



**HAL**  
open science

# Modélisation dynamique de systèmes complexes pour le calcul de grandeurs fiabilistes et l'optimisation de la maintenance

William Lair

► **To cite this version:**

William Lair. Modélisation dynamique de systèmes complexes pour le calcul de grandeurs fiabilistes et l'optimisation de la maintenance. Probabilités [math.PR]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2011. Français. NNT: . tel-00643981v2

**HAL Id: tel-00643981**

**<https://theses.hal.science/tel-00643981v2>**

Submitted on 24 Nov 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR  
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET LEURS APPLICATIONS E.D. 211

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de  
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR  
*Spécialité : Mathématiques*

par

**William LAIR**

*Titre :*

### MODÉLISATION DYNAMIQUE DE SYSTÈMES COMPLEXES POUR LE CALCUL DE GRANDEURS FIABILISTES ET L'OPTIMISATION DE LA MAINTENANCE

soutenue publiquement le 18 novembre 2011

#### JURY

Anne GEGOUT-PETIT	Maître de Conférences, UVSB	<i>Examinatrice</i>
Antoine GRALL	Professeur des Universités, UTT	<i>Rapporteur</i>
Ivan KOJADINOVIC	Professeur des Universités, UPPA	<i>Examineur</i>
Pierre-Etienne LABEAU	Chercheur Qualifié FNRS, ULB	<i>Rapporteur</i>
Sophie MERCIER	Professeur des Universités, UPPA	<i>Directrice de thèse</i>
Michel ROUSSIGNOL	Professeur des Universités, UPE	<i>Co-Directeur de thèse</i>
Rachid ZIANI	Chef de projet statistique, SNCF	<i>Encadrant industriel</i>

*Version publique*



# Remerciements

Après avoir rédigé un rapport de thèse, je pensais qu'écrire la page des remerciements serait le plus simple. En fait, il n'en est rien... Il faut choisir les bons mots et n'oublier personne! Mais les mots sont difficiles à trouver, surtout lorsqu'il s'agit de remercier les personnes sans qui cette thèse n'aurait pas pu être possible. Je tiens donc à remercier **Rachid Ziani**, mon encadrant industriel SNCF. Rachid, tu as su m'aider et me soutenir tous les jours pendant trois ans. Travailler avec toi a été un plaisir et une très bonne expérience. Je remercie également ma directrice de thèse, **Sophie Mercier**. Malgré la distance qui sépare Pau de Paris, Sophie, tu as toujours été disponible pour répondre à mes - bonnes et mauvaises - questions. Tes qualités pédagogiques et tes grandes connaissances scientifiques m'ont aidé à surmonter les différents obstacles rencontrés pendant ces trois années. Enfin je remercie mon co-directeur, **Michel Roussignol**. Michel, tes conseils sur le plan scientifique et humain m'ont beaucoup aidé. A vous trois, je vous remercie encore très chaleureusement, votre encadrement et votre sympathie m'ont permis d'avancer sereinement et d'apprendre énormément.

Je tiens à remercier sincèrement **Pierre-Etienne Labeau** et **Antoine Grall** d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Merci de l'attention que vous avez porté à mon travail. Je remercie également **Anne Gégout-Petit** et **Ivan Kojadinovic** d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse en tant qu'examinateurs.

Ma gratitude va également à **Fabien Santos** et **Jean-Marc Dayma**, agents SNCF de la direction de l'Infrastructure, pour m'avoir accordé du temps - et de l'argent! - dans le cadre de l'étude d'un système ferroviaire. Leurs connaissances expertes ont permis d'appréhender au mieux les problématiques auxquelles cette thèse devait répondre. J'espère donc que les résultats de ce travail correspondent à leurs attentes.

J'ai une pensée nostalgique pour mes deux anciens stagiaires de l'ENSAI, **Maxime Debricon** et **Floran Girard**, dont le travail, notamment sur les énormes bases de données de la SNCF, m'a bien aidé. Je vous remercie.

Je tiens à remercier l'ensemble des agents de la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF. J'ai une pensée particulière pour **Julien Pouget**, **Yann Riffonneau**, **Hassan Ghannoum**, **Benjamin L'Henoret**, **Marina Thioun**, **Oriane Gatin**, **Fabrice Ganansia**, **David Sanz**, **Philippe David**, **Philippe Galtier** et **Jeanne Feillée** qui m'ont accompagné au quotidien. Je remercie particulièrement **Vincent Delcourt**, chef du groupe Energétique et Techniques de Maintenance, et **Philippe Berthier**, chef du département Service, Réseaux, Optimisation; ils m'ont toujours accordé mes congés! Travailler avec vous restera un très bon souvenir. J'ai passé de très bons moments avec vous tous, vous allez me manquer.

Merci à ma famille et à ma belle-famille! Pendant toutes mes études, vous m'avez encouragé et soutenu. Merci frère **Olive**, **Papa** et **Cidalia**. Merci à mes grands-parents **Huguette**, **Pierre** et **Fernande**. Merci **Françoise**, **Vincent**, **Charlotte** et **Anne-Sophie** à qui je dois énormément.

Enfin, je termine par remercier la personne qui compte le plus pour moi, il s'agit de mon épouse **Pauline Giacobbi**. Tout au long de ma thèse, tu m'as toujours soutenu même quand je te parlais de Markov pendant nos vacances. Tu m'as toujours bien conseillé et je ne te remercierai jamais assez.



# Table des matières

<b>Introduction générale et contexte de l'étude</b>	<b>9</b>
<b>1 Etat de l'art : méthodes de fiabilité système</b>	<b>13</b>
1.1 Introduction	13
1.2 Modélisation et quantification en fiabilité classique	14
1.2.1 Modèles stochastiques classiques	14
1.2.1.1 Les chaînes de Markov	14
1.2.1.2 Les processus markoviens de sauts	16
1.2.1.3 Les processus semi-markoviens	17
1.2.2 Outils pour la quantification	18
1.2.2.1 Calculs analytiques	18
1.2.2.2 Les simulations de Monte-Carlo	18
1.2.2.3 Les méthodes de discrétisation	19
1.2.3 Outils d'aide à la modélisation	19
1.2.3.1 Les réseaux de Pétri stochastiques	19
1.2.3.2 Les BDMP (Boolean logic Driven Markov Processes)	20
1.2.3.3 Les réseaux bayésiens dynamiques	21
1.3 Introduction aux processus markoviens déterministes par morceaux	22
1.3.1 Le modèle	22
1.3.2 Outils pour leur quantification	26
1.3.2.1 Les simulations de Monte-Carlo	26
1.3.2.2 Les méthodes de discrétisation	27
1.3.2.3 Les arbres dynamiques discrets	28
1.3.3 Outils pour leur modélisation	28
1.3.3.1 Les réseaux de Pétri colorés	28
1.3.3.2 Les automates stochastiques hybrides	28
1.4 Méthodologie retenue pour les cas d'application SNCF	29
<b>2 Méthode déterministe de traitement numérique</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction	33
2.2 Construction théorique des processus markoviens déterministes par morceaux	34
2.2.1 Hypothèses	34
2.2.2 Construction probabiliste du processus	35
2.2.3 Équation de renouvellement markovien	35
2.2.4 Probabilités de transition	36
2.2.5 Le générateur étendu et équations de Chapman-Kolmogorov	36
2.2.6 Cas d'un PDMP non-homogène	38
2.3 Traitement numérique par un schéma de volumes finis	38
2.3.1 Présentation du schéma	38
2.3.2 Étude de la convergence	45
2.4 Quantités d'intérêt estimées par le schéma de volumes finis	55
2.4.1 Fiabilité	56
2.4.2 Disponibilité	56
2.4.3 Nombre d'occurrences d'un événement	57
2.5 Méthodes de simplification et d'approximation	58

2.5.1	Introduction . . . . .	58
2.5.2	Réduction de l'espace par la modélisation . . . . .	59
2.5.2.1	Réduction de l'espace en tenant compte des indépendances entre composants . . . . .	59
2.5.2.2	Réduction du nombre de variables physiques . . . . .	60
2.5.3	La méthode d'approximation . . . . .	61
2.5.3.1	Pourquoi approximer? . . . . .	61
2.5.3.2	Description de la méthode . . . . .	61
2.5.3.3	Application de la méthode . . . . .	64
2.5.3.4	Bilan des tests . . . . .	74
2.5.4	Changement de modélisation . . . . .	76
2.5.4.1	Introduction . . . . .	76
2.5.4.2	Le changement de processus . . . . .	77
2.5.4.3	Schéma de volumes finis adapté au PDMP non-homogène . . . . .	80
2.5.4.4	Nouvelle représentation et approximation . . . . .	80
2.5.4.5	Bilan . . . . .	82
2.6	Conclusion . . . . .	82
<b>3</b>	<b>Etude d'un benchmark de fiabilité dynamique</b>	<b>85</b>
3.1	Introduction et contexte . . . . .	85
3.2	Présentation du cas d'étude . . . . .	85
3.3	Modélisation du système par un PDMP . . . . .	88
3.4	Résultats numériques . . . . .	89
3.5	Conclusion . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Méthodes de modélisation probabiliste de la durée de vie</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Méthodes probabilistes de modélisation de la durée de vie . . . . .	93
4.2.1	La loi de Weibull . . . . .	93
4.2.2	La loi de Bertholon . . . . .	95
4.2.3	Une généralisation de la loi de Weibull : modèle 'New Modified Weibull Distribution' . . . . .	96
4.3	Modélisation de l'effet de la maintenance . . . . .	97
4.3.1	Modèle d'âge virtuel . . . . .	97
4.3.2	Le modèle $ARA_1$ . . . . .	98
4.3.2.1	Présentation théorique du modèle . . . . .	98
4.3.2.2	Loi intrinsèque de type Weibull . . . . .	99
4.3.2.3	Loi intrinsèque de type Bertholon . . . . .	100
<b>5</b>	<b>Optimisation de la maintenance d'un système de climatisation de TER</b>	<b>101</b>
5.1	Contexte de l'étude . . . . .	101
5.2	Description du système climatisation . . . . .	102
5.3	Étude de la durée de vie des composants . . . . .	102
5.4	Modélisation du système par PDMP . . . . .	102
5.5	Quantification avec le schéma de volumes finis . . . . .	104
5.6	Les stratégies de maintenance préventive pour le système de climatisation . . . . .	105
5.6.1	Deux stratégies de maintenance préventive . . . . .	105
5.6.1.1	La révision générale . . . . .	105
5.6.1.2	La stratégie de maintenance opportuniste . . . . .	105
5.6.2	Modélisation des stratégies de maintenance préventive . . . . .	105
5.6.2.1	La révision générale . . . . .	106
5.6.2.2	La stratégie de maintenance opportuniste . . . . .	106
5.7	Optimisation de la maintenance . . . . .	106
5.7.1	Critères d'optimisation . . . . .	106
5.7.2	Fonction de coût . . . . .	106
5.7.3	Stratégies optimales selon le critère de coût . . . . .	107
5.8	Conclusion . . . . .	110

---

<b>6</b>	<b>Maintenance effect modelling and optimization of a two-components system</b>	<b>111</b>
6.1	Introduction . . . . .	111
6.2	The two-components system . . . . .	112
6.2.1	System presentation . . . . .	112
6.2.2	Preventive maintenance strategy . . . . .	112
6.3	Components life-time and maintenance effect modelling . . . . .	112
6.3.1	Model presentation . . . . .	112
6.3.2	Results . . . . .	114
6.4	System modelling . . . . .	116
6.4.1	Piecewise Deterministic Markov Processes . . . . .	116
6.4.2	PDMP quantification with a finite volume algorithm . . . . .	117
6.5	Maintenance optimization . . . . .	118
6.5.1	A new maintenance strategy with preventive renewal of components . . . . .	118
6.5.2	Cost function . . . . .	119
6.5.3	Results . . . . .	120
6.6	Conclusions . . . . .	120
	<b>Conclusions générales et perspectives</b>	<b>123</b>
	<b>Publications et communications</b>	<b>125</b>
	<b>A Notations</b>	<b>127</b>
	<b>B Minimisation d'une fonction de coût avec un algorithme de Recuit Simulé</b>	<b>131</b>





# Introduction générale et contexte de l'étude

## Préambule

Ce document est une version publique du rapport de thèse et ne correspond pas au mémoire qui a été évalué par le jury. Les études menées à la SNCF sont confidentielles, ainsi une grande partie des travaux menés pendant la thèse n'est détaillée dans ce document.

## Contexte

Pour une compagnie de chemins de fer telle que la SNCF, la maintenance des installations de signalisation et de son matériel roulant est une tâche primordiale car elle impacte directement la ponctualité des trains et la sécurité. La SNCF effectue des investissements importants en entretien afin de garantir un service sûr et de qualité. Ces investissements ne sont pas toujours suffisants pour enrayer le vieillissement des installations de signalisation et du matériel roulant. Par exemple, un audit récent sur l'état du réseau ferré national français, voir [Rivier and Putallaz, 2005], a mis en évidence que celui-ci vieillit malgré la maintenance préventive en vigueur entraînant une perte de capital. Une conclusion de cet audit est que « la seule manière de garantir la pérennité du réseau consiste à investir pour rajeunir le patrimoine » à travers du renouvellement préventif. La SNCF entreprend des études, dont cette thèse fait partie, afin de justifier la mise en place de nouveaux plans de maintenance pouvant inclure du renouvellement préventif.

La défaillance d'une installation de signalisation entraîne généralement des perturbations sur le réseau. Une maintenance corrective a pour objectif de rétablir la fonction le plus rapidement possible afin de limiter ces perturbations. Les agents de maintenance remettent le système en fonctionnement, en réparant ou en remplaçant le ou les composants défaillants, sans effectuer d'actions supplémentaires. Une installation de signalisation est régulièrement entretenue selon un cycle de maintenance court allant de six à vingt quatre mois, afin de limiter les effets de la dégradation engendrés par le passage des trains ou par les conditions météorologiques.

La défaillance d'un matériel roulant peut avoir pour conséquence d'annuler la circulation d'un train, dégradant ainsi l'image de marque de la SNCF. La maintenance corrective de ce type de système peut nécessiter son transport jusqu'à un centre de maintenance ce qui entraîne des coûts importants en logistique et en indisponibilité. Un matériel roulant est généralement soumis à des maintenances préventives groupées selon différents niveaux allant de un à cinq. Les niveaux un à trois représentent des maintenances courantes alors que les niveaux quatre et cinq représentent de gros travaux.

Le plan de maintenance préventive d'un système ferroviaire est défini par des experts SNCF, pouvant avoir à leur disposition des indications de fiabilité fournies par le constructeur. Ces indications ne prennent pas convenablement en compte le stress engendré par les sollicitations en conditions réelles, qui a pour effet d'accélérer la dégradation. Ces informations ne sont donc pas suffisantes. L'étude du retour d'expérience par des méthodes statistiques et probabilistes est donc nécessaire. Cette étude peut permettre d'évaluer des quantités pouvant servir d'aide à la décision aux experts.

Ainsi, la SNCF mène des études fiabilistes basées sur le retour d'expérience en exploitation dont l'objectif est de déterminer, pour chaque système, une stratégie de maintenance préventive optimale afin de réduire sa

dégradation. Le choix d'un plan de maintenance étant fortement contraint par son coût, il est important d'évaluer l'investissement qu'il engendre ainsi que son effet sur les défaillances. L'effet d'une stratégie de maintenance préventive sur le fonctionnement du système est déterminé à travers l'évaluation de quantités fiabilistes telles que la fiabilité, la disponibilité ou encore la durée moyenne de fonctionnement (Mean Up Time ou MUT). Le calcul de ces quantités va permettre de comparer différentes stratégies de maintenance et ainsi de déterminer celle qui est la mieux adaptée. Dans le cas d'une optimisation selon un critère économique, il s'agit d'évaluer le plan de maintenance dont le coût associé (comprenant l'investissement en maintenance préventive et les coûts de défaillance) est le plus bas possible. L'objectif est de trouver un équilibre entre l'effort en maintenance préventive et un nombre de défaillances 'acceptable'. Deux situations sont à éviter :

- Maintenance excessive : les investissements sont excessifs par rapport à l'efficacité des maintenances,
  - Maintenance insuffisante : la maintenance préventive ne parvient pas à réduire suffisamment la dégradation.
- Selon [Rivier and Putallaz, 2005], la maintenance du réseau se trouve actuellement dans ce cas de figure.

## Méthodologie

Le vieillissement des composants et la complexité des stratégies de maintenance étudiées nous obligent à avoir recours à de nouveaux modèles probabilistes afin de répondre à la problématique. Les modèles probabilistes que l'on peut trouver dans la littérature et qui sont classiquement utilisés obligent en effet à effectuer des hypothèses simplificatrices fortes ce qui diminue la pertinence des résultats. Nous proposons d'utiliser un processus stochastique issu de la fiabilité dynamique nommé processus markovien déterministe par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Process ou PDMP). Un des enjeux scientifiques de cette thèse est de montrer qu'un PDMP est bien adapté dans le cadre de l'étude fiabiliste d'un système multi-composants maintenu. Ce processus n'est pas, à notre connaissance, utilisé à ce jour pour répondre à ce type de problématique dans le milieu industriel.

L'évaluation des quantités d'intérêt associées à un PDMP peut être réalisée par différentes méthodes. Cependant elles présentent chacune une limite qui nous empêche de les appliquer directement. Un objectif de cette étude est d'améliorer une méthode de quantification, en l'occurrence un schéma de volumes finis, afin de l'adapter à l'étude d'un système multi-composants vieillissants en vue de l'optimisation de sa maintenance.

Les difficultés d'ordre numérique, associées à un schéma de volumes finis, peuvent être de trois natures différentes :

- Un temps de calcul important : les nombreux calculs nécessaires pour utiliser le schéma de volumes finis peuvent entraîner de longs temps de calcul ; cette limitation est une contrainte lorsqu'il s'agit d'optimiser une stratégie de maintenance,
- Une place mémoire insuffisante : la quantification d'un PDMP modélisant un système complexe peut nécessiter une place mémoire importante du fait du nombre de composants vieillissants et de leurs dépendances,
- La difficulté d'implémentation du schéma numérique : cette limite peut rendre l'utilisation de ce type d'algorithme peu accessible, voire impossible.

D'un point de vue numérique, l'enjeu scientifique de cette étude est d'une part, de proposer des pistes d'amélioration du schéma numérique en repoussant les trois limites citées précédemment et d'autre part, d'effectuer une étude théorique de cet algorithme afin d'apporter une certaine confiance dans les résultats.

Nous proposons de décomposer l'étude fiabiliste d'un système pour l'optimisation de sa maintenance en plusieurs étapes :

1. Etude fonctionnelle du système : cette étape consiste à comprendre le fonctionnement du système, à définir les modes de défaillance de chacun de ses composants et leur impact sur le fonctionnement du système, à comprendre la stratégie de maintenance effectuée jusqu'à présent et les stratégies envisagées par la SNCF,
2. Exploitation du retour d'expérience et des connaissances des experts : les données mises à notre disposition sont nombreuses, il s'agit d'exploiter au mieux ces données et de proposer des modèles probabilistes adaptés,
3. Etude statistique et probabiliste des composants du système : à partir des données issues du retour d'expérience, des méthodes statistiques non-paramétriques et paramétriques sont utilisées pour modéliser la durée de vie des composants éventuellement soumis à de la maintenance préventive,

4. Modélisation du système par un PDMP : les résultats des estimations statistiques de l'étape précédente servent de données d'entrée à un modèle probabiliste de type PDMP qui prend en compte l'architecture du système et la maintenance actuelle et envisagée,
5. Elaboration d'un modèle économique : définition d'une fonction de coût prenant en compte le coût des défaillances, des maintenances et du remplacement des composants,
6. Evaluation de la stratégie de maintenance actuelle : à l'aide d'un schéma numérique de type volumes finis, différentes quantités fiabilistes (fiabilité, nombre moyen de pannes sur les X prochaines années, coût de maintenance du système sur les X prochaines années) sont évaluées en considérant que la stratégie de maintenance n'est pas changée. Ces quantités serviront de base de comparaison pour évaluer l'efficacité d'une nouvelle stratégie de maintenance,
7. Evaluation et optimisation des stratégies de maintenance préventive proposées : à l'aide d'un algorithme de type 'recuit simulé', une stratégie de maintenance optimale est identifiée.

## Plan de la thèse

Le document est structuré en six chapitres :

1. Le chapitre 1 est un état de l'art des méthodes de modélisation système. L'objectif de ce chapitre est de présenter les différents processus stochastiques utilisés en fiabilité pour modéliser des systèmes ainsi que les outils de quantification associés. Les processus sont introduits les uns à la suite les autres, du plus simple au plus complexe. Chaque processus possède une contrainte de modélisation justifiant l'utilisation d'un processus plus général : le processus markovien déterministe par morceaux (PDMP pour Piecewise Deterministic Markov Process).
2. Le chapitre 2 présente l'algorithme numérique déterministe de type 'volumes finis' retenu pour l'étude. Une démonstration de la convergence de cet algorithme est présentée. Ce schéma numérique présente des difficultés dans le cadre de l'étude de systèmes multi-composants. Nous proposons dans ce chapitre trois types de méthodes pour surmonter ces difficultés.
3. Le chapitre 3 présente un cas-test classique issu de la littérature fiabiliste, sur lequel nous testons les méthodes proposées dans cette thèse.
4. Le chapitre 4 présente différents outils de modélisation de la durée de vie d'un composant. Ces outils permettent d'exploiter le retour d'expérience ; les résultats sont les données d'entrée du PDMP.
5. La méthodologie développée dans les chapitres précédents est appliquée à un système ferroviaire : un système de climatisation équipant les TER 72500X. Ces systèmes sont maintenus dans un établissement de maintenance situé dans le Périgord. Ces systèmes sont récents, les plus anciens ont été mis en service depuis moins de dix ans. Cependant, il a été observé que le nombre de défaillances augmentait au fil des années provoquant une augmentation des coûts de maintenance. L'établissement de maintenance s'est donc interrogé sur un investissement éventuel en maintenance préventive. Dans ce cadre, un projet a été confié à la Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF dont l'objectif est de proposer un plan de maintenance préventif adapté au système de climatisation afin d'endiguer cette augmentation.
6. D'autres systèmes ferroviaires, notamment une installation de signalisation, ont été étudiés. Ces travaux sont confidentiels et ne sont pas présentés dans ce document. Afin d'illustrer une partie du travail réalisé, le sixième chapitre représente un article présenté au congrès ESREL en septembre 2011.

Le document se termine par deux annexes. La première définit les différents sigles utilisés dans le document ainsi que quelques notations. La deuxième présente un algorithme de recuit simulé que nous avons utilisé dans l'objectif de minimiser une fonction de coût.



# Chapitre 1

## Etat de l'art : méthodes de fiabilité système

### 1.1 Introduction

Un système est un ensemble de composants en interaction. L'étude fiabiliste d'un système consiste à évaluer diverses quantités permettant de décrire son fonctionnement dans le temps. L'une de ces quantités est notamment la fiabilité définie dans [Pages and Gondran, 1980] comme « l'aptitude d'un dispositif à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant une durée donnée ». Les méthodes de fiabilité système permettent de prendre en compte les dépendances entre les composants dues à l'architecture du système et à la stratégie de maintenance.

Des processus stochastiques tels que les processus markoviens [Cocoza-Thivent, 1997], sont utilisés en fiabilité pour modéliser l'évolution d'un système au cours du temps. La quantification de ces processus est réalisée soit par des calculs analytiques quand cela est possible, soit à l'aide de simulations de Monte-Carlo, ou encore avec des algorithmes numériques déterministes. Ces outils de quantification peuvent être difficiles à utiliser pour des personnes non initiées à ces méthodes. Des outils d'aide à la modélisation tels que les réseaux bayésiens dynamiques [Donat, 2009] et [Donat et al., 2010], les Boolean logic Driven Markov Processes (BDMP) [Bouissou and Bon, 2003] et les Réseaux de Petri stochastiques (RdP) [Marsan et al., 1995] et [Zille, 2009] ont été développés. Ces outils sont généralement couplés avec des algorithmes de calcul permettant la quantification des systèmes modélisés dans l'outil. Ils ont pour principe d'utiliser une représentation graphique intuitive d'un système.

Les processus aléatoires habituellement utilisés en fiabilité, tels que les processus markoviens de sauts et les processus semi-markoviens [Cocoza-Thivent and Roussignol, 1997], ne sont pas suffisamment souples pour modéliser les cas d'application industrielle étudiés lors de cette thèse. En effet, les systèmes étudiés possèdent des composants vieillissants et sont soumis à des stratégies de maintenance rendant leur modélisation compliquée. Ainsi, nous utilisons une classe de processus hybrides appelés les processus markoviens déterministes par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Processes ou PDMP en anglais) introduite par [Davis, 1984]. L'utilisation de ces processus en fiabilité forme ce qu'on appelle la fiabilité dynamique. Les PDMP sont formés de deux variables : une discrète décrivant l'état du système et l'autre continue décrivant l'évolution des variables environnementales qui influent et qui sont influencées par le système (la température, la pression, l'âge des composants du système...). L'évolution de ces variables, que l'on nomme aussi variables physiques, est déterministe entre les sauts aléatoires du processus discret et est définie par un système d'équations différentielles. [Devooght, 1997] a été le pionnier pour l'introduction de processus hybrides dans des problèmes de sûreté de fonctionnement. [Labeau, 1996] définit cette discipline comme « la partie de la sûreté de fonctionnement qui étudie de manière intégrée le comportement des systèmes industriels complexes affectés par une évolution dynamique continue sous-jacente ». Dans nos cas d'application, les variables physiques du PDMP représentent généralement l'âge de chacun des composants des systèmes modélisés.

Dans un premier temps, nous présentons les principaux processus stochastiques utilisés usuellement en fiabilité, tels que les chaînes de Markov, les processus markoviens de sauts et les processus semi-markoviens. Les méthodes permettant de quantifier ces processus, comme les simulations de Monte-Carlo et les méthodes analytiques, sont

ensuite détaillées. Pour finir ce paragraphe, nous présentons certains outils d'aide à la modélisation comme les Réseaux de Petri stochastiques, les BDMP et les réseaux bayésiens dynamiques. Dans une deuxième partie, les processus markoviens déterministes par morceaux sont détaillés. De la même manière que pour les processus markoviens présentés dans le paragraphe précédent, nous présentons les méthodes de quantification des PDMP telles que les simulations de Monte-Carlo et les méthodes numériques déterministes (algorithme de volumes finis [Cocozza-Thivent et al., 2006a] [Eymard et al., 2008], le cell to cell mapping [Hsu, 1980] [Belhadj and Aldemir, 1995]). Ce chapitre se termine par la présentation des différents outils capables d'utiliser la modélisation par PDMP et de la traiter numériquement tels que certains types de Réseaux de Petri [Medjoudj, 2006] [Khalfaoui, 2003] et les automates stochastiques hybrides [Castaneda, 2009].

## 1.2 Modélisation et quantification en fiabilité classique

### 1.2.1 Modèles stochastiques classiques

Les processus classiquement utilisés en fiabilité sont à valeur dans un espace d'état fini, ainsi ils sont présentés dans ce cadre.

#### 1.2.1.1 Les chaînes de Markov

Une chaîne de Markov à valeurs dans un espace fini  $E$  est un processus stochastique à temps discret qui bénéficie de la propriété de Markov. Cette propriété se traduit par le fait que la prédiction du futur à partir du présent n'est pas rendue plus précise par des éléments d'information supplémentaires concernant le passé, car toute l'information utile pour la prédiction du futur est contenue dans l'état présent du processus.

**Définition 1.** La chaîne  $(X_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$  si, pour tout entier strictement positif  $n$  et tous  $i_0, \dots, i_n$  dans  $E$  avec  $\mathbb{P}(X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \neq 0$ , nous avons

$$\mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}) \quad (1.2.1)$$

Cette propriété se nomme la propriété de Markov faible.

On note  $\mu$  la loi initiale de la chaîne de Markov, c'est-à-dire la loi de  $X_0$ .

Une chaîne de Markov est décrite par une famille de matrice de transition  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $Q_{n+1}(i, j) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i)$ . La chaîne de Markov est dite homogène si la matrice  $Q_n$  ne dépend pas de  $n$ . Dans ce cas la matrice de transition est notée  $Q$ . Par la suite, nous étudions les chaînes de Markov homogènes qui sont le plus souvent utilisés en fiabilité.

Si l'évolution d'un système est modélisée par une chaîne de Markov, les quantités fiabilistes, par exemple la fiabilité et la disponibilité, s'expriment en fonction de la matrice de transition  $Q$ . Nous rappelons les définitions de la fiabilité et de la disponibilité dans le cadre général.

**Définition 2.** La disponibilité à l'instant  $t$  est la probabilité que le système soit en marche à l'instant  $t$ . Elle s'exprime de la façon suivante, avec  $X_t$  l'état du système à l'instant  $t$  et  $M$  l'ensemble des états de marche :

$$D(t) = \mathbb{P}(X_t \in M) \quad (1.2.2)$$

La disponibilité d'un système à l'instant  $n$  modélisé par une chaîne de Markov s'obtient de la façon suivante :

$$D(n) = \sum_{(i,j) \in M^2} \mu(i) Q^n(i, j) \quad (1.2.3)$$

**Définition 3.** La fiabilité à l'instant  $t$  correspond à la probabilité que le système n'ait pas subi de défaillance avant l'instant  $t$ . Soit  $T$  l'instant de la première défaillance, la fiabilité s'exprime de la façon suivante :

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t) \quad (1.2.4)$$

Afin d'évaluer la fiabilité, nous définissons une autre chaîne de Markov dont les états de panne sont absorbants. Soit  $P$  l'ensemble des états de panne et  $M$  l'ensemble des états de marche du système. Soit  $\tilde{Q}$  la matrice de

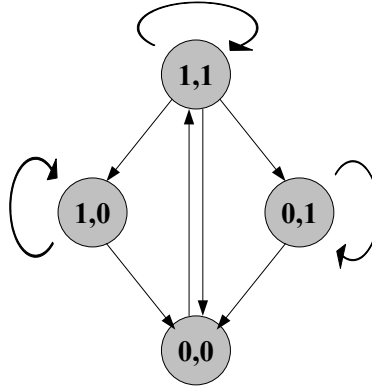


FIGURE 1.1 – Le graphe de Markov associé à l'exemple 4

transition associée à la chaîne de Markov pour laquelle on considère que les états de panne sont absorbants.  $\tilde{Q}$  est telle que :

$$\tilde{Q}(i, j) = \begin{cases} Q(i, j) & \text{si } i \in M \text{ et } j \in E \\ 0 & \text{si } i \in P \text{ et } j \in E \setminus \{i\} \\ 1 & \text{si } i \in P \text{ et } j = i \end{cases} \quad (1.2.5)$$

La fiabilité d'un système modélisé par une chaîne de Markov s'obtient de la façon suivante :

$$R(n) = \sum_{i \in E, j \in M} \mu(i) \tilde{Q}^n(i, j) \quad (1.2.6)$$

**Exemple 4.** Pour illustrer l'utilisation d'une chaîne de Markov en fiabilité, prenons l'exemple d'un système de deux composants indépendants en parallèle. Le système tombe en panne lorsque les deux composants sont en panne. Aucune réparation n'a lieu tant que le système fonctionne. Ces deux composants subissent une sollicitation chaque heure et ne peuvent tomber en panne que lors de leur sollicitation. Lorsque les deux composants sont en panne, ils sont réparés l'heure suivante. L'état du système est déduit de l'état des composants et nous notons 1 pour un composant en marche et 0 pour un composant en panne. Soit  $(X_n)_{n \geq 0}$  la chaîne de Markov décrivant l'état du système heure par heure. Notons  $p_1$  la probabilité que le composant 1 tombe en panne lors d'une sollicitation et  $p_2$  la probabilité que le composant 2 tombe en panne lors d'une sollicitation. Soit  $Q$  la matrice de transition la chaîne de Markov et  $E$  l'espace d'état.  $E = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ .

$$Q = \begin{bmatrix} (1-p_1)(1-p_2) & (1-p_1)p_2 & (1-p_2)p_1 & p_1p_2 \\ 0 & 1-p_1 & 0 & p_1 \\ 0 & 0 & 1-p_2 & p_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le graphe de Markov associé à cette chaîne est donné dans la figure 1.1. Chaque flèche correspond à une transition possible de l'état d'où part la flèche vers l'état où elle arrive. Une flèche qui part et qui pointe sur le même état signifie que partant de cet état, le système peut ne pas changer d'état. A chacune d'entre elles est associée une probabilité qui correspond à la probabilité que la transition décrite par la flèche se produise. Ces probabilités sont les éléments de la matrice  $Q$ .

Cette classe de processus ne permet pas la modélisation d'un processus à temps continu, ce qui en fiabilité, est souvent nécessaire. De ce fait, les processus markoviens de sauts et semi-markovien sont souvent utilisés pour modéliser des systèmes en fiabilité. Une description détaillée de ces processus peut être trouvée dans [Cocozza-Thivent, 1997].



### 1.2.1.2 Les processus markoviens de sauts

Soit  $E$  un ensemble fini et  $(X_t)_{t \geq 0}$  un processus à trajectoires continues à droite avec limites à gauche, à valeurs dans  $E$ .

**Définition 5.** *Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est un Processus Markovien de Sauts (PMS) (homogène) si pour tout  $n$ , tous  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1}$ , et tous  $i_0, i_1, \dots, i_{n+1}$  dans  $E$  tels que  $\mathbb{P}(X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) \neq 0$ , nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_0} = i_0, X_{t_1} = i_1, \dots, X_{t_n} = i_n) &= \mathbb{P}(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n) \\ &= P_{t_{n+1} - t_n}(i_n, i_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$(P_t(i, j))_{i, j \in E}$  est le noyau (ou semi-groupe) de transition du PMS au temps  $t$ . La loi initiale d'un PMS, c'est-à-dire la loi de  $X_0$ , est notée  $\mu$ .

Un PMS est aussi appelé une chaîne de Markov temporisée. Comme une chaîne de Markov, un PMS saute d'état en état au cours du temps, la différence réside dans le fait que la durée entre deux sauts successifs d'un PMS suit une loi exponentielle alors que, pour les chaînes de Markov, cette durée suit une loi discrète de type géométrique. Chaque transition d'un PMS est associée à un taux de hasard constant, en fiabilité cela correspond souvent à un taux de panne ou un taux de réparation. Le taux de transition de l'état  $i$  vers l'état  $j$  est noté  $A(i, j)$ . Si l'on pose  $A(i, i) = -\sum_{j \in E \setminus \{i\}} A(i, j)$ , la matrice  $A$  correspond alors à la matrice génératrice du PMS et la loi de la durée avant le saut du PMS lorsqu'il se trouve dans l'état  $i$  est une loi exponentielle de paramètre  $-A(i, i)$ . La matrice génératrice permet de calculer le noyau de transition d'un PMS de la façon suivante :

$$P_t = e^{tA} \quad (1.2.8)$$

Les quantités fiabilistes peuvent donc s'exprimer en fonction de la matrice génératrice. La disponibilité d'un système modélisé par un processus markovien de sauts s'obtient de la façon suivante :

$$D(t) = \sum_{(i, j) \in M^2} \mu(i) e^{tA}(i, j) \quad (1.2.9)$$

Pour calculer la fiabilité d'un système modélisé par un PMS, on définit  $\tilde{A}$  correspondant à la matrice génératrice du processus pour lequel les états de panne sont absorbants.  $\tilde{A}$  s'écrit de la façon suivante, pour  $i \neq j$  :

$$\tilde{A}(i, j) = \begin{cases} A(i, j) & \text{si } i \in M \text{ et } j \in E \\ 0 & \text{si } i \in P \text{ et } j \in E \end{cases} \quad (1.2.10)$$

La fiabilité d'un système modélisé par un processus markovien de sauts s'obtient de la façon suivante :

$$R(t) = \sum_{i \in E, j \in M} \mu(i) e^{t\tilde{A}}(i, j) \quad (1.2.11)$$

Une chaîne de Markov peut être utilisée pour modéliser l'évolution d'un système dans le temps si l'on ne l'observe qu'à certains instants (par exemple toutes les heures). En revanche, un PMS permet de modéliser le processus de façon continue. Un graphe de Markov correspondant à un PMS ressemble fortement au graphe de Markov associé à une chaîne de Markov, la différence réside dans le fait que les flèches ne sont plus associées à des probabilités mais à des taux de transition.

**Exemple 6.** *Reprenons l'exemple d'un système de deux composants indépendants en parallèle. Lorsque les deux composants sont en panne, le système est en panne et les composants sont tous les deux remplacés par des composants identiques. Les composants ne sont pas remplacés si le système n'est pas en panne. La durée de vie du composant 1 suit une loi exponentielle de coefficient  $\lambda_1$  et celle du composant 2 suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda_2$ . La durée de réparation suit une loi exponentielle de paramètre  $\mu$ . Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  un PMS modélisant l'état du système à l'instant  $t$ . Soit  $A$  la matrice génératrice du processus :*

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_2 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 \\ \mu & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Le graphe de Markov associé à cet exemple est donné par la figure 1.2.

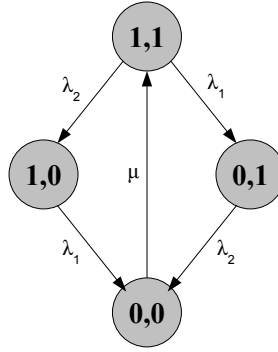


FIGURE 1.2 – Le graphe de Markov associé à l'exemple 6

L'utilisation de ce type de processus pour modéliser des systèmes implique généralement de supposer que les composants de ce système ne vieillissent pas. Il existe des méthodes permettant d'utiliser un PMS pour modéliser des composants qui vieillissent comme par exemple d'introduire des états de marche dégradée. Cette méthode revient à utiliser des lois de type phases pour modéliser la durée de vie d'un composant. Cependant l'augmentation du nombre d'états du PMS peut entraîner des difficultés pour la quantification du processus. Une autre manière de prendre en compte le vieillissement d'un composant est de modéliser son comportement aléatoire par un processus semi-markovien. L'utilisation de ces processus n'implique plus d'avoir des taux de transition constants.

### 1.2.1.3 Les processus semi-markoviens

La structure d'un processus semi-markovien est identique à celle d'un PMS, les transitions sont réalisées suivant une chaîne de Markov. La différence entre ces deux processus aléatoires réside dans les durées inter-sauts : ces durées suivent des lois de type exponentielle pour le PMS alors que pour le processus semi-markovien elles suivent des lois générales. Afin d'introduire les processus semi-markoviens, nous commençons par définir un processus de renouvellement markovien. Reprenons la définition de [Cocozza-Thivent, 1997].

**Définition 7.** [Cocozza-Thivent, 1997] Soit  $E$  un ensemble fini, soit  $(Y_n)_{n \geq 0}$  un processus à valeurs dans  $E$  et  $(T_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de variables positives :

$$0 = T_0 \leq T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_n \leq \dots$$

Le processus  $(Y, T) = (Y_n, T_n)_{n \geq 0}$  est un processus de renouvellement markovien (homogène en temps) à valeurs dans  $E$  si, pour tous  $n \geq 0, i, j, i_0, \dots, i_{n-1}$  dans  $E$  et  $t, t_1, \dots, t_n$  dans  $\mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \dots, Y_n = i, T_n = t_n) &= \mathbb{P}(Y_{n+1} = j, T_{n+1} - T_n \leq t | Y_n = i) \\ &= Q(i, j, t) \\ &= \int_0^t Q(i, j, du) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Le noyau  $Q = (Q(i, j, dt))_{i, j \in E}$  est le noyau semi-markovien du processus  $(Y, T)$ .

La suite  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est en fait une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$  dont les temps entre les sauts suivent une loi à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  de type général.  $Y_k$  modélise l'état dans lequel se trouve la chaîne de Markov après  $k$  sauts et non au temps  $k$ . Les instants de saut de la chaîne sont représentés par la suite de variables aléatoires  $(T_n)_{n \geq 0}$ . Dans ce cadre, il est possible de sauter sur place. Nous pouvons maintenant définir un processus semi-markovien.

**Définition 8.** [Cocozza-Thivent, 1997] Soit  $(Y, T)$  un processus de renouvellement markovien à valeurs dans  $E$  tel que  $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \infty$ , posons :

$$X_t = Y_n \text{ pour } T_n \leq t < T_{n+1} \quad (1.2.13)$$

Le processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est le processus semi-markovien associé à  $(Y, T)$  et la chaîne de Markov  $Y$  est la chaîne de Markov immergée.

**Remarque 9.** Un PMS est un cas particulier de processus semi-markovien. Comme dit précédemment, il s'agit simplement du cas pour lequel la durée entre les sauts du processus suit une loi exponentielle et tel que le processus ne saute pas sur place. Un PMS de matrice génératrice  $A$  peut donc se définir lui aussi par un processus de renouvellement markovien dont le noyau  $Q$  s'écrit de la façon suivante :

$$Q(i, j, dt) = \begin{cases} A(i, j)e^{A(i, i)t}dt & \text{si } j \neq i \\ 0 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (1.2.14)$$

**Exemple 10.** Reprenons l'exemple 6 d'un système de deux composants en parallèle. Le système subit une maintenance corrective lorsque les deux composants sont défectueux. Contrairement au cas précédent, nous considérons ici que les lois de durée de vie des composants ne sont plus de type exponentiel mais de type général ce qui peut modéliser un phénomène de vieillissement des composants. Soit  $T_1$  la durée de fonctionnement du composant 1 et  $T_2$  la durée de fonctionnement du composant 2. La défaillance du système survient à l'instant  $T_d = \max(T_1, T_2)$ . Ce système peut être modélisé par un processus semi-markovien. L'espace  $E$  est composé de deux états : l'état de marche parfaite et l'état de défaillance,  $E = \{(1, 1), (0, 0)\}$ . Le noyau de transition de l'état  $(1, 1)$  vers l'état  $(0, 0)$  correspond à la loi de la variable aléatoire  $T_d$ .

Cependant, une légère modification de la stratégie de maintenance du système peut rendre la modélisation par un processus semi-markovien impossible. Par exemple, si la défaillance d'un composant entraîne son remplacement sans tenir compte de l'état de l'autre composant, le système n'est plus modélisable par un processus semi-markovien. La difficulté vient du fait, qu'après la première défaillance de l'un des deux composants à l'instant  $\min(T_1, T_2)$ , le processus 'perd la mémoire' de son passé et oublie la durée de fonctionnement de l'autre composant. Ce phénomène s'explique par le fait que le couple de deux processus semi-markoviens ne forme pas un processus semi-markovien [Cocozza-Thivent, 1997].

La modélisation d'une action de maintenance préventive à un instant déterministe  $T$  consistant à remplacer les composants défectueux, engendre la même difficulté. Or la modélisation de ce type de maintenance préventive est un enjeu important dans cette thèse. Ainsi, nous utilisons un processus markovien plus souple capable de modéliser le vieillissement des composants, leurs dépendances et de nombreux types de stratégie de maintenance. Il s'agit du processus markovien déterministe par morceaux (PDMP pour Piecewise Deterministic Markov Process) que nous présentons dans la deuxième partie de ce chapitre.

Le prochain paragraphe présente les différentes méthodes permettant de quantifier les processus aléatoires présentés précédemment.

## 1.2.2 Outils pour la quantification

### 1.2.2.1 Calculs analytiques

Pour une modélisation markovienne ou semi-markovienne, certaines quantités recherchées, telles que la fiabilité et la disponibilité, peuvent être évaluées à l'aide de formules analytiques du type (1.2.9) et (1.2.11). Cependant, l'implémentation informatique de ces formules peut nécessiter une quantité de place mémoire importante et poser des problèmes. En effet, dans le cas des PMS, le calcul de la fiabilité et de la disponibilité nécessite le calcul de l'exponentielle d'une matrice ce qui engendre des difficultés d'ordre numérique. Dans le cas d'un système multi-composants, la quantité de place mémoire, pour effectuer ce calcul, peut être supérieure à ce que l'ordinateur fournit. De nombreuses méthodes ont été développées notamment dans [Moler and Van Loan, 1978] et [Moler and Van Loan, 2003] pour le calcul de l'exponentielle de matrices.

### 1.2.2.2 Les simulations de Monte-Carlo

La méthode des simulations de Monte-Carlo a pour but d'estimer des valeurs moyennes (le nombre moyen de pannes d'un système sur une période) ou des probabilités (la fiabilité, la disponibilité...) en simulant de nombreuses fois et de façon indépendante la vie du système ou en simulant son évolution sur une longue trajectoire. Son utilisation repose sur la Loi Forte des Grands Nombres et l'évaluation de la précision obtenue repose sur le Théorème de la Limite Centrale. Cette méthode permet généralement d'éviter de gros calculs liés

à la modélisation markovienne, ce qui permet de ne plus être confronté au problème lié à la place mémoire. Par exemple dans le cas des PMS, il n'est plus nécessaire de calculer l'exponentielle d'une matrice si l'on utilise les simulations de Monte-Carlo. Cette méthode permet donc de traiter des systèmes ayant de nombreux composants, ce que les méthodes analytiques ne peuvent pas toujours accomplir. Le nombre de composants d'un système n'est pas le seul facteur rendant difficile l'utilisation des méthodes analytiques. L'architecture du système et la stratégie de maintenance sont deux facteurs pouvant compliquer la modélisation en augmentant significativement le nombre d'états dans lesquels peut se trouver le système et par conséquent rendre les calculs liés à ces méthodes très longs ou même impossibles à réaliser.

Dans sa thèse [Labeau, 1996], Labeau a beaucoup travaillé sur les simulations de Monte-Carlo. L'un de ses propos résume bien un inconvénient de cette méthode : « S'il est possible de tout calculer, il n'est pas improbable d'obtenir n'importe quoi comme résultat ». En simulant indépendamment un certain nombre de trajectoires aléatoires, il est possible d'obtenir des estimations des quantités recherchées ainsi qu'un intervalle de confiance. Cependant, rien ne garantit pas que la valeur recherchée est réellement dans cet intervalle. Il est donc possible « d'obtenir n'importe quoi comme résultat ».

### 1.2.2.3 Les méthodes de discrétisation

Une alternative aux simulations de Monte-Carlo est d'utiliser une méthode de discrétisation. Par exemple, dans [Cocozza-Thivent and Eymard, 2004], un schéma de volumes finis est utilisé pour quantifier un processus semi-markovien. Les quantités fiabilistes peuvent s'exprimer à l'aide des distributions marginales du processus, c'est-à-dire la loi du processus au temps  $t$ . Le schéma a pour principe d'évaluer une approximation de ces quantités. Cependant, jusqu'à présent ces méthodes ont été appliquées sur des systèmes simples avec peu de composants. Les cas d'étude sont modélisés dans cette thèse par un type de processus markovien plus général (PDMP pour Piecewise Deterministic Markov Process) que le processus semi-markovien. Sa quantification est réalisée à l'aide d'un schéma de volumes finis du même type que celui présenté dans [Cocozza-Thivent and Eymard, 2004].

D'autres méthodes de discrétisation sont aussi proposées dans [Mercier, 2008b] et [Mercier, 2008a] dans un cadre markovien et semi-markovien.

La modélisation d'un système par processus markovien ou semi-markovien n'est pas toujours simple à réaliser. Pour faciliter ce travail, des outils d'aide à la modélisation ont été développés. Ces outils ont pour principe de représenter graphiquement le fonctionnement d'un système et sont généralement couplés avec un algorithme de quantification. Nous présentons ces outils dans le paragraphe suivant.

## 1.2.3 Outils d'aide à la modélisation

### 1.2.3.1 Les réseaux de Pétri stochastiques

C'est dans sa thèse de doctorat en 1962 que Carl Adam Pétri introduit pour la première fois les réseaux qui portent son nom. Les Réseaux de Pétri (RdP) constituent un formalisme graphique répandu qui permet de modéliser par un graphe le comportement d'un système. A l'origine les RdP sont déterministes et ne permettent pas de représenter les processus markoviens présentés précédemment. Pour cela, une extension des RdP a été développée : les RdP stochastiques [Marsan et al., 1995]. L'avantage de cette méthode est sa souplesse et sa simplicité de mise en œuvre si l'on connaît exactement le fonctionnement du système que l'on cherche à modéliser.

Depuis leur création, plusieurs versions de RdP ont vu le jour, chacune apportant une nouvelle fonctionnalité, permettant ainsi de représenter des systèmes dont l'évolution est de plus en plus complexe. Nous pouvons citer la thèse de Medjoudj [Medjoudj, 2006] dans laquelle plusieurs RdP différents sont présentés (RdP temporisés, RdP temporels et RdP hybrides). Les RdP ont été utilisés par Zille dans sa thèse [Zille, 2009] afin de modéliser des systèmes multi-composants.

Un RdP est constitué d'un ensemble de places (représentés par des ronds), d'un ensemble de jetons (représentés par des points), d'un ensemble de transitions (représentés par des rectangles) et de flèches qui relient les places aux transitions. Chaque place contient un nombre fini de jetons. A chaque transition est associée une variable (généralement une durée) déterministe ou aléatoire provoquant le saut d'un jeton vers une place, la création ou la disparition d'un jeton. Une place peut représenter un état d'un composant (marche ou panne) et dans ce cas,

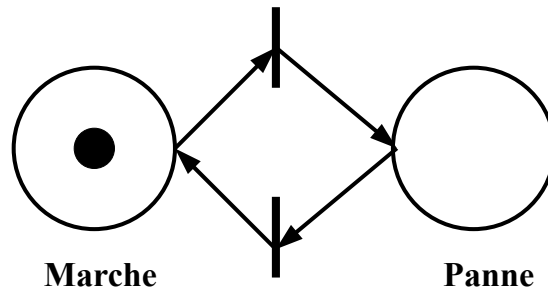


FIGURE 1.3 – Exemple d'un composant réparable modélisé à l'aide d'un Réseau de Pétri

la transition permet de représenter le saut aléatoire de l'état de marche vers l'état de panne.

**Exemple 11.** *Pour modéliser un composant réparable avec un RdP, il suffit de créer deux places, l'une modélisant l'état de marche du composant et l'autre modélisant l'état de panne du composant. Un jeton est placé initialement dans l'état de marche traduisant le fait que le composant est en marche lorsque l'on commence la modélisation. Les deux places sont reliées par deux transitions, la première modélisant la panne du composant et la deuxième modélisant la réparation du composant. Ces deux transitions sont aléatoires et peuvent par exemple suivre des lois exponentielles. Cet exemple est visible sur la figure 1.3.*

Il est possible de convertir un graphe de Markov associé à un PMS en un RdP. Cela permet souvent d'alléger le graphe et donc de le rendre plus clair et plus compréhensible pour l'utilisateur. En revanche, il n'est pas toujours possible de convertir un RdP en un graphe de Markov. En effet, les durées d'attente entre les sauts d'un jeton d'une place à une autre ne suivent pas forcément une loi exponentielle. Dans ce cas, la quantification d'un RdP se fait en utilisant des simulations de Monte-Carlo, comme dans [Zille et al., 2009]. Dans le cas contraire, le RdP peut être traité à l'aide des méthodes analytiques markoviennes associées au PMS.

### 1.2.3.2 Les BDMP (Boolean logic Driven Markov Processes)

Les BDMP, développés par Bouissou [Bouissou and Bon, 2003], sont une extension des arbres de défaillances qui permet de représenter des graphes de Markov de très grande taille. Ils font d'ailleurs partie des modèles markoviens. Les BDMP permettent de modéliser des systèmes avec des interactions très variées entre composants : les redondances passives, les séquences de démarrage avec conditionnement de chaque étape par la réussite des étapes précédentes, les défaillances de cause commune, les fonctionnements en plusieurs phases...

Commençons par décrire les arbres de défaillances. Cette technique s'intéresse à la réalisation d'un événement redouté, le but étant de calculer la probabilité que cet événement se produise. L'arbre de défaillance permet de représenter graphiquement les combinaisons d'événements qui amènent à l'événement redouté. Ce type d'analyse se fait niveau par niveau, c'est-à-dire qu'on identifie des causes qui peuvent amener à l'événement redouté, par exemple la panne de plusieurs sous systèmes, puis on identifie les causes des causes et ainsi de suite pour finir au niveau des composants du système. Les causes sont reliées entre elles par des portes logiques (et, ou, k/n ...). Ces arbres deviennent rapidement volumineux au fur et à mesure que la complexité du système croît ce qui induit l'explosion combinatoire des états.

Un arbre de défaillance statique peut représenter l'évolution de processus stochastiques indépendants en fonction du temps. En revanche, ils ne permettent pas de représenter des dépendances entre ces processus. Afin d'incorporer cette notion de dépendance, M. Bouissou a introduit les BDMP.

Les BDMP s'appuient sur le formalisme graphique des arbres de défaillances en y rajoutant ce qu'on appelle des 'gâchettes'. Cet outil permet d'introduire une notion de dépendance dans les arbres de défaillance. Un BDMP sans gâchette équivaut à un arbre de défaillances classique. Dans un BDMP (avec gâchette), les défaillances des composants ne sont pas toutes possibles dans l'état initial : seules celles des événements sollicités le sont. Dans

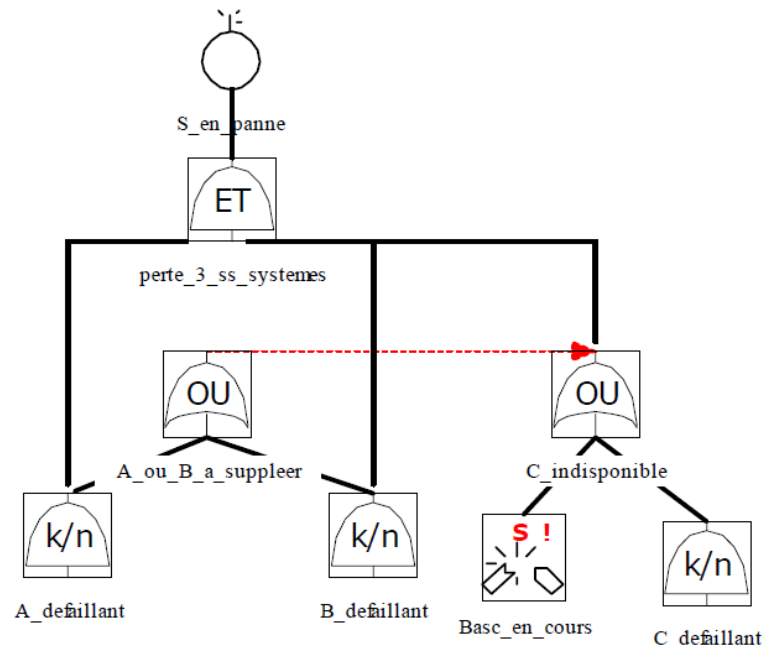


FIGURE 1.4 – Exemple de BDMP repris de [Bouissou, 2005]

un BDMP, les portes sans parent sont sollicitées par défaut. Ces sollicitations se propagent de 'père' en 'fils' tout au long des branches du BDMP jusqu'à ce qu'elles rencontrent une gâchette. La présence d'une telle arrivée conditionne le passage du signal de sollicitation ; ainsi la porte cible transmet la sollicitation à ses descendants seulement si l'événement qui est à l'origine de la gâchette est VRAI. Si c'est le cas, la sollicitation est ensuite transmise aux portes et feuilles en dessous suivant le même principe. Ainsi, il apparaît une dynamique qui va permettre d'utiliser les BDMP pour modéliser des systèmes évoluant dans le temps. Plusieurs exemples d'utilisation des BDMP sont donnés dans [Bouissou, 2005].

**Exemple 12.** *Détaillons un des exemples fournis dans [Bouissou, 2005]. Soit un système  $S$  composé de trois sous-systèmes  $A, B, C$  en redondance totale, c'est à dire tels que le fonctionnement d'au moins un des trois suffit à assurer la mission de  $S$ .  $A$  et  $B$  sont en fonctionnement continu, et dès que l'un des deux tombe en panne, on met en oeuvre le secours  $C$ , mais cela nécessite un certain temps, pendant lequel le système est fragilisé, puisqu'il reste un seul sous-système en fonctionnement. Un tel système peut être représenté par un BDMP obtenu à partir de la FIGURE 1.4 en développant les sous-arbres dont les sommets sont représentés par les portes  $k/n$  appelées  $A\_defaillant$ ,  $B\_defaillant$ ,  $C\_defaillant$ . La flèche rouge représente la gâchette qui lorsque la feuille "A ou B à suppléer" est sur VRAI, active le sous arbre  $C\_indisponible$  dont les feuilles passent de "non-sollicité" à "sollicité". A ce moment, la feuille  $Basc\_en\_cours$  passe à VRAI ce qui a pour effet de passer la porte  $C\_indisponible$  à VRAI modélisant le temps de mise en route du composant  $C$ . Après ce temps,  $C\_indisponible$  revient à FAUX et garde cette valeur tant que  $C\_defaillant$  ne passe pas à VRAI (à la suite de défaillances dans le sous-système  $C$ ).*

### 1.2.3.3 Les réseaux bayésiens dynamiques

Un réseau bayésien [Naim and Becker, 2004] est représenté par un graphe orienté sans circuit où chaque nœud (représenté par un rond) est associé à une variable aléatoire et où chaque arc (représenté par une flèche) orienté d'un nœud vers un autre indique une relation de dépendance entre les variables aléatoires représentées par les nœuds de départ et d'arrivée. A chaque variable aléatoire est associée une table de probabilité correspondant à la loi conditionnelle de cette variable connaissant l'état dans lequel se trouvent les variables dont elle dépend. Ces tables sont généralement calibrées à l'aide du retour d'expérience ou/et avec des avis d'expert.

Un réseau bayésien dynamique est un réseau bayésien pour lequel la loi d'une variable aléatoire à un instant  $n$  peut dépendre de son état à l'instant précédent  $n - 1$ . Notons  $(X_n)_{n \geq 0}$  une suite de variables aléatoires. Graphiquement, la dépendance entre  $X_{n-1}$  et  $X_n$  est modélisée par un arc orienté du nœud représentant la

variable  $X_{n-1}$  vers le nœud représentant la variable  $X_n$ . Ce type de méthode peut ainsi représenter une chaîne de Markov. Il est possible de représenter un processus continu de type PMS, en discrétisant le temps.

Des travaux ont récemment été menés sur l'utilisation des réseaux bayésiens dynamiques dans le domaine ferroviaire. R. Donat a ainsi effectué une thèse au sein de l'INRETS (actuellement IFSTTAR) en collaboration avec la RATP, voir [Donat, 2009] et [Donat et al., 2010]. L'auteur propose de garder en mémoire le temps passé dans l'état courant afin de ne pas être limité à l'utilisation de lois exponentielles. Un réseau bayésien dynamique peut ainsi représenter un processus semi-markovien. Une méthodologie basée sur les réseaux bayésiens dynamiques a été développée et nommée VIRMALAB (Atelier Virtuel de Maintenance).

Le prochain paragraphe présente un processus stochastique, le processus markovien déterministe par morceaux (PDMP), plus souple permettant de modéliser un plus large spectre de phénomènes. Ce type de modélisation s'accompagne de méthodes de quantification numériques et d'outils d'aide à la décision que nous présentons.

## 1.3 Introduction aux processus markoviens déterministes par morceaux

### 1.3.1 Le modèle

Les PDMP ont été conçus et étudiés par Davis, voir [Davis, 1984] et [Davis, 1993]. C'est J. Devooght qui fut le premier à utiliser ce type de processus en fiabilité afin de résoudre des problèmes issus du domaine de la sûreté nucléaire, voir [Devooght, 1997]. Un peu plus tard un élève de J. Devooght, P.E. Labeau a travaillé sur ces processus et surtout sur leur quantification, voir [Labeau, 1996].

Un PDMP est un processus hybride  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  dont la loi initiale est notée  $\pi_0$ . La première composante est discrète et prend ses valeurs dans un espace fini  $E$ , elle décrit par exemple l'état de tous les composants du système. La deuxième composante est continue entre les sauts de la composante  $I$  et prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , elle représente les conditions environnementales (température, pression, âge des composants...). Dans nos cas d'application, nous ne modéliserons pas de conditions environnementales et la variable  $X$  représentera généralement l'âge des composants du système. En fait, nous utilisons un cas particulier des PDMP qui correspond à une généralisation des processus semi-markoviens que C. Coccozza-Thivent nomme les processus semi-markoviens complétés (CSMP) [Coccozza-Thivent, 2011]. Le processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  saute à des instants isolés et les deux composantes interagissent mutuellement l'une sur l'autre : le taux de transition entre deux états  $i, j \in E$  dépend de la composante environnementale  $X_t$  et est une fonction  $a(i, j, X_t)$ ; lors d'un saut de  $I_{t-} = i$  vers  $I_t = j$  à l'instant  $t$ , la composante continue peut sauter simultanément et est distribuée selon une loi  $\mu_{(i,j,X_{t-})}(dy)$ , qui dépend de la valeur de la deuxième composante juste avant le saut ( $X_{t-}$ ), mais aussi des états discrets  $i$  et  $j$ . La transition de  $(i, x)$  vers  $(j, y)$  est donc régie par le noyau de transition :

$$\tau(i, x; j, dy) = a(i, j, x) \mu_{(i,j,x)}(dy) \quad (1.3.1)$$

Entre deux sauts, la composante discrète  $I_t$  est constante, et l'évolution de  $X_t$  est déterministe, solution d'une équation différentielle qui dépend de cet état discret : sachant que  $I_t = i$ , la composante  $X_t$  est solution de :

$$\frac{dy}{dt} = v(i, y) \quad (1.3.2)$$

où  $v$  est une fonction donnée,  $v : E \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ . Sous des conditions techniques assurant l'existence et l'unicité de la solution de cette équation différentielle, on note  $g(i, x, t)$  l'unique solution telle que :

$$g(i, x, 0) = x \text{ pour tout } (i, x) \in E \times \mathbb{R}^d. \quad (1.3.3)$$

La figure 1.5 illustre l'évolution d'un PDMP dans le temps.

Dans les cas d'application étudiés dans cette thèse, nous devons modéliser des systèmes soumis à des actions de maintenance préventive à des instants déterministes et indépendants de l'état du système. Ces actions de maintenance peuvent entraîner la réparation du système et donc un changement d'état. Le PDMP introduit précédemment ne permet pas de prendre en compte des sauts à des instants déterministes. Davis introduit dans

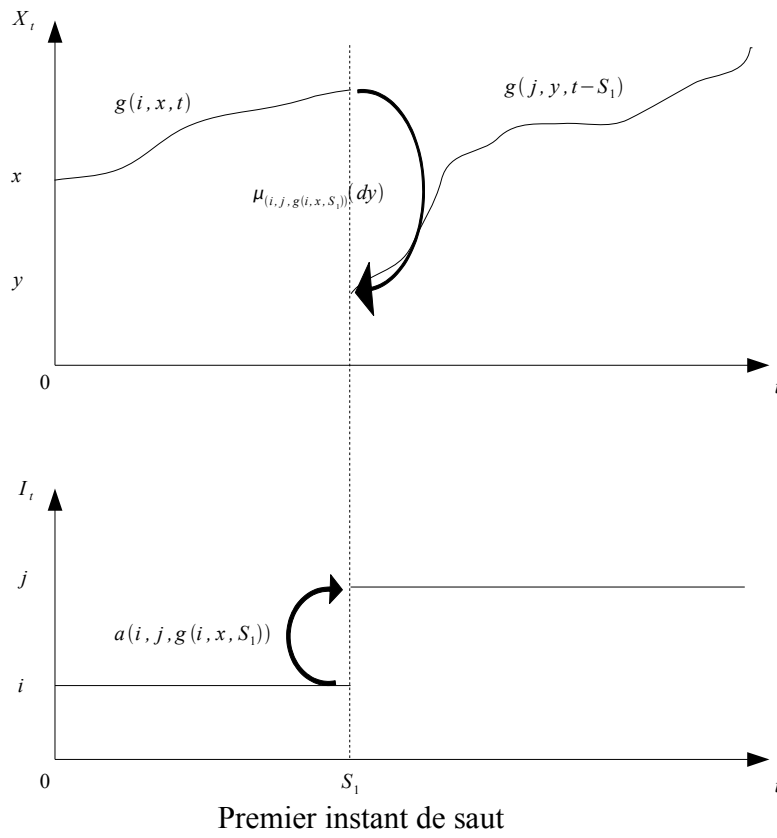


FIGURE 1.5 – Schéma d'évolution d'un PDMP



[Davis, 1993] une notion autorisant le PDMP à sauter lorsque la variable  $X_t$  atteint un ensemble de valeurs qu'il nomme la frontière. Cette notion peut être utilisée pour modéliser une action de maintenance à un instant déterministe cependant cela complique la modélisation et l'étude théorique du processus. Il est possible de modéliser plus simplement ce type de maintenance de la façon suivante. Supposons que l'on souhaite modéliser un système subissant une action de maintenance préventive instantanée ayant lieu à l'instant  $T$  :

- avant  $T$ , le système est modélisé par un PDMP  $(I_t^1, X_t^1)_{0 \leq t < T}$  initialisé par la loi  $\pi_0^1$ ,
- après  $T$ , le système est modélisé par un PDMP  $(I_t^2, X_t^2)_{t \geq T}$  initialisé par la loi  $\pi_T^2$  telle que

$$\pi_T^2(i, dx) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} q(j, y; i, dx) \pi_{T-}^1(j, dy) \quad (1.3.4)$$

avec  $q(j, y; \cdot, dx)$  la loi du saut du processus juste après la maintenance à l'instant  $T$  sachant que juste avant la maintenance, le système était dans l'état  $(I_{T-}^1, X_{T-}^1) = (j, y)$ .

Les PDMP  $(I_t^1, X_t^1)_{0 \leq t < T}$  et  $(I_t^2, X_t^2)_{t \geq T}$  possèdent le même espace d'état et les mêmes noyaux de transition ; de plus l'évolution déterministe de  $X_t^1$  et celle de  $X_t^2$  sont régies par les mêmes équations différentielles.

Plus généralement, si un système est soumis à des actions de maintenance préventive à des instants  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  déterministes (par convention  $T_0 = 0$ ), son évolution dans le temps est modélisée par une suite de PDMP de même espace d'état, de mêmes noyaux de transition, et dont l'évolution des variables physiques est régie par les mêmes équations différentielles. Pour  $t \in [T_k, T_{k+1}[$ , le système est modélisé par le processus  $(I_t^{k+1}, X_t^{k+1})_{T_k \leq t < T_{k+1}}$  initialisé par la loi  $\pi_{T_k}^{k+1}$  obtenue à partir de la loi de  $(I_{T_k}^k, X_{T_k}^k)$ ,  $\pi_{T_k}^k$ , de la façon suivante :

$$\pi_{T_k}^{k+1}(i, dx) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} q(j, y; i, dx) \pi_{T_k}^k(j, dy) \quad (1.3.5)$$

Afin de simplifier les notations, nous utilisons par la suite un abus de langage : nous considérons qu'un système soumis à de telles maintenances est modélisé par un seul PDMP  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ . Implicitement cela signifie que :

$$(I_t, X_t) = (I_t^{k+1}, X_t^{k+1}) \text{ ps pour } t \in [T_k, T_{k+1}[ \quad (1.3.6)$$

La représentation d'une trajectoire de ce type de processus est visible dans la FIGURE 1.6.

**Exemple 13.** Reprenons l'exemple de deux composants en parallèle soumis à une action de maintenance préventive à la date  $T$ . Rappelons que ce système ne peut pas être modélisé par un processus semi-markovien. Le système ne subit une maintenance corrective que lorsque les deux composants sont tombés en panne ; cette maintenance consiste à remplacer les deux composants par des neufs. Les lois de durée de vie des composants 1 et 2 sont de type général (mais pas exponentiel) et les taux de défaillance sont notés respectivement  $\lambda_1(x_1)$  et  $\lambda_2(x_2)$ . Ces taux sont des fonctions non constantes et dépendent de la durée de fonctionnement des composants notée  $x_1$  pour le composant 1 et  $x_2$  pour le composant 2. La loi de durée de réparation est une loi exponentielle de paramètre  $\eta$ . L'action de maintenance préventive à l'instant  $T$  consiste à surveiller l'état des deux composants ; si l'un d'entre eux est défaillant, ce composant est remplacé par un composant neuf identique. Si aucun des deux composants n'est en panne durant cette maintenance, celle-ci n'a aucun effet. Modélisons ce système par un PDMP.

L'espace d'état dans lequel évolue la variable discrète  $I_t$  du PDMP regroupe les états de marche et de panne du système :  $E = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ . Les deux composants vieillissent et n'ont pas toujours le même fait de la maintenance préventive pendant laquelle un composant peut être remplacé et pas l'autre. Il faut donc garder en mémoire l'âge des deux composants. Soient  $X_t^1$  l'âge du composant 1 à l'instant  $t$  et  $X_t^2$  l'âge du composant 2 à l'instant  $t$ , la variable physique du PDMP est  $X_t = (X_t^1, X_t^2)$ . Ces deux variables évoluent avec vitesse un dans le temps donc pour tout  $i \in E$ ,  $v(i, x) = (1, 1)$ .

Les transitions entre les états du PDMP sont la conséquence d'une défaillance d'un composant ou d'une maintenance corrective. Ainsi, les taux de transition entre les états du PDMP représentent soit les taux de défaillance des composants, soit le taux de réparation. Ces taux sont décrits dans ce qui suit :

$$a((1, 1), (0, 1), (x_1, x_2)) = a((1, 0), (0, 0), (x_1, x_2)) = \lambda_1(x_1)$$

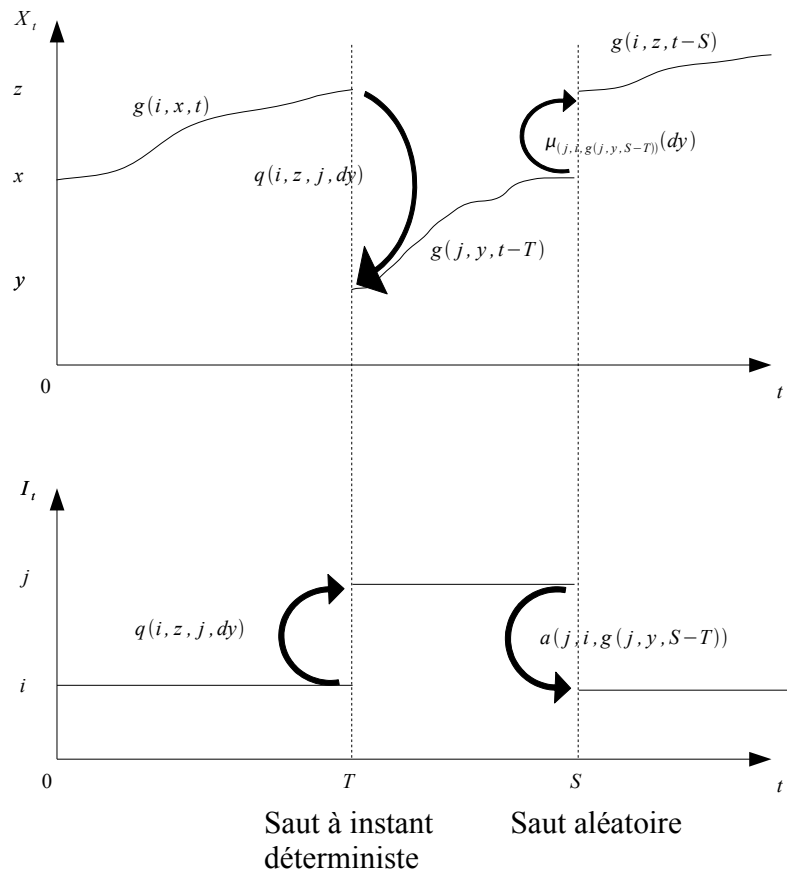


FIGURE 1.6 – Schéma d'évolution d'un PDMP dans le cas d'un saut à l'instant  $T$  déterministe (par exemple une maintenance préventive planifiée)

$$a((1, 1), (1, 0), (x_1, x_2)) = a((0, 1), (0, 0), (x_1, x_2)) = \lambda_2(x_2)$$

$$a((0, 0), (1, 1), (x_1, x_2)) = \eta$$

A la suite d'une défaillance d'un composant, la variable discrète du PDMP saute. En revanche une défaillance n'entraînant pas une maintenance corrective immédiate, les composants ne sont pas tout de suite remplacés, ainsi leur âge reste le même. La distribution de la variable physique après un saut de la variable discrète due à une défaillance est une masse de Dirac en  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_1, x_2)$  étant l'âge des composants lors de la défaillance. Pour rappel, une masse de Dirac se définit de la façon suivante :

$$\int_I \delta_x(dy) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.3.7)$$

$$\begin{aligned} \mu_{((1,1),(0,1),(x_1,x_2))}(dy_1, dy_2) &= \mu_{((1,1),(1,0),(x_1,x_2))}(dy_1, dy_2) = \mu_{((1,0),(0,0),(x_1,x_2))}(dy_1, dy_2) \\ &= \mu_{((0,1),(0,0),(x_1,x_2))}(dy_1, dy_2) = \delta_{x_1, x_2}(dy_1, dy_2) \end{aligned}$$

A la suite d'une maintenance corrective les deux composants sont remplacés par des composants neufs, leur âge est ainsi réinitialisé à zéro. La distribution de la variable physique après un saut de la variable discrète due à une maintenance corrective est une masse de Dirac en zéro.

$$\mu_{((0,0),(1,1),(x_1,x_2))}(dy_1, dy_2) = \delta_{0,0}(dy_1, dy_2)$$

Lors de la maintenance préventive, c'est-à-dire quand  $t = T$ , si la variable discrète du PDMP se trouve dans les états  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$ , elle saute vers l'état  $(1, 1)$ . La variable physique saute également, modélisant ainsi le remplacement du composant défaillant. Les lois des sauts dus à cette action de maintenance préventive quand  $t = T$  sont :

$$q(((1, 1), (x_1, x_2)), ((1, 1), (dy_1, dy_2))) = \delta_{x_1, x_2}(dy_1, dy_2)$$

$$q(((0, 1), (x_1, x_2)), ((1, 1), (dy_1, dy_2))) = \delta_{0, x_2}(dy_1, dy_2)$$

$$q(((1, 0), (x_1, x_2)), ((1, 1), (dy_1, dy_2))) = \delta_{x_1, 0}(dy_1, dy_2)$$

Dans nos cas d'application, les PDMP sont utilisés pour modéliser des systèmes multi-composants vieillissants et soumis à de la maintenance corrective et préventive. Dans la littérature, nous pouvons citer d'autres applications des PDMP en milieu industriel notamment pour modéliser la propagation de fissure. Ce type d'étude a fait l'objet de la thèse de Chiquet, voir [Chiquet, 2007] et [Chiquet et al., 2009], et fait en ce moment l'objet d'un projet ANR nommé FAUTOCOES, voir [De Saporta et al., 2010] et [Costa and Dufour, 2010]. Asmussen propose dans [ASM] différentes applications des PDMP notamment en assurance. D'autres applications en assurance peuvent être trouvées dans [Wang et al., 2003], [He et al., 2008] et [Rolski et al., 2000].

## 1.3.2 Outils pour leur quantification

### 1.3.2.1 Les simulations de Monte-Carlo

Les simulations de Monte-Carlo appliquées à des problèmes liés à la fiabilité dynamique ont été étudiées par de nombreux auteurs [Labeau, 1998] et [Marseguerra et al., 1998]. En fiabilité dynamique, un facteur supplémentaire vient augmenter le temps de calcul lié aux simulations de Monte-Carlo. En effet, les variables physiques peuvent suivre des trajectoires décrites par des équations différentielles compliquées que l'on ne peut résoudre directement. Il est alors nécessaire d'approcher les solutions de ces équations en les discrétisant ce qui rallonge le temps de calcul. Dans sa thèse [Labeau, 1996], Labeau donne trois techniques pour réduire l'impact de cette discrétisation sur le temps de calcul. La première repose sur la méthode de résolution des équations différentielles décrivant l'évolution des variables physiques du PDMP. La deuxième consiste à utiliser un pas de discrétisation adaptable. La troisième méthode consiste à ne pas répéter plusieurs fois les mêmes calculs : les mêmes intégrations sur une portion du temps ne seront pas répétées chaque fois qu'une histoire débutera dans un même état avec la même

valeur de variables physiques.

Dans [Zhang et al., 2008], les auteurs utilisent les simulations de Monte-Carlo pour quantifier un système modélisé par un PDMP. Le système qu'ils cherchent à modéliser est un cas test souvent utilisé dans le domaine de la fiabilité dynamique pour tester et comparer les méthodes. Dans cet exemple, il est possible de résoudre explicitement les équations différentielles régissant l'évolution des variables physiques ce qui permet aux auteurs de ne pas d'utiliser une méthode de discrétisation pour les résoudre.

Dans nos cas d'application, la difficulté n'est pas liée aux équations différentielles régissant l'évolution des variables physiques car celles-ci sont très simples. En effet, l'objectif étant d'optimiser la maintenance de systèmes multi-composants vieillissants, les variables physiques modélisent l'âge des composants et évoluent avec vitesse 1 dans le temps. Dans ce cadre d'application, l'utilisation des simulations de Monte-Carlo se heurte à un problème mettant en opposition les temps de calcul et la précision des résultats. Plaçons nous dans le cadre où une maintenance est considérée comme optimale si elle minimise une fonction de coût. Cette fonction dépend de plusieurs variables (une dizaine) et peut être estimée à l'aide de simulations de Monte-Carlo. La combinatoire de stratégies à tester étant trop importante, nous avons eu recours à un algorithme de recuit simulé pour évaluer la stratégie optimale. L'imprécision des résultats issus des simulations de Monte-Carlo pose ici une difficulté : nous n'avons pas réussi à faire converger l'algorithme de recuit simulé. L'augmentation du nombre de simulations permet bien de réduire l'imprécision mais le temps de calcul engendré est trop important pour espérer optimiser un plan de maintenance. Dans sa thèse [Zille, 2009], V. Zille cherche à estimer des quantités fiabilistes associées à un système multi-composants à l'aide de simulations de Monte-Carlo et rencontre la même difficulté liée au temps de calcul.

Nous proposons d'utiliser une approche alternative basée sur un schéma de type déterministe dont le principe repose sur la discrétisation du temps et de l'espace des variables physiques. Cette méthode ne possède pas les mêmes contraintes que les simulations de Monte-Carlo et paraît donc être mieux adaptée à l'optimisation de stratégie de maintenance d'un système multi-composants.

### 1.3.2.2 Les méthodes de discrétisation

Il existe principalement deux méthodes de discrétisation pour quantifier des PDMP. La première méthode consiste à utiliser un schéma du type volumes finis pour évaluer les solutions des équations de Chapman-Kolmogorov (CK) présentées dans le prochain chapitre. Plusieurs schémas existent dont certains ont fait l'objet d'une étude théorique démontrant leur convergence, voir [Cocozza-Thivent et al., 2006a] et [Eymard et al., 2008]. Dans cette thèse, nous utilisons un autre schéma de volumes finis pour évaluer les quantités fiabilistes. La convergence du schéma que nous utilisons a fait l'objet d'une étude théorique présentée dans le prochain chapitre. La deuxième méthode est le Cell-to-Cell Mapping (CCM) introduit par Hsu dans [Hsu, 1980] et [Hsu, 1987]. Aldemir propose dans [Belhadj and Aldemir, 1995] deux algorithmes de type CCM basés, comme les schémas de volumes finis, sur les équations de Chapman-Kolmogorov.

Le CCM et les schémas de volumes finis ont le même principe qui consiste à discrétiser l'espace des variables environnementales et le temps afin d'approcher le PDMP par une chaîne de Markov. Le nom du CCM vient du fait que l'espace des variables environnementales est divisé en cellules. Chaque cellule contient une masse qui correspond à la probabilité que les variables physiques appartiennent à la cellule à un instant donné. A chaque pas de temps, les masses de probabilité évoluent et sautent d'une cellule à l'autre modélisant l'évolution des variables physiques et les changements d'état du système. Une variante du CCM consiste à faire tendre le pas de discrétisation du temps vers 0 afin de ne plus avoir à discrétiser le temps. Cette méthode est le Continuous Cell to Cell Mapping (CCCM) et est décrite dans [Aldemir and Tombuyses, 1996] et [Tombuyses and Aldemir, 1997].

Le CCM et les schémas de volumes finis souffrent des mêmes limites liées au nombre de variables physiques. En effet, plus le nombre de variables physiques est élevé, plus l'espace à discrétiser est grand ce qui nécessite une quantité de place mémoire importante. Dans nos cas d'application, cela entraîne une limitation du nombre de composants vieillissants modélisés dans les systèmes étudiés. Une partie de cette thèse a pour but de développer et de tester une méthode d'approximation permettant de repousser cette limite pour le schéma de volumes finis et ainsi de traiter des systèmes comptant plus de composants vieillissants.

L'intérêt de ce type de méthodes réside dans le fait qu'elles sont déterministes. De ce fait, si l'on lance deux fois les mêmes calculs, on obtiendra deux fois les mêmes résultats contrairement aux simulations de Monte-Carlo. Cette caractéristique rend ces méthodes adaptées lorsqu'elles sont utilisées pour estimer la valeur d'une fonction (de coût par exemple) que l'on souhaite minimiser avec un algorithme d'optimisation stochastique. Dans [Eymard and Mercier, 2008], les auteurs cherchent à évaluer la disponibilité d'un système d'une part avec un schéma de volumes finis et d'autre part avec des simulations de Monte-Carlo. L'objectif est de comparer ces deux approches.

### 1.3.2.3 Les arbres dynamiques discrets

Dans [Labeau et al., 2000], il est dit que la méthode des arbres dynamiques discrets (DDET) est considérée comme la plus avancée pour résoudre des problèmes de fiabilité dynamique. Cette méthode est une méthode de simulation dans laquelle on discrétise le temps. Reprenons la description de cette méthode faite par le bureau d'évaluation probabiliste des accidents graves dans [Raimond et al., 2007]. Un DDET est un arbre d'événements classique, qui contient l'ensemble des scénarios imaginés par l'utilisateur. Dans cette approche, toutes les séquences envisagées sont modélisées. La transition d'un scénario (ou branche) à l'autre s'effectue en évaluant à chaque pas de temps les évolutions des différents processus. La précision des résultats dépend du pas de temps retenu. Un pas de temps plus important générera moins de branches et certains scénarios ne seront pas modélisés. Un pas de temps plus petit devrait permettre d'accroître la précision du calcul, mais au prix d'une combinatoire et donc d'un nombre de séquences à simuler très élevé. Une telle approche s'avère difficile à mettre en place pour des systèmes complexes et n'est exploitable que pour de petits systèmes ou des sous-systèmes. Une seconde approche consiste à ne pas modéliser à priori toutes les transitions possibles d'un scénario (ou branche) à un(e) autre, mais à générer aléatoirement dans le temps des transitions entre états des systèmes, par tirages de Monte-Carlo (suivant des lois de probabilité de transition, dépendant elles-mêmes des grandeurs physiques et de l'état des systèmes). On parle cette fois d'arbres d'événements continus. L'utilisateur définit ici une limite à la quantité de branches générées (critère d'arrêt de la simulation), afin d'éviter l'explosion combinatoire de l'arbre.

## 1.3.3 Outils pour leur modélisation

### 1.3.3.1 Les réseaux de Pétri colorés

Il existe une multitude de versions différentes des RdP. Toutes les versions ne sont pas adaptées à la fiabilité dynamique car elles ne modélisent pas toutes l'interaction du système avec des variables environnementales. Pour cela, le réseau de Pétri doit être capable de faire dépendre l'évolution des jetons avec des valeurs dont l'évolution est décrite par une équation différentielle. Par exemple, les réseaux de Pétri colorés (DCPN) en sont capables. Dans [Everdij and Blom, 2003], il a été montré que tout PDMP peut être converti en DCPN et que sous certaines conditions, tout DCPN peut être converti en PDMP. Les DCPN ne sont pas les seuls réseaux de Pétri capables de modéliser un système dynamique hybride. Dans [Medjoudj, 2006] et [Khalfaoui, 2003] sont présentés d'autres réseaux de Pétri qui conviennent à ce type de système.

En général, la quantification d'un système modélisé par un RdP (coloré ou non) est réalisée par simulation de Monte-Carlo, par exemple dans [Zille et al., 2009], ou par des méthodes analytiques si le système peut être modélisé par un processus markovien de sauts. Dans notre étude, nous utilisons un schéma de volumes finis qui approxime les solutions de l'équation de Chapman-Kolmogorov. Cette équation ne peut être écrite que si l'on peut modéliser le système par un processus markovien (un PDMP dans notre cas). Un DCPN pouvant être converti en PDMP, il est possible d'écrire l'équation de Chapman-Kolmogorov à partir du DCPN et donc d'obtenir les quantités d'intérêt avec un schéma numérique déterministe. Ceci apporte une alternative aux simulations de Monte-Carlo pour le traitement numérique du DCPN. A notre connaissance, il n'existe pas de logiciel permettant de réaliser le traitement numérique d'un RdP par cette méthode.

### 1.3.3.2 Les automates stochastiques hybrides

Un automate à états finis permet de décrire les états et les transitions entre ces états. Le mot hybride signifie que l'on rajoute des variables continues dont l'évolution est solution d'un système d'équations différentielles différent en fonction de l'état dans lequel se trouve l'automate. Le mot stochastique signifie que les sauts de l'automate d'un état à l'autre sont aléatoires. Plus précisément, un ASH est composé d'un automate et d'un générateur aléatoire lié aux différents modes de fonctionnement à travers un descripteur de modes. Cette méthode a fait

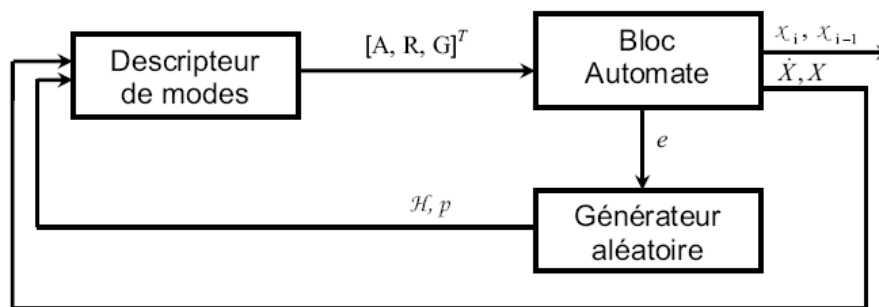


FIGURE 1.7 – Modèle de l'automate stochastique hybride [Castaneda, 2009]

l'objet d'une thèse récente [Castaneda, 2009] soutenue par G. A. Pérez Castañeda en mars 2009. Il est présenté sur la figure 1.7 extraite de [Castaneda, 2009]. Les notations présentes dans cette figure sont celles utilisées dans [Castaneda, 2009] et sont expliquées dans ce qui suit.

Dans [Castaneda, 2009], différents systèmes sont modélisés (un système de régulation thermique, un four dont les composants vieillissent et un réservoir d'eau alimenté par des pompes) à l'aide d'un Automate Stochastique Hybride (ASH). Les calculs sont ensuite réalisés par simulations de Monte-Carlo. La modélisation et la simulation sont faits à l'aide de l'environnement Scicos de Scilab. Un solveur numérique est utilisé pour résoudre les différentes équations différentielles qui gèrent l'évolution déterministe des variables physiques entre les sauts de l'automate. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus avec d'autres méthodes comme les réseaux de Pétri ou les processus markoviens (processus markoviens de sauts, processus semi-markoviens ou PDMP selon le cas étudié).

Reprenons la figure 1.7 et ce qui est expliqué dans [Castaneda, 2009]. Le bloc automate permet de décrire le système en précisant le nombre d'états discrets ainsi que le nombre de variables continues. Il permet de définir les transitions entre les différents états. Il prend en entrée, pour chaque état, la dynamique des variables physiques (l'équation différentielle que leur évolution vérifie dans l'état correspondant) noté  $A$ , les valeurs qui sont utilisées pour réinitialiser les variables physiques lors de l'entrée dans un nouvel état noté  $R$  et les conditions de garde associées aux transitions de sortie des états noté  $G$ . Tout ceci est fourni par le descripteur de modes. En sortie, le bloc automate renvoie les valeurs des variables physiques notées  $X$  ainsi que leurs dérivées notées  $\dot{X}$  vers le descripteur de modes ainsi que l'état discret courant noté  $\chi_i$  et l'état discret précédent noté  $\chi_{i-1}$ . La troisième sortie de l'automate notée  $e$  est activée lorsqu'une transition d'état discret se produit, c'est-à-dire que cette sortie génère un événement qui active le générateur aléatoire pour produire un tirage aléatoire dont la valeur sera transmise au descripteur de modes. Le descripteur de modes correspond aux différentes dynamiques continues du système. Le descripteur a deux entrées : la première correspond aux variables physiques et à leurs dérivées qui viennent du bloc automate et la deuxième entrée reçoit les valeurs aléatoires du tirage que produit le générateur aléatoire.

Dans la conclusion de [Castaneda, 2009], il est dit que l'auteur a choisi d'utiliser les ASH car il ne disposait pas d'un outil logiciel utilisant les RdP en interaction avec un puissant solveur numérique d'équations différentielles. De plus comme dit précédemment, un RdP est plus général qu'un ASH, de ce fait nous pouvons comprendre qu'un RdP permet de modéliser tout ce qu'il est possible de modéliser avec un ASH et plus. Nous pouvons en déduire qu'un ASH peut être converti en un RdP (par exemple un DCPN) qui lui même peut être interprété en PDMP.

## 1.4 Méthodologie retenue pour les cas d'application SNCF

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents processus markoviens et semi-markoviens pouvant être utilisés pour modéliser un système multi-composants en commençant par le plus simple (chaîne de Markov) et en

finissant par le plus compliqué (PDMP). La FIGURE 1.8 schématise les caractéristiques de ces processus markoviens les uns par rapport aux autres.

Même si les systèmes étudiés dans cette thèse sont de petite taille, la dépendance entre composants induite par les politiques de maintenance implique que les modèles habituellement utilisés sont difficilement applicables. En revanche, les processus markoviens déterministes par morceaux (PDMP) sont suffisamment souples pour répondre à la problématique. Ces modèles, issus de la fiabilité dynamique, permettent de modéliser des systèmes dont les composants vieillissent et dont la stratégie de maintenance ne peut être modélisée par un processus semi-markovien. Les variables physiques du PDMP représentent l'âge de chacun des composants du système modélisé ce qui permet de modéliser leur vieillissement. L'évolution de ces variables est donc simple, elles évoluent avec vitesse 1. Nous verrons que selon l'algorithme de quantification utilisé, il est plus pertinent de garder en mémoire la date de mise en service qui, contrairement à l'âge, n'évolue pas entre deux remplacements au cours du temps. L'utilisation des PDMP dans notre étude ne rentre pas dans le cadre de la fiabilité dynamique car les systèmes ne sont pas modélisés en interaction avec leur environnement.

Comme nous l'avons expliqué précédemment, un PDMP peut être quantifié principalement de trois manières différentes (simulations de Monte-Carlo, méthodes de discrétisation, arbres dynamiques discrets). L'objectif de cette thèse est de proposer une méthodologie permettant de modéliser et d'optimiser la maintenance de systèmes multi-composants. Les simulations de Monte-Carlo, de par leur caractéristique aléatoire, rendent l'utilisation d'un algorithme d'optimisation stochastique difficile. Nous avons ainsi cherché à adapter et à développer les techniques de discrétisation et plus précisément un schéma de volumes finis. Le prochain chapitre présente ce schéma de volumes finis.

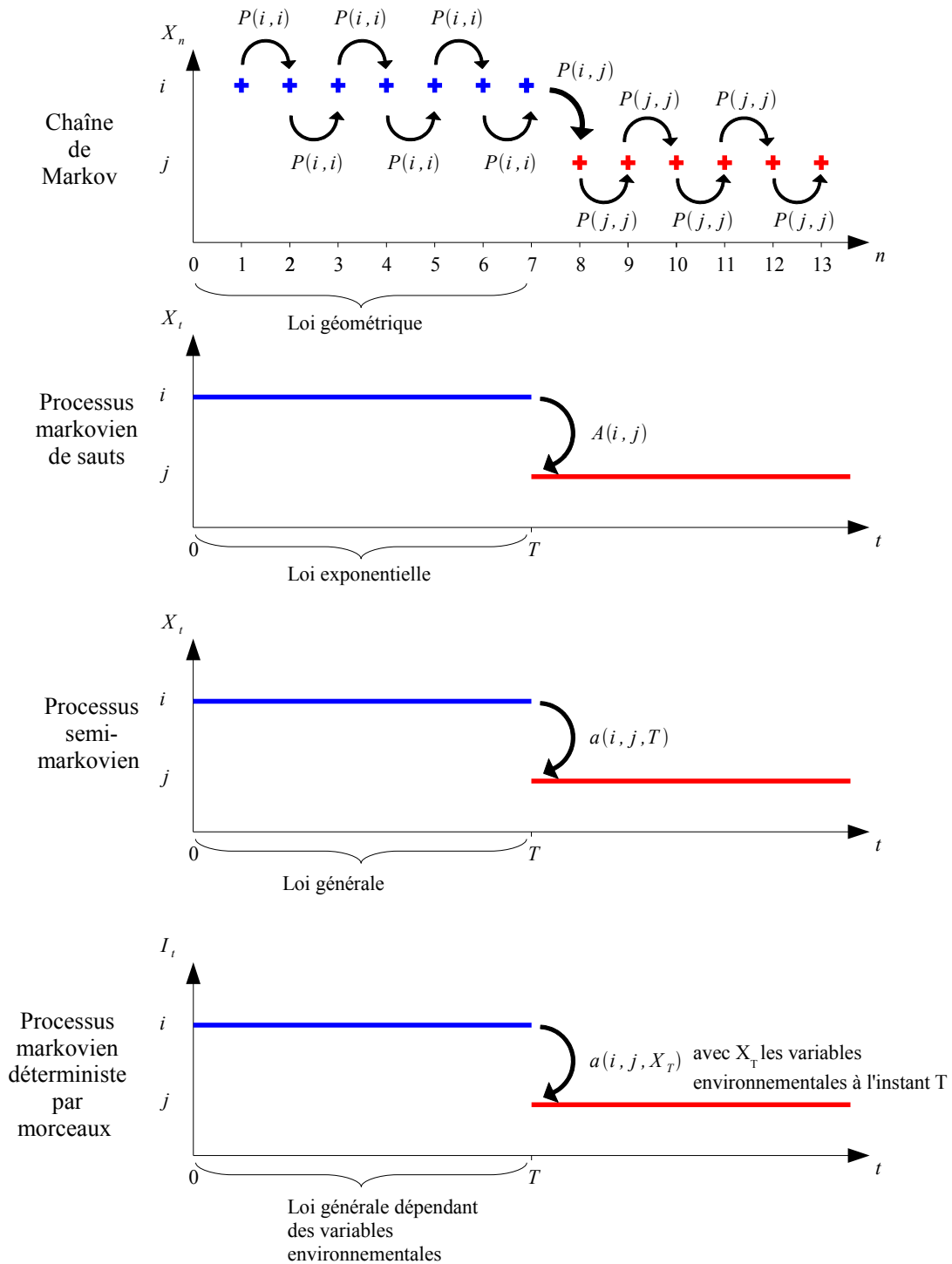


FIGURE 1.8 – Comparaison des différents processus markoviens et semi-markoviens présentés dans ce chapitre





## Chapitre 2

# Méthode déterministe de traitement numérique

### 2.1 Introduction

Les processus markoviens déterministes par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Processes ou PDMPs en anglais) permettent, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, de modéliser des systèmes multi-composants vieillissants soumis à de la maintenance. De cette modélisation découlent des formules permettant de calculer les quantités fiabilistes d'intérêt telles que la fiabilité, la disponibilité ou encore le nombre moyen de défaillances. Ces quantités s'expriment en fonction des lois marginales du PDMP qui sont des quantités généralement difficilement atteignables par des méthodes analytiques, voir [Labeau, 1996]. Nous proposons dans ce chapitre d'utiliser une méthode numérique déterministe afin d'estimer une approximation de ces quantités. Les quantités d'intérêt s'expriment de la façon suivante :

$$\mathbb{E}_{\pi_0} [f(I_t, X_t)] = \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) \pi_t(i, dx) \quad (2.1.1)$$

$$\int_0^t \mathbb{E}_{\pi_0} [f(I_s, X_s)] ds = \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x) \pi_s(i, dx) ds \quad (2.1.2)$$

avec  $\pi_t$  la loi de  $(I_t, X_t)$  et  $f$  une fonction bornée sur  $E \times \mathbb{R}^d$ .

Des travaux ont été réalisés dans [Cocozza-Thivent et al., 2006b] afin de caractériser les lois marginales du PDMP. Le prochain paragraphe reprend l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006b] afin de présenter une construction du PDMP permettant d'introduire convenablement les équations de Chapman-Kolmogorov (CK) en utilisant le caractère markovien du processus. Le résultat principal de [Cocozza-Thivent et al., 2006b] est que la famille des lois marginales du PDMP  $(\pi_t)_{t \geq 0}$  est l'unique solution des équations de CK. Ce résultat a permis de construire des algorithmes de type volumes finis permettant d'approximer cette famille de lois et de démontrer leur convergence, voir [Cocozza-Thivent et al., 2006a] et [Eymard et al., 2008]. Nous proposons d'utiliser un autre algorithme que nous présentons et dont nous démontrons la convergence dans le troisième paragraphe. Le quatrième paragraphe détaille les différentes quantités fiabilistes d'intérêt dont une approximation est calculée à l'aide du schéma de volumes finis. Ces quantités peuvent être difficiles à obtenir selon la complexité du système modélisé. En effet le nombre de variables physiques constitue un frein à l'utilisation de cette méthode. Nous proposons trois méthodes dans le cinquième paragraphe permettant de passer outre ces difficultés. La première méthode repose sur une simplification de la modélisation du système. La deuxième méthode repose sur une approximation des quantités recherchées dans le schéma numérique. La troisième méthode correspond à un changement de processus. La précision des résultats issus du schéma numérique dépend de la cinétique d'évolution des variables physiques du PDMP. Dans nos cas d'application, ces variables représentent généralement l'âge des composants du système modélisé. Nous montrons qu'il est possible de se ramener à des variables n'évoluant pas au cours du temps à l'aide d'un changement de variable. Cette nouvelle modélisation entraîne un schéma numérique différent qui peut donner de meilleurs résultats.

## 2.2 Construction théorique des processus markoviens déterministes par morceaux

Reprenons les notations introduites dans le paragraphe 1.3.1. Toutes les propositions et démonstrations de ce paragraphe sont adaptées de l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006b].

### 2.2.1 Hypothèses

Nous définissons  $\mathcal{H}_0$  les hypothèses suivantes :

1. L'ensemble  $E$  est fini.
2. Le taux de transition  $a$  est tel que pour tout  $i, j \in E$ ,  $a(i, j, \cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$  où  $C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$  est l'ensemble des fonctions continues bornées de support  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ . Soit  $A > 0$  une borne supérieure pour ces fonctions  $a(i, j, \cdot)$ . Nous notons  $b(i, \cdot) = \sum_{j \in E} a(i, j, \cdot)$ , pour tout  $i \in E$  et  $B = A \times \text{card}(E)$ .
3. La fonction  $\mu$  est telle que :
  - a pour  $i, j \in E$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\mu_{(i,j,x)} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ , l'ensemble des mesures de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ ,
  - b pour  $i, j \in E$  et  $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , la fonction  $x \rightarrow \int \psi(y) \mu_{(i,j,x)}(dy)$  est continue de  $\mathbb{R}^d$  vers  $\mathbb{R}$ .
4. La vitesse qui intervient dans (1.3.2) est telle que :
  - a  $v \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)^E$  où  $C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  est l'ensemble des fonctions continues de support  $\mathbb{R}^d$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,
  - b la fonction  $v(i, \cdot)$  est localement Lipschitzienne continue pour tout  $i \in E$ ,
  - c la fonction  $\text{div}[v(i, \cdot)]$  est presque partout bornée par une valeur  $D > 0$  pour tout  $i \in E$ ,
  - d la fonction  $v(i, \cdot)$  est telle que il existe  $V_1 > 0$  et  $V_2 > 0$  tel que pour tout  $i \in E$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$\|v(i, x)\| \leq V_1 \|x\| + V_2 \quad (2.2.1)$$

5. Soit  $\pi_0$  la loi de  $(I_0, X_0)$ , nous supposons que  $\pi_0 \in \mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$ , où  $\mathcal{P}(E \times \mathbb{R}^d)$  est l'ensemble des mesures de probabilité sur  $E \times \mathbb{R}^d$ .

Ces hypothèses permettent de garantir l'existence et l'unicité de la solution des équations différentielles contrôlant l'évolution de la variable environnementale. Elles nous permettent aussi d'obtenir le lemme suivant.

**Lemme 14.** [Cocozza-Thivent et al., 2006b] *Il existe une et seulement une fonction  $g \in C(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^d)^E$  de classe  $C^1$  en fonction du temps  $t$  telle que pour tout  $i \in E$  :*

$$\frac{\partial g}{\partial t}(i, x, t) = v(i, g(i, x, t)), \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+, \quad (2.2.2)$$

avec une condition initiale

$$g(i, x, 0) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \quad (2.2.3)$$

De plus, cette unique solution  $g$  vérifie les propriétés suivantes :

1. La fonction  $x \mapsto g(i, x, t)$  est localement Lipschitzienne continue en fonction de  $x \in \mathbb{R}^d$ , pour tout  $t > 0$  et  $i \in E$ ,
2. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $(s, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  et  $i \in E$ ,

$$g(i, g(i, x, s), t) = g(i, x, s + t) \quad (2.2.4)$$

### 2.2.2 Construction probabiliste du processus

Le PDMP est construit comme dans [Cocozza-Thivent et al., 2006b] et [Davis, 1993]. Soit un processus de renouvellement Markovien  $(T_n, (I_{T_n}, X_{T_n}))_{n \geq 0}$  défini par son noyau  $Q$ .  $Q(I_{T_n}, X_{T_n}, j, dy, du)$  est la loi conditionnelle de  $(I_{T_{n+1}}, X_{T_{n+1}}, T_{n+1} - T_n)$  sachant  $(T_k, (I_{T_k}, X_{T_k}))_{k \leq n}$  (ou de façon équivalente, sachant  $(I_{T_n}, X_{T_n})$ ). Pour  $i \in E$ ,  $Q$  est caractérisé par :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \varphi(X_{T_{n+1}}, T_{n+1} - T_n) 1_{I_{T_{n+1}}=j} \mid (T_k, (I_{T_k}, X_{T_k}))_{k \leq n} \right] \\ &= \int_0^\infty \exp \left( - \int_0^u b(I_{T_n}, g(I_{T_n}, X_{T_n}, v)) dv \right) a(I_{T_n}, j, g(I_{T_n}, X_{T_n}, u)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y, u) \mu_{(I_{T_n}, j, g(I_{T_n}, X_{T_n}, u))}(dy) \right) du \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y, u) Q(I_{T_n}, X_{T_n}, j, dy, du) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

pour toute  $\varphi$  fonction positive mesurable sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , et  $j \in E$ .

$(I_{T_n}, X_{T_n})$  est une Chaîne de Markov à valeurs dans  $E \times \mathbb{R}^d$  de noyau de transition  $\bar{Q}(i, x, j, dy) = \int_{\mathbb{R}_+} Q(i, x, j, dy, du)$ .

Le processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  peut maintenant être construit de la façon suivante : si  $T_n \leq t < T_{n+1}$  alors  $I_t = I_{T_n}$  et  $X_t = g(I_{T_n}, X_{T_n}, t - T_n)$ . L'évolution du processus  $(X_t)_{t \geq 0}$  est ainsi déterministe entre les sauts du processus  $(I_t)_{t \geq 0}$ .

### 2.2.3 Équation de renouvellement markovien

La proposition suivante donne l'équation de renouvellement markovien associée au processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  construit précédemment :

**Proposition 15.** *Soit  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  le processus construit précédemment et  $\varphi$  une fonction mesurable et bornée sur  $E \times \mathbb{R}^d$ . Les notations suivantes sont introduites :*

$$\begin{aligned} c_i(i, x) &= \mathbb{P}_{i,x}(T_1 > t) \text{ avec } T_1 \text{ le premier instant de saut} \\ &= \exp \left( - \int_0^t b(i, g(i, x, v)) dv \right) \\ \psi(i, x, t) &= \mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t)] \end{aligned}$$

L'équation de renouvellement markovien est la suivante :

$$\psi(i, x, t) = \varphi(i, g(i, x, t))c_i(t, x) + \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \psi(j, y, t-s) Q(i, x, j, dy, ds) \quad (2.2.6)$$

*Démonstration.*

$$\mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t)] = \mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t) 1_{T_1 > t}] + \mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t) 1_{T_1 \leq t}]$$

Le premier terme peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t) 1_{T_1 > t}] = \varphi(i, g(i, x, t))c_i(t, x)$$

Le deuxième terme peut s'écrire sous la forme suivante, avec  $\mathcal{F}_{T_1}$  la filtration naturelle du processus avant l'instant  $T_1$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t) 1_{T_1 \leq t}] &= \mathbb{E}_{i,x} [1_{T_1 \leq t} \mathbb{E}_{i,x} [\varphi(I_t, X_t) \mid \mathcal{F}_{T_1}]] \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^\infty 1_{s \leq t} \mathbb{E}_{j,y} [\varphi(I_{t-s}, X_{t-s})] Q(i, x, j, dy, ds) \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. □

## 2.2.4 Probabilités de transition

De l'équation de renouvellement markovien, il est possible de déduire une expression explicite des probabilités de transition du processus.

**Proposition 16.** [Cocozza-Thivent et al., 2006b] *Le processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  est un processus de Markov homogène à valeurs dans  $E \times \mathbb{R}^d$ . Ses probabilités de transition  $P_t(i, x, j, dy)$  sont données par :*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) P_t(i, x, j, dy) &= \mathbf{1}_{i=j} c_i(t, x) \varphi(g(i, x, t)) \\
&+ \int_0^t c_i(s, x) a(i, j, g(i, x, s)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_j(t-s, y) \varphi(g(j, y, t-s)) \mu_{(i, j, g(i, x, s))}(dy) \right) ds \\
&+ \sum_{p \geq 2} \sum_{j_1, \dots, j_{p-1}} \int_{s_1 \geq 0, \dots, s_p \geq 0, s_1 + \dots + s_p \leq t} ds_1 \cdots ds_p \\
&\times c_i(s_1, x) a(i, j_1, g(i, x, s_1)) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(i, j_1, g(i, x, s_1))}(dy_1) \\
&\times \prod_{i=1}^{p-2} c_{j_1}(s_{i+1}, y_i) a(j_i, j_{i+1}, g(j_i, y_i, s_{i+1})) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(j_i, j_{i+1}, g(j_i, y_i, s_{i+1}))}(dy_{i+1}) \\
&\times c_{j_{p-1}}(s_p, y_{p-1}) a(j_{p-1}, j, g(j_{p-1}, y_{p-1}, s_p)) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(j_{p-1}, j, g(j_{p-1}, y_{p-1}, s_p))}(dy) \\
&\times c_j(t - (s_1 + \dots + s_p), y) \varphi(g(j, y, t - (s_1 + \dots + s_p)))
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

où  $\varphi$  est une fonction mesurable et bornée sur  $\mathbb{R}^d$ .

Les probabilités de transition sont la somme de trois termes, chacun traduisant une possibilité :

1. le processus ne saute pas entre 0 et  $t$ , l'évolution de  $X_t$  est déterministe,
2. le processus saute une seule fois entre 0 et  $t$ ,
3. le processus saute au moins deux fois entre 0 et  $t$ .

Le noyau de transition  $P_t$  du PDMP agit sur l'ensemble des fonctions mesurables bornées définies sur  $E \times \mathbb{R}^d$  noté  $C_b^1(E \times \mathbb{R}^d)$  de la façon suivante : soit  $\varphi \in C_b^1(E \times \mathbb{R}^d)$ , pour tout  $i \in E$  et  $x \in \mathbb{R}^d$  :

$$P_t \varphi(i, x) = \mathbb{E}(\varphi(I_t, X_t) | I_0 = i, X_0 = x) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) P_t(i, x, j, dy) \tag{2.2.8}$$

## 2.2.5 Le générateur étendu et équations de Chapman-Kolmogorov

Soit  $D_0$  l'ensemble de fonctions défini de la façon suivante :

$$D_0 = \{ \varphi : \varphi \in C_b^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})^E, v(i, \cdot) \cdot \nabla \varphi(i, \cdot) \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}), \forall i \in E \}$$

avec  $\nabla \varphi(i, \cdot)$  le gradient de la fonction  $\varphi$  en fonction de la deuxième variable et

$$v(i, \cdot) \cdot \nabla \varphi(i, \cdot) = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(i, \cdot) v^{(k)}(i, \cdot)$$

avec  $v(i, \cdot) = (v^{(1)}(i, \cdot), v^{(2)}(i, \cdot), \dots, v^{(d)}(i, \cdot))$ .

**Proposition 17.** [Cocozza-Thivent et al., 2006b] *Pour  $\varphi \in D_0$ , définissons  $\mathcal{L}\varphi$  de la façon suivante :*

$$\mathcal{L}\varphi(i, x) = \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x) \right) + v(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) \tag{2.2.9}$$

Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ ,  $\varphi \in D_0$  appartient au domaine du générateur étendu  $\mathcal{L}$  du processus de Markov  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ . De manière équivalente,  $\varphi(I_t, X_t) - \varphi(I_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(I_s, X_s) ds$  est une martingale associée à la filtration naturelle du processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ .

*Démonstration.* Considérons la fonction suivante :

$$\varphi_t(i, x) = \frac{P_t \varphi(i, x) - \varphi(i, x)}{t} = \frac{\sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) P_t(i, x, j, dy) - \varphi(i, x)}{t}$$

En utilisant des arguments classiques, il est suffisant de montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi_t(i, x) = \mathcal{L}\varphi(i, x)$  et que  $\varphi_t(i, x)$  est uniformément borné pour  $(i, x) \in E \times \mathbb{R}^d$  et  $t$  proche de 0.

La proposition 16 entraîne que

$$P_t \varphi(i, x) - \varphi(i, x) = A_1 + A_2 + A_3$$

où

$$\begin{aligned} A_1 &= c_i(t, x) \varphi(g(i, x, t)) - \varphi(i, x), \\ A_2 &= \sum_{j \in E} \int_0^t c_i(s, x) a(i, j, g(i, x, s)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} c_j(t-s, y) \varphi(g(j, y, t-s)) \mu_{(i, j, g(i, x, s))}(dy) \right) ds \\ A_3 &= \sum_{j \in E} \sum_{p \geq 2} \sum_{j_1, \dots, j_{p-1}} \int_{s_1 \geq 0, \dots, s_p \geq 0, s_1 + \dots + s_p \leq t} ds_1 \cdots ds_p \\ &\quad \times c_i(s_1, x) a(i, j_1, g(i, x, s_1)) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(i, j_1, g(i, x, s_1))}(dy_1) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{p-2} c_{j_i}(s_{i+1}, y_i) a(j_i, j_{i+1}, g(j_i, y_i, s_{i+1})) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(j_i, j_{i+1}, g(j_i, y_i, s_{i+1}))}(dy_{i+1}) \\ &\quad \times c_{j_{p-1}}(s_p, y_{p-1}) a(j_{p-1}, j, g(j_{p-1}, y_{p-1}, s_p)) \int_{\mathbb{R}^d} \mu_{(j_{p-1}, j, g(j_{p-1}, y_{p-1}, s_p))}(dy) \\ &\quad \times c_j(t - (s_1 + \dots + s_p), y) \varphi(g(j, y, t - (s_1 + \dots + s_p))) \end{aligned}$$

Soit  $B_\varphi$  la borne supérieure de  $\varphi$ . Selon les hypothèses  $\mathcal{H}_0$  la fonction  $b(i, \cdot)$  est majorée par  $B$  pour tout  $i \in E$ . Il est facile de voir que  $A_3$  est borné par  $B_\varphi \sum_{p \geq 2} B^p t^p / p!$ . Ainsi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_3}{t} = 0$$

Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_0$ ,  $A_2$  est borné et

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_2}{t} = \sum_{j \in E} a(i, j, x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy)$$

Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_0$ ,  $A_1$  est borné et

$$\frac{A_1}{t} = \frac{\varphi(i, g(i, x, t)) - \varphi(i, x)}{t} - \varphi(i, g(i, x, t)) \frac{1 - c_i(t, x)}{t}$$

Ainsi,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{A_1}{t} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(i, x) v^{(k)}(i, x) - \varphi(i, x) b(i, x)$$

Ce qui complète la démonstration. □

L'expression des équations de CK est une conséquence directe de l'expression du générateur étendu. Il suffit d'utiliser le fait que  $\varphi(I_t, X_t) - \varphi(I_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(I_s, X_s) ds$  est une martingale associée à la filtration naturelle du processus  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ .

**Théorème 18.** [Cocozza-Thivent et al., 2006b] La famille des distributions marginales du PDMP notée  $(\pi_t(\cdot, dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'unique solution faible d'un système d'équations aux dérivées partielles appelées équations de Chapman-Kolmogorov (2.2.10) décrivant un bilan de flux de probabilités.

$$\begin{aligned}
& \forall \varphi \in C_1^c(E \times \mathbb{R}^d), \\
& \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x) \right) \pi_s(i, dx) ds + \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} v(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) \pi_s(i, dx) ds \\
& - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_t(i, dx) + \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_0(i, dx) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

### 2.2.6 Cas d'un PDMP non-homogène

Nous verrons, dans le paragraphe 2.5.4, qu'il est possible de transformer un PDMP homogène en un PDMP non-homogène à l'aide d'un changement de variable. Les PDMP non-homogènes ont été étudiés dans [Jacobsen, 2006]. Les caractéristiques de ce type de PDMP dépendent du temps. Nous notons :

- $a_t(i, j, X_{t-})$  : le taux de transition de l'état  $i$  vers l'état  $j$  à l'instant  $t$ ,
- $\mu_{(i, j, X_{t-})}^t(dy)$  : la distribution de la variable physique après un saut de l'état  $i$  vers l'état  $j$  à l'instant  $t$ ,
- $v_t(i, X_t)$  : sachant que  $I_t = i$ , la composante  $X_t$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{dy}{dt} = v_t(i, y)$ .

Les équations de Chapman-Kolmogorov s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \forall \varphi \in C_1^c(E \times \mathbb{R}^d), \\
& \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a_s(i, j, x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}^s(dy) - \varphi(i, x) \right) \pi_s(i, dx) ds + \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} v_s(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x) \pi_s(i, dx) ds \\
& - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_t(i, dx) + \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_0(i, dx) = 0
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Le prochain paragraphe présente un schéma de volumes finis permettant d'estimer une approximation des lois marginales du PDMP homogène.

## 2.3 Traitement numérique par un schéma de volumes finis

Dans ce paragraphe, nous présentons un schéma de volumes finis adapté pour les PDMP homogènes.

Dans les cas d'application étudiés à la SNCF, la partie transport des équations de CK est facile à écrire. En effet, la variable continue du PDMP représente les âges respectifs des différents composants d'un système. Ces quantités évoluent avec vitesse 1 ou 0 en fonction du temps selon l'état du système. Ainsi  $v(i, x)$  est un vecteur de  $d$  composantes dont chacune est égale à 1 ou 0. Dans ce cas particulier, les équations de Chapman-Kolmogorov (2.2.10) peuvent s'écrire de la façon suivante : pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)^E$ ,

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x) \right) \pi_s(i, dx) ds + \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(i, x) v^{(\alpha)}(i, x) \pi_s(i, dx) ds \\
& - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_t(i, dx) + \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x) \pi_0(i, dx) = 0
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Le schéma numérique présenté dans ce paragraphe est étudié dans ce cadre.

### 2.3.1 Présentation du schéma

Dans ce qui suit,  $\mathcal{M}$  est une partition de  $\mathbb{R}^d$  dont les éléments sont de la forme :

$$K = [k_1 \cdot h, (k_1 + 1) \cdot h] \times \cdots \times [k_d \cdot h, (k_d + 1) \cdot h] \tag{2.3.2}$$

avec  $h \in \mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $k_i \in \mathbb{Z}$ . Soit  $h_{\mathcal{M}}$  le diamètre d'une maille de  $\mathcal{M}$ .

**Remarque 19.** En dimension  $d$ ,  $h_{\mathcal{M}} = h\sqrt{d}$ .

Soit un réel  $\delta t > 0$ . L'objectif du schéma numérique suivant est de construire une approximation  $P_t^{h,\delta t}(\cdot, x)dx$  de la mesure  $\pi_t(\cdot, dx)$ , avec une densité  $P_t^{h,\delta t}(\cdot, x)$  constante sur chaque  $\{i\} \times [n\delta t, (n+1)\delta t] \times K$  :

$$P_t^{h,\delta t}(i, x) := u_n(i, K) \quad (2.3.3)$$

pour tout  $(i, x, t) \in E \times K \times [n\delta t, (n+1)\delta t]$ , tout  $K \in \mathcal{M}$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Pour cela, on construit la famille  $(u_n(i, K))_{(i,n,K) \in E \times \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$  récursivement sur  $n$ . On initialise le schéma par :

$$u_0(K, i) = \frac{1}{h^d} \int_K \pi_0(i, dx) \quad (2.3.4)$$

pour tout  $(i, K) \in E \times \mathcal{M}$ .

Soit  $K = [k_1 \cdot h, (k_1 + 1) \cdot h] \times \dots \times [k_d \cdot h, (k_d + 1) \cdot h]$  et soit  $L = [l_1 \cdot h, (l_1 + 1) \cdot h] \times \dots \times [l_d \cdot h, (l_d + 1) \cdot h]$  deux cellules de la partition  $\mathcal{M}$ . S'il existe  $p \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $l_p = k_p + 1$  ou  $l_p = k_p - 1$  et pour tout  $q \neq p$ ,  $l_q = k_q$  alors on dit que  $K$  et  $L$  sont voisines. On définit alors  $v_{K,L}^i$  de la façon suivante :

$$v_{K,L}^i = \begin{cases} 1 & \text{si } l_p = k_p + 1 \text{ et } v^{(p)}(i, \cdot) = 1 \\ -1 & \text{si } l_p = k_p - 1 \text{ et } v^{(p)}(i, \cdot) = 1 \\ 0 & \text{si } v^{(p)}(i, \cdot) = 0 \end{cases}$$

avec  $v^{(p)}(i, \cdot)$  la  $p$ -ème composante du vecteur  $v(i, \cdot)$ .

Si  $K$  et  $L$  ne sont pas voisines,  $v_{K,L}^i = v_{L,K}^i = 0$  pour tout  $i \in E$ .

On définit par  $V_{i,K}^+$ , l'ensemble des cellules voisines de la cellule  $K$  telles que  $v_{K,L}^i = 1$  et  $V_{i,K}^-$ , l'ensemble des cellules voisines de la cellule  $K$  telles que  $v_{K,L}^i = -1$ .

Le taux de transition de  $(i, K)$  vers  $(j, L)$  est défini par :

$$a_{K,L}^{i,j} = \frac{1}{h^d} \int_K a(i, j, x) \int_L \mu_{(i,j,x)}(dy) dx \quad (2.3.5)$$

Le taux de sortie de  $(i, K)$  est défini par :

$$b_K^i = \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{i,j} \quad (2.3.6)$$

Le schéma proposé s'écrit de la façon suivante :

$$u_{n+1}(K, i) = \left( 1 - \delta t \left( \sum_{L \in V_{i,K}^+} \frac{1}{h} + b_K^i \right) \right) u_n(K, i) + \delta t \sum_{L \in V_{i,K}^-} \frac{1}{h} u_n(L, i) + \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K}^{i,j} u_n(L, j) \quad (2.3.7)$$

Une condition pour que l'algorithme soit stable est :

$$1 - \delta t \left( \sum_{L \in V_{i,K}^+} \frac{1}{h} + b_K^i - a_{K,K}^{i,i} \right) \geq 0 \quad (2.3.8)$$

Il s'agit d'une version explicite de l'algorithme de [Eymard et al., 2008] dans un cadre simplifié.



Le terme  $\delta t \left( \sum_{L \in V_{i,K}^+} \frac{1}{h} + b_K^i \right) u_n(K, i)$  correspond à la masse de probabilité s'échappant de la maille  $K$  et de l'état  $i$  d'une part due à l'évolution des variables physiques au cours du temps et d'autre part dû aux sauts du PDMP entre ses états. Le terme  $\delta t \sum_{L \in V_{i,K}^-} \frac{1}{h} u_n(L, i)$  correspond à la masse de probabilité arrivant dans la maille  $K$  et provenant des mailles voisines de  $K$  appartenant à l'ensemble  $V_{i,K}^-$  et du même état  $i$ , ce déplacement de masse est dû à l'évolution déterministe des variables physiques au cours du temps. Le terme  $\delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} \alpha_{L,K}^{j,i} u_n(L, j)$  correspond à la masse de probabilité arrivant dans la maille  $K$  et dans l'état  $i$  dont l'origine peut être n'importe quelle maille et n'importe quel état depuis lesquels un saut vers la maille  $K$  et l'état  $i$  est possible.

**Remarque 20.** Chaque terme de ce schéma numérique correspond à un terme des équations de CK (2.2.10). Plaçons-nous dans le cas où la loi initiale du PDMP,  $\pi_0$ , et les distributions des variables physiques après un saut,  $\mu$ , admettent une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous avons :

$$\begin{aligned} \pi_0(i, dx) &= \pi(i, x, 0)dx, \forall (i, x) \in E \times \mathbb{R}^d \\ \mu_{(i,j,x)}(dy) &= \mu_{(i,j,x)}(y)dy, \forall (i, j, x, y) \in E \times E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

Dans ce cas,  $\pi_t$  est aussi une mesure à densité et nous avons

$$\pi_t(i, dx) = \pi(i, x, t)dx, \forall (t, i, x) \in \mathbb{R}_+ \times E \times \mathbb{R}^d$$

avec  $\pi(i, x, t)$  une fonction intégrable pour tout  $t$ .

Ces fonctions satisfont dans un sens faible le système suivant obtenu en intégrant par parties les équations de CK (2.3.1) :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(i, x, t) + \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}(i, x, t) v^{(\alpha)}(i, x) = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j, i, y) \mu_{(j,i,y)}(x) \pi(j, y, t) dy - b(i, x) \pi(i, x, t) \quad (2.3.9)$$

Dans le vocabulaire de l'analyse numérique, les équations (2.3.9) sont des équations différentielles partielles de type hyperbolique linéaire, couplées par leur second membre. Chaque terme de cette équation correspond à un terme du schéma numérique (2.3.7). Soit  $x \in K$ ,  $i \in E$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi}{\partial t}(i, x, t) &\approx \frac{u_{n+1}(K, i) - u_n(K, i)}{\delta t} \\ \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \pi}{\partial x_\alpha}(i, x, t) v^{(\alpha)}(i, x) &\approx \sum_{L \in V_{i,K}^+} \frac{u_n(K, i)}{h} - \sum_{L \in V_{i,K}^-} \frac{u_n(L, i)}{h} \\ \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} a(j, i, y) \mu_{(j,i,y)}(x) \pi(j, y, t) dy &\approx \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} \alpha_{L,K}^{j,i} u_n(L, j) \\ b(i, x) \pi(i, x, t) &\approx b_K^i u_n(K, i) \end{aligned}$$

Afin de modéliser un saut du processus à des instants déterministes, nous avons introduit dans le paragraphe 1.3.1 la notion de suite de PDMP dont chacun dépend du précédent au travers de sa loi initiale. Le schéma de volumes finis permet de prendre en compte cela. Si un saut déterministe a lieu à l'instant  $T$  avec  $N \cdot \delta t \leq T < (N+1) \cdot \delta t$ , nous considérons deux PDMP, le premier avant  $T$  et le deuxième après. La loi du premier est approximée par la suite  $(u_n^{(1)})_{0 \leq n \leq N}$  et la loi du deuxième par la suite  $(u_n^{(2)})_{n \geq N}$ . La probabilité de transition de  $(i, K)$  vers  $(j, L)$  à l'instant  $N$  est définie par :

$$q_{K,L}^{i,j} = \frac{1}{h^d} \int_K \int_L q(i, x; j, dy) dx \quad (2.3.10)$$

L'approximation de la loi initiale du deuxième PDMP est obtenue de la façon suivante :

$$u_N^{(2)}(K, i) = \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} q_{L,K}^{j,i} u_N^{(1)}(L, j) \quad (2.3.11)$$

Comme dit précédemment, nous ne précisons pas dans les exemples et les cas d'application que le système est modélisé par une suite de PDMP et nous supposons que le système se modélise à l'aide d'un seul PDMP. Le schéma peut s'écrire de la façon suivante, avec  $\mathcal{N}$  l'ensemble des instants déterministes de saut :

$$\bar{u}_n(K, i) = \left( 1 - \delta t \left( \sum_{L \in V_{i,K}^+} \frac{1}{h} + b_K^i \right) \right) u_n(K, i) + \delta t \sum_{L \in V_{i,K}^-} \frac{1}{h} u_n(L, i) + \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K}^{j,i} u_n(L, j) \quad (2.3.12)$$

$$u_{n+1}(K, i) = \begin{cases} \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} q_{L,K}^{j,i} \bar{u}_n(L, j) & \text{si } n \in \mathcal{N} \\ \bar{u}_n(K, i) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.3.13)$$

**Exemple 21.** Reprenons l'exemple 13 dans lequel un système de deux composants en parallèle soumis à une action de maintenance préventive est modélisé par un PDMP et quantifions-le à l'aide du schéma de volumes finis. La prise en compte d'un temps de réparation entraîne de grosses difficultés pour l'implémentation du schéma de volumes finis, nous y reviendrons plus tard dans ce document, ainsi nous supposons ici que la réparation est instantanée. Au niveau du PDMP, l'état  $(0, 0)$  n'est plus atteint et le processus saute directement de l'état  $(1, 0)$  ou  $(0, 1)$  vers l'état  $(1, 1)$  à la suite d'une défaillance.

Soit  $\mathcal{M}$  une partition de  $\mathbb{R}_+^2$ , soit  $h$  le pas de discrétisation de cet espace, soit  $K = [k_1 \cdot h, (k_1 + 1) \cdot h[ \times [k_2 \cdot h, (k_2 + 1) \cdot h[$  et  $L = [l_1 \cdot h, (l_1 + 1) \cdot h[ \times [l_2 \cdot h, (l_2 + 1) \cdot h[$  deux mailles de  $\mathcal{M}$  avec  $k_1, k_2, l_1, l_2$  quatre entiers naturels. Le taux de défaillance du composant 1 noté  $\lambda_1$  (respectivement du composant 2 noté  $\lambda_2$ ) ne dépend que de l'âge du composant 1 (respectivement du composant 2) ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} a_{K,L}^{(1,1),(0,1)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (k_1, k_2)} \frac{1}{h} \int_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \lambda_1(x_1) dx_1 \\ a_{K,L}^{(1,1),(1,0)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (k_1, k_2)} \frac{1}{h} \int_{k_2 h}^{(k_2+1)h} \lambda_2(x_2) dx_2 \\ a_{K,L}^{(1,0),(1,1)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (0, 0)} \frac{1}{h} \int_{k_1 h}^{(k_1+1)h} \lambda_1(x_1) dx_1 \\ a_{K,L}^{(0,1),(1,0)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (0, 0)} \frac{1}{h} \int_{k_2 h}^{(k_2+1)h} \lambda_2(x_2) dx_2 \\ q_{K,L}^{(1,1),(1,1)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (k_1, k_2)} \\ q_{K,L}^{(1,0),(1,1)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (k_1, 0)} \\ q_{K,L}^{(0,1),(1,1)} &= \mathbf{1}_{(l_1, l_2) = (0, k_2)} \end{aligned}$$

Les composants sont supposés neufs quand  $t = 0$  ainsi le schéma s'initialise de la façon suivante :

$$u_0(K, (1, 1)) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k_1, k_2) = (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons  $K_1^- = [(k_1 - 1) \cdot h, k_1 \cdot h[ \times [k_2 \cdot h, (k_2 + 1) \cdot h[$  et  $K_2^- = [k_1 \cdot h, (k_1 + 1) \cdot h[ \times [(k_2 - 1) \cdot h, k_2 \cdot h[$ . Soit  $N$  tel que  $N \cdot \delta t \leq T < (N + 1) \cdot \delta t$ . Le schéma s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(K, (1, 1)) &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{2}{h} + a_{K,L}^{(1,1),(0,1)} + a_{K,L}^{(1,1),(1,0)} \right) \right) u_n(K, (1, 1)) + \frac{\delta t}{h} (u_n(K_1^-, (1, 1)) + u_n(K_2^-, (1, 1))) \\ &\quad + \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} \left( a_{K,L}^{(1,0),(1,1)} u_n(L, (1, 0)) + a_{K,L}^{(0,1),(1,1)} u_n(L, (0, 1)) \right) \\ \bar{u}_n(K, (0, 1)) &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{2}{h} + a_{K,L}^{(0,1),(1,1)} \right) \right) u_n(K, (0, 1)) + \frac{\delta t}{h} (u_n(K_1^-, (0, 1)) + u_n(K_2^-, (0, 1))) \\ &\quad + \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{(1,1),(0,1)} u_n(L, (1, 1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(K, (1, 0)) &= \left(1 - \delta t \left(\frac{2}{h} + a_{K,L}^{(1,0),(1,1)}\right)\right) u_n(K, (1, 0)) + \frac{\delta t}{h} (u_n(K_1^-, (1, 0)) + u_n(K_2^-, (1, 0))) \\ &\quad + \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{(1,1),(1,0)} u_n(L, (1, 1)) \\ u_{n+1}(K, (1, 1)) &= \begin{cases} \bar{u}_n(K, (1, 1)) + \sum_{L \in \mathcal{M}} \left(q_{K,L}^{(1,0),(1,1)} \bar{u}_n(K, (1, 0)) + q_{K,L}^{(0,1),(1,1)} \bar{u}_n(K, (0, 1))\right) & \text{si } n = N \\ \bar{u}_n(K, (1, 1)) & \text{sinon} \end{cases} \\ u_{n+1}(K, (0, 1)) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = N \\ \bar{u}_n(K, (0, 1)) & \text{sinon} \end{cases} \\ u_{n+1}(K, (1, 0)) &= \begin{cases} 0 & \text{si } n = N \\ \bar{u}_n(K, (1, 0)) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Nous avons implémenté ce schéma en considérant que la durée de vie des deux composants est modélisée par une loi de Weibull. Cette loi est caractérisée par deux coefficients : le coefficient de forme noté  $\beta$  et le coefficient d'échelle noté  $\eta$ . Nous détaillons cette loi de manière plus précise dans le paragraphe 4.2.1 de ce document. Les paramètres de la loi de Weibull du composant 1 (respectivement du composant 2) sont notés  $\beta_1$  et  $\eta_1$  (respectivement  $\beta_2$  et  $\eta_2$ ) avec  $\eta_1 = 10$ ,  $\beta_1 = 1.5$ ,  $\eta_2 = 20$ ,  $\beta_2 = 2$ . Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} \lambda_1(x) &= \frac{1.5}{10} \left(\frac{x_1}{10}\right)^{0.5} \quad \text{avec } x_1 \text{ l'âge du composant 1} \\ \lambda_2(x) &= \frac{2}{20} \left(\frac{x_2}{20}\right) \quad \text{avec } x_2 \text{ l'âge du composant 2} \end{aligned}$$

Deux valeurs de  $h$  sont testées : 1 et  $\frac{1}{3}$ . Pour chaque valeur de  $h$ ,  $\delta t$  est choisi de manière à vérifier la condition 2.3.8. Les graphiques de la FIGURE 2.1 (respectivement de la FIGURE 2.2) représentent l'évolution de l'approximation de la distribution de l'âge des composants 1 et 2 à différents instants ( $\sum_{i \in E} u_n(\cdot, i)$ ) quand  $h = 1$  (respectivement quand  $h = \frac{1}{3}$ ). Pour les deux valeurs de  $h$ , le graphique correspondant à  $t = 0$  paraît vide. En fait, toute la masse de probabilité est concentrée dans la case en bas à gauche signifiant que les composants sont initialement neufs. A  $t = 5$ , la masse de probabilité est répartie autour du point de coordonnées (5,5) modélisant les systèmes dont les composants n'ont pas été remplacés depuis la mise en service et qui ont donc vieilli. Cette répartition constitue une erreur engendrée par le schéma de discrétisation et vient du fait qu'il ne prend pas en compte le déplacement des masses de probabilité 'en diagonale'. La comparaison des graphiques des FIGURES 2.1 et 2.2 permet d'observer que cette répartition est moins prononcée dans le cas où  $h$  prend une valeur plus faible. Cette caractéristique permet de supposer une convergence de l'approximation issue du schéma de volumes finis lorsque le pas de temps  $\delta t$  et le pas d'espace  $h$  diminuent. A  $t = 10$ , juste avant la maintenance préventive, la répartition de l'âge des composants est concentrée autour du point (10,10). On peut également observer une faible concentration de masse autour de la diagonale vers le point (0,0). Ce phénomène est la conséquence du remplacement des deux composants suite à leur défaillance. Juste après la maintenance préventive, une grosse proportion de la masse de probabilité saute le long de l'axe des ordonnées modélisant le remplacement du composant 1. Son paramètre d'échelle étant égale à 10, la probabilité qu'il soit en panne à dix ans est importante. A  $t = 15$ , la masse de probabilité est plus dispersée. On observe une grosse concentration en haut à gauche modélisant les cas pour lesquels le composant 1 a été remplacé lors de la maintenance à  $t = 10$  et n'a pas été remplacé depuis lors. Une autre partie de la masse est répartie autour du point (15,15) modélisant les cas pour lesquels les composants n'ont pas encore été remplacés. Une concentration plus faible est visible le long de la diagonale. Enfin, à  $t = 20$ , on observe une grosse concentration de masse en haut du graphique. Ceci signifie qu'il y a de forte chance que le composant 2 ne tombe pas en panne et atteigne ainsi l'âge de 20 ans au bout de 20 ans de fonctionnement.

Dans le prochain paragraphe, nous démontrons que  $P_t^{h,\delta t}(\cdot, x)dx$  convergence au sens faible vers  $\pi_t(\cdot, dx)$  quand les pas de discrétisation du temps  $\delta t$  et de l'espace des variables physiques  $h$  tendent vers zéro.

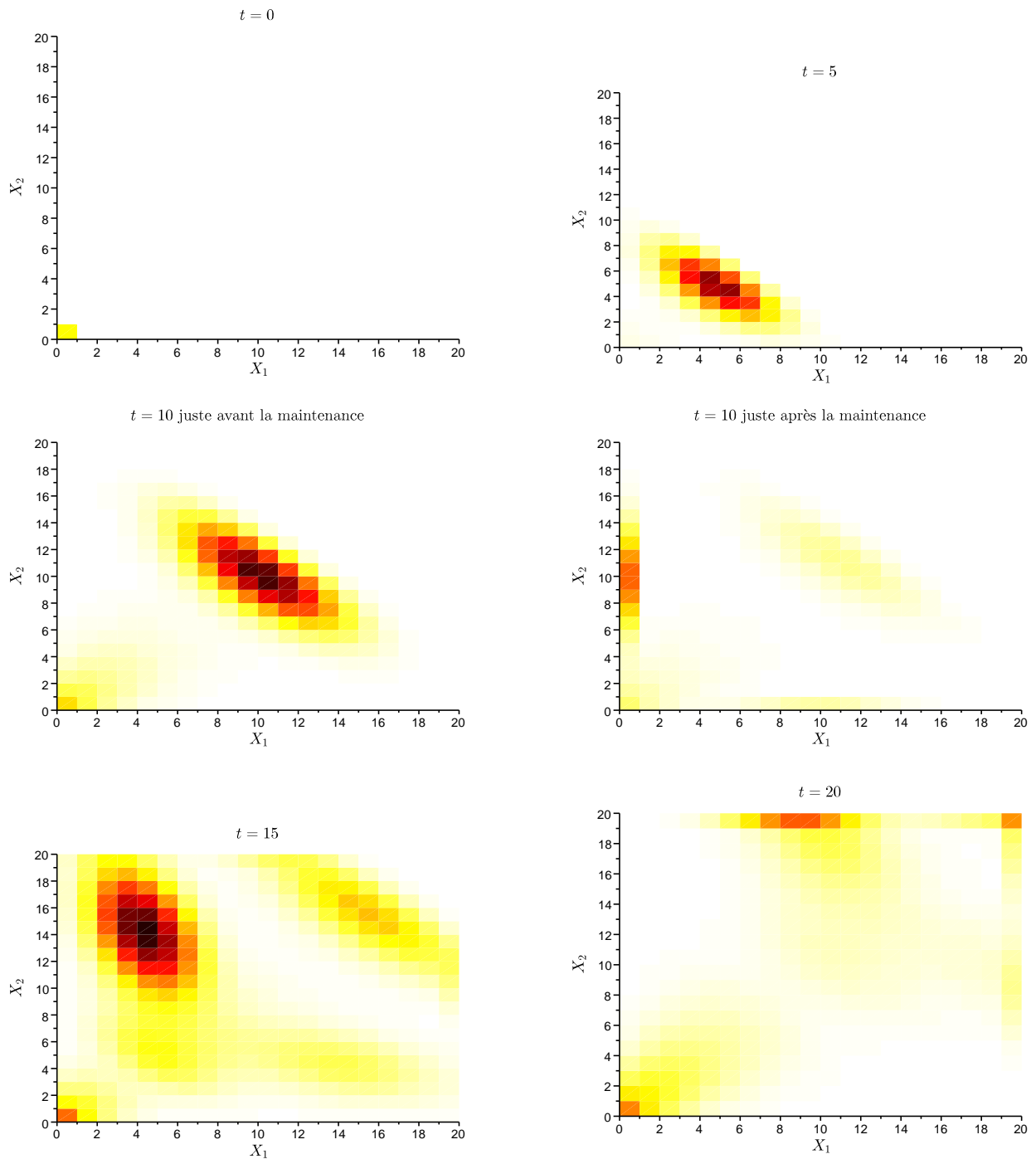


FIGURE 2.1 – Propagation de l'approximation de la loi marginale du PDMP de l'exemple 21 évaluée à l'aide du schéma de volumes finis et sommée sur tous les états ( $\sum_{i \in E} u_n(\cdot, i)$ ) avec  $X_1$  l'âge du composant 1 et  $X_2$  l'âge du composant 2 -  $h = 1$  et  $\delta t = 0.4315438$

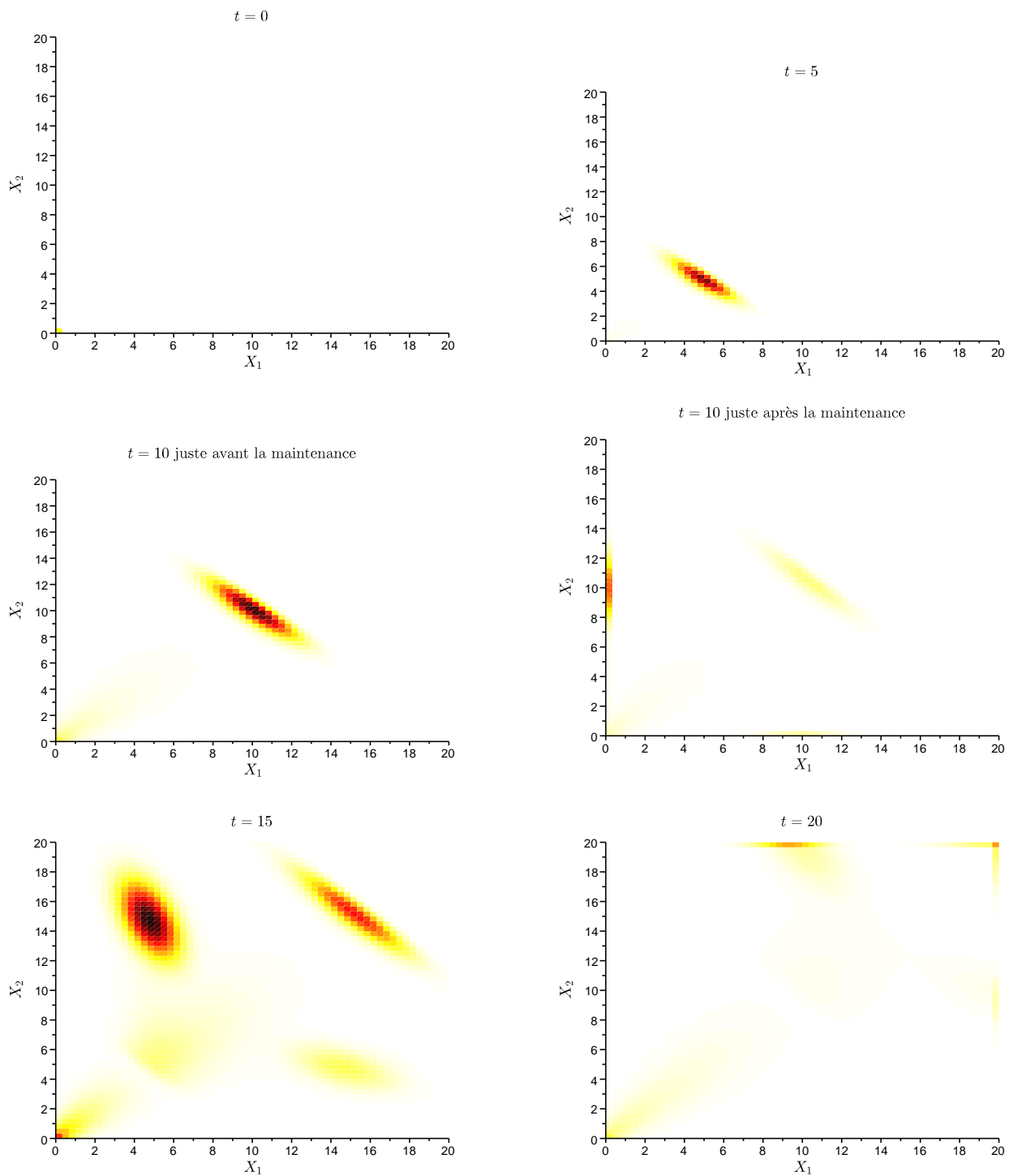


FIGURE 2.2 – Propagation de l'approximation de la loi marginale du PDMP de l'exemple 21 évaluée à l'aide du schéma de volumes finis et sommée sur tous les états  $(\sum_{i \in E} u_n(\cdot, i))$  avec  $X_1$  l'âge du composant 1 et  $X_2$  l'âge du composant 2 -  $h = \frac{1}{3}$  et  $\delta t = 0.1583820$

### 2.3.2 Étude de la convergence

Pour démontrer la convergence de cet algorithme, nous nous inspirons de la démonstration de l'algorithme de volumes finis présentée dans [Eymard et al., 2008]. Comme dans cet article, nous supposons pour simplifier les notations que l'espace d'état est réduit à un seul élément, ainsi  $b(x) = a(x)$ . Dans ce cadre, l'équation (2.2.10) devient :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in C_1^c(\mathbb{R}^d), \\ \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} a(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) - \varphi(x) \right) \pi_s(dx) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) \pi_s(dx) ds \\ = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_t(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_0(dx) \end{aligned}$$

Le schéma de volumes finis (2.3.4)-(2.3.7) s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} u_0(K) &= \frac{1}{h^d} \int_K \pi_0(dx) \\ u_{n+1}(K) &= \left( 1 - \delta t \left( \sum_{L \in V_K^+} \frac{1}{h} + b_K \right) \right) u_n(K) + \delta t \sum_{L \in V_K^-} \frac{1}{h} u_n(L) + \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K} u_n(L) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Pour commencer, nous démontrons la convergence du schéma (2.3.14) ne prenant pas en compte les instants déterministes de saut.

Le premier lemme assure que l'algorithme présenté dans le paragraphe précédent conserve la masse de probabilité.

**Lemme 22.** *Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_0$ , soit  $\mathcal{M}$  une partition de  $\mathbb{R}^d$  sous forme de pavés du type 2.3.2 dont chaque arête est de longueur  $h > 0$  et soit  $\delta t > 0$ . La famille  $(u_n(K))_{(n,K) \in \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$  solution de (2.3.4)-(2.3.7) est telle que*

$$h^d \sum_{K \in \mathcal{M}} u_n(K) = 1 \quad (2.3.15)$$

*Démonstration.* Nous démontrons (2.3.15) par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 0$ , la propriété est vraie selon (2.3.4). Supposons que  $\sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) = 1$  et prouvons que  $\sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_{n+1}(K) = 1$ . En partant de (2.3.7), nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_{n+1}(K) &= \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) \\ &\quad + \delta t h^{d-1} \left( - \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^+} u_n(K) + \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^-} u_n(L) \right) \\ &\quad + \delta t h^d \left( \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K} u_n(L) - \sum_{K \in \mathcal{M}} b_K u_n(K) \right) \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^-} u_n(L) &= \sum_{L \in \mathcal{M}} \sum_{K \in V_L^+} u_n(L) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^+} u_n(K) \end{aligned}$$

et en utilisant (2.3.6), nous obtenons

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_{n+1}(K) = \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K)$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Dans l'objectif de démontrer la convergence du schéma proposé, nous commençons par démontrer la tension de la famille de probabilité  $\left( P_t^{h,\delta t}(x) \right)_{(h,\delta t,t) \in \mathcal{F}_t}$ . Cette propriété permet d'utiliser le théorème de Prohorov sur lequel la démonstration de la convergence repose. Pour cela, reprenons la démonstration du lemme 13 de l'article [Eymard et al., 2008] et commençons par citer le lemme permettant de construire une fonction de Liapounov.

**Lemme 23.** [Eymard et al., 2008] Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  et une fonction  $\mu : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  comme dans  $\mathcal{H}_0$  telle que pour tout  $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ , la fonction  $x \rightarrow \int \psi(y) \mu_{(x)}(dy)$  est continue (et bornée) de  $\mathbb{R}^d$  vers  $\mathbb{R}$ . Soit  $\pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . Alors il existe une fonction de Liapounov  $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$  et une constante réelle  $C_1$  indépendante de  $\delta t$  et  $h$  telle que

$$\nu \text{ est Lipschitz continue avec une constante plus petite ou égale à } 1 \quad (2.3.16)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \nu(x) = +\infty \quad (2.3.17)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu d\pi_0 < +\infty \quad (2.3.18)$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \nu \mu_{(x)}(dy) \leq \nu(x) + C_1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d \quad (2.3.19)$$

**Lemme 24.** Soit  $t > 0$ . Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ , la famille  $\left( P_t^{h,\delta t}(x) \right)_{(h,\delta t,t) \in \mathcal{F}_T}$  est tendue où  $\mathcal{F}_T = \{(h, \delta t, t) : h \in ]0, h_0], \delta t \in ]0, \delta t_0], t \in [0, T]\}$ , pour tout  $\alpha > 0$  il existe un  $R > 0$  tel que

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} P_t^{h,\delta t}(x) dx < \alpha \quad (2.3.20)$$

pour tout  $(h, \delta t, t) \in \mathcal{F}_T$ .

*Démonstration.* Pour  $n \in \mathbb{N}$ , nous définissons :

$$s^n(\nu) = \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) \nu_K \text{ avec } \nu_K = \frac{1}{h^d} \int_K \nu(x) dx$$

L'objectif est de démontrer que  $\sup_n \text{s.t. } n\delta t \leq T s^n(\nu) < +\infty$  ce qui nous permettra de conclure. Reprenons le schéma (2.3.7) que nous multiplions par  $\nu_K$  et que nous sommes sur  $K$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} s^{n+1}(\nu) &= s^n(\nu) - \sum_{K \in \mathcal{M}} \delta t \left( \sum_{L \in V_K^+} \frac{1}{h} + b_K \right) h^d u_n(K) \nu_K \\ &\quad + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^-} h^{d-1} u_n(L) \nu_K + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K} h^d u_n(L) \nu_K \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Pour simplifier, nous remarquons que

$$\begin{aligned} \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \nu_K \sum_{L \in V_K^-} u_n(L) &= \delta t \sum_{L \in \mathcal{M}} \sum_{K \in V_L^+} u_n(L) \nu_K \\ &= \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^+} u_n(K) \nu_L \end{aligned}$$

De plus, nous remarquons que

$$\sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K} h^d u_n(L) \nu_K = \sum_{L \in \mathcal{M}} \sum_{K \in \mathcal{M}} a_{K,L} h^d u_n(K) \nu_L$$

Ainsi l'équation (2.3.21) devient :

$$s^{n+1}(\nu) = s^n(\nu) + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) \left( \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \nu_L - b_K \nu_K \right) + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^+} h^{d-1} u_n(K) (\nu_L - \nu_K) \quad (2.3.22)$$

En utilisant le fait que  $\nu$  est Lipschitzienne continue, nous avons  $\nu_L \leq |\nu_L - \nu(y)| \leq h_{\mathcal{M}} + \nu(y) = h\sqrt{d} + \nu(y)$  pour tout  $y \in L$ , ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \nu_L &= \frac{1}{h^d} \sum_{L \in \mathcal{M}} \int_K b(x) \left( \int_L \nu_L \mu_{(x)}(dy) \right) dx \\ &\leq \frac{1}{h^d} \left( h\sqrt{d} \int_K b(x) dx + \int_K b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \nu(y) \mu_{(x)}(dy) \right) dx \right) \end{aligned}$$

En utilisant la propriété (12) de la fonction  $\nu$ , nous avons

$$\begin{aligned} \int_K b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \nu(y) \mu_{(x)}(dy) \right) dx &\leq \int_K b(x) (\nu(x) + C_1) dx \\ &\leq \int_K b(x) (\|\nu(x) - \nu_K\| + C_1) dx + \int_K b(x) \nu_K dx \\ &\leq (h_{\mathcal{M}} + C_1) h^d b_K + h^d b_K \nu_K \end{aligned}$$

Ce qui nous permet d'écrire

$$\sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \nu_L - b_K \nu_K \leq (2h_{\mathcal{M}} + C_1) b_K$$

En utilisant la Remarque 19, nous obtenons pour  $h \leq h_0$

$$\sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \nu_L - b_K \nu_K \leq (2h_0\sqrt{d} + C_1) B$$

En utilisant à nouveau le fait que  $\nu$  est Lipschitzienne continue de constante plus petite que nous avons, avec  $x \in \partial K \cap \partial L$  ( $\partial K$  est le bord de la maille  $K$ ) et  $L \in V_K^+$

$$|\nu_L - \nu_K| = |\nu_L - \nu(x) - \nu_K + \nu(x)| \leq 2h_M = 2h\sqrt{d}$$

Nous obtenons de (2.3.22) :

$$s^{n+1}(\nu) \leq s^n(\nu) + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) (2h_0\sqrt{d} + C_1) B + \delta t \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in V_K^+} h^d u_n(K) 2\sqrt{d}$$

Nous pouvons remarquer que  $\sum_{L \in V_K^+} 1 \leq d$  et que  $\sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) = 1$ , ainsi :

$$s^{n+1}(\nu) \leq s^n(\nu) + \delta t (2h_0\sqrt{d} + C_1) B + 2d\sqrt{d}\delta t$$



Posons  $C_2 = (2h_0\sqrt{d} + C_1)B + 2d\sqrt{d}$ , nous obtenons

$$s^{n+1}(\nu) \leq s^n(\nu) + \delta t C_2$$

Ainsi,

$$s^n(\nu) \leq s^0(\nu) + tC_2$$

pour tout  $n$  tel que  $n\delta t \leq t$ .

De plus, nous avons,

$$\left| s^0(\nu) - \int_{\mathbb{R}^d} \nu d\pi_0 \right| \leq \sum_{K \in \mathcal{M}} \left| \int_K (\nu_K - \nu(x)) \pi_0(dx) \right| \leq h_{\mathcal{M}} \sum_{K \in \mathcal{M}} \int_K d\pi_0 = h\sqrt{d}$$

donc en posant  $C_3 := \int_{\mathbb{R}^d} \nu d\pi_0 + h_0\sqrt{d} + C_2T$ , nous obtenons

$$\sup_{\substack{n \text{ s.t. } n\delta t \leq T \\ 0 \leq h \leq h_0}} s^n(\nu) \leq C_3 < +\infty$$

Nous concluons comme dans l'article [Eymard et al., 2008] en utilisant le fait que  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \nu(x) = +\infty$  : pour chaque  $\alpha > 0$ , il existe un  $R$  tel que  $\nu(x) \geq \frac{C_3}{\alpha}$  pour tout  $x \in B(0, R)^c$ . Ainsi pour tout  $t \leq T$

$$\frac{C_3}{\alpha} \int_{B(0, R)^c} P_t^{h, \delta t}(x) dx \leq \int_{B(0, R)^c} P_t^{h, \delta t}(x) \nu(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} P_t^{h, \delta t}(x) \nu(x) dx \leq \sup_{\substack{n \text{ s.t. } n\delta t \leq T \\ 0 \leq h \leq h_0}} s^n(\nu) \leq C_3$$

et

$$\int_{B(0, R)^c} P_t^{h, \delta t}(x) dx \leq \alpha$$

ce qui termine la démonstration. □

Nous définissons plusieurs opérateurs :

$$T_1^{h, \delta t}(f, t_1, t_2) = \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \bar{f}^K h^d u_n(K) \quad (2.3.23)$$

$$T_2^{h, \delta t}(f, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) P_t^{h, \delta t}(x) dx dt \quad (2.3.24)$$

$$T_3^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} b_K \bar{\varphi}^K h^d u_n(K) \quad (2.3.25)$$

$$T_4^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \varphi(x) P_t^{h, \delta t}(x) dx dt \quad (2.3.26)$$

$$T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L, K} \bar{\varphi}^K h^d u_n(L) \quad (2.3.27)$$

$$T_6^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu(x)(dy) \right) P_t^{h,\delta t}(x) dx dt \quad (2.3.28)$$

$$\begin{aligned} T_7^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = & \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \bar{\varphi}^K h^{d-1} \left[ \sum_{L \in V_K^+} u_n(K) - \sum_{L \in V_K^-} u_n(L) \right] \\ & + \sum_{K \in \mathcal{M}} \bar{\varphi}^K h^d (u_{n_2}(K) - u_{n_1}(K)) \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} T_8^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) P_t^{h,\delta t}(x) dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_2}^{h,\delta t}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_1}^{h,\delta t}(x) dx \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Avec ces notations, nous déduisons du schéma (2.3.7) :

$$-T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_5^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_7^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = 0 \quad (2.3.31)$$

De plus, nous avons

$$\begin{aligned} & -T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_6^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \\ & \left[ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ b(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) - b(x) \varphi(x) + \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) \right] P_t^{h,\delta t}(x) dx dt \right. \\ & \left. + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_1}^{h,\delta t}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_2}^{h,\delta t}(x) dx \right] \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

La prochaine étape de la démonstration consiste à montrer que, sous certaines conditions que l'on cherchera à préciser, les différences entre  $T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2)$  et  $T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2)$ , entre  $T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  et  $T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ , entre  $T_5^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  et  $T_6^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  et entre  $T_7^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  et  $T_8^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  tendent vers 0. Pour cela, nous nous appuyons sur l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006a].

**Lemme 25.** *Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ , soit  $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ ,  $T > 0$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Alors pour chaque  $\epsilon_0 > 0$ , il existe  $\delta t_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  qui ne dépendent que de  $\epsilon_0$  et  $f$  tel que pour tout  $\delta t \in ]0, \delta t_0]$  et pour tout  $h \in ]0, h_0]$ , nous avons*

$$\left| T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0 \quad (2.3.33)$$

ce qui signifie que  $\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \left( T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right) = 0$ .

*Démonstration.* Pour commencer la démonstration, remarquons que :

$$T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) = \int_{n_1 \delta t}^{n_2 \delta t} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) P_t^{h,\delta t}(x) dx dt$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{t_1}^{t_2} f(x) P_t^{h,\delta t}(x) dt - \int_{n_1 \delta t}^{n_2 \delta t} f(x) P_t^{h,\delta t}(x) dt \right| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{n_2 \delta t}^{t_2} f(x) P_t^{h,\delta t}(x) dt - \int_{n_1 \delta t}^{t_1} f(x) P_t^{h,\delta t}(x) dt \right| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^d} \left( \int_{n_2 \delta t}^{(n_2+1)\delta t} |f(x)| P_t^{h,\delta t}(x) dt + \int_{n_1 \delta t}^{(n_1+1)\delta t} |f(x)| P_t^{h,\delta t}(x) dt \right) dx \\ & \leq 2\delta t \|f(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'écrire

$$\forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta t_0 > 0, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } \delta t \leq \delta t_0 \text{ et } h \leq h_0 \Rightarrow \left| T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0$$

□

**Lemme 26.** *Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ , soit  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $T > 0$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Alors pour chaque  $\epsilon_0 > 0$ , il existe  $\delta t_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  qui ne dépendent que de  $\epsilon_0, T, B$  et  $f$  tel que pour tout  $\delta t \in ]0, \delta t_0]$  et pour tout  $h \in ]0, h_0]$ , nous avons*

$$\left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0 \quad (2.3.34)$$

ce qui signifie que  $\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \left( T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right) = 0$ .

*Démonstration.* Pour commencer, nous définissons la fonction  $f$  de la façon suivante :

$$f(x) = b(x)\varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} b_K \bar{\varphi}^K &= \frac{1}{h^d} \int_K b(x) dx \frac{1}{h^d} \int_K \varphi(y) dy \\ \bar{b}^K &= \frac{1}{h^d} \int_K b(x)\varphi(x) dx \end{aligned}$$

En posant  $C_\varphi = \|\nabla \varphi(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \left| b_K \bar{\varphi}^K - \bar{b}^K \right| &= \left| \frac{1}{h^d} \int_K b(x) dx \frac{1}{h^d} \int_K \varphi(y) dy - \frac{1}{h^d} \int_K b(x)\varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{h^{2d}} \int_K b(x) \int_K (\varphi(x) - \varphi(y)) dy dx \right| \\ &\leq C_\varphi B h_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

En utilisant la remarque 19, on en déduit

$$\left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \leq C_\varphi B h T \sqrt{d}$$

En remarquant que  $T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) = T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} \left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| &= \left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \\ &= \left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) + T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \\ &\leq \left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| + \left| T_2^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) - T_1^{h,\delta t}(f, t_1, t_2) \right| \end{aligned}$$

Le lemme 25 appliqué avec la fonction  $f$  permet de conclure la démonstration. Ainsi

$$\forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta t_0 > 0, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } \delta t \leq \delta t_0 \text{ et } h \leq h_0 \Rightarrow \left| T_3^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_4^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0$$

□

**Lemme 27.** *Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ , soit  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $T > 0$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Alors pour chaque  $\epsilon_0 > 0$ , il existe  $\delta t_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  qui ne dépendent que de  $\epsilon_0$ ,  $T$ ,  $B$ , et  $f$  tel que pour tout  $\delta t \in ]0, \delta t_0]$  et pour tout  $h \in ]0, h_0]$ , nous avons*

$$\left| T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0 \quad (2.3.35)$$

ce qui signifie que  $\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \left( T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right) = 0$ .

*Démonstration.* Comme pour la démonstration du lemme 3.6 de l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006a], soit  $f$  une fonction définie de la façon suivante :

$$f(x) = b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) \right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$$

Nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \bar{f}^K - \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \bar{\varphi}^L \right| \\ &= \left| \frac{1}{h^d} \int_K b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) \right) - \sum_{L \in \mathcal{M}} \frac{1}{h^{2d}} \int_K b(x) \int_L \mu_{(x)}(dy) \int_L \varphi(z) dz \right| \\ &= \frac{1}{h^d} \left| \int_K b(x) \sum_{L \in \mathcal{M}} \left[ \int_L \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) - \frac{1}{h^d} \int_L \mu_{(x)}(dy) \int_L \varphi(z) dz \right] dx \right| \\ &= \frac{1}{h^d} \left| \int_K b(x) \sum_{L \in \mathcal{M}} \left[ \frac{1}{h^d} \int_L \int_L (\varphi(y) - \varphi(z)) dz \mu_{(x)}(dy) \right] dx \right| \end{aligned}$$

Le théorème des accroissements finis permet d'écrire  $\varphi(y) - \varphi(z) \leq C_\varphi h_{\mathcal{M}}$  ainsi

$$\left| \bar{f}^K - \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L} \bar{\varphi}^L \right| \leq C_\varphi B h_{\mathcal{M}}$$

Ce qui nous amène à

$$\left| T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_1^{h, \delta t}(f, t_1, t_2) \right| \leq C_\varphi B h \sqrt{d} T$$

En remarquant que  $T_2^{h, \delta t}(f, t_1, t_2) = T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2)$  nous pouvons conclure cette démonstration en appliquant le lemme 25 avec la fonction  $f$ .

$$\forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta t_0 > 0, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } \delta t \leq \delta t_0 \text{ et } h \leq h_0 \Rightarrow \left| T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0$$

□

**Lemme 28.** *Sous les conditions  $\mathcal{H}_0$ , soit  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $T > 0$  et  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$  tels que  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$ . Alors pour chaque  $\epsilon_0 > 0$ , il existe  $\delta t_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  qui ne dépendent que de  $\epsilon_0$  et  $T$  tel que pour tout  $\delta t \in ]0, \delta t_0]$  et pour tout  $h \in ]0, h_0]$ , nous avons*

$$\left| T_7^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0 \quad (2.3.36)$$

ce qui signifie que  $\lim_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} \left( T_7^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right) = 0$ .

*Démonstration.* Nous définissons

$$T_{7,1}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \bar{\varphi}^K h^{d-1} \left[ \delta t \sum_{L \in V_K^+} u_n(K) - \delta t \sum_{L \in V_K^-} u_n(L) \right]$$

$$T_{7,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \sum_{K \in \mathcal{M}} \bar{\varphi}^K h^d (u_{n_2}(K) - u_{n_1}(K))$$

Ainsi  $T_7^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = T_{7,1}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_{7,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ .

Remarquons que

$$-T_2^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) P_t^{h,\delta t}(x) dx dt$$

$$T_{8,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_2}^{h,\delta t}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_1}^{h,\delta t}(x) dx$$

Ainsi  $T_8^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = -T_2^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) + T_{8,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ .

Par définition de la fonction  $P_t^{h,\delta t}$  nous avons,  $T_{8,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = T_{7,2}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2)$ .

Remarquons que

$$T_{7,1}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) = \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} \delta t \sum_{L \in V_K^+} h^{d-1} u_n(K) (\bar{\varphi}^K - \bar{\varphi}^L)$$

Remarquons ensuite que

$$-T_1^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) = -\delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_{K \in \mathcal{M}} h^d u_n(K) \frac{1}{h^d} \int_K \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) dx$$

D'après le lemme 25, nous avons

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta t_0 > 0, \exists h_0 > 0 \text{ tel que } \delta t \leq \delta t_0 \text{ et } h \leq h_0 \\ & \Rightarrow \left| -T_1^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) + T_2^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) \right| \leq \epsilon_0 \end{aligned}$$

Nous notons

$$D_h^K = \left| \frac{1}{h^d} \int_K \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) dx + \sum_{L \in V_K^+} \frac{\bar{\varphi}^K - \bar{\varphi}^L}{h} \right| \quad (2.3.37)$$

Ainsi

$$\left| T_{7,1}^{h,\delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_1^{h,\delta t} \left( \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} v^{(\alpha)}, t_1, t_2 \right) \right| \leq \delta t \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \sum_K D_h^K h^d u_n(K) \quad (2.3.38)$$

$K$  possède  $d$  cellules voisines appartenant à l'ensemble  $V_K^+$ , numérotons-les de 1 à  $d$  de telle sorte que la  $\alpha$ -ème cellule voisine de  $K$  diffère uniquement par sa  $\alpha$ -ème composante. Soit  $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_d$  avec

$K_\chi = [k_\chi \cdot h, (k_\chi + 1) \cdot h[$  pour tout  $\chi \in \{1, \dots, d\}$  et soit  $L^\alpha = L_1^\alpha \times \dots \times L_d^\alpha$  tel que pour tout  $\sigma \neq \alpha$ ,  $L_\sigma^\alpha = K_\sigma$  et  $L_\alpha^\alpha = [(k_\alpha + 1) \cdot h, (k_\alpha + 2) \cdot h[$ . Ainsi

$$D_h^K = \left| \sum_{\alpha=1}^d \left( \frac{1}{h^d} \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) dx + \frac{\bar{\varphi}^K - \bar{\varphi}^{L^\alpha}}{h} 1_{L^\alpha \in V_K^+} \right) \right|$$

Par définition de  $v^{(\alpha)}(x)$  et de  $L^\alpha$ , nous avons que  $v^{(\alpha)}(x) = 1$  si et seulement si  $L^\alpha \in V_K^+$ , ce qui permet de déduire que

$$D_h^K = \left| \sum_{\alpha=1}^d 1_{L^\alpha \in V_K^+} \left( \frac{1}{h^d} \int_K \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) dx + \frac{\bar{\varphi}^K - \bar{\varphi}^{L^\alpha}}{h} \right) \right|$$

Plaçons nous dans le cas où  $L^\alpha \in V_K^+$ . Soit  $h_\alpha$  un vecteur de  $d$  composantes telle que la  $\alpha$ -ème composante vaut  $h$  et les autres valent 0. En effectuant un changement de variables, nous obtenons

$$\frac{\bar{\varphi}^K - \bar{\varphi}^{L^\alpha}}{h} = \frac{1}{h^d} \int_K \frac{\varphi(x) - \varphi(x + h_\alpha)}{h} dx$$

Le théorème des accroissements finis assure l'existence de  $g^\alpha(x) \in K \cup L^\alpha$  tel que

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x + h_\alpha)}{h} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(g^\alpha(x))$$

avec pour tout  $\sigma \neq \alpha$ ,  $g_\sigma^\alpha(x) = x_\sigma$  et  $x_\alpha \leq g_\alpha^\alpha(x) \leq x_\alpha + h$ . Par suite

$$\begin{aligned} D_h^K &\leq \frac{1}{h^d} \sum_{\alpha=1}^d 1_{L^\alpha \in V_K^+} \int_K \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) - \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(g^\alpha(x)) \right| dx \\ &\leq d C_{\nabla \varphi} h \end{aligned}$$

avec  $C_{\nabla \varphi}$  une constante de Lipschitz associée aux dérivées partielles de la fonction  $\varphi$ . Ainsi,

$$\forall \epsilon_0 > 0, \exists \delta t_0 > 0, \exists h_0 > 0, \text{ tel que } \delta t \leq \delta t_0 \text{ et } h \leq h_0 \Rightarrow \left| T_7^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \leq \epsilon_0$$

Ce qui complète la démonstration. □

Le lemme suivant assure la continuité de la solution approximée de CK en fonction du temps. Soit  $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$ , pour  $\delta t > 0$  et  $h > 0$ , nous posons pour tout  $s, t \in \mathbb{R}_+$

$$S_\varphi(h, \delta t, s, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_t^{h, \delta t}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_s^{h, \delta t}(x) dx \quad (2.3.39)$$

**Lemme 29.** *Selon les conditions  $\mathcal{H}_0$ , soit  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  et soit  $T > 0$ . Alors il existe  $C_S$  dépendant uniquement de  $T$ ,  $\varphi$ ,  $v$ ,  $B$ ,  $\pi_0$  et  $\mu$  tel que pour chaque  $\epsilon_0 > 0$ , il existe  $\delta t_0 > 0$  et  $h_0 > 0$  tel que pour tout  $\delta t \in ]0, \delta t_0]$  et pour tout  $h \in ]0, h_0]$ , nous avons,*

$$|S_\varphi(h, \delta t, s, t)| \leq C_S |t - s| + \epsilon_0 \quad (2.3.40)$$

ce qui signifie que  $\limsup_{\substack{\delta t \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} |S_\varphi(h, \delta t, s, t)| \leq C_S |t - s|$ .

*Démonstration.* La démonstration est identique à celle du lemme 3.8 de l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006a]. Celle qui suit en est l'exacte copie.

En commençant par (2.3.32), nous avons

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_1}^{h, \delta t}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) P_{t_2}^{h, \delta t}(x) dx \right| \\ & \leq \left| -T_4^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \\ & + \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \left[ b(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) - b(x) \varphi(x) + \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) \right] P_t^{h, \delta t}(x) dx dt \right| \end{aligned}$$

En utilisant (2.3.31) et les lemmes 26, 27 et 28, nous avons

$$\begin{aligned} & \left| -T_4^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \\ & = \left| T_3^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_4^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_6^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_5^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) + T_7^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) - T_8^{h, \delta t}(\varphi, t_1, t_2) \right| \\ & \leq 3\epsilon_0 \end{aligned}$$

Posons

$$C_S = 2B \|\varphi(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\alpha=1}^d \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(\cdot) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$$

Ce qui complète la démonstration.  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure avec le théorème de convergence.

**Théorème 30.** *Sous les hypothèses  $\mathcal{H}_0$ , soit  $(h_m, \delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite telle que, pour tout  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $\delta t_m \rightarrow 0$  et  $h_m \rightarrow 0$  quand  $m \rightarrow \infty$ . Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , la suite tendue de mesures de probabilité  $\left( P_t^{h_m, \delta t_m}(x) dx \right)_{m \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^d$ , notée  $\pi_t(dx)$ . De plus, cette famille  $(\pi_t(dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est l'unique solution faible des équations de Chapman-Kolmogorov (2.2.10).*

*Démonstration.* La démonstration identique à celle du théorème 3.1 de l'article [Cocozza-Thivent et al., 2006a].

Soit  $(t_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de réels, dense dans  $\mathbb{R}_+$ . En utilisant la tension de la famille de probabilité  $\left( P_{t_p}^{h_k, \delta t_k}(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$  (lemme 24), et le théorème de Prohorov, pour chaque  $t_p \geq 0$ , nous pouvons extraire de  $(h_k, \delta t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une sous-suite  $(h_{\sigma_p(k)}, \delta t_{\sigma_p(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\left( P_{t_p}^{h_{\sigma_p(k)}, \delta t_{\sigma_p(k)}}(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente vers une mesure de probabilité. En utilisant une méthode diagonale, nous pouvons choisir une sous-suite  $(h_{\sigma(k)}, \delta t_{\sigma(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  de  $(h_k, \delta t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\left( P_{t_p}^{h_{\sigma(k)}, \delta t_{\sigma(k)}}(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente pour tout  $p \in \mathbb{N}$ . Dans la suite, cette sous-suite est notée  $(h_k, \delta t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $\left( P_{t_p}^{h_k, \delta t_k}(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est maintenant convergente vers une distribution de probabilité  $\pi_{t_p}(dx)$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

Démontrons maintenant que, pour tout  $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ , la suite  $\left( \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_t^{h_k, \delta t_k}(x) dx \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy pour tout  $t > 0$ . Soit  $k, m \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , nous pouvons écrire, en utilisant la notation (2.3.39),

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_t^{h_k, \delta t_k}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_t^{h_m, \delta t_m}(x) dx \right| \leq |S_\psi(h_k, \delta t_k, t, t_p)| + |S_\psi(h_m, \delta t_m, t, t_p)| \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_{t_p}^{h_k, \delta t_k}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_{t_p}^{h_m, \delta t_m}(x) dx \right| \end{aligned}$$

Soit  $T = t + 1$  et soit  $\epsilon \in (0, 1)$  donnés. Nous commençons par choisir  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $|t - t_p| \leq \epsilon$ . Comme la suite  $\left( P_{t_p}^{h_k, \delta t_k}(x) \right)_{k \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente, il existe  $k_0$  tel que, pour tout  $k, m \geq k_0$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_{t_p}^{h_k, \delta t_k}(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_{t_p}^{h_m, \delta t_m}(x) dx \right| \leq \epsilon$$

Nous pouvons choisir  $k_1 \geq 0$  tel que, pour tout  $k \geq k_1$ ,  $\delta t_k \leq \delta t_0$  et  $h_k \leq h_0$ , où  $\delta t_0$  et  $h_0$  sont donnés par le lemme 29 pour la valeur  $\epsilon$ . Nous avons donc, pour  $k, m \geq k_1$ ,

$$|S_\psi(h_k, \delta t_k, t, t_p)| + |S_\psi(h_m, \delta t_m, t, t_p)| \leq (2C_S + 2)\epsilon$$

Ceci complète la preuve que  $\left(\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x) P_t^{h_k, \delta t_k}(x) dx\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy pour tout  $t > 0$ . Nous obtenons facilement la même propriété pour  $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$  et aussi pour  $\psi \in C_b(\mathbb{R}^d)$  grâce au lemme 24. Par conséquent, il existe une mesure de probabilité  $\pi_t(dx)$  telle que la suite  $\left(P_t^{h_k, \delta t_k}(x)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est faiblement convergente vers  $\pi_t(dx)$ .

De plus, en passant à la limite dans l'équation (2.3.40), nous obtenons que pour tout  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_t(x) dx - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_s(x) dx \right| \leq C_S |t - s| \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$$

ce qui donne la continuité de la fonction  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_t(x) dx$ . La propriété de continuité peut facilement s'étendre par densité aux fonctions  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$  par la tension. En utilisant les lemmes 26, 27 et 28, et le théorème de convergence dominée, nous avons les propriétés suivantes pour tout  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$  et  $t_1, t_2 \geq 0$ ;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_3^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_4^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \varphi(x) \pi_t(dx) dt$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_5^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_6^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} b(x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \mu_{(x)}(dy) \right) \pi_t(dx) dt$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} T_7^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) &= \lim_{k \rightarrow \infty} T_8^{h_k, \delta t_k}(\varphi, t_1, t_2) \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\alpha=1}^d \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(x) v^{(\alpha)}(x) \pi_t(dx) dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_{t_2}(dx) - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \pi_{t_1}(dx) \end{aligned}$$

Nous passons maintenant à la limite dans (2.3.31) ce qui permet de déduire que  $(\pi_t(dx))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est solution des équations de Chapman-Kolmogorov (2.2.10). Comme cette solution est unique, voir [Cocozza-Thivent et al., 2006b], nous en déduisons que le schéma converge vers cette famille.  $\square$

**Remarque 31.** *Nous pouvons étendre ce résultat aux PDMP dont l'espace d'état est composé de plus d'un élément en effectuant le même raisonnement que dans l'article [Eymard et al., 2008].*

**Remarque 32.** *La démonstration du schéma (2.3.13) prenant en compte les instants déterministes de saut ne diffère pas de la démonstration précédente. Entre ces instants de saut, la démonstration de la convergence du schéma est adaptée. Comme la démonstration ne dépend pas de la façon de définir la loi initiale du PDMP, celle-ci est valable pour le schéma (2.3.13).*

La convergence de l'algorithme de volumes finis a été démontrée dans un cas particulier correspondant à celui dans lequel se trouvent les différents cas d'application traités lors de cette thèse. Ce résultat permet d'attribuer une certaine confiance aux estimations des quantités d'intérêt issues du schéma numérique. Les formules permettant d'estimer ces quantités à l'aide du schéma sont présentées dans le prochain paragraphe.

## 2.4 Quantités d'intérêt estimées par le schéma de volumes finis

Dans ce paragraphe, nous présentons les quantités fiables utilisées dans le cadre des études menées dans cette thèse. L'espace d'état  $E$  du PDMP est décomposé en deux ensembles disjoints : l'ensemble des états de marche  $M$  et l'ensemble des états de panne  $P$ .



### 2.4.1 Fiabilité

La fiabilité à l'instant  $t$  correspond à la probabilité que le système n'ait pas subi de défaillance avant l'instant  $t$  et se note  $R(t)$ .

$$R(t) = \mathbb{P}(T > t)$$

avec  $T$  l'instant de la première panne.

Le PDMP étant un processus markovien, la méthode introduite dans le premier chapitre pour calculer la fiabilité d'un système modélisé par un PMS ou un processus semi-markovien peut s'appliquer. Pour rappel, cette méthode consiste à rendre les états de défaillance absorbants. Ainsi, soit  $\tilde{\pi}_t(\cdot, dx)$  la loi du PDMP à l'instant  $t$  dont les états de panne sont absorbants. La fiabilité se calcule de la façon suivante :

$$R(t) = \sum_{i \in M} \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\pi}_t(i, dx) \quad (2.4.1)$$

Cette quantité se calcule facilement avec le schéma de volumes finis. Pour cela, soit la suite  $\tilde{u}_n$ , une approximation de  $\tilde{\pi}_t(\cdot, dx)$ , construite par le schéma de volumes finis. Soit  $R_n$  une approximation de la fiabilité à l'instant  $t$ , avec  $t \in [n\delta t, (n+1)\delta t[$  :

$$R_n = h^d \sum_{i \in M} \sum_{K \in \mathcal{M}} \tilde{u}_n(K, i) \quad (2.4.2)$$

### 2.4.2 Disponibilité

La disponibilité à l'instant  $t$  correspond à la probabilité que le système soit en fonctionnement à l'instant  $t$ . Cette probabilité se note  $D(t)$ .

$$D(t) = \mathbb{P}(I_t \in F)$$

En reprenant les notations du PDMP, cette probabilité s'écrit de la façon suivante :

$$D(t) = \sum_{i \in M} \int_{\mathbb{R}^d} \pi_t(i, dx) \quad (2.4.3)$$

Soit  $D_n$  une approximation de la disponibilité à l'instant  $t$ ,  $D_n$  s'obtient avec la formule suivante, pour  $t \in [n\delta t, (n+1)\delta t[$  :

$$D_n = h^d \sum_{i \in M} \sum_{K \in \mathcal{M}} u_n(K, i) \quad (2.4.4)$$

Contrairement à la fiabilité, la disponibilité est une quantité difficile à estimer dans nos cas d'application avec le schéma de volumes finis. Cette difficulté est due à la différence d'ordres de grandeur entre la durée de vie des composants qui se chiffrent en dizaines d'années et le temps nécessaire à une réparation qui s'estime en heures. Afin de quantifier la disponibilité, deux pas de discrétisation de l'espace des variables physiques doivent être définis. Le premier  $h_m$  est utilisé pour les états de marche et le deuxième  $h_p$  est utilisé pour les états de panne. Modéliser un temps d'indisponibilité nécessite de choisir  $h_p$  suffisamment petit pour qu'il puisse compter les heures. Le pas  $h_m$  discrétise des durées en années. Le pas de temps  $\delta t$  est choisi le plus grand possible pour que la condition de stabilité (2.3.8) soit respectée, ainsi il doit forcément être plus petit que le minimum des deux pas  $h_m$  et  $h_p$ . Pour évaluer l'indisponibilité d'un système sur les 20 prochaines années, l'intervalle  $[0, 20]$  est découpé en  $\frac{20}{\delta t}$  morceaux. Cette quantité est au moins égale à  $\frac{20}{h_p}$ . Supposons que  $h_p$  est égale à une heure, ce qui donne en années  $h_p = 0.0001142$ . Ainsi l'intervalle  $[0, 20]$  est discrétisé en au moins 175131 morceaux ce qui rend les calculs extrêmement longs. Pour comparaison si  $h_m$  est égale à 1 et si l'on ne souhaite pas quantifier l'indisponibilité, l'intervalle  $[0, 20]$  est découpé en au moins 20 morceaux.

Estimer la disponibilité d'un système heure par heure n'a de sens que si l'on prend en compte la sollicitation du système sur la même échelle de temps. Il faudrait ainsi prendre en compte le fait que le système est sollicité de façon différente au cours d'une journée. De même, estimer la disponibilité d'un système au cours d'une année nécessiterait de connaître l'évolution du taux de défaillance des composants en fonction des saisons; en effet,

il est intuitif de penser qu'un système situé à l'extérieur (par exemple sur la voie) est sensible au froid. Ces phénomènes n'ont pas été pris en compte lors de l'étude des cas industriels. La disponibilité moyenne annuelle d'un système a donc plus de sens car cette quantité modélise l'évolution de la disponibilité en fonction des années ce qui correspond à notre échelle temporelle. Une astuce permet d'estimer cette quantité facilement sans que cela entraîne des difficultés pour le schéma numérique. Considérons un système modélisé par un PDMP dont les durées de réparation sont considérées instantanées. Cette hypothèse se justifie par le fait que les durées de réparation sont négligeables par rapport à la durée de vie du système. Le schéma numérique permet d'évaluer une approximation du nombre moyen de défaillances subies par le système chaque année (voir le prochain paragraphe). Une fois ce calcul réalisé, un nombre d'heures d'indisponibilité est associé à chaque défaillance. La disponibilité moyenne annuelle correspond ainsi au quotient du nombre d'heures de bon fonctionnement par le nombre d'heures dans une année. Soit  $N_p(k)$  le nombre moyen annuel de défaillances du système survenues durant la  $k$ -ème année, soit  $H_{Ind}$  le nombre d'heures d'indisponibilité causées par une défaillance, soit  $\hat{D}(k)$  la disponibilité moyenne du système sur l'année  $k$ ,

$$\hat{D}(k) = 1 - \frac{H_{Ind} \times N_p(k)}{24 \times 365} \quad (2.4.5)$$

Le nombre moyen annuel de défaillances peut être estimé à l'aide du schéma de volumes finis. La méthode est présentée dans le prochain paragraphe.

### 2.4.3 Nombre d'occurrences d'un événement

Une étude fiabiliste d'un système nécessite généralement de quantifier le nombre d'occurrences de certains événements comme par exemple le nombre de défaillances. En fonction de l'objectif de l'étude, les événements sont définis selon la nature de leur conséquence, de leur cause ou encore de leur impact économique. Par exemple, l'étude du passage à niveau a nécessité d'isoler les événements ayant un risque sur la sécurité dans l'objectif d'évaluer l'occurrence de ces événements dangereux. Séparer les événements permet d'octroyer à chacun d'entre eux un coût, ce qui va permettre d'effectuer une étude économique plus fine. Par exemple si deux composants  $A$  et  $B$  n'ont pas le même coût, remplacer le composant  $A$  ne revient pas au même que remplacer le composant  $B$ .

Quantifier le nombre d'occurrences d'un événement revient à quantifier le nombre de transitions entre deux états. La proposition suivante donne la formule permettant de calculer la moyenne de cette quantité. La démonstration est issue d'un cours de Christiane Coccozza-Thivent.

**Proposition 33.** *Soit  $N_{i,j}(t)$  le nombre de transitions entre l'état  $i$  et l'état  $j$  ayant eu lieu avant l'instant  $t$  avec  $(i, j) \in E^2$ . La moyenne de cette quantité s'exprime de la façon suivante :*

$$\mathbb{E}[N_{i,j}(t)] = \mathbb{E} \left[ \int_0^t a(i, j, X_s) ds \right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} a(i, j, x) \pi_s(i, dx) ds \quad (2.4.6)$$

*Démonstration.* D'après la proposition 17,  $\varphi(I_t, X_t) - \varphi(I_0, X_0) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(I_s, X_s) ds$  est une martingale pour  $\varphi(I_t, X_t) = 1_j(I_t)$ . Soit  $M_j(t)$  la martingale définie de la façon suivante :

$$M_j(t) = 1_j(I_t) - 1_j(I_0) - \int_0^t a(I_s, j, X_s) ds + \int_0^t 1_j(I_s) b(j, X_s) ds$$

Notons  $U_k$  (respectivement  $V_k$ ) les instants d'entrée (respectivement de sortie) successifs du processus  $(I_t)_{t \geq 0}$  dans l'état  $j$ . On a :

$$dM_j(s) = \sum_k \delta_{U_k}(ds) - \sum_k \delta_{V_k}(ds) - a(I_s, j, X_s) ds + 1_j(I_s) b(j, X_s) ds$$

Soit  $i \in E$ ,  $i \neq j$ ,  $N_{i,j}(t)$  peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\begin{aligned} N_{i,j}(t) &= \sum_{s \leq t} 1_i(I_{s-}) 1_j(I_s) \\ &= \sum_k \int_0^t 1_i(I_{s-}) \delta_{U_k}(ds) \end{aligned}$$

Comme le processus  $(1_i(I_{s-}))_{s \geq 0}$  est adapté et continu à gauche, donc prévisible, on obtient que le processus  $\left(\int_0^t 1_i(I_{s-})dM_j(s)\right)_{t \geq 0}$  est une martingale. De plus

$$\int_0^t 1_i(I_{s-})dM_j(s) = N_{i,j}(t) - \int_0^t 1_i(I_{s-})a(I_s, j, X_s)ds$$

Par suite nous obtenons en passant à l'espérance :

$$\mathbb{E}[N_{i,j}(t)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t a(i, j, X_s)ds\right] = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} a(i, j, x)\pi_s(i, dx)ds$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Cette quantité peut être estimée avec le schéma de volumes finis de la façon suivante. Soit  $N_{i,j}^n$  une approximation de  $\mathbb{E}[N_{i,j}(t)]$  avec  $t \in [n\delta t, (n+1)\delta t[$  :

$$N_{i,j}^n = h^d \delta t \sum_{m=0}^n \sum_{K \in \mathcal{M}} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{i,j} u_m(K, i) \quad (2.4.7)$$

Le calcul des quantités décrites dans ce paragraphe n'est pas toujours aisé. Selon la complexité du système, l'utilisation du schéma de volumes finis pour estimer les quantités d'intérêt peut être difficile. Le prochain paragraphe présente des méthodes de simplification et d'approximation permettant d'estimer les quantités recherchées même dans des cas difficiles.

## 2.5 Méthodes de simplification et d'approximation

### 2.5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, l'algorithme de volumes finis a pour principe de discrétiser le temps et l'espace des variables physiques dans le but de calculer itérativement une approximation des lois marginales du PDMP. L'utilisation de ce type de schéma pour la quantification de systèmes multi-composants entraîne trois types de difficultés. La première est le codage dont le degré de difficulté augmente rapidement avec le nombre de variables physiques. La seconde correspond au temps de calcul engendré par le schéma. Enfin, la troisième difficulté est d'ordre informatique ; le schéma numérique est limité par la quantité de place mémoire que l'ordinateur possède. Un nombre de variables physiques important nécessite de discrétiser un grand espace ce qui pose problème. Si le PDMP que l'on cherche à quantifier possède  $d$  variables physiques évoluant chacune dans  $\mathbb{R}_+$ , l'espace  $\mathbb{R}_+^d$  doit être discrétisé. Lorsque  $d$  est trop grand, il existe trois façons de s'en sortir. La première méthode consiste à simplifier au maximum la modélisation soit en profitant de l'indépendance des composants lorsque c'est possible soit en limitant le nombre de variables physiques dans la modélisation. La diminution du nombre de variables physiques est possible lorsque l'on peut déduire de façon certaine la valeur de l'une d'entre elles quand nous connaissons la valeur des autres. Dans ce cas, il n'est pas nécessaire de garder en mémoire cette variable physique. Dans le cas de la modélisation de système multi-composants, cette méthode est applicable par exemple lorsque les composants ont toujours le même âge. Cette caractéristique dépend essentiellement de la stratégie de maintenance mise en place. La deuxième méthode consiste à utiliser une méthode d'approximation dans l'algorithme de volumes finis. Alors que la première méthode ne diminue pas la précision des résultats, la méthode d'approximation, comme son nom l'indique, entraîne une perte de précision. Enfin, la troisième méthode consiste à effectuer un changement de processus afin de se ramener à un PDMP non-homogène dont les variables physiques n'évoluent pas au cours du temps. Cette transformation nécessite l'utilisation d'un nouveau schéma de volumes finis plus simple.

Avant de présenter les différentes méthodes de simplification, détaillons les stratégies de maintenance que nous souhaitons modéliser. Ces stratégies sont importantes à comprendre car, l'utilisation de l'une ou l'autre méthode dépend de la stratégie mise en place. La première stratégie de maintenance est la stratégie de type purement corrective. Elle consiste à effectuer une action de maintenance lorsque le système tombe en panne et à remplacer les composants défectueux par des neufs. La deuxième stratégie est la stratégie de type révision générale. Cette stratégie consiste à effectuer une maintenance préventive à une ou plusieurs dates prévues à l'avance et à remplacer préventivement les composants jugés trop âgés ainsi que les composants en panne. Enfin, la dernière

FIGURE 2.3 – Système série de  $n$  composants

stratégie est de type opportuniste. Elle consiste à profiter d'une action de maintenance corrective pour remplacer préventivement les composants jugés trop âgés. Un composant est jugé trop âgé si son âge a dépassé un âge limite de remplacement.

Dans la suite, nous appelons une stratégie de maintenance de type individuelle, une stratégie qui consiste à remplacer des composants indépendamment de l'état des autres composants.

## 2.5.2 Réduction de l'espace par la modélisation

### 2.5.2.1 Réduction de l'espace en tenant compte des indépendances entre composants

Cette méthode n'est utilisable que pour des systèmes soumis à une stratégie de maintenance de type individuelle.

Considérons un système série de  $d$  composants vieillissants et indépendants. La stratégie de maintenance est telle que lorsqu'un composant tombe en panne, il est instantanément remplacé par un composant neuf de même loi. Modélisons ce système par un PDMP. L'espace d'état est réduit à un seul état, en effet comme nous supposons les réparations instantanées, le système ne se trouve jamais dans un état de panne. Les composants vieillissent, leur âge doit être gardé en mémoire. Si le système doit être modélisé sur les  $L$  premières années de sa vie, l'âge des composants ne dépassera jamais  $L$  et l'espace des variables physiques associé au PDMP est  $[0, L]^d$ . Si  $d$  et  $L$  sont grands, les calculs deviennent impossibles à réaliser avec l'algorithme de volumes finis. Pour ce système, il est possible de simplifier grandement la modélisation en profitant de l'indépendance stochastique et fonctionnelle des composants. Chaque composant peut être modélisé par un PDMP tel que ces  $d$  PDMP sont indépendants les uns des autres. Soit  $\pi_t(dx_1, \dots, dx_d)$  la loi du PDMP modélisant le système de  $d$  composants à l'instant  $t$ . Si on note  $\pi_t^i(dx_i)$  la loi du PDMP modélisant le composant  $i$  à l'instant  $t$  avec  $k \in \{1, \dots, d\}$ , alors

$$\pi_t(dx_1, \dots, dx_d) = \prod_{k=1}^d \pi_t^k(dx_k) \quad (2.5.1)$$

Cette méthode n'induit pas d'erreur, seule la quantité de données à garder en mémoire pour le schéma de volumes finis est réduite. Dans le cas du PDMP modélisant le système, la quantité de données à garder en mémoire est en puissance de  $d$  alors que dans le cas simplifié cette quantité est un multiple de  $d$ .

Cette méthode fonctionne pour des systèmes série de  $d$  composants indépendants soumis à une stratégie de maintenance corrective de type individuelle. Plus généralement, cette méthode s'adapte pour des systèmes d'une architecture quelconque si les composants sont indépendants et si le remplacement d'un composant n'est pas induit par un événement lié à un autre composant, c'est-à-dire que la maintenance est individuelle. Cette hypothèse est forte, en effet prenons l'exemple d'un système parallèle. La défaillance d'un composant n'entraîne pas la défaillance du système et par conséquent aucune maintenance corrective n'est effectuée. Pour qu'un système possédant une redondance tombe en panne, il est nécessaire d'avoir une combinaison de composants défaillants. Lorsque cela se produit, le système subit une maintenance corrective et les composants défaillants sont remplacés par des neufs. Dans ce cas, la maintenance n'est pas individuelle car le remplacement d'un composant ne dépend pas seulement du fait qu'il soit tombé en panne mais dépend aussi du fait qu'un ou plusieurs autres composants

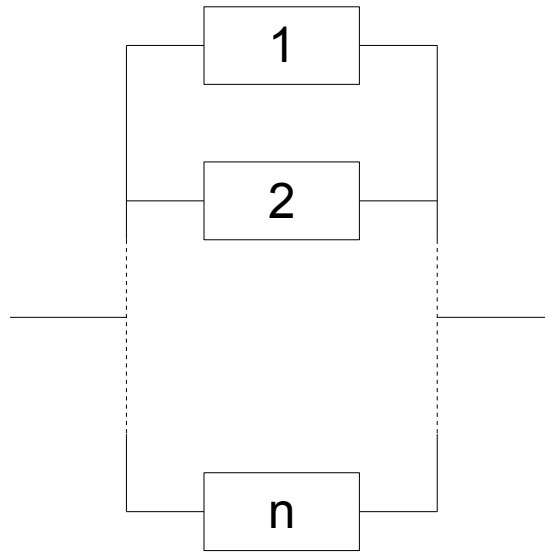


FIGURE 2.4 – Système parallèle avec  $n$  branches et un composant par branche

soient tombés en panne. Une autre méthode basée sur la réduction du nombre de variables physiques, peut alors être utilisée.

### 2.5.2.2 Réduction du nombre de variables physiques

Cette méthode s'applique lorsque l'on peut exprimer une variable physique en fonction d'autres variables physiques ; elle consiste à ne pas garder en mémoire cette variable. Soit  $X = (X_1, \dots, X_d)$  la variable physique du PDMP, s'il existe une fonction  $f$  telle que  $X_k = f(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_d)$  alors la variable physique  $X$  peut être remplacée par  $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_d)$ .

Prenons comme exemple un système parallèle composé de  $n$  branches avec un composant sur chaque branche. Ce type de système est représenté dans la FIGURE 2.4. Ce système est soumis à une stratégie de maintenance purement corrective (mais pas individuelle). La panne du système survient dès lors que tous les composants sont tombés en panne. Lorsque cela arrive, ils sont remplacés par des composants neufs. Dans ce type de système, les composants ont le même âge à chaque instant. Si le composant 1 a  $x$  ans, tous les autres composants ont  $x$  ans avec probabilité 1. Dans ce cas, il suffit d'une variable physique pour garder en mémoire l'âge de tous les composants du système. Ainsi, l'espace des variables physiques est de dimension 1 ce qui permet de diminuer significativement la quantité de place mémoire nécessaire au schéma de volumes finis et ainsi de réaliser les calculs rapidement. Plus généralement, si des composants sont toujours remplacés au même moment, il est possible de ne garder en mémoire qu'une seule variable physique représentant l'âge de ce groupe de composants.

Ces deux méthodes ne sont pas toujours suffisantes. Au cours de cette thèse, nous avons été amenés à étudier des systèmes dont le nombre de composants vieillissants et la stratégie de maintenance ne permettaient pas d'utiliser les deux méthodes décrites ci-dessus. Ainsi, nous nous sommes intéressés à une autre façon de procéder qui contrairement aux deux autres méthodes, entraîne une perte de précision. Cette méthode est décrite dans le prochain paragraphe.

## 2.5.3 La méthode d'approximation

### 2.5.3.1 Pourquoi approximer ?

Nous avons implémenté le schéma de volumes finis pour différents cas tests dont le nombre de composants est différent. Ces tests ont montré que pour des systèmes de plus de cinq composants, pour lesquels il n'est pas possible de simplifier la modélisation, le schéma de volumes finis nécessite une trop grande quantité de place mémoire pour fonctionner. En utilisant un ordinateur plus puissant, il est probablement possible de dépasser le nombre de cinq composants, cependant la limite reste basse. Une autre possibilité est d'utiliser des matrices creuses ne gardant pas en mémoire les 0 mais ce n'est, là encore, pas suffisant.

Pour résoudre ce problème, nous avons développé une méthode permettant de réduire la quantité de place mémoire nécessaire au schéma pour fonctionner. Reprenons les notations introduites pour le schéma de volumes finis. Cette méthode consiste à approcher  $u_n$  dont l'espace de départ est un maillage  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{R}_+^d$ ,  $d$  étant le nombre de composants vieillissants du système, par une somme de produit de fonctions dont les supports sont  $\mathbb{R}_+$ . Le principe est d'approcher la solution du schéma de volumes finis. Cette solution étant déjà une approximation de la loi marginale du PDMP, la méthode proposée revient à estimer une approximation d'une approximation. Ainsi cette méthode est nommée  $A^2$ .

### 2.5.3.2 Description de la méthode

Pour plus de facilités, dans la suite,  $u_n(K, i)$  est remplacé par  $u_n(x, i)$  avec  $K = [x_1 \cdot h, (x_1 + 1) \cdot h[ \times \cdots \times [x_d \cdot h, (x_d + 1) \cdot h[$  et  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{N}^d$ . Nous utilisons la notation  $x \in \mathcal{M}$  pour  $K \in \mathcal{M}$ .

Avant de présenter la méthode  $A^2$  dans le cadre général, celle-ci est présentée dans un cadre simplifié. Soit un PDMP dont l'espace d'état  $E$  est réduit à un seul élément et dont la dimension de l'espace des variables physiques est égale à 2 ( $d = 2$ ). La variable physique du PDMP est  $X = (X_1, X_2)$  et évolue dans l'espace  $[0, L]^2$ . En reprenant les notations introduites pour le schéma de volumes finis, la méthode  $A^2$  va permettre d'approcher  $u_n(x) = u_n(x_1, x_2)$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{M}$ . L'espace  $[0, L]^2$  est découpé en quatre rectangles notés 1, 2, 3 et 4, voir FIGURE 2.5. Sur chacun de ces rectangles, la méthode  $A^2$  consiste à remplacer  $u_0(x_1, x_2)$  par une fonction  $\tilde{u}_0(x_1, x_2)$  qui s'écrit comme le produit de deux fonctions puis d'injecter cette fonction dans le schéma de volume finis afin de calculer successivement les termes de la suite  $(\tilde{u}_n(x_1, x_2))_{n \in \mathbb{N}}$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}$ .

Dans ce qui suit, nous notons  $G$  le rectangle 1, 2, 3 ou 4. Chaque rectangle  $G$  peut s'écrire sous la forme d'un produit de deux intervalles  $I_1^G \times I_2^G$ . Pour  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{M}$ , nous définissons deux fonctions :

$$\nu_0^{G,1}(x_1) = \begin{cases} \sum_{x_2 \in I_2^G} u_0(x_1, x_2) & \text{si } x_1 \in I_1^G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.2)$$

$$\nu_0^{G,2}(x_2) = \begin{cases} \sum_{x_1 \in I_1^G} u_0(x_1, x_2) & \text{si } x_2 \in I_2^G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.3)$$

où  $u_0$  est une approximation de la loi de  $(I_0, X_0)$  donnée dans (2.3.4).

Soit  $\tilde{u}_0$  une fonction définie de façon suivante, pour  $(x_1, x_2) \in G$  :

$$\tilde{u}_0(x_1, x_2) = \nu_0^{G,1}(x_1) \nu_0^{G,2}(x_2) \quad (2.5.4)$$

L'équation (2.5.4) peut aussi s'écrire, pour  $(x_1, x_2) \in \mathcal{M}$  :

$$\tilde{u}_0(x_1, x_2) = \sum_{G=1}^4 \nu_0^{G,1}(x_1) \nu_0^{G,2}(x_2) \quad (2.5.5)$$

L'algorithme (2.3.7) peut s'écrire sous une forme plus simple :

$$u_{n+1}(x_1, x_2) = \sum_{(y_1, y_2) \in \mathcal{M}} B((y_1, y_2), (x_1, x_2)) u_n(y_1, y_2) \quad (2.5.6)$$

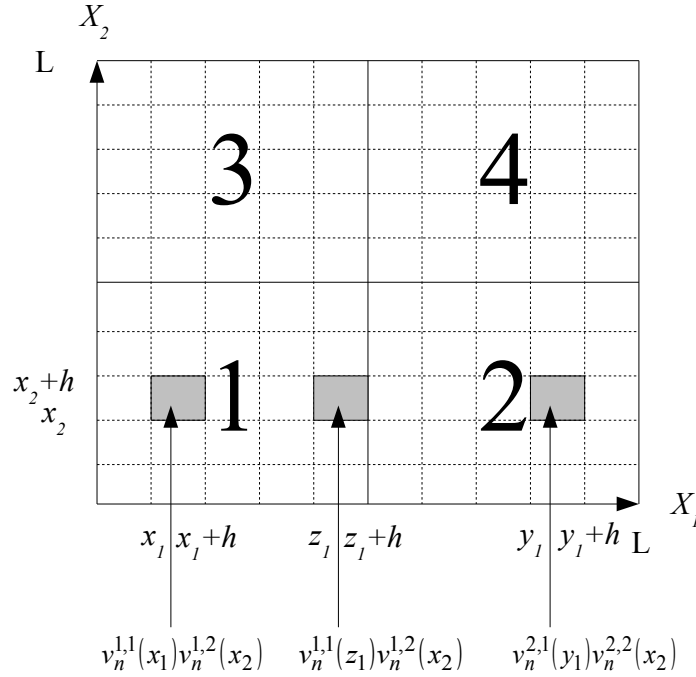


FIGURE 2.5 – Découpage de l'espace des variables physiques  $[0, L]^2$  pour la méthode  $A^2$

La fonction  $\tilde{u}_n(x_1, x_2)$  est supposée pouvoir s'écrire pour tout entier  $n$  sous la forme un produit de deux fonctions de la même façon que  $\tilde{u}_0(x_1, x_2)$  :

$$\tilde{u}_n(x_1, x_2) = \sum_{G=1}^4 \nu_n^{G,1}(x_1) \nu_n^{G,2}(x_2) \quad (2.5.7)$$

En remplaçant  $u_n(y_1, y_2)$  par  $\tilde{u}_n(x_1, x_2)$  dans (2.5.6), nous obtenons un nouveau schéma que nous initialisons par  $\tilde{u}_0(x_1, x_2)$  défini dans (2.5.4). Le nouveau schéma s'écrit de la façon suivante :

$$\nu_{n+1}^{G,1}(x_1) \nu_{n+1}^{G,2}(x_2) = \sum_{H=1}^4 \sum_{(y_1, y_2) \in \mathcal{M}} B((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \nu_n^{H,1}(y_1) \nu_n^{H,2}(y_2) \quad (2.5.8)$$

L'objectif est maintenant de calculer les fonctions  $\nu_n^{H,1}(y_1)$  et  $\nu_n^{H,2}(y_2)$ . Soit  $C_n^{G,1} = \sum_{x_1 \in I_1^G} \nu_n^{G,1}(x_1)$  et soit  $C_n^{G,2} = \sum_{x_2 \in I_2^G} \nu_n^{G,2}(x_2)$  pour tout  $G \in \{1, 2, 3, 4\}$ . En sommant l'équation (2.5.8) sur  $x_2 \in I_2^G$ , nous obtenons pour tout  $x_1 \in I_1^G$  :

$$\nu_{n+1}^{G,1}(x_1) C_{n+1}^{G,2} = \sum_{x_2 \in I_2^G} \sum_{H=1}^4 \sum_{(y_1, y_2) \in \mathcal{M}} B((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \nu_n^{H,1}(y_1) \nu_n^{H,2}(y_2) \quad (2.5.9)$$

Soit  $f_n^{G,1}(x_1) = \nu_n^{G,1} C_n^{G,2}$  et  $C_n^G = C_n^{G,1} \cdot C_n^{G,2}$ . L'équation (2.5.9) peut s'écrire :

$$f_{n+1}^{G,1}(x_1) = \sum_{x_2 \in I_2^G} \sum_{H=1}^4 \sum_{(y_1, y_2) \in \mathcal{M}} B((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \frac{f_n^{H,1}(x_1) f_n^{H,2}(x_2)}{C_n^G} \quad (2.5.10)$$

En sommant l'équation (2.5.6) sur  $x_1 \in I_1^G$ , nous obtenons une équation analogue pour  $f_{n+1}^{G,2}$ . Par définition de

la fonction  $f_n^{G,1}$ , nous avons :

$$C_n^G = \sum_{x_1 \in I_1^G} f_n^{G,1}(x_1) \quad (2.5.11)$$

Les fonctions  $f_n^{G,1}$ ,  $f_n^{G,2}$  et  $C_n^G$  peuvent maintenant être calculées itérativement en utilisant les équations (2.5.10) et (2.5.11). Ces fonctions permettent de construire la suite de fonctions  $(\tilde{u}_n(x_1, x_2))_{(n, x_1, x_2) \in \mathbb{N} \times \mathcal{M}}$ . L'intérêt majeur de cette méthode est que l'approximation est construite à partir de fonctions d'une seule variable. Nous avons commencé par expliquer cette méthode dans un cadre simple avec  $d = 2$ , mais cette caractéristique reste vraie pour des dimensions supérieures à 2. Dans cet exemple, nous avons découpé l'espace dans lequel évolue la variable physique du PDMP en quatre parties. Il est possible de découper cet espace en plus de parties, cela aura pour effet d'améliorer la précision de l'approximation et, en contre partie, cela augmentera l'espace mémoire nécessaire au schéma et le temps de calcul.

Dans le cadre général, le principe de la méthode  $A^2$  reste identique. Soit un PDMP d'espace d'état  $E$  et dont la variable physique est un vecteur de dimension  $d$ . L'objectif est d'approcher la fonction  $u_n(x, i)$  de dimension  $d$  par un produit de  $d$  fonctions de dimension un. Pour commencer, nous introduisons la notion de niveau de la méthode  $A^2$ .

**Définition 34.** Pour  $k \in \{1, \dots, d\}$ , soit  $e_k \in \mathbb{N}^*$  le niveau associé à la variable physique  $X_k$  évoluant dans l'intervalle  $I_k$ . La méthode  $A^2$  consiste à découper l'intervalle  $I_k$  en  $e_k$  intervalles de même longueur  $I_k^{j_k}$  avec  $j_k \in \{1, \dots, e_k\}$ . Ainsi l'espace des variables physiques est découpé en pavés de la forme  $G = \prod_{k=1}^d I_k^{j_k}$ . Le nouveau découpage est noté  $\mathcal{S}$ .

**Remarque 35.** Le pas de discrétisation de ce nouveau découpage est un multiple du pas de discrétisation utilisé pour construire  $\mathcal{M}$ .

**Remarque 36.** Dans le cadre simplifié, nous avons  $e_1 = e_2 = 2$  et  $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Pour chaque  $i$  dans  $E$ ,  $u_0(x, i)$  est approximé par une fonction  $\tilde{u}_0(x, i)$  s'écrivant comme le produit de  $d$  fonctions dont le support est un intervalle. Ces fonctions sont définies de la façon suivante : pour tout  $i \in E$  et pour tout  $k \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$\nu_0^{G,k}(x_k, i) = \begin{cases} \sum_{(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_d) \in I_1^{j_1} \times \dots \times I_{k-1}^{j_{k-1}} \times I_{k+1}^{j_{k+1}} \times \dots \times I_d^{j_d}} u_0(x, i) & \text{si } x_k \in I_k^G \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Ainsi,  $\tilde{u}_0(x, i)$  est défini comme suit :

$$\tilde{u}_0(x, i) = \prod_{k=1}^d \nu_0^{G,k}(x_k, i) \quad (2.5.13)$$

Pour tout  $x \in \mathcal{M}$ , nous avons aussi :

$$\tilde{u}_0(x, i) = \sum_{G \in \mathcal{S}} \prod_{k=1}^d \nu_0^{G,k}(x_k, i) \quad (2.5.14)$$

Nous supposons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tilde{u}_n(x, i)$  s'écrit comme  $\tilde{u}_0(x, i)$  de la façon suivante :

$$\tilde{u}_n(x, i) = \sum_{G \in \mathcal{S}} \prod_{k=1}^d \nu_n^{G,k}(x_k, i) \quad (2.5.15)$$

Ces équations sont injectées dans le schéma (2.3.7) permettant de construire la suite  $(\tilde{u}_n(x, i))_{\mathbb{N} \times \mathcal{M} \times E}$  de la même façon que dans le cadre simplifié.

Le niveau associé à chaque variable physique influe directement sur l'erreur commise par cette approximation. Plus ces nombres sont petits plus l'erreur commise par l'approximation est importante. Dans le prochain paragraphe, nous évaluons l'influence du niveau sur l'erreur.



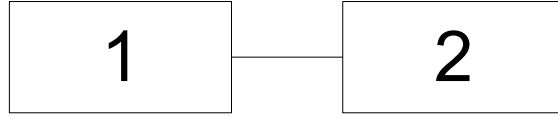


FIGURE 2.6 – Système série de 2 composants

### 2.5.3.3 Application de la méthode

#### Cas d'un système série de deux composants soumis à une maintenance opportuniste

Soit un système ayant deux composants en série soumis à une stratégie de maintenance de type opportuniste. La défaillance d'un composant entraîne une action de maintenance ; le composant défaillant est remplacé par un neuf et l'autre composant est aussi remplacé s'il est en marche depuis une durée supérieure à  $T_1$  pour le composant 1 et  $T_2$  pour le composant 2. Les maintenances sont supposées être instantanées. Modélisons ce système par un PDMP et quantifions-le à l'aide du schéma de volumes finis. Les deux composants vieillissent, nous devons donc garder en mémoire leur âge : soit  $X_1$  l'âge du composant 1 et  $X_2$  l'âge du composant 2. L'espace des variables physiques est donc de dimension 2. Comme les temps de réparation sont instantanés, le système se trouve en permanence dans un état de marche, ainsi l'espace d'état du PDMP est réduit à un seul élément. A la date  $t = 0$ , le système est neuf. Le système est modélisé sur un horizon de vingt ans, ainsi l'espace des variables physiques est  $[0; 20]^2$ . Les taux de saut du PDMP correspondent aux taux de panne des composants, notons-les  $a_1$  pour le composant 1 et  $a_2$  pour le composant 2. Ce PDMP est quantifiable avec le schéma de volumes finis sans utiliser la méthode  $A^2$ , qualifié par la suite de schéma complet, ainsi nous allons pouvoir évaluer l'erreur causée par la méthode  $A^2$ . Soit  $\delta t$  le pas de discrétisation du temps et  $h$  le pas de discrétisation de l'espace des variables physiques utilisés dans le schéma. L'espace des variables physiques est donc discrétisé en carrés.

Le schéma complet est le suivant :

$$u_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = x_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.5.16)$$

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x_1, x_2) = & \left( 1 - \delta t \left( \frac{2}{h} + a_1(x_1) + a_2(x_2) \right) \right) u_n(x_1, x_2) \\ & + \frac{\delta t}{h} (1_{x_1 \geq 1} u_n(x_1 - 1, x_2) + 1_{x_2 \geq 1} u_n(x_1, x_2 - 1)) \\ & + \delta t 1_{x_1=0} \sum_{y_1} a_1(y_1) \left( 1_{x_2 < T_2} u_n(y_1, x_2) + 1_{x_2=0} \sum_{y_2 \geq T_2} u_n(y_1, y_2) \right) \\ & + \delta t 1_{x_2=0} \sum_{y_2} a_2(y_2) \left( 1_{x_1 < T_1} u_n(x_1, y_2) + 1_{x_1=0} \sum_{y_1 \geq T_1} u_n(y_1, y_2) \right) \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Appliquons la méthode  $A^2$  à ce schéma. Le schéma approximé est écrit dans le cas où le niveau associé à la variable  $X_1$ , et celui associé à  $X_2$  sont égaux à 2 ( $e_1 = e_2 = 2$ ). Ainsi l'espace  $[0, 20]^2$  est divisé en quatre cases  $G : [0, 10]^2, [10, 20] \times [0, 10[, [0, 10[ \times [10, 20], [10, 20] \times [10, 20]$  et  $[10, 20]^2$  notées respectivement 1, 2, 3 et 4 ( $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4\}$ ). Écrivons les équations associées au schéma approximé.

A l'aide de l'équation (2.5.16), nous pouvons initialiser le schéma approximé par :

$$v_0^{1,G}(x_1) = \begin{cases} 1 & \text{si } G = 1 \text{ et } x_1 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v_0^{2,G}(x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } G = 1 \text{ et } x_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit  $\tilde{u}_n$  une approximation de  $u_n$ .  $\tilde{u}_0$  est défini de la façon suivante :

$$\tilde{u}_0(x_1, x_2) = v_0^{1,G}(x_1) v_0^{2,G}(x_2)$$

Cette équation est injectée dans le schéma (2.5.17). En sommant successivement par rapport à  $x_1$  et  $x_2$  sur les différentes cases  $G$ , nous obtenons les équations détaillées dans ce qui suit.

On pose pour tout  $G \in \{1, 2, 3, 4\}$ ,

$$C_n^{1,G} = \sum_{y_1} v_n^{1,G}(y_1)$$

$$C_n^{2,G} = \sum_{y_2} v_n^{2,G}(y_2)$$

En sommant sur  $x_2$ , nous obtenons pour la première case :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{1,1}(x_1) C_{n+1}^{2,1} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_1(x_1) + \sum_{y_2} a_2(y_2) \frac{v_n^{2,1}(y_2)}{C_n^{2,1}} \right) \right) v_n^{1,1}(x_1) C_n^{2,1} \\ &+ \frac{\delta t}{h} 1_{x_1 \geq 1} v_n^{1,1}(x_1 - 1) C_n^{2,1} - \frac{\delta t}{h} v_n^{1,1}(x_1) v_n^{2,1}(10^-) \\ &+ \delta t 1_{x_1=0} \sum_{y_1} a_1(y_1) \left( \sum_{G \in \{1,2\}} v_n^{1,G}(y_1) C_n^{2,G} + \sum_{y_2 \geq T_2} \sum_{G \in \{3,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2) \right) \\ &+ \delta t \sum_{y_2} a_2(y_2) \left( 1_{x_1 < T_1} \sum_{G \in \{1,3\}} v_n^{1,G}(x_1) v_n^{2,G}(y_2) + 1_{x_1=0} \sum_{y_1 \geq T_1} \sum_{G=1}^4 v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2) \right) \end{aligned}$$

Le calcul est le même pour trouver  $v_{n+1}^{2,1}(x_2) C_{n+1}^{1,1}$ . Sommons sur  $x_1$  l'équation précédente :

$$\begin{aligned} C_{n+1}^{1,1} C_{n+1}^{2,1} &= C_n^{1,1} C_n^{2,1} - \frac{\delta t}{h} (v_n^{1,1}(10^-) C_n^{2,1} + v_n^{2,1}(10^-) C_n^{1,1}) \\ &+ \delta t \sum_{y_1} a_1(y_1) \left( v_n^{1,2}(y_1) C_n^{2,2} + \sum_{y_2 \geq T_2} \sum_{G \in \{3,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2) \right) \\ &+ \delta t \sum_{y_2} a_2(y_2) \left( v_n^{2,3}(y_2) C_n^{1,3} + \sum_{y_1 \geq T_1} \sum_{G \in \{2,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2) \right) \end{aligned}$$

Pour la case 2 :

$$\begin{aligned} v_{n+1}^{1,2}(x_1) C_{n+1}^{2,2} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_1(x_1) + \sum_{y_2} a_2(y_2) \frac{v_n^{2,2}(y_2)}{C_n^{2,2}} \right) \right) v_n^{1,2}(x_1) C_n^{2,2} \\ &+ \frac{\delta t}{h} 1_{x_1 \geq 1} v_n^{1,2}(x_1 - 1) C_n^{2,2} + 1_{x_1=10} \frac{\delta t}{h} v_n^{1,1}(10^-) C_n^{2,1} - \frac{\delta t}{h} v_n^{1,2}(x_1) v_n^{2,2}(10^-) \\ &+ \delta t \sum_{y_2} a_2(y_2) 1_{x_1 < T_1} \sum_{G \in \{2,4\}} v_n^{1,G}(x_1) v_n^{2,G}(y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^{2,2}(x_2) C_{n+1}^{1,2} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_2(x_2) + \sum_{y_1} a_1(y_1) \frac{v_n^{1,2}(y_1)}{C_n^{1,2}} \right) \right) v_n^{2,2}(x_2) C_n^{1,2} \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} 1_{x_2 \geq 1} v_n^{2,2}(x_2 - 1) C_n^{1,2} + \frac{\delta t}{h} v_n^{2,1}(x_2) v_n^{1,1}(10^-) \\
&\quad + \delta t 1_{x_2=0} \sum_{y_1 \leq T_1, y_2} a_2(y_2) \sum_{G \in \{2,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^{1,2} C_{n+1}^{2,2} &= C_n^{1,2} C_n^{2,2} - \delta t C_n^{2,2} \sum_{y_1} a_1(x_1) v_n^{1,2}(x_1) - \delta t C_n^{1,2} \sum_{y_2} a_2(y_2) v_n^{2,2}(y_2) \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} v_n^{1,1}(10^-) C_n^{2,1} - \frac{\delta t}{h} v_n^{2,2}(10^-) C_n^{1,2} \\
&\quad + \delta t \sum_{y_1 \leq T_1, y_2} a_2(y_2) \sum_{G \in \{2,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2)
\end{aligned}$$

Pour la case 3 :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^{1,3}(x_1) C_{n+1}^{2,3} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_1(x_1) + \sum_{y_2} a_2(y_2) \frac{v_n^{2,3}(y_2)}{C_n^{2,3}} \right) \right) v_n^{1,3}(x_1) C_n^{2,3} \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} 1_{x_1 \geq 1} v_n^{1,3}(x_1 - 1) C_n^{2,3} + \frac{\delta t}{h} v_n^{1,1}(x_1) v_n^{2,1}(10^-) \\
&\quad + \delta t 1_{x_1=0} \sum_{y_1, y_2 \leq T_2} a_1(y_1) \sum_{G \in \{3,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^{2,3}(x_2) C_{n+1}^{1,3} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_2(x_2) + \sum_{y_1} a_1(y_1) \frac{v_n^{1,3}(y_1)}{C_n^{1,3}} \right) \right) v_n^{2,3}(x_2) C_n^{1,3} \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} 1_{x_2 \geq 1} v_n^{2,3}(x_2 - 1) C_n^{1,3} + 1_{x_2=10} \frac{\delta t}{h} v_n^{2,1}(10^-) C_n^{1,1} - \frac{\delta t}{h} v_n^{1,3}(10^-) v_n^{2,3}(x_2) \\
&\quad + \delta t \sum_{y_1} a_1(y_1) 1_{x_2 < T_2} \sum_{G \in \{3,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(x_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{n+1}^{1,3} C_{n+1}^{2,3} &= C_n^{1,3} C_n^{2,3} - \delta t C_n^{2,3} \sum_{y_1} a_1(x_1) v_n^{1,3}(x_1) - \delta t C_n^{1,3} \sum_{y_2} a_2(y_2) v_n^{2,3}(y_2) \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} v_n^{2,1}(10^-) C_n^{1,1} - \frac{\delta t}{h} v_n^{1,3}(10^-) C_n^{2,3} \\
&\quad + \delta t \sum_{y_1, y_2 \leq T_2} a_2(y_2) \sum_{G \in \{3,4\}} v_n^{1,G}(y_1) v_n^{2,G}(y_2)
\end{aligned}$$

Pour la case 4 :

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^{1,4}(x_1) C_{n+1}^{2,4} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_1(x_1) + \sum_{y_2} a_2(y_2) \frac{v_n^{2,4}(y_2)}{C_n^{2,4}} \right) \right) v_n^{1,4}(x_1) C_n^{2,4} \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} 1_{x_1 \geq 1} v_n^{1,4}(x_1 - 1) C_n^{2,4} + \frac{\delta t}{h} v_n^{1,2}(x_1) v_n^{2,2}(10^-) + 1_{x_1=10} \frac{\delta t}{h} v_n^{1,3}(10^-) C_n^{2,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{n+1}^{2,4}(x_2) C_{n+1}^{1,4} &= \left( 1 - \delta t \left( \frac{1}{h} + a_2(x_2) + \sum_{y_1} a_1(y_1) \frac{v_n^{1,4}(y_1)}{C_n^{1,4}} \right) \right) v_n^{2,4}(x_2) C_n^{1,4} \\
&\quad + \frac{\delta t}{h} 1_{x_2 \geq 1} v_n^{2,4}(x_2 - 1) C_n^{1,4} + 1_{x_2=10} \frac{\delta t}{h} v_n^{2,2}(10^-) C_n^{1,2} + \frac{\delta t}{h} v_n^{1,3}(10^-) v_n^{2,3}(x_2)
\end{aligned}$$

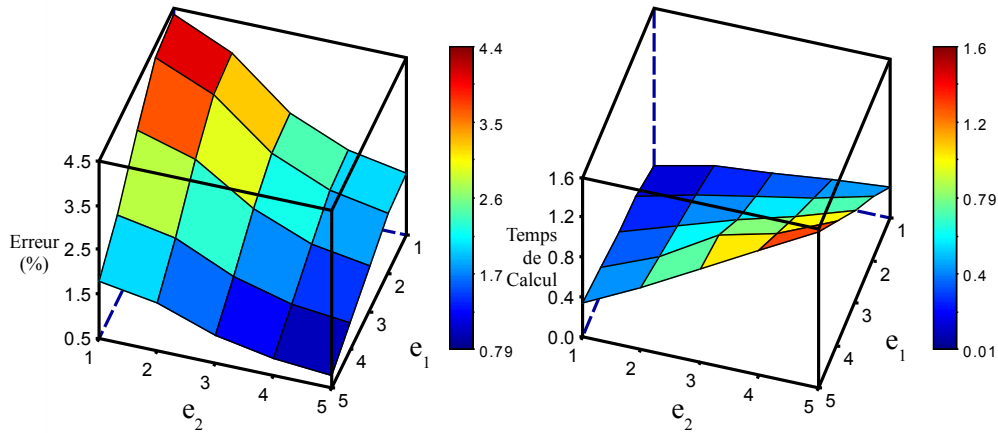


FIGURE 2.7 – Etude de la méthode  $A^2$  appliquée à un système de deux composants en série soumis à une stratégie de maintenance opportuniste. Erreur relative et temps de calcul en fonction du niveau du composant 1 ( $e_1$ ) et du composant 2 ( $e_2$ ). Le temps de calcul associé à un schéma complet est de 0.17 temps CPU. (Loi du composant 1 : Weibull(3,8) - âge limite du composant 1 : 4 - loi du composant 2 : Weibull(1.5,10) - âge limite du composant 2 : 6).

$$\begin{aligned}
 C_{n+1}^{1,4} C_{n+1}^{2,4} &= C_n^{1,4} C_n^{2,4} - \delta t C_n^{2,4} \sum_{y_1} a_1(x_1) v_n^{1,4}(x_1) - \delta t C_n^{1,4} \sum_{y_2} a_2(y_2) v_n^{2,4}(y_2) \\
 &\quad + \frac{\delta t}{h} v_n^{2,2}(10^-) C_n^{1,2} + \frac{\delta t}{h} v_n^{1,3}(10^-) C_n^{2,3}
 \end{aligned}$$

Nous avons implémenté un algorithme qui prend en entrée le niveau de l'approximation pour chaque composant, et qui donne en sortie le nombre moyen de pannes du système sur vingt ans. Cet algorithme va nous permettre d'effectuer des tests et ainsi d'évaluer l'influence des paramètres des lois de durée de vie des composants et du niveau de l'approximation sur la précision des résultats.

Le premier test consiste à évaluer l'impact du niveau de l'approximation sur la qualité des résultats. Les deux composants suivent des lois de Weibull de coefficients de forme 3 pour le premier et 1.5 pour le deuxième et de coefficients d'échelle 8 pour le premier et 10 pour le deuxième. Ils sont soumis à une stratégie de maintenance opportuniste telle que  $T_1 = 4$  et  $T_2 = 6$ . Le nombre moyen de pannes de ce système est estimé sur une période de vingt ans avec l'approximation et sans l'approximation. A partir de ces quantités, nous déduisons l'erreur relative causée par l'approximation. Pour l'algorithme de volumes finis, nous utilisons un pas de discrétisation de l'espace des variables physiques  $h$  égale à  $1/3$ . Soit  $N_{ok}$  le nombre moyen de pannes du système estimé sans approximation et  $N_{ap}$  le nombre moyen de pannes estimé avec l'approximation, notons  $Er$  l'erreur relative, elle se calcule de la façon suivante :

$$Er = 100 \cdot \left| \frac{N_{ap} - N_{ok}}{N_{ok}} \right| \quad (2.5.18)$$

Les résultats sont visibles dans le graphique de gauche de la FIGURE 2.7 et les temps de calcul sont visibles dans le graphique de droite. La première remarque que l'on peut faire en observant ces graphiques est que le niveau a une forte influence sur la précision des résultats et le temps de calcul. Afin d'obtenir des résultats précis, un haut niveau doit être utilisé. Cependant, cela entraîne une hausse du temps de calcul.  $e_1 = 5$  et  $e_2 = 5$  correspond au plus haut niveau testé dans cet exemple. Avec ce niveau, l'erreur relative est égale 0.8% avec un temps de calcul égale à 1.6 temps CPU. Dans cet exemple, l'erreur et les temps de calcul sont faibles ;

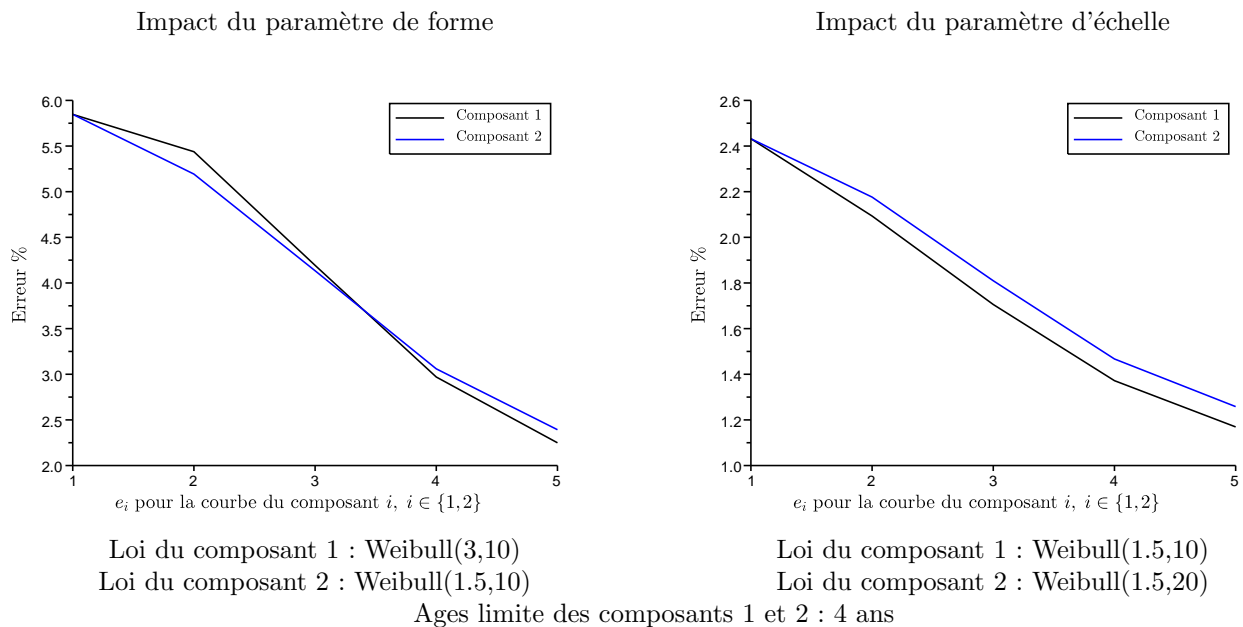


FIGURE 2.8 – Etude de l’influence du coefficient de forme (courbe de gauche) et du coefficient d’échelle (courbe de droite) de la loi de Weibull sur le choix du niveau appliquée à un système de deux composants en série soumis à une stratégie de maintenance opportuniste. Erreur relative en fonction de  $e_1$  avec  $e_2 = 1$  pour la courbe noire et  $e_2$  avec  $e_1 = 1$  pour la courbe bleue.

l’erreur reste inférieure à 4.37% dans le cas où  $e_1 = 1$  et  $e_2 = 1$  et le temps de calcul est inférieur à 1.6 temps CPU.

De l’observation de ces graphiques, on remarque que le fait de fixer  $e_1$  (respectivement  $e_2$ ) égale à 1 et d’augmenter  $e_2$  (respectivement  $e_1$ ), entraîne une nette amélioration de la précision alors que le temps de calcul n’augmente que très légèrement. Par exemple, quand  $e_1$  passe de 1 à 5 avec  $e_2$  est égale à 1, l’erreur passe de 4.37% à 1.9% alors que le temps de calcul passe d’une valeur inférieure à 0.01 à 0.2 temps CPU. Il est donc intéressant de fixer le niveau de l’un des deux composants à un et d’augmenter l’autre. On peut se demander lequel il faut fixer et lequel il faut augmenter. Cela va dépendre des coefficients des lois de Weibull des composants. Ainsi un deuxième test est effectué dans le but d’évaluer l’impact des coefficients de forme et d’échelle dans ce choix.

Ce deuxième test consiste à estimer le nombre moyen de pannes d’un système de même configuration que le précédent mais dont les deux composants suivent des lois de Weibull de même paramètre d’échelle et de paramètre de forme différents. Les âges limites de remplacement des deux composants pour la maintenance opportuniste sont choisis identiques. Dans un premier temps, nous fixons  $e_1$  et testons plusieurs valeurs pour  $e_2$  puis nous effectuons l’inverse. Le même test est réalisé pour deux composants avec des paramètres de forme identiques et des paramètres d’échelle différents. Les résultats sont visibles dans la FIGURE 2.8. Le graphique de gauche évalue l’influence du paramètre de forme et le graphique de droite évalue l’impact du paramètre d’échelle dans le choix du niveau. Nous pouvons constater à la vue du graphique de gauche que l’erreur est du même ordre de grandeur, que l’on augmente le niveau du composant 1 ou du composant 2. Il n’est donc pas possible d’émettre une hypothèse sur l’influence du paramètre de forme dans ce cas. A la vue du graphique de droite, on observe que les résultats sont légèrement plus précis dans le cas où le niveau du composant 1 est augmenté. On peut supposer qu’il est plus efficace d’augmenter le niveau du composant dont le paramètre d’échelle est le plus petit.

Pour mieux évaluer l’influence des coefficients des lois de Weibull des composants sur l’erreur engendrée par la méthode  $A^2$ , supposons que les deux composants ont des durées de vie qui suivent les mêmes lois c’est-à-dire  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$  et  $\eta_1 = \eta_2 = \eta$  et évaluons l’erreur pour différentes valeurs de  $\beta$  et  $\eta$ . Le niveau des deux composants sont égaux c’est-à-dire  $e_1 = e_2 = e$  avec  $e$  variant de 1 à 4. Les résultats sont visibles dans les graphiques de la FIGURE 2.9. La première remarque que l’on peut formuler aux vues de ces graphiques est que l’erreur peut, dans certains cas, être importante. Elle atteint 20% dans le graphique (1). Quel que soit le niveau, il existe un ensemble de valeurs que peuvent prendre  $\beta$  et  $\eta$  auquel est associé une erreur importante. Dans le graphique (1),  $e$  prend la valeur minimale 1, c’est-à-dire que la méthode  $A^2$  est la moins précise possible. Dans ce cas, pour  $\beta$  compris

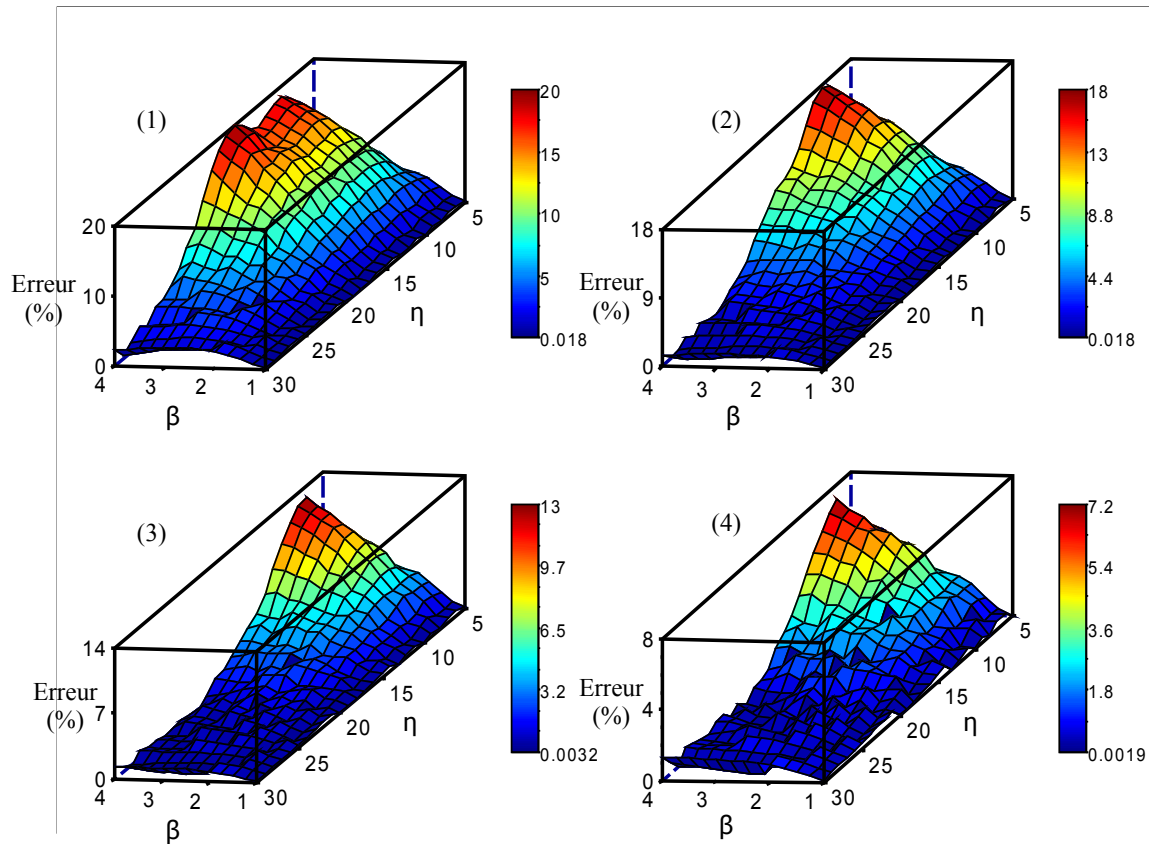


FIGURE 2.9 – Erreur relative pour un système série de 2 composants identiques de même loi de Weibull( $\beta, \eta$ ) soumis à une stratégie de maintenance opportuniste en fonction de  $\beta$  et de  $\eta$  avec  $e = e_1 = e_2$ ,  $e = 1$  pour le graphe (1),  $e = 2$  pour le graphe (2),  $e = 3$  pour le graphe (3) et  $e = 4$  pour le graphe (4). L'âge limite pour la maintenance opportuniste est fixé à 4 ans pour les deux composants.

entre 2 et 4 et  $\eta$  plus petit que 25, l'erreur est supérieure à 5%. De façon identique, l'erreur est moins importante dans les autres graphiques quand  $\eta$  est supérieur à 20 ou quand  $\beta$  est inférieur à 2. Dans cet exemple, le nombre moyen de pannes du système a été estimé sur une période de vingt ans. Nous pouvons donc émettre l'hypothèse que si le paramètre  $\eta$  est plus grand que la durée pendant laquelle le système est modélisé ou si le paramètre  $\beta$  est inférieur à 2, ce qui revient à dire que les composants du système vieillissent peu, alors l'erreur ne sera pas importante. En général, les cas d'application que nous avons étudiés au cours de cette thèse se situent dans ce cadre.

Un autre paramètre peut influencer la qualité des résultats issus de la méthode  $A^2$  : le nombre de composants du système. Afin d'évaluer l'impact de ce paramètre, un système série de quatre composants soumis à une stratégie de maintenance de type opportuniste est étudié.

#### Cas d'un système série de quatre composants soumis à une maintenance opportuniste

Comme dans le précédent paragraphe, nous étudions l'erreur relative engendrée par la méthode  $A^2$  sur l'évaluation du nombre moyen de pannes du système sur 20 ans. Nous utilisons un pas de discrétisation  $h$  égal à 1. Pour le premier test, nous évaluons l'influence du niveau sur la qualité des résultats en supposant que les niveaux associés aux quatre composants sont égaux,  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ .

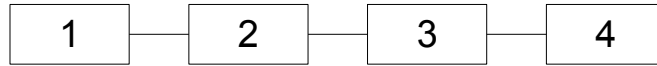


FIGURE 2.10 – Système série de 4 composants

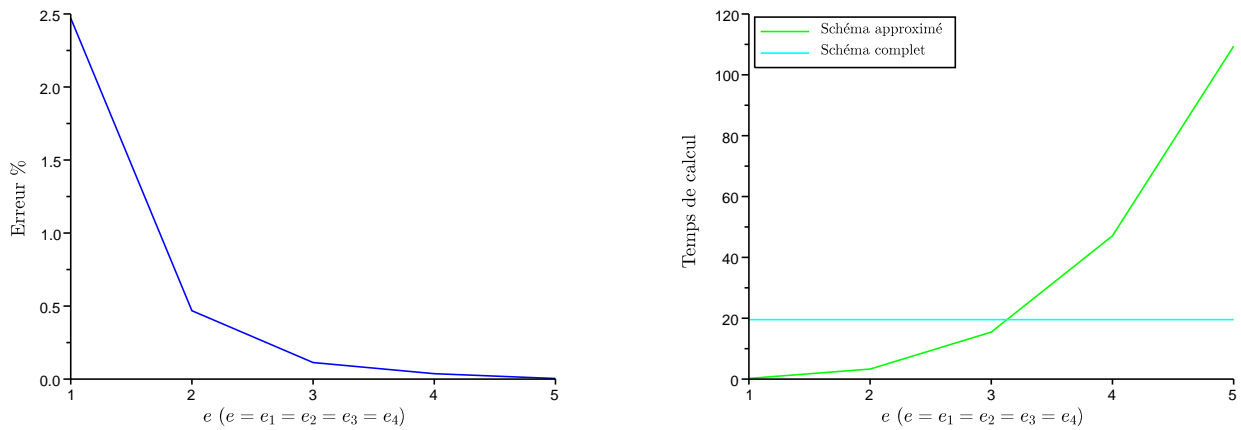


FIGURE 2.11 – Etude de la méthode  $A^2$  appliquée à un système de quatre composants en série soumis à une stratégie de maintenance opportuniste. Erreur relative à gauche et temps de calcul à droite en fonction du niveau noté  $e$ . (loi du composant 1 : Weibull(1.5,30) - loi du composant 2 : Weibull(2,20) - loi du composant 3 : Weibull(2,20) - loi du composant 4 : Weibull(1.7,15) - âge limite du composant 1 : 10 - âge limite du composant 2 : 12 - âge limite du composant 3 : 15 - âge limite du composant 4 : 8).

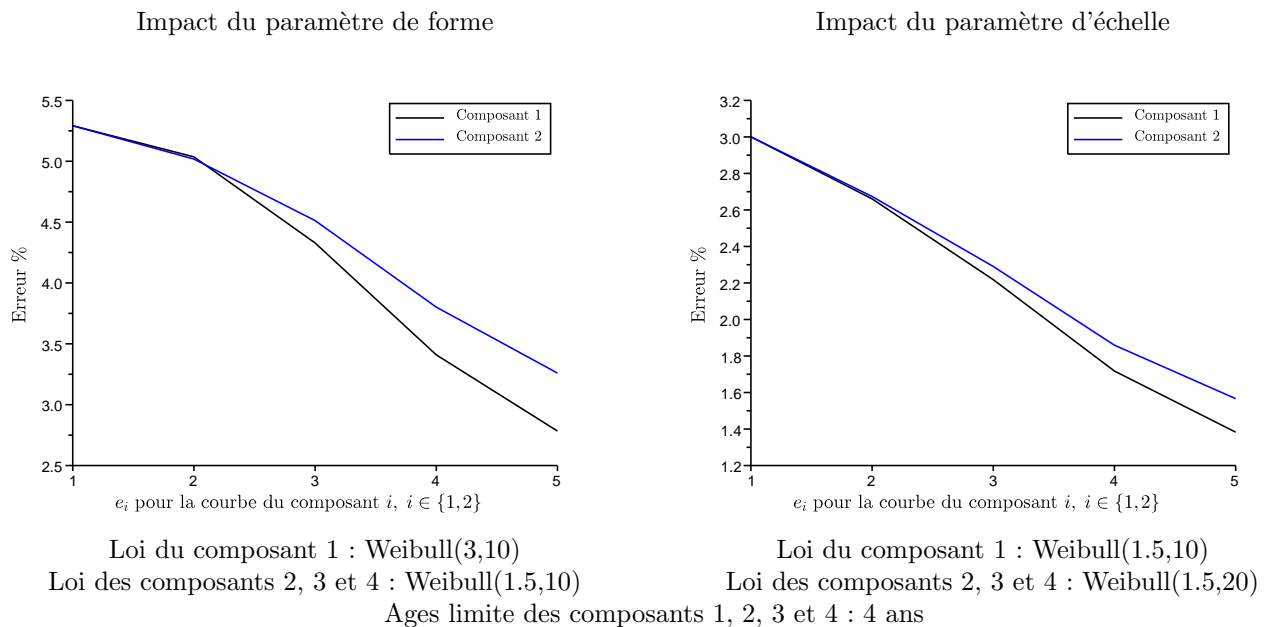


FIGURE 2.12 – Etude de l'influence du coefficient de forme (courbe de gauche) et du coefficient d'échelle (courbe de droite) de la loi de Weibull sur le choix du niveau appliqué à un système de quatre composants en série soumis à une stratégie de maintenance opportuniste. Erreur relative en fonction de  $e_1$  avec  $e_2 = e_3 = e_4 = 1$  pour la courbe noire et  $e_2$  avec  $e_2 = e_3 = e_4 = 1$  pour la courbe bleue.

Les graphiques de la FIGURE 2.11 permettent d'observer que l'augmentation du niveau permet d'améliorer les résultats, mais en contre partie, entraîne une hausse du temps de calcul. Il est intéressant de remarquer que le temps de calcul associé à un niveau plus élevé que 3 est supérieur au temps de calcul engendré par le schéma complet. Dans le cas d'un système pouvant être quantifié par le schéma complet, l'intérêt de la méthode  $A^2$  réside dans le fait qu'elle peut diminuer les temps de calcul. Ainsi, dans cet exemple, il n'est pas intéressant d'utiliser un niveau supérieur à 3. En revanche, le schéma complet n'est pas toujours applicable. Par exemple, l'utilisation du schéma complet pour quantifier des systèmes de plus de quatre composants nécessite une place mémoire conséquente et donc un ordinateur de calcul avec de très grandes capacités. La méthode  $A^2$  permet de quantifier des systèmes de plus de quatre composants même si l'on ne dispose pas d'un ordinateur de calcul suffisamment puissant pour utiliser le schéma complet. Dans ce cas, le gain apporté par la méthode  $A^2$  se situe au niveau de la quantité de place mémoire, celle-ci étant inférieure à celle associée au schéma complet, permettant ainsi de ne pas être limité par l'ordinateur.

Lors du test précédent sur un système série de deux composants, nous avons remarqué qu'il était pratiquement équivalent d'augmenter le niveau du composant 1 que celui du composant 2 et ce, même s'ils n'ont pas la même loi de durée de vie. On peut se demander si c'est toujours le cas pour un système de quatre composants. Nous réalisons le test suivant : dans un premier temps les quatre composants ont le même coefficient d'échelle fixé à 10, le premier composant a un paramètre de forme égal à 3 et les trois autres ont un paramètre de forme égal à 1.5. Le test consiste à fixer  $e_2 = e_3 = e_4 = 1$  et calculer l'erreur en fonction de différentes valeurs de  $e_1$  puis à fixer  $e_1 = e_3 = e_4 = 1$  et calculer l'erreur en fonction de différentes valeurs de  $e_2$ . Dans un deuxième temps, le même test est réalisé pour le paramètre d'échelle : le paramètre d'échelle du premier composant est égal à 10 et le paramètre d'échelle des autres composants est égale 20. Le paramètre de forme des quatre composants est 1.5. Les résultats sont visibles dans la FIGURE 2.12.

Au vu des résultats du graphique de gauche la FIGURE 2.12, on remarque qu'il est plus efficace d'augmenter le niveau associé au composant 1 s'il est au moins égal à 3. On peut donc supposer qu'il est plus intéressant d'augmenter le niveau du composant ayant le paramètre de forme le plus élevé (si les paramètres d'échelle des quatre composants sont égaux). L'interprétation des résultats issus du graphique de droite de la FIGURE 2.12 est la même que pour le graphique de gauche. Une hypothèse que l'on peut tirer de ces deux tests est que si l'on souhaite n'augmenter que le niveau d'un des quatre composants, il est plus efficace d'augmenter celui associé au composant dont le paramètre de forme est le plus élevé si les paramètres d'échelle des quatre composants sont



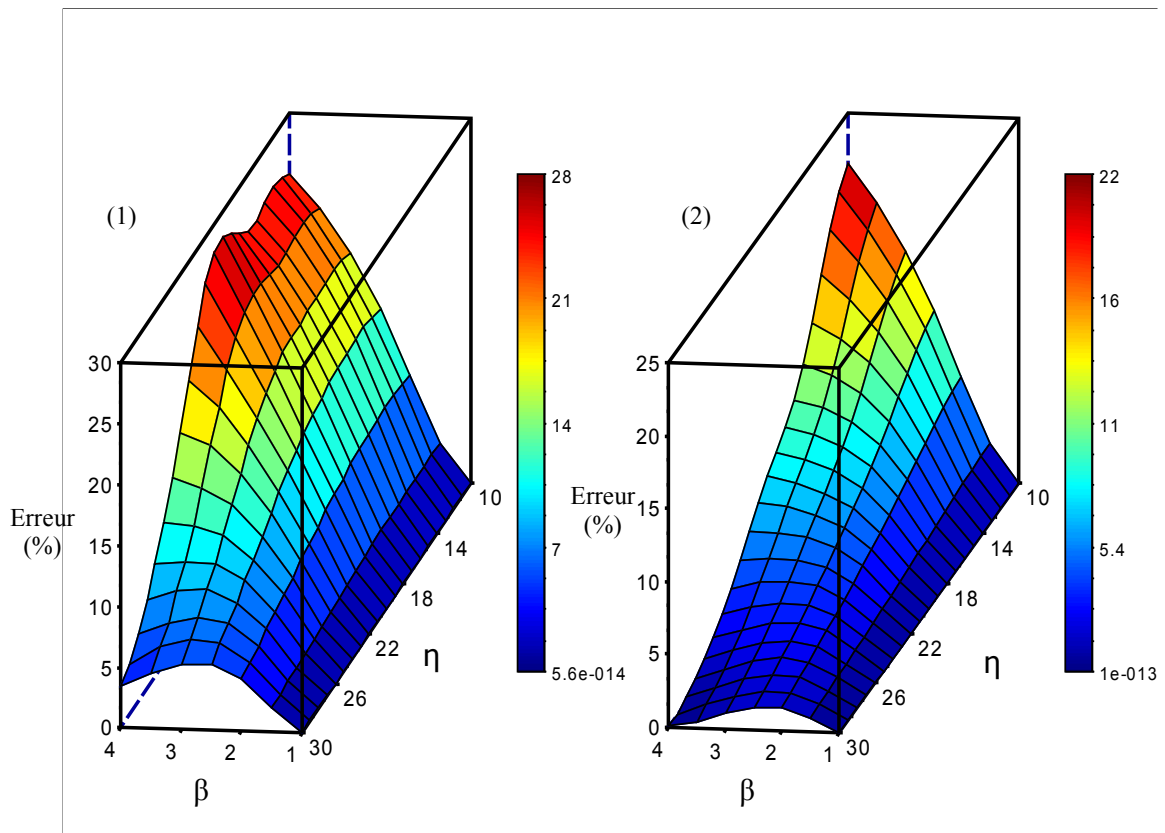


FIGURE 2.13 – Erreur relative pour un système série de 4 composants identiques de même loi de Weibull( $\beta, \eta$ ) en fonction de  $\beta$  et de  $\eta$  avec  $e = 1$  pour le graphe (1) et  $e = 2$  pour le graphe (2).

égaux, ou celui dont le paramètre d'échelle est le plus faible si les paramètres de forme des quatre composants sont égaux.

Comme pour le système avec deux composants en série du paragraphe précédent, évaluons l'impact des coefficients de forme et d'échelle des lois de Weibull du système sur l'erreur engendrée par la méthode  $A^2$ . Pour cela, les composants sont supposés identiques, ainsi les coefficients des lois de Weibull sont les mêmes pour chaque composant. Le système est toujours soumis à une stratégie de maintenance opportuniste et l'âge limite de remplacement des quatre composants est égal à 4 ans. Le niveau est identique pour tous les composants, donc  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ . L'erreur engendrée par la méthode  $A^2$  en fonction des paramètres de forme et d'échelle des lois de Weibull des composants et en fonction du niveau peut être observée dans la FIGURE 2.13.

Alors que dans le graphique (1) de la FIGURE 2.9, l'erreur ne dépassait pas 20%, elle atteint presque 30% dans le graphique (1) de la FIGURE 2.13. Le nombre de composants a donc une forte influence sur la précision des résultats issus de la méthode  $A^2$ . On remarque, comme dans la FIGURE 2.9, que l'erreur est plus importante lorsque le paramètre d'échelle  $\eta$  est plus petit que la durée d'observation (20 ans dans ce cas) et que le paramètre de forme  $\beta$  est grand.

Les tests effectués sur des systèmes en série soumis à une stratégie de maintenance de type opportuniste ont mis en évidence que l'utilisation de la méthode  $A^2$  peut entraîner dans certains cas une erreur importante. Dans nos cas d'application, les paramètres d'échelle des lois de durée de vie des composants seront toujours supérieurs aux

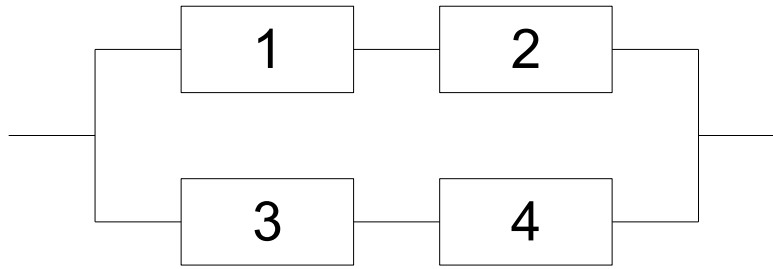
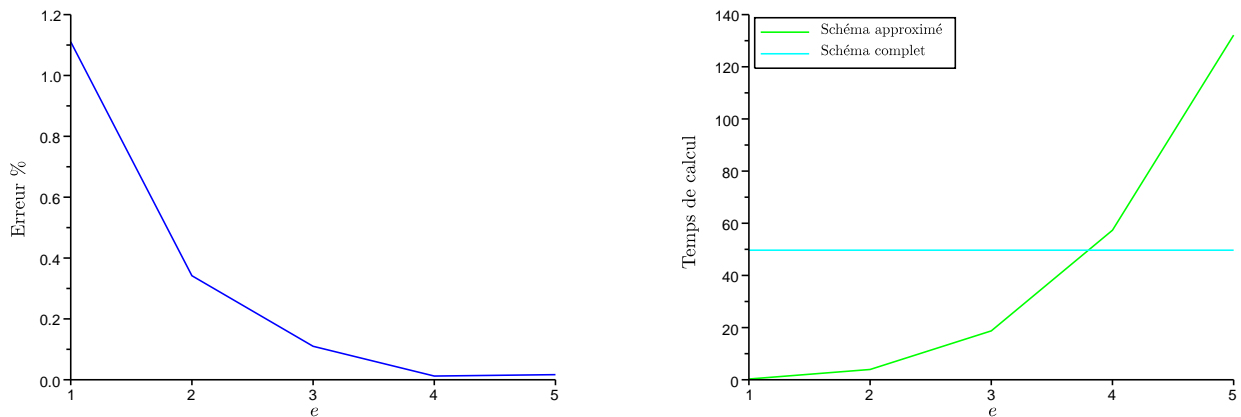


FIGURE 2.14 – Système série-parallèle de 4 composants.

FIGURE 2.15 – Erreur relative en fonction du niveau  $e$  pour un système série-parallèle de 4 composants identiques. (loi des composants 1 et 3 : Weibull(1.5,30) - loi des composants 2 et 4 : Weibull(2,20)).

durées d'observation et, en général, les paramètres de forme seront compris entre 1 et 2. On peut donc penser que cette méthode s'adaptera bien à nos cas d'étude. Effectuons les mêmes tests pour un système série-parallèle soumis à une stratégie de maintenance corrective.

### Cas d'un système série-parallèle de quatre composants

Soit un système série-parallèle de quatre composants. Le système possède deux branches, chacune ayant deux composants. Les deux branches sont supposées identiques. Le système tombe en panne lorsque un composant sur chaque branche est en panne. Dès qu'une panne survient, le système est instantanément réparé et les composants défaillants sont remplacés par des neufs. Lorsqu'un composant d'une branche tombe en panne, le système ne tombe pas en panne, mais le composant en marche sur la même branche s'arrête de fonctionner et ne vieillit plus. Le schéma du système est visible dans la FIGURE 2.14.

Comme dans les précédents paragraphes, commençons par tester la précision de la méthode  $A^2$  sur le système en fonction du niveau. Le niveau de chaque composant est identique ce qui se traduit par  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ . Les résultats sont dans le graphique de la FIGURE 2.15.

La première remarque que l'on peut faire au vu des courbes de la FIGURE 2.15 est que l'erreur engendrée par l'algorithme est faible, elle ne dépasse pas 1.1% dans le cas où  $e$  est égal à 1. De plus, il n'est pas nécessaire que  $e$  dépasse 4 car cela n'apporte plus rien.

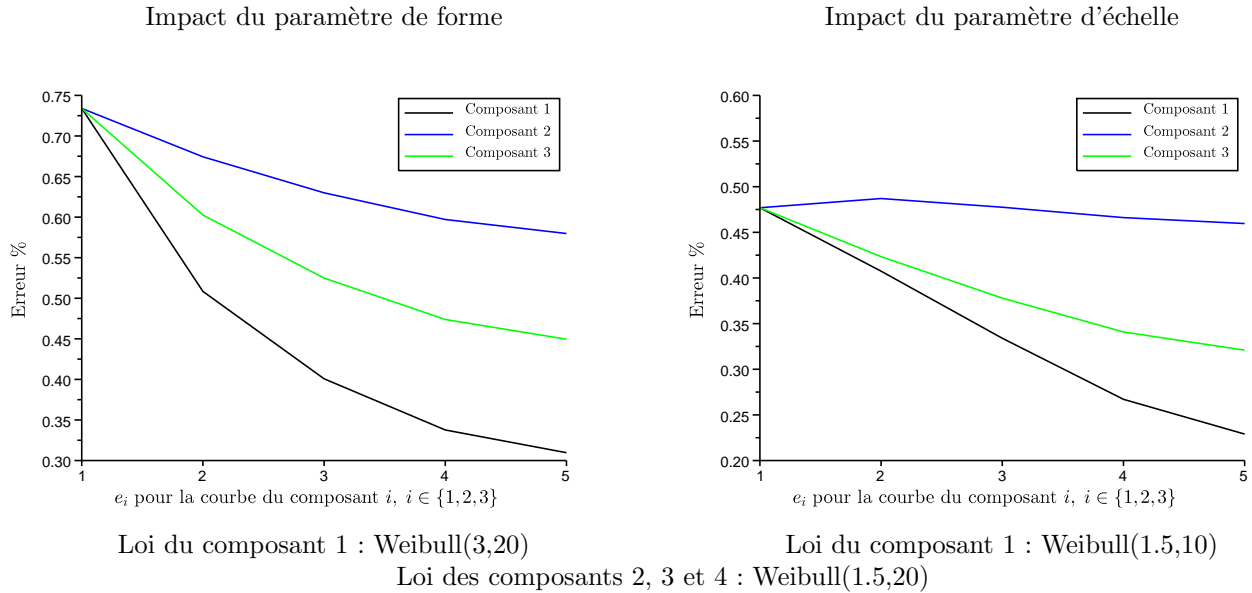


FIGURE 2.16 – Etude de l’influence du coefficient de forme (courbe de gauche) et du coefficient d’échelle (courbe de droite) de la loi de Weibull sur la méthode  $A^2$  appliquée à un système série-parallèle de quatre composants soumis à une stratégie de maintenance corrective. Erreur relative en fonction de  $e_1$  avec  $e_2 = e_3 = e_4 = 1$  pour la courbe noire,  $e_2$  avec  $e_1 = e_3 = e_4 = 1$  pour la courbe bleue et  $e_3$  avec  $e_1 = e_2 = e_4 = 1$  pour la courbe verte.

Comme pour les précédents cas tests, nous cherchons à déterminer le composant pour lequel il est le plus intéressant d’augmenter le niveau si l’on n’en augmente qu’un seul. Pour cela, effectuons les mêmes tests que pour les précédents systèmes et calculons l’erreur lorsque nous augmentons successivement  $e_1$ ,  $e_2$  puis  $e_3$  pour un système dont le composant 1 a un paramètre de forme plus élevé que les autres puis pour un système dont le composant 1 a un paramètre d’échelle plus petit que les autres. Les résultats sont dans la FIGURE 2.16. De la même façon que le système série étudié précédemment, il est plus intéressant d’augmenter le niveau associé au composant ayant le plus grand paramètre de forme (lorsque les paramètres d’échelle de tous les composants sont identiques) ou du composant ayant le paramètre d’échelle le plus petit (lorsque les paramètres de forme de tous les composants sont identiques). Le graphique de droite permet d’observer qu’augmenter le niveau associé au composant 2 ne permet pas d’améliorer la précision.

A la vue des résultats des précédents tests, la méthode  $A^2$  paraît être suffisamment précise avec un niveau égale à 1 ( $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = 1$ ), l’erreur est inférieure à 1%, et il n’est pas nécessaire d’utiliser un niveau plus élevé. Cette précision peut être due aux coefficients des lois de Weibull. Le prochain test permet d’évaluer l’impact de ces coefficients sur l’erreur causée par la méthode  $A^2$ . Les quatre composants du système sont supposés identiques et donc de même loi de durée de vie. Le niveau est identique pour tous les composants  $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ . Les résultats peuvent être observés dans la FIGURE 2.17. Dans le cas où le niveau  $e$  est égale à 1, l’erreur reste inférieure à 6%. Augmenter le niveau à 2 permet de diminuer l’erreur qui dans ce cas est inférieure à 4%. Comme pour les systèmes série précédemment étudiés, il existe un espace dans lequel l’erreur est plus élevée. En effet, celle-ci est plus grande lorsque le paramètre  $\eta$  est compris entre 12 et 18. Cependant l’erreur causée par la méthode  $A^2$  est bien moins importante dans cet exemple que celle observée pour les systèmes série soumis à une stratégie de maintenance opportuniste dans les FIGURES 2.9 et 2.13.

#### 2.5.3.4 Bilan des tests

Dans ce paragraphe, nous avons effectué différents tests dans l’objectif d’évaluer l’influence de l’approximation sur la précision des résultats. D’une manière générale, la précision dépend du niveau de l’approximation. L’augmentation de ce paramètre permet d’améliorer les résultats mais au prix d’un temps de calcul plus important. Il est d’ailleurs intéressant de remarquer que le temps de calcul engendré par l’approximation avec un niveau élevé peut être supérieur à celui engendré par le schéma complet (sans approximation); cela est dû à la complexité de l’algorithme qui augmente rapidement avec le niveau. En revanche, lorsque le niveau est le plus bas possible,

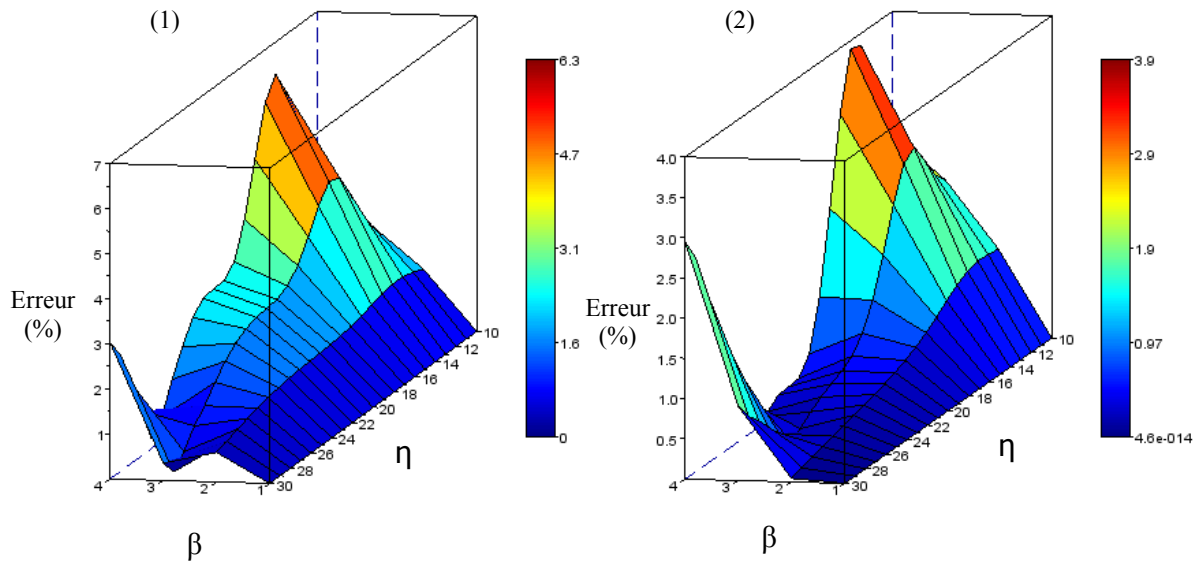


FIGURE 2.17 – Erreur relative pour un système série-parallèle de 4 composants identiques de même loi de Weibull( $\beta, \eta$ ) en fonction de  $\beta$  et de  $\eta$  avec  $e = 1$  pour le graphe 1 et  $e = 2$  pour le graphe 2.

c'est-à-dire égale à un, le temps de calcul est très faible. Un niveau minimum permet non seulement de réaliser des calculs rapidement mais rend l'implémentation du schéma plus facile ce qui au final permet d'économiser du temps de calcul et du temps d'implémentation.

D'autres tests ont révélé l'influence des coefficients des lois de durée de vie sur la précision des résultats. D'une manière générale, l'on remarque que l'approximation est moins précise quand les composants du système modélisé ont des durées de vie faibles par rapport à l'horizon de modélisation. Cependant, dans le cas contraire, l'approximation est efficace même pour le niveau le plus bas. Les systèmes industriels étudiés dans cette thèse se placent dans ce cadre ce qui justifie l'utilisation du niveau minimum.

Par ailleurs, nous avons cherché à évaluer l'influence de l'augmentation du niveau de seulement l'un des composants du système. Il semble qu'il est plus efficace d'augmenter le niveau du composant vivant le moins longtemps.

Un autre paramètre agit sur la précision des résultats : la stratégie de maintenance. Les tests réalisés sur des systèmes soumis à des stratégies de maintenance différentes montrent que l'approximation est moins précise lorsque la stratégie de maintenance est de type opportuniste. Cette stratégie entraîne une dépendance forte entre les âges des composants et l'approximation suppose une certaine forme d'indépendance, ce qui peut être la cause de la perte de précision.

Jusqu'à maintenant, les variables physiques du PDMP représentent l'âge des composants du système modélisé. Dans le prochain paragraphe, nous étudions l'influence d'une autre modélisation du système sur les résultats issus du schéma numérique : les variables physiques représentent la date de mise en service des composants.

## 2.5.4 Changement de modélisation

### 2.5.4.1 Introduction

Le schéma de volumes finis présente un défaut important : il n'autorise pas la masse de probabilité à se déplacer en diagonale entraînant ainsi une propagation erronée. Dans les FIGURES 2.1 et 2.2, on observe que le phénomène de diffusion des masses de probabilité diminue avec le pas de discrétisation illustrant l'erreur causée par le schéma.

Cette erreur étant induite par la prise en compte de l'évolution de l'âge des composants au cours du temps, nous avons cherché d'autres variables n'évoluant pas au cours du temps et qui gardent la même information. L'âge d'un composant s'obtient comme la différence entre la date courante ( $t$ ) et la date de mise en service. Il est donc possible de représenter l'évolution d'un système en ne gardant en mémoire que le temps et ces variables 'instants de mise en service' qui sont constantes entre deux maintenances. En considérant un PDMP non-homogène, voir paragraphe 2.2.6, il n'est pas nécessaire de garder la date courante en mémoire. Ainsi, il est possible de modéliser un système dont les composants vieillissent à l'aide d'un PDMP non-homogène dont les variables physiques n'évoluent pas au cours du temps. Ce changement de modélisation revient à effectuer un changement de variable que nous présentons dans le prochain paragraphe.

La prise en compte de l'évolution déterministe des variables physiques dans le schéma numérique entraîne de nombreux calculs informatiques. Le fait de remplacer l'âge des composants par leur date de mise en service permet d'éviter ces calculs et ainsi de réduire fortement le temps de calcul.

**Exemple 37.** Reprenons l'exemple 13 d'un système de deux composants en parallèle soumis à une maintenance préventive à l'instant  $T$  en considérant non pas l'âge mais la date de mise en service des composants comme variable physique du PDMP. Comme dans l'exemple 21, nous considérons que les maintenances sont instantanées. Pour rappel, la durée de vie de composant 1 (respectivement du composant 2) suit une loi de Weibull(1.5,10) (respectivement une loi de Weibull(2,20)). Soit  $m_1$  (respectivement  $m_2$ ) la date de mise en service du composant 1 (respectivement du composant 2). Ce PDMP est non-homogène, les noyaux de transition dépendent du temps. Les taux de transition entre les états du PDMP à l'instant  $t$  sont :

$$a_t((1,1), (0,1), (m_1, m_2)) = a_t((1,0), (1,1), (m_1, m_2)) = \lambda_1(t - m_1)$$

$$a_t((1,1), (1,0), (m_1, m_2)) = a_t((0,1), (1,1), (m_1, m_2)) = \lambda_2(t - m_2)$$

Lorsque le système est dans l'état  $(1,1)$ , la défaillance de l'un des deux composants n'entraîne pas de maintenance corrective, ainsi le composant défaillant n'est pas remplacé et sa date de mise en service reste inchangée. Dans ce cas, la distribution de la variable physique après un saut de l'état  $(1,1)$  à l'instant  $t$  est une masse de Dirac en  $(m_1, m_2)$ .

$$\mu_{((1,1),(0,1),(m_1,m_2))}^t(dn_1, dn_2) = \mu_{((1,1),(1,0),(m_1,m_2))}^t(dn_1, dn_2) = \delta_{m_1, m_2}(dn_1, dn_2)$$

Une maintenance corrective à l'instant  $t$  entraîne le remplacement des deux composants par des neufs, leur date de mise en service est donc  $t$ , ainsi la distribution de la variable physique est une masse de Dirac en  $(t, t)$ .

$$\mu_{((0,1),(1,1),(m_1,m_2))}^t(dn_1, dn_2) = \mu_{((1,0),(1,1),(m_1,m_2))}^t(dn_1, dn_2) = \delta_{t,t}(dn_1, dn_2)$$

Les noyaux de transition du PDMP engendrés par la maintenance préventive à l'instant  $T$  sont :

$$q_T(((1,1), (m_1, m_2)), ((1,1), (dn_1, dn_2))) = \delta_{m_1, m_2}(dn_1, dn_2)$$

$$q_T(((0,1), (m_1, m_2)), ((1,1), (dn_1, dn_2))) = \delta_{T, m_2}(dn_1, dn_2)$$

$$q_T(((1,0), (m_1, m_2)), ((1,1), (dn_1, dn_2))) = \delta_{m_1, T}(dn_1, dn_2)$$

L'évaluation des quantités d'intérêt associées à ce PDMP nécessite la construction d'un nouveau schéma de volumes finis. Celui-ci est présenté dans le paragraphe 2.5.4.3.

### 2.5.4.2 Le changement de processus

Soit  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  un PDMP homogène tel que la fonction  $x \mapsto g(i, x, t)$  est bijective pour tout  $i, t$  fixé. On pose  $Y_t = -g(I_t, X_t, -t)$ . Le processus  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$  est alors un nouveau PDMP homogène dont on va déterminer les caractéristiques. L'intérêt de ce changement de processus réside dans la remarque suivante : entre deux sauts du processus  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$ , la composante  $Y_t$  est constante, voir lemme ci-dessous. Ceci simplifie considérablement les équations de Chapman-Kolmogorov et leur résolution numérique.

**Lemme 38.** *Soit  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des instants de sauts de  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ . Le processus  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$  saute aux mêmes instants que  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  et, pour tout  $T_n \leq t < T_{n+1}$ , on a  $Y_t = Y_{T_n}$ .*

*Démonstration.* Notons  $g_s^{(i)}(x) = -g(i, x, s)$  et remarquons que  $(g_s^{(i)})^{-1}(x) = -g_{-s}^{(i)}(-x)$ .

On a alors  $Y_t = g_{-t}^{(I_t)}(X_t)$  et  $-g_{-t}^{(I_t)}(-Y_t) = X_t$ .

Pour  $T_n \leq t < T_{n+1}$ , on a :

$$Y_t = g_{-t}^{(I_t)}(X_t) = g_{-t}^{(I_{T_n})} \left( -g_{-T_n}^{(I_{T_n})}(X_{T_n}) \right) = g_{-T_n}^{(I_{T_n})}(X_{T_n}) = Y_{T_n}.$$

□

**Lemme 39.** *Soit  $\pi_t(\cdot, dx)$  la loi de  $(I_t, X_t)$ . On note  $\bar{\pi}_t(\cdot, dy)$  la loi de  $(I_t, Y_t)$ . Alors  $\bar{\pi}_t(j, dy)$  est la mesure image de  $\pi_t(j, dx)$  par l'application  $x \rightarrow g_{-t}^{(j)}(x) = -g(j, x, -t)$ .*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(I_t, Y_t)] &= \mathbb{E} \left[ \varphi \left( I_t, g_{-t}^{(I_t)} \left( -g_{-t}^{(I_t)}(-Y_t) \right) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \varphi \left( I_t, g_{-t}^{(I_t)}(X_t) \right) \right] \\ &= \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \left( j, g_{-t}^{(j)}(x) \right) \pi_t(j, dx) \end{aligned}$$

Comme

$$\mathbb{E}[\varphi(I_t, Y_t)] = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y) \bar{\pi}_t(j, dy)$$

on en déduit que  $\bar{\pi}_t(j, dy)$  est la mesure image de  $\pi_t(j, dx)$  par l'application  $x \rightarrow g_{-t}^{(j)}(x)$  (par définition même de la mesure image). □

Si  $\mathbb{E}[\varphi(I_t, X_t)]$  désigne une quantité à calculer, alors :

$$\mathbb{E}[\varphi(I_t, X_t)] = \mathbb{E} \left[ \varphi \left( I_t, -g_{-t}^{(I_t)}(-Y_t) \right) \right] = \sum_{j \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \left( j, -g_{-t}^{(j)}(-y) \right) \bar{\pi}_t(j, dy).$$

Si l'on sait calculer  $\bar{\pi}_t(j, dy)$  et  $g_{-t}^{(j)}(-y)$ , il est donc très simple de calculer  $\mathbb{E}[\varphi(I_t, X_t)]$ .

Pour calculer  $\bar{\pi}_t(j, dy)$ , on détermine tout d'abord les caractéristiques du PDMP  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$ .

**Proposition 40.**  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$  est un PDMP de caractéristiques :

- $\bar{a}(i, j, x, t) = a(i, j, g(i, -x, t))$ ,
- $\bar{\mu}_{(i, j, x, t)}(dy, du) = \tilde{\mu}_{(i, j, g(i, -x, t), t)}(dy) \delta_t(du)$ ,
- $\bar{\mathbf{v}}(i, x, t) = (\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, 1)$ ,

où, pour tout ce qui se rapporte à  $(I_t, (Y_t, t))_{t \geq 0}$ , on utilise les mêmes notations que pour  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  en rajoutant des barres, et où  $\tilde{\mu}_{(i, j, x, t)}(dy)$  désigne la mesure image de  $\mu_{(i, j, x, t)}(dy)$  par  $y \rightarrow g_{-t}^{(i)}(y) = -g(i, y, -t)$ .

*Démonstration.* L'équation de Chapman-Kolmogorov pour  $(I_t, (X_t, t))_{t \geq 0}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x, t) \pi_t(i, dx) - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, x, 0) \pi_0(i, dx) \\
&= \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, x) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, x)}(dy) - \varphi(i, x, s) \right) \pi_s(i, dx) ds \\
&+ \int_0^t \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t \varphi(i, x, s) + \mathbf{v}(i, x) \cdot \nabla \varphi(i, x, s)) \pi_s(i, dx) ds
\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

pour toute  $\varphi \in C_1^c(E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ .

Par définition de la mesure image :

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f(i, x, s) \pi_s(i, dx) &= \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(i, -g_s^{(i)}\left(-g_{-s}^{(i)}(x)\right), s\right) \pi_s(i, dx) \\
&= \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} f\left(i, -g_s^{(i)}(-y), s\right) \bar{\pi}_s(i, dy)
\end{aligned}$$

pour toute application  $f$  telle que l'intégrale existe.

L'équation (2.5.19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, -g_t^{(i)}(-z), t) \bar{\pi}_t(i, dz) - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(i, -g_0^{(i)}(-z), 0) \bar{\pi}_0(i, dz) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, -g_s^{(i)}(-z)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(j, y, s) \mu_{(i, j, -g_s^{(i)}(-z))}(dy) - \varphi(i, -g_s^{(i)}(-z), s) \right) \bar{\pi}_s(i, dz) ds \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \partial_t \varphi(i, -g_s^{(i)}(-z), s) + \mathbf{v}(i, -g_s^{(i)}(-z)) \cdot \nabla \varphi(i, -g_s^{(i)}(-z), s) \right) \bar{\pi}_s(i, dz) ds
\end{aligned} \tag{2.5.20}$$

De plus :

$$\partial_t \varphi(i, -g_s^{(i)}(-y), s) + \mathbf{v}(i, -g_s^{(i)}(-y)) \cdot \nabla \varphi(i, -g_s^{(i)}(-y), s) = \partial_s \psi(i, y, s)$$

où

$$\psi(i, y, s) = \varphi(i, -g_s^{(i)}(-y), s)$$

(et donc  $\varphi(i, y, s) = \psi\left(i, g_{-s}^{(i)}(y), s\right)$ ).

L'équation (2.5.20) devient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, x, t) \bar{\pi}_t(i, dx) - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, x, 0) \bar{\pi}_0(i, dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, -g_s^{(i)}(-x)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \psi(j, g_{-s}^{(i)}(y), s) \mu_{(i, j, -g_s^{(i)}(-x))}(dy) - \psi(i, x, s) \right) \bar{\pi}_s(i, dx) ds \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_s \psi(i, x, s) \bar{\pi}_s(i, dx) ds
\end{aligned} \tag{2.5.21}$$

pour toute  $\psi \in C_1^c(E \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+)$ .

On peut donc prendre comme caractéristiques  $\bar{a}(i, j, x, t) = a(i, j, g(i, -x, t))$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(i, x, t) = (\mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}, 1)$  et  $\bar{\mu}_{(i, j, x, t)}(dy, ds)$

telle que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(i, y, u) \bar{\mu}_{(i,j,x,s)}(dy, du) &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(i, g_{-s}^{(i)}(y), s\right) \mu_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x))}(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, z, s) \tilde{\mu}_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x))}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} \psi(i, z, u) \tilde{\mu}_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x))}(dz) \delta_s(du) \end{aligned}$$

pour toute  $\psi$ , où  $\tilde{\mu}_{(i,j,x,s)}(dz)$  est la mesure image de  $\mu_{(i,j,x)}(dy)$  par  $y \rightarrow g_{-s}^{(i)}(y)$ .

On peut donc prendre :

$$\bar{\mu}_{(i,j,x,s)}(dy, du) = \tilde{\mu}_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x),s)}(dy) \delta_s(du)$$

□

**Corollaire 41.**  $(I_t, Y_t)_{t \geq 0}$  est un PDMP non-homogène, voir paragraphe 2.2.6, de caractéristiques :

- $\bar{a}_t(i, j, x) = a(i, j, g(i, -x, t))$ ,
- $\bar{\mu}_{(i,j,x)}^t(dy) = \tilde{\mu}_{(i,j,g(i,-x,t),t)}(dy)$ ,
- $\bar{\mathbf{v}}_t(i, x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$ .

où  $\tilde{\mu}_{(i,j,x,t)}(dy)$  désigne la mesure image de  $\mu_{(i,j,x)}(dy)$  par  $y \rightarrow g_{-t}^{(i)}(y) = -g(i, y, -t)$ .

*Démonstration.* Soit  $\psi \in C_1^c(E \times \mathbb{R}^d)$  ne dépendant pas de  $t$ , l'équation (2.5.21) devient :

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, x) \bar{\pi}_t(i, dx) - \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, x) \bar{\pi}_0(i, dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{i \in E} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j \in E} a(i, j, -g_s^{(i)}(-x)) \left( \int_{\mathbb{R}^d} \psi(j, g_{-s}^{(i)}(y)) \mu_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x))}(dy) - \psi(i, x) \right) \bar{\pi}_s(i, dx) ds \quad (2.5.22) \end{aligned}$$

On peut donc prendre comme caractéristiques  $\bar{a}_t(i, j, x) = a(i, j, g(i, -x, t))$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(i, x) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^d}$  et  $\bar{\mu}_{(i,j,x)}^t(dy)$  telle que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, y) \bar{\mu}_{(i,j,x)}^s(dy) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(i, z) \tilde{\mu}_{(i,j,-g_s^{(i)}(-x))}(dz)$$

□

**Exemple 42.** Soit  $(I_t)_{t \geq 0}$  un processus semi-markovien homogène sur  $E$  et  $X_t$  la durée passée dans l'état courant.  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$  est un PDMP sur  $E \times \mathbb{R}_+$  de caractéristiques :

- $a(i, j, x)$ ,
- $\mu_{(i,j,x)}(dy) = \delta_0(dy)$ ,
- $\mathbf{v}(i, x) = 1$ .

On a ici  $g(i, x, t) = x + t$ . Posons  $Y_t = -g(I_t, X_t, -t) = t - X_t$ . D'après ce qui précède,  $(I_t, Y_t)_{t \geq 0}$  est un PDMP inhomogène de caractéristiques :

- $\bar{a}_t(i, j, x) = a(i, j, t - x)$ ,
- $\bar{\mu}_{(i,j,x)}^t(dy) = \delta_t(dy)$ ,
- $\bar{\mathbf{v}}_t(i, x) = 0$ .

*Remarque :* ici  $Y_t = t - (t - T_{N_t}) = T_{N_t}$  et  $Y_t$  représente la date du dernier changement d'état avant  $t$ .

**Remarque 43.** Si l'on applique ce changement de variable dans l'exemple 37, on retrouve les noyaux explicités dans l'exemple.

Le prochain paragraphe présente le schéma de volumes finis adapté au cas non-homogène.



$h$	Variable physique du PDMP					
	Age des composants			Date de mise en service		
	$\delta t$	Défaillances	Temps de calcul	$\delta t$	Défaillances	Temps de calcul
1	0.4315438	0.4780314	0.031	1	0.4869578	0
1/2	0.2317657	0.4794001	0.14	1/2	0.4850316	0
1/4	0.1202875	0.4807436	0.79	1/4	0.483921	0.078
1/12	0.0411310	0.4819069	20.4	1/12	0.4831198	1.3
Monte-Carlo ( $10^6$ histoires)	Défaillances : 0.482747 (IC95 = [0.4816317; 0.4838623])					

TABLE 2.1 – Comparaison du nombre moyen de défaillances sur vingt ans du système parallèle de deux composants quantifié par le schéma de volumes finis en considérant comme variable physique d'une part l'âge des composants et d'autre part leur date de mise en service. Cette même quantité est estimée avec des simulations de Monte-Carlo. (IC95 : intervalle de confiance à 95%)

### 2.5.4.3 Schéma de volumes finis adapté au PDMP non-homogène

Considérons un PDMP non-homogène  $(I_t, Y_t)_{t \geq 0}$  tel que  $Y_t$  représente la date de mise en service des composants à l'instant  $t$ . Ces variables étant temporelles, les pas de discrétisation du temps et de l'espace des variables physiques sont égaux, c'est-à-dire  $h = \delta t$ . Soit  $\mathcal{M}$  un maillage de  $\mathbb{R}^d$ . Le schéma numérique proposé est le suivant :

$$u_0(K, i) = \frac{1}{\delta t^d} \int_K \pi_0(i, dy) \quad (2.5.23)$$

$$u_{n+1}(K, i) = (1 - \delta t b_K^i(n)) u_n(K, i) + \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K}^{j,i}(n) u_n(L, j) \quad (2.5.24)$$

avec

$$a_{K,L}^{i,j}(n) = \frac{1}{\delta t^d} \int_K a_t(i, j, x) \int_L \mu_{(i,j,x)}^t(dy) dx \text{ pour } t \in [n \cdot \delta t, (n+1) \cdot \delta t[$$

et

$$b_K^i(n) = \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{i,j}(n)$$

**Exemple 44.** Nous avons cherché à évaluer l'influence de cette nouvelle modélisation sur l'approximation du nombre moyen de défaillances subies par le système présenté dans l'exemple 37 sur vingt ans. Les résultats sont visibles dans la TABLE 2.1. Pour un même temps de calcul, l'approximation du nombre moyen de défaillances est meilleure lorsque les variables physiques représentent les dates de mise en service. Cette modélisation nous permet ainsi d'utiliser un pas de discrétisation plus fin sans pour autant entraîner un temps de calcul trop long.

Les graphiques de la FIGURE 2.18 représentent la propagation de l'approximation de la loi de probabilité de la date de mise en service des composants dans le maillage avec la nouvelle représentation. Ces graphiques peuvent être comparés à ceux des FIGURES 2.1 et 2.2. On observe beaucoup moins de diffusion de la masse de probabilité dans ce cas.

### 2.5.4.4 Nouvelle représentation et approximation

Nous cherchons maintenant à évaluer l'influence de la méthode d'approximation  $A^2$  présentée dans le paragraphe 2.5.3 avec cette nouvelle représentation. Pour cela, nous considérons un système de quatre composants possédant deux branches de deux composants en parallèle, voir FIGURE 2.14. Le système tombe en panne lorsqu'un composant de chaque branche est défaillant. Ce système est similaire au dernier cas étudié dans le paragraphe 2.5.3.3 sauf que nous considérons ici, qu'à la suite d'une défaillance d'un composant, l'autre composant situé sur la même branche continue de vieillir. Cette hypothèse est nécessaire pour utiliser la représentation proposée dans le paragraphe précédent. En effet, si un composant ne vieillit pas, la fonction  $g$ , modélisant l'évolution de son âge, n'est pas bijective. Afin d'évaluer l'influence de cette modélisation, nous cherchons à quantifier le nombre moyen de défaillances du système d'une part en considérant l'âge des composants et d'autre part en considérant

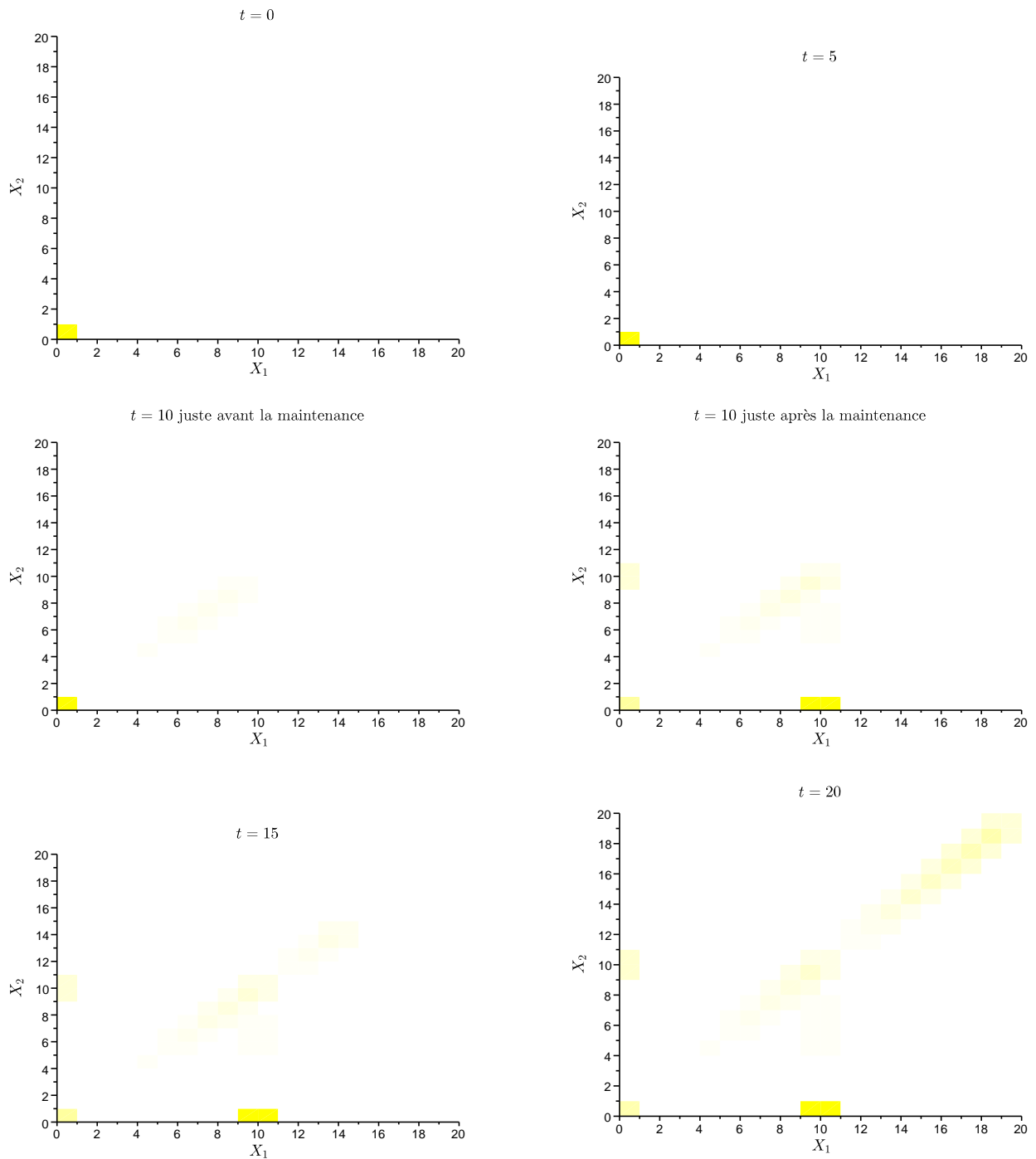


FIGURE 2.18 – Propagation de l'approximation de la loi marginale du PDMP de l'exemple 21 évaluée à l'aide du schéma de volumes finis et sommée sur tous les états ( $\sum_{i \in E} u_n(\cdot, i)$ ) avec  $X_1$  la date de mise en service du composant 1 et  $X_2$  la date de mise en service du composant 2 -  $h = \delta t = 1$ .

Pas $h$	Niveau $e$	Age des composants	Temps de calcul	Date de mise en service	Temps de calcul
1	1	0.7198031	4.17	0.7227062	0
	2	0.7214314	7.5	0.7274118	0.18
	3	0.7230824	36	0.7290171	0.57
	4	0.7237633	108	0.7291534	1
	Schéma complet	0.7238218	250	0.7293799	24.64
0.5	1	0.7124963	7.68	0.7141390	0
	2	0.7156968	15	0.7197606	0.47
	3	0.7177417	72	0.7215742	1.4
	4	0.7182949	220	0.7217501	2.65
	Schéma complet	Place mémoire insuffisante			

TABLE 2.2 – Nombre moyen de défaillances du système série-parallèle de quatre composants évalué d’une part en considérant l’âge des composants et d’autre part leur date de mise en service en fonction du niveau de la méthode  $A^2$ ,  $e$ , et du pas de discrétisation,  $h$ . (loi des composants 1 et 3 : Weibull(1.5,30) - loi des composants 2 et 4 : Weibull(2,20)).

leur date de mise en service. Nous supposons que les niveaux de la méthode  $A^2$  associés à chaque composant sont égaux ( $e_1 = e_2 = e_3 = e_4 = e$ ). Deux pas de discrétisation  $h$  sont testés : 1 et 0.5. Lorsque la variable physique du PDMP représente la date de mise en service des composants, le pas de discrétisation  $\delta t$  est choisi égal à  $h$ . Dans l’autre cas,  $\delta t$  prend la plus grande valeur telle que la condition (2.3.8) est respectée. Les résultats, visibles dans la TABLE 2.2, mettent en évidence le fait que la méthode  $A^2$  fonctionne dans les deux cas. Pour  $h = 1$ , l’approximation issue de cette méthode semble s’approcher de la valeur du schéma complet quand le niveau  $e$  augmente, et ce, pour les deux types de représentation. Pour  $h = 0.5$ , le schéma complet ne permet pas d’obtenir de résultat car la place mémoire à notre disposition est insuffisante. La principale différence entre les deux types de représentation réside principalement dans les temps de calcul engendrés par le schéma numérique : ceux-ci sont sensiblement inférieurs avec la nouvelle représentation proposée dans ce paragraphe. Pour un même temps de calcul, les résultats sont plus précis avec la nouvelle modélisation.

#### 2.5.4.5 Bilan

Le choix des quantités à garder en mémoire agit fortement sur le schéma de volumes finis. Le fait de garder en mémoire la date de mise en service des composants à la place de leur âge permet de réduire fortement la propagation erronée de la masse de probabilité dans le maillage du schéma.

La principale caractéristique de cette représentation, mise en avant dans ce paragraphe, est qu’elle permet de réduire le nombre de calculs engendrés par le schéma numérique, du fait que la variable physique n’évolue pas, ce qui entraîne une forte réduction du temps de calcul. Ainsi pour un même temps de calcul, les résultats sont de meilleure qualité avec la nouvelle modélisation proposée.

La méthode  $A^2$  s’adapte sans difficulté à cette représentation sans perte de qualité. Le gain en temps de calcul peut permettre d’avoir recours à un niveau d’approximation plus élevé sans engendrer de calculs trop longs.

De plus, nous avons montré que cette représentation peut être utilisée dans un cadre général si l’équation différentielle régissant l’évolution déterministe des variables physiques admet une solution bijective.

Il reste à montrer que les quantités évaluées par le schéma (2.5.23)-(2.5.24) converge, quand  $\delta t$  tend vers zéro, vers les solutions de l’équation de Chapman-Kolmogorov (2.5.22) représentant le PDMP non-homogène. Cette étude n’a pas été menée dans cette thèse et représente une perspective.

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode alternative aux simulations de Monte-Carlo pour la quantification d’un PDMP. Cette méthode repose sur l’utilisation d’un algorithme déterministe (schéma de volumes finis). La

convergence de ce schéma vers les quantités recherchées a été réalisée dans le cadre de PDMP homogènes dont les variables physiques évoluent avec vitesse 1 ou 0. Dans la pratique, une limite associée à cette méthodologie est la dimension de l'espace des variables physiques. Une dimension trop importante (plus grande que 5) nécessiterait l'utilisation d'une place mémoire très importante rendant ainsi les calculs impossibles à réaliser (avec les ordinateurs à notre disposition). Nous proposons trois méthodes pour contourner ce problème. La première est basée sur la modélisation du système et permet de réduire le nombre de variables physiques à garder en mémoire. La deuxième est une méthode d'approximation, que nous avons nommé  $A^2$ , permettant de diminuer la quantité de place mémoire nécessaire au schéma pour fonctionner et de faciliter son implémentation. La troisième méthode repose sur un changement de variable permettant de se ramener à un PDMP non-homogène dont les variables physiques n'évoluent pas dans le temps.

La méthode  $A^2$  détaillée dans le paragraphe 2.5.3 permet de quantifier des systèmes modélisés par PDMP dont l'espace des variables physiques peut être de dimension plus grande que 5 ce qui n'était pas le cas avant. En revanche, cette méthode entraîne une perte de précision difficilement quantifiable. En fonction de l'architecture du système et de la stratégie de maintenance, les paramètres des lois de durée de vie des composants peuvent avoir un impact plus ou moins important sur cette précision. Nous avons ainsi réalisé différents tests expérimentaux afin d'évaluer l'influence de ces paramètres sur la précision. A chaque fois, il est possible d'isoler une zone dans laquelle l'erreur commise par la méthode  $A^2$  est importante. Dans les cas d'application SNCF que nous présentons dans la seconde partie de ce document, nous serons amenés à utiliser la version la plus simple de la méthode  $A^2$  c'est-à-dire avec un niveau égal à un. Nous comparerons ces résultats avec ceux associés aux simulations de Monte-Carlo.

Pour un système, on a souvent le choix entre différentes modélisation par PDMP. Ce choix a une grande influence sur la qualité des approximations obtenues par le schéma de volumes finis. En particulier, on montre que, quelle que soit la dynamique d'évolution des variables physiques d'un PDMP, on peut toujours se ramener à un nouveau PDMP non-homogène sur  $E \times \mathbb{R}^d$  de vitesse d'évolution  $0_{\mathbb{R}^d}$ . Ceci conduit à des équations de Chapman-Kolmogorov et à un schéma de volumes finis considérablement simplifié. La convergence du schéma numérique dans le cadre des PDMP non-homogènes avec des variables physiques n'évoluant pas de manière déterministe, reste à être démontrée.

Le schéma proposé converge dans le cas où les variables physiques du PDMP (homogène) évoluent avec vitesse 1 ou 0. Les cas d'étude industriels rentrent dans ce cadre. Cependant, les PDMP sont généralement utilisés pour répondre à des problématiques appartenant au domaine de la fiabilité dynamique. Dans ces cas d'application, les vitesses ne sont pas toujours égales à 1 ou 0. Le prochain chapitre est consacré à l'application du schéma de volumes finis pour l'étude d'un cas-test de fiabilité dynamique traité par de nombreux auteurs voir [Zhang et al., 2008]. Ce cas ne rentre pas dans le cadre de la démonstration de la convergence. Les résultats issus de ce cas d'étude sont comparés à ceux obtenus par les autres auteurs nous permettant ainsi de vérifier expérimentalement si le schéma fonctionne dans un cadre plus général.



# Chapitre 3

## Etude d'un benchmark de fiabilité dynamique

### 3.1 Introduction et contexte

Dans le chapitre précédent, la convergence du schéma de volumes finis a été démontrée dans un cadre particulier où les variables physiques du PDMP évoluent avec vitesse 1 ou 0 dans le temps. En fiabilité dynamique, l'évolution des variables physiques est généralement plus compliquée. Il nous a paru intéressant de tester le schéma proposé sur un cas de fiabilité dynamique pour lequel la démonstration du schéma n'est pas valable. Ainsi, nous avons choisi d'appliquer cette méthodologie à un cas d'étude traité par de nombreux auteurs avec diverses méthodes : il s'agit d'un réservoir alimenté par deux pompes, traité dans [Zhang et al., 2008], [Castaneda, 2009] et [Aldemir and Tombuyses, 1996]. Dans [Zhang et al., 2008], le réservoir est modélisé par un PDMP et le traitement numérique est réalisé avec des simulations de Monte-Carlo. Les résultats sont par ailleurs comparés à ceux trouvés dans [Tombyyses and Aldemir, 1997]. Dans [Castaneda, 2009], l'auteur a modélisé le réservoir à l'aide d'un automate stochastique hybride et le traitement est là encore réalisé avec des simulations de Monte-Carlo. Dans [Aldemir and Tombuyses, 1996], les auteurs utilisent la méthode dite Continuous Cell to Cell Mapping (CCCM) pour calculer les quantités d'intérêt.

### 3.2 Présentation du cas d'étude

En premier lieu, nous précisons que ce cas d'étude est fictif et ne correspond pas à un cas réel. Le cas d'étude est un benchmark classique de la littérature fiabiliste. La description ci-dessous est reprise de [Zhang et al., 2008]. Le système est composé d'un réservoir contenant un liquide dont le niveau est maintenu par deux pompes  $P1$  et  $P2$  et d'une vanne de vidange  $V$ . Chacun de ces composants possède un détecteur de niveau qui commande l'ouverture et la fermeture du composant auquel il est rattaché. Une source de puissance thermique constante chauffe le liquide dont la température évolue en fonction des débits d'entrée et de sortie du liquide.

En mode normal, le système fonctionne de façon à ce que le niveau reste entre 6 et 8 mètres. Initialement le niveau du liquide se trouve à 7 mètres, la pompe  $P1$  est active, la pompe  $P2$  est inactive et la vanne  $V$  est ouverte. Dans cet état, le niveau n'évolue pas et reste à 7 mètres, en revanche la température augmente. Si la température atteint  $100^{\circ}\text{C}$ , le système s'arrête de fonctionner, ce qui est considéré comme un événement redouté. Les taux de panne des pompes et de la vanne augmentent avec la température, voir les équations (3.2.1), ce qui peut entraîner le blocage de l'un de ces composants en position active ou inactive, voir FIGURE 3.3. Si le blocage d'un composant survient avant que la température n'atteigne le seuil critique, cela peut entraîner une évolution de la hauteur du liquide et changer l'évolution de la température. Lorsque le niveau du liquide atteint 6 ou 8 mètres, les composants sont activés ou inactivés selon le schéma de la FIGURE 3.2 s'ils ne sont pas bloqués. Il est possible que le blocage d'un ou plusieurs composants entraîne que le niveau du liquide descende en dessous de 6 mètres ou monte au dessus de 8 mètres. On considère que le réservoir est asséché si le niveau descend en dessous de 4 mètres et que le réservoir déborde si le niveau est supérieur à 10 mètres. Ces deux événements sont considérés comme des événements redoutés que l'on cherche à éviter. Dès que l'un des trois événements redoutés

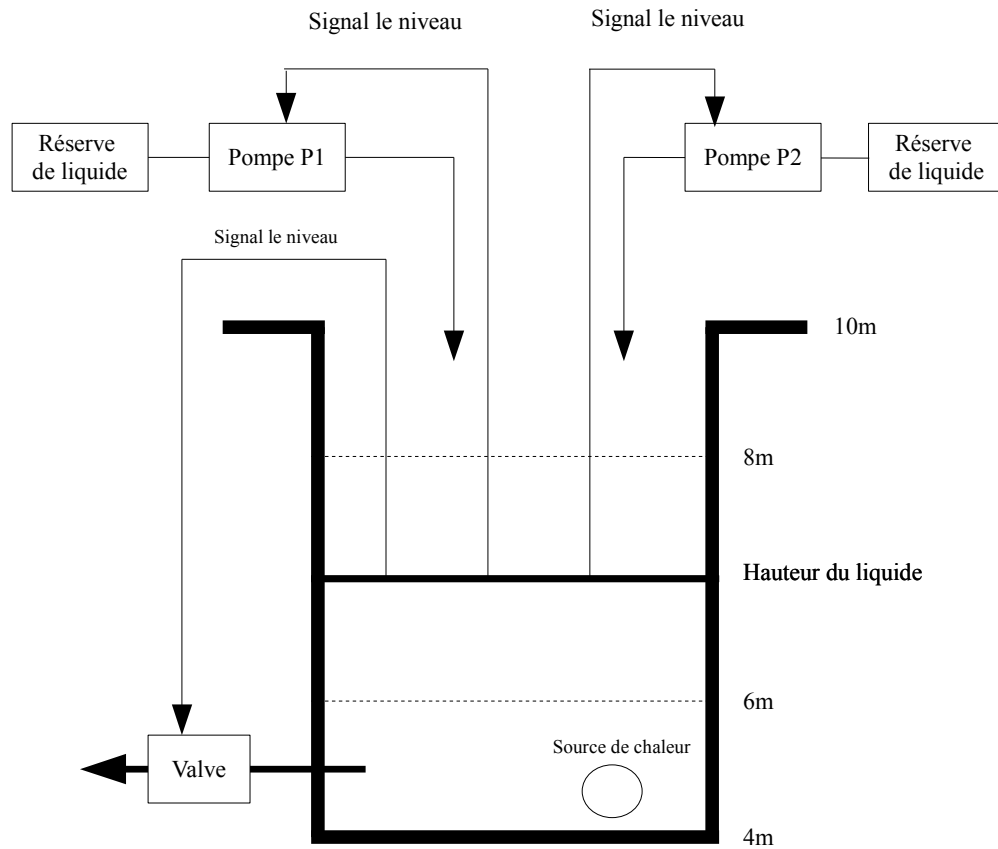


FIGURE 3.1 – Schéma du réservoir alimenté par deux pompes

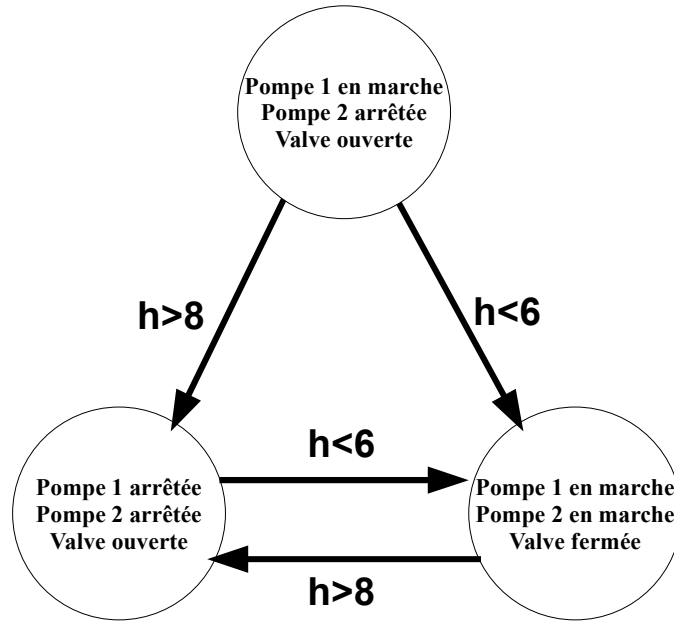


FIGURE 3.2 – Fonctionnement nominal du système

se produit, le système s'arrête de fonctionner et il reste dans l'état dans lequel il se trouve à cet instant. Cela signifie que la température et le niveau du liquide n'évolue plus. Les taux de panne des composants dépendent de la température, et se mettent sous la forme suivante :

$$a(T) = \frac{b_1 e^{b_c(T-20)} + b_2 e^{-b_d(T-20)}}{b_1 + b_2}$$

$$\lambda_c(T) = a(T) \hat{\lambda}_c, \text{ pour } c \in \{P1, P2, V\} \quad (3.2.1)$$

où  $a(T)$  est une fonction qui dépend de la température et dont les paramètres sont :

- $\hat{\lambda}_{P1} = 2.2831 \cdot 10^{-3} h^{-1}$ ,  $\hat{\lambda}_{P2} = 2.8571 \cdot 10^{-3} h^{-1}$ ,  $\hat{\lambda}_V = 1.5625 \cdot 10^{-3} h^{-1}$ ,
- $b_1 = 3.029$ ,  $b_2 = 0.7578$ ,  $b_c = 0.05756$  et  $b_d = 0.2301$ .

Les trois composants sont indépendants et non réparables. En marche normal, un composant passe de l'état marche à l'état arrêté. Lorsqu'il tombe en panne, il peut soit rester bloqué dans l'état où il se trouve soit changer d'état et y rester. La FIGURE 3.3 décrit ces modes de panne.

Initialement, la température est égale à  $30.9261^\circ c$  et la hauteur du liquide est égale à 7 mètres. L'évolution de la température et de la hauteur du liquide est gérée par un système d'équations différentielles dépendant de l'état des trois composants :

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = \gamma_1(v) \\ \frac{dT}{dt} = \frac{\gamma_2(v) - \gamma_3(v)T}{h} \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où  $v = (v_{P1}, v_{P2}, v_V)$  et

$$v_c = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ est arrêté ou bloqué à l'arrêt} \\ 1 & \text{si } c \text{ est en marche ou bloqué en marche} \end{cases}$$

On note



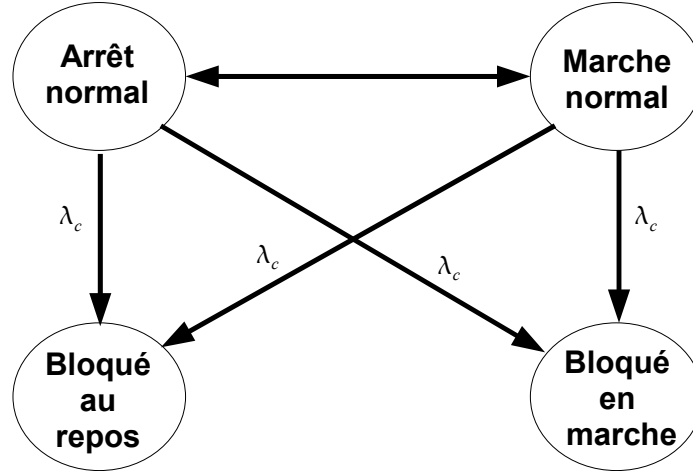


FIGURE 3.3 – Etats de fonctionnement et de défaillance pour un composant

$$\begin{aligned}\gamma_1(v) &= (v_{P1} + v_{P2} - v_V) G \\ \gamma_2(v) &= (v_{P1} + v_{P2}) GT_{in} + 23.88915 \\ \gamma_3(v) &= (v_{P1} + v_{P2}) G\end{aligned}$$

$G$  représente le débit d'entrée du liquide des pompes et le débit de sortie du liquide de la valve. Il est égal à  $1.5m^3h^{-1}$ .  $T_{in}$  est la température du liquide lorsqu'il entre dans le cylindre. Elle est égale à  $15^\circ c$ . Pour plus de détails sur ces équations, le lecteur pourra se référer à l'article [Zhang et al., 2008].

Nous cherchons à calculer la probabilité d'occurrence de trois événements redoutés avant l'instant  $t$  :

- l'assèchement du réservoir  $p_1(t) = \mathbb{P}(h(t) \leq 4)$ ,
- le débordement du réservoir  $p_2(t) = \mathbb{P}(h(t) \geq 10)$ ,
- une température trop haute ou surchauffe  $p_3(t) = \mathbb{P}(T(t) \geq 100)$ ,

Dans le but d'obtenir ces quantités, nous modélisons le système par un PDMP et nous quantifions le modèle à l'aide d'un schéma de volumes finis. Dans le prochain paragraphe, la modélisation de ce système par un PDMP est détaillée.

### 3.3 Modélisation du système par un PDMP

La modélisation proposée dans ce paragraphe ne prend pas en compte le changement de variable présenté dans le paragraphe 2.5.4 car, à ce stade de l'étude, nous n'avions pas encore mis en évidence son efficacité.

La FIGURE 3.3 montre que chacun des composants peut se trouver dans quatre états différents : 1 si le composant est actif,  $1_b$  si le composant est bloqué en mode actif, 0 si le composant est inactif et  $0_b$  si le composant est bloqué en mode inactif. Ainsi le système formé de ces trois composants peut se trouver dans 43 états lorsqu'il est en fonctionnement. A la suite d'un événement redouté, le système s'arrête de fonctionner, il faut donc créer trois états absorbants correspondant chacun à l'occurrence d'un événement redouté :  $As$  pour assèchement,  $De$  pour débordement et  $Su$  pour surchauffe. La variable discrète du PDMP décrit l'état des trois composants du

système lorsqu'il fonctionne ou décrit l'événement qui a provoqué l'arrêt du système lorsqu'il ne fonctionne pas, ainsi l'espace dans lequel cette variable évolue, noté  $E$ , comporte  $43 + 3$  états.

$$E = \{(a, b, c) \text{ avec } (a, b, c) \in \{1, 1_b, 0, 0_b\}^3, As, De, Su\}$$

Deux variables environnementales évoluent conjointement avec le système : la température et le niveau du liquide dans le réservoir, la variable environnementale du PDMP est donc de dimension 2. Posons  $X_t = (h_t, T_t)$ . Le niveau du liquide évolue entre 4 et 10 mètres. Lorsque l'un des trois événements redoutés se produit, la variable  $I$  saute vers un état correspondant à l'événement redouté puis y reste. Dans ces états, la température et le niveau du liquide n'évoluent plus, nous n'avons plus besoin de les garder en mémoire. La température ne dépassera donc jamais  $100^\circ\text{C}$ . L'espace dans lequel évolue  $X$  est donc  $[4, 10] \times [0, 100]$  quand le système fonctionne. Si aucun événement redouté ne s'est produit, la variable continue du PDMP suit une évolution déterministe décrite par le système d'équations (3.2.2) entre les sauts de la variable discrète. Les états  $As$ ,  $De$  et  $Su$  sont absorbants donc il n'y a pas de taux de transition qui provoque un saut hors de ces états. Lorsque le système est en fonctionnement, les pompes et la valve peuvent se bloquer selon un taux de transition qui ne dépend que de la température définie dans (3.2.1). Un saut de l'état  $i$  vers l'état  $j$  dû au blocage d'un composant, est induit par un taux de transition défini par :

$$a(i, j, (h, T)) = \lambda_c(T)$$

Lorsqu'un tel saut se produit, la température et le niveau du liquide ne changent pas, ainsi la distribution de la variable continue après ce saut est définie par :

$$\mu_{(i,j,(h,T))}(dh^*, dT^*) = \delta_{h,T}(dh^*, dT^*)$$

Pour modéliser le changement d'état du système dû à l'activation ou la désactivation d'un composant ou encore dû à l'occurrence d'un événement redouté, nous utilisons la notion de frontière introduite dans [Davis, 1993]. Lors de la présentation des PDMP dans le paragraphe 1.3.1, nous n'avons pas introduit cette notion de frontière car les cas d'application étudiés dans cette thèse peuvent être traités sans y avoir recours. Les maintenances à instants déterministes peuvent être modélisées à l'aide d'une frontière, cependant cela complique la modélisation et l'étude de la convergence de l'algorithme. Nous avons donc introduit une notion de 'suite' de PDMP. En revanche, le cas test présenté dans ce chapitre nécessite l'utilisation d'une frontière, celle-ci est notée  $\Gamma$  et correspond à l'ensemble suivant :

$$\Gamma = \{(4, x); (6, x); (8, x), (10, x); (y, 100) \text{ avec } x \in [0; 100[ \text{ et } y \in [4, 10]\}$$

A l'atteinte d'un élément de cet ensemble, la variable discrète du PDMP,  $I_t$ , saute. Si la température atteint  $100^\circ\text{C}$  ou si le niveau atteint 4 ou 10 mètres,  $I_t$  saute vers un état absorbant respectivement  $Su$ ,  $As$  et  $De$ . Si un autre élément de la frontière est atteint alors le saut de  $I_t$  se fait selon la FIGURE 3.2 si le composant qui doit changer d'état n'est pas bloqué. De la même façon qu'un saut induit par le blocage d'un composant, un saut provoqué par l'atteinte d'un élément de la frontière ne change pas la valeur du niveau et de la température.

Le calcul des probabilités d'événements redoutés se fait à l'aide du schéma de volumes finis. Les résultats obtenus sont donc issus d'une estimation numérique. Soit  $\delta t$  le pas de discrétisation du temps,  $\delta h$  le pas de discrétisation de l'espace dans lequel évolue le niveau du liquide et  $\delta T$  le pas de discrétisation de l'espace dans lequel évolue la température. Avec les notations associées à l'algorithme, nous avons respectivement  $u_n(Su)$ ,  $u_n(As)$  et  $u_n(De)$ , l'estimation de la probabilité d'occurrence d'une température trop élevée, de l'assèchement du réservoir et du débordement du réservoir avant l'instant  $t$  quand  $n \cdot \delta t \leq t < (n + 1) \cdot \delta t$ .

### 3.4 Résultats numériques

Les résultats numériques obtenus avec l'algorithme sont comparés à ceux trouvés avec des simulations de Monte-Carlo ( $10^7$  histoires) dans [Zhang et al., 2008]. Les résultats de [Aldemir and Tombuyses, 1996] sont identiques à ceux trouvés dans [Zhang et al., 2008] ainsi nous ne les utiliserons pas. Les résultats de [Castaneda, 2009] sont différents de ceux trouvés dans [Zhang et al., 2008]. Selon l'auteur, cette différence pourrait venir du fait que dans sa modélisation l'occurrence d'un événement redouté n'entraîne pas le saut du processus vers un état absorbant. Il considère que le système continue d'évoluer et peut subir un autre événement redouté. Ainsi nous

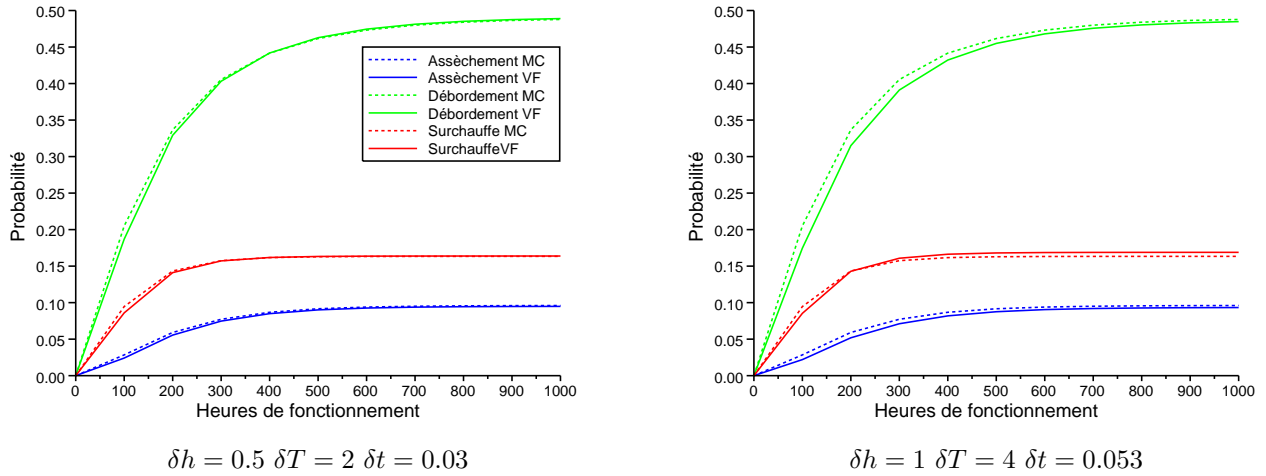


FIGURE 3.4 – Comparaisons des résultats trouvés avec l'algorithme de volumes finis pour différents pas de discrétisation et ceux trouvés avec des simulations de Monte-Carlo ( $10^7$  histoires) dans [Zhang et al., 2008]. Les pas de discrétisation sont précisés en dessous de chaque graphique.

Nombre d'histoires simulées	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
Temps de calcul	0.98s	10.03s	1m37s	16m37s
Erreur relative	1.75%	1.5%	0.9%	0.13%

TABLE 3.1 – Temps de calcul et erreur relative d'estimation de  $p_1(1000)$  associés à différents nombres d'histoires simulées pour Monte Carlo. Ces résultats sont issus de l'article [Zhang et al., 2008].

ne comparerons pas nos résultats à ceux trouvés par cet auteur.

Nous utilisons différents pas de discrétisation. Le pas de discrétisation du temps est fixé à la plus grande valeur rendant stable l'algorithme de volumes finis. On déduit sa valeur à l'aide d'une fonction qui dépend des pas de discrétisation de l'espace des variables physiques. Les probabilités d'évènements redoutés calculées avec différents pas de discrétisations sont comparées avec celles de [Zhang et al., 2008] dans la FIGURE 3.4. Les deux méthodes donnent des résultats quasiment identiques ce qui permet de valider notre méthode dans ce cas d'application.

Aux vues des graphiques de la FIGURE 3.4, on peut remarquer que les résultats sont plus précis lorsque les pas de discrétisation sont plus fins ce qui est cohérent. En revanche, la diminution des pas de discrétisation entraîne une augmentation des temps de calcul.

Les temps de calcul associés au schéma de volumes finis sont difficiles à comparer avec ceux trouvés dans [Zhang et al., 2008] car les ordinateurs utilisés pour réaliser les calculs ne sont pas les mêmes. Le processeur utilisé dans [Zhang et al., 2008] est un AMD Opteron Processor 275 cadencé à 2.2GHz, le processeur utilisé pour notre étude est un INTEL Celeron CPU 440 cadencé à 2GHz. La TABLE 3.1 reprend les résultats issus de l'article [Zhang et al., 2008]. Il est considéré dans [Zhang et al., 2008] que la valeur de référence de la probabilité d'assèchement du réservoir avant 1000 heures de fonctionnement, notée  $p_1(1000)$ , est celle trouvée avec  $10^7$  simulations. Posons  $\tilde{p}_1(1000)$  la valeur estimée. La formule 3.4.1 permet d'obtenir l'erreur relative d'estimation de  $p_1(1000)$ .

$$Er = \left| \frac{p_1(1000) - \tilde{p}_1(1000)}{p_1(1000)} \right| \cdot 1000 \quad (3.4.1)$$

A précision égale, les temps de calcul sont plus longs avec le schéma de volumes finis, voir Tables 3.1 et 3.2. Cependant, contrairement aux méthodes de Monte-Carlo, les courbes trouvées avec le schéma de volumes finis sont lisses quels que soient les pas de discrétisation utilisés. En effet, avec la méthode de Monte-Carlo, la diminution du nombre d'histoires simulées, entraîne des irrégularités visibles sur les courbes. Cela est directement lié au fait que la méthode des simulations de Monte-Carlo est une méthode stochastique. Cette caractéristique devient une contrainte lorsque l'on recherche un optimum. Les applications industrielles testées dans cette thèse

Pas de discrétisation	$\delta h$	$\delta T$	$\delta t$	$\delta h$	$\delta T$	$\delta t$	$\delta h$	$\delta T$	$\delta t$	$\delta h$	$\delta T$	$\delta t$	$\delta h$	$\delta T$	$\delta t$
	1	10	0.111	1	4	0.53	0.5	2	0.03	0.25	2	0.31	0.25	1	0.16
Temps de calcul	1m			2m48s			9m12s			13m14s			49m		
Erreur relative	4.23%			2.87%			1.21%			0.71%			0.56%		

TABLE 3.2 – Temps de calcul et erreur relative d’estimation de  $p_1(1000)$  associés à différents pas de discrétisation pour le schéma de volumes finis

ont consisté à optimiser des stratégies de maintenance à l’aide d’un algorithme de recuit simulé. Il a été constaté qu’avec des simulations de Monte-Carlo, l’algorithme de recuit simulé utilisé a posé des difficultés de convergence. Pour palier à ces difficultés de convergence, un nombre plus important d’histoires peut être simulé, ce qui augmente les temps de calcul et peut rendre l’optimisation de la stratégie de maintenance difficile. Le schéma de volumes finis, étant une méthode déterministe, n’a pas ce problème. Cette méthode de calcul est plus adaptée aux problématiques de cette thèse et sera utilisée dans l’objectif d’identifier un plan de maintenance optimal pour deux systèmes utilisés à la SNCF : une climatisation de TER et un passage à niveau.

Le schéma de volumes finis possède une autre caractéristique intéressante : le fait que le système d’équations différentielles contrôlant l’évolution des variables physiques ne soit pas directement soluble n’entraîne aucune difficulté. En effet, le schéma ne nécessite pas de les résoudre. En revanche, les simulations de Monte-Carlo nécessitent de résoudre ces équations différentielles. Lorsque cela est possible, comme c’est le cas dans l’article [Zhang et al., 2008], les simulations de Monte-Carlo sont adaptées et les temps de calcul sont courts. En revanche, dans le cas contraire, il est nécessaire de discrétiser ces équations ce qui, couplé avec un nombre élevé de simulations, augmente significativement les temps de calcul et peut rendre l’utilisation de cette méthode difficile.

### 3.5 Conclusion

Bien que le système étudié dans ce chapitre ne rentre pas dans le cadre de la démonstration de la convergence de l’algorithme de volumes finis (Chapitre 2), les résultats issus du schéma sont proches de ceux trouvés dans [Zhang et al., 2008] avec des simulations de Monte-Carlo.

La prise en compte de l’étude menée dans le paragraphe 2.5.4 pourrait permettre d’améliorer la qualité des résultats et de diminuer les temps de calcul.

Une perspective à ce travail serait de démontrer la convergence de l’algorithme de volumes finis dans le cadre général.

Avant de présenter les cas d’application industriels, des outils probabilistes de modélisation de la durée de vie et de l’effet de la maintenance sont introduits.



## Chapitre 4

# Méthodes de modélisation probabiliste de la durée de vie

### 4.1 Introduction

Les modèles probabilistes comme le PDMP peuvent être utilisés pour modéliser le fonctionnement dans le temps d'un système multi-composants dans l'optique d'évaluer des quantités fiabilistes telles que la fiabilité, la disponibilité... Ce processus modélise les changements d'états (marche et panne) successifs du système au cours du temps. Ces transitions sont régies par des taux qui correspondent, dans nos cas, aux taux de défaillance des composants. L'utilisation des PDMP nécessite de choisir un modèle paramétrique pour modéliser la durée de vie des composants. Ce choix est important car il a un impact direct sur les résultats issus de la quantification du PDMP. Une étude non-paramétrique permet dans un premier temps d'évaluer le taux de défaillance non-paramétrique des composants en utilisant par exemple des méthodes de type Kaplan-Meier, voir [Cocozza-Thivent, 1997]. La forme de ces taux permet de choisir un modèle adapté pour modéliser la durée de vie des composants. Nous présentons trois lois plus ou moins usuelles, permettant de modéliser des durées de vie ayant des caractéristiques différentes. Ce type de modélisation ne prend pas en compte l'effet des maintenances subies par les composants. Il est pourtant souvent nécessaire de quantifier l'impact des maintenances sur la durée de vie. Pour cela, nous présentons un modèle de réduction arithmétique de l'âge (Arithmetic Reduction of Age ou *ARA*) issu de [Doyen and Gaudoin, 2004].

### 4.2 Méthodes probabilistes de modélisation de la durée de vie

En pratique, le taux de défaillance d'un composant peut avoir une forme dite de 'courbe en baignoire' représentée dans la FIGURE 4.1. Cette courbe peut être décomposée en trois phases :

- la phase de jeunesse : le taux de défaillance est décroissant, modélisant les pannes dues à des défauts de fabrication ou des défauts de réglage en usine,
- la phase de maturité : le taux de défaillance est constant, modélisant le risque de panne accidentelle,
- la phase de vieillissement : le taux de défaillance est croissant modélisant la dégradation du composant.

Cependant, il est rare d'observer un taux de défaillance de cette forme. La plupart du temps, seules deux des trois phases, voir une seule, sont observées. Nous présentons dans ce paragraphe trois lois permettant de modéliser des durées de vie ayant des caractéristiques différentes : Weibull, Bertholon et New Modified Weibull Distribution (NMWD).

#### 4.2.1 La loi de Weibull

La loi de Weibull a été introduite en 1951 dans [Weibull, 1951]. Le taux de défaillance associé à cette loi est monotone, de ce fait la loi de Weibull ne modélise qu'une seule des trois phases décrites précédemment. Cette loi est paramétrée par deux coefficients :  $\eta$  représentant le paramètre d'échelle et  $\beta$  représentant le paramètre de

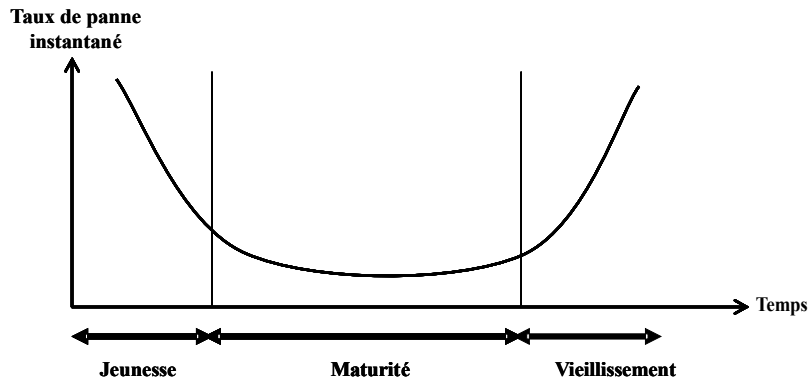


FIGURE 4.1 – Exemple de taux de panne en 'courbe en baignoire'

forme. Selon la valeur de  $\beta$ , plusieurs remarques peuvent être formulées :

- $\beta > 1$  : le composant vieillit et son taux de défaillance croit,
- $\beta < 1$  : le composant rajeunit et son taux de défaillance décroît,
- $\beta = 1$  : le composant ne vieillit pas et ne rajeunit pas, son taux de défaillance est constant. Dans ce cas, le composant suit une loi Exponentielle de paramètre  $\eta$ .

La fonction de fiabilité et le taux de hasard associés à la loi de Weibull sont donnés par les formules suivantes avec  $t \geq 0$  :

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta\right)$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

Le graphique de la FIGURE 4.2 représente le taux de défaillance associé à une loi de Weibull en fonction de différents jeux de paramètres.

Soit  $T$  une variable aléatoire suivant une loi de Weibull, sa moyenne et sa variance sont données par les formules suivantes :

$$E[T] = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

$$V(T) = \eta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - E[T]^2$$

avec  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ .

L'on parle de loi de Weibull décalée lorsque l'on considère que le taux est constant et égale à zéro jusqu'à un instant  $t_0$ . Dans ce cas, la fiabilité et le taux de hasard s'écrivent de la façon suivante :

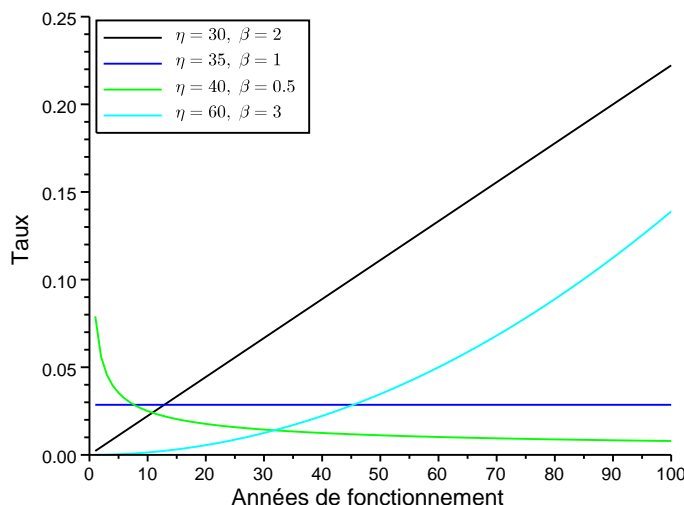


FIGURE 4.2 – Comportement du modèle de Weibull pour plusieurs jeux de paramètres

$$R(t) = \exp\left(-\left(\frac{(t-t_0)^+}{\eta}\right)^\beta\right)$$

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{(t-t_0)^+}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

### 4.2.2 La loi de Bertholon

Le modèle de Bertholon développé dans [Bertholon, 2001] et [Bertholon et al., 2004], permet de décrire la durée de vie d'un matériel dont le taux de panne est constant jusqu'à une date  $t_0$  puis croissant après cette date. Une interprétation possible d'un tel modèle est qu'il modélise un risque de panne accidentelle lors des premières années de fonctionnement puis deux risques concurrents, le premier étant accidentel et le deuxième lié au vieillissement du composant. Cette loi permet donc de modéliser deux phases : la phase de maturité et la phase de vieillissement. Soit  $Y$  une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre  $\eta_0$  et  $W$  une variable aléatoire de loi de Weibull décalée de paramètres  $(\eta_1, \beta, t_0)$ ,  $Y$  et  $W$  étant indépendantes. Soit  $T = \min(Y, W)$ , alors  $T$  suit une loi de Bertholon de paramètre  $(\eta_0, \eta_1, \beta, t_0)$ .

Les fonctions usuelles en fiabilité liées à ce modèle s'expriment de la façon suivante :

$$R(t) = \exp\left(-\frac{t}{\eta_0} - \left(\frac{t-t_0}{\eta_1}\right)^\beta \mathbf{1}_{t>t_0}\right)$$

$$\lambda(t) = \frac{1}{\eta_0} + \left(\frac{\beta}{\eta_1} \left(\frac{t-t_0}{\eta_1}\right)^{\beta-1}\right) \mathbf{1}_{t>t_0}$$

Le graphique de la FIGURE 4.3 représente le taux de défaillance associé à une loi de Bertholon en fonction de différents jeux de paramètres.

Dans [Bertholon, 2001], l'auteur calcule la moyenne et la variance dans le cas où  $\beta = 2$ . Dans le cas  $\beta \neq 2$ , l'auteur précise que les intégrales ne peuvent être calculées analytiquement. Les formules obtenues pour  $\beta = 2$



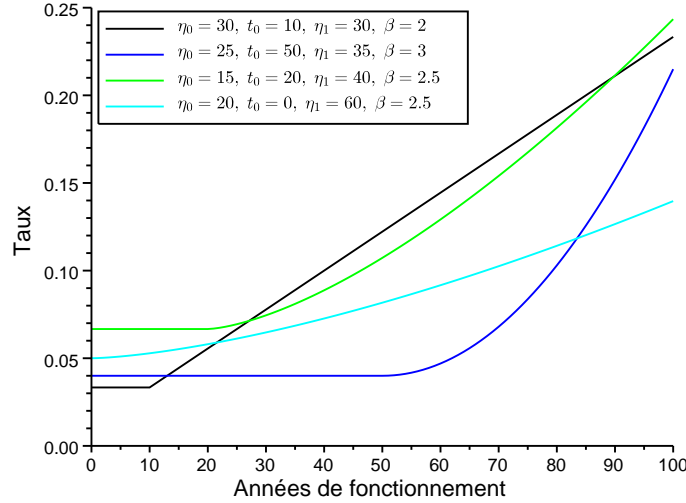


FIGURE 4.3 – Comportement du modèle de Bertholon pour plusieurs jeux de paramètres

sont :

$$E[T] = \eta_0 \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\right) + \eta_1 e^{\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2} - \frac{t_0}{\eta_0}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right) \quad \text{avec } \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$V(T) = E[T^2] - E[T]^2$$

$$E[T^2] = 2 \left[ \eta_0^2 \left(1 - e^{-\frac{t_0}{\eta_0}}\right) - t_0 \eta_0 e^{-\frac{t_0}{\eta_0}} + \eta_1 e^{\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2} - \frac{t_0}{\eta_0}} \left( \left(t_0 - \frac{\eta_1^2}{2\eta_0}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\eta_1}{2\eta_0}\right) + \frac{1}{2} \eta_1 e^{-\frac{\eta_1^2}{4\eta_0^2}} \right) \right]$$

### 4.2.3 Une généralisation de la loi de Weibull : modèle 'New Modified Weibull Distribution'

La loi de Weibull présentée dans un paragraphe précédent ne permet de modéliser qu'une des trois phases. Nous présentons dans ce paragraphe une généralisation de cette loi de Weibull permettant de modéliser deux phases : la phase de jeunesse et la phase de vieillissement. Ce modèle est nommé 'New Modified Weibull Distribution' (NMWD) et a été introduit dans [Lai et al., 2003]. Ce modèle est caractérisé par les fonctions suivantes avec  $t \geq 0$  :

$$R(t) = \exp(-at^b \exp(c \cdot t))$$

$$\lambda(t) = a(b + c \cdot t)t^{b-1} \exp(c \cdot t)$$

Les paramètres doivent obéir aux contraintes suivantes :  $a > 0$ ,  $b \geq 0$  et  $c > 0$ .

La forme du taux de panne dépend seulement du paramètre  $b$ , deux cas se distinguent :

**Cas 1** :  $b \geq 1$

$\lambda(t)$  est croissante avec  $t$

$\lambda(0) = 0$  si  $b > 1$

$\lambda(0) = ab$  si  $b = 1$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \infty$

**Cas 2** :  $0 < b < 1$

$\lambda(t)$  est décroissante puis croissante avec  $t$

$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \infty$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \infty$

Le point de changement de monotonie de  $\lambda(t)$  est

$$t^* = \frac{\sqrt{b-b}}{c}$$

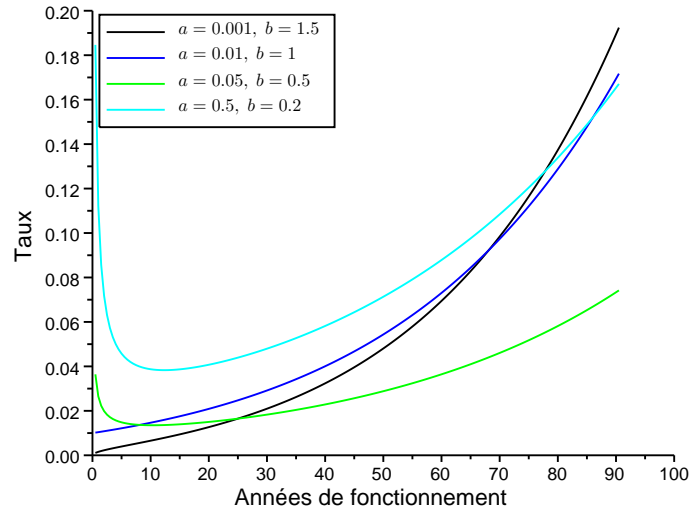


FIGURE 4.4 – Comportement du modèle NMWD pour plusieurs jeux de paramètres

Le taux de panne associé à cette modélisation a une forme en baignoire lorsque  $0 < b < 1$ . La forme du taux de panne instantané en fonction des paramètres  $a$  et  $b$  est illustrée dans la FIGURE 4.4.

**Remarque 45.** Si  $c = 0$ , le modèle NWMD se ramène au modèle de Weibull classique.

Les modèles présentés dans ce paragraphe permettent de modéliser la durée de vie d'un composant dans plusieurs cas possibles. Ces modèles sont suffisants pour décrire la durée de vie des composants des systèmes étudiés lors de cette thèse. En revanche, ils ne permettent pas de modéliser l'effet d'une maintenance préventive sur la durée de vie d'un composant. Dans le prochain paragraphe, nous proposons d'utiliser une méthode issue de [Doyen, 2004] et [Doyen and Gaudoin, 2004] permettant de séparer l'effet des maintenances préventives de la dégradation intrinsèque du composant.

## 4.3 Modélisation de l'effet de la maintenance

Doyen et Gaudoin ont développé dans [Doyen, 2004] et [Doyen and Gaudoin, 2004] plusieurs modèles pour quantifier l'effet de la maintenance. En particulier, nous pouvons citer deux classes de modèles :

- les modèles de réduction arithmétique de l'âge (Arithmetic Reduction of Age ou ARA),
- les modèles de réduction arithmétique de l'intensité (Arithmetic Reduction of Intensity ou ARI).

Pour notre étude, seuls les modèles de type ARA d'ordre 1, notés  $ARA_1$ , sont utilisés. Avant de présenter le modèle  $ARA_1$ , nous commençons par introduire la notion d'âge virtuel.

Les cas d'application industriels étudiés dans cette thèse nécessitent de quantifier l'effet de maintenances préventives périodiques sur les composants d'un système. Les instants de ces maintenances sont déterministes et ne dépendent pas de l'état des composants. Nous présentons la notion d'âge virtuel et le modèle  $ARA_1$  dans ce cadre.

### 4.3.1 Modèle d'âge virtuel

Soit  $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ , les instants déterministes des maintenances préventives. Nous notons  $T_0 = 0$ . Un modèle d'âge virtuel est caractérisé par une suite de variables aléatoires positives  $A = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , appelées âges effectifs et telle que  $A_0 = 0$ . Ces modèles sont basés sur l'hypothèse suivante : si le système maintenu n'a subi aucune défaillance jusqu'à la  $i^{eme}$  maintenance préventive, le composant maintenu se comporte comme un composant non-maintenu

qui aurait fonctionné une durée  $A_i$ .  $A_i$  peut donc être considéré comme l'âge virtuel du composant après la  $i^{\text{eme}}$  maintenance préventive.

Soit  $Y$  une variable aléatoire modélisant la durée de fonctionnement du composant sans maintenance préventive et soit  $D$  une variable aléatoire modélisant la durée de fonctionnement du composant maintenu. Nous notons  $N_t$  le nombre de maintenances préventives que le composant a subies avant l'instant  $t$ . Cette quantité est ici déterministe. Nous avons pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(D > t | D > T_{N_t}) = \mathbb{P}(Y > A_{N_t} + t - T_{N_t} | Y > A_{N_t}) \quad (4.3.1)$$

On définit alors un âge virtuel pour le système étudié  $A(t)$  :

$$A(t) = t - T_{N_t} + A_{N_t}$$

Il s'agit de l'âge virtuel du composant à la dernière maintenance préventive ( $A_{N_t}$ ) auquel on ajoute le temps écoulé depuis cette dernière maintenance ( $t - T_{N_t}$ ). Ainsi l'âge virtuel est réévalué à chaque maintenance et, entre deux maintenances, il varie comme l'âge réel.

L'intensité de défaillance d'un composant maintenu est définie de la façon suivante :

$$\lambda_t = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\delta t} \mathbb{P}(t \leq D < t + \delta t | D \geq t) \quad (4.3.2)$$

L'intensité de défaillance  $\lambda_t$  du modèle d'âge virtuel s'exprime de la façon suivante avec  $\lambda$  le taux intrinsèque du composant, c'est-à-dire le taux de défaillance du composant non soumis à de la maintenance préventive :

$$\lambda_t = \lambda(A(t)) = \lambda(t - T_{N_t} + A_{N_t})$$

Après avoir défini les modèles d'âge virtuel, intéressons-nous au modèle que nous utilisons : le modèle  $ARA_1$ .

## 4.3.2 Le modèle $ARA_1$

### 4.3.2.1 Présentation théorique du modèle

Doyen et Gaudoin [Doyen and Gaudoin, 2004] ont proposé une classe de modèles dits à réduction arithmétique de l'âge de mémoire  $m$  ( $ARA_m$ ). Le principe de ces modèles est de réduire l'âge en prenant en compte l'effet des  $m$  dernières maintenances. L'âge virtuel à l'instant  $t$  est donné par la formule suivante :

$$A(t) = t - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, N_t-1)} (1 - \rho)^j T_{N_t-j}$$

L'intensité de défaillance associé au modèle  $ARA_m$  est :

$$\lambda_t = \lambda \left( t - \rho \sum_{j=0}^{\min(m-1, N_t-1)} (1 - \rho)^j T_{N_t-j} \right)$$

La mémoire  $m$  correspond au nombre de maintenances précédentes qui influencent l'intensité de défaillance. Dans ce modèle, l'efficacité de la maintenance est représentée par la valeur du paramètre  $\rho$ , donc évaluer l'efficacité de la maintenance revient à estimer  $\rho$ . Les coefficients de la loi intrinsèque du composant sont estimés conjointement avec  $\rho$ . Dans nos cas d'application, nous avons testé le cas  $m = 1$ , seul l'effet de la dernière maintenance préventive est pris en compte. L'intensité de défaillance associée à un modèle  $ARA$  d'ordre 1 ( $ARA_1$ ) est :

$$\lambda_t = \lambda(t - \rho T_{N_t})$$

Selon les valeurs de  $\rho$ , différentes remarques peuvent être faites :

- $\rho = 1$  : la maintenance est parfaite. On retrouve le modèle AGAN.
- $\rho \in ]0; 1[$  : la maintenance est efficace.

- $\rho = 0$  : la maintenance est nulle. On retrouve le modèle ABAO.
- $\rho < 0$  : la maintenance est nuisible.

Une base de données est à notre disposition et contient des informations sur  $n$  composants supposés iid. Ces informations sont, pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

- $t_i$  : minimum entre la durée de vie du composant  $i$  et l'instant de censure,
- $\delta_i$  : indicateur de censure avec  $\delta_i = 1$  si la donnée associée au composant  $i$  est une censure et  $\delta_i = 0$  sinon,
- $T_1^i, \dots, T_{N_{t_i}^i}^i$  : instants des maintenances préventives effectuées sur le composant  $i$ ,

Nous introduisons quelques notations :

- $\theta$  : paramètre de la loi intrinsèque du composant,
- $\lambda_\theta(t)$  : taux de panne instantané du composant non maintenu à l'instant  $t$ ,

L'intensité de défaillance du composant  $i$  maintenu est alors :

$$\lambda_t^{\theta,i} = \lambda_\theta(t - \rho T_{N_t^i}^i)$$

La fiabilité du composant  $i$  au temps  $t$  s'écrit de la façon suivante avec  $D^i$  l'instant de la défaillance :

$$\begin{aligned} R_t^{\theta,i} &= \mathbb{P}(D^i > t) \\ &= \mathbb{P}(D^i > t | D^i > T_{N_t^i}^i) \prod_{k=0}^{N_t^i-1} \mathbb{P}(D^i > T_{k+1}^i | D^i > T_k^i) \\ &= \exp\left(-\sum_{k=0}^{N_t^i-1} \left(\int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \lambda_\theta(s - \rho T_k^i) ds\right) - \int_{T_{N_t^i}^i}^t \lambda_\theta(s - \rho T_{N_t^i}^i) ds\right) \end{aligned}$$

Ainsi, la vraisemblance associée au modèle  $ARA_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned} L(t_i, T_1^i, \dots, T_{N_{t_i}^i}^i, i \in \{1, \dots, n\}, \theta, \rho) \\ &= \prod_{i=1}^n [\lambda_{t_i}^{\theta,i}]^{1-\delta_i} R_{t_i}^{\theta,i} \\ &= \prod_{i=1}^n [\lambda_\theta(t_i - \rho T_{N_{t_i}^i}^i)]^{1-\delta_i} \exp\left(-\sum_{k=0}^{N_{t_i}^i-1} \left(\int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \lambda_\theta(s - \rho T_k^i) ds\right) - \int_{T_{N_{t_i}^i}^i}^{t_i} \lambda_\theta(s - \rho T_{N_{t_i}^i}^i) ds\right) \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Pour appliquer ce modèle, nous choisissons d'effectuer une hypothèse sur la forme de la loi de vieillissement intrinsèque du composant. Nous testons deux possibilités : la loi de Weibull et la loi de Bertholon.

#### 4.3.2.2 Loi intrinsèque de type Weibull

L'intensité de défaillance associée à ce modèle est de la forme :

$$\lambda_t = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \rho T_{N_t}^i}{\eta} \right)^{\beta-1}$$

L'estimation des paramètres de ce modèle est réalisée par la méthode du maximum de vraisemblance. La vraisemblance (4.3.4) est maximisée à l'aide de l'algorithme du gradient conjugué.

$$\begin{aligned}
L(t_i, T_1^i, \dots, T_{N_{T_i}^i}^i, i \in \{1, \dots, n\}, \eta, \beta, \rho) = \\
\prod_{i=1}^n \left[ \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t_i - \rho T_{N_{T_i}^i}^i}{\eta} \right)^{\beta-1} \right]^{1-\delta_i} \exp \left( - \sum_{k=0}^{N_{T_i}^i-1} \left[ \left( \frac{T_{k+1}^i - \rho T_k^i}{\eta} \right)^\beta - \left( \frac{T_k^i - \rho T_k^i}{\eta} \right)^\beta \right] \right) \\
\exp \left( - \left[ \left( \frac{t_i - \rho T_{N_{T_i}^i}^i}{\eta} \right)^\beta - \left( \frac{T_{N_{T_i}^i}^i - \rho T_{N_{T_i}^i}^i}{\eta} \right)^\beta \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

### 4.3.2.3 Loi intrinsèque de type Bertholon

L'utilisation de loi de Bertholon comme loi intrinsèque du modèle  $ARA_1$  pose des difficultés. L'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance n'est pas aussi aisée qu'avec la loi de Weibull. Les algorithmes d'optimisation utilisés ne semblent pas converger. Nous avons donc apporté une légère modification au modèle  $ARA_1$ .

Cette modification consiste à supposer qu'une action de maintenance effectuée avant l'instant  $t_0$  n'a pas d'effet sur la durée de vie du composant. L'effet est uniquement modélisé après l'instant  $t_0$ . Cette hypothèse est justifiée par le fait qu'avant l'instant  $t_0$ , les défaillances sont supposées être accidentelles (taux constant) et qu'une action de maintenance ne peut pas les prévenir. L'intensité de défaillance associée à ce modèle est de la forme :

$$\lambda_t = \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1} \left( \frac{(t - t_0)^+ - \rho (T_{N_t} - t_0)^+}{\eta_1} \right)^{\beta-1}$$

Ainsi, la vraisemblance s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
L(t_i, T_1^i, \dots, T_{N_{T_i}^i}^i, i \in \{1, \dots, n\}, t_0, \eta_0, \eta_1, \beta, \rho) = \\
\prod_{i=1}^n \left[ \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta_1} \left( \frac{(t_i - t_0)^+ - \rho (T_{N_{T_i}^i}^i - t_0)^+}{\eta_1} \right)^{\beta-1} \right]^{1-\delta_i} \\
\exp \left( - \sum_{k=0}^{N_{T_i}^i-1} \left[ \left( \frac{(T_{k+1}^i - t_0)^+ - \rho (T_k^i - t_0)^+}{\eta_1} \right)^\beta - \left( \frac{(T_k^i - t_0)^+ (1 - \rho)}{\eta_1} \right)^\beta \right] \right) \\
\exp \left( - \left[ \frac{t_i}{\eta_0} + \left( \frac{(t_i - t_0)^+ - \rho (T_{N_{T_i}^i}^i - t_0)^+}{\eta_1} \right)^\beta - \left( \frac{(T_{N_{T_i}^i}^i - t_0)^+ (1 - \rho)}{\eta_1} \right)^\beta \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Contrairement au cas précédent, les dérivées partielles sont difficiles à calculer. Ainsi, pour éviter cette difficulté, la vraisemblance est maximisée à l'aide de l'algorithme de recuit simulé (cf Annexe B).

Tous les outils nécessaires à la modélisation probabiliste d'un système ont été introduits. La prochaine partie de ce document est consacrée aux cas d'application industriels : les systèmes de climatisation utilisés dans des TER et les passages à niveau.

## Chapitre 5

# Optimisation de la maintenance d'un système de climatisation de TER

### 5.1 Contexte de l'étude

La maintenance des groupes de climatisation notamment ceux équipant les TER X72500 est effectuée dans un établissement de maintenance situé dans le Périgord. Ces systèmes ont été mis en service entre 1998 et 2004. Il a été constaté une recrudescence des défaillances de ces groupes au cours des dernières années. Pour garantir le potentiel de fonctionnement de ces groupes à trente ans, l'établissement industriel de maintenance a prévu de mener une opération de révision générale des groupes de climatisation.

Ainsi la Direction de l'Innovation et de la Recherche a été sollicitée dans le cadre de la commission TAM (Techniques Avancées de Maintenance) pour mener une étude de fiabilité en exploitation de ces groupes de climatisation afin de déterminer une stratégie optimale de maintenance préventive.

L'étude s'est déroulée en plusieurs étapes. La première étape a consisté à réunir et exploiter le retour d'expérience disponible (défaillances des groupes depuis leur mise en service, avis d'expert, temps moyen de bon fonctionnement fournis par le fabricant, essais de fatigue...) afin d'estimer les lois de défaillance des composants du groupe de climatisation. Cette première partie a fait l'objet d'une prestation menée par la société NOEO et n'est pas détaillée dans ce rapport. Cependant, les résultats des lois de défaillance des composants obtenus à l'issue de la prestation sont exploités ici.

La deuxième étape a consisté à modéliser l'évolution d'un groupe de climatisation dans le temps afin d'évaluer la stratégie de maintenance actuelle, qui n'est que corrective, et de déterminer une stratégie de maintenance préventive optimale. Le système est modélisé à l'aide d'un PDMP et la quantification numérique est effectuée à l'aide du schéma de volumes finis appliqué avec la méthode  $A^2$ . Cette méthode a permis de tester différents scénarii de maintenance des groupes de climatisation en évaluant d'une part la performance du système en terme de fiabilité et d'autre part les coûts de maintenance associés. Cependant, la combinatoire des scénarii de maintenance à tester étant trop importante, un algorithme d'optimisation stochastique de type Recuit Simulé a été mis en place afin de déterminer la stratégie de maintenance optimale sans avoir à tester l'ensemble des scénarii possibles. Deux types de stratégies de maintenance ont été optimisés. La première répond à la problématique posée par l'établissement industriel en proposant une opération de révision générale optimisée. La seconde stratégie est de type opportuniste et n'est pour l'instant pas utilisée à la SNCF du fait de contraintes logistiques importantes que cela entraîne. Cette stratégie est proposée à titre indicatif et permet aux décideurs d'avoir le choix quant à la stratégie employée.

Le prochain paragraphe présente le système de climatisation ainsi que la stratégie de maintenance à laquelle il est soumis.

## 5.2 Description du système climatisation

La FIGURE 5.1 décrit le système de climatisation. Celui-ci comporte vingt-deux composants mais seuls dix sept sont pris en compte dans la modélisation. Cinq composants ne sont pas étudiés car il s'agit de consommables régulièrement remplacés ou de composants pour lesquels très peu de défaillances ont été observées. Les composants modélisés sont répartis sur trois branches que nous appelons  $A$ ,  $B$  et  $S$ . Les branches  $A$  et  $B$  sont en redondance active et les composants de la partie  $S$  sont en série. Les branches  $A$  et  $B$  sont identiques et possèdent cinq composants. Elles fonctionnent en même temps. Quand un composant de l'une d'entre elles tombe en panne, les composants situés sur la même branche s'arrêtent de fonctionner. Dans ce cas, le système continue de fonctionner normalement et la défaillance n'est pas détectée. Lorsqu'un composant de l'autre branche ou de la partie  $S$  tombe en panne, le système subit une défaillance et ne fonctionne plus. Celui-ci est démonté et envoyé en centre de maintenance afin de subir une maintenance corrective consistant à remplacer les composants défaillants par des composants neufs. La durée d'une maintenance corrective se compte en jours alors que l'ordre de grandeur de la durée de vie du système est en années. De ce fait, nous négligeons la durée des maintenances qui sont considérées être instantanées.

Jusqu'à aujourd'hui la stratégie de maintenance concernant les composants modélisés est purement corrective. Certains composants non pris en compte dans l'étude tels que les filtres sont remplacés régulièrement, il s'agit de consommables. Ainsi dans le cadre de l'étude, les seules maintenances que le système subit sont effectuées à la suite d'une défaillance. L'objectif de cette étude est de proposer une stratégie de maintenance préventive permettant de garantir le fonctionnement du système à trente ans. La première partie de l'étude consiste à effectuer une étude statistique et probabiliste de la durée de vie des composants du système. Cette étude ne sera pas détaillée dans ce document, seuls les résultats utiles pour la modélisation du système sont présentés dans le prochain paragraphe.

## 5.3 Étude de la durée de vie des composants

Les données ayant permis de réaliser l'étude de durée de vie des composants sont issues de la base LIONNE. Les ventilateurs et le manostat d'air ayant subi peu de défaillances, des méthodes bayésiennes utilisant les avis des experts SNCF ont permis d'affiner les résultats. Le détail de cette étude peut être trouvé dans [Ziani, 2007]. La loi de durée de vie de chacun des composants est modélisée par la loi de Weibull à deux paramètres ou par la loi Exponentielle. Les résultats de cette étude sont confidentiels et ne sont pas fournis dans ce document. Cette étude a permis de mettre en évidence le vieillissement d'une partie des composants du système de climatisation. Le PDMP paraît donc être un modèle adapté pour cette étude. Ce processus nous permet de prendre en compte le vieillissement des composants et la stratégie de maintenance appliquée sur les groupes de climatisation. La modélisation est présentée dans le prochain paragraphe.

## 5.4 Modélisation du système par PDMP

Dans ce cas d'application, la variable  $I_t$  représente les états discrets du système. En posant 0 pour un composant en panne et 1 pour un composant en fonctionnement, l'espace discret du PDMP est  $E = \{0, 1\}^{17}$ . Certains états de  $E$  ne sont jamais atteints du fait de la stratégie de maintenance à laquelle est soumis le système. Les maintenances étant instantanées, le système ne reste jamais dans un état de panne. Ainsi, la variable  $I_t$  évolue dans une petite partie de  $E$  correspondant à :

- 1 : tous les composants sont en fonctionnement,
- $1_{K,i}$  : le système fonctionne mais le composant  $i$  de la partie  $K$  est en panne ( $K \in \{A, B\}$ ).

Tous les composants sauf l'évaporateur ont une loi de durée de vie de type Weibull avec un paramètre de forme supérieur à 1. De ce fait, la deuxième variable du PDMP  $X_t$  décrit l'âge de tous les composants du système à l'instant  $t$  sauf celui de l'évaporateur. Ainsi  $X_t$  évolue dans un compact  $C$  de  $\mathbb{R}_+^{16}$ . A ce stade de l'étude, nous n'avons pas mis en évidence la pertinence du choix d'autres variables physiques (voir paragraphe 2.5.4) ce qui explique pourquoi nous gardons ici l'âge des composants en mémoire et non leur date de mise en service.

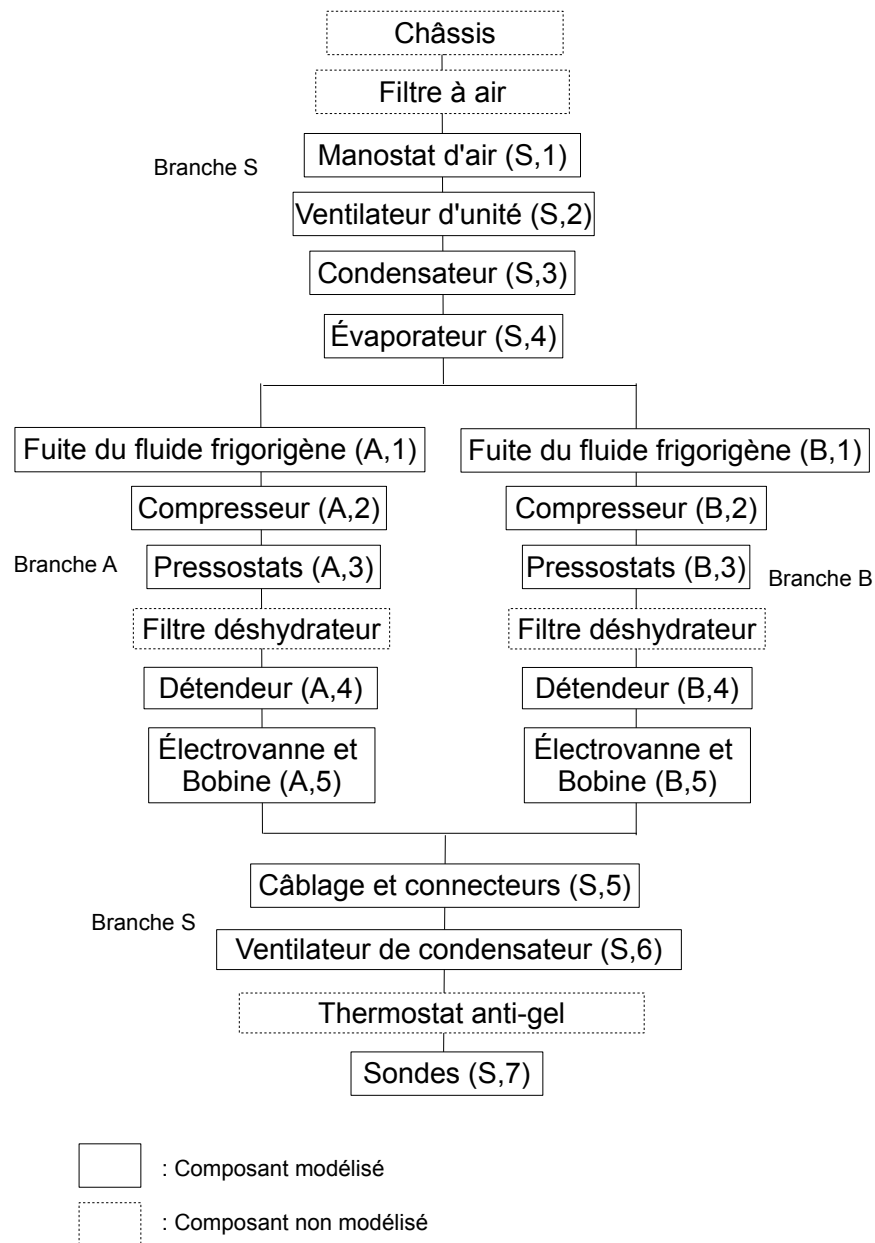


FIGURE 5.1 – Schéma du système de climatisation des TER 72500X



Quand tous les composants du système sont en fonctionnement c'est-à-dire que le PDMP se trouve dans l'état 1, tous les composants vieillissent, ainsi pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in C$

$$g(1, x, t) = x + t \cdot 1$$

avec 1 le vecteur unité de 16 composantes.

Quand le système se trouve dans l'état  $1_{K,i}$  ( $K \in \{A, B\}$  et  $i \in K$ ), tous les composants vieillissent exceptés ceux se trouvant sur la même branche  $K$ . Ainsi, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $x \in C$ ,  $K \in \{A, B\}$  et  $i \in K$ ,

$$g(1_{K,i}, x, t) = x + t \cdot \epsilon^{K,i}$$

avec  $\epsilon^{K,i} \in \{0, 1\}^{16}$  tel que  $\epsilon_{K,j}^{K,i} = 0$  pour tout composant  $j$  sur le branche  $K$  et  $\epsilon_{L,j}^{K,i} = 1$  pour tout composant  $j$  sur une autre branche  $L \neq K$ .

Le processus saute lorsqu'un composant tombe en panne. L'indépendance stochastique des composants entraîne que le taux de défaillance d'un composant  $(K, i)$  ne dépend que de son âge  $x_{K,i}$  (sauf pour l'évaporateur) et est noté  $a_{K,i}(x_{K,i})$  avec  $K \in \{A, B, S\}$ . Pour l'évaporateur, le taux associé est constant et ne dépend pas de son âge. La défaillance d'un composant appartenant à la partie en redondance (branche  $A$  ou  $B$ ) n'entraîne pas la défaillance du système et ainsi n'est pas détectée. Le PDMP saute de l'état 1 vers l'état  $1_{K,i}$  et le noyau associé à cette transition est :

$$\tau((1, x), (1_{K,i}, dy)) = a_{K,i}(x_{K,i}) \delta_x(dy)$$

où  $\delta_x(dy)$  représente la masse de Dirac en  $x$  définie dans (1.3.7), modélisant le fait que l'âge des composants ne change pas.

Nous introduisons les notations suivantes :

- $\sum_{K \in \{A, B, S\}}$  : somme sur les trois branches du système de climatisation,
- $\sum_{i \in K}$  : somme sur les composants appartenant à la branche  $K$  avec  $K \in \{A, B, S\}$ .

La défaillance d'un composant situé sur une branche  $L$  ( $L \in \{A, B\}$ ) alors qu'un composant  $(K, i)$  est en panne ( $K \in \{A, B\}$  et  $K \neq L$ ) entraîne la défaillance du système. Une maintenance corrective est entreprise et les composants défaillants sont remplacés par des neufs, leurs âges respectifs sont remis à zéro. Les autres composants ne sont pas remplacés. Le PDMP saute de l'état  $1_{K,i}$  vers l'état 1. Le noyau de transition est :

$$\tau((1_{K,i}, x), (1, dy)) = \sum_{L \in \{A, B, S\} \setminus K} \sum_{j \in L} a_{L,j}(x_{L,j}) \delta_0(dy_{K,i}) \delta_0(dy_{L,j}) \prod_{(M,k) \notin \{(K,i), (L,j)\}} \delta_{x_{M,k}}(dy_{M,k})$$

La défaillance d'un composant de la partie  $S$  entraîne la défaillance du système même si celui-ci se trouve dans l'état 1. Le composant défaillant est remplacé par un neuf, son âge est remis à zéro. Les autres composants ne sont pas remplacés car ils ne sont pas en panne (état 1). Cet événement n'entraîne pas le saut du PDMP car une maintenance corrective est instantanée ainsi le PDMP reste dans l'état 1. Le noyau de transition est :

$$\tau((1, x), (1, dy)) = \sum_{j \in S} a_{S,j}(x_{S,j}) \delta_0(dy_{S,j}) \prod_{(M,k) \neq (S,j)} \delta_{x_{M,k}}(dy_{M,k})$$

La modélisation du système par PDMP permet d'écrire les équations de Chapman-Kolmogorov et ainsi d'utiliser le schéma de volumes finis présenté dans le Chapitre 2.

## 5.5 Quantification avec le schéma de volumes finis

La quantité de variables physiques à garder en mémoire est importante dans ce cas d'application. Nous devons en garder 16, une par composant vieillissant. Comme nous l'avons expliqué dans le Chapitre 2, l'utilisation du schéma de volumes finis avec autant de variables physiques n'est pas possible d'un point de vue informatique. La première chose à faire est d'isoler les composants indépendants afin de réduire l'espace à discrétiser. Cependant, la stratégie de maintenance corrective à laquelle est soumis le système rend les composants fonctionnellement

dépendants les uns des autres. En effet, le remplacement d'un composant défaillant du circuit  $A$  ou  $B$  est conditionné par la défaillance d'un autre composant. Cette méthode n'est donc pas suffisante pour réduire l'espace ; de ce fait, nous utilisons la méthode  $A^2$ . Cette méthode est appliquée dans le cas le plus simple, les niveaux de la méthode  $A^2$  sont tous égaux à 1. En reprenant les notations associées au schéma de volumes finis, pour  $\eta \in E$  et  $\bar{x} \in \mathcal{M}$ , nous construisons seize suites de fonctions notées  $(\nu_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$  avec  $j \in \{1, \dots, 16\}$  telles que :

$$\tilde{u}_n(\bar{x}, \eta) = \prod_{j=1}^{16} \nu_n^j(\bar{x}_j, \eta)$$

avec  $\tilde{u}_n(\bar{x}, \eta)$  une approximation de  $u_n(\bar{x}, \eta)$ .

## 5.6 Les stratégies de maintenance préventive pour le système de climatisation

### 5.6.1 Deux stratégies de maintenance préventive

#### 5.6.1.1 La révision générale

La première stratégie de maintenance envisagée consiste à effectuer une révision générale sur le système durant laquelle les composants plus âgés qu'un âge limite sont remplacés en plus des composants défaillants. Un intérêt majeur de ce type de stratégie est qu'une révision générale est prévue en avance ce qui permet d'organiser l'emploi du temps des agents de maintenance et de ne pas créer d'indisponibilité gênante pour les usagers. Lors d'une maintenance de ce type, seuls les composants endommagés ou trop dégradés sont remplacés où le critère de dégradation est ici modélisé à travers un âge limite. Une telle stratégie est définie à partir de deux types de paramètres :

- la date de la révision générale,
- l'âge limite des composants du système.

Le nombre d'âges limites à déterminer peut être diminué de part les caractéristiques du système. Comme les composants des branches  $A$  et  $B$  sont identiques, leurs âges limites sont les mêmes. L'évaporateur ne vieillissant pas, il n'est pas nécessaire de le remplacer préventivement. Enfin, une fuite du fluide frigorigène n'est pas dû au vieillissement du fluide donc le remplacer préventivement ne permettrait pas de prévenir un tel événement. Ainsi, il nous reste dix âges limites à déterminer.

#### 5.6.1.2 La stratégie de maintenance opportuniste

La seconde stratégie est une stratégie de maintenance opportuniste. Ce type de stratégie consiste à profiter d'une maintenance corrective pour effectuer une maintenance préventive en remplaçant préventivement les composants ayant dépassé un âge limite. Cette stratégie n'est pour l'instant pas utilisée à la SNCF, cependant elle a fait l'objet de plusieurs discussions avec des décideurs qui lui ont trouvé un intérêt certain. L'intérêt majeur de cette stratégie est que les maintenances préventives sont effectuées en même temps que les maintenances correctives. Une action de maintenance corrective ou préventive nécessite le retrait du système et le transport jusqu'au centre de maintenance. Le fait de grouper ces deux types de maintenance permet de ne pas avoir à effectuer ces travaux spécialement pour une action de maintenance préventive. Pour optimiser ce type de maintenance, dix âges limites doivent être déterminés comme pour la stratégie avec révision générale.

Nous appelons consistance d'une stratégie de maintenance, les actions à effectuer sur le système lors d'une maintenance. Ces actions peuvent correspondre à un entretien (huilage, réglage...) ou à des critères de remplacement préventif des composants. Pour les deux stratégies présentées, la consistance correspond aux âges limites.

### 5.6.2 Modélisation des stratégies de maintenance préventive

Les deux stratégies envisagées peuvent être modélisées par un PDMP avec une légère modification du PDMP présenté précédemment.

### 5.6.2.1 La révision générale

Si la révision générale est effectuée à la date  $T$ , le système peut changer d'état ce qui est modélisé par l'introduction de nouveaux noyaux de transition notés  $q$ . Au temps  $T$ , les âges des composants sont remis à zéro s'ils ont dépassé leur âge limite noté  $r_{K,i}$  pour  $K \in \{A, B, S\}$  ou s'ils sont défaillants. Les noyaux de transition due à la révision générale sont :

$$q((1, x), (1, dy)) = \prod_{K \in \{A, B, S\}} \prod_{i \in K} (\delta_0(dy_{K,i}) 1_{x_{K,i} \geq r_{K,i}} + \delta_{x_{K,i}}(dy_{K,i}) 1_{x_{K,i} < r_{K,i}})$$

Pour  $K \in \{A, B\}$

$$q((1_{K,i}, x), (1, dy)) = \delta_0(dy_{K,i}) \prod_{(L,j) \neq (K,i)} (\delta_0(dy_{L,j}) 1_{x_{L,j} \geq r_{L,j}} + \delta_{x_{L,j}}(dy_{L,j}) 1_{x_{L,j} < r_{L,j}})$$

### 5.6.2.2 La stratégie de maintenance opportuniste

L'âge limite du composant  $(K, i)$  est, comme pour la stratégie de type révision générale, noté  $r_{K,i}$ . La modélisation de cette stratégie entraîne la modification des noyaux de transition induits par les défaillances de composant entraînant une défaillance du système et donc une maintenance corrective, pour  $K \in \{A, B\}$  :

$$\tau((1_{K,i}, x), (1, dy)) = \sum_{L \in \{A, B, S\} \setminus K} \sum_{j \in L} a_{L,j}(x_{L,j}) \delta_0(dy_{K,i}) \delta_0(dy_{L,j}) \prod_{(M,k) \notin \{(K,i), (L,j)\}} (\delta_0(dy_{M,k}) 1_{x_{M,k} \geq r_{M,k}} + \delta_{x_{M,k}}(dy_{M,k}) 1_{x_{M,k} < r_{M,k}})$$

$$\tau((1, x), (1, dy)) = \sum_{j \in S} a_{S,j}(x_{S,j}) \delta_0(dy_{S,j}) \prod_{(M,k) \neq (S,j)} (\delta_0(dy_{M,k}) 1_{x_{M,k} \geq r_{M,k}} + \delta_{x_{M,k}}(dy_{M,k}) 1_{x_{M,k} < r_{M,k}})$$

## 5.7 Optimisation de la maintenance

### 5.7.1 Critères d'optimisation

L'établissement en charge de la maintenance des groupes de climatisation a formulé le besoin d'obtenir des stratégies de maintenance optimales en fonction de deux critères : le coût de maintenance et le nombre moyen de défaillances avec contrainte de coût.

Optimiser une stratégie de maintenance en fonction d'un critère de coût signifie dans notre cas, trouver la stratégie qui minimise la fonction de coût d'entretien du système sur trente ans. Ce coût correspond à la somme du coût des maintenances correctives et du coût des maintenances préventives. L'objectif associé à ce type d'optimisation peut se formuler différemment : évaluer l'investissement en maintenance préventive nécessaire pour économiser suffisamment en maintenance corrective afin que le budget alloué à la maintenance du système de climatisation sur trente ans soit le plus bas possible.

Le deuxième critère d'optimisation est un critère de qualité, il s'agit de déterminer la stratégie de maintenance qui minimise le nombre moyen de défaillances du système sur trente ans avec un budget donné. En fait, on cherche à déterminer comment utiliser le mieux possible le budget alloué à la maintenance des systèmes de climatisation afin que cette maintenance soit la plus efficace possible.

Les coûts de maintenance (remplacement des composants, main d'œuvre...) sont confidentiels. Le prochain paragraphe présente la fonction de coût.

### 5.7.2 Fonction de coût

Introduisons les notations suivantes :

Stratégie de maintenance	Coût moyen	Nombre moyen de pannes
Révision générale	-10.7%	-40%
Maintenance opportuniste	-13.7%	-25.6%

TABLE 5.1 – Comparaison du coût de maintenance et du nombre de défaillances associés aux deux stratégies de maintenance préventive minimisant le coût moyen de maintenance du système par rapport aux mêmes quantités associées à une stratégie de maintenance purement corrective. Les quantités sont évaluées sur trente ans.

- $C_d$  : coût d'une défaillance,
- $C_{K,i}$  : coût de remplacement du composant  $(K, i)$  avec  $K \in \{A, B, S\}$  et  $i \in K$ ,
- $C_{RG}$  : coût d'une révision générale,
- $N_d(t)$  : nombre de défaillances subies par le système avant la date  $t$ ,
- $N_{K,i}(t)$  : nombre de remplacements du composant  $(K, i)$  avant la date  $t$  avec  $K \in \{A, B, S\}$  et  $i \in K$ ,

La fonction de coût est :

$$C(t) = C_d \cdot N_d(t) + C_{RG} 1_{T \leq t} + \sum_{K \in \{A, B, S\}} \sum_{i \in K} C_{K,i} \cdot N_{K,i}(t)$$

L'optimisation des stratégies de maintenance détaillées précédemment est réalisée dans deux cas :

- Minimisation de la fonction de coût,
- Minimisation du nombre moyen de défaillances avec un budget fixé.

Cette fonction dépend du nombre de défaillances, du nombre de remplacements de chaque composant et du nombre de forfaits facturés. Ces quantités dépendent directement des âges limites définis par les stratégies de maintenances préventives et sont estimées à l'aide du schéma de volumes finis en appliquant la méthode  $A^2$  de niveaux tous égaux à 1.

Le nombre de stratégies possibles est très grand, ce qui nous empêche de toutes les tester. Nous utilisons donc un algorithme de Recuit Simulé qui va nous permettre de théoriquement trouver la stratégie optimale en ne testant qu'une partie des stratégies possibles.

### 5.7.3 Stratégies optimales selon le critère de coût

Nous avons déterminé deux stratégies optimales, la première est de type révision générale et la deuxième est de type opportuniste. Les résultats étant confidentiels, ces stratégies ne sont pas détaillées dans ce document. Le coût et le nombre de pannes associés à ces stratégies sont visibles dans la TABLE 5.1. La stratégie de révision générale entraîne une diminution de 10.7% du coût de maintenance et de 40% du nombre de défaillances. La stratégie de maintenance opportuniste permet de diminuer le coût de maintenance de 13.7% et le nombre de défaillances de 25.6%. Les deux stratégies permettent de réduire le coût et le nombre de défaillances.

Nous pouvons observer dans le graphique de la FIGURE 5.2 l'effet des différentes stratégies de maintenance sur le nombre moyen de défaillances du système. La révision générale effectuée lorsque le système atteint l'âge de seize ans permet de diminuer considérablement le nombre moyen de pannes dès l'année suivante. Avant la révision générale, le système se comporte de la même manière que le système soumis à une stratégie purement corrective, ainsi les courbes sont confondues. L'effet de la stratégie de maintenance opportuniste est réparti dans le temps. Ceci est dû au fait que les actions de maintenance préventive ont lieu de manière aléatoire uniquement à la suite d'une défaillance.

Le graphique de la FIGURE 5.3 permet d'observer l'évolution des coûts de maintenance cumulés au cours du temps. Il est ainsi possible d'observer l'investissement engendré par la révision général à seize ans ainsi que

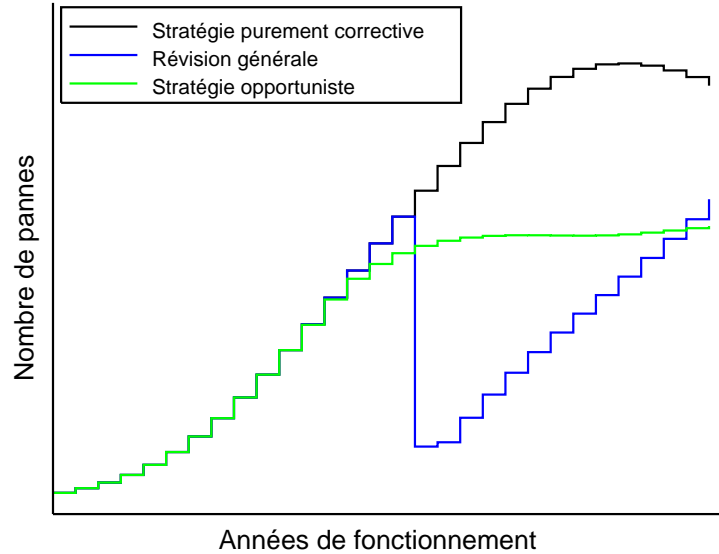


FIGURE 5.2 – Nombre moyen de défaillances du système de climatisation année par année avec les stratégies minimisant le coût moyen de maintenance et la stratégie actuelle

l'économie qu'elle va entraîner. Le retour sur investissement a lieu lorsque le système atteint l'âge de vingt-quatre ans.

La stratégie de maintenance opportuniste ne permet pas d'éviter la première défaillance. De ce fait, cette stratégie ne permet pas d'améliorer la fiabilité. En revanche, une révision générale prévient la première défaillance si elle n'a pas eu lieu avant, de ce fait cette stratégie améliore la fiabilité. Les courbes de fiabilité sont visibles dans le graphique de la FIGURE 5.4.

Les résultats sont obtenus à l'aide de la méthode  $A^2$  présentée dans le Chapitre 2. Afin d'évaluer l'erreur commise dans ce cas d'application, nous cherchons à retrouver les mêmes quantités à l'aide de simulations de Monte-Carlo. Deux paramètres influent sur la précision des résultats. Le premier est le pas de discrétisation de l'espace des variables physiques  $h$  et le deuxième est le niveau associé à chacun des composants. Pour cette étude, le deuxième paramètre est fixé à un pour tous les composants. Deux différentes valeurs de  $h$  sont testées : un mois ( $1/12$ ) et quatre mois ( $1/3$ ).  $10^4$  histoires sont simulées pour la méthode de Monte-Carlo pour chacune des stratégies de maintenance (maintenance purement corrective, maintenance avec révision générale et maintenance opportuniste). Le coût moyen et le nombre moyen de défaillances sont estimés à partir des données simulées permettant ainsi de comparer les résultats trouvés avec la méthode  $A^2$ . Les résultats se trouvent dans la TABLE 5.2.

En ce qui concerne la stratégie purement corrective et la stratégie avec révision générale, l'erreur commise par la méthode  $A^2$  est faible. Il est de plus intéressant de remarquer que le fait de diminuer  $h$  permet d'améliorer les résultats issus de la méthode  $A^2$ . En revanche, les résultats associés à la stratégie de maintenance opportuniste sont de moins bonne qualité. Une explication possible est que cette stratégie de maintenance entraîne une plus grande dépendance entre les âges des composants. La méthode  $A^2$  utilisée avec un niveau égal à un suppose une sorte d'indépendance, ce qui n'est pas le cas. Pour avoir de meilleurs résultats, une possibilité est d'augmenter le niveau d'un ou plusieurs composants. Cela n'a pas été réalisé dans le cadre de cette thèse et constitue une amélioration possible de cette étude. Une autre possibilité pour améliorer les résultats serait d'utiliser un PDMP non-homogène dont les variables physiques représentent la date de mise en service des composants (méthode proposée dans le paragraphe 2.5.4).

Les simulations de Monte-Carlo ont donc permis de vérifier les résultats trouvés avec le schéma de volumes finis et de mettre en évidence le fait que la méthode  $A^2$ , utilisée avec des niveaux égaux à un, donne des résultats

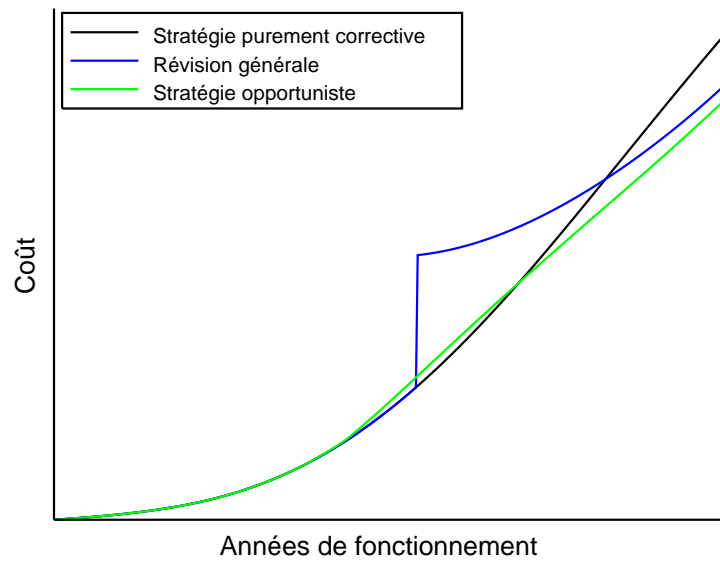


FIGURE 5.3 – Coût moyen cumulé de maintenance du système de climatisation sur trente ans avec les stratégies minimisant le coût moyen de maintenance et la stratégie actuelle

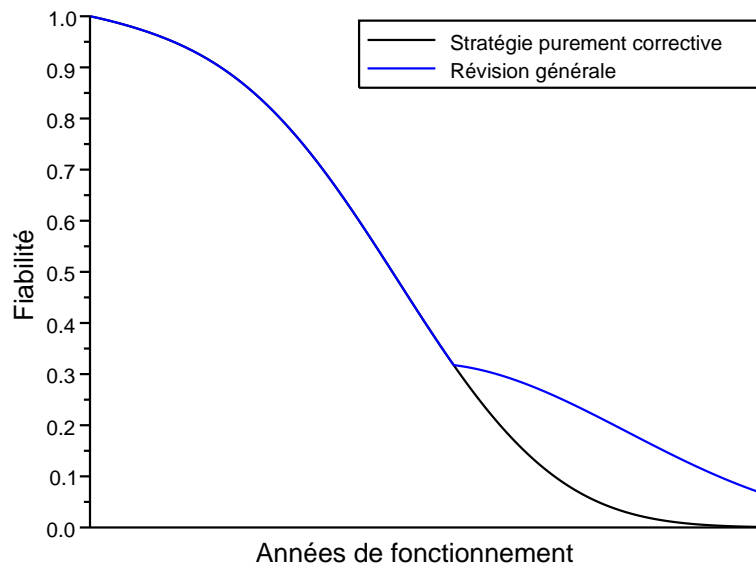


FIGURE 5.4 – Fiabilité du système de climatisation sur trente ans avec la stratégie de type révision générale minimisant le coût moyen de maintenance et le stratégie actuelle

Méthode de calcul	Coût moyen	Nombre moyen de pannes
Stratégie purement corrective		
Monte-Carlo ( $10^4$ simulations)	$IC = [-1.34\%, +1.34\%]$	$IC = [-1.3\%, +1.3\%]$
Volumes finis $h = \frac{1}{3}$	+2.17%	+3.17%
Volumes finis $h = \frac{1}{12}$	+0.76%	+1.58%
Stratégie avec révision générale		
Monte-Carlo ( $10^4$ simulations)	$IC = [-1.52\%, +1.52\%]$	$IC = [-2.2\%, +2.2\%]$
Volumes finis $h = \frac{1}{3}$	+1.94%	+3.08%
Volumes finis $h = \frac{1}{12}$	+0.56%	+0.88%
Stratégie opportuniste		
Monte-Carlo ( $10^4$ simulations)	$IC = [-1.56\%, +1.56\%]$	$IC = [-1.5\%, +1.5\%]$
Volumes finis $h = \frac{1}{3}$	+5.46%	+10.22%
Volumes finis $h = \frac{1}{12}$	+4.03%	+9.09%

TABLE 5.2 – Comparaison des résultats issus du schéma de volumes finis avec ceux évalués par des simulations de Monte-Carlo. La comparaison est effectuée par rapport au milieu de l'intervalle de confiance.  $IC$  : intervalle de confiance à 95%.

satisfaisants mis-à-part lorsque le système est soumis à la stratégie de maintenance opportuniste.

## 5.8 Conclusion

Ce cas d'application a permis de mettre en évidence l'efficacité de la méthode proposée dans cette thèse. Le PDMP permet de prendre en compte le vieillissement des composants du système, l'architecture du système et de modéliser différentes stratégies de maintenance, correctives et préventives. La quantification du PDMP a été réalisée à l'aide du schéma de volumes finis présenté dans le Chapitre 2. La complexité du système nous a amenés à utiliser la méthode  $A^2$  décrite dans le même chapitre. Les résultats issus de cette méthode ont ensuite pu être vérifiés en estimant les mêmes quantités avec des simulations de Monte-Carlo. Cette méthode donne des résultats satisfaisants lorsque la stratégie de maintenance est de type purement corrective ou révision générale. En revanche, les résultats issus de la modélisation du système soumis à une stratégie de maintenance opportuniste semblent différer avec les deux méthodes de calcul. Une possible explication est que cette stratégie de maintenance entraîne une plus grande dépendance entre les âges des composants. La méthode  $A^2$  de niveau un suppose une sorte d'indépendance pouvant diminuer la précision des résultats dans ce cas. Une piste pour améliorer les résultats serait d'utiliser un niveau plus élevé.

La maintenance des groupes de climatisation a été optimisée selon un critère de coût. Nous avons cherché les stratégies de maintenance (révision générale et opportuniste) qui minimisent le coût de maintenance du système sur trente ans. Les résultats ont montré que le remplacement préventif des composants permet de diminuer le nombre de défaillances du système et le coût de maintenance. L'investissement en maintenance préventive est amorti par la diminution du coût de la maintenance corrective.

Nous avons implémenté un algorithme en Scilab permettant d'évaluer, avec le schéma de volumes finis, les quantités fiabilistes d'un système dont l'architecture est semblable à celle de la climatisation. Ce prototype permet ainsi d'optimiser un plan de maintenance de type révision générale ou opportuniste, d'un système dont les composants sont en série et/ou en parallèle.

## Chapitre 6

# Maintenance effect modelling and optimization of a two-components system

Les méthodes présentées dans ce document ont été appliquées à un autre système ferroviaire. Cependant, la nature de celui-ci est confidentielle. Pour cette raison, nous présentons dans ce chapitre l'étude menée sur ce système sans le définir. Ce chapitre est en anglais et correspond à un article publié au congrès ESREL en septembre 2011. Les co-auteurs sont Sophie Mercier, Michel Roussignol et Rachid Ziani.

Au moment de la rédaction de cet article, nous n'avions pas encore bien compris le changement de variable présenté dans le paragraphe 2.5.4. Plus précisément, la caractéristique non-homogène du PDMP issu de ce changement de variable n'avait pas été mise en évidence. Ainsi, la modélisation présentée dans ce chapitre peut être améliorée.

### 6.1 Introduction

For a railway infrastructure like SNCF (French National Railway Society), maintenance of the infrastructure is a major task because a failure causes delays and client dissatisfaction. Moreover, failures increase maintenance cost. The SNCF has hence initiated research in order to model the involved systems, in view of some improvement in their preventive maintenance. This article deals with a two-components system. The two components are functionally dependent. Those systems are used by the SNCF in great number and we want to optimize their maintenance given that they have already worked for a while. The nature of the system is not revealed because of confidentiality issue.

To ensure the proper functioning of the system, a preventive maintenance action is annually undertaken. During a preventive maintenance action, the SNCF agent replaces the broken components if any and adjusts the working components. In order to model the adjustments effect on the two components, we use a virtual age model : the adjustments effectiveness is modelled by an  $ARA_1$  (first-order Arithmetic Reduction of Age) model [Doyen and Gaudoin, 2004]. Intrinsic failure rate is of Weibull type. We introduce a modification of the  $ARA_1$  model using a Bertholon type intrinsic failure rate [Bertholon, 2001]. This new model is called first-order Arithmetic Reduction of Age with Bertholon Adaptation ( $ARABA_1$ ).

Because of the components aging, usual Markov jump processes with finite state space cannot be used. Consequently, in order to model the system, Piecewise Deterministic Markov Processes (PDMP) are used. Those processes are described in [Davis, 1984]. Their numerical assessment is often established by Monte Carlo simulations [Zhang et al., 2008]; however this method usually takes too much time to optimize maintenance. An alternate method is here used : the quantities of interest can be expressed using the PDMP marginal distributions, which are known to be solutions of a set of partial differential equations called Chapman-Kolmogorov equations. A finite volume scheme, which is an explicit version of the algorithm presented in [Eymard et al., 2008] in a simplified framework, provides numerical estimates for the PDMP marginal distributions, as solution of this scheme.

This paper is organized as follows : in Section 2, the two-components system is presented. In Section 3, the



models used to estimate the components life-time (Weibull and Bertholon) and the maintenance effect ( $ARA_1$  and  $ARABA_1$ ) are presented as well as the estimation results. In Section 4, we present the PDMP used to model the maintained system. In Section 5, a new preventive maintenance strategy with preventive renewal of components is presented and modelled with PDMPs. The associated cost functions are provided, with respect of the PDMPs marginal distributions. An optimal maintenance strategy which minimizes the cost function is determined. Conclusive remarks end this paper in Section 6.

## 6.2 The two-components system

### 6.2.1 System presentation

The system has two components,  $A$  and  $B$ , which are functionally dependent. Both of them can fail in two failure modes denoted by  $F_1$  and  $F_2$ . When a component fails in failure mode  $F_1$  and the other one is still working, the system works fine. Conversely, when a component fails in failure mode  $F_2$ , the system does not work anymore regardless of the other component status. Such a failure leads to a corrective maintenance action; broken components are instantly replaced by new ones. When the two components fail in failure mode  $F_1$  one after the other, not only the system no longer works but it creates an undesirable event as well. A corrective maintenance action is undertaken and the components are instantly replaced by new ones. The system failures can be classified into two categories, the first being a classic failure and the other a more severe failure. The two of them will be quantified.

### 6.2.2 Preventive maintenance strategy

A system failure leads to a corrective maintenance action. In order to avoid the undesirable event, the system is also preventively maintained. A SNCF agent is sent to the system each year. During a preventive maintenance action, the agent replaces the broken components if any and adjusts the working components.

Both corrective and preventive maintenance actions are considered as instantaneous because the duration of a maintenance action is negligible compared to the life-time of components.

Figure 6.1 represents possible transitions between system states with 1 for up and 0 for down. System does not stay in state  $(0, 0)$  because corrective maintenance actions are instantaneous.

In order to quantify the effect of the preventive maintenance actions on the components life-time, a virtual age model is used. It is presented in next section.

## 6.3 Components life-time and maintenance effect modelling

### 6.3.1 Model presentation

[Doyen and Gaudoin, 2004] propose Arithmetic Reduction of Age ( $ARA$ ) models in order to quantify maintenance actions effect on a component life-time. The principle of such models is to introduce a virtual age for a system under maintenance, which is reduced at each maintenance time. A first-order  $ARA$  model is here used ( $ARA_1$ ), which reduces the components virtual age at each maintenance time by a fraction  $\rho$  of the elapsed time since the last maintenance action. Parameter  $\rho$  measures the maintenance efficiency. Let  $\lambda_\theta(t)$  be the component intrinsic failure rate (failure rate of the unmaintained component) with  $\theta$  the intrinsic failure rate parameters.

An  $ARA_1$  model is defined by its failure intensity :

$$\lambda_t^{ARA_1} = \lambda_\theta (t - \rho T_{N_t^-}) \quad (6.3.1)$$

with  $T_i$  the  $i^{\text{th}}$  maintenance action time and  $N_{t^-}$  the number of maintenance actions occurred before time  $t$ . The  $\rho$  coefficient models maintenance effect and  $\rho \in [0, 1]$ . Depending on the values of  $\rho$ , we have different maintenance effects :

- $\rho = 1$  : As Good As New (AGAN),
- $\rho = 0$  : As Bad As Old (ABAO),
- $\rho \in ]0; 1[$  : maintenance is effective,
- $\rho < 0$  : maintenance is damaging.

Let us consider our case of application.  $ARA_1$  model is used to quantify the effect of the preventive maintenance actions on the components life-time. A data base providing information on corrective and preventive maintenance actions of  $n$  components is at our disposal, we set for  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

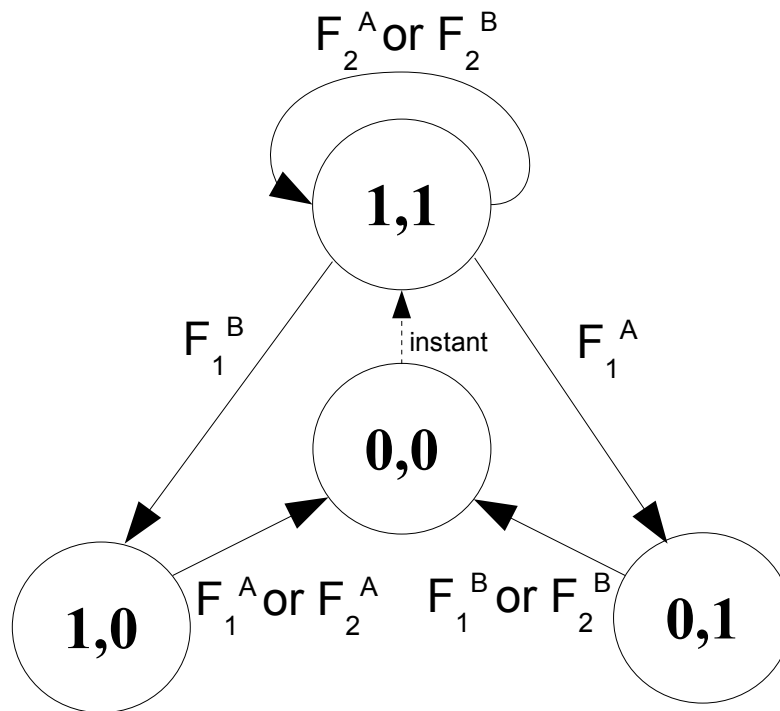


FIGURE 6.1 – Markov graph of PDMP discrete states

- $t_i$  : minimum between life-time of component  $i$  and censoring time,
- $\delta_i$  : nature of data  $t_i$ . If  $t_i$  is a life-time  $\delta_i = 1$ , if  $t_i$  is a censoring time  $\delta_i = 0$ ,
- $T_k^i$  : time of the  $k^{\text{th}}$  preventive maintenance action undertaken on component  $i$  which occurs every year,
- $N_{t_i^-}$  : number of preventive maintenance actions occurred on component  $i$  before  $t_i$ .

The  $ARA_1$  likelihood function is, see [Doyen and Gaudoin, 2004] :

$$\begin{aligned}
L \left( t_i, \delta_i, T_1^i, \dots, T_{N_{t_i^-}^i}^i, i \in \{1, \dots, n\}, \theta, \rho \right) = & \\
\prod_{i=1}^n \left[ \lambda_{\theta} \left( t_i - \rho T_{N_{t_i^-}^i}^i \right) \right]^{\delta_i} & \\
\exp \left( - \sum_{k=0}^{N_{t_i^-}^i - 1} \left( \int_{T_k^i}^{T_{k+1}^i} \lambda_{\theta} (t - \rho T_k^i) dt \right) \right) & \\
\exp \left( - \int_{T_{N_{t_i^-}^i}^i}^{t_i} \lambda_{\theta} (t - \rho T_{N_{t_i^-}^i}^i) dt \right) & \quad (6.3.2)
\end{aligned}$$

First, the intrinsic failure rate is supposed to be of the Weibull type. The Weibull failure rate is :

$$\lambda_{\theta}(t) = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (6.3.3)$$

with  $\theta = (\eta, \beta)$ . The  $ARA_1$  model failure intensity associated with Weibull distribution is :

$$\lambda_t^{ARA_1} = \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{t - \rho T_{N_{t^-}}}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (6.3.4)$$

Components failure intensity associated with  $ARA_1$  model and Weibull hypothesis does not fit with the non-parametric failure rate, see Figures 6.2 and 6.3. Non-parametric failure rate does not seem to start at zero and seem to be constant during the first years of functioning. This phenomenon can be modeled with Bertholon distribution.

We now suppose that the intrinsic failure rate is of the Bertholon type. The Bertholon distribution models a constant failure rate until time  $t_0$  and an increasing failure rate after. The first part corresponds to an Exponential distribution and the second part corresponds to the minimum between an Exponential distribution and a Weibull distribution. The Bertholon failure rate is :

$$\lambda_{\theta}(t) = \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{(t - t_0)^+}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (6.3.5)$$

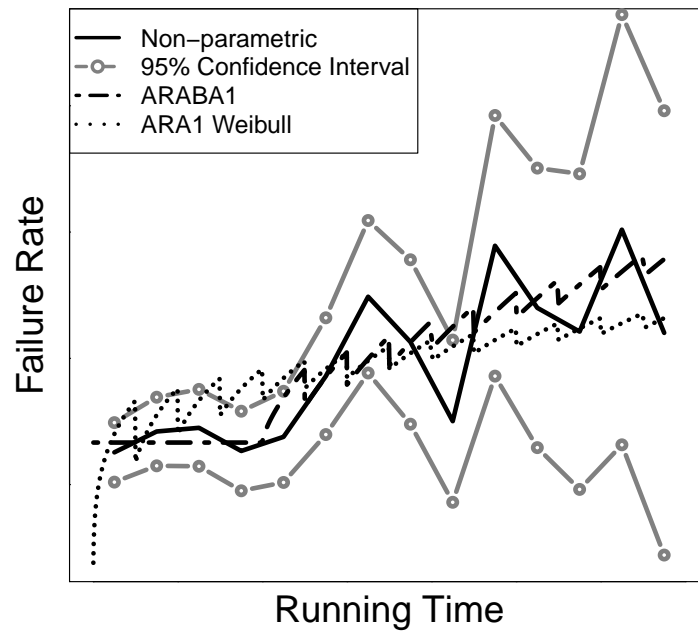
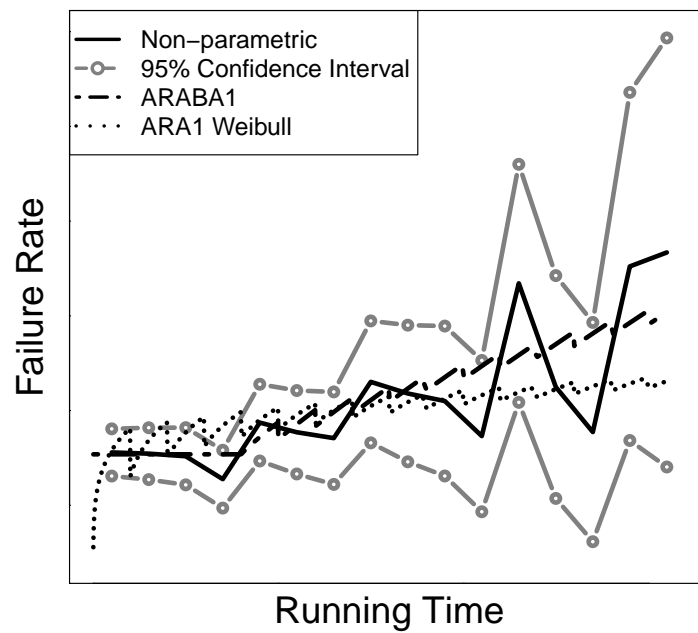
with  $\theta = (\eta_0, t_0, \eta, \beta)$ . In order to model a preventive maintenance action efficiency for a Bertholon intrinsic failure rate, we choose to modify the  $ARA_1$  model. A maintenance action occurred before time  $t_0$  is supposed to have no effect on the component life-time. The effect is only modelled after time  $t_0$ . This assumption is justified by the fact that before  $t_0$ , failures are assumed to be accidental and maintenance action cannot prevent them. This new model is called first-order Arithmetic Reduction of Age with Bertholon Adaptation  $ARABA_1$ . The  $ARABA_1$  model failure intensity is expressed by the following :

$$\lambda_t^{ARABA_1} = \frac{1}{\eta_0} + \frac{\beta}{\eta} \left( \frac{(t - t_0)^+ - \rho (T_{N_{t^-}} - t_0)^+}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (6.3.6)$$

In order to estimate the model parameters, we use the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method. The likelihood function is maximized with a Simulated Annealing algorithm.

### 6.3.2 Results

Results are confidential so legends are hidden. Figures 6.2 and 6.3 represent components  $A$  and  $B$  failure rates estimated with different methods : non-parametric method (Kaplan-Meier),  $ARA_1$  associated with Weibull

FIGURE 6.2 – Component *A* failure rateFIGURE 6.3 – Component *B* failure rate

distribution and  $ARABA_1$ . We can observe that in the two cases, failure rates estimated with  $ARABA_1$  are closer to non-parametric estimates than failure rate estimated with  $ARA_1$  associated with Weibull distribution. In the following, we consequently use  $ARABA_1$  results.

Using these results, we model the maintained system with a PDMP. The model is presented in next section.

## 6.4 System modelling

### 6.4.1 Piecewise Deterministic Markov Processes

PDMPs have been introduced by Davis in 1984 in [Davis, 1984]. This type of modeling has been used by Devooght [Devooght, 1997] for nuclear issues. A PDMP is a hybrid process  $(I_t, X_t)_{t \geq 0}$ . The first component  $I_t$  is discrete, with values in a finite state space  $E$ . Typically, it indicates the state - up or down - for each component of the system at time  $t$ . The second component  $X_t$ , with values in a Borel subset  $G \subset \mathbf{R}^d$ , stands for environmental conditions, in our case, the components entry into service dates and the time  $t$ ; the time unit is year. This means that a PDMP can model a system with aging components. The two parts  $I_t$  and  $X_t$  interact one with each other : the process jumps at countably many isolated random times ; by a jump from  $(I_{t-}, X_{t-}) = (i, x)$  to  $(I_t, X_t) = (j, y)$  (with  $(i, x), (j, y) \in E \times G$ ), the transition rate between the discrete states  $i$  and  $j$  depends on the environmental condition  $x$  just before the jump, and is a function  $x \rightarrow a(i, j, x)$ . Similarly, the environmental condition  $X_t$  just after the jump, is distributed according to some distribution  $\mu_{(i,j,x)}(dy)$ , which depends on both components just before the jump  $(i, x)$  and on the after jump discrete state  $j$ . So the transition kernel which governs the transition between  $(i, x)$  and  $(j, y)$  is :

$$b((i, x), (j, dy)) = a(i, j, x)\mu_{(i,j,x)}(dy) \quad (6.4.1)$$

Between jumps, the discrete component  $I_t$  is constant and the evolution of the environmental condition  $X_t$  is deterministic, solution of a set of differential equations which depends on the fixed discrete state : given that  $I_t = i$  between two jumps,  $X_t$  is solution of

$$\frac{dy}{dt} = v(i, y) \quad (6.4.2)$$

In order to model a PDMP jump occurring at a deterministic time, an after-jump distribution may be defined and is denoted by  $q((i, x), (j, dy))$  with  $x = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, k)$  and  $k$  a deterministic jump time. In our case such a distribution models a preventive maintenance action which periodically occurs every year so  $k \in \mathbf{N}^*$ .

The two-components maintained system can be modelled with a PDMP with state space  $E = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1)\}$  (1 for up and 0 for down). The state  $(0, 0)$  is never reached because maintenance actions are instantaneous, so that the system runs continuously. Components failure rates depend on their age so the environmental variable have to contain this information. Be  $x_A$  the date of entry into service of component  $A$  and  $x_B$  the date of entry into service of component  $B$ , the PDMP environmental variable is  $(x_A, x_B, t)$  so the space dimension  $d$  is 3. Let  $T$  be the time horizon and  $G = [0, T]^3$ . Between two jumps, only environmental variable  $t$  evolves at speed 1 so that we have, for all  $i \in E$  :

$$v(i, (x_A, x_B, t)) = (0, 0, 1) \quad (6.4.3)$$

In order to identify each component failure mode, we define the probabilities  $p_{F_i}^A$  and  $p_{F_i}^B$  with  $i \in \{1, 2\}$ , where  $p_{F_i}^A$  (respectively  $p_{F_i}^B$ ) is the probability that component  $A$  (respectively component  $B$ ) fails in mode  $F_i$  given that it fails. We have for  $C \in \{A, B\}$

$$p_{F_1}^C + p_{F_2}^C = 1 \quad (6.4.4)$$

Let  $(\eta_0^C, t_0^C, \eta^C, \beta^C)$  be Bertholon coefficients and  $\rho_C$  maintenance effect coefficient of component  $C$  with  $C \in \{A, B\}$ . At time  $t$ , maintained components  $A$  and  $B$  failure rates are, with  $C \in \{A, B\}$  :

$$a_C(x_C, t) = \frac{1}{\eta_0^C} + \frac{\beta^C}{\eta^C} \left( \frac{(t - x_C - t_0^C)^+ - \rho_C ([t] - x_C - t_0^C)^+}{\eta^C} \right)^{\beta^C - 1} \quad (6.4.5)$$

with  $[t]$ , the integer part of  $t$ , which corresponds to the last preventive maintenance action date occurred before  $t$ . Maintenance actions occur every year in the beginning of the year, so when  $t \in \mathbf{N}^*$ .

When the two components are working, failure of component  $A$  in mode  $F_1$  does not cause the system to crash. The failure is not detected so component  $A$  is not replaced. PDMP jumps from state  $(1, 1)$  to state  $(0, 1)$ . The PDMP transition kernel is :

$$b(((1, 1), (x_A, x_B, t)), ((0, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = p_{F_1}^A \cdot a_A(x_A, t) \delta_{x_A, x_B, t}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.6)$$

In the same way, after component  $B$  failure in mode  $F_1$ , the system is still working and the failure is not detected. The PDMP transition kernel is :

$$b(((1, 1), (x_A, x_B, t)), ((1, 0), (dy_A, dy_B, ds))) = p_{F_1}^B \cdot a_B(x_B, t) \delta_{x_A, x_B, t}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.7)$$

When component  $A$  (respectively component  $B$ ) fails in mode  $F_2$  while component  $B$  (respectively component  $A$ ) is working, the system immediately stops working and the failed component is replaced by a new one. PDMP stays in state  $(1, 1)$ , the transition kernel is :

$$\begin{aligned} b(((1, 1), (x_A, x_B, t)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) &= p_{F_2}^A \cdot a_A(x_A, t) \delta_{t, x_B, t}(dy_A, dy_B, ds) \\ &+ p_{F_2}^B \cdot a_B(x_B, t) \delta_{x_A, t, t}(dy_A, dy_B, ds) \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

When component  $A$  is down in mode  $F_1$ , a failure of component  $B$  leads to a system crash regardless of its failure mode. The two components are replaced by new ones. The PDMP transition kernel is

$$b(((0, 1), (x_A, x_B, t)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = a_B(x_B, t) \delta_{t, t, t}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.9)$$

It is the same if component  $A$  fails while component  $B$  is already down in mode  $F_1$  :

$$b(((1, 0), (x_A, x_B, t)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = a_A(x_A, t) \delta_{t, t, t}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.10)$$

Addingly, during a preventive maintenance action, failed components are replaced by new ones. A preventive maintenance action is undertaken in the beginning of the year which means that when  $t \in \{1, 2, \dots, [T]\}$ . So we define PDMP transition kernels which model replacement of broken components during a preventive maintenance action, for all  $k \in \{1, 2, \dots, [T]\}$  :

$$q(((1, 1), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = \delta_{x_A, x_B, k}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.11)$$

$$q(((0, 1), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = \delta_{k, x_B, k}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.12)$$

$$q(((1, 0), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = \delta_{x_A, k, k}(dy_A, dy_B, ds) \quad (6.4.13)$$

In order to initialize the PDMP, we define the initial law  $\pi_0(\cdot, dx)$  as the empirical law of entry into service dates of the systems presently working ( $t = 0$ ). We suppose that all systems are in state  $(1, 1)$ .

### 6.4.2 PDMP quantification with a finite volume algorithm

Using the fact that a PDMP is a Markov process (with general state space), the associated Chapman-Kolmogorov equation may be written, see [Eymard et al., 2008]. This equation represents some balance in terms of probability flows, which takes into account both of the deterministic evolution between jumps (which evolves with speed  $v(i, x)$ ) and the jumps (governed by  $a(i, j, x)\mu_{(i, j, x)}(dy)$  and  $q((i, x), (j, dy))$ ). Finite volume (FV) methods are then known to be well adapted for their numerical resolution. They estimate an approximation of the PDMP marginal distributions denoted by  $(\pi_t(\cdot, dx))_{t \geq 0}$ . Their principle is based on the discretization of both time and environmental state spaces into cells. The mesh of environmental state space is denoted by  $\mathcal{M}$ . A cell  $K$  of mesh  $\mathcal{M}$  is written as  $K = K_1 \times K_2 \times K_3$  where  $K_1$ ,  $K_2$  and  $K_3$  are three intervals. The time evolution of the probability masses in each cell of the environmental state space is followed (time) step by step and at each step, some balance is written between the out- and in-coming probability masses. This brings us to solve a linear system. This method allows us to estimate associated quantities to a maintenance strategy such as mean cost or mean number of failures.

Let  $h \in \mathbf{R}_+^*$  be the environmental state space step and  $\delta t \in \mathbf{R}_+^*$  the time step. The FV algorithm that we propose here computes an approximation  $P_t^{h,\delta t}(i, x)dx$  of  $\pi_t(i, dx)$  which admits a density  $P_t^{h,\delta t}(i, x)$  with respect of Lebesgue measure, constant on each time step and on each cell  $K$  of the environmental state space.

$$P_t^{h,\delta t}(i, x) := u_n(i, K) \quad (6.4.14)$$

with  $t \in [n \cdot \delta t; (n+1) \cdot \delta t[$ .

The discrete transition rate between the cells  $(i, K)$  and  $(j, L)$  is :

$$a_{K,L}^{i,j} = \frac{1}{h^d} \int_K a(i, j, x) \int_L \mu_{(i,j,x)}(dy) dx \quad (6.4.15)$$

The discrete exit rate from the cell  $(i, K)$  is :

$$b_K^i = \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{K,L}^{i,j} \quad (6.4.16)$$

Let  $K = K_1 \times K_2 \times K_3$  be a cell. If it exists  $k \in \{1, 2, \dots, [T]\}$  such as  $k \in K_3$ , the discrete transition rate between the cells  $(i, K)$  and  $(j, L)$  caused by a deterministic jump is :

$$q_{K,L}^{i,j}(n) = \frac{1}{h^d} \int_K \int_L q((i, x), (j, dy)) dx \quad (6.4.17)$$

with  $n$  such as  $k \in [n \cdot \delta t; (n+1) \cdot \delta t[$

If it does not exist  $k \in \{1, 2, \dots, [T]\}$  such as  $k \in K_3$  then :

$$q_{K,K}^{i,i}(n) = 1 \text{ and } q_{K,L}^{i,j}(n) = 0 \forall (i, K) \neq (j, L) \quad (6.4.18)$$

If  $K = K_1 \times K_2 \times K_3$  and  $L = L_1 \times L_2 \times L_3$  are two neighboring cells of mesh  $\mathcal{M}$  such as  $K_1 = L_1$  and  $K_2 = L_2$  then we set :

- $v_{K,L}^i = 1$  if for all  $c \in K_3$  and  $d \in L_3$ ,  $d > c$ ,
- $v_{K,L}^i = -1$  if for all  $c \in K_3$  and  $d \in L_3$ ,  $d < c$ .

In all other cases, we set  $v_{K,L}^i = 0$ .

The FV algorithm is first initialized by :

$$u_0(i, K) = \frac{1}{h^d} \int_K \pi_0(i, dx) \quad (6.4.19)$$

In our case, the FV algorithm writes as follows :

$$\tilde{u}_n(i, K) = u_n(i, K) - \delta t \left( \sum_{L \in N_K} \frac{1}{h} 1_{v_{K,L}^i > 0} + b_K^i \right) u_n(i, K) + \delta t \sum_{L \in N_K} \frac{1}{h} 1_{v_{K,L}^i < 0} u_n(i, L) + \delta t \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} a_{L,K}^{j,i} u_n(j, L) \quad (6.4.20)$$

$$u_{n+1}(i, K) = \sum_{j \in E} \sum_{L \in \mathcal{M}} q_{L,K}^{j,i}(n) \tilde{u}_n(j, L) \quad (6.4.21)$$

A sufficient condition for this algorithm to be stable is that the coefficient of  $u_n(i, K)$  is non negative, which may be written :

$$1 - \delta t \left( \sum_{L \in N_K} \frac{1}{h} 1_{v_{K,L}^i > 0} + b_K^i \right) \geq 0 \quad (6.4.22)$$

## 6.5 Maintenance optimization

### 6.5.1 A new maintenance strategy with preventive renewal of components

In addition of the preventive maintenance strategy already applied, we propose to replace components based on their age during a preventive maintenance action. If a component is older than an age called 'limit age', it is

replaced. To optimize the system maintenance, the components limit ages that minimize the maintenance mean cost should be found. Let  $r_A$  be the component  $A$  limit age, and  $r_B$  be the component  $B$  limit age. This new maintenance strategy causes a change for the PDMP transition kernels associated to a preventive maintenance action ; for all  $k \in \{1, 2, \dots, [T]\}$  :

$$q(((1, 1), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = (1_{k-x_A < r_A} \delta_{x_A}(dy_A) + 1_{k-x_A \geq r_A} \delta_k(dy_A)) \cdot (1_{k-x_B < r_B} \delta_{x_B}(dy_B) + 1_{k-x_B \geq r_B} \delta_k(dy_B)) \cdot \delta_k(ds) \quad (6.5.1)$$

$$q(((0, 1), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = \delta_k(dy_A) \cdot (1_{k-x_B < r_B} \delta_{x_B}(dy_B) + 1_{k-x_B \geq r_B} \delta_k(dy_B)) \cdot \delta_k(ds) \quad (6.5.2)$$

$$q(((1, 0), (x_A, x_B, k)), ((1, 1), (dy_A, dy_B, ds))) = (1_{k-x_A < r_A} \delta_{x_A}(dy_A) + 1_{k-x_A \geq r_A} \delta_k(dy_A)) \cdot \delta_k(dy_B) \cdot \delta_k(ds) \quad (6.5.3)$$

We also estimate the impact of doubling the maintenance step on failures number, undesirable event number and maintenance cost.

### 6.5.2 Cost function

In this article, an optimal maintenance strategy minimizes the maintenance mean cost over  $T$  years. The cost function is defined as follows. We consider that a classical failure and the undesirable event are two different events. Let's introduce some notations :

- $C_A$  : component  $A$  replacement cost,
- $C_B$  : component  $B$  replacement cost,
- $C_{un}$  : undesirable event cost,
- $C_f$  : classical failure cost,
- $C_{pm}$  : preventive maintenance cost,
- $N_{un}(t)$  : mean number of undesirable events on  $[0; t]$ ,
- $N_{A,B}^f(t)$  : mean number of failures with replacement of components  $A$  and  $B$  on  $[0; t]$ ,
- $N_A^f(t)$  : mean number of failures with replacement of component  $A$  only on  $[0; t]$ ,
- $N_B^f(t)$  : mean number of failures with replacement of component  $B$  only on  $[0; t]$ ,
- $N_A^{pm}(t)$  : mean number of component  $A$  replacements during a preventive maintenance action on  $[0; t]$ ,
- $N_B^{pm}(t)$  : mean number of component  $B$  replacements during a preventive maintenance action on  $[0; t]$ ,
- $N_{pm}(t)$  : number of preventive maintenance actions on  $[0; t]$ ,

The cost function is given by the following :

$$\begin{aligned} C(t) = & N_{un}(t) \cdot (C_A + C_B + C_{un}) \\ & + N_{A,B}^f(t) \cdot (C_A + C_B + C_f) \\ & + N_A^f(t) \cdot (C_A + C_f) + N_B^f(t) \cdot (C_B + C_f) \\ & + N_A^{pm}(t) \cdot C_A + N_B^{pm}(t) \cdot C_B \\ & + N_{pm}(t) \cdot C_{pm} \end{aligned} \quad (6.5.4)$$

The involved quantities may be expressed in terms of the PDMP marginal distribution. For example, the mean number of undesirable event occurred before time  $t$ ,  $N_{un}(t)$  may be assessed as follows :

$$N_{un}(t) = \int_0^t \int_{[0,T]^3} p_{F_1} a_A(x_A, r) \pi_s((1, 0), dx_A, dx_B, dr) ds + \int_0^t \int_{[0,T]^3} p_{F_1} a_B(x_B, r) \pi_s((0, 1), dx_A, dx_B, dr) ds \quad (6.5.5)$$

Thanks to a simulated annealing algorithm, we are able to find components limit ages which minimize cost function with a preventive maintenance step given. Two different preventive maintenance steps are tested : one year (the current one) and two years. Higher values are not tested because they are not allowed by SNCF maintenance rules. The results are given in next section.



TABLE 6.1 – System cumulative mean quantities over  $T$  years for the three maintenance strategies compared to the current one

Preventive maintenance step	1	2	2
Components renewal	yes	no	yes
Cost	-16%	-0.2%	-17%
Undesirable events	-42%	+200%	+66%
Classical failures	-31%	-0.5%	-31%

### 6.5.3 Results

Table 6.1 and Figures 6.4, 6.5 and 6.6 represent comparison between indicators of the current maintenance strategy and three others which are :

1. Periodic preventive maintenance with step equal to one (PMS=1) and preventive replacement of components,
2. Periodic preventive maintenance with step equal to two (PMS=2) without preventive replacement of components,
3. Periodic preventive maintenance with step equal to two (PMS=2) and preventive replacement of components.

Let  $Z$  be an indicator associated to the current strategy, and  $\bar{Z}$  the same indicator but associated to another strategy. Let  $\Delta_Z$  be a comparison coefficient such as :

$$\Delta_Z = \left( \frac{\bar{Z}}{Z} - 1 \right) \cdot 100 \quad (6.5.6)$$

We compare three indicators : mean maintenance cost, mean number of undesirable events and mean number of failures. These indicators are estimated for each year of operation (Figures 6.4, 6.5 and 6.6) and are summed over time  $T$  (Table 6.1).

From an economical perspective, the best maintenance strategy corresponds to a maintenance step equal to two and with components renewal, it leads to a cost decrease of -17%. However this strategy leads an increase of the undesirable events number (+66%). Because of that, such strategy can not be applied. Maintenance strategy which corresponds to a maintenance step equal to one and with components renewal leads to a decrease of all quantities (cost -16%, number of undesirable events -42% and number of failures -31%). Such a strategy is a good choice and may be applied. It is interesting to note that doubling the PMS leads to an 200% increase of the mean number of undesirable events but does not increase the mean maintenance cost. This is because an undesirable event is very rare.

In Figure 6.4, we can observe that doubling the preventive maintenance step does not involve a mean cost decrease. Renewal of components  $A$  and  $B$  leads to an investment the first period and periodically.

The only strategy which decreases the mean number of undesirable events corresponds to the strategy with a maintenance step equal to one and with renewal of components, see Figure 6.5.

All tested strategies with components renewal decrease the mean number of failures, see Figure 6.6.

## 6.6 Conclusions

Thanks to an  $ARABA_1$  (Arithmetic Reduction of Age with Bertholon Adaptation of order one) model, we have been able to estimate adjustments effect on components life-time jointly with intrinsic failure rate. This model is a modification of the  $ARA_1$  model. It appears that it fits better with our data than an  $ARA_1$  model with Weibull intrinsic failure rate. By taking into account the components life-time distributions, the adjustments effect and the preventive maintenance strategy, we modelled the system with a PDMP. Finite volume method quickly gives us searched quantities which allowed us to test different maintenance strategies. Thus, we found a new preventive maintenance strategy based on components preventive replacement which not only minimizes the maintenance mean cost but reduces both mean number of undesirable events and mean number of failures as well.

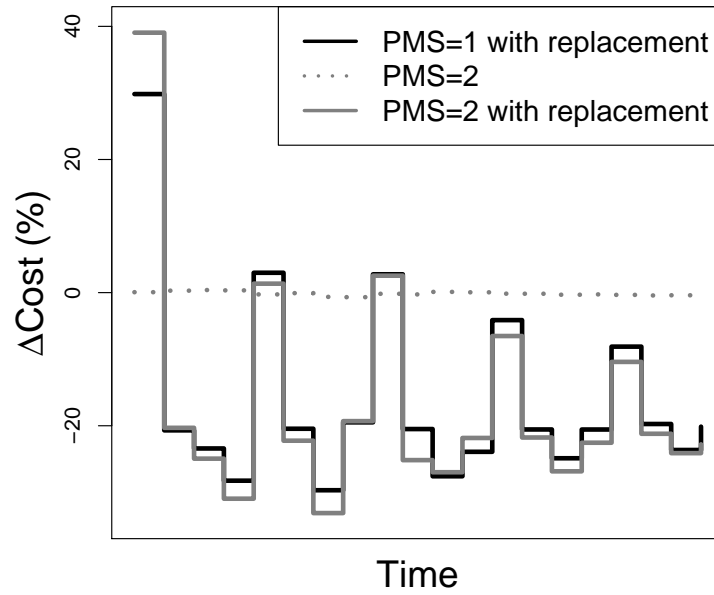


FIGURE 6.4 – Mean system maintenance cost for the three maintenance strategies compared to the current one

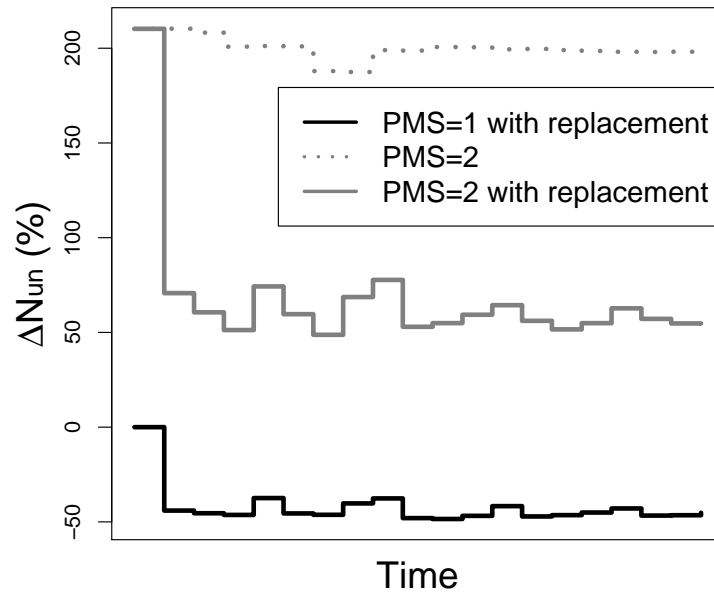


FIGURE 6.5 – Mean number of system undesirable events for the three different maintenance strategies compared to the current one ( $N_{un}$  : number of undesirable events)

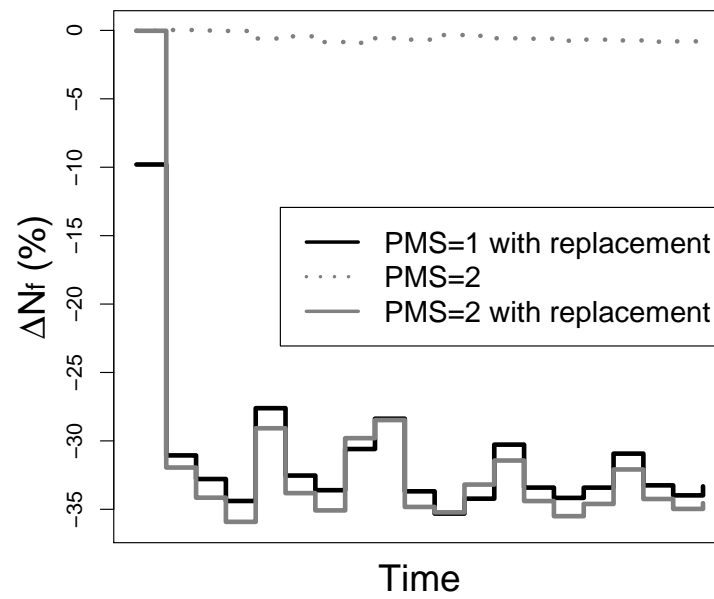


FIGURE 6.6 – Mean number of system failures for the three different maintenance strategies compared to the current one ( $N_f$  : number of failures)

# Conclusions générales et perspectives

## Conclusions

Les premiers travaux, réalisés dans cette thèse, ont consisté à effectuer un état de l'art sur les différents outils de modélisation et de quantification utilisés en fiabilité des systèmes. Cette étape a permis de mettre en évidence les limites des méthodes classiquement utilisées dans le cadre de l'étude fiabiliste de systèmes. Le vieillissement des composants, l'architecture des systèmes et la complexité des stratégies de maintenance sont trois caractéristiques qui obligent à effectuer des hypothèses simplificatrices afin d'utiliser ces méthodes. Nous avons proposé d'utiliser un processus stochastique issu du domaine de la fiabilité dynamique, le processus markovien déterministe par morceaux (Piecewise Deterministic Markov Process ou PDMP) dont la souplesse de modélisation permet de prendre en compte la dynamique de dégradation des composants et les stratégies de maintenance. L'évaluation des quantités fiabilistes associées au PDMP a été réalisée avec une méthode innovante, basée sur un algorithme de volumes finis. A notre connaissance, cette méthode n'a jamais été utilisée en milieu industriel. Ce schéma numérique présente cependant des limites notamment liées au temps de calcul, au problème de place mémoire et à la difficulté d'implémentation. Ces difficultés rendaient, jusqu'à présent, l'utilisation de ce type de schéma compliquée pour des systèmes industriels, de part leur complexité.

Une étude théorique a été réalisée sur le schéma de volumes finis. Nous avons démontré sa convergence dans le cadre de la modélisation de systèmes multi-composants. Nous avons, par la suite, proposé trois méthodes innovantes pour simplifier le schéma. La première méthode repose sur une simplification de la modélisation basée sur la dépendance et l'indépendance des variables du PDMP. La deuxième méthode repose sur une approximation de la loi initiale du PDMP que nous propageons dans le schéma numérique permettant de réduire fortement la quantité de place mémoire nécessaire et les temps de calcul, et de simplifier considérablement l'implémentation du schéma. Différents tests ont été effectués afin d'évaluer l'erreur commise par cette approximation en fonction de l'architecture du système ; les résultats sont satisfaisants et justifient l'utilisation de cette méthode pour des cas industriels. Cependant, nous n'avons pas réalisé d'étude théorique concernant cette approximation. La troisième méthode repose sur une modélisation différente du système permettant de traduire autrement le vieillissement des composants. Cette méthode consiste à effectuer un changement de variable et nécessite l'utilisation de PDMP non-homogènes. Elle n'induit pas d'erreur. Son utilisation a pour conséquence d'éviter de nombreux calculs et ainsi de réduire le temps de calcul. Ces trois méthodes peuvent être utilisées simultanément. Leur utilisation permet de repousser les limites du schéma de volumes finis et ainsi de pouvoir l'utiliser pour des systèmes industriels.

La méthodologie proposée a été appliquée à un cas industriel : un groupe de climatisation équipant les trains TER X72500. Ce système comporte dix-sept composants vieillissants que la maintenance rend fonctionnellement dépendants. La modélisation de ce système a nécessité l'utilisation de la méthode d'approximation du schéma numérique ce qui a permis de montrer sa pertinence. Nous avons montré que le renouvellement préventif des composants permettrait d'améliorer la fiabilité du système et de réduire les coûts de maintenance. D'autres cas d'application ont été étudiés, cependant ces travaux sont confidentiels et ne sont pas présentés dans ce document.

Les cas d'application étudiés dans cette thèse ont permis de tester la méthodologie proposée ainsi que les améliorations techniques. Les améliorations apportées au schéma numérique permettent de l'utiliser dans un cadre industriel ce qui n'était, jusqu'à présent, pas possible. Les résultats montrent que cette méthode est adaptée pour la modélisation d'un système multi-composants en vue de l'optimisation de sa maintenance.

## Perspectives

Les travaux réalisés dans cette thèse ont permis d'améliorer et de mettre en application une méthode numérique de quantification des PDMP. Cependant ces améliorations apportent de nouvelles interrogations et des pistes de recherche.

### Convergence du schéma de volumes finis

La démonstration de la convergence du schéma de volumes finis n'a été réalisée que dans le cadre de PDMP homogènes pour lesquels la vitesse d'évolution des variables physiques est égale à 0 ou 1. Il serait intéressant de démontrer la convergence du schéma lorsque la vitesse des variables physiques est quelconque, comme dans le cas test étudié au chapitre 3 par exemple.

De plus, au cours des études menées dans cette thèse, nous avons utilisé des PDMP non-homogènes dont les variables physiques n'évoluent pas. Un schéma de volumes finis adapté à cette modélisation a été mis en place mais sa convergence n'a pas été démontrée. Une perspective serait d'effectuer une telle étude.

La précision des résultats issus du schéma de volumes finis dépend de la finesse des pas de discrétisation. Une perspective pourrait consister à étudier la vitesse de convergence du schéma et d'en déduire un indicateur de précision des résultats.

### Démonstration de la convergence de l'approximation

Pour adapter le schéma de volumes finis à l'étude de système ayant de nombreux composants dépendants, nous avons proposé une méthode d'approximation des quantités estimées dans le schéma. Nous avons effectué différents tests pour évaluer l'erreur engendrée mais nous n'avons pas réalisé d'étude théorique sur la convergence de cette approximation. Une telle étude serait intéressante afin de valider théoriquement les résultats.

### Prise en compte de l'incertitude des estimations

Les lois de durée de vie des composants sont les données d'entrée du PDMP modélisant le système. Les estimations statistiques de paramètres de ces lois sont entachées d'incertitude dépendant de la qualité des données. Dans cette étude, nous ne l'avons pas pris en compte car cela complexifie grandement l'implémentation du schéma numérique. Pourtant la prise en compte de cette incertitude pourrait influencer l'optimisation de la maintenance. Une piste envisageable serait d'effectuer une analyse de sensibilité aux paramètres des lois de durée de vie des composants.

### Lien avec la fiabilité dynamique

Une des méthodes d'amélioration du schéma numérique consiste à effectuer un changement de variable physique, et ainsi de se ramener à un PDMP non-homogène dont les variables physiques n'évoluent pas au cours du temps. Ce changement de variable n'est possible que si la solution des équations différentielles régissant l'évolution des variables physiques est bijective. Cette condition est généralement respectée en fiabilité dynamique et il est donc possible d'utiliser cette méthode. Une perspective serait de l'appliquer sur un cas test, par exemple celui présenté dans le chapitre 3.

### Outil informatique

Ce type d'étude permet de déterminer une stratégie de maintenance adaptée à partir des données issues du REX. Au fur et à mesure que le REX est enrichi par de nouvelles données, il est intéressant de réactualiser les paramètres des lois et de relancer les algorithmes afin de confirmer ou d'infirmer la stratégie trouvée. Pour cela, une des perspectives est de développer un logiciel pouvant être utilisé par des personnes non formées à la modélisation mathématique utilisée. Ce type de travail a été initié lors de cette thèse. Nous avons implémenté un prototype en Scilab permettant d'évaluer les quantités fiabilistes d'un système série/parallèle et d'optimiser des stratégies de maintenance de type périodique ou opportuniste.

# Publications et communications

Co-auteurs : Sophie Mercier, Michel Roussignol et Rachid Ziani.

## Revue

*Nom de la revue* : Journal of Risk and Reliability

*Titre* : Piecewise Deterministic Markov Processes and maintenance modelling : application to maintenance of a train air conditioning system

*DOI* : 10.1177/1748006XJRR347

## Congrès

*Congrès* : QUALITA

*Année* : 2009

*Titre* : Modélisation et quantification de systèmes vieillissants pour l'optimisation de la maintenance

*Congrès* : RAMS

*Année* : 2010

*Titre* : Modeling and quantification of aging systems for maintenance optimization

*Congrès* :  $\lambda\mu 17$

*Année* : 2010

*Titre* : Processus markoviens déterministes par morceaux et quantification déterministe avec un schéma de volumes finis : un cas d'étude

*Congrès* : WCRR

*Année* : 2011

*Titre* : Maintenance optimization of train air conditioning system

*Congrès* : ESREL

*Année* : 2011

*Titre* : Maintenance effect modelling and optimization of a two-components system

## Communications orales

*Organisateur* : Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée

*Intitulé* : Groupe de travail analyse, probabilités et statistique

*Année* : 2008

*Titre* : Modélisation dynamique et application au circuit de voie

*Organisateur* : Direction de l'Innovation et de la Recherche de la SNCF

*Intitulé* : Séminaire thésard

*Année* : 2009

*Titre* : Application des PDMP à la climatisation voyageurs des TER X72500

*Organisateur* : Institut pour la Maîtrise des Risques  
*Intitulé* : Journée jeunes ingénieurs et jeunes chercheurs  
*Année* : 2010  
*Titre* : Une application des processus markoviens déterministes par morceaux en fiabilité des systèmes

*Organisateur* : Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour  
*Intitulé* : Journée des doctorants  
*Année* : 2010  
*Titre* : Une application des processus markoviens déterministes par morceaux en fiabilité des systèmes

*Organisateur* : Institut pour la Maîtrise des Risques  
*Intitulé* : Journée jeunes ingénieurs et jeunes chercheurs  
*Année* : 2011  
*Titre* : Une méthode d'optimisation de la maintenance de système multi-composants

*Organisateur* : Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour  
*Intitulé* : Séminaire  
*Année* : 2011  
*Titre* : Modèles probabilistes pour l'optimisation de la maintenance de systèmes multi-composants

*Organisateur* : Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour  
*Intitulé* : Journée des doctorants  
*Année* : 2011  
*Titre* : Modélisation dynamique de systèmes complexes pour le calcul de grandeurs fiabilistes et l'optimisation de la maintenance

*Organisateur* : Ecole Doctorale des Sciences de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour  
*Intitulé* : Journées de l'Ecole Doctorale des Sciences  
*Année* : 2011  
*Titre* : Dynamic modeling of complex systems for the calculation of reliability quantities and maintenance optimization





# Annexe A

## Notations

### Sigles

ASH	Automate Stochastique Hybride
ARA	Arithmetic Reduction of Age
ARI	Arithmetic Reduction of Intensity
BDMP	Boolean logic Driven Markov Process
CCM	Cell to Cell Mapping
CdVC	Circuit de Voie Court
CSMP	Completed Semi-Markov Process
DCPN	Deductive Coloured Petri Net
GAME	Globalement Au Moins Équivalent
MC	Monte-Carlo
MP	Maintenance Préventive
NMWD	New Modified Weibull Distribution
REX	Retour d'EXpérience
PDMP	Piecewise Deterministic Markov Process
PMS	Processus Markovien de Sauts
RG	Révision Générale
RP	Réseaux de Pétri
SNCF	Société Nationale des Chemins de Fer français
TER	Train Express Régional
UPE	Université Paris-Est
UPPA	Université de Pau et des Pays de l'Adour
VF	Volumes Finis

## Mathématiques

### Quantités fiabilistes

$R(t)$	Fiabilité à l'instant $t$
$D(t)$	Disponibilité à l'instant $t$
$\lambda(t)$	Taux de défaillance à l'instant $t$
MUT	Mean Up Time (Temps moyen de fonctionnement)

### Processus markovien déterministe par morceaux

$(I_t, X_t)_{t \geq 0}$	PDMP
$\pi_t(\cdot, dx)$	Loi de $(I_t, X_t)$
$a(i, j, x)$	Taux de transition de l'état $i$ vers l'état $j$ quand la variable physique vaut $x$
$\mu_{(i,j,x)}(dy)$	Distribution de la variable physique après un saut de $(i, x)$ vers l'état $j$
$q(i, x, \cdot, dy)$	Distribution du PDMP après un saut de $(i, x)$ à un instant déterministe
$v(i, x)$	Vitesse d'évolution de la variable physique dans l'état $i$

### Schéma de volumes finis

$\mathcal{M}$	Partition de $\mathbb{R}^d$
$\delta t$	Pas de discrétisation du temps
$h$	Pas de discrétisation de l'espace des variables physiques
$P_t^{h,\delta t}(\cdot, x)dx$	Approximation de la mesure $\pi_t(\cdot, dx)$
$u_n(K, i)$	est égale à $P_t^{h,\delta t}(i, x)$ pour $x \in K$ et $t \in [n \cdot \delta t, (n+1) \cdot \delta t[$
$a_{K,L}^{i,j}$	Taux de transition de $(i, K)$ vers $(j, L)$
$b_K^i$	Taux de sortie de $(i, K)$



## Annexe B

# Minimisation d'une fonction de coût avec un algorithme de Recuit Simulé

Cette méthode a été développée par trois chercheurs de la société IBM et a été publiée pour la première fois dans [Kirkpatrick et al., 1983]. Une description plus récente peut être trouvée dans [Duflo, 1996].

Cet algorithme est utilisé pour minimiser une fonction lorsque le support est très grand. Dans nos cas d'application, l'objectif est de déterminer une stratégie de maintenance basée sur du renouvellement préventif selon l'âge. Une stratégie est caractérisée par les âges 'limite' des composants à partir desquels il faut les remplacer et dans certains cas, par une périodicité. Les systèmes étudiés comportent de nombreux composants ce qui rend le support de la fonction de coût de grande taille, justifiant ainsi l'utilisation d'un algorithme d'optimisation stochastique du type recuit simulé.

Soit  $C$  une fonction de coût dépendant de la stratégie  $x$ . Dans nos cas d'application,  $x$  représente l'âge limite des composants et la date (ou la périodicité) de la maintenance sauf pour la stratégie de maintenance opportuniste. La dimension du vecteur  $x$  est notée  $d$ . Deux stratégies,  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$ , sont dites voisines s'il existe  $i \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $x_i = y_i + 1$  ou  $x_i = y_i - 1$  et pour  $j \neq i$ ,  $x_j = y_j$ . Chaque stratégie possède  $2d$  voisins sauf celles qui possèdent une ou plusieurs composantes égales à 0. Les stratégies ayant des paramètres négatifs n'ont pas de signification et ne sont pas considérées.

Le principe d'un algorithme de recuit simulé est de simuler une chaîne de Markov inhomogène dont les états représentent les stratégies de maintenance et dont la matrice de transition n'autorise des sauts qu'entre voisin et dépend de la différence entre les coûts des stratégies voisines.

Les entrées de l'algorithme de recuit simulé sont :

- $N_{max}$  : nombre maximum d'itérations du schéma,
- $M_{max}$  : nombre maximum d'itérations pour lesquels le coût n'évolue pas,
- $x_0$  : stratégie initiale renseignée par l'utilisateur,
- $K$  : paramètre de la fonction de rejet.

On définit une fonction de rejet :

$$RS_n(x, y) = \exp\left(-n \frac{|C(y) - C(x)|}{K}\right)$$

Partant de la stratégie  $x = x_0$ , on tire une stratégie  $y$  selon une loi uniforme discrète sur les stratégies voisines de  $x$ . Si le coût associé à cette stratégie est inférieur à celui de la stratégie  $x$ , on pose  $x = y$ . Dans le cas contraire, on tire une variable aléatoire de loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$  que l'on compare à la fonction  $RS_1(x, y)$ . Si la variable aléatoire est inférieure à  $RS_1(x, y)$ , on pose  $x = y$  sinon la stratégie  $y$  est rejetée et  $x$  ne change pas. Cette procédure est répétée tant que le nombre d'itérations,  $n$ , est inférieur à  $N_{max}$  et que le nombre d'itérations pour lesquels  $x$  n'a pas changé,  $m$ , est inférieur à  $M_{max}$ . A chaque itération, la fonction de rejet se rapproche de zéro rendant de plus en plus difficile la transition vers une stratégie plus coûteuse. Les positions successives visitées par l'algorithme forment une chaîne de Markov inhomogène. La chaîne de Markov se stationnarise dans un

état qui minimise la fonction  $C$ . Si la fonction  $C$  présente différents minima locaux, le risque est que la stratégie  $x$  fournie par l'algorithme peut ne pas minimiser globalement la fonction de coût. Il est donc recommandé de relancer l'algorithme plusieurs fois en partant de stratégies différentes.

Le choix de la constante  $K$  a une influence importante sur la fonction de rejet. Une grande valeur de  $K$  rapproche cette fonction de zéro rendant difficile la transition vers une stratégie plus couteuse dès la première itération. Ainsi le schéma aura tendance à converger vers le minimum local le plus proche. Il n'existe pas de méthode pour choisir  $K$  de manière optimale ; ce choix est réalisé à la suite de différents tests.

On note  $NV(x)$  l'ensemble des stratégies voisines de la stratégie  $x$ .  $\text{Rand}_D(A)$  représente la loi uniforme discrète sur l'ensemble  $A$  et  $\text{Rand}_C(B)$  représente la loi uniforme continue sur l'intervalle  $B$ . L'algorithme de recuit simulé s'écrit de la façon suivante :

---

**Algorithm 1** Algorithme de recuit simulé pour la minimisation d'une fonction de coût

---

```

 $x \leftarrow x_0$ 
 $n \leftarrow 1$ 
 $m \leftarrow 1$ 
while  $n \leq N_{max}$  and  $m \leq M_{max}$  do
   $y \leftarrow \text{Rand}_D(NV(x))$ 
  if  $C(y) \leq C(x)$  then
     $x \leftarrow y$ 
     $m \leftarrow 1$ 
  else
     $\mathcal{U} \leftarrow \text{Rand}_C([0, 1])$ 
    if  $\mathcal{U} \leq RS_n(x, y)$  then
       $x \leftarrow y$ 
       $m \leftarrow 1$ 
    else
       $m \leftarrow m + 1$ 
    end if
  end if
   $n \leftarrow n + 1$ 
end while
return  $x$ 

```

---

# Bibliographie

- T. Aldemir and B. Tombuyses. Continuous Cell-to-Cell Mapping and dynamic psa. *Actes du congrès ICONÉ*, 4, 1996.
- M. Belhadj and T. Aldemir. The Cell to Cell Mapping technique and Chapman-Kolmogorov representation of system dynamics. *Journal of sound and vibration*, 181(4) :687–707, 1995.
- H. Bertholon. *Une modélisation du vieillissement*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 2001.
- H. Bertholon, N. Bousquet, and G. Celeux. Une modélisation de durée de vie à risques de défaillance concurrents. *Actes des Journées de Statistique*, 36, 2004.
- M. Bouissou. Dix petits problèmes de modélisation (en sûreté de fonctionnement des systèmes). *Phoebus*, 34, 2005.
- M. Bouissou and J.L. Bon. A new formalism that combines advantages of fault-trees and Markov models : Boolean logic Driven Markov Processes. *Reliability Engineering & System Safety*, 82(2) :149–163, 2003.
- G.P. Castaneda. *Evaluation par simulation de la Sûreté de Fonctionnement de systèmes en contexte dynamique hybride*. PhD thesis, Centre de Recherche en Automatique de Nancy, 2009.
- J. Chiquet. *Modélisation et estimation des processus de dégradation avec application en fiabilité des structures*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, 2007.
- J. Chiquet, N. Limnios, and M. Eid. Piecewise Deterministic Markov Processes applied to fatigue crack growth modelling. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(5) :1657–1667, 2009.
- C. Coccozza-Thivent. *Processus stochastiques et Fiabilité des systèmes*. Springer, 1997.
- C. Coccozza-Thivent. *Processus de renouvellement markovien Processus de Markov déterministes par morceaux*. <http://perso-math.univ-mlv.fr/users/coccozza.christiane/recherche-pageperso/RMetPDMP.pdf>, 2011.
- C. Coccozza-Thivent and R. Eymard. Approximation of the marginal distributions of a semi-Markov process using finite volume scheme. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 38(5), 2004.
- C. Coccozza-Thivent and M. Roussignol. Semi-Markov processes for reliability studies. *ENSAIM*, 1 :207–223, 1997.
- C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, and S. Mercier. A finite volume scheme of dynamic reliability models. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(3) :446–471, 2006a.
- C. Coccozza-Thivent, R. Eymard, S. Mercier, and M. Roussignol. Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006(1) :1–18, 2006b.
- OLV Costa and F. Dufour. Average continuous control of Piecewise Deterministic Markov Processes. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 48 :4262–4291, 2010.
- M.H.A. Davis. Piecewise Deterministic Markov Processes : A general class of non-diffusion stochastic models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 46(3) :353–388, 1984.

- M.H.A. Davis. *Markov models and optimization*. Chapman & Hall, 1993.
- B. De Saporta, F. Dufour, and K. Gonzalez. Numerical method for optimal stopping of Piecewise Deterministic Markov Processes. *The Annals of Applied Probability*, 20(5) :1607–1637, 2010.
- J. Devooght. *Dynamic Reliability*. Springer, 1997.
- R. Donat. *Modélisation de la fiabilité et de la maintenance par modèles graphiques probabilistes*. PhD thesis, INRETS, 2009.
- R. Donat, P. Leray, L. Bouillaut, and P. Aknin. A dynamic bayesian network to represent discrete duration models. *Neurocomputing*, 73(4-6) :570–577, 2010.
- L. Doyen. *Modélisation et évaluation de l'efficacité de la maintenance des systèmes réparables*. PhD thesis, Laboratoire de modélisation et Calcul (LMC), 2004.
- L. Doyen and O. Gaudoin. Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age. *Reliability Engineering & System Safety*, 84(1) :45–56, 2004.
- M. Duflo. *Algorithmes stochastiques*. Springer, 1996.
- M.H.C. Everdij and H.A.P. Blom. Piecewise Deterministic Markov Process represented by Dynamically Coloured Petri Nets. Technical report, National Aerospace Laboratory NLR, 2003.
- R. Eymard and S. Mercier. Comparison of numerical methods for the assessment of production availability of a hybrid system. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(1) :168–177, 2008.
- R. Eymard, S. Mercier, and A. Prignet. An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to Piecewise Deterministic Markov Processes. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2) :293–323, 2008.
- J. He, R. Wu, and H. Zhang. Ruin probabilities of a surplus process described by PDMPs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 24(1) :117–128, 2008.
- C.S. Hsu. A theory of Cell-to-Cell Mapping dynamical systems. *Journal of Applied Mechanics*, 47 :931–939, 1980.
- C.S. Hsu. *Cell-to-Cell Mapping : a method for global analysis of non-linear systems*. Springer-Verlag, 1987.
- M. Jacobsen. *Point process theory and applications*. Birkhauser Boston, 2006.
- S. Khalfauoui. *Méthode de recherche des scénarios redoutés pour l'évaluation de la sûreté de fonctionnement des systèmes mécatroniques du monde automobile*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Toulouse, 2003.
- S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, and M.P. Vecchi. Optimization by simulated annealing. *science*, 220(4598) :671–680, 1983.
- P.E. Labeau. *Méthodes semi-analytiques et outils de simulation en dynamique probabiliste*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 1996.
- P.E. Labeau. A survey on Monte Carlo estimation of small failure risk in dynamic reliability. *International Journal of Electronics and Communication*, 52 :205–211, 1998.
- P.E. Labeau, C. Smidts, and S. Swaminathan. Dynamic reliability : towards an integrated platform for probabilistic risk assessment. *Reliability Engineering & System Safety*, 68(3) :219–254, 2000.
- CD Lai, M. Xie, and DNP Murthy. A modified Weibull distribution. *Reliability, IEEE Transactions on*, 52(1) :33–37, 2003.
- A. Marsan, G. Balbo, S. Donatelli, and G. Franceschinis. *Modelling with Generalized Stochastic Petri Nets*. Wiley, 1995.
- M. Marseguerra, E. Zio, J. Devooght, and P.E. Labeau. A concept paper on dynamic reliability via Monte Carlo simulation. *Mathematics and Computers in Simulation*, 47(2-5) :371–382, 1998.

- M. Medjoudj. *Contribution à l'analyse des systèmes pilotés par calculateurs : Extraction de scénarios redoutés et vérification de contraintes temporelles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2006.
- S. Mercier. Numerical bounds for semi-markovian quantities and application to reliability. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 10(2) :179–198, 2008a.
- S. Mercier. Bounds and approximations for continuous-time markovian transition probabilities and large systems. *European Journal of Operational Research*, 185(1) :216–234, 2008b.
- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix. *SIAM review*, 20(4) :801–836, 1978.
- C. Moler and C. Van Loan. Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *SIAM review*, 45(1) :3–49, 2003.
- P. Naim and A. Becker. *Réseaux bayésiens*, volume 5. Eyroles, 2004.
- A. Pages and M. Gondran. *Fiabilité des systèmes*. Eyrolles, 1980.
- E. Raimond, B Laurent, N. Rahni, K. Chevalier-Jabet, and T. Durin. Application des EPS de niveau 2 et des techniques de fiabilité dynamique des EPS de niveau 2 à la validation des guides d'intervention en accident grave. Technical report, Bureau d'évaluation probabiliste des accidents graves, 2007.
- R. Rivier and Y. Putallaz. Audit sur l'état du réseau ferré national français. Technical report, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2005.
- T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels. *Stochastic processes for insurance and finance*. Wiley Series in Probability and Statistics, 2000.
- B. Tombuyses and T. Aldemir. Continuous Cell-to-Cell Mapping. *Journal of sound and Vibration*, 202(3) :395–415, 1997.
- G. Wang, C. Zhang, and R. Wu. Ruin theory for the risk process described by PDMPs. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica (English Series)*, 19(1) :59–70, 2003.
- W.J. Weibull. A statistical distribution function of wide applicability, appl. *Journal of Applied Mechanics*, 18 :293–297, 1951.
- H. Zhang, F. Dufour, Y. Dutuit, and K. Gonzalez. Piecewise Deterministic Markov Processes and dynamic reliability. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 222(4) :545–551, 2008.
- R. Ziani. Estimation de la fiabilité des groupes de climatisation TER. Technical report, SNCF, 2007.
- V. Zille. *Modélisation et évaluation des stratégies de maintenance complexes sur des systèmes multi-composants*. PhD thesis, Université Technologique de Troyes, 2009.
- V. Zille, E. Zio, G. Rossetti, and A. Despujols. Monte Carlo simulation for modelling degradation in maintenance programs assessment. *Actes du congrès ESREL*, 2009.