,c}^{1,ext} - u_{0,c}^{1,ext}) + i(v_{k+1,c}^{1,int} - v_{0,c}^{1,ext}) \quad , \quad u_{k+1,s}^{1,ext} + iv_{k+1,s}^{1,ext} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

et

$$\mathcal{B}_2^{ext} = \left\{ (u_{k+1,c}^{0,ext} - u_{0,c}^{0,ext}) + i(v_{k+1,c}^{0,int} - v_{0,c}^{0,ext}) \quad , \quad u_{k+1,s}^{0,ext} + iv_{k+1,s}^{0,ext} \right\}_{k \in \mathbb{N}}$$

constituent des familles complètes de fonctions de  $H_\nu^2(\mathbb{P}_d \setminus \overline{\Omega})$ .

Les résultats de cette section permettent donc la mise en place d'outils constructifs pour la résolution du (PEB) formulé dans des espaces  $\Omega$  doublement connexes. Ainsi, la connaissance de familles complètes de fonctions dans  $H_\nu^2(\Omega)$  conduit dans un premier temps à la détermination de l'opérateur de projection  $P_\nu$  (voir introduction de ce chapitre) de  $L^2(\partial\Omega)$  sur  $tr H_\nu^2(\Omega)$ . De là, il devient possible de calculer la solution du (PEB) avec (6.14). Nous allons faire usage de ces résultats dans la Partie IV pour le cas particulier du tokamak Tore Supra.

**Quatrième partie**  
**Applications au tokamak Tore Supra**

---



# Chapitre 8

## Algorithme de résolution du problème extrémal borné

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Le tokamak Tore Supra . . . . .</b>	<b>154</b>
8.1.1	Limiteur et géométrie de la machine dans une section poloïdale . . . . .	154
8.1.2	Données mesurées et hypothèse de modélisation . . . . .	156
<b>8.2</b>	<b>Description de l'algorithme de résolution . . . . .</b>	<b>158</b>
8.2.1	Etape n°1 : définition du système de coordonnées toroïdales . . . . .	159
8.2.2	Etape n°2 : Approximation du flux magnétique poloïdal . . . . .	161
8.2.3	Etape n°3 : Construction d'une estimée de la frontière plasma . . . . .	165
8.2.4	Etape n°4 : Résolution du problème extrémal borné . . . . .	167
8.2.5	Etape n°5 : Mise à jour de la frontière plasma et itération . . . . .	172

---

Ce chapitre est consacré à la mise en place d'un algorithme de résolution du problème extrémal borné dans le cas particulier du tokamak Tore Supra. Sur la base de l'Algorithme 1 proposé dans la Section 6.2.4, nous allons mettre en oeuvre une méthode de reconstruction de la frontière plasma à partir de la solution du problème extrémal borné. Cette solution sera calculée grâce aux familles complètes d'harmoniques toroïdales (voir Théorème 7.2.3.1) qui, comme nous l'avons constaté dans l'introduction du Chapitre 7, permettent de caractériser l'opérateur de projection  $P_\nu : L^2(\partial\Omega) \rightarrow tr H_\nu^2(\Omega)$  (voir Définition 6.2.1.2) qui intervient dans la formule (6.14).

Rappelons que dorénavant les fonctions  $\sigma$  et  $\nu$  intervenant respectivement dans (1.2) et (1.7) sont fixées en accord avec le problème physique (voir Section 1.4 et Chapitre 7), soit dans le système de coordonnées planaires  $(r, z)$  (voir Figure 8.2)

$$\sigma(r, z) = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \nu(r, z) = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} = \frac{r - 1}{r + 1} .$$

La première partie de ce chapitre est consacrée à la description du tokamak Tore Supra dans une section poloïdale. Nous donnerons les principales caractéristiques géométriques de la machine afin de fixer certaines notations que nous utiliserons dans l'algorithme de résolution. Nous détaillerons par ailleurs le type de mesures effectuées sur le bord externe de la machine, leur nombre ainsi que leur localisation.

---

La seconde partie est une description de l'algorithme de résolution mis en place pour résoudre le problème extrémal borné dans ce cadre. Les étapes de cet algorithme seront présentées en détails et montreront comment il est possible de retrouver la frontière du plasma à partir d'une estimée de cette dernière, elle-même obtenue par extrapolation à l'intérieur du tokamak des données mesurées sur le bord extérieur.

Un descriptif complet de l'algorithme est fourni à la fin de ce chapitre.

## 8.1 Le tokamak Tore Supra

Tore Supra est un tokamak construit au CEA de Cadarache (France). Son exploitation a commencé en 1988 et a pour but de réaliser des plasmas performants de longue durée (jusqu'à 6 minutes en Décembre 2003). Il est l'un des plus grands tokamaks au monde et se distingue de ceux actuellement en service par son système d'aimants toroïdaux supraconducteurs générant un champ magnétique toroïdal permanent (généralement les tokamaks sont équipés d'aimants classiques entraînant un échauffement des bobines en cuivre qui justifie une utilisation limitée en temps). Ce champ, couplé à celui provenant de la circulation du courant magnétique au sein du plasma, génère des lignes de champ de structure hélicoïdales qui maintiennent alors le plasma au coeur de la machine (voir Figure 1.3).

Une autre caractéristique de Tore Supra est sa capacité à extraire en continu la puissance injectée dans le plasma. Ceci est réalisé grâce à des composants situés face au plasma et refroidis dans une boucle d'eau. Ces derniers constituent la première enceinte matérielle rencontrée par le plasma et recueillent la puissance thermique que le plasma perd soit par rayonnement soit par transport de chaleur. Pour plus de détails sur le mode de fonctionnement de Tore Supra ainsi que sur les pièces le constituant nous renvoyons à [1].

### 8.1.1 Limiteur et géométrie de la machine dans une section polôïdale

Comme mentionné dans la Section 1.4, un élément important constituant la machine est la chambre à vide. Siège des réactions de fusion, elle est parfaitement hermétique et constitue une première barrière de sûreté. Au sein de celle-ci existe une barrière matérielle, appelée limiteur, délimitant le volume occupé par le plasma thermonucléaire afin que celui-ci n'entre pas en contact avec la chambre à vide.

Dans Tore Supra, le limiteur est composé de différents éléments (voir Figure 8.1) qui sont :

- Le limiteur pompé toroïdal (LPT). Il est situé en partie basse de la machine et constitue l'élément principal de contact avec le plasma. C'est pourquoi une grande partie de la puissance transférée par les particules du plasma y est extraite (15 MW). Il est formé de 576 aiguilles en composite de fibre de carbone et cuivre durci capables de supporter de forts flux thermiques (jusqu'à 10MW/m<sup>2</sup>). Par ailleurs, cette partie mécanique hérite son nom du fait qu'elle est équipée d'un système de pompage assurant la collection des particules. Le LPT est plat sur pratiquement toute sa surface, sauf autour de son nez qui est arrondi. Il peut être déplacé verticalement.

- Le limiteur de protection d’antennes (LPA). Sa fonction est de protéger les antennes des systèmes de chauffage contre un endommagement éventuel (électrons énergétiques, etc...). Il se situe côté extérieur. Contrairement au LPT, il n’a pas vocation à extraire de forts flux. Le LPA correspond à une portion de cercle recouverte de tuiles en composite de fibre carbone. Sa position radiale peut être modifiée d’un plasma à l’autre. Précisons qu’il existe trois types d’antennes assurant le chauffage additionnel du plasma ainsi que la génération de courant non inductive : les antennes à fréquence hybride inférieure (3.7 GHz), à fréquence cyclotronique ionique FCI (30-80 MHz) et à fréquence cyclotronique électronique FCE (118 GHz).
- Les anneaux de garde. Ils sont destinés à supporter le plasma (points de contacts) pendant des phases particulières de l’évolution du plasma (démarrage, perte de contrôle de position, disruption). Ils sont formés de tuiles épaisses en composite de fibre carbone.
- La protection d’enceinte interne (PEI). Elle a pour vocation de protéger l’enceinte de Tore Supra de la puissance rayonnée par le plasma. Il s’agit d’une partie activement refroidie formée d’éléments ayant la forme de portions cylindriques mises en écailles pour garantir une parfaite couverture des panneaux.

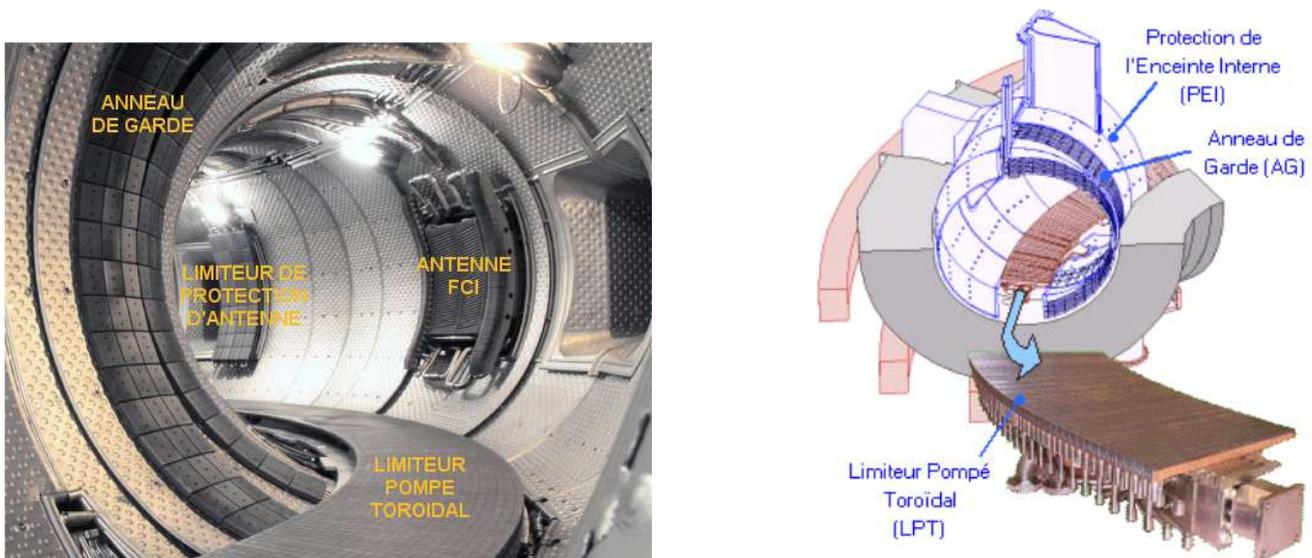


FIG. 8.1 – Eléments constitutifs du limiteur dans Tore Supra. Source : <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>

La géométrie toroïdale axisymétrique de Tore Supra fait qu’il est possible de supposer que les quantités magnétiques ne dépendent pas de l’angle toroïdal. Aussi l’étude de la position du plasma au sein de la chambre à vide se fait dans une section poloïdale correspondant à un angle toroïdal constant. Une telle section est représentée dans la Figure 8.2. On peut y voir apparaître différents éléments :

- La courbe verte correspond à la frontière extérieure de Tore Supra et est notée  $\Gamma_e$ . Il s’agit d’un cercle de centre  $C_T = (2.42 \text{ m}, 0)$  et de rayon  $\rho_T = 0.92 \text{ m}$ . Il arrive que l’on désigne par  $R_{max} = 2.42 \text{ m}$  et  $R_{min} = 0.92 \text{ m}$  les grand et petit rayons de la machine.

- L'angle polaire  $\theta$  compté à partir du centre  $C_T$  du tokamak et orienté dans le sens trigonométrique.
- La courbe noire représente quant à elle le limiteur et est notée  $\Gamma_l$ . On peut y retrouver les différents éléments évoqués au-dessus. Ainsi les limiteurs pompé toroidal (LPT) et de protection d'antennes (LPA) se situent respectivement autour de  $\theta = 270^\circ$  et  $\theta = 0^\circ$ . Les anneaux de garde se trouvent côté intérieur pour  $\theta \in [90^\circ, 255^\circ]$ . Enfin la protection d'enceinte interne (PEI) occupe le reste de la courbe noire.

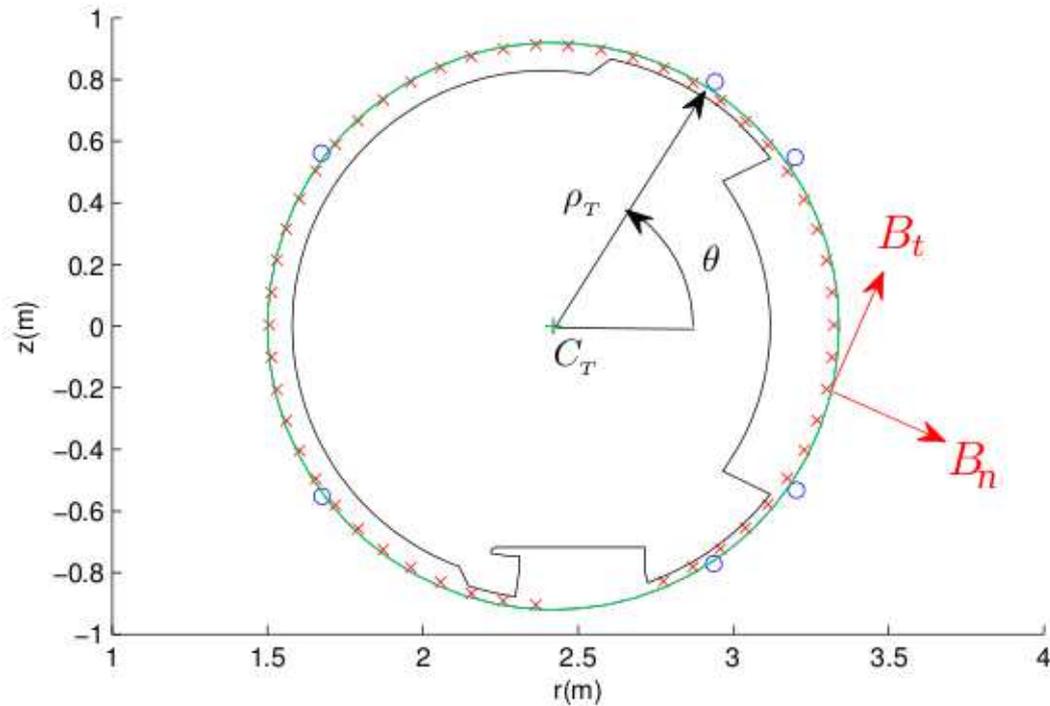


FIG. 8.2 – Section poloidale de Tore Supra. Les distances sur les axes des abscisses et des ordonnées sont données en mètres.

On remarquera la forme particulière du limiteur. Précisons que sa modélisation est réalisée à partir des coordonnées de 197 points.

**Enfin, nous noterons désormais  $\rho$  la distance radiale (exprimée en mètres) séparant un point du plan du centre  $C_T$  du tokamak.**

### 8.1.2 Données mesurées et hypothèse de modélisation

En s'appuyant toujours sur la Figure 8.2, décrivons maintenant les capteurs placés sur la frontière extérieure de Tore Supra et mesurant les différentes quantités magnétiques nécessaires à l'initialisation du problème extrémal borné ainsi que de l'identification de la frontière plasma.

Ces capteurs sont de deux types :

- Les capteurs (il s’agit en fait de bobines) de mesure du champ magnétique  $\vec{B}$  en teslas. Ils sont au nombre de 102 sachant qu’une moitié d’entre eux fournit la composante normale (ou radiale)  $B_n$  du champ magnétique, l’autre moitié mesurant quant à elle la composante tangentielle  $B_t$  du champ magnétique. Sur la Figure 8.2, seuls les capteurs du champ radial sont indiqués (croix rouge). Les autres se situent en première approximation aux mêmes endroits (la distance entre deux capteurs censés fournir les composantes du champ magnétique en un point n’excède jamais  $5 \cdot 10^{-5}$  m). On peut remarquer par ailleurs que ces capteurs ne sont pas exactement localisés sur la frontière extérieure du tokamak mais plutôt à l’intérieur de la machine (voir Figure 8.3). Leur répartition circulaire est uniforme hormis en un endroit localisé en dessous du limiteur pompé toroïdal. L’existence de ce «trou» de mesures provient de la présence d’une poutre sur laquelle est construite cette partie du limiteur (en suivant la répartition des autres capteurs, ce «trou» pourrait accueillir trois mesures supplémentaires).

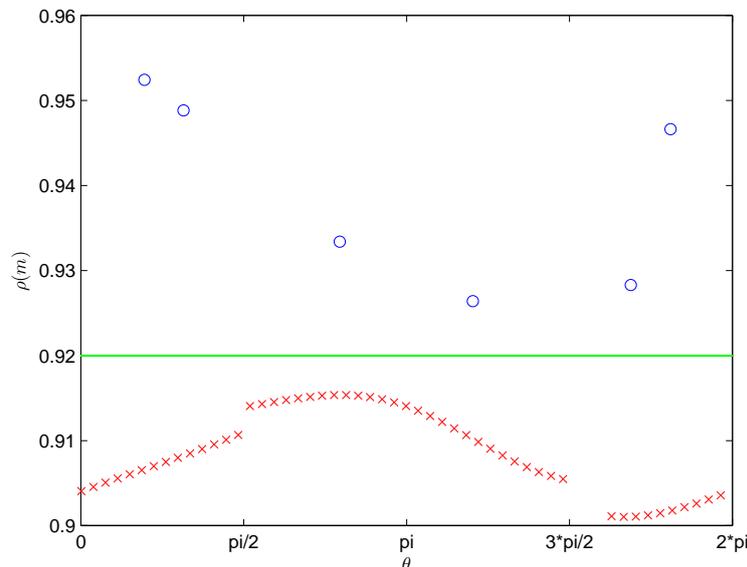


FIG. 8.3 – Distances radiales à la frontière extérieure de Tore Supra (courbe verte), des capteurs mesurant la composante radiale du champ (croix rouges) ainsi que pour des capteurs mesurant le flux magnétique poloïdal (cercles bleus).

- Les capteurs de mesure du flux magnétique poloïdal  $u$  en webers. Ils sont au nombre de 6 (cercles bleus sur la Figure 8.2). Comme pour les capteurs de mesure du champ magnétique, ils ne sont pas installés exactement sur la frontière extérieure du tokamak mais plutôt à l’extérieur de celle-ci (voir Figure 8.3). Remarquons que leur faible nombre (en comparaison des capteurs de mesure du champ magnétique) n’est pas un handicap pour la résolution du problème extrémal borné dans la mesure où il est possible d’enrichir ce nombre par intégration du système de Cauchy-Riemann (1.4) (voir Section 8.2).

Les différents capteurs magnétiques fournissent donc des mesures (ponctuelles) des

quantités physiques correspondant aux données initiales du problème de Cauchy (*PC*) énoncé dans la Section 1.2. En effet, rappelons qu'en dehors du plasma, qui est entièrement contenu dans le limiteur, on a dans le système de coordonnées planaires  $(r, z)$  défini sur la Figure (8.2) (voir équations (1.8))

$$\begin{cases} B_r &= -\frac{1}{r}\partial_z u \\ B_z &= \frac{1}{r}\partial_r u \end{cases} . \quad (8.1)$$

où  $u$  désigne le flux magnétique poloïdal. **La faible distance radiale entre les capteurs mesurant les composantes  $B_n$  et  $B_t$  et la frontière extérieure  $\Gamma_e$  de la machine (1.9 cm au maximum, soit moins de 1 % du diamètre de la machine) fait que nous supposons désormais que ces capteurs sont exactement situés sur  $\Gamma_e$ .** Il s'agit d'une hypothèse simplificatrice permettant une mise en place plus simple de l'algorithme de résolution du problème extrémal borné. Il reste qu'une façon optimale de traiter le problème serait de paramétrer un contour passant effectivement par ces capteurs, ce que nous n'avons pas envisagé dans ce manuscrit.

En prenant désormais en compte cette hypothèse, le système d'équations (8.1) peut se réécrire sur  $\Gamma_e$

$$\begin{cases} B_n &= \partial_n v &= -\frac{1}{r}\partial_t u &= -\frac{1}{r}\frac{1}{\rho_T}\partial_\theta u \\ B_t &= \partial_t v &= \frac{1}{\rho_T}\partial_\theta v &= \frac{1}{r}\partial_n u \end{cases} , \quad (8.2)$$

ce qui prouve que le jeu de mesures magnétiques  $(B_n, B_t)$  n'est autre qu'une paire de données de Cauchy pour l'équation (1.2) posée dans le domaine compris entre la frontière du plasma et la frontière extérieure  $\Gamma_e$  du tokamak. Remarquons toutefois que pour écrire les systèmes (8.1) et (8.2), il est nécessaire de disposer de données  $(B_n, B_t)$  sous forme de fonctions. Nous ferons donc dans la suite de ce manuscrit l'hypothèse que toutes les valeurs mesurées par les différents capteurs correspondent à des valeurs ponctuelles de fonctions suffisamment régulières pour que toutes les opérations éventuelles d'intégration et de dérivation ne nécessitent pas de justification particulière. De ce fait et en accord avec la première hypothèse de localisation des capteurs de mesure de champ, les valeurs  $(B_n, B_t)$  seront interpolés le long de  $\Gamma_e$  (voir Section 8.2).

## 8.2 Description de l'algorithme de résolution

Dans cette section, nous décrivons en détails les différentes étapes de l'algorithme de résolution du problème extrémal borné en incluant certains calculs complémentaires utiles à sa mise en place, l'objectif étant le calcul de la solution à ce problème avec le Corollaire 6.2.2.2. Notons simplement ici que la démarche proposée n'est pas exactement similaire à celle suggérée par l'Algorithme 1.

### 8.2.1 Etape n°1 : définition du système de coordonnées toroïdales

En vue d'utiliser les familles complètes de fonctions calculées dans les Sections 7.2.2 et 7.2.3, il est nécessaire de définir dans un premier temps le système de coordonnées toroïdales dont nous allons nous munir. Rappelons que la définition de ce dernier est subordonnée à celle d'un foyer  $(a, 0)$  du demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  (voir Section 7.2.1) qui doit être placé au sein du plasma créé dans l'enceinte du tokamak Tore Supra (voir les commentaires du Théorème 7.2.2.1). Néanmoins, la frontière  $\Gamma_p$  du plasma n'étant pas connue au moment où les capteurs réalisent leurs mesures, il est *a priori* difficile de savoir où placer le foyer du système de coordonnées toroïdales. De plus, même si une première estimation de la localisation du plasma était possible au moment de la réception des mesures, il reste que dans l'optique de développements numériques, le foyer ne peut pas être choisi de façon quelconque dans le plasma. En effet, on sait que dans l'enceinte du tokamak, le flux magnétique poloïdal présente un maximum sur l'axe magnétique du plasma, donc en fait au foyer  $a$  dans une section poloïdale (voir Section 1.4). On comprend alors que pour bien modéliser le problème physique, il devient prioritaire de placer le foyer du système de coordonnées toroïdales proche de l'axe magnétique du plasma. Choisir un foyer éloigné du foyer réel est donc synonyme d'erreurs numériques car il est bien évident que nous serons aussi limités, pour des raisons de coûts de calcul, par le nombre d'harmoniques toroïdales que nous pourrons utiliser. Constatons que cette recherche du point de flux maximal au sein du plasma est bien entendu rendue obsolète dans le cadre de développements uniquement théoriques puisque dans ce cas on s'autorise à utiliser une infinité d'harmoniques toroïdales, ce qui signifie qu'il est toujours possible de compenser l'erreur introduite par le mauvais placement du foyer.

Observons alors que l'algorithme que nous allons mettre en place dans cette section permettra uniquement de traiter des expériences où le foyer est choisi tel que la frontière extérieure  $\Gamma_e$  de Tore Supra corresponde à un cercle d'équation (7.11). Rappelons que cette équation est particulière au cas où le foyer  $a$  est situé sur l'axe des abscisses et indique que les courbes correspondant aux lignes de niveau  $\tau$  constante sont des cercles de centre  $(a \coth \tau, 0)$  et de rayon  $R_\tau$  tel que  $R_\tau^2 = \frac{a^2}{\sinh^2(\tau)} = a^2(\coth^2 \tau - 1)$ . Par conséquent, si on note  $C_\tau$  l'abscisse du centre d'un tel cercle, son rayon vérifie encore

$$R_\tau = \sqrt{C_\tau^2 - a^2} .$$

Aussi, avec les données géométriques de Tore Supra fournies dans la Section 8.1.1, on obtient que pour que la frontière extérieure  $\Gamma_e$  soit une ligne de niveau de la coordonnée toroïdale  $\tau$ , l'abscisse  $a$  du foyer doit vérifier (voir Figure 8.4)

$$a = \sqrt{C_T^2 - \rho_T^2} = 2.2383 m . \quad (8.3)$$

On calcule finalement que la frontière extérieure de Tore Supra correspond, dans le système de coordonnées toroïdales associé au foyer  $a$ , à la courbe de niveau  $\tau = \tau_e = 1.622$ . **Nous adoptons donc ce foyer  $a$  jusqu'à la fin de ce manuscrit.** Ce choix limite donc le type d'expériences qu'il sera possible de traiter puisque les plasmas que nous chercherons à retrouver devront toujours contenir ce point précis. Sont donc exclues de notre étude :

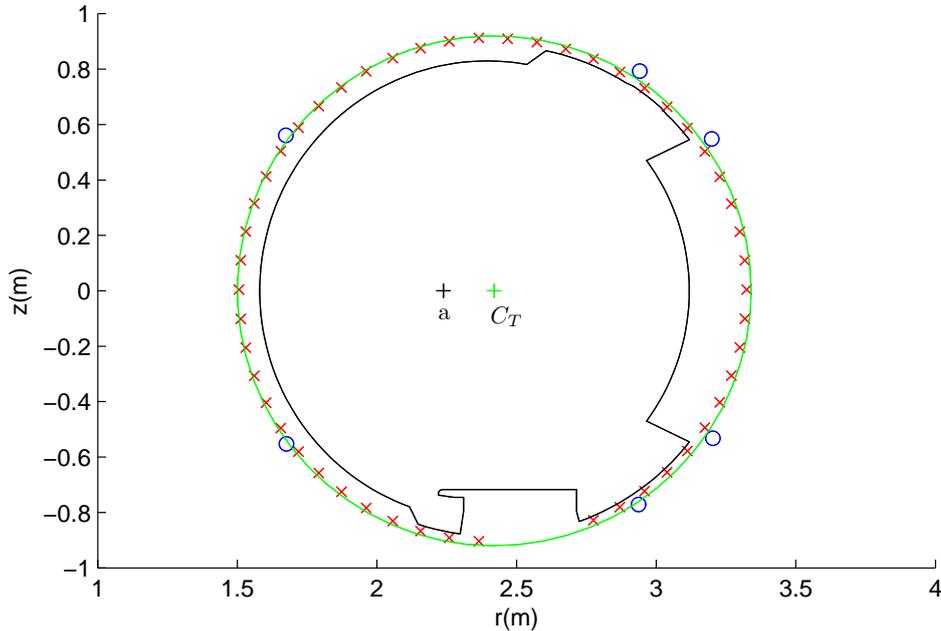


FIG. 8.4 – Section poloïdale de Tore Supra. Le point  $C_T$  désigne le centre du cercle correspondant à la frontière extérieure  $\Gamma_e$ . Le point  $a$  correspond au foyer choisi pour définir le système de coordonnées toroïdales.

- Les phases d’amorçage du plasma pendant lesquelles il est possible d’avoir un plasma de faible volume se rapprochant (ou même touchant) des parois du limiteur. Un exemple est présenté sur la Figure 8.5. Il s’agit d’une simulation obtenue à partir du code d’équilibre MAESTRO [111] sur laquelle on peut observer un plasma (lignes rouges) en mode limiteur ayant un point de contact avec le limiteur. On constate bien que le foyer que nous avons choisi ne se situe pas dans le plasma.
- Les phases de disruption du plasma où ce dernier a tendance à se contracter tout en se rapprochant du limiteur pompé toroïdal. Ainsi sur la Figure 8.6, on observe une telle phase simulée à nouveau avec le code d’équilibre MAESTRO [111]. On y constate qu’entre les temps  $t = 6101$  ms et  $t = 6104$  ms, le plasma est dans une configuration limiteur, alors qu’au-delà il présente une configuration en point X (le plasma étant représenté par les courbes de niveau orange entièrement contenues dans le limiteur). On observe bien à nouveau qu’à partir du temps  $t = 6107$  ms, le foyer  $a$  que nous avons choisi ne se situe plus à l’intérieur du plasma (le cas  $t = 6106$  ms étant quant à lui limite).

La possibilité de changer de foyer au cours de l’algorithme sera évoquée en conclusion de ce manuscrit. Finalement, même si le choix fait pour le foyer du système de coordonnées toroïdales ne permet pas d’envisager toutes les configurations de plasma possibles, ce dernier reste cependant approprié pour des configurations où le plasma est stabilisé (voir par exemple le choc n°30648 aux temps  $t = 6101, 6103$  ms de la Figure 8.6) comme nous le constaterons dans le Chapitre 9.

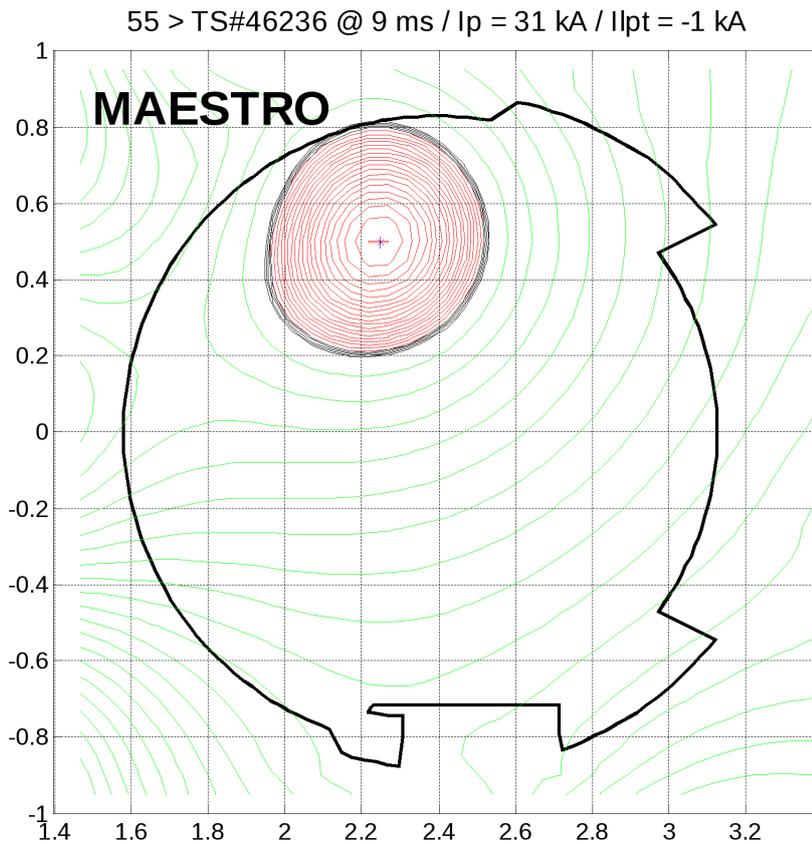


FIG. 8.5 – Choc n°46236 au temps  $t = 9$  ms. Lignes de niveau du flux magnétique poloïdal à l'extérieur du plasma (lignes vertes) ainsi qu'à l'intérieur du plasma (lignes rouges). Source : CEA/IRFM.

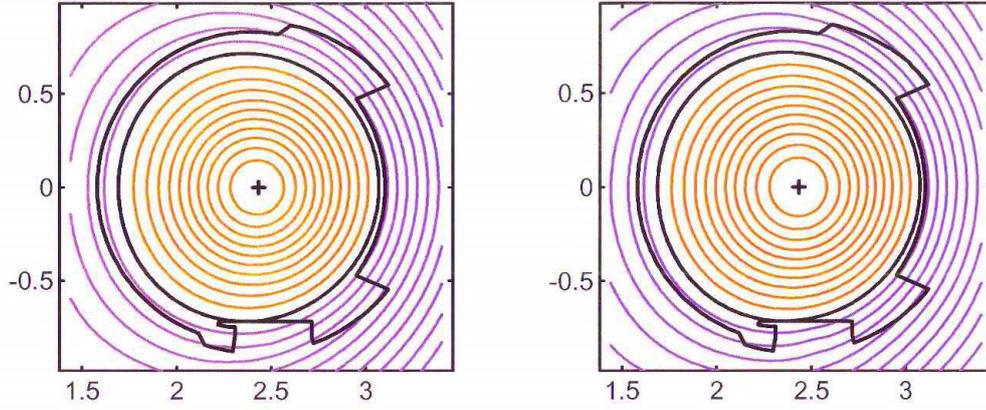
### 8.2.2 Etape n°2 : Approximation du flux magnétique poloïdal

Le but de cette étape est de fournir une approximation, au sens de la norme  $L^2(\Gamma_e)$  et exprimée comme combinaisons de la forme (7.22) et (7.23), du flux magnétique poloïdal  $u$  construit à partir des mesures magnétiques réalisées par les différents capteurs présentés dans la Section 8.1.2. Cette partie de l'algorithme comporte elle-même plusieurs étapes qui sont les suivantes :

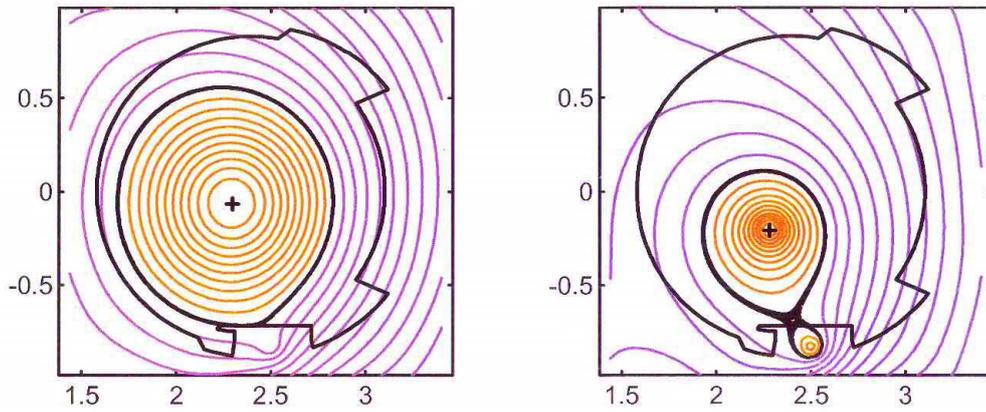
#### A - Construction du potentiel scalaire et détermination de la constante de multivaluation

Cette première étape réalisée en amont de l'algorithme permet de créer le potentiel scalaire  $v$  nécessaire à la fois à la création des données de la forme  $F_d = u + iv \in L^2(\Gamma_e)$  initialisant le problème extrémal borné (voir Corollaire 6.2.2.2) mais aussi à la détermination d'une éventuelle constante de multivaluation (voir Section 4.2.2) qui nous permettra de travailler avec des fonctions monovaluées dans les domaines doublement connexes compris entre la frontière extérieure  $\Gamma_e$  et la frontière  $\Gamma_p$  que nous serons amenés à envisager par la suite.

1 > TS#30648 @ 6101ms /  $I_p = 1223$  [3] kA    21 > TS#30648 @ 6103ms /  $I_p = 1306$  [-10] kA



41 > TS#30648 @ 6104ms /  $I_p = 784$  [90] kA    61 > TS#30648 @ 6106ms /  $I_p = 348$  [153] kA



81 > TS#30648 @ 6107ms /  $I_p = 128$  [172] kA    101 > TS#30648 @ 6109ms /  $I_p = 58$  [163] kA

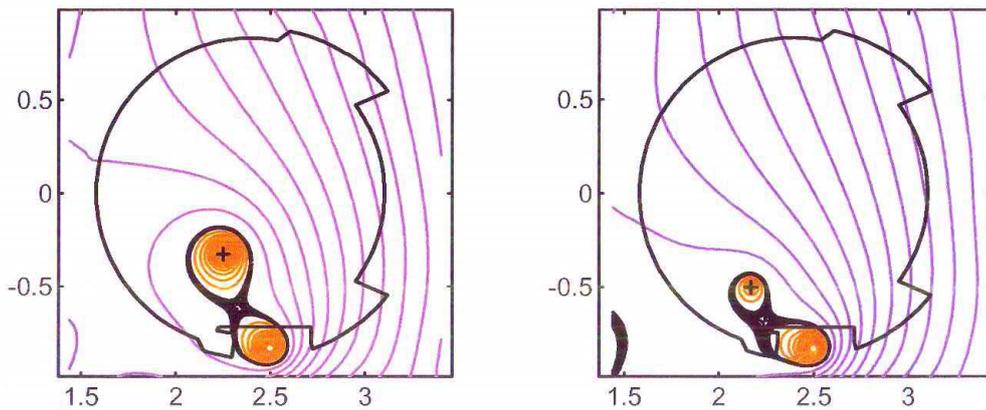


FIG. 8.6 – Choc n°30648 aux temps  $t = 6101, 6103, 6104, 6106, 6107$  et  $6109$  ms. Lignes de niveau du flux magnétique poloïdal à l'extérieur du plasma (lignes bleues) ainsi qu'à l'intérieur du plasma (lignes oranges). Source : CEA/IRFM.

On rappelle que sur  $\Gamma_e$ , où l'on a supposé que les mesures de  $B_t$  étaient effectivement réalisées, la dérivée tangentielle  $\partial_t v$  est égale à la composante tangentielle du champ magnétique (voir les équations (1.8) et (1.10)). Or la dérivée tangentielle s'exprimant simplement en fonction de la variable angulaire  $\theta$  sur  $\Gamma_e$ , on a que

$$\partial_t v = B_t \implies \partial_\theta v = \rho_T B_t \quad \text{sur } \Gamma_e . \quad (8.4)$$

On obtient donc à partir des 51 valeurs de  $B_t$ , 51 valeurs de  $\partial_\theta v$  aux angles  $\theta$  où sont placés les capteurs mesurant  $B_t$ . Ces valeurs sont interpolées sur  $\Gamma_e$  au moyen de splines cubiques pour obtenir une fonction  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \partial_\theta v$ . Enfin cette fonction est intégrée par rapport à une valeur angulaire de référence  $\theta_{ref}$  de sorte que  $v$  se calcule sur  $\Gamma_e$  pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$  avec

$$v(\theta) = v(\theta_{ref}) + \int_{\theta_{ref}}^{\theta} \partial_\theta v \, d\theta . \quad (8.5)$$

Observons que  $v$  est définie à une constante additive près qui peut être choisie arbitrairement. Nous avons déjà évoqué certaines conditions de normalisation généralement utilisées (voir (2.6) et (3.2)). L'algorithme que nous développons calcule  $v$  en utilisant la condition  $v(\theta_{ref} = 0) = 0$  sur  $\Gamma_e$ . Finalement le potentiel scalaire est calculé avec (8.5) sur un vecteur  $\Theta$  de positions angulaires parcourant  $[0, 2\pi]$  avec un pas de 0.1 radian, soit 63 positions différentes.

On obtient finalement, après interpolation par splines cubiques des dernières valeurs calculées, une fonction  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto v(\theta)$  telle que  $v(0) = 0$  donnant le potentiel scalaire en tout point du bord extérieur  $\Gamma_e$ . Il reste maintenant à appliquer le changement de coordonnées (7.8) à cette fonction afin de l'exprimer en coordonnées toroïdales. La fonction résultant de ce passage en coordonnées toroïdales est notée  $v_{to}$ .

Observons maintenant que le potentiel scalaire obtenu par intégration avec (8.5) n'est pas une fonction monovaluée. Ceci provient du théorème d'Ampère selon lequel l'intégrale du champ magnétique  $B_t$  le long du contour  $\Gamma_e$  est égale, modulo une multiplication par un facteur  $2\pi$ , à la somme des courants traversant le disque de frontière  $\Gamma_e$ . Ces derniers sont exactement les courants du plasma et ne sont pas nuls. Ceci peut être vérifié en calculant

$$\delta_v = v_{to}(2\pi) - v_{to}(0) \neq 0 . \quad (8.6)$$

La constante  $\delta_v$  sera appelée «constante de multivaluation». En conséquence, on définit la fonction  $v_{to,mo}$  monovaluée obtenue avec

$$v_{to,mo} = v_{to} - \frac{\delta_v}{\sqrt{2}} v_{0,c,0}^{1,ext} , \quad (8.7)$$

où  $v_{0,c,0}^{1,ext}$  est la fonction multivaluée donnée dans les Lemmes 7.2.3.1 et 7.2.3.2. Remarquons simplement que la démarche consistant à travailler au bord avec des fonctions monovaluées a déjà été évoquée dans la Section 4.2.2 et que (8.7) n'est

rien d'autre que l'application de (4.23). Le calcul de la fonction  $v_{to,mo}$  va nous permettre d'amorcer le problème extrémal borné avec des données sur le bord extérieur monovalués (voir Section 8.2.4).

### **B - Construction du flux magnétique poloïdal à partir de sa dérivée tangentielle**

La dérivée tangentielle  $\partial_t u$  s'obtient à partir de la première relation du système (8.2). Ce calcul s'effectue suivant le même principe que celui utilisé dans le point **A** précédent. A nouveau, comme nous faisons l'hypothèse que toutes les mesures de  $B_n$  sont effectuées sur le cercle extérieur  $\Gamma_e$  (voir Section 8.1.2), on a que

$$\partial_t u = -r B_n \implies \partial_\theta u = -\rho_T r B_n \quad \text{sur } \Gamma_e . \quad (8.8)$$

On obtient donc à partir des 51 valeurs de  $B_n$ , 51 valeurs de  $\partial_\theta u$  aux angles  $\theta$  où sont placés les capteurs mesurant  $B_n$ . On interpole ces valeurs sur  $\Gamma_e$  au moyen de splines cubiques pour obtenir une fonction  $\theta \in [0, 2\pi] \mapsto \partial_\theta u$  que l'on intègre par rapport à une valeur de référence  $\theta_{ref}$  selon (8.5). Nous faisons le choix d'intégrer par rapport à la position du quatrième capteur de flux compté dans le sens de parcours trigonométrique le long de  $\Gamma_e$ . En effet, il s'agit du capteur le plus proche de la frontière extérieure de Tore Supra (voir Figure 8.3). La distance radiale les séparant est inférieure à 7 mm. Ce capteur est par ailleurs repéré par l'angle  $\theta_{ref} = 216.6^\circ$  sur  $\Gamma_e$ . Finalement le flux est calculé sur le vecteur  $\Theta$  déjà utilisé dans le point **A**.

Cette partie s'achève alors comme la précédente en interpolant sur  $\Gamma_e$  par splines cubiques les valeurs du flux calculées sur le vecteur  $\Theta$  puis en effectuant le passage en coordonnées toroïdales. Il en résulte une fonction  $u_{to}$  (déjà monovaluée) à partir de laquelle on crée la fonction  $u_{to,mo}$  associée à  $v_{to,mo}$

$$u_{to,mo} = u_{to} - \frac{\delta_v}{\sqrt{2}} u_{0,c}^{1,ext} . \quad (8.9)$$

### **C - Construction de la dérivée normale du flux magnétique poloïdal**

La dérivée normale  $\partial_n u$  sur  $\Gamma_e$  se calcule quant à elle avec la deuxième relation du système (8.2). Le schéma de construction par calcul en les points de mesure de  $B_t$  et interpolation par splines cubiques est identique à ceux des étapes **A** et **B** précédentes. Et donc à nouveau par passage en coordonnées toroïdales, on obtient sur  $\Gamma_e$  la fonction  $\partial_n u_{to}$  qui va nous être utile dans l'étape **D** suivante.

### **D - Approximation de $u_{to}$ et $v_{to}$ par des harmoniques toroïdales**

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . Introduisons l'espace vectoriel  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N$  défini par

$$\mathcal{E}_{u_{to}}^N = Vect \left\{ u_{k,c}^{1,ext}, u_{k,s}^{1,ext}, u_{k,c}^{1,int}, u_{k,s}^{1,int} \right\}_{k=0..N} . \quad (8.10)$$

Il s'agit d'un espace vectoriel de dimension  $4N + 2$ . Nous allons calculer la meilleure approximation au sens de la norme  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$  et dans l'espace  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N$  de la fonction  $u_{to}$

obtenue dans la partie **B** précédemment. Cette approximation (ou projection), que l'on notera  $\tilde{u}_{to}^N$ , est cherchée sous la forme

$$\tilde{u}_{to}^N = \sum_{k=1}^N (\alpha_{k,c}^{ext} u_{k,c}^{1,ext} + \alpha_{k,s}^{ext} u_{k,s}^{1,ext} + \alpha_{k,c}^{int} u_{k,c}^{1,int} + \alpha_{k,s}^{int} u_{k,s}^{1,int}) + \alpha_{N+1,c}^{ext} u_{0,c}^{1,ext} + \alpha_{N+2,c}^{int} u_{0,c}^{1,int} . \quad (8.11)$$

Cette partie de l'algorithme est traitée en détail dans l'Annexe E. Ajoutons simplement que la complétude de la famille des harmoniques toroïdales utilisée dans (8.11) (voir Théorème 7.2.2.1) nous assure que plus le nombre  $N$  d'harmoniques est grand, meilleur sera l'approximant calculée sur  $\Gamma_e$  au sens de la norme  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$ . Nous aurons toutefois l'occasion de constater dans le Chapitre 9 à quel point les familles complètes de solutions exhibées dans le Chapitre 7 sont adaptées à ce type de décomposition dans la mesure où un faible nombre  $N$  sera suffisant pour fournir des approximations de bonne qualité sur  $\Gamma_e$ . Cette observation est bien entendu corrélée au fait que nous construisons des approximations à partir de véritables solutions à l'équation (1.2).

Nous déterminons de la même manière une approximation  $\tilde{v}_{to}^N$  de  $v_{to}$ . Cette approximation nous sera utile lorsque nous calculerons des critères d'approximation sur  $\Gamma_e$  dans le Chapitre 9. L'espace sur lequel nous projetons  $v_{to}$  est cette fois-ci

$$\mathcal{E}_{v_{to}}^N = Vect \left\{ v_{k,c}^{0,ext}, v_{k,s}^{0,ext}, v_{k,c}^{0,int}, v_{k,s}^{0,int} \right\}_{k=0..N} , \quad (8.12)$$

d'après le résultat du Théorème 7.2.2.1. Le calcul de cette projection utilise la même méthode que celle développée dans l'Annexe E, c'est pourquoi nous ne la présentons pas en détail. Notons par ailleurs que le nombre d'harmoniques toroïdales utilisées dans les approximations de  $u_{to}$  et  $v_{to}$  sont identiques.

**Remarque 8.2.2.1** *Signalons simplement que sur la base des calculs (8.7) et (8.9), l'algorithme détermine par ailleurs les fonctions monovaluées  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  et  $\tilde{v}_{to,mo}^N$  associées respectivement à  $\tilde{u}_{to}^N$  et  $\tilde{v}_{to}^N$ .*

### 8.2.3 Etape n°3 : Construction d'une estimée de la frontière plasma

Une première approximation de la frontière plasma  $\Gamma_p$  peut être calculée à partir de la fonction  $\tilde{u}_{to}^N$  obtenue dans l'étape n°2 (voir la partie **D** de la Section 8.2.2). En effet, il est possible de considérer l'extension harmonique généralisée de  $\tilde{u}_{to}^N$  dans tout le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  privé du foyer  $a$ . Pour réaliser ceci, il suffit d'évaluer l'expression (8.11) de  $\tilde{u}_{to}^N$  en la variable  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ . Remarquons aussi que même si la fonction  $\tilde{u}_{to}^N$  reste évaluable dans tout le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  privé du foyer  $a$ , cette dernière ne garde un sens physique que dans domaine doublement connexe compris entre le bord extérieur  $\Gamma_e$  et la frontière plasma  $\Gamma_p$  (inconnue pour l'instant), puisque dans le plasma l'équation (1.2) n'est pas satisfaite.

Reprenons maintenant la définition de la frontière plasma donnée dans la Section 1.4 et notons que les plasmas sur lesquels nous avons validé notre algorithme de résolution

du problème extrémal borné correspondent tous à des plasmas en configuration limiteur. Aussi nous ne cherchons pas à détecter pour l'instant la présence d'un éventuel point X (cette possibilité sera discutée dans la Partie V).

Ainsi, pour déterminer la frontière plasma, on calcule dans un premier temps la quantité

$$\text{iso}^{(0)} = \max_{\Gamma_l} \tilde{u}_{to}^N \quad (8.13)$$

afin de se doter de la courbe de niveau de  $\tilde{u}_{to}^N$  correspondant à cette valeur. Pour effectuer ceci, nous définissons tout d'abord la zone de calcul (voir Figure 8.5)

$$\Omega_{calc} = \{(r, z) \in [1.4, 3.4] \times [-1, 1]\} \setminus \Omega_a, \quad (8.14)$$

où  $\Omega_a$  est un disque ayant pour frontière un cercle d'équation (7.11) ainsi qu'un faible rayon, inférieur à 10 cm. Nous prenons soin de priver la zone de calcul du disque  $\Omega_a$  afin que les fonctions de Legendre associées de première espèce que nous utilisons ne puissent être évaluées au foyer  $a$ , point où elles divergent. On discrétise alors cette zone de calcul au moyen d'une grille régulière de  $50 \times 50$  points en lesquels on évalue la fonction  $\tilde{u}_{to}^N$  obtenue avec (8.11). On trace alors la courbe de niveau reliant les points de la grille portant la valeur  $\text{iso}^{(0)}$ .

Finalement, au bout de cette étape, nous disposons d'une estimée de la frontière plasma  $\Gamma_p^{(0)}$ , de ses points de contact avec le limiteur  $\Gamma_l$  ainsi que de la valeur  $\text{iso}^{(0)}$  définissant  $\Gamma_p^{(0)}$ . Insistons sur le fait que la qualité de cette première estimation de la frontière plasma est fortement dépendante de celle des mesures  $(B_n, B_t)$  réalisées sur le bord  $\Gamma_e$ . Il est en effet important de se rendre compte que la frontière  $\Gamma_p^{(0)}$  est obtenue à partir de l'extrapolation dans tout le domaine intérieur à  $\Gamma_e$  (néanmoins privé du foyer  $a$ ) de l'approximant  $\tilde{u}_{to}^N$ . En prolongeant ainsi des données frontières à l'intérieur d'un domaine, on prend le risque d'y construire une fonction instable en vertu du caractère mal posé du problème de Cauchy pour l'équation (1.2) avec des données  $(B_n, B_t)$ . Nous choisissons cependant de considérer la première frontière plasma  $\Gamma_p^{(0)}$  calculée (modulo le fait qu'on ait choisi un nombre  $N$  d'harmoniques toroïdales suffisant dans la décomposition (8.11)) comme une «bonne» première approximation de la vraie frontière plasma recherchée. Ce choix est motivé par le fait que les capteurs magnétiques disposés le long de  $\Gamma_e$  (voir Section 8.1.2) permettent de réaliser des mesures avec une erreur relative inférieure à 1 %. Ceci implique que les données  $(B_n, B_t)$  mesurées sont suffisamment proches de données compatibles pour que l'on obtienne une première approximation de  $\Gamma_p$  qui soit raisonnable. Le Chapitre 9 permettra d'illustrer cette méthode ainsi que sa robustesse par rapport à des données bruitées artificiellement.

Cette étape se termine finalement par une paramétrisation de la frontière  $\Gamma_p^{(0)}$  obtenue. L'algorithme calcule en effet les coordonnées des points de cette dernière sur le domaine  $\Omega_{calc}$  et fournit en sortie les coordonnées toroïdales  $(\tau_p^{(0)}, \eta_p^{(0)})$  associées. Les coordonnées  $\tau_p^{(0)}$  sont alors interpolées par splines cubiques en fonction des coordonnées  $\eta_p^{(0)}$ . Il en résulte une fonction  $\eta \in [0, 2\pi] \mapsto \tau_p^{(0)}(\eta)$  qui paramétrise la frontière  $\Gamma_p^{(0)}$ .

### 8.2.4 Etape n°4 : Résolution du problème extrémal borné

Les différents résultats obtenus dans les étapes précédentes permettent de définir précisément le problème extrémal borné que nous allons résoudre. Dans cette section, nous reprenons les notations utilisées dans le Corollaire 6.2.2.2.

#### A - Paramètres du problème extrémal borné

Les éléments à fixer sont alors les suivants :

1. Le domaine de résolution : nous savons depuis le début de cette étude que le domaine dans lequel nous allons poser le problème extrémal borné serait un domaine annulaire compris entre le bord extérieur  $\Gamma_e$  et le plasma. Toutefois la frontière intérieure de ce domaine, c'est-à-dire celle sur laquelle aucune mesure n'est effectuée, n'était pas encore définie. La seule condition était de pouvoir y imposer une contrainte réaliste provenant de considérations physiques. Remarquons alors qu'il n'aurait pas été possible de choisir pour frontière intérieure le limiteur  $\Gamma_l$ . En effet, les développements que nous avons fait dans les chapitres précédents supposaient que cette frontière intérieure soit de régularité  $C^1$  ce qui n'est pas le cas du limiteur. Il est probable que certains résultats liés aux espaces de Hardy généralisés puissent s'étendre à des domaines moins réguliers mais cela n'a pas été envisagé dans ce manuscrit. Par ailleurs, même si indépendamment de ce manque de régularité le cas du limiteur comme frontière intérieure pouvait être envisagé, nous ne disposons pas d'informations sur les valeurs qu'y prennent les différentes quantités magnétiques recherchées, ce qui pose problème pour la mise en place d'une contrainte adaptée au contexte physique du problème. Cette problématique liée à une contrainte adaptée s'étend par ailleurs au cas d'une frontière régulière strictement comprise entre  $\Gamma_e$  et  $\Gamma_l$ . C'est pourquoi nous choisissons comme frontière intérieure la frontière plasma  $\Gamma_p^{(0)}$  obtenue dans l'étape n°3 (voir Section 8.2.3). En procédant ainsi, nous faisons l'hypothèse que cette dernière soit de régularité suffisante, ce qui *a priori* reste valide dans le cadre de cette étude où nous ne considérons pas le cas d'un point X. Enfin, comme nous allons le voir juste après, ce choix permet de fixer une contrainte naturelle en partie réelle sur  $\Gamma_p^{(0)}$ . On notera alors  $\Omega_p^{(0)}$  le domaine de frontière  $\partial\Omega_p^{(0)} = \Gamma_e \cup \Gamma_p^{(0)}$ .
2. Les données mesurées sur le bord  $\Gamma_e$  : nous posons comme fonction à valeurs complexes modélisant les mesures au bord

$$F_d = u_{to,mo} + iv_{to,mo} \in L^2(\Gamma_e) , \quad (8.15)$$

avec  $u_{to,mo}$  et  $v_{to,mo}$  données respectivement par (8.9) et (8.7). Nous choisissons de travailler avec des données monovaluées sur  $\Gamma_e$  afin de rester en accord avec le fait que l'approximant  $g_0^{(1)}$  que nous cherchons via la résolution du problème extrémal borné est lui aussi, par définition, monovalué. Notons cependant que nous aurions pu choisir une donnée au bord  $F_d$  donnée par

$$F_d = u_{to} + iv_{to} = (u_{to,mo} + iv_{to,mo}) + \frac{\delta_v}{\sqrt{2}}(u_{0,c}^{1,ext} + iv_{0,c,0}^{1,ext}) ,$$

donc multivaluée. Ceci aurait eu pour conséquence le calcul d'un critère d'approximation sur  $\Gamma_e$  (voir la formule (6.20)) dont la borne inférieure n'aurait pas été 0 pour le cas favorable de données au bord compatibles, ce qui, selon nous, aurait rendu moins lisibles les résultats en sortie de l'algorithme.

3. L'expression de la contrainte à imposer sur la partie de  $\partial\Omega_p^{(0)}$  où aucune mesure n'est effectuée, soit  $\Gamma_p^{(0)}$  : comme indiqué dans le point 1 précédent, le fait que la frontière intérieure de  $\partial\Omega_p^{(0)}$  soit  $\Gamma_p^{(0)}$  est un choix stratégique facilitant la mise en place d'une contrainte en partie réelle. Cette contrainte a pour but de contrôler en norme  $L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_p^{(0)})$  la distance entre la partie réelle de la fonction  $g_0^{(1)}$  cherchée et la valeur  $\text{iso}^{(0)}$  obtenue avec (8.13). Nous tirons ainsi partie du fait que la frontière intérieure de  $\partial\Omega_p^{(0)}$  soit entièrement définie par la valeur  $\text{iso}^{(0)}$ . Aussi, si les mesures sur  $\Gamma_e$  sont peu bruitées et que par conséquent la frontière  $\Gamma_p^{(0)}$  est une approximation raisonnable de la véritable frontière plasma, il convient alors de chercher une solution  $g_0^{(1)}$  au problème extrémal borné dont la partie réelle soit proche en norme  $L^2(\Gamma_p^{(0)})$  de  $\text{iso}^{(0)}$ . Par contre, si les mesures sur  $\Gamma_e$  deviennent suffisamment bruitées, la frontière  $\Gamma_p^{(0)}$  calculée sera loin de la forme recherchée, auquel cas il conviendra de calculer une fonction  $g_0^{(1)}$  dont la partie réelle s'éloigne (toujours en norme  $L^2(\Gamma_p^{(0)})$ ) de  $\text{iso}^{(0)}$ . En résumé, si on prend en compte le fait que les données au bord  $F_d$  sont définies par (8.15), l'espace sur lequel nous allons résoudre le problème extrémal borné sera

$$\mathcal{B}_{M,\Phi}^2 = \left\{ g \in \text{tr}_{\partial\Omega_p^{(0)}} H^2_{\nu}(\Omega_p^{(0)}); \| \text{Re}(g) - \Phi^{(0)} \|_{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_p^{(0)})} \leq M \right\}_{|\Gamma_e} \subset L^2(\Gamma_e), \quad (8.16)$$

avec

$$\Phi^{(0)} = \text{iso}^{(0)} - \frac{\delta_v}{\sqrt{2}} u_{0,c}^{1,ext}|_{\Gamma_p^{(0)}} \in L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_p^{(0)}). \quad (8.17)$$

4. La valeur de la contrainte  $M$  dans (8.16) : étant donné les commentaires du point 3 précédent, la valeur de  $M$  a vocation à être petite si  $\Gamma_p^{(0)}$  est une bonne première approximation de la véritable frontière plasma. Dans le cas contraire, la valeur de  $M$  doit être augmentée. Observons alors que la stratégie que nous adoptons désormais change par rapport à celle décrite dans l'Algorithme 1. En effet, choisir  $M$  suppose que l'on soit capable de juger effectivement la qualité de  $\Gamma_p^{(0)}$  par rapport à la véritable frontière plasma. Or nous ne connaissons pas cette dernière qui reste par ailleurs impossible d'accès (cela supposerait en effet que l'on dispose de mesures compatibles sur le bord  $\Gamma_e$ ).

C'est pourquoi, nous choisissons de mettre en place un algorithme dans lequel l'évaluation d'une contrainte  $M$  adéquate est remplacée par la recherche d'un paramètre de Lagrange  $\gamma \in \mathbb{R}_*^+$  pour lequel l'erreur  $e(\gamma)$  (encore appelée critère d'approximation) donnée par (6.20) soit suffisamment petite. La technique mise en place est alors la suivante. On commence par définir un intervalle  $I_\gamma$  dans lequel nous allons sélectionner le paramètre  $\gamma$  qui nous intéresse. Les simulations numériques du Chapitre 9 ont toutes été réalisées avec l'intervalle  $I_\gamma = [10^{-5}, 10]$  qui s'est montré adapté. Cet intervalle est bien sûr discrétisé

afin de ne pas envisager une infinité de valeurs. Alors deux configurations se présentent :

- Théoriquement, la fonction  $\gamma \mapsto e(\gamma)$  est une fonction strictement croissante avec de plus  $e(\gamma) \rightarrow 0$  lorsque  $\gamma \rightarrow 0$  (voir Section 6.2.3). Ceci implique que le paramètre  $\gamma$  qu'il faudrait sélectionner dans le but de minimiser le critère d'approximation devrait être  $\gamma = 10^{-5}$ . Toutefois, les résultats du Chapitre 9 montrent que la croissance de la fonction  $\gamma \in I_\gamma \mapsto e(\gamma)$  reste très lente jusqu'à ce que  $\gamma$  atteigne une certaine valeur. Alors plutôt que de choisir effectivement  $\gamma$  tel que  $e(\gamma)$  soit minimale (ce qui peut avoir comme conséquence le fait que les données mesurées sur  $\Gamma_e$  soient trop bien approchées et que finalement le bruit inhérent aux mesures soit aussi approximé), nous choisissons de calculer l'erreur  $e(\gamma)$  de façon descendante en partant de  $\gamma = 10$ , et de nous arrêter lorsque la différence entre deux erreurs successives devient inférieure à un paramètre  $\varepsilon_1$  que nous fixons.
- Numériquement, cependant, la monotonie de  $\gamma \mapsto e(\gamma)$  peut être mise en défaut à cause des approximations effectuées. En effet, la résolution du problème extrémal borné à partir de la formulation (6.14) réside exclusivement dans le calcul des projections analytiques généralisées  $y$  intervenant. Pour réaliser ces calculs, nous utilisons la famille complète de fonctions  $\mathcal{B}_1$  donnée par (7.29) selon le procédé décrit dans l'introduction du Chapitre 7 et pour lequel il est nécessaire d'évaluer la matrice de Gram de la famille  $\mathcal{B}_1$  (cette matrice est obtenue avec le produit scalaire (8.22) ; voir Tableau 9.8). Nous constaterons alors que le conditionnement de cette matrice augmente avec le nombre d'éléments de  $\mathcal{B}_1$  sur lesquels nous effectuerons les projections, tout en restant raisonnable pour le nombre d'éléments que nous serons amenés à considérer dans nos simulations (voir Chapitre 9). Dès lors, l'augmentation de ce conditionnement aura une influence sur la qualité des opérateurs de projection construits et pourra induire la mise en défaut de la stricte croissance de la fonction  $\gamma \mapsto e(\gamma)$ . Plus précisément, cette fonction présentera un profil parabolique convexe pour lequel il sera alors possible de déterminer l'argument  $\gamma$  du minimum de  $e(\gamma)$ . En écho à ceci, précisons que cette méthode fournit toujours un critère «raisonnable», c'est-à-dire ni trop petit (ce qui limite l'approximation du bruit), ni trop grand (ce qui assure tout de même une bonne approximation sur  $\Gamma_e$ ).

Enfin, cette méthode de détermination du paramètre  $\gamma$  est adéquate dès que les mesures effectuées sur le bord extérieur  $\Gamma_e$  sont peu bruitées, ce qui est le cas pour Tore Supra. Lorsque les mesures deviennent bruitées, nous verrons dans le Chapitre 9 que nous continuons d'obtenir des résultats satisfaisants au sens où il est possible de faire évoluer les frontières plasma que nous construisons (voir Section 8.2.5) vers une frontière plasma de référence.

Terminons en notant qu'une fois  $\gamma$  déterminé, la contrainte  $M$  se calcule facilement puisque d'après le Corollaire 6.2.2.2 il y a saturation de la contrainte, soit

$$M(\gamma) = \|Re(g_0^{(1)}(\gamma)) - \Phi^{(0)}\|_{L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_p^{(0)})} . \quad (8.18)$$

Nous constaterons que la contrainte  $M(\gamma)$  obtenue est petite lorsque les données au bord sont peu bruitées.

## B - Technique de résolution

Maintenant que le problème extrémal borné est clairement posé, il convient de le résoudre grâce à l'équation (6.14). Pour construire l'opérateur de projection  $P_\nu : L^2(\partial\Omega_p^{(0)}) \rightarrow \text{tr } H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$  (et donc obtenir les équations normales (7.2)), nous allons nous servir de la famille  $\mathcal{B}_1$  donnée par (7.29) et dont la complétude dans  $\text{tr } H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$  provient du Théorème 7.2.3.1 ainsi que de la Remarque 7.2.3.1. Seul un nombre fini d'éléments de  $\mathcal{B}_1$  seront utilisés. Comme nous voulons nous laisser la possibilité de vérifier le codage de l'algorithme en faisant des cas tests sur des fonctions constantes, nous les ajoutons aux éléments déjà sélectionnés. Remarquons que ces fonctions constantes étaient auparavant obtenues par application de la formule (A.16) et de son intégration dans les équations de Cauchy-Riemann (7.26). Nous adjoignons à la famille  $\mathcal{B}_1$  tronquée à un certain ordre une fonction constante du type

$$f(\tau, \eta) = c_1 + ic_2, \quad (c_1, c_2) \in \mathbb{R}. \quad (8.19)$$

Finalement, pour  $\mathfrak{N} \in \mathbb{N}^*$ , et en reprenant les notations du Théorème 7.2.3.1, on pose

$$\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}} = \left\{ \begin{array}{l} u_{k,c}^{1,int} + iv_{k,c}^{1,int}, \quad (u_{k+1,c}^{1,ext} - u_{0,c}^{1,ext}) + i(v_{k+1,c}^{1,int} - v_{0,c}^{1,ext}), \\ u_{k+1,s}^{1,int} + iv_{k+1,s}^{1,int}, \quad u_{k+1,s}^{1,ext} + iv_{k+1,s}^{1,ext}, c_1 + ic_2 \end{array} \right\}_{k=0..\mathfrak{N}}, \quad (8.20)$$

que l'on note encore

$$\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}} = \{b_k\}_{k=1..4\mathfrak{N}+2} \quad (8.21)$$

dans un souci de simplification des notations. L'espace vectoriel sur lequel nous allons effectuer la projection  $P_\nu$  sera par conséquent  $\text{Vect } \{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}\}$  et sa dimension est  $4\mathfrak{N}+2$ . Cette projection sera par ailleurs réalisée au moyen du produit scalaire équipant  $H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$ , c'est-à-dire celui donné par la formule (3.1) adaptée à la géométrie du domaine  $\Omega_p^{(0)}$  :

$$\langle f, g \rangle_{\Omega_p^{(0)}} = \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_e, \eta) \overline{g(\tau_e, \eta)} d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_p^{(0)}(\eta), \eta) \overline{g(\tau_p^{(0)}(\eta), \eta)} d\eta \right), \quad (8.22)$$

où  $\eta \mapsto \tau_p^{(0)}(\eta)$  est le paramétrage de  $\Gamma_p^{(0)}$  introduit dans la Section 8.2.3.

Regardons de plus près les différents membres de l'équation (6.14). Comme les fonctions  $F_d$  et  $\Phi$  sont désormais connues avec (8.15) et (8.17), les projections du membre de droite de l'équation (6.14) sont déterminées avec la même méthode que celle déjà employée dans la partie D de la Section 8.2.2 (détaillée dans l'Annexe E). Suite à quoi nous obtenons :

- Le vecteur  $M_{F_d}^{\mathfrak{N}}$  de taille  $4\mathfrak{N}+2$  contenant les coefficients de la projection  $P_\nu(\chi_{\Gamma_e} F_d)$  sur  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$ .
- Le vecteur  $M_\Phi^{\mathfrak{N}}$  de taille  $4\mathfrak{N}+2$  contenant les coefficients de la projection  $P_\nu(\chi_{\Gamma_p^{(0)}} \Phi)$  sur  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$ .

Les coefficients des projections du membre de gauche de l'équation (6.14) sont un peu plus compliqués à obtenir. Détaillons le calcul de  $P_\nu(\chi_{\Gamma_e} g_0^{(1)})$ . La fonction  $g_0^{(1)}$  appartient par hypothèse à l'espace  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^2$  défini par (8.16). Cela implique qu'elle appartient à l'espace  $tr H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$  et implique que nous la cherchions sous la forme

$$g_0^{(1)} = \sum_{k=1}^{4\mathfrak{N}+2} \alpha_k b_k .$$

La linéarité de l'opérateur  $P_\nu$  permet de calculer

$$P_\nu(\chi_{\Gamma_e} g_0^{(1)}) = \sum_{k=1}^{4\mathfrak{N}+2} \alpha_k P_\nu(\chi_{\Gamma_e} b_k) . \quad (8.23)$$

En adoptant la notation

$$P_\nu(\chi_{\Gamma_e} b_k) = \sum_{l=1}^{4\mathfrak{N}+2} \beta_{k,l} b_l ,$$

l'équation (8.23) s'écrit finalement

$$P_\nu(\chi_{\Gamma_e} g_0^{(1)}) = \sum_{k=1}^{4\mathfrak{N}+2} \alpha_k \sum_{l=1}^{4\mathfrak{N}+2} \beta_{k,l} b_l .$$

Dès lors, pour  $k = 1 \dots 4\mathfrak{N} + 2$  fixé, les coefficients  $\{\beta_{k,l}\}_{l=1 \dots 4\mathfrak{N}+2}$  de la projection  $P_\nu(\chi_{\Gamma_e} b_k)$  se calculent ici encore en résolvant les équations normales (voir la partie D de la Section 8.2.2 ainsi que l'Annexe E). Il en résulte une matrice  $M_{\chi_{\Gamma_e}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}}$  de taille  $(4\mathfrak{N} + 2) \times (4\mathfrak{N} + 2)$  dont le terme de la ligne  $l$  et de la colonne  $k$  est égal à  $\beta_{k,l}$ . Si bien que les coefficients de la projection  $P_\nu(\chi_{\Gamma_e} g_0^{(1)})$  s'obtiennent finalement en réalisant le produit matriciel

$$M_{\chi_{\Gamma_e}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}} \times M_\alpha^{4\mathfrak{N}+2} ,$$

où  $M_\alpha^{4\mathfrak{N}+2} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{4\mathfrak{N}+2})$  est le vecteur de taille  $4\mathfrak{N} + 2$  contenant les coefficients inconnus de la décomposition de  $g_0^{(1)}$  dans la famille  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$ .

Toute cette procédure peut être réitérée pour le calcul des coefficients de la projection  $P_\nu(\chi_{\Gamma_p^{(0)}} Re(g_0^{(1)}))$ . Ces derniers s'obtiennent donc grâce au produit matriciel

$$M_{\chi_{\Gamma_p^{(0)}}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}} \times M_\alpha^{4\mathfrak{N}+2} ,$$

avec  $M_{\chi_{\Gamma_p^{(0)}}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}}$  la matrice de taille  $(4\mathfrak{N} + 2) \times (4\mathfrak{N} + 2)$  contenant les coefficients des projections sur  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$  des fonctions  $\left\{ \chi_{\Gamma_p^{(0)}} Re(b_k) \right\}_{k=1 \dots 4\mathfrak{N}+2}$ .

En conclusion, l'équation (6.14) se met sous la forme

$$\left( M_{\chi_{\Gamma_e}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}} + \gamma M_{\chi_{\Gamma_p^{(0)}}}^{\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}} \right) \times M_{\alpha}^{4\mathfrak{N}+2} = \left( M_{F_d}^{\mathfrak{N}} + \gamma M_{\Phi}^{\mathfrak{N}} \right). \quad (8.24)$$

Pour des valeurs de  $\gamma$  que nous donnons en entrée, l'algorithme fournit ainsi en sortie le vecteur  $M_{\alpha}^{4\mathfrak{N}+2}$ , c'est-à-dire les coefficients dans la famille  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$  de la solution  $g_0^{(1)}(\gamma)$  du problème extrémal borné. La solution finalement retenue est celle obtenue pour le paramètre  $\gamma$  tel que choisi dans le point 4 de la Section 8.2.4 de la partie **A**. Rappelons que  $\gamma$  est choisi dans l'intervalle  $I_{\gamma} = [10^{-5}, 10]$  qui est discrétisé avec un pas petit essentiellement pour des raisons de coût de calcul.

**Remarque 8.2.4.1** *Le Théorème 7.2.3.1 fournit deux familles de fonctions complètes dans  $tr H_{\nu}^2(\Omega_p^{(0)})$ . Le fait que nous ayons porté notre choix sur la famille  $\mathcal{B}_1$  est purement arbitraire. Tous les développements réalisés dans cette section s'adaptent sans aucune difficulté à la famille  $\mathcal{B}_2$ .*

**Remarque 8.2.4.2** *Le nombre  $\mathfrak{N}$  d'éléments de  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$  que nous utilisons pour approximer les projections de (6.14) n'est pas a priori corrélé au nombre  $N$  d'harmoniques toroïdales utiles au calcul des approximations  $\tilde{u}_{to}^N$  et  $\tilde{v}_{to}^N$  (voir partie D de la Section 8.2.2). Néanmoins, on verra dans le Chapitre 9 que l'utilisation du problème extrémal borné sera pleinement justifiée lorsque  $\Gamma_p^{(0)}$  est calculée avec moins d'harmoniques que les estimées suivantes, c'est-à-dire lorsque  $N < \mathfrak{N}$ .*

## 8.2.5 Etape n°5 : Mise à jour de la frontière plasma et itération

Au terme de ces quatre étapes, nous sommes désormais à même de fournir une nouvelle estimée de la frontière du plasma. En effet, à partir de la solution  $g_0^{(1)}$  du problème extrémal borné calculée dans la Section 8.2.4, la valeur du flux magnétique poloïdal est donnée par

$$\tilde{u}_{to}^{(1)} = Re(g_0^{(1)}) + \frac{\delta_v}{\sqrt{2}} u_{0,c}^{1,ext} \quad (8.25)$$

qui est donc une solution de l'équation (1.2) évaluable dans tout le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  mais qui n'a de sens physique que dans le nouveau domaine  $\Omega_p^{(1)}$  de frontière  $\partial\Omega_p^{(1)} = \Gamma_e \cup \Gamma_p^{(1)}$  où  $\Gamma_p^{(1)}$  est la nouvelle frontière plasma, c'est-à-dire la ligne de niveau associée à la valeur

$$iso^{(1)} = \max_{\Gamma_l} \tilde{u}_{to}^{(1)}. \quad (8.26)$$

La frontière  $\Gamma_p^{(1)}$  est alors obtenue comme dans la Section 8.2.3 par évaluation de  $\tilde{u}_{to}^{(1)}$  sur le domaine  $\Omega_{calc}$ , qui lui ne change pas. Remarquons que la fonction  $\tilde{u}_{to}^{(1)}$  représente en fait la solution au problème de Cauchy (initialement posé pour l'équation (1.2)) que

nous avons transformé en un problème de meilleure approximation dans la classe  $\mathcal{B}_{M(\gamma),\Phi}^2$ , avec  $M(\gamma)$  la contrainte calculée pour le paramètre  $\gamma \in I_\gamma$  choisi dans la Section 8.2.4.

Il faut par ailleurs noter que la nouvelle frontière plasma  $\Gamma_p^{(1)}$  provient de la fonction  $g_0^{(1)}$  qui améliore le critère d'approximation (6.20) initial. En effet, la première étape de l'algorithme consistait à construire un approximant  $(\tilde{u}_{to,mo}^N + i\tilde{v}_{to,mo}^N)$  de  $F_d$  sur  $\Gamma_e$ . Au regard des définitions (8.16) et (8.17), cet approximant appartient à la classe de fonctions  $\mathcal{B}_{0,\Phi}^2$ . Or comme la suite  $(\mathcal{B}_{M(\gamma),\Phi}^2)_{M(\gamma)}$  est croissante pour l'inclusion (voir Section 6.1.2), cela implique que

$$\begin{aligned} \|F_d - (\tilde{u}_{to,mo}^N + i\tilde{v}_{to,mo}^N)\|_{L^2(\Gamma_e)} &\geq \min_{g \in \mathcal{B}_{0,\Phi}^2} \|F_d - g\|_{L^2(\Gamma_e)} \\ &\geq \min_{g \in \mathcal{B}_{M(\gamma),\Phi}^2} \|F_d - g\|_{L^2(\Gamma_e)} \\ &= \|F_d - g_0^{(1)}\|_{L^2(\Gamma_e)}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Observons aussi que quel que soit le paramètre  $\gamma$  que nous aurions choisi dans l'intervalle  $I_\gamma$ , le critère d'approximation aurait été amélioré. Finalement, le fait que  $g_0^{(1)}$  soit un meilleur approximant sur  $\Gamma_e$  que  $(\tilde{u}_{to,mo}^N + i\tilde{v}_{to,mo}^N)$  peut encore se comprendre en observant que relâcher la contrainte sur la fonction  $\Gamma_p^{(0)}$  par rapport à la donnée  $\Phi^{(0)}$  initialement calculée ne peut qu'aboutir à la construction d'une solution à l'équation (1.7) qui améliore le critère d'approximation sur la frontière extérieure  $\Gamma_e$ . Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le problème que nous résolvons est un problème de relaxation pour une contrainte fixée. L'algorithme consiste donc à calculer des solutions de l'équation (1.7) qui utilisent le surplus d'information mise à leur disposition au moyen du «relâchement» permis par rapport à la fonction  $\Phi^{(0)}$  sur  $\Gamma_p^{(0)}$  afin d'approcher au mieux les données sur  $\Gamma_e$ . Notons enfin que parmi les fonctions de  $\mathcal{B}_{M,\Phi}^2$ , la fonction  $g_0^{(1)}$  est celle qui sature la contrainte sur  $\Gamma_p^{(0)}$  (voir Corollaire 6.2.2.2), autrement dit celle qui «utilise» toute l'information mise à sa disposition.

Maintenant que nous disposons d'un nouveau domaine  $\Omega_p^{(1)}$ , il est facile de réitérer la recherche de solution. Il suffit en effet de relancer l'algorithme à partir de l'étape n°4 (voir Section 8.2.4) en prenant soin de mettre à jour les données du problème extrémal borné, c'est-à-dire en posant

$$\mathcal{B}_{M,\Phi}^2 = \left\{ g \in tr_{\partial\Omega^{(1)}} H_\nu^2(\Omega^{(1)}); \|Re(g) - \Phi^{(1)}\|_{L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_p^{(1)})} \leq M \right\}_{|\Gamma_e} \subset L^2(\Gamma_e), \quad (8.28)$$

avec

$$\Phi^{(1)} = \text{iso}^{(1)} - \frac{\delta_v}{\sqrt{2}} u_{0,c}^{1,ext}|_{\Gamma_p^{(1)}} \in L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_p^{(1)}). \quad (8.29)$$

Il s'agit donc à nouveau de trouver une solution  $g_0^{(2)}$  à l'équation (1.7) minimisant le critère d'approximation par rapport à  $F_d$  sur  $\Gamma_e$  mais telle que cette fois-ci la contrainte porte sur la nouvelle frontière plasma  $\Gamma_p^{(1)}$ . En itérant à nouveau ce processus ainsi qu'en introduisant la notation

$$g_0^{(0)} = \tilde{u}_{to,mo}^N + i\tilde{v}_{to,mo}^N, \quad (8.30)$$

l'algorithme est en mesure de fournir une suite d'approximants  $(g_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  définissant une suite de domaines  $(\Omega_p^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ . En appliquant à chaque étape de l'itération les inéquations (8.27), on obtient que la suite des critères d'approximation  $(\|F_d - g_0^{(n)}\|_{L^2(\Gamma_e)})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. L'objectif consiste alors à arrêter l'algorithme au moyen d'une borne sur le processus d'approximation pour que la suite  $(g_0^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  n'approche pas trop près  $F_d$  sur  $\Gamma_e$  puisque les données mesurées sont toujours entachées de bruit. Or, forcer le processus d'approximation mènera irrémédiablement à approximer le bruit ce que nous ne souhaitons pas. Néanmoins, le fait que les mesures magnétiques soient effectuées avec une précision relative inférieure à 1 % (voir Section 8.2.3) impliquent qu'il est préférable d'arrêter l'algorithme lorsque ce dernier peine à faire baisser significativement le critère d'approximation. On constatera dans le Chapitre 9 que le taux de décroissance de la suite  $(\|F_d - g_0^{(n)}\|_{L^2(\Gamma_e)})_{n \in \mathbb{N}}$ , grâce à notre méthode de sélection à chaque étape du paramètre  $\gamma$ , n'exige pas une utilisation de l'algorithme au-delà de la résolution du deuxième problème extrémal borné.

En conclusion, nous disposons désormais d'un algorithme de calcul permettant la résolution de problèmes extrémaux bornés. Celui-ci permet par un processus itératif de construire des estimées successives de la frontière plasma tout en garantissant la décroissance du critère d'approximation par rapport aux données mesurées sur le bord extérieur de la machine. Cette méthode de calcul, ainsi que la direction de descente du critère d'approximation, sont fortement dépendants du choix du paramètre  $\gamma$ . Malgré le fait qu'à ce jour le paramètre  $\gamma$  ne puisse être choisi de façon «optimale», c'est-à-dire tel que les frontières intérieures construites à chaque itération tendent à approcher la véritable frontière plasma  $\Gamma_p$ , la méthode que nous adoptons fournit de bons résultats à partir de données provenant du tokamak Tore Supra. Ces derniers sont présentés dans le Chapitre 9.

**Algorithme 2:** Calcul de la solution  $g_0$  du ( $PEB$ ) pour Tore Supra

---

**Entrées :**  $B_n, B_t, C_t, \rho_t, N, \mathfrak{N}, \tau_e, \tau_i, \Omega_{calc}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, I_\gamma$  ; /\* Choisir  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  petits \*/  
**Sorties :**  $g_0, \gamma, M, iso, E_{F_d}$  ;

- 1  $a \leftarrow \sqrt{C_T^2 - \rho_T^2}$  ; /\* (8.3) \*/
- 2  $l \leftarrow$  longueur de  $I_\gamma$  ;
- 3 Détermination de  $v_{to}, \partial_n v_{to}, u_{to}, \partial_n u_{to}$  ; /\* Section 8.2.2 \*/
- 4  $\delta_v \leftarrow v_{to}(2\pi) - v_{to}(0)$  ; /\* (8.6) \*/
- 5  $v_{to,mo}, u_{to,mo} \leftarrow$  monovaluation de  $v_{to}$  et  $u_{to}$  ; /\* (8.7) et (8.9) \*/
- 6  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N, \mathcal{E}_{v_{to}}^N \leftarrow$  Création des familles  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N$  et  $\mathcal{E}_{v_{to}}^N$  ; /\* (8.10) et (8.12) \*/
- 7  $\tilde{u}_{to}^N, \tilde{v}_{to}^N \leftarrow$  décomposition de  $u_{to}$  et  $v_{to}$  dans  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N$  et  $\mathcal{E}_{v_{to}}^N$  ; /\* Annexe E \*/
- 8  $iso \leftarrow \max_{\Gamma_l} \tilde{u}_{to}^N$  ; /\* (8.13) \*/
- 9  $F_d \leftarrow u_{to,mo} + i v_{to,mo}$  ; /\* (8.15) \*/
- 10  $g_0 \leftarrow \tilde{u}_{to,mo}^N + i \tilde{v}_{to,mo}^N$  ; /\* (8.30) \*/
- 11  $E_{F_d} \leftarrow \left\{ \|F_d - g_0\|_{L^2(\Gamma_e)} / \|F_d\|_{L^2(\Gamma_e)} \right\}$  ;
- 12  $E_{F_d}(end + 1) \leftarrow E_{F_d} + 2\varepsilon_1$  ;
- 13 **tant que**  $|E_{F_d}(end) - E_{F_d}(end - 1)| > \varepsilon_1$  **faire**
- 14      $\Phi \leftarrow \Phi(iso, \delta_v, u_{0,c}^{1,ext})$  ; /\* (8.17) et (8.29) \*/
- 15      $\Gamma_p \leftarrow$  courbe de niveau de valeur iso sur  $\Omega_{calc}$  ; /\* Sections 8.2.3, 8.2.5 \*/
- 16      $\tau_p \leftarrow$  paramétrisation de  $\Gamma_p$  ; /\* Section 8.2.3 \*/
- 17      $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}} \leftarrow$  création de la famille  $\mathcal{B}_1^{\mathfrak{N}}$  ; /\* (8.20) \*/
- 18     **pour**  $i = I_\gamma(1) \dots I_\gamma(l)$  **faire**
- 19          $G(i) \leftarrow g_0(i)$  ;
- 20          $E(i) \leftarrow \|F_d - g_0(I_\gamma(i))\|_{L^2(\Gamma_e)} / \|F_d\|_{L^2(\Gamma_e)}$  ;
- 21     **fin**
- 22     **si**  $(E(i))_{i=I_\gamma(1) \dots I_\gamma(l)}$  est une suite croissante **alors**
- 23          $j \leftarrow l$  ;
- 24         **tant que**  $E(j) - E(j - 1) > \varepsilon_2$  **faire**
- 25              $j \leftarrow j - 1$  ;
- 26         **fin**
- 27          $g_0 \leftarrow G(j)$  ; /\* Section 8.2.4, partie B \*/
- 28          $\gamma \leftarrow I_\gamma(j)$  ;
- 29          $M \leftarrow \|Re g_0 - \Phi\|_{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_p)}$  ;
- 30          $\tilde{u}_{to} \leftarrow \tilde{u}_{to}(Re(g_0), \delta_v, u_{0,c}^{1,ext})$  ; /\* (8.25) \*/
- 31          $iso \leftarrow \max_{\Gamma_l} \tilde{u}_{to}$  ; /\* (8.26) \*/
- 32          $E_{F_d}(end + 1) \leftarrow E(j)$  ;
- 33     **sinon**
- 34          $j \leftarrow$  position du minimum de  $E$  ;
- 35         Refaire les opérations 27 à 32 ;
- 36     **fin**
- 37 **fin**
- 38 Rendre  $g_0, \gamma, M, iso, E_{F_d}$  ;

---



# Chapitre 9

## Résultats numériques

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Mise en œuvre de l'algorithme et notations . . . . .</b>	<b>177</b>
<b>9.2</b>	<b>Choc n°45496 au temps <math>t = 8.0285</math> s . . . . .</b>	<b>178</b>
9.2.1	Acquisition et interpolation des données mesurées . . . . .	179
9.2.2	Estimation de la frontière plasma . . . . .	180
9.2.3	Utilisation du problème extrémal borné . . . . .	187
<b>9.3</b>	<b>Choc n°45496 au temps <math>t = 8.0285</math> s avec données bruitées . .</b>	<b>192</b>
9.3.1	Niveau de bruit : 5 % . . . . .	193
9.3.2	Niveau de bruit : 10 % . . . . .	195

---

Ce chapitre est consacré à différents tests numériques de l'algorithme développé dans le Chapitre 8. Plus particulièrement, nous étudions le choc n°45496 au temps  $t = 8.0285$  s. Il s'agit d'un plasma stabilisé en mode limiteur et n'ayant qu'un seul point de contact avec ce dernier. Précisons que les données magnétiques traitées sont fournies par le CEA/IRFM.

Après avoir interpolé les mesures réalisées sur le bord extérieur  $\Gamma_e$  de Tore Supra, les premiers tests seront consacrés à l'étude de la précision de l'algorithme dans sa phase initiale, à savoir la décomposition des données mesurées  $u_{to}$  et  $v_{to}$  sur les familles d'harmoniques toroïdales (8.10) et (8.12). Nous verrons qu'en utilisant un nombre d'harmoniques suffisant, il est possible de fournir de très bonnes approximations du type (8.11). Cela sera aussi l'occasion de tester la qualité des données mesurées en calculant les conjuguées  $\sigma$ -harmoniques théoriques des fonctions  $u_{to,mo}$  et  $v_{to,mo}$ .

Dans un deuxième temps, nous résoudrons une série de problèmes extrémaux bornés à partir d'une première estimée de la frontière plasma  $\Gamma_p$  (voir Section 8.2.3). Cette phase mettra en évidence la capacité de l'algorithme à faire évoluer la frontière plasma de sorte que le critère d'approximation sur le bord extérieur de la machine en soit amélioré. Nous testerons par ailleurs l'algorithme sur des jeux de données bruitées afin de discuter de son efficacité ainsi que de sa robustesse.

### 9.1 Mise en œuvre de l'algorithme et notations

L'ensemble de l'algorithme a été codé au moyen du logiciel Matlab (version R2010b). Les harmoniques toroïdales (voir Annexe A) n'étant pas évaluables initialement avec Matlab, nous les y avons intégrées au moyen de l'algorithme DTORH3 (version 2.0) [76, 77].

---

Pour réaliser nos simulations numériques, nous disposons en fait de plusieurs jeux de données : celles effectivement mesurées par les différents capteurs situés à proximité de la frontière extérieure  $\Gamma_e$  (voir Section 8.1.2), mais aussi les données calculées en post-traitement par le code d'équilibre magnétohydrodynamique EFIT [2, 136]. Ce dernier résout en fait l'équation de Grad-Shafranov à partir des données magnétiques mesurées et fournit en sortie une description complète du plasma qui inclut la distribution de courant ainsi que la distribution du flux magnétique poloïdal. Les sorties d'EFIT permettent donc de recalculer les valeurs du flux magnétique poloïdal et de sa dérivée normale aux emplacements des différents capteurs. Ce processus, couplé à différentes procédures de contrôle intermédiaires, fait que les mesures EFIT que nous utilisons en entrée de notre algorithme peuvent être considérées comme non bruitées. C'est pourquoi nous comparerons les frontières plasma obtenues par résolution des problèmes extrémaux bornés avec celle calculée en décomposant les données EFIT sur un grand nombre d'harmoniques toroïdales. Cette dernière fera office de courbe de référence. Ajoutons qu'il s'agit d'un des codes les plus utilisés permettant la création de diagnostics pour de nombreux tokamaks tels que DIII-D, JET et Tore Supra. Il existe cependant d'autres codes d'équilibre [9, 39, 42, 69, 70, 88, 94, 102, 111], et notamment les codes EQUINOX [36, 38] et CEDRES++ [37] actuellement en test sur JET et amenés à être utilisé pour le réacteur ITER.

Enfin mentionnons que nos résultats seront aussi comparés à ceux obtenus par le logiciel APOLO de contrôle en temps réel de la frontière plasma. Il s'agit du code actuellement en service pour Tore Supra et qui modélise le flux magnétique poloïdal en tout point situé entre la frontière extérieure et la frontière plasma à l'aide d'un développement de type Taylor-Fourier [30, 60, 79].

Du point de vue des notations, nous reprenons l'ensemble de celles introduites dans le Chapitre 8. Ajoutons à cela trois points :

- Nous utiliserons la terminologie «PEB d'ordre  $n$ » (avec  $n \in \mathbb{N}$ ) pour désigner le problème extrémal borné fournissant la solution  $g_0^{(n)}$ .
- Toute fonction  $f$  construite par interpolation des données fournies en sortie du code EFIT sera indiquée  $f^{EFIT}$ .
- Toutes les erreurs relatives sont des erreurs relatives quadratiques (donc en norme  $L^2$ ). Si cela n'est pas précisé, ces dernières sont toujours évaluées sur le bord extérieur  $\Gamma_e$ .

## 9.2 Choc n°45496 au temps $t = 8.0285$ s

Pour la présentation des résultats numériques, nous suivons les différentes étapes de l'algorithme. Puis nous proposons la résolution de problèmes extrémaux bornés en faisant varier certains paramètres tels que le nombre d'harmoniques toroïdales utilisées, le paramètre de Lagrange  $\gamma$ , le nombre d'itérations ou bien encore le niveau de bruit des mesures. Ajoutons que le nombre d'harmoniques toroïdales utilisées dans les différentes décompositions de fonctions sera toujours d'au plus 26 (cela correspond à  $N = 6 = \mathfrak{N}$ ; voir Chapitre 8) pour des raisons de temps de calcul mais aussi de conditionnement de certaines matrices.

### 9.2.1 Acquisition et interpolation des données mesurées

A partir des mesures ponctuelles effectuées sur  $\Gamma_e$ , nous construisons dans un premier temps les fonctions  $u_{to}$ ,  $u_{to,mo}$ ,  $v_{to}$  et  $v_{to,mo}$  comme décrit dans les parties **A** et **B** de la Section 8.2.2 ainsi que leurs équivalents à partir des données du code EFIT.

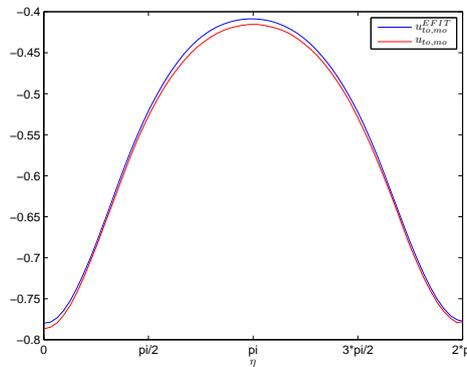
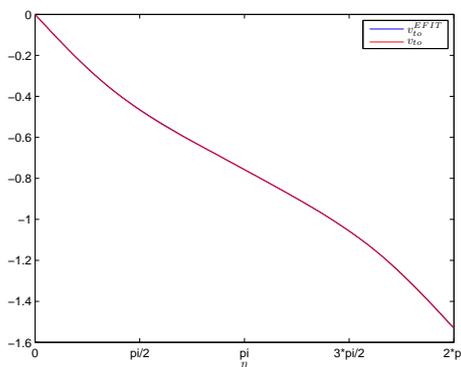
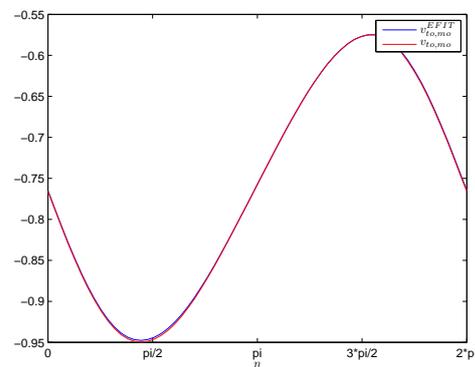


FIG. 9.1 – Construction du flux magnétique poloidal par interpolation sur  $\Gamma_e$  des données mesurées ainsi que des données calculées par EFIT. Courbes  $u_{to,mo}^{EFIT}$  (bleue) et  $u_{to,mo}$  (rouge)



(a)  $v_{to}^{EFIT}$  (bleue) et  $v_{to}$  (rouge)



(b)  $v_{to,mo}^{EFIT}$  (bleue) et  $v_{to,mo}$  (rouge)

FIG. 9.2 – Construction du potentiel scalaire par interpolation sur  $\Gamma_e$  des données mesurées ainsi que des données calculées par EFIT.

Les fonctions monovaluées nécessaires à la construction de la fonction  $F_d$  qui servira au problème extrémal borné sont représentées sur les Figures 9.1 et 9.2(b). Nous y adjoignons aussi les fonctions  $v_{to}^{EFIT}$  et  $v_{to}$  avec la Figure 9.2(a) pour mettre en évidence leur multivaluation. A ce titre, la constante de multivaluation calculée ici est

$$\delta_v = -1.5311 .$$

Il convient aussi de noter la très bonne précision des mesures effectuées au regard des fonctions calculées au moyen des données EFIT. Remarquons simplement que l'erreur relative de la fonction  $u_{to,mo}$  par rapport à la fonction  $u_{to,mo}^{EFIT}$  est 10 fois supérieure (tout

en restant proche de 1 %) à celles entre les fonctions  $v_{to}$  et  $v_{to}^{EFIT}$ , ainsi que  $v_{to,mo}$  et  $v_{to,mo}^{EFIT}$  (voir Tableau 9.1). Ceci peut s'expliquer par le fait que nous réalisons deux approximations successives lors de la construction de  $u_{to,mo}$  là où nous n'en faisons qu'une seule lors de la construction de  $v_{to,mo}$  (ou encore  $v_{to}$ ). En effet, nous supposons dans un premier temps que les mesures de la composante radiale  $B_n$  du champ magnétique sont toutes localisées sur la frontière extérieure  $\Gamma_e$  (hypothèse aussi faite pour les mesures de la composante tangentielle  $B_t$  du champ magnétique). Dans un deuxième temps, la dérivée tangentielle du flux magnétique poloïdal est intégrée par rapport à une mesure de flux (voir (8.8)) que nous supposons à nouveau réalisée sur  $\Gamma_e$  (voir Section 8.1.2).

$\frac{\ u_{to,mo} - u_{to,mo}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}{\ u_{to,mo}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}$	$\frac{\ v_{to} - v_{to}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}{\ v_{to}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}$	$\frac{\ v_{to,mo} - v_{to,mo}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}{\ v_{to,mo}^{EFIT}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}$
1.1 %	0.13 %	0.15 %

TAB. 9.1 – Erreurs relatives des fonctions construites après acquisition et interpolation des données.

Néanmoins, les résultats figurant dans le Tableau 9.1 permettent de valider, au moins en ce qui concerne ce choc précis, les hypothèses de modélisation faites dans la Section 8.1.2.

## 9.2.2 Estimation de la frontière plasma

Nous décomposons les fonctions  $u_{to,mo}$  et  $v_{to,mo}$  à l'aide des familles de fonctions (8.10) et (8.12) ainsi qu'avec la Remarque 8.2.2.1. On obtient les approximations  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  et  $\tilde{v}_{to,mo}^N$ . Le nombre de fonctions utilisées dans les décompositions est  $4N + 2$  avec  $N \in \mathbb{N}^*$ . On constate alors sur la Figure 9.3 qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser beaucoup d'harmoniques toroïdales pour obtenir une approximation de bonne qualité. Ceci est confirmé dans le Tableau 9.2 où on observe une erreur relative inférieure à 1 % pour  $N \geq 2$ .

	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
$\frac{\ \tilde{u}_{to,mo}^N - u_{to,mo}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}{\ u_{to,mo}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}$	1.6 %	0.25 %	0.22 %	0.19 %	0.18 %	0.16 %

TAB. 9.2 – Erreur relative de l'approximation  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  pour  $N = 1 \dots 6$ .

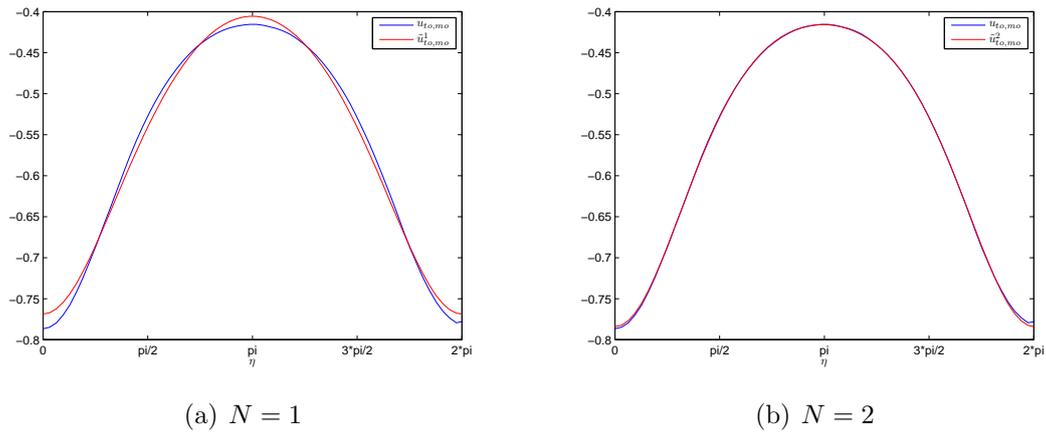


FIG. 9.3 – Approximation  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  de  $u_{to,mo}$  pour  $N = 1, 2$ .

Ces remarques sont encore valables en ce qui concerne l'approximation  $\tilde{v}_{to,mo}^N$  à la vue de la Figure 9.4 ainsi que du Tableau 9.3.

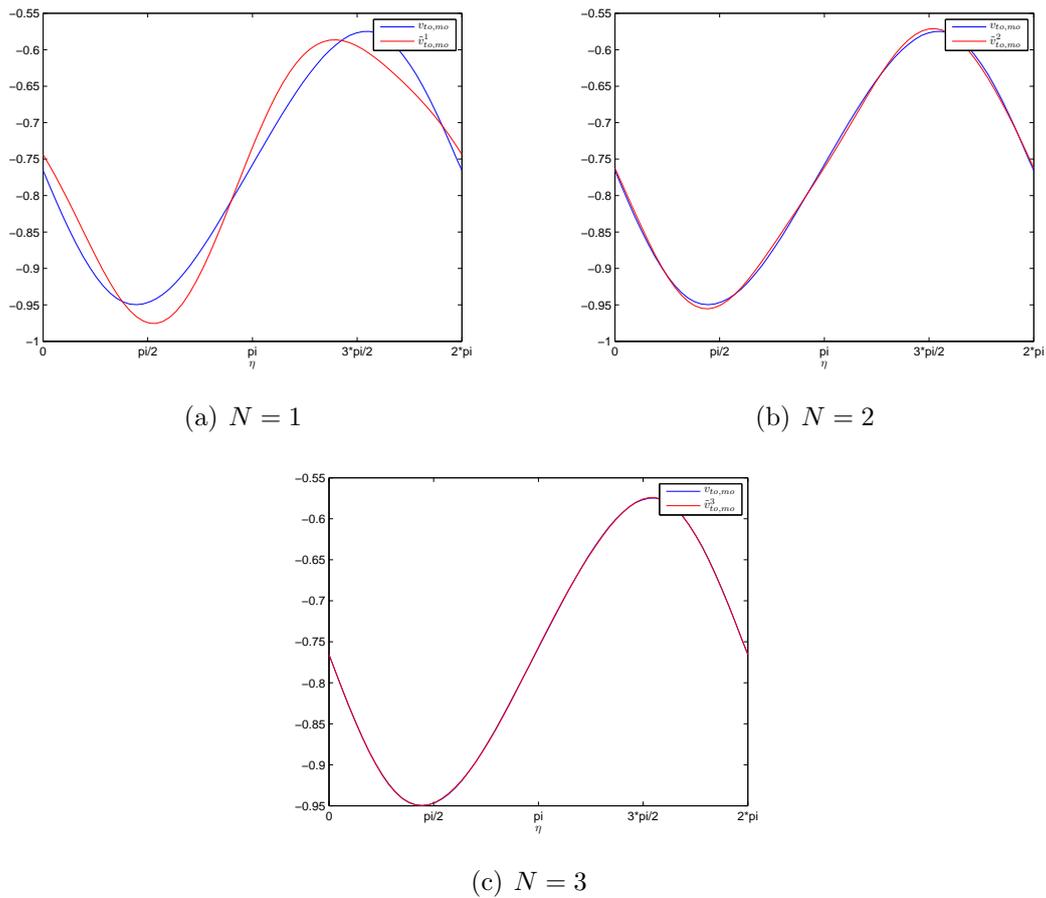


FIG. 9.4 – Approximation  $\tilde{v}_{to,mo}^N$  de  $v_{to,mo}$  pour  $N = 1, 2, 3$ .

	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
$\frac{\ \tilde{v}_{to,mo}^N - v_{to,mo}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}{\ v_{to,mo}\ _{L^2_{\mathbb{R}}(\Gamma_e)}}$	3.6 %	0.54 %	0.073 %	0.028 %	0.025 %	0.022 %

TAB. 9.3 – Erreur relative de l'approximation  $\tilde{v}_{to,mo}^N$  pour  $N = 1 \dots 6$ .

Ces résultats confortent deux points, à savoir que :

- Les familles de fonctions (8.10) et (8.12) sont adaptées pour l'approximation de données expérimentales. Ce point est conforme à nos attentes puisque ces familles de fonctions sont effectivement des solutions aux équations (1.2) et (1.5) respectivement.
- Plus les données brutes fournies par le CEA/IRFM sont proches des données EFIT, meilleures sont les approximations lorsque le nombre  $N$  d'harmoniques toroïdales croît. On remarque en effet une erreur relative sur  $\tilde{v}_{to,mo}^N$  inférieure à celle de  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  pour  $N \geq 3$ , ce qui est en correspondance avec les observations de la Section 9.2.1 et les résultats du Tableau 9.1.

A partir de ces différentes approximations, on peut vérifier que le couple  $(u_{to,mo}, v_{to,mo})$  constitue une paire de données magnétiques proche de véritables données compatibles. Il suffit pour cela de calculer les conjuguées  $\mathcal{H}_{\nu}(\tilde{u}_{to,mo}^N)$  et  $\mathcal{H}_{-\nu}(\tilde{v}_{to,mo}^N)$  (voir Définition 4.2.1.1) à partir des règles de calcul établies dans le Lemme 7.2.3.1. Nous utilisons par ailleurs le résultat du Corollaire 4.2.1.1, la Définition 6.2.1.1 ainsi que la relation (6.4).

	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
Err. rela.	9.1 %	0.92 %	0.68 %	0.65 %	0.64 %	0.63 %

TAB. 9.4 – Erreur relative de la conjuguée  $\mathcal{H}_{\nu}(\tilde{u}_{to,mo}^N)$  par rapport à la fonction  $v_{to,mo} - L(v_{to,mo})$  pour  $N = 1 \dots 6$ .

	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
Err. rela.	38.6 %	6.17 %	0.84 %	0.37 %	0.37 %	0.36 %

TAB. 9.5 – Erreur relative de la conjuguée  $\mathcal{H}_{-\nu}(\tilde{v}_{to,mo}^N)$  par rapport à la fonction  $-u_{to,mo} + L(u_{to,mo})$  pour  $N = 1 \dots 6$ .

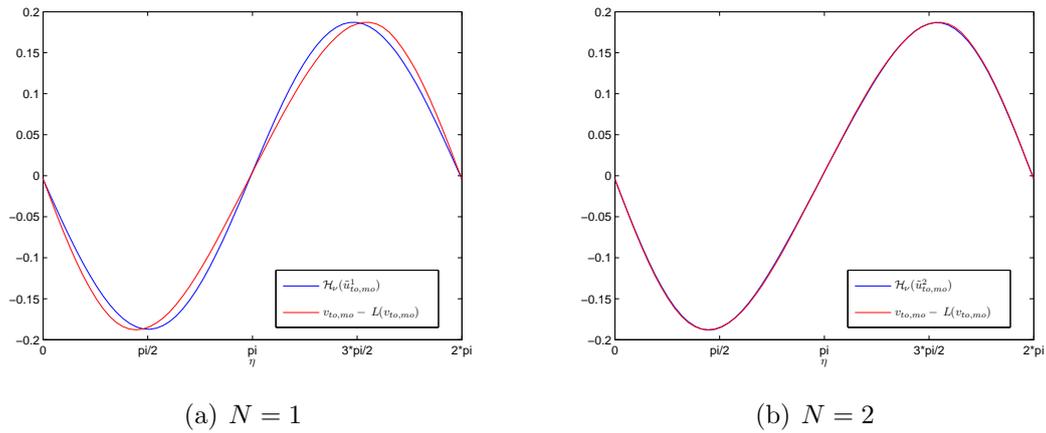


FIG. 9.5 –  $\mathcal{H}_\nu(\tilde{u}_{to,mo}^N)$  et  $v_{to,mo} - L(v_{to,mo})$  pour  $N = 1, 2$ .

On observe avec la Figure 9.5 et le Tableau 9.4 que lorsque  $N$  est suffisamment grand, c'est-à-dire lorsque l'approximation  $\tilde{u}_{to,mo}^N$  de  $u_{to,mo}$  est suffisamment bonne, le couple  $(\tilde{u}_{to,mo}^N, v_{to,mo})$  tend à devenir un couple de données compatibles. On obtient la même conclusion pour le couple  $(u_{to,mo}, \tilde{v}_{to,mo}^N)$  avec la Figure 9.6 et le Tableau 9.5 en remarquant

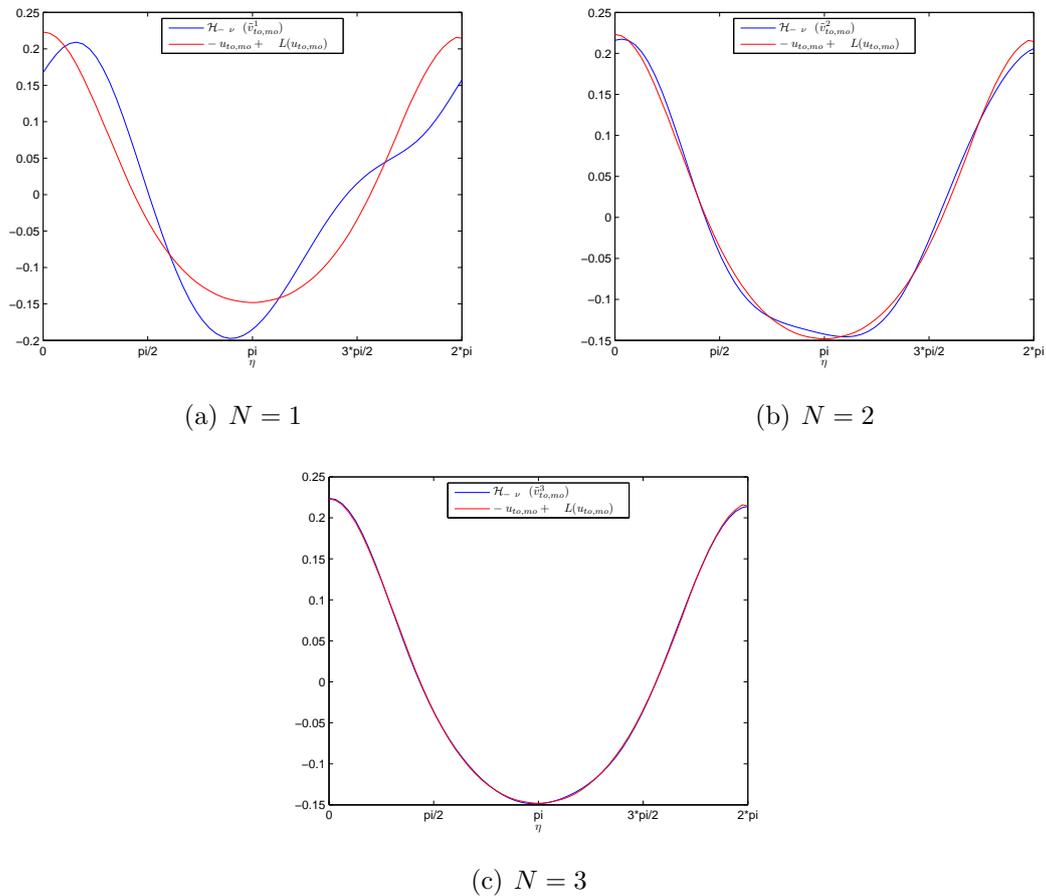


FIG. 9.6 –  $\mathcal{H}_{-\nu}(\tilde{v}_{to,mo}^N)$  et  $-u_{to,mo} + L(u_{to,mo})$  pour  $N = 1, 2, 3$ .

que les approximations fournissent de bons résultats à partir de  $N \geq 3$ .

Nous allons maintenant construire des estimées  $\Gamma_p^{(0)}$  de la frontière plasma à partir des approximations  $\tilde{u}_{to}^N$  calculées ci-dessus. Nous utiliserons plusieurs outils de comparaison pour estimer la qualité de ces frontières. Tout d'abord, comme les données fournies par EFIT ne sont *a priori* pas entachées d'erreurs, nous allons construire une bonne approximation de la fonction  $F_d^{EFIT} = u_{to,mo}^{EFIT} + iv_{to,mo}^{EFIT}$ . Cette dernière est uniquement fournie sur le bord  $\Gamma_e$ , mais en l'étendant dans le tokamak et en passant à la partie réelle, on obtient une frontière plasma de référence. Pour l'approximation de référence, nous choisissons celle obtenue en décomposant les parties réelles et imaginaires de  $u_{to,mo}^{EFIT} + iv_{to,mo}^{EFIT}$  sur les familles de fonctions (8.10) et (8.12) respectivement avec  $N = 6$  (voir Tableau 9.6). On observe que les erreurs relatives calculées dans le Tableau 9.6 sont encore meilleures que celles atteintes dans les Tableaux 9.2 et 9.3, ce qui tend à confirmer la qualité des données fournies par le code EFIT.

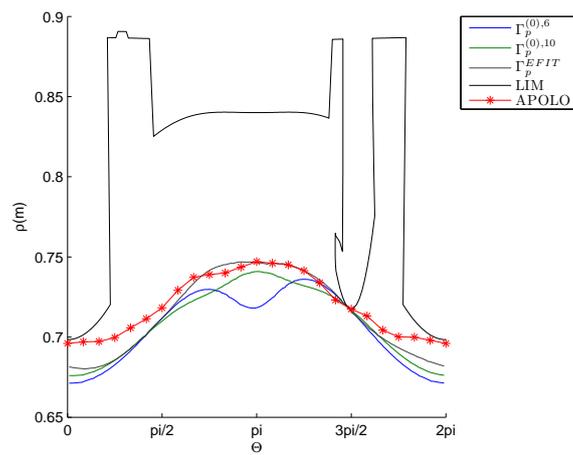
	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
iso <sup>EFIT</sup>	0.1614	0.1594	0.1566	0.1561	0.1561	0.1564
Err. rela.	3.1 %	0.47 %	0.094 %	0.052 %	0.04 %	0.037 %

TAB. 9.6 – Erreur relative pour l'approximation de  $F_d^{EFIT}$  et valeur du flux magnétique poloidal à la frontière plasma pour  $N = 1 \dots 6$ .

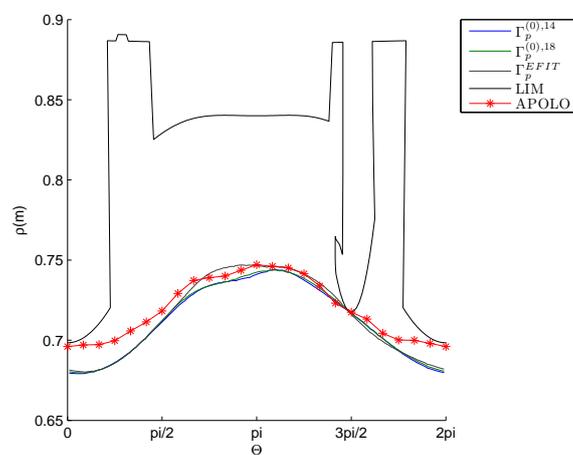
Les frontières  $\Gamma_p^{(0)}$  calculées sont aussi comparées à celles fournies par le code APOLO (voir introduction de ce chapitre). Les résultats obtenus sont visibles sur la Figure 9.7. Nous faisons le choix de présenter les différentes frontières dans le plan  $(\theta, \rho)$  (ces variables ayant été définies dans la Section 8.1.1) afin d'être en mesure de bien distinguer les frontières les unes des autres. La terminologie employée est la suivante :

- $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  : la frontière plasma obtenue à partir de l'approximation  $\tilde{u}_{to}^N$ .
- $\Gamma_p^{EFIT}$  : la frontière plasma obtenue à partir de l'approximation de  $u_{to}^{EFIT}$ .
- LIM : la frontière définie par le limiteur. Nous la faisons apparaître afin de constater que le plasma ne possède qu'un seul point de contact avec elle. Il s'agit de la courbe la plus irrégulière sur la Figure 9.7.
- APOLO : la frontière plasma obtenue à partir du logiciel APOLO.

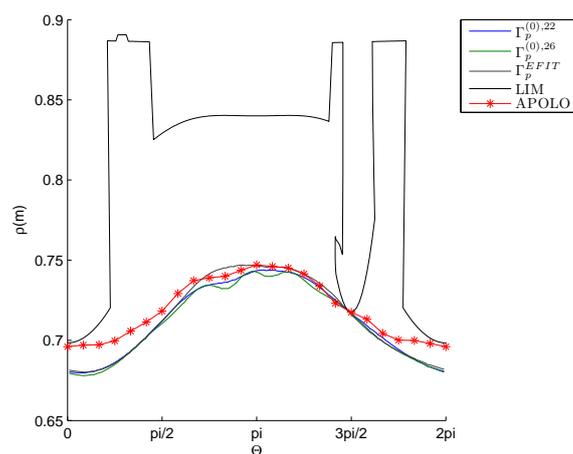
On observe sur la Figure 9.7 que lorsque  $N$  croit de 1 à 5, la frontière plasma  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  se rapproche de la frontière de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$ . Le cas  $N = 6$  est particulier car même si les erreurs relatives correspondantes sont inférieures par rapport à celles des cas  $N = 1 \dots 5$  (voir Tableau 9.7), on remarque l'apparition d'oscillations dans une zone située autour de  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire proche des anneaux de garde. Ce phénomène s'amplifie lorsque  $N$  continue d'augmenter. Les approximations pour  $N = 4$  et  $N = 5$  étant quasiment identiques (voir Tableau 9.7), nous privilégions le temps de calcul pour faire de celle correspondant à  $N = 4$  notre approximation de référence.



(a)  $N = 1, 2$



(b)  $N = 3, 4$



(c)  $N = 5, 6$

FIG. 9.7 – Estimée  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  de la frontière plasma pour  $N = 1 \dots 6$ .

La comparaison avec la frontière plasma renvoyée par APOLO indique que cette dernière est plus fidèle à la frontière  $\Gamma_p^{EFIT}$  dans la zone  $\theta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ . Toutefois, en dehors de cette zone, les frontières fournies par notre algorithme ont un bien meilleur comportement, et ce pour toutes les valeurs de  $N$  présentées dans la Figure 9.7. Il semble que la frontière APOLO tende à se rapprocher du limiteur au voisinage de  $\theta = 0$  (soit à proximité du LPA). On constate dans cette zone un écart de près de 2 cm entre la frontière APOLO et les frontières  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  ainsi que  $\Gamma_p^{EFIT}$ .

Il est aussi possible de comparer les points de contact avec le limiteur ainsi que la valeur associée à la ligne de niveau du flux magnétique poloïdal définissant la frontière plasma. Ainsi, concernant le point de contact, on obtient pour toutes les courbes  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  de la Figure 9.7 les mêmes coordonnées  $(r, z) = (2.3796, -0.7175)$ . Les coordonnées obtenues pour la frontière de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$  sont identiques. Le logiciel APOLO quant à lui fournit les coordonnées  $(r, z) = (2.4074, -0.7175)$ ; soit une différence de près de 3 cm en abscisse.

Pour ce qui est de la valeur de flux magnétique poloïdal à la frontière plasma, les résultats de l'algorithme sont donnés dans le Tableau 9.7. Avec les données EFIT, la valeur obtenue est de 0.1564 Wb (voir Tableau 9.6) alors que pour la frontière que nous calculons et que nous jugeons comme la meilleure, soit pour  $N = 4$ , nous obtenons une valeur de flux de 0.1525 Wb, soit une erreur relative de 2.6 %. Enfin avec APOLO on obtient 0.1537 Wb, soit une erreur relative de 1.7 %, c'est-à-dire mieux que ce que fournit notre algorithme.

Nous terminons cette partie par la résolution du PEB d'ordre 0 en calculant la fonction  $g_0^{(0)}$  donnée par (8.30). Cette dernière constitue donc le premier approximant de la fonction  $F_d$  donnée par (8.15). Les erreurs relatives de  $g_0^{(0)}$  par rapport à  $F_d$  ainsi que par rapport à  $F_d^{EFIT}$  sont regroupées dans le Tableau 9.7.

	4N + 2 : Nombre d'harmoniques toroïdales					
	6	10	14	18	22	26
iso <sup>(0)</sup>	0.1573	0.1550	0.1529	0.1525	0.1523	0.1533
$\frac{\ F_d - g_0^{(0)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	3.1 %	0.46 %	0.14 %	0.11 %	0.10 %	0.098 %
$\frac{\ F_d^{EFIT} - g_0^{(0)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d^{EFIT}\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	3.2 %	0.79 %	0.67 %	0.66 %	0.66 %	0.65 %

TAB. 9.7 – Résolution du PEB d'ordre 0 pour  $N = 1 \dots 6$ . Erreur relative de  $g_0^{(0)}$  par rapport à  $F_d$  ainsi que par rapport à  $F_d^{EFIT}$ . Valeur du flux magnétique poloïdal à la frontière plasma.

A la lecture des résultats du Tableau 9.7, on se rend compte dans un premier temps du faible nombre d'harmoniques toroïdales nécessaires pour obtenir un bon critère d'approximation (relatif). Ceci est en concordance avec les résultats des Tableaux 9.2 et 9.3.

Dans un deuxième temps, on remarque que l'erreur relative par rapport à la fonction de référence  $F_d^{EFIT}$  est plus élevée que par rapport à  $F_d$  tout en restant inférieure à 1 % pour un usage de seulement 10 harmoniques toroïdales. Enfin, l'approximant  $g_0^{(0)}$  calculé pour  $N = 4$ , avec lequel on obtient une frontière plasma la plus fidèle à  $\Gamma_p^{EFIT}$ , possède une erreur relative par rapport à  $F_d$  et  $F_d^{EFIT}$  de seulement 0.1 % et 0.66 % respectivement. Il s'agit là de résultats qui permettent d'accéder avec une bonne précision aux données magnétiques sur tout  $\Gamma_e$  mais aussi dans tout le domaine  $\Omega_p^{(0)}$  tel que  $\partial\Omega_p^{(0)} = \Gamma_e \cup \Gamma_p^{(0),18}$  (voir la partie A de la Section 8.2.4) puisque  $g_0^{(0)}$  y est évaluable.

En conclusion de cette première étape, nous pouvons retenir que l'algorithme est à même de fournir une solution  $g_0^{(0)}$  au PEB d'ordre 0 construite avec seulement 18 harmoniques toroïdales et telle que la frontière plasma correspondante soit une approximation satisfaisante de la frontière plasma de référence calculée avec les données du code EFIT.

### 9.2.3 Utilisation du problème extrémal borné

Nous testons dans cette section la capacité du problème extrémal borné à faire évoluer la frontière plasma vers la frontière plasma de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$ .

Commençons par remarquer que les calculs des frontières  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  dans la Section 9.2.2 permettent de définir des domaines  $\Omega_p^{(0)}$  dans lesquels la fonction  $g_0^{(0)}$  est évaluable. Comme expliqué dans le point A.4 de la Section 8.2.4, le fait que ces domaines soient désormais fixés nous permet de mettre en place des familles de fonctions (8.20) complètes dans les espaces  $H_\nu^2(\Omega_p^{(0)})$  et de dimension  $4\mathfrak{N} + 2$ . D'un point de vue calculatoire, la résolution des problèmes extrémaux bornés nécessite de calculer les matrices de Gram associées à ces familles de fonctions. Nous constatons alors que le conditionnement de ces matrices augmente en fonction de  $\mathfrak{N}$ . Nous illustrons ceci dans le Tableau 9.8 avec le conditionnement de la matrice de Gram associée au domaine  $\Omega_p^{(0)}$  ayant pour frontière intérieure  $\Gamma_p^{(0),18}$ .

	$4\mathfrak{N} + 2$ : Nombre d'harmoniques toroïdales				
	6	10	14	18	22
Conditionnement	214	$3.8 \cdot 10^3$	$7.1 \cdot 10^4$	$1.9 \cdot 10^6$	$9.7 \cdot 10^7$

TAB. 9.8 – Conditionnement des matrices de Gram après le PEB d'ordre 0 réalisé sur 18 harmoniques toroïdales.

Signalons que les matrices de Gram associées aux domaines  $\Omega_p^{(0)}$  ayant pour frontières intérieures  $\Gamma_p^{(0),4N+2}$  avec  $N = 1 \dots 4$  présentent des conditionnements du même ordre.

• test n°1

Le premier test réalisé concerne la résolution des PEB d'ordre 0, 1 et 2 avec à chaque fois 18 fonctions (donc  $N = \mathfrak{N} = 4$ ). Nous nous sommes arrêtés à l'ordre 2 car au-delà l'évolution des résultats est trop faible. Ces derniers sont présentés dans le Tableau 9.9. Les trois premières colonnes sont consacrées à la résolution des PEB d'ordre 0, 1 et 2. Rappelons que le paramètre  $\gamma$  minimisant le critère  $\|F_d - g_0^{(1)}(\gamma)\|_{L^2(\Gamma_e)}$  est choisi dans  $I_\gamma = [10^{-5}, 10]$ . La première colonne est donc identique à la quatrième colonne du Tableau 9.7. On observe ensuite que la résolution du PEB d'ordre 1 (deuxième colonne) ne fait pas décroître les critères d'approximation par rapport à  $F_d$  et  $F_d^{EFIT}$ , ce qui devrait théoriquement être le cas. Une possible justification de ceci peut venir des erreurs numériques commises par l'utilisation d'une matrice de Gram ayant un conditionnement élevé. La résolution du PEB d'ordre 1 permet aussi de constater que le paramètre  $\gamma$  calculé correspond à une contrainte  $M$  très petite. Cela signifie que lorsque l'algorithme cherche à obtenir le meilleur critère d'approximation sur  $\Gamma_e$ , alors la frontière intérieure  $\Gamma_p^{(0),18}$  bouge très peu par rapport à  $\Gamma_p^{(1),18}$ . La résolution du PEB d'ordre 2 réussit elle à améliorer les critères d'approximation qui avaient chuté lors du PEB d'ordre 1. Le niveau d'approximation atteint est quasiment similaire à celui du PEB d'ordre 0. On remarque aussi que la contrainte  $M$  appliquée au PEB d'ordre 2 a diminué ce qui indique que la distance moyenne entre les frontières  $\Gamma_p^{(2),18}$  et  $\Gamma_p^{(1),18}$  est encore plus faible qu'entre  $\Gamma_p^{(1),18}$  et  $\Gamma_p^{(0),18}$ . On observe enfin que l'utilisation du problème extrémal borné permet d'améliorer la valeur du flux magnétique poloïdal calculé à la frontière plasma. On obtient en effet une valeur comparable à celle fournie par le code APOLO et qui se rapproche de la valeur de référence EFIT (voir Tableau 9.6). Le point de contact avec le limiteur reste identique dans tous les cas à celui obtenu avec les données de référence EFIT (voir Section 9.2.2).

$n$	PEB			PEB	
	0	1	2	1	2
iso <sup>(n)</sup>	0.1525	0.1536	0.1537	0.1540	0.1540
$\frac{\ F_d - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	0.11 %	0.17 %	0.12 %	0.18 %	0.14 %
$\frac{\ F_d^{EFIT} - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d^{EFIT}\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	0.66 %	0.68 %	0.65 %	0.68 %	0.61 %
$M$		$8 \cdot 10^{-4}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-4}$
$\gamma$		$2.7 \cdot 10^{-1}$	3.9	$1.5 \cdot 10^{-1}$	6.2

TAB. 9.9 – Résolution des PEB d'ordre  $n = 0, 1, 2$  pour  $N = \mathfrak{N} = 4$ .

Nous fournissons par ailleurs dans la Figure 9.8 les frontières plasma correspondant à ces trois premières colonnes. On notera tout d'abord que les frontières  $\Gamma_p^{(2),18}$  et  $\Gamma_p^{(1),18}$

sont quasiment identiques, ce qui corrobore les observations faites au-dessus, mais aussi qu'elles sont plus éloignées de la frontière de référence EFIT que  $\Gamma_p^{(0),18}$ .

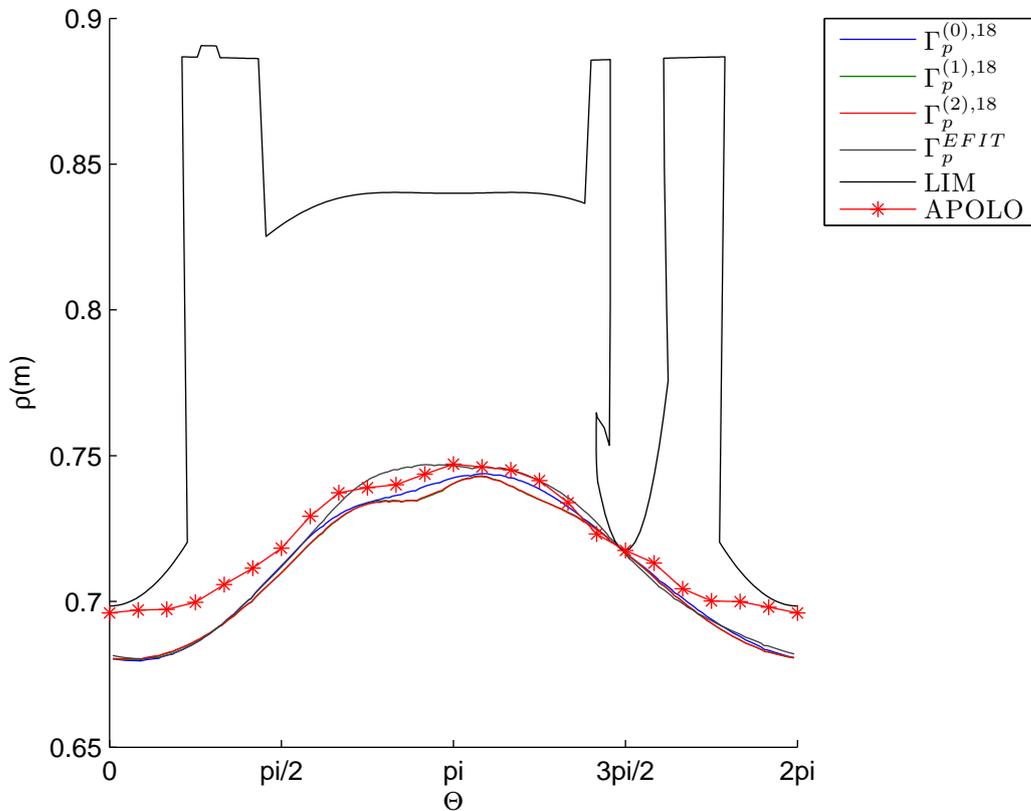


FIG. 9.8 – Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre  $n = 0, 1, 2$  pour  $N = \mathfrak{N} = 4$ .

Mentionnons que nous avons testé le comportement de l'algorithme lorsque le paramètre  $\gamma \in I_\gamma$  des solutions aux PEB d'ordre 1 et 2 était choisi tel que ce ne soit plus le critère d'approximation par rapport à  $F_d$  qui soit minimisé mais plutôt celui par rapport à  $F_d^{EFIT}$ . Ces tests correspondent au deux dernières colonnes du Tableau 9.9. On voit alors à nouveau que le PEB d'ordre 1 ne constitue pas une amélioration. On observe cependant bien que le choix du paramètre  $\gamma$  a eu une influence sur le critère par rapport à  $F_d$  en comparaison de la deuxième colonne. Par contre, pour ce qui est du PEB d'ordre 2, on constate que l'algorithme arrive finalement à faire baisser le critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$  ce qui tend à montrer qu'en choisissant  $\gamma$  de façon appropriée, il est possible de déformer la frontière plasma afin que celle-ci se rapproche de la frontière de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$ . Modérons toutefois ces propos en rappelant que comme nous ne disposons pas des données EFIT au moment où les mesures sont effectivement faites sur le bord  $\Gamma_e$ , l'optimisation du paramètre  $\gamma$  telle que nous venons de la faire n'est pas envisageable en pratique.

Nous concluons ce test en observant que la résolution de problèmes extrémaux bornés aux ordres 1 et 2 ne semble pas fournir une meilleure solution comparée à celle obtenue à l'ordre 0. Les raisons semblent provenir à la fois des erreurs numériques dues au conditionnement mais aussi et surtout du fait que la première estimée  $\Gamma_p^{(0),18}$  de la frontière plasma

soit déjà réalisée avec une bonne précision. C'est pourquoi nous allons désormais réaliser des tests à partir d'une première estimée de la frontière plasma calculée avec un minimum de fonctions, c'est-à-dire 6 (soit  $N = 1$ ). En procédant ainsi, nous allons mettre en avant la capacité du problème extrémal borné à reconstruire des données magnétiques de bonne qualité, mais aussi diminuer le temps de calcul puisque qu'il est finalement moins coûteux de calculer  $\Gamma_p^{(0),6}$  que  $\Gamma_p^{(0),18}$ .

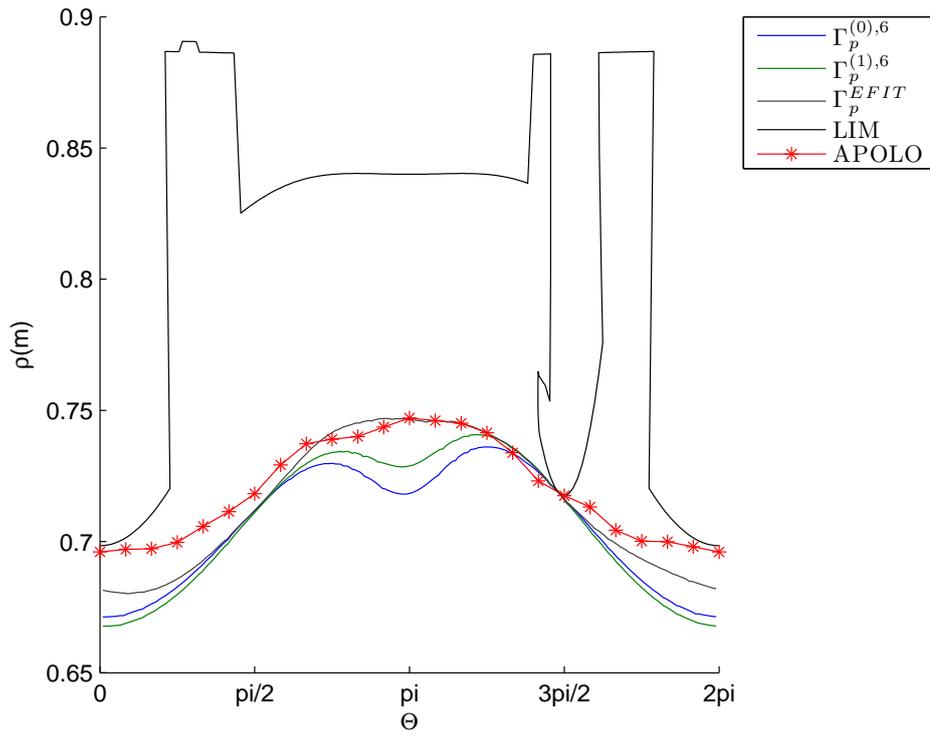
**Remarque 9.2.3.1** *Dans les tests qui vont suivre, nous nous limiterons à la résolution de PEB d'ordre 0 et 1. Les améliorations apportées par la résolution de PEB d'ordre 2 sont en effet trop faibles pour justifier leur utilisation, notamment du point de vue du temps de calcul. Remarquons que le fait que les PEB d'ordre 2 améliorent peu les résultats des PEB d'ordre 1 en ce qui concerne la reconstruction de la frontière plasma provient essentiellement du choix du paramètre  $\gamma$  que nous faisons.*

• **test n°2**

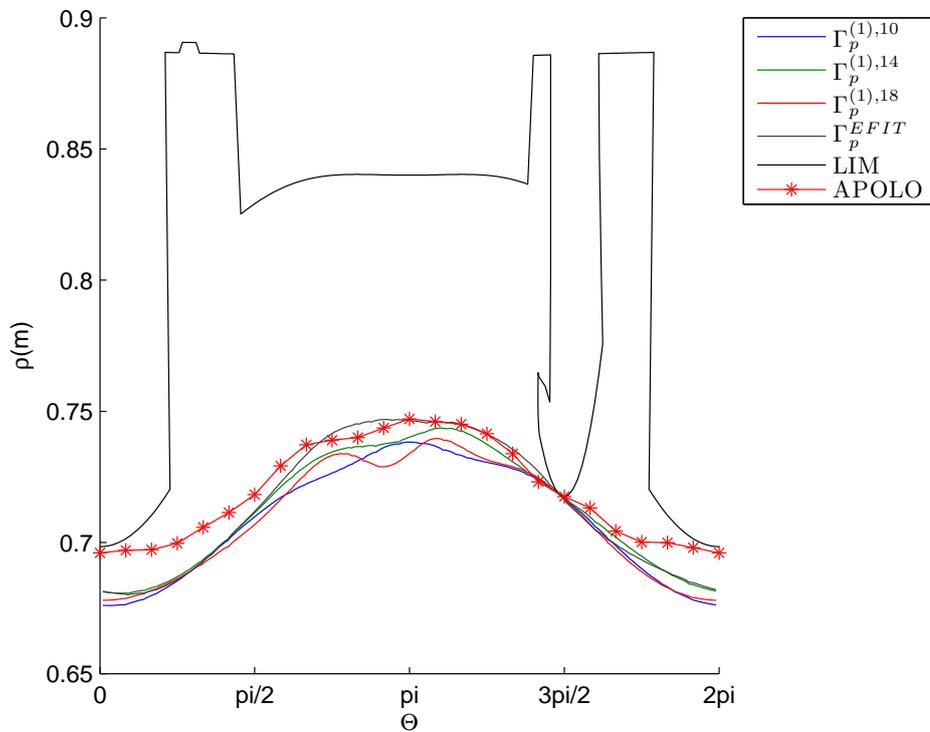
Le test qui suit concerne la résolution du PEB d'ordre 0 à l'aide 6 fonctions ( $N = 1$ ) ainsi que du PEB d'ordre 1 avec cette fois 6, 10, 14 et 18 fonctions ( $\mathfrak{N} = 1..4$ ). Les résultats sont fournis dans le Tableau 9.10. En entrée des colonnes de ce tableau, nous écrivons «MES( $4N + 2, 4\mathfrak{N} + 2$ )» pour signifier qu'à partir des mesures effectuées sur  $\Gamma_e$ , nous résolvons les PEB d'ordre 0 et 1 avec  $4N + 2$  et  $4\mathfrak{N} + 2$  fonctions respectivement.

	MES (6, 6)		MES (6, 10)	MES (6, 14)	MES (6, 18)
	PEB		PEB	PEB	PEB
	0	1	1	1	1
iso <sup>(n)</sup>	0.1573	0.1559	0.1556	0.1527	0.1554
Err. rela.	3.1 %	1.5 %	0.18 %	0.13 %	0.19 %
Err. rela. EFIT	3.2 %	1.7 %	0.67 %	0.66 %	0.68 %
$M$		$3.1 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-3}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$
$\lambda$		$1.5 \cdot 10^{-2}$	$2.4 \cdot 10^{-2}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$

TAB. 9.10 – Résolution des PEB d'ordre  $n = 0, 1$  pour  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Le terme «Isoplasma» désigne les quantités iso<sup>(n)</sup>.



(a)  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1$



(b)  $\mathfrak{N} = 2, 3, 4$

FIG. 9.9 – Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre 0 et 1 pour  $N = 4$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ .

On constate que lorsque la première estimation de la frontière plasma est réalisée avec le minimum possible de fonctions (ici 6 fonctions), alors le PEB d'ordre 1 remplit son rôle à savoir faire diminuer le critère par rapport à  $F_d$ . Ce dernier diminue en effet de moitié dès l'ordre 1 réalisé avec 6 fonctions. Le critère continue ensuite de décroître lorsque  $\mathfrak{N}$  augmente de 1 à 3 pour fournir des résultats tout à fait satisfaisants et réaugmente pour  $\mathfrak{N} = 4$  pour atteindre un niveau proche du cas  $\mathfrak{N} = 2$ . On observe par ailleurs une diminution, certes plus faible, du critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$ . Il s'agit là encore de bons résultats puisque notre technique de résolution du problème extrémal borné via le choix du paramètre  $\gamma$  favorise la diminution du critère par rapport aux données de référence. Ces résultats se retrouvent dans la Figure 9.9. On notera en effet que le PEB d'ordre 1 tend à faire évoluer la frontière plasma calculée vers la frontière de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$ . La frontière donnant le plus satisfaction est  $\Gamma_p^{(1),14}$  alors que pour  $\Gamma_p^{(1),18}$  on retrouve l'apparition d'oscillations. Ce phénomène d'oscillations s'accroît encore lorsque  $\mathfrak{N}$  augmente.

Sur le Tableau 9.10, on peut voir aussi les valeurs de la quantité  $iso^{(1)}$  qui sont meilleures que celles obtenues avec la résolution du PEB d'ordre 0 seul (voir Tableau 9.7) et qui par ailleurs se rapprochent de la valeur  $iso^{EFIT}$  (voir la sixième colonne du Tableau 9.6). On a ainsi une erreur relative de 2.4 % en ce qui concerne la valeur du flux magnétique à la frontière  $\Gamma_p^{(1),14}$ . Terminons ces commentaires en notant que la contrainte  $M$  est dans ce test une fonction croissante du nombre de fonctions utilisées pour résoudre le PEB d'ordre 1 hormis lorsque  $\mathfrak{N} = 4$ . Cela peut s'interpréter de la manière suivante : la frontière  $\Gamma_p^{(1),4\mathfrak{N}+2}$  peut évoluer avec plus de liberté autour de la première estimation  $\Gamma_p^{(0),6}$  dans la mesure où plus l'on dispose de fonctions pour résoudre le PEB d'ordre 1, meilleur sera le critère sur le bord  $\Gamma_e$  (ce qui est le but recherché par le choix de notre paramètre  $\gamma$ ). Enfin concernant le point de contact avec le limiteur, ce dernier est toujours identique à celui trouvé à partir des données EFIT (voir Section 9.2.2).

On peut donc conclure ce test en affirmant qu'à partir d'une estimée la moins fine possible de la frontière plasma, la résolution du problème extrémal borné permet de fournir une bien meilleure approximation de cette dernière tout en faisant diminuer le critère d'approximation par rapport aux données mesurées sur le bord extérieur  $\Gamma_e$ . L'utilisation d'un tel procédé se révèle donc intéressant dans les cas où on envisage une résolution rapide du PEB d'ordre 0 que l'on s'autorise ensuite à affiner.

### 9.3 Choc n°45496 au temps $t = 8.0285$ s avec données bruitées

A la suite des tests réalisés dans la Section 9.2.3, nous allons maintenant tenter de retrouver la frontière plasma  $\Gamma_p^{EFIT}$  toujours à partir des mesures effectuées sur  $\Gamma_e$  mais auxquelles cette fois-ci on aura préalablement ajouté un bruit blanc gaussien. Partant du fait que plus les mesures initiales sont bruitées, moins on a intérêt à réaliser une approximation à l'ordre 0 avec beaucoup de fonctions, nous allons étudier la capacité de l'algorithme de résolution du problème extrémal borné à faire évoluer une estimée de la frontière plasma obtenue avec le minimum de fonctions possible, soit 6 fonctions. Précisons que les courbes APOLO et  $\Gamma_p^{EFIT}$  se trouvant dans les figures qui suivent sont les mêmes que celles des figures précédentes, obtenues avec des données non bruitées. Ajoutons que les points de contact retrouvés sont tous identiques à ceux des tests précédents et que

les simulations présentées dans ces tests suivent le même schéma que celles des sections précédentes. Toutefois nous ne présentons que les résultats correspondant à ceux de la Section 9.2.3.

### 9.3.1 Niveau de bruit : 5 %

Les résultats de ce test se trouvent dans le Tableau 9.11 ainsi que dans la Figure 9.10.

	MES (6, 6)		MES (6, 10)	MES (6, 14)	MES (6, 18)
	PEB		PEB	PEB	PEB
$n$	0	1	1	1	1
iso <sup>(n)</sup>	0.1585	0.1565	0.1583	0.1555	0.1588
$\frac{\ F_d - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	3.1 %	1.5 %	0.23 %	0.19 %	0.20 %
$\frac{\ F_d^{EFIT} - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d^{EFIT}\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	3.6 %	2.4 %	1.8 %	1.8 %	1.8 %
$M$		$3.5 \cdot 10^{-3}$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$4.7 \cdot 10^{-3}$	$4.4 \cdot 10^{-3}$
$\lambda$		$3.1 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$

TAB. 9.11 – Résolution du PEB d'ordre  $n = 0, 1$  pour  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 5 %.

On observe une diminution du critère par rapport à  $F_d$  suivant la même tendance que celle décrite dans le test n°2 de la Section 9.2.3. L'ajout de bruit rend cependant plus difficile la diminution de ce critère pour  $\mathfrak{N} \geq 2$  même si les niveaux restent bons. On pourrait craindre alors qu'à vouloir trop faire diminuer le critère par rapport à  $F_d$ , et donc risquer de trop approximer le bruit, cela empêche de construire des solutions au PEB d'ordre 1 qui ne font pas diminuer le critère par rapport aux données de référence  $F_d^{EFIT}$ . Mais là encore, on constate que l'algorithme fournit des résultats satisfaisants puisque dès le PEB d'ordre 1 réalisé avec 6 fonctions, le critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$  diminue pour finalement stagner à la moitié de sa valeur initiale pour  $\mathfrak{N} \geq 2$ .

D'après les courbes de la Figure 9.10, la frontière  $\Gamma_p^{(1),14}$  est la meilleure frontière plasma construite. L'évolution des courbes reste identique à celle du test n°2 de la Section 9.2.3. Il en est de même pour l'évolution de la contrainte  $M$ . Enfin les valeurs de la quantité iso<sup>(1)</sup> sont encore plus proches de la valeur de référence EFIT (voir la sixième colonne du Tableau 9.6) que celles du test n°2 de la Section 9.2.3 ce qui peut être la conséquence du bruitage qui, rappelons-le, est aléatoire. Ainsi pour la frontière  $\Gamma_p^{(1),14}$ , on calcule une erreur relative de 0.6 %.

On conclut finalement que là encore la résolution de problèmes extrémaux bornés conduit à faire évoluer la frontière plasma de manière satisfaisante tout en abaissant le

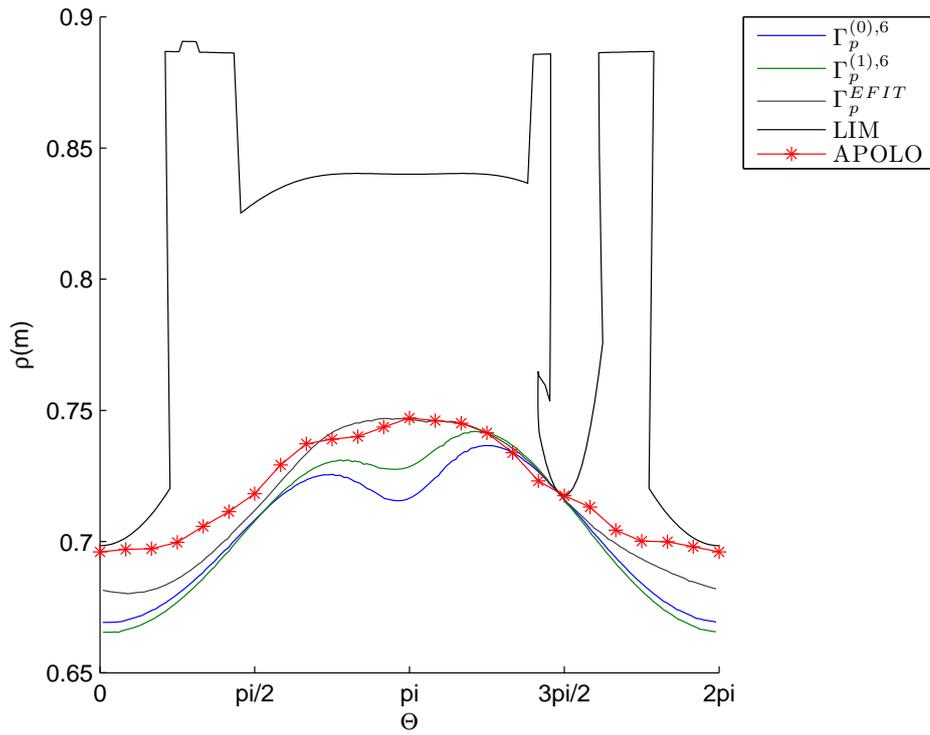
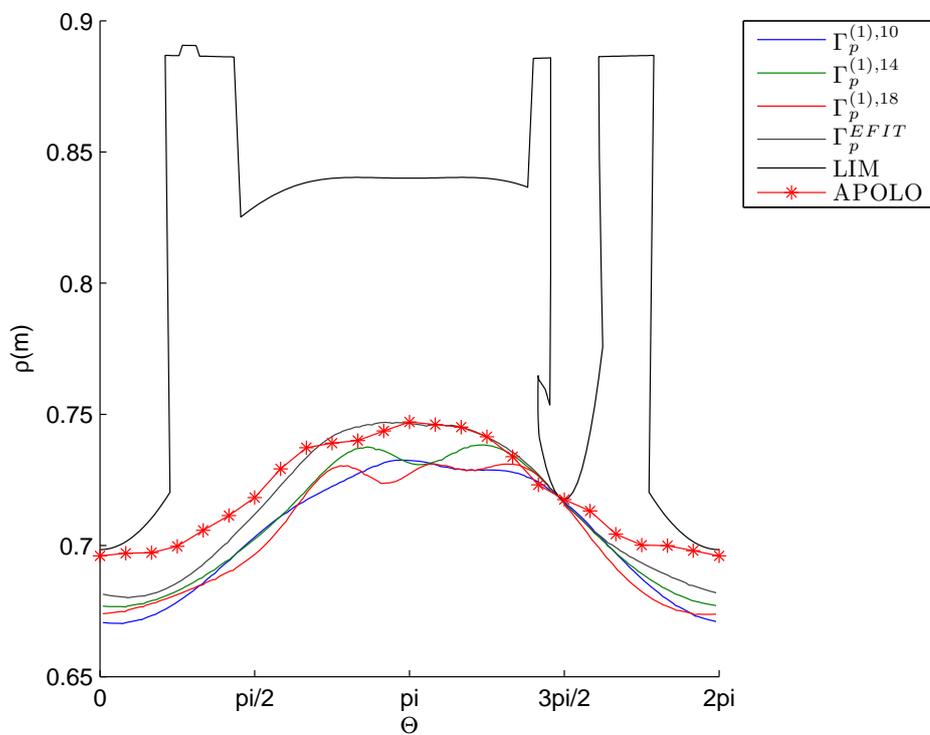
(a)  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1$ (b)  $\mathfrak{N} = 2, 3, 4$ 

FIG. 9.10 – Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre 0 et 1 pour  $N = 4$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 5 %

critère d'approximation sur le bord extérieur  $\Gamma_e$ . Ajoutons que si l'on tient à se prémunir d'un critère par rapport à  $F_d$  trop petit étant donné le niveau de bruit des mesures, il est possible de se limiter aux frontières plasma  $\Gamma_p^{(1),6}$  ou bien  $\Gamma_p^{(1),10}$  pour lesquelles le critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$  est meilleur que celui issu de la première estimation  $\Gamma_p^{(0),6}$ .

### 9.3.2 Niveau de bruit : 10 %

Les résultats de ce test se trouvent dans le Tableau 9.12 9.11.

	MES (6, 6)		MES (6, 10)	MES (6, 14)	MES (6, 18)
	PEB		PEB	PEB	PEB
$n$	0	1	1	1	1
iso <sup>(n)</sup>	0.1563	0.1535	0.1518	0.1439	0.1438
$\frac{\ F_d - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	3.2 %	1.6 %	0.43 %	0.27 %	0.26 %
$\frac{\ F_d^{EFIT} - g_0^{(n)}\ _{L^2(\Gamma_e)}}{\ F_d^{EFIT}\ _{L^2(\Gamma_e)}}$	4.9 %	4.2 %	3.9 %	3.9 %	3.9 %
$M$		$3.8 \cdot 10^{-3}$	$6.2 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-3}$	$7.8 \cdot 10^{-3}$
$\lambda$		$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-5}$

TAB. 9.12 – Résolution du PEB d'ordre  $n = 0, 1$  pour  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 10 %.

On remarque une fois de plus que l'algorithme fonctionne dans la mesure où il réussit à faire baisser le critère par rapport à  $F_d$ . Bien que le niveau de bruit ait doublé par rapport au test de la Section 9.3.1, on observe que les valeurs du critère par rapport à  $F_d$  sont seulement légèrement supérieures à celles obtenues dans le Tableau 9.11. Ce phénomène tient en partie au nombre fini d'harmoniques dans les développements des fonctions que nous proposons. En effet, en choisir un nombre restreint entraîne automatiquement une diminution de l'impact du bruit puisque une partie du signal n'est pas prise en compte. Bien sûr, à vouloir utiliser trop peu de fonctions, on se prive d'une trop grande partie du signal. Néanmoins le choix d'un nombre raisonnable de celles-ci peut être vu comme un moyen robuste de limiter l'influence du bruit.

Pour ce qui est du critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$ , là encore on observe une diminution dès le PEB d'ordre 1 avec 6 fonctions avec une stagnation à 3.9 % à partir de  $\mathfrak{N} = 2$ . Il est alors important de noter que si les valeurs du critère par rapport à  $F_d$  sont du même ordre que ce soit pour un niveau de bruit de 5 % ou de 10 %, ceci n'est plus du tout le cas pour le critère par rapport à  $F_d^{EFIT}$ . On remarque en effet un rapport supérieur à 2 en défaveur du test avec le niveau de bruit à 10 %. Les conséquences de ces remarques peuvent être observées sur la Figure 9.11. L'évolution des frontières plasma est cette fois-ci

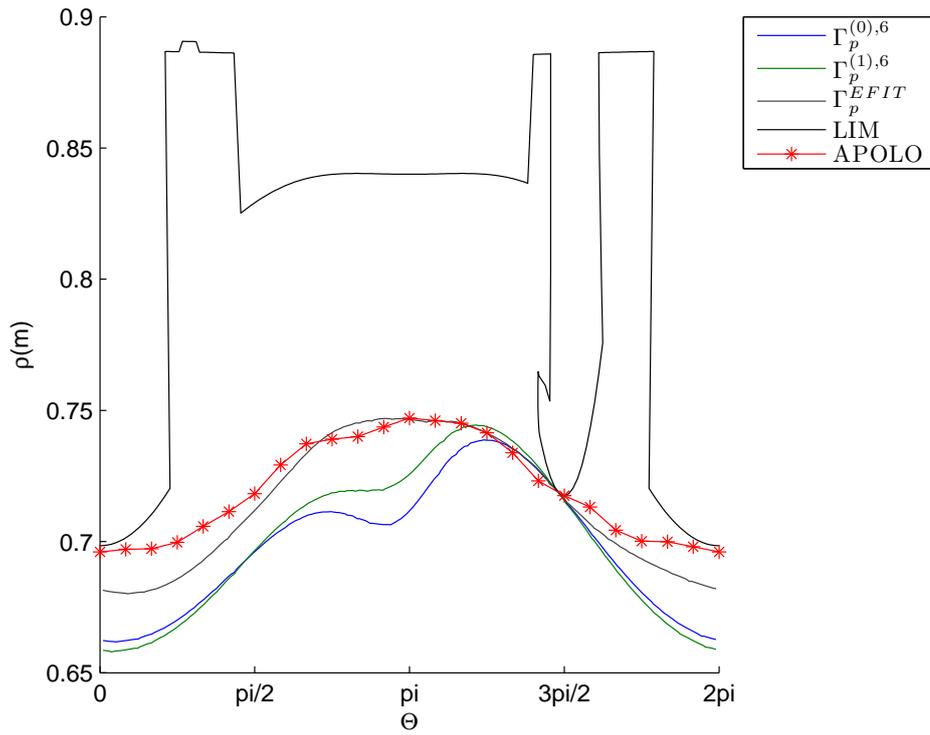
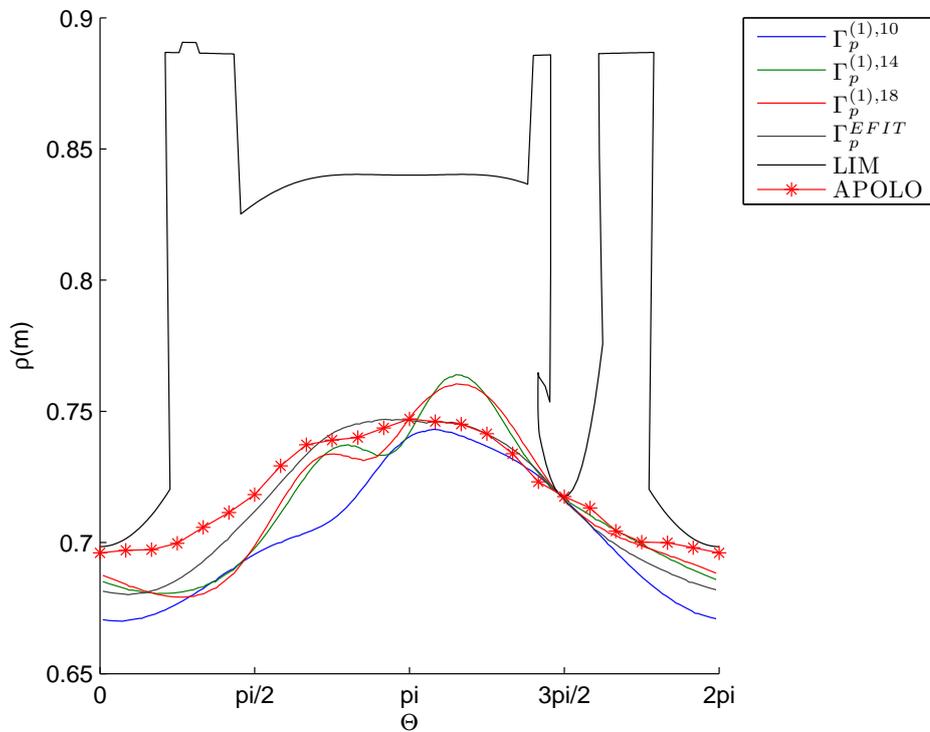
(a)  $N = 1$  et  $\mathfrak{N} = 1$ (b)  $\mathfrak{N} = 2, 3, 4$ 

FIG. 9.11 – Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre  $n = 0, 1$  pour  $N = 4$  et  $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 10 %.

différente de celle obtenue dans tous les tests précédents. En effet, on constate pour la première fois que les frontières  $\Gamma_p^{(1),6}$ ,  $\Gamma_p^{(1),14}$  et  $\Gamma_p^{(1),18}$  ne sont plus entièrement contenues dans le domaine délimité par  $\Gamma_p^{EFIT}$ . C'est en particulier le cas de  $\Gamma_p^{(1),14}$  et  $\Gamma_p^{(1),18}$ , ce qui peut s'expliquer par le fait que ces deux frontières correspondent à une solution du PEB d'ordre 1 qui approxime avec une bonne précision les données bruitées. La frontière plasma la plus raisonnable, à la vue de la Figure 9.11, semble donc être  $\Gamma_p^{(1),10}$  pour laquelle existe tout de même un écart maximal d'environ 4 cm avec la frontière de référence  $\Gamma_p^{EFIT}$  aux alentours de  $\theta = \frac{3\pi}{4}$ .

Pour les autres quantités liées à la résolution des PEB d'ordre 0 et 1, on retrouve l'augmentation attendue de la contrainte  $M$  en fonction du nombre  $\mathfrak{N}$ . Enfin, concernant les valeurs du flux magnétique poloidal à la frontière plasma, le fait qu'elles soient plus éloignées de la valeur de référence EFIT que celles des tests précédents (voir la sixième colonne du Tableau 9.6) est en accord avec le fait que l'algorithme peine à faire évoluer les frontières plasma vers  $\Gamma_p^{EFIT}$ . Ainsi, dans le cas de  $\Gamma_p^{(1),10}$ , on calcule une erreur relative de 3 % sur  $\text{iso}^{(1)}$ . Toutefois, le fait que cette valeur ne soit pas plus élevée confirme que si utiliser peu de fonctions dans la résolution du PEB d'ordre 1 diminue la capacité de l'algorithme à faire baisser le critère d'approximation, cela permet aussi de limiter l'impact du bruit.

Ce test permet finalement de conclure que dans le cas de mesures soumises à un niveau élevé de bruit, l'algorithme de résolution du problème extrémal borné est capable de fournir une estimation de la frontière plasma qui reste raisonnable même si bien évidemment un tel niveau de bruit a un impact important sur les résultats. Dans ce cas là, il convient donc de limiter la diminution du critère par rapport à  $F_d$  en résolvant un PEB d'ordre 1 avec peu de fonctions ( $\mathfrak{N} = 2$ ). Cela permet par ailleurs de limiter l'impact du bruit.

**Remarque 9.3.2.1** *Sur toutes les simulations réalisées dans ce chapitre, nous pouvons constater que les frontières obtenues après évolution d'une première estimée peuvent être éloignées de la frontière obtenue avec le code de calcul APOLO. Sans en connaître avec certitude la raison, notons que APOLO ne fait pas l'hypothèse que les capteurs des données magnétiques ( $B_n, B_t$ ) soient tous situés sur le bord extérieur  $\Gamma_e$  mais procède plutôt par interpolation de données sur un cercle de référence [60] (proche de l'emplacement des capteurs). Ces dernières sont calculées tout d'abord au moyen de développements de Taylor (de faible ordre) dans la direction radiale des quantités magnétiques puis par évaluation de ce développement sur le cercle de référence. La validité de cette procédure repose avant tout sur le fait que la distance radiale entre le cercle de référence et les différents capteurs est faible. Par la suite, les données calculées sur le cercle de référence sont interpolées et permettent d'obtenir à nouveau un développement de Taylor dans la direction radiale du flux magnétique poloidal. Ce dernier est alors évalué sur le limiteur et son maximum donne la courbe de niveau correspondant à la frontière plasma (ce qui correspond à l'étape du PEB d'ordre 0 dans notre algorithme). Il est alors intéressant de retenir l'idée du calibrage des mesures sur un cercle de référence. Ceci pourrait constituer une perspective d'amélioration de notre algorithme tout en conservant l'avantage lié à la résolution de problèmes extrémaux bornés qui stabilisent le problème inverse de la détermination des quantités magnétiques dans le domaine situé entre le bord extérieur  $\Gamma_e$  et la frontière plasma.*



**Cinquième partie**  
**Conclusion et perspectives**

---



# Conclusion et perspectives

Le travail effectué lors de cette thèse m'a permis d'étudier plusieurs questions relatives à la résolution des problèmes inverses pour des équations de diffusion isotrope en dimension 2 avec des données au bord de Cauchy. L'approche adoptée, qui dérive de techniques de l'analyse harmonique et de l'analyse complexe, m'a permis de présenter plusieurs types de résultats répondant aussi bien à des considérations théoriques (existence, unicité et stabilité d'une solution au problème inverse) que constructives (identification de quantités magnétiques ainsi que de la frontière plasma dans le tokamak Tore Supra).

## Espaces de Hardy généralisés sur des domaines doublement connexes

Les résultats concernant cette partie font suite à ceux de [25] dont nous faisons une présentation non exhaustive dans le Chapitre 3. Nous étendons de façon naturelle certaines propriétés essentielles des espaces  $H^p_\nu(\mathbb{D})$  aux espaces  $H^p_\nu(\Omega)$  lorsque le domaine  $\Omega$  devient doublement connexe telles que l'existence de limites non tangentielles ainsi que le fait que les sous-ensembles de mesure strictement positive sur la frontière déterminent de manière unique les valeurs prises par les fonctions dans  $\Omega$ . Outre la décomposition de  $H^p_\nu(\mathbb{A})$  en somme d'espaces de Hardy généralisés élémentaires, nous résolvons ensuite complètement le problème de Dirichlet pour l'équation de diffusion dans le cas doublement connexe. Grâce à ce dernier résultat, nous identifions les fonctions de  $L^p_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{A})$  n'admettant pas de conjuguées ce qui nous permet de résoudre là aussi entièrement le problème de Dirichlet pour l'équation de Beltrami conjuguée ainsi que de généraliser la bornitude de l'opérateur de conjugaison. Enfin nous démontrons certaines propriétés de densité essentielles à la résolution du problème extrémal borné.

Au terme de ce travail, il reste de nombreuses questions et problèmes intéressants à prendre en considération, et ce pour  $\Omega$  simplement ou doublement connexe :

- L'étude des espaces  $H^p_\nu$  pour les exposants  $p = 1, \infty$ . Nous n'avons fait aucune tentative de généralisation des résultats de dualité entre  $H^1$  et  $BMO$  [68]. Identifier le dual de  $H^1_\nu$  requiert vraisemblablement l'introduction d'idées et d'espaces nouveaux.
- L'obtention d'une factorisation des fonctions de  $H^p_\nu$  qui généralise celle des fonctions de  $H^p$  faisant intervenir les fonctions intérieures et extérieures. Pour l'instant, à partir des travaux de [34], seules les fonctions de  $G^p_\alpha$  peuvent être factorisées au moyen de fonctions de  $H^p$ .
- La généralisation des propriétés des espaces  $H^p_\nu$  en dimension supérieure. Par analogie avec le cas harmonique classique, on peut s'attendre à rencontrer un nombre important de difficultés dans la mesure où les techniques utilisées dans ce manuscrit sont propres à la dimension 2. On pense par exemple à l'extension du résultat

de prolongement unique qui peut être infirmé en dimension 3 [43, 133] pour le cas harmonique classique. Néanmoins parvenir à généraliser certaines propriétés à la dimension 3 serait un point de départ à la résolution de certains problèmes extrémaux bornés dans le même esprit que [16].

- L’extension de la notion de classes de Smirnov. La définition de ces classes coïncide avec celle des espaces de Hardy classiques dans le cas où le domaine d’étude est conformément équivalent au disque unité [63, Thm. 10.2]. Néanmoins, les classes de Smirnov permettent d’étendre certaines propriétés des espaces de Hardy classiques à des domaines plus généraux au sens où on impose à la frontière d’être seulement une courbe de Jordan rectifiable. Il serait donc intéressant de savoir dans quelle mesure la définition d’une classe de Smirnov généralisée permettrait d’étendre les résultats des espaces  $H_v^p$ .
- L’affaiblissement des hypothèses de régularité sur les coefficients  $\sigma$  et  $\nu$ . Dans tout ce manuscrit, nous supposons qu’il s’agit d’éléments de  $W^{1,\infty}$ . En fait, les résultats de Dirichlet pour l’équation de Beltrami conjuguée dans ce manuscrit restent vrais lorsque  $\nu \in W^{1,q}$  avec  $q \in (2, \infty)$  et  $p > q/(q - 2)$  [64]. Il est donc facile d’en déduire que le problème de Dirichlet pour l’équation de diffusion peut être résolu sous les mêmes conditions. La difficulté majeure arrive lorsque l’on s’attarde sur le cas  $\sigma, \nu \in W^{1,2}$ . L’exposant  $q = 2$  représente en effet l’exposant critique puisque nous travaillons en dimension 2. Pour œuvrer dans ce sens, il convient avant tout de s’assurer de l’existence de la décomposition  $w = e^s F$  lorsque  $w \in G_\alpha^p$  avec  $\alpha \in L^2$ . Sous ces hypothèses, on peut obtenir que  $s \in W^{1,2}$ , ce qui signifie  $s \in VMO$  [47]. Dès lors,  $e^s \in L^p$  pour  $p < \infty$  avec [75, Cor. 2.6], ce qui permet bien de donner un sens avec l’inégalité de Hölder à  $w = e^s F$  si  $F \in H^{p'}$ , l’exposant  $p'$  pouvant être choisi proche (inférieurement) de  $p$ . Reste alors à assurer l’existence de limites non-tangentes pour  $w$ , ce qui est pour l’instant un problème ouvert.

### Problèmes extrémaux bornés dans les espaces $H_v^p$

Du point de vue théorique, nous avons tout d’abord formulé le problème inverse initial en un problème de meilleure approximation sous contrainte dans les espaces de Hardy généralisés pour  $p \in (1, \infty)$ . Les résultats de Dirichlet et de densité énoncés dans les Chapitres 4 et 5 nous ont permis de montrer que ce problème d’approximation admettait une unique solution. Nous l’avons caractérisée dans le cas hilbertien  $p = 2$  comme la solution, dépendant d’un paramètre implicite  $\gamma$  de type Lagrange, d’une équation variationnelle. Le choix de  $\gamma$  permettant de satisfaire une contrainte imposée sur la partie de la frontière où on ne dispose pas de données est un problème difficile. Des éléments de réponse quant à la monotonie du critère d’approximation ainsi que de la contrainte, vus comme fonctions de  $\gamma$ , ont été donnés. Il serait intéressant d’étudier le comportement asymptotique de ces fonctions lorsque  $\gamma \rightarrow -1$  et  $\gamma \rightarrow \infty$ . Ceci permettrait en effet d’élaborer un algorithme efficace et rapide de recherche de  $\gamma$  à contrainte fixée.

Une autre question à laquelle nous portons beaucoup d’intérêt concerne l’utilisation d’une contrainte en norme  $L^\infty$  dans la formulation du problème extrémal borné. Ce dernier se reformulerait alors en

Soit  $\nu \in W_{\mathbb{R}}^{1,\infty}(\Omega)$  satisfaisant  $(\kappa)$ ,  $M \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\Phi \in L_{\mathbb{R}}^p(J)$  et  $F_d \in L^p(I)$ . Trouver  $g_0 \in H_{\nu}^2(\Omega)$  telle que  $\|Re g_0 - \Phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M$  et

$$\|F_d - g_0\|_{L^p(I)} = \min_{\substack{g_0 \in H_{\nu}^2(\Omega) \\ \|Re g_0 - \Phi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M}} \|F_d - g\|_{L^p(I)} .$$

Au-delà du fait que résoudre un tel problème constituerait une extension des travaux de [26, 125], nous y voyons aussi un moyen d'améliorer notre algorithme de recherche de la frontière plasma. Plus précisément, dans l'application au tokamak Tore Supra que nous avons traitée, nous connaissons la fonction  $\Phi$  par laquelle il convient de moduler l'amplitude de  $Re g_0$ . Dès lors, disposer d'une contrainte en norme  $L^\infty$  serait un moyen efficace de faire baisser l'erreur d'approximation tout en s'assurant qu'à chaque itération du problème extrémal borné la contrainte traduise une déformation en presque tout point de la frontière plasma.

En ce qui concerne la deuxième partie de cette thèse, à savoir la résolution constructive du problème extrémal borné, nous avons développé des outils permettant de traiter de manière systématique les géométries simplement et doublement connexes. Concernant les premières, ceci a donné lieu à la publication [71, 72]. Pour ce qui est du cas annulaire, nous avons déterminé une base des espaces  $H_{\nu}^p(\Omega)$  à partir des harmoniques toroïdales. A la complétude de ce système de fonctions s'ajoutent aussi deux résultats obtenus dans ce manuscrit :

- Nous avons exhibé une solution de l'équation de conductivité admettant une fonction conjuguée multivaluée, la constante de multivaluation ayant été clairement identifiée. Cette solution joue en fait le même rôle que la fonction  $\log$  dans le cas harmonique classique (il s'agit d'une solution fondamentale de l'opérateur  $\nabla \cdot (\sigma \nabla)$ ; voir [53]).
- Nous avons aussi généralisé les formules de Heine [58, 87] aux cas où la fonction trigonométrique intervenant dans la série n'est plus un cosinus mais un sinus. Une analyse rapide de la littérature dans laquelle il est fait usage des harmoniques toroïdales montre que les auteurs se placent généralement dans le cas favorable où la symétrie du domaine étudié fait que les termes en sinus disparaissent des développements des quantités physiques recherchées (par exemple dans des domaines plans symétriques par rapport à l'axe des abscisses). Ces nouvelles formules offrent désormais la possibilité de traiter toutes les géométries planes, mais restent avant tout particulièrement adaptées à l'étude de domaines tridimensionnels à symétrie toroïdale.

Les familles de fonctions étudiées dans ce manuscrit ou encore dans [72] l'ont été car elles étaient particulièrement adaptées à la topologie du problème mais aussi car leur obtention résultait d'un calcul classique dans la recherche de solution à des EDP. Il reste que d'autres familles de solutions existent et sont facilement accessibles par le calcul. On pense notamment à la famille de polynômes homogènes utilisée dans les cas tests de [72]. Il serait intéressant de prouver la complétude dans les espaces  $H_{\nu}^2$  de cette famille même si pour l'instant nous ne sommes pas en mesure d'évaluer son intérêt dans la résolution du problème extrémal borné en comparaison, par exemple, de la famille de Bessel-exponentielles faisant l'objet de [72].

## Problèmes inverses pour la fusion magnétique

La partie appliquée de ce manuscrit est consacrée à l'étude de certains problèmes inverses pour le tokamak Tore Supra. Elle est le fruit d'une collaboration avec le CEA/IRFM et plus particulièrement avec François Saint-Laurent. Nous avons développé un code qui résout un problème extrémal borné adapté à la détermination de quantités magnétiques à l'intérieur de la machine mais à l'extérieur du plasma, ainsi qu'à la reconstruction de la frontière plasma. Plusieurs simulations, regroupées dans le Chapitre 9, illustrent les très bons résultats que nous obtenons à partir de mesures des composantes radiales et tangentielles du champ magnétique prises sur la frontière extérieure de Tore Supra. Le code mis en place présente des avantages certains. Tout d'abord, il fournit en sortie une approximation du flux magnétique poloïdal à partir de combinaisons linéaires de véritables solutions de l'équation de diffusion ce qui contraste avec les techniques plus classiques de résolution par éléments finis. La méthode adoptée ne requiert aucune intégration dans le domaine garantissant ainsi une procédure rapide et économique. Cette approximation admet de plus une représentation particulièrement «compacte» puisque les développements ayant conduit aux meilleurs résultats utilisent au plus une vingtaine d'harmoniques toroïdales, ce qui est bien entendu aussi un moyen de limiter l'influence du bruit provenant des mesures.

Il serait intéressant d'étudier dans un futur proche les problématiques suivantes :

- Pour l'instant, le code implémenté n'a pas été élaboré en prenant en compte la contrainte de temps. Or il est nécessaire de disposer de la frontière plasma en temps réel afin de pouvoir la contrôler au moyen des bobines magnétiques poloïdales. Néanmoins, le fait que la solution du problème extrémal borné soit obtenue uniquement à partir d'intégrations sur la frontière et non pas dans le domaine tout entier représente un avantage considérable en terme de temps de calcul. C'est pourquoi il est raisonnable de penser qu'une optimisation rapide du code serait à même de fournir d'excellents résultats. Cette problématique fait actuellement l'objet d'une collaboration avec Jean-Paul Marmorat (Centre de Mathématiques Appliquées de l'école des Mines de Paris).
  - Nous faisons actuellement l'hypothèse que tous les capteurs effectuant des mesures se situent exactement sur la frontière extérieure de Tore Supra. Même si cette hypothèse ne semble pas avoir eu une grande influence sur la qualité des résultats, il conviendrait de s'en défaire en réalisant une première interpolation des mesures sur un contour qui ne serait plus un cercle mais qui passerait exactement par les lieux de mesure. Certes, nous perdrons certains avantages d'un point de vue algorithmique puisque par exemple il ne serait plus possible de définir le foyer du système de coordonnées toroïdales de telle façon que la frontière extérieure corresponde à une courbe de niveau de  $\tau$ . Toutefois redéfinir le contour extérieur d'intégration serait un premier pas vers l'utilisation du code pour d'autres tokamaks tels que JET, et plus prospectivement ITER pour lesquels la frontière extérieure n'est plus circulaire. L'implémentation de cette partie fait l'objet d'une collaboration avec Jacques Blum et Blaise Faugeras (Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné de l'Université de Nice).
  - Une question délicate consiste à choisir de façon appropriée le foyer du système de coordonnées toroïdales. D'un point de vue théorique, tant que le foyer est placé au
-

sein du plasma et que le nombre d'harmoniques toroïdales utilisé est suffisamment important, aucun obstacle ne vient s'opposer à la résolution du problème extrémal borné, et ce quelle que soit l'erreur d'approximation visée. Néanmoins, d'un point de vue numérique il en est tout autrement. En effet, utiliser un nombre trop important d'harmoniques toroïdales augmente considérablement le conditionnement du problème extrémal borné. Par ailleurs, même si ce conditionnement était plus faible, seul un nombre restreint d'harmoniques toroïdales pourrait être envisagé pour répondre aux futures contraintes de performance en temps. Pour toutes ces raisons, le choix du foyer constitue un enjeu majeur. Actuellement, le foyer utilisé est adapté à des configurations où le plasma est en mode stabilisé dans la mesure où il n'est pas loin du véritable centre magnétique du plasma. Il serait intéressant de tester le comportement de notre algorithme de résolution sur des plasmas dont la frontière se rapproche de ce foyer. Pour ce qui est de l'évaluation de la position du centre magnétique, une piste envisageable reste la méthode décrite dans [11].

- Les développements théoriques ayant mené à l'écriture du code sont actuellement valides pour des frontières plasma de régularité  $C^1$ . Néanmoins, lorsque le plasma présente un point  $X$  (par exemple lors des phases de disruption dans Tore Supra ou bien encore dans lors des phases stabilisées dans JET et ITER), ces conditions ne sont plus remplies. Dès lors, l'intérêt que nous portons à la généralisation des résultats de ce manuscrit aux classes de Smirnov (voir ci-dessus) trouverait ici une application directe.

Mentionnons par ailleurs que l'idée d'implémenter un code faisant évoluer la frontière plasma en résolvant successivement plusieurs problèmes extrémaux bornés est issue de plusieurs discussions avec Yannick Privat (CNRS et ENS Cachan antenne Bretagne). Ces dernières ont par ailleurs suscité notre intérêt quant à l'utilisation d'outils de l'Optimisation de Forme pour retrouver la frontière plasma. Ainsi, le premier travail [73] mené en parallèle de cette thèse a consisté à chercher une solution du système de Dirichlet-Neumann suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega_p \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_e \\ \partial_n u = u_1 & \text{sur } \Gamma_e \\ u = c & \text{sur } \Gamma_p \end{array} \right. ,$$

où les données  $u_0, u_1$  sont obtenues ici aussi par interpolation des mesures magnétiques, la constante  $c$  correspond à la ligne de niveau du flux magnétique poloïdal (pouvant par exemple être fournie par la résolution du problème extrémal borné) et enfin  $\Omega$  est le domaine compris entre la frontière extérieure  $\Gamma_e$  et la frontière plasma inconnue  $\Gamma_p$ . L'étude de ce problème a été envisagée au travers de la minimisation de la fonctionnelle

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} J(\Omega) = \int_{\Gamma_e} (u - u_0)^2 ds ,$$

où  $\mathcal{O}_{ad}$  désigne un ensemble de formes admissibles. Des résultats d'existence et d'optimalité ont été prouvés, ce qui a permis l'écriture d'un algorithme de résolution rapide ayant fourni de bons résultats quant à la reconstruction de la frontière plasma. En collaboration avec Yannick Privat, la minimisation d'un critère plus général inspiré de la formulation

du problème extrémal borné est actuellement à l'étude. La question posée est la suivante : existe-t-il une solution (unique) au problème

$$\min_{\Omega \in \mathcal{O}_{ad}} \min_{c \in \mathbb{R}} \min_{\substack{g_0 \in H^2_\nu(\Omega) \\ Re g_0 = c}} \|F_d - g_0\|_{L^2(\Gamma_e)} ?$$

Lorsque  $\Omega$  et  $c$  sont fixés, il s'agit d'un problème extrémal borné (avec une contrainte plus forte que celle abordée dans ce manuscrit) dont la résolution est à l'étude. Cette dernière achevée, vient ensuite la question de la minimisation sur le paramètre  $c$  ce qui n'est pas un obstacle étant donné que l'application  $c \mapsto \min_{\substack{g_0 \in H^2_\nu(\Omega) \\ Re g_0 = c}} \|F_d - g_0\|_{L^2(\Gamma_e)}$  est coercive.

Reste alors à optimiser sur la forme du domaine. Sans avoir pour l'instant dégagé les hypothèses qui permettraient d'assurer existence et optimalité, nous sommes actuellement en mesure de calculer la dérivée de forme de ce critère au moyen d'un état adjoint lui-même solution d'une équation de type Beltrami conjuguée.

Terminons en notant qu'il serait aussi intéressant d'étudier le problème de l'existence de courbes de niveau fermées des solutions de l'équation de diffusion à partir de données de Cauchy disponibles sur une partie de la frontière d'un domaine  $\Omega$  borné. Il s'agit d'une question difficile, à laquelle il n'existe pas à notre connaissance de réponse, ne serait-ce partielle. En conséquence, il nous est impossible actuellement de savoir à l'avance si les données mesurées correspondent bel et bien au fait qu'un plasma puisse exister au sein de la machine. Il est bien entendu possible de répliquer à cette dernière remarque que les expériences menées sur Tore Supra correspondent toujours à la création d'un plasma. Néanmoins, si au moins un des capteurs venait à fournir une mesure aberrante entraînant que les techniques de résolution du problème inverse soient incapables de détecter des courbes de niveau fermée du flux, il serait utile de pouvoir le diagnostiquer à partir de la lecture seule de ces mesures.

## Sixième partie

### Annexes

---



## Annexe A

# Fonctions de Legendre associées et harmoniques toroïdales

Les harmoniques toroïdales sont un cas particulier des fonctions de Legendre associées. Commençons par donner la définition de ces dernières [105].

**Definition A.1** *Les fonctions de Legendre associées d'ordre  $\nu \in \mathbb{R}$  et de degré  $m \in \mathbb{N}$  sont les solutions de l'équation différentielle*

$$(1 - z^2)u'' - 2zu' + \left[ \nu(\nu + 1) - \frac{m^2}{1 - z^2} \right] u = 0. \quad (\text{A.1})$$

*Elles sont notées  $P_\nu^m$  et  $Q_\nu^m$  et sont qualifiées de première et deuxième espèce respectivement. Elles sont par ailleurs définies par les deux relations de récurrence*

$$\begin{cases} P_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_\nu(z)}{dz^m} \\ Q_\nu^m(z) = (z^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m Q_\nu(z)}{dz^m} \end{cases}$$

*où  $P_\nu$  et  $Q_\nu$  désignent les fonctions de Legendre classiques solutions de l'équation différentielle (A.1) pour  $m = 0$ .*

Les fonctions de Legendre associées sont des fonctions analytiques sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, -1]$  pour celles de première espèce et sur  $\mathbb{C} \setminus ]-\infty, 1]$  pour celles de deuxième espèce. Ces fonctions constituent une famille de fonctions engendrant un espace dense de solutions à l'équation (A.1). Elles permettent de définir les harmoniques toroïdales avec la

**Definition A.2** *Les fonctions toroïdales  $P_{j-\frac{1}{2}}^m$  et  $Q_{j-\frac{1}{2}}^m$ , encore appelées harmoniques toroïdales, sont les fonctions de Legendre associées d'ordre demi-entier ( $j \in \mathbb{Z}$ ), de degré  $m \in \mathbb{N}$  et d'argument  $z = \cosh \tau$  où  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ .*

Nous avons restreint cette définition aux cas où  $m \in \mathbb{N}$ . Il serait en fait possible d'étendre cette dernière aux cas où  $m \in \mathbb{Z}$ , mais les formules [3, 8.2.5 et 8.2.6] nous

montrent que les fonctions de Legendre associées d'indices négatifs s'expriment comme combinaisons linéaires de celles d'indices positifs.

Nous rappelons maintenant plusieurs propriétés des fonctions de Legendre associées d'ordre  $\nu$  demi-entiers et de degré  $m$  entiers ayant pour argument  $\cosh \tau$  ( $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ ), toutes issues des ouvrages [3, 67, 105]. Précisons que la plupart de ces relations sont partagées par les fonctions toroïdales de première espèce et celles de deuxième espèce. **C'est pourquoi nous faisons usage de la notation  $\mathcal{L}$  pour les désigner lorsqu'il conviendra de ne pas les distinguer. L'argument  $\cosh \tau$  étant identique pour toutes ces fonctions, nous prenons la liberté de l'omettre dans les formules qui suivent sans risque de confusion.**

Par ailleurs, certaines relations valables pour des ordres demi-entiers le restent pour des ordres réels  $\nu \neq -1, -2, \dots$ . Lorsque ce sera le cas, nous faisons le choix d'exposer les propriétés dans le cadre le plus général.

### Représentations au moyen de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1$

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  et  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$P_{j-\frac{1}{2}}^m = \frac{2^{2m}}{\Gamma(1-m)} (1 - e^{-2\tau})^{-m} e^{-(j+\frac{1}{2})\tau} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} - m, \frac{1}{2} + j - m; 1 - 2m; 1 - e^{-2\tau}\right) \quad (\text{A.2})$$

et

$$Q_{j-\frac{1}{2}}^m = \frac{(-1)^m \sqrt{\pi} \Gamma(j + m + \frac{1}{2})}{\Gamma(1 + j)} (1 - e^{-2\tau})^m e^{-(j+\frac{1}{2})\tau} {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + m, \frac{1}{2} + j + m; 1 + j; e^{-2\tau}\right) \quad (\text{A.3})$$

### Représentations intégrales

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  et  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$P_{j-\frac{1}{2}}^m = \frac{\Gamma(j + m + \frac{1}{2})(\sinh \tau)^m}{\Gamma(j - m + \frac{1}{2})2^m \sqrt{\pi} \Gamma(m + \frac{1}{2})} \int_0^\pi \frac{(\sin \psi)^{2m}}{(\cosh \tau + \sinh \tau \cos \psi)^{j+m+\frac{1}{2}}} d\psi \quad (\text{A.4})$$

et

$$Q_{j-\frac{1}{2}}^m = (-1)^m \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\Gamma(j - m + \frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\cosh(m\psi)}{(\cosh \tau + \sinh \tau \cosh \psi)^{j+\frac{1}{2}}} d\psi \quad (\text{A.5})$$

### Estimations asymptotiques

Lorsque  $j \rightarrow +\infty$ , nous avons les représentations asymptotiques suivantes

$$P_{j-\frac{1}{2}}^m = \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2})}{\Gamma(j + \frac{1}{2} + m)(2\pi(j + \frac{1}{2}) \sinh \tau)^{1/2}} e^{j\tau} [1 + O(j^{-1})] \quad (\text{A.6})$$

et

$$Q_{j-\frac{1}{2}}^m = (-1)^m \sqrt{\frac{\pi}{2 \sinh \tau}} \frac{\Gamma(j + \frac{1}{2} + m)}{\Gamma(j + \frac{1}{2})} e^{-j\tau} [1 + O(j^{-1})] \quad (\text{A.7})$$

### Relations de récurrence

#### – Relation de symétrie sur l'ordre

$$P_{-\nu-1}^m = P_{\nu}^m \quad (\text{A.8})$$

et

$$\sin(\nu\pi) [Q_{\nu}^m - Q_{-\nu-1}^m] = \pi \cos(\nu\pi) P_{\nu}^m \quad (\text{A.9})$$

#### – Relation de dérivation

$$\frac{d\mathcal{L}_{\nu}^m}{d\tau} = \sinh \tau (\mathcal{L}_{\nu}^m)' = \mathcal{L}_{\nu}^{m+1} + m \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{\nu}^m \quad (\text{A.10})$$

#### – Relations sur l'ordre et le degré

$$\mathcal{L}_{\nu}^1 = -\frac{\nu}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{\nu-1}^0 + \nu \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{\nu}^0 \quad (\text{A.11})$$

$$\mathcal{L}_{\nu+1}^{m+1} - \mathcal{L}_{\nu-1}^{m+1} = \sinh \tau (2\nu + 1) \mathcal{L}_{\nu}^m \quad (\text{A.12})$$

#### – Relation pour trois ordres consécutifs

$$(\nu - m + 1) \mathcal{L}_{\nu+1}^m - (2\nu + 1) \cosh \tau \mathcal{L}_{\nu}^m + (\nu + m) \mathcal{L}_{\nu-1}^m = 0 \quad (\text{A.13})$$

#### – Relation pour trois degrés consécutifs

$$\mathcal{L}_{\nu}^{m+2} + 2(m + 1) \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{\nu}^{m+1} - (\nu - m)(\nu + m + 1) \mathcal{L}_{\nu}^m = 0 \quad (\text{A.14})$$

### Formule généralisée de Heine [58, 87]

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  et  $0 \leq \eta \leq 2\pi$ ,

$$(\cosh \tau - \cos \eta)^{n-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(\cosh^2 \tau - 1)^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2} - n)} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma(j - n + \frac{1}{2})}{\Gamma(j + n + \frac{1}{2})} Q_{j-\frac{1}{2}}^n(\cosh \tau) e^{ij\eta} \quad (\text{A.15})$$

Appliquée successivement en  $n = 0$  et  $n = 1$ , on obtient

$$\sum_{j>0} 2Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) + Q_{-\frac{1}{2}}^0 = \frac{\pi}{\sqrt{2(\cosh \tau - \cos \eta)}} \quad (\text{A.16})$$

et

$$\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} = \frac{\sinh \tau}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{j>0} \frac{2}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos(j\eta) - 4 Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right] \quad (\text{A.17})$$

## Annexe B

### Intégrales elliptiques

Les intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèce peuvent être représentées de diverses manières. Nous adoptons ici la forme de Jacobi ( qui est par ailleurs celle implémentée dans le logiciel de calcul Maple). Cette définition des intégrales elliptiques est bien entendu compatible avec la représentation usuelle donnée par Legendre. Ajoutons que nous nous restreignons au cas où ces intégrales sont réelles.

Lorsqu'aucune référence n'est mentionnée, toutes les définitions et propriétés exhibées dans cette annexe sont issues de [3, 40].

**Definition B.1** *Pour tout  $x \in [-1, 1]$  et tout  $k \in (-1, 1)$ , les intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèce sont respectivement définies par*

$$F(x; k) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \quad (\text{B.1})$$

et

$$E(x; k) = \int_0^x \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt . \quad (\text{B.2})$$

**Remarque B.1** *Comme mentionné dans l'introduction de cette annexe, il est possible d'écrire les intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèce sous la forme suivante*

$$\mathcal{F}(\phi; m) = \int_0^{\sin \phi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-mt^2}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\phi; m) = \int_0^{\sin \phi} \sqrt{\frac{1-mt^2}{1-t^2}} dt . \quad (\text{B.3})$$

pour  $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $m \in [0, 1)$ . On parle alors de forme de Legendre. Remarquons que ces deux dernières écritures sont en correspondance avec (B.1) et (B.2) pour  $\phi = \arcsin x$  et  $m = k^2$ .

Les formules intégrales (B.1) et (B.2) montrent immédiatement la propriété d'imparité suivante

$$F(x; k) = -F(-x; k) \quad \text{et} \quad E(x; k) = -E(-x; k) , \quad x \in [-1, 1] . \quad (\text{B.4})$$

Il est possible de définir à partir des intégrales elliptiques incomplètes de nouvelles intégrales correspondant à des valeurs particulières de l'argument  $x$ . On a la

**Definition B.2** *Pour tout  $k \in (-1, 1)$ , les intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce sont définies respectivement par*

$$K(k) = F(1; k) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} \quad (\text{B.5})$$

et

$$E(k) = E(1; k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt. \quad (\text{B.6})$$

Enfin, pour être complet, rajoutons qu'il est possible de définir les intégrales elliptiques complètes complémentaires de la façon suivante.

**Definition B.3** *Pour tout  $k \in (-1, 1)$ , les intégrales elliptiques complètes complémentaires de première et deuxième espèce sont définies respectivement par*

$$K'(k) = K(\sqrt{1-k^2}) \quad (\text{B.7})$$

et

$$E'(k) = E(\sqrt{1-k^2}). \quad (\text{B.8})$$

Donnons maintenant quelques propriétés des fonctions elliptiques que nous venons de définir. Nous commençons avec l'intégrale elliptique complète de première espèce,  $K$ , qui a la particularité d'être rattachée à la moyenne arithmético-géométrique. Rappelons dans un premier temps la définition de cette dernière

**Definition B.4** *Soient  $a, b \in \mathbb{R}^+$ . On appelle suites arithmético-géométriques associées à  $a$  et  $b$  les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définies par*

$$\begin{cases} a_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \end{cases}.$$

Il est alors facile de prouver que les suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies dans  $\mathbb{R}$  et qu'elles convergent vers la même limite, notée  $M(a, b)$  et appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$ . Cette dernière possède la propriété suivante

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+, aM\left(1, \frac{b}{a}\right) = M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right). \quad (\text{B.9})$$

On peut dès lors donner plusieurs propriétés des intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce.

### Relation entre $K$ et $M$

$$K\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right) = \frac{\pi}{2M\left(1, \frac{b}{a}\right)}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+ \quad (\text{B.10})$$

### Relation entre $K$ et $E$

$$E(k) = (1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - k'K(k), \quad k \in (-1, 1) \quad (\text{B.11})$$

avec  $k' = \sqrt{1-k^2}$ .

### Relation de Legendre

$$(EK' + E'K - KK')(k) = \frac{\pi}{2}, \quad k \in (-1, 1) \quad (\text{B.12})$$

### Relations entre $K, E$ et les fonctions toroidales

Pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ ,

$$P_{-\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K\left(\sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}}\right) \quad (\text{B.13})$$

$$P_{\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} E\left(\sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}}\right) \quad (\text{B.14})$$

$$Q_{-\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau) = \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) \quad (\text{B.15})$$

$$Q_{\frac{1}{2}}^0(\cosh \tau) = \cosh \tau \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) - \sqrt{2(\cosh \tau + 1)} E\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) \quad (\text{B.16})$$

### Développement en séries de Fourier

Nous donnons ici les développements en séries de Fourier des intégrales elliptiques incomplètes de première et deuxième espèce exprimées sous la forme de Legendre [61]. Pour  $(\phi, m) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, 1)$ , on a

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{F}(\phi; m) \\ \mathcal{E}(\phi; m) \end{array} \right\} = \frac{2}{\pi} \phi \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(m) \\ \mathcal{E}(m) \end{array} \right. + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} I_n(m) \sin(2n\phi), \quad (\text{B.17})$$

où  $\mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(\frac{\pi}{2}; m)$  et  $\mathcal{E}(m) = \mathcal{E}(\frac{\pi}{2}; m)$  représentent les intégrales elliptiques complètes sous la forme de Legendre. On a aussi que

$$I_n(m) = (-1)^n \frac{\pi}{2n} \frac{(1/2)_n}{(1)_n} \left( \frac{k}{2n} \right)^{2n} {}_2F_1\left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}; 2n + 1; m^2\right), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

les notations  $(\alpha)_n$  et  ${}_2F_1$  faisant référence respectivement au symbole de Pochhammer [3] et à la fonction hypergéométrique (voir Annexe A).

## Annexe C

### Preuve du Lemme 7.2.3.1

Comme le laisse supposer la formulation du Lemme 7.2.3.1, la preuve sera découpée en deux parties selon que l'on intègre le système (7.26) à partir de la familles de fonctions (7.19) ou bien (7.20).

#### Résolution du système (7.26) pour la famille de fonctions (7.19)

Posons dans un premier temps

$$u^1 = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 e^{ik\eta}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.1})$$

Nous allons chercher les couples  $(u^1, v^1)$  solutions du système (7.26). Nous allons tout d'abord nous restreindre au cas  $k \geq 1$  pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite. D'après le Théorème 7.2.2.1, et plus particulièrement la formulation (7.24), la recherche d'une solution  $v^1$  associée au système (7.26) doit se faire sous la forme

$$v^1 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right] + C, \quad (\text{C.2})$$

où  $C = C_1 + iC_2$  avec  $C_1, C_2$  des constantes réelles. Précisons que comme nous avons fait le choix de chercher des solutions sous forme complexe (pour des raisons d'écriture et de facilité de calcul), les coefficients  $\beta_j^+, \beta_j^-$  pour  $j \in \mathbb{N}^*$  et  $d$  sont *a priori* complexes. Un premier calcul à partir de la forme de (C.1) donne

$$\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \frac{\partial u^1}{\partial \eta} = \left[ -\frac{\sin \eta}{2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} + ik\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \right] e^{ik\eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^1.$$

De même, au moyen de (C.2) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^1}{\partial \tau} = & \frac{\sinh \tau}{2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right] \\ & + \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right]. \end{aligned}$$

L'écriture de la première relation du système (7.26) mène donc, après multiplication par la quantité  $2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}$  (qui n'est pas nulle puisque  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ ), à

$$\begin{aligned} (-\sin \eta + 2ik(\cosh \tau - \cos \eta)) e^{ik\eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 &= \sinh \tau \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right] \\ &+ 2(\cosh \tau - \cos \eta) \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right], \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

le membre de gauche de cette dernière équation s'écrivant encore

$$\begin{aligned} (-\sin \eta + 2ik(\cosh \tau - \cos \eta)) e^{ik\eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 &= i \left[ e^{i(k+1)\eta} \left( \frac{1}{2} - k \right) - e^{i(k-1)\eta} \left( \frac{1}{2} + k \right) \right. \\ &\left. + 2k \cosh \tau e^{ik\eta} \right] Q_{k-\frac{1}{2}}^1. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

L'objectif est dorénavant d'identifier les coefficients  $\beta_j^+, \beta_j^-$  par égalité des membres de droites des expressions (C.3) et (C.4). Ceci va nous mener à résoudre un système d'équations, qui sera différent selon que  $k = 1, 2$  ou bien encore  $k \geq 3$ . Traitons dans un premier temps ce dernier cas. On travaille désormais à  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  fixé si bien que l'identification des coefficients de Fourier d'indices positifs entre les membres de droite des expressions (C.3) et (C.4) mène aux relations suivantes :

- $\underline{e^{i(k-1)\eta}}$

$$\beta_{k-1}^+ \sinh \tau Q_{k-\frac{3}{2}}^0 + 2\beta_{k-1}^+ \cosh \tau Q_{k-\frac{3}{2}}^1 - \beta_{k-2}^+ Q_{k-\frac{5}{2}}^1 - \beta_k^+ Q_{k-\frac{1}{2}}^1 = -i \left( k + \frac{1}{2} \right) Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \quad (\text{C.5})$$

- $\underline{e^{ik\eta}}$

$$\beta_k^+ \sinh \tau Q_{k-\frac{1}{2}}^0 + 2\beta_k^+ \cosh \tau Q_{k-\frac{1}{2}}^1 - \beta_{k-1}^+ Q_{k-\frac{3}{2}}^1 - \beta_{k+1}^+ Q_{k+\frac{1}{2}}^1 = 2ik \cosh \tau Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \quad (\text{C.6})$$

- $\underline{e^{i(k+1)\eta}}$

$$\beta_{k+1}^+ \sinh \tau Q_{k+\frac{1}{2}}^0 + 2\beta_{k+1}^+ \cosh \tau Q_{k+\frac{1}{2}}^1 - \beta_k^+ Q_{k-\frac{1}{2}}^1 - \beta_{k+2}^+ Q_{k+\frac{3}{2}}^1 = i \left( \frac{1}{2} - k \right) Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \quad (\text{C.7})$$

- $\underline{e^{i\eta}}$

$$\beta_1^+ \sinh \tau Q_{\frac{1}{2}}^0 + 2\beta_1^+ \cosh \tau Q_{\frac{1}{2}}^1 - \beta_2^+ Q_{\frac{3}{2}}^1 - d Q_{-\frac{1}{2}}^1 = 0 \quad (\text{C.8})$$

- $e^{i0}$

$$d \sinh \tau Q_{-\frac{1}{2}}^0 + 2d \cosh \tau Q_{-\frac{1}{2}}^1 - \beta_1^+ Q_{\frac{1}{2}}^1 - \beta_1^- Q_{\frac{1}{2}}^1 = 0 \quad (\text{C.9})$$

- $e^{ijn}$  ( $1 < j < k - 1$  et  $j > k + 1$ )

$$\beta_j^+ \sinh \tau Q_{j-\frac{1}{2}}^0 + 2\beta_j^+ \cosh \tau Q_{j-\frac{1}{2}}^1 - \beta_{j-1}^+ Q_{j-\frac{3}{2}}^1 - \beta_{j+1}^+ Q_{j+\frac{1}{2}}^1 = 0 \quad (\text{C.10})$$

Pour identifier les coefficients  $(\beta_j^\pm)_{j \in \mathbb{N}^*}$ , nous nous servons uniquement des relations (A.11), (A.12) et (A.13). Par exemple, pour l'équation (C.5), on a tout d'abord avec (A.12) écrite en  $\nu = k - \frac{3}{2}$  que

$$\frac{\beta_{k-1}^+}{2k-2} \left[ Q_{k-\frac{1}{2}}^1 - Q_{k-\frac{5}{2}}^1 \right] + 2\beta_{k-1}^+ \cosh \tau Q_{k-\frac{3}{2}}^1 - \beta_{k-2}^+ Q_{k-\frac{5}{2}}^1 - \beta_k^+ Q_{k-\frac{1}{2}}^1 = -i \left( k + \frac{1}{2} \right) Q_{k-\frac{1}{2}}^1,$$

soit encore

$$\left[ \frac{\beta_{k-1}^+}{2k-2} - \beta_k^+ + i \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] Q_{k-\frac{1}{2}}^1 + 2\beta_{k-1}^+ \cosh \tau Q_{k-\frac{3}{2}}^1 - \left[ \frac{\beta_{k-1}^+}{2k-2} + \beta_{k-2}^+ \right] Q_{k-\frac{5}{2}}^1 = 0. \quad (\text{C.11})$$

La relation (A.13) s'écrit quant à elle pour  $\nu = k - \frac{3}{2}$

$$\left( k - \frac{3}{2} \right) Q_{k-\frac{1}{2}}^1 - (2k-2) \cosh \tau Q_{k-\frac{3}{2}}^1 + \left( k - \frac{1}{2} \right) Q_{k-\frac{5}{2}}^1 = 0.$$

En multipliant cette dernière expression par  $\frac{2\beta_{k-1}^+}{2k-2}$  et en la soustrayant à (C.11), il reste que

$$\left[ \beta_{k-1}^+ - \beta_k^+ + i \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] Q_{k-\frac{1}{2}}^1 + \left[ \beta_{k-1}^+ - \beta_{k-2}^+ \right] Q_{k-\frac{5}{2}}^1 = 0.$$

Comme les harmoniques toroïdales sont indépendantes les unes des autres (voir Annexe A), on conclut aux relations suivantes

$$\begin{cases} \beta_k^+ &= \beta_{k-1}^+ + i \left( k + \frac{1}{2} \right) \\ \beta_{k-1}^+ &= \beta_{k-2}^+ \end{cases}.$$

Les relations (C.6) à (C.10) s'examinent au moyen des mêmes techniques de calcul. C'est pourquoi nous nous contentons d'énoncer les résultats auxquels nous parvenons. Ainsi la relation (C.9) conduit à

$$d = \frac{\beta_1^+ + \beta_1^-}{2}.$$

Comme la relation (C.8) fournit

$$\beta_1^+ = \beta_2^+ = d ,$$

on a finalement que  $\beta_1^- = d$ . Observons maintenant que la relation (C.10) donne

$$\beta_j^+ = \beta_{j+1}^+ , \quad j \in \{1, \dots, k-3\} \quad \text{et} \quad \beta_j^+ = \beta_{j+1}^+ , \quad j \geq k+1 .$$

Les autres relations terminent de donner les coefficients manquants. En effet, avec (C.5) on a que

$$\beta_k^+ = \beta_{k-1}^+ + i \left( k + \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \beta_{k-1}^+ = \beta_{k-2}^+ ,$$

et enfin avec (C.6)

$$\beta_k^+ = \beta_{k+1}^+ - i \left( \frac{1}{2} - k \right) .$$

La relation (C.7) n'apporte pas quant à elle d'informations supplémentaires. Avant de conclure, il nous reste à déterminer coefficients  $(\beta_j^-)_{j \geq 1}$ . Il suffit pour cela d'écrire l'identification des coefficients de Fourier d'indices négatifs entre les membres de droite des expressions (C.3) et (C.4). On arrive à une équation identique à (C.10) pour les coefficients de  $(e^{-ij\eta})_{j \geq 1}$  (ce qui est normal par conjugaison du membre de droite dans (C.3)). On obtient finalement que

$$\beta_j^- = \beta_{j+1}^- , \quad j \geq 1 .$$

En définitive, les coefficients du développement de  $v^1$  vérifient

$$\begin{cases} \beta_j^- = d , & j \geq 1 \\ \beta_j^+ = d , & j \in \{1, \dots, k-1\} \\ \beta_k^+ = d + i \left( k + \frac{1}{2} \right) \\ \beta_j^+ = d + i , & j \geq k+1 \end{cases} .$$

On réinjecte ces coefficients dans (C.2), si bien qu'en réordonnant tous les termes, on a pour  $k \geq 3$  :

$$v^1 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ d \left( \sum_{j>0} 2Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) + Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right) + i \left( k + \frac{1}{2} \right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 e^{ik\eta} + i \sum_{j>k} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 e^{ij\eta} \right] + C . \quad (\text{C.12})$$

Rappelons que pour l'instant seul le cas  $k \geq 3$  a été envisagé. Les cas  $k = 1, 2$  se traitent de la même manière et aboutissent finalement au même résultat (nous n'exposons pas ces calculs étant donné leur similarité avec les précédents).

L'expression (C.12) peut toutefois être simplifiée. En effet, au moyen de la formule de Heine (A.16), il reste pour tout  $k \geq 1$

$$v^1 = i\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 e^{ik\eta} + \sum_{j>k} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 e^{ij\eta} \right] + C' ,$$

avec  $C' = C + \frac{\pi d}{\sqrt{2}}$ .

Il suffit maintenant de passer aux parties réelles et imaginaires dans le système (7.26) pour obtenir les couples de solutions suivants, valables pour  $k \geq 1$  :

– Si  $u_{k,c}^{1,int} = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos(k\eta)$  alors

$$v_{k,c}^{1,int} = -\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \sin(k\eta) + \sum_{j>k} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) \right] + C_{k,c}^{1,int} \quad (\text{C.13})$$

– Si  $u_{k,s}^{1,int} = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta)$  alors

$$v_{k,s}^{1,int} = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) + \sum_{j>k} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^{1,int} \quad (\text{C.14})$$

avec  $C_{k,c}^{1,int}$  et  $C_{k,s}^{1,int}$  des constantes réelles. Remarquons que nous avons renommé les solutions en référence au domaine où ces dernières sont régulières. On rappelle en effet que les fonctions de Legendre de deuxième espèce sont singulières sur l'axe  $x = 0$  et régulières en particulier à l'intérieur de tout cercle d'équation  $\tau = \text{constante}$ .

Regardons d'un peu plus près l'expression (C.14). Il est possible de transformer cette dernière afin de ne plus faire intervenir que des sommes finies. En effet, pour  $k \geq 2$ , et en faisant à nouveau appel à la formule de Heine, on obtient

$$\begin{aligned} v_{k,s}^{1,int} &= \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) + \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) - \sum_{j>0}^k Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^{1,int} \\ &= \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}(\cosh \tau - \cos \eta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \sum_{j>0}^k Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^{1,int} \\ &= \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) + \frac{\pi}{2\sqrt{2}(\cosh \tau - \cos \eta)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \sum_{j>0}^{k-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^{1,int} \\ &= \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) - \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \sum_{j>0}^{k-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + C_{k,s}^{1,int} , \end{aligned}$$

si bien que

$$v_{k,s}^{1,int} = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left(k - \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta) - \frac{1}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \sum_{j>0}^{k-1} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \cos(j\eta) \right] + C_{k,s}^{1,int} \quad (\text{C.15})$$

où la dernière occurrence de  $C_{k,s}^{1,int}$  fait référence à une constante comprenant tous les termes constants issus du calcul. Notons malgré tout que, pour l'instant, la formule (C.15) n'est vraie que pour  $k \geq 2$ . Il est toutefois possible de vérifier que celle-ci reste vraie pour  $k = 1$  par substitution dans la première égalité du système de Cauchy-Riemann (7.26), identification des coefficients de Fourier ainsi qu'en adoptant la convention que le terme écrit sous forme de série dans (C.15) est nul pour  $k = 1$ .

**Remarque C.1** *Il convient d'observer que jusqu'à présent, seuls des couples  $(u^1, v^1)$  solutions de la première égalité du système de Cauchy-Riemann (7.26) ont été cherchés. Il est cependant possible de s'assurer que ces derniers sont aussi solutions de la deuxième égalité du système (7.26) sans pour autant refaire tous les calculs précédents. En effet, il est clair que si de tels couples vérifient à la fois les équations (1.2) et (1.5) ainsi qu'une des égalités du système (7.26), alors l'égalité restante est automatiquement satisfaite. Or nous nous trouvons exactement dans cette situation dans la mesure où les fonctions  $u^1$  et  $v^1$  envisagées sont toutes des combinaisons linéaires de solutions élémentaires aux équations de conductivité (1.2) et (1.5) respectivement (voir Section 7.2.2). Cette constatation nous épargnera dans la suite de la preuve de vérifier que les formules trouvées vérifient bien la deuxième relation de (7.26) (ceci sera encore vrai dans la seconde partie de la preuve et nous ne le mentionnerons pas).*

Maintenant que le cas du couple  $(u_{k,s}^{1,int}, v_{k,s}^{1,int})$  pour  $k \geq 1$  est réglé, intéressons nous à la relation (C.13). Nous allons aussi transformer cette dernière afin que seules des sommes finies interviennent. On remarque dans un premier temps que la relation (C.13) reste vraie pour  $k = 0$ . Ceci se justifie à nouveau au moyen de la relation dans la première égalité de (7.26) puis par identification des coefficients de Fourier. Pour  $k \geq 0$  on a alors

$$\begin{aligned} v_{k+1,c}^{1,int} - v_{k,c}^{1,int} &= -\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ -\left(k + \frac{1}{2}\right) Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \sin(k\eta) - \sum_{j>k} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) \right. \\ &\quad \left. + \left(k + \frac{3}{2}\right) Q_{k+\frac{1}{2}}^0 \sin((k+1)\eta) + \sum_{j>k+1} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) \right] + C_{k+1,c}^{1,int} - C_{k,c}^{1,int} \\ &= -\left(k + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ Q_{k+\frac{1}{2}}^0 \sin((k+1)\eta) - Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \sin(k\eta) \right] + \mathfrak{C}_{k+1,c}^{1,int}, \end{aligned}$$

avec  $\mathfrak{C}_{k+1,c}^{1,int} = C_{k+1,c}^{1,int} - C_{k,c}^{1,int}$  une constante réelle. On peut donc écrire pour  $k \geq 0$

$$v_{k+1,c}^{1,int} = -\left(k + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ Q_{k+\frac{1}{2}}^0 \sin((k+1)\eta) - Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \sin(k\eta) \right] + v_{k,c}^{1,int} + \mathfrak{C}_{k+1,c}^{1,int}.$$

Avec une récurrence immédiate et en posant  $v_{0,c,0}^1 = v_{0,c}^1 - C_{0,c}^1$ , il reste finalement l'expression suivante valide pour  $k \geq 0$

$$v_{k+1,c}^{1,int} = -\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \left[ \left( k + \frac{1}{2} \right) Q_{k+\frac{1}{2}}^0 \sin((k+1)\eta) - \sum_{j>0}^k Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) \right] + v_{0,c,0}^{1,int} + C_{k+1,c}^{1,int}, \quad (\text{C.16})$$

où la constante  $C_{k+1,c}^{1,int}$  est bien la même que celle intervenant dans (C.13). On est donc parvenu à une représentation compacte de la fonction  $v_{k+1,c}^{1,int}$  ne faisant intervenir qu'un nombre fini de termes. Cependant il reste que l'expression (C.16) n'est pas entièrement déterminée dans le mesure où nous ne disposons pas pour l'instant d'une formulation explicite de la fonction  $v_{0,c}^{1,int}$ . Pour y remédier, nous allons faire appel à la deuxième équation de Cauchy-Riemann du système (7.26). On calcule alors dans un premier temps

$$\frac{\partial u_{0,c}^{1,int}}{\partial \tau} = a \left[ \left( \frac{\cosh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} \right) Q_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \frac{d}{d\tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right].$$

Or, avec (A.10) et (A.14), on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1 &= Q_{-\frac{1}{2}}^2 + \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\frac{1}{4} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - 2 \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \\ &= -\frac{1}{4} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} Q_{-\frac{1}{2}}^1, \end{aligned}$$

ce qui finalement nous permet d'écrire

$$\frac{\partial v_{0,c}^{1,int}}{\partial \eta} = -\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{a \sinh \tau} \frac{\partial u_{0,c}^{1,int}}{\partial \tau} = \frac{\sinh \tau}{2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}}{4} Q_{-\frac{1}{2}}^0. \quad (\text{C.17})$$

Cette dernière expression présente l'avantage de s'intégrer facilement par rapport à la variable  $\eta$ . En effet, la relation (B.1) montre que l'intégrale elliptique incomplète de première espèce  $F$  vérifie

$$F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) = \int_0^{\cos \frac{\eta}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1 - \frac{2t^2}{\cosh \tau + 1}}},$$

soit en effectuant le changement de variable  $t = \cos \frac{\alpha}{2}$ ,

$$\begin{aligned} F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) &= -\int_{\pi}^{\eta} \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cosh \tau + 1}}{2\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\cosh \tau + 1 - 2\cos^2 \frac{\alpha}{2}}} d\alpha \\ &= -\frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} \int_{\pi}^{\eta} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \alpha}}. \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction  $\eta \mapsto -\frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} F\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right)$  est la primitive s'annulant en  $\pi$  de la fonction  $\alpha \mapsto \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \alpha}}$ . On peut donc écrire que

$$\int \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} d\eta = -\frac{2}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} F\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) + C_F. \quad (\text{C.18})$$

où  $C_F$  est une constante réelle. On prouve de la même manière avec (B.2) que l'intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce  $E$  vérifie

$$\int \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} d\eta = -2\sqrt{\cosh \tau + 1} E\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) + C_E, \quad (\text{C.19})$$

avec  $C_E$  qui est toujours une constante réelle. En utilisant les expressions (C.18) et (C.19), on peut finalement intégrer (C.17) afin d'obtenir

$$\begin{aligned} v_{0,c}^{1,int} = & -\frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) \\ & - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) + C_{0,c}^1. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

La première partie du Lemme 7.2.3.1 est en partie prouvée. On constate en effet que pour l'instant les couples de fonctions  $(u^1, v^1)$  solutions de (7.26) font uniquement intervenir les fonctions de Legendre associées de deuxième espèce. Il reste donc à régler la question du remplacement, légitime ou non, de ces dernières par des fonctions de Legendre associées de première espèce. Or on constate dans un premier temps que si on effectue cette substitution dans les formules (C.1), (C.15), (C.16) et (C.20), alors on obtient toujours des combinaisons linéaires finies de fonctions élémentaires solutions des équations (1.2) et (1.5) respectivement (voir Section 7.2.2). Enfin comme les fonctions de Legendre associées de première et deuxième espèce suivant la même règle de différentiation par rapport à la variable  $\tau$  (A.10), on a que les couples  $(u^1, v^1)$  écrits avec des fonctions de Legendre associées de première espèce sont bien solutions de la première équation de (7.26). Il en découle avec la Remarque C.1 que le remplacement des fonctions de Legendre associées dans les formules (C.1), (C.15), (C.16) et (C.20) est bien valide, ce qui achève la première partie de cette preuve.

**Remarque C.2** *Notons que même si les formules (C.1), (C.15), (C.16) et (C.20) sont valides pour des fonctions de Legendre associées de première et deuxième espèce, il n'aurait pas été possible de mener tous les calculs précédents en partant de la formule (C.1) écrite avec des fonctions de Legendre associées de première espèce. En effet, la réalisation de ces calculs s'est en particulier faite au moyen de la formule de Heine (A.16) qui est propre aux fonctions de Legendre associées de deuxième espèce. De plus, il n'aurait pas été possible d'utiliser des fonctions de Legendre de première espèce dans les formules (C.13) et (C.14) étant donné que les sommes infinies auraient été divergentes (pour se convaincre de ce dernier point, il suffit d'utiliser l'estimation asymptotique (A.6)).*

**Remarque C.3** Il est possible de généraliser la formule de Heine (A.16) à partir des calculs effectués jusqu'à présent. En effet, en égalant les formules (C.13) et (C.16), on obtient que pour tout  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0, 2\pi]$

$$\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) = \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right).$$

Rajoutons qu'il est possible d'étendre cette formule à tout  $\eta \in \mathbb{R}$  en prenant en compte la périodicité (voir Figure C.1) ainsi que la parité (voir (B.4)) en  $\eta$  des fonctions situées de part et d'autre de la précédente égalité. On a alors que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^0 \sin(j\eta) = (-1)^{\lfloor \frac{\eta}{2\pi} \rfloor} \left[ \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right].$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière.

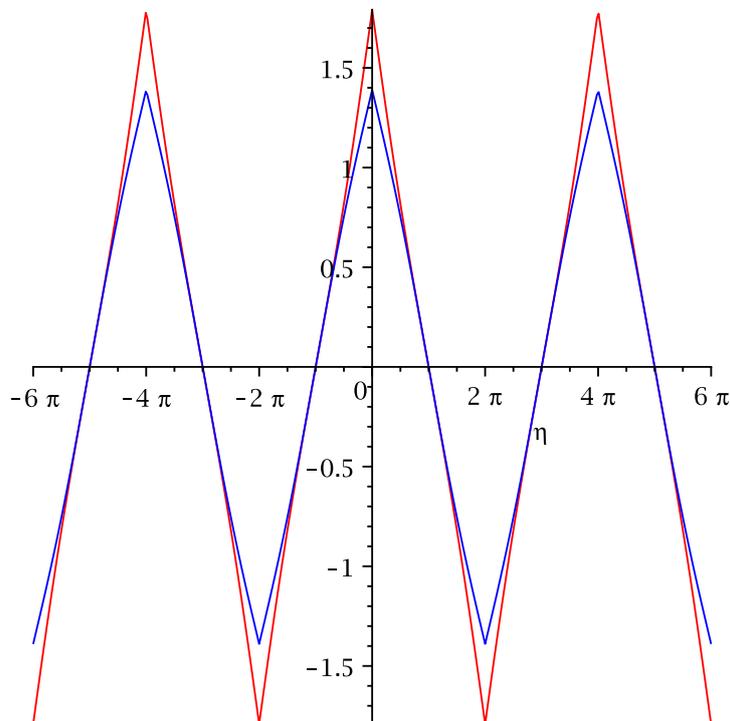


FIG. C.1 – Courbe rouge : graphe de  $\eta \mapsto F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh 2+1}} \right)$ . Courbe bleue : graphe de  $\eta \mapsto E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh 2+1}} \right)$ .

### Résolution du système (7.26) pour la famille de fonctions (7.20)

La preuve de cette partie s'appuie sur les mêmes techniques de calcul que la précédente. On se permettra donc d'alléger les calculs afin de ne pas surcharger la lecture de la preuve. Ainsi posons dans un premier temps

$$v^0 = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 e^{ik\eta}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (\text{C.21})$$

A nouveau, nous cherchons les couples  $(u^0, v^0)$  solutions du système (7.26). Comme auparavant nous nous restreignons au cas  $k \geq 1$ , le cas  $k = 0$  étant traité en dernier. D'après le Théorème 7.2.2.1, et plus particulièrement la formulation (7.22), la recherche d'une éventuelle solution au système (7.26) doit se faire sous la forme

$$u^0 = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right] + C, \quad (\text{C.22})$$

où  $C = C_1 + iC_2$  avec  $C_1, C_2$  des constantes réelles. Dès lors l'écriture de la première relation du système (7.26) après multiplication par la quantité  $2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}$  fournit

$$\left[ \sinh \tau Q_{k-\frac{1}{2}}^0 + 2(\cosh \tau - \cos \eta) Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \right] e^{ik\eta} = -\sin \eta \left[ \sum_{j>0} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 (\beta_j^+ e^{ij\eta} + \beta_j^- e^{-ij\eta}) + d Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right] + 2i(\cosh \tau - \cos \eta) \sum_{j>0} j Q_{j-\frac{1}{2}}^1 (\beta_j^+ e^{ij\eta} - \beta_j^- e^{-ij\eta}).$$

En vue d'identifier les coefficients de Fourier entre les membres de gauche et droite de la dernière relation ci-dessus ( $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  étant fixé), on doit à nouveau envisager plusieurs cas selon la valeur de  $k$ . Encore une fois, seul le cas  $k \geq 3$  est envisagé dans un premier temps. On obtient alors pour les coefficients de  $u^0$  les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \beta_j^- = -\frac{d}{4j^2 - 1}, & j \geq 1 \\ \beta_j^+ = -\frac{d}{4j^2 - 1}, & j \in \{1, \dots, k-1\} \\ \beta_k^+ = -\frac{d}{4k^2 - 1} - \frac{2i}{2k+1} \\ \beta_j^+ = -\frac{d-4i}{4j^2 - 1}, & j \geq k+1 \end{array} \right. .$$

En réinjectant ces coefficients dans (C.22), on a pour  $k \geq 3$  :

$$u^0 = i \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ -\frac{2}{2k+1} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 e^{ik\eta} + \sum_{j>k} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 e^{ij\eta} \right] + C. \quad (\text{C.23})$$

Les calculs pour les cas  $k = 1$  et  $k = 2$  permettent d'arriver au même résultat, si bien qu'en passant aux parties réelles et imaginaires dans (C.23) on obtient les couples de solutions suivants, valables pour  $k \geq 1$  :

– Si  $v_{k,c}^{0,int} = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \cos(k\eta)$  alors

$$u_{k,c}^{0,int} = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \frac{2}{2k+1} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta) - \sum_{j>k} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin j\eta \right] + C_{k,c}^{0,int} \quad (\text{C.24})$$

– Si  $v_{k,s}^{0,int} = \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \sin(k\eta)$  alors

$$u_{k,s}^{0,int} = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ -\frac{2}{2k+1} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos(k\eta) + \sum_{j>k} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \right] + C_{k,s}^{0,int} \quad (\text{C.25})$$

avec  $C_{k,c}^{0,int}$  et  $C_{k,s}^{0,int}$  des constantes réelles.

Nous allons maintenant simplifier (C.25) à l'aide de la formule de Heine (A.17), le but étant toujours d'obtenir une expression faisant intervenir uniquement des sommes finies. En nous limitant pour l'instant à  $k \geq 2$ , on calcule

$$\begin{aligned} \sum_{j>k} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta &= \sum_{j>0} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta - \sum_{j>0}^k \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \\ &= \frac{\pi}{\sinh \tau} \sqrt{\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{2}} + 2Q_{-\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j>0}^k \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \\ &= \frac{\pi}{\sinh \tau} \sqrt{\frac{\cosh \tau - \cos \eta}{2}} + 2Q_{-\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j>0}^{k-1} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \\ &\quad - \frac{1}{k^2 - \frac{1}{4}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos k\eta, \end{aligned}$$

et en combinant ce résultat avec (C.25), il reste que pour tout  $k \geq 2$

$$u_{k,s}^{0,int} = \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ -\frac{2}{2k-1} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \cos(k\eta) + 2Q_{-\frac{1}{2}}^1 - \sum_{j>0}^{k-1} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \cos j\eta \right] + C_{k,s}^{0,int}. \quad (\text{C.26})$$

On vérifie facilement que (C.26) est encore vraie pour  $k = 1$  en adoptant la convention que le terme écrit sous forme de série est nul dans ce cas précis.

Reste désormais à simplifier (C.24). On remarque dans un premier temps que cette relation reste vraie pour  $k = 0$  en écrivant la première équation de (7.26) et en identifiant

les coefficients de Fourier. On en déduit pour tout  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{k+1,c}^{0,int} - u_{k,c}^{0,int} &= \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ -\frac{2}{2k+1} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta) + \sum_{j>k} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin j\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{2k+3} Q_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) - \sum_{j>k+1} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin j\eta \right] + C_{k+1,c}^{0,int} - C_{k,c}^{0,int} \\ &= \left( \frac{2}{2k+1} \right) \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ Q_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) - Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta) \right] + \mathfrak{C}_{k+1,c}^{0,int}, \end{aligned}$$

avec  $\mathfrak{C}_{k+1,c}^{0,int} = C_{k+1,c}^{0,int} - C_{k,c}^{0,int}$  une constante réelle. On peut donc écrire pour  $k \geq 0$

$$u_{k+1,c}^{0,int} = \left( \frac{2}{2k+1} \right) \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ Q_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) - Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \sin(k\eta) \right] + u_{k,c}^{0,int} + \mathfrak{C}_{k+1,c}^{0,int}.$$

Par récurrence, en posant  $u_{0,c,0}^1 = u_{0,c}^1 - C_{0,c}^0$ , il reste finalement l'expression suivante valide pour  $k \geq 0$

$$\begin{aligned} u_{k+1,c}^{0,int} &= \frac{a \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \frac{2}{2k+1} Q_{k+\frac{1}{2}}^1 \sin((k+1)\eta) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j>0}^k \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin(j\eta) \right] + u_{0,c,0}^{0,int} + C_{k+1,c}^{0,int}, \quad (\text{C.27}) \end{aligned}$$

où la constante  $C_{k+1,c}^{0,int}$  est bien la même que celle intervenant dans (C.24). La détermination complète de l'expression (C.27) dépend donc de celle de  $u_{0,c}^1$ . Contrairement à ce qui a été fait dans la première partie de la preuve, nous utilisons ici à nouveau la première relation du système (7.26). Calculons en premier lieu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{0,c}^{0,int}}{\partial \eta} &= \frac{a \sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \eta} \frac{\partial v_{0,c}^{0,int}}{\partial \tau} \\ &= a \sinh \tau \left[ \frac{\sinh \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} Q_{-\frac{1}{2}}^0 + \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \right]. \end{aligned}$$

Cette expression s'intègre par rapport à  $\eta$ . La formule (C.18) donne une partie du résultat. Le reste s'obtient en dérivant (C.18) par rapport à  $\tau$  et donne

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} d\eta &= 2 \left[ \frac{\sin \eta}{\sinh^2 \tau \sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(\cosh \tau - 1) \sqrt{\cosh \tau + 1}} E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right]. \quad (\text{C.28}) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de (C.18) et (C.28) dans (C.28), on arrive finalement à

$$u_{0,c}^{0,int} = 2a \left[ \frac{\sin \eta}{2\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] + C_{0,c}^{0,int}. \quad (\text{C.29})$$

Le fait que les relations (C.26), (C.27) et (C.29) restent valables lorsqu'on remplace les fonctions de Legendre associées de deuxième espèce par celles de première espèce relève des mêmes arguments que ceux donnés dans la première partie de la preuve (voir les commentaires précédant la Remarque C.2).

**Remarque C.4** *Il est possible de généraliser la formule de Heine (A.17) à partir des calculs effectués dans la deuxième partie de la preuve. En effet, en égalant les formules (C.24) et (C.27), on obtient que pour tout  $(\tau, \eta) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0, 2\pi]$*

$$\frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \sum_{j>0} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin(j\eta) = 2 \left[ \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{\sin \eta}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right].$$

*Rajoutons qu'il est possible d'étendre cette formule à tout  $\eta \in \mathbb{R}$  en prenant en compte la périodicité (voir Figure C.1) ainsi que la parité (voir (B.4)) en  $\eta$  des fonctions situées de part et d'autre de la précédente égalité. On a alors que pour tout  $\eta \in \mathbb{R}$*

$$\frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \sum_{j>0} \frac{1}{j^2 - \frac{1}{4}} Q_{j-\frac{1}{2}}^1 \sin(j\eta) = 2 (-1)^{\lfloor \frac{\eta}{2\pi} \rfloor} \left[ \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 F \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\eta}{2\pi} \rfloor} \sin \eta}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right],$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière. ■



## Annexe D

### Preuve du Lemme 7.2.3.2

#### Preuve des relations (7.27)

Soit  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  fixé. On note  $\mathcal{R}_1 = v_{0,c}^{1,int}(\tau, 2\pi) - v_{0,c}^{1,int}(\tau, 0)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 = & \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \left[ F \left( 1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - F \left( -1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] \\ & + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} Q_{-\frac{1}{2}}^0 \left[ E \left( 1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - E \left( -1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right], \end{aligned}$$

soit avec les formules (B.4), (B.5) et (B.6)

$$\mathcal{R}_1 = \frac{2 \sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} Q_{-\frac{1}{2}}^1 K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \sqrt{\cosh \tau + 1} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right).$$

En utilisant successivement les formules (A.11), (B.15) et (B.16) écrites avec les fonctions de Legendre associées de deuxième espèce, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \left[ Q_{\frac{1}{2}}^0 - \cosh \tau Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \sqrt{\cosh \tau + 1} Q_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \left[ \cosh \tau \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - \sqrt{2(\cosh \tau + 1)} E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \cosh \tau \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &\quad + \sqrt{\cosh \tau + 1} \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right). \end{aligned}$$

En simplifiant cette dernière expression, on arrive bien à

$$\mathcal{R}_1 = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}_*^+.$$

Passons maintenant à la preuve de la deuxième relation de (7.27). Soit toujours  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$  fixé. On note  $\mathcal{R}_2 = v_{0,c}^{1,ext}(\tau, 2\pi) - v_{0,c}^{1,ext}(\tau, 0)$ . On a alors, comme ci-dessus, que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} P_{-\frac{1}{2}}^1 \left[ F \left( 1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - F \left( -1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{\cosh \tau + 1}}{2} P_{-\frac{1}{2}}^0 \left[ E \left( 1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) - E \left( -1; \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right], \end{aligned}$$

soit avec les formules (B.4), (B.5) et (B.6)

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \left[ P_{\frac{1}{2}}^0 - \cosh \tau P_{-\frac{1}{2}}^0 \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + \sqrt{\cosh \tau + 1} P_{-\frac{1}{2}}^0 E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \left[ \frac{2}{\pi} \sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} E \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi} \cosh \tau \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \sqrt{\cosh \tau + 1} \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left[ \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cosh \tau + \sinh \tau}{\cosh \tau + 1}} E \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cosh \tau}{\cosh \tau + 1} K \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right. \\ &\quad \left. + K \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right]. \end{aligned} \tag{D.1}$$

Remarquons alors que

$$\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1} = 1 - \frac{2}{\cosh \tau + 1} \quad \text{et} \quad \frac{\cosh \tau}{\cosh \tau + 1} = 1 - \frac{1}{\cosh \tau + 1},$$

ce qui nous permet d'écrire, en accord avec la définition (B.7), que

$$K \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) = K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right). \quad (\text{D.2})$$

En utilisant (D.2) dans (D.1), on obtient que

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 = & \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \left[ \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cosh \tau + \sinh \tau}{\cosh \tau + 1}} E \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\cosh \tau + 1} K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right] K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right. \\ & \left. - K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) K \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) + K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) E \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Introduisons maintenant les notations suivantes :

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\cosh \tau + \sinh \tau}{\cosh \tau + 1}} E \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) + \frac{1}{\cosh \tau + 1} K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right), \quad (\text{D.4})$$

$$\mathcal{R}_4 = E \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right),$$

$$\mathcal{R}_5 = \frac{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} - \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}},$$

et enfin

$$k = \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}}.$$

Cherchons tout d'abord à réexprimer  $\mathcal{R}_4$ . Il est clair que  $k \in ]0, 1[$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ . Dès lors, l'usage de la formule (B.11) mène à

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 = & \left( 1 + \sqrt{\frac{\cosh \tau - \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) E \left( \frac{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} - \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}} \right) \\ & - \sqrt{\frac{\cosh \tau - \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} K \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

L'expression (D.5) peut être simplifiée en observant que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_5 &= \frac{(\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} - \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau})(\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau})}{(\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau})^2} \\ &= \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau + 1},\end{aligned}$$

et comme  $\sinh \tau > 0$  et  $\cosh \tau + 1 > 0$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}^{+*}$ , il reste

$$\mathcal{R}_5 = \sqrt{\frac{\sinh^2 \tau}{(\cosh \tau + 1)^2}} = \sqrt{\frac{\cosh^2 \tau - 1}{(\cosh \tau + 1)^2}} = \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}}. \quad (\text{D.6})$$

En injectant (D.6) dans (D.5) et (D.5) dans (D.4), on arrive à

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} \right) E \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) + \frac{1}{\cosh \tau + 1} K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right).\end{aligned}$$

L'égalité suivante

$$(\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau})^2 = 2(\cosh \tau + 1) \quad (\text{D.7})$$

permet finalement d'écrire que

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_3 &= E \left( \sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + 1}} K \left( \sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\cosh \tau + 1} K' \left( \sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \right).\end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Posons maintenant  $a = \sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau}$  et  $b = \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}$ . En utilisant succes-

sivement les relations (B.9) et (B.10), il vient

$$\begin{aligned}
K\left(\sqrt{\frac{2 \sinh \tau}{\cosh \tau + \sinh \tau}}\right) &= K\left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}\right) \\
&= \frac{a\pi}{2} \times \frac{1}{aM\left(1, \frac{b}{a}\right)} \\
&= \frac{a\pi}{2} \times \frac{1}{M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)} \\
&= \frac{2a}{a+b} \times K\left(\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau}}{\sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}} K'\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) \quad (\text{D.9})
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (D.9) dans (D.8), on obtient que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_3 &= E\left(\sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}}\right) + K'\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right) \\
&\quad \times \left[ \frac{1}{\cosh \tau + 1} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh \tau + 1} \sqrt{\cosh \tau + \sinh \tau} + \sqrt{\cosh \tau - \sinh \tau}} \right],
\end{aligned}$$

soit avec (D.7) et (B.8)

$$\mathcal{R}_3 = E\left(\sqrt{\frac{\cosh \tau - 1}{\cosh \tau + 1}}\right) = E'\left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right). \quad (\text{D.10})$$

Finalement, comme  $\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}} \in ]0, 1[$  pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_*^+$ , on a en injectant (D.10) dans (D.3)

$$\mathcal{R}_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (E'K - K'K + K'E) \left(\sqrt{\frac{2}{\cosh \tau + 1}}\right)$$

ce qui permet de conclure à

$$\mathcal{R}_2 = \sqrt{2}, \quad \tau \in \mathbb{R}_*^+$$

avec (B.12).

**Preuve des relations (7.28)**

La première partie de la preuve a permis de mettre en évidence que la fonction  $v_{0,c}^1$  pouvait être monovaluée ou bien multivaluée en  $\eta$  selon qu'elle était écrite avec des fonctions de Legendre associées de première ou de deuxième espèce. Or il se trouve que  $v_{0,c}^1$  intervient aussi dans l'écriture de  $u_{0,c}^0$ , les termes restants étant tous monovalués. Dès lors, en se servant des calculs effectués dans la première partie de cette preuve, on a directement la conclusion souhaitée.

---

## Annexe E

# Etape n°2–D de l’algorithme de résolution du problème extrémal borné

Les détails de cette étape se découpent eux-mêmes en deux parties qui auront pour but de fournir chacune  $2N + 1$  équations linéaires en les coefficients de la décomposition (8.11). Constatons que même si nous cherchons un approximant  $\tilde{u}_{to}^N$  de  $u_{to}$  sur  $\Gamma_e$  (donc pour  $\tau = \tau_e$ ), il est possible de voir  $\tilde{u}_{to}^N$  comme une fonction des deux variables  $(\tau, \eta)$  puisque cette dernière est bien régulière dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  privé du foyer  $a$  (voir les commentaires du Théorème 7.2.2.1). Nous précisons ce point car nous rencontrerons à plusieurs reprises les dérivées partielles par rapport à  $\tau$  et  $\eta$  de la fonction  $\tilde{u}_{to}^N$ . Cependant, dans un souci de simplification des notations, nous utilisons la même notation  $\tilde{u}_{to}^N$  pour la fonction à valeurs dans le demi-plan droit  $\mathbb{P}_d$  privé du foyer  $a$  et sa restriction au bord  $\Gamma_e$ . La prise de restriction à  $\Gamma_e$  sera explicite afin qu’il n’y ait pas de confusion.

### Equations pour les coefficients de (8.11) obtenus par décomposition de $u_{to}$

La décomposition (8.11) présente un intérêt d’un point de vue algorithmique. En effet, on remarque que les fonctions de Legendre associées intervenant dans les fonctions qui composent l’espace  $\mathcal{E}_{u_{to}}^N$  sont constantes sur  $\Gamma_e$  puisque leur argument ne dépend que de la coordonnée  $\tau$ . On en déduit que chercher l’approximation  $\tilde{u}_{to}^N$  de  $u_{to}$  sous la forme (8.11) revient à trouver dans un premier temps la meilleure approximation au sens de la norme  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$  s’écrivant sur  $\Gamma_e$  sous la forme

$$\tilde{u}_{to}^N = a \frac{\sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \left[ \sum_{k=1}^N (\beta_{k,c} \cos(k\eta) + \beta_{k,s} \sin(k\eta)) + \beta_{N+1,c} \right]. \quad (\text{E.1})$$

Notons que la décomposition (E.1) est en fait une décomposition de Fourier sur  $\Gamma_e$  à laquelle est adjointe un poids provenant du passage en coordonnées toroïdales. Alors, en notant

$$p_1(\tau_e, \eta) = \frac{\cosh(\tau_e) - \cos(\eta)}{(a \sinh(\tau_e))^2},$$

on définit sur  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$  le produit scalaire à poids

$$\langle f, g \rangle_{p_1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_e, \eta) g(\tau_e, \eta) p_1(\tau_e, \eta) d\eta . \quad (\text{E.2})$$

Dès lors une méthode classique pour obtenir l'approximation (E.1) consiste à résoudre en les coefficients  $(\beta_{k,c}, \beta_{k,s}, \beta_{N+1,c})_{k=1..N}$  les  $2N+1$  équations normales (voir l'introduction du Chapitre 7)

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{u}_{to}^N - u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \cos(k\eta) \rangle_{p_1} = 0 \\ \langle \tilde{u}_{to}^N - u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \sin(k\eta) \rangle_{p_1} = 0 \quad , \quad k = 1..N . \\ \langle \tilde{u}_{to}^N - u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \rangle_{p_1} = 0 \end{array} \right.$$

Ceci s'écrit encore matriciellement

$$M_\beta^N = (M_{p_1}^N)^{-1} \times M_{u_{to}}^N \quad (\text{E.3})$$

avec  $M_{p_1}^N$  la matrice de Gram de taille  $(2N+1) \times (2N+1)$  associée à la famille de fonctions

$$\left\{ \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \cos(k\eta), \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \sin(k\eta), \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \right\}_{k=1..N}$$

ainsi qu'au produit scalaire (E.2), soit

$$M_{p_1}^N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et  $M_\beta^N$  et  $M_{u_{to}}^N$  les deux vecteurs de tailles  $2N+1$  définis par

$$M_\beta^N = \begin{pmatrix} \beta_{1,c} \\ \vdots \\ \beta_{N,c} \\ \beta_{1,s} \\ \vdots \\ \beta_{N,s} \\ \beta_{N+1,c} \end{pmatrix} , \quad M_{u_{to}}^N = \begin{pmatrix} \langle u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \cos \eta \rangle_{p_1} \\ \vdots \\ \langle u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \cos(N\eta) \rangle_{p_1} \\ \langle u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \sin \eta \rangle_{p_1} \\ \vdots \\ \langle u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \sin(N\eta) \rangle_{p_1} \\ \langle u_{to}, \frac{a \sinh \tau_e}{\sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta}} \rangle_{p_1} \end{pmatrix} .$$

Notons que le choix du produit scalaire (E.2) permet de rendre la résolution de l'équation (E.3) particulièrement simple dans la mesure où le calcul de la matrice  $(M_{p_1}^N)^{-1}$  est trivial. Ainsi le coût de l'équation (E.3) est en fait celui du calcul du vecteur  $M_{u_{to}}^N$ . On obtient donc à l'issue de ce premier calcul le vecteur de coefficients  $M_\beta^N$ .

On ne peut toutefois pas encore conclure quant à la détermination de la décomposition (8.11). En effet, l'égalité entre les formes (8.11) et (E.1) imposent les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta_{k,c} = \alpha_{k,c}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{k,c}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ \beta_{k,s} = \alpha_{k,s}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{k,s}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ \beta_{N+1,s} = \alpha_{N+1,c}^{ext} P_{-\frac{1}{2}}^1 + \alpha_{N+2,c}^{int} Q_{-\frac{1}{2}}^1 \end{array} \right. , \quad k = 1..N ,$$

qui s'écrivent matriciellement sous la forme

$$M_\beta^N = M_{\mathcal{L}^1}^N \times M_\alpha^N \quad (\text{E.4})$$

avec  $M_\alpha^N$  et  $M_{\mathcal{L}^1}^N$  le vecteur et la matrice de tailles respectives  $4N+2$  et  $(2N+1) \times (4N+2)$  donnés par

$$M_\alpha^N = \left( \alpha_{1,c}^{ext}, \dots, \alpha_{N,c}^{ext}, \alpha_{1,s}^{ext}, \dots, \alpha_{N,s}^{ext}, \alpha_{1,c}^{int}, \dots, \alpha_{N,c}^{int}, \alpha_{1,s}^{int}, \dots, \alpha_{N,s}^{int}, \alpha_{N+1,c}^{ext}, \alpha_{N+2,c}^{int} \right)^T ,$$

$$M_{\mathcal{L}^1}^N(i, j) = \left\{ \begin{array}{ll} P_{I-\frac{1}{2}}^1 , & i = j, i \in 1..2N \text{ et } I = i - \lfloor \frac{i-1}{N} \rfloor N \\ Q_{I-\frac{1}{2}}^1 , & j = i + 2N, i \in 1..2N \text{ et } I = i - \lfloor \frac{i-1}{N} \rfloor N \\ P_{-\frac{1}{2}}^1 , & (i, j) = (2N+1, 4N+1) \\ Q_{-\frac{1}{2}}^1 , & (i, j) = (2N+1, 4N+2) \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Le système (E.4) est sous-déterminé en les coefficients de la décomposition (8.11). En effet, à ce stade de l'étude, on ne dispose que de  $2N+1$  relations sur les coefficients de (8.11) alors que ceux-ci sont au nombre de  $4N+2$ . Afin de pouvoir les déterminer, nous allons faire usage d'informations complémentaires fournies par la dérivée normale  $\partial_n u$  sur  $\Gamma_e$ .

### Equations pour les coefficients de (8.11) obtenues par décomposition de $\partial_n u_{to}$

Commençons par effectuer le calcul intermédiaire suivant où, comme dans la Section 7.2.3, la lettre  $\mathcal{L}$  désigne indistinctement les fonctions de Legendre associées de première

et deuxième espèces ayant pour argument  $\cosh \tau$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 &= \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^2 + \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^0 - 2 \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 + \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\cosh \tau}{\sinh \tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1, \end{aligned}$$

la première et la deuxième égalités étant obtenues respectivement avec les formules (A.10) et (A.14). Ceci implique que pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \partial_\tau \left( \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \right) \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 &= \left( \frac{\cosh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} \right) \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ &\quad + \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \frac{d}{d\tau} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} \mathcal{L}_{k-\frac{1}{2}}^1 \end{aligned}$$

On déduit alors de ce calcul la dérivée partielle par rapport à  $\tau$  de la formule (8.11), soit

$$\begin{aligned} \partial_\tau \tilde{u}_{to}^N &= a \left\{ \sum_{k=1}^N \left[ \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} P_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} P_{k-\frac{1}{2}}^1 \right] \right. \\ &\quad \times (\alpha_{k,c}^{ext} \cos(k\eta) + \alpha_{k,s}^{ext} \sin(k\eta)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \left[ \left(k^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \right] \\ &\quad \times (\alpha_{k,c}^{int} \cos(k\eta) + \alpha_{k,s}^{int} \sin(k\eta)) \\ &\quad + \alpha_{N+1,c}^{ext} \left[ -\frac{1}{4} \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} P_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} P_{k-\frac{1}{2}}^1 \right] \\ &\quad \left. + \alpha_{N+2,c}^{int} \left[ -\frac{1}{4} \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 - \frac{\sinh^2 \tau}{2(\cosh \tau - \cos \eta)^{3/2}} Q_{k-\frac{1}{2}}^1 \right] \right\}. \end{aligned} \tag{E.5}$$

Cherchons maintenant à relier  $\partial_\tau u_{to}$  et  $\partial_n u_{to}$  sur le bord  $\Gamma_e$ . Les calculs de la preuve de la Proposition 7.2.3.1 permettent dans un premier temps d’obtenir les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \partial_\tau \tilde{u}_{to}^N \\ \partial_\eta \tilde{u}_{to}^N \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a \frac{1 - \cosh \tau \cos \eta}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} & -a \frac{\sinh \tau \sin \eta}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} \\ -a \frac{\sinh \tau \sin \eta}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} & a \frac{\cosh \tau \cos \eta - 1}{(\cosh \tau - \cos \eta)^2} \end{pmatrix}}_{M_{\tau,\eta}} \begin{pmatrix} \partial_r \tilde{u}_{to}^N \\ \partial_z \tilde{u}_{to}^N \end{pmatrix}, \tag{E.6}$$

le déterminant de la matrice  $M_{\tau,\eta}$  ayant pour expression

$$\begin{aligned}
|M_{\tau,\eta}| &= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} \left[ (1 - \cosh \tau \cos \eta)^2 + (\sinh \tau \sin \eta)^2 \right] \\
&= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} \left[ 1 - 2 \cosh \tau \cos \eta + \cosh^2 \tau \cos^2 \eta + \sinh^2 \tau \sin^2 \eta \right] \\
&= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} \left[ 1 - 2 \cosh \tau \cos \eta + (1 + \sinh^2 \tau) \cos^2 \eta + \sinh^2 \tau \sin^2 \eta \right] \\
&= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} \left[ 1 - 2 \cosh \tau \cos \eta + \cos^2 \eta + \sinh^2 \tau (\cos^2 \eta + \sin^2 \eta) \right] \\
&= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} \left[ \cosh^2 \tau - 2 \cosh \tau \cos \eta + \cos^2 \eta \right] \\
&= -\frac{a^2}{(\cosh \tau - \cos \eta)^4} (\cosh \tau - \cos \eta)^2 = -\left( \frac{a}{\cosh \tau - \cos \eta} \right)^2 . \tag{E.7}
\end{aligned}$$

On déduit de (E.6) et (E.7), les relations

$$\begin{pmatrix} \partial_r \tilde{u}_{t_0}^N \\ \partial_z \tilde{u}_{t_0}^N \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\cosh \tau \cos \eta - 1}{a} & \frac{\sinh \tau \sin \eta}{a} \\ \frac{\sinh \tau \sin \eta}{a} & \frac{1 - \cosh \tau \cos \eta}{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\tau \tilde{u}_{t_0}^N \\ \partial_\eta \tilde{u}_{t_0}^N \end{pmatrix} . \tag{E.8}$$

Plaçons nous maintenant sur le contour  $\Gamma_e$ . Le vecteur unitaire normal sortant a pour expression

$$\vec{e}_n = \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_z ,$$

de sorte qu'avec (E.8)

$$\begin{aligned}
\partial_n \tilde{u}_{t_0}^N &= \overrightarrow{\nabla \tilde{u}_{t_0}^N} \cdot \vec{e}_n \\
&= \left( \partial_r \tilde{u}_{t_0}^N \cos \theta + \partial_z \tilde{u}_{t_0}^N \sin \theta \right) \Big|_{\tau=\tau_e} \\
&= \cos \theta \left[ \frac{1 - \cosh \tau \cos \eta}{a} \partial_\tau \tilde{u}_{t_0}^N - \frac{\sinh \tau \sin \eta}{a} \partial_\eta \tilde{u}_{t_0}^N \right] \Big|_{\tau=\tau_e} \\
&\quad + \sin \theta \left[ -\frac{\sinh \tau \sin \eta}{a} \partial_\tau \tilde{u}_{t_0}^N + \frac{\cosh \tau \cos \eta - 1}{a} \partial_\eta \tilde{u}_{t_0}^N \right] \Big|_{\tau=\tau_e} . \tag{E.9}
\end{aligned}$$

Indiquons finalement les relations suivantes valables sur  $\Gamma_e$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\cosh \tau_e \cos \eta - 1}{\cosh \tau_e - \cos \eta} \\ \sin \theta = \frac{\sinh \tau_e \sin \eta}{\cosh \tau_e - \cos \eta} \end{cases} . \tag{E.10}$$

Nous ne détaillons pas les calculs permettant d'obtenir les relations (E.10). Retenons simplement que ces dernières s'obtiennent facilement en appliquant la méthode des facteurs d'échelle. Nous renvoyons à [116] pour plus de détails.

Finalement, en injectant les relations (E.10) dans (E.9) et en simplifiant grâce aux calculs déjà effectués pour arriver à (E.7), on obtient sur le bord  $\Gamma_e$

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{u}_{to}^N &= -\frac{1}{a(\cosh \tau_e - \cos \eta)} \left[ (\cosh \tau \cos \eta - 1)^2 + (\sinh \tau \sin \eta)^2 \right] \left( \partial_\tau \tilde{u}_{to}^N \right)_{|\tau=\tau_e} \\ &= -\frac{\cosh \tau_e - \cos \eta}{a} \left( \partial_\tau \tilde{u}_{to}^N \right)_{|\tau=\tau_e} . \end{aligned} \tag{E.11}$$

Il ne reste plus qu'à se servir de la relation (E.5) ainsi que de la formule (8.11) pour réécrire (E.11) sur  $\Gamma_e$

$$\begin{aligned} \partial_n \tilde{u}_{to}^N - \frac{\sinh \tau_e}{2a} \tilde{u}_{to}^N &= \\ - \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} &\left[ \sum_{k=1}^N \left( k^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \alpha_{k,c}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{k,c}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \right) \cos(k\eta) \right. \\ &+ \sum_{k=1}^N \left( k^2 - \frac{1}{4} \right) \left( \alpha_{k,s}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{k,s}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \right) \sin(k\eta) \\ &\left. - \frac{1}{4} \left( \alpha_{N+1,c}^{ext} P_{-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{N+2,c}^{int} Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right) \right] . \end{aligned} \tag{E.12}$$

L'équation (E.12) permet d'obtenir des nouvelles relations sur les coefficients du développement de (8.11). Pour les trouver, on procède de la même manière que lorsque nous avons cherché les coefficients du développement de (E.1). Plus précisément, le fait que les fonctions de Legendre associées soient constantes sur le bord  $\Gamma_e$  fait que nous cherchons tout d'abord une approximation (toujours au sens de la norme  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$ ) de la fonction  $\partial_n u_{to} - \frac{\sinh \tau_e}{2a} u_{to}$  sous la forme

$$\partial_n \tilde{u}_{to}^N - \frac{\sinh \tau_e}{2a} \tilde{u}_{to}^N = \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \left[ \sum_{k=1}^N (\gamma_{k,c} \cos(k\eta) + \gamma_{k,s} \sin(k\eta)) + \gamma_{N+1,c} \right] . \tag{E.13}$$

Alors, en notant

$$\Psi = \partial_n u_{to} - \frac{\sinh \tau_e}{2a} u_{to} \quad , \quad \tilde{\Psi}^N = \partial_n \tilde{u}_{to}^N - \frac{\sinh \tau_e}{2a} \tilde{u}_{to}^N ,$$

et

$$p_2(\tau_e, \eta) = \frac{1}{\sinh^2 \tau_e (\cosh(\tau_e) - \cos(\eta))} ,$$

on définit sur  $L_{\mathbb{R}}^2(\Gamma_e)$  le produit scalaire à poids

$$\langle f, g \rangle_{p_2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\tau_e, \eta) g(\tau_e, \eta) p_2(\tau_e, \eta) d\eta . \tag{E.14}$$

Les coefficients  $(\gamma_{k,c}, \gamma_{k,s}, \gamma_{N+1,c})_{k=1..N}$  s'obtiennent par résolution des  $2N+1$  équations normales

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{\Psi}^N - \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \cos(k\eta) \rangle_{p_2} = 0 \\ \langle \tilde{\Psi}^N - \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \sin(k\eta) \rangle_{p_2} = 0 \\ \langle \tilde{\Psi}^N - \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \rangle_{p_2} = 0 \end{array} \right. , \quad k = 1..N .$$

Ceci s'écrit encore matriciellement

$$M_\gamma^N = (M_{p_2}^N)^{-1} \times M_\Psi^N \quad (\text{E.15})$$

avec  $M_{p_2}^N$  la matrice de Gram de taille  $(2N+1) \times (2N+1)$  associée à la famille de fonctions

$$\left\{ \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \cos(k\eta), \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \sin(k\eta), \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \right\}_{k=1..N}$$

ainsi qu'au produit scalaire (E.14), soit

$$M_{p_2}^N = M_{p_1}^N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

et  $M_\gamma^N$  et  $M_\Psi^N$  les deux vecteurs de tailles  $2N+1$  définis par

$$M_\gamma^N = \begin{pmatrix} \gamma_{1,c} \\ \vdots \\ \gamma_{N,c} \\ \gamma_{1,s} \\ \vdots \\ \gamma_{N,s} \\ \gamma_{N+1,c} \end{pmatrix} , \quad M_\Psi^N = \begin{pmatrix} \langle \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \cos(\eta) \rangle_{p_2} \\ \vdots \\ \langle \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \cos(N\eta) \rangle_{p_2} \\ \langle \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \sin(\eta) \rangle_{p_2} \\ \vdots \\ \langle \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \sin(N\eta) \rangle_{p_2} \\ \langle \Psi, \sinh \tau_e \sqrt{\cosh \tau_e - \cos \eta} \rangle_{p_2} \end{pmatrix} .$$

Au terme de cette étape intermédiaire, on obtient le vecteur de coefficients  $M_\gamma^N$ . Observons alors que l'égalité entre les formes (E.12) et (E.13) fournit les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{k,c} = -(k^2 - \frac{1}{4}) \left( \alpha_{k,c}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{k,c}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \right) \\ \gamma_{k,s} = -(k^2 - \frac{1}{4}) \left( \alpha_{k,s}^{ext} P_{k-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{k,s}^{int} Q_{k-\frac{1}{2}}^0 \right) \\ \gamma_{N+1,s} = \frac{1}{4} \left( \alpha_{N+1,c}^{ext} P_{-\frac{1}{2}}^0 + \alpha_{N+2,c}^{int} Q_{-\frac{1}{2}}^0 \right) \end{array} \right. , \quad k = 1..N ,$$

qui s’écrivent matriciellement sous la forme

$$M_\gamma^N = M_{\mathcal{L}^0}^N \times M_\alpha^N \tag{E.16}$$

avec  $M_{\mathcal{L}^0}^N$  la matrice de taille  $(2N + 1) \times (4N + 2)$  donnée par

$$M_{\mathcal{L}^0}^N(i, j) = \begin{cases} -(I^2 - \frac{1}{4})P_{I-\frac{1}{2}}^0, & i = j, i \in 1..2N \text{ et } I = i - \lfloor \frac{i-1}{N} \rfloor N \\ -(I^2 - \frac{1}{4})Q_{I-\frac{1}{2}}^0, & j = i + 2N, i \in 1..2N \text{ et } I = i - \lfloor \frac{i-1}{N} \rfloor N \\ \frac{1}{4}P_{-\frac{1}{2}}^0, & (i, j) = (2N + 1, 4N + 1) \\ \frac{1}{4}Q_{-\frac{1}{2}}^0, & (i, j) = (2N + 1, 4N + 2) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous possédons désormais suffisamment de relations pour déterminer les coefficients de la décomposition (8.11). En effet, la réunion des équations matricielles (E.4) et (E.16) fournit la nouvelle relation

$$\begin{bmatrix} M_{\mathcal{L}^1}^N \\ M_{\mathcal{L}^0}^N \end{bmatrix} M_\alpha^N = \begin{bmatrix} M_\beta^N \\ M_\gamma^N \end{bmatrix} \tag{E.17}$$

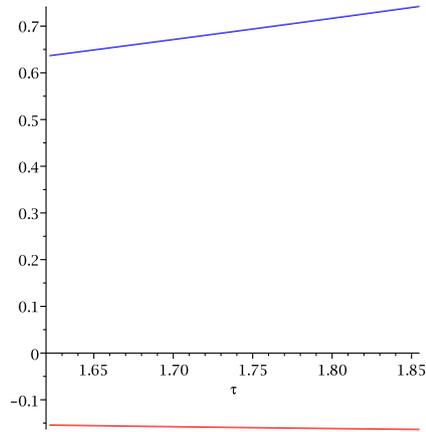
où le terme de gauche est le produit d’une matrice de taille  $(4N + 2) \times (4N + 2)$  par un vecteur de taille  $4N + 2$ , et le terme de droite un vecteur de taille  $4N + 2$ . Cette relation conduit directement au calcul des coefficients de la décomposition (8.11).

**Remarque E.1** *La méthode de calcul des coefficients de la décomposition (8.11) qui a été implémentée est en réalité légèrement différente de celle qui vient d’être décrite. Plus précisément, dans la formule (8.11), les fonctions de Legendre associées ont toutes été normalisées par leur plus grande valeur prise dans le domaine annulaire compris entre le bord extérieur  $\Gamma_e$  et le limiteur  $\Gamma_p$  (frontières comprises). Ce choix est justifié par le fait que l’approximation  $\tilde{u}_{i_0}^N$  que nous déterminons sera précisément évaluée dans ce domaine à l’étape n°3 (voir Section 8.2.3). Aussi, afin d’éviter d’avoir à manipuler des fonctions prenant de trop grandes valeurs (et donc pour des raisons numériques évidentes), il a été choisi de normaliser les fonctions de Legendre associées de première espèce par leur valeur en  $\tau = \tau_i = 1.8556$ , c’est-à-dire en la coordonnée  $\tau$  la plus élevée sur le limiteur  $\Gamma_l$  (les fonctions  $\tau \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto P_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$  sont croissantes positives pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  et décroissante négative pour  $k = 0$ ; voir Figure E.1). Les fonctions de Legendre associées de deuxième espèce ont quant à elle été normalisées par leur valeur sur le bord  $\Gamma_e$  (les fonctions  $\tau \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$  sont croissantes négatives pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ; voir Figure E.2).*

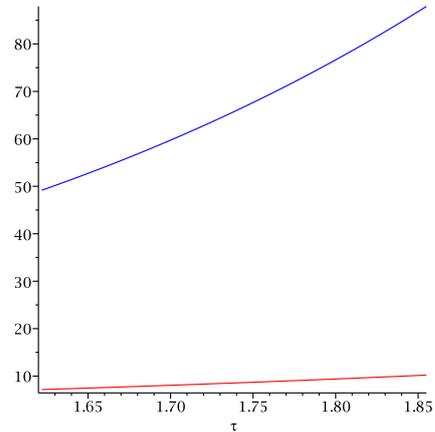
Donnons pour exemple la fonction  $\tilde{u}_{to}^N$  effectivement cherchée lorsque  $N = 1$  :

$$\tilde{u}_{to}^1(\tau, \eta) = a \frac{\sinh \tau}{\sqrt{\cosh \tau - \cos \eta}} \left[ \alpha_{1,c}^{ext} \frac{P_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{P_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_i)} \cos \eta + \alpha_{1,s}^{ext} \frac{P_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{P_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_i)} \sin \eta \right. \\ \left. + \alpha_{1,c}^{int} \frac{Q_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{Q_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_e)} \cos \eta + \alpha_{1,s}^{int} \frac{Q_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{Q_{\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_e)} \sin \eta \right. \\ \left. + \alpha_{2,c}^{ext} \frac{P_{-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{P_{-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_i)} + \alpha_{3,c}^{int} \frac{Q_{-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)}{Q_{-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau_e)} \right].$$

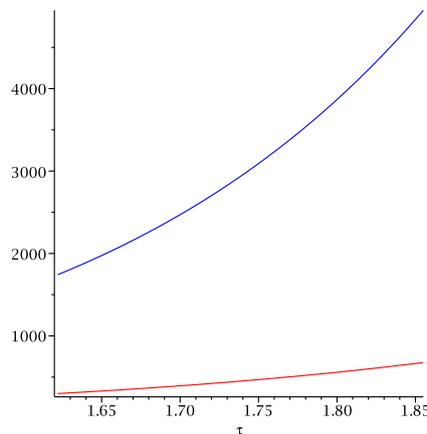
Cette normalisation n'a pas été prise en compte dans les calculs présentés dans cette annexe pour éviter une surcharge des notations.



(a)  $k = 0$  (rouge) et  $k = 1$  (bleue)



(b)  $k = 2$  (rouge) et  $k = 3$  (bleue)



(c)  $k = 4$  (rouge) et  $k = 5$  (bleue)

FIG. E.1 – Graphes des fonctions  $\tau \in [\tau_e, \tau_i] \mapsto P_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$  pour  $k = 0..5$ .

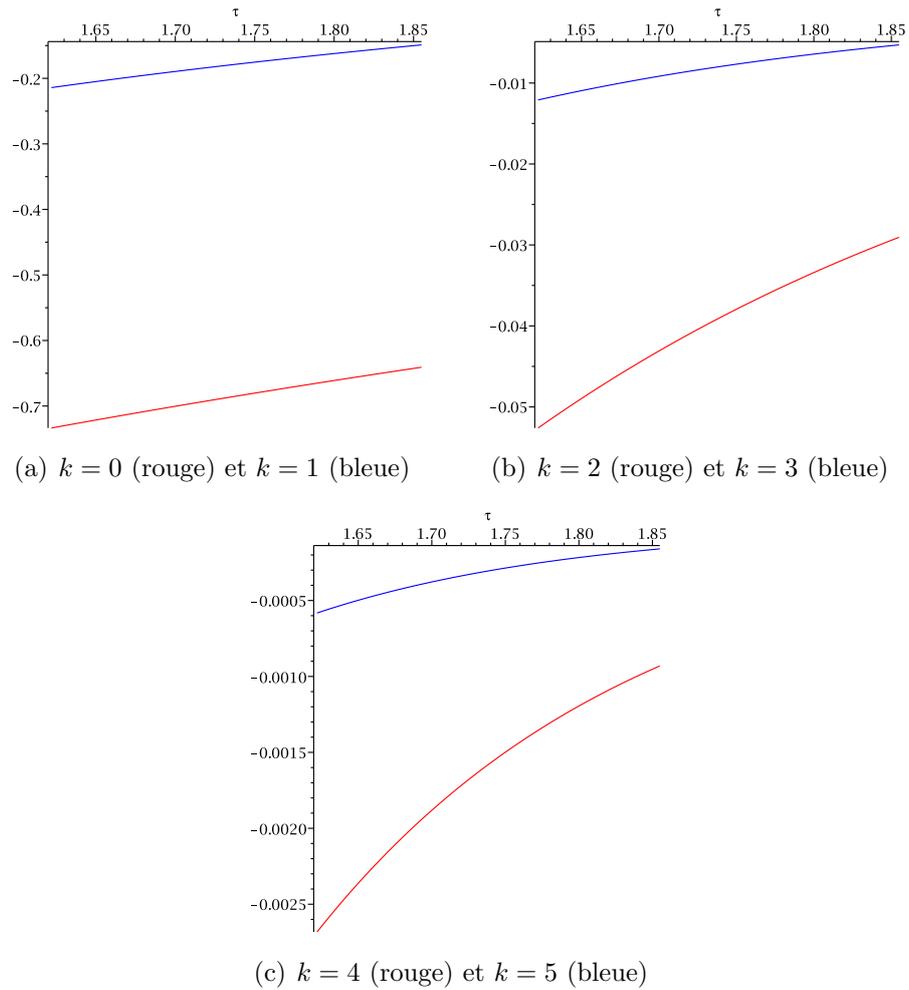


FIG. E.2 – Graphes des fonctions  $\tau \in [\tau_e, \tau_i] \mapsto Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$  pour  $k = 0..5$ .

# Table des figures

1.1	Support $I$ des données du problème de Cauchy. . . . .	10
1.2	Réaction de fusion deutérium-tritium. Source : <a href="http://www.iter.org/">http://www.iter.org/</a> . . .	22
1.3	Principe de fonctionnement d'un tokamak. Source : <a href="http://www-fusion-magnetique.cea.fr/">http://www-fusion-magnetique.cea.fr/</a> . . . . .	23
1.4	Surfaces magnétiques définies par les lignes de champ. . . . .	23
1.5	Hypothèse d'axisymétrie du tokamak. . . . .	24
1.6	Le tokamak Tore Supra. Source : <a href="http://www-fusion-magnetique.cea.fr/">http://www-fusion-magnetique.cea.fr/</a> .	26
2.1	Secteur $S_\beta(\theta)$ . . . . .	37
4.1	Cercles $\mathbb{T}_\varrho, \mathbb{T}_r, \mathbb{T}_{1-\varepsilon}, \mathbb{T}, \mathbb{T}_{1+\varepsilon}$ et $\mathbb{T}_R$ . . . . .	72
4.2	Anneau $\mathbb{A}$ , vecteurs normaux et tangents et coupure privant son bord de deux points. . . . .	80
4.3	Fonctionnement des opérateurs $K_\varrho$ et $K_1$ . . . . .	84
7.1	Coordonnées bipolaires. . . . .	136
7.2	Les cercles bleus correspondent à différentes valeurs de $\tau$ constant. Les cercles rouges correspondent à différentes valeurs de $\eta$ constant. Les vecteurs unitaires $\vec{e}_\tau$ et $\vec{e}_\eta$ constituent le repère mobile du système de coordonnées bipolaires. . . . .	139
7.3	Coupe schématique dans un plan poloïdal du tokamak Tore Supra. La courbe $\tau = \tau_1$ est la frontière extérieure du tokamak qui définit le foyer $a$ . La courbe $\tau = \tau_0$ est obtenue avec (7.11). Le domaine $\mathbb{A}'$ a pour frontière les isovaleurs $\tau_1$ et $\tau_0$ . La frontière du plasma est $\Gamma_p$ . . . . .	144
8.1	Éléments constitutifs du limiteur dans Tore Supra. Source : <a href="http://www-fusion-magnetique.cea.fr/">http://www-fusion-magnetique.cea.fr/</a> . . . . .	155
8.2	Section poloïdale de Tore Supra. Les distances sur les axes des abscisses et des ordonnées sont données en mètres. . . . .	156
8.3	Distances radiales à la frontière extérieure de Tore Supra (courbe verte), des capteurs mesurant la composante radiale du champ (croix rouges) ainsi que pour des capteurs mesurant le flux magnétique poloïdal (cercles bleus). . . . .	157
8.4	Section poloïdale de Tore Supra. Le point $C_T$ désigne le centre du cercle correspondant à la frontière extérieure $\Gamma_e$ . Le point $a$ correspond au foyer choisi pour définir le système de coordonnées toroïdales. . . . .	160
8.5	Choc n°46236 au temps $t = 9$ ms. Lignes de niveau du flux magnétique poloïdal à l'extérieur du plasma (lignes vertes) ainsi qu'à l'intérieur du plasma (lignes rouges). Source : CEA/IRFM. . . . .	161

8.6	Choc n°30648 aux temps $t = 6101, 6103, 6104, 6106, 6107$ et $6109$ ms. Lignes de niveau du flux magnétique poloïdal à l'extérieur du plasma (lignes bleues) ainsi qu'à l'intérieur du plasma (lignes oranges). Source : CEA/IRFM.	162
9.1	Construction du flux magnétique poloïdal par interpolation sur $\Gamma_e$ des données mesurées ainsi que des données calculées par EFIT. Courbes $u_{to,mo}^{EFIT}$ (bleue) et $u_{to,mo}$ (rouge)	179
9.2	Construction du potentiel scalaire par interpolation sur $\Gamma_e$ des données mesurées ainsi que des données calculées par EFIT.	179
9.3	Approximation $\tilde{u}_{to,mo}^N$ de $u_{to,mo}$ pour $N = 1, 2$ .	181
9.4	Approximation $\tilde{v}_{to,mo}^N$ de $v_{to,mo}$ pour $N = 1, 2, 3$ .	181
9.5	$\mathcal{H}_\nu(\tilde{u}_{to,mo}^N)$ et $v_{to,mo} - L(v_{to,mo})$ pour $N = 1, 2$ .	183
9.6	$\mathcal{H}_{-\nu}(\tilde{v}_{to,mo}^N)$ et $-u_{to,mo} + L(u_{to,mo})$ pour $N = 1, 2, 3$ .	183
9.7	Estimée $\Gamma_p^{(0),4N+2}$ de la frontière plasma pour $N = 1 \dots 6$ .	185
9.8	Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre $n = 0, 1, 2$ pour $N = \mathfrak{N} = 4$ .	189
9.9	Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre 0 et 1 pour $N = 4$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ .	191
9.10	Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre 0 et 1 pour $N = 4$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 5 %	194
9.11	Frontières plasma obtenues après résolution des PEB d'ordre $n = 0, 1$ pour $N = 4$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 10 %	196
C.1	Courbe rouge : graphe de $\eta \mapsto F\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh 2+1}}\right)$ . Courbe bleue : graphe de $\eta \mapsto E\left(\cos \frac{\eta}{2}; \sqrt{\frac{2}{\cosh 2+1}}\right)$ .	225
E.1	Graphes des fonctions $\tau \in [\tau_e, \tau_i] \mapsto P_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$ pour $k = 0.5$ .	245
E.2	Graphes des fonctions $\tau \in [\tau_e, \tau_i] \mapsto Q_{k-\frac{1}{2}}^1(\cosh \tau)$ pour $k = 0.5$ .	246

# Liste des tableaux

7.1	Fonctions spéciales issues de la séparation des variables dans l'équation de Laplace pour différents systèmes de coordonnées . . . . .	135
9.1	Erreurs relatives des fonctions construites après acquisition et interpolation des données. . . . .	180
9.2	Erreur relative de l'approximation $\tilde{u}_{to,mo}^N$ pour $N = 1 \dots 6$ . . . . .	180
9.3	Erreur relative de l'approximation $\tilde{v}_{to,mo}^N$ pour $N = 1 \dots 6$ . . . . .	182
9.4	Erreur relative de la conjuguée $\mathcal{H}_\nu(\tilde{u}_{to,mo}^N)$ par rapport à la fonction $v_{to,mo} - L(v_{to,mo})$ pour $N = 1 \dots 6$ . . . . .	182
9.5	Erreur relative de la conjuguée $\mathcal{H}_{-\nu}(\tilde{v}_{to,mo}^N)$ par rapport à la fonction $-u_{to,mo} + L(u_{to,mo})$ pour $N = 1 \dots 6$ . . . . .	182
9.6	Erreur relative pour l'approximation de $F_d^{EFIT}$ et valeur du flux magnétique poloïdal à la frontière plasma pour $N = 1 \dots 6$ . . . . .	184
9.7	Résolution du PEB d'ordre 0 pour $N = 1 \dots 6$ . Erreur relative de $g_0^{(0)}$ par rapport à $F_d$ ainsi que par rapport à $F_d^{EFIT}$ . Valeur du flux magnétique poloïdal à la frontière plasma. . . . .	186
9.8	Conditionnement des matrices de Gram après le PEB d'ordre 0 réalisé sur 18 harmoniques toroïdales. . . . .	187
9.9	Résolution des PEB d'ordre $n = 0, 1, 2$ pour $N = \mathfrak{N} = 4$ . . . . .	188
9.10	Résolution des PEB d'ordre $n = 0, 1$ pour $N = 1$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Le terme «Isoplasma» désigne les quantités iso <sup>(n)</sup> . . . . .	190
9.11	Résolution du PEB d'ordre $n = 0, 1$ pour $N = 1$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 5 %. . . . .	193
9.12	Résolution du PEB d'ordre $n = 0, 1$ pour $N = 1$ et $\mathfrak{N} = 1 \dots 4$ . Mesures bruitées à 10 %. . . . .	195



---

# Bibliographie

- [1] <http://www-fusion-magnetique.cea.fr/>.
  - [2] <https://fusion.gat.com/THEORY/efit/overview.html>.
  - [3] M. Abramowitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1972.
  - [4] V.M. Adamjan, Arov D.Z., and M.G. Krein. Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur-Takagi problem. *Sb. Math.*, 15 :31–73, 1971.
  - [5] R. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.
  - [6] L. Ahlfors. *Lectures on Quasiconformal Mappings*. Wadsworth and Brooks/Cole Advanced Books and Software, 1987.
  - [7] I. Akduman and R. Kress. Electrostatic imaging via conformal mapping. *Inverse Problems*, 18 :1659–1672, 2002.
  - [8] G. Alessandrini, L. Rondi, E. Rosset, and S. Vessela. The stability for the Cauchy problem for elliptic equations. *Inverse Problems*, 25 :123004.1–123004.47, 2009.
  - [9] F. Alladio and F. Crisanti. Analysis of MHD equilibria by toroidal multipolar expansions. *Nuclear Fusion*, 26 :1143, 1986.
  - [10] D. Alpay, L Baratchart, and J. Leblond. Some extremal problems linked with identification from partial frequency data. In *Proc. 10 Conf. Analyse Optimisation Systemes*. Springer-Verlag, 1992.
  - [11] M. Ariola and A. Pironti. *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. Advances in Industrial Control. Springer-Verlag, 2008.
  - [12] K. Astala. Area distortion of quasi-conformal mappings. *Act. Math.*, 173 :37–60, 1994.
  - [13] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin. *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*. Princeton Math. Ser. Princeton University Press, 2008.
  - [14] K. Astala and L. Päivärinta. A boundary integral equation for Calderón’s inverse conductivity problem. In *Proc. 7th Int. Conf. on Harmonic Analysis and PDEs.*, 2004.
-

- 
- [15] K. Astala and L. Päivärinta. Calderón's inverse conductivity problem in the plane. *Annals of Mathematics*, 163 :265–299, 2006.
- [16] B. Atfeh, L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Bounded extremal and Cauchy-Laplace problems on the sphere and shell. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 16 :177–203, 2010.
- [17] P. Auscher and M. Qafsaoui. Observations on  $W^{1,p}$  estimates for divergence elliptic equations with VMO coefficients. *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat.*, 8 :487–509, 2002.
- [18] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey. *Harmonic Function Theory*, volume 137 of *Grad. Texts in Math.* Springer-Verlag, New York, 1992.
- [19] M. Azaiez, F. Ben Belgacem, and H. El Fekih. On Cauchy's problem II. Completion, regularization and approximation. *Inverse Problems*, 22 :1307, 2006.
- [20] L. Baratchart, Y. Fischer, and J. Leblond. Dirichlet problem for  $\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0$  and generalized Hardy spaces in annular domains. En préparation.
- [21] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, and J.R. Partington. Asymptotic estimates for interpolation and constrained approximation in  $H^2$  by diagonalization of toeplitz operators. *Integral Equations Operator Theory*, 45 :269–299, 2003.
- [22] L. Baratchart and J. Leblond. Hardy approximation to  $L^\infty$  functions on subsets of the circle. *Constructive Approximation*, 12 :423–436, 1996.
- [23] L. Baratchart and J. Leblond. Hardy approximation to  $L^p$  functions on subsets of the circle with  $1 \leq p < \infty$ . *Constructive Approximation*, 14 :41–56, 1998.
- [24] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Problems of Adamjan-Arov-Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions. *Constructive Approximation*, 16 :333–358, 2000.
- [25] L. Baratchart, J. Leblond, S. Rigat, and E. Russ. Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation. *Journal of Functional Analysis*, 259 :384–427, 2010.
- [26] L. Baratchart, J. Leblond, and F. Seyfert. Constrained extremal problems in the Hardy space  $H^2$  and Carleman's formulas. Technical Report 7087, INRIA Sophia Antipolis, 2009. <http://hal.inria.fr/inria-00429898/fr/>.
- [27] L. Baratchart and F. Seyfert. An  $L^p$  analog to AAK theory for  $p \geq 2$ . *Journal of functional analysis*, 191 :52–122, 2002.
- [28] R. Beals and R. Coifman. The spectral problem for the Davey-Stewartson and Ishimori hierarchies. *Nonlinear Evolution Equations Integrability and Spectral Methods*, pages 15–23, 1988.
- [29] B. Beauzamy. *Introduction to Banach Spaces and their Geometry*. Mathematics Studies. North-Holland, 1985.
-

- [30] A. Bécoulet, J. Bucalossi, D. van Houtte, G. Martin, F. Saint-Laurent, and B. Saoutic. Real time control of fully non-inductive operation in Tore Supra leading to 6 min, 1 GJ plasma discharges. *Fusion Engineering and Design*, 74 :651–658, 2005.
- [31] H. Ben Ameer, M. Burger, and B. Hackl. Level set methods for geometric inverse problems in linear elasticity. *Inverse Problems*, 20 :673–696, 2004.
- [32] F. Ben Belgacem and H. El Fekih. On Cauchy’s problem I. A variational Steklov-Poincaré theory. *Inverse Problems*, 21 :1915, 2005.
- [33] L. Bers. *The Theory of Pseudoanalytic Functions*. Lectures Notes. New York University, 1953.
- [34] L. Bers and L. Nirenberg. On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications. In *Convegno Internazionale Sulle Equazioni Derivate e Parziali*, 1954.
- [35] J. Blum. *Numerical Simulation and Optimal Control in Plasma Physics with Applications to Tokamak*. Modern Applied Mathematics. Wiley Gauthier-Villars, 1989.
- [36] J. Blum, A. Boboc, C. Boulbe, M. Brix, P. DeVries, D. Faugeras, B. Mazon, S. Sharapov, and L. Zabeo. EQUINOX : A real-time equilibrium code and its validation at JET. In L. Fortuna, A. Fradkov, and M. Frasca, editors, *From physics to control through an emergent view*, volume 15 of *World Scientific Book Series On Nonlinear Science, Series B*, pages 327–333. World Scientific, 2010.
- [37] J. Blum, C. Boulbe, S. Brémond, B. Faugeras, P. Grangirard, V. Hertout, and E. Moreau, P. Nardon. New developments of the CEDRES++ equilibrium code with application to Tore Supra, JT-60SA and ITER. In *Proceedings of the 26th Symposium on Fusion Technology*, 2010.
- [38] J. Blum, C. Boulbe, and B. Faugeras. Reconstruction of the equilibrium of the plasma in a Tokamak and identification of the current density profile in real time. *Journal of Computational Physics*, en presse, 2010. doi :10.1016/j.jcp.2011.04.005.
- [39] J. Blum, B. Keegan, E. Lazzaro, J. O’Rourke, , and Y. Stephan. Problems and methods of self-consistent reconstruction of tokamak equilibrium profiles from magnetic and polarimetric measurements. *Nuclear Fusion*, 30 :1475, 1990.
- [40] P. Boissoles. A propos des intégrales elliptiques. <http://w3.bretagne.ens-cachan.fr/math/people/patrice.boissoles/Cours/intelliptiques.pdf>.
- [41] B. Bojarski. Homeomorphic solutions of Beltrami systems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 102 :661–664, 1955.
- [42] K. Bosak. *Real-time numerical identification of plasma in tokamak fusion reactor*. PhD thesis, University of Wroclaw, 2001.
- [43] J. Bourgain and T. Wolff. A remark on gradients of harmonic functions in dimension  $d \geq 3$ . *Colloquium Mathematicum*, 60 :253–260, 1990.
-

- 
- [44] L. Bourgeois. A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation. *Inverse Problems*, 21 :1087–1104, 2005.
- [45] L. Bourgeois and J. Dardé. A duality-based method of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem in the presence of noisy data. *Inverse Problems*, 26 :095016(21pp), 2010.
- [46] H. Brézis. *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, 1999.
- [47] H Brézis and L. Nirenberg. Degree theory and BMO, Part I : Compact manifolds without boundaries. *Selecta Mathematica*, 1 :197–263, 1995.
- [48] R. Brown and G. Uhlmann. Uniqueness in the inverse conductivity problem for non-smooth conductivities in two dimensions. *Comm. Partial Diff. Equations*, 22 :1009–1027, 1997.
- [49] M. Burger. A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. *Interfaces and Free Boundaries*, 5 :301–329, 2003.
- [50] A.P. Calderón and A. Zygmund. On the existence of certain singular integrals. *Acta Math.*, 88 :85–139, 1952.
- [51] S. Campanato. *Elliptic Systems in Divergence Form, Interior Regularity*. Quaderni, Scuola Normale Superiore Pisa, 1980.
- [52] T. Carleman. *Les fonctions quasi analytiques. Leçons professées au Collège de France*. Collection de monographies sur la théorie des fonctions. Gauthiers-Villars, 1926.
- [53] S. Chaabi. *Etude de l'équation de Grad-Shafranov homogène*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille, 2012.
- [54] I. Chalendar and J.R Partington. Approximation problems and representations of Hardy spaces in circular domains. *Studia Mathematica*, 136 :255–269, 1999.
- [55] J.R. Chang, W.C. Yeih, and M.H. Shieh. On the modified Tikhonov's regularization method for the Cauchy problem of the Laplace equation. *J. Marine Sc. Tech.*, 9 :113–121, 2001.
- [56] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, and F. Pons. Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization. *Inverse Problems*, 17 :553–570, 2001.
- [57] A. Clop, D. Faraco, J. Mateu, J. Orobitg, and X. Zhong. Beltrami equations with coefficients in the Sobolev space  $W^{1,p}$ . *Publ. Mat.*, 53 :197–230, 2009.
- [58] H.S. Cohl. Portent of Heines reciprocal square root identity. In *Proceedings of the 3D stellar evolution, ASP conference*, 2003.
- [59] D. Colton and R. Kress. *Integral Equation Methods In Scattering Theory*. Wiley, 1983.
-

- 
- [60] B. Couturier, C. Grisolia, D. Martin, G. Moulin, and F. Saint Laurent. The real time plasma control system of Tore Supra. *Fusion Engineering and Design*, 43 :371–376, 1999.
- [61] D. Cvijovic. The Fourier series expansion of the Legendre incomplete elliptic integrals of the first and second kind. *Integrals Transforms and Special Functions*, 21 :236–242, 2010.
- [62] G. David. Solutions de l'équation de Beltrami avec  $\|\mu\|_\infty = 1$ . *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.*, 13 :25–70, 1988.
- [63] P.L. Duren. *Theory of  $H^p$  Spaces*, volume 38 of *Pure Appl. Math.* Academic Press, 1970.
- [64] M. Efendiev and E. Russ. Hardy spaces for the conjugated Beltrami equation in a doubly connected domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, en presse, 2011. doi : 10.1016/j.jmaa.2011.05.031.
- [65] R.S. Falk and P.B. Monk. Logarithmic convexity of discrete harmonic functions and the approximation of the Cauchy problem for Poisson's equation. *Math. Comput.*, 47 :135–149, 1986.
- [66] P. Fatou. Séries trigonométriques et séries de Taylor. *Acta Math.*, 30 :335–400, 1906.
- [67] I. Fedotova and N. Virchenko. *Generalized Associated Legendre Functions and their Applications*. World Scientific, 2001.
- [68] C. Fefferman. Characterizations of bounded mean oscillation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 :587–588, 1971.
- [69] J.R. Ferron, R.J. Groebner, L.L. Howl, W. Lao, H. St. John, E.J. Strait, and T.S. Taylor. Equilibrium analysis of current profiles in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 30 :1035, 1990.
- [70] J.R. Ferron, D.A. Humphreys, J.A. Leuer, L.L. Lao, H.E. St. John, and M.L. Walker. Real time equilibrium reconstruction for tokamak discharge control. *Nuclear Fusion*, 38 :1055, 1998.
- [71] Y. Fischer and J. Leblond. Solutions to conjugate Beltrami equations and approximation in generalized Hardy spaces. *Advances in Pure and Applied Mathematics*, 2 :47–63, 2010.
- [72] Y. Fischer, J. Leblond, J.R. Partington, and E. Sincich. Bounded extremal problems in Hardy spaces for the conjugate Beltrami equation in simply connected domains. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 31 :264–285, 2011.
- [73] Y. Fischer, B. Marteau, and Y. Privat. Some inverse problems around the tokamak Tore Supra. A paraître dans *Communications on Pure and Applied Mathematics*.
- [74] J.P. Freidberg. *Ideal Magnetohydrodynamics*. Plenum Press, 1987.
-

- 
- [75] J. Garnett. *Bounded Analytic Functions*, volume 96 of *Pure Appl. Math.* Academic Press, 1981.
- [76] A. Gil and J. Segura. Evaluation of toroidal harmonics. *Computer Physics Communications*, 124 :104–122, 2000.
- [77] A. Gil and J. Segura. A new version of computer program for the evaluation of toroidal harmonics. *Computer Physics Communications*, 139 :186–191, 2001.
- [78] P. Grisvard. *Boundary Value Problems in non-smooth Domains*. Pitman, London, 1985.
- [79] B. Guillerminet, F. Leroux, D. Moulin, and F. Saint-Laurent. Real time data acquisition system for control and continuous acquisition in Tore Supra. In *Proceedings of the 2003 IEEE Real Time Conference*, 2003.
- [80] V. Gutlianskii, O. Martio, T. Sugawa, and M. Vuorinen. On the degenerate Beltrami equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357 :875–900, 2005.
- [81] J. Hadamard. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton University Bulletin*, 13 :49–52, 1902.
- [82] J. Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven Yale University Press, 1923.
- [83] J. Hadamard. *La Théorie des Équations aux Dérivées Partielles*. Editions Scientifiques, 1964.
- [84] H. Haddar and R. Kress. Conformal mappings and inverse boundary value problems. *Inverse Problems*, 21 :1–19, 2005.
- [85] H. Haddar and R. Kress. Conformal mappings and impedance tomography. *Inverse Problems*, 26 :074002(18pp), 2010.
- [86] C. Hansen. Analysis of discrete ill-posed problems ny means of the L-curve. *SIAM Review*, 34 :561–580, 1992.
- [87] H.E. Heine. *Handbuch der Kugelfunctionen, Theorie and Anwendungen*. Druck und Verlag von G. Reimer, Berlin, 1881.
- [88] F. Hofmann and G. Tonetti. Tokamak equilibrium reconstruction using Faraday rotation measurements. *Nuclear Fusion*, 28 :1871, 1988.
- [89] L. Hörmander. *Complex Analysis in Several Variables*. North Holland, 1990.
- [90] A. Hubert. Some results on generalized axially symmetric potentials. In *Proceedings of the conference on differential equations (dedicated to A. Weinstein)*, 1956.
- [91] T. Iwaniec and G. Martin. What's new for the Beltrami equation? In *Proc. Centre Math. Appl.*, 2000.
- [92] T. Iwaniec and G. Martin. The Beltrami equation. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 191 :893, 2007.
-

- 
- [93] M. Jaoua, J. Leblond, M. Mahjoub, and J.R. Partington. Robust numerical algorithms based on analytic approximation for the solution of inverse problems in annular domains. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 74 :481–506, 2009.
- [94] A.G. Kellman, L.L. Lao, W. Pfeiffer, H. St. John, and R.D. Stambaugh. Reconstruction of current profile parameters and plasma shapes in tokamaks. *Nuclear Fusion*, 25 :1611, 1985.
- [95] M.V. Klibanov and F. Santosa. A computational quasi-reversibility method for Cauchy problems for Laplace’s equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 51 :1653–1675, 1991.
- [96] R.V. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements II. Interior results. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 38 :643–667, 1985.
- [97] P. Koosis. *Introduction to  $H^p$  Spaces*. Cambridge University Press, 1980.
- [98] V.A. Kozlov, V.G. Mazya, and A.V. Fomin. An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equation. *Comput. Math. Phys.*, 31 :45–52, 1991.
- [99] V.V. Kravchenko. *Applied Pseudoanalytic Function Theory*. Frontiers in Math. Birkhäuser Verlag, 2009.
- [100] M.G. Krein and P.Y. Nudel’man. approximation of  $L^2(\omega_1, \omega_2)$  functions by minimum-energy transfer functions of linear systems. *Problemy Peredachi Informatsii*, 11 :37–60, 1975.
- [101] R. Kress. Inverse Dirichlet problem and conformal mapping. *Mathematics and Computers in Simulation*, 66 :255–265, 2004.
- [102] K. Lackner. Computation of ideal MHD equilibria. *Computer Physics Communications*, 12 :33–44, 1976.
- [103] R. Lattès and J.L. Lions. *Méthode de Quasi-réversibilité et Applications*. Dunod, 1967.
- [104] M.M. Lavrent’ev, V.G. Romanov, and S.P. Shishatskii. *Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, volume Translations of Mathematical Monographs 64. American Mathematical Society, 1986.
- [105] N.N. Lebedev. *Special Functions and their Applications*. Dover Publications, 1972.
- [106] J. Leblond, M. Mahjoub, and J.R. Partington. Analytic extensions and Cauchy-type inverse problems on annular domains : stability results. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, 14 :189–204, 2006.
- [107] J. Leblond, J.P. Marmorat, and J.R. Partington. Analytic approximation with real constraints, with applications to inverse diffusion problems. *Journal of Inverse Ill-Posed Problems*, 16 :89–105, 2008.
-

- 
- [108] O. Lehto and K.I. Virtanen. *Quasiconformal Mappings in the Plane*. Springer-Verlag, 1973.
- [109] A. Leitão and M. Marques Alves. On level set type methods for elliptic Cauchy problems. *Inverse Problems*, 23 :2207–2222, 2007.
- [110] J.L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, 1968.
- [111] G. Martin, F. Saint-Laurent, and F. Sourd. Disruption analysis on Tore Supra using a fast equilibrium code. In *Proceedings of the 30th EPS Conference on Contr. Fusion and Plasma Phys.*, 2003.
- [112] D-J. Mercier. *Cours de Géométrie. Préparation au CAPES et à l'Agrégation*. Sciences Mathématiques. Publibook, 2004.
- [113] B.Ph. Milligen and A. Lopez Fraguas. Expansion of vacuum magnetic fields in toroidal harmonics. *Computer Physics Communications*, 81 :74–90, 1994.
- [114] V.A Morozov. *Methods for Solving Incorrectly Posed Problems*. Springer-Verlag, 1986.
- [115] C.B. Morrey. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43 :126–166, 1938.
- [116] P.M. Morse and H. Feshbach. *Methods of Theoretical Physics*. Cambridge University press, 1953.
- [117] Z. Nashed. *Approximate Regularized Solutions to Improperly Posed Linear Integral and Operator Equations*. Constructive and Computational Methods for Differential and Integral Equation. Springer-Verlag, 1974.
- [118] Ch. Pommerenke. *Boundary Behaviour of Conformal Maps*. Springer-Verlag, 1992.
- [119] C. Pucci. Sui problemi di Cauchy non «ben posti». *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 18 :473–477, 1955.
- [120] F. Riesz. Über die Randwerte einer analytischen Funktion. *Math. Z.*, 78 :87–95, 1923.
- [121] F. Riesz. Sur les fonctions conjuguées. *Math. Z.*, 27 :218–244, 1927.
- [122] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy Classes and Operator Theory*. Oxford University press, 1985.
- [123] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mc Graw Hill, 1982.
- [124] D. Sarason. *The  $H^p$  Spaces of an Annulus*. Memoirs of the American Mathematical Society. John Wiley and Sons, 1966.
- [125] A. Schneck. Constrained hardy space approximation. *Journal of Approximation Theory*, 162 :1466–1483, 2010. doi : 10.1016/j.jat.2010.03.006.
-

- 
- [126] V.D. Shafranov. On magnetohydrodynamical equilibrium configurations. *Soviet Physics JETP*, 6 :545–554, 1958.
- [127] J. Sheffield. The Physics of Magnetic Fusion Reactors. *Reviews of Modern Physics*, 66 :1015–1103, 1994.
- [128] V.I. Smirnov. Sur les valeurs limites des fonctions, régulières à l’intérieur d’un cercle. *Journal de la Société Phys.-Math. de Léningrade*, 2 :155–179, 1928.
- [129] E.M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press, 1970.
- [130] A. Tarantola. *Inverse Problem Thoery*. Elsevier, 1987.
- [131] A.N. Tikhonov and V.Y. Arsenin. *Solutions to Ill-Posed Problems*. Winston-Wiley, 1977.
- [132] I.N. Vekua. *Generalized Analytic Functions*. Addison-Wesley Publ. Co., 1962.
- [133] W. Wang. A remark on gradients of harmonic functions. *Revista Matemática Iberoamericana*, 11 :227–245, 1995.
- [134] J. Wesson. *Tokamaks*. Oxford Engineering Science Series. Clarendon Press, 1987.
- [135] W.P. Ziemer. *Weakly Differentiable Functions*, volume 120 of *Grad. Texts in Math*. Springer-Verlag, New York, 1989.
- [136] W. Zwingmann. Equilibrium analysis of steady state tokamak discharges. *Nuclear Fusion*, 43 :842, 2003.
-