



HAL
open science

Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces

Xavier Claeys

► **To cite this version:**

Xavier Claeys. Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces. Analyse numérique [math.NA]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2008. Français. NNT: . tel-00645118

HAL Id: tel-00645118

<https://theses.hal.science/tel-00645118v1>

Submitted on 26 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

spécialité

Mathématiques appliquées

par

Xavier CLAEYS

Titre :

**Analyse asymptotique et numérique
de la diffraction d'ondes par des fils minces**

Directeurs : Patrick Joly
 Houssem Haddar

Rapporteurs : Peter Monk
 Martin Costabel

Examineurs : François Murat
 Grégoire Allaire
 Yvan Martel
 René Vézinet

Analyse asymptotique et numérique de la diffraction d'ondes par des fils minces

Résumé : Cette thèse traite de la modélisation de la propagation d'ondes dans des milieux comportant des fils minces i.e. dont l'épaisseur est bien plus petite que la longueur d'onde. En appliquant la méthode des développements raccordés, nous dérivons un développement de la solution de l'équation de Helmholtz en 2D autour d'un petit obstacle avec condition de Dirichlet sur le bord et proposons un modèle approché dans lequel intervient une condition de Dirichlet moyennée. Par ailleurs nous proposons et analysons deux méthodes numériques non standard pour en calculer la solution avec précision : l'une est adaptée de la méthode de la fonction singulière et l'autre est une version scalaire de la méthode de Holland. Nous démontrons la consistance de ces méthodes. Nous effectuons ensuite le même travail en 3D pour le problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord d'un objet filiforme dont les pointes sont arrondies ellipsoïdalement. Nous dérivons également un modèle approché dont l'étude mène à une justification théorique de l'équation de Pocklington dans sa version scalaire.

Asymptotics and numerical analysis for wave diffraction by thin wires

Abstract : This thesis deals with the propagation of waves in media that comprise thin wires the thickness of which is much smaller than the wavelength. We apply the matched asymptotic expansion method and derive an expansion of the solution to the two dimensional Helmholtz equation around a small obstacle with Dirichlet boundary condition. Then we present a simplified model for this problem involving an averaged boundary condition and analyze two non-standard numerical methods for computing accurately the corresponding solution : the first one is a variation of the singular function method, and the second one is a scalar version of the Holland method. We prove the consistency of both methods in this case. Then we provide comparable results for the 3D Helmholtz problem with Dirichlet boundary condition on a wire-shaped obstacle with ellipsoidal tips. We also derive a simplified model in the latter setting and this leads to a justification of a scalar version of the Pocklington equation.

Je dédie ce travail
à Baptiste Claeys

REMERCIEMENTS

Je voudrais exprimer ici toute ma gratitude aux gens qui m'ont permis d'effectuer ma thèse dans les conditions idéales dont j'ai bénéficié. Sur le plan humain, j'ai trouvé que ces trois années étaient passionnantes parce que j'ai cotoyé et rencontré des personnes qui forçaient le respect et l'admiration.

Mes remerciements vont en premier à Patrick Joly et Housseem Haddar. Ce fut un vrai plaisir de les connaître et un honneur d'être leur élève. J'ai beaucoup appris à leur contact. Je les remercie sincèrement pour leur patience, leur disponibilité, leur sens de l'humour et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je les remercie de m'avoir consacré tant d'énergie et d'efforts, je pense que suivre une thèse en analyse asymptotique ne doit pas être de tout repos. Enfin je les remercie pour leurs encouragements, notamment dans les moments difficiles où je croyais être au point mort.

Je remercie François Murat, Yvan Martel, Grégoire Allaire et René Vézinet d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Il ont rendu l'organisation de ma soutenance facile. Je les remercie du temps et de l'intérêt qu'ils ont consacré à mon travail. Je les remercie de leur disponibilité.

Je remercie également Martin Costabel et Peter Monk d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je mesure la témérité, la patience et l'énergie qu'il leur a fallu pour se plonger dans mon manuscrit. Merci vraiment. Je les remercie également pour leurs remarques pertinentes sur le manuscrit. Merci enfin d'avoir accepté de venir de loin pour ma soutenance.

Je remercie la DGA, le CNRS et l'INRIA d'avoir financé mon travail, et de m'avoir accordé une telle liberté. J'espère sincèrement avoir répondu à leur attentes.

Mes remerciements vont également à Francis Collino. Il a été comme mon "troisième directeur de thèse" alors que j'en avais déjà deux hors pairs. Je le remercie de s'être tant intéressé à mon travail, de m'avoir fait profiter de ses intuitions et ses réflexions. Il m'a vraiment transmis son goût et sa curiosité pour l'analyse numérique.

Je remercie toutes les personnes de POEMS. L'ambiance a été vraiment agréable pendant ces trois ans. Il y a tant de moments vraiment drôles que j'ai passé avec eux.

Nombreux sont les professeurs auxquels j'aimerais adresser des remerciements. Je pense en particulier à Grégoire Casalis et Daniel Bouche, qui m'ont tous les deux poussé à continuer les maths et qui m'ont guidé dans mon orientation.

J'exprime également ma reconnaissance à ma famille pour leurs encouragements et leur aide. Ceci s'applique surtout à ma mère pour pleins de raisons notamment très concrètes. Pour ne citer qu'un exemple, elle a relu ma thèse (!). Si vous connaissez beaucoup de mamans qui relisent une thèse, faites moi signe. J'ai reçu grâce à mes parents la meilleure formation scientifique qui soit. Même dans des moments vraiment difficiles, mon éducation et celle de mon frère et de ma soeur a toujours été la priorité pour eux. Bravo.

Je salue tous mes amis qui m'ont chacun apporté leur sensibilité sur des sujets vraiment divers et qui m'ont permis de ne pas devenir complètement zinzin avec toutes ces équations. Gygott m'a même aidé lors de la rédaction du manuscrit et je le remercie sincèrement.

Mes pensées se tournent enfin vers Julia que je remercie pour sa patience, son affection, sa compréhension.



TABLE DES MATIÈRES

Introduction générale	1
Partie I La méthode des développements raccordés	9
1 Analyse asymptotique d'un premier problème modèle : Helmholtz avec condition de Neumann autour d'un petit obstacle	11
1.1 Position du problème	12
1.1.1 Description de la géométrie	13
1.1.2 Formulation du problème	14
1.2 Formulation faible de la stabilité	15
1.2.1 Approximation d'ordre $\mathbf{0}$: le champ limite	16
1.2.2 Preuve de stabilité	17
1.2.3 Remarques d'analyse asymptotique	21
1.3 Calcul analytique dans le cas d'un obstacle circulaire	22
1.3.1 Séparation de variables pour l'équation de Helmholtz	22
1.3.2 Fonctions de Bessel de $\mathbf{1}^{\text{re}}$ espèce	22
1.3.3 Fonctions de Bessel de $\mathbf{2}^{\text{nd}}$ espèce d'ordre non nul	23
1.3.4 Fonctions de Bessel de $\mathbf{2}^{\text{nd}}$ espèce d'ordre $\mathbf{0}$	25
1.3.5 Bilan	25
1.3.6 Résolution analytique dans un cas simple	26
1.4 Développement d'ordre supérieur	27
1.4.1 Singularité des termes du développement	27
1.4.2 La méthode des développements raccordés	28
1.4.3 Approximation globale	31
1.4.4 Formulation forte de la stabilité	32
1.4.5 Conséquences de la stabilité	33
1.5 Étude du champ lointain	34
1.5.1 Séparation de variables basée sur les fonctions de Bessel	35
1.5.2 Autre famille de solutions à variables séparées	36
1.5.3 Notion de développement radial au voisinage de $\mathbf{0}$	36
1.5.4 Développement radial des solutions de l'équation de Helmholtz	38
1.6 Étude du champ proche	40
1.6.1 Expression explicite des solutions des équations de Laplace emboîtées	41

1.6.2	Notion de développement radial au voisinage de l'infini	42
1.7	Étude de l'erreur de raccord	44
1.7.1	Bilan sur les conditions suffisantes	49
1.7.2	Reformulation des équations de raccord	50
1.8	Définition des termes du développement	52
1.8.1	Unicité de la solution	53
1.8.2	Construction de profils	55
1.8.3	Existence de la solution	59
1.8.4	Validation de l'ansatz	61
1.8.5	Conclusion finale	62
2	Principes de calcul généraux pour la méthode des développements raccordés	63
2.1	Les hypothèses de départ	64
2.1.1	Définition et paramétrage de la géométrie	64
2.1.2	Espaces de Sobolev et espaces à poids	65
2.1.3	Problème considéré	66
2.1.4	Forme des opérateurs différentiels	67
2.1.5	Hypothèses sur la partie dominante	69
2.2	Discussion sur une forme de développement	70
2.2.1	Découpage de la géométrie	70
2.2.2	Approximation en champ lointain	71
2.2.3	Approximation en champ proche	72
2.2.4	Approximation dans tout le domaine	72
2.2.5	Exploitation de l'hypothèse de stabilité	73
2.2.6	Équations pour le champ proche et lointain	73
2.3	Développement radial du champ lointain	74
2.3.1	Développement radial au voisinage de $\mathbf{0}$	74
2.3.2	Application au champ lointain	76
2.4	Développement radial du champ proche	79
2.4.1	Développement au voisinage de l'infini	79
2.4.2	Application au champ proche	80
2.5	Principe de Raccord	81
2.6	Estimation des termes d'erreur	82
2.6.1	Estimation de l'erreur de champ proche	82
2.6.2	Estimation de l'erreur de raccord	83
2.6.3	Bilan sur l'estimation d'erreur	85
2.6.4	Estimation dans le cas d'un développement régulier	86
2.6.5	Conclusions : construire un développement en pratique	87
2.7	Étude détaillée du principe de raccord	87
2.7.1	Espace de séries formelles	88
2.7.2	Première description des éléments du noyau de \mathbf{A}	89
2.7.3	Construction d'un inverse à droite	89
2.7.4	Exemples explicites	91
2.7.5	Éléments particuliers du noyau de \mathbf{A}	92
2.7.6	Décomposition des éléments du noyau de \mathbf{A}	93
2.7.7	Retour sur le principe de raccord	95
2.7.8	Simplification des équations de raccord	95
2.7.9	Estimation d'erreur dans le cas où le principe de raccord n'est pas satisfait	96
2.8	Construction concrète des termes du développement	96

Annexes	
2.A	Rappels d'analyse fonctionnelle 99
2.B	Intégration et calcul holomorphe 100
2.B.1	Intégration à valeur vectorielle 101
2.B.2	Rappels de calcul holomorphe 101
2.C	Transformation de Mellin 102
2.C.1	Transformation de Mellin au voisinage de zéro 102
2.C.2	Transformation de Mellin au voisinage de l'infini 105
Partie II Étude complète d'un problème modèle : Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle 107	
3	Application du formalisme à l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle 109
3.1	Vérification des hypothèses 110
3.1.1	Problème bidimensionnel avec un petit obstacle 110
3.1.2	Équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet 111
3.1.3	Définition et propriétés des opérateurs intervenant dans l'analyse asymptotique . . 112
3.1.4	Stabilité 113
3.2	Définition des termes du développement raccordé 116
3.2.1	Réduction des équations de raccord 117
3.2.2	Formulation des problèmes récurrents 118
3.2.3	Construction de profils 118
3.2.4	Unicité des solutions des problèmes récurrents 123
3.2.5	Existence des solutions des problèmes récurrents 124
3.3	Dépendance en ε des termes du développement raccordé 127
3.4	Estimation d'erreur 128
3.5	Une dérivation explicite des premiers termes du développement 130
3.5.1	Termes d'ordre 0 pour un obstacle arbitraire 130
3.5.2	Termes d'ordre 0 et 1 pour un obstacle circulaire 130
3.6	Développement asymptotique des traces sur Γ_ε 131
Annexes	
3.A	Estimations d'erreur affinées 134
4	Modèle approché pour l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle 137
4.1	Rappels sur la géométrie et le problème traité 138
4.1.1	Domaine comportant un petit obstacle 139
4.1.2	Problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène 139
4.1.3	L'approche domaines fictifs : une autre formulation variationnelle 139
4.1.4	Unicité de la solution de la formulation en domaines fictifs 140
4.2	Présentation du modèle approché 140
4.2.1	Réduction de l'espace de multiplicateurs de Lagrange 141
4.2.2	Formulation en domaines fictifs dégradée 142
4.3	Analyse asymptotique du modèle approché 143
4.3.1	Réécriture de la formulation en domaines fictifs dégradée 144
4.3.2	Étude de l'opérateur de bord intérieur 145
4.3.3	Stabilité du modèle approché 147
4.4	Définition des termes du développement 149
4.4.1	Écriture des problèmes récurrents 149

4.4.2	Construction des profils	150
4.4.3	Développement raccordé pour le modèle approché	152
4.4.4	Estimation d'erreur dans le domaine Ω tout entier	154
4.4.5	Comparaison avec le développement raccordé du modèle exact	154
4.5	Modèle approché pour la trace de la dérivée normale	156
4.5.1	Stabilité de la trace de la dérivée normale	156
4.5.2	Dérivation du développement asymptotique	157
4.5.3	Interprétation en terme d'équation intégrale	158
Annexes		
4.A	Rappels sur les problèmes de type point-selle	160
4.B	Estimations d'erreur affinées dans le domaine Ω tout entier	161
5	Méthode numérique pour la diffraction par un petit obstacle et étude théorique du schéma de Holland	165
5.1	Discrétisation standard du modèle approché	167
5.1.1	Le maillage et l'espace d'approximation standard	167
5.1.2	Discrétisation associée à l'obstacle et hypothèse de maillage grossier	169
5.1.3	La formulation discrète standard et son caractère bien posé	169
5.1.4	Expérience numérique : verrouillage du schéma standard	172
5.2	Le schéma de Galerkin enrichi	174
5.2.1	Retour sur les formules explicites	175
5.2.2	Définition de la fonction de forme additionnelle	175
5.2.3	Formulation discrète enrichie	176
5.2.4	Consistance du schéma de Galerkin enrichi	176
5.2.5	Expérience numérique : schéma enrichi faiblement verrouillant	178
5.3	Étude de la fonction de forme additionnelle	180
5.3.1	Une remarque simplificatrice	181
5.3.2	Approximation globale par des fonctions de forme standard	181
5.3.3	Approximation locale par des fonctions de forme standard	184
5.3.4	Illustration numérique	185
5.4	La méthode de Holland	186
5.4.1	Présentation dans le cas de notre problème modèle	186
5.4.2	Retour sur le schéma de Galerkin enrichi	189
5.4.3	Consistance du schéma de Holland, formule théorique pour l'inductance	194
5.4.4	Validation numérique de la formule d'inductance critique	195
5.4.5	Dépendance du calibrage par rapport à la fréquence	196
5.4.6	Dépendance du calibrage par rapport à la position de l'obstacle	198
5.5	Perspectives vers les problèmes en temps	198
5.5.1	Schéma de Galerkin enrichi en régime instationnaire	199
5.5.2	Schéma type Holland en régime instationnaire	200
Annexes		
5.A	Lemmes techniques pour la preuve de consistance du schéma enrichi	202
5.B	Le théorème de Nitsche et Schatz	203
Partie III Analyse asymptotique en géométrie filaire tridimensionnelle		205
6	Équation de Helmholtz avec condition aux limites de Neumann	209
6.1	Description de la géométrie	210
6.1.1	Définition des coordonnées ellipsoïdales	211
6.1.2	Définition de la surface du fil	214

6.1.3	Définition du domaine normalisé	216
6.2	Définition et étude des espaces à poids	217
6.3	Problème de Helmholtz avec condition de Neumann homogène	222
6.3.1	Forme des opérateurs	223
6.3.2	Stabilité	226
6.4	Écriture des problèmes récurrents	230
6.5	Construction des profils en champ lointain	231
6.6	Construction des profils en champ proche	234
6.6.1	Transformation du domaine normalisé	235
6.6.2	Transformation des opérateurs	235
6.6.3	Espaces à poids en domaine normalisé	236
6.6.4	Définition des profils en champ proche	237
6.7	Existence et unicité de la solution des problèmes récurrents	238
6.8	Validation de l'ansatz	242
Annexes		
6.A	Rappels sur les fonctions de Legendre	244
6.B	Séparation de variables pour l'équation de Helmholtz 3D	246
6.C	Dérivation d'une identité pour la mesure de surface sur le fil	247
6.D	Régularité du champ proche au voisinage des pointes	247
7	Équation de Helmholtz avec condition aux limites de Dirichlet	253
7.1	Position du problème, vérification des hypothèses	255
7.1.1	Définition de la géométrie : la même qu'au chapitre précédent	255
7.1.2	Problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène	256
7.1.3	Stabilité	258
7.1.4	Écriture des problèmes récurrents	259
7.2	Construction des profils en champ proche et lointain	260
7.3	À propos de l'unicité des solutions des problèmes récurrents	264
7.3.1	Étude des profils de champ lointain d'ordre zéro	265
7.3.2	Expression de l'opérateur de raccord	267
7.3.3	Décomposition spectrale de l'opérateur de raccord	269
7.3.4	Non-unicité de la solution des problèmes récurrents	270
7.4	Construction d'une solution approchée pour les problèmes récurrents	271
7.4.1	Ébauche de la construction	271
7.4.2	Régularisation de l'équation de raccord	272
7.4.3	Cadre fonctionnel adapté à l'équation de raccord : les espaces filaires	273
7.4.4	Stabilité de l'opérateur de raccord régularisé	275
7.4.5	Équation de raccord et problèmes récurrents régularisés	277
7.4.6	Dérivation du premier terme du développement raccordé	279
7.5	Estimation d'erreur	279
7.5.1	Définition de notations dédiées à l'estimation d'erreur	280
7.5.2	Estimation de l'erreur de régularisation et des termes de reste	280
7.5.3	Conclusion finale	282
7.5.4	Estimations d'erreur affinées	283
7.6	Développement asymptotique des traces sur Γ_ε	284
Annexes		
7.A	Résultats techniques pour l'estimation d'erreur	286
7.A.1	Dépendance des profils en champ lointain par rapport à leur argument	286
7.A.2	Dépendance des profils en champ proche par rapport à leur argument	291
7.A.3	Conclusions	294

7.B	Continuité de l'opérateur de raccord dans les espaces filaires	295
8	Modèle approché et expériences numériques pour l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord d'un objet filiforme	297
8.1	Géométrie et formulation en domaines fictifs du problème exact	298
8.2	Opérateur de moyenne	300
8.2.1	Mesure surfacique moyennée dans la direction transverse	301
8.2.2	Définition et étude de l'opérateur de moyenne	302
8.3	Modèle approché : formulation en domaines fictifs dégradée	305
8.4	Développement raccordé au premier ordre pour le modèle approché	307
8.4.1	Début de l'estimation d'erreur	307
8.4.2	Estimation des termes reliés au champ proche	308
8.4.3	Estimation des termes de raccord	309
8.4.4	Lemme intermédiaire	310
8.4.5	Conclusions	311
8.5	Équation intégrale associée au modèle approché	312
8.5.1	Dérivation formelle de l'équation de Pocklington scalaire	312
8.5.2	Dérivation de l'équation intégrale associée au modèle approché	313
8.6	Expériences numériques	315
8.6.1	Maillage volumique et espace d'approximation standard	315
8.6.2	Espace d'approximation filaire	316
8.6.3	Schéma de Galerkin standard	316
8.6.4	Schéma de Galerkin enrichi	316
8.6.5	Comparaison entre les deux méthodes	317
8.6.6	Une version matricielle de la méthode de Holland	321
	Conclusions et perspectives	325
9.1	Quelques perspectives immédiates	325
9.1.1	Extension des résultats d'analyse numérique	325
9.1.2	Les fils courbes	326
9.1.3	Les pointes "carrées"	326
9.2	Les équations de Maxwell	327
9.2.1	Cas modèle du fil circulaire, système de coordonnées	327
9.2.2	Formulation des équations de Maxwell	329
9.2.3	Étude explicite des opérateurs en coordonnées toroïdales	331
9.2.4	Écriture des problèmes récurrents	333
9.2.5	Termes d'ordre zéro	334
9.2.6	Modèle approché et schéma de Galerkin enrichi	336
9.2.7	Le régime transitoire	337

Introduction générale

L'analyse numérique a proposé depuis son développement la simulation comme une alternative complémentaire à l'expérimentation concrète pour comprendre et quantifier les phénomènes en jeu dans tous les domaines de la physique. Ceci s'applique en particulier à l'électromagnétisme auquel les technologies les plus récentes réservent une place privilégiée. Les phénomènes électromagnétiques interviennent dans la plupart des systèmes de communication et de détection : radio, téléphone, radars ... La mise en oeuvre de l'électromagnétisme débouche sur une infinité d'applications. C'est à cause de l'importance croissante de ces phénomènes que la communauté d'analyse numérique a déployé dès ses débuts des efforts conséquents pour proposer et étudier des moyens de résoudre numériquement les équations de Maxwell qui régissent l'électromagnétisme.

En particulier on doit résoudre ces équations dans des situations de plus en plus complexes. Parmi toutes les complications que l'on peut imaginer, il y a celles qui sont liées à la forme du domaine dans lequel se propagent les ondes électromagnétiques auxquelles on s'intéresse. Le calcul du champ électromagnétique dans un domaine dont le bord est polygonal avec des coins et des arêtes rentrants constitue par exemple un domaine actif de recherche. C'est dans la problématique des domaines à géométrie complexe que se place cette thèse puisque nous serons intéressés au calcul du champ électromagnétique dans un milieu qui comporte un fil parfaitement conducteur dont l'épaisseur est bien plus petite que la longueur d'onde moyenne du champ.

Lorsque j'ai pris connaissance de mon futur sujet de thèse j'ai été étonné par son apparente simplicité. Je pensais qu'il existait depuis longtemps une méthode de calcul des équations de Maxwell autour d'un fil conducteur. Il s'agit en effet d'une très vieille question puisque Maxwell a écrit ses équations sous leur forme moderne en 1873 dans son livre "A Treatise on Electricity And Magnetism", et Pocklington s'est attelé au problème des fils dès 1897 dans [96], en dérivant une version simplifiée des équations de Maxwell autour d'un fil et en proposant une équation intégrale unidimensionnelle qui porte maintenant son nom et qui permet le calcul du courant induit à la surface du fil. Bien que cette équation intégrale ait été étudiée en détail, sa dérivation n'a pas encore reçu, à ma connaissance, de justification mathématique rigoureuse, et il reste par ailleurs beaucoup d'autres questions ouvertes concernant les équations intervenant dans l'étude des fils minces.

Ces questions ouvertes posent des problèmes bien concrets car les situations dans lesquelles interviennent les fils sont nombreuses. L'industrie aéronautique souhaite par exemple étudier l'influence sur le champ électromagnétique des fils logés dans la carlingue des avions. Voici un autre exemple qui a motivé le financement de ma thèse par la DGA (direction générale de l'armement). La radionavigation ou la communication avec des sous-marins s'établissent dans les gammes LF (low frequency 30-300 kHz) et VLF (very low frequency 3-30 kHz) car ces fréquences permettent notamment aux ondes de pénétrer plus profond sous la surface de l'eau. Ces fréquences correspondent à une longueur d'onde au

moins supérieure à 1 km. Ces communications doivent être relayées par des stations d'antennes dont certaines, les antennes parapluies par exemple, consistent en de vastes réseaux de fils étendus sur plusieurs centaines de mètres. Ces fils admettent un diamètre de l'ordre du centimètre. On désire simuler à l'aide d'une méthode volumique la propagation des ondes électromagnétiques dans ces réseaux de fils. Effectuons un calcul pour donner une idée du problème qui se pose. Appelons h le pas des mailles, λ la longueur d'onde et ε le rayon des fils. Lorsqu'il s'agit de simuler la propagation des ondes, on considère en général qu'une précision raisonnable nécessite un pas de maille inférieur au dixième de la longueur d'onde. On a donc $h < \lambda/10$. Pour se donner une idée supposons que l'on choisisse $h \approx 1\text{km}/100 = 10\text{m}$ ce qui semble optimiste. Par ailleurs supposons que $\varepsilon \approx 1\text{cm} = 10^{-2}\text{m}$. On a alors

$$\text{typiquement : } \frac{\varepsilon}{h} < 10^{-3}.$$

Or il est bien connu qu'une méthode numérique volumique standard telle que les différences finies, encore largement répandue, aura beaucoup de mal à approcher des détails géométriques dont l'ordre de grandeur est inférieur à celui du pas de maillage. Ici on voit qu'une méthode standard se révélera donc impuissante à reproduire fidèlement l'effet d'un fil sur le champ électromagnétique. Or cet effet n'est pas négligeable malgré la faible épaisseur du fil. Il est alors nécessaire d'aménager la méthode de simulation pour le prendre en compte.

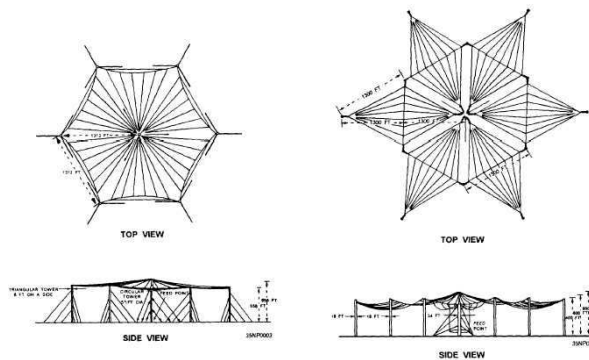


Fig.0 Schéma de l'antenne-parapluie "Goliath".

Sujet de la thèse

On peut distinguer deux approches pour résoudre les équations de Maxwell autour d'un fil mince parfaitement conducteur. La première est la résolution par équations intégrales au moyen de l'équation de Pocklington. Bien que nous formulerons quelques résultats autour de cette équation, cette approche ne constitue pas l'objet central de cette thèse. La deuxième approche est volumique, elle consiste à coupler des équations posées dans le volume autour du fil avec des équations posées sur la surface du fil. Dans le cas de cette deuxième approche, la question de savoir comment sont couplées les équations volumiques avec les équations sur le fil est en soi une problématique qui n'avait pas, à ma connaissance, été abordée d'un point de vue mathématique. Un couplage des équations volumiques 3D avec des équations 1D sur le fil a été proposé par Holland dans [66] sans justification théorique. Celui-ci fait intervenir un paramètre pour lequel il convient de procéder à un calibrage ou de se référer à des abaques (eux-mêmes établis sur la base de calibrages). Cette méthode fournit des résultats satisfaisants lorsqu'on considère un fil droit plongé dans un maillage cartésien et aligné avec les axes de ce maillage. Mais pour des situations un tout petit peu plus complexes comme dans le cas d'un fil droit disposé de manière oblique par rapport au maillage, il devient difficile de calibrer la méthode. C'est principalement cette difficulté qui a conduit à mon sujet de thèse. Celui-ci comportait trois volets :

- 1) Étudier la justification mathématique du modèle de Pocklington et de la méthode de Holland, quantifier leur précision.

- 2) Proposer un moyen systématique de calibrer la méthode de Holland qui en assurerait la consistance et dispenserait d'un calibrage.
- 3) Proposer éventuellement un schéma alternatif de couplage 3D-1D dont la précision ne se dégraderait pas lorsque le rapport ε/h de l'épaisseur du fil sur le pas du maillage tend vers 0.

Démarche générale et principaux résultats obtenus

L'idée générale de mon travail a consisté à appliquer des méthodes d'analyse asymptotique au problème de la diffraction électromagnétique par un fil et d'utiliser les résultats correspondants dans l'étude des modèles de Pocklington et de Holland. Pour évoquer l'apparition des méthodes d'analyse asymptotique dans l'étude des équations aux dérivées partielles il est d'usage de faire référence à l'ouvrage de Van Dyke [112] qui s'intéressait aux problèmes de couche limite en aérodynamique. De telles méthodes permettent souvent de simplifier les équations dans des problèmes où entre en jeu un paramètre adimensionnel dont on peut considérer que la valeur est soit proche de l'infini soit proche de zéro. Tel est le cas par exemple dans l'étude de problèmes d'élasticité à l'intérieur de tubes minces [20, 24] (contexte distinct, du point de vue de l'analyse, de celui de la diffraction par des fils minces).

Plus récemment on a cherché à obtenir de telles simplifications par analyse asymptotique afin de faciliter la résolution numérique d'un problème donné. Par exemple les problèmes de couche mince ont fait l'objet d'analyses asymptotiques approfondies cf [8, 10, 60, 107] et les références qu'ils contiennent. Cette démarche consistant à marier analyse numérique et analyse asymptotique a été cultivée en particulier depuis une dizaine d'année au sein du projet ONDES puis au projet POEMS [59, 61, 110] où j'ai effectué ma thèse. C'est dans cette philosophie que s'est inscrit mon travail. Dans le cas des fils le petit paramètre est évidemment le rapport de l'épaisseur du fil sur la longueur d'onde. La thèse de Sébastien Tordeux [110] a joué un rôle particulier pour moi puisque c'est par sa lecture que je me suis initié aux techniques de développements raccordés.

Pour répondre au problème qui m'avait été posé j'ai procédé par étapes. J'ai considéré des problèmes d'abord simples, puis de plus en plus complexes, en cherchant à me rapprocher le plus possible des équations de Maxwell. Je n'ai pu cependant qu'effleurer ce dernier sujet faute de temps, et me suis limité à considérer l'équation de Helmholtz dans diverses situations. De plus la grande majorité de mon travail concerne le régime fréquentiel. Avant de décrire en détail le contenu de cette thèse, je voudrais formuler les conclusions et résultats principaux auxquels j'ai abouti. Le lecteur est invité à voir le reste de cet ouvrage comme un argumentaire étayant ces conclusions, qui sont je pense mon apport à ce qui existe déjà dans la littérature.

- L'étude de l'équation de Helmholtz dans un domaine comportant un objet diffractant filiforme se rattache au problème plus large de la résolution des EDP dans des domaines à bord singulier. Les mêmes difficultés techniques apparaissent d'un point de vue mathématique, et les mêmes outils peuvent être utilisés (espaces à poids, transformée de Mellin...)
- La méthode de Holland, lorsqu'elle est bien calibrée est une version cachée de la méthode du complément singulier (voir §5.4.2). Cette dernière est une technique d'enrichissement de la base de Galerkin utilisée pour la résolution d'EDP dans des domaines singuliers par éléments finis. Le choix de l'enrichissement dépend de façon cruciale des comportements singuliers qui apparaissent dans les termes du développement de la solution du problème étudié.
- Ce point de vue mène à une preuve de consistance pour la méthode de Holland (voir proposition 5.4.2) et à une formule théorique pour obtenir une valeur du paramètre de Holland assurant la pré-

cision de la méthode pour une classe assez large de maillages (triangulations régulières par tétraèdres ou hexaèdres). Nous avons dérivé cette formule rigoureusement dans le cas d'un problème bidimensionnel (formule (5.4.16)) et l'avons seulement conjecturé sur la base d'une analogie dans le cas d'un problème tridimensionnel (formule (8.6.8)). Dans tous les cas ces formules ont été validées par des expériences numériques mettant en évidence leur pertinence.

- Le dernier résultat nouveau de mon travail concerne la dérivation d'un modèle approché pour la diffraction par un fil mince (chapitres 4 et 8). Celui-ci est obtenu en partant d'une formulation en domaines fictifs du problème exact en appliquant une réduction de l'espace des multiplicateurs de Lagrange qui tient compte de l'analyse asymptotique préliminaire (chapitre 7). Nous montrons qu'une équation intégrale unidimensionnelle est associée à ce modèle approché et que cette équation intégrale est une version de l'équation de Pocklington adaptée au problème que nous étudions (voir §4.5.3 et section 8.5). Par ailleurs nous pouvons fournir une estimation d'erreur qui justifie le modèle de Pocklington dans ce contexte (proposition 4.5.2 et corollaire 8.4.1).

La nouveauté de ma thèse réside surtout dans les chapitres 4,5 et 8 qui n'ont pas d'équivalent dans la littérature. A mes yeux les chapitres 1, 3, 6 et 7 constituent des améliorations de résultats existants (théorème 6.8.1, proposition 7.5.6) ou contiennent ponctuellement des résultats nouveaux (théorème 1.2.1, proposition 3.6.2, proposition 7.6.2). Enfin je ne saurais me prononcer sur l'originalité du chapitre 2 car je ne connais pas suffisamment la littérature sur les problèmes aux limites dans les domaines à bord singulier. Néanmoins je n'ai jamais rencontré de résultat équivalent à ce que contient la section 2.7.

Plan de la thèse

Décrivons à présent plus en détail le contenu de cette thèse. Celle-ci se compose de trois parties. La première est consacrée à exposer en détails le principe de la technique asymptotique mise en oeuvre tout au long de la thèse. Il s'agit de la méthode des développements raccordés. Dans la deuxième partie nous décortiquons en détail un problème modèle bidimensionnel en trois étapes : étude du problème exact, dérivation d'un modèle approché, analyse numérique. Dans la troisième partie nous faisons de même pour une situation tridimensionnelle.

Partie I : La méthode des développements raccordés Pour décrire cette méthode nous avons choisi de procéder en deux étapes. Dans le premier chapitre nous illustrons cette méthode en l'appliquant au problème bidimensionnel de l'équation de Helmholtz avec condition de Neumann sur les bord d'un petit obstacle de diamètre inférieur à 2ε . Nous dérivons pour la solution u^ε de ce problème un développement par rapport à ε à tout ordre. Une telle étude existait déjà dans la littérature (cf [67, 87]) mais seulement pour une version coercive de l'équation de Helmholtz. Nous démontrons au passage un résultat de stabilité (le théorème 1.2.1) qui semble nouveau et qui est indispensable au traitement du problème non-coercif.

Dans le deuxième chapitre nous exposons les principes de calcul généraux sur lesquels reposent les analyses asymptotiques du reste de la thèse. Il s'agit en gros des mêmes calculs que dans le premier chapitre mais appliqués à un contexte un peu plus général. Nous invitons le lecteur minutieux à lire ce deuxième chapitre en gardant en tête l'exemple du chapitre 1. La section 2.7 contient une étude de la structure algébrique des développements qui permet de généraliser certains concepts de [109] liés aux équations de raccord dans le cas d'un opérateur non homogène un peu général.

Partie II : Étude détaillée d'un problème modèle bidimensionnel Dans cette deuxième partie nous avons voulu partir d'un problème simple (diffraction en deux dimensions) et détailler à fond chacune des trois étapes menant à un schéma de calcul performant pour prendre en compte les petits obstacles. A chacune de ces trois étapes correspond un chapitre.

Au chapitre 3 nous présentons le problème que l'on désire étudier et résoudre numériquement, il s'agit de l'équation de Helmholtz posée à l'extérieur d'un obstacle dont le diamètre 2ε est plus petit que la longueur d'onde, avec condition de Dirichlet sur le bord. Nous dérivons un développement asymptotique à tout ordre de la solution de ce problème en appliquant le formalisme exposé au chapitre 2. Notons qu'une telle étude, même dans le cas de l'équation de Helmholtz non-coercive, était déjà disponible dans la littérature mais les estimations d'erreur existantes sont établies en norme L^∞ . Ici nous dérivons un développement en norme H^1 de la solution u^ε ainsi qu'un développement en norme $H^{-1/2}$ de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$ la trace de dérivée normale de u^ε sur le bord du petit obstacle. Ce deuxième résultat était absent de la littérature à ma connaissance.

Le but du chapitre 4 est de dériver un modèle approché, c'est-à-dire un problème "simplifié" dont la solution est asymptotiquement proche de la solution du problème du chapitre précédent. Nous commençons par réécrire le problème du chapitre 3 au moyen d'une formulation en domaines fictifs dont nous rappelons brièvement le principe. Dans cette formulation la condition aux limites sur le bord du petit obstacle est imposée de manière faible en écrivant $\int_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \bar{q} = 0$ pour toute fonction test q choisie dans l'espace de multiplicateurs de Lagrange $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Nous proposons ensuite de considérer la même formulation mais avec un espace de multiplicateur de Lagrange réduit noté $\mathbb{E}_{\text{app}}(\Gamma_\varepsilon) \subset H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dont la définition provient directement de l'analyse asymptotique du chapitre 3. Nous montrons que le problème correspondant est bien posé et dérivons un développement asymptotique à tout ordre de sa solution u^ε par rapport à ε . Ceci nous permet *a fortiori* de démontrer que $u^\varepsilon - u^\varepsilon \rightarrow 0$ en norme H^1 .

Le chapitre 5 compare et analyse trois méthodes pour calculer la solution u^ε du modèle approché. La première repose sur un schéma de Galerkin standard adapté à la formulation en domaines fictifs. Celle-ci se révèle imprécise dès que ε est bien plus petit que le pas de maillage h , et ses performances se dégradent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui correspond à un phénomène de verrouillage numérique. La deuxième méthode dite de Galerkin enrichie consiste à ajouter dans la base de Galerkin une fonction de forme additionnelle issue de l'analyse asymptotique des chapitres 3 et 4. Cette méthode se révèle précise et on démontre d'ailleurs qu'elle est consistante. Elle est également faiblement verrouillante au sens où ses qualités d'approximation ne se dégradent que très peu lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cette deuxième approche s'apparente à la méthode de la fonction singulière déjà répandue dans la littérature intéressée à la résolution des équations elliptiques dans des domaines comportant des coins rentrants (cf [12, 69] par exemple). Enfin nous présentons une version de la méthode de Holland adaptée à notre problème bidimensionnel scalaire, suivant les idées de [26]. Nous en détaillons le principe, et mettons en évidence sa précision. Nous établissons ensuite un lien entre le schéma de Galerkin enrichi et la méthode de Holland ce qui nous conduit à une expression théorique pour le paramètre de Holland et à une preuve de la consistance pour ce schéma.

Partie III : Analyse asymptotique dans une géométrie filaire tridimensionnelle Le but est ici de fournir le même travail que dans la deuxième partie mais cette fois pour le problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord d'un obstacle diffractant filiforme tridimensionnel comportant des pointes. Dans le chapitre 6 nous considérons le problème de Helmholtz avec condition de Neumann mais il ne s'agit que d'un prétexte pour introduire à l'avance des techniques dont nous aurons besoin au chapitre 7. Ainsi nous entamons le chapitre 6 en introduisant plusieurs systèmes de coordonnées, dont le système de coordonnées ellipsoïdales qui joue un rôle clé pour traiter la présence de pointes sur un fil. Nous décrivons ensuite en détail la géométrie du domaine considéré : il s'agit de l'extérieur d'une surface filiforme décrite en coordonnées ellipsoïdales dont les pointes sont "arrondies". Ensuite nous démontrons quelques propriétés des espaces à poids intervenant dans ce contexte. Puis nous introduisons le problème de Helmholtz avec condition de Neumann, montrons qu'il rentre dans le cadre du formalisme du chapitre 2, et dérivons un développement asymptotique à tout ordre de la solution de ce problème.

Au chapitre 7 nous reprenons la même géométrie mais considérons le problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord du fil. Dans cette situation il n'est plus possible de définir les termes du développement asymptotique de la solution u^ε de manière "standard". En effet la définition des termes

de ce développement se heurte à la résolution d'une équation intégrale mal posée dépendant de $\ln(\varepsilon)$ où ε est l'épaisseur de l'objet filiforme. Nous proposons donc un moyen de régulariser cette équation intégrale, ce qui permet alors à nouveau de définir les termes du développement asymptotique de u^ε . Nous concluons le chapitre par des calculs d'estimation d'erreur qui s'avèrent plus complexes qu'auparavant. Au passage nous énonçons quelques résultats d'estimation d'erreur concernant le développement asymptotique de $n_{r_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$ la trace de dérivée normale de u^ε sur le bord du fil.

Le chapitre 8 contient à la fois la dérivation d'un modèle approché pour le problème avec condition de Dirichlet du chapitre 7 et des résultats d'expériences numériques testant des versions tridimensionnelles des schémas du chapitre 5. Le chapitre 8 commence par la réécriture du problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet sous forme domaines fictifs. En suivant la méthode que nous avons adoptée au chapitre 4 nous proposons un modèle approché consistant à écrire la formulation en domaines fictifs avec un espace de multiplicateurs de Lagrange réduit noté $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Pour définir l'espace $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ nous sommes amenés à introduire un opérateur de moyenne, qui associe à une fonction définie sur Γ_ε (le bord du fil) la fonction unidimensionnelle obtenue en prenant la moyenne transverse sur chaque section du fil. L'espace de multiplicateurs de Lagrange réduit consiste alors en un ensemble de fonctions 1D. La formulation en domaines fictifs dite "dégradée" obtenue en prenant $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ au lieu de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ comme espace de multiplicateurs de Lagrange constitue le modèle approché. Nous dérivons un développement asymptotique au premier ordre par rapport à ε de la solution u^ε de ce nouveau problème, ce qui permet de montrer par ailleurs que $u^\varepsilon - u^\varepsilon \rightarrow 0$ en norme H^1 . A ce nouveau problème correspond une équation intégrale unidimensionnelle dont nous montrons qu'elle peut être interprétée comme une version scalaire de l'équation de Pocklington. Grâce aux estimations d'erreur que nous avons obtenues par ailleurs pour $n_{r_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$, nous en tirons une justification de cette équation intégrale.

Le chapitre 8 se termine par la présentation de plusieurs expériences numériques en trois dimensions, sans analyse. Nous présentons tout d'abord une discrétisation standard de la formulation en domaines fictifs du modèle approché, puis un schéma de type Galerkin enrichi. Ensuite nous décrivons en détail les conditions des expériences numériques, et en particulier la manière dont nous calculons, par séparation de variable, une solution de référence. Nous avons choisi d'utiliser un maillage cartésien, pour la simplicité de la mise en oeuvre. Nous présentons ensuite les résultats en testant deux positions pour le fil. Dans la première position celui-ci est aligné avec les axes du maillage cartésien, et dans la seconde position le fil est disposé de manière oblique. Les résultats montrent que le schéma standard manque de précision alors que le schéma enrichi permet d'atteindre une erreur relative raisonnable (quelques %). Nous présentons enfin une version tridimensionnelle du schéma de Holland en généralisant la formule théorique que nous avons proposée au chapitre 5. Dans ce schéma le paramètre de Holland est en réalité une matrice alors que dans la version classique de la méthode de Holland c'est un simple paramètre scalaire ou une matrice diagonale qui intervient. Les résultats que nous obtenons avec ce dernier schéma sont aussi précis qu'avec le schéma de Galerkin enrichi.

Quelques précisions sur les notations

Avant d'entamer le contenu de la thèse proprement dite, nous voudrions formuler quelques remarques d'ordre générale concernant les notations. Tout d'abord nous introduisons très souvent des nombres $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ qui peuvent aussi être notés $\kappa_0, \kappa_1, \kappa' \dots$. Il peut s'agir d'un nombre différent d'une ligne à une autre mais les lettres $\kappa, \kappa', \kappa_0 \dots$ etc désigneront toujours, sauf mention explicite et exceptionnelle du contraire, un nombre indépendant de ε . Il arrive souvent que ces nombres soient également indépendants d'un indice. Nous nous sommes efforcé de préciser, dès que possible, les quantités dont chacun de ces κ est indépendant.

Par ailleurs il y a certains concepts qui trouvent un analogue dans chacun des chapitres. Nous leur avons attribué le même symbole d'un chapitre sur l'autre. Par exemple u^ε désigne la solution du problème étudié dans les chapitres 1, 2, 3, 6, 7. Même si à chaque fois il s'agit d'un problème différent nous réutilisons le même symbole u^ε . Par contre dans les chapitres 4 et 8, le problème étudié correspond

à un modèle approché. Comme nous sommes amenés à comparer la solution du problème approché avec la solution du problème "exact", nous notons u^ε la solution du problème approché pour ne pas la confondre avec u la solution du problème exact. En effet dans les chapitres 4 et 8, u^ε désigne la solution des problèmes des chapitres 3 et 7 respectivement (tout ceci sera précisé au moment venu).

Enfin signalons que pour les chapitres 6, 7 et 8 nous avons été amenés à fournir des calculs en géométrie, par exemple pour calculer le vecteur normal à une surface décrite en coordonnées ellipsoïdales. Bien que ces calculs ne soient pas complètement triviaux ils sont tout à fait standard. Afin de ne pas faire peser une charge supplémentaire de calcul sur la présentation, nous avons décidé de ne pas donner tous les détails de ces calculs que le lecteur peut retrouver par des méthodes classiques. Par ailleurs nous aurons recours, ponctuellement, à quelques concepts de géométrie riemannienne comme les tenseurs métriques ou la dérivée covariante, certes sophistiqués, mais qui participent grandement à alléger la rédaction. Il existe de très bon manuels sur le sujet. Pour une description succincte de ces concepts nous renvoyons le lecteur à la thèse d'Erwan Faou [44], et pour une description plus détaillée à [38, 81, 116].



Première partie

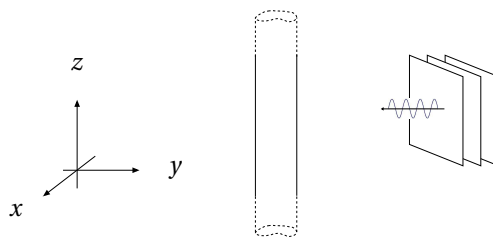
La méthode des développements raccordés

CHAPITRE 1

Analyse asymptotique d'un premier problème modèle : Helmholtz avec condition de Neumann autour d'un petit obstacle

Introduction

L'objet de cette première partie sera de présenter la méthode des développements raccordés. Nous illustrerons d'abord cette méthode en l'appliquant à un problème relativement simple, ce qui est l'objet de ce chapitre-ci, puis au prochain chapitre nous exposerons les principes de cette méthode lorsqu'on veut l'appliquer de manière plus générale. Ce premier chapitre constitue aussi une étude d'un modèle très simple de diffraction par un fil mince. Dans ce modèle on s'intéresse à une onde acoustique en régime harmonique diffractée par un fil infini, très fin et de section constante. Si on se place dans l'espace \mathbb{R}^3 muni des coordonnées (x, y, z) et que ce fil est aligné avec l'axe des z , alors on suppose que notre problème (la source, la géométrie) est invariant suivant toute translation dans la direction de l'axe des z . On peut ainsi se ramener à une situation bidimensionnelle puisque le champ acoustique ne dépend plus alors que des coordonnées x et y . Un tel modèle peut être utilisé par exemple quand on considère une onde plane harmonique incidente sur le fil avec un vecteur d'onde contenu dans le plan (x, y) .



Ce problème est le plus simple que nous envisagerons : l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un petit obstacle bidimensionnel avec condition de Neumann sur le bord et condition d'onde sortante à l'infini. Il s'agit d'un problème pour lequel nous pouvons utiliser la séparation de variables, et construire des solutions analytiques dans certains cas particuliers.

Ce premier chapitre va servir par ailleurs d'introduction à la méthode des développements raccordés. Nous ferons ultérieurement référence à cette méthode sous le nom de MDAR (Méthode des Développements Asymptotiques Raccordés). Il était naturel de commencer par une application très détaillée de la MDAR au cas le plus simple parmi ceux que nous allons traiter. Le contenu de ce chapitre est très forte-

ment inspiré de la thèse de Sébastien Tordeux [109]. Cependant la présentation de l'analyse est un peu différente.

Concernant l'analyse asymptotique des problèmes d'électrostatique à l'extérieur d'un petit obstacle, il existe déjà un certain nombre de références "quadrillant" le sujet. Citons notamment [48, 68, 67] d'une part et [87] d'autre part qui étudient le développement par rapport au diamètre d'une petite inclusion de la solution d'un problème de Laplace à l'extérieur d'un petit obstacle avec condition de Dirichlet ou de Neumann sur le bord. Les références [48, 68, 67] utilisent la MDAR tandis que [87] utilise la méthode des développements multi-échelles. Concernant l'équation de Helmholtz, il existe également des références telles que [75] ou [4] qui étudient l'asymptotique basse fréquence autour d'un objet diffractant fixe. Les résultats de [75] sont valables pour tout problème aux limites elliptique d'ordre 2 sous réserve que l'opérateur associé soit coercif, ce qui est comme nous le verrons plus loin une garantie de stabilité des équations.

Dans ce chapitre nous allons commencer par décrire en détail le problème que nous considérons. Comme nous l'avons dit plus haut ce sera l'équation de Helmholtz à l'extérieur d'un petit obstacle de rayon ε bidimensionnel avec condition de Neumann sur le bord et condition d'onde sortante à l'infini. Dans ce contexte, le paramètre ε sera supposé tendre vers 0, il s'agira de construire un développement de la solution u^ε du problème associé par rapport à ε . En section 1.2 nous proposerons une approximation au premier ordre de u^ε en démontrant la stabilité de notre problème. A notre connaissance, la stabilité du problème de Helmholtz non-coercif avec condition de Neumann à l'extérieur d'un petit obstacle est un résultat nouveau.

Pour obtenir une approximation plus fine il nous faudra postuler une forme particulière pour ce développement, c'est pourquoi nous poursuivrons en section 1.3 par un calcul analytique sur le cas encore plus simple de la diffraction d'une onde plane par un disque, ce qui nous indiquera le type de développement auquel nous devons nous attendre.

A partir de la section 1.4 commencera l'analyse asymptotique à proprement parler. Nous conjecturons une forme de développement pour la solution du problème plus générale que celle que nous avons envisagée au départ. Nous regarderons ce qu'implique la stabilité du problème pour un développement de la solution d'ordre arbitraire. Ceci nous mènera à formuler des conditions suffisantes sur les termes du développement pour qu'ils constituent effectivement une bonne approximation de u^ε . En section 1.5, 1.6 et 1.7 ces conditions suffisantes nous mèneront à des équations pour les termes du développement asymptotique de u^ε . Tous ces résultats seront validés à chaque fois par des calculs d'estimation d'erreur.

La section 1.8 conclura le chapitre en montrant que ces équations, une fois réunies, forment une famille $(\mathcal{J}_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ de problèmes bien posés. Cette famille permettra alors de caractériser par récurrence les termes du développement asymptotique.

1.1 Position du problème

Nous commençons cette section en décrivant la géométrie dans laquelle notre problème modèle sera posé. Nous nous intéresserons à une onde se propageant dans le plan \mathbb{R}^2 et rencontrant un obstacle diffractant représenté par un ouvert borné noté ω_ε . Cet obstacle est *petit* dans la mesure où son diamètre est supposé tendre vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Pour simplifier nous allons même supposer que cet obstacle est obtenu par homothétie d'un autre ouvert fixe, c'est-à-dire $\omega_\varepsilon = \varepsilon \omega_N$ pour un certain ouvert ω_N dit *normalisé* et indépendant de ε .

On pourrait envisager la présence d'autres obstacles dont certains seraient petits. De même on pourrait supposer que le milieu dans lequel se propage l'onde acoustique que nous étudions comporte des hétérogénéités dont le support est borné, les coefficients de l'équation d'onde seraient alors de classe \mathcal{C}^∞ et constants sauf dans une région bornée de \mathbb{R}^2 . Ces nuances n'apporteraient cependant rien de

fondamental à l'analyse, et nous ne les prendrons pas en compte ici.

1.1.1 Description de la géométrie

Décrivons plus en détail ω_N . Par la suite un point du plan \mathbf{x} pourra être désigné par ses coordonnées polaires. Celles-ci seront notées (R, φ) si nous nous plaçons dans une géométrie normalisée, ou notées (r, φ) dans le cas contraire. Rappelons, en se plaçant par exemple dans le cas non-normalisé, que ces coordonnées sont définies par les relations avec les coordonnées cartésiennes suivantes

$$x = r \cos \varphi \quad \text{et} \quad y = r \sin \varphi.$$

Si σ désigne le point du cercle unité S^1 de coordonnées cartésiennes $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ alors on a $\mathbf{x} = r\sigma$. Nous introduisons une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$, destinée à décrire le bord de ω_N , satisfaisant $0 < \Phi(\sigma) < 1$ pour tout $\sigma \in S^1$. On considère l'ouvert $\Omega_N \subset \mathbb{R}^2$ que l'on suppose de classe \mathcal{C}^∞ et son bord $\Gamma_N = \partial\Omega_N$ définis par

$$\Omega_N := \{ \mathbf{x} = R\sigma \mid R > \Phi(\sigma) \} \quad , \quad \Gamma_N := \{ \mathbf{x} = R\sigma \mid R = \Phi(\sigma) \} \quad \text{et} \quad \omega_N := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_N.$$

Ces définitions imposent une forme particulière à notre petit obstacle. Les remarques contenues à la fin de [110] indiquent que nous pourrions envisager une forme arbitraire pour ω_N du moment que celui-ci est régulier. Nous avons choisi cette configuration pour que le problème envisagé dans ce chapitre soit plus cohérent avec le reste de la thèse. Une fois cette géométrie normalisée décrite, définissons l'opérateur de changement d'échelle,

$$\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \quad \mathbf{x} = R\sigma \mapsto \Xi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon R\sigma. \quad (1.1.1)$$

L'inverse de Ξ^ε sera noté $\Xi^{\varepsilon^{-1}}$. On a alors par définition $\omega_\varepsilon := \Xi^{\varepsilon^{-1}}(\omega_N)$. Étant donné que nous utiliserons les coordonnées polaires (R, φ) dans la géométrie normalisée, et (r, φ) dans le domaine non-normalisé, on peut résumer le changement d'échelle en écrivant que

$$r = \varepsilon R.$$

Ce changement d'échelle Ξ^ε induit un opérateur Ξ_*^ε qui transforme une fonction définie dans la géométrie normalisée en une fonction définie dans une géométrie dépendant de ε , suivant la définition

$$(\Xi_*^\varepsilon u)(\mathbf{x}) := u \circ \Xi^{\varepsilon^{-1}}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}/\varepsilon). \quad (1.1.2)$$

On montre facilement que l'inverse de Ξ_*^ε est $\Xi_*^{\varepsilon^{-1}}$.

La problème auquel nous désirons nous intéresser comportera une condition de rayonnement à l'infini appelé condition de Sommerfeld. Nous imposerons cette condition à l'aide d'une équation écrite sur une frontière fictive Γ entourant l'obstacle. Nous définissons cette frontière fictive et son domaine intérieur de la manière suivante,

$$\Omega := D(0, \rho) \quad \text{et} \quad \Gamma := \partial\Omega.$$

Ici $\rho > 0$ est un réel choisi arbitrairement grand. On a bien sûr $\omega_\varepsilon \subset \Omega$ (tout au moins à partir d'un certain ε). Dans ce qui suit nous supposerons chaque fois que nécessaire que le rayon ρ aura été choisi "suffisamment grand". Par ailleurs nous ferons référence régulièrement à

$$\Omega_\star = \Omega \setminus \{0\}.$$

On définit finalement la géométrie effective dans laquelle notre problème de diffraction sera posé.

$$\Omega_\varepsilon := \Xi^\varepsilon(\Omega_N) \cap \Omega = \{ \mathbf{x} = r\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon \Phi(\sigma) < r < \rho \}$$

$$\Gamma_\varepsilon := \Xi^\varepsilon(\Gamma_N) = \{ \mathbf{x} = r\sigma \in \mathbb{R}^2 \mid r = \varepsilon \Phi(\sigma) \}$$

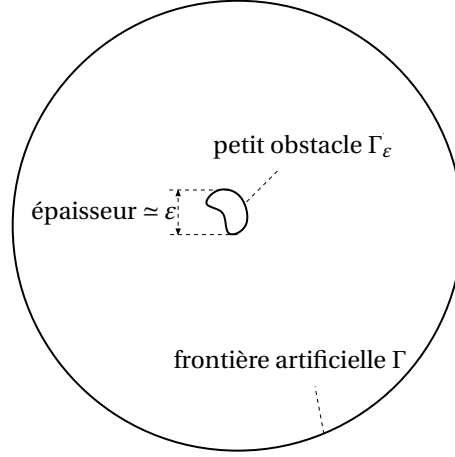


Fig.1 Géométrie du problème

1.1.2 Formulation du problème

Notre problème de diffraction consistera à trouver la solution u^ε de l'équation de Helmholtz avec un terme source $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $\text{supp } f$ est compact, contenu dans le domaine de résolution et disjoint du petit obstacle : $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. La solution u^ε sera cherchée dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega_\varepsilon)$ standard. Sur un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$, nous rappelons que les espaces de Sobolev d'exposant entier sont définis par

$$H^n(\omega) = \left\{ v \in L^2(\omega) \mid \|v\|_{H^n(\omega)}^2 = \sum_{k=0}^n \|\nabla^k v\|_{L^2(\omega)}^2 < \infty \right\},$$

en notant $\nabla^k v$ la différentielle d'ordre k de v . Suivant l'usage $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ désignera l'espace des traces $v|_{\Gamma_\varepsilon}$ de fonctions $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$. On suppose $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ muni de la topologie associée à la norme $\|w\|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} = \min\{\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \text{ t.q. } v|_{\Gamma_\varepsilon} = w\}$ qui en fait un espace de Banach. Nous noterons $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ son dual relativement à cette topologie. Nous adoptons les mêmes définitions pour $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$.

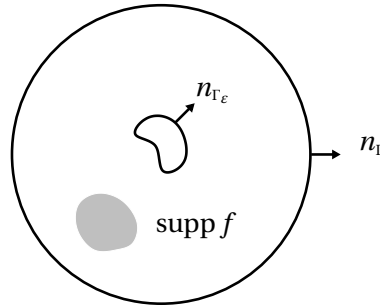


Fig.2 Orientation des normales

Sur Γ_ε nous imposerons une condition de Neumann homogène. Sur Γ nous imposerons une condition de Sommerfeld à l'aide d'un opérateur de Dirichlet-to-Neumann. Désignons par n_{Γ_ε} le champ de vecteur normal à Γ_ε dirigé vers l'intérieur de Ω_ε , et notons n_Γ le champ de vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω . Ces deux conditions de bord seront posées respectivement dans $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ et s'écriront

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 0 \text{ sur } \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

L'opérateur de Dirichlet-to-Neumann T_Γ est continu de $H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ et admet l'expression analy-

tique

$$T_\Gamma v := - \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n \bar{\omega} \frac{H_n^{(1)'(\bar{\omega}\rho)}}{H_n^{(1)}(\bar{\omega}\rho)} e^{in\varphi} \quad \text{avec} \quad v_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta. \quad (1.1.3)$$

Dans cette expression $H_n^{(1)}(\bar{\omega}\rho)$ désigne la fonction de Hankel d'ordre n et de première espèce que nous définirons en section 1.3. Pour plus de détail au sujet de cet opérateur, nous renvoyons le lecteur à [54]. La condition $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0$ sur Γ est appelée condition d'onde sortante ou condition de Sommerfeld. En résumé notre problème que nous appellerons $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ se formule donc de la manière suivante,

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Remarquons qu'il est possible de considérer d'autres types de source qui apparaîtraient non pas comme second membre de la première équation ci-dessus, mais comme second membre dans les conditions aux limites. Introduisons la forme sesquilinéaire

$$a_\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \bar{\omega}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma u \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \quad (1.1.4)$$

Ci-dessus, il faut comprendre l'intégrale sur Γ comme un crochet de dualité entre $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$. La forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est continue sur $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ peut alors être formulé de manière variationnelle à l'aide de $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ de la manière suivante

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \quad (1.1.5)$$

Le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ est bien posé : il y a existence et unicité de u^ε . Il s'agit d'un résultat classique démontré par exemple dans [28]. Suivant l'approche présentée dans [15] pour l'étude des problèmes de type point-selle, une autre manière de voir ce résultat d'existence-unicité est de dire que l'opérateur associé à la formulation variationnelle ci-dessus est un isomorphisme, ou encore que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ satisfait les conditions inf – sup

$$0 < \inf_{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \sup_{v \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(u, v)}{\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \quad \text{et} \quad 0 < \inf_{u \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \sup_{v \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, u)}{\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}. \quad (1.1.6)$$

1.2 Formulation faible de la stabilité

Nous allons dériver une approximation de u^ε à l'aide de la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (1.1.4). Nous commençons par montrer que $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ satisfait un résultat de *stabilité*, c'est-à-dire que la propriété (1.1.6) est satisfaite uniformément par rapport à ε . Un grand nombre d'analyses asymptotiques (avec estimation d'erreur) passent par la démonstration d'un tel résultat. Cela revient à montrer que dans le problème considéré, non seulement la solution dépend continuellement des données, mais en plus cette dépendance continue est uniforme vis-à-vis de ε . Ceci équivaut aussi à démontrer que l'inverse de l'opérateur associé au problème est borné indépendamment de ε . Ce type de résultat a pour conséquence que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, si les données restent bornées, la solution reste bornée également.

1.2.1 Approximation d'ordre 0 : le champ limite

Pour donner un aperçu de la manière dont la stabilité mènera à un développement de u^ε nous proposons au travers du lemme 1.2.1 ci-dessous de démontrer un premier résultat d'approximation. En réfléchissant de façon intuitive, puisque le petit obstacle "disparaît" quand $\varepsilon \rightarrow 0$, il est légitime de s'attendre à ce que la solution du problème avec obstacle tende vers la solution du problème sans obstacle. Définissons le champ limite (ou incident) que nous noterons u^0 comme la solution du même problème que u^ε mais sans obstacle. Ainsi u^0 est caractérisée comme l'unique fonction satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 \in H^2(\Omega) \\ \Delta u^0 + \partial^2 u^0 = -f \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

En effet le problème (1.2.1) est bien posé. De même que pour \mathcal{P}^ε , on peut réécrire ce problème sous forme variationnelle. Introduisons la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \partial^2 \int_{\Omega} u \bar{v} + \int_{\Gamma} \bar{v} T_\Gamma u \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (1.2.2)$$

Alors u^0 est l'unique élément de $H^1(\Omega)$ satisfaisant $a(u^0, v) = \int_{\Omega} f \bar{v}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Signalons qu'une manière équivalente de dire que le problème (1.2.1) est bien posé consiste à écrire que la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ vérifie les conditions inf-sup suivantes

$$0 < \inf_{u \in H^1(\Omega)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{a(u, v)}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \quad \text{et} \quad 0 < \inf_{u \in H^1(\Omega)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{a(v, u)}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}}. \quad (1.2.3)$$

Notons que selon les théorèmes de régularité classiques pour les équations elliptiques dans des domaines réguliers, $u^0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. On s'attend à ce que le champ incident u^0 soit l'approximation à l'ordre 0 de u^ε . C'est ce que montre le résultat suivant. La démonstration suppose connu le résultat de stabilité du théorème 1.2.1 que nous prouverons juste après.

Lemme 1.2.1.

Supposons que la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (1.1.4) vérifie l'hypothèse de stabilité : il existe $\kappa_1 > 0$ indépendante de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_1 \sup_{w \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Si u^ε est défini par (1.1.5) et u^0 par (1.2.1) alors il existe $\kappa_2 > 0$ indépendante de ε et de u^0 tel que

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_2 \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Appliquons l'hypothèse de stabilité à $v = u^0 - u^\varepsilon$. En considérant des w de norme = 1 et en utilisant (1.1.5) il vient

$$\|u^0 - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=1} a_\varepsilon(u^0 - u^\varepsilon, w) = \kappa \sup_{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}=1} \left\{ a_\varepsilon(u^0, w) - \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{w} \right\} \quad (1.2.4)$$

On peut calculer $a_\varepsilon(u^0, w)$ en appliquant une formule de Green et en utilisant les équations (1.2.1) définissant u^0 . On a

$$a_\varepsilon(u^0, w) - \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{w} = \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^0 \cdot \nabla \bar{w} - \partial^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u^0 \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma u^0 - \int_{\Omega} f \bar{w} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^0}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w}.$$

Il suffit donc de montrer que l'intégrale sur Γ_ε dans le membre de droite de l'équation ci-dessus est majorée en module par $\kappa \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}$. Étant donné que la mesure sur Γ_ε est donnée par $\varepsilon \sqrt{\Phi^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2} d\varphi$, il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^0}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \leq \kappa \varepsilon \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^{2\pi} |w(\varepsilon \Phi(\varphi), \varphi)| d\varphi$$

Dans l'inégalité ci-dessus la constante κ dépend de Φ . En raisonnant d'abord sur $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ puis en procédant par densité on obtient enfin, pour un $\kappa > 0$ convenable et indépendant de ε (*a priori* différent du κ des lignes précédentes)

$$\begin{aligned} |w(\varepsilon \Phi, \varphi)| &= |w(\varrho, \varphi) - \int_{\varepsilon \Phi}^{\varrho} \frac{\partial w}{\partial r} dr| \leq |w(\varrho, \varphi)| + \left(\int_{\varepsilon \Phi}^{\varrho} \frac{dr}{r} \right)^{1/2} \left(\int_{\varepsilon \Phi}^{\varrho} \left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 r dr \right)^{1/2}, \\ \int_0^{2\pi} |w(\varepsilon \Phi(\varphi), \varphi)| d\varphi &\leq \kappa \left(\|w\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right) \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

Rappelons que Γ admet pour équation $r = \varrho$. Ce qui précède permet de conclure la preuve. ■

1.2.2 Preuve de stabilité

Nous pensons que le résultat du théorème 1.2.1 est nouveau car nous n'en connaissons pas d'équivalent dans la littérature. En général lors d'une analyse asymptotique avec un petit obstacle et une condition de Neumann sur le bord, comme dans [67, 68] ou [87], les auteurs considèrent un problème coercif tel que le problème de Laplace. Dans ces conditions la norme de l'inverse de l'opérateur associé au problème considéré est majorée par la constante de coercivité, qui est indépendante de ε . Dans un contexte plus général certains auteurs invoquent également le principe du maximum pour démontrer un résultat de stabilité en norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$, lorsque cela est possible comme dans le cas d'un problème au laplacien.

Ici le problème n'est pas coercif et ne suit pas le principe du maximum. Toute la difficulté de la preuve suivante vient du fait que les équations sont posées dans Ω_ε qui dépend de ε et qu'il semble difficile de construire un "prolongement stable" des fonctions de $H^1(\Omega_\varepsilon)$ à $H^1(\Omega)$ tout entier.

Théorème 1.2.1.

Pour la forme sesquilineaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (1.1.4), il existe $\kappa > 0$ indépendante de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{w \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Nous allons procéder par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite ε_n avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et une suite $v_n \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n})$ telle que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{w \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} \frac{a_{\varepsilon_n}(v_n, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.2.5)$$

Pendant la suite de la démonstration nous noterons Ω_n au lieu de Ω_{ε_n} . Également $D(0, \frac{1}{n})$ (disque de centre 0 et de rayon $1/n$) sera noté D_n . Nous supposons quitte à extraire une sous-suite de (ε_n) que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\Omega \setminus D_n \subset \Omega_n$. On aura donc $\varepsilon_n \Phi(\varphi) < 1/n$ pour tout φ . Nous allons démontrer en trois étapes que l'on peut trouver une suite extraite (v_{n_q}) tel que $\|v_{n_q}\|_{H^1(\Omega_{n_q})} \rightarrow 0$ ce qui mènera à une contradiction et donc au résultat.

1^{re} étape : Quitte à extraire une sous-suite, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega \setminus D_j)} = 0$.

En vue d'utiliser un procédé d'extraction diagonale, nous allons définir par récurrence une famille de fonctions d'extraction d'indice $\psi_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissantes. Pour $n \geq 1$ on a $\|v_n\|_{H^1(\Omega \setminus D_1)} = 1$ donc, par injection compacte de $H^1(\Omega \setminus D_1)$ dans $L^2(\Omega \setminus D_1)$, il existe une fonction $\psi_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\psi_1(n)}$ converge faiblement dans $H^1(\Omega \setminus D_1)$ et fortement dans $L^2(\Omega \setminus D_1)$ vers une même limite $v_\infty \in H^1(\Omega \setminus D_1)$.

En répétant le procédé, pour $n \geq 2$ on a $\|v_{\psi_1(n)}\|_{H^1(\Omega \setminus D_2)} = 1$ donc il existe une fonction $\psi_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\psi_1 \circ \psi_2(n)}$ converge faiblement dans $H^1(\Omega \setminus D_2)$ et fortement dans $L^2(\Omega \setminus D_2)$ vers une même limite $v'_\infty \in H^1(\Omega \setminus D_2)$.

Remarquons à présent que v'_∞ coïncide avec v_∞ sur $\Omega \setminus D_1$. En effet choisissons une fonction $w \in \mathcal{D}(\Omega \setminus D_1)$. Alors on a clairement $\int_{\Omega \setminus D_1} w v_{\psi_1 \circ \psi_2(n)} = \int_{\Omega \setminus D_2} w v_{\psi_1 \circ \psi_2(n)}$. Par passage à la limite faible on obtient $\int_{\Omega \setminus D_1} w v_\infty = \int_{\Omega \setminus D_2} w v'_\infty$ et ceci vaut pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega \setminus D_1)$, ce qui implique bien que v'_∞ est un prolongement de v_∞ à $\Omega \setminus D_2$. Nous pourrions donc écrire v_∞ pour signifier son prolongement v'_∞ .

De proche en proche, on construit ainsi une application croissante $\psi_q : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et on prolonge la fonction v_∞ à $\Omega \setminus D_q$ de sorte que $v_{\psi_1 \circ \psi_2 \cdots \circ \psi_q(n)}$ converge faiblement dans $H^1(\Omega \setminus D_q)$ et fortement dans $L^2(\Omega \setminus D_q)$ vers une même fonction $v_\infty \in H^1(\Omega \setminus D_q)$. Par extraction diagonale, on définit finalement

$$\psi(n) := \psi_1 \circ \psi_2 \cdots \circ \psi_n(n).$$

C'est avec cette fonction que nous considérons une nouvelle suite-extraite $(v_{\psi(n)})$ qui a la propriété suivante : pour tout $j \in \mathbb{N}$ la suite $(v_{\psi(n)})_{n \geq j}$ converge fortement dans $L^2(\Omega \setminus D_j)$ et faiblement dans $H^1(\Omega \setminus D_j)$ vers une fonction $v_\infty \in H^1_{\text{loc}}(\Omega_\star) = \{w \in \mathcal{D}'(\Omega_\star) \mid w \in H^1(K) \text{ pour tout compact } K \subset \Omega_\star\}$. Par commodité, dans toute la suite de cette preuve nous noterons v_n au lieu de $v_{\psi(n)}$, et également Ω_n au lieu de $\Omega_{\psi(n)}$ et ainsi de suite...

Nous savons que $v_\infty \in L^2(\Omega \setminus D_j)$ pour tout j , montrons alors $v_\infty \in L^2(\Omega)$. Considérons une famille de fonctions de troncature $\tau_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^∞ et telles que $\tau_j(\mathbf{x}) = 0$ pour $|\mathbf{x}| \leq 1/j$ et $\tau_j(\mathbf{x}) = 1$ pour $|\mathbf{x}| \geq 2/j$. Nous imposons en plus à cette famille d'être croissante ponctuellement, c'est-à-dire que $(\tau_j(\mathbf{x}))_j$ croissante pour chaque \mathbf{x} . Par passage à la limite forte sur $\Omega \setminus D_j$ on a

$$\int_{\Omega} \tau_j |v_\infty|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tau_j |v_n|^2 \leq \|v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \leq 1.$$

En passant à la limite selon j , par convergence monotone on en tire que $v_\infty \in L^2(\Omega)$ et $\|v_\infty\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$.

A présent nous allons montrer que $v_\infty \in H^1(\Omega)$. Considérons la suite $g_n \in L^2(\Omega)^2$ définie par $g_n = \nabla v_n$ dans Ω_n et $g_n = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_n$. Pour tout n on a $\|g_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1$, quitte à en extraire une sous-suite on peut donc supposer que g_n converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers une limite notée $g_\infty \in L^2(\Omega)^2$. Soit un champ de vecteur $w \in \mathcal{D}(\Omega_\star)^2$, en particulier w est nul sur un voisinage de 0, et on peut donc le prolonger par 0 en 0. Donc il existe j tel que w soit nul sur D_j . Alors pour $n \geq j$, par passage à la limite faible dans $\Omega \setminus D_j$ on obtient

$$\int_{\Omega} w \cdot g_n = \int_{\Omega} w \cdot \nabla v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} w \cdot g_\infty = \int_{\Omega} w \cdot \nabla v_\infty.$$

Puisque w est arbitraire, on obtient alors que $g_\infty = \nabla v_\infty$ dans Ω_\star (attention w était nul sur un voisinage de 0) et aussi que $\nabla v_\infty \in L^2_{\text{loc}}(\Omega_\star)$. D'après le lemme 1.2.2 que nous démontrerons juste après, $H^1_\star(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ dans un voisinage de } 0\}$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Et comme il est clair que $\mathcal{D}(\Omega_\star)$ est dense dans $H^1_\star(\Omega)$, on en tire finalement que $g_\infty = \nabla v_\infty$ dans Ω tout entier et donc $\nabla v_\infty \in L^2(\Omega)$.

Nous allons enfin montrer que v_∞ est nul. Soit $w \in H^1_\star(\Omega)$. En appliquant la définition de $a_{\varepsilon_n}(\cdot, \cdot)$ et en utilisant l'hypothèse 1.2.5, nous sommes amenés par passage à la limite faible à introduire une nouvelle forme sesquilinéaire sur laquelle on obtient une identité

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varepsilon_n}(v_n, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} \nabla v_n \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_{\Omega_n} v_n \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma v_n \\ &= \int_{\Omega} \nabla v_\infty \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_{\Omega} v_\infty \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma v_\infty := a(v_\infty, w) \end{aligned}$$

Cette forme sesquilinéaire est clairement continue sur $H^1(\Omega)$, et il est classique (cf.[28]) qu'elle vérifie une condition inf – sup sur $H^1(\Omega)$: le problème variationnel associé est bien posé. Par ailleurs comme nous l'avons annoncé auparavant nous démontrerons plus loin que $H^1_\star(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ de sorte que, par continuité : $v_\infty \in H^1(\Omega)$ satisfait $a(v_\infty, w) = 0$ pour tout $w \in H^1(\Omega)$. On en déduit finalement d'après le caractère bien posé de ce problème que $v_\infty = 0$. Ceci conclut la première étape.

2^{me} étape : Pour tout $\delta > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)} \leq \delta$ dès que $n \geq j$.

Cette étape se résout par un calcul d'estimation directe qui passe par des formules de Taylor au premier ordre. Notons dans la suite $r_j = 1/j$. Supposons $n \geq j$, on a donc $\varepsilon_n \Phi(\varphi) \leq r_j$ car on a supposé au départ de l'étape 1 (sans nuire à la généralité) que $\Omega \setminus D_n \subset \Omega_n := \Omega_{\varepsilon_n}$. On a donc pour tout $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n \cap D_j)$ et pour tout $r \in]\varepsilon_n \Phi(\varphi), r_j[$,

$$w(r, \varphi) = w(r_j, \varphi) - \int_r^{r_j} \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) d\zeta \quad \text{d'où} \quad |w(r, \varphi)|^2 \leq 2|w(r_j, \varphi)|^2 + 2 \left| \int_r^{r_j} \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) d\zeta \right|^2$$

En majorant par Cauchy-Schwartz la deuxième intégrale portant sur $\partial_r w$ on trouve

$$\left| \int_r^{r_j} \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) d\zeta \right|^2 \leq \left(\int_r^{r_j} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \left(\int_r^{r_j} \left| \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) \right|^2 \zeta d\zeta \right) \leq \ln\left(\frac{r_j}{r}\right) \int_{\varepsilon_n \Phi}^{r_j} \left| \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) \right|^2 \zeta d\zeta$$

En réinjectant cette dernière estimation dans la première inégalité ci-dessus et en intégrant le tout sur r et φ on obtient, pour un κ convenable mais indépendant de n et j

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_n \Phi}^{r_j} |w(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi &\leq \kappa r_j^2 \int_0^{2\pi} |w(r_j, \varphi)|^2 d\varphi + \kappa \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon_n \Phi}^{r_j} \ln\left(\frac{r_j}{r}\right) \int_{\varepsilon_n \Phi}^{r_j} \left| \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) \right|^2 \zeta d\zeta r dr d\varphi \\ \|w\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 &\leq \kappa r_j^2 \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 + \kappa r_j^2 \int_0^{2\pi} |w(r_j, \varphi)|^2 d\varphi \end{aligned}$$

Puisque $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n \cap D_j)$ est arbitraire, nous pouvons conclure par densité que la dernière estimation ci-dessus reste vraie pour tout $w \in H^1(\Omega_n \cap D_j)$. Dans le cadre de notre démonstration, on en tire ici $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 \leq \kappa r_j^2 + \kappa r_j^2 \int_0^{2\pi} |v_n(r_j, \varphi)|^2 d\varphi$.

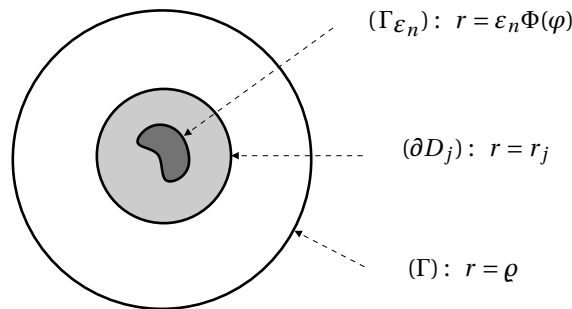


Fig.3 Position de D_j par rapport à Γ_ε et Γ .

Montrons maintenant que le terme intégral restant est borné lorsque $j \rightarrow \infty$ et $n \geq j$, $n \rightarrow \infty$. Considérons cette fois un $w \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n \setminus D_j)$. Rappelons que la frontière Γ admet pour équation $r = \varrho$. A nouveau en écrivant $w(r_j, \varphi) = w(\varrho, \varphi) - \int_{r_j}^{\varrho} \partial_r w(\zeta, \varphi) \zeta d\zeta$, et par des majorations brutales on a

$$|w(r_j, \varphi)|^2 r_j \leq 2|w(\varrho, \varphi)|^2 r_j + 2r_j \left| \int_{r_j}^{\varrho} \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) d\zeta \right|^2 \leq 2|w(\varrho, \varphi)|^2 \varrho + 2\varrho \int_{r_j}^{\varrho} \left| \frac{\partial w}{\partial r}(\zeta, \varphi) \right|^2 \zeta d\zeta,$$

$$r_j^2 \int_0^{2\pi} |w(r_j, \varphi)|^2 d\varphi \leq 2r_j \|w\|_{L^2(\Gamma)}^2 + 2r_j \varrho \|\nabla w\|_{L^2(\Omega \setminus D_j)}^2 \leq \kappa r_j \|w\|_{H^1(\Omega \setminus D_j)}.$$

Dans la dernière inégalité ci-dessus la constante κ intervenant est une autre constante bien choisie et indépendante de n , j ou w . A nouveau par densité cette dernière inégalité vaut pour tout $w \in H^1(\Omega \setminus D_j)$ et en particulier pour les v_n .

Nous pouvons à présent obtenir le résultat annoncé pour la 2^{me} étape. En effet choisissons un $\delta > 0$. En réutilisant la constante κ intervenant dans la dernière estimation ci-dessus, choisissons un j tel que $\kappa r_j + r_j^2 \leq \delta$. Alors d'après ce qui précède, pour tout $n \geq j$ on a

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 \leq r_j^2 \int_0^{2\pi} |v_n(r_j, \varphi)|^2 d\varphi + r_j^2 \leq \kappa (r_j + r_j^2) \|v_n\|_{H^1(\Omega \setminus D_j)} \leq \kappa (r_j + r_j^2) \leq \delta.$$

3^{me} étape : On montre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 = 0$ puis que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 = 0$.

Soit $\delta > 0$ arbitraire. D'après la deuxième étape, il existe j_0 tel que $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_{j_0})} \leq \delta$ dès que $n \geq j_0$. Ce j_0 étant fixé, il existe $n_0 \geq j_0$ tel que $\|v_n\|_{L^2(\Omega \setminus D_{j_0})} \leq \delta$ dès que $n \geq n_0$. Par inégalité triangulaire on en conclut $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n)} \leq 2\delta$ dès que $n \geq n_0$. On en déduit donc que $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Passons maintenant à la convergence du gradient. En utilisant (1.3.14) et l'expression de la forme a_{ε_n} on obtient

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \leq \Re e \left\{ \int_{\Gamma} \bar{v}_n T_{\Gamma} v_n \right\} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \leq \bar{\omega}^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 + \Re e \{ a_{\varepsilon_n}(v_n, v_n) \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous avons utilisé la propriété de positivité de l'opérateur DtN : $\Re e \{ \int_{\Gamma} \bar{v}_n T_{\Gamma} v_n \} \geq 0$, $\forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$. On trouve une démonstration de ce résultat dans [109] par exemple. On en tire $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 \rightarrow 0$ et ceci conclut donc définitivement la démonstration. ■

Au cours de la démonstration précédente nous avons eu besoin d'un lemme de densité que nous démontrons maintenant. Il est possible d'intuire ce lemme en remarquant que dans $H^1(\Omega)$, la trace sur $\{0\}$ n'est pas continue.

Lemme 1.2.2.

L'espace $H_{\star}^1(\Omega) := \{ w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur un voisinage de } 0 \}$ est dense dans $H^1(\Omega)$ pour $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve :

Cette démonstration est reprise de [109], nous la réécrivons par souci de complétude. Comme $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, il suffit de montrer que tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ est limite dans $H^1(\Omega)$ d'une suite d'éléments de $H_{\star}^1(\Omega)$. Soit un tel v . On définit la fonction de troncature radiale

$$\tau_{\eta}(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathbf{x}| < \eta, \\ \frac{\ln(|\mathbf{x}|/\eta)}{\ln(1/\eta)} & \text{si } \eta \leq |\mathbf{x}| < 1, \\ 1 & \text{si } |\mathbf{x}| \geq 1. \end{cases}$$

Posons alors $v_\eta = \tau_\eta v$. Alors pour tout η on a $v_\eta \in H^1_\star(\Omega)$. Montrons que $\|v - v_\eta\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$.

$$\|v - v_\eta\|_{H^1(\Omega)} \leq \|(1 - \tau_\eta)v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(1 - \tau_\eta)v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|1 - \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)} (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)}) + \|\nabla \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Or on vérifie facilement que $\|1 - \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)}$ et $\|\nabla \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\eta \rightarrow 0$. En effet un calcul explicite montre l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de η tel que

$$\|1 - \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\kappa}{|\ln \eta|} \quad \text{et} \quad \|\nabla \tau_\eta\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{|\ln \eta|}} \quad \forall \eta \in]0, 1/2[. \quad (1.2.6)$$

■

1.2.3 Remarques d'analyse asymptotique

Nous venons de montrer que $u^\varepsilon \rightarrow u^0$. Ainsi le champ incident peut être vu comme le terme d'ordre 0 dans un développement de u^ε . Mais nous désirons obtenir une approximation d'ordre arbitraire de la solution u^ε pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Comme à chaque fois (à notre connaissance!) que l'on veut développer la solution d'un problème d'EDP par rapport à un petit paramètre, il faut commencer par conjecturer un ansatz. Précisons en quoi cela consiste après avoir introduit quelques notations propres à l'analyse asymptotique.

Considérons un espace de Banach E auquel est associée une norme $\|\cdot\|$. On se donne une fonction de ε notée $\delta(\varepsilon)$ à valeur dans E ainsi qu'une famille de fonctions $(\delta_n(\varepsilon))_{n \in \mathbb{N}}$ (encore à valeur dans E) vérifiant $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$. Ici $o(\cdot)$ désigne le symbole "petit o " de Landau, qui vaut au sens de la norme $\|\cdot\|$. Nous posons alors la notation

$$\delta(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\varepsilon) \iff \delta(\varepsilon) - \sum_{n=0}^N \delta_n(\varepsilon) = o(\delta_N(\varepsilon)), \quad N \in \mathbb{N}$$

Lorsque ces conditions seront satisfaites nous dirons que $\delta(\varepsilon)$ admet $\sum_n \delta_n(\varepsilon)$ comme série asymptotique. Un tel développement *n'est pas* unique. En effet il est possible d'avoir aussi $\delta(\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \delta'_n(\varepsilon)$ sans que $\delta_n(\varepsilon) = \delta'_n(\varepsilon)$ pour tout n . Considérons par exemple la fonction $1 + \varepsilon$. On peut très bien choisir $\delta_0(\varepsilon) = 1$ et $\delta_1(\varepsilon) = \varepsilon$ et alors $1 + \varepsilon = \delta_0(\varepsilon) + \delta_1(\varepsilon)$. On peut aussi choisir $\delta'_0(\varepsilon) = 1 + \varepsilon$ et $\delta'_1(\varepsilon) = 0$ et on a aussi $1 + \varepsilon = \delta'_0(\varepsilon) + \delta'_1(\varepsilon)$ sans avoir $\delta_1(\varepsilon) = \delta'_1(\varepsilon)$.

On aboutit à une notion d'unicité des développements asymptotiques de la manière suivante. Supposons que l'on veuille développer une fonction $v(\varepsilon)$ à valeur dans un espace de Banach E . Supposons également qu'on dispose d'une famille $(\delta_n(\varepsilon))$ à valeur dans \mathbb{C} et telle que $\delta_{n+1}(\varepsilon) = o(\delta_n(\varepsilon))$. Si il existe une famille (v_n) d'éléments de E indépendants de ε tels que

$$v(\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\varepsilon) v_n, \quad (1.2.7)$$

alors les v_n sont les seules à vérifier cette identité (les δ_n étant donnés). Dans ce contexte on dit que les $\delta_n(\varepsilon)$ sont des fonctions de jauge et que $v(\varepsilon)$ se développe (de manière unique) sur ces fonctions de jauge. La donnée de toute la famille $(\delta_n(\varepsilon))$ constitue un *ansatz*. Pour une même fonction à développer $v(\varepsilon)$, il est possible de considérer d'autres fonctions de jauge, et ceci modifie donc le développement. Mais à ansatz fixé, il y a unicité du développement.

Notre objectif dans ce chapitre est de dériver un développement asymptotique de u^ε . Cependant u^ε appartient à un espace qui varie avec ε , à savoir $H^1(\Omega_\varepsilon)$, ce qui interdit de parler "globalement" de développement pour u^ε . Vu que $\omega \subset \Omega_\varepsilon$ pour tout $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ et pour ε assez petit, nous allons donc considérer u^ε comme un élément de $H^1(\omega)$ pour tout $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ ce qui permettra de se ramener à un

espace de Banach fixe. Dérivée un développement de u^ε va consister à trouver une famille $(\delta_n(\varepsilon))$ de fonctions à valeurs dans \mathbb{C} et une famille de fonctions $(u_n) \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star)$ tels que

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_n \delta_n(\varepsilon) u_n \quad \text{dans } H^1(\omega), \quad \forall \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star.$$

Il est supposé que les u_n ne dépendent pas de ω , et que $0 \notin \bar{\omega}$. Pour construire un tel développement il faut commencer par choisir l'ansatz. Nous allons donc en conjecturer un, ce qui consiste à deviner à l'avance des $\delta_n(\varepsilon)$ convenables. Quelle famille de $(\delta_n(\varepsilon))$ va-t-on proposer dans le cas présent ? Pour trouver de l'inspiration effectuons un calcul analytique sur un problème simplifié.

1.3 Calcul analytique dans le cas d'un obstacle circulaire

Dans cette section nous allons construire des solutions explicites du problème \mathcal{P}^ε , à l'aide de fonctions spéciales, pour des fonctions sources $f = e^{i\omega x}$ et dans le cas où Ω_ε est le disque de centre 0 et de rayon ε . Nous commencerons par rappeler des notions élémentaires de séparation de variables en coordonnées polaires sur l'équation de Helmholtz et la construction des fonctions de Bessel. Il existe une littérature entière sur les fonctions de Bessel. Citons seulement [82] pour une introduction, et également [117] qui est le traité de référence sur le sujet.

Nous présentons cependant une construction des fonctions de Bessel inhabituelle mais qui nous paraît néanmoins mieux adaptée à l'analyse asymptotique. En effet le procédé de construction qui va suivre est représentatif de la manière dont nous construirons des séries formelles solutions d'équations plus générale en section 2.7 au chapitre 2.

1.3.1 Séparation de variables pour l'équation de Helmholtz

Considérons une couronne D (qui peut aussi être un disque) centrée autour de 0, notons $D_\star := D \setminus \{0\}$, et supposons qu'une certaine fonction $u \in H_{\text{loc}}^2(D_\star)$ satisfasse l'équation de Helmholtz homogène $\Delta u + \omega^2 u = 0$ dans D_\star . Nous allons rechercher sa forme générale. Pour ceci, une fois choisi un $p \in \mathbb{Z}$, projetons cette équation sur $e^{ip\varphi}$ en multipliant par $e^{-ip\varphi}$ et en intégrant suivant φ sur $[0, 2\pi]$. D'après l'expression du laplacien en coordonnées polaires on obtient

$$\left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{p^2}{r^2}\right)u_p(r) + \omega^2 u_p(r) = 0 \quad \text{avec} \quad u_p(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \varphi) e^{-ip\varphi} d\varphi, \quad p \in \mathbb{Z}. \quad (1.3.1)$$

Ainsi la fonction $u_p(r)$ est solution d'une équation différentielle. Si nous faisons le changement de variable $s = \omega r$, en posant $v(s) = u_p(r/\omega)$ on se ramène à la résolution de l'équation suivante (pour s_-, s_+ bien choisis)

$$\left(s \frac{d}{ds}\right)^2 v(s) - p^2 v(s) + s^2 v(s) = 0, \quad s \in]s_-, s_+[\quad (1.3.2)$$

Il s'agit d'une équation différentielle ordinaire de degré 2, nommée équation de Bessel d'ordre p . Par conséquent l'espace des solutions au voisinage d'un s donné est de dimension 2. Proposons une base en exhibant deux solutions indépendantes : les fonctions de Bessel d'ordre p . Dans la suite nous allons supposer que $p \geq 0$ car, comme l'équation de Bessel ne dépend que de p^2 , en construisant des solutions correspondant à $p \geq 0$ on obtiendra du même coup des solutions correspondant à $p \leq 0$.

1.3.2 Fonctions de Bessel de 1^{er} espèce

Cette première solution que nous noterons $J_p(s)$ est obtenue quand nous cherchons une solution de l'équation de Bessel (1.3.2) sous la forme d'un développement en série entière. Les coefficients de ce développement sont alors dérivés selon un procédé qui est parfois appelé *méthode de Frobenius*, et qui

consiste à résoudre une équation de récurrence à plusieurs niveaux. En posant $J_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{p,n} s^n$, on obtient en injectant ce développement dans (1.3.2),

$$(n^2 - p^2) J_{p,n} + J_{p,n-2} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.3)$$

Notons au passage que nous avons utilisé le fait que $s \frac{d}{ds} s^n = n s^n$. On s'aperçoit par un raisonnement simple que nécessairement $J_{p,0} = J_{p,1} = \dots = J_{p,p-1} = 0$. Par contre, si on veut que $J_p(s) \neq 0$ alors $J_{p,p}$ doit être le premier terme non nul de la récurrence. Nous n'avons pas d'équation qui le fixe *a priori*, la fonction de Bessel de première espèce correspond au cas où on pose $J_{p,p} = 1/(2^p p!)$. On peut alors se servir de l'équation (1.3.3) pour définir les $J_{p,n}$ avec $n > p$ puisqu'alors $n^2 - p^2 \neq 0$. On obtient au final le développement suivant

$$J_p(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(p+n)!} \left(\frac{s}{2}\right)^{p+2n}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (1.3.4)$$

On peut montrer à l'aide des théorèmes classiques sur les séries entières que le rayon de convergence de cette série est infini. Par construction, la fonction $J_p(s)$ est alors une solution de l'équation (1.3.2) associée à p ou à $-p$. Notons que

$$J_p(s) \sim J_{p,p} s^p = \frac{1}{p! 2^p} s^p \quad \text{quand } s \rightarrow 0, \quad (1.3.5)$$

autrement dit le développement de J_p commence à l'ordre p . En outre cette fonction est \mathcal{C}^∞ . Par ailleurs la convention pour le premier terme $J_{p,p}$ permet d'assurer les équations de récurrence suivantes

$$\frac{d}{ds} \left(s^{p+1} J_{p+1}(s) \right) = s^{p+1} J_p(s), \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} \left(s^{-p} J_p(s) \right) = -s^{-p} J_{p+1}(s) \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

1.3.3 Fonctions de Bessel de 2nd espèce d'ordre non nul

Pour construire une deuxième solution de (1.3.2), nous distinguerons le cas $p > 0$ et le cas $p = 0$. Dans cette sous-section nous commençons par $p > 0$. Nous noterons cette deuxième solution $Y_p(s)$, et pour la construire nous allons chercher à réappliquer le raisonnement ci-dessus mais en supposant une forme un peu plus générale. Cherchons cette solution sous la forme d'une série de Laurent, c'est-à-dire $Y_p(s) = Y_{p,-n} s^{-n} + Y_{p,-n+1} s^{-n+1} + Y_{p,-n+2} s^{-n+2} + \dots$. Alors les premiers termes de cette série doivent nécessairement satisfaire la relation $(n^2 - p^2) Y_{p,n} + Y_{p,n-2} = 0$. De là on tire que $Y_{p,n} = 0$ tant que $n < -p$ et comme on veut que $Y_p(s)$ ne soit pas proportionnel à $J_p(s)$ on est obligé de supposer que $Y_{p,-p} \neq 0$. Il y a alors indétermination sur la valeur de ce coefficient et la fonction de Bessel de 2^{me} espèce et d'ordre p correspond au choix $Y_{p,-p} = -(p-1)! 2^p / \pi$. Par ailleurs on peut utiliser la relation de récurrence

$$(n^2 - p^2) Y_{p,n} + Y_{p,n-2} = 0, \quad n < p, \quad (1.3.6)$$

pour construire des termes d'ordre supérieur. Nous pouvons utiliser cette relation pour définir les termes $n = -p+1, n = -p+2, \dots, n = p-1$, c'est-à-dire tant que $n^2 - p^2$ est inversible. On obtient ainsi le début de développement

$$Y_p(s) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{s}{2}\right)^{-p+2n} + \dots$$

Pour $n = p$ on rencontre un problème avec (1.3.6). Puisque $Y_{p,p-2} \neq 0$, il est donc impossible que le terme d'ordre supérieur dans le développement soit de la forme $Y_{p,p} s^p$. Une solution consiste, au lieu de chercher $Y_{p,p}$ dans \mathbb{C} , à le chercher sous la forme $Y_{p,p} = Y_{p,p}^{(0)} + Y_{p,p}^{(1)} \ln(s)$, avec $Y_{p,p}^{(0)}, Y_{p,p}^{(1)} \in \mathbb{C}$. En injectant cette forme dans l'équation de Bessel (1.3.2) on aboutit alors à

$$\left[\left(s \frac{d}{ds} \right)^2 - p^2 \right] s^p \left(Y_{p,p}^{(0)} + Y_{p,p}^{(1)} \ln(s) \right) + s^p Y_{p,p-2} = 0 \Rightarrow 2p Y_{p,p}^{(1)} + Y_{p,p-2} = 0$$

Ceci nous impose la valeur de $Y_{p,p}^{(1)}$, mais ici encore il y a une indétermination sur la valeur de $Y_{p,p}^{(0)}$. Dans le cas de la fonction de Bessel de 2^{me} espèce et d'ordre p on choisit

$$Y_{p,p}^{(0)} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2^p p!} \left(2 \ln \frac{1}{2} + 2\gamma_e - 1 - \frac{1}{2} \cdots - \frac{1}{p} \right), \quad \text{avec } \gamma_e = \text{constante d'Euler} = 0,57721566\dots$$

Attention nous notons ici la constante γ_e en gras pour ne pas la confondre avec un éventuel indice γ plus loin. Puisque dans le terme d'ordre p il y a un logarithme, nous allons chercher tous les autres termes sous la même forme $Y_{p,n} = Y_{p,n}^{(0)} + Y_{p,n}^{(1)} \ln(s)$, $n \geq p$. En injectant cette forme de développement dans l'équation de Bessel, on aboutit à la relation de récurrence

$$\left[\left(s \frac{d}{ds} \right)^2 - p^2 \right] s^n \left(Y_{p,n}^{(0)} + Y_{p,n}^{(1)} \ln(s) \right) + s^n \left(Y_{p,n-2}^{(0)} + Y_{p,n-2}^{(1)} \ln(s) \right) = 0.$$

Pour obtenir cette relation, il est important de remarquer que l'opérateur $s \frac{d}{ds}$ laisse stable l'espace vectoriel $\{s^p(a + b \ln(s)) \mid a, b \in \mathbb{C}\}$. On peut mettre la relation de récurrence précédente sous forme matricielle, et on aboutit alors à

$$\begin{bmatrix} n^2 - p^2 & 2n \\ 0 & n^2 - p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{p,n}^{(0)} \\ Y_{p,n}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{p,n-2}^{(0)} \\ Y_{p,n-2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_{p,n} = Y_{p,n}^{(0)} + Y_{p,n}^{(1)} \ln(s), \quad n \geq p. \quad (1.3.7)$$

On peut maintenant raisonner par récurrence comme pour la fonction de Bessel de 1^{re} espèce. Il est clair que pour $n \geq p$ la matrice dans le premier terme de la relation ci-dessus est inversible. Ceci nous permet donc de définir $Y_{p,n}$ pour tout $n \geq p$. Avec cette construction on aboutit finalement à

$$\begin{aligned} Y_p(s) = & -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{s}{2} \right)^{-p+2n} \\ & -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left[\frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} + \frac{\Gamma'(p+n+1)}{\Gamma(p+n+1)} \right] \left(\frac{s}{2} \right)^{p+2n} \\ & + \frac{2}{\pi} J_p(s) \ln \left(\frac{s}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Dans cette expression Γ désigne la fonction Gamma d'Euler, nous la notons en gras pour la distinguer de $\Gamma = \partial\Omega$ (en outre cette fonction interviendra rarement dans notre analyse). Signalons que, comme on peut le voir dans [82], on a

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)} = -\gamma_e + 1 + 1/2 + \cdots + 1/(n-1), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{et} \quad \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma_e.$$

La série en deuxième terme de la définition (1.3.8) admet un rayon de convergence infini comme on le voit grâce aux résultats standard sur les séries, ainsi la fonction $Y_p(s)$ est bien définie pour tout $s \in]0, \infty[$. Par ailleurs on vérifie que $Y_p(s)$ est bien solution de (1.3.2) par construction. Également notons que

$$Y_p(s) \sim Y_{p,-p} s^{-p} = -\frac{(p-1)! 2^p}{\pi} s^{-p} \quad \text{lorsque } s \rightarrow 0. \quad (1.3.9)$$

c'est-à-dire que le développement de $Y_p(s)$ commence à l'ordre $-p$. La fonction $Y_p(s)$ est \mathcal{C}^∞ sur $]0, \infty[$ et est clairement indépendante de $J_p(s)$. Enfin précisons qu'une raison qui a mené au choix pour les valeurs de $Y_{p,-p}$ et $Y_{p,p}$ est d'assurer les relations de récurrence

$$\frac{d}{ds} \left(s^{p+1} Y_{p+1}(s) \right) = s^{p+1} Y_p(s), \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} \left(s^{-p} Y_p(s) \right) = -s^{-p} Y_{p+1}(s) \quad p = 1, 2, \dots$$

1.3.4 Fonctions de Bessel de 2nd espèce d'ordre 0

Terminons avec la construction de $Y_0(s)$. Comme précédemment, si on suppose que $Y_0(s)$ admet un début de développement en série de Laurent $Y_0(s) = Y_{0,-n}s^{-n} + Y_{0,-n+1}s^{-n+1} + Y_{0,-n+2}s^{-n+2} + \dots$, alors on voit que la relation

$$n^2 Y_{0,n} + Y_{0,n-2} = 0$$

doit être satisfaite pour tout $n < 0$ ce qui implique $Y_{0,n} = 0$ pour tout $n < 0$. On est donc amené à penser qu'il suffit d'imposer $Y_{0,0} \neq 0$, $Y_{0,0} \in \mathbb{C}$, et de construire les termes d'ordre supérieur $Y_{0,n}$, $n > 0$ par récurrence. Si nous appliquons ce procédé nous allons évidemment construire une solution proportionnelle à $J_0(s)$! Nous cherchons donc directement le terme $Y_{0,0}$ sous la forme $Y_{0,0} = Y_{0,0}^{(0)} + Y_{0,0}^{(1)} \ln(s)$. Nous allons également chercher les termes d'ordre supérieur sous la même forme, de manière à satisfaire la relation de récurrence

$$\left(s \frac{d}{ds}\right)^2 s^n (Y_{0,n}^{(0)} + Y_{0,n}^{(1)} \ln(s)) + s^n (Y_{0,n-2}^{(0)} + Y_{0,n-2}^{(1)} \ln(s)) = 0, \quad n \geq 0.$$

Notons qu'on a $(s \frac{d}{ds})^2 (Y_{0,0}^{(0)} + Y_{0,0}^{(1)} \ln(s)) = 0$, de sorte que les deux termes $Y_{0,0}^{(0)}$ et $Y_{0,0}^{(1)}$ sont indéterminés. La fonction de Bessel de 2nd espèce correspond alors au choix,

$$Y_{0,0}^{(0)} = \frac{2}{\pi} (\gamma_e + \ln(1/2)) \quad \text{et} \quad Y_{0,0}^{(1)} = \frac{2}{\pi}.$$

Pour le reste de la construction (récurrence etc...) et la définition des $Y_{0,n}$ avec $n > 0$, il suffit de reprendre le raisonnement que nous avons suivi pour les $Y_{p,n}$ mais en posant $p = 0$. Ainsi nous recherchons $Y_{0,n}$ sous la forme $Y_{0,n} = Y_{0,n}^{(0)} + Y_{0,n}^{(1)} \ln(s)$ de manière à satisfaire la relation

$$\begin{bmatrix} n^2 & 2n \\ 0 & n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{0,n}^{(0)} \\ Y_{0,n}^{(1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_{0,n-2}^{(0)} \\ Y_{0,n-2}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_{0,n} = Y_{0,n}^{(0)} + Y_{0,n}^{(1)} \ln(s), \quad n \geq 0. \quad (1.3.10)$$

Cette démarche par récurrence amène comme avec (1.3.8) à une définition à l'aide d'une série de rayon de convergence infini

$$Y_0(s) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma'(n+1)}{(n!)^2 \Gamma(n+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{2n} + \frac{2}{\pi} J_0(s) \ln\left(\frac{s}{2}\right), \quad (1.3.11)$$

qui désigne par construction une solution à l'équation (1.3.2) clairement indépendante de $J_0(s)$. Ici notons que le comportement de cette solution lorsque $s \rightarrow 0$ n'est pas algébrique, en effet on a

$$Y_0(s) \sim Y_{0,0}^{(1)} \ln(s) = \frac{2}{\pi} \ln(s) \quad \text{lorsque} \quad s \rightarrow 0. \quad (1.3.12)$$

La fonction $Y_0(s)$ est également \mathcal{C}^∞ . Enfin on a bien les relations de récurrence

$$\frac{d}{ds} (sY_1(s)) = sY_0(s) \quad \text{et} \quad \frac{dY_0}{ds}(s) = -Y_1(s).$$

1.3.5 Bilan

À la suite de ces définitions, revenons au raisonnement de la sous-section 1.3.1. En particulier reprenons l'équation (1.3.1) dont $J_{|p|}(\omega r)$ et $Y_{|p|}(\omega r)$ forment une base de solution. Grâce à notre construction nous pouvons donc affirmer qu'il existe $a_p, b_p \in \mathbb{C}$ tels que $u_p(r) = a_p J_{|p|}(\omega r) + b_p Y_{|p|}(\omega r)$ et on obtient donc

$$u(r, \varphi) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \left(a_p J_{|p|}(\omega r) + b_p Y_{|p|}(\omega r) \right) e^{ip\varphi} \quad \text{dans} \quad D_\star \quad (1.3.13)$$

qui, en tant que développement en série de Fourier en φ , converge en norme $L^2([0, 2\pi])$ à chaque r donné ; par régularité elliptique ce développement converge même dans $H_{\text{loc}}^k(D_\star)$ pour tout k . L'expression (1.3.13) donne la forme générale des solutions de l'équation de Helmholtz homogène dans une couronne. Notons que chacune des fonctions $v = J_{|p|}(\omega r) e^{ip\varphi}$ ou $v = Y_{|p|}(\omega r) e^{ip\varphi}$ satisfait l'équation de Helmholtz $\Delta v + \omega^2 v = 0$. Nous pouvons également définir les fonctions de Hankel de première espèce

$$H_p^{(1)}(s) := J_p(s) + i Y_p(s), \quad p \in \mathbb{N}.$$

Remarques sur la condition de radiation Notons pour mieux faire comprendre la condition de radiation dans le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$, que dire $\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v = 0$ sur Γ et $\Delta v + \omega^2 v = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ est équivalent à dire que v se développe dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ sous la forme $v(r, \varphi) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p H_{|p|}^{(1)}(\omega r) e^{ip\varphi}$. Par ailleurs la fonction de Hankel d'ordre 0 est proportionnel à un noyau de Green associé à l'équation de Helmholtz

$$\Delta H_0^{(1)}(\omega r) + \omega^2 H_0^{(1)}(\omega r) = 4i \delta_0.$$

Ainsi on peut interpréter $H_0^{(1)}$ comme le champ sortant généré par un point source situé en 0. Par ailleurs à l'aide de la formule de MacDonald (voir [117]) on démontre que $\Re\{H_0^{(1)}(s)' / H_0^{(1)}(s)\} \leq 0$ pour $s > 0$. En reprenant l'expression de l'opérateur DtN (1.1.3) ceci permet de montrer

$$\Re\left\{ \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma v \right\} \geq 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (1.3.14)$$

1.3.6 Résolution analytique dans un cas simple

Dans cette sous-section nous supposons que $\Omega_\varepsilon = D(0, \rho) \setminus \bar{D}(0, \varepsilon)$ i.e. le petit objet diffractant est le disque de centre 0 de rayon ε , et nous nous intéressons à un problème semblable à $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ avec une différence : nous considérons un autre type de source. Soit une onde plane incidente suivant la direction x , $u_i(\mathbf{x}) = e^{i\omega x}$. Un calcul de routine permet de vérifier que $\Delta u_i + \omega^2 u_i = 0$. Nous allons nous intéresser au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_d^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u_d^\varepsilon + \omega^2 u_d^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_d^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = -\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_d^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_d^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Ce problème correspond au calcul du champ diffracté lorsque l'onde plane rencontre le petit obstacle. La source apparaît cette fois en second membre de la condition de Neumann sur Γ_ε . Notons en effet que $\frac{\partial u_i}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \neq 0$ et nous allons maintenant dériver une expression explicite de cette quantité. Pour ceci nous allons utiliser la formule de Jacobi-Anger qui donne le développement de Fourier de $u_i(\mathbf{x}) = e^{i\omega r \cos \varphi}$ par rapport à φ ,

$$u_i(\mathbf{x}) = e^{i\omega r \cos \varphi} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^{|p|} J_{|p|}(\omega r) e^{ip\varphi}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u_i}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^{|p|} \omega J'_{|p|}(\omega \varepsilon) e^{ip\varphi} \quad (1.3.15)$$

On peut trouver la démonstration de cette formule par exemple dans [28]. En raisonnant par séparation de variables, on peut donc proposer l'expression suivante pour le champ diffracté

$$u_d^\varepsilon(\mathbf{x}) = - \sum_{p=-\infty}^{\infty} i^{|p|} \frac{J'_{|p|}(\omega \varepsilon)}{H_{|p|}^{(1)'}(\omega \varepsilon)} H_{|p|}^{(1)}(\omega r) e^{ip\varphi}. \quad (1.3.16)$$

À présent il serait instructif de regarder le comportement de cette solution lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ à r fixé. En particulier nous nous intéressons aux fonctions de ε qui interviennent dans ce développement. Pour ceci, il nous suffit de regarder le développement de $J'_{|p|}(\omega\varepsilon)$ et $1/H_{|p|}^{(1)' }(\omega\varepsilon)$. Nous savons d'après l'étude de la sous-section 1.3.2 que $J'_{|p|}(\omega\varepsilon)$ se développe suivant les puissances de ε . Par ailleurs

$$H_{|p|}^{(1)' }(\omega\varepsilon) \sim \frac{|p|!2^{|p|}}{\pi} (\omega\varepsilon)^{-|p|-1} \text{ pour } p \neq 0, \text{ et } H_0^{(1)' }(\omega\varepsilon) \sim \frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega\varepsilon} \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ces remarques ajoutées à un calcul de développements limités un peu fastidieux nous montrent que les $J'_{|p|}(\omega\varepsilon)/H_{|p|}^{(1)' }(\omega\varepsilon)$ vont se développer suivant des fonctions de la forme $\varepsilon^n \ln^m(\varepsilon)$, $m, n \in \mathbb{N}$. En conclusion nous obtenons que, au moins à r fixe, la solution analytique donnée par la formule (1.3.16) va admettre un développement de la forme suivante par rapport à ε ,

$$u_d^\varepsilon(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]}(\mathbf{x}) + \dots, \quad N, M_n \in \mathbb{N}. \quad (1.3.17)$$

Remarquons que la borne M_n dans la deuxième somme dépend de n . En fait on pourrait montrer (nous ne le ferons pas), en reprenant une démarche assez longue inspirée de l'étude de Tordeux dans [109], que $M_n \leq n$. Par ailleurs les fonctions $u_n^{[m]}$ sont supposées indépendantes de ε . Si on regarde plus en détail le premier terme du développement de (1.3.16) par rapport à ε on obtient l'expression suivante

$$u_d^\varepsilon(\mathbf{x}) = \pi \left(\frac{\omega\varepsilon}{2} \right)^2 H_0^{(1)}(\omega r) + O(\varepsilon^3 |\ln \varepsilon|^3)$$

Remarquons que la fonction $H_{|p|}^{(1)}(\omega r)$ est singulière au voisinage de l'origine, et un calcul plus poussé montrerait que tous les termes du développement de (1.3.16) par rapport à ε admettent un comportement singulier quand $r \rightarrow 0$. On doit donc s'attendre à ce que les fonctions $u_n^{[m]}$ de (1.3.17) n'appartiennent pas à $H^1(\Omega)$.

1.4 Développement d'ordre supérieur

Le calcul analytique que nous venons d'effectuer, nous invite à prendre les $\varepsilon^n \ln^m(\varepsilon)$ comme fonctions de jauge pour l'ansatz du développement extérieur de u^ε solution de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Nous conjecturons alors qu'il existe une suite M_n , qu'on peut supposer croissante sans nuire à la généralité, et telle qu'on ait

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star). \quad (1.4.1)$$

Ici nous avons écrit "dans $H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star)$ " pour signifier "dans $H^1(\omega)$, $\forall \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ ", et c'est ainsi que nous l'écrivons dorénavant. Le problème est que nous avons une définition globale de u^ε et non locale, puisque cette fonction est définie comme l'unique solution de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ dans tout Ω_ε .

1.4.1 Singularité des termes du développement

Nous désirons utiliser l'équation $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ pour dériver la valeur des $u_n^{[m]}$. Peut-on proposer une forme de développement globale? Faisons un premier essai. Supposons que notre développement vérifie une hypothèse plus forte que (1.4.1), à savoir

$$\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = o(\varepsilon^N \ln^{M_n}(\varepsilon)) \quad \text{pour tout } N \in \mathbb{N}. \quad (1.4.2)$$

en supposant que $u_n^{[m]} \in H^1(\Omega)$. En particulier ceci implique que $u_n^{[m]}$ est " H^1 au voisinage de 0". En raisonnant au sens des distributions on obtient facilement que

$$\Delta u_n^{[m]} + \omega^2 u_n^{[m]} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_n^{[m]}}{\partial n_r} + T_1 u_n^{[m]} = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{dès que } n \geq 1 \text{ ou } m \geq 1.$$

Comme $H_\star^1(\Omega) := \{v \in \Omega \mid v = 0 \text{ sur un voisinage de } 0\}$ est dense dans $H^1(\Omega)$, ceci entraîne que $\Delta u_n^{[m]} + \omega^2 u_n^{[m]} = 0$ dans Ω tout entier. Ceci implique directement que $u_n^{[m]} = 0$ car ce dernier problème de Helmholtz homogène est classiquement bien posé. Au bilan tout ceci signifierait que u^ε converge vers u^0 défini par (1.2.1) plus vite que tout polynôme en ε . Ceci n'est pas envisageable au vu de notre calcul analytique de la section 1.3.6. Quel est le problème? Ce qui doit être mis en cause ici, c'est " $u_n^{[m]} \in H^1(\Omega)$ ". Les termes du développement admettent un comportement singulier (ne sont pas H^1) au voisinage de l'origine, comme nous l'avons remarqué sur le calcul du paragraphe 1.3.6.

Il existe plusieurs façons de remédier à cette difficulté. C'est ici qu'il convient de faire un choix sur la méthode de développement asymptotique que nous allons utiliser. Citons au moins deux méthodes possibles : les développements *multi-échelles* et les développements *raccordés*. Les références mathématiques traitant d'analyse asymptotique par développements multi-échelles nous semblent plus courantes : il en existe une littérature très étendue. Entre autres, citons l'incontournable livre en deux volumes de Maz'ya, Nazarov et Plamenevskii [87] qui est une compilation d'analyses asymptotiques de diverses situations. La technique des développements raccordés est plutôt issue de la littérature physique, et notamment d'aérodynamique avec une référence fondatrice de Van Dyke [112]. Ensuite cette approche a été développée par une école anglo-saxonne qui a produit des références plutôt formelles (utilisation de séries non convergentes, absence d'estimation d'erreur). Il existe cependant des références de grande rigueur mathématiques telles que [68, 67] ou également la thèse de Sébastien Tordeux [109] qui traite d'un problème de propagation dans des fentes minces. Enfin citons [110] qui s'intéresse justement à confronter ces deux méthodes (développements multi-échelles et raccordés).

1.4.2 La méthode des développements raccordés

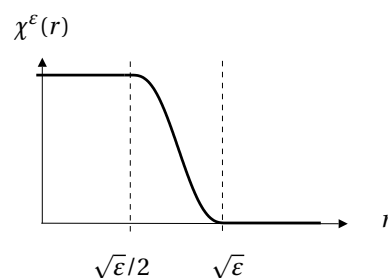
Dans toute cette thèse, nous utiliserons toujours la méthode des développements raccordés. Précisons plus en détails comment appliquer cette méthode dans notre situation. Pour résumer grossièrement, il n'est pas possible d'avoir un développement du type (1.4.2) avec $u_n^{[m]} \in H^1(\Omega)$ à cause de ce qui se passe en $\mathbf{x} = 0$. Nous allons donc "isoler" l'origine à l'aide d'un découpage géométrique. L'objet qui traduira ce découpage sera une simple fonction de troncature χ^ε définie comme suit

$$\chi^\varepsilon(r) := \chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad \text{avec}$$

$$\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1] \quad \text{telle que}$$

$$\chi(r) = 1 \quad \text{si } r \leq 1/2$$

$$\chi(r) = 0 \quad \text{si } r \geq 1$$



On peut introduire deux régions en rapport avec ce découpage : une région Z_F^ε dite *zone de champ lointain* (avec un F en indice comme "far") et une deuxième région Z_N^ε dite *zone de champ proche* (avec un N comme "near"). Ces régions seront définies par

$$Z_F^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| > \sqrt{\varepsilon}/2\} \quad \text{et} \quad Z_N^\varepsilon = \{\mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \in \Omega \mid \varepsilon\Phi(\boldsymbol{\sigma}) < r < \sqrt{\varepsilon}\}$$

La fonction de troncature χ^ε vaut 1 dans $Z_N^\varepsilon \setminus Z_F^\varepsilon$ et vaut 0 dans $Z_F^\varepsilon \setminus Z_N^\varepsilon$. Les zones de champ proche et de champ lointain se recouvrent dans la région $\{x \in \Omega \mid \sqrt{\varepsilon}/2 < x < \sqrt{\varepsilon}\}$, c'est-à-dire la où la troncature χ^ε passe de 0 à 1. Nous reviendrons sur cette zone de transition à la section 1.7. "Vue par le champ lointain" c'est-à-dire dans les coordonnées (r, φ) , la zone de transition se resserre autour de 0, tandis que "vue par le champ proche" dans les coordonnées (R, φ) , la zone de transition s'étend vers l'infini. Selon la stratégie des développements raccordés nous allons postuler un développement pour u^ε correspondant à chacune des régions de champ lointain et proche.

Ansatz en champ lointain La zone Z_F^ε converge vers $\Omega_\star (= \Omega \setminus \{0\})$, et donc tout $x \in \Omega_\star$ appartient à Z_F^ε pour ε assez petit. Nous postulerons donc un développement pour u^ε dans Ω_\star à l'aide des coordonnées (r, φ) , et ceci reviendra à décrire son comportement dans Z_F^ε . Nous écrivons l'ansatz

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star). \quad (1.4.3)$$

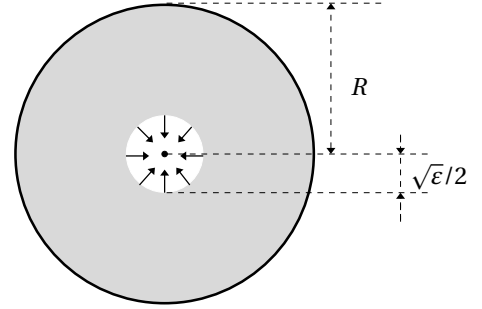


Fig.4 Zone de champ lointain

Cadre fonctionnel pour le champ lointain Nous précisons maintenant dans quels espaces nous cherchons les termes de l'ansatz en champ lointain. Il s'agira d'espaces de Sobolev à poids. Des espaces à poids ont également été utilisés par exemple dans [33], [76] ou [113] mais notre définition des espaces à poids ne coïncide pas avec la définition contenue dans ces références. Dans notre cas, ces espaces sont définis de la manière suivante. Soit un ouvert $\omega \subset \Omega$

$$\mathcal{V}_\alpha^k(\omega) := \left\{ v \in \mathcal{D}'(\omega \setminus \{0\}) \mid \|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\omega)}^2 := \sum_{\beta_1 + \beta_2 \leq k} \int_\omega |(r\partial_r)^{\beta_1} \partial_\varphi^{\beta_2} v|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr}{r} d\varphi < \infty \right\}.$$

Ces espaces \mathcal{V}_α^k ressemblent aux espaces de Sobolev H^k standard sauf au voisinage de 0 où on prescrit un comportement donné à l'aide d'un poids. Ces espaces à poids s'emboîtent les uns dans les autres

$$\mathcal{V}_\alpha^k(\omega) \subset \mathcal{V}_\beta^q(\omega) \quad \text{dès que } \alpha \geq \beta \text{ et } k \geq q.$$

Soit v une fonction de la forme $v(x) = r^\lambda w(\varphi)$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$, alors $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ si et seulement si $\lambda > \alpha$, et ce quel que soit $k \in \mathbb{N}$ (car nous avons supposé $w \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$). Ainsi, dire que $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ c'est dire que " v se comporte au pire comme r^α au voisinage de 0". Notons que si $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors $(r\partial_r)^\beta v \in \mathcal{V}_\alpha^{k-\beta}(\Omega)$ et $\partial_\varphi^\beta v \in \mathcal{V}_\alpha^{k-\beta}(\Omega)$. Par ailleurs, encore si $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors $r^\lambda v \in \mathcal{V}_{\alpha+\lambda}^k(\Omega)$ mais en revanche si $w \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$ on a encore que $x \mapsto v(x) w(\varphi)$ appartient $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$. Ajoutons pour finir deux remarques supplémentaires : d'une part on a $\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega) = L^2(\Omega)$, et d'autre part dès que $\alpha < 0$ l'espace $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ contient des éléments qui ne sont pas dans $H^1(\Omega)$ pour tout k . L'espace dans lequel nous recherchons les termes de l'ansatz en champ lointain sera

$$u_n^{[m]} \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$$

Nous dirons qu'une fonction v est singulière au voisinage de 0 lorsqu'elle n'appartiendra à aucun $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ pour $\alpha > 0$ et $k \in \mathbb{N}$. Ainsi nous autorisons les $u_n^{[m]}$ à être singuliers au sens de cette définition.

D'autres exemples Donnons une deuxième série d'exemples de fonctions appartenant à ces espaces. Revenons sur les fonctions de Bessel. Étant données les formules (1.3.5), (1.3.9) et (1.3.12) donnant leur

comportement au voisinage de 0, on voit que $J_{|p|}(\varpi r)e^{ip\varphi} \in H^1(\Omega)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ mais en revanche $Y_{|p|}(\varpi r)e^{ip\varphi} \notin H^1(\Omega)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Par ailleurs avec les remarques ci-dessus nous voyons facilement que

$$J_{|p|}(\varpi r)e^{ip\varphi} \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) \quad \forall \alpha < |p|, \forall p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad Y_{|p|}(\varpi r)e^{ip\varphi} \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) \quad \forall \alpha < -|p|, \forall p \in \mathbb{Z}$$

Ansatz en champ proche La zone $\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)$ converge vers Ω_N et donc tout $\mathbf{x} \in \Omega_N$ appartient à $\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)$ pour ε assez petit. Nous postulons donc un développement ponctuel pour $\Xi_*^{\varepsilon,-1}u^\varepsilon$ dans Ω_N à l'aide des coordonnées (R, φ) , et ceci reviendra à décrire son comportement dans $\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)$. Nous écrivons l'ansatz

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1}u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) U_n^{[m]} \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_N) \quad (1.4.4)$$

Ici encore nous avons écrit "dans $H_{\text{loc}}^1(\Omega_N)$ " pour signifier "dans $H^1(\omega)$ pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega_N$ ".

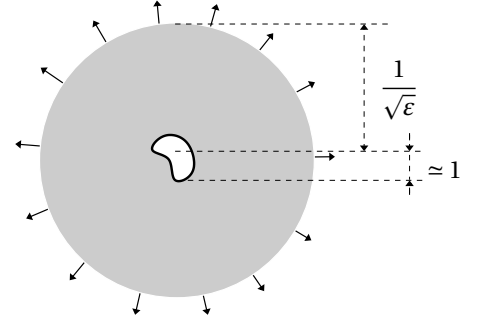


Fig.5 Zone de champ proche

Cadre fonctionnel pour le champ proche De même nous définissons dans quels espaces nous cherchons les termes de l'ansatz en champ proche ci-dessus. Il s'agira également d'espaces de Sobolev à poids, mais avec un poids au voisinage de l'infini. Ces espaces sont définis de la manière suivante. Soit un ouvert $\omega \subset \Omega_N$

$$\mathcal{W}_\alpha^k(\omega) := \left\{ v \in \mathcal{D}'(\omega) \mid \|v\|_{\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)}^2 := \sum_{\beta_1+\beta_2 \leq k} \int_\omega |(\mathbb{R}\partial_R)^{\beta_1} \partial_\varphi^{\beta_2} v|^2 R^{-2\alpha} \frac{dR}{R} d\varphi < \infty \right\}.$$

Les espaces \mathcal{W}_α^k diffèrent des Sobolev H^k standard au voisinage de l'infini. À nouveau ces espaces s'emboîtent les uns dans les autres

$$\mathcal{W}_\alpha^k(\omega) \subset \mathcal{W}_\beta^q(\omega) \quad \text{dès que } \alpha \geq \beta \text{ et } k \geq q.$$

Soit v une fonction de la forme $v(\mathbf{x}) = R^\lambda w(\varphi)$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$, alors $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ si et seulement si $\lambda < \alpha$, et ce quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, un $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ "se comporte au pire comme R^α au voisinage de l'infini". Notons que si $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ alors $(\mathbb{R}\partial_R)^\beta v \in \mathcal{W}_{\alpha-\beta}^{k-\beta}(\Omega_N)$ et $\partial_\varphi^\beta v \in \mathcal{W}_\alpha^{k-\beta}(\Omega_N)$. Par ailleurs, encore si $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ alors $R^\lambda v \in \mathcal{W}_{\alpha+\lambda}^k(\Omega_N)$ mais en revanche si $w \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$ on a encore que $\mathbf{x} \mapsto v(\mathbf{x})w(\varphi)$ appartient $\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega)$. L'espace dans lequel nous recherchons les termes de l'ansatz en champ lointain sera

$$U_n^{[m]} \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N), \quad \forall m, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega)$$

Nous dirons qu'une fonction v est singulière au voisinage de l'infini lorsque qu'elle n'appartiendra à aucun $\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ pour $\alpha \leq 0$ et $k \in \mathbb{N}$. A nouveau nous autorisons donc les $U_n^{[m]}$ à être singulières au sens de cette définition, c'est-à-dire à croître quand $R \rightarrow \infty$.

1.4.3 Approximation globale

A partir de ces développements dans des zones différentes, nous proposons un champ approché plus global simplement en interpolant entre le développement en champ proche et le développement en champ lointain à l'aide de la fonction de troncature. Nous définissons en effet pour tout n, m ,

$$\tilde{u}_n^{\varepsilon, [m]} = (1 - \chi^\varepsilon) u_n^{[m]} + \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_n^{[m]}. \quad (1.4.5)$$

Notons qu'avec cette définition on a $\tilde{u}_n^{\varepsilon, [m]} = u_n^{[m]}$ dans $Z_F^\varepsilon \setminus Z_N^\varepsilon$ et $\tilde{u}_n^{\varepsilon, [m]} = \Xi_*^\varepsilon U_n^{[m]}$ dans $Z_N^\varepsilon \setminus Z_F^\varepsilon$. Nous proposons alors que les sommes partielles formées avec les $\tilde{u}_n^{[m]}$ remplissent une condition d'approximation globale analogue à (1.4.2) mais un peu plus faible. Nous allons rechercher les $u_n^{[m]}$ et $U_n^{[m]}$ tels qu'il existe une suite croissante d'entiers $(\alpha_N)_{N \in \mathbb{N}}$ satisfaisants

$$\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) \tilde{u}_n^{\varepsilon, [m]} \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\alpha_N}) \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \text{avec } \alpha_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty, \quad (1.4.6)$$

En pratique dans ce chapitre nous aurons $\alpha_N = N/2$. En effet cette condition est suffisante pour que les $u_n^{[m]}$ soient les termes du développement de u^ε dans Ω_* , et que les $U_n^{[m]}$ soient les termes du développement $\Xi_*^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon$ dans Ω_N ainsi que le montre le lemme suivant.

Lemme 1.4.1.

Si la condition (1.4.6) est satisfaite alors pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_*$ (en particulier ω exclut un voisinage de 0) et pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe κ indépendant de ε (mais dépendant éventuellement de ω) tel que

$$\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \|_{H^1(\omega)} \leq \kappa \varepsilon^{N+1/2}, \quad \omega \subset \Omega_*. \quad (1.4.7)$$

De même la condition (1.4.6) implique que pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega_N$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe κ indépendant de ε tel que

$$\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) U_n^{[m]} \|_{H^1(\omega)} \leq \kappa \varepsilon^{N+1/2}, \quad \omega \subset \Omega_N. \quad (1.4.8)$$

Preuve :

La preuve des estimations ci-dessus est analogue pour le champ proche et le champ lointain. Nous le démontrerons donc seulement pour le champ lointain. Considérons un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_*$ arbitraire. Soit N_0 tel que $\alpha_{N_0} > N + 1/2$. Donc d'après (1.4.6), en appliquant une inégalité triangulaire, on a

$$\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \|_{H^1(\omega)} \leq \left\| \sum_{n=N+1}^{N_0} \sum_{m=0}^{M_n} \varepsilon^n \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]} \right\|_{H^1(\omega)} + o(\varepsilon^{N+1/2})$$

Or il est clair que le premier terme dans le membre de droite est $o(\varepsilon^{N+1/2})$ car chacun des termes $u_n^{[m]}$ est indépendant de ε . Ceci conclut la preuve. ■

Si un développement satisfaisant (1.4.6) existe alors il va fournir des développements en champ proche et en champ lointain qui auront de bonnes propriétés d'approximation locales, au sens des estimations (1.4.7) et (1.4.8). De plus ces développements "locaux" auront le bon goût d'être uniques d'après les remarques de la sous-section 1.2.3.

Avant d'aller plus loin dans notre raisonnement, posons une notation simple qui nous permettra de condenser quelque peu les calculs. Dans la suite nous noterons

$$u_n^\varepsilon := \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m(\varepsilon) u_n^{[m]}, \quad U_n^\varepsilon := \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m(\varepsilon) U_n^{[m]} \quad \text{et} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon := \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m(\varepsilon) \tilde{u}_n^{\varepsilon, [m]}. \quad (1.4.9)$$

De cette manière nous raisonnerons sur des fonctions dont la dépendance vis-à-vis de $\ln \varepsilon$ est polynômiale.

Dans la présente section, nous avons proposé avec (1.4.3), (1.4.4) et (1.4.5) une forme globale pour le développement de u^ε . Il s'agit maintenant de construire les u_n^ε et les U_n^ε de manière à assurer que la condition (1.4.6) soit satisfaite pour une certaine suite (α_N) croissante. Pour savoir comment les construire nous allons rechercher des conditions sur u_n^ε et U_n^ε . C'est l'objet de la fin de cette section.

1.4.4 Formulation forte de la stabilité

Nous allons exploiter le théorème de stabilité. Cependant nous aurons besoin de donner à ce résultat une forme plus propice aux calculs algébriques. C'est la raison d'être de la proposition 1.4.1. Pour la démontrer nous passons par un lemme intermédiaire.

Lemme 1.4.2.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|\Xi_*^{\varepsilon,-1} v\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$, pour tout $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$.

Preuve :

Il suffit de procéder comme à la deuxième étape de la preuve de stabilité. Considérons, quitte à raisonner par densité, un $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$. On a alors $(\Xi_*^{\varepsilon,-1} v)(\Phi, \varphi) = v(\varepsilon\Phi, \varphi) = v(\rho, \varphi) + \int_{\varepsilon\Phi}^\rho \partial_r v(r, \varphi) dr$ (rappelons que Γ admet pour équation $r = \rho$). Notons que la mesure sur Γ_N est donnée par $(\Phi^2 + (\partial_\varphi \Phi)^2)^{1/2} d\varphi$. Par ailleurs soit $\Phi_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\Phi_0 < \Phi(\varphi)$ pour tout φ . En multipliant l'égalité précédente par cette mesure et en intégrant suivant φ , on obtient

$$\begin{aligned} \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} v\|_{L^2(\Gamma_N)}^2 &\leq \kappa \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \kappa \int_0^{2\pi} \left| \int_{\varepsilon\Phi}^\rho \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) dr \right|^2 d\varphi \\ &\leq \kappa \|v\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \kappa \underbrace{\int_{\varepsilon\Phi_0}^\rho \frac{d\zeta}{\zeta}}_{= \ln(\rho/\varepsilon\Phi_0)} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon\Phi}^\rho \left| \frac{\partial v}{\partial r}(r, \varphi) \right|^2 r dr d\varphi \end{aligned}$$

On en tire l'estimation voulue. ■

Voici maintenant le résultat de stabilité définitif que nous allons utiliser dans la pratique. Notons au préalable que le résultat vaut cette fois pour des $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ et non $H^1(\Omega_\varepsilon)$. Dans la suite n_{Γ_N} désignera la normale à Γ_N dirigée vers l'intérieur de Ω_N .

Proposition 1.4.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} + \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\| \frac{\partial \Xi_*^{\varepsilon,-1} v}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} + \|\Delta v + \omega^2 v\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} \right\}.$$

Preuve :

Considérons un $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, et choisissons un $w \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire mais tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. Notre intention est bien évidemment d'utiliser le résultat du théorème 1.2.1 ; c'est pour cette raison que nous estimons dans un premier temps $a_\varepsilon(v, w)$. En appliquant la formule de Green, on a

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon(v, w)| &\leq \left| - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta v + \omega^2 v) \bar{w} + \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right) \bar{w} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \\ &\leq \|\Delta v + \omega^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \end{aligned}$$

Clairement d'après la définition des espaces à poids, on a $\|\Delta v + k^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|\Delta v + k^2 v\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)}$. Seule l'intégrale de bord est un peu délicate à estimer. Notons $d\Gamma_N$ et $d\Gamma_\varepsilon$ les mesures respectivement sur Γ_N et sur Γ_ε . Remarquons alors qu'on a $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\Gamma_N$. Par ailleurs des calculs de routine en géométrie donnent

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_N} \varepsilon \Xi_*^{\varepsilon,-1} \left(\frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right) d\Gamma_N \quad \text{et} \quad \Xi_*^{\varepsilon,-1} \left(\frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^{\varepsilon,-1} v}{\partial n_{\Gamma_N}}$$

On peut appliquer successivement Cauchy-Schwarz puis le lemme 1.4.2,

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \leq \left\| \frac{\partial \Xi_*^{\varepsilon,-1} v}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \left\| \Xi_*^{\varepsilon,-1} w \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\| \frac{\partial \Xi_*^{\varepsilon,-1} v}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}.$$

Ici la constante κ est indépendante de ε . Finalement il reste à appliquer le théorème de stabilité 1.2.1 en prenant le sup sur les $w \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ tels que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. ■

1.4.5 Conséquences de la stabilité

Pour terminer cette section nous allons voir comment exploiter les résultats de stabilité. Nous proposons d'approcher u^ε par un développement $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon$ dont la forme a été abondamment décrite au début de la présente section. Appliquons la proposition 1.4.1 à $u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon$.

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \right. & \left\| \left(\frac{\partial}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \right) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Gamma)} \\ & + \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\| \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \Xi_*^{\varepsilon,-1} \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \\ & \left. + \left\| (\Delta + \omega^2) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} \right\}. \end{aligned}$$

Comme nous avons supposé avec notre ansatz que $u_n^\varepsilon \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ (ils sont de classe \mathcal{C}^∞), les expressions ci-dessus font sens. Dans le membre de droite de l'inégalité de la proposition 1.4.1 apparaissent trois termes. Calculons le premier. Remarquons que $\chi^\varepsilon = 0$ sur Γ , et comme u^ε satisfait la condition d'onde sortante, on a

$$\left(\frac{\partial}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \right) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) = - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left(\frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_n^\varepsilon \right)$$

Évaluons maintenant le deuxième terme. Rappelons que u^ε satisfait une condition de Neumann homogène sur Γ_ε , et notons que $\chi^\varepsilon = 1$ sur Γ_ε . On a donc

$$\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \Xi_*^{\varepsilon,-1} \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) = \varepsilon \Xi_*^{\varepsilon,-1} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}}$$

Enfin pour le troisième terme de l'inégalité de stabilité,

$$\begin{aligned} (\Delta + \omega^2) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) &= - (1 - \chi^\varepsilon) \left(f + \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (\Delta + \omega^2) u_n^\varepsilon \right) \\ &+ \chi^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (\Delta + \omega^2) \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon \\ &+ [\Delta, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon). \end{aligned} \tag{1.4.10}$$

Remarquons que $\text{supp}(1 - \chi^\varepsilon) \subset Z_F^\varepsilon$ et que $\text{supp} \chi^\varepsilon \subset Z_N^\varepsilon$, si bien que le premier terme de l'identité ci-dessus "vit" dans la zone de champ lointain et que le deuxième terme "vit" dans la zone de champ proche. Dans le troisième terme apparaissant dans cette égalité, $[\Delta, \chi^\varepsilon]$ désigne le commutateur c'est-à-dire

$$[\Delta, \chi^\varepsilon]v = \Delta \chi^\varepsilon v - \chi^\varepsilon \Delta v = \frac{2}{r^2} r \partial_r \chi^\varepsilon r \partial_r v + \frac{1}{r^2} \left((r \partial_r)^2 \chi^\varepsilon \right) v \quad \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad (1.4.11)$$

Notons que $\text{supp} [\Delta, \chi^\varepsilon]v \subset Z_F^\varepsilon \cap Z_N^\varepsilon$ pour tout $v \in H^1(Z_F^\varepsilon \cap Z_N^\varepsilon)$. Par ailleurs un calcul très simple montre que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists \kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|(r \partial_r)^\beta \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \kappa, \forall \beta < k, \forall \varepsilon \in]0, 1[$. Ceci montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a les estimations suivantes uniformes par rapport à ε ,

$$\text{Il existe } \kappa_k > 0 \text{ tel que } \|\chi^\varepsilon v\|_{\gamma_\alpha^k(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_k \|v\|_{\gamma_\alpha^k(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \gamma_\alpha^k(\Omega_\varepsilon)$$

Nous pouvons nous servir de ceci pour l'estimation des deux premiers termes de (1.4.10). Au final l'estimation de stabilité se ramène donc à la forme suivante

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left(E_F^N(\varepsilon) + E_N^N(\varepsilon) + E_T^N(\varepsilon) \right),$$

Avec trois termes d'erreur qui admettent l'expression suivante (F = "far", N = "near", T = "transition")

- erreur lointaine : $E_F^N(\varepsilon) = \|f + (\Delta + \omega^2) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{\gamma_{-1}^0(Z_F^\varepsilon)} + \left\| \left(\frac{\partial}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \right) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon \right\|_{L^2(\Gamma)}$,
- erreur proche : $E_N^N(\varepsilon) = \|(\Delta + \omega^2) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\gamma_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} + \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{L^2(\Gamma_N)}$,
- erreur de raccord : $E_T^N(\varepsilon) = \|[\Delta, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon)\|_{\gamma_{-1}^0(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}$.

Comme nous l'avons vu en sous-section 1.4.3, le but de la suite de cette analyse est de construire des termes \tilde{u}_n^ε de manière à ce que (1.4.6) soit satisfaite. Avec les estimations que nous avons dérivées, nous voyons que les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \exists \kappa > 0, N_0 \in \mathbb{R} \text{ tels que } E_A^N(\varepsilon) &\leq \kappa \varepsilon^{N/2 + N_0} \\ \forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in]0, 1[, \text{ pour } A = F, N, T. \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

sont des conditions suffisantes. Ce sera donc ces conditions que nous ferons en sorte de satisfaire. Il s'agit de conditions suffisantes mais notons que, par unicité du développement asymptotique, il s'agira *a posteriori* aussi de conditions nécessaires. Dans la suite nous noterons $(1.4.12)_A$ la partie de (1.4.12) qui concerne $E_A^N(\varepsilon)$.

Nous allons maintenant nous atteler à dériver des conditions nécessaires et suffisantes sur les \tilde{u}_n^ε pour que la condition (1.4.12) soit satisfaite. Les trois prochaines sous-sections correspondront chacune à l'un des trois termes d'erreur que nous avons dérivés.

1.5 Étude du champ lointain

Dans cette section, nous allons examiner ce qu'implique la condition $(1.4.12)_F$ pour les termes de champ lointain. Une première proposition montrera que ces termes doivent satisfaire l'équation de Helmholtz, ce qui impliquera qu'ils doivent se décomposer sur les fonctions de Bessel que nous avons présentées en section 1.3. Après avoir précisé la notion de développement radial, nous montrerons que les termes de champ lointain admettent un développement asymptotique lorsque $r \rightarrow 0$.

Proposition 1.5.1.

$$(1.4.12)_F \iff \begin{cases} \Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon = -\delta_n^0 f & \text{dans } \Omega_\star, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_r} + T_1 u_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Preuve :

Ici bien sûr $\delta_n^0 = 1$ si $n = 0$ et $= 0$ si $n \neq 0$. Tout d'abord, il est clair que les équations ci-dessus sont des conditions suffisantes pour que (1.4.12)_F soit satisfaite. Montrons donc la réciproque. Effectuons la démonstration pour la partie équations de Helmholtz, la partie concernant les conditions au bord peut se démontrer exactement de la même manière.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon \neq -\delta_n^0 f$. Parmi ces n , choisissons le plus petit que nous notons n_0 . Rappelons que la dépendance de $\Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon$ vis-à-vis de $\ln \varepsilon$ est polynomiale, d'après la notation que nous avons adoptée à la fin de la sous-section 1.4.3. Choisissons un ouvert $\mathcal{O} \subset \bar{\mathcal{O}} \subset \Omega_\star$. On a alors pour $m_0 = \max\{n_0, m\}$ t.q $\Delta u_{n_0}^{[m]} + \varpi^2 u_{n_0}^{[m]} \neq 0$ pour un certain $\kappa > 0$,

$$\left\| \sum_{n=0}^N \Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\mathcal{O})} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \left\| \Delta u_{n_0}^{[m_0]} + \varpi^2 u_{n_0}^{[m_0]} \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\mathcal{O})} \varepsilon^{n_0} |\ln \varepsilon|^{m_0} \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (1.5.1)$$

En choisissant N tel que $N/2 + N_0 \geq n_0 + 1$, on voit que l'équation ci-dessus est contradictoire avec (1.4.12)_F puisque

$$\left\| \sum_{n=0}^N \Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\mathcal{O})} \leq \left\| \sum_{n=0}^N \Delta u_n^\varepsilon + \varpi^2 u_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{n_0+1}.$$

■

Avec ce dernier résultat, nous avons dérivé des équations sur les u_n^ε . Ceci ne suffit cependant pas à les caractériser car nous avons supposé $u_n^\varepsilon \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ ce qui les autorise à ne pas être dans $H^1(\Omega)$. Plus tard pour "rendre ces problèmes bien posés", nous imposerons à u_n^ε des conditions au voisinage de 0. C'est pour cette raison que nous nous intéressons maintenant à son comportement lorsque $r \rightarrow 0$.

1.5.1 Séparation de variables basée sur les fonctions de Bessel

Pour obtenir ce comportement nous allons tirer partie des équations que nous avons dérivées à la proposition 1.5.1. Nous commençons donc, avec ce paragraphe, par étudier la forme des solutions de l'équation de Helmholtz.

Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ fixé, considérons un disque $D \subset \Omega$ tel que D soit centré en 0. Notons $D_\star = D \setminus \{0\}$. Considérons une fonction $v \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(D)$ satisfaisant $\Delta v + \varpi^2 v = 0$ dans D_\star . Au vu des résultats sur la séparation de variables que nous avons énoncés en section 1.3, nous savons qu'il existe deux familles de nombres $(a_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ et $(b_p)_{p \in \mathbb{Z}}$ telles que

$$v = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left(a_p J_{|p|}(\varpi r) + b_p Y_{|p|}(\varpi r) \right) e^{ip\varphi} \quad \text{dans } D_\star. \quad (1.5.2)$$

Vu la régularité supposée de v , cette série converge dans $H_{\text{loc}}^k(D_\star)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ négatif tel que $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(D)$. Alors $b_p = 0$ dès que $|p| > |\alpha|$. En effet, en appliquant le théorème de Parseval sur le développement en série de Fourier de v par rapport à φ , et d'après la définition des espaces $\mathcal{V}_\alpha^0(D)$, on doit avoir

$$\int_0^{r_0} |a_p J_{|p|}(\varpi r) + b_p Y_{|p|}(\varpi r)|^2 r^{-2\alpha} dr / r < \infty \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Étant donné le comportement au voisinage de 0 des fonctions de Bessel, tel que fourni par les formules (1.3.5), (1.3.9) et (1.3.12), ceci implique $b_p = 0$ dès que $|p| > |\alpha|$. Si par contre il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha > 0$ et $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ le même type d'argument montre que $b_p = 0$ pour tout p , et $a_p = 0$ dès que $p < \alpha$.

1.5.2 Autre famille de solutions à variables séparées

Nous pourrions utiliser la formule (1.5.2) pour décrire le développement de v par rapport à r au voisinage de 0. Il faudrait pour cela tenir compte de (1.3.5), (1.3.9) et (1.3.12). Cependant la présence des coefficients multiplicateurs $J_{|p|,|p|}$ et $Y_{|p|,-|p|}$ dans ces formules aura pour effet de compliquer un peu les calculs. C'est la raison pour laquelle nous introduisons une autre famille $(h^p)_p$ de solutions de l'équation de Helmholtz qui nous semble mieux adaptée à l'analyse asymptotique pour $r \rightarrow 0$.

- Si $p > 0$ et $a = a(\varphi) = a^+ e^{+i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$

$$h^p[a](r, \varphi) := a(\varphi) \frac{J_{|p|}(\varpi r)}{\varpi^{|p|} J_{|p|,|p|}}$$

- Si $p = 0$ et $a = a(r, \varphi) = \alpha + \beta \ln r$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$h^0[a](r, \varphi) := \alpha J_0(\varpi r) + \beta \frac{\pi}{2} \left\{ Y_0(\varpi r) - c_0 J_0(\varpi r) \right\}$$

$$\text{avec } c_0 = \frac{2}{\pi} \left(\ln(\varpi/2) + \gamma_e \right) \quad (1.5.3)$$

- Si $p < 0$ et $a = a(\varphi) = a^+ e^{+i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$,

$$h^p[a](r, \varphi) := a(\varphi) \left\{ \frac{Y_{|p|}(\varpi r)}{\varpi^{-|p|} Y_{|p|,-|p|}} - c_p \frac{J_{|p|}(\varpi r)}{\varpi^{|p|} J_{|p|,|p|}} \right\}$$

$$\text{avec } c_p = \frac{\varpi^{|p|} Y_{|p|,|p|}^{(0)} + \varpi^{|p|} \left(\ln(\varpi/2) + 1/(2p) \right) Y_{|p|,|p|}^{(1)}}{\varpi^{-|p|} Y_{|p|,|p|}}$$

Avec cette définition, $h^p[a]$ satisfait l'équation de Helmholtz homogène au voisinage de 0 : pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $\Delta r^p h^p[a] + \varpi^2 r^p h^p[a] = 0$. C'est pour que $h^p[a]$ satisfasse l'équation de Helmholtz que nous avons imposé une telle forme sur $a(r, \varphi)$. Signalons également que la motivation principale pour utiliser ces fonctions-là plutôt que les fonctions de Bessel est liée au fait que

$$h^p[a](r, \varphi) = r^p a(r, \varphi) + O(r^{p+1}) \quad \forall p \in \mathbb{Z}, \text{ quand } r \rightarrow 0.$$

La valeur que nous avons imposée au coefficient c_p , $p < 0$ n'aura aucune incidence sur la suite de ce chapitre. Nous avons choisi cette valeur dans un souci de cohérence avec les définitions que nous poserons au chapitre 2 et en particulier la formule (2.7.10). Nous invitons le lecteur à ne pas se soucier de ce coefficient en première lecture.

1.5.3 Notion de développement radial au voisinage de 0

A présent nous définissons précisément une notion de développement par rapport à la variable r sensiblement différente de la notion de développement introduite en sous-section 1.2.3. Tout d'abord,

dans le reste de ce chapitre nous serons amenés à considérer seulement des fonctions dont les termes du développement radial appartiennent à un espace bien défini qui est

$$\mathbb{P}_{\log}^1 := \left\{ a(\varphi) + b(\varphi) \ln r \mid a, b \in \mathcal{C}^\infty(S^1) \right\}.$$

Étant donné un $a(r, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}^1$ on a $r^\alpha a(r, \varphi) \in \mathcal{V}_{\alpha-\delta}^\infty(\Omega)$ pour tout $\delta > 0$ mais $r^\alpha a(r, \varphi) \notin \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$. Pour un $a \in \mathbb{P}_{\log}^1$ nous noterons

$$d^\circ a := \text{le degré de } a(r, \varphi) \text{ en tant que polynôme en } \ln(r).$$

Ainsi on aura $d^\circ \ln(r) = 1$ et $d^\circ 1 = 0$. L'espace \mathbb{P}_{\log}^1 est apparu naturellement lorsque nous avons voulu construire sous forme de série les fonctions de Bessel en section 1.3. Au cours de cette construction en effet nous avons vu que les termes du développement des Y_p appartiennent à \mathbb{P}_{\log}^1 .

Définition 1.5.1.

Considérons une fonction $v \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$. Considérons également une famille de nombres réels (λ_n) telle que $\lambda_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$ d'une part, et une famille (v_n) d'éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 d'autre part. Alors on définit

$$v(r, \varphi) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n} v_n(r, \varphi), \lambda_n \in \mathbb{R}, v_n \in \mathbb{P}_{\log}^1 \iff v(r, \varphi) - \sum_{\lambda_n \leq \alpha} r^{\lambda_n} v_n(r, \varphi) \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Cette notion de développement a été considérée dans [110] et [113]. Par ailleurs dans [70], il est établi un lien entre cette notion et celle qui a été introduite en sous-section 1.2.3 par le biais d'un outil appelé transformation de Mellin dont nous auront l'occasion de reparler au prochain chapitre. Détail intéressant : il y a unicité d'un tel développement.

Lemme 1.5.1.

Étant donnée une fonction $v \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$, supposons que

$$v(r, \varphi) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda_n} v_n(r, \varphi), \lambda_n \in \mathbb{R}, v_n \in \mathbb{P}_{\log}^1 \quad \text{et} \quad v(r, \varphi) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} r^{\lambda'_n} v'_n(r, \varphi), \lambda'_n \in \mathbb{R}, v'_n \in \mathbb{P}_{\log}^1$$

On suppose aussi que $\lambda_n, \lambda'_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors, quitte à renuméroter, $\lambda_n = \lambda'_n$ et $v_n = v'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Quitte à renuméroter et à ajouter des éléments nuls, on peut déjà supposer que $\lambda_n = \lambda'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que la suite (λ_n) est strictement croissante. Procédons alors par l'absurde et supposons qu'il existe un plus petit n , que nous noterons q tel que $v_n \neq v'_n$. Soit $\delta > 0$ suffisamment petit pour que $\lambda_q + \delta < \lambda_n$ dès que $n > q$. On a alors

$$r^{\lambda_q} (v_q(r, \varphi) - v'_q(r, \varphi)) = \left\{ v(r, \varphi) - \sum_{\lambda_k \leq \lambda_q + \delta} r^{\lambda_k} v'_k(r, \varphi) \right\} - \left\{ v(r, \varphi) - \sum_{\lambda_k \leq \lambda_q + \delta} r^{\lambda_k} v_k(r, \varphi) \right\} \in \mathcal{V}_{\lambda_q + \delta}^\infty(\Omega).$$

Or, puisque $v_q(r, \varphi) \neq v'_q(r, \varphi)$, il est clair d'après les remarques que nous avons faites sur les espaces à poids en sous-section 1.4.2, que $r^{\lambda_q} (v_q(r, \varphi) - v'_q(r, \varphi))$ n'appartient pas à $\mathcal{V}_{\lambda_q + \delta}^\infty(\Omega)$. D'où une contradiction et le résultat. ■

1.5.4 Développement radial des solutions de l'équation de Helmholtz

Au bilan à chaque solution de l'équation de Laplace à variables séparées de la forme $r^p a(\varphi)$ nous avons fait correspondre $h^p[a](r, \varphi)$ solution de l'équation de Helmholtz. Par ailleurs les fonctions de Bessel se développent en séries absolument convergentes sous la forme $J_{|p|}(s) = \sum_{n=|p|}^{\infty} J_{|p|,n} s^n$ et $Y_{|p|}(s) = \sum_{n=-|p|}^{\infty} Y_{|p|,n}^{(0)} s^n + Y_{|p|,n}^{(1)} \ln(s) s^n$, il en va donc de même pour les fonctions h^p . Nous posons une notation pour les termes de leur développement

$$h^p[a](r, \varphi) = \sum_{q=p}^{\infty} r^q h_q^p[a](r, \varphi) \quad \text{avec} \quad h_q^p[a](r, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}^1.$$

Par convention nous posons que $h_q^p[a](r, \varphi) = 0$ dès que $q < p$. Puisque ces fonctions $h^p[a](r, \varphi)$ ont été construites à partir des fonctions de Bessel, elles en héritent la propriété suivante

$$\Delta r^q h_q^p[a](r, \varphi) + \omega^2 r^{q-2} h_{q-2}^p[a](r, \varphi) = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}. \quad (1.5.4)$$

Pour décrire plus en détail la façon dont les fonctions $h^p[a]$ se développent en série suivant r , nous proposons un schéma. Sur ce schéma figure en ordonnée le nombre p et en abscisse le nombre q , et chaque fois que $h_q^p \neq 0$, le point de coordonnées (q, p) est repéré par un point noir. Lorsque, pour un a donné, $h_q^p[a]$ ne dépend pas de r , ce point est seul. Lorsque $h_q^p[a]$ admet un terme logarithmique, i.e. dépend de $\ln(r)$ de manière affine, le point de coordonnées (q, p) est entouré. Rappelons par ailleurs que nous appelons $d^\circ h_q^p[a]$ le degré de $h_q^p[a]$ en tant que polynôme en $\ln(r)$.

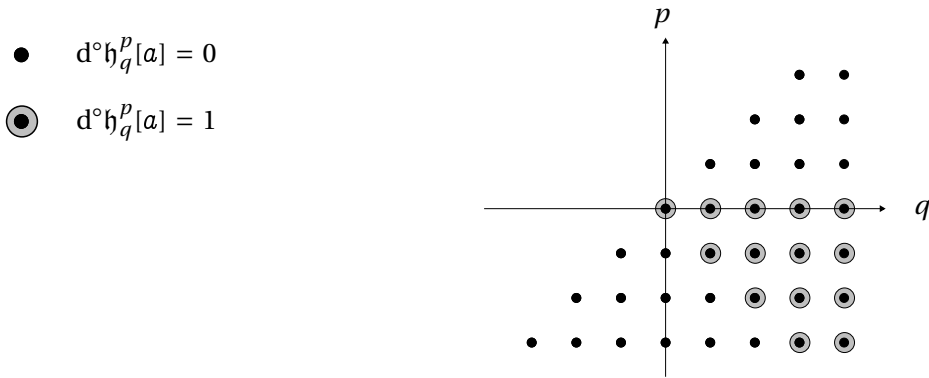


Fig.6 Apparition de termes en $\ln(r)$ dans $h_q^p[a]$

Il n'y a pas de terme logarithmique dans les deux régions $p > 0$ et $p + q < 0$: dans ces deux régions $h_q^p[a]$ est indépendant de r . Outre ces observations simples remarquons que $h_q^p[a]$ admet les mêmes harmoniques en φ que a

$$\text{Pour } a \in \mathbb{P}_{\log}^1 \text{ tel que } (p^2 + \partial_\varphi^2) a(r, \varphi) = 0, \quad \text{on a } (p^2 + \partial_\varphi^2) h_q^p[a] = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z} \quad (1.5.5)$$

De même que les fonctions de Bessel, les fonctions $h^p[a]$ peuvent jouer le rôle de "base" de solutions de l'équation de Helmholtz. En effet la proposition suivante est une conséquence directe de la décomposition (1.5.2) par séparation de variables.

Proposition 1.5.2.

Soit une fonction $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ satisfaisant $\Delta v + \omega^2 v = 0$ dans un disque pointé $D_\star \subset \Omega$. Alors il existe une unique famille $(\ell_p(v))_{p \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 telle que

$$v = \sum_{p \geq \alpha} h^p[\ell_p(v)] \quad \text{dans } D_\star,$$

la série convergeant absolument dans $H_{\text{loc}}^k(D_\star)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il est clair que les $\ell_p(v)$ introduites dans cette proposition dépendent linéairement de v . Par ailleurs on remarque suivant une discussion précédente et en utilisant le comportement de $h^p[a](r, \varphi)$ lorsque $r \rightarrow 0$, que si $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ alors $\ell_p(v) = 0$ pour tout $p < \alpha$. On a en outre le lemme suivant décrivant le développement d'un tel v .

Lemme 1.5.2.

Soit une fonction $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant $\Delta v + \omega^2 v = 0$ dans un voisinage de 0 (privé de 0). On a alors

$$v(r, \varphi) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{p \geq \alpha} \sum_{q \geq p} r^q h_q^p[\ell_p(v)].$$

Remarque : L'énoncé du lemme ci-dessus est un tout petit peu abusif car nous devrions écrire $\sum_{q \geq \alpha} \sum_{\alpha \leq p \leq q}$ au lieu de $\sum_{p \geq \alpha} \sum_{q \geq p}$. Mais ceci permet de faire un rapprochement avec l'énoncé de la proposition 1.5.2.

Preuve :

Considérons un $\beta \in \mathbb{R}$. Reprenons l'expression de v fournie par la proposition 1.5.2. On a

$$\sum_{\alpha \leq p \leq \beta} h^p[\ell_p(v)] - \sum_{\alpha \leq q \leq \beta} r^q \sum_{\alpha \leq p \leq q} h_q^p[\ell_p(v)] = \sum_{\alpha \leq p \leq \beta} \left(h^p[\ell_p(v)] - \sum_{p \leq q \leq \beta} r^q h_q^p[\ell_p(v)] \right) \in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega).$$

Pour terminer la preuve il suffit donc de montrer que $\sum_{p > \beta} h^p[\ell_p(v)] \in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega)$. On peut supposer sans nuire à la généralité que $\beta > 0$. Rappelons que l'équation de Γ est $r = \varrho$. D'après la séparation de variables ce que nous voulons montrer sera vérifié si pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\| \sum_{p > \beta} h^p[\ell_p(v)] \right\|_{\mathcal{V}_\beta^k(\Omega)}^2 = \sum_{p > \beta} \sum_{\gamma + \delta \leq k} \|\ell_p(v)\|_{H^\gamma(S^1)}^2 \int_0^\varrho |(r\partial_r)^\delta \left\{ \frac{J_p(\omega r)}{J_{p,p}\omega^p} \right\}|^2 r^{-2\beta} \frac{dr}{r} < \infty \quad (1.5.6)$$

Or, d'après la régularité de v par rapport à φ , on sait que les $\|\ell_p(v)\|_{H^\gamma(S^1)}^2$ sont à décroissance rapide par rapport à p . Pour montrer notre résultat, il suffit donc de montrer que l'intégrale sur r de (1.5.6) croît au plus comme p^n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Notons que, puisque $J_p(\omega r)$ satisfait l'équation de Bessel, on a $(r\partial_r)^2 J_p(\omega r) = (p^2 - \omega^2 r^2) J_p(\omega r)$. Ainsi on peut se ramener au cas où $\delta = 0$ ou 1 dans cette intégrale. Notons finalement que en majorant $p!/(p+n)! \leq 1$ on obtient

$$\frac{J_p(\omega r)}{J_{p,p}\omega^p} = r^p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p!}{n!(p+n)!} \left(\frac{\omega r}{2}\right)^{2n} \implies \begin{cases} \left| \frac{J_p(\omega r)}{J_{p,p}\omega^p} \right|^2 \leq r^{2p} e^{\omega^2 r^2/2} \\ \left| r\partial_r \left\{ \frac{J_p(\omega r)}{J_{p,p}\omega^p} \right\} \right|^2 \leq 4(p^2 + \omega^4 r^4) r^{2p} e^{\omega^2 r^2/2} \end{cases}$$

En injectant ces majorations dans l'intégrale sur r de (1.5.6), ceci permet de terminer la démonstration. ■

Pour conclure cette sous-section, d'après la proposition 1.5.1 nous pouvons appliquer la proposition 1.5.2 et le lemme 1.5.2 ci-dessus à chaque u_n^ε . Remarquons que puisque chaque u_n^ε admet la forme $u_n^\varepsilon = u_n^{[0]} + u_n^{[1]} \ln \varepsilon \cdots + u_n^{[m]} \ln^m \varepsilon$, alors d'après la linéarité des $\ell_p(\cdot)$ on a tout simplement

$$\ell_p(u_n^\varepsilon) = \ell_p(u_n^{[0]}) + \ell_p(u_n^{[1]}) \ln \varepsilon \cdots + \ell_p(u_n^{[m]}) \ln^m \varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}^1.$$

En d'autres termes, les $\ell_p(u_n^\varepsilon)$ sont des éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 dont la dépendance vis-à-vis de $\ln \varepsilon$ est polynomiale.

1.6 Étude du champ proche

Dans cette sous-section, la "stratégie logique" sera un peu différente. Nous allons dériver des conditions nécessaires sur les termes de champ proche pour que la condition (1.4.12)_N soit satisfaite. Ces termes devront satisfaire des équations comportant un terme de récurrence. Celles-ci, presque identiques à celles introduites par Tordeux dans [109], sont dites "équations de Laplace emboîtées" en reprenant la terminologie alors introduite. Dans l'énoncé de la proposition ci-dessous nous avons posé par convention $U_{-1}^\varepsilon = U_{-2}^\varepsilon = 0$.

Proposition 1.6.1.

$$(1.4.12)_N \implies \begin{cases} \Delta U_n^\varepsilon + \varpi^2 U_{n-2}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_N, \quad n \in \mathbb{N} \\ \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Preuve :

Les équations sur le bord Γ_N peuvent être dérivées de la même manière que dans la démonstration de la proposition 1.5.1. Montrons donc comment sont dérivées les équations dans Ω_N . Un calcul élémentaire donne

$$(\Delta + \varpi^2) \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \Xi_*^\varepsilon \left\{ \varpi^2 (\varepsilon^{N+1} U_{N-1}^\varepsilon + \varepsilon^{N+2} U_N^\varepsilon) + \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (\Delta U_n^\varepsilon + \varpi^2 U_{n-2}^\varepsilon) \right\}. \quad (1.6.1)$$

Choisissons à présent un ouvert borné $\mathcal{O} \subset \Omega_N$. Alors il existe ε_0 tel que $\mathcal{O} \subset \Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon)$. On peut supposer que $\varepsilon < \varepsilon_0$. Comme à la proposition 1.5.1, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta U_n^\varepsilon + \varpi^2 U_{n-2}^\varepsilon \neq 0$. Choisissons le plus petit des n satisfaisant cette condition et notons-le n_0 . Rappelons que chaque U_n^ε a une dépendance polynomiale vis-à-vis de $\ln \varepsilon$, il en est donc de même pour $\Delta U_n^\varepsilon + \varpi^2 U_{n-2}^\varepsilon$. Selon l'équation (1.6.1), avec $m_0 = \max\{n_0, m\}$ t.q $U_{n_0}^{[m]} \neq 0$ et pour un certain $\kappa > 0$ indépendant de ε on a donc

$$\left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} (\Delta + \varpi^2) \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\mathcal{O})} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \kappa \varepsilon^{n_0-2} |\ln \varepsilon|^{m_0}. \quad (1.6.2)$$

On obtient alors une contradiction en choisissant $N/2 + N_0 \geq n_0 + 1$ et en utilisant la condition (1.4.12)_N. En effet dans ce cas, simplement en appliquant le changement de variable $r = \varepsilon R$, on obtient l'existence de $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on ait

$$\begin{aligned} \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} (\Delta + \varpi^2) \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\mathcal{O})} &\leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \left\| (\Delta + \varpi^2) \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\Xi^\varepsilon(\mathcal{O}))} \\ &\leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \left\| (\Delta + \varpi^2) \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{n_0}. \end{aligned}$$

ce qui est absurde compte tenu de (1.6.2). D'où le résultat. ■

Comme pour le champ lointain, les équations fournies par cette proposition ne suffisent pas à caractériser les termes U_n^ε puisque ceux-ci sont recherchés dans $\cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ et sont donc autorisés à adopter un comportement croissant au voisinage de l'infini. Pour aboutir à des conditions aux limites appropriées, nous sommes amenés à étudier le développement des U_n^ε quand $R \rightarrow \infty$.

1.6.1 Expression explicite des solutions des équations de Laplace emboîtées

Pour dériver ce développement asymptotique, nous utiliserons les équations fournies par la proposition 1.6.1. Dans ce paragraphe nous allons décrire les solutions des équations de Laplace emboîtées à l'aide d'une formule quasi-explicite issue de la séparation de variables.

Pour ceci nous passons par des fonctions parentes des $h^p[a]$. Nous invitons le lecteur à reconnaître une similitude entre les équations de la proposition 1.6.1 et les équations (1.5.4). Rappelons les équations (1.5.4)

$$\Delta R^q h_q^p[a](R, \varphi) + \bar{\omega}^2 R^{q-2} h_{q-2}^p[a](R, \varphi) = 0, \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}. \quad (1.6.3)$$

Pour pouvoir obtenir le développement des U_n^ε nous allons passer par une décomposition similaire à celle qu'a fournie la séparation de variables avec la proposition 1.5.4 pour le champ lointain.

Proposition 1.6.2.

Soient $V_0, V_1, \dots, V_N \in \cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant $\Delta V_n + \bar{\omega}^2 V_{n-2} = 0$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ (avec $V_{-1} = V_{-2} = 0$). Soit $D = D(0, R_0)$ un disque borné tel que $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \subset \Omega_N$. Alors il existe une unique famille $(L_p(V_n))_{p \in \mathbb{Z}, n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ d'éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 telle que

$$V_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=0}^n R^{p+q} h_{p+q}^p[L_p(V_{n-q})](R, \varphi) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

la série convergeant absolument dans $H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus pour chaque n , il existe α_n tel que $L_p(V_n) = 0$ dès que $p > \alpha_n$.

Preuve :

Nous démontrerons cette proposition par récurrence sur N .

Initialisation : Commençons donc par la montrer pour $N = 0$. Dans ce cas il s'agit simplement de la résolution de l'équation de Laplace par séparation de variables puisqu'on a $\Delta V_0 = 0$. Notons donc $R^p a_p(R, \varphi)$ les termes du développement de V_0 c'est-à-dire $V_0 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R^p a_p(R, \varphi)$. Supposons que pour $p \neq 0$, $a_p(R, \varphi) = a_p(\varphi) = a_p^+ e^{+ip|\varphi} + a_p^- e^{-ip|\varphi}$. Puisqu'on a supposé $V_0 \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$, on doit avoir

$$\int_{R_0}^{\infty} |a_p^+ R^p + a_p^- R^{-p}|^2 R^{-2\alpha} dR/R < \infty \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Ceci n'est possible que si $a_p^\pm = 0$ dès que $p > \alpha$. Remarquons qu'on a bien $a_p(R, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}^1$, le seul cas pour lequel a_p dépend de R étant pour $p = 0$. On pose alors $L_p(V_0)(R, \varphi) = a_p(R, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}^1$, et on a donc bien

$$V_0 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R^p h_p^p[L_p(V_0)](R, \varphi) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (1.6.4)$$

Étant donnée la régularité de V_0 , la série converge absolument dans $H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par ailleurs $L_p(V_0) = 0$ dès que $p > \alpha$ pour un certain α . Enfin il est clair qu'il y a unicité des $L_p(V_0) = 0$ vérifiant (1.6.4). Notre proposition est donc vraie pour $N = 0$.

Transitivité : Supposons maintenant qu'elle soit vraie pour $N-1$ et démontrons la pour N . Par hypothèse de récurrence, nous savons que V_0, V_1, \dots, V_{N-1} vérifient déjà les propriétés souhaitées. Nous devons donc étudier V_N exclusivement. De même que nous avons utilisé $\Delta V_0 = 0$ à l'étape $N = 0$, ici on se sert de $\Delta V_N = -\bar{\omega}^2 V_{N-2}$. Dans un premier temps construisons une solution particulière de cette équation en utilisant les équations (1.6.3). Avec ces équations on a

$$\begin{aligned} -\bar{\omega}^2 V_{N-2} &= \sum_{p>0} \sum_{q=0}^{N-2} -\bar{\omega}^2 R^{p+q} h_{p+q}^p[L_p(V_{N-2-q})] + \sum_{p \leq 0} \sum_{q=0}^{N-2} -\bar{\omega}^2 R^{p+q} h_{p+q}^p[L_p(V_{N-2-q})], \\ &= \Delta \sum_{p>0} \sum_{q=2}^N R^{p+q} h_{p+q}^p[L_p(V_{N-q})] + \sum_{p \leq 0} \Delta \sum_{q=2}^N R^{p+q} h_{p+q}^p[L_p(V_{N-q})], \end{aligned} \quad (1.6.5)$$

Notons que la première somme $\sum_{p>0}$ est finie par hypothèse de récurrence. On n'a pas pu intervertir la dernière somme $\sum_{p\leq 0}$ avec le laplacien Δ parce que nous devons d'abord vérifier que la série $\sum_{p\leq 0} \sum_{q=2}^N R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p[\mathbb{L}_p(V_{N-q})]$ converge absolument dans $H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ pour tout k .

Il suffit seulement de vérifier la convergence avec $\sum_{p<-q} R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p[\mathbb{L}_p(V_{N-q})]$ pour chaque $q \in \llbracket 2, N \rrbracket$, somme dans laquelle n'apparaissent que des termes pour lesquels $p+q < 0$ et $p < 0$. Nous savons selon les définitions (1.5.3) et la Fig.6 que $d^\circ \mathfrak{h}_q^p[a] = 0$ lorsque $p+q < 0$ et $p < 0$. Par ailleurs en utilisant la relation de récurrence (1.6.3) et (1.5.5) il vient dans ce cas

$$R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p[a] = \frac{-\omega^2}{(p+q)^2 - p^2} R^{p-2+q} \mathfrak{h}_{p-2+q}^p[a]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{p\leq -q} R^{p-2+q} \mathfrak{h}_{p-2+q}^{p-2}[\mathbb{L}_p(V_{N-q})] &\text{ converge dans } H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \\ \implies \sum_{p\leq -q} R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p[\mathbb{L}_p(V_{N-q})] &\text{ converge dans } H_{\text{loc}}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}). \end{aligned}$$

La convergence de la première somme ci-dessus est une conséquence de l'hypothèse de récurrence. Ceci permet donc de conclure à la convergence de la deuxième somme et d'intervertir Δ et $\sum_{p\leq 0}$ dans (1.6.5). Au final ceci nous permet de construire une solution particulière V'_N de l'équation de Laplace satisfaite par V_N ,

$$\Delta(V_N - V'_N) = 0 \quad \text{avec} \quad V'_N = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=1}^N R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p[\mathbb{L}_p(V_{N-q})].$$

La somme sur q ci-dessus devrait normalement commencer à $q = 2$ mais nous avons utilisé le fait que $\mathfrak{h}_{p+1}^p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Pour voir ceci il suffit de remarquer que $J_{p,p+1} = Y_{p,-p+1} = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$ grâce aux relations de récurrence (1.3.6), puis de reprendre la définition de \mathfrak{h}^p donnée par (1.5.3).

On s'est finalement ramené au cas d'une équation de Laplace homogène. On peut donc décomposer $V_N - V'_N$ par séparation de variables, de la même manière que nous l'avons fait pour V_0 ci-dessus. Nous définissons les $\mathbb{L}_p(V_N)$ comme les coefficients de cette décomposition,

$$V_N - V'_N = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R^p \mathfrak{h}_p^p[\mathbb{L}_p(V_N)] = \sum_{p \in \mathbb{Z}} R^p \mathbb{L}_p(V_N) \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}.$$

De même que dans le cas de V_0 , comme $V_N - V'_N \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$, il existe un α_N tel que $\mathbb{L}_p(V_N) = 0$ dès que $p > \alpha_N$. Pour conclure, nous savons déjà par hypothèse de récurrence qu'il y a unicité des $\mathbb{L}_p(V_N)$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $p \in \mathbb{Z}$. Par unicité des coefficients de la décomposition par séparation de variables pour l'équation de Laplace, on en tire l'unicité des $\mathbb{L}_p(V_N)$, $p \in \mathbb{Z}$. ■

Remarque : Même si nous n'avons pas toujours fait apparaître la dépendance des $\mathfrak{h}_q^p[a]$ vis-à-vis de \mathbb{R} , il existe seulement un nombre fini de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \llbracket 0, N \rrbracket$ tels que $d^\circ \mathfrak{h}_{p+q}^p[a] = 1$. Tous les autres sont constants par rapport \mathbb{R} c'est-à-dire $d^\circ \mathfrak{h}_{p+q}^p[a] = 0$.

1.6.2 Notion de développement radial au voisinage de l'infini

Nous définissons maintenant une notion de développement au voisinage de l'infini très voisine de celle que nous avons introduite en sous-section 1.5 pour les développements au voisinage de 0.

Définition 1.6.1.

Considérons une fonction $V \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$. Considérons également une famille de nombre réels (λ_n) telle que $\lambda_n \rightarrow -\infty$ quand $n \rightarrow \infty$ d'une part, et une famille (V_n) d'éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 d'autre part. Alors on définit

$$V(r, \varphi) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} R^{\lambda_n} V_n(R, \varphi), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, V_n \in \mathbb{P}_{\log}^1$$

$$\iff V(R, \varphi) - \sum_{\lambda_n \geq \alpha} R^{\lambda_n} V_n(R, \varphi) \in \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

A nouveau, pour une fonction donnée $V(R, \varphi)$, lorsqu'un tel développement existe il est unique. La preuve s'effectue de la même manière que pour le lemme 1.5.1, *mutatis mutandis*.

Lemme 1.6.1.

Étant donnée une fonction $V \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$, supposons que

$$V(R, \varphi) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} R^{\lambda_n} V_n(R, \varphi), \quad \lambda_n \in \mathbb{R}, V_n \in \mathbb{P}_{\log}^1 \quad \text{et} \quad V(R, \varphi) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{n=0}^{\infty} R^{\lambda'_n} V'_n(R, \varphi), \quad \lambda'_n \in \mathbb{R}, V'_n \in \mathbb{P}_{\log}^1$$

On suppose aussi que $\lambda_n, \lambda'_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Alors, quitte à renuméroter, $\lambda_n = \lambda'_n$ et $v_n = v'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette notion de développement, ajoutée à la forme explicite que nous avons dérivée à la proposition 1.6.2 nous permet de décrire précisément le comportement de solutions des équations de Laplace emboîtées au voisinage de l'infini.

Proposition 1.6.3.

Soient $V_0, V_1, \dots, V_N \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$ satisfaisant $\Delta V_n + \omega^2 V_{n-2} = 0$, $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ (avec $V_{-1} = V_{-2} = 0$). Alors on a

$$V_n(R, \varphi) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{q=0}^n R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})](R, \varphi), \quad n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Preuve :

Nous allons bien évidemment nous servir de la proposition 1.6.2 appliquée aux fonctions V_0, V_1, \dots, V_N . Considérons un $\beta \in \mathbb{R}$ et choisissons un n . Considérons le disque $D = D(0, R_0)$ de centre 0 avec un rayon $R_0 > 1$ de sorte que $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \subset \Omega_N$. D'après cette décomposition, il nous suffit de montrer que

$$\sum_{q=0}^n \sum_{p < \beta - q} R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})](R, \varphi) \in \mathcal{W}_{\beta}^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}).$$

Notons que pour chaque terme de la série ci-dessus, $R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})](R, \varphi) \in \mathcal{W}_{\beta}^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$. Il est donc suffisant de montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour chaque $q = \llbracket 0, n \rrbracket$, on a

$$\sum_{p < \min(0, \beta) - q} \| R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})](\varphi) \|_{\mathcal{W}_{\beta}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})}^2 < \infty.$$

Ici $d^{\circ} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})] = 0$ puisque dans la somme $p+q < 0$. En nous référant à la définition des \mathfrak{h}_{p+q}^p avec $p < 0$ et $p+q < 0$ et à l'expression explicite des fonctions de Bessel (1.3.8), on a

$$\begin{aligned} & \| R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(V_{n-q})](\varphi) \|_{\mathcal{W}_{\beta}^k(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})}^2 \\ &= \sum_{\gamma + \delta \leq k} \| L_p(V_{n-q}) \|_{H^{\gamma}(S^1)}^2 \int_{R_0}^{\infty} \left| (R \partial_R)^{\delta} \left\{ \frac{(\omega R)^{p+q} Y_{|p|, p+q}}{\omega^p Y_{|p|, p}} \right\} \right|^2 R^{-2\beta} \frac{dR}{R} \\ &= \sum_{\gamma + \delta \leq k} \| L_p(V_{n-q}) \|_{H^{\gamma}(S^1)}^2 |\omega|^{2q} \left| \frac{Y_{|p|, p+q}}{Y_{|p|, p}} \right|^2 (p+q)^{2\delta} \int_{R_0}^{\infty} R^{2(p+q-\beta)} \frac{dR}{R} \end{aligned}$$

Rappelons que les $L_p(V_{n-q})$ sont les coefficients dans la décomposition par séparation de variables de solutions très régulières de l'équation de Laplace (ce qui correspondait à $V_N - V'_N$ dans la preuve précédente). Ainsi la famille $(\|L_p(V_{n-q})\|_{H^r(S^1)}^2)_p$ est à décroissance rapide lorsque $p \rightarrow -\infty$. Pour terminer il suffit d'utiliser les majorations suivantes

$$\int_{R_0}^{\infty} R^{2(p+q-\beta)} \frac{dR}{R} = \frac{R_0^{2(p+q-\beta)}}{2|p+q-\beta|} \quad \text{et} \quad \left| \frac{Y_{|p|,p+q}}{Y_{|p|,p}} \right|^2 = \begin{cases} \left| \frac{(|p|-q/2-1)!}{(|p|-1)!q/2!} \right|^2 & \text{si } q \text{ est pair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

■

Pour conclure cette sous-section, en vertu de la proposition 1.6.1, nous pouvons appliquer les propositions 1.6.2 et 1.6.3 aux termes de champ proche $U_0^\varepsilon, U_1^\varepsilon, \dots, U_N^\varepsilon$. Ceci nous fournit leur développement grâce à la donnée des $L_p(U_n^\varepsilon)$, dont nous pouvons affirmer qu'ils ont une dépendance polynomiale par rapport à $\ln \varepsilon$. En effet chaque U_n^ε se met sous la forme $U_n^\varepsilon = U_n^{[0]} + U_n^{[1]} \ln \varepsilon \dots + U_n^{[m]} \ln^m \varepsilon$ ce qui implique par linéarité des L_p ,

$$L_p(U_n^\varepsilon) = L_p(U_n^{[0]}) + L_p(U_n^{[1]}) \ln \varepsilon \dots + L_p(U_n^{[m]}) \ln^m \varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}^1.$$

1.7 Étude de l'erreur de raccord

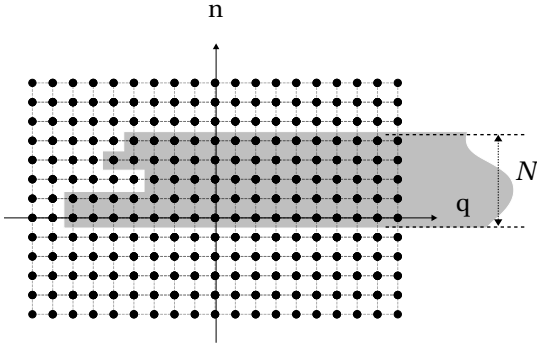
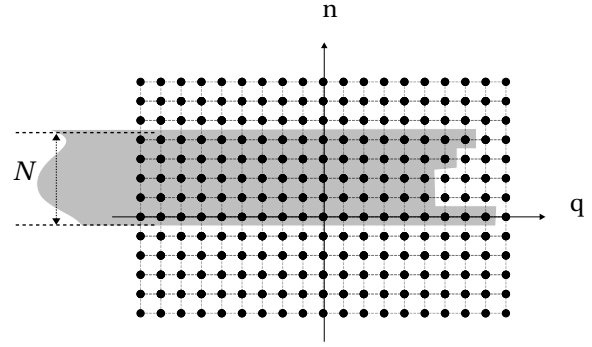
A l'instar des deux dernières sous-sections, nous allons chercher à dériver des conditions nécessaires sur les termes de champ lointain et de champ proche pour que (1.4.12)_T soit satisfaite. Au cours de l'étude des champs lointain et proche, nous avons dérivé des équations grâce aux propositions 1.5.1 et 1.6.1, mais ces équations ne suffisaient pas à caractériser complètement les u_n^ε et U_n^ε . Il nous manquait des conditions au voisinage de 0 pour le champ lointain, et des conditions au voisinage de l'infini pour le champ proche. C'est maintenant que nous allons dériver ces conditions.

En premier lieu formulons des remarques de synthèse au sujet des u_n^ε et des U_n^ε . Si ces termes satisfont les équations du lemme 1.5.2 et de la proposition 1.6.3, alors nous savons qu'il existe deux uniques familles d'éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 (dépendant également de ε) notées $(u_{n,q}^\varepsilon)$ et $(U_{n,q}^\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{n=0}^N \sum_{q \in \mathbb{Z}} \varepsilon^n r^q u_{n,q}^\varepsilon, \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{n=0}^N \sum_{q \in \mathbb{Z}} \varepsilon^n R^q U_{n,q}^\varepsilon, \quad u_{n,q}^\varepsilon, U_{n,q}^\varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}^1$$

Précisons pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté. Les termes $u_{n,q}^\varepsilon$ et $U_{n,q}^\varepsilon$ sont, dans ce cas, polynômiaux par rapport à $\ln(\varepsilon)$, c'est leur seule dépendance vis-à-vis de ε . Ces termes sont également affines par rapport à $\ln(r)$ (resp. $\ln(R)$), et c'est leur seule dépendance par rapport à r (resp. R).

Notons également que d'après le lemme 1.5.2 les $u_{n,q}^\varepsilon$ sont complètement déterminés par la donnée des $\ell_p(u_n^\varepsilon)$, et d'après la proposition 1.6.3 les $U_{n,q}^\varepsilon$ sont complètement déterminés par la donnée des $L_p(U_n^\varepsilon)$, et réciproquement. Par ailleurs nous pouvons schématiser graphiquement la répartition des termes de ces deux développements avec les deux dessins suivants.


 Fig.7 Répartition possible des $u_{n,q}^{\epsilon} \neq 0$

 Fig.8 Répartition possible des $U_{n,q}^{\epsilon} \neq 0$

Sur les schémas ci-dessus, chaque petit point noir représente un terme de développement asymptotique. À chaque terme est associée une puissance de ϵ en ordonnée, et une puissance de r ou R en abscisse. Lorsque un terme est non nul il est situé dans une zone grisée.

Sur la figure Fig.7 nous avons représenté un schéma possible du développement du champ lointain. Sur cette figure, la zone grisée s'étend à l'infini vers la droite, par contre elle est bornée par la gauche parce que $u_n^{\epsilon} \in \cup_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\Omega)$ pour chaque n . De façon similaire, nous avons représenté sur la Fig.8 un schéma possible pour le développement du champ proche. La zone grisée s'y étend vers la gauche à l'infini, mais elle est bornée par la droite car $U_n^{\epsilon} \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$ pour chaque n .

Ces remarques étant faites, voyons maintenant comment il serait possible de choisir les u_n^{ϵ} et les U_n^{ϵ} de manière à ce que l'erreur $E_T^N(\epsilon)$ soit asymptotiquement petite. Si nous reprenons son expression

$$E_T^N(\epsilon) = \|\Delta, \chi^{\epsilon}\| \sum_{n=0}^N \epsilon^n \left(u_n^{\epsilon} - \Xi_*^{\epsilon} U_n^{\epsilon} \right) \|_{\gamma_{-1}^0(Z_N^{\epsilon} \cap Z_{\bar{\epsilon}}^{\epsilon})}.$$

L'idéal serait que $u_n^{\epsilon} = \Xi_*^{\epsilon} U_n^{\epsilon}$ pour tout n et tout ϵ , mais ceci semble difficile à satisfaire en même temps que les équations des propositions 1.5.1 et 1.6.1. Nous proposons donc une condition plus faible : leurs développements asymptotiques radiaux (par rapport à r) coïncident. Effectuons un calcul simple. Choisissons un terme du développement radial de U_n^{ϵ} et appliquons le changement de variable. Cette nouvelle condition revient à imposer

$$\Xi_*^{\epsilon} \epsilon^n R^q U_{n,q}^{\epsilon} = \epsilon^{n-q} r^q \Xi_*^{\epsilon} U_{n,q}^{\epsilon} = \epsilon^{n-q} r^q u_{n-q,q}^{\epsilon}, \quad \forall n, q. \quad (1.7.1)$$

Ceci est une formulation de ce que nous appellerons plus tard *principe de raccord*. Imposer cette condition influe directement sur l'espace dans lequel nous allons choisir les termes du champ proche et lointain.

Lemme 1.7.1.

En supposant que $u_n^{\epsilon} \in \cup_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\Omega)$ et $U_n^{\epsilon} \in \cup_{\alpha} \mathcal{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_n^{\epsilon} + \omega^2 u_n^{\epsilon} = -\delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega_{\star}, \\ \Delta U_n^{\epsilon} + \omega^2 U_{n-2}^{\epsilon} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ u_{n,q}^{\epsilon} = \Xi_*^{\epsilon} U_{n+q,q}^{\epsilon}, \quad \forall q \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \forall n \in \mathbb{N} \implies \left\{ \begin{array}{l} u_n^{\epsilon} \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^{\infty}(\Omega), \\ U_n^{\epsilon} \in \mathcal{W}_{n+1/2}^{\infty}(\Omega_N), \end{array} \right. \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Preuve :

Si nous supposons que les u_n^{ϵ} satisfont les équations de la proposition 1.5.1, alors ils admettent bien un développement radial quand $r \rightarrow 0$ selon le lemme 1.5.2. De même si les U_n^{ϵ} satisfont les équations

de la proposition 1.6.1 alors ils admettent un développement au voisinage de $R \rightarrow \infty$. Ainsi $u_{n,q}^\varepsilon$ et $U_{n,q}^\varepsilon$ ont bien un sens.

Puisque $U_{n,q}^\varepsilon(r, \varphi) = 0$ dès que $n < 0$, on a donc $u_{n,q}^\varepsilon = 0$ dès que $n + q < 0$. De même puisque $u_{n,q}^\varepsilon = 0$ dès que $n < 0$, on a alors $U_{n,q}^\varepsilon(r, \varphi) = 0$ dès que $n - q < 0$. Ceci impose donc aux développements asymptotiques du champ proche d'avoir la forme indiquée en Fig.9 ci-dessous correspondant à la réunion des deux zones grisées. De même ceci impose au développement du champ lointain d'avoir la forme indiquée en Fig.10 . Pour obtenir l'appartenance aux espaces à poids annoncée il reste à appliquer les définitions 1.5.1 et 1.6.1. ■

Ce dernier lemme amène à proposer une sorte de réciproque de la proposition 1.6.1.

Lemme 1.7.2.

$$\left. \begin{aligned} U_n^\varepsilon &\in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta U_n^\varepsilon + \omega^2 U_{n-2}^\varepsilon &= 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{aligned} \right\} \forall n \in \mathbb{N} \implies (1.4.12)_N$$

Preuve :

Si les termes de champ proche satisfont les équations annoncées, alors en reprenant l'équation (1.6.1) dans la preuve de la proposition 1.6.1, l'erreur liée à la condition de bord s'annule et celle liée aux équations de Laplace emboîtées s'annule presque : il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$E_N^N(\varepsilon) = \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \Xi_\varepsilon \left\{ \omega^2 (\varepsilon^{N+1} U_{N-1}^\varepsilon + \varepsilon^{N+2} U_N^\varepsilon) \right\} \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \varepsilon^{N-1} \|\Xi_\varepsilon U_{N-1}^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} + \varepsilon^N \|\Xi_\varepsilon U_N^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} \right\}$$

Majorons les deux termes restant. On sait qu'il existe $\kappa > 0$ dépendant éventuellement de N mais indépendant de ε tel que pour tout $V \in H^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))$,

$$\begin{aligned} \|\Xi_\varepsilon^* V\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon)} &\leq \kappa \varepsilon \|V\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))}, \\ \|V\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} &\leq \kappa \varepsilon^{-N/2-1/4} \|V\|_{\mathcal{W}_{N-1/2}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))}, \\ \|V\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} &\leq \kappa \varepsilon^{-N/2-3/4} \|V\|_{\mathcal{W}_{N+1/2}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \end{aligned}$$

Rappelons que $|\mathbf{x}| \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$ lorsque $\mathbf{x} \in \Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)$. En reprenant les notations de (1.4.9) notons $M = \max\{M_{N-1}, M_N\}$. Au final, pour chaque N , il existe $\kappa > 0$ dépendant de N mais indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} E_N^N(\varepsilon) &\leq \kappa \left\{ \varepsilon^{N/2-1/4} \|U_{N-1}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{N-1/2}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} + \varepsilon^{N/2+1/4} \|U_N^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{N+1/2}^0(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \right\} \\ &\leq \kappa \varepsilon^{(N-1)/2} \left\{ \sum_{m=0}^{M_{N-1}} |\ln \varepsilon|^m \|U_{N-1}^{[m]}\|_{\mathcal{W}_{N-1/2}^0(\Omega_N)} + \sum_{m=0}^{M_N} |\ln \varepsilon|^m \|U_N^{[m]}\|_{\mathcal{W}_{N+1/2}^0(\Omega_N)} \right\} \\ &\leq \kappa \varepsilon^{(N-1)/2} |\ln \varepsilon|^M \left\{ \sum_{m=0}^{M_{N-1}} \|U_{N-1}^{[m]}\|_{\mathcal{W}_{N-1/2}^0(\Omega_N)} + \sum_{m=0}^{M_N} \|U_N^{[m]}\|_{\mathcal{W}_{N+1/2}^0(\Omega_N)} \right\}. \end{aligned}$$

ceci permet finalement de prouver (1.4.12)_N et donc conclut la preuve. ■

Enfin la proposition suivante garantit que le principe de raccord est suffisant pour que $E_T^N(\varepsilon)$ soit asymptotiquement petite.

Proposition 1.7.1.

En supposant que $u_n^\varepsilon \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors

$$\left. \begin{array}{l} \Delta u_n^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u_n^\varepsilon = -\delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \Delta U_n^\varepsilon + \bar{\omega}^2 U_{n-2}^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ u_{n,q}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon, \quad \forall q \in \mathbb{Z} \end{array} \right\} \forall n \in \mathbb{N} \implies (1.4.12)_T$$

Preuve :

A nouveau avec les équations que nous supposons satisfaites par u_n^ε et U_n^ε , les $u_{n,q}^\varepsilon$ et $U_{n,q}^\varepsilon$ ont bien un sens. Comme il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|(r\partial_r)^k \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} < \kappa$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ et pour $k = 1$ ou 2 , en utilisant l'expression (1.4.11) et la définition des normes à poids, on obtient la majoration simple suivante

$$E_T^N(\varepsilon) = \|\Delta, \chi^\varepsilon\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \|_{\gamma_{-1}^0(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \|\sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \|_{\gamma_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}$$

Remarquons que nous avons augmenté de 2 le poids de la norme compte tenu du facteur $1/r^2$ dans l'expression (1.4.11) de $[\Delta, \chi^\varepsilon]$. Nous allons séparer cette erreur en trois termes. Considérons deux ensembles d'indices

$$\mathcal{J}_N = \{(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid n \geq q \geq -N+n, 0 \leq n \leq N\} \quad \text{et} \quad \mathcal{J}_F = \{(n, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid -n \leq q \leq N-n, 0 \leq n \leq N\}$$

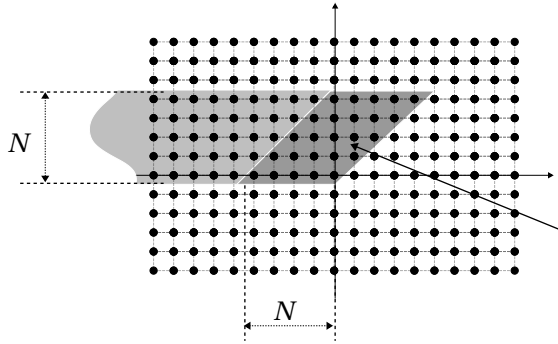


Fig.9

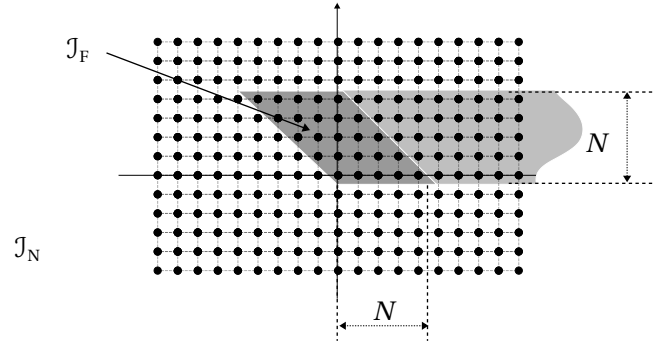


Fig.10

Ces deux ensembles d'indices recouvrent la zone gris foncé représentée en Fig.9 et Fig.10. On a alors la majoration élémentaire

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \right\|_{\gamma_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} &\leq \left\| \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_F} \varepsilon^n r^q u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^n R^q U_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\gamma_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &+ \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_F} \varepsilon^n r^q u_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\gamma_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &+ \left\| \Xi_*^\varepsilon \left(\sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^n R^q U_{n,q}^\varepsilon \right) \right\|_{\gamma_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Nous allons montrer que le premier terme de (1.7.2), celui lié à la fois aux $u_{n,q}^\varepsilon$ et aux $U_{n,q}^\varepsilon$, est nul. Notons d'abord que pour tout $(n, q) \in \mathcal{J}_N$, on a

$$\Xi_*^\varepsilon \varepsilon^n R^q U_{n,q}^\varepsilon = \varepsilon^{n-q} r^q \Xi_*^\varepsilon U_{n,q}^\varepsilon.$$

Ceci nous amène à introduire une bijection $\psi : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $\psi(n, q) = (n - q, q) = (k, l)$. Remarquons que $\psi(\mathcal{J}_N) = \mathcal{J}_F$. En utilisant la fonction ψ comme changement d'indice et l'hypothèse $u_{n,q}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon$ il vient

$$\Xi_*^\varepsilon \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^n r^q U_{n,q}^\varepsilon = \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^{n-q} r^q \Xi_*^\varepsilon U_{n,q}^\varepsilon = \sum_{(k,l) \in \psi(\mathcal{J}_N)} \varepsilon^k r^l \Xi_*^\varepsilon U_{k+l,l}^\varepsilon = \sum_{(k,l) \in \mathcal{J}_F} \varepsilon^k r^l u_{k,l}^\varepsilon$$

ce qui montre que le premier terme de (1.7.2) est nul. A présent traitons le deuxième terme de (1.7.2) lié seulement au champ lointain. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors un calcul élémentaire avec les normes à poids nous montre l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{(\beta-\alpha)/2} \|v\|_{\mathcal{V}_\beta^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}, \quad \forall v \in H^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En utilisant ces majorations et le fait que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ (d'après le lemme 1.7.1) on obtient l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_F} \varepsilon^n r^q u_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{V}_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} &\leq \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left\| u_n^\varepsilon - \sum_{q \leq N-n} \overbrace{r^q u_{n,q}^\varepsilon}^{\in \mathcal{V}_{N-n}^1(\Omega)} \right\|_{\mathcal{V}_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &\leq \sum_{n=0}^N \kappa \varepsilon^n \varepsilon^{(N-n-1)/2} \left\| u_n^\varepsilon - \sum_{q \leq N-n} r^q u_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{V}_{N-n}^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &\leq \kappa \varepsilon^{(N-1)/2} \sum_{n=0}^N \left\| u_n^\varepsilon - \sum_{q \leq N-n} r^q u_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{V}_{N-n}^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour estimer le terme du membre de droite de la dernière inégalité ci-dessus, nous utilisons le fait que u_n^ε est polynômial vis-à-vis de $\ln \varepsilon$. Notons $u_{n,q}^{[m]}$ les termes du développement en r de $u_n^{[m]}$, c'est-à-dire $u_n^{[m]} \propto \sum_q r^q u_{n,q}^{[m]}$. On a alors, en posant $M = \max\{M_n, n \in \llbracket 0, N \rrbracket\}$,

$$\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_F} \varepsilon^n r^q u_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{V}_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \varepsilon^{(N-1)/2} |\ln \varepsilon|^M \underbrace{\kappa \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \left\| u_n^{[m]} - \sum_{q \leq N-n} r^q u_{n,q}^{[m]} \right\|_{\mathcal{V}_{N-n}^1(\Omega)}}_{\text{indépendant de } \varepsilon}$$

Occupons-nous à présent du troisième terme dans (1.7.2) lié seulement au champ proche. Tout d'abord nous nous débarrassons de Ξ_*^ε en transformant la norme sur $\mathcal{V}_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)$ en une norme sur $\mathcal{W}_1^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))$. Les définitions des espaces à poids nous fournissent l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\Xi_*^\varepsilon V\|_{\mathcal{V}_1^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \|V\|_{\mathcal{W}_1^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \quad \forall V \in H^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

avec une constante κ indépendante de ε . On a par ailleurs facilement l'estimation suivante de changement de poids. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε (mais dépendant éventuellement de α, β) tel que

$$\|\Xi_*^\varepsilon V\|_{\mathcal{W}_\alpha^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \leq \kappa \varepsilon^{(\alpha-\beta)/2} \|V\|_{\mathcal{W}_\beta^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \quad \forall V \in H^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Nous pouvons alors, un peu de la même manière que pour le champ lointain, estimer le terme relié au

champ proche. Il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{aligned}
 & \|\Xi_*^\varepsilon \left(\sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mathbf{U}_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^n \mathbf{R}^q \mathbf{U}_{n,q}^\varepsilon \right) \|_{\gamma^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mathbf{U}_n^\varepsilon - \sum_{(n,q) \in \mathcal{J}_N} \varepsilon^n \mathbf{R}^q \mathbf{U}_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_1^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \\
 & \leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \varepsilon^{-(n-N-1)/2} \left\| \mathbf{U}_n^\varepsilon - \sum_{q \geq n-N} \mathbf{R}^q \mathbf{U}_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{n-N}^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \\
 & \leq \kappa \varepsilon^{(N-1)/2} \sum_{n=0}^N \left\| \mathbf{U}_n^\varepsilon - \sum_{q \geq n-N} \mathbf{R}^q \mathbf{U}_{n,q}^\varepsilon \right\|_{\mathcal{W}_{n-N}^1(\Omega_N)} \\
 & \leq \varepsilon^{(N-1)/2} |\ln \varepsilon|^M \underbrace{\kappa \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{M_n} \left\| \mathbf{U}_n^{[m]} - \sum_{q \geq n-N} \mathbf{R}^q \mathbf{U}_{n,q}^{[m]} \right\|_{\mathcal{W}_{n-N}^1(\Omega_N)}}_{\text{indépendant de } \varepsilon}
 \end{aligned}$$

En réunissant les estimations que nous avons obtenues pour chacun des termes du membre de droite de (1.7.2), on obtient pour tout $N \in \mathbb{N}$ l'existence d'un $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$E_T^N(\varepsilon) \leq \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon \mathbf{U}_n^\varepsilon) \right\|_{\gamma^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq 0 + \kappa_N \varepsilon^{(N-1)/2} + \kappa_N \varepsilon^{(N-1)/2} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ceci conclut enfin la preuve. ■

1.7.1 Bilan sur les conditions suffisantes

Nous avons vu dans la sous-section 1.4.5, qu'en vertu de la stabilité du problème notre développement raccordé doit satisfaire les propriétés (1.4.12)_A, A = F, N, T. Avec les propositions 1.5.1 et 1.7.1 et le lemme 1.7.2, nous avons alors dérivé des conditions suffisantes pour que ces propriétés soient satisfaites. Nous avons abouti à l'ensemble des équations suivantes pour les termes du champ lointain et proche,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u_n^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u_n^\varepsilon = -\delta_n^0 f & \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{Z}, \quad u_{n,q}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon \mathbf{U}_{n+q,q}^\varepsilon$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} \mathbf{U}_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta \mathbf{U}_n^\varepsilon + \bar{\omega}^2 \mathbf{U}_{n-2}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_N, \\ \frac{\partial \mathbf{U}_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

Nous montrerons à la prochaine section que ces équations sont bien posées. Mais auparavant nous cherchons à reformuler les équations de raccord que nous avons placées au centre de ce système.

1.7.2 Reformulation des équations de raccord

Nous allons ramener les équations de raccord $u_{n,q}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon$ à des équations posées en fonction des $\ell_p(u_n^\varepsilon)$ et des $L_p(U_n^\varepsilon)$. Pour ceci nous réécrivons les équations de raccord en tenant compte du fait que $u_{n,q}^\varepsilon$ et $U_{n,q}^\varepsilon$ admettent une expression explicite en fonction des \mathfrak{h}_q^p .

Puisque dans ces équations de raccord intervient la fonction Ξ_*^ε regardons comment se transforment les $\mathfrak{h}_q^p[a]$ sous son action. Le changement de variable $\Xi^\varepsilon : \mathbb{R} \mapsto r = \varepsilon R$ laisse invariant $\mathfrak{h}_q^p[a]$ sauf dans le cas où $d^\circ \mathfrak{h}_q^p[a] = 1$,

$$\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_q^p[a] = \begin{cases} \mathfrak{h}_q^p[a] & \text{si } p > 0 \text{ ou } p + q < 0, \\ \mathfrak{h}_q^p[a] + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \mathfrak{h}_q^{|p|}[\mathfrak{h}_{|p|}^{p,(1)}[a]] & \text{si } p \leq 0 \text{ et } p + q \geq 0 \end{cases} \quad (1.7.3)$$

$$\text{en notant } \mathfrak{h}_q^p[a](R, \varphi) = \mathfrak{h}_q^{p,(0)}[a](\varphi) + \mathfrak{h}_q^{p,(1)}[a](\varphi) \ln(R) \in \mathbb{P}_{\log}^1$$

Ceci est une conséquence directe de la définition des \mathfrak{h}^p donnée par (1.5.3) et de la définition des fonctions de Bessel donnée en (1.3.8) et (1.3.11). L'apparition d'un $\ln 1/\varepsilon$ provient d'un terme en $\ln R$ dans l'expression de $\mathfrak{s}_q^p[a]$. Ceci n'arrive en fait que lorsque $d^\circ \mathfrak{s}_q^p[a] = 1$ c'est-à-dire quand $p \leq 0$ et $p + q \geq 0$ comme cela apparaît sur la Fig.6 . Cette propriété intervient de manière déterminante dans la reformulation suivante des équations de raccord.

Proposition 1.7.2.

On a $u_{n,q}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} \ell_{-q}(u_n^\varepsilon) = L_{-q}(U_{n-q}^\varepsilon) & q \in [1, n], \\ \ell_q(u_n^\varepsilon) = L_q(U_{n+q}^\varepsilon) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \mathfrak{h}_q^{-q,(1)}[L_{-q}(U_{n-q}^\varepsilon)] & q \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Preuve :

Commençons par exprimer explicitement $u_{n,q}^\varepsilon$ et $U_{n,q}^\varepsilon$. Pour ceci il suffit de reprendre les développements radiaux que nous avons dérivés au lemme 1.5.2, et à la proposition 1.6.3. En tenant compte du fait que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$, on a

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &\underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{k \geq -n} \sum_{q \geq k} r^q \mathfrak{h}_q^k[\ell_k(u_n^\varepsilon)] & U_n^\varepsilon &\underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{l=0}^n \sum_{p \leq n-l} R^{l+p} \mathfrak{h}_{l+p}^p[L_p(U_{n-l}^\varepsilon)] \\ &\underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{q \geq -n} \sum_{k=-n}^q r^q \mathfrak{h}_q^k[\ell_k(u_n^\varepsilon)] & &\underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{l=0}^{(q=l+p)} \sum_{q \leq n} R^q \mathfrak{h}_q^{q-l}[L_{q-l}(U_{n-l}^\varepsilon)] \\ u_{n,q}^\varepsilon &= \sum_{k=-n}^q \mathfrak{h}_q^k[\ell_k(u_n^\varepsilon)] & U_{n+q,q}^\varepsilon &= \sum_{l=0}^{n+q} \mathfrak{h}_q^{q-l}[L_{q-l}(U_{n+q-l}^\varepsilon)](R) \\ & & & \underset{(k=q-l)}{=} \sum_{k=-n}^q \mathfrak{h}_q^k[L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \end{aligned}$$

Dans les calculs ci-dessus nous n'avons pas fait figurer les dépendances vis-à-vis de φ pour alléger un peu. Vu les définitions 1.5.1 et 1.6.1, les interversions de somme sont complètement licites.

1^{er} cas : $q = -1, -2, \dots -n$

Dans ces conditions on a $k+q < 0$ pour $k \in [-n, q]$. D'après l'identité signalée par (1.7.3), on a $\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_q^k = \mathfrak{h}_q^k$ et il vient alors en faisant la différence des deux expressions obtenues

$$u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon = \sum_{k=-n}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon)] - \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_q^k [L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] = \sum_{k=-n}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \quad (1.7.4)$$

2^{me} cas : $q \in \mathbb{N}$

Nous calculons encore la différence des expressions explicites de $u_{n,q}^\varepsilon$ et $\Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon$ mais cette fois nous devons distinguer entre $k < 0$ et $k \geq 0$.

$$\begin{aligned} u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon &= \sum_{k=-n}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon)] - \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_q^k [L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \\ &= \sum_{k=1}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] + \sum_{k=-n}^0 \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon)] - \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_q^k [L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \end{aligned}$$

Quitte à rajouter des termes nuls, on peut supposer que la deuxième somme ci-dessus est prise pour $-\max(q, n) \leq k \leq 0$. A nouveau on applique la propriété (1.7.3), ce qui fait apparaître des termes supplémentaires dans la deuxième somme, on obtient en effet

$$\begin{aligned} u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon &= \sum_{k=1}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \\ &\quad + \sum_{k=-n}^0 \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] - \sum_{k=-q}^0 \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \mathfrak{h}_q^{|k|} [\mathfrak{h}_{|k|}^{k,(1)} [L_k(U_{n+k}^\varepsilon)]] \\ &= \sum_{k=0}^q \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] - \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \sum_{k=0}^q \mathfrak{h}_q^k [\mathfrak{h}_k^{-k,(1)} [L_{-k}(U_{n-k}^\varepsilon)]] \\ &\quad + \sum_{k=-n}^{-1} \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \end{aligned}$$

Finalement, en regroupant les deux premières sommes, il vient

$$\begin{aligned} u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon &= \sum_{k=0}^q \mathfrak{h}_q^k \left[\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon) - \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \mathfrak{h}_k^{-k,(1)} [L_{-k}(U_{n-k}^\varepsilon)] \right] \\ &\quad + \sum_{k=-n}^{-1} \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Au vu de (1.7.5) et (1.7.4), la partie \Leftarrow de l'énoncé que nous désirons démontrer est alors claire. Il ne reste plus qu'à démontrer la partie \Rightarrow . Pour ceci commençons par montrer le résultat annoncé dans le cas $q = -1 \dots -n$. Nous testons l'équation (1.7.4) contre l'harmonique de Fourier $e^{\pm iq\varphi}$ et nous intégrons suivant φ . Comme on suppose $u_{n,q}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+q,q}^\varepsilon = 0$, on obtient

$$0 = \sum_{k=-n}^q \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{h}_q^k [\ell_k(u_n^\varepsilon) - L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] (r, \varphi) e^{\pm iq\varphi} d\varphi.$$

Or d'après la définition des \mathfrak{h}_q^p on a

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{h}_q^p [a](r, \varphi) e^{-iq\varphi} d\varphi \right) e^{iq\varphi} + \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{h}_q^p [a](r, \varphi) e^{iq\varphi} d\varphi \right) e^{-iq\varphi} = \begin{cases} a(r, \varphi), & \text{si } q^2 = p^2 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

ceci permet de conclure dans le cas $q = -1 \cdots -n$. Pour traiter le cas $q \in \mathbb{N}$, nous pouvons alors reprendre l'équation (1.7.5). Bien sûr en tenant compte du résultat $\ell_{-q}(u_n^\varepsilon) = L_{-q}(U_{n-q}^\varepsilon)$, $q = 1, 2, \dots, n$, la deuxième somme disparaît. On teste alors (1.7.5) contre $e^{\pm i q \varphi}$ comme au-dessus et, par les mêmes arguments, ceci mène au résultat annoncé. ■

Avec la définition explicite des fonctions de Bessel et la définition des fonctions \mathfrak{h}^p , on constate que dans le cas $p > 0$, l'opérateur $\mathfrak{h}_p^{-p,(1)}$ n'est pas autre chose qu'un opérateur de multiplication.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{h}_p^{-p,(1)}[L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)] = \frac{Y_{p,p}^{(1)}}{Y_{p,-p}} L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)(\varphi) := \mathbf{c}_{\log}^p L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)(\varphi), \\ \mathbf{c}_{\log}^p = \frac{Y_{p,p}^{(1)}}{Y_{p,-p}} = \frac{-2}{p!(p-1)!4^p}. \end{array} \right.$$

Dans le cas $p = 0$, par définition on a $\mathfrak{h}_0^0[a](R) = a(R)$. Dans le cas où $a(R) = \alpha + \beta \ln(R)$, on a donc $\mathfrak{h}_0^{0,(1)}[a](R) = \beta$, de sorte que l'équation de raccord associé à $q = 0$ s'écrit

$$\ell_0(u_n^\varepsilon) = L_0(U_n^\varepsilon) + \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \mathfrak{h}_0^{0,(1)}[L_0(U_n^\varepsilon)] = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon)$$

Avec ces remarques et notations, les nouvelles équations de raccord données par la proposition 1.7.2 peuvent être mises sous la forme suivante, que nous adopterons désormais

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{ll} \ell_{-q}(u_n^\varepsilon) = L_{-q}(U_{n-q}^\varepsilon) & q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon) & \\ L_q(u_n^\varepsilon) = \ell_q(u_{n-q}^\varepsilon) + \mathbf{c}_{\log}^q \ln(\varepsilon) \ell_{-q}(u_{n-q}^\varepsilon) & q \in \llbracket 1, n \rrbracket. \end{array} \right.$$

1.8 Définition des termes du développement

Avec la dernière formulation des équations de raccord nous dérivons la forme finale qui doit définir les termes du développement asymptotique raccordé. Il s'agit d'une famille de problèmes indexée suivant n . Chacun de ces problèmes porte sur le couple d'inconnues $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$, et les ordres inférieurs $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), (u_{n-2}^\varepsilon, U_{n-2}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ interviennent en tant que seconds membres. Le problème correspondant à n est alors

$$\begin{cases}
 u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\
 \Delta u_n^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u_n^\varepsilon = -\delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\
 \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma,
 \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_n^\varepsilon) \quad \begin{cases}
 \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) & p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\
 \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon) \\
 L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) + \mathbf{c}_{\log}^p \ln(\varepsilon) \ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon) & p \in \llbracket 1, n \rrbracket
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\
 \Delta U_n^\varepsilon = -\bar{\omega}^2 U_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \\
 \frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N,
 \end{cases}$$

Dans ces équations, il y a tout d'abord des termes source que sont les $\ell_p(u_{n-p}^\varepsilon)$, $L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)$ et $-\bar{\omega}^2 U_{n-2}^\varepsilon$ (outre f lorsque $n = 0$). Nous dirons qu'il s'agit de termes de couplage indirect, car les termes $L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)$ de champ proche d'ordre inférieur "alimentent" le champ lointain u_n^ε , tandis que les termes d'ordre inférieur $\ell_p(u_{n-p}^\varepsilon)$ de champ lointain "alimentent" le champ proche U_n^ε .

Il y a également un terme *a priori* "purement implicite", l'équation $\ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon)$ qui couple directement u_n^ε et U_n^ε . Ce couplage direct entre le champ proche et le champ lointain est assez spécifique. Un tel phénomène n'apparaît pas lorsqu'on s'intéresse à un coin arrondi par exemple comme dans [110].

Enfin dans le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$, le terme u_n^ε est sujet à la condition de radiation ainsi qu'à des conditions au voisinage de 0 par le biais de l'espace $\mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et au travers des équations impliquant $\ell_p(u_n^\varepsilon)$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. De même le terme U_n^ε est soumis, outre à la condition de Neumann sur Γ_N , à des conditions à l'infini par le biais de l'espace $\mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ et vérifie les équations impliquant $L_p(U_n^\varepsilon)$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Pour achever une bonne fois pour toute cette analyse asymptotique, il nous reste à faire deux choses. Tout d'abord nous devons montrer que le problème ci-dessus est bien posé. Ensuite il faudra montrer que les u_n^ε et les U_n^ε ainsi obtenus sont bien des polynômes en $\ln(\varepsilon)$.

1.8.1 Unicité de la solution

Proposition 1.8.1.

Le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admet au plus un couple solution.

Preuve :

Pour montrer le caractère bien posé nous allons commencer par le plus facile : l'unicité de la solution. Par linéarité, il suffit de montrer que l'unique solution du problème homogène associé est le couple $(u, U) = (0, 0)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u + \bar{\omega}^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \frac{\partial U}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(u) = \Xi_\star^\varepsilon L_0(U) \\ L_p(U) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right.$$

Comme U satisfait une équation de Laplace, en particulier il est à lui seul une famille de solutions des équations de Laplace emboîtées. U rentre donc dans le cadre de la proposition 1.6.2. Ainsi nous voyons que U est décomposable par séparation de variables et il existe un $p_0 \in \mathbb{R}$ (que l'on peut choisir dans \mathbb{N}) tel que

$$U(R, \varphi) = \sum_{p \leq p_0} R^p L_p(U)(R, \varphi) = \sum_{p \leq 0} R^p L_p(U)(R, \varphi) + \underbrace{\sum_{p=n+1}^{p_0} R^p L_p(U)(R, \varphi)}_{\notin \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)} = \sum_{p \leq 0} R^p L_p(U)(R, \varphi) \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N).$$

Rappelons que cette série converge dans $H_{\text{loc}}^k(\Omega_N)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en dehors d'un disque de rayon suffisamment grand. Dans le calcul ci-dessus, nous avons tenu compte du fait que $L_p(U) = 0$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Choisissons à présent un $R_0 > 0$ suffisamment grand pour que $D(0, R_0)$ contienne Γ_N . Appliquons alors une formule de Green dans $\Omega_N \cap D(0, R_0)$. On obtient

$$0 = \int_{\Omega_N \cap D(0, R_0)} \Delta U = \int_{R=R_0} \frac{\partial U}{\partial R} - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial U}{\partial n_{\Gamma_N}} = 2\pi R_0 \frac{\partial L_0(U)}{\partial R}.$$

Notons que, comme $d^\circ L_0(U) \leq 1$ (fonction au plus affine par rapport à $\ln(R)$), l'égalité ci-dessus nous donne en fait que $d^\circ L_0(U) = 0$ (constante par rapport à R). Cette fonction, de par sa définition ne dépend pas de φ . En posant $U' = U - L_0(U)$, on a donc $\Delta U' = 0$ et $\frac{\partial U'}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0$. En plus, vu le développement radial de U , on a $U' \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)$ et en particulier $\nabla U' \in L^2(\Omega_N)$. Choisissons un R_1 destiné à tendre vers l'infini, et intégrons sur $\Omega_N \cap D(0, R_1)$ l'équation de Laplace satisfaite par U' .

$$0 = - \int_{\Omega_N \cap D(0, R_1)} \Delta U' \bar{U}' = \int_{\Omega_N \cap D(0, R_1)} |\nabla U'|^2 + \int_{R=R_1} \bar{U}' \frac{\partial U'}{\partial R} = \underbrace{\int_{\Omega_N \cap D(0, R_1)} |\nabla U'|^2}_{\xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} \|\nabla U'\|_{L^2(\Omega_N)}^2} + \underbrace{\sum_{p=1}^{\infty} -p \|L_{-p}(U)\|_{L^2(S^1) R_1}^{-2p}}_{\xrightarrow{R_1 \rightarrow \infty} 0}$$

On en conclut que $\nabla U' = 0$ et comme $U' \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)$, on a finalement $U' = 0$ i.e. $U = L_0(U)$ avec $d^\circ L_0(U) = 0$. Nous allons maintenant nous servir de cela pour montrer que $u = 0$. Tout d'abord d'après les conditions de raccord on a $d^\circ \ell_0(u) = d^\circ \Xi_\star^\varepsilon L_0(U) = 0$ et $\ell_{-p}(u) = 0$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$. Grâce à la proposition 1.5.2 et au lemme 1.5.2, on en conclut que $u - \ell_0(u) \in \mathcal{V}_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. De cette manière u satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u + \bar{\omega}^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (1.8.1)$$

L'équation de Helmholtz ci-dessus vaut au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_\star)$. Comme $H_\star^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ d'après le lemme 1.2.2, les équations ci-dessus sont en fait satisfaites dans Ω tout entier. Par ailleurs il est classique que l'unique solution des équations (1.8.1) est 0 si bien qu'on a finalement $u = 0$. Enfin $U = L_0(U) = \ell_0(u) = 0$. Ceci conclut la preuve d'unicité. ■

1.8.2 Construction de profils

Pour construire une solution au problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$, nous allons passer par des fonctions intermédiaires qui seront appelées profils de champ proche ou de champ lointain. Chaque profil correspond à un comportement singulier différent : comportement au voisinage de 0 pour le champ lointain et comportement au voisinage de l'infini pour le champ proche. Par ailleurs, nous imposons à chacun de ces profils de satisfaire l'équation soit de Helmholtz (champ lointain) soit de Laplace (champ proche). Dans chaque cas nous définirons un profil à l'occasion d'un résultat d'existence et d'unicité.

Profils en champ lointain

Lemme 1.8.1.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a(\varphi) = a^+ e^{+i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathfrak{s}_{-p}\{a\} + \omega^2 \mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_{-p}\{a\}}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ \ell_{-p}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = a(\varphi). \end{array} \right.$$

La fonction $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ est appelée profil en champ lointain associé au couple $(-p, a(\varphi))$.

Preuve :

Unicité : On démontre que le problème homogène correspondant n'admet que 0 comme solution. Notons v une fonction satisfaisant les équations ci-dessus avec $a(\varphi) = 0$. Alors on a $v \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ avec $\ell_{-q}(v) = 0$ pour $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$ et $\ell_0(v) \in \mathbb{C}$. On en déduit alors $v - \ell_0(v) \in \mathcal{V}_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et donc $v \in H^1(\Omega)$. On a donc au final

$$v \in H^1(\Omega) \text{ avec } \Delta v + \omega^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_\star \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

Par densité de $H_\star^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ ces équations valent en fait dans Ω tout entier. On en tire $v = 0$.

Existence : Pour montrer l'existence remarquons d'abord que $\mathfrak{h}^{-p}[a] \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$. Par ailleurs $\mathfrak{h}^{-p}[a]$ satisfait les équations de l'énoncé sauf la condition d'onde sortante :

$$\Delta \mathfrak{h}^{-p}[a] + \omega^2 \mathfrak{h}^{-p}[a] = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \quad \ell_q(\mathfrak{h}^{-p}[a]) = \delta_q^{-p} a, \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \frac{\partial \mathfrak{h}^{-p}[a]}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \mathfrak{h}^{-p}[a] \neq 0 \text{ sur } \Gamma,$$

avec $\delta_q^{-p} = 1$ si $q = -p$ et $\delta_q^{-p} = 0$ sinon. Notons $\mathfrak{h}^{-p}[a] \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$. Introduisons alors v l'unique élément de $H^1(\Omega)$ satisfaisant

$$\Delta v + \omega^2 v = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v = - \left(\frac{\partial \mathfrak{h}^{-p}[a]}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \mathfrak{h}^{-p}[a] \right) \text{ sur } \Gamma.$$

Par régularité elliptique $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Il reste à poser $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = \mathfrak{h}^{-p}[a] + v$. ■

Il est possible de démontrer un résultat analogue à celui du lemme 1.8.1 pour des singularités du type de $\ln(r)$. Nous énonçons ce résultat sans en donner la preuve, car la démonstration ne nécessite que de très légères modifications de la démonstration du lemme 1.8.1.

Lemme 1.8.2.

Soit $a(r) = \alpha \ln(r)$, $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément $\mathfrak{s}_0\{a\} \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta \mathfrak{s}_0\{a\} + \omega^2 \mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_0\{a\}}{\partial n_r} + T_r \mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ d^\circ \{ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\})(r) - a(r) \} = 0. \end{cases}$$

La fonction $\mathfrak{s}_0\{a\}$ est appelée profil en champ lointain associé au couple $(0, a)$.

Avec les lemmes 1.8.1 et 1.8.2 nous avons construit, pour chaque $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et chaque fonction $a(r, \varphi)$ telle que $\Delta r^{-p} a(r, \varphi) = 0$, une solution de l'équation de Helmholtz $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ qui peut se décomposer comme

$$\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = \mathfrak{h}^{-p}[a] + \text{"partie régulière (ou variationnelle)"}$$

Pour résumer, chaque comportement singulier en 0 qu'une solution de l'équation de Helmholtz homogène est susceptible d'adopter, est représenté par une combinaison de profils. Notons que les $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ satisfont les identités suivantes

$$\begin{array}{cc} \text{Cas } p > 0 & \text{Cas } p = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = a \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0 \quad q > 0 \text{ et } q \neq p \\ \ell_{+q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) \neq 0 \quad q \geq 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \{ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) - a \} = 0 \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_0\{a\}) = 0 \quad q > 0 \\ \ell_{+q}(\mathfrak{s}_0\{a\}) \neq 0 \quad q > 0 \end{array} \right. \quad (1.8.2) \\ \\ d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0 & \end{array}$$

Dans la dernière ligne de ce récapitulatif, il faut entendre " $d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0$ " au sens où cet objet ne dépend pas de r (au travers d'un éventuel terme logarithmique). Enfin il semble possible de voir ces profils comme une généralisation de fonction de Green. En tout cas signalons que

$$\mathfrak{s}_0\{a\} = \alpha \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega r) + \text{une fonction } H^1(\Omega), \quad \text{pour } a(r) = \alpha \ln(r).$$

Rappelons que $H_0^{(1)}(\omega r)$ désigne la fonction de Hankel de première espèce qui avait été définie en sous-section 1.3.5 et qui est le noyau de Green sortant de l'équation de Helmholtz.

Résultats standard pour l'équation de Laplace en domaine non-borné

Pour construire des solutions de l'équation de Laplace avec une singularité bien déterminée au voisinage de l'infini, nous commençons par rappeler un résultat d'existence-unicité standard pour les problèmes au laplacien à l'extérieur d'un domaine borné. Nous introduisons l'espace

$$\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N) := \left\{ v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_N) \mid \|v\|_{\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)}^2 := \int_{\Omega_N} \frac{|v(\mathbf{x})|^2}{R \ln^2(R)} dR d\varphi + \int_{\Omega_N} |\nabla v(\mathbf{x})|^2 R dR d\varphi < \infty \right\}. \quad (1.8.3)$$

Cet espace ressemble un peu aux espaces à poids $\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$. On a en effet les inclusions remarquables suivantes,

$$\mathcal{W}_{-\delta}^1(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_\delta^1(\Omega_N) \quad \text{pour tout } \delta > 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{W}_0^1(\Omega_N) \subsetneq \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N) \subsetneq \mathcal{W}_0^0(\Omega_N).$$

Par ailleurs la fonction $\mathbf{1}_{\Omega_N}$ constante égale à 1 appartient à cet espace $\mathbf{1}_{\Omega_N} \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ tandis que les fonctions non-bornées $\ln(R)$ et $R^{|p|} e^{i p \varphi}$, $p \neq 0$ n'appartiennent pas à cet espace. Muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)}$, l'espace $\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ est un espace de Banach dont nous noterons le dual topologique $\mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. Dans la suite nous considérerons systématiquement des fonctionnelles appartenant à un sous-espace bien particulier de $\mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. Posons comme définition

$$\widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N) := \left\{ g \in L^1(\Omega_N) \text{ t.q. } \int_{\Omega_N} |g(\mathbf{x})|^2 R^3 \ln^2(R) dR d\varphi < \infty \right\}$$

L'espace $\widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N)$ s'injecte naturellement dans $\mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. En effet chaque élément $g \in \widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N)$ induit une fonctionnelle \tilde{g} définie par

$$\langle \tilde{g}, W \rangle_{\mathcal{W}'_{\log}, \mathcal{W}_{\log}} := \int_{\Omega_N} g \overline{W} \quad \forall W \in \mathcal{W}_{\log}.$$

Dans la suite nous identifierons g et \tilde{g} . Remarquons que $\mathcal{W}'_{-2-\delta}(\Omega_N) \subset \widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N)$ pour tout $\delta > 0$, et aussi que $\widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N) \subset L^1(\Omega_N)$. Voici un théorème d'existence unicité classique.

Proposition 1.8.2.

Soit $g \in \widetilde{\mathcal{W}}'_{\log}(\Omega_N)$, $h \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Il existe un V satisfaisant

$$V \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N) \text{ tel que } \Delta V = g \text{ dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial V}{\partial n_{\Gamma_N}} = h \text{ sur } \Gamma_N \text{ et } \int_{\Gamma_N} V = \mu$$

si et seulement si la condition suivante est satisfaite, $\int_{\Omega_N} g + \int_{\Gamma_N} h = 0$. En cas d'existence la solution V est unique et dépend continuellement des données : il existe $\kappa > 0$ indépendante de g, h, μ telle que

$$\|V\|_{\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)} + \|h\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} + |\mu| \right), \quad \text{avec } \|g\|_{\mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)} := \sup_{1=\|W\|_{\mathcal{W}_{\log}}} \left| \langle g, W \rangle_{\mathcal{W}'_{\log}, \mathcal{W}_{\log}} \right|.$$

La démonstration de ce résultat est basée sur une technique variationnelle. On peut en trouver la démonstration par exemple dans [91]. La condition nécessaire d'existence portant sur le second membre est souvent appelée "condition de compatibilité".

Par la suite nous aurons également besoin de résultats de régularité pour les solutions d'équations de Laplace pour un second membre avec un support non borné. Le résultat suivant est directement calqué d'un lemme de [110].

Proposition 1.8.3.

Soit $V \in \mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)$ tel que $\Delta V \in \mathcal{W}'_{\alpha-2}(\Omega_N)$ et $\partial n_{\Gamma_N} V \in H^{m+1/2}(\Gamma_N)$, pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)$ et il existe $\kappa > 0$ indépendant de V tel que

$$\|V\|_{\mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|\Delta V\|_{\mathcal{W}'_{\alpha-2}(\Omega_N)} + \left\| \frac{\partial V}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{H^{m+1/2}(\Gamma_N)} + \|V\|_{\mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)} \right).$$

Preuve :

Soit $R_0 > 0$ assez grand pour que $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(0, R_0) \subset \Omega_N$. D'après les résultats standard de régularité elliptique, on sait déjà que $V \in H^{m+2}_{\text{loc}}(\Omega_N)$ et on a une estimation *a priori* au voisinage de Γ_N dans laquelle intervient la trace de la dérivée normale de V . Il suffit donc de savoir majorer $\|V\|_{\mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)}$ sur $\Omega_N \setminus \overline{D}(0, 2R_0)$. Considérons deux couronnes

$$\mathcal{O}_1 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid 2R_0 < |\mathbf{x}| < 5R_0 \} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_2 = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid R_0 < |\mathbf{x}| < 6R_0 \},$$

de sorte qu'on a $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$. Notons également que les deux familles d'ouverts $(2^k \mathcal{O}_i)_{k \in \mathbb{N}}$, $i = 1, 2$ recouvrent chacune $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(0, 2R_0)$, et que pour i donné chaque point \mathbf{x} n'est contenu au plus que dans trois ouverts de la forme $2^k \mathcal{O}_i$. D'après des estimations elliptiques locales (cf [2]), et puisqu'il y a équivalence entre les normes de Sobolev et les normes à poids sur \mathcal{O}_i , $i = 1, 2$, il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que

$$\|W\|_{\mathcal{W}_\alpha^{m+2}(\mathcal{O}_1)}^2 \leq \kappa_0 \left(\|\Delta W\|_{\mathcal{W}_{\alpha-2}^m(\mathcal{O}_2)}^2 + \|W\|_{\mathcal{W}_\alpha^m(\mathcal{O}_2)}^2 \right), \quad \forall W \in H^{m+2}(\mathcal{O}_2).$$

A présent en appliquant cette inégalité à $\mathbf{x} \mapsto V(2^k \mathbf{x})$ et avec un changement de variable, on obtient l'inégalité

$$\|V\|_{\mathcal{W}_\alpha^{m+2}(2^k \mathcal{O}_1)}^2 \leq \kappa_0 \left(\|\Delta V\|_{\mathcal{W}_{\alpha-2}^m(2^k \mathcal{O}_2)}^2 + \|V\|_{\mathcal{W}_\alpha^m(2^k \mathcal{O}_2)}^2 \right), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

valable avec la même constante κ_0 qui est donc indépendante de k . Il ne reste plus qu'à sommer ces inégalités pour $k \in \mathbb{N}$. ■

Pour un α arbitraire pas forcément négatif, le résultat suivant est obtenu en appliquant en cascade la proposition 1.8.3. Celui-ci est particulièrement utile dans le cas où $\Delta V = 0$.

Proposition 1.8.4.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{W}_\alpha^1(\Omega_N)$ tel que $\Delta V \in \mathcal{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ et $\partial n_{\Gamma_N} V \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$. Alors $V \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$.

Profils en champ proche

Nous nous servons maintenant du résultat d'existence-unicité 1.8.2 et du résultat de régularité 1.8.4, pour construire des profils en champ proche très réguliers et dont le comportement en l'infini est bien déterminé.

Lemme 1.8.3.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a(\varphi) = a^+ e^{i|\varphi|} + a^- e^{-i|\varphi|}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément $\mathfrak{S}_p\{a\} \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \frac{\partial \mathfrak{S}_p\{a\}}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_q(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \\ L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a(\varphi). \end{array} \right.$$

La fonction $\mathfrak{S}_p\{a\}$ est appelée profil en champ proche associé au couple (p, a) .

Preuve :

Unicité : Considérons une fonction $V \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant le problème homogène

$$\Delta V = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial V}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \text{et}, \quad L_q(V) = 0, \quad q \in \llbracket 0, p \rrbracket.$$

Les équations sur les $L_q(V)$ permettent de montrer que $V \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$. D'après la proposition 1.8.2, la fonction V est une constante et puisque $V \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)$, cette constante ne peut être que 0. Ceci démontre l'unicité du profil $\mathfrak{S}_p\{a\}$.

Existence : Considérons la fonction $V'(R, \varphi) = a(\varphi) R^p$. Alors vu le $a(\varphi)$ considéré par l'énoncé, on a clairement $\Delta V' = 0$ et $V' \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ avec $L_k(V') = 0$ si $k \neq p$ et $L_k(V') = a(\varphi)$ si $k = p$. Considérons un R_0 tel que $\mathbb{R}^2 \setminus D(0, R_0) \subset \Omega_N$. En appliquant une formule de Green il vient

$$0 = - \int_{\Omega_N \cap D(0, R_0)} \Delta V' = - \int_{R=R_0} \frac{\partial V'}{\partial R} + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial V'}{\partial n_{\Gamma_N}} = \int_{\Gamma_N} \frac{\partial V'}{\partial n_{\Gamma_N}}$$

Ainsi $\partial_{n_{\Gamma_N}} V'$ satisfait la condition de compatibilité nécessaire à l'application de la proposition 1.8.2. Au lieu de construire un V solution des équations de l'énoncé, nous recherchons $W' = V - V'$. Définissons W' comme l'unique fonction satisfaisant

$$W' \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N), \quad \Delta W' = 0, \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial W'}{\partial n_{\Gamma_N}} = -\frac{\partial V'}{\partial n_{\Gamma_N}}, \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_N} W' = 0.$$

Puisque $\partial_{n_{\Gamma_N}} V'$ satisfait la condition de compatibilité, ce problème admet bien une solution unique d'après 1.8.2 (la constante est fixée grâce à la dernière condition). Comme $\Delta W' = 0$ au voisinage de l'infini et $\partial_{n_{\Gamma_N}} W' \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$, la proposition 1.8.4 nous permet d'en conclure que $W' - L_0(W') \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)$. Notons par ailleurs que $d^\circ L_0(W') = 0$ car $W' \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$. Alors on peut appliquer la proposition 1.6.2 à W' et on voit que $L_q(W') = 0$ dès que $q > 0$. Finalement en définissant $V = V' + W' - L_0(W')$ on obtient le résultat d'existence annoncé. ■

Avec le lemme 1.8.3, nous n'avons pas défini de profil associé au comportement $\ln(R)$ au voisinage de l'infini. En effet ceci est impossible à cause de la condition de Neumann homogène. Pour les profils en champ proche $\mathfrak{S}_p\{a\}$ nous pouvons énoncer les identités suivantes comme dans le cas du champ lointain

Pour $p > 0$

$$\begin{cases} L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a(\varphi) \\ L_{+q}(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0 & q > 0 \text{ et } q \neq p \\ L_{-q}(\mathfrak{S}_p\{a\}) \neq 0 & q > 0 \end{cases}$$

1.8.3 Existence de la solution

Proposition 1.8.5.

Le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admet un couple solution $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$.

Preuve :

Nous allons nous servir des profils en champ lointain et proche pour simplifier le problème $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Effectuons un changement d'inconnue : au lieu de rechercher le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ solution de ce problème, nous chercherons le couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ défini par

$$\begin{aligned} v_n^\varepsilon &= u_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{\ell_{-p}(u_n^\varepsilon)\} - \delta_n^0 u^0 = u_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)\} - \delta_n^0 u^0 \\ V_n^\varepsilon &= U_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p\{L_p(U_n^\varepsilon)\} - \ell_0\left(\sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{\ell_{-p}(u_n^\varepsilon)\} + \delta_n^0 u^0\right) \\ &= U_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p\left\{\ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) + \mathbf{c}_{\log}^p \ln(\varepsilon) \ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)\right\} \\ &\quad - \sum_{p=1}^n \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)\}) - \delta_n^0 \ell_0(u^0). \end{aligned} \tag{1.8.4}$$

Signalons que dans la définition de V_n^ε , le terme de la forme $\ell_0(\dots)$ est de degré 0 i.e. est dépendant de ε mais indépendant de \mathbb{R} et φ . Le champ incident u^0 a été défini par (1.2.1), il s'agit de la solution du problème sans obstacle. D'après les équations de raccord v_n^ε doit satisfaire

$$v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega), \quad \Delta v_n^\varepsilon + \omega^2 v_n^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \quad \frac{\partial v_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma \quad \text{et} \quad \ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Ci-dessus l'équation de Helmholtz vaut au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_\star)$, et l'équation sur Γ vaut dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. D'après le lemme 1.5.2, il suffit de rechercher v_n^ε dans $\mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. En résumé le couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ doit satisfaire par définition

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta v_n^\varepsilon + \omega^2 v_n^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial v_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_0(v_n^\varepsilon) = \Xi_\star^\varepsilon L_0(V_n^\varepsilon) \\ L_p(V_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta V_n^\varepsilon = -\omega^2 U_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \frac{\partial V_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

Si nous arrivons à démontrer l'existence d'un couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ satisfaisant ces équations, alors l'existence de l'unique $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ satisfaisant $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ s'ensuivra automatiquement. Nous nous intéressons en premier lieu au champ proche. Le lemme 1.8.4 que nous démontrerons juste après, nous permet alors d'affirmer l'existence d'un unique $W_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$

$$\Delta W_n^\varepsilon = -\omega^2 U_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial W_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \int_{\Gamma_N} W_n^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad L_p(W_n^\varepsilon) = 0 \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket.$$

Il reste à construire un v_n^ε convenable en veillant à ce que la dernière condition de raccord soit bien satisfaite. On choisit alors de poser

$$v_n^\varepsilon := \mathfrak{s}_0 \left\{ \Xi_\star^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon) \right\}.$$

Cette définition jointe aux identités (1.8.2) pour les profils en champ lointain fournit d° $\left\{ \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_\star^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon) \right\} = 0$. Pour satisfaire la dernière équation de raccord nous posons donc

$$\alpha := \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_\star^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon), \quad \text{et} \quad V_n^\varepsilon := W_n^\varepsilon + \alpha.$$

Ceci conclut la preuve d'existence. ■

Lemme 1.8.4.

Soit W_0, W_1, \dots, W_{k-1} une suite de fonctions telles que pour $l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ on a $\Delta W_l = -\omega^2 W_{l-2}$ et $W_l \in \mathcal{W}_{l+1/2}^\infty(\Omega_N)$. Alors il existe un $W_k \in \mathcal{W}_{k+1/2}^\infty(\Omega_N)$ tel que

$$\Delta W_k = -\omega^2 W_{k-2} \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial W_k}{\partial n_{\Gamma_N}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \int_{\Gamma_N} W_k = 0 \quad \text{et} \quad L_p(W_k) = 0, \quad p \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

Preuve :

Unicité : Pour l'unicité, supposons que W_k soit une solution du problème ci-dessus avec $W_{k-2} = 0$. Puisque $L_p(W_k) = 0$ pour $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $W_k \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ d'après les propositions 1.6.2 et 1.6.3. La condition de Neumann entraîne que W_k ne peut admettre de terme logarithmique dans sa décomposition par séparation de variables. On en tire $W_k \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$. La proposition 1.8.2 permet alors d'en déduire que

$W_k = 0$.

Existence : La difficulté pour montrer l'existence d'une solution à ce problème réside dans le fait que $W_{k-2} \notin \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. Or on sait d'après la proposition 1.6.3 que le second membre se décompose comme

$$W_{k-2} = g_1 + g_2 \quad \text{avec} \quad g_1 = \sum_{p \geq -k-1/2} \sum_{q=0}^{k-2} R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(W_{k-2-q})] \quad \text{et} \quad g_2 \in \mathcal{W}'_{-5/2}(\Omega_N),$$

en notant que $k \geq 2$ car nous supposons ici $W_{k-2} \neq 0$ (sinon le problème devient trivial). Par ailleurs un calcul simple montre que $\mathcal{W}'_{-5/2}(\Omega_N) \subset \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. Nous résolvons explicitement la partie des équations de champ proche associée à g_1 . Nous nous servons pour ceci de l'identité (1.6.3) et on obtient

$$\text{Pour } W'_k = \sum_{p \geq -k-1/2} \sum_{q=2}^k R^{p+q} \mathfrak{h}_{p+q}^p [L_p(W_{n-q})] \quad \text{on a} \quad \Delta W'_k = -\omega^2 g_1 \quad \text{dans } \Omega_N.$$

Clairement on a $W'_k \in \mathcal{W}'_{k+1/2}(\Omega_N)$. Par contre $\partial_{n_{\Gamma_N}} W'_k$ est *a priori* quelconque et non nul. A présent nous voudrions résoudre variationnellement la partie des équations de champ proche associée à g_2 . Nous devons cependant prendre garde à la condition de compatibilité intervenant dans la proposition 1.8.2. En introduisant la constante

$$\beta := -\omega^2 \int_{\Omega_N} g_2 - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial W'_k}{\partial n_{\Gamma_N}},$$

il existe une unique fonction $W''_k \in \mathcal{W}''_{\log}(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\Delta W''_k = -\omega^2 g_2 \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \frac{\partial W''_k}{\partial n_{\Gamma_N}} = -\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \left(\frac{\beta}{2\pi} \ln(R) + W'_k \right) \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_N} W''_k = 0.$$

La condition de compatibilité est bien respectée grâce au choix que nous avons fait pour β . En effet, en se souvenant que $\Delta \ln(R) = 0$ et en considérant un R_1 assez grand, il vient

$$-\int_{\Gamma_N} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \left(\frac{\beta}{2\pi} \ln(R) \right) = \frac{\beta}{2\pi} \left\{ \int_{\Omega_N \cap D(0, R_1)} \Delta \ln(R) - \int_{R=R_1} \frac{\partial \ln(R)}{\partial R} \right\} = -\beta = \omega^2 \int_{\Omega_N} g_2 + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial W'_k}{\partial n_{\Gamma_N}}.$$

Comme $W''_k \in \mathcal{W}''_{\log}(\Omega_N) \subset \mathcal{W}''_{1/2}(\Omega_N)$ et $\Delta W''_k = -\omega^2 g_2 \in \mathcal{W}'_{-5/2}(\Omega_N) \subset \mathcal{W}'_{1/2-2}(\Omega_N)$ et $\partial_{n_{\Gamma_N}} W''_k = 0$, le lemme 1.8.4 nous permet d'affirmer que $W''_k \in \mathcal{W}''_{1/2}(\Omega_N)$. Nous posons alors

$$W_k := W'_k + W''_k + \frac{\beta}{2\pi} \ln(R).$$

■

1.8.4 Validation de l'ansatz

Nous arrivons à la toute dernière partie de cette analyse asymptotique. Après avoir montré que les problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ étaient bien posés et ainsi permettaient de définir par récurrence les termes $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$, nous devons finalement montrer que ce procédé fournit des fonctions qui se mettent bien sous la forme

$$u_n^\varepsilon = \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m \varepsilon u_n^{[m]} \quad \text{et} \quad U_n^\varepsilon = \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m \varepsilon U_n^{[m]} \quad (1.8.5)$$

On montre ceci par récurrence. Commençons par nous assurer que le premier terme $(u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ admet une dépendance polynomiale vis-à-vis de $\ln \varepsilon$. En fait on constate que $(u^0, u^0(0))$ est solution du problème $\mathcal{P}_0^\varepsilon$ de sorte que par unicité

$$u_0^\varepsilon = u^0 \quad \text{et} \quad U_0^\varepsilon = u^0(0).$$

Il faut bien comprendre " $u^0(0)$ " comme la fonction constante égale à la valeur du champ incident pris en $x = 0$. Ceci corrobore une intuition que nous avons formé dans la première partie de cette étude : le premier terme du développement n'est autre que la solution du problème sans obstacle.

A présent supposons que $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon)$ soit de la forme (1.8.5), alors par linéarité de ℓ_p , L_p , \mathfrak{s}_p et de \mathfrak{S}_p , il semble clair d'après (1.8.4) que $u_n^\varepsilon - v_n^\varepsilon$ et $U_n^\varepsilon - V_n^\varepsilon$ admettent aussi une dépendance polynomiale par rapport à $\ln \varepsilon$.

Il reste à montrer cette propriété pour v_n^ε et V_n^ε . Pour construire ces deux fonctions, nous avons eu besoin du lemme 1.8.4 pour construire une fonction intermédiaire W_n^ε , et nous avons utilisé le fait que U_{n-2}^ε faisait partie d'une famille de solutions des équations de Laplace emboîtées. Or il paraît assez immédiat que si $U_0^\varepsilon, U_1^\varepsilon, \dots, U_{n-1}^\varepsilon$ forment une famille de solutions des équations de Laplace emboîtées, il en va de même de $U_0^{[m]}, U_1^{[m]}, \dots, U_{n-1}^{[m]}$ pour chaque m . Ainsi en appliquant le lemme 1.8.4 avec $U_{n-2}^{[m]}$ en second membre au lieu de U_{n-2}^ε , on en tire que W_n^ε est de la forme

$$W_n^\varepsilon = W_n^{[0]} + W_n^{[1]} \ln \varepsilon + \dots + W_n^{[m]} \ln^m \varepsilon.$$

Par linéarité de ℓ_0 , \mathfrak{s}_0 et L_0 il devient alors immédiat que v_n^ε et V_n^ε admettent aussi une dépendance polynomiale vis-à-vis de $\ln \varepsilon$. Ceci termine de valider notre ansatz et conclut cette première analyse asymptotique.

1.8.5 Conclusion finale

Pour résumer, on définit chaque couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ comme l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Alors par construction, d'après la proposition 1.7.2, les équations de raccord (1.7.1) sont satisfaites. D'après les propositions 1.5.1, 1.7.1 et le lemme 1.7.2, les conditions (1.4.12) sont satisfaites. Suivant les arguments présentés au §1.4.5, ceci prouve que la condition (1.4.6) est satisfaite et permet d'appliquer le lemme 1.4.1. Par conséquent nous avons construit un développement raccordé de u^ε .

CHAPITRE 2

Principes de calcul généraux pour la méthode des développements raccordés

Introduction

Dans ce chapitre nous aurons des considérations un peu plus générales qu'au chapitre précédent. Nous désirons exprimer une partie de ce qui est commun aux études des chapitres ultérieurs du point de vue de l'analyse asymptotique. Ces diverses études, même si elles sont différentes, peuvent se structurer de la même manière et possèdent de nombreuses ressemblances. Les résultats de ce chapitre permettront d'éviter de fortes redondances au cours du reste de la thèse.

Proposer un cadre un peu général qui regroupera toutes les analyses que nous effectuerons est une manière d'écrire une seule fois les choses, et de compacter les notations. Le résultat que nous utiliserons surtout en pratique est le théorème 2.6.1. Celui-ci allégera grandement les calculs d'estimation d'erreur pour les chapitres suivants. Avec ce résultat, nous pourrions d'emblée proposer une famille de problèmes caractérisant les termes d'un développement raccordé. Il restera cependant à montrer que ces problèmes sont bien posés, ce que nous ferons dans chaque cas séparément. Pour donner un ordre d'idée, si nous avions eu à disposition le contenu du chapitre 2 lors du chapitre 1, nous aurions pu nous passer de présenter les sections 1.5, 1.6, 1.7 et une grosse partie de la section 1.4.

Ce chapitre provient notamment d'une lecture minutieuse de la thèse de S. Tordeux [109]. Nous avons constaté qu'une part non négligeable des calculs contenus dans celle-ci pouvait être adaptée à d'autres situations, telles que celle d'un petit obstacle ou d'un fil mince. Par ailleurs on peut relever des similitudes entre les analyses présentées dans [114], [67], [109], [113], [87]. Dans [113] et [87], il est fait un usage intensif de concepts issus des problèmes de singularité géométrique tels que les coins rentrants.

Nous commencerons par décrire les géométries et les problèmes auxquels nous nous intéresserons. Nous leur imposerons de satisfaire des hypothèses précises. Il s'agira de problèmes bien posés dans une géométrie comportant un obstacle petit ou fin. La solution notée u^ε du problème considéré dépendra d'un petit paramètre ε et nous en chercherons le développement. Puis dans une deuxième section nous postulons un développement pour u^ε . Il s'agira d'une conjecture issue de l'expérience et nécessitant une validation par estimation d'erreur.

Entre les sections 2.3 et 2.6, nous mènerons une étude permettant de fournir *partiellement* une telle estimation d'erreur : le résultat principal sera le théorème 2.6.1. Au cours de cette étude nous aurons dérivé des équations sur les termes du développement de u^ε . Nous aurons également imposé une identité

appelée *principe de raccord*, et l'objet de la section 2.7 sera d'étudier plus en détail ce principe. Enfin la dernière section décrira comment, dans les chapitres à venir, nous procéderons pour définir les termes des développements asymptotiques.

2.1 Les hypothèses de départ

Dans cette section nous détaillons la géométrie et les problèmes qui rentrent dans le cadre de l'analyse que nous proposons. Il s'agit d'un contexte général auquel devra correspondre chacune des études que nous effectuerons dans les prochains chapitres.

2.1.1 Définition et paramétrage de la géométrie

Nous nous placerons dans l'espace cartésien \mathbb{R}^N . Dans la suite nous considérerons un sous-ensemble de \mathbb{R}^N noté I correspondant à la géométrie limite d'un obstacle petit ou fin comme un fil. Nous définissons I comme une variété compacte de classe \mathcal{C}^∞ dont la dimension est $\leq N - 1$ (éventuellement de dimension strictement inférieure) vérifiant l'hypothèse suivante.

Hypothèse H0 :

Il existe une variété compacte sans bord notée \mathcal{S} , de classe \mathcal{C}^∞ , de dimension $N - 1$ et homotope à I , et un paramétrage continu $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N$ tel que ϕ soit un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}) \times \mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus I$ et $\phi(\{0\} \times \mathcal{S}) = I$. On suppose de plus qu'il existe deux fonctions strictement croissantes $\phi_-, \phi_+ : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ telles que

$$\phi_-(r) \leq \text{Max} \left\{ \sup_{\sigma \in \mathcal{S}} \inf_{x \in I} |\phi(r, \sigma) - x| ; \sup_{x \in I} \inf_{\sigma \in \mathcal{S}} |\phi(r, \sigma) - x| \right\} \leq \phi_+(r), \quad \text{et} \quad \phi_{\pm}(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Dans l'énoncé de l'hypothèse ci-dessus $||$ désigne la distance euclidienne dans \mathbb{R}^N . Cette hypothèse impose précisément que les surfaces d'équation $r = \delta$ convergent vers I lorsque $\delta \rightarrow 0$ au sens de la métrique de Hausdorff. Intuitivement cela signifie que ces surfaces se resserrent autour de I . En pratique l'ensemble \mathcal{S} sera une surface de forme simple, un cercle ou une sphère, de sorte que dans chaque chapitre ultérieur nous aurons à disposition et fixé une fois pour toute un paramétrage $\sigma(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1})$ de la surface \mathcal{S} . Par la suite σ désignera systématiquement un point de \mathcal{S} . Par ailleurs nous noterons $d\sigma$ la mesure de surface sur \mathcal{S} .

Exemple

Dans le cas d'un petit obstacle comme au chapitre 1, nous sommes amenés à considérer $I = \{0\}$ et $\mathcal{S} = S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Dans cette situation nous avons noté σ un point courant de S^1 que nous avons parfois confondu avec sa coordonnée angulaire φ qui joue le rôle de ϑ_1 . Si (r, φ) désigne les coordonnées polaires de \mathbb{R}^2 alors la mesure sur $\mathcal{S} = S^1$ est $d\sigma = r d\varphi = d\varphi$ ($r = 1$ sur S^1) et on a par ailleurs $\phi(r, \sigma) = r \cdot \sigma$.

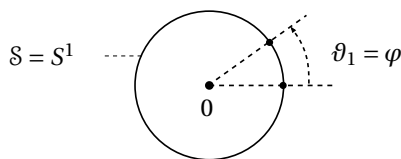


Fig.11 Un exemple de paramétrage en 2D

Remarque : Nous n'imposons pas que ϕ soit injectif sur I , ce qui autorise par exemple que la dimension de I en tant que variété soit inférieure à celle de \mathcal{S} . C'est typiquement le cas d'un fil comme au chapitre 6 pour lequel la dimension de I est 1 et la dimension de \mathcal{S} est 2.

Le problème que nous étudierons sera posé dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^∞ , qui contient une surface notée Γ_ε qui converge vers I . Pour donner la définition précise de Γ_ε , nous introduisons d'abord un "obstacle normalisé" défini de la manière suivante. Soit $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow]0, \infty[$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathcal{S} . Par souci de simplification on supposera que $\Phi(\sigma) < 1$ pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$. Nous posons,

$$\Omega_N := \{ (R, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \mid R > \Phi(\sigma) \} \quad \text{et} \quad \Gamma_N := \{ (R, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \mid R = \Phi(\sigma) \}.$$

Lorsque nous calculerons avec des objets définis dans Ω_N , nous utiliserons les coordonnées (R, σ) . Nous introduisons à présent un opérateur de dilatation et son inverse qui peuvent être vus comme des changements d'échelle (ou "scaling") ou des changements de variable,

$$\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{défini par} \quad \Xi^\varepsilon(R, \sigma) := \phi(\varepsilon R, \sigma) \quad \text{et} \quad \Xi_*^\varepsilon v := v \circ \Xi^{\varepsilon, -1}.$$

$$\Xi^{\varepsilon, -1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \quad \text{défini par} \quad \Xi^{\varepsilon, -1} \circ \phi(r, \sigma) := (r/\varepsilon, \sigma) \quad \text{et} \quad \Xi_*^{\varepsilon, -1} v := v \circ \Xi^\varepsilon,$$

L'opérateur Ξ_*^ε transforme une fonction définie dans les variables (R, σ) en une fonction définie dans les variables (r, σ) . Clairement $(\Xi^\varepsilon)^{-1} = \Xi^{\varepsilon, -1}$ et $(\Xi_*^\varepsilon)^{-1} = \Xi_*^{\varepsilon, -1}$. Nous définissons alors Γ_ε par $\Gamma_\varepsilon := \Xi^\varepsilon(\Gamma_N)$ et noterons Ω_ε l'ensemble des points extérieurs à Γ_ε contenus dans Ω . En reformulant autrement ces définitions

$$\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \{ \phi(r, \sigma) \mid 0 \leq r \leq \varepsilon \Phi(\sigma), \sigma \in \mathcal{S} \} \quad \text{et} \quad \Gamma_\varepsilon := \{ \phi(r, \sigma) \mid r = \varepsilon \Phi(\sigma), \sigma \in \mathcal{S} \}.$$

Remarquons que Γ_ε se resserre autour de I i.e. $\Gamma_\varepsilon \rightarrow I$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, et $\Omega_\varepsilon \rightarrow \Omega \setminus I$. En géométrie non normalisée, c'est-à-dire dans Ω , nous calculerons avec les coordonnées (r, σ) . Nous noterons par la suite

$$\Omega_\star := \Omega \setminus I \quad \text{et également} \quad \Gamma := \partial\Omega = \partial\Omega_\varepsilon \setminus \Gamma_\varepsilon.$$

Exemple

Cette situation se présente par exemple lorsque l'on paramétrise \mathbb{R}^2 par des coordonnées polaires (r, φ) . Dans ce cas $I = \{0\}$, le point de coordonnées $(0, \varphi)$ est simplement l'origine et ce quel que soit φ . Si on s'intéresse à la diffraction acoustique par un petit obstacle en deux dimensions, on posera $\mathcal{S} = S^1$ et on utilisera les coordonnées polaires $\mathbf{x} = r\sigma$ avec σ un point de S^1 . La frontière "effective" Γ_ε du petit obstacle aura pour équation $(\Gamma_\varepsilon) : r = \varepsilon\Phi(\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ et si Ω est un disque suffisamment grand, le domaine dans lequel on posera le problème sera donc $\Omega_\varepsilon = \Omega \cap \{ \mathbf{x}(r, \varphi) \mid r > \varepsilon\Phi(\varphi) \}$.

2.1.2 Espaces de Sobolev et espaces à poids

Dans toute la suite, étant donnée une variété Σ de classe \mathcal{C}^∞ et un entier p , $H^p(\Sigma)$ désignera l'espace de Sobolev d'ordre p standard sur cette variété. Par définition il s'agit des fonctions $v \in L^2(\Sigma)$ telles que $\nabla^k v \in L^2(\Sigma)$ où $\nabla^k v$ désigne la dérivée covariante d'ordre k de v . Au cours de la thèse nous nous servirons ponctuellement de certains concepts de géométrie différentielle. Nous renvoyons à [44] pour un exposé succinct concernant la dérivée covariante et à [38, 116, 81] pour un exposé plus détaillé. Cette définition des espaces de Sobolev vaut également lorsque nous considérerons des champs de vecteur sur Σ plutôt que des fonctions. Précisons que lorsque $\Sigma = \mathbb{R}^N$ muni de la métrique cartésienne, la dérivée covariante $\nabla^k v$ n'est autre que la différentielle d'ordre k de v . L'espace de Sobolev $H^p(\Sigma)$ sera muni de la norme $\|v\|_{H^p(\Sigma)}^2 = \|v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Sigma)}^2 + \dots + \|\nabla^p v\|_{L^2(\Sigma)}^2$ sauf si mention explicite est faite d'une autre

norme comme en section 3.6 et en section 7.6 pour les normes à considérer sur $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$.

La démarche qui suit étant inspirée du chapitre 1, nous serons également amenés à utiliser des espaces à poids. Nous présentons ici une définition adaptée à notre géométrie. En revenant au paramétrage ϕ intervenant dans l'hypothèse **H1**, pour un ouvert $\omega \subset \Omega$ on définit

$$\mathcal{V}_\alpha^k(\omega) := \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\omega \setminus I) \text{ t.q. } \|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\omega)}^2 := \sum_{\beta+\gamma \leq k} \int_{\phi^{-1}(\omega)} |(r\partial_r)^\beta \nabla_\sigma^\gamma (v \circ \phi)|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\sigma}{r} < \infty \right\}. \quad (2.1.1)$$

Ci-dessus $d\sigma$ désigne la mesure de surface sur \mathcal{S} et ∇_σ^γ la dérivée covariante sur \mathcal{S} d'ordre γ . Les espaces \mathcal{V}_α^k coïncident avec les espaces de Sobolev H^k standard sauf au voisinage de I où on prescrit un comportement donné à l'aide d'un poids. On définit également

$$\mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$$

Soit v une fonction définie sur Ω_\star telle que $v \circ \phi(r, \sigma) = r^\lambda w(\sigma)$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, alors $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ si et seulement si $\lambda > \alpha$, et ce quel que soit $k \in \mathbb{N}$ (car nous avons supposé $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$). Ainsi, dire que $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$, c'est dire que " v se comporte au pire comme r^α au voisinage de I ". Notons que si $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors $(r\partial_r)^\beta v \in \mathcal{V}_\alpha^{k-\beta}(\Omega)$ et $\nabla_\sigma^\gamma v \in \mathcal{V}_\alpha^{k-|\gamma|}(\Omega)$. Par ailleurs, encore si $v \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors $r^\lambda v \in \mathcal{V}_{\alpha+\lambda}^k(\Omega)$ mais en revanche si $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ on a encore $v(w \circ \phi^{-1}) \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$.

2.1.3 Problème considéré

Le problème auquel nous nous intéresserons sera posé dans le domaine Ω_ε . Nous considérerons un opérateur différentiel A d'ordre m sur Ω_ε dont les coefficients sont des fonctions \mathcal{C}^∞ définis dans \mathbb{R}^N . La solution à notre problème sera alors cherchée dans l'espace de Sobolev $H^m(\Omega_\varepsilon)$.

Nous considérons un opérateur C continu de $H^m(\Omega_\varepsilon)$ dans $L^2(\Gamma)$ que nous utiliserons pour exprimer une condition aux limites sur le bord Γ . Pour les conditions aux limites sur Γ_ε , nous considérerons un espace $\mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon)$ tel que $\mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon) = H^s(\Gamma_\varepsilon)$ pour un certain $s \in \mathbb{R}$, et B désignera un opérateur continu de $H^m(\Omega_\varepsilon)$ dans $\mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon)$. Les opérateurs B et C seront des traces i.e. nous imposons que $Bv = 0$ dès que $v = 0$ dans un voisinage de Γ_ε , et de même $Cv = 0$ dès que $v = 0$ dans un voisinage de Γ .

L'opérateur B correspondra à une condition imposée sur Γ_ε qui pourra être une condition de Dirichlet ou de Neumann par exemple. L'opérateur C correspondra à une condition de Dirichlet, de Neumann, ou dans le contexte applicatif qui nous intéresse la condition de rayonnement de Sommerfeld.

Nous supposerons donné un terme source qui sera une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact strictement inclus dans Ω (quitte à choisir un rayon un peu plus grand pour Ω) et tel que $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. Ce problème que nous noterons $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ s'écrira

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^m(\Omega_\varepsilon) \text{ satisfaisant} \\ Au^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ Bu^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ Cu^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (2.1.2)$$

Ces équations valent respectivement dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$, $\mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon)$ et $L^2(\Gamma)$. Nous n'imposons pas de source sur Γ_ε pour esquiver des difficultés techniques qui n'apparaissent pas fondamentales, tout au moins en ce qui concerne les fils et les petits obstacles. Cependant une étude explicite d'un problème d'acoustique avec condition de Neumann *non-homogène* autour d'un petit obstacle est disponible dans [25].

Exemple

Dans le cas où nous étudions le problème de la diffraction acoustique par un petit obstacle en régime harmonique on choisit $A = \Delta + \omega^2$ où ω représente le nombre d'onde associé au problème que l'on modélise. La solution sera cherchée dans $H^2(\Omega_\varepsilon)$. Si l'on impose une condition de Neumann, on aura alors $Bu = n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u$ où n_{Γ_ε} désigne la normale sortante au petit obstacle. Sur Γ on imposera la condition de Sommerfeld. Il s'agit alors d'un problème bien posé.

Nous serons amenés à étudier le problème ci-dessus dans un espace de Sobolev plus grand que $H^m(\Omega_\varepsilon)$. Cet espace sera noté $\mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)$. On a donc $\mathcal{H}(\Omega_\varepsilon) = H^s(\Omega_\varepsilon)$ pour un $s \leq m$. Si $\omega \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε suffisamment petit, nous noterons $\mathcal{H}(\omega) = H^s(\omega)$. Par ailleurs signalons que $\Xi^{\varepsilon, -1}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de Γ_ε dans Γ_N de sorte que $\Xi_*^{\varepsilon, -1} \mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon) = \mathcal{K}(\Xi^{\varepsilon, -1}(\Gamma_\varepsilon)) = \mathcal{K}(\Gamma_N)$. Nous considérons pour la suite la norme

$$\| \cdot \|_{\mathcal{K}(\Gamma_N)} := \| \cdot \|_{H^s(\Gamma_N)} \quad \text{où } s \text{ est tel que } \mathcal{K}(\Gamma_\varepsilon) = H^s(\Gamma_\varepsilon).$$

Nous supposons que le problème \mathcal{P}^ε est bien posé et que la solution dépend continuellement des données. Ceci fait partie de l'hypothèse de stabilité suivante.

Hypothèse de Stabilité H1 :

Le problème (\mathcal{P}^ε) est bien posé. De plus il existe $\kappa > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$ indépendants de ε tels que pour ε suffisamment petit et pour tout $v \in H^m(\Omega_\varepsilon)$,

$$\| v \|_{\mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^\eta \left(\| Av \|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} + \| \Xi_*^{\varepsilon, -1} Bv \|_{\mathcal{K}(\Gamma_N)} + \| Cv \|_{L^2(\Gamma)} \right), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ici nous supposons seulement que η est un réel qui peut être négatif. Une hypothèse de stabilité usuelle postulerait $\eta \geq 0$, ce qui signifierait alors que pour des données bornées, la solution du problème reste bornée comme lorsqu'on étudie un problème coercif avec une constante de coercivité indépendante de ε . Notre hypothèse est donc moins contraignante qu'une stabilité usuelle.

Exemple

Dans le cas étudié au chapitre 1 bien que le problème ne soit pas coercif, on peut cependant satisfaire la condition de stabilité énoncée avec un $\eta < 0$ arbitraire. Ceci correspond à la proposition 1.4.1 et au théorème 1.2.1. Avec ces deux résultats on obtient certes une estimation de stabilité en norme $\| \cdot \|_{\gamma_{-1}^0}$ mais on a $\| \cdot \|_{\gamma_{-1}^0} \leq \kappa \| \cdot \|_{\gamma_0^0}$ avec un $\kappa > 0$ indépendant de ε .

2.1.4 Forme des opérateurs différentiels

Nous formulons maintenant des hypothèses plus précises sur la forme des opérateurs A et B . Étant donnés deux espaces de Banach $(E, \| \cdot \|_E)$ et $(F, \| \cdot \|_F)$, nous désignerons par $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F . Cet espace est muni d'une structure de Banach naturelle grâce à la norme

$$\| \psi \|_{E, F} = \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\| \psi \cdot u \|_F}{\| u \|_E}, \quad \text{pour tout } \forall \psi \in \mathcal{L}_c(E, F)$$

Nous avons noté $\psi \cdot u$ pour signifier l'image de u par ψ . Par ailleurs pour désigner un opérateur de dérivée partielle sur \mathcal{S} nous écrirons simplement,

$$\partial_\sigma^\alpha v = \partial_{\vartheta_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{\vartheta_{N-1}}^{\alpha_{N-1}} v \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}) \in \mathbb{N}^{N-1}.$$

Rappelons que nous avons supposé choisi une fois pour toutes un paramétrage $\sigma(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N-1})$ sur \mathcal{S} . Enfin étant donné une fonction $a(r, \sigma) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S})$, nous dirons que $a(r, \sigma)$ est développable en série

entière par rapport à r au voisinage de 0 si et seulement si il existe $r_0 > 0$ tel que a peut s'écrire sous la forme d'une série $a(r, \cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n(\cdot)$ qui converge dans $H^k(\mathcal{S})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in [0, r_0]$. À l'aide de ces notations nous formulons une hypothèse sur les opérateurs.

Hypothèse H2 :

Dans le paramétrage $\phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \rightarrow \Omega$ l'opérateur A admet la forme

$$A = \frac{1}{r^m} \sum_{\alpha+|\beta| \leq m} a_{\alpha,\beta}(r, \boldsymbol{\sigma}) (r\partial_r)^\alpha \partial_\sigma^\beta. \quad (2.1.3)$$

avec des coefficients $a_{\alpha,\beta}$ développables en série entière par rapport à r . Par ailleurs l'image de B par le changement d'échelle Ξ^ε est développable en série entière par rapport à ε : il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_n \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \quad (2.1.4)$$

la somme convergeant dans $\mathcal{L}_c(H^m(\Omega_N), \mathcal{K}(\Gamma_N))$ avec B_n continue de $H^m(\Omega_N)$ dans $\mathcal{K}(\Gamma_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vue la régularité de ϕ postulée par l'hypothèse **H0**, et comme B est un opérateur trace, on a bien $\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon \in \mathcal{L}_c(H^m(\Omega_N), \mathcal{K}(\Gamma_N))$ et tous les B_n sont des opérateurs trace : $B_n v = 0$ dès que $v = 0$ dans un voisinage de Γ_N . Comme nous supposons que les $a_{\alpha,\beta}(r, \boldsymbol{\sigma})$ sont développables en série entière par rapport à la variable r , on peut poser par définition $a_{\alpha,\beta}(r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{n \geq 0} a_{\alpha,\beta,n}(\boldsymbol{\sigma}) r^n$. On écrira alors

$$A \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \frac{1}{r^m} \sum_{n \geq 0} r^n A_n(r\partial_r, \boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma), \quad \text{avec} \quad A_n = \sum_{\alpha+|\beta| \leq m} a_{\alpha,\beta,n}(\boldsymbol{\sigma}) (r\partial_r)^\alpha \partial_\sigma^\beta \quad (2.1.5)$$

Il ne s'agit que d'une notation que nous justifierons un peu plus loin. La série sur les A_n ci-dessus n'est pas convergente *a priori*. Nous précisons aussi la forme que nous imposerons pour les A_n ; notamment nous leur imposerons d'être très réguliers angulairement. Préciser cette notion de régularité angulaire est l'objet du paragraphe suivant.

Exemple

Dans notre exemple de diffraction acoustique l'opérateur A admet dans les coordonnées polaires l'expression $A = r^{-2} \left((r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2 + r^2 \omega^2 \right)$ ainsi on a $A_0 = (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2$, $A_1 = 0$ et $A_2 = \omega^2$. On a également $(\Xi_^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon) v = \varepsilon^{-1} n_{\Gamma_N} \cdot (\nabla v)|_{\Gamma_N}$.*

Dans la suite nous aurons recours à quelques rudiments de topologie vectorielle, notamment sur les espaces de Fréchet, sur lesquels nous donnons quelques détails en annexe 2.A. Nous introduisons maintenant des espaces d'opérateurs agissant sur \mathcal{S} que nous munissons d'un ensemble de semi-normes

$$\mathcal{O}_p(\mathcal{S}) := \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_c(H^{k+p}(\mathcal{S}), H^k(\mathcal{S})) \quad \text{muni des semi-normes} \quad ||| \psi |||_{H^{k+p}, H^k}.$$

Des vérifications rapides montrent que chaque $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ est un espace de Fréchet. Notons par ailleurs que tout $\psi \in \mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ pour un certain p envoie continuellement $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ dans lui-même. On a par ailleurs le résultat suivant qui sera utile lorsque nous ferons du calcul holomorphe.

Lemme 2.1.1.

L'application $(\psi, u) \mapsto \psi \cdot u$ est continue $\mathcal{O}_p(\mathcal{S}) \times \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ au sens des topologies Fréchet correspondantes.

Ainsi si nous considérons deux fonctions holomorphes $\psi(\lambda)$ et $u(\lambda)$ à valeur respectivement dans $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ et $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, alors la fonction image $\psi(\lambda) \cdot u(\lambda)$ est encore holomorphe à valeur dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$. Dans toute la suite nous noterons $\mathcal{A}_n(\lambda, \sigma, \partial_\sigma)$ l'opérateur agissant sur \mathcal{S} obtenu à partir de $A_n(r\partial_r, \sigma, \partial_\sigma)$ en remplaçant simplement $r\partial_r$ par λ . Nous imposerons

Hypothèse H3 :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{Z}$ t.q $\lambda \mapsto \mathcal{A}_n(\lambda, \sigma, \partial_\sigma)$ est holomorphe à valeur dans $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$.

Il est à remarquer que puisque les $\mathcal{A}_n(\lambda, \sigma, \partial_\sigma)$ sont polynômiaux en λ , cette hypothèse impose en fait que les termes de ces polynômes appartiennent à $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ pour un certain p , et donc à $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}), \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$.

Exemple

Dans la situation du chapitre 1, on a $\mathcal{A}_0(\lambda) = \lambda^2 + \partial_\varphi^2$, $\mathcal{A}_1(\lambda) = 0$ et $\mathcal{A}_2(\lambda) = \partial^2$. Il est clair que $\mathcal{A}_0(\lambda) \in \mathcal{O}_2(\mathcal{S})$ et $\mathcal{A}_2(\lambda) \in \mathcal{O}_0(\mathcal{S})$ et que la dépendance de chacun par rapport à λ est analytique.

Revenons sur la notation (2.1.5) pour le "développement" de A . Étant donné la régularité angulaire que nous supposons sur les A_n , on peut déduire de l'hypothèse **H2** que A est continu de $\mathcal{V}_{\alpha+m}^{k+m}(\Omega)$ dans $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ pour tout k, α . De même, pour tout n , on peut affirmer que A_n envoie continuellement $\mathcal{V}_\alpha^{k+m}(\Omega)$ dans $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ pour tout α, k . Plus généralement pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un opérateur R_α tel que

$$r^m A = \sum_{0 \leq n \leq \alpha} r^n A_n + r^\alpha R_\alpha \quad R_\alpha : \mathcal{V}_\beta^{k+m}(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}_\beta^k(\Omega) \text{ continue } \forall \beta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.1.6)$$

2.1.5 Hypothèses sur la partie dominante

Lorsqu'on étudie le comportement asymptotique des fonctions satisfaisant $Av = 0$ dans une géométrie singulière, les caractéristiques de A_0 s'avèrent déterminantes. Cet opérateur $A_0(\sigma, \partial_\sigma, r\partial_r)$ sera appelé *partie dominante de l'opérateur A*. En reprenant un vocabulaire classique (cf. par exemple [57]) nous appelons *ensemble résolvant* de \mathcal{A}_0 l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est inversible en tant qu'élément de $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}), \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$. Nous supposons alors

Hypothèse H4 :

$\mathcal{A}_0(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en tant qu'élément de $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}), \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$.

Autrement dit l'ensemble résolvant de $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est supposé contenir $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, et pour tout λ dans cet ensemble nous noterons alors tout naturellement $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ son inverse. Nous émettons la troisième hypothèse,

Hypothèse H5 :

$\exists p \in \mathbb{Z}$ t.q $\lambda \mapsto \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \in \mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ est méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles situés dans \mathbb{Z} .

Les λ n'appartenant pas à l'ensemble résolvant sont appelés *exposants singuliers*. Nous appellerons *spectre* de A_0 l'ensemble des exposants singuliers et le noterons $\text{spec}(A_0)$. On a donc par hypothèse $\text{spec}(A_0) \subset \mathbb{Z}$. Par ailleurs si, en tant qu'opérateur agissant entre des espaces de Sobolev, $\mathcal{A}_0(\lambda)$ était de type Fredholm (pour tout λ) le théorème de Steinberg [108] donnerait directement la méromorphie de $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$. Mais ceci ne fait pas partie de nos hypothèses, car nous verrons des situations où ce n'est pas vérifié (au chapitre 6 par exemple). Pour terminer nous avons besoin de supposer un comportement particulier de $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ lorsque $|\Im\{\lambda\}| \rightarrow \infty$,

Hypothèse H6 :

La fonction $\lambda \mapsto \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ (à valeur dans $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$) est à croissance lente lorsque $|\Im\{\lambda\}| \rightarrow \infty$ c'est-à-dire : $\exists q \in \mathbb{N}$, tel que $\forall a > 0, \forall k \in \mathbb{Z}, \exists \kappa > 0$ et

$$\|\|\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}\|\|_{H^{k+p}, H^k} \leq \kappa |\lambda|^q, \text{ lorsque } |\Re\{\lambda\}| < a < |\Im\{\lambda\}|.$$

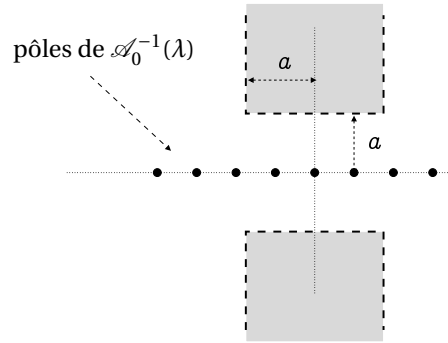


Fig.12 Bandes dans lesquelles $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$ est à croissance lente.

Exemple

Dans l'exemple du chapitre 1, une décomposition spectrale de ∂_φ montre explicitement que l'ensemble résolvant de $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est exactement $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et que $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ y est bien méromorphe avec des pôles d'ordre 1 en les points de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et un pôle d'ordre 2 en 0. Par ailleurs dans toute bande bornée suivant l'axe des parties réelles, $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ est bornée en norme $\|\|\cdot\|\|_{H^{k+2}, H^k}$ lorsque $|\Im\{\lambda\}| \rightarrow \infty$.

2.2 Discussion sur une forme de développement

Revenons maintenant à notre objectif initial. Le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ étant paramétré par ε , sa solution u^ε dépend donc également de ce paramètre. Nous voudrions connaître le comportement de u^ε quand ε tend vers 0, et même en obtenir un développement. L'intérêt d'une telle étude est multiple. En premier lieu elle fournira des propriétés qualitatives sur la solution u^ε . De telles propriétés pourront servir par la suite à obtenir des modèles simplifiés (cf chapitres 4 et 8), c'est-à-dire des problèmes bien posés plus simples que \mathcal{P}^ε et dont la solution est une bonne approximation de u^ε . Les résultats d'estimation d'erreur entre u^ε et son développement par rapport à ε pourront également servir dans une analyse théorique d'un schéma numérique utilisé pour approcher u^ε ou la solution d'un modèle simplifié. Ce genre de démarche a été employé par exemple dans [61, 113]. Précisons avant de passer à la suite

Jusqu'à la fin du chapitre 2, on suppose que les hypothèses **H0...H6** sont vérifiées .

2.2.1 Découpage de la géométrie

Pour obtenir un tel développement nous choisissons d'utiliser la méthode des développements raccordés, et suivant cette méthode il faut commencer par découper le domaine en zones dans lesquelles le champ u^ε sera représenté par des développements différents. Ici notre découpage est très simple, il comporte deux zones : la zone loin de l'obstacle Z_F^ε , et la zone proche Z_N^ε . Nous les définissons exactement

par

$$Z_F^\varepsilon = \{ \phi(r, \boldsymbol{\sigma}) \mid \sqrt{\varepsilon}/2 < r \} \quad \text{et} \quad Z_N^\varepsilon = \{ \phi(r, \boldsymbol{\sigma}) \mid \varepsilon \Phi(\boldsymbol{\sigma}) < r < \sqrt{\varepsilon} \}.$$

Notons que la zone Z_F^ε "converge" vers $\mathbb{R}^N \setminus I$. De même $\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon)$ "converge" vers Ω_N . Cette remarque amène au fait que les coordonnées adaptées au calcul dans Z_F^ε seront $(r, \boldsymbol{\sigma})$ et que celles adaptées à Z_N^ε seront $(R, \boldsymbol{\sigma})$. Ces deux zones que nous appellerons zone de champ proche et zone de champ lointain, se recoupent dans la zone dite de raccord $\{ \phi(r, \boldsymbol{\sigma}) \mid \sqrt{\varepsilon}/2 < r < \sqrt{\varepsilon} \}$. Pour introduire explicitement ce découpage dans les calculs, nous définissons une fonction de troncature notée χ^ε satisfaisant

$$\chi^\varepsilon(\phi(r, \boldsymbol{\sigma})) := \chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad \text{avec} \quad \chi: \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1] \quad , \quad \chi(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq 1/2 \\ 0 & \text{si } r \geq 1. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

On supposera sans nuire à la généralité que $\text{supp } \chi \subset \Omega$. À remarquer que toutes ces notations restent en bon accord avec celles que nous avons adoptées au chapitre 1.

2.2.2 Approximation en champ lointain

Le découpage de la géométrie étant fait, il faut à présent proposer la forme que devrait avoir le développement de la solution dans chacune de ces zones, c'est-à-dire postuler un ansatz. Nous commençons par la zone de champ lointain Z_F^ε . En reprenant l'approche que nous avons adoptée au chapitre 1, nous chercherons à approcher u^ε de la manière suivante

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n u_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \mathcal{H}_{\text{loc}}(\Omega_\star). \quad (2.2.2)$$

Rappelons que $\Omega_\star = \Omega \setminus I$. On note $\mathcal{H}_{\text{loc}}(\Omega_\star)$ pour signifier que la convergence a lieu dans $\mathcal{H}(\omega)$ pour tout $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$. Notons que les puissances de ε dans ce développement commencent à 0. Cela suggère une certaine stabilité de u^ε qui restera borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Il existe cependant des cas comme lorsque le problème limite est mal posé (voir dans [67] par exemple) pour lesquels interviennent des puissances négatives de ε .

L'équation (2.2.2) ne constitue en fait pas un ansatz, au sens où nous l'avons défini au §1.2.3, car nous laissons les u_n^ε dépendre de ε . Ceci pose un problème car, comme nous l'avons souligné au §1.2.3, dans ce cas il n'y a plus unicité du développement asymptotique. On serait donc tenté de proposer une autre forme, proposer un "vrai ansatz" avec des termes indépendants de ε . Malheureusement selon des arguments présentés au §5, chap.III de [67], dans le cas d'une géométrie filaire il n'existe pas d'ansatz (!). Ces arguments sont basés sur un calcul analytique pour un problème simplifié en géométrie cylindrique. En réalité, il semble obligatoire de supposer que les u_n admettent une certaine dépendance vis-à-vis de ε .

Il serait intéressant d'imposer à cette dépendance d'être "plus faible" que celle des ε^n . Mais nous ne savons pas comment donner un sens à "plus faible". En effet supposer une dépendance vis-à-vis de $\ln(\varepsilon)$ i.e. $u_n^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_n(\ln \varepsilon, \mathbf{x})$ n'a aucun effet restrictif pour la simple raison que $\varepsilon = e^{\ln \varepsilon}$. Cependant l'analyse asymptotique garde un intérêt dans la mesure où les termes u_n^ε que nous obtiendrons sont plus simples que u^ε lui-même : par exemple les u_n^ε admettent des symétries...etc.

Précisons dans quel espace nous recherchons les u_n^ε . Nous devons autoriser ces termes à admettre un comportement éventuellement singulier au voisinage de I . C'est pour cette raison que nous les recherchons dans des espaces à poids,

$$u_n^\varepsilon \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega). \quad (2.2.3)$$

Remarquons que si $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ alors v est \mathcal{C}^∞ en tout point de Ω_\star . Nous imposons donc aux u_n^ε d'être réguliers mais leur autorisons une croissance polynômiale au voisinage de I .

2.2.3 Approximation en champ proche

Nous proposons d'approcher u^ε différemment dans la zone de champ proche. Cet autre développement sera écrit en coordonnées normalisées (R, σ) . Toutes les notions intervenant dans la description du champ proche seront en quelque sorte les mêmes que pour le champ lointain mais valable à l'infini ($R \rightarrow +\infty$) au lieu d'être valable au voisinage de I ($r \rightarrow 0$). Pour la forme générale du développement nous proposons

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n U_n^\varepsilon, \quad \text{dans } \mathcal{H}_{\text{loc}}(\Omega_N). \quad (2.2.4)$$

À nouveau nous notons $\mathcal{H}_{\text{loc}}(\Omega_N)$ pour signifier que la convergence a lieu dans $\mathcal{H}_{\text{loc}}(\omega)$ pour tout ouvert borné $\omega \subset \Omega_N$. Alors que nous autorisons les termes du champ lointain à être singuliers au voisinage de I , nous autorisons ici les termes du champ proche à être singuliers au voisinage de l'infini en choisissant les U_n^ε dans des espaces à poids construits à cet effet. Étant donné un ouvert $\omega \subset \Omega_N$ on définit

$$\mathcal{W}_\alpha^k(\omega) := \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\omega) \mid \|v\|_{\mathcal{W}_\alpha^k(\omega)}^2 := \sum_{\beta+\gamma=k} \int_\omega |(R\partial_R)^\beta \nabla_\sigma^\gamma v|^2 R^{-2\alpha} \frac{dRd\sigma}{R} < \infty \right\}.$$

Si v est définie sur Ω_N telle que $v(R, \sigma) = R^\lambda w(\sigma)$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, alors $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ si et seulement si $\lambda < \alpha$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$. Ainsi les éléments des espaces \mathcal{W}_α^k sont des fonctions qui admettent au plus un comportement polynômial au voisinage de l'infini. Notons que si $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ alors $(R\partial_R)^\beta v \in \mathcal{W}_\alpha^{k-\beta}(\Omega_N)$ et $\nabla_\sigma^\gamma v \in \mathcal{W}_\alpha^{k-|\gamma|}(\Omega_N)$. Par ailleurs, encore si $v \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$ alors $R^\lambda v \in \mathcal{W}_{\alpha+\lambda}^k(\Omega_N)$ mais en revanche si $w \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ on a encore $wv \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$. Nous recherchons

$$U_n^\varepsilon \in \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N) \quad \text{avec} \quad \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N) \quad (2.2.5)$$

2.2.4 Approximation dans tout le domaine

Supposons à présent que nous disposons de termes u_n^ε et U_n^ε permettant de bien approcher u^ε respectivement dans les zones de champ lointain et proche. La question est de savoir comment construire un champ approchant u^ε dans tout le domaine. Nous poserons

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon + \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon.$$

Nous avons utilisé Ξ_*^ε pour ramener U_n^ε dans les coordonnées (r, σ) avec lesquelles sera construit u_n^ε . Comme $\mathcal{H}(\omega)$ est un espace de Sobolev pour un ouvert ω et que ϕ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $]0, +\infty[\times \mathcal{S}$, il est clair que la définition du changement d'échelle que $\Xi_*^\varepsilon \mathcal{H}(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)) = \mathcal{H}(\Xi^\varepsilon \Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon)) = \mathcal{H}(Z_N^\varepsilon)$. Ainsi la définition ci-dessus implique que $\tilde{u}_n^\varepsilon \in \mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)$.

Avec cette définition de \tilde{u}_n^ε , le champ approché $\sum \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon$ apparaît comme une interpolation entre le champ proche et le champ lointain. Notons que ce sont les propriétés des \tilde{u}_n^ε que nous utiliserons pour proposer des modèles simplifiés pour le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Afin d'assurer que \tilde{u}_n^ε constitue une bonne approximation de u^ε nous chercherons à ce que soit vérifiée une estimation du type suivant

$$\exists \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} \text{ tels que } \quad \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{\mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^{\alpha N + \beta}), \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (2.2.6)$$

Cette condition sera suffisante en pratique pour garantir que u_n^ε et U_n^ε sont bien les termes d'un développement de u^ε dans les zones de champ proche et lointain. À partir de maintenant et dans tout le reste de ce chapitre, c'est donc (2.2.6) que nous chercherons à satisfaire en proposant des conditions judicieuses sur u_n^ε et U_n^ε , $n \in \mathbb{N}$.

2.2.5 Exploitation de l'hypothèse de stabilité

Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes sur u_n^ε et U_n^ε pour que (2.2.6) soit vérifiée. Pour obtenir ceci nous allons utiliser la stabilité du problème (\mathcal{P}^ε). Appliquons l'hypothèse **H1** en choisissant $v = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^\varepsilon$. En développant le terme relié à A on obtient,

$$A(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^\varepsilon) = (1 - \chi^\varepsilon)(-f - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n A u_n^\varepsilon) - \chi^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n A \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon + [A, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon).$$

Dans le calcul précédent nous avons utilisé $Au^\varepsilon = -f$ et le fait que $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit, de sorte que $f = (1 - \chi^\varepsilon)f$ pour ε assez petit. Par ailleurs, dans l'équation précédente $[A, \chi^\varepsilon]$ désigne un crochet de commutation, c'est-à-dire que pour tout $v \in \mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)$ on a par définition $[A, \chi^\varepsilon]v = A\chi^\varepsilon v - \chi^\varepsilon A v$. Notons que $[A, \chi^\varepsilon]v$ est à support dans $Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon$. En effet en reprenant l'équation (2.1.3) et en développant on obtient

$$\begin{aligned} [A, \chi^\varepsilon]v &= \frac{1}{r^m} \sum_{\alpha+|\beta| \leq m} a_{\alpha, \beta}(r, \sigma) \partial_\sigma^\beta [(r\partial_r)^\alpha, \chi^\varepsilon]v \\ &= \frac{1}{r^m} \sum_{\alpha+|\beta| \leq m} a_{\alpha, \beta}(r, \sigma) \partial_\sigma^\beta \sum_{k=1}^{\alpha} \binom{\alpha}{k-1} (r\partial_r)^{\alpha-k} (r\partial_r \chi^\varepsilon) (r\partial_r)^k v, \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

dans le membre de droite intervient à chaque fois la dérivée radiale $r\partial_r \chi^\varepsilon$ dont le support est contenu dans $Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon$. De la même façon qu'au §1.4.5, il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\chi^\varepsilon v\|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \|v\|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in \mathcal{V}_0^0(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Notons enfin que $\text{supp } \chi^\varepsilon \subset Z_N^\varepsilon$, ainsi que $\text{supp}(1 - \chi^\varepsilon) \subset Z_F^\varepsilon$. On conclut donc finalement à l'existence d'un $\eta \in \mathbb{R}$ et d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tels que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{\mathcal{H}(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^\eta \left(E_F^N(\varepsilon) + E_N^N(\varepsilon) + E_T^N(\varepsilon) \right) \quad (2.2.8)$$

où les trois termes $E_A^N(\varepsilon)$, $A = F, N, T$ sont des termes d'erreur donnés par les expressions suivantes, m désignant l'ordre de A ,

- erreur lointaine : $E_F^N(\varepsilon) = \|f + A \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^0(Z_F^\varepsilon)} + \|C \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)},$
- erreur proche : $E_N^N(\varepsilon) = \|A \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^0(Z_N^\varepsilon)} + \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} B \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{K}(\Gamma_N)},$ (2.2.9)
- erreur de raccord : $E_T^N(\varepsilon) = \|[A, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon)\|_{\gamma_0^0(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}.$

La suite de cette construction va consister à choisir les u_n^ε et les U_n^ε de manière à ce que chacun de ces trois termes d'erreur soit petit.

2.2.6 Équations pour le champ proche et lointain

Nous allons utiliser les résultats du paragraphe précédent afin de proposer des équations sur le champ proche et le champ lointain qui, en pratique, permettront de vérifier (2.2.6). Notre stratégie consiste à choisir ces conditions de façon à minimiser les termes d'erreurs $E_A^N(\varepsilon)$, $A = F, N, T$. Chacune de ces conditions sera associée à l'un de ces termes d'erreur, il y en aura donc trois, et nous en énonçons tout de suite deux que nous motivons à l'aide d'un raisonnement intuitif. Dans la suite de ce paragraphe il ne

doit être accordé qu'une valeur heuristique au symbole \simeq .

Pour la première, qui concerne le champ lointain, partons de l'équation vérifiée par u^ε dans Z_Γ^ε à savoir $Au^\varepsilon = 0$. Si nous remplaçons u^ε par son développement en champ lointain (2.2.2) on obtient $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n Au_n^\varepsilon \simeq 0$. Ceci sera donc vérifié en particulier si $Au_n^\varepsilon = 0$ pour tout n . On raisonne de même avec l'opérateur C . Ceci nous donne notre première condition :

$$Au_n^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad Cu_n^\varepsilon = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.10)$$

Pour la deuxième condition nous faisons de même dans la zone de champ proche. Cette fois-ci on réécrit l'équation dans les coordonnées scalées, $Au^\varepsilon = A\Xi_*^\varepsilon \Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon = 0 \Rightarrow \Xi_*^{\varepsilon,-1} A\Xi_*^\varepsilon \Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon = 0$. Remplaçons $\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon$ par son approximation en champ proche (2.2.4),

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} A\Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n^\varepsilon \simeq \frac{1}{\varepsilon^{m_{\mathbb{R}}m}} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k R^k A_k \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n U_n^\varepsilon \simeq \frac{1}{\varepsilon^{m_{\mathbb{R}}m}} \sum_{k,n=0}^{\infty} \varepsilon^{k+n} R^k A_k U_n^\varepsilon \simeq 0.$$

Avec le changement d'échelle, aucune puissance de ε n'est "générée" par les A_k car il s'agit d'opérateurs homogènes qui ne sont fonction que de $r\partial_r$. Il sera satisfaisant, au moins d'un point de vue intuitif, que les termes correspondant à une même puissance de ε s'annulent. En effectuant le même raisonnement sur la condition de bord et l'opérateur B on est amené finalement à proposer

$$\sum_{k=0}^n R^k A_k U_{n-k}^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.2.11)$$

Nous devons maintenant dériver une troisième condition qui sera le principe de raccord (2.5.1), et montrer que (2.5.1), (2.2.10) et (2.2.11) constituent un ensemble de conditions suffisantes pour que (2.2.6) soit satisfaite. Pour ceci nous aurons besoin de raisonner sur les développements des u_n^ε et U_n^ε par rapport à r et R respectivement. C'est la raison pour laquelle dans les sections 2.3 et 2.4 nous nous attachons à montrer que les termes u_n^ε et U_n^ε admettent un développement par rapport à la variable radiale.

2.3 Développement radial du champ lointain

Cette section a pour but de démontrer que les termes de champ lointain u_n^ε admettent un développement par rapport à la variable r suivant des puissances entières. Nous commencerons par définir la notion de développement radial. Puis avec la proposition 2.3.1 nous montrerons que u_n^ε se développe effectivement suivant r . Nous dériverons enfin quelques propriétés algébriques satisfaites par les termes de ce développement radial.

2.3.1 Développement radial au voisinage de 0

En utilisant la transformation de Mellin $\mathfrak{M}\{ \}$, dont nous rappelons la définition et quelques propriétés dans l'annexe 2.C, nous montrons comment on peut associer à une fonction $g(r) \in \mathcal{E}_0$ un unique développement par rapport à r . Nous rappelons que d'après la définition de \mathcal{E}_0 donnée au §2.C.1 on a donc que $\text{supp}(g)$ est compact.

Supposons donnée une suite de couples $(p_j, k_j) \in \mathbb{C} \times \mathbb{N}$ tels que $\Re\{p_j\} \rightarrow \infty$ quand $j \rightarrow \infty$. Ceci suppose en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ il y a seulement un nombre fini de p_j tels que $\Re\{p_j\} < \alpha$. On

pose alors par définition

$$g(r) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_j} g_j^{(k)} r^{p_j} \ln^k(r), \quad (2.3.1)$$

$$\iff g(r) - \chi(r) \sum_{\Re\{p_j\} \leq \alpha} \sum_{k=0}^{k_j} g_j^{(k)} r^{p_j} \ln^k(r) \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S})), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nous dirons que g admet un développement radial pour $r \rightarrow 0$. Il est clair que la définition ci-dessus ne dépend pas du choix de la fonction de troncature χ (nous avons utilisé celle introduite au §2.2.1 mais nous aurions pu en choisir une autre). Ainsi $g(r) \in \mathcal{E}_0$ admet un développement asymptotique radial si et seulement si $\chi(r)g(r)$ admet un développement asymptotique.

Cette constatation nous permet d'étendre la définition des développements asymptotiques à tout élément de $\cup_{\alpha} \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S})$. Nous dirons en effet que $g \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S})$ admet un développement asymptotique en $r \rightarrow 0$ si et seulement si $\chi(r)g(r) (\in \mathcal{E}_0)$ en admet un. Le développement associé à $g(r)$ est alors par définition celui associé à $\chi(r)g(r)$. Enfin dans la suite nous identifierons $\mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\Omega)$ avec $\mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S})$ au voisinage de I via le paramétrage ϕ intervenant dans l'hypothèse **H0**, ce qui nous permettra de parler du développement radial d'un élément de $\mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\Omega)$.

Le théorème suivant, que l'on trouve dans [70], montre que lorsque g admet un tel développement les p_j sont les positions dans le plan complexe des pôles de $\mathfrak{M}\{g\}$ (défini au §2.C.1) et les k_j correspondants sont l'ordre de ces pôles. Quant aux $g_j^{(k)}$ il s'agit des résidus associés.

Théorème 2.3.1.

Pour qu'un $g \in \mathcal{E}_0$ admette un développement asymptotique au voisinage de 0, il faut et il suffit que

- (i) $\mathfrak{M}\{g\}$ soit méromorphe dans \mathbb{C} , avec des pôles d'ordre fini en p_j , $j \geq 0$ avec $\Re\{p_j\} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \infty$,
- (ii) il existe $a > 0$ tel que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $(1 + |\lambda|)^k \|\mathfrak{M}\{g\}(\lambda)\|_{H^n(\mathbb{S})} a^{\Re\{\lambda\}}$ soit borné en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} \leq k$.

Lorsque les conditions de ce théorème sont réunies, le développement d'une telle fonction g est unique car ses coefficients $g_j^{(k)}$ sont donnés par des intégrales de Cauchy,

$$g_j^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p_j} \mathfrak{M}\{g\}(\lambda) (\lambda - p_j)^k d\lambda, \quad (2.3.2)$$

Le théorème 2.3.1 est assez commode car il permet d'affirmer l'existence d'un développement radial d'une fonction g uniquement suivant les fonctions du type $r^{\mu} \ln^k(r)$ (et seulement ce type de fonctions!!) juste en vérifiant deux propriétés de sa transformée de Mellin : méromorphie + comportement pour $|\Im\{\lambda\}|$ grand.

Par ailleurs, avec les notations de l'énoncé ci-dessus, soit $\alpha_0 = \min\{p_j | j \in \mathbb{N}\}$. Ce minimum existe d'après le théorème 2.C.1 et la définition de $\hat{\mathcal{E}}_0$ cf §2.C.1. On voit d'après la caractérisation de la proposition 2.C.1, que $g \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{S}))$ pour tout $\alpha < \alpha_0$. La répartition des pôles de $\mathfrak{M}\{g\}$ renseigne donc sur le poids optimal de l'espace auquel appartient g .

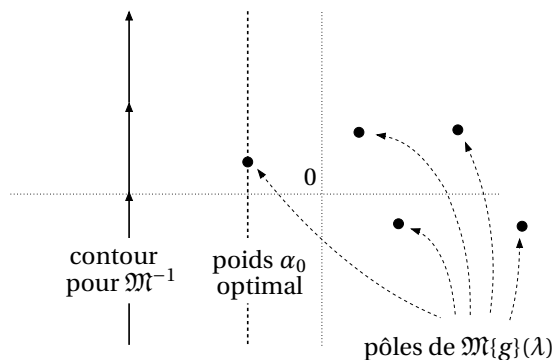


Fig.13 Position des pôles de $\mathfrak{M}\{g\}(\lambda)$

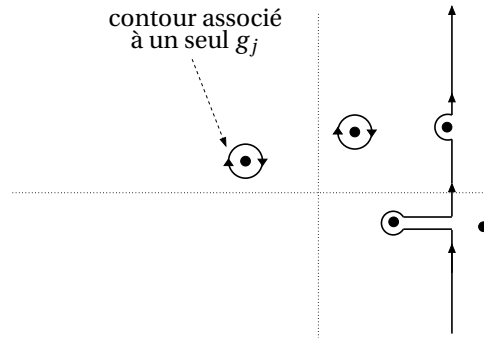


Fig.14 Déformation de contour pour \mathfrak{M}^{-1}

2.3.2 Application au champ lointain

Le problème \mathcal{P}^ε que nous considérons se prête bien à la vérification des hypothèses du théorème 2.3.1. Nous allons maintenant chercher à démontrer que sous les hypothèses que nous avons formulées au sujet des termes du développement du champ lointain, ceux-ci admettent un développement discret par rapport à la variable radiale en appliquant, comme on pourrait s'en douter, le théorème 2.3.1. La proposition suivante est une adaptation d'un résultat classique, qui s'obtient en suivant la méthode qu'on trouve par exemple dans [76] (théorème 3.3) ou [77] (théorème 6.4.1) et qui utilise la transformée de Mellin. Cette technique a été introduite par Kondratiev.

Proposition 2.3.1.

Soit $v, g \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ tel que $Av = g$ dans un voisinage de I . Si g admet un développement radial suivant les puissances entières de r lorsque $r \rightarrow 0$ au sens de la définition (2.3.1)

$$g(r, \sigma) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{q=q_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_q} g_q^{(k)}(\sigma) r^q \frac{\ln^k(r)}{k!}, \quad q_0 \in \mathbb{Z}, k_q \in \mathbb{N}.$$

Alors v admet un développement radial de la même forme suivant les puissances entières de r

$$v(r, \sigma) \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_j} v_j^{(k)}(\sigma) r^j \frac{\ln^k(r)}{k!}, \quad j_0 \in \mathbb{Z}, k_j \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

Dans l'énoncé ci-dessus nous commettons un léger abus de notation car nous devrions écrire $v(\phi(r, \sigma))$. Mais puisque ϕ est une carte locale, nous confondrons $v(\phi(r, \sigma))$ et $v(x)$. Tout d'abord, quitte à considérer χv et χg plutôt que v et g , nous pouvons supposer que $v(r, \sigma) = 0$ et $g(r, \sigma) = 0$ et dès que $r \geq 1$, que $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ et que $Av = g$ dans $\mathbb{R}^N \setminus I$ tout entier. Nous allons chercher à vérifier les hypothèses du théorème 2.3.1 sur $\hat{v} = \mathfrak{M}\{v\}$. Nous avons deux hypothèses à vérifier.

Prolongement méromorphe On sait déjà que $\hat{v}(\lambda)$ est analytique dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < \alpha$, et nous allons en construire un prolongement méromorphe au reste de \mathbb{C} . Pour ceci nous allons procéder par récurrence. Découpons le plan complexe en morceaux : en posant $\mathcal{O}_n = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid n-1 < \Re\{\lambda\} < n+1/2\}$, on a $\mathbb{C} = \cup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_n$. Quitte à considérer un $\alpha' < \alpha$, on peut supposer que $\alpha = n_0 \in \mathbb{Z}$. Choisissons un entier N arbitraire. Il suffit de montrer qu'on peut construire un tel prolongement dans $\cup_{n \leq N} \mathcal{O}_n$ puisque N est arbitraire. Nous allons montrer par récurrence que $\hat{v}(\lambda)$ est méromorphe dans \mathcal{O}_{n_0+n} pour

$n_0 + n \leq N$. Nous considérerons une décomposition de l'opérateur A sous la forme $r^m A = \sum_{n=0}^N r^n A_n + r^N R_N$. Dans une telle décomposition les A_n ont été définis au §2.1.4, et R_N est un opérateur continu de $\mathcal{V}_\beta^{k+m}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ dans $\mathcal{V}_\beta^k(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque v vérifie l'équation $Av = g$ dans \mathbb{R}^N , par transformée de Mellin

$$\mathcal{A}_0(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda) \hat{v}(\lambda) = \hat{g}(\lambda - m\mathbf{1}) - \sum_{n=1}^N \mathcal{A}_n(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda - n) \hat{v}(\lambda - n) - \mathfrak{M}\{R_N v\}(\lambda - N). \quad (2.3.3)$$

Initialisation Tout d'abord, par hypothèse, le membre de droite de cette égalité est méromorphe (et même analytique) dans \mathcal{O}_{n_0} . Par ailleurs d'après l'hypothèse **H4** du §2.1.5, $\mathcal{A}_0(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ et $\lambda \rightarrow \mathcal{A}_0(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda)^{-1}$ est méromorphe en tant qu'application à valeur dans $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. En multipliant par $\mathcal{A}_0(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda)^{-1}$ on en déduit donc que $\hat{v}(\lambda)$ est méromorphe dans \mathcal{O}_{n_0} en tant que fonction valuée dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$.

Transitivité On suppose que $\hat{v}(\lambda)$ est méromorphe dans $\cup_{k \leq n-1} \mathcal{O}_k$. On réapplique le raisonnement de l'étape précédente. On utilise l'équation 2.3.3, en remarquant que dans le membre de droite apparaît des translatés de fonctions méromorphes. Ainsi le membre de droite est méromorphe dans \mathcal{O}_n , et donc en multipliant par $\mathcal{A}_0(\boldsymbol{\sigma}, \partial_\sigma, \lambda)^{-1}$, on en déduit que le membre de gauche aussi.

Comportement pour λ grand Pour vérifier la deuxième hypothèse du théorème 2.3.1, on procède encore par récurrence. Notons en premier lieu que si $\hat{w} \in \hat{\mathcal{E}}_0$ est tel que $(1 + |\lambda|)^k \|\hat{w}(\lambda)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}}$ reste bornée $\forall q \in \mathbb{N}$ en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} < k$, alors il en est de même pour $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \hat{w}(\lambda)$ d'après l'hypothèse **H6** du §2.1.5 et la majoration

$$(1 + |\lambda|)^k \|\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \hat{w}(\lambda)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}} \leq \| \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \|_{H^{q+p}, H^q} (1 + |\lambda|)^k \|\hat{w}(\lambda)\|_{H^{q+p}(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}}. \quad (2.3.4)$$

Remarquons également que par régularité $\forall k \in \mathbb{N}$, $(r\partial_r)^k v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ de sorte que pour tout $k, q \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_{q,k} > 0$ tels que $(1 + |\lambda|)^k \|\hat{v}(\lambda)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}} \leq \kappa_{q,k}$ dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < n_0$. Vérifions maintenant cette propriété dans \mathcal{O}_{n_0} . Notons que ce domaine est contenu dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < n_0 + 1$. De même

$$(1 + |\lambda|)^k \sum_{n=1}^N \|\mathcal{A}_n(\lambda - n) \hat{v}(\lambda - n)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}} \quad \text{et} \quad (1 + |\lambda|)^k \|\mathfrak{M}\{R_N v\}(\lambda - N)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}},$$

restent bornés en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} < n_0 + 1$. D'après (2.3.4), en multipliant par $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ dans l'égalité 2.3.3, on voit que $(1 + |\lambda|)^k \|\hat{v}(\lambda)\|_{H^q(\mathcal{S})} a^{\Re\{\lambda\}}$ est borné en dehors d'un compact de \mathcal{O}_{n_0} . On aboutit finalement à la même conclusion dans \mathcal{O}_{n_0+n} , $n \in \mathbb{N}$ en se servant de l'égalité 2.3.3 et en raisonnant par récurrence comme pour le prolongement méromorphe. ■

À nouveau si les conditions de la proposition 2.3.1 sont réunies avec un $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ à support dans Ω , il y a unicité du développement, puisqu'en reprenant la formule (2.3.2) on obtient

$$\sum_{k=0}^{k_j} v_j^{(k)}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\ln^k(r)}{k!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_j} \mathfrak{M}\{v\}(\lambda) r^{\lambda-j} d\lambda, \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.5)$$

Puisque $\mathfrak{M}\{(1 - \chi)v\}(\lambda)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier, la formule ci-dessus vaut en remplaçant dans le membre de droite $\mathfrak{M}\{v\}$ par $\mathfrak{M}\{\chi v\}$. De même si $\mathbf{1}_{r < 1}(r)$ désigne la fonction = 1 pour $r < 1$ et = 0 sinon alors $\mathfrak{M}\{(1 - \mathbf{1}_{r < 1})v\}(\lambda)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier, de sorte qu'on peut remplacer $\mathfrak{M}\{v\}$ par $\mathfrak{M}\{\mathbf{1}_{r < 1} v\}$ dans le membre de droite de (2.3.5).

Comme au voisinage de I on a l'inclusion $\chi \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) \subset \mathcal{E}_0$, l'équation (2.2.10) nous permet d'appliquer la proposition 2.3.1 aux u_n^ε . Cela signifie que ces fonctions peuvent être développées de la manière suivante,

$$u_n^\varepsilon \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{j=j_n}^{\infty} r^j u_{n,j}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln r), \quad j_n \in \mathbb{Z}, \quad u_{n,j}^\varepsilon := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_j} \mathfrak{M}\{u_n^\varepsilon \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) r^{\lambda-j} d\lambda. \quad (2.3.6)$$

Ce développement commence en $j = j_n$ qui peut fort bien être négatif.

Dans la proposition 2.3.1, le développement se fait suivant les puissances entières de r ce qui est remarquable. En reprenant les notations de (2.3.1), on a donc $p_j \in \mathbb{Z}$ pour tout j . Comme le suggère la démonstration, ceci est directement relié au fait que $\text{spec}(A_0) \subset \mathbb{Z}$. C'est cette remarque qui nous a conduit à postuler une forme de développement pour le champ lointain qui ne comporte que des puissances entières de ε .

Exemple

Dans le cas de la diffraction acoustique par un petit obstacle en deux dimensions, l'analogue de la proposition 2.3.1 est la proposition 1.5.2 qui est en fait une conséquence de la séparation de variables. En effet les solutions de l'équation de Helmholtz homogène se décomposent sur les fonctions de Bessel $J(\omega r)$ et $Y(\omega r)$ qui se développent bien suivant la forme de la proposition 2.3.1.

Le fait qu'une certaine fonction $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ satisfasse $Av = 0$ entraîne non seulement que ce v admet un développement suivant r , mais entraîne aussi des relations de récurrence entre les coefficients du développement. Nous serons amenés à exploiter plus tard ces relations.

Lemme 2.3.1.

Soit $v \in \mathcal{V}_{\alpha-1/2}^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{Z}$ satisfaisant $Av = 0$. Alors v admet un développement au voisinage de 0 et on a les identités

$$\sum_{j=\alpha}^q r^{-j} A_{q-j} r^j v_j = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z},$$

$$\text{où } v \underset{r \rightarrow 0}{\propto} \sum_{q=\alpha}^{\infty} r^q v_q(r, \boldsymbol{\sigma}) \quad \text{avec } v_q(r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=0}^{k_q} v_q^{(k)}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\ln^k r}{k!}, \quad k_q \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

Choisissons un $\beta \in \mathbb{Z}$ arbitraire. Nous allons montrer que les identités ci-dessus sont vraies pour tout $q \in \llbracket \alpha, \beta \rrbracket$. En reprenant la décomposition (2.1.6), on peut écrire

$$0 = r^m Av = \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} r^n A_n v + \underbrace{r^{\beta+1/2-\alpha} R_{\beta+1/2-\alpha} v}_{\in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega)} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} r^n A_n v \in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega).$$

On peut alors reprendre la somme ci-dessus et injecter le développement de v ,

$$\sum_{n=0}^{\beta-\alpha} r^n A_n v = \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} r^n A_n \sum_{k=\alpha}^{\beta-n} r^k v_k + \underbrace{\sum_{n=0}^{\beta-\alpha} r^n A_n \left(v - \sum_{k=\alpha}^{\beta-n} r^k v_k \right)}_{\in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega)} \in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} \sum_{k=\alpha}^{\beta-n} r^n A_n r^k v_k \in \mathcal{V}_\beta^\infty(\Omega).$$

Rappelons que les v_j sont des polynômes en $\ln(r)$. Ainsi pour tout n, k le terme $r^n A_n r^k v_k$ est de la forme $r^{n+k} \times$ un polynôme en $\ln(r)$. Comme $r^\mu \ln^q(r) \notin \mathcal{V}_\beta^\infty$ lorsque $\mu \leq \beta$, on en tire que la dernière somme

dans l'équation ci-dessus est nulle ($n + k \leq \beta$ dans la somme). Finalement, par des changements de variables standard dans la dernière somme ci-dessus on obtient

$$0 = \sum_{n=0}^{\beta-\alpha} \sum_{k=\alpha}^{\beta-n} r^n A_n r^k v_k = \sum_{q=\alpha}^{\beta} r^q \sum_{j=\alpha}^q r^{-j} A_{q-j} r^j v_j \Rightarrow \sum_{j=\alpha}^q r^{-j} A_{q-j} r^j v_j = 0 \quad \forall q \in [\alpha, \beta].$$

■

2.4 Développement radial du champ proche

Dans la section précédente nous avons montré que les termes u_n^ε admettaient un développement par rapport à la variable r pourvu que la condition 2.2.10 soit satisfaite. Par des raisonnements similaires nous allons obtenir le même type de résultat pour les termes U_n^ε . Nous commencerons par définir la notion de développement au voisinage de l'infini. Dans un deuxième paragraphe nous utiliserons cette définition et la transformation de Mellin pour montrer que le champ proche admet un tel développement.

2.4.1 Développement au voisinage de l'infini

Nous introduisons également une notion de développement au voisinage de l'infini. Considérons un $G \in \mathcal{E}_\infty$ (cf §2.C.2 pour la définition de \mathcal{E}_∞). Par définition de \mathcal{E}_∞ le support de G exclut un voisinage de 0. Soit une suite (p_j) telle que $\Re\{p_j\} \rightarrow -\infty$ quand $j \rightarrow \infty$. On pose par définition

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R}) &\underset{\mathbb{R} \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m_j} G_j^{(k)} \mathbb{R}^{p_j} \ln^k(\mathbb{R}), \\ \iff G(\mathbb{R}) - (1 - \chi(\mathbb{R})) \sum_{\Re\{p_j\} \geq \alpha} \sum_{k=0}^{m_j} G_j^{(k)} \mathbb{R}^{p_j} \ln^k(\mathbb{R}) &\in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Nous dirons alors que G admet un développement radial par rapport à \mathbb{R} au voisinage de l'infini. La définition ne dépend pas de la fonction de troncature choisie (ici nous avons choisi $(1 - \chi)$ pour tronquer au voisinage de $\mathbb{R} = 0$). À nouveau l'existence d'un tel développement pour une fonction est conditionnée par le caractère méromorphe de sa transformée de Mellin en l'infini comme l'indique le résultat suivant qui est adapté de [70].

Théorème 2.4.1.

Pour que $G \in \mathcal{E}_\infty$ admette un développement asymptotique au voisinage de l'infini, il faut et il suffit que

- (i) $\mathfrak{M}\{G\}$ soit méromorphe dans \mathbb{C} , avec des pôles d'ordre fini en p_j et $\Re\{p_j\} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty$,
- (ii) il existe $a > 0$ tel que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $(1 + |\lambda|)^k \|\mathfrak{M}\{G\}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})} a^{-\Re\{\lambda\}}$ soit borné en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} \geq -k$.

Comme auparavant pour les développement au voisinage de 0, ce théorème renseigne sur le poids optimal de l'espace $\mathcal{W}_\alpha^\infty$ auquel appartient le G du théorème 2.4.1. Par ailleurs si les conditions de ce théorème sont remplies, alors les coefficients $G_j^{(k)}$ sont uniques puisqu'ils sont donnés par une formule semblable à (2.3.2),

$$G_j^{(k)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_{p_j}} \mathfrak{M}\{G\}(\lambda) (\lambda - p_j)^k d\lambda, \tag{2.4.2}$$

Attention cette formule est légèrement différente de (2.3.2) car on intègre sur \mathcal{O}_{p_j} au lieu de \mathcal{O}_{p_j} .

2.4.2 Application au champ proche

Notons que si $V \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$, alors quitte à tronquer au voisinage de l'infini, on peut considérer que $V \in \mathcal{C}_\infty^\infty$. Nous allons comme auparavant utiliser le théorème 2.4.1 pour l'appliquer au développement du champ proche, et obtenir que les termes de ce développement admettent eux-mêmes un développement par rapport à R au voisinage de l'infini. À nouveau la proposition suivante est adaptée de résultats que l'on trouve par exemple dans [76] ou [77].

Proposition 2.4.1.

Soit $V, G \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ tels que $A_0 V = G$ dans un voisinage de l'infini. Si G admet un développement radial suivant les puissances entières de R lorsque $R \rightarrow \infty$ au sens de la définition (2.4.1)

$$G(R, \sigma) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{q=-\infty}^{q_0} \sum_{k=0}^{k_q} G_q^{(k)}(\sigma) R^q \frac{\ln^k(R)}{k!}, \quad q_0 \in \mathbb{Z}, k_q \in \mathbb{N}.$$

Alors V admet un développement radial au voisinage de l'infini de la même forme suivant les puissances entières de R

$$V(R, \sigma) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=0}^{k_j} V_j^{(k)}(\sigma) R^j \frac{\ln^k(R)}{k!}, \quad j_0 \in \mathbb{Z}, k_j \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

Quitte à considérer $(1 - \chi)V$ et $(1 - \chi)G$ plutôt que V et G , nous pouvons supposer que $V, G \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons vérifier les deux hypothèses du théorème 2.4.1 sur $\mathfrak{M}\{V\}(\lambda)$ avec des pôles dans \mathbb{Z} .

Soit $p_0 \in \mathbb{Z}$ telle que $\mathfrak{M}\{V\}(\lambda) = \check{V}(\lambda)$ et $\mathfrak{M}\{G\}(\lambda) = \check{G}(\lambda)$ soient définis et holomorphes dans $\Re\{\lambda\} > p_0$. Par transformée de Mellin, on obtient $\mathcal{A}_0(\lambda)\check{V}(\lambda) = \check{G}(\lambda)$ dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} > p_0$. Nous commençons par construire un prolongement méromorphe de $\check{V}(\lambda)$ à tout \mathbb{C} . Comme $\check{G}(\lambda)$ et $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$ sont méromorphes dans \mathbb{C} avec des pôles localisés dans \mathbb{Z} , ce résultat est immédiat. Ainsi $\check{V}(\lambda) = \mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)\check{G}(\lambda)$ admet un prolongement qui vérifie ces mêmes propriétés.

Par ailleurs il existe $a > 0$ tel que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $(1 + |\lambda|)^k \|\check{G}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})} a^{-\Re\{\lambda\}}$ soit borné en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} \geq -k$. D'après l'hypothèse **H6** du §2.1.5 sur la croissance de $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$ pour $|\Im\{\lambda\}|$ grand, on en tire qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $k, n \in \mathbb{N}$, $(1 + |\lambda|)^k \|\check{V}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})} a^{-\Re\{\lambda\}}$ soit borné en dehors d'un compact du demi-plan $\Re\{\lambda\} \geq -k$. Ainsi V vérifie les conditions d'application du théorème 2.4.1. ■

Cette proposition s'applique en particulier à tout $V \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ vérifiant $A_0 V = 0$ dans un voisinage de l'infini. Par un raisonnement récurrent, elle s'applique également aux fonctions qui vérifient (2.2.11).

Proposition 2.4.2.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n R^k A_k V_{n-k} = 0$ dans un voisinage de l'infini (indépendant de n). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, V_n admet un développement au voisinage de l'infini,

$$V_n(R, \sigma) \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{j=-\infty}^{j_0} \sum_{k=0}^{k_j} V_{n,j}^{(k)}(\sigma) R^j \frac{\ln^k(R)}{k!}, \quad j_0 \in \mathbb{Z}, k_j \in \mathbb{N}.$$

Preuve :

Quitte à considérer $(1 - \chi)V_n$ plutôt que V_n , nous pouvons supposer que $V_n \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons démontrer le résultat annoncé par récurrence sur n , et pour chaque V_n nous allons vérifier les deux hypothèses du théorème 2.4.1 sur $\mathfrak{M}\{V_n\}(\lambda)$. Soit $G_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_N)$ tel que $A_0 V_0 = G_0$. On a bien sûr par hypothèse $G_0 = 0$ au voisinage de l'infini et de plus G_0 est très régulier, on voit donc que G_0 rentre dans le cadre des hypothèses du théorème 2.4.1, donc d'après la proposition 2.4.1 ci-dessus

V_0 également. Supposons maintenant que V_0, V_1, \dots, V_{n-1} vérifient le résultat voulu. Soit maintenant $G_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_N)$ à support compact tel que $A_0 V_n = G_n - \sum_{k=1}^n R^k A_k V_{n-k}$. Alors la proposition 2.4.1 ci-dessus montre que V_n rentre dans le cadre des hypothèses du théorème 2.4.1. ■

On peut appliquer la proposition précédente aux termes du champ proche, puisque nous leur avons imposé d'appartenir à $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ et de vérifier des "équations emboîtées" c'est-à-dire $\sum_{k=0}^n A_{n-k} U_k^\varepsilon = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Selon le théorème 2.4.2, chacun des U_n^ε peut être développé suivant

$$U_n^\varepsilon \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{p=-\infty}^{p_n} R^p U_{n,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln r), \quad p_n \in \mathbb{Z}, \quad U_{n,p}^\varepsilon := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_p} \mathfrak{M}\{U_n^\varepsilon \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) R^{\lambda-p} d\lambda. \quad (2.4.3)$$

Le fait qu'une famille de fonctions V_n , $n \in \mathbb{N}$ satisfait les équations de la proposition 2.4.2 entraîne à nouveau des relations algébriques entre les termes des développements des V_n .

Lemme 2.4.1.

Soit $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite satisfaisant $V_n \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ et $\sum_{k=0}^n R^k A_k V_{n-k} = 0$ dans un voisinage de l'infini (indépendant de n) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors on a les identités

$$\sum_{j=-n}^q r^{-j} A_{q-j} r^j V_{n+j,j} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

où $V \underset{R \rightarrow \infty}{\propto} \sum_{q=-\infty}^n r^q V_q(R, \boldsymbol{\sigma})$ avec $V_q(R, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{k=0}^{k_q} V_q^{(k)}(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\ln^k r}{k!}$, $k_q \in \mathbb{N}$.

Preuve :

Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ et un $q \in \mathbb{Z}$ arbitraires mais fixés jusqu'à la fin de la preuve. D'après la proposition 2.4.2 chacune des fonctions V_n admet un développement radial par rapport à R au voisinage de l'infini. On a alors

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{k=0}^{n+q} R^k A_k V_{n+q-k} &= \sum_{j=-n}^q R^{q-j} A_{q-j} V_{n+j} \\ &= \sum_{j=-n}^q R^{q-j} A_{q-j} \left(\underbrace{\sum_{p=j}^{n+j} R^p V_{n+j,p}}_{1^{\text{ere}} \text{ somme}} \right) + \underbrace{\sum_{j=-n}^q R^{q-j} A_{q-j} \left(V_{n+j} - \sum_{p=j}^{n+j} R^p V_{n+j,p} \right)}_{2^{\text{eme}} \text{ somme} \in \mathcal{W}_q^\infty(\Omega)} \end{aligned}$$

Notons que la première somme ci-dessus ne peut appartenir à $\mathcal{W}_q^\infty(\Omega)$ sauf si elle est nulle. On a donc nécessairement

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=-n}^q \sum_{p=j}^{n+j} R^{-j} A_{q-j} R^p V_{n+j,p} = \sum_{p=j+k} \sum_{k=0}^n R^k \underbrace{\sum_{j=-n}^q R^{-(j+k)} A_{q-j} R^{j+k} V_{n+j,j+k}}_{\text{polynôme en } \ln(R)} \\ \implies 0 &= \sum_{j=-n}^q R^{-j} A_{q-j} R^j V_{n+j,j} \end{aligned}$$

2.5 Principe de Raccord

Dans cette section nous allons formuler une troisième condition, en sus de (2.2.10) et (2.2.11), qui permettra d'assurer que l'erreur de raccord $E_T^N(\varepsilon)$ tend convenablement vers 0. À l'issue de l'étude qui

précède nous avons à présent à notre disposition une représentation formelle à la fois des termes de champ lointain, avec (2.3.6), et des termes de champ proche, avec (2.4.3). Notons que dans ces expressions les $u_{n,j}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln r)$ et les $U_{n,j}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln r)$ sont des polynômes en $\ln(r)$ et $\ln(R)$ respectivement.

C'est à l'aide des $u_{n,j}^\varepsilon$ et des $U_{n,j}^\varepsilon$ que nous exprimons cette condition supplémentaire. En reprenant la discussion que nous avons menée au §1.7, nous imposons aux développements par rapport à r des u_n^ε et des $\Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon$ d'être égaux. Cette condition se traduit par

Principe de raccord

$$u_{n,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r)) = U_{n+p,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r/\varepsilon)) \quad \forall n, p \in \mathbb{Z}. \quad (2.5.1)$$

en posant par convention que $u_{n,p}^\varepsilon = U_{n,p}^\varepsilon = 0$ dès que $n \leq 0$. Il s'agit ici d'égalités entre polynômes en $\ln(r)$ à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, et qui dépendent *a priori* de ε . Remarquons par ailleurs que

$$\Xi_*^\varepsilon \{ \varepsilon^{n+p} R^p U_{n+p,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(R)) \} = \varepsilon^n r^p U_{n+p,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r/\varepsilon))$$

Incidence directe du principe de raccord Notons que les identités imposées par le principe de raccord ont des conséquences sur les u_n^ε et les U_n^ε eux-mêmes. En effet choisissons un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et un $p < -n$. On a avec nos conventions et le principe de raccord $u_{n,p}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon = 0$. D'après (2.3.6) et la définition (2.3.1) on en tire que

$$u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De même choisissons un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire et un $p > n$. On a alors $U_{n,p}^\varepsilon = \Xi_*^{\varepsilon^{-1}} u_{n-p,p}^\varepsilon = 0$. D'après (2.4.3) et la définition (2.4.1) on en déduit que

$$U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.6 Estimation des termes d'erreur

Pour résumer notre démarche depuis la section 2.2, nous avons cherché à imposer des conditions sur les u_n^ε et les U_n^ε permettant de minimiser les trois termes d'erreurs de (2.2.9). Nous avons donc choisi d'imposer (2.2.10), (2.2.11) et (2.5.1). La condition (2.2.10) permet de minimiser l'erreur de champ lointain (en fait cela annule carrément l'erreur),

$$E_F^N(\varepsilon) = \| A \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon \|_{\gamma_0^0(Z_F^\varepsilon)} + \| C \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon \|_{L^2(\Gamma)} = 0 \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (2.6.1)$$

tandis que (2.2.11) va permettre une estimation partielle de l'erreur de champ proche, et de même (2.5.1) permettra une estimation de l'erreur de raccord. C'est ce que l'on démontre dans les deux paragraphes suivants.

2.6.1 Estimation de l'erreur de champ proche

Proposition 2.6.1.

Si les suites (U_n^ε) et (u_n^ε) satisfont les équations (2.2.10), (2.2.11) et (2.5.1) alors, m étant l'ordre de l'opérateur A , il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$E_N^N(\varepsilon) = \| A \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \|_{\gamma_0^0(Z_N^\varepsilon)} + \| \Xi_*^{\varepsilon^{-1}} B \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon \|_{\mathcal{K}(\Gamma_N)} \leq \kappa \varepsilon^{(N-m)/2} \sum_{n=0}^N \| U_n^\varepsilon \|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)}$$

Preuve :

Nous découpons cette preuve en deux parties correspondant respectivement à l'estimation du terme volumique contenant A et à l'estimation du terme de bord contenant B . Notons au préalable que pour $(R, \sigma) \in \Xi^{\varepsilon, -1}(Z_n^\varepsilon)$ on a $R \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$ suivant la définition de Z_n^ε donnée au §2.2.1. Ainsi il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{\mathcal{Y}_0^0(Z_n^\varepsilon)} \leq \kappa \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} v\|_{\mathcal{W}_0^0(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_n^\varepsilon))} \quad \forall v \in L^2(Z_n^\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

Estimation du terme volumique On a $A \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon = \sum_{n=0}^N \varepsilon^n A \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon$, et pour chaque terme on peut développer l'opérateur A en utilisant la décomposition $r^m A = \sum_{n=0}^N r^n A_n + r^N R_N$ introduite au §2.1.4. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \Xi_*^{\varepsilon, -1} A \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^m R^m} \sum_{k=0}^{N-n} \varepsilon^k R^k A_k(\sigma, \partial_\sigma, R \partial_R) U_n^\varepsilon + (\varepsilon R)^{N-m-n+1/2} R_{N-n+1/2}(\varepsilon R, \sigma, \partial_\sigma, R \partial_R) U_n^\varepsilon. \\ \Xi_*^{\varepsilon, -1} A \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon^m R^m} \sum_{k=0}^N \varepsilon^{N-k} \sum_{n=0}^{N-k} R^{N-k-n} A_{N-k-n}(\sigma, \partial_\sigma, R \partial_R) U_n^\varepsilon \\ &\quad + \varepsilon^{N-m+1/2} \sum_{n=0}^N R^{N-m-n+1/2} R_{N-n+1/2}(\varepsilon R, \sigma, \partial_\sigma, R \partial_R) U_n^\varepsilon. \end{aligned}$$

D'après les relations de récurrence (2.2.11) satisfaites par les U_n^ε , dans la deuxième égalité le premier terme du membre de droite est nul. En utilisant la remarque préliminaire on voit qu'il reste à estimer les normes $\|R^{N-n-m+1/2} R_{N-n+1/2}(\varepsilon R, R \partial_R) U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^0(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_n^\varepsilon))}$. Il existe un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|R^{N-n-m+1/2} R_{N-n}(\varepsilon R, R \partial_R) U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^0(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_n^\varepsilon))} \leq \kappa \varepsilon^{-(N-m+1)/2} \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Dans cette dernière estimation nous avons utilisé le fait que les opérateurs R_n sont d'ordre m . On en tire donc l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|A \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^0(Z_n^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{(N-m)/2} \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Estimation du terme de bord On applique la même philosophie que celle utilisée pour le terme volumique. On développe l'opérateur B . Soit $\omega \subset \Omega_N$ un voisinage ouvert borné de Γ_N . En tirant partie des relations (2.2.11) et en utilisant l'estimation uniforme en ε fournie par (2.1.4) dans l'hypothèse **H2**, on obtient l'existence de $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|\Xi_*^{\varepsilon, -1} B \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{K}(\Gamma_N)} \leq \kappa \varepsilon^N \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon\|_{H^m(\omega)} \leq \kappa' \varepsilon^{(N-m)/2} \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

■

2.6.2 Estimation de l'erreur de raccord

Nous allons maintenant nous intéresser à l'erreur due au raccord, en mettant principalement en oeuvre le principe de raccord (2.5.1). Cependant ici nous avons affaire à des séries formelles en ε et r tronquées à un certain ordre par rapport à ε .

Proposition 2.6.2.

Soit (u_n^ε) une suite satisfaisant (2.2.10) telle que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et (U_n^ε) une suite satisfaisant (2.2.11) telle que $U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En reprenant les notations de (2.3.6) et (2.4.3),

m étant l'ordre de A , pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} E_T^N(\varepsilon) = \| [A, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} &\leq \kappa \varepsilon^{-m/2} \sum_{n=0}^N \sum_{p=-n}^{N-n} \| u_{n,p}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &\varepsilon^{(N-m)/2} \sum_{n=0}^N \| u_n^\varepsilon - \sum_{p < N-n+1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p \|_{\gamma_{N-n+1/2}^m(\Omega)} \\ &+ \varepsilon^{(N-m)/2} \sum_{n=0}^N \| U_n^\varepsilon - \sum_{p > -N+n-1/2} U_{n,p}^\varepsilon R^p \|_{\mathcal{W}_{-N+n-1/2}^m(\Omega_N)} \end{aligned}$$

Preuve :

Nous allons commencer par nous débarrasser du terme $[A, \chi^\varepsilon]$. Notons en effet que pour chaque n , $\|(r\partial_r)^n \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}$ reste borné quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En reprenant l'expression (2.2.7), on voit donc qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| [A, \chi^\varepsilon] \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{-m/2} \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \right\|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}$$

Raisonnons maintenant en terme de séries formelles. Sur la Fig.20 est représenté (zones 1 et 2) l'ensemble des termes $U_{n,p}^\varepsilon \neq 0$ dans le développement de $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon$ par rapport à R . Sur la Fig.21 est représenté (zones 3 et 4) l'ensemble des termes $u_{n,p}^\varepsilon$ dans le développement de $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon$ par rapport à r . Enfin, encore sur la figure Fig.21 (zones 4 et 5) sont représentés les termes du développement associé à $\Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon$.

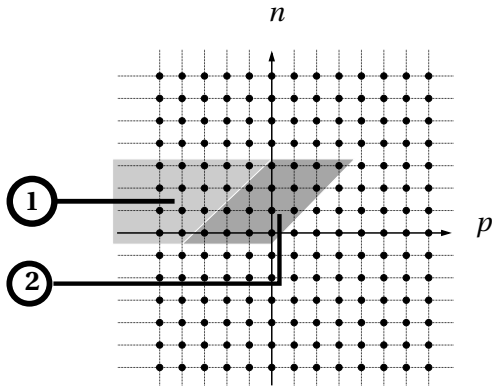


Fig.20 Support de $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon$

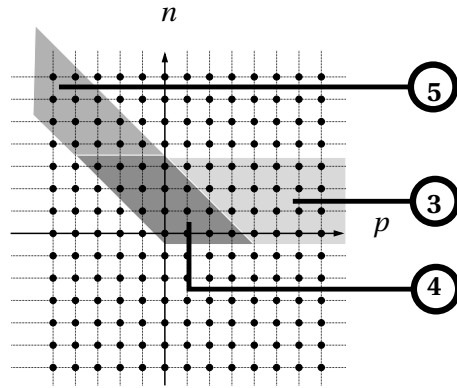


Fig.21 Support de $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon$ et $\Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon$

Nous voyons que les développements de $\sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon$ et $\Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon$ s'intersectent dans la zone 4. Notons Z_4 l'ensemble des couples (n, p) situés dans la zone 4. Remarquons également que la zone 4 de la Fig.21 est l'image par Ξ_*^ε de la zone 2 de la Fig.20, nous noterons Z_2 l'ensemble des couples (n, p) situés dans la zone 2. En résumé, d'après le principe de raccord on a donc

$$\Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \sum_{p=n-N}^n \varepsilon^n R^p U_{n,p}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon \sum_{(n,p) \in Z_2} \varepsilon^n R^p U_{n,p}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon \sum_{(n,p) \in Z_4} \varepsilon^{n+p} R^p U_{n+p,p}^\varepsilon = \sum_{n=0}^N \sum_{p=-n}^{N-n} \varepsilon^n r^p \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon$$

Nous ajoutons et retranchons cette quantité dans l'erreur de raccord. Par inégalité triangulaire on obtient

l'existence d'une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on ait

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n (u_n^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon) \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} &\leq \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \sum_{p=-n}^{N-n} \|u_{n,p}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ &+ \underbrace{\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left(u_n^\varepsilon - \sum_{p < N-n+1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p \right) \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}}_{= v_n^\varepsilon} + \underbrace{\left\| \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left(U_n^\varepsilon - \sum_{p > -N+n-1/2} U_{n,p}^\varepsilon R^p \right) \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)}}_{= V_n^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Nous allons successivement majorer les termes associés à v_n^ε et V_n^ε . D'après la définition (2.2.1) de la fonction χ^ε et celle des normes à poids, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on ait

$$\left\| \sum_{n=0}^N \varepsilon^n v_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{N/2} \sum_{n=0}^N \|v_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_{N-n+1/2}^m(\Omega)},$$

ce qui correspond à la majoration recherchée pour la partie de l'erreur reliée au champ lointain i.e. les v_n^ε . Passons au deuxième terme d'erreur. Cette fois-ci on procède d'abord à un changement de variable. De même que dans la démonstration de la proposition 2.6.1, pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_k > 0$ indépendant de ε tels que

$$\left\| \Xi_*^\varepsilon V \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa_k \|V\|_{\mathcal{Y}_0^m(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall V \in H^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ainsi il existe une autre constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que le terme d'erreur relié au champ proche soit majoré par

$$\left\| \Xi_*^\varepsilon \sum_{n=0}^N \varepsilon^n V_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{Y}_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{N/2} \sum_{n=0}^N \|V_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_{-N+n-1/2}^m(\Omega_N)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ceci permet de conclure la preuve. ■

2.6.3 Bilan sur l'estimation d'erreur

Pour résumer notre étude jusqu'à présent, nous avons été amenés à formuler des conditions suffisantes garantissant une estimation de $\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon)}$. Notre étude permet en réunissant les équations (2.2.8), (2.6.1) et les résultats des propositions 2.6.1 et 2.6.2 de formuler la proposition suivante.

Théorème 2.6.1.

Supposons que les suites (U_n^ε) et (u_n^ε) satisfont les équations (2.2.10), (2.2.11) et (2.5.1). Alors d'une part $u_n^\varepsilon \in \mathcal{Y}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \mathcal{Y}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et d'autre part pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $\eta \in \mathbb{R}$ indépendants de ε tels que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on ait

$$\begin{aligned} \left\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{\mathcal{J}(\Omega_\varepsilon)} &\leq \kappa \varepsilon^{\eta+(N-m)/2} \left\{ \sum_{n=0}^N \|u_n^\varepsilon - \sum_{p < N-n+1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p\|_{\mathcal{Y}_{N-n+1/2}^m(\Omega)} \right. \\ &+ \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon - \sum_{p > -N+n-1/2} U_{n,p}^\varepsilon R^p\|_{\mathcal{Y}_{-N+n-1/2}^m(\Omega_N)} \\ &\left. + \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Le théorème 2.6.1 va être par la suite un outil qui, sous réserve que les hypothèses **H0**..**H6** soient satisfaites, mènera plus rapidement à une estimation d'erreur permettant de valider un développement asymptotique. Il restera tout de même à majorer le membre de droite dans (2.6.2).

Remarque Avec ce théorème on se place dans le cas où le principe de raccord est satisfait par les u_n^ε et les U_n^ε . Il est tout à fait possible de proposer un résultat analogue dans le cas où le principe de raccord (2.5.1) n'est pas satisfait exactement en supposant cependant que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit de réunir telles quelles les propositions 2.6.1 et 2.6.2. Cette remarque sera utile au chapitre 7.

2.6.4 Estimation dans le cas d'un développement régulier

Pour obtenir une majoration convenable, il suffirait que pour chaque N les sommes apparaissant dans le membre de droite de (2.6.2) soient bornées par une puissance fixe de ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Dans la proposition suivante on fournit un critère permettant de vérifier cela. Il s'agit du cas où on peut trouver un ansatz avec des termes indépendants de ε (cf la discussion au §2.2.2).

Proposition 2.6.3.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des fonctions de jauges $\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_{q_n}(\varepsilon)$ et des fonctions $u_n^{[0]}, u_n^{[1]} \dots u_n^{[q_n]}$ telles que

$$u_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{q_n} \delta_q(\varepsilon) u_n^{[q]} \quad \text{avec} \quad u_n^{[q]} \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \delta_{q+1}(\varepsilon) = o(\delta_q(\varepsilon)). \quad (2.6.3)$$

Alors pour tout N il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\sum_{n=0}^N \|u_n^\varepsilon - \sum_{p \leq N-n+1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p\|_{\mathcal{V}_{N-n+1/2}^m(\Omega)} \leq \kappa_N \delta_0(\varepsilon).$$

Preuve :

Sous les hypothèses correspondant à l'énoncé de cette proposition, on voit facilement qu'il existe pour chaque $u_{n,p}^\varepsilon$ une décomposition de la forme $u_{n,p}^\varepsilon = \sum_{q=0}^{q_n} \delta_q(\varepsilon) u_{n,p}^{[q]}$. Pour chaque q (et pour un n donné) on sait qu'il existe un $v_n^{[q]} \in \mathcal{V}_{N-n+1/2}^m(\Omega)$ indépendant de ε tel que $u_n^{[q]} = \sum_{p \leq N-n} u_{n,p}^{[q]} r^p + v_n^{[q]}$. Ainsi on en tire l'estimation d'erreur

$$\sum_{n=0}^N \|u_n^\varepsilon - \sum_{p \leq N-n+1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p\|_{\mathcal{V}_{N-n+1/2}^m(\Omega)} \leq \sum_{n=0}^N \sum_{q=0}^{q_n} \delta_q(\varepsilon) \|v_n^{[q]}\|_{\mathcal{V}_{N-n+1/2}^m(\Omega)}$$

En se rappelant que pour tout q , $\delta_{q+1}(\varepsilon) = o(\delta_q(\varepsilon))$, ceci fournit la conclusion recherchée. ■

En pratique (chapitres 3, 4 et 6) les $\delta_q(\varepsilon)$ seront des fonctions élémentaires de $\ln(\varepsilon)$ et on aura $\delta_0(\varepsilon) = O(|\ln \varepsilon|^p)$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$. Par la même technique on démontre un résultat similaire portant sur les erreurs reliées au champ proche.

Proposition 2.6.4.

Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe des fonctions de jauges $\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \dots, \delta_{q_n}(\varepsilon)$ et des fonctions $U_n^{[0]}, U_n^{[1]} \dots U_n^{[q_n]}$ telles que

$$U_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{q_n} \delta_q(\varepsilon) U_n^{[q]} \quad \text{avec} \quad U_n^{[q]} \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \delta_{q+1}(\varepsilon) = o(\delta_q(\varepsilon)). \quad (2.6.4)$$

Alors pour tout N il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon - \sum_{p \geq n-N} U_{n,p}^\varepsilon R^p\|_{\mathcal{W}_{-N+n-1/2}^m(\Omega_N)} + \sum_{n=0}^N \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} \leq \kappa_N \delta_0(\varepsilon)$$

Exemple

Dans le chapitre 1 par exemple, le champ proche et le champ lointain étaient tous deux de la forme annoncée par l'équation (1.4.9)

$$u_n^\varepsilon = \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m \varepsilon u_n^{[m]}, \quad U_n^\varepsilon = \sum_{m=0}^{M_n} \ln^m \varepsilon U_n^{[m]}.$$

Cette forme a été utilisée pour obtenir les équations (1.5.1) et (1.6.2) qui permettent des estimations d'erreur. Cette forme a également été utilisée dans la preuve de la proposition 1.7.1.

2.6.5 Conclusions : construire un développement en pratique

Dans ce petit paragraphe nous voudrions dresser une vue d'ensemble du raisonnement que nous avons mené jusqu'à présent. Tout d'abord le type de problème auquel s'applique cette étude est précisé par la section 2.1 et par les hypothèses **H0**, ... **H6**. Le but de cette étude est de donner un moyen rapide de construire un développement de la solution u^ε du problème (\mathcal{P}^ε).

Dans les chapitres ultérieurs pour construire un développement de la forme (2.2.2) et (2.2.4), nous chercherons des fonctions u_n^ε et U_n^ε satisfaisant (2.2.3), (2.2.5) d'une part et (2.2.10), (2.2.11), (2.5.1) d'autre part. Ces équations sont résumées ci-dessous, elles doivent être satisfaites pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} Au_n^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad Cu_n^\varepsilon = 0, & & u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \sum_{k=0}^n R^k A_k U_k^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon = 0 & & U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N) \\ u_{n,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r)) = U_{n+p,p}^\varepsilon(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r/\varepsilon)) & & \forall n, p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Le développement ainsi proposé vérifiera alors l'estimation de la proposition 2.6.1. Il restera donc à majorer les termes de reste situés dans le membre de droite de cette inégalité. Mais une grosse partie du travail d'estimation sera déjà fait.

Les équations de raccord ne se prêtent pas bien, telles quelles, aux méthodes standard (variationnelles par exemple) de résolution des EDP. La fin de ce chapitre vise à les rendre plus utilisables en pratique.

2.7 Étude détaillée du principe de raccord

Le but de cette section est de rendre plus exploitable, dans la pratique les équations de raccord (2.5.1). Pour ceci nous allons étudier en détail ce qu'implique les équations (2.2.10) et (2.2.11), d'un point de vue algébrique, sur les développements par rapport à r et R des u_n^ε et U_n^ε respectivement.

Dans un premier temps nous introduirons quelques notations supplémentaires, et notamment nous donnerons un sens au noyau de A comme opérateur agissant dans un espace de séries formelles. Nous exhiberons ensuite une décomposition particulière des éléments de ce noyau. Enfin nous exploiterons cette décomposition pour réécrire le principe de raccord.

2.7.1 Espace de séries formelles

Nous définissons ici un espace vectoriel utile pour réaliser des calculs impliquant les développements des u_n^ε et des U_n^ε par rapport à r et R . Tout d'abord, en reprenant les expressions (2.3.6) et (2.4.3), on constate que ces développements se font suivant des termes de la forme $r^\lambda \times$ polynôme en $\ln(r)$ ou $\ln(R)$. Nous introduisons donc l'espace des polynômes logarithmiques

$$\mathbb{P}_{\log} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}_{\log}^n \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\log}^n = \left\{ a(r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{q=0}^n a^{(q)}(\boldsymbol{\sigma}) \ln^q r \mid a^{(q)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \right\} \quad (2.7.1)$$

$$\|a\|_{\log, k}^2 := \sum_{q=0}^n \|a^{(q)}\|_{H^k(\mathcal{S})}^2 \quad \text{lorsque} \quad a(r, \boldsymbol{\sigma}) = \sum_{q=0}^n a^{(q)}(\boldsymbol{\sigma}) \ln^q r \in \mathbb{P}_{\log}^n, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nous introduisons également une notation, que nous avons déjà utilisée au chapitre 1 pour les éléments de \mathbb{P}_{\log}^1 . Cette notation ne sera pas utile dans ce chapitre mais nous nous en servirons constamment dans les chapitres ultérieurs,

$$\forall a \in \mathbb{P}_{\log} \quad d^\circ a := \text{degré de } a(\boldsymbol{\sigma}, \ln(r)) \text{ en tant que polynôme en } \ln(r).$$

En particulier $d^\circ a = 0$ implique que a n'est fonction que de $\boldsymbol{\sigma}$. Notons par ailleurs que, par exemple lorsque $a \in \mathbb{P}_{\log}$ et $d^\circ a = 1$ c'est-à-dire $a(R, \boldsymbol{\sigma}) = a^{(0)}(\boldsymbol{\sigma}) + a^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) \ln(R)$, on a alors $\Xi_* a = a^{(0)}(\boldsymbol{\sigma}) + a^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) \ln(1/\varepsilon) + a^{(1)}(\boldsymbol{\sigma}) \ln(r) \in \mathbb{P}_{\log}$. À présent nous introduisons un espace de séries formelles à coefficients dans \mathbb{P}_{\log} auquel appartiennent les développements des u_n^ε . On définit

$$\mathbb{H} := \left\{ (r^p v_p) \in \prod_{\mu \in \mathbb{Z}} (r^\mu \mathbb{P}_{\log}) \mid \exists p_0 \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } v_p = 0 \text{ dès que } p \leq p_0 \right\}. \quad (2.7.2)$$

Notons que si $\mathbb{H} \not\subset \mathbb{P}_{\log}^{\mathbb{Z}}$, il y a toutefois un isomorphisme évident entre \mathbb{H} et $\{(v_p)_p \in \mathbb{P}_{\log}^{\mathbb{Z}} \mid \exists p_0 \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } v_p = 0 \text{ dès que } p < p_0\}$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{P}_{\log}^{\mathbb{Z}}$. Étant donnée une famille (v_p) d'éléments de \mathbb{P}_{\log} , on lui associe la famille $(r^p v_p)$ que l'on renotera

$$\sum_{\#p} r^p v_p := (r^p v_p)_{p \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{H} \quad \text{pour } (v_p) \in \mathbb{P}_{\log}^{\mathbb{Z}} \text{ t.q. } \exists p_0 \in \mathbb{Z} \text{ et } v_p = 0 \text{ dès que } p < p_0$$

Il ne s'agit que d'une notation et en aucun cas nous ne supposons qu'il s'agit ci-dessus d'une somme convergente (c'est la raison d'être du "#"). D'après la proposition 2.3.1, si une fonction $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ vérifie $Av = 0$, on peut lui associer un élément de \mathbb{H} suivant les formules (2.3.5). C'est le cas par exemple de chacun des u_n^ε . On définit enfin, de façon tout à fait standard, un ensemble d'opérations sur \mathbb{H} .

$$\begin{aligned} r \partial_r \left(\sum_{\#p} r^p v_p \right) &:= \sum_{\#p} r^p \left(p v_p + r \partial_r v_p \right) \\ \partial_\sigma^\alpha \left(\sum_{\#p} r^p v_p \right) &:= \sum_{\#p} r^p \partial_\sigma^\alpha v_p, \quad \alpha \in \mathbb{N}^{n-1} \\ r^q \sum_{\#p} r^p v_p &:= \sum_{\#p} r^p w_p \quad \text{avec} \quad w_p = v_{p-q} \quad \forall p \in \mathbb{Z} \\ A \sum_{\#p} r^p v_p &:= r^{-m} \sum_{\#p} r^p \left(\sum_{k=p_0}^p r^{-k} A_{p-k} r^k v_k \right) \quad \text{lorsque } v_p = 0 \text{ dès que } p \leq p_0. \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

Ci-dessus m désigne l'ordre de l'opérateur A comme dans (2.1.3). Ces définitions permettent de définir par exemple $A_0 v$ pour $v \in \mathbb{H}$. Définies comme ci-dessus A et A_0 apparaissent comme des applications linéaires de \mathbb{H} dans lui-même. On peut en particulier définir leur noyau

$$\text{Ker}(A|\mathbb{H}) := \{ v \in \mathbb{H} \text{ tel que } Av = 0 \} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(A_0|\mathbb{H}) := \{ v \in \mathbb{H} \text{ tel que } A_0 v = 0 \}.$$

2.7.2 Première description des éléments du noyau de A

Nous allons chercher la forme exacte que prennent les éléments de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$. Partons d'une série formelle $v = (r^p v_p) \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$ et soit $\mu = \min\{p \in \mathbb{Z} \mid v_p \neq 0\}$. On a alors d'après la définition (2.7.3) de l'action de A dans \mathbb{H} ,

$$\sum_{p=\mu}^n r^{-p} A_{n-p} r^p v_p = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{si } \mu = \min\{p \in \mathbb{Z} \mid v_p \neq 0\}. \quad (2.7.4)$$

En particulier $A_0(r^\mu v_\mu) = 0$ c'est-à-dire que $r^\mu v_\mu$ est dans le noyau de A_0 restreint à l'espace $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$. Pour construire une série formelle en r appartenant au noyau de A en commençant par son terme de plus bas degré (si p_0 est ce plus bas degré); il faut donc choisir un élément du noyau de A_0 restreint à $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$, ensemble que nous noterons $\text{Ker}(A_0| r^\mu \mathbb{P}_{\log})$.

Exemple

Dans le cas d'un problème de Helmholtz en 2D, on a $A_0 = (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a $\text{Ker}(A_0| r^\lambda \mathbb{P}_{\log}) = \{a^+ r^\lambda e^{i|\lambda|\varphi} + a^- r^\lambda e^{-i|\lambda|\varphi}, a^\pm \in \mathbb{C}\}$. Si $\sum_{n \geq 0} r^{\lambda+n} a_n(\varphi, \ln r)$ est une série formelle appartenant au noyau de A alors nécessairement $a_0(\varphi, r) = a_0(\varphi) = a_0^+ e^{i\lambda\varphi} + a_0^- e^{-i\lambda\varphi}$ avec $a_0^\pm \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire $r^\lambda a_0(\varphi) \in \text{Ker}(A_0| r^\lambda \mathbb{P}_{\log})$.

Pour construire les termes d'ordre supérieur $v_{\mu+n}$ d'un élément de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$, on aurait envie d'utiliser la relation (2.7.4) dans laquelle on inverserait A_0 restreint à $r^{\mu+n} \mathbb{P}_{\log}$, le problème est que sur cet espace A_0 n'est pas inversible puisque son noyau n'est en général pas réduit à $\{0\}$. Nous allons néanmoins voir comment construire un "pseudo-inverse".

Exemple

Le procédé de construction d'éléments du noyau de A que nous décrivons ici correspond exactement à celui que nous avons mis en oeuvre au chapitre 1 pour définir les fonctions de Bessel. Lors de cette construction est intervenue une matrice dans la formule (1.3.7) qui a joué le rôle de l'opérateur A_0 .

2.7.3 Construction d'un inverse à droite

Si l'opérateur A_0 restreint à chaque $r^\lambda \mathbb{P}_{\log}$ n'est pas injectif, il est en revanche toujours surjectif. Nous allons donc avoir recours à un inverse à droite. La construction d'un tel opérateur est un résultat classique que l'on peut trouver par exemple dans le premier chapitre de [78].

Proposition 2.7.1.

Sous les hypothèses **H3**, **H4** et **H5** du §2.1.5, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ il existe un inverse à droite pour $A_0 : r^\lambda \mathbb{P}_{\log} \rightarrow r^\lambda \mathbb{P}_{\log}$ noté $A_0^{(-1)}$. Par conséquent il existe aussi un inverse à droite pour $A_0 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ noté également $A_0^{(-1)}$.

Attention, il n'y pas unicité de l'inverse à droite. Nous allons explicitement en construire un mais on pourrait en proposer d'autres. Puisque chaque espace $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$ est stable par A_0 , notons que construire un inverse à droite sur tout \mathbb{H} pour A_0 revient à construire un inverse à droite de A_0 restreint à $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$ pour chaque $\mu \in \mathbb{Z}$. Dans ce qui suit immédiatement nous allons donc construire un inverse à droite restreint à chaque espace $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$. Une application très simple de la formule des résidus nous fournit

$$\mathfrak{M}\left\{r^\mu \frac{\ln^n(r)}{n!} \mathbf{1}_{r < 1}\right\}(\lambda) = \frac{-1}{(\lambda - \mu)^{n+1}} \text{ pour } \Re\{\lambda - \mu\} < 0 \quad \text{et} \quad r^\mu \frac{\ln^n(r)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} \frac{-r^\lambda d\lambda}{(\lambda - \mu)^{n+1}}.$$

ce qui nous amène à associer à tout $g(r) \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}$ la fonction méromorphe $\mathfrak{M}\{g(r) \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda)$. On construit alors notre inverse à droite à partir de cette fonction méromorphe et de la formule des résidus

$$A_0^{(-1)} g := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{g \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) r^\lambda d\lambda, \quad g \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}. \quad (2.7.5)$$

Il est clair que ceci définit un inverse à droite $A_0 A_0^{(-1)} g = g$ pour tout $g \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}$. Vue la définition de \mathbb{H} cf. (2.7.2), la construction ci-dessus nous fournit également un inverse à droite de A_0 sur \mathbb{H} tout entier. L'inverse à droite que nous proposons satisfait en quelque sorte une propriété de continuité dans \mathbb{P}_{\log} .

Lemme 2.7.1.

Si $A_0^{(-1)}$ est défini par restriction à $r^\lambda \mathbb{P}_{\log}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ suivant (2.7.5) alors pour tout $\mu \in \mathbb{Z}$ et tout $n, k \in \mathbb{N}$ il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $\kappa \in \mathbb{R}, \kappa > 0$ tels que

$$\forall a \in \mathbb{P}_{\log}^n \quad r^{-\mu} A_0^{(-1)} r^\mu \cdot a \in \mathbb{P}_{\log}^p \quad \text{et} \quad \| r^{-\mu} A_0^{(-1)} r^\mu \cdot a \|_{\log, k} \leq \kappa \| a \|_{\log, q}$$

Preuve :

Considérons $\mu \in \mathbb{Z}$ et $n, k \in \mathbb{N}$ arbitraires fixés jusqu'à la fin de la preuve. Notons que $a \in \mathbb{P}_{\log}^n$ si et seulement si $\mathfrak{M}\{r^\mu a \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda)$ admet un pôle d'ordre au plus n au voisinage de μ . Soit p l'ordre du pôle de $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$ au voisinage de 0. Si $\mathfrak{M}\{r^\mu a \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda)$ a un pôle d'ordre au plus n au voisinage de μ alors $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda) \cdot \mathfrak{M}\{r^\mu a \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda)$ admet un pôle d'ordre au plus $n+p$. D'où l'on tire que si $a \in \mathbb{P}_{\log}^n$ alors $r^{-\mu} A_0^{(-1)} r^\mu a \in \mathbb{P}_{\log}^{n+p}$. La deuxième propriété annoncée provient du fait que $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$ est valué dans $\mathcal{O}_q(\mathcal{S})$ pour un certain $q \in \mathbb{Z}$ suivant l'hypothèse **H5**. ■

L'opérateur $A_0^{(-1)}$ est un inverse à gauche pour A_0 restreint à $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$ si et seulement si $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ est analytique au voisinage de μ i.e. si et seulement si μ n'est pas un exposant singulier de A_0 . Dans le cas général cependant, $A_0^{(-1)} A_0$ est un projecteur de \mathbb{H} dans lui-même. En effet un calcul quasi immédiat fournit $(A_0^{(-1)} A_0)^2 = A_0^{(-1)} A_0$. De même on note que

$$[A_0, A_0^{(-1)}] := A_0 A_0^{(-1)} - A_0^{(-1)} A_0 = \text{Id}_{\mathbb{H}} - A_0^{(-1)} A_0$$

est aussi un projecteur de \mathbb{H} sur $\text{Ker}(A_0 | \mathbb{H})$. Ce dernier opérateur, outre le fait d'être un projecteur, a d'autres propriétés très intéressantes. En voici une :

Lemme 2.7.2.

Étant donné un $v \in \text{Ker}(A | \mathbb{H})$, si $[A_0, A_0^{(-1)}] v = 0$ alors $v = 0$.

Preuve :

Considérons un $v \in \text{Ker}(A | \mathbb{H})$ tel que $[A_0, A_0^{(-1)}] v = 0$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $v = \sum_p r^p v_p \neq 0$. Il existe donc un $p \in \mathbb{N}$ pour lequel $v_p \neq 0$. Notons alors $\mu = \min\{p \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } v_p \neq 0\}$. D'après les relations (2.7.4), on a nécessairement $A_0(r^\mu v_\mu) = 0$ ce qui implique en multipliant à gauche $A_0^{(-1)} A_0(r^\mu v_\mu) = 0$. Finalement on a donc $r^\mu v_\mu = [A_0, A_0^{(-1)}] r^\mu v_\mu = 0$, d'où une absurdité et le résultat. ■

Dans le contexte des sections précédentes, nous nous intéressons au cas où $[A_0, A_0^{(-1)}]$ agit sur un $\sum_p r^p v_p \in \text{Ker}(A | \mathbb{H})$ obtenu comme le développement par rapport à r d'un $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$. La correspondance entre chaque v_p et v lui-même est alors donnée par la formule (2.3.5). Ceci nous amène à introduire, pour chaque exposant singulier $\mu \in \text{spec}(A_0)$, deux opérateurs linéaires que nous noterons $\ell_\mu(\cdot)$ et $L_\mu(\cdot)$ agissant respectivement sur un élément $u \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ et sur un élément $U \in \cup_{\alpha \in \mathbb{R}} \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ dont les transformées de Mellin sont méromorphes avec des pôles sur \mathbb{Z} suivant la formule

$$\begin{aligned} \ell_\mu(u) &:= r^{-\mu} [A_0, A_0^{(-1)}] \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) r^\lambda d\lambda. \\ L_\mu(U) &:= r^{-\mu} [A_0, A_0^{(-1)}] \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) r^\lambda d\lambda. \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

Pour que de telles expressions aient un sens, nous aurons obtenu le cas échéant que $\mathfrak{M}\{u\}(\lambda)$ ou $\mathfrak{M}\{U\}(\lambda)$ soient méromorphes dans $\mathbb{C} \setminus \text{spec}(A_0)$. Dans la plupart des cas nous utiliserons un résultat tel que la proposition 2.3.1 ou la proposition 2.4.2. En particulier si u_n^ε et U_n^ε satisfont (2.2.10) et (2.2.11) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$, $\ell_p(u_n^\varepsilon)$ et $L_p(U_n^\varepsilon)$ sont bien définis. Par ailleurs on a même

$$\ell_p(u_n^\varepsilon) = \ell_p(r^p u_{n,p}^\varepsilon) \quad \text{et} \quad L_p(U_n^\varepsilon) = L_p(R^p U_{n,p}^\varepsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Formulons quelques remarques supplémentaires au sujet de ces applications linéaires. Rappelons que pour deux fonctions $v, w \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ coïncidant sur un voisinage de I , $\mathfrak{M}\{v-w\} \mathbf{1}_{r<1}(\lambda)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier de sorte que si $\ell_\mu(v)$ ou $\ell_\mu(w)$ existe alors $\ell_\mu(v) = \ell_\mu(w)$. Par ailleurs si $\ell_\mu(v)$ existe

$$\ell_\mu(v) = 0 \quad \text{lorsque} \quad v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega) \quad \text{avec} \quad \alpha > \mu.$$

Pour interpréter le sens des ℓ_μ considérons $\sum_{\#p} r^p v_p \in \mathbb{H}$ obtenu comme le développement formel par rapport à r de $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$, les $v_{p,q}$ étant alors liés aux v_n suivant la formule (2.3.6). On a donc

$$[A_0, A_0^{(-1)}] \sum_{\#p} r^p v_p = \sum_{\#p} r^p \left(r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p v_p \right) = \sum_{\#p} r^p \ell_p(v).$$

2.7.4 Exemples explicites

Dans ce court paragraphe nous allons donner une expression plus explicite pour le projecteur $[A_0, A_0^{(-1)}]$ dans le cas où $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est linéaire ou polynômial d'ordre 2 par rapport à λ . En particulier nous donnerons une expression plus directe des opérateurs $\ell_\mu(\cdot)$ définis ci-dessus. Nous explicitons dans un premier temps l'effet de $[A_0, A_0^{(-1)}]$ sur un élément $g \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}$. Commençons par donner une expression étendue de $[A_0, A_0^{(-1)}]$ à l'aide de la définition (2.7.5) de $A_0^{(-1)}$,

$$[A_0, A_0^{(-1)}] g = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{[A_0, \mathbf{1}_{r<1}] g\}(\lambda) r^\lambda d\lambda, \quad \forall g \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}. \quad (2.7.7)$$

Par définition on a $[A_0, \mathbf{1}_{r<1}] g = A_0(\mathbf{1}_{r<1} g) - (A_0 g) \mathbf{1}_{r<1}$. Évaluons le terme $\mathfrak{M}\{\cdot\}$. Pour ceci décomposons $\mathcal{A}_0(\lambda)$ selon son développement de Taylor au voisinage de μ en écrivant

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = \mathcal{A}_0(\mu) + (\lambda - \mu) \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(\mu) + \frac{(\lambda - \mu)^2}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(\mu).$$

Un calcul élémentaire faisant intervenir des intégrations par partie nous donne alors

$$\mathfrak{M}\{[A_0, \mathbf{1}_{r<1}] g\}(\lambda) = \left[\frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(\mu) + \frac{\lambda - \mu}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(\mu) \right] \cdot g|_{r=1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(\mu) \cdot (r\partial_r - \mu) g|_{r=1}$$

En injectant cette égalité dans l'équation (2.7.7) on en tire une expression explicite (faisant intervenir une intégrale de Cauchy) de l'opérateur $[A_0, A_0^{(-1)}]$ lorsqu'il agit sur un élément de $r^\mu \mathbb{P}_{\log}$. Maintenant supposons que $g \in r^\mu \mathbb{P}_{\log}$ soit un terme du développement asymptotique d'un $u \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$. La correspondance entre g et u est alors donnée par la formule (2.3.6), d'après laquelle on obtient

$$g|_{r=1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta \quad \text{et} \quad (r\partial_r - \mu) g|_{r=1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} (\zeta - \mu) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta$$

Notons qu'il est en définitive très facile d'interpréter ces formules. En effet supposons que g se développe de la manière suivante $g(r) = r^\mu (g^{(0)} + g^{(1)} \ln r + \dots + g^{(k)} \ln^k r)$. Alors on voit par un calcul élémentaire que $g|_{r=1} = g^{(0)}$ et $(r\partial_r - \mu) g|_{r=1} = g^{(1)}$. Enfin tout ceci nous mène à une expression de $\ell_\mu(\cdot)$,

$$\begin{aligned} \ell_\mu(u) = & \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \left[\frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(\mu) + \frac{\lambda - \mu}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(\mu) \right] r^{\lambda - \mu} d\lambda \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta \\ & + \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(\mu) r^{\lambda - \mu} d\lambda \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_\mu} (\zeta - \mu) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Exemple

En reprenant l'exemple du chapitre 1, on peut ainsi dériver une expression explicite en terme de projecteurs spectraux des formes $\ell_\mu(\cdot)$. Donnons-nous un $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et supposons que l'on veuille calculer $\ell_q(\cdot)$. Introduisons pour un court moment $P_p : \mathcal{C}^\infty(S^1) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(S^1)$ telle que

$$(P_p v)(\varphi) = \frac{e^{ip\varphi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\alpha) e^{-ip\alpha} d\alpha.$$

Rappelons qu'il s'agit d'un projecteur $P_p^2 = P_p$. On a une décomposition explicite de $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = (\lambda^2 + \partial_\varphi^2)^{-1}$ en fonction des P_p ,

$$\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = \frac{P_0}{\lambda^2} + \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda - p} \frac{P_p + P_{-p}}{2p}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(q) = 2q \text{Id}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{A}_0}{\partial \lambda^2}(q) = \text{Id}$$

La somme ci-dessus converge au sens des semi-normes de $\mathcal{O}_0(S^1)$ (cf §2.1.5) par exemple. On obtient donc l'expression suivante en se servant de la formule (2.7.8)

$$\ell_q(u) = \frac{P_q + P_{-q}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft q} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2q} \frac{P_q + P_{-q}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft q} (\zeta - q) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta.$$

Pourvu que $\zeta \mapsto \mathfrak{M}\{u\}(\zeta)$ soit méromorphe à valeur dans $\mathcal{C}^\infty(S^1)$, la forme linéaire $\ell_0(u)$ est bien définie et à valeur \mathbb{P}_{\log} . Un calcul similaire pour $q = 0$ nous donne

$$\ell_0(u) = \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \zeta \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r<1}\}(\zeta) d\zeta.$$

C'est pour être en accord avec ces formules que nous avons fait un choix particulier de solutions à variables séparées dans (1.5.3).

2.7.5 Éléments particuliers du noyau de A.

Nous allons à présent construire des familles particulières d'éléments de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$ en reprenant le procédé que nous avons décrit précédemment. Partons d'un exposant singulier $\lambda \in \mathbb{Z}$. Nous définissons alors dans un premier temps

$$\mathfrak{h}_\lambda^\lambda : \mathbb{P}_{\log} \rightarrow \mathbb{P}_{\log}, \quad \mathfrak{h}_\lambda^\lambda := \text{Id}_{\mathbb{P}_{\log}} \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (2.7.9)$$

On construit alors d'autres opérateurs par récurrence en se basant sur la relation (2.7.4) et en utilisant l'inverse à droite du paragraphe précédent,

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_{\lambda+n}^\lambda : \mathbb{P}_{\log} \rightarrow \mathbb{P}_{\log}, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall \lambda \in \mathbb{Z}, \\ \mathfrak{h}_{\lambda+n}^\lambda := -r^{-(\lambda+n)} A_0^{(-1)} r^{\lambda+n} \sum_{l=0}^{n-1} r^{-(\lambda+l)} A_{n-l} r^{\lambda+l} \mathfrak{h}_{\lambda+l}^\lambda. \end{aligned} \quad (2.7.10)$$

Définie de cette manière, et en choisissant un a tel que $r^\lambda a \in \text{Ker}(A_0 | r^\lambda \mathbb{P}_{\log})$ la série formelle en r notée $\mathfrak{h}^\lambda[a] = \sum_{\#q \geq \lambda} r^q \mathfrak{h}_q^\lambda[a]$ satisfait bien les relations de récurrence (2.7.4). Étant donné un a tel que $r^\lambda a \in \text{Ker}(A_0 | r^\lambda \mathbb{P}_{\log})$, on a donc $\mathfrak{h}^\lambda[a] \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$. Par la suite nous poserons par convention

$$\mathfrak{h}_n^\lambda := 0 \quad \text{dès que } n < \lambda, \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}. \quad (2.7.11)$$

Étudions d'un peu plus près les propriétés de ces objets \mathfrak{h}_q^λ , $\lambda, q \in \mathbb{Z}$. Il est clair que \mathfrak{h}_q^λ agit linéairement de \mathbb{P}_{\log} dans \mathbb{P}_{\log} . Par ailleurs ces applications sont en un certain sens continues, comme le démontre le lemme suivant.

Lemme 2.7.3.

Pour tout $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ et tout $n, k \in \mathbb{N}$ il existe $p, q \in \mathbb{N}$ et $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ tels que

$$\forall a \in \mathbb{P}_{\log}^n \quad \mathfrak{h}_{\mu+\lambda}^{\mu} [a] \in \mathbb{P}_{\log}^p \quad \text{et} \quad \|\mathfrak{h}_{\mu+\lambda}^{\mu} [a]\|_{\log, k} \leq \kappa \|a\|_{\log, q}$$

Preuve :

D'après la définition des $\mathfrak{h}_{\mu+\lambda}^{\lambda}$ donnée par (2.7.10), il suffit de montrer que cette propriété est vérifiée par $r^{-(\mu+l)} A_{\lambda-l} r^{\mu+l}$ pour $l = 0 \dots \lambda - 1$ d'une part et $r^{-(\mu+\lambda)} A_0^{(-1)} r^{\mu+\lambda}$ d'autre part. Pour ce qui concerne les opérateurs $r^{-(\mu+l)} A_{\lambda-l} r^{\mu+l}$ il s'agit d'une conséquence du fait qu'ils sont polynômiaux par rapport à $r \partial_r$, et tels que $\mathcal{A}_n(\lambda)$ envoie continuellement $\mathcal{C}^{\infty}(\mathcal{S})$ dans lui-même. Il reste à se préoccuper de $r^{-(\mu+\lambda)} A_0^{(-1)} r^{\mu+\lambda}$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 2.7.1. ■

Voici également une propriété algébrique remarquable au sujet des \mathfrak{h}^{λ} . Ce résultat montre notamment que $\mathfrak{h}^{\lambda}[a]$ est complètement déterminé par son premier terme.

Proposition 2.7.2.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{P}_{\log}$ tel que $r^{\lambda} a \in \text{Ker}(A_0 | r^{\lambda} \mathbb{P}_{\log})$ on a $[A_0, A_0^{(-1)}] \mathfrak{h}^{\lambda}[a] = r^{\lambda} a$.

Preuve :

Il s'agit d'un calcul direct qui utilise les définitions (2.7.9) et (2.7.10). Soient $\lambda \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{P}_{\log}$ tel que $r^{\lambda} a \in \text{Ker}(A_0 | r^{\lambda} \mathbb{P}_{\log})$. En tenant compte du fait que $\mathfrak{h}_{\lambda}^{\lambda}[a] = a$, on a

$$\begin{aligned} [A_0, A_0^{(-1)}] \mathfrak{h}^{\lambda}[a] &= [A_0, A_0^{(-1)}] r^{\lambda} a + [A_0, A_0^{(-1)}] \sum_{n \geq 1} r^{\lambda+n} \mathfrak{h}_{\lambda+n}^{\lambda}[a] \\ &= r^{\lambda} a + \sum_{n \geq 1} [A_0, A_0^{(-1)}] r^{\lambda+n} \mathfrak{h}_{\lambda+n}^{\lambda}[a]. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que chaque terme de la somme dans le membre de droite de l'égalité ci-dessus est nul. Soit donc $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$; en appliquant l'identité (2.7.10) on peut conclure la preuve du résultat puisque

$$[A_0, A_0^{(-1)}] r^{\lambda+n} \mathfrak{h}_{\lambda+n}^{\lambda}[a] = \underbrace{[A_0, A_0^{(-1)}] A_0^{(-1)}}_{= A_0^{(-1)} - A_0^{(-1)} = 0} r^{\lambda+n} \sum_{l=0}^{n-1} r^{-(\lambda+l)} A_{n-l} r^{\lambda+l} \mathfrak{h}_{\lambda+l}^{\lambda} = 0.$$

■

En utilisant la fonction de troncature $\chi(r)$ introduite au §2.2.1, considérons la fonction $\chi(r) r^q \mathfrak{s}_q^{\lambda}[a]$ avec un $a \in \mathbb{P}_{\log}$. Alors d'après le lemme 2.7.3 cette fonction est très régulière pour $r \neq 0$ et même $\chi(r) r^q \mathfrak{s}_q^{\lambda}[a] \in \mathcal{V}_{\alpha}^{\infty}(\Omega)$ pour tout $\alpha < q$. Par ailleurs sa transformée de Mellin admet un unique pôle en q . En utilisant la proposition 2.7.2 on peut dire que

$$\begin{aligned} \ell_{\mu}(\chi(r) r^q \mathfrak{h}_q^{\lambda}[a]) &= a \quad \text{si } q = \lambda = \mu \\ \ell_{\mu}(\chi(r) r^q \mathfrak{h}_q^{\lambda}[a]) &= 0 \quad \text{sinon.} \end{aligned} \tag{2.7.12}$$

2.7.6 Décomposition des éléments du noyau de A.

Nous allons montrer que les \mathfrak{h}^{λ} définis plus haut constituent en quelque sorte une base de $\text{Ker}(A | \mathbb{H})$. Nous commençons par introduire l'application linéaire de \mathbb{H} dans \mathbb{H} définie par

$$\sum_{\#p} r^p v_p \in \mathbb{H} \quad \mapsto \quad \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}^p [v_p] \in \mathbb{H}. \tag{2.7.13}$$

Avec la définition des \mathfrak{h}_n^λ et en particulier la relation (2.7.11), on vérifie bien que cette somme appartient à \mathbb{H} . Puisque chaque $\mathfrak{h}^p[v_p]$ appartient à $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$, on obtient que l'application (2.7.13) est à valeur dans $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$. On peut se demander si elle atteint tous les éléments de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$. En fait le résultat suivant que nous exploiterons par la suite montre que oui.

Proposition 2.7.3.

L'application définie par (2.7.13) réalise un isomorphisme de $\text{Ker}(A_0|\mathbb{H})$ vers $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$ dont l'inverse est $[A_0, A_0^{(-1)}]$.

Preuve :

Notons que l'énoncé de cette proposition signifie au passage que $[A_0, A_0^{(-1)}]$ est lui-même un isomorphisme de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$ vers $\text{Ker}(A_0|\mathbb{H})$. Commençons par remarquer d'après le lemme 2.7.2 que si $\sum_p r^p v_p \in \text{Ker}(A_0|\mathbb{H})$ alors on a

$$[A_0, A_0^{(-1)}] \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}^p[v_p] = \sum_{\#p} r^p v_p$$

Ceci implique l'injectivité de l'application définie par (2.7.13). Pour montrer la surjectivité choisissons un $v \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$. Comparons-le avec $\sum_p \mathfrak{h}^p[r^{-p}[A_0, A_0^{(-1)}]r^p v_p]$ dont on sait qu'il appartient également à $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$. En multipliant à gauche leur différence par $[A_0, A_0^{(-1)}]$ et en utilisant ce qui précède, il vient

$$[A_0, A_0^{(-1)}] \left\{ \sum_{\#q} r^q v_q - \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}^p[r^{-p}[A_0, A_0^{(-1)}]r^p v_p] \right\} = [A_0, A_0^{(-1)}] \left(\sum_{\#q} r^q v_q \right) - [A_0, A_0^{(-1)}] \left(\sum_{\#p} r^p v_p \right) = 0.$$

En appliquant le lemme 2.7.2, on obtient le résultat voulu. Ceci conclut la preuve. ■

La proposition ci-dessus signifie en quelque sorte que la famille des \mathfrak{h}^λ "constitue une base" de $\text{Ker}(A|\mathbb{H})$. Étant donnée la définition (2.7.6), on peut reformuler cette proposition de la manière suivante.

Corollaire 2.7.1.

Pour tout $\sum_{\#p} r^p v_p \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$ on a la relation $\sum_{\#p} r^p v_p = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h}^p[\ell_p(r^p v_p)]$.

En fait les résultats de cette section permettent également de préciser la forme du développement d'une fonction $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ satisfaisant $Av = 0$ au voisinage de 0. D'après le lemme 2.3.1 et la définition (2.7.3), son développement par rapport à r est une série formelle $\sum_{\#p} r^p v_p \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$. On peut alors appliquer à cette série formelle le corollaire ci-dessus 2.7.1. Nous énonçons le résultat obtenu sous forme d'un lemme qui s'avère être une version générale de la proposition 1.5.2. Ce lemme décrit en détail le développement asymptotique des fonctions v satisfaisant $Av = 0$.

Lemme 2.7.4.

Soit $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant $Av = 0$. Alors v admet au voisinage de 0 le développement

$$v \underset{r \rightarrow 0}{\asymp} \sum_{p > \alpha} \sum_{q \geq p} r^q \mathfrak{h}_q^p[\ell_p(v)], \quad \text{encore écrit} \quad v \underset{r \rightarrow 0}{\asymp} \sum_{p > \alpha} \mathfrak{h}^p[\ell_p(v)].$$

Ce résultat s'applique bien évidemment au développement par rapport à r des u_n^ε , $n \in \mathbb{N}$. Il permet par ailleurs de formuler un corollaire très utile dans la pratique, qui est une conséquence directe du lemme 2.7.4.

Corollaire 2.7.2.

Soit $v \in \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ satisfaisant $Av = 0$. Supposons que $\ell_p(v) = 0$ lorsque $p < p_0$ pour un certain $p_0 \in \mathbb{Z}$. Alors $v \in \mathcal{V}_{p_0-1/2}^\infty(\Omega)$.

Si l'on reprend les notations de (2.4.3) alors pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, d'après le lemme 2.4.1 et la définition (2.7.3), on a

$$\begin{aligned} \sum_{\#p} r^p U_{n+p,p}^\varepsilon(\sigma, \ln(r)) &\in \text{Ker}(A|\mathbb{H}) && \forall n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow \sum_{\#p} r^p U_{n+p,p}^\varepsilon &= \sum_p \mathfrak{h}^p[\ell_p(r^p U_{n+p,p}^\varepsilon)] && \forall n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow U_{n+p,p}^\varepsilon &= \sum_{k=-n}^p \mathfrak{h}_p^k[\ell_k(r^k U_{n+k,k}^\varepsilon)] = \sum_{k=-n}^p \mathfrak{h}_p^k[L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] && \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq -n. \end{aligned} \quad (2.7.14)$$

2.7.7 Retour sur le principe de raccord

Nous utilisons maintenant la décomposition du corollaire 2.7.1 pour réécrire le principe de raccord (2.5.1). Rappelons que d'après le lemme 2.3.1 on a $\sum_p r^p u_{n,p}^\varepsilon \in \text{Ker}(A|\mathbb{H})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi les équations de raccord (2.5.1) ne valent que si et seulement si on a

$$\ell_p(r^p u_{n,p}^\varepsilon) = \ell_p(u_n^\varepsilon) = \ell_p(r^p \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{Z}.$$

On peut maintenant utiliser le calcul (2.7.14) ci-dessus pour simplifier le dernier terme de cette égalité. D'après la définition des $\ell_p(\cdot)$ donnée par (2.7.6) on a

$$\begin{aligned} \ell_p(r^p \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon) &= r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p \sum_{k=-n}^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^k[L_k(U_{n+k}^\varepsilon)] \\ &= r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=-n}^{p-1} \ell_p(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^k[L_k(U_{n+k}^\varepsilon)]) \end{aligned}$$

Nous avons décomposé en deux termes le membre de droite de la dernière équation. En notant que $A_0 \Xi_*^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon A_0$, on montre facilement que $[A_0, A_0^{(-1)}] \Xi_*^\varepsilon [A_0, A_0^{(-1)}] = \Xi_*^\varepsilon [A_0, A_0^{(-1)}]$. Ceci permet de simplifier le premier terme en écrivant la définition de l'application linéaire $\ell_p(\cdot)$ donnée par l'équation (2.7.6),

$$\begin{aligned} r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) &= r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p \Xi_*^\varepsilon r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p U_{n+p,p}^\varepsilon \\ &= r^{-p} [A_0, A_0^{(-1)}] r^p r^{-p} \varepsilon^p \Xi_*^\varepsilon [A_0, A_0^{(-1)}] r^p U_{n+p,p}^\varepsilon \\ &= \varepsilon^p r^{-p} \Xi_*^\varepsilon [A_0, A_0^{(-1)}] r^p U_{n+p,p}^\varepsilon = \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) \end{aligned}$$

Au terme de ces calculs, on en tire une reformulation du principe de raccord (2.5.1) strictement équivalente, à savoir

Équations de raccord

$$\ell_p(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p+n} \ell_p(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k}[L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)]) \quad (2.7.15)$$

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ce qu'on a gagné est de pouvoir exprimer ce principe de raccord directement à l'aide des fonctions u_q^ε et U_q^ε , et ceci va nous servir pour écrire des problèmes caractérisant ces fonctions.

2.7.8 Simplification des équations de raccord

Le principe de raccord tel que nous l'avons écrit ci-dessus contient un terme plutôt compliqué avec une somme. Dans certains cas, comme au chapitre 1, ce terme se simplifie notablement. Ce type de simplification apparaît lorsque le problème que nous considérons admet des symétries. En effet on a la proposition suivante.

Proposition 2.7.4.

Soit F un sous-espace fermé de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{S})$. Notons P_F un projecteur sur F . On suppose que $[P_F, \mathcal{A}_n(\lambda)] = 0, \forall \lambda \in \mathbb{C}$. Le projecteur P_F induit naturellement un opérateur continu de \mathbb{P}_{\log} dans \mathbb{P}_{\log} , et on a alors $[P_F, \mathfrak{h}_q^p] = 0$ pour tout $p, q \in \mathbb{Z}$.

2.7.9 Estimation d'erreur dans le cas où le principe de raccord n'est pas satisfait

Nous rencontrerons au chapitre 7 un cas où il n'est possible que de satisfaire une version perturbée du principe de raccord. Cette perturbation aura une incidence sur l'erreur de raccord comme on le voit facilement avec la proposition 2.6.2. Le lemme suivant permet de montrer que ce terme d'erreur est contrôlé par la perturbation dans une certaine norme.

Lemme 2.7.5.

Soit (u_n^ε) une suite satisfaisant (2.2.10) telle que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et (U_n^ε) une suite satisfaisant (2.2.11) telle que $U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En reprenant les notations de (2.3.6) et (2.4.3), m étant l'ordre de A , pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $q \in \mathbb{N}$ et une constante $\kappa > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \sum_{p=-n}^{N-n} \| u_{n,p}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ & \leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N \sum_{p=-n}^{N-n} \left\| \ell_p(u_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) - \sum_{k=1}^{p+n} \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)] \right) \right\|_{\log,q} \end{aligned}$$

Preuve :

Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire mais fixé et introduisons la série formelle $\sum_p r^p v_p^\varepsilon := \sum_p r^p (u_{n,p}^\varepsilon - \Xi_*^\varepsilon U_{n+p,p}^\varepsilon)$ avec $v_p^\varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Notons que $v_p^\varepsilon = 0$ dès que $p < -n$. Il suffit de montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $q \in \mathbb{N}$ et $\kappa_0 > 0$ indépendants de ε tels que

$$\| v_p^\varepsilon \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \frac{\kappa_0}{\varepsilon} \sum_{k=-n}^p \| \ell_k(r^k v_k^\varepsilon) \|_{\log,q} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Remarquons en premier lieu que d'après les lemmes 2.3.1 et 2.4.1 on a $\sum_p r^p v_p^\varepsilon \in \text{Ker}(A|_{\mathbb{H}})$, ainsi on peut lui appliquer la décomposition du corollaire 2.7.1. Par un calcul similaire à (2.7.14), on a alors

$$v_p^\varepsilon = \sum_{k=-n}^p \mathfrak{h}_p^k [\ell_k(r^k v_k^\varepsilon)]$$

Cette identité nous montre notamment que, à p fixé, il existe $q_0 \in \mathbb{N}$ indépendant de ε tel que $d^\circ v_p^\varepsilon \leq q_0$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Avec la définition (2.1.1) des normes à poids, on en déduit par ailleurs l'existence de $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ indépendants de ε tel que

$$\| v_p^\varepsilon \|_{\gamma_0^m(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \frac{\kappa_1}{\varepsilon} \| v_p^\varepsilon \|_{\log,m} \leq \frac{\kappa_2}{\varepsilon} \sum_{k=-n}^p \| \mathfrak{h}_p^k [\ell_k(r^k v_k^\varepsilon)] \|_{\log,m} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

On conclut en utilisant le lemme 2.7.3. ■

2.8 Construction concrète des termes du développement

La question maintenant est de savoir comment on va définir deux familles de fonction (u_n^ε) et (U_n^ε) de manière à ce que la condition (2.2.6) soit vérifiée. La proposition 2.6.1 nous a montré que, pourvu que

(u_n^ε) et (U_n^ε) vérifient certaines équations, alors la condition (2.2.8) est "presque vérifiée". Ces équations sont (2.2.10), (2.2.11) et (2.5.1) que nous remplacerons par (2.7.15). On obtient ainsi,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ Au_n^\varepsilon = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ Cu_n^\varepsilon = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U_n \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega), \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=0}^n R^k A_k U_{n-k}^\varepsilon = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{dans } \Omega_N \\ \sum_{k=0}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{sur } \Gamma_N. \end{array} \right. + \begin{array}{l} \text{Équations} \\ \text{de raccord.} \end{array}$$

Nous pouvons réécrire cette famille de problèmes de manière à ce que chaque couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ apparaisse comme la solution d'un problème avec des données exprimées en fonction de $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon)$, $(u_{n-2}^\varepsilon, U_{n-2}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$. Ceci permet alors de définir les u_n^ε et les U_n^ε par récurrence. Étant donné un $n \in \mathbb{N}$ on impose

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ Au_n^\varepsilon = -\delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ Cu_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 U_n^\varepsilon = -\sum_{k=1}^n R^k A_k U_{n-k}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \\ B_0 U_n^\varepsilon = -\sum_{k=1}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

(2.8.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \\ \quad + \sum_{k=1}^{-p+n} \ell_{-p} \left(r^{-p} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_{-p}^{-p-k} [L_{-p-k}(U_{n-p-k}^\varepsilon)] \right) \quad \forall p \in [1, n] \\ \Xi_*^\varepsilon L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) \\ \quad - \sum_{k=1}^n \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [L_{p-k}(U_{n-k}^\varepsilon)] \right) \quad \forall p \in [1, n], \\ \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon) \\ \quad + \sum_{k=1}^n \ell_0 \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_0^{-k} [L_{-k}(U_{n-k}^\varepsilon)] \right) \end{array} \right.$$

Ci-dessus δ_n^0 désigne le symbole de Kronecker c'est-à-dire $\delta_n^0 = 1$ si $n = 0$ et $\delta_n^0 = 0$ si $n \neq 0$. Dans le problème ci-dessus, à n fixé, l'équation sur $\ell_{-p}(u_n^\varepsilon)$ avec $p \geq 0$ apparaît comme une source pour le terme de champ lointain u_n^ε , tandis que l'équation sur $L_p(U_n^\varepsilon)$ avec $p \geq 0$ apparaît comme une source pour le terme de champ proche U_n^ε . Enfin la dernière équation du raccord qui correspond à $p = 0$ couple

complètement u_n^ε et U_n^ε ; c'est la seule équation de raccord qui ne soit pas explicite, et se révélera la plus problématique dans la pratique.

Également notons que $u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ implique $\ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = 0$ pour $p > n$ et $U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ implique $L_p(U_n^\varepsilon) = 0$ pour $p > n$. Enfin remarquons que rien n'est imposé explicitement sur $\ell_p(u_n^\varepsilon)$ pour $p > 0$ ni sur $L_p(U_n^\varepsilon)$ pour $p < 0$. Il s'agit de quantités qui seront "déterminées par la résolution variationnelle" des problèmes sur u_n^ε et U_n^ε .

Au sujet des problèmes (2.8.1), au moins deux questions se posent. Tout d'abord s'agit-il de problèmes bien posés ? Nous traiterons cette question au cas par cas dans les chapitres à venir, mais la réponse sera oui pour les cas que nous examinerons. Nous le démontrerons le cas échéant. Par ailleurs, les u_n^ε et U_n^ε ainsi construits satisfont-ils une estimation telle que le terme entre accolade dans (2.6.2) "ne soit pas trop grand". La réponse est encore oui pour les cas que nous examinerons, et nous préciserons alors ce que nous entendons par "pas trop grand".

2.A Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans cette annexe nous proposons quelques rappels au sujet des espaces de Fréchet. Ce cadre fonctionnel nous est utile pour formuler des hypothèses sur les opérateurs que nous considérons, et également il nous permet de passer outre les questions de dérivation sous le signe intégral et de raisonner directement avec des objets réguliers (de classe \mathcal{C}^∞ lorsqu'il s'agit de fonctions). Nous ne donnerons aucune démonstration pour les résultats qui suivent et renvoyons le lecteur à [102].

Définition d'un espace de Fréchet Dans cette thèse, et sauf mention du contraire, tous les espaces vectoriels seront complexes. Nous commencerons avec la définition d'une semi-norme. Une semi-norme sur un espace vectoriel E est une fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant

$$p(u+v) \leq p(u) + p(v) \quad \text{et} \quad p(\alpha u) = |\alpha| p(u), \quad \forall u, v \in E, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Une semi-norme est donc très proche d'une norme, mais il manque l'hypothèse " $p(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ ". De même qu'une norme sur un espace vectoriel engendre une topologie métrique, il est possible d'en obtenir une à partir d'une famille de semi-normes.

Lemme 2.A.1.

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable de semi-normes sur un espace vectoriel E telle que pour tout $u \in E$, $\exists j \in \mathbb{N} \text{ t. } q p_j(u) \neq 0$ (on dit que la famille $(p_n)_n$ est séparatrice). Alors l'application définie par

$$d(u, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(u-v)}{1+p_n(u-v)}$$

constitue une distance sur E , au sens de laquelle les semi-normes p_n sont continues. La topologie métrique associée est appelée topologie engendrée par la famille (p_n) .

Attention dans ce lemme l'application d n'est pas *a priori* une norme car il n'y a pas de raison qu'elle vérifie $d(\alpha u, 0) = |\alpha| d(u, 0)$. Notons qu'avec cette topologie les opérations élémentaires d'addition et de multiplication par un scalaire sont continues. Nous en venons maintenant au type de structures que nous considérerons au cours de ce chapitre. Il s'agira d'espaces vectoriels munis d'un type particulier de topologie.

Définition 2.A.1.

Un espace vectoriel E est un espace de Fréchet lorsqu'il est muni d'une topologie métrique complète engendrée par une famille dénombrable de semi-normes séparatrice.

Donnons immédiatement un exemple concret d'espace de Fréchet. Dans ce chapitre nous nous intéresserons à des fonctions très régulières. L'un de nos espaces fonctionnels privilégiés sera donc l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ . Par exemple l'espace

$$\mathcal{C}^\infty([-1, 1]) = \bigcap_{n=0}^{\infty} H^n([-1, 1]) \quad \text{muni des semi-normes} \quad p_n(u) = \|u\|_{H^n([-1, 1])} \quad (2.A.1)$$

est un espace de Fréchet. Ce type de construction peut être généralisé pour munir $\mathcal{C}^\infty(K)$ d'une topologie lorsque K est un compact régulier de \mathbb{R}^k . On peut aussi munir de cette manière $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ d'une structure d'espace de Fréchet. Par la suite, lorsque nous parlerons de continuité dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, il s'agira toujours de continuité au sens de cette topologie.

Voyons un autre exemple un tout petit peu plus élaboré. Considérant un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, nous allons munir $\mathcal{C}^k(\mathcal{O})$ d'une topologie Fréchet. Attention $\mathcal{C}^k(\mathcal{O}) \neq \mathcal{C}^k(\overline{\mathcal{O}})$ (considérer par exemple $t \mapsto 1/t$ avec $\mathcal{O} =]0, 1[$). Soit une suite croissante $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de compacts telle que $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset \mathcal{O}$ et satisfaisant $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \mathcal{O}$. On considère alors

$$\mathcal{C}^k(\mathcal{O}) \quad \text{muni des semi-normes} \quad p_n(u) = \sum_{p=0}^k \sup_{K_n} |\nabla^p u|.$$

Convergence et holomorphie dans les Fréchet Il est utile de savoir caractériser la convergence dans ces espaces. Si nous considérons une suite $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'un espace de Fréchet E , alors on peut vérifier que

$$u_j \rightarrow u \text{ dans } E \iff p_n(u - u_j) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi dans l'exemple ci-dessus, une suite (u_j) converge vers u dans $\mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ si et seulement si $\|u - u_j\|_{H^n([-1, 1])} \rightarrow 0$ pour tout n .

Les espaces de Fréchet sont des espaces un peu plus généraux que les espaces de Banach. De nombreuses propriétés valables dans les espaces de Banach restent vraies dans ces espaces. Notamment il est possible de faire du calcul holomorphe dans les espaces de Fréchet comme l'indique les résultats suivants disponibles au chapitre 3 de [102].

Définition 2.A.2.

Étant donné un espace de Fréchet E et un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, une fonction $u : \mathcal{O} \rightarrow E$ est dite (fortement) holomorphe sur \mathcal{O} si et seulement si

$$\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{u(\lambda) - u(\mu)}{\lambda - \mu} \text{ existe dans } E \text{ pour tout } \mu \in \mathcal{O}.$$

Il faut bien sûr entendre la limite ci-dessus au sens de la topologie Fréchet. Avec cette définition par exemple, le théorème de représentation en série entière des fonctions holomorphes reste vrai.

Théorème 2.A.1.

Étant donné un espace de Fréchet E et un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, une fonction u est holomorphe dans \mathcal{O} si et seulement si

$$\forall \mu \in \mathcal{O}, \exists (u_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ et } \exists \rho \in]0, \infty[\text{ t.q. } u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - \mu)^n}{n!} u_n, \text{ dès que } |\lambda - \mu| < \rho$$

c'est-à-dire u développable en série entière en tout point de \mathcal{O} avec une série convergeant au sens de Fréchet.

Terminons ces rappels en notant qu'il est également possible de définir des fonctions méromorphes à valeur Fréchet.

Définition 2.A.3.

Étant donné un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ et un espace de Fréchet, nous dirons qu'une fonction $u : \mathcal{O} \rightarrow E$ est méromorphe sur \mathcal{O} si et seulement si en tout point $\mu \in \mathcal{O}$ il existe un $\delta > 0$ et un nombre fini d'éléments $v_1, v_2, \dots, v_m \in E$ tels que

$$u(\lambda) - \frac{v_1}{\lambda - \mu} - \frac{v_2}{(\lambda - \mu)^2} \dots - \frac{v_m}{(\lambda - \mu)^m} \text{ est holomorphe dans } D(\mu, \delta)$$

On dit alors que u admet un pôle d'ordre m en μ . L'élément v_1 sera appelé résidu de u en μ et est noté

$$v_1 := \text{Res}_\mu\{u\}.$$

2.B Intégration et calcul holomorphe

Le but de cet annexe sera d'introduire les outils nécessaires à l'utilisation de la transformée de Mellin pour des espaces de fonctions à valeur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$: résultats d'intégration vectorielle et théorème des résidus. Nous définissons au passage une notation pour l'intégration sur des contours de Cauchy que nous utilisons beaucoup au cours de ce chapitre.

2.B.1 Intégration à valeur vectorielle

En vue d'utiliser le théorème de Cauchy qui nécessite des intégrales de contour, nous commençons par donner des résultats (dont on peut trouver une partie dans [102] chap.3) concernant l'intégration de fonctions à valeur dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$.

Définition 2.B.1.

Étant donné un ensemble mesurable $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$, un entier $p \in \mathbb{N}$ et une fonction $u : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, nous dirons que $u \in L^p(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $\lambda \mapsto \|u(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}$ appartient à $L^p(\mathcal{O}, \mathbb{R}_+)$.

Dans la suite nous serons intéressés uniquement par $L^1(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ ou $L^2(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$. On voit facilement que si $u \in L^1(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ alors pour toute forme linéaire Λ continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, la fonction $\lambda \mapsto \Lambda \cdot u(\lambda)$ appartient à $L^1(\mathcal{O}, \mathbb{C})$. Ceci s'applique en particulier à la distribution de Dirac $\delta_\sigma \cdot v := v(\sigma)$ (par la suite nous noterons $\delta_\sigma \cdot u(\lambda) := u(\lambda, \sigma)$). C'est un simple exercice basé sur le théorème de dérivation sous le signe intégral de montrer

Définition 2.B.2.

Étant donné un ensemble mesurable $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ et une fonction $u \in L^1(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$, il existe un unique $v \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ vérifiant pour toute forme linéaire Λ continue sur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$

$$\Lambda \cdot v = \int_{\mathcal{O}} \Lambda \cdot u(\lambda) d\lambda \quad \left(\text{en particulier } v(\sigma) = \int_{\mathcal{O}} u(\lambda, \sigma) d\lambda, \forall \sigma \in \mathcal{S} \right).$$

Nous posons alors par définition

$$\int_{\mathcal{O}} u(\lambda) d\lambda := v.$$

Cette définition donne notamment un cadre dans lequel on peut à volonté intervertir les dérivées ∂_σ^α et le signe \int sans se poser de question. Il n'y a aucune difficulté à généraliser cette définition au cas où on intègre sur une courbe γ dans le plan complexe. Par ailleurs, il est très facile de montrer (en adaptant le théorème 3.29, chap.3 de [102] par exemple) que pour toute norme de Sobolev, on a

$$\left\| \int_{\mathcal{O}} u(\lambda) d\lambda \right\|_{H^n(\mathcal{S})} \leq \int_{\mathcal{O}} \|u(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})} d\lambda, \quad \text{pour } u \in L^1(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})).$$

À présent nous pouvons montrer que pour un $p \in \mathbb{N}$ donné,

$$L^p(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})) \quad \text{muni des semi-normes} \quad \|v\|_{L^p(\mathcal{O}, H^n(\mathcal{S}))} := \left(\int_{\mathcal{O}} \|v(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}^p d\lambda \right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}$$

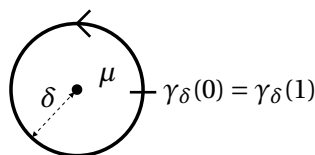
est un espace de Fréchet. La seule chose à montrer est la complétude. Considérons une suite de Cauchy (u_n) dans $L^p(\mathcal{O}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ pour la famille de semi-normes proposée. Chaque espace de Sobolev étant un espace de Banach, il est assez clair que $L^p(\mathcal{O}, H^k(\mathcal{S}))$ est un espace de Banach (cf [116] chap. 2C par exemple) pour tout k , de sorte qu'il existe $v_k \in L^p(\mathcal{O}, H^k(\mathcal{S}))$ tel que $\|u_n - v_k\|_{L^p(\mathcal{O}, H^k(\mathcal{S}))} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. *A fortiori* puisque $L^p(\mathcal{O}, H^k(\mathcal{S})) \subset L^p(\mathcal{O}, L^2(\mathcal{S}))$ pour tout k , la suite (u_n) converge vers v_k dans $L^p(\mathcal{O}, L^2(\mathcal{S}))$. Par unicité de la limite on obtient que $v_k = v_0 \in L^p(\mathcal{O}, H^k(\mathcal{S}))$ pour tout k .

2.B.2 Rappels de calcul holomorphe

Nous rappelons quelques rudiments de théorie de Cauchy, remis à la sauce \mathcal{C}^∞ . Considérons un ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$. Étant donnés $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \leq \beta$, un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathcal{O}$ est par définition une courbe continue et \mathcal{C}^1 par morceau. Ce chemin est dit fermé si $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. L'indice d'un point $\mu \in \mathcal{O}$ par rapport à un chemin γ que nous noterons $\text{Ind}_\gamma(\mu)$ est défini par

$$\text{Ind}_\gamma(\mu) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\lambda}{\lambda - \mu}.$$

Cette fonction Ind_γ est à valeur dans \mathbb{Z} (cf [101] par exemple), et $\text{Ind}_\gamma(\mu)$ s'interprète comme le nombre de tours que γ décrit autour de μ . Ainsi $\text{Ind}_\gamma(\mu) = 0$ si et seulement si " μ se trouve à l'extérieur de γ ". Par exemple si nous choisissons un $\mu \in \mathbb{C}$ arbitraire et définissons $\gamma_\delta(t) = \mu + \delta e^{2i\pi t}$ avec $\delta \in]0, \infty[$ et $t \in [0, 1]$, alors on a $\text{Ind}_{\gamma_\delta}(\mu) = 1$.



Avec des fonctions à valeur \mathcal{C}^∞ le théorème de Cauchy reste vrai et donc le théorème des résidus aussi. Nous ferons un usage intensif du résultat suivant par la suite. Nous ne le démontrons pas, il est adapté d'un résultat de [102] chap.3.

Théorème 2.B.1.

Soit E un espace de Fréchet, $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $u : \mathcal{O} \rightarrow E$ une fonction méromorphe sur \mathcal{O} . Si $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{O}$ est un chemin fermé tel que $\text{Ind}_\gamma(\mu) = 0$ pour tout $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{O}$ alors (cf définition 2.A.3)

$$\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma u(\lambda) d\lambda = \text{Ind}_\gamma(\mu) \text{Res}_\mu\{u\}. \quad (2.B.1)$$

Reprenant l'exemple du chemin circulaire $\gamma = \mu + \delta e^{2i\pi t}$ ci-dessus. Soit u une fonction méromorphe dans un disque $D(\mu, \rho)$ pour un certain $\rho > 0$ fixe avec un pôle seulement en μ . Alors pour des $\delta > 0$ suffisamment petits, la valeur de l'intégrale (2.B.1) ne dépend pas de δ . Nous définissons donc les notations suivantes

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} u(\lambda) d\lambda := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_\delta} u(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} u(\lambda) d\lambda := -\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_\mu} u(\lambda) d\lambda.$$

2.C Transformation de Mellin

Dans cette annexe nous définissons la *transformée de Mellin* et en donnons quelques propriétés clés. La transformée de Mellin est analogue à la transformation de Laplace, excepté qu'on ne décompose pas une fonction $g(t)$ suivant les $(e^{i\lambda t})_{\lambda \in \mathbb{C}}$ mais on décompose plutôt une fonction $g(r)$ suivant les $(r^\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}}$. Tous les résultats que nous présentons sur la transformée de Mellin sont exposés en grand détail dans [70] dans le cas de fonctions scalaires.

La transformation de Mellin est un outil devenu standard pour l'étude des EDP posées dans un domaine à bord singulier. Son usage dans ce contexte a principalement été introduit par Kondratiev [76]. L'utilisation de cet outil pour les problèmes de perturbation singulière semble moins courant et, à notre connaissance, il est surtout le fait de [30] et [113].

2.C.1 Transformation de Mellin au voisinage de zéro

Nous définissons dans un premier temps les espaces de base qui constituent le cadre fonctionnel naturel de la transformée de Mellin. Nous ne justifierons que partiellement les résultats annoncés, car leur démonstration complète peut-être trouvée dans [70] dans le cas où les fonctions sont valuées dans \mathbb{C} . Nous invitons le lecteur à effectuer des vérifications pour voir que ces démonstrations peuvent être transposées au cas où les fonctions sont valuées dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$, en utilisant les outils que nous avons présentés aux §2.A, 2.B.1 et 2.B.2.

Rappelons pour la suite que nous notons $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Nous définissons \mathcal{E}_0 comme l'ensemble des restrictions à $\mathcal{D}(]0, +\infty[)$ de fonctionnelles continues $g : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ telles qu'il existe $h \in$

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ à support compact et $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant

$$\langle g, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(r) \frac{d^k \psi}{dr^k}(r) dr, \quad \forall \psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

Dans cette définition l'entier k dépend de g , nous l'appellerons l'ordre de g (ce qui rejoint la terminologie habituelle en théorie des distributions). Un tel g (restreint à $\mathcal{D}([0, +\infty[))$) est alors prolongeable à $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}_+)$ par continuité au sens des semi-normes

$$p_n(\psi) := \sum_{q=0}^k \sup_{[0, n]} \left| \frac{d^q \psi}{dr^q} \right| \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{où} \quad \psi \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}_+) = \left\{ \psi \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}_+) \mid \frac{d^q \psi}{dr^q}(0) = 0, \quad q = 0 \dots k \right\}.$$

En particulier $\langle g, r_+^{-\lambda-1} \rangle$ est bien définie dès que $\Re\{\lambda\} < -k - 1$ car alors $r_+^{-\lambda-1} \in \mathcal{C}_0^k(\mathbb{R}_+)$. Ceci nous permet de donner la définition de la transformée de Mellin d'un tel g .

Définition 2.C.1.

Étant donné $r \in \mathbb{R}$, on notera $r_+ = \max(0, r)$. Soit $g \in \mathcal{E}_0$ d'ordre k . Sa transformée de Mellin notée $\mathfrak{M}\{g\}$ est définie par

$$\mathfrak{M}\{g\}(\lambda) := \langle g, r_+^{-\lambda-1} \rangle, \quad \text{pour } \Re\{\lambda\} < -k - 1.$$

Des calculs de routine montrent que $\mathfrak{M}\{g\}(\lambda)$ est holomorphe à valeur $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < -k - 1$. En général nous aurons affaire à des fonctions plus régulières que les éléments de \mathcal{E}_0 . Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $r^{-1/2-\alpha} g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ avec g à support dans $[0, +\infty[$ alors dans la définition de $\mathfrak{M}\{g\}$ le crochet est une intégrale pour $\Re\{\lambda\} < \alpha$ et la transformée de Mellin est définie par

$$\mathfrak{M}\{g\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} g(r) r^{-\lambda} \frac{dr}{r}, \quad \text{dans } \Re\{\lambda\} < \alpha,$$

de plus $\hat{g}(\lambda)$ est alors analytique dans tout le domaine $\Re\{\lambda\} < \alpha$. Notons quelques propriétés élémentaires de cette transformation, en particulier nous voyons qu'elle diagonalise l'opérateur $r\partial_r$,

$$\mathfrak{M}\{r\partial_r g\}(\lambda) = \lambda \mathfrak{M}\{g\}(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}\{r^\mu g\}(\lambda) = \mathfrak{M}\{g\}(\lambda - \mu).$$

Intéressons-nous à savoir à quel espace appartiennent les transformées de Mellin des éléments de \mathcal{E}_0 . Nous définissons $\hat{\mathcal{E}}_0$ comme l'espace des fonctions h de la variable λ et à valeur dans $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})$ holomorphes dans un demi-plan de la forme $\Re\{\lambda\} < \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) vérifiant pour tout $p \in \mathbb{N}$ une inégalité du type

$$\|h(\lambda)\|_{H^p(\mathcal{S})} \leq \kappa_p (1 + |\lambda|)^k a^{-\Re\{\lambda\}}, \quad \forall \Re\{\lambda\} < \alpha \quad (2.C.1)$$

Dans cette inégalité, on suppose que les constantes $k \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ dépendent de h mais pas de p . En revanche la constante κ_p dépend de h et de p . En reprenant les définitions ci-dessus, on constate que $\mathfrak{M}\{g\} \in \hat{\mathcal{E}}_0$ dès que $g \in \mathcal{E}_0$. En effet on a le résultat,

Théorème 2.C.1.

La transformation de Mellin \mathfrak{M} est un isomorphisme de \mathcal{E}_0 sur $\hat{\mathcal{E}}_0$.

On peut écrire une formule d'inversion explicite. Soit $\hat{g} \in \hat{\mathcal{E}}_0$ comme ci-dessus avec les mêmes constantes κ_p, k, a et α . Choisissons alors $j > k + 1$ et $\beta < \alpha$. On montre que pour $j > k + 1$ et $\beta < \alpha$

$$g(r) = \mathfrak{M}^{-1}\{\hat{g}\}(r) = (r\partial_r)^j \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re\{\lambda\}=\beta} \hat{g}(\lambda) r^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda^j}, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+, \quad \text{lorsque } \hat{g} = \mathfrak{M}\{g\}. \quad (2.C.2)$$

Dans l'intégrale du membre de droite on suppose que $\Im\{\lambda\}$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. C'est un simple exercice de calcul holomorphe de montrer que cette formule ne dépend pas du j et du β choisis (il faut

utiliser (2.C.1)).

La transformation de Mellin permet de caractériser les espaces à poids, en utilisant une égalité du type de Parseval. Introduisons une notation consistante avec la définition du §2.1.2, c'est-à-dire

$$\mathcal{V}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})) = \left\{ g \in \mathcal{E}_0 \mid r^{-1/2-\alpha} (r\partial_r)^k g \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})) \quad k \in \mathbb{N}, \text{supp}(g) \text{ borné} \right\}$$

Dans la définition, $\text{supp}(g)$ désigne le support de g par rapport à r . On a alors la caractérisation suivante

Proposition 2.C.1.

Une fonction $g \in \mathcal{E}_0$ appartient à $\mathcal{V}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ avec $\text{supp}(g) \subset [0, a]$ si et seulement si $\hat{g} = \mathfrak{M}\{g\}$ est analytique dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < \alpha$ et pour tout $n, k \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_{n,k} > 0$ tel que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\beta} |\lambda|^{2k} \|\hat{g}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 d\lambda < \kappa_{n,k} a^{-\beta}, \quad \forall \beta < \alpha.$$

Alors l'intégrale ci-dessus est convergente pour $\beta = \alpha$ et on a un analogue de l'identité de Parseval

$$\int_0^\infty r^{-2\alpha} \|(r\partial_r)^k g(r)\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 \frac{dr}{r} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\alpha} |\lambda|^{2k} \|\hat{g}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 d\lambda, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Exemples élémentaires

Reprenons la fonction de troncature χ introduite au début de la section 2.2. Nous rappelons que $\chi(r) = 1$ si $r \leq 1/2$ et $\chi(r) = 0$ si $r \geq 1$. Nous allons regarder à quoi ressemble la transformée de Mellin de quelques fonctions simples construites avec χ . On se place dans le cas simplifié où les fonctions sont à valeur dans \mathbb{C} .

Exemple 1 Prenons tout d'abord $g_1(r) = \chi(r)$. On a bien $g_1 \in \mathcal{E}_0$, donc sa transformée de Mellin $\mathfrak{M}\{g_1\}$ existe. Pour $\Re\{\lambda\}$ assez grand négatif, on a

$$\mathfrak{M}\{g_1\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} g_1(r) r^{-\lambda} \frac{dr}{r} = \frac{-1}{\lambda} + \int_0^1 (\chi(r) - 1) r^{-\lambda} \frac{dr}{r}.$$

On vérifie facilement que le deuxième terme du membre de droite est une fonction entière car $1 - \chi(r) = 0$ sur un voisinage ouvert de $r = 0$. Ainsi \hat{g}_1 n'a qu'un pôle simple situé en $\lambda = 0$. On vérifie que $g_1 \in \mathcal{V}_{-\delta}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ pour tout $\delta > 0$.

Exemple 2 Choisissons maintenant $g_2(r) = \ln^k(r) \chi(r)$ avec $k \in \mathbb{N}$, on a toujours $g_2 \in \mathcal{E}_0$. Cherchons une décomposition comparable à celle de l'exemple 1. Pour $\Re\{\lambda\}$ assez petit, on a

$$\mathfrak{M}\{g_2\}(\lambda) = \int_0^1 \ln^k(r) r^{-\lambda} \frac{dr}{r} + \int_0^1 (\chi(r) - 1) \ln^k(r) r^{-\lambda} \frac{dr}{r} = \frac{-1}{\lambda^k} + \int_0^1 (\chi(r) - 1) \ln^k(r) r^{-\lambda} \frac{dr}{r}.$$

À nouveau le terme intégral restant est analytique dans \mathbb{C} tout entier, donc ici g_2 admet exactement un pôle d'ordre k . On vérifie qu'on a ici encore $g_2 \in \mathcal{V}_{-\delta}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ pour tout $\delta > 0$.

Exemple 3 Choisissons maintenant $g_3(r) = r^\mu \ln^k(r) \chi(r)$ avec $\mu \in \mathbb{R}$. Notons que $g_3(r) = r^\mu g_2(r)$. Il n'est cette fois pas évident que $g_3 \in \mathcal{E}_0$, or pour $q \geq |\mu| + 1$ si on pose

$$h(r) = - \int_r^{+\infty} (r-t)^q g_3(t) dt$$

on obtient $\partial_r^q h(r) = q! g_3(r)$ et $h(r)$ admet une limite quand $r \rightarrow 0$, ce qui montre que $g_3 \in \mathcal{E}_0$. Si on cherche la transformée de Mellin de g_3 on obtient

$$\mathfrak{M}\{g_3\}(\lambda) = \mathfrak{M}\{r^\mu g_2\}(\lambda) = \mathfrak{M}\{g_2\}(\lambda - \mu) = \hat{g}_2(\lambda - \mu).$$

Ceci implique que $\mathfrak{M}\{g_3\}(\lambda)$ n'a qu'un pôle d'ordre k en $\lambda = \mu$. Cette fois, comme $g_3(r) = r^\mu g_2(r)$, on a $g_3 \in \mathcal{V}_{\mu-\delta}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ pour tout $\delta > 0$.

2.C.2 Transformation de Mellin au voisinage de l'infini

La transformation de Mellin que nous avons introduit dans la première partie de cet annexe concernait des fonctions localisées au voisinage de 0 et nulles au voisinage de l'infini. Dans cette deuxième partie nous montrons comment nous pouvons adapter les résultats précédents au cas de fonctions nulles au voisinage de 0 mais pas à support compact. Nous "transportons au voisinage de l'infini" le formalisme de la transformée de Mellin que nous avons introduit en sous-section 2.C.1 à l'aide des applications

$$\Upsilon : \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \Upsilon_* G(\mathbb{R}) = G\left(\frac{1}{\mathbb{R}}\right) \quad \text{pour} \quad G \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+).$$

Ces définitions s'étendent de façon naturelle aux distributions : si $G \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[)$, on définit $\Upsilon_* G \in \mathcal{D}'(]0, +\infty[)$ par $\langle \Upsilon_* G, V \rangle = \langle G, (\Upsilon_* V) / \mathbb{R}^2 \rangle$ pour tout $v \in \mathcal{D}(]0, +\infty[)$. Notons que Υ_* est inversible et que $\Upsilon_*^{-1} = \Upsilon^*$.

Les espaces de base pour la transformée de Mellin à l'infini sont alors $\mathcal{E}_\infty = \Upsilon_*(\mathcal{E}_0)$ d'une part, et d'autre part l'espace $\tilde{\mathcal{E}}_\infty$ des fonctions H (de la variable λ) holomorphes dans un demi-plan de la forme $\Re\{\lambda\} > \alpha$, ($\alpha \in \mathbb{R}$) vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ une inégalité du type

$$\|H(\lambda)\|_{H^n(\mathbb{S})} \leq \kappa_n (1 + |\lambda|)^k a^{\Re\{\lambda\}} \quad , \quad \Re\{\lambda\} > \alpha$$

où les constantes $\kappa_n > 0$, $k \in \mathbb{Z}$, $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ dépendent de H . Étant donné un élément $G \in \mathcal{E}_\infty$ nous définirons sa transformée de Mellin par

$$\mathfrak{M}\{G\}(\lambda) := \mathfrak{M}\{\Upsilon_* G\}(-\lambda)$$

définie analytique dans un demi-plan $\Re\{\lambda\} > \alpha$ où α est relié à l'ordre de $\Upsilon_*(G)$. Nous utilisons la même notation pour la transformée de Mellin des éléments de \mathcal{E}_0 et de \mathcal{E}_∞ car les deux définitions coïncident sur $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_\infty$. En effet soit $G \in \mathcal{E}_0 \cap \mathcal{E}_\infty$, alors un calcul simple montre que $\langle \Upsilon_* G, \mathbb{R}_+^{\lambda-1} \rangle = \langle G, \mathbb{R}_+^{-\lambda-1} \rangle$.

De même que précédemment, nous aurons affaire à des fonctions plus régulières que les éléments de \mathcal{E}_∞ . Si pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$ on a $\mathbb{R}^{-1/2-\alpha} G(\mathbb{R}) \in L^2(\mathbb{R}_+)$ avec $\Upsilon_*(G)$ à support borné dans $]0, +\infty[$ alors dans la définition de $\mathfrak{M}\{G\}$ le crochet de dualité est une intégrale pour $\Re\{\lambda\} > \alpha$ et $\mathfrak{M}\{G\}(\lambda)$ est définie par

$$\mathfrak{M}\{G\}(\lambda) = \int_0^{+\infty} G(\mathbb{R}) \mathbb{R}^{-\lambda} \frac{d\mathbb{R}}{\mathbb{R}} \quad , \quad \text{dans} \quad \Re\{\lambda\} > \alpha,$$

et $\mathfrak{M}\{G\}(\lambda)$ est alors analytique dans $\Re\{\lambda\} > \alpha$. La transformée de Mellin possède "les mêmes propriétés" au voisinage de l'infini qu'au voisinage de 0 : elle diagonalise $\mathbb{R} \partial_{\mathbb{R}}$ et également $\mathfrak{M}\{\mathbb{R} \partial_{\mathbb{R}} G\}(\lambda) = \lambda \mathfrak{M}\{G\}(\lambda)$ et $\mathfrak{M}\{\mathbb{R}^\mu G\}(\lambda) = \mathfrak{M}\{G\}(\lambda - \mu)$. On a bien sûr les mêmes théorèmes qu'au voisinage de 0, et

en particulier une formule d'inversion. En effet la transformation de Mellin à l'infini \mathfrak{M} est un isomorphisme de \mathcal{E}_∞ sur $\check{\mathcal{E}}_\infty$, et si $\check{G} = \mathfrak{M}\{G\} \in \check{\mathcal{E}}_\infty$ avec des constantes κ_n, k, a, α comme dans la définition de $\check{\mathcal{E}}_\infty$, alors pour $j > k + 1$ et $\beta > \alpha$ on montre que

$$G(\mathbb{R}) = \mathfrak{M}^{-1}\{\check{G}\}(r) = (\mathbb{R}\partial_{\mathbb{R}})^j \frac{1}{2\pi i} \int_{\Re\{\lambda\}=\beta} \check{G}(\lambda) \mathbb{R}^\lambda \frac{d\lambda}{\lambda^j}, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \quad \text{lorsque } \check{G} = \mathfrak{M}\{G\}.$$

et le résultat de cette formule ne dépend pas du choix de j et β . On définit les espaces

$$\mathcal{W}_\alpha^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})) = \left\{ G \in \mathcal{E}_\infty \mid \mathbb{R}^{-1/2-\alpha} (\mathbb{R}\partial_{\mathbb{R}})^m G \in L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S})) \quad m \in \mathbb{N}, \text{supp}(Y_* G) \text{ borné} \right\}$$

On peut énoncer une caractérisation des espaces $\mathcal{W}_\alpha^k(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$,

Proposition 2.C.2.

Une fonction $G \in \mathcal{E}_\infty$ appartient à $\mathcal{W}_\alpha^k(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}))$ avec $\text{supp}(Y_* G) \subset [0, a]$ si et seulement si $\hat{G} = \mathfrak{M}\{G\}$ est analytique dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} > \alpha$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_{m,n} > 0$ tel que

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\beta} |\lambda|^{2k} \|\hat{G}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 d\lambda < \kappa_{n,k} a^\beta, \quad \forall \beta > \alpha.$$

Alors l'intégrale ci-dessus est convergente pour $\beta = \alpha$ et on a un analogue de l'identité de Parseval

$$\int_0^\infty \mathbb{R}^{-2\alpha} \|(\mathbb{R}\partial_{\mathbb{R}})^k G(\mathbb{R})\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 \frac{d\mathbb{R}}{\mathbb{R}} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\alpha} |\lambda|^{2k} \|\check{G}(\lambda)\|_{H^n(\mathcal{S})}^2 d\lambda, \quad k, n \in \mathbb{N}.$$

Deuxième partie

Étude complète d'un problème modèle : Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle

CHAPITRE 3

Application du formalisme à l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle

Introduction

La première partie de cette thèse était principalement consacrée à présenter la méthode des développements raccordés. Dans le premier chapitre nous avons dérivé un développement complet de la solution du problème de Helmholtz 2D avec condition de Neumann. Nous avons choisi de commencer avec ce problème car l'analyse asymptotique, bien que calculatoire, n'a pas soulevé de difficulté technique fondamentale. Il suffisait essentiellement de bien ordonner les calculs. Dans le chapitre 2 nous avons montré que ces calculs se présentaient globalement de la même façon pour une classe un peu plus large de problèmes, et nous avons expliqué comment se déroulerait l'analyse asymptotique des autres chapitres.

Dans ce chapitre-ci, nous appliquerons ces résultats au problème de la diffraction 2D d'une onde acoustique par un petit obstacle avec condition de Dirichlet homogène. Bien que ce problème ne se distingue de celui du chapitre 1 que par la condition aux limites, nous verrons que le développement raccordé est sensiblement différent. Ce chapitre sera l'occasion d'illustrer et de mettre en pratique les résultats du chapitre 2 sur un cas simple. Par ailleurs il constituera une miniature de l'étude asymptotique du chapitre 7 qui portera aussi sur l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet mais dans une géométrie filaire tridimensionnelle. Enfin nous utiliserons les résultats de ce chapitre ultérieurement notamment pour l'analyse d'erreur de schémas numériques bidimensionnels.

Concernant l'analyse asymptotique d'un problème elliptique scalaire avec condition de Dirichlet au bord d'un petit obstacle, on peut renvoyer à la même bibliographie que pour la condition de Neumann [4, 48, 67, 68, 75, 87].

Dans une première section nous vérifierons que le problème que nous examinons rentre bien dans le contexte décrit en section 2.1. Ce travail sera d'autant plus rapide que nous reprendrons bon nombre de définitions utilisées au chapitre 1. Ensuite nous poserons directement les problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Après avoir construit des profils adaptés, nous montrerons l'existence/unicité de la solution de ces problèmes, ce qui nous fournira une définition univoque des u_n^ε et U_n^ε . Nous montrerons ensuite en section 3.4 que u_n^ε se décompose sous la forme $u_n^\varepsilon = \delta_0(\varepsilon)u_n^{[0]} + \dots + \delta_m(\varepsilon)u_n^{[m]}$ (idem pour U_n^ε) et nous préciserons l'expression

des $\delta_q(\varepsilon)$. En section 3.5 nous expliciterons autant que possible les premiers termes du développement de u^ε . Enfin en section 3.6 nous dériverons un développement à tout ordre pour la trace de dérivée normale de u^ε sur Γ_ε .

3.1 Vérification des hypothèses

Au cours de ce chapitre, nous reprendrons toutes les notations figurant au §1.1.1 et une partie des notations introduites en section 2.1. Pour ne créer aucune ambiguïté d'un chapitre à l'autre nous répétons ces notations et définitions.

3.1.1 Problème bidimensionnel avec un petit obstacle

Nous décrivons à nouveau une géométrie bidimensionnelle avec un petit obstacle défini à l'aide des coordonnées polaires. Considérons une fonction $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$ destinée à décrire le bord de l'obstacle. On considère tout d'abord un ouvert normalisé (indépendant de ε) noté $\Omega_N \subset \mathbb{R}^2$ que l'on suppose de classe \mathcal{C}^∞ . En notant (R, φ) les coordonnées polaires dans cet ouvert, Ω_N et son bord $\Gamma_N = \partial\Omega_N$ sont définis par

$$\Omega_N := \{ \mathbf{x} = R\sigma \mid R > \Phi(\sigma) \} \quad \text{et} \quad \Gamma_N := \{ \mathbf{x} = R\sigma \mid R = \Phi(\sigma) \}.$$

Nous supposons que $0 < \Phi(\sigma) < 1$ pour tout $\sigma \in S^1$. À l'aide de cette géométrie normalisée on va définir un autre ouvert dépendant de ε au moyen d'opérateurs de changement d'échelle

$$\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} = R\sigma \mapsto \Xi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon R\sigma.$$

Comme d'habitude on note $\Xi^{\varepsilon,-1}$ l'inverse de Ξ^ε . Ce changement d'échelle induit un opérateur Ξ_*^ε suivant la définition $(\Xi_*^\varepsilon u)(\mathbf{x}) := u \circ \Xi^{\varepsilon,-1}(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}/\varepsilon)$. De même l'inverse de Ξ_*^ε est $\Xi_*^{\varepsilon,-1}$. Nous désirons à nouveau restreindre l'étude de notre problème de diffraction à un ouvert borné en ayant recours à un opérateur de type DtN (Dirichlet-to-Neumann). Nous définissons alors

$$\Omega := D(0, \rho), \quad \Gamma := \partial\Omega, \quad \Omega_\varepsilon := \Omega \cap \Xi^\varepsilon(\Omega_N) \quad \text{et} \quad \Gamma_\varepsilon := \Xi^\varepsilon(\Gamma_N). \quad (3.1.1)$$

Dans l'ouvert Ω_ε les coordonnées polaires seront notées (r, φ) . D'après la définition du changement d'échelle on a donc la relation $r = \varepsilon R$. Dans ce qui suit nous supposons chaque fois que nécessaire que le rayon ρ est "suffisamment grand". Cette géométrie et ces définitions rentrent clairement dans le cadre du §2.1.1. En particulier dans ce chapitre on aura $\mathcal{S} = S^1$.

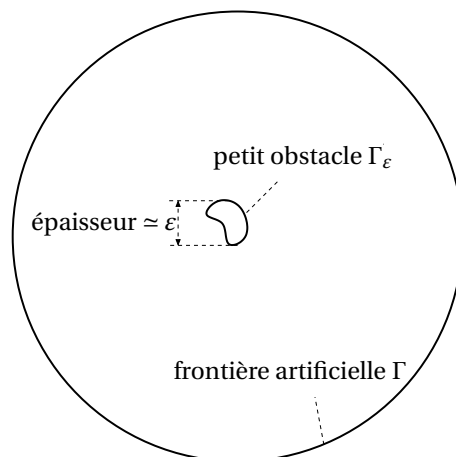


Fig.1 Géométrie du problème

3.1.2 Équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet

Notre problème de diffraction consistera à trouver la solution u^ε de l'équation de Helmholtz avec un terme source $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ tel que $\text{supp } f$ est compact, contenu dans le domaine de résolution et disjoint du petit obstacle : $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. La solution u^ε sera cherchée dans l'espace de Sobolev

$$H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) := \{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \}.$$

Cet espace est classiquement un sous-espace fermé de $H^1(\Gamma_\varepsilon)$ par continuité de la trace de $H^1(\Gamma_\varepsilon)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Ainsi nous pouvons munir $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ d'une topologie associée à la norme définie par $\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 := \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$ ce qui en fait un espace de Banach. C'est en cherchant la solution dans cet espace qu'on impose une condition de Dirichlet sur Γ_ε .

Sur Γ nous traduirons la condition de radiation de Sommerfeld. Nous désignerons par n_Γ le champ de vecteur normal à Γ dirigé vers l'extérieur de Ω . Les deux conditions de bord seront posées respectivement dans $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ et $L^2(\Gamma)$ et s'écriront

$$u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Dans cette expression l'opérateur T_Γ est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann que nous avons utilisé déjà au chapitre 1 et défini par l'équation (1.1.3). Cet opérateur permet de ramener la condition de Sommerfeld à une condition sur Γ . Notre problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ se formule finalement de la manière suivante,

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.1.2)$$

L'équation de Helmholtz ci-dessus est posée au sens fort dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$. De même que pour le problème avec condition de Neumann, il est classique que ce problème admet une formulation variationnelle. Introduisons la forme sesquilinéaire

$$a_\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma u. \quad (3.1.3)$$

Il s'agit de la même forme que (1.1.4), mais ici la forme $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ sera restreinte à $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$. Elle est en particulier continue sur $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ ci-dessus admet alors la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}, \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon).$$

À nouveau il est classique que ce problème est bien posé (cf [28] par exemple), et ceci est équivalent à dire que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ restreinte à $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ satisfait deux condition inf-sup. Nous verrons dans un paragraphe consacré à la stabilité que ces conditions inf-sup sont uniformes vis-à-vis de ε .

3.1.3 Définition et propriétés des opérateurs intervenant dans l'analyse asymptotique

Nous devons vérifier que les opérateurs intervenant dans ce problème correspondent bien à la forme annoncée au §2.1.4 et au §2.1.5. En particulier nous devons vérifier les hypothèses **H1**, **i = 2...6**. Tout d'abord on pose

$$A = \frac{1}{r^2} \left((r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2 + \omega^2 r^2 \right), \quad B = \text{Id} \quad \text{et} \quad C = \frac{\partial}{\partial n_r} + T_r \quad \text{d'où} \quad A_0 = (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2 \quad \text{et} \quad A_2 = \omega^2.$$

Puisque $\Xi_*^{\varepsilon, -1}(v|_{\Gamma_\varepsilon}) = (\Xi_*^{\varepsilon, -1}v)|_{\Gamma_N}$ on a $B_0 = B$ et $B_n = 0$ dès que $n \geq 1$. On a également $A_n = 0$ lorsque $n \neq 0$ ou 2. Avec ces remarques, il est également clair que

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = \lambda^2 + \partial_\varphi^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2(\lambda) = \omega^2.$$

sont analytiques dans tout le plan complexe et à valeur respectivement dans $\mathcal{O}_2(S^1)$ et $\mathcal{O}_0(S^1)$. Tout ceci nous montre que l'hypothèse **H3** est respectée. Pour les hypothèses **H4**, **H5** et **H6** nous devons regarder d'un peu plus près $\mathcal{A}_0(\lambda)$.

Tout d'abord il est bien connu que $\lambda^2 + \partial_\varphi^2 : H^{s+2}(S^1) \rightarrow H^s(S^1)$, $s \in \mathbb{R}$ est inversible dès que $\lambda \notin \mathbb{Z}$. On démontre ceci facilement par décomposition en série de Fourier. Ainsi $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = (\lambda^2 + \partial_\varphi^2)^{-1}$ est bien défini et continu de $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ dans $\mathcal{C}^\infty(S^1)$ pour tout $\lambda \notin \mathbb{Z}$. Ceci nous permet donc de vérifier l'hypothèse **H4**. Par ailleurs on a la décomposition spectrale suivante

$$\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{P_p}{\lambda^2 - p^2} = \frac{P_0}{\lambda^2} + \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda - p} \frac{P_p + P_{-p}}{2p} \quad (3.1.4)$$

$$\text{avec} \quad (P_p v)(\varphi) = \frac{e^{ip\varphi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\alpha) e^{-ip\alpha} d\alpha,$$

Attention la somme ci-dessus n'est pas une série convergente au sens de la topologie de $\mathcal{O}_0(S^1)$ auquel appartient $\mathcal{A}_0^{-1}(\lambda)$. Il s'agit d'une décomposition spectrale. Le sens exact d'une telle décomposition est décrit en détail dans [102] chapitre 12 par exemple. Pour tout $v \in H^s(S^1)$ la série

$$\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} v = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{P_p v}{\lambda^2 - p^2} \quad \text{converge en norme} \quad H^s(S^1).$$

On voit sur l'expression précédente que $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ est analytique dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ à valeur dans $\mathcal{O}_{-2}(S^1)$, avec des pôles simples en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et un pôle double en 0. Par ailleurs, les résidus associés sont proportionnels aux projecteurs P_p qui sont bien des éléments de $\mathcal{O}_{-2}(S^1)$. Ceci permet donc de vérifier l'hypothèse **H5**. Enfin, pour le comportement lorsque $|\Im\{\lambda\}| \rightarrow \infty$, considérons un $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. On peut même supposer sans nuire à la généralité que $a > 1$. Soit $\lambda = \alpha + i\beta$ et supposons que $|\alpha| < a < |\beta|$. On a donc $|\lambda|^2 > a^2 > 1$. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a également $|\lambda^2 - p^2|^2 = [\beta^2 - \alpha^2 + p^2]^2 + \alpha^2 \beta^2 > p^4$ et donc $|\lambda^2 - p^2| > p^2$. Ainsi on en tire la majoration explicite

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} v\|_{H^{k+2}(S^1)}^2 &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + |p|^2)^k \|P_p v\|_{L^2(S^1)}^2 \left| \frac{1 + |p|^2}{\lambda^2 - p^2} \right|^2 \\ &\leq 2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} (1 + |p|^2)^k \|P_p v\|_{L^2(S^1)}^2 = 2 \|v\|_{H^k(S^1)}^2 \end{aligned}$$

Ceci permet donc de vérifier l'hypothèse **H6**. Nous avons presque démontré que le problème de ce chapitre rentre dans le cadre de l'étude du chapitre 2. Il reste à démontrer la stabilité. C'est l'objet du prochain paragraphe.

3.1.4 Stabilité

Nous démontrons maintenant la stabilité du problème qui correspond à la vérification de l'hypothèse **H1**. Pour ceci nous procéderons en deux temps. D'abord, nous montrerons que la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$, définie en (3.1.3), vérifie une condition inf–sup uniforme par rapport à ε . Nous mettrons ensuite ce résultat sous une forme correspondant à **H1**.

Stabilité faible : condition inf – sup uniforme

Le résultat suivant est le pendant du théorème 11.2.1 dans le cas de la condition de Dirichlet. Ce résultat est cette fois beaucoup plus facile à démontrer parce que l'opérateur de prolongement par 0 de $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ dans $H^1(\Omega_\varepsilon)$ est continu uniformément par rapport à ε , puisque sa norme est ≤ 1 . La situation était plus compliquée dans le cas de la condition de Neumann.

Proposition 3.1.1.

Pour la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (3.1.3), il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}, \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Preuve :

Procédons par l'absurde. Supposons l'existence d'une suite ε_n avec $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et d'une suite $v_n \in H_{0,\Gamma_{\varepsilon_n}}^1(\Omega_{\varepsilon_n})$ telle que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{w \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} \frac{a_{\varepsilon_n}(v_n, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour tout n considérons les prolongés par 0 de v_n définis par $\tilde{v}_n \in H^1(\Omega)$ telle que $\tilde{v}_n = v_n$ dans Ω_ε et $\tilde{v}_n = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Alors on a $\|\tilde{v}_n\|_{H^1(\Omega)} = \|v_n\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Par injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on peut supposer quitte à en extraire une sous-suite, que la suite (\tilde{v}_n) converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers un $v_\infty \in H^1(\Omega)$. Considérons un $w \in H_\star^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur un voisinage de } 0\}$. Par passage à la limite faible on a

$$\int_\Omega \nabla v_\infty \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_\Omega v_\infty \bar{w} + \int_\Gamma \bar{w} T_\Gamma v_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{\varepsilon_n}(v_n, w) = 0, \quad \forall w \in H_\star^1(\Omega).$$

Par densité de $H_\star^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (comme démontré au lemme 1.2.2) on en conclut que cette identité variationnelle vaut en fait pour tout $w \in H^1(\Omega)$ et ceci implique alors $v_\infty = 0$ car le problème de Helmholtz homogène dans Ω avec condition d'onde sortante est bien posé. On obtient alors $\|v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On conclut la preuve en notant

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})}^2 \leq \Re \left\{ \int_\Gamma \bar{v}_n T_\Gamma v_n \right\} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})}^2 \leq \omega^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})}^2 + \Re \{ a_{\varepsilon_n}(v_n, v_n) \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous avons utilisé la propriété de positivité de l'opérateur DtN : $\Re \{ \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma v \} \geq 0, \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$. On en tire $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n})}^2 \rightarrow 0$ ce qui mène à une contradiction et conclut donc définitivement la démonstration. ■

Définition du champ limite

De même qu'au chapitre 1, la condition inf-sup uniforme nous permet d'obtenir directement la limite de u^ε quand $\varepsilon \rightarrow 0$ avec une estimation d'erreur. Nous définissons ici un champ limite u^0 identique

à celui du chapitre 1. Rappelons que celui-ci avait été défini comme l'unique fonction satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} u^0 \in H^2(\Omega) \\ \Delta u^0 + \bar{\omega}^2 u^0 = -f \quad \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Il s'agit donc de la solution du problème sans obstacle. Le champ limite peut être également caractérisé comme l'unique fonction satisfaisant

$$u^0 \in H^1(\Omega), \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} \nabla u^0 \cdot \nabla \bar{v} - \bar{\omega}^2 \int_{\Omega} u^0 \bar{v} + \int_{\Gamma} \bar{v} T_\Gamma u^0 = \int_{\Omega} f \bar{v} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (3.1.5)$$

À nouveau il s'agira de la limite de u^ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci traduit le fait que quand l'obstacle disparaît à cause de sa taille, la solution du problème avec obstacle converge vers la solution du problème sans obstacle. La convergence de u^ε vers u^0 est cette fois plus lente qu'au chapitre 1.

Proposition 3.1.2.

Si u^ε désigne l'unique solution de (3.1.2) et u^0 est la solution de (3.1.5) alors il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε et de u^0 tel que

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} \left(\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Pour prouver ce résultat nous désirons nous servir de la proposition 3.1.1 ci-dessus. Le problème est que ce résultat s'applique à des fonctions dont la trace sur Γ_ε est nulle ce qui est le cas de u^ε (par définition) mais pas de u^0 . Nous corrigeons ceci en relevant intelligemment la trace de u^0 . Reprenons les fonctions de troncature que nous avons introduites au cours de la preuve du lemme 1.2.2. Celles-ci étaient définies par

$$\tau_\eta(\mathbf{x}) := \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathbf{x}| < \eta, \\ \frac{\ln(|\mathbf{x}|/\eta)}{\ln(1/\eta)} & \text{si } \eta \leq |\mathbf{x}| < 1, \\ 1 & \text{si } |\mathbf{x}| \geq 1. \end{cases}$$

Nous allons nous servir de $\tau_{\eta(\varepsilon)}$ avec $\eta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon}$. Notons que $u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}$ est nulle au voisinage de Γ_ε . On montre en plus que cette fonction tend vers u^0 en norme H^1 puisque d'après les inégalités (1.2.6), il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} \|u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)} - u^0\|_{H^1(\Omega)} &\leq 2 \|1 - \tau_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^2(\Omega)} \left(\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) + 2 \|\nabla \tau_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^2(\Omega)} \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \frac{\kappa}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} \left(\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

On peut maintenant appliquer la proposition 3.1.1 à $u^\varepsilon - u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)} \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$. Pour ceci nous devons évaluer $a_\varepsilon(u^\varepsilon - u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}, w)$ avec $w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ satisfaisant $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$.

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon - u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}, w) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{w} - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}) \cdot \nabla \bar{w} - \bar{\omega}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)} \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}.$$

En notant que $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit on voit que la première intégrale peut être écrite comme une intégrale sur tout Ω . De même on peut remplacer $u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}$ par u^0 dans la dernière intégrale puisque

$\tau_{\eta(\varepsilon)} = 1$ sur Γ . En se servant de la caractérisation (3.1.5) de u^0 et des inégalités (1.2.6) on obtient un $\kappa > 0$ indépendant de ε satisfaisant

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u^\varepsilon - u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}, w) &= \int_{\Omega} \bar{w} \nabla u^0 \cdot \nabla \tau_{\eta(\varepsilon)} - \int_{\Omega} u^0 \nabla \bar{w} \cdot \nabla \tau_{\eta(\varepsilon)} \\ &\leq \|\nabla \tau_{\eta(\varepsilon)}\|_{L^2(\Omega)} \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\kappa \|u^0\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

Enfin en réunissant les majorations on obtient un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|u^\varepsilon - u^0 \tau_{\eta(\varepsilon)}\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|u^0(1 - \tau_{\eta(\varepsilon)})\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \frac{\kappa}{\sqrt{|\ln \varepsilon|}} (\|u^0\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla u^0\|_{L^\infty(\Omega)})$$

■

Stabilité forte

Nous allons maintenant vérifier l'hypothèse **H1**. Notons au préalable que **H1** est formulée notamment en terme de normes à poids. Nous rappelons donc succinctement la définition des espaces à poids dans le contexte de ce chapitre. On posera ici

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega) &:= \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega_\star) \mid \|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)}^2 := \sum_{\beta_1 + \beta_2 \leq k} \int_{\Omega} |(r \partial_r)^{\beta_1} \partial_\varphi^{\beta_2} v|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr}{r} d\varphi < \infty \right\}, \\ \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N) &:= \left\{ v \in \mathcal{D}'(\Omega_N) \mid \|v\|_{\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)}^2 := \sum_{\beta_1 + \beta_2 \leq k} \int_{\Omega_N} |(\mathbb{R} \partial_R)^{\beta_1} \partial_\varphi^{\beta_2} v|^2 R^{-2\alpha} \frac{dR}{R} d\varphi < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

On vérifie que ces définitions sont bien en accord avec celles du chapitre 2. Voici maintenant le résultat de stabilité modifié. Remarquons qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|v\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \|v\|_{\mathcal{V}_0^0(\Omega_\varepsilon)}$ pour tout $v \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Nous allons maintenant montrer que **H3** est vérifiée à l'aide de cette remarque. Nous allons d'abord montrer une estimation pour des $v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) \cap H^2(\Omega_\varepsilon)$, puis pour des $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ arbitraires.

Lemme 3.1.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} \right\} \quad \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

La démonstration reprend l'essentiel de la preuve de la proposition 1.4.1 sauf que cette fois, grâce à la condition de Dirichlet, il n'apparaît pas de terme de bord. Considérons un $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, et choisissons un $w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire mais tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. En appliquant la formule de Green il vient

$$|a_\varepsilon(v, w)| \leq \left| - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta v + \bar{\omega}^2 v) \bar{w} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right) \bar{w} \right| \leq \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \kappa \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)}$$

La constante κ qui intervient ci-dessus est reliée à la continuité de la trace de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$ et est indépendante de ε . Pour conclure il suffit alors de prendre le sup sur les $w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$ et de remarquer que $\| \cdot \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \| \cdot \|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)}$.

■

Nous adaptions maintenant le résultat ci-dessus au cas où les traces ne sont pas forcément nulles. Ceci est nécessaire pour rentrer dans le cadre de l'hypothèse de stabilité **H1** requise pour appliquer les résultats du chapitre 2.

Lemme 3.1.2.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ et pour tout $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$,

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} + \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} \right\}.$$

Preuve :

Soit un $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$. La difficulté essentielle pour montrer l'estimation ci-dessus réside évidemment dans le fait que $v|_{\Gamma_\varepsilon} \neq 0$. Nous allons nous débarrasser de cette trace en la relevant. Considérons un disque $D = D(0, R_0)$ avec $R_0 > 1$ de sorte que $\Gamma_N \subset D$. Introduisons une application de relèvement continue $g : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow H^1(\Omega_N)$ telle que $\text{supp } g(w) \subset D$ et $g(w)|_{\Gamma_N} = w$ pour tout $w \in H^{1/2}(\Gamma_N)$. Il est assez clair que

$$\Xi_*^\varepsilon g(\Xi_*^{\varepsilon,-1} v|_{\Gamma_\varepsilon}) - v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Notons $g^\varepsilon(v) := \Xi_*^\varepsilon g(\Xi_*^{\varepsilon,-1} v)$. On peut donc appliquer à ces fonctions le résultat du lemme 3.1.1, il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\|v - g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \sup_{w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{|a_\varepsilon(v - g^\varepsilon(v), w)|}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \leq \kappa \|g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \sup_{w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{|a_\varepsilon(v, w)|}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \quad (3.1.9)$$

Par changement d'échelle, on voit sans difficulté l'existence d'un autre $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \|g(\Xi_*^{\varepsilon,-1} v)\|_{H^1(\Omega_N)}$. Par ailleurs pour évaluer le terme contenant v dans la dernière inégalité ci-dessus, on peut se restreindre à considérer des $w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ tels que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. Pour de tels w arbitraires, on obtient alors en appliquant une formule de Green

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon(v, w)| &\leq \left| -\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta v + \bar{\omega}^2 v) \bar{w} + \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right) \bar{w} \right| \\ &\leq \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \kappa \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)}, \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

ce qui nous permet de majorer le dernier terme de (3.1.9). En utilisant la continuité de g , (3.1.9) et (3.1.10), on trouve une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|v - g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \|g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \kappa \left\{ \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} + \|g^\varepsilon(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right\} \\ &\leq \kappa \left\{ \|\Delta v + \bar{\omega}^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} + \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \right\} \end{aligned}$$

■

3.2 Définition des termes du développement raccordé

Dans la section précédente, nous avons précisé le problème auquel nous nous intéressons dans ce chapitre et avons vérifié, notamment au travers des hypothèses **Hi, i= 1, ...6**, que nous rentrions bien dans le cadre du chapitre 2. Dans la présente section nous allons rechercher les termes d'un développement de u^ε . Le chapitre précédent nous invite à les définir directement comme les solutions des problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ introduits en section 2.8. Dans les problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ interviennent notamment des équations de raccord dont nous rappelons qu'elles s'écrivent

$$\ell_p(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p+n} \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)] \right) \quad (3.2.1)$$

Le premier paragraphe aura pour but de simplifier au maximum le deuxième terme dans le membre de droite de ces équations en tirant partie des spécificités du problème.

3.2.1 Réduction des équations de raccord

Calculons dans un premier temps l'expression explicite des $\ell_p(\cdot)$ et des $L_p(\cdot)$. Notons que la définition de ces applications linéaires dépend uniquement de la partie principale $\mathcal{A}_0(\lambda)$ de notre problème. Ici on a $\mathcal{A}_0(\lambda) = \lambda^2 + \delta_\varphi^2$, de même que pour le problème traité au chapitre 1. On peut donc reprendre la formule (2.7.8) ou bien le calcul proposé dans l'exemple du §2.7.4. On avait en effet obtenu les expressions,

$$\begin{aligned}\ell_p(u) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda \\ \ell_0(u) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \lambda \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda.\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

Rappelons que dans cette expression P_p , $p \in \mathbb{Z}$ désigne le projecteur défini par (3.1.4). D'après la définition des $L_p(\cdot)$ suivant la formule (2.7.6), on obtient leur expression à partir des formules ci-dessus mutatis mutandis

$$\begin{aligned}L_p(U) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda \\ L_0(U) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \lambda \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda.\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

Posons comme notation : $P_p^\pm := P_p + P_{-p}$ si $p \neq 0$ et $P_0^\pm := P_0$. On a alors une identité intéressante dont nous allons nous servir pour simplifier les équations,

$$P_k^\pm \cdot \ell_p(\cdot) = \begin{cases} 0 & \text{quand } p^2 - k^2 \neq 0, \\ \ell_p(\cdot) & \text{quand } p^2 - k^2 = 0. \end{cases}\tag{3.2.4}$$

La même propriété vaut aussi pour les L_p . Remarquons par ailleurs que $[\mathcal{A}_0(\lambda), P_k^\pm] = [\mathcal{A}_2(\lambda), P_k^\pm] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On peut utiliser le lemme 2.7.4 pour en tirer

$$[P_k^\pm, \ell_p] = 0 \quad \text{et} \quad [P_k^\pm, \mathfrak{h}_q^p] = 0, \quad \forall p, q, k \in \mathbb{Z}.\tag{3.2.5}$$

Par ailleurs il n'est pas difficile de vérifier que $[P_k^\pm, \Xi_*^\varepsilon] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Appliquons maintenant les deux identités (3.2.4) et (3.2.5) aux équations de raccord (3.2.1),

$$\begin{aligned}\ell_p(u_n^\varepsilon) &= P_p^\pm \cdot \ell_p(u_n^\varepsilon) = P_p^\pm \cdot \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p+n} P_p^\pm \cdot \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)]\right) \\ &= \Xi_*^\varepsilon P_p^\pm \cdot L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p+n} \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon P_p^\pm \cdot \mathfrak{h}_p^{p-k} [L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)]\right) \\ &= \Xi_*^\varepsilon L_p(U_{n+p}^\varepsilon) + \sum_{k=1}^{p+n} \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \cdot \mathfrak{h}_p^{p-k} [P_p^\pm L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)]\right)\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{p+n} \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [P_p^\pm \cdot L_{p-k}(U_{n+p-k}^\varepsilon)]\right) = \begin{cases} \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p} [L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)]\right) & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0. \end{cases}$$

Notons au passage que $\mathfrak{h}_p^{-p} = 0$ lorsque $p < 0$ ce qui amène une simplification supplémentaire. Enfin remarquons que d'après (3.2.3) si $p \neq 0$ on a $\Xi_*^\varepsilon L_p(U_k^\varepsilon) = L_p(U_k^\varepsilon)$. En résumé les équations de raccord

peuvent s'écrire,

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon) \end{array} \right. \quad (3.2.6)$$

Cette forme des équations de raccord est déjà plus simple que celle des équations (3.2.1). Ces équations ressemblent beaucoup à celles annoncées à la proposition 1.7.2 comme nous allons le montrer maintenant. En fait on peut montrer que ce sont les mêmes équations, mais nous ne le démontrerons pas car nous n'avons pas besoin de ce résultat et la démonstration semble compliquée.

3.2.2 Formulation des problèmes récurrents

Une fois les conditions de raccord simplifiées par les calculs du paragraphe précédent, les problèmes que nous devons résoudre pour définir les termes u_n^ε et U_n^ε s'écrivent

$$\begin{array}{l} (\mathcal{P}_n^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u_n^\varepsilon + \omega^2 u_n^\varepsilon = -\delta_0^n f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta U_n^\varepsilon = -\omega^2 U_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \\ U_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon) \end{array} \right. \end{array}$$

3.2.3 Construction de profils

De même qu'au chapitre 1, nous allons nous servir de solutions particulières des équations de champ proche et de champ lointain pour étudier le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ ci-dessus. Ces solutions particulières admettront un comportement singulier. Cependant nous allons nous servir de ces fonctions non seulement pour démontrer l'existence d'un couple solution de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$, mais aussi pour en montrer l'unicité.

Profils en champ lointain

Nous allons dans un premier temps énoncer une nouvelle fois un résultat d'existence pour les profils en champ lointain. Même si la situation dans cette section est très proche de celle rencontrée en 1.8.2, nous proposons ici une construction des profils qui ne prend pas en compte la séparation de variables.

Lemme 3.2.1.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a(\varphi) = a^+ e^{+i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$, il existe une unique fonction $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{s}_{-p}\{a\} \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \text{ telle que} \\ \Delta \mathfrak{s}_{-p}\{a\} + \omega^2 \mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_{-p}\{a\}}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ \ell_{-p}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Preuve :

Unicité : Il suffit de reprendre la partie unicité de la preuve du lemme 1.8.1.

Existence : Nous allons construire une solution $v_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega)$ pour le problème de l'énoncé pour un $k \in \mathbb{N}$ arbitraire. Pour ceci nous nous servirons de la série formelle $\mathfrak{h}^{-p}[a]$ construite au §2.7.5 pour une résolution "semi-analytique". Soit $q_k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{V}_{q_k-1/2}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$. En se servant des relations de récurrence (2.7.4) on obtient

$$(\Delta + \omega^2) \sum_{q=-p}^{q_k+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] = \omega^2 \left(r^{q_k} \mathfrak{h}_{q_k}^{-p}[a] + r^{q_k+1} \mathfrak{h}_{q_k+1}^{-p}[a] \right) \in \mathcal{V}_{q_k-1/2}^\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\Omega).$$

Notons la somme partielle $\tilde{v}_k := \sum_{q=-p}^{q_k+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a]$. On s'assure facilement par des calculs de routine que $\tilde{v}_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$. Au lieu de rechercher une fonction v_k satisfaisant les équations de l'énoncé, nous recherchons $\tilde{w}_k = v_k - \tilde{v}_k$ satisfaisant $\tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ et

$$\Delta \tilde{w}_k + \omega^2 \tilde{w}_k = -(\Delta + \omega^2) \tilde{v}_k \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \tilde{w}_k = -\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial n_\Gamma} - T_\Gamma \tilde{v}_k \quad \text{sur } \Gamma.$$

L'existence d'un unique $\tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ solution du problème ci-dessus est un résultat classique (le problème de Helmholtz dans Ω avec condition d'onde sortante est bien posé). De plus les théorèmes sur la régularité des solutions des équations elliptiques nous garantissent que $\tilde{w}_k \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. En résumé, en posant $v_k = \tilde{v}_k + \tilde{w}_k$ nous voyons que v_k satisfait,

$$v_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega), \quad \Delta v_k + \omega^2 v_k = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_k}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v_k = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

En réalité la fonction v_k construite de cette manière ne dépend pas de k . En effet, si k est donné, considérons un $l \geq k$. Alors on a $v_l - v_k = (\tilde{w}_l - \tilde{w}_k) + (\tilde{v}_l - \tilde{v}_k)$. Il est clair que $\tilde{w}_l - \tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ pour k assez grand. Comme $\mathcal{V}_{q_k-1/2}^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ on obtient

$$\tilde{v}_l - \tilde{v}_k := \sum_{q=q_k}^{q_l+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] \in H^1(\Omega), \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_l - v_k \in H^1(\Omega), \\ \Delta(v_l - v_k) + \omega^2(v_l - v_k) = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial(v_l - v_k)}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma(v_l - v_k) = 0 \text{ sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

D'après le caractère bien posé du problème homogène de Helmholtz dans Ω avec condition d'onde sortante on obtient finalement $v_l - v_k = 0$. Ainsi en renotant $v = v_k$ on voit que $v \in \cap_k \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega) := \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$. Choisissons un l suffisamment grand pour que $\tilde{w}_l \in H^1(\Omega)$. On sait par ailleurs que $\tilde{v}_l \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ et que v et \tilde{v}_l admettent un développement au voisinage de 0 suivant les puissances entières de r (par application de la proposition 2.3.1). Il en va donc de même pour \tilde{w}_l . Alors il existe $g_{-p}, \dots, g_0 \in \mathbb{P}_{\log}$ tels que

$$\tilde{w}_l - \sum_{q=-p}^0 r^q g_q \in \mathcal{V}_{1/2}^\infty(\Omega).$$

Puisque $\tilde{w}_l \in H^1(\Omega)$, ceci n'est possible que si $g_{-p}, g_{-p+1}, \dots, g_{-1} = 0$ et si g_0 n'admet pas de terme en $\ln(r)$ i.e. $d^\circ g_0 = 0$. On en conclut que $\tilde{w}_l \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. Finalement d'après (2.7.12) pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\ell_{-k}(v) = \ell_{-k} \left(\sum_{q=-p}^{q_l+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] + \tilde{w}_l \right) = \sum_{q=-p}^{q_l+1} \ell_{-k}(r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a]) + \ell_{-k}(\tilde{w}_l) = \begin{cases} a & \text{si } k = p, \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Ceci permet de montrer que $\ell_{-q}(v) = 0$ pour $q = 1 \dots p-1$ et $\ell_{-p}(v) = a$. De plus on tire de ce qui précède que $d^\circ \ell_0(v) = 0$. Ceci conclut la construction en montrant que $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} := v$ a bien les propriétés voulues. ■

Dans les problèmes caractérisant chaque $\mathfrak{s}_p\{a\}$, les équations sur les $\ell_q(\mathfrak{s}_p\{a\})$ jouent le rôle de conditions aux limites au voisinage de 0. En un certain sens ces conditions reviennent à imposer $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = r^{-p} a(\sigma) + o(r^{-p+1/2})$ au voisinage de 0. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer, par les mêmes techniques que ci-dessus, un résultat d'existence-unicité pour les profils $\mathfrak{s}_0\{a\}$ avec lesquels a représente un comportement logarithmique prescrit au voisinage de 0.

Lemme 3.2.2.

Soit $a(r) = a \ln(r) + \beta$, $a \in \mathbb{C}$, il existe un unique élément $\mathfrak{s}_0\{a\} \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta \mathfrak{s}_0\{a\} + \bar{\omega}^2 \mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial \mathfrak{s}_0\{a\}}{\partial n_r} + T_r \mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ d^\circ \{ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) - a \} = 0. \end{cases}$$

Notons que si $d^\circ a = 0$ alors $\mathfrak{s}_0\{a\} = 0$. En effet dans cas on a $\mathfrak{s}_0\{a\} \in H^1(\Omega)$ ce qui implique $\mathfrak{s}_0\{a\} = 0$ car le problème de Helmholtz homogène dans Ω avec condition d'onde sortante est bien posé.

Décomposition sur/sous-variationnelle Étant donné $p \in \mathbb{N}$ et un $a \in \mathbb{P}_{\log}$ tel que $A_0 r^{-p} a = 0$, si l'on applique la proposition 2.3.1 et le lemme 2.7.4 à $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ en tenant compte des conditions sur les $\ell_q(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})$, on obtient que cette fonction admet le développement radial suivant

$$\mathfrak{s}_{-p}\{a\} \underset{r \rightarrow 0}{\asymp} \mathfrak{h}^{-p}[a] + \sum_{q \geq 0} \mathfrak{h}^q[\ell_q(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})]$$

Ce développement asymptotique au voisinage de 0 se découpe en deux parties. La première partie correspond au comportement singulier et nous l'appelons en suivant [113] "partie survariationnelle de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ ". La deuxième partie correspond à un comportement régulier et provient de la résolution variationnelle du problème caractérisant $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$. Nous l'appelons "partie sous-variationnelle de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ ".

Résultats standard pour l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet

Nous énonçons ici des résultats similaires à ceux que nous avons énoncés pour l'équation de Laplace en domaine non-borné au §3.2.3. Ici cependant nous nous intéressons naturellement au cas d'une condition de Dirichlet. Reprenons l'espace

$$\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N) := \left\{ v \in H_{\text{loc}}^1(\Omega_N) \mid \|v\|_{\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)}^2 := \int_{\Omega_N} \frac{|v|^2}{R \ln^2(R)} dR d\varphi + \int_{\Omega_N} |\nabla v|^2 R dR d\varphi < \infty \right\}.$$

introduit au chapitre 1, ainsi que son dual $\mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)$ (l'ensemble des formes linéaires sur $\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$ continues au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)}$). Nous avons déjà expliqué au chapitre 1 que l'espace $\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$ pouvait être vu comme un "espace à poids intermédiaire". Pour illustrer cela de nouveau notons que $\mathbf{1}_{\Omega_N} \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$ mais $\ln R \notin \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$. Ainsi pour une fonction $V \in \cup_{\alpha} \mathscr{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$ telle que $L_0(V)$ existe, nécessairement

$$\text{Si } V \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N) \text{ alors } d^{\circ}L_0(V) = 0 \text{ et } L_p(V) = 0, \forall p > 0.$$

Nous énonçons un résultat d'existence-unicité comparable à la proposition 1.8.2 sauf que cette fois il n'y a pas de condition de compatibilité à prendre en compte. Il s'agit d'un résultat classique dont on peut trouver la démonstration dans [91] par exemple.

Proposition 3.2.1.

Soit $g \in \mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)$ et $h \in H^{1/2}(\Gamma_N)$. Il existe une unique solution au problème

$$\text{Trouver } V \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N) \text{ tel que } \Delta V = g \text{ dans } \Omega_N, \text{ et } V = h \text{ sur } \Gamma_N.$$

De plus cette solution dépend continuellement des données g et h : il existe une constante κ (indépendante des données) telle que

$$\|V\|_{\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)} + \|h\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \right), \quad \text{avec } \|g\|_{\mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)} := \sup_{1=\|W\|_{\mathscr{W}_{\log}}} \left| \langle g, W \rangle_{\mathscr{W}'_{\log}, \mathscr{W}_{\log}} \right|.$$

On peut également énoncer un résultat de régularité et d'estimation *a priori*, dont la démonstration repose sur les mêmes arguments que ceux de la proposition 1.8.3. Nous nous bornerons donc à l'énoncer sans la démontrer.

Proposition 3.2.2.

Soit $V \in \mathscr{W}_{\alpha}^m(\Omega_N)$ tel que $\Delta V \in \mathscr{W}_{\alpha-2}^m(\Omega_N)$ et $V|_{\Gamma_N} \in H^{m+3/2}(\Gamma_N)$, pour $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $V \in \mathscr{W}_{\alpha}^{m+2}(\Omega_N)$ et il existe $\kappa > 0$ indépendant de V tel que

$$\|V\|_{\mathscr{W}_{\alpha}^{m+2}(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|\Delta V\|_{\mathscr{W}_{\alpha-2}^m(\Omega_N)} + \|V\|_{H^{m+3/2}(\Gamma_N)} + \|V\|_{\mathscr{W}_{\alpha}^m(\Omega_N)} \right).$$

On peut en particulier tirer de cette proposition que si $V \in \mathscr{W}_{\alpha}^1(\Omega_N)$ tel que $\Delta V \in \mathscr{W}_{\alpha-2}^{\infty}(\Omega_N)$ et $V|_{\Gamma_N} \in \mathscr{C}^{\infty}(\Gamma_N)$, alors $V \in \mathscr{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$.

Signalons également que dans le cas où $V \in \cup_{\alpha} \mathscr{W}_{\alpha}^{\infty}(\Omega_N)$ et $\Delta V = 0$ dans l'extérieur d'un disque $\mathbb{R}^2 \setminus D(0, R_0)$, $R_0 > 0$, alors les $L_p(V)$, $p \in \mathbb{Z}$ sont ses coefficients intervenant dans la résolution par séparation de variables de l'équation de Laplace dans \mathcal{O} . On peut alors représenter V à l'aide d'une série qui, d'après les résultats de régularité elliptique, converge dans $H_{\text{loc}}^k(\mathcal{O})$ pour tout k ,

$$\text{Si } V \in \cup_{\alpha} \mathscr{W}_{\alpha}^{\infty}(\mathcal{O}) \text{ et } \Delta V = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \quad \text{alors } V = \sum_{p \in \mathbb{Z}} L_p(V) R^p.$$

Profils en champ proche

En utilisant les résultats du paragraphe précédent on énonce sans difficulté des résultats d'existence-unicité pour les profils en champ proche. Comme il n'y a plus de condition de compatibilité, nous construisons des profils pour tout $p \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire y compris pour $p = 0$.

Lemme 3.2.3.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a(\varphi) = a^+ e^{i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$, il existe une unique solution au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathfrak{S}_p\{a\} \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N) \text{ tel que} \\ \Delta \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ L_0(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0 \\ L_q(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Preuve :

Unicité : Considérons une fonction $V \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant le problème homogène associé et montrons qu'elle est nulle. On a

$$\Delta V = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad V = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \quad \text{et} \quad L_q(V) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad d^\circ L_0(V) = 0.$$

Alors si on pose $V' = V - L_0(V)$ on a $V' \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ et cette fonction satisfait $\Delta V' = 0$ dans Ω_N et $\Delta V' = -L_0(V)$ sur Γ_N . D'après la partie unicité de la proposition 3.2.1, $V' = -L_0(V)$ d'où finalement $V = 0$.

Existence : Considérons la fonction $V'(r, \varphi) = a(\varphi) R^p$. Alors vu le $a(\varphi)$ considéré par l'énoncé, on a clairement $\Delta V' = 0$ et $V' \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ avec $L_k(V') = 0$ si $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$ et $L_k(V') = a(\varphi)$ si $k = p$. En utilisant la proposition 3.2.1, définissons W' comme l'unique fonction satisfaisant

$$W' \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N), \quad \Delta W' = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad W' = -V' \text{ sur } \Gamma_N.$$

On a donc $W' \in \mathcal{W}_{1/2}^1(\Omega_N)$ puisque $\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_{1/2}^1(\Omega_N)$. Comme $\Delta W' = 0$ au voisinage de l'infini, la proposition 3.2.2 nous permet d'en conclure que $W' \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. On a en particulier $L_q(W') = 0$ dès que $q > 0$ et $d^\circ L_0(W') = 0$. Finalement en définissant $V = V' + W'$ on obtient le résultat d'existence annoncé. ■

De façon analogue à ce que nous avons dit pour les profils en champ lointain, pour chaque $\mathfrak{S}_p\{a\}$ les équations sur les $L_q(\mathfrak{S}_p\{a\})$ jouent le rôle de conditions aux limites à l'infini. Voici le même résultat mais pour les profils à croissance logarithmique. La démonstration est quasiment identique à celle du lemme 3.2.3.

Lemme 3.2.4.

Étant donnée une fonction $a(r) = \alpha \ln(r) + \beta$, il existe un unique $\mathfrak{S}_0\{a\} \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathfrak{S}_0\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ \mathfrak{S}_0\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \\ d^\circ \{L_0(\mathfrak{S}_0\{a\}) - a\} = 0 \end{array} \right.$$

Ci-dessus la condition $d^\circ \{L_0(\mathfrak{S}_0\{a\}) - a\} = 0$ signifie que $\sup_{\varphi \in [0, 2\pi[} |\mathfrak{S}_0\{a\}(R, \varphi) - a(\varphi) \ln R|$ reste borné lorsque $R \rightarrow \infty$. Notons que si $d^\circ a = 0$ alors $\mathfrak{S}_0\{a\} = 0$. En effet dans ce cas on a $\mathfrak{S}_0\{a\} \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ ce qui implique bien $\mathfrak{S}_0\{a\} = 0$ d'après la proposition 3.2.1. Par ailleurs si $a(r) = \ln(r)$, alors le profil $\mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ nous permet de définir la capacité de l'obstacle normalisé $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N$:

$$\mathcal{C}_0 := -\ln(\text{Capacité de } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N) = L_0(\mathfrak{S}_0\{\ln R\}) - \ln R = L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln R\}) \in \mathbb{R}.$$

Par exemple on calcule très facilement que la capacité d'un disque de rayon 1 est 1. La fonction $\mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ jouera un rôle particulier dans ce que nous présenterons sur les fils. Nous lui consacrons par conséquent une notation un peu plus compacte :

$$\mathfrak{S}_e := \mathfrak{S}_0\{\ln R\}. \quad (3.2.7)$$

Nous utiliserons surtout cette notation aux chapitres 4 et 5, mais seulement très peu dans ce chapitre. On peut reformuler le problème caractérisant \mathfrak{S}_e de la manière suivante : \mathfrak{S}_e est l'unique élément de $\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\Delta \mathfrak{S}_e = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad \mathfrak{S}_e = 0 \text{ sur } \Gamma_N \text{ et } \limsup_{R \rightarrow \infty} \sup_{\varphi \in [0, 2\pi[} |\mathfrak{S}_e(R, \varphi) - a \ln(R)| < \infty$$

Notons une autre propriété importante de cette fonction

Lemme 3.2.5.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial(\Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} d\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} \frac{\partial \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_N}} d\Gamma_N = 1.$$

Preuve :

La formule sur Γ_ε se déduit de celle sur Γ_N par changement de variable en utilisant éventuellement l'expression explicite de n_{Γ_ε} et n_{Γ_N} . Pour compacter les notations nous poserons le temps de cette preuve $v = \mathfrak{S}_0\{\ln R\}$. Rappelons que pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ il existe $a^+, a^- \in \mathbb{C}$ tels que $L_{-p}(v)(\varphi) = a^+ e^{+ip|\varphi} + a^- e^{-ip|\varphi}$. Par séparation de variables on voit que pour R_0 assez grand on a

$$v(R, \varphi) = L_0(R) + \sum_{p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} R^{-p} L_{-p}(v)(\varphi) \quad \forall R > R_0,$$

$$\text{d'où } \int_{R=R_0} \frac{\partial v}{\partial R} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial v}{\partial R} R_0 d\varphi = 2\pi - \sum_{p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} p R_0^{-p} \underbrace{\int_0^{2\pi} L_{-p}(v)(\varphi) d\varphi}_{=0} = 2\pi.$$

Pour obtenir l'identité voulue, il suffit alors d'appliquer la formule de Green et de se souvenir que $\Delta v = 0$. Notons $D(0, R_0)$ le disque de centre 0 et de rayon R_0 . Il vient

$$0 = \int_{D(0, R_0) \cap \Omega_N} \Delta v = - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_N}} + \int_{R=R_0} \frac{\partial v}{\partial R} = 2\pi - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_N}}.$$

■

3.2.4 Unicité des solutions des problèmes récurrents

Proposition 3.2.3.

Le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admet au plus un seul couple solution.

Preuve :

Les résultats sur l'existence-unicité des profils vont nous permettre maintenant de résoudre la question du caractère bien posé des problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Dans ce paragraphe nous traitons l'unicité de la solution. Pour montrer ceci il suffit de prouver que le problème homogène associé admet $(0,0)$ comme unique couple solution. Le problème homogène s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta U = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ U = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U) \\ L_p(U) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right.$$

Puisque $\ell_{-p}(u) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $u \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. De même puisque $L_p(U) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $U \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. Notons pour détailler un peu le calcul que

$$\ell_0(u) = \ell_0^{(0)}(u) + \ell_0^{(1)}(u) \ln(r) \quad \text{et} \quad L_0(U) = L_0^{(0)}(U) + L_0^{(1)}(U) \ln(R).$$

D'après la partie unicité des lemmes 3.2.2 et 3.2.4, on a alors nécessairement

$$\begin{aligned} u &= \mathfrak{s}_0\{\ell_0(u)\} = \ell_0^{(1)}(u) \mathfrak{s}_0\{\ln(r)\} \quad \text{et} \quad U = \mathfrak{S}_0\{L_0(U)\} = L_0^{(1)}(U) \mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}. \\ \Rightarrow \ell_0^{(0)}(u) &= \ell_0^{(1)}(u) \ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) \quad \text{et} \quad L_0^{(0)}(U) = L_0^{(1)}(U) L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Puisque $\Xi_*^\varepsilon \ln(R) = \ln(r/\varepsilon)$, on obtient une version détaillée des équations de raccord du problème homogène ci-dessus,

$$\ell_0^{(1)}(u) = L_0^{(1)}(U) \quad \text{et} \quad \ell_0^{(0)}(u) = L_0^{(0)}(U) + L_0^{(1)}(U) \ln(1/\varepsilon). \quad (3.2.9)$$

On obtient alors la conclusion en réunissant les équations (3.2.8) et (3.2.9) qui conduisent au système 2×2 suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) & -L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) - \ln(1/\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(u) \\ L_0^{(1)}(U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.10)$$

On vérifie sans peine qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε tel que la matrice ci-dessus est inversible dès que $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. On en tire donc finalement $\ell_0^{(1)}(u) = L_0^{(1)}(U) = 0$ ce qui implique directement $u = 0$ et $U = 0$ d'après (3.2.8). ■

3.2.5 Existence des solutions des problèmes récurrents

Proposition 3.2.4.

Le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admet un couple solution.

Preuve :

La principale difficulté réside dans le second membre $-\omega^2 U_{n-2}^\varepsilon$ apparaissant dans la partie champ proche de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Pour nous débarrasser momentanément de ce problème, supposons qu'il existe $\tilde{W}_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\Delta \tilde{W}_n^\varepsilon = -\omega^2 U_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \tilde{W}_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad L_p(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0 \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d^\circ L_0(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0.$$

Nous démontrerons l'existence d'un tel \tilde{W}_n^ε juste après avec la proposition 3.2.5. Nous allons à nouveau nous servir des profils. Comme lors du chapitre 1, nous commençons par effectuer un changement de

fonctions inconnues de manière à éliminer le plus possible d'équations de raccord. On pose

$$\begin{aligned} v_n^\varepsilon &= u_n^\varepsilon - w_n^\varepsilon & \text{avec } w_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p} \{ L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \} + \delta_n^0 u^0 \\ V_n^\varepsilon &= U_n^\varepsilon - \tilde{W}_n^\varepsilon - W_n^\varepsilon & \text{avec } W_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p \left\{ \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p} [\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Dans ces équations les fonctions w_n^ε et W_n^ε sont parfaitement déterminées puisqu'elles sont construites exclusivement à partir des couples $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$. D'après la définition des profils donnée par les lemmes 3.2.1 et 3.2.3, on a $d^\circ \ell_0(w_n^\varepsilon) = 0$ et $d^\circ L_0(W_n^\varepsilon) = 0$. Construire une solution au problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ revient alors à trouver un couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ satisfaisant

$$\begin{cases} v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta v_n^\varepsilon + \tilde{\omega}^2 v_n^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial v_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta V_n^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_N, \\ V_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0, & p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(V_n^\varepsilon) = 0, & p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(V_n^\varepsilon) = -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon). \end{cases}$$

Par construction on a $\ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0$ pour $p \geq 1$ et $(\Delta + \tilde{\omega}^2)v_n^\varepsilon = 0$ dans Ω_\star donc nécessairement $v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. De même on a $L_p(V_n^\varepsilon) = 0$ pour $p \geq 1$ et $\Delta V_n^\varepsilon = 0$ dans Ω_N on a donc forcément $V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. Ceci suggère de rechercher ces fonctions sous la forme

$$v_n^\varepsilon = \mathfrak{s}_0 \{ \ell_0(v_n^\varepsilon) \} = \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \mathfrak{s}_0 \{ \ln(r) \} \quad \text{et} \quad V_n^\varepsilon = \mathfrak{S}_0 \{ L_0(V_n^\varepsilon) \} = L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \mathfrak{S}_0 \{ \ln(R) \}. \quad (3.2.12)$$

On peut réutiliser le raisonnement de la proposition 3.2.3, en injectant cette forme pour v_n^ε et V_n^ε dans les équations de raccord. On aboutit alors à nouveau à un système 2×2 avec cette fois un second membre non-nul

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0 \{ \ln(r) \}) & -L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0 \{ \ln(R) \}) - \ln(1/\varepsilon) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) - \ell_0(w_n^\varepsilon) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Au second membre de ces équations on a tenu compte du fait que $d^\circ \ell_0(w_n^\varepsilon) = d^\circ L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) = 0$. Comme on l'a vu précédemment pour ε assez petit la matrice ci-dessus est inversible, et on peut donc définir $(\ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon), L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon))$ comme l'unique couple solution des équations ci-dessus. En définissant $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ avec (3.2.12) et $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ avec (3.2.11) on obtient une solution au problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. ■

Proposition 3.2.5.

Soit $g \in \mathcal{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ admettant un développement radial au voisinage de l'infini. Il existe un unique $V \in \mathcal{W}_\beta^\infty(\Omega_N)$ avec $\beta = \max(\alpha, 1/2)$ satisfaisant

$$\Delta V = g \text{ dans } \Omega_N, \quad V = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \quad L_p(V) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad d^\circ L_0(V) = 0.$$

Preuve :

La partie unicité de la preuve est très simple. En effet si le second membre g est nul, alors les conditions $L_p(V) = 0, \forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $d^\circ L_0(V) = 0$ entraîne que $V \in \mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$. La partie unicité de la proposition 3.2.1 implique $V = 0$.

Puisque $\mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N) \subset \mathcal{W}_{\alpha'}^\infty(\Omega_N)$ dès que $\alpha < \alpha'$, on peut supposer sans nuire à la généralité que $\alpha > 0$. Notons alors que $\mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\Omega_N) \subset \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$. Par hypothèse g admet un développement radial au voisinage de l'infini donc suivant la définition (2.4.1) il existe une fonction $g'' \in \mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\Omega_N) \subset \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$ telle que

$$g(R, \varphi) = g'' + \sum_{|\Re\{p_j\}+2| \leq \alpha} R^{p_j} g_j(R, \varphi) = g'' + g', \quad g_j \in \mathbb{P}_{\log}.$$

Nous construisons une fonction $V' \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant $\Delta V' = g'$ et $L_p(V') = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$. L'équation de Laplace précédente peut également être écrite sous la forme $A_0 V' = R^2 g'$ où nous rappelons que dans le présent chapitre $A_0 = R^2 \Delta = (R\partial_R)^2 + \partial_\varphi^2$. Notons que $R^2 g' \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$. Cette fonction admet alors une transformée de Mellin $\mathfrak{M}\{R^2 g'\}(\lambda)$ avec des pôles situés dans la région $|\Re\{\lambda\}| < \alpha$. Considérons le chemin γ dans le plan complexe correspondant au schéma suivant

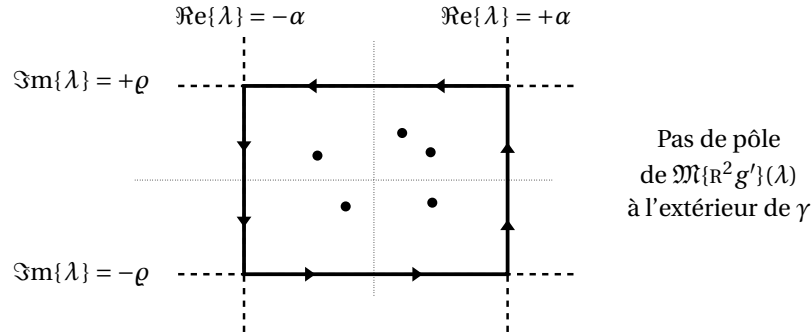


Fig.24 Définition du contour γ

Dans cette définition, on suppose que $\rho \in \mathbb{R}, \rho > 0$ et ρ assez grand pour que tous les pôles de $\mathfrak{M}\{R^2 g'\}$ soient situés à l'intérieur de γ (attention il ne s'agit pas du même ρ que celui qui a été utilisé pour définir Γ). On a donc $\text{Ind}_\gamma(\mu) = +1$ lorsque μ est un pôle de $\mathfrak{M}\{R^2 g'\}$ suivant les notations du §2.B.2. La fonction $R^2 g'$ satisfait alors l'identité

$$g' = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathfrak{M}\{R^2 g' \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) R^\lambda d\lambda.$$

Rappelons que, suivant nos notations, nous avons supposé que $|x| < 1$ dès que $x \notin \Omega_N$. Quitte à prendre α un tout petit peu plus grand, on suppose que $\alpha \notin \mathbb{Z}$ de sorte que $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est inversible pour $|\Re\{\lambda\}| = \alpha$. L'identité précédente nous suggère alors de poser

$$V' = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \cdot \mathfrak{M}\{R^2 g'\}(\lambda) R^\lambda d\lambda. \tag{3.2.14}$$

Notons que cette définition ne dépend pas de ρ pourvu que celui-ci soit suffisamment grand. On a clairement $\Delta V' = g'$ dans Ω_N . Par contre il n'y a aucune raison pour que $V' = 0$ sur Γ_N . Par ailleurs en reprenant

la définition des $L_p(\cdot)$ donnée par (2.7.6), on voit que

$$L_p(V') = 0, \quad \forall p \in \mathbb{Z}.$$

Finalement, comme $g'' \in \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$, définissons V'' à l'aide de la proposition 3.2.1 comme l'unique élément de $\mathcal{W}_{\log}(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\Delta V'' = g'' \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \text{et } V'' = -V' \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

Puisque $V'' \in \mathcal{W}'_{\log}(\Omega_N)$, en appliquant la proposition 3.2.2, on obtient que $V'' \in \mathcal{W}'_{\alpha}(\Omega_N)$ car nous avons supposé $\alpha > 0$. Ceci implique alors que $L_p(V'') = 0$ pour tout $p \geq 1$ et $d^{\circ}L_0(V'') = 0$. Pour terminer la démonstration il suffit de poser

$$V = V' + V''.$$

■

Notons bien que, dans l'énoncé de la proposition 3.2.5, la fonction V dépend linéairement de la fonction g . Pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1/2$ considérons une famille de fonctions $g^{[q]} \in \mathcal{W}'_{\alpha-2}(\Omega_N)$, $q = 0, \dots, n+1$. Notons $V^{[q]}$ les fonctions qui sont associées à chacune d'elles au moyen de la proposition 3.2.5. Alors $V^{[0]} + \dots + V^{[n+1]}$ est la fonction associée à $g^{[0]} + \dots + g^{[n+1]}$ au moyen de la proposition 3.2.5.

3.3 Dépendance en ε des termes du développement raccordé

Dans la section précédente nous avons prouvé que les problèmes $(\mathcal{P}_n^{\varepsilon})$ admettaient pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un unique couple solution $(u_n^{\varepsilon}, U_n^{\varepsilon})$. Nous montrons dans cette section que ces fonctions admettent une décomposition "régulière" comme en 2.6.4, ce qui permettra d'obtenir rapidement des estimations d'erreur. Nous invitons le lecteur à observer dans la preuve suivante le rôle central de l'équation (3.2.13).

Proposition 3.3.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $q_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \leq n+1$ et deux familles finies $u_n^{[q]}$, et $U_n^{[q]}$, $q = q_n \dots n+1$ telles que les termes du développement raccordé de u^{ε} se décomposent sous la forme

$$\begin{aligned} u_n^{\varepsilon} &= \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{u_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}, & u_n^{[q]} &\in \mathcal{W}'_{-n-1/2}(\Omega) \quad \text{et} \\ U_n^{\varepsilon} &= \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{U_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}, & U_n^{[q]} &\in \mathcal{W}'_{n+1/2}(\Omega_N). \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

avec des termes $u_n^{[q]}$ et $U_n^{[q]}$ indépendants de ε et où $\mathfrak{T}(\varepsilon) = \mathfrak{T}^{[0]} + \mathfrak{T}^{[1]} \ln(\varepsilon)$ est la matrice 2×2 intervenant dans les équations de raccord définie par

$$\mathfrak{T}(\varepsilon) := \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) & \ln(\varepsilon) - L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) \end{bmatrix}. \quad (3.3.2)$$

Preuve :

Initialisation Comme au chapitre 1 nous démontrerons ceci par récurrence. Commençons par montrer que le couple $(u_0^{\varepsilon}, U_0^{\varepsilon})$ admet cette forme. Si l'on reprend la démonstration de la proposition 3.2.4 on a $w_0^{\varepsilon} = u^0$ et $W_0^{\varepsilon} = \tilde{W}_0^{\varepsilon} = 0$. Rappelons alors que

$$\begin{cases} u_0^{\varepsilon} = v_0^{\varepsilon} + u^0 & = \mathfrak{s}_0\{\ell_0^{(1)}(v_0^{\varepsilon}) \ln(r)\} + u^0 \\ U_0^{\varepsilon} = V_0^{\varepsilon} & = \mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(V_0^{\varepsilon}) \ln(R)\} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathfrak{T}(\varepsilon) \cdot \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_0^{\varepsilon}) \\ L_0^{(1)}(V_0^{\varepsilon}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ell_0(u^0) \end{bmatrix}$$

Le résultat découle alors de la linéarité de $\mathfrak{s}_0\{\cdot\}$ et $\mathfrak{S}_0\{\cdot\}$. Ceci démontre le résultat puisque $\mathfrak{T}(\varepsilon)^{-1}$ est de la forme "det $\mathfrak{T}(\varepsilon)^{-1} \times$ polynôme en $\ln(\varepsilon)$ ". Ici $\ell_0(u^0)$ est simplement la valeur en $\mathbf{x} = 0$ de u^0 c'est-à-dire $\ell_0(u^0) = u^0(0)$. Comme *a priori* $\ell_0(u^0) \neq 0$ on a $v_0^\varepsilon \neq 0$ et donc $u_0^\varepsilon \neq u^0$. Ceci est une différence notable avec l'étude du chapitre 1. Au passage l'inversion de la matrice $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ pour résoudre l'équation de raccord donne

$$\begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_0^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_0^\varepsilon) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \begin{bmatrix} \ln(\varepsilon) - L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) & 1 \\ -\ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -u^0(0) \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

Transitivité Supposons à présent que les couples $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ soient de la forme annoncée. Alors en se servant du fait que $\det \mathfrak{T}(\varepsilon)$ est un polynôme en $\ln(\varepsilon)$ et de la linéarité des \mathfrak{s}_p et des \mathfrak{S}_p , il est clair que w_n^ε et W_n^ε sont de la forme

$$w_n^\varepsilon = \sum_{q=q_{n-1}}^n \frac{w_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q} \quad \text{et} \quad W_n^\varepsilon = \sum_{q=q_{n-1}}^n \frac{W_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}. \quad (3.3.4)$$

Par linéarité de la formule (3.2.14), \tilde{W}_n^ε admet également la forme attendue. Notons que les sommes ci-dessus s'étendent de 0 à n car l'expression de $w_n^\varepsilon, \tilde{W}_n^\varepsilon$ et \tilde{W}_n^ε ne fait intervenir que les couples $(u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon), \dots, (u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon)$.

Pour terminer la preuve, il reste donc à s'intéresser à v_n^ε et V_n^ε . Notons tout d'abord que $L_0(W_n^\varepsilon), L_0(\tilde{W}_n^\varepsilon)$ et $\ell_0(w_n^\varepsilon)$ admettent une forme telle que celle de (3.3.4). On conclut alors comme dans le cas $n = 0$ en se servant de la formule (3.2.12) et du système (3.2.13) permettant de résoudre les équations de raccord,

$$\begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \begin{bmatrix} \ln(\varepsilon) - L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) & 1 \\ -\ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) - \ell_0(w_n^\varepsilon) \end{bmatrix}$$

■

3.4 Estimation d'erreur

Tous les ingrédients sont réunis pour pouvoir appliquer les résultats du chapitre 2. En effet les couples $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ vérifient les hypothèses du théorème 2.6.1, et également ils vérifient les hypothèses des propositions 2.6.3 et 2.6.4 en vertu de la proposition 3.3.1 ci-dessus. On peut alors construire une approximation "globale" de u^ε en définissant

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = \chi^\varepsilon U_n^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{x}| < \sqrt{\varepsilon}/2 \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| > \sqrt{\varepsilon} \end{cases} \quad (3.4.1)$$

où la fonction $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction \mathcal{C}^∞ décroissante. Prenant en compte le résultat de stabilité (3.1.2) et en appliquant le théorème 2.6.1, l'estimation d'erreur résultante est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.4.1.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Attention, dans l'énoncé précédent les constantes α, β sont indépendantes de N tandis que κ_N peut dépendre de N mais est indépendant de ε . La proposition précédente fournit une estimation d'erreur de plus en plus fine à mesure que $N \rightarrow \infty$. La proposition ci-dessus est le produit direct des résultats du chapitre 2. En nous servant de la proposition 3.3.2, nous démontrons en annexe le résultat plus fin suivant

Proposition 3.4.2.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N/2+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Nous en reportons la preuve en annexe car ce résultat ne sera pas utile pour le reste de ce chapitre. Avec ces estimations d'erreur globales il devient facile de montrer que les suites (u_n^ε) et (U_n^ε) sont à chaque fois les termes d'un développement asymptotique local pour u^ε et $\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon$ respectivement.

Corollaire 3.4.1.

Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε mais dépendant éventuellement de N tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

De même pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_N$ borné et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε mais dépendant éventuellement de N tel que

$$\|\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

La preuve prend la même forme que celle de la proposition 1.4.1. Comme dans cette dernière proposition nous n'avions donné la démonstration que pour le champ lointain, nous allons l'effectuer ici pour le champ proche. Considérons un $N \in \mathbb{N}$ et un ouvert $\omega \subset \Omega_N$. Supposons ε assez petit pour que $\omega \subset \Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \setminus Z_\Gamma^\varepsilon)$. Ceci implique $\Xi^\varepsilon(\omega) \subset Z_N^\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$. Choisissons un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N_0 + \beta > N + 2$. On a alors

$$\|\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} + \|\sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)}$$

Nous majorons le premier terme en remarquant que $\|v\|_{H^1(\omega)} \leq \varepsilon^{-1} \|\Xi_*^\varepsilon v\|_{H^1(\Xi^\varepsilon(\omega))}$. Notons par ailleurs que $\Xi^\varepsilon(\omega) \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. Nous majorons le deuxième terme à l'aide de la proposition 3.3.1. Au bilan on en tire l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} & \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} + \|\sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{H^1(\Xi^\varepsilon(\omega))} + \sum_{n=N+1}^{N_0} \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{\varepsilon^n \|U_n^{[q]}\|_{H^1(\omega)}}{|\det \mathfrak{T}(\varepsilon)|^q} \\ & \leq \kappa \varepsilon^{N+1} + \kappa \varepsilon^{N+1/2}. \end{aligned}$$

■

3.5 Une dérivation explicite des premiers termes du développement

Dans ce paragraphe nous allons dériver des expressions les plus explicites possibles des premiers u_n^ε et U_n^ε . Dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet, le champ limite u^0 ne coïncide pas avec le développement d'ordre 0 en champ lointain noté u_0^ε . Nous donnons ci-dessous la forme du développement à l'ordre 0 dans le cas d'un obstacle de forme quelconque et la forme du développement à l'ordre 1 dans le cas d'un petit disque de rayon ε .

3.5.1 Termes d'ordre 0 pour un obstacle arbitraire

Dans la preuve de la proposition 3.3.1 nous avons déjà un peu explicité u_0^ε et U_0^ε . Nous avons obtenu une formule qui est valable quelle que soit la forme de Γ_ε (pas seulement dans le cas d'un petit obstacle circulaire). On avait en effet

$$u_0^\varepsilon = u^0 - u^0(0) \frac{\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \quad \text{et} \quad U_0^\varepsilon = -u^0(0) \frac{\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \quad \left(= \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \mathfrak{S}_e \right) \quad (3.5.1)$$

Notons au passage que $u_0^\varepsilon \neq u^0$ et que la différence $u_0^\varepsilon - u^0$ tend vers 0 comme $|\ln \varepsilon|^{-1}$. D'un point de vue numérique cette différence est donc non négligeable. Dans l'expression (3.5.1) la géométrie de l'obstacle intervient au travers du profil $\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}$ et au travers de $\det \mathfrak{T}(\varepsilon)$. Une autre conséquence de la formule ci-dessus est que $n_{r_\varepsilon} \cdot \nabla U_0^\varepsilon$ sur Γ_N admet une décroissance en $|\ln \varepsilon|^{-1}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet on sait que $n_{r_\varepsilon} \cdot \nabla \mathfrak{S}_0\{\ln R\} \neq 0$ sur Γ_N d'après le lemme 3.2.5. On en déduit qu'il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que

$$\kappa_- \frac{|u^0(0)|}{|\ln \varepsilon|} \leq \left\| \frac{\partial U_0^\varepsilon}{\partial n_{r_\varepsilon}} \right\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} \leq \kappa_+ \frac{|u^0(0)|}{|\ln \varepsilon|} \quad \text{si } u^0(0) \neq 0. \quad (3.5.2)$$

Comme l'expression de $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ est reliée directement aux profils \mathfrak{s}_0 et \mathfrak{S}_0 , pour expliciter complètement u_0^ε et U_0^ε il suffit d'expliciter les profils. Ici on peut vérifier que

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_0[\ln(r)] &= \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega r) = \ln\left(\frac{\omega r}{2}\right) + \gamma_e - i\frac{\pi}{2} + O(r), \\ \mathfrak{S}_0\{\ln(R)\} &= \ln R + \mathcal{C}_0 + O\left(\frac{1}{R}\right), \\ \det \mathfrak{T}(\varepsilon) &= \ln\left(\frac{\omega \varepsilon}{2}\right) + \gamma_e - i\frac{\pi}{2} - \mathcal{C}_0. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Dans les identités ci-dessus $\gamma_e = 0,57721566\dots$ est la constante Gamma d'Euler. On obtient ainsi une expression explicite des premiers termes du développement de u^ε en champ lointain. Dans tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ on a

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}) + \frac{-u^0(0)}{\ln\left(\frac{\omega \varepsilon}{2}\right) + \gamma_e - i\frac{\pi}{2} - \mathcal{C}_0} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.5.4)$$

Ici le $O(\sqrt{\varepsilon})$ vaut au sens de $\|\cdot\|_{H^1(\omega)}$. Remarquons que la forme de l'obstacle intervient dans ce développement asymptotique seulement au travers de la capacité \mathcal{C}_0 . Ainsi deux obstacles possédant la même capacité induiront le même développement en champ lointain à l'ordre 0.

3.5.2 Termes d'ordre 0 et 1 pour un obstacle circulaire

Dans le cas où Γ_N admet pour équation $R = 1$ les expressions ci-dessus se simplifient un peu. On a $\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\} = \ln(R)$ (donc $\mathcal{C}_0 = 0$) et $\det \mathfrak{T}(\varepsilon) = \ln\left(\frac{\omega \varepsilon}{2}\right) + \gamma_e - i\frac{\pi}{2}$ est donc composé des premiers termes du développement de $H_0^{(1)}(\omega \varepsilon)$. D'après ces expressions les identités suivantes sont vérifiées

$$L_{-1}(U_0^\varepsilon) = 0, \quad \ell_{-1}(u_0^\varepsilon) = 0 \quad \text{et} \quad \ell_1(u_0^\varepsilon) = \ell_1(u^0) = \frac{\partial u^0}{\partial x}(0) \cos(\varphi) + \frac{\partial u^0}{\partial y}(0) \sin(\varphi). \quad (3.5.5)$$

Ci-dessus on a obtenu l'expression de $\ell_1(u_0^\varepsilon)$ à l'aide d'une simple formule de Taylor à l'ordre 1. Pour construire le développement un ordre plus loin, nous commençons par écrire les équations de raccord 3.2.6. Celles-ci se simplifient vu les identités (3.5.5),

$$\ell_{-1}(u_1^\varepsilon) = L_{-1}(U_0^\varepsilon) = 0, \quad L_1(U_1^\varepsilon) = \ell_1(u_0^\varepsilon) - \ell_1\left(r \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_1^{-1}[\ell_{-1}(u_0^\varepsilon)]\right) = \ell_1(u^0) \quad \text{et} \quad \ell_0(u_1^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_1^\varepsilon)$$

En utilisant ces identités et (3.2.11) on obtient que $w_1^\varepsilon = 0$ et $W_1^\varepsilon = \mathfrak{S}_1\{\ell_1(u^0)\}$. En réutilisant l'expression de la matrice $\mathfrak{T}(\varepsilon)^{-1}$ donnée dans (3.3.3), on voit que l'équation de raccord $\ell_0(u_1^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_1^\varepsilon)$ se réécrit

$$\begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_0^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_0^\varepsilon) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \begin{bmatrix} L_0(\mathfrak{S}_1\{\ell_1(u^0)\}) \\ L_0(\mathfrak{S}_1\{\ell_1(u^0)\}) \end{bmatrix}.$$

Pour obtenir l'expression du second membre de l'équation ci-dessus, recherchons l'expression des profils d'ordre 1. Une fonction $a(r, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}$ est telle que $A_0 r a(r, \varphi) = 0$ si et seulement si $a(r, \varphi) = \alpha e^{i\varphi}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. On montre alors facilement que

$$\mathfrak{s}_{-1}\{e^{\pm i\varphi}\} = i\omega \frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(\omega r) e^{\pm i\varphi} \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_1\{e^{\pm i\varphi}\} = \left(R - \frac{1}{R}\right) e^{\pm i\varphi}.$$

En particulier on voit que $L_0(\mathfrak{S}_1\{a\}) = 0$ pour $a = \ell_1(u^0)$. Ceci montre donc que $\ell_0^{(1)}(v_0^\varepsilon) = L_0^{(1)}(V_0^\varepsilon) = 0$. Finalement d'après (3.2.12) ceci nous donne $v_0^\varepsilon = V_0^\varepsilon = 0$. On en tire alors d'après (3.2.11)

$$u_1^\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad U_1^\varepsilon = \mathfrak{S}_1\{\ell_1(u^0)\} = \left(\frac{\partial u^0}{\partial x}(0) \cos(\varphi) + \frac{\partial u^0}{\partial y}(0) \sin(\varphi) \right) \left(R - \frac{1}{R}\right).$$

On voit finalement que l'expression (3.5.4) vaut avec un reste en $O(\varepsilon^2)$. Ainsi le développement en champ lointain (3.5.4) vaut encore à l'ordre 1 : dans tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_*$ on a

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \frac{-u^0(0)}{\ln(\frac{\omega\varepsilon}{2}) + \gamma_e - i\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|x|) + O(\varepsilon^{3/2}).$$

3.6 Développement asymptotique des traces sur Γ_ε

Jusqu'à maintenant dans ce chapitre, nous nous sommes efforcés de dériver un développement raccordé de la solution u^ε du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Il est maintenant possible d'obtenir à moindre frais le développement d'autres quantités reliées à u^ε . Nous nous proposons dans cette section de dériver le développement asymptotique en ε de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon$.

Précisons tout d'abord ce que nous entendons par développement asymptotique. En effet comme $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et que l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ évolue lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, nous devons préciser le comportement de sa norme lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Nous définissons cette norme en nous ramenant à une frontière fixe. En se souvenant que $\Xi^\varepsilon(\Gamma_N) = \Gamma_\varepsilon$, on munit $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ de la norme

$$|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} := \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_N)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Xi_*^\varepsilon v} \right|}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}}, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon). \quad (3.6.1)$$

Notons qu'à ε fixé, $\Xi_*^{\varepsilon^{-1}}$ envoie $H^s(\Gamma_\varepsilon)$ dans $H^s(\Gamma_N)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Nous allons établir un développement au sens de cette norme, c'est-à-dire nous allons dériver une famille $(p_n^\varepsilon)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ telle que pour tout N il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tels que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n p_n^\varepsilon \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \text{avec} \quad p_n^\varepsilon = \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{p_n^{|q|}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}, \quad q_n \in \mathbb{Z}.$$

Pour démontrer un tel résultat nous allons utiliser la proposition 3.4.1 jointe à un résultat de stabilité adapté à la dérivée normale.

Proposition 3.6.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \left\{ \|\Delta u + \varpi^2 u\|_{\gamma_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} + \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} u\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} \right\}.$$

Preuve :

Considérons une application de relèvement continu $g : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow H^1(\Omega_N)$ telle que pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$, la fonction $g(v) \in H^1(\Omega_N)$ est à support compact dans l'ouvert $\Omega_N \cap D(0, R_0)$ pour un $R_0 > 1$ fixé et vérifie $g(v)|_{\Gamma_N} = v$. Ce relèvement étant continu, il existe $\kappa > 0$ telle que $\|g(v)\|_{H^1(\Omega_N)} \leq \kappa \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}$ pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$. Choisissons un $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ arbitraire. On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon \bar{v} \, d\Gamma_\varepsilon &= - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u + \varpi^2 u) \Xi_*^\varepsilon \bar{g}(v) - \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon \bar{g}(v) + \varpi^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \Xi_*^\varepsilon \bar{g}(v) \\ \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon \bar{v} \, d\Gamma_\varepsilon \right| &\leq \kappa \left\{ \|\Delta u + \varpi^2 u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right\} \|\Xi_*^\varepsilon \bar{g}(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

Puisqu'on suppose que $u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ on peut appliquer le lemme 3.1.2 pour majorer $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. Par ailleurs, étant donné que le support de $g(v)$ est borné (indépendamment de v) on montre facilement par changement de variable qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de v et ε tel que $\|\Xi_*^\varepsilon \bar{g}(v)\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \|g(v)\|_{H^1(\Omega_N)}$. En reprenant l'estimation ci-dessus on voit donc qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de v et ε tel que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon \bar{v} \, d\Gamma_\varepsilon \right| \leq \kappa \|g(v)\|_{H^1(\Omega_N)} \left\{ \|\Delta u + \varpi^2 u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} u\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} \right\}$$

Comme $\|\cdot\|_{\gamma_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} = \|\cdot\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$, pour obtenir la conclusion il suffit dans l'inégalité ci-dessus d'appliquer la continuité du relèvement $\|g(v)\|_{H^1(\Omega_N)} \leq \kappa \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} = \kappa$, et de prendre la borne supérieure sur les v tels que $\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} = 1$. ■

Le membre de droite de l'inégalité de la proposition 3.6.1 est celui qui apparaît dans l'énoncé du lemme 3.1.2. Si l'on reprend le raisonnement du §2.2.5, et les propositions 2.6.1 et 2.6.2, on voit que la construction des termes u_n^ε et U_n^ε garantit qu'il existe $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout N il existe $\kappa_N > 0$ dépendant de N mais indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} \left\| (\Delta + \varpi^2) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{\gamma_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} &\leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{et} \\ \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \left\| \left(\frac{\partial}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \right) \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} &= 0 \end{aligned}$$

Signalons que $\tilde{u}_n^\varepsilon = U_n^\varepsilon$ au voisinage de Γ_ε d'après la définition (3.4.1). En particulier on a $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla \tilde{u}_n^\varepsilon = n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla U_n^\varepsilon$ sur Γ_ε . Par conséquent en utilisant la proposition 3.6.1, on voit que pour tout N , il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left| \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \left(u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} = \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon \left(\frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta} \quad (3.6.2)$$

En manipulant un peu ces inégalités on obtient en réalité une estimation d'erreur plus fine qui est optimale.

Proposition 3.6.2.

Pour tout N il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tels que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi_*^\varepsilon \left(\frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (3.6.3)$$

Preuve :

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixe. Cherchons à démontrer l'estimation de (3.6.3) correspondante. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N' + \beta \geq N + 1$ et $N' \geq N + 1$. Alors en tenant compte de la forme des U_n^ε donnée par la proposition 3.3.1 on obtient des $Q_N, \kappa_N, \kappa'_N > 0$ indépendants de ε mais dépendants éventuellement de N tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \Xi^* \left(\frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \\ & \leq \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{N'} \varepsilon^n \Xi^* \left(\frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} + \left| \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \Xi^* \left(\frac{\partial U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \\ & \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N' + \beta} + \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1} \end{aligned}$$

■

Pour que l'estimation d'erreur fournie par la proposition 3.6.2 soit vraiment significative, il faudrait connaître le comportement de $|n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$. Introduisons $N_0 = \min \{n \in \mathbb{N} \mid n_{\Gamma_N} \cdot \nabla U_n^\varepsilon \neq 0\}$ et $Q_0 = \min \{q \in \llbracket q_{N_0}, N_0 + 1 \rrbracket \mid n_{\Gamma_N} \cdot \nabla U_n^{[q]} \neq 0\}$. Alors en utilisant la proposition 3.3.1 qui donne la dépendance des U_n^ε par rapport à ε , et la famille d'estimations (3.6.3), on voit qu'il existe deux constantes $\kappa_+, \kappa_- > 0$ telles que

$$\kappa_- \frac{\varepsilon^{N_0-1}}{|\ln \varepsilon|^{Q_0}} \leq \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_+ \frac{\varepsilon^{N_0-1}}{|\ln \varepsilon|^{Q_0}} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Ceci montre que les estimations (3.6.2) donnent un développement asymptotique de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon$. Dans le cas où $u^0(0) \neq 0$ on peut même être un peu plus précis sur cette question. Grâce à (3.5.2), on peut affirmer que dans ce cas il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ tels que

$$\kappa_- \frac{|u^0(0)|}{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \leq \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_+ \frac{|u^0(0)|}{\varepsilon |\ln \varepsilon|} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En reportant ces inégalités dans l'estimation issue de (3.6.3) pour le cas $N = 0$ on obtient une estimation d'erreur relative : dans le cas $u^0(0) \neq 0$ il existe $\kappa > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ indépendants de ε telle que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{1}{\varepsilon} \Xi^* \left(\frac{\partial U_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^q \left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (3.6.4)$$

3.A Estimations d'erreur affinées

Dans cette annexe nous désirons donner une preuve de la proposition 3.4.2. Celle-ci repose sur l'utilisation de la forme (3.3.1) et sur une utilisation a posteriori des estimations d'erreur fournies par la proposition 3.4.1. Commençons par étendre un peu les notations introduites par la proposition 3.3.1 en posant par définition que $u_n^{[q]} = 0$ et $U_n^{[q]} = 0$ si $q \notin \llbracket q_n, n+1 \rrbracket$. En injectant la forme (3.3.1) dans les équations de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ vérifiées par le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ on peut obtenir de plus amples informations sur les $u_n^{[q]}$ et les $U_n^{[q]}$. Tout d'abord ceux-ci doivent nécessairement vérifier

$$\Delta u_n^{[q]} + \omega^2 u_n^{[q]} = \delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \Delta U_n^{[q]} = -\omega^2 U_n^{[q]} \quad \text{dans } \Omega_N \quad \forall n, q \in \mathbb{N}.$$

Ainsi on peut appliquer les propositions 2.3.1 et 2.4.2 aux fonctions $u_n^{[q]}$ et $U_n^{[q]}$. On obtient que chaque $u_n^{[q]}$ est développable par rapport à r au sens de la proposition 2.3.1 (suivant des puissances entières de r), et que $U_n^{[q]}$ est développable par rapport à R au sens de la proposition 2.4.2 (suivant des puissances entières de R). En utilisant ceci on démontre le résultat préliminaire suivant,

Proposition 3.A.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que $\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \varepsilon^{-n/2}$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$.

Preuve :

Rappelons que \tilde{u}_n^ε a été défini par (3.4.1) en même temps que la fonction de troncature χ^ε . Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ fixé jusqu'à la fin de la preuve. Tout d'abord un calcul simple utilisant l'expression explicite des normes $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Omega_\varepsilon)}$ montre que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \|(1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|\chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_n^\varepsilon)} \\ &\leq \left(\|\chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \|r \partial_r \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \right) \left(\|u_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|\Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_n^\varepsilon)} \right). \end{aligned} \quad (3.A.1)$$

Majorons le facteur lié à la fonction de troncature. Revenons à sa définition donnée par (3.4.1). Vu que $\partial_r \chi^\varepsilon \neq 0$ pour $\sqrt{\varepsilon}/2 \leq r \leq \sqrt{\varepsilon}$, on a $\|\chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq 1$ et

$$(r \partial_r \chi^\varepsilon)(r) = \frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} (\partial_r \chi) \left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \quad \text{d'où} \quad \|r \partial_r \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq \|\partial_r \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (3.A.2)$$

Notons que dans l'expression ci-dessus $\partial_r \chi$ est indépendant de ε . Effectuons un changement de variable dans le terme de (3.A.1) lié au champ proche. L'expression explicite des normes à poids (3.1.8) montre que

$$\|\Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_n^\varepsilon)} = \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))}$$

Enfin injectons le résultat de la proposition 3.3.1 dans (3.A.1) et utilisons des inégalités triangulaires. On obtient

$$\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \left(1 + \|\partial_r \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \right) \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{1}{|\det \mathfrak{T}(\varepsilon)|^q} \left(\|u_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|U_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} \right)$$

Étant donné qu'il existe des constantes $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendantes de ε telles que $\kappa_+ |\ln \varepsilon| \geq |\det \mathfrak{T}(\varepsilon)| \geq \kappa_- |\ln \varepsilon|$, nous voyons que pour obtenir le résultat annoncé, il suffit de démontrer que pour tout q il existe $\kappa, p > 0$ tels que

$$\|u_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|U_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \varepsilon^{-n/2}. \quad (3.A.3)$$

Choisissons un $q \in \llbracket q_n, n+1 \rrbracket$ arbitraire. Pour démontrer ceci rappelons tout d'abord que, comme nous l'avons démontré avec la proposition 3.3.1, on a $u_n^{[q]} \in \mathcal{Y}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $U_n^{[q]} \in \mathcal{Y}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$. Nous le prenons en compte en modifiant le poids des normes intervenant dans (3.A.3),

$$\|u_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|U_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} \leq \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right)^{-n} \left(\|u_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_{-n}^1(Z_\Gamma^\varepsilon)} + \|U_n^{[q]}\|_{\mathcal{Y}_n^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} \right) \quad (3.A.4)$$

Par ailleurs, d'après ce que nous avons dit au début de cette annexe, on sait que $u_n^{[q]}$ et $U_n^{[q]}$ admettent un développement respectivement par rapport à r et R . Ainsi il existe $g, G \in \mathbb{P}_{\log}$ indépendantes de ε (mais dépendantes bien sûr de n et q) telles que

$$u_n^{[q]} - r^{-n} g(r, \varphi) \in \mathcal{V}_{-n}^{\infty}(\Omega) \quad \text{et} \quad U_n^{[q]} - R^n G(R, \varphi) \in \mathcal{W}_{+n}^{\infty}(\Omega_N).$$

On injecte alors ceci dans le membre de droite de (3.A.4),

$$\begin{aligned} \|u_n^{[q]}\|_{\mathcal{V}_{-n}^1(Z_f^\varepsilon)} + \|U_n^{[q]}\|_{\mathcal{W}_n^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} &\leq \|r^{-n} g(r, \varphi)\|_{\mathcal{V}_{-n}^1(Z_f^\varepsilon)} + \|u_n^{[q]} - r^{-n} g(r, \varphi)\|_{\mathcal{V}_{-n}^1(\Omega)} \\ &+ \|R^n G(R, \varphi)\|_{\mathcal{V}_n^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} + \|U_n^{[q]} - R^n G(R, \varphi)\|_{\mathcal{W}_n^1(\Omega_N)} \end{aligned} \quad (3.A.5)$$

Enfin en prenant en compte le fait que $g, G \in \mathbb{P}_{\log}$, un calcul fastidieux montre qu'il existe deux constantes $\kappa, p > 0$ dépendantes de g et G mais indépendantes de ε , telles que

$$\|r^{-n} g(r, \varphi)\|_{\mathcal{V}_{-n}^1(Z_f^\varepsilon)} + \|R^n G(R, \varphi)\|_{\mathcal{V}_n^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} = \|g(r, \varphi)\|_{\mathcal{V}_0^1(Z_f)} + \|G(R, \varphi)\|_{\mathcal{V}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_n^\varepsilon))} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \quad (3.A.6)$$

Ci-dessus nous avons pris en compte le fait que $|\mathbf{x}| \geq \sqrt{\varepsilon}/2$ pour tout $\mathbf{x} \in Z_f^\varepsilon$ et $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{\varepsilon}$ pour tout $\mathbf{x} \in Z_n^\varepsilon$. Pour démontrer (3.A.3), il suffit alors de combiner les inégalités (3.A.4), (3.A.5) et (3.A.6). Ceci conclut la preuve. ■

Le résultat de la proposition 3.A.1 nous semble intéressant en lui-même car il donne un ordre de grandeur des \tilde{u}_n^ε . Mais ce résultat va surtout nous servir à exploiter a posteriori les estimations d'erreur de la proposition 3.4.1.

Proposition 3.4.2.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N/2+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Choisissons un $N \in \mathbb{N}$ fixé jusqu'à la fin de la preuve. Reprenons le résultat de la proposition 3.4.1, et en particulier reprenons la même notation pour les constantes α et β intervenant dans les estimations de cette proposition. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N' + \beta > N/2 + 1/2$. D'après les propositions 3.4.1 et 3.A.1 il existe des constantes $\kappa', \kappa_n > 0$, $n = N+1 \dots N'$ et des entiers $p_n \in \mathbb{N}$, $n = N+1 \dots N'$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N'} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \|\sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \kappa' \varepsilon^{\alpha N' + \beta} + \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq \kappa' \varepsilon^{N/2+1/2} + \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \kappa_n \varepsilon^{-n/2} |\ln \varepsilon|^{p_n} \end{aligned}$$

Attention, il est clair que la constante κ' dépend de N' et donc de N car nous avons choisi $N' \geq N$. En choisissant $\kappa'' = \max(\kappa', \kappa_{N+1}, \dots, \kappa_{N'})$ et $p'' = \max(p_{N+1}, \dots, p_{N'})$ on obtient la conclusion,

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa'' |\ln \varepsilon|^{p''} \varepsilon^{N/2+1/2} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad \blacksquare$$



CHAPITRE 4

Modèle approché pour l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un petit obstacle

Introduction

L'intérêt principal de l'analyse asymptotique réside la plupart du temps dans la possibilité de décrire le comportement prépondérant de la solution d'un certain problème lorsque l'un de ses paramètres tend vers zéro ou l'infini. Dans le cadre de l'analyse numérique, cette information apportée sur le comportement de la solution n'est exploitable qu'à condition de pouvoir calculer effectivement ce terme prépondérant, en espérant que ce calcul sera moins coûteux que celui de la solution exacte du problème de départ.

Illustrons ce propos sur le cas de la diffraction d'une onde par un petit obstacle en deux dimensions. Supposons que l'on veuille calculer la solution u^ε du problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène sur le bord d'un petit obstacle, comme au chapitre 3. Nous aurons l'occasion de montrer que si le diamètre 2ε du petit obstacle est beaucoup plus petit que la longueur d'onde, par exemple $\omega\varepsilon \leq 0.001$, alors il faut fournir un effort de calcul énorme pour obtenir une précision de 10% sur u^ε par une méthode éléments finis standard qui ne prend pas en compte l'analyse asymptotique.

D'une part le coût numérique à payer pour obtenir cette précision n'est pas raisonnable vis-à-vis de la nature du problème à résoudre (un malheureux problème de Helmholtz en 2D...). D'autre part cette situation est paradoxale, car on veut prendre en compte la présence d'un petit obstacle qui n'a qu'un effet perturbatif sur la solution u^ε , mais qui est source de gros soucis numériques. Rappelons que, d'après le corollaire 3.4.1, dans cette situation u^ε se développe loin de l'obstacle sous la forme

$$u^\varepsilon = u^0 + \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \mathfrak{s}_0\{\ln(r)\} + O(\varepsilon) \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star).$$

Supposons que l'on ne s'intéresse effectivement qu'à la solution loin de l'obstacle, et que celui-ci est entouré d'autres objets diffractants de sorte qu'on ne connaisse pas analytiquement $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$. Comme nous venons de le dire plus haut le calcul de u^ε lui-même pose problème.

Une première idée consiste donc à calculer u^0 au lieu de u^ε . Mais d'une part cette première approximation ne prend pas en compte la présence du petit objet diffractant (rappelons que u^0 désigne la solution du problème sans obstacle). D'autre part en ne calculant que u^0 on néglige un terme en

$\det \mathfrak{T}(\varepsilon)^{-1} \sim |\ln \varepsilon|^{-1}$, ce qui est une approximation assez grossière. Une deuxième idée consisterait à prendre en compte l'analyse asymptotique et à calculer u^0 et aussi $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$. Outre les difficultés numériques liées au calcul de $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$ qui est singulière, cette stratégie impliquerait qu'on effectue deux calculs (l'un pour u^0 et l'autre pour $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$) au lieu d'un seul (pour u^ε), ce qui n'est pas très avantageux...

En fait on peut dire que dans certaines situations, telle que celle du petit obstacle, un développement asymptotique n'est pas exploitable directement. Il faut le "post-traiter" quelque peu pour pouvoir en tirer profit d'un point de vue numérique. Voici le post-traitement que nous proposons. L'idée est de calculer $u^0 - u^0(0) \frac{\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)}$ directement. Ceci n'est pas simple car nous ne savons pas *a priori* caractériser cette fonction comme l'unique solution d'un certain problème. Par contre on peut chercher un problème bien posé plus simple que celui que vérifie u^ε et dont l'unique solution, que nous noterons u^ε , admet cette fonction comme premier terme de développement en champ lointain,

$$u^\varepsilon = u^0 - u^0(0) \frac{\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} + O(\varepsilon) \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star).$$

En effet si u^ε satisfait une telle propriété alors $u^\varepsilon - u^\varepsilon = O(\varepsilon)$ loin de l'obstacle, et de fait la fonction u^ε constitue une approximation raisonnable de u^ε . Nous parlerons de modèle approché ou simplifié pour désigner le problème dont u^ε est l'unique solution.

Comme nous l'avons dit en introduction de la thèse, la dérivation de conditions aux limites simplifiées pour des problèmes comportant un petit paramètre a suscité beaucoup d'intérêt ces dernières années au sein de la communauté d'analyse numérique, car cette démarche permet d'aboutir à des conditions aux limites plus facile à implémenter, aussi précises que les "conditions exactes", et moins gourmandes en calcul. Il est difficile de dresser un tour d'horizon des travaux qui ont été effectués dans ce sens. Citons pêle-mêle [10, 59, 60, 41, 18, 71, 5, 42, 1, 84] et les références que l'on peut trouver dans ces articles. Cette liste ne constitue bien entendu qu'un aperçu très limité de la littérature sur ce sujet.

Dans ce chapitre nous nous intéresserons donc au problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet. Nous commencerons en section 4.1 par rappeler très succinctement les notations, le cadre géométrique et le problème initial (\mathcal{P}^ε) étudié. Il s'agira du même contexte qu'au chapitre 3. Nous nous intéresserons ensuite à une reformulation du problème étudié appelé "formulation en domaines fictifs" qui consiste à présenter le problème de Helmholtz comme un problème de type point-selle. En section 4.2 nous montrerons comment cette formulation, jointe au développement raccordé obtenu au chapitre 3, suggère un modèle approché, dont nous dériverons une formulation variationnelle dite "en domaines fictifs dégradée". En section 4.3 et 4.4 nous dériverons un développement raccordé de la solution u^ε du modèle approché. En section 4.5 nous montrerons que ce modèle approché permet aussi de simplifier l'équation intégrale par potentiel de simple couche associé au problème initial (\mathcal{P}^ε) en dérivant un développement asymptotique par rapport à ε pour la trace de dérivée normale de u^ε sur le bord du petit obstacle.

4.1 Rappels sur la géométrie et le problème traité

Dans ce chapitre nous revenons sur la situation étudiée au chapitre 3. Comme nous l'avons signalé ci-dessus nous en reprendrons toutes les notations. Nous rappelons succinctement quelques définitions et notations sur la géométrie et les équations figurant aux §3.1.1 et §3.1.2. Puis nous présentons une autre formulation du problème \mathcal{P}^ε .

4.1.1 Domaine comportant un petit obstacle

Le domaine sans obstacle est un disque $D(0, \rho)$ noté Ω et son bord est noté $\Gamma = \partial\Omega$. Les coordonnées polaires dans Ω sont notées (r, φ) . Le petit obstacle est situé au centre du domaine. Son bord Γ_ε est défini par $\Gamma_\varepsilon = \{ \mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2 \mid r = \varepsilon\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \}$ où $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$. La partie de Ω extérieure à Γ_ε est notée Ω_ε . Elle est donc définie par $\Omega_\varepsilon = \{ \mathbf{x} = r\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon\Phi(\boldsymbol{\sigma}) < r < \rho \}$.

On considère également un domaine normalisé Ω_N obtenu à partir de Ω_ε après un changement d'échelle $R = r/\varepsilon$. Dans ce domaine on note (R, φ) les coordonnées polaires. Le domaine normalisé est non-borné ; il est défini par $\Omega_N = \{ \mathbf{x} = R\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^2 \mid R > \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \}$. Le bord de ce domaine est noté $\Gamma_N = \partial\Omega_N$. On note $\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\Xi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon\mathbf{x}$, de sorte que $\Omega_\varepsilon \subset \Xi^\varepsilon(\Omega_N)$ et $\Gamma_\varepsilon = \Xi^\varepsilon(\Gamma_N)$.

4.1.2 Problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène

La solution du problème de diffraction \mathcal{P}^ε auquel nous nous intéressons initialement est notée u^ε . Il s'agit d'un problème de Helmholtz avec un second membre $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dont le support exclut un voisinage de l'origine. On impose une condition de Dirichlet homogène sur Γ_ε et une condition de radiation qui se ramène à une équation posée sur Γ . En résumé le problème s'écrit

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

L'expression de T_Γ est donnée au chapitre 1 par la formule (1.1.3). Dans ce chapitre nous avons proposé une formulation variationnelle de ce problème. Étant donnée la condition de Dirichlet homogène du chapitre 3, nous avons choisi $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) = \{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \}$ comme espace variationnel. La formulation standard s'écrit alors

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}, \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \\ \text{avec } a_\varepsilon(u, v) &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma u, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Il s'agit d'un problème bien posé car la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition inf-sup dont nous avons démontré qu'elle était satisfaite de manière uniforme par rapport à ε , comme énoncé dans la proposition 3.1.1 : il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{w \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}, \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.1.3)$$

4.1.3 L'approche domaines fictifs : une autre formulation variationnelle

Nous désirons proposer un modèle approché du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Nous proposons de simplifier la condition aux limites sur Γ_ε . Notons que dans les équations (4.1.2) la condition aux limites sur Γ_ε est prise en compte dans la définition de l'espace variationnel $H_{0,\Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ et n'apparaît pas explicitement dans la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$.

Nous proposons d'utiliser une seconde formulation variationnelle qui fait apparaître explicitement la condition de Dirichlet homogène comme une équation. Il s'agit d'une formulation dite en "domaines

fictifs". Cette formulation a été introduite dans la littérature d'analyse numérique afin de s'affranchir de la contrainte d'adapter un maillage à la géométrie, éventuellement complexe, du bord d'un domaine de calcul. Cette méthode a été abondamment étudiée notamment par Kuznetsov ([63, 64, 79] par exemple) ou Glowinski ([55, 52, 56] par exemple). L'application de cette méthode à des problèmes de propagation d'onde a également été étudiée au sein du projet ONDES à l'INRIA de Rocquencourt [27, 9, 49].

Dans ce qui suit nous désignons par p^ε la dérivée normale de u^ε sur Γ_ε . Par ailleurs comme $u^\varepsilon = 0$ sur Γ_ε on peut poser que $u^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ et donc considérer u^ε comme un élément de $H^1(\Omega)$. En résumé on pose

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad p^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon_{|\Omega_\varepsilon}) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \quad (4.1.4)$$

Considérons une fonction test $w \in H^1(\Omega)$. Notons que $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε suffisamment petit de sorte que $\int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{w} = \int_\Omega f \bar{w}$. Avec la formule de Green et les conditions aux limites satisfaites par u^ε , il vient

$$\begin{aligned} \int_\Omega f \bar{w} &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{w} = - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon) \bar{w} \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u^\varepsilon \bar{w} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} \bar{w} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \\ &= \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_\Omega u^\varepsilon \bar{w} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{w} T_\Gamma u^\varepsilon + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{w}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut écrire de manière faible la condition de Dirichlet vérifiée par u^ε sur Γ_ε . Considérons une fonction test $q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ que nous appellerons par la suite multiplicateur de Lagrange. On doit avoir $\int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon q = 0$. En résumé $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ vérifie la formulation dite en "domaines fictifs",

$$\begin{aligned} &(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tels que} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{w} + a(u^\varepsilon, w) = \int_\Omega f \bar{w}, \quad \forall w \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon). \end{array} \right. \quad (4.1.5) \end{aligned}$$

$$\text{avec } a(v, w) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_\Omega v \bar{w} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{w} T_\Gamma v, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega).$$

4.1.4 Unicité de la solution de la formulation en domaines fictifs

Le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ est le seul à vérifier les équations (4.1.5). En effet il y a unicité si le seul couple vérifiant les équations ci-dessus avec un second membre nul est le couple $(0, 0)$. Considérons donc $(v^\varepsilon, q^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ vérifiant les équations homogènes

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} q^\varepsilon \bar{w} + a(v^\varepsilon, w) = 0, \quad \forall w \in H^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_\varepsilon} q^\varepsilon \bar{v}^\varepsilon = 0, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon).$$

On en tire que $v^\varepsilon_{|\Omega_\varepsilon} \in H^1_{0, \Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$ et vérifie par ailleurs $a(v^\varepsilon_{|\Omega_\varepsilon}, w) = a_\varepsilon(v^\varepsilon_{|\Omega_\varepsilon}, w) = 0$ pour tout $w \in H^1_{0, \Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon)$. D'après (4.1.3) on en tire que $v^\varepsilon_{|\Omega_\varepsilon} = 0$. On démontre de la même manière que $v^\varepsilon = 0$ sur $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Finalement $v^\varepsilon = 0$ dans tout Ω et ceci montre donc que $\int_{\Gamma_\varepsilon} q^\varepsilon \bar{w} = 0$ pour tout $w \in H^1(\Omega)$ ce qui implique $q^\varepsilon = 0$.

4.2 Présentation du modèle approché

C'est la formulation (4.1.5) que nous utilisons pour proposer une simplification du problème de diffraction initial. Notons que dans cette formulation la condition de Dirichlet apparaît comme une

contrainte que l'on impose en faisant intervenir les multiplicateurs de Lagrange. Intuitivement, plus l'espace de multiplicateurs de Lagrange est grand, plus la contrainte est sévère. La simplification que nous proposons consiste à relâcher un peu la contrainte en choisissant un espace de multiplicateurs de Lagrange plus petit que $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$.

4.2.1 Réduction de l'espace de multiplicateurs de Lagrange

Quel sous-espace de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ va-t-on choisir? Pour faire notre choix nous revenons à l'analyse asymptotique du chapitre 3, et en particulier au §3.6. Nous y avons dérivé un développement asymptotique de la trace $p^\varepsilon = n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon$ qui intervient justement dans la formulation en domaines fictifs ci-dessus. Supposons que $u^0(0) \neq 0$. Dans ce cas, d'après (3.5.1) et (3.6.4), on a

$$p^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \simeq \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \in \mathbb{C} \cdot \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \subset H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$$

Ici et dans tout le reste du chapitre on pose $\mathfrak{S}_\varepsilon := \mathfrak{S}_0 \{\ln \varepsilon\}$ qui a été défini par le lemme 3.2.4. Ce qui précède suggère, avec la formulation (4.1.5), de rechercher directement p^ε dans l'espace de multiplicateurs de Lagrange restreint,

$$\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) := \mathbb{C} \cdot \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}.$$

Bien évidemment cet espace est isomorphe à \mathbb{C} . L'espace $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ est de dimension 1, il est donc bien plus petit que $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ qui est de dimension infinie. Posons

$$\begin{aligned} \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \check{q} &:= \int_{\Gamma_\varepsilon} q \, d\Gamma_\varepsilon, \\ \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \check{\pi}_\varepsilon[q] &:= q - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \, d\Gamma_\varepsilon \right) \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}, \\ \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \check{\mu}_\varepsilon[v] &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} v \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \, d\Gamma_\varepsilon. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

Clairement d'après le lemme 3.2.5, $\check{\pi}_\varepsilon[q] = 0$ si et seulement si $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Comme $\check{q} \in \mathbb{C}$ on peut s'interroger sur le rapport entre $|\check{q}|$ le module de \check{q} comme nombre complexe et $|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ lorsque $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. En utilisant la définition de la norme $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ donnée par (3.6.1) on calcule facilement qu'il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que

$$\kappa_- |\check{q}| \leq |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_+ |\check{q}| \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \tag{4.2.2}$$

À l'aide de l'application $q \mapsto \check{q}$ on peut exhiber un projecteur de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dans $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ à l'aide d'une formule explicite. En effet d'après le lemme 3.2.5 l'application

$$q \mapsto \check{q} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}$$

est un projecteur de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dans $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Par ailleurs ces notations permettent de simplifier les intégrales sur Γ_ε dans le cas où interviennent les éléments de $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \, d\Gamma_\varepsilon = \check{q} \cdot \overline{\check{\mu}_\varepsilon[v]} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \tag{4.2.3}$$

Enfin, pour éclairer un peu la signification de l'opérateur $\check{\mu}_\varepsilon$ mettons en évidence son action sur une fonction très régulière $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Rappelons que l'équation de Γ_ε est donnée par $r = \varepsilon\Phi(\varphi)$. En écrivant

une formule de Taylor à l'ordre 1 on obtient facilement l'existence d'un $\kappa > 0$ dépendant éventuellement de v mais indépendant de ε tel que

$$|v(\mathbf{x}) - v(0)| \leq \kappa \varepsilon \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial(\Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon)} \leq \frac{\kappa}{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.2.4)$$

On en déduit que $\check{\mu}_\varepsilon[v] = v(0) + O(\varepsilon)$ (en écrivant $\check{\mu}_\varepsilon[v]$ au lieu de $\check{\mu}_\varepsilon[v|_{\Gamma_\varepsilon}]$). En effet en injectant les estimations (4.2.4) dans la définition de $\check{\mu}_\varepsilon$ et en utilisant le lemme 3.2.5, on obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε mais dépendant de v tel que

$$|\check{\mu}_\varepsilon[v] - v(0)| \leq \kappa \varepsilon \quad \text{donc} \quad \check{\mu}_\varepsilon[v] = v(0) + O(\varepsilon) \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega). \quad (4.2.5)$$

4.2.2 Formulation en domaines fictifs dégradée

Ce qui précède suggère une autre formulation en domaines fictifs en remplaçant $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ par le nouvel espace $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Il s'agit alors d'un nouveau problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ que nous dirons approché, avec un nouveau couple inconnu $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Ce problème admet la formulation en domaines fictifs suivante

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \text{ tels que} \\ (\mathfrak{P}^\varepsilon) : & \begin{cases} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{w} + a(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega} f \bar{w}, & \forall w \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Nous dirons qu'il s'agit d'une formulation dégradée car nous avons réduit l'espace de multiplicateurs de Lagrange. Avec cette nouvelle formulation on n'impose plus une condition de Dirichlet homogène complète sur Γ_ε , mais plutôt une condition de moyenne nulle. En effet cette condition peut se réécrire

$$\check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \frac{\partial(\Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_\varepsilon)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} d\Gamma_\varepsilon = 0 \quad (4.2.7)$$

Au même titre que pour le problème (4.1.5) il convient de se demander si le problème ci-dessus est bien posé. Nous allons donc vérifier les hypothèses du théorème 4.A.1 qui est adapté d'un résultat de [15].

Tout d'abord il est clair, que $H^1(\Omega)$ et $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ sont des espaces de Hilbert, puisque $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ est un espace de Hilbert et $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \subset H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Par ailleurs la forme sesquilinéaire $(v, w) \mapsto a(v, w)$ est continue, et il en va de même pour $(q, v) \mapsto \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v}$. Enfin il est clair que $v \mapsto \int_{\Omega} f \bar{v}$ est une forme linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ et le problème (4.2.6) admet la même forme que (4.A.1). Il reste donc à vérifier les conditions inf – sup (4.A.2). Pour énoncer ces conditions, introduisons l'espace

$$H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Gamma_\varepsilon} q v = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \right\}. \quad (4.2.8)$$

Cet espace joue le rôle de $H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ mais pour la condition aux limites affaiblie (4.2.7) au lieu de la condition de Dirichlet homogène complète. Les conditions inf – sup sont alors celles énoncées par le lemme suivant

Lemme 4.2.1.

Il existe $\alpha_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on ait

$$\inf_{u \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \sup_{v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0 \quad \inf_{u \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \sup_{v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \frac{|a(v, u)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0$$

Nous ne démontrons pas la condition inf – sup sur $a(\cdot, \cdot)$ car nous en donnerons une variante discrète au chapitre 5 (le lemme 5.1.1) qui se démontre de la même manière mais avec quelques difficultés supplémentaires (cette preuve sera d'ailleurs proche de celle de la proposition 3.1.1).

Lemme 4.2.2.

Il existe $\beta_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on ait

$$\inf_{q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_0$$

Preuve :

Soit $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ arbitraire ; choisissons par ailleurs $v_0 = 1$ sur Ω de sorte que $v_0 \in H^1(\Omega)$. En utilisant l'équivalence des normes (4.2.2), on obtient $\kappa_+ > 0$ indépendant de ε, q et v tel que

$$\sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{|\check{q} \overline{\check{\mu}_\varepsilon[v_0]}|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v_0\|_{H^1(\Omega)}} = \frac{|\check{q}|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \geq \frac{1}{\kappa_+ \sqrt{|\Omega|}}.$$

Ci-dessus $|\Omega|$ est simplement l'aire de Ω , on a en effet $\|v_0\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{|\Omega|}$ et $\check{\mu}_\varepsilon[v_0] = 1$. Comme le membre de droite de cette inégalité ne dépend pas de q il suffit de prendre la borne inférieure sur les $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ pour obtenir le résultat. ■

La conclusion de la discussion qui précède est donc que le problème (4.2.6) est bien posé. Nous allons maintenant nous attacher à montrer que l'unique couple solution $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ constitue bien une approximation de $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Nous allons démontrer qu'il existe $\kappa, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^q, \quad \forall \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star. \quad \text{et} \quad |p^\varepsilon - p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^q \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Pour démontrer ceci, nous allons construire le développement raccordé de u^ε et constater que le premier terme du développement coïncide avec celui de u^ε . Nous n'écrivons pas dans le détail la totalité des preuves pour la construction de ce développement car beaucoup de résultats se démontrent d'une manière tout à fait semblable au chapitre 3.

4.3 Analyse asymptotique du modèle approché

Pour dériver un développement raccordé de u^ε nous désirons utiliser les résultats du chapitre 2, ce qu'il n'est pas possible de faire directement car la formulation en domaines fictifs dégradée (4.2.6) n'est pas de la même forme que (2.1.2). Nous allons donc dans un premier temps réécrire la formulation (4.2.6) d'une autre manière. La formulation à laquelle nous aboutirons sera presque la même que (4.1.1), seule la condition aux limites sur Γ_ε changera. Il sera donc ensuite très facile de vérifier que les hypothèses **Hi**, **i=0...6** du chapitre 2 sont bien vérifiées. Puisqu'une grosse partie du travail aura déjà été effectuée au chapitre 3.

Remarquons tout d'abord que la formulation en domaines fictifs dégradée (4.2.6) est posée dans tout Ω alors que les problèmes de la forme (2.1.2) sont posés dans Ω_ε . Nous allons ramener $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ à un problème posé dans Ω_ε . Ceci va faire apparaître un opérateur de bord sur Γ_ε qui constituera l'unique différence avec (4.1.1).

4.3.1 Réécriture de la formulation en domaines fictifs dégradée

Pour pouvoir "éliminer la partie de (4.2.6) située à l'intérieur de Γ_ε " nous construisons un opérateur $T_{\Gamma_\varepsilon} : H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ de Dirichlet-to-Neumann semblable au T_Γ que nous utilisons pour imposer une condition de Sommerfeld. Etant donné un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^2$, nous allons avoir besoin de considérer l'espace noté $H^1(\Delta; \omega)$ défini par

$$H^1(\Delta; \omega) := \{v \in H^1(\omega) \text{ t.q. } \Delta v \in L^2(\omega)\} \quad \text{muni de} \quad \|v\|_{H^1(\Delta; \omega)}^2 := \|v\|_{H^1(\omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\omega)}^2.$$

Cet espace constitue le cadre naturel pour les opérateurs de trace de dérivée normale. A présent nous introduisons un opérateur qui "résout le problème" à l'intérieur de Γ_ε .

$$G_\varepsilon : H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow H^1(\Delta; \Omega \setminus \Omega_\varepsilon) \quad \text{telle que} \tag{4.3.1}$$

$$\Delta G_\varepsilon(v) + \bar{\omega}^2 G_\varepsilon(v) = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon, \quad G_\varepsilon(v)|_{\Gamma_\varepsilon} = v \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, la fonction $G_\varepsilon(v)$ désigne l'unique élément de $H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$ satisfaisant les équations ci-dessus de sorte que l'application G_ε est bien définie. Par ailleurs, il est classique que l'opérateur G_ε est alors continu (c'est une conséquence de l'alternative de Fredholm cf [14]). L'opérateur de Dirichlet-to-Neumann intérieur est défini par

$$T_{\Gamma_\varepsilon} : H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad T_{\Gamma_\varepsilon} v := -\frac{\partial G_\varepsilon(v)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon). \tag{4.3.2}$$

Par continuité de l'application $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla$ de $H^1(\Delta; \Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ l'opérateur T_{Γ_ε} est continu également. Voici donc une formulation forte alternative à la formulation en domaines fictifs dégradée (4.2.6).

Proposition 4.3.1.

Le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ est solution du problème (4.2.6) si et seulement si il satisfait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u^\varepsilon = -f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon] = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) + T_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{array} \right. \tag{4.3.3}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u^\varepsilon = G_\varepsilon(u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}) & \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \\ p^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}) & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{array} \right.$$

Preuve :

Supposons dans un premier temps que le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ satisfasse les équations de (4.2.6). On a directement $\check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon] = 0$ d'après (4.2.7). Considérons une fonction $v \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire de sorte que $v = 0$ sur Γ_ε . Alors d'après les équations de (4.2.6) on a $a(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}$. Par intégration par parties on obtient que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u^\varepsilon) \bar{v} = - \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Omega_\varepsilon).$$

On en déduit que $\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f$ dans Ω_ε au sens des distributions et donc finalement au sens de $L^2(\Omega_\varepsilon)$ puisque $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$. On montre de la même manière que $\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ au sens de $L^2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$. On en tire alors par unicité de la solution des problèmes de Helmholtz avec condition de Dirichlet dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ que $u^\varepsilon = G_\varepsilon(u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Choisissons un $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ arbitraire. On a par hypothèse

$$a(u^\varepsilon, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{v} = \int_{\Omega} f \bar{v}$$

En appliquant une formule de Green séparément dans Ω_ε et $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ on obtient

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon \right) \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(p^\varepsilon - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}) \right) \bar{v} = 0$$

Comme la valeur de v sur les frontières Γ et Γ_ε est arbitraire, on en déduit la condition de rayonnement et la condition sur p^ε de (4.3.3). Comme le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ a été supposé au départ solution de (4.2.6), en particulier on a $\check{\pi}_\varepsilon[p^\varepsilon] = 0$. Avec la définition de T_{Γ_ε} on en déduit finalement

$$0 = \check{\pi}_\varepsilon[p^\varepsilon] = \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}) \right] = \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \right].$$

À l'inverse supposons que le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ satisfasse les équations (4.3.3). Alors il est déjà clair que

$$\check{q} \overline{\check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon]} = \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon).$$

Choisissons maintenant un $v \in H^1(\Omega)$ arbitraire et testons avec cette fonction les deux équations $\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f$ dans Ω_ε et $\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. En appliquant une formule de Green séparément dans Ω_ε et $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ on obtient la deuxième équation de (4.2.6)

$$\int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega} u^\varepsilon \bar{v} - \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma}}_{= -T_\Gamma u^\varepsilon} \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}) \right)}_{= p^\varepsilon} \bar{v} = 0.$$

■

4.3.2 Étude de l'opérateur de bord intérieur

Avec la proposition précédente nous transformons la formulation en domaines fictifs dégradée en un problème de la forme (2.1.2). En effet nous ramenons le problème (4.2.6) qui est posé dans tout Ω et porte sur le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$, à un problème qui est posé dans Ω_ε et porte seulement sur u^ε et s'écrit

Trouver $u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma \\ \check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon] = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) + T_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (4.3.4)$$

Comme au chapitre 3, nous posons ici $A = \Delta + \partial^2$ et $C = n_\Gamma \cdot \nabla + T_\Gamma$. Pour l'opérateur de bord sur Γ_ε , la définition que nous prenons est

$$B : H^1(\Delta; \Omega_\varepsilon) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \times H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad Bv := \left(\check{\mu}_\varepsilon[v], \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} v \right] \right) \quad (4.3.5)$$

Notons que B est donc en particulier continu de $H^2(\Omega_\varepsilon)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \times H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Nous avons choisi d'ajouter un ε en facteur du second terme définissant B pour des raisons purement techniques, afin de coller au formalisme du chapitre 2. Étant données les vérifications que nous avons déjà effectuées au chapitre 3, avec ce nouveau problème les hypothèses **H0, H3, H4, H5, H6** sont à nouveau satisfaites. Pour pouvoir appliquer les résultats du chapitre 2 il faut donc vérifier **H1** et **H2**. Dans ce paragraphe nous allons examiner **H2** qui concerne l'opérateur B . Nous vérifierons **H1** qui concerne la stabilité au prochain paragraphe.

Pour valider l'hypothèse **H2** il nous faut étudier l'opérateur $\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon$. D'après la définition (4.3.5) l'opérateur B a deux composantes. Pour la première composante remarquons que, puisque $\check{\mu}_\varepsilon$ est à valeur dans \mathbb{C} , on a $\Xi_*^{\varepsilon,-1} \check{\mu}_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon = \check{\mu}_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon$. On pose par définition $\check{\mu}_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon := \check{\mu}_N$. En utilisant le fait que $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\Gamma_N$, on obtient pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$

$$\check{\mu}_\varepsilon[\Xi_*^\varepsilon v] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} (\Xi_*^\varepsilon v) \frac{\partial(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{G}_e)}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} d\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} v \frac{\partial \mathfrak{G}_e}{\partial n_{\Gamma_N}} d\Gamma_N := \check{\mu}_N[v]$$

Pour l'étude de la deuxième composante de B , on peut définir de même $\Xi_*^{\varepsilon,-1} \check{\pi}_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon := \check{\pi}_N$. On démontre de la même manière que ci-dessus que pour tout $q \in H^{-1/2}(\Gamma_N)$

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} \check{\pi}_\varepsilon[\Xi_*^\varepsilon q] = q - \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_N} q d\Gamma_N \right) \frac{\partial \mathfrak{G}_e}{\partial n_{\Gamma_N}} := \check{\pi}_N[q]$$

On a donc pour tout $v \in H^1(\Delta; \Omega_N)$

$$\begin{aligned} \Xi_*^{\varepsilon,-1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} (\Xi_*^\varepsilon v) + T_{\Gamma_\varepsilon} (\Xi_*^\varepsilon v) \right] &= \varepsilon \check{\pi}_N \left[\Xi_*^{\varepsilon,-1} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} (\Xi_*^\varepsilon v) + \Xi_*^{\varepsilon,-1} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} G_\varepsilon((\Xi_*^\varepsilon v)|_{\Gamma_\varepsilon}) \right] \\ &= \check{\pi}_N \left[\frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_N}} + \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon(v)|_{\Gamma_N}) \right] \end{aligned}$$

Pour terminer ce calcul il nous faut déterminer la forme de $\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon$. Notons que $\Xi^\varepsilon(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N$. Ainsi $\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon$ est continu de $H^{1/2}(\Gamma_N)$ dans $H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)$. En fait cet opérateur est développable en série entière par rapport à ε . En effet pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ la fonction $G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v)$ est l'unique élément de $H^1(\Delta; \Omega \setminus \Omega_\varepsilon)$ satisfaisant

$$\Delta G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v) + \partial^2 G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v) = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Omega_\varepsilon \quad \text{et} \quad G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v)|_{\Gamma_\varepsilon} = \Xi_*^\varepsilon v \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

Puisque $\Xi_*^{\varepsilon,-1} \Delta = \varepsilon^{-2} \Delta \Xi_*^{\varepsilon,-1}$, on en déduit que pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ on a

$$\Delta \Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v) + (\partial\varepsilon)^2 \Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N \quad \text{et} \quad \Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon(\Xi_*^\varepsilon v)|_{\Gamma_\varepsilon} = v \quad \text{sur } \Gamma_N$$

Pour connaître la dépendance par rapport à ε de l'opérateur $\Xi_*^{\varepsilon,-1} \cdot G_\varepsilon \cdot \Xi_*^\varepsilon$ nous introduisons un opérateur analogue à G_ε mais pour le domaine normalisé. Étant donné $\lambda \in \mathbb{C}$ considérons l'opérateur $G_N^\lambda : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)$ tel que

$$\Delta G_N^\lambda(v) + \lambda G_N^\lambda(v) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N, \quad G_N^\lambda(v)|_{\Gamma_N} = v \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

À nouveau G_N^λ est bien défini sauf pour une quantité dénombrable de λ sans point d'accumulation. Par ailleurs, (cf [36] par exemple) $\lambda \mapsto G_N^\lambda$ est analytique au voisinage de 0 au sens de la topologie de

$\mathcal{L}_c(H^{1/2}(\Gamma_N), H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N))$. Par identification enfin on constate que $\Xi_*^{\varepsilon,-1} \cdot G_\varepsilon \cdot \Xi_*^\varepsilon = G_N^{(\omega\varepsilon)^2}$. On en déduit le développement suivant

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega\varepsilon)^{2n} G_{2n} \quad \text{avec} \quad G_{2n} \in \mathcal{L}_c(H^{1/2}(\Gamma_N), H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)). \quad (4.3.6)$$

Cette série converge au sens de $\mathcal{L}_c(H^{1/2}(\Gamma_N), H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N))$. Signalons en particulier que G_0 est la résolvante de l'équation de Laplace dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N$ avec condition de Dirichlet sur Γ_N , c'est-à-dire pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$, $G_0(v)$ est l'unique fonction satisfaisant

$$G_0(v) \in H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N), \quad \Delta G_0(v) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N \quad \text{et} \quad G_0(v)|_{\Gamma_N} = v \quad \text{sur} \quad \Gamma_N.$$

Au passage voici une remarque dont nous aurons besoin un peu plus loin. Si $\mathbf{1}_{\Gamma_N}$ désigne la fonction constante égale à 1 sur Γ_N alors $G_0(\mathbf{1}_{\Gamma_N}) = 1$. Vu le développement (4.3.6) ceci implique l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left\| \Xi_*^{\varepsilon,-1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon [T_{\Gamma_\varepsilon} \mathbf{1}_{\Gamma_\varepsilon}] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} = \left\| \Xi_*^{\varepsilon,-1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon [T_{\Gamma_\varepsilon} \Xi_*^\varepsilon \mathbf{1}_{\Gamma_N}] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} = \left\| \check{\pi}_N \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon \mathbf{1}_{\Gamma_N} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq \kappa \varepsilon^2 \quad (4.3.7)$$

Cette inégalité sera utile pour démontrer un résultat de stabilité. Finalement pour rester consistant avec les notations précédemment introduites, nous définissons un autre opérateur de Dirichlet-to-Neumann intérieur "statique"

$$T_{\Gamma_N} : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_N) \quad \text{tel que} \quad T_{\Gamma_N} v := -\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \left(G_0(v) \right), \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_N). \quad (4.3.8)$$

Cet opérateur DtN intérieur vérifie une propriété de positivité élémentaire comparable à (1.3.14). En effet puisque par construction $\Delta G_0(v) = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_N$, à partir de la définition de T_{Γ_N} et en appliquant une formule de Green dans $\Omega \setminus \Omega_N$ on a

$$\int_{\Gamma_N} \bar{v} T_{\Gamma_N} v = \int_{\Omega \setminus \Omega_N} |\nabla G_0(v)|^2 \geq 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_N). \quad (4.3.9)$$

Finalement nous avons montré que l'opérateur de bord B de ce chapitre admet bien la forme 2.1.4. En effet nous avons obtenu que l'opérateur $\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon$ se développe en série entière par rapport à ε de la manière suivante,

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} (\omega\varepsilon)^{2n} B_{2n} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} B_0 v = \check{\pi}_N \left[\frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} v \right] \\ B_{2n} v = \check{\pi}_N \cdot \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_N}} \left(G_{2n}(v|_{\Gamma_N}) \right). \end{cases}$$

4.3.3 Stabilité du modèle approché

Nous avons vérifié toutes les hypothèses requises au chapitre 2 sauf l'hypothèse **H1**. Dans ce paragraphe nous allons donc démontrer un résultat de stabilité pour le modèle simplifié correspondant aux équations (4.3.4). Nous allons réutiliser la condition inf – sup uniforme du lemme 4.2.1.

Proposition 4.3.2.

L'opérateur G_ε étant défini par (4.3.1), il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ et $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a

$$\begin{aligned} \|G_\varepsilon(u|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} + \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &\leq \kappa_0 \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \left\| \Delta u + \omega^2 u \right\|_{\mathcal{Y}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} \right. \\ &\quad \left. + \left| \check{\mu}_\varepsilon[u] \right| + \left\| \Xi_*^{\varepsilon,-1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Preuve :

Soit $u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$. Dans la suite nous supposons que u est prolongé dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ par G_ε , c'est-à-dire $u = G_\varepsilon(u|_{\Gamma_\varepsilon})$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Supposons dans un premier temps que $\check{\mu}_\varepsilon[u] = 0$. En vue d'appliquer le résultat du lemme 4.2.1, considérons un $v \in H^1(\Omega)$ tel que $\check{\mu}_\varepsilon[v] = 0$. En appliquant une formule de Green séparément dans Ω_ε et $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ on obtient

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_{\Gamma} \bar{v} T_\Gamma u + \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} u \bar{v} \\ &= - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u + \omega^2 u) \bar{v} - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} (\Delta u + \omega^2 u) \bar{v} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right) \bar{v} \\ &\quad - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} (u|_{\Omega_\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} (u|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}) \right] \bar{v} \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Étant donné le prolongement dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ que nous avons choisi pour u , on a $\Delta u + \omega^2 u = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ et donc la deuxième intégrale de la dernière égalité ci-dessus est nulle. D'après la définition (4.3.2) on a aussi $T_{\Gamma_\varepsilon} u = -n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla (u|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon})$. Enfin, notons que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \check{\pi}_\varepsilon[q] \bar{v} \quad \forall v \in H^1_{\mu, \Gamma_\varepsilon}(\Omega), \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon).$$

En reportant ces différentes identités dans (4.3.11) et en appliquant des inégalités de Cauchy-Schwarz, on obtient l'existence d'une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} a(u, v) &= - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u + \omega^2 u) \bar{v} + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right) \bar{v} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \bar{v} \\ |a(u, v)| &\leq \kappa \left\{ \|\Delta u + \omega^2 u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} \right\} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\quad + \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \bar{v} d\Gamma_\varepsilon \right| \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Pour majorer le terme sur Γ_ε nous utilisons simultanément le changement de variable $\Xi_*^{\varepsilon, -1}$, le fait que $d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\Gamma_N$ et le lemme 1.4.2. On obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \bar{v} d\Gamma_\varepsilon \right| &= \varepsilon \left| \int_{\Gamma_N} \Xi_*^{\varepsilon, -1} \left\{ \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \bar{v} \right\} d\Gamma_N \right| \\ &\leq \kappa \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned}$$

En reportant cette inégalité dans (4.3.12), on obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\frac{|a(u, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \|\Delta u + \omega^2 u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\}$$

Il reste à prendre la borne supérieure de cette inégalité sur tous les $v \in H^1(\Omega)$ tels que $\check{\mu}_\varepsilon[v] = 0$ et on obtient le résultat annoncé dans le cas où $\check{\mu}_\varepsilon[u] = 0$ d'après le lemme 4.2.1. Supposons à présent $\check{\mu}_\varepsilon[u] \neq 0$. Alors $\check{\mu}_\varepsilon[u - \check{\mu}_\varepsilon[u]] = 0$. Comme il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que $\|\check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\check{\mu}_\varepsilon[u]|$, on a

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{H^1(\Omega)} + \|\check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u - \check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{H^1(\Omega)} + \kappa |\check{\mu}_\varepsilon[u]| \quad (4.3.13)$$

Ci-dessus on a supposé u prolongé de sorte que $u = G_\varepsilon(u|_{\Gamma_\varepsilon})$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Notons que $\check{\mu}_\varepsilon[u]$ étant une constante on a $\Delta \check{\mu}_\varepsilon[u] = \check{\mu}_\varepsilon[u] \Delta 1 = 0$, et de même $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla \check{\mu}_\varepsilon[u] = 0$ sur Γ_ε et $n_\Gamma \cdot \nabla \check{\mu}_\varepsilon[u] = 0$ sur Γ . En utilisant le début de la preuve on obtient un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} \|u - \check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{H^1(\Omega)} &\leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \|\Delta u + \bar{\omega}^2 u - \bar{\omega}^2 \check{\mu}_\varepsilon[u]\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u - T_\Gamma \check{\mu}_\varepsilon[u] \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u - T_{\Gamma_\varepsilon} \check{\mu}_\varepsilon[u] \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\} \\ &\leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \|\Delta u + \bar{\omega}^2 u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\} \\ &\quad + \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \|\bar{\omega}^2\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \|T_\Gamma 1\|_{L^2(\Gamma)} + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon [T_{\Gamma_\varepsilon} 1] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\} |\check{\mu}_\varepsilon[u]| \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité ci-dessus avec (4.3.13) et (4.3.7) on obtient presque (4.3.10). Il reste simplement à remarquer que $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \|\cdot\|_{\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega_\varepsilon)}$. ■

4.4 Définition des termes du développement

À présent nous avons vérifié toutes les hypothèses nécessaires à l'application des résultats du chapitre 2. Nous pouvons donc écrire les problèmes récurrents associés au modèle simplifié. Nous les noterons $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$ pour les différencier des $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ dont il est question au chapitre 3. Ces problèmes récurrents vont permettre de définir les termes du développement raccordé de u^ε . Ces termes seront notés de la manière suivante

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^\varepsilon \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star) \quad \text{et} \quad \Xi_*^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \mathfrak{U}_n^\varepsilon \quad \text{dans } H_{\text{loc}}^1(\Omega_N).$$

Annonçons dès maintenant que ce développement sera régulier. En notant $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ la matrice 2×2 définie par (3.3.2) les u_n^ε et les $\mathfrak{U}_n^\varepsilon$ admettront en effet la forme suivante

$$u_n^\varepsilon = \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{u_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q} \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_n^\varepsilon = \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{\mathfrak{U}_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q} \quad q_n \in \mathbb{Z}. \quad (4.4.1)$$

Nous commencerons par écrire les problèmes $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$. Comme dans cette analyse il y a beaucoup de points communs avec l'analyse du chapitre 3, nous ne donnerons pas la preuve complète du fait que ces problèmes sont bien posés. Nous esquisserons simplement la construction des profils en champ lointain en démontrant un résultat clé d'existence et d'unicité. Par exemple nous ne démontrerons pas la propriété (4.4.1) car ceci pourrait se démontrer comme avec la proposition 3.3.1.

4.4.1 Écriture des problèmes récurrents

Pour écrire les problèmes récurrents, commençons par remarquer que, puisque l'opérateur A et la géométrie sont les mêmes qu'au chapitre 3, les applications $\ell_p(\cdot)$ et $L_p(\cdot)$ admettent la même expression donnée par (3.2.2) et (3.2.3). Nous les réécrivons pour ôter toute ambiguïté,

$$\begin{aligned} \ell_p(u) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda, \quad p \neq 0 \\ \ell_0(u) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \lambda \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

et

$$L_p(\mathbf{U}) = \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\odot_p} \mathfrak{M}\{\mathbf{U}\mathbf{1}_{r>1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\odot_p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{\mathbf{U}\mathbf{1}_{r>1}\}(\lambda) d\lambda, \quad p \neq 0$$

$$L_0(\mathbf{U}) = \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\odot_0} \mathfrak{M}\{\mathbf{U}\mathbf{1}_{r>1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\odot_0} \lambda \mathfrak{M}\{\mathbf{U}\mathbf{1}_{r>1}\}(\lambda) d\lambda.$$

Les équations de raccord vont également prendre la même forme qu'au chapitre 2 pour les mêmes raisons. À présent nous écrivons les problèmes récurrents $\mathfrak{P}_n^\varepsilon$ proprement dits. Seule la condition aux limites sur Γ_N change. Ici contrairement au chapitre 2, cette condition aux limites fait apparaître des seconds membres supplémentaires dont l'expression dépend de $\mathfrak{U}_{n-1}^\varepsilon, \mathfrak{U}_{n-2}^\varepsilon \dots$

$$(\mathfrak{P}_n^\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u_n^\varepsilon + \omega^2 u_n^\varepsilon = -\delta_0^n f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u_n^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta \mathfrak{U}_n^\varepsilon = -\omega^2 \mathfrak{U}_{n-2}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \check{\mu}_N[\mathfrak{U}_n^\varepsilon] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \\ \check{\pi}_N \left[\frac{\partial \mathfrak{U}_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} \mathfrak{U}_n^\varepsilon \right] = - \sum_{k=0}^{n-1} \check{\pi}_N \cdot \frac{\partial G_{n-k}}{\partial n_{\Gamma_N}} (\mathfrak{U}_k^\varepsilon|_{\Gamma_N}) \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(\mathfrak{U}_{n-p}^\varepsilon) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(\mathfrak{U}_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p} [\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)] \right) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(\mathfrak{U}_n^\varepsilon) \end{array} \right.$$

4.4.2 Construction des profils

Comme dans les chapitres précédents, l'étape suivante dans la construction de notre développement raccordé consiste à démontrer que le problème $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$ ci-dessus admet une unique solution. Ceci se démontre comme auparavant à l'aide de profils en champ proche et lointain.

Définition des profils en champ lointain Concernant les profils en champ lointain, il s'agit en fait des mêmes profils qu'au chapitre 3, parce que le champ lointain "ne voit pas directement" la forme du petit obstacle. Ainsi les profils $\mathfrak{s}_p\{a\}$, $q \in \mathbb{P}_{\log}$ sont définis pour le modèle simplifié de ce chapitre par les lemmes 3.2.1 et 3.2.2.

Résultat d'existence-unicité pour les problèmes en champ proche

Dans ce chapitre nous présentons un résultat analogue à celui de la proposition 3.2.1. Remarquons dans un premier temps que l'existence et l'unicité des problèmes en champ proche dans le cas d'une condition de Neumann (cf §1.8.2) ne se présentait pas de la même manière que les résultats correspondants à la condition de Dirichlet (cf §3.2.3). La raison de ceci était que dans le cas d'une condition de Neumann on ne dispose d'une inégalité du type Poincaré qu'à une constante près. Dans ce chapitre, au même titre que pour la condition de Dirichlet exacte, on dispose d'une inégalité de Poincaré "complète" (pas seulement à une constante près) : il existe une constante $\kappa > 0$ telle que

$$\int_{\Omega_N} \frac{|v|^2}{R^2 \ln^2(R)} R dR d\varphi \leq \kappa \left(|\check{\mu}_N[v]| + \int_{\Omega_N} |\nabla v|^2 R dR d\varphi \right), \quad \forall v \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N) \quad (4.4.2)$$

Ceci est un résultat classique que l'on peut trouver par exemple dans [91]. L'espace $\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$ ci-dessus a été défini par (1.8.3).

Proposition 4.4.1.

Soient $g \in \widetilde{\mathscr{W}}'_{\log}(\Omega_N)$, $h' \in \mathbb{C}$ et $h'' \in \check{\pi}_N[H^{-1/2}(\Gamma_N)]$. Il existe une unique $V \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\Delta V = g \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \check{\mu}_N[V] = h' \quad \text{sur } \Gamma_N \quad \text{et} \quad \check{\pi}_N \left[\frac{\partial V}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} V \right] = h'' \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

De plus cette solution dépend continuellement des données g , h' et h'' : il existe $\kappa > 0$ indépendant des données g , h' et h'' telle que

$$\|V\|_{\mathscr{W}_{\log}(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)} + |h'| + \|h''\|_{H^{-1/2}(\Gamma_N)} \right), \quad \text{avec} \quad \|g\|_{\mathscr{W}'_{\log}(\Omega_N)} := \sup_{1=\|W\|_{\mathscr{W}_{\log}}} \left| \langle g, W \rangle_{\mathscr{W}'_{\log}, \mathscr{W}_{\log}} \right|.$$

Preuve :

Tout d'abord signalons que l'on peut se ramener facilement à démontrer le résultat ci-dessus dans le cas où $\check{\mu}_N[h'] = 0$. En effet on effectue un changement de fonction inconnue en recherchant $V' = V - h'$ plutôt que V lui-même. Comme $h' \in \mathbb{C}$, on a $T_{\Gamma_N} h' = 0$ d'après la définition de T_{Γ_N} donnée par (4.3.8). La fonction V' doit alors satisfaire

$$\Delta V' = g \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \check{\mu}_N[V'] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N \quad \text{et} \quad \check{\pi}_N \left[\frac{\partial V'}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} V' \right] = h'' \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

Pour résoudre ce problème nous le mettons sous une forme variationnelle. Considérons l'espace $\mathscr{W}_{\log, \mu}(\Omega_N) = \{W \in \mathscr{W}_{\log}(\Omega_N) \mid \check{\mu}_N[W] = 0\}$. Cette formulation s'écrit alors

Trouver $V' \in \mathscr{W}_{\log, \mu}(\Omega_N)$ tel que

$$\int_{\Omega_N} \nabla V' \cdot \nabla \overline{W} + \int_{\Gamma_N} \overline{W} T_{\Gamma_N} V' = \int_{\Omega_N} g \overline{W} + \int_{\Gamma_N} h'' \overline{W}, \quad \forall W \in \mathscr{W}_{\log, \mu}(\Omega_N).$$

La forme sesquilinéaire associée à cette formulation s'avère coercive en vertu de l'inégalité de type Poincaré (4.4.2) et de la propriété de positivité (4.3.9). D'après le théorème de Lax-Milgram, le problème ci-dessus est donc bien posé. La coercivité montre que la solution dépend continuellement des données comme annoncé. ■

Existence-unicité des profils

La proposition précédente permet notamment de montrer l'existence et l'unicité des profils en champ proche. Ceux-ci comme au chapitre 3 interviennent dans la démonstration d'existence d'un couple solution pour $\mathfrak{P}_n^\varepsilon$. Nous noterons $\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}$ ces profils pour les distinguer des profils $\mathfrak{S}_p\{a\}$ du chapitre 3.

Lemme 4.4.1.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a(\varphi) = a^+ e^{i|p|\varphi} + a^- e^{-i|p|\varphi}$, $a^\pm \in \mathbb{C}$, il existe un unique $\check{\mathfrak{S}}_p\{a\} \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \check{\mathfrak{S}}_p\{a\} = 0 & \text{dans } \Omega_N, \\ \check{\mu}_\varepsilon[\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}] = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \check{\pi}_N \left[\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}_p\{a\}}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} \check{\mathfrak{S}}_p\{a\} \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ L_0(\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}) = 0 \\ L_q(\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ L_p(\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Comme dans le cas de la condition de Dirichlet complète du chapitre 3, l'énoncé de la proposition 4.4.1 ne réclame pas de condition de compatibilité. Ainsi on peut énoncer également un résultat d'existence-unicité pour les profils à croissance logarithmique.

Lemme 4.4.2.

Étant donnée une fonction $a(R) = \alpha + \beta \ln R$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, il existe un unique $\check{\mathfrak{S}}_0\{a\} \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \check{\mathfrak{S}}_0\{a\} = 0 & \text{dans } \Omega_N, \\ \check{\mu}_\varepsilon[\check{\mathfrak{S}}_0\{a\}] = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \\ \check{\pi}_N \left[\frac{\partial \check{\mathfrak{S}}_0\{a\}}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} \check{\mathfrak{S}}_0\{a\} \right] = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \{ L_0(\check{\mathfrak{S}}_0\{a\}) - a \} = 0 \\ L_q(\check{\mathfrak{S}}_0\{a\}) = 0, \quad q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{array} \right.$$

Rappelons que les conditions aux limites sur Γ_N diffèrent de la condition de Dirichlet homogène standard parce qu'avec la formulation en domaine fictif (4.2.6) nous avons choisi de restreindre l'espace de multiplicateurs de Lagrange. Rappelons également que le sous-espace de multiplicateurs de Lagrange que nous avons choisi dépendait directement de $\mathfrak{S}_0\{\ln R\}$, le profil d'ordre 0 construit suivant la proposition 3.2.4. Il est donc naturel de vouloir comparer $\mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ et $\check{\mathfrak{S}}_0\{\ln R\}$. En fait on a

$$\check{\mathfrak{S}}_0\{a\} = \mathfrak{S}_0\{a\} \quad \text{pour tout } a(R) = \alpha + \beta \ln R \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad (4.4.3)$$

car on vérifie sans peine que $\mathfrak{S}_0\{a\}$ satisfait les conditions aux limites sur Γ_N du lemme 4.4.2. Nous utiliserons donc indifféremment la notation $\check{\mathfrak{S}}_0\{a\}$ ou $\mathfrak{S}_0\{a\}$. En particulier on a par définition

$$\check{\mathfrak{S}}_0\{\ln R\} = \mathfrak{S}_0\{\ln R\} = \mathfrak{S}_e.$$

4.4.3 Développement raccordé pour le modèle approché

Au paragraphe précédent nous avons décrit comment nous définissons les profils en champ lointain et proche pour le problème de ce chapitre. À présent nous énonçons un résultat d'existence-unicité de la solution des problèmes récurrents. Nous ne donnons pas la démonstration, celle-ci se déroulant comme au chapitre 3 en utilisant, avec quelques adaptations, les profils $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ et $\check{\mathfrak{S}}_p\{a\}$ et la proposition 4.4.1.

Proposition 4.4.2.

Les couples $(u_{n-1}^\varepsilon, \mathfrak{L}_{n-1}^\varepsilon)$, $(u_{n-2}^\varepsilon, \mathfrak{L}_{n-2}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, \mathfrak{L}_0^\varepsilon)$ ayant été préalablement définis, le problème $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$ admet une unique couple solution $(u_n^\varepsilon, \mathfrak{L}_n^\varepsilon)$.

Les couples $(u_n^\varepsilon, \mathfrak{U}_n^\varepsilon)$ définis par récurrence comme solution des $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$ induisent un développement régulier, ce qui va permettre une estimation d'erreur directe. En effet, la matrice $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ étant définie par la proposition 3.3.1, on a la proposition

Proposition 4.4.3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $q_n \in \mathbb{Z}$ et une famille de fonctions $u_n^{[q]}, \mathfrak{U}_n^{[q]}$, $q = q_n \dots n+1$ indépendantes de ε telles que u_n^ε et $\mathfrak{U}_n^\varepsilon$ se décomposent sous la forme

$$\begin{aligned} u_n^\varepsilon &= \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{u_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}, & u_n^{[q]} &\in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \quad \text{et} \\ \mathfrak{U}_n^\varepsilon &= \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{\mathfrak{U}_n^{[q]}}{(\det \mathfrak{T}(\varepsilon))^q}, & \mathfrak{U}_n^{[q]} &\in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N). \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Grâce à ce résultat il est maintenant possible d'appliquer les propositions 2.6.3 et 2.6.4 qui fournissent directement une estimation d'erreur. Rappelons que nous définissons les termes \tilde{u}_n^ε d'un développement raccordé global par

$$\tilde{u}_n^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{U}_n^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{x}| < \sqrt{\varepsilon}/2 \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| > \sqrt{\varepsilon} \end{cases} \quad (4.4.5)$$

où la fonction $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ est une fonction \mathcal{C}^∞ croissante. On construit alors des champs approchés $\tilde{u}_0^\varepsilon + \varepsilon \tilde{u}_1^\varepsilon + \dots + \varepsilon^N \tilde{u}_N^\varepsilon$. Compte tenu du résultat de stabilité (4.3.2), en appliquant le théorème 2.6.1 on obtient l'estimation d'erreur suivante.

Proposition 4.4.4.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ et soient $(u_n^\varepsilon, \mathfrak{U}_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[. \quad (4.4.6)$$

De la même manière qu'avec le corollaire 3.4.1 on démontre que cette estimation d'erreur globale permet de valider des développements asymptotiques locaux dont les termes sont les u_n^ε et $\mathfrak{U}_n^\varepsilon$.

Corollaire 4.4.1.

Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_*$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendants éventuellement de N tels que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

De même pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_N$ borné et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendant de ε mais dépendant éventuellement de N tels que

$$\|\Xi_*^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \mathfrak{U}_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

4.4.4 Estimation d'erreur dans le domaine Ω tout entier

Étant donné que la fonction u^ε a été définie initialement dans le domaine Ω tout entier et puisque, par définition, le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ est l'unique solution du problème (4.2.6), on pourrait vouloir dériver des estimations telles que (4.4.6), mais dans tout Ω .

Reprenons la proposition 4.3.2. Celle-ci conduit à une majoration de $\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)}$. Rappelons que les termes \tilde{u}_n^ε ont été construits pour que le membre de droite de (4.3.10) satisfasse une certaine estimation d'erreur, conformément au raisonnement que nous avons suivi en section 2.6. Cette remarque assoit le résultat suivant,

Proposition 4.4.5.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ et soient $(u_n^\varepsilon, \lambda_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|G_\varepsilon(u_{|\Gamma_\varepsilon}^\varepsilon) - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

À la manière de ce que nous avons présenté en annexe du chapitre 3, nous prouverons en annexe de ce chapitre-ci des estimations d'erreur affinées dans le domaine Ω tout entier, en utilisant les propositions 4.4.4, 4.4.5 et 4.4.3.

Proposition 4.4.6.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ et soient $(u_n^\varepsilon, \lambda_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$. On prolonge ces fonctions dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ en posant

$$u^\varepsilon = G_\varepsilon(u_{|\Gamma_\varepsilon}^\varepsilon) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon = G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}) \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Omega_\varepsilon.$$

Par construction on a $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ et $\tilde{u}_n^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ pour tout n . Par ailleurs pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ et $Q_N \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N/2+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

Au prochain chapitre, dans le cadre d'une analyse d'erreur numérique, nous nous servons du résultat ci-dessus dans le cas particulier $N = 0$. Si nous réécrivons l'estimation d'erreur correspondante : il existe des constantes $\kappa_0, q_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendantes de ε telle que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon|^{q_0} \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \quad (4.4.7)$$

4.4.5 Comparaison avec le développement raccordé du modèle exact

Grâce au développement raccordé de la solution u^ε de la formulation en domaines fictifs dégradée, il est maintenant possible de montrer que u^ε constitue une approximation de u^ε , en comparant leur développement raccordé respectif. Recherchons une expression explicite des premiers termes $(u_0^\varepsilon, \lambda_0^\varepsilon)$.

Avant de chercher à résoudre $(\mathfrak{P}_0^\varepsilon)$ notons que comme le problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ est stable en vertu de la proposition 4.3.2, on s'attend à ce que la solution u^ε converge vers le champ limite u^0 qui avait été défini par (1.2.1). Il s'agit de la solution du même problème que u^ε ou u^ε mais sans obstacle. Signalons que puisque u^0 est régulière on a $\ell_{-p}(u^0) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et $d^\circ \ell_0(u^0) = 0$. Nous pourrions montrer directement à partir de la stabilité comme au chapitre 3 que $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, mais ceci va également

résulter de ce qui suit

Nous allons maintenant chercher à résoudre $(\mathfrak{P}_0^\varepsilon)$. Rappelons que les profils en champ lointain sont les mêmes dans ce chapitre qu'au chapitre 3. De même nous avons remarqué que $\check{\mathfrak{S}}_0\{a\} = \mathfrak{S}_0\{a\}$ pour tout $a(R) = \alpha + \beta \ln R$. Le couple $(u_0^\varepsilon, \mathfrak{U}_0^\varepsilon)$ est caractérisé par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^\varepsilon \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega) \\ \Delta u_0^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u_0^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u_0^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma, \\ \ell_0(u_0^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{U}_0^\varepsilon \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \Delta \mathfrak{U}_0^\varepsilon = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \\ \check{\mu}_N[\mathfrak{U}_0^\varepsilon] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \\ \check{\pi}_N \left[\frac{\partial \mathfrak{U}_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} + T_{\Gamma_N} \mathfrak{U}_0^\varepsilon \right] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (4.4.8)$$

On peut rechercher u_0^ε et $\mathfrak{U}_0^\varepsilon$ sous la forme

$$u_0^\varepsilon = \mathfrak{s}_0\{\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \ln r\} + u^0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_0^\varepsilon = \check{\mathfrak{S}}_0\{L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \ln R\} = \mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \ln R\}$$

Nous avons laissé une indétermination sur $\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)$ et $L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon)$. En recherchant u_0^ε et $\mathfrak{U}_0^\varepsilon$ sous cette forme, toutes les équations (4.4.8) sont satisfaites sauf éventuellement l'équation de raccord. Nous choisissons donc $\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)$ et $L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon)$ pour que cette dernière soit satisfaite. Puisque $d^\circ \ell_0(u_0^\varepsilon) = d^\circ L_0(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \leq 1$, nous sommes donc amenés à imposer

$$\left\{ \begin{array}{l} \ell_0^{(0)}(u_0^\varepsilon) = L_0^{(0)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) + \ln(\varepsilon) L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \\ \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) = L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \end{array} \right. \iff \mathfrak{T}(\varepsilon) \cdot \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ell_0(u^0) \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ qui intervient dans ces équations de raccord est bien la même que dans la proposition 3.3.1 car les profils $\mathfrak{s}_0\{\ln r\}$ et $\check{\mathfrak{S}}_0\{\ln R\} = \mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ sont les mêmes. Puisque pour ε assez petit la matrice $\mathfrak{T}(\varepsilon)$ est inversible, on obtient en conclusion que

$$\begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \begin{bmatrix} \ln(\varepsilon) - L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) & 1 \\ -\ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -u^0(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(\mathfrak{U}_0^\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

Ceci nous permet d'une part d'en déduire l'expression de u_0^ε et $\mathfrak{U}_0^\varepsilon$. On constate d'autre part que leur expression est identique à celles des termes d'ordre 0 dans le développement raccordé de u^ε . En effet on a (comparer avec (3.5.1))

$$u_0^\varepsilon = u_0^\varepsilon = u^0 - u^0(0) \frac{\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \quad \text{et} \quad \mathfrak{U}_0^\varepsilon = \mathfrak{U}_0^\varepsilon = -u^0(0) \frac{\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)}. \quad (4.4.10)$$

Par contre il n'y a aucune raison pour que les ordres supérieurs des développements raccordés de u^ε et u^ε coïncident : *a priori* $u_1^\varepsilon \neq u_1^\varepsilon$ et $\mathfrak{U}_1^\varepsilon \neq \mathfrak{U}_1^\varepsilon, \dots$ etc. Ce qui précède montre que u^ε est bien une approximation de u^ε puisque, en combinant les corollaires 3.4.1 et 4.4.1, on obtient une estimation d'erreur.

Proposition 4.4.7.

Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ il existe $\kappa_0, \varepsilon_0, q_0 > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_0 \varepsilon |\ln \varepsilon|^{q_0} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

En proposant le problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ comme modèle simplifié nous avons donc atteint l'objectif que nous nous étions fixé au début de ce chapitre. En effet u^ε est une approximation de u^ε et le problème (4.2.6) qui la caractérise est bien plus simple que le problème (4.1.5) au sens où l'espace de multiplicateurs de Lagrange a été considérablement réduit : on passe de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ (dimension infinie) à $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ (dimension 1).

4.5 Modèle approché pour la trace de la dérivée normale

Au chapitre 3 nous avons dérivé un développement raccordé de $p^\varepsilon = n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u^\varepsilon$ sur Γ_ε . Pour ceci nous avons eu seulement à démontrer la proposition 3.6.1 sur la stabilité de la dérivée normale, et ensuite nous avons réutilisé le développement raccordé de u^ε . Nous allons faire de même ici en nous intéressant à

$$p^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) + T_{\Gamma_\varepsilon}(u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})$$

qui intervient dans la formulation en domaines fictifs dégradée (4.2.6). Nous en dériverons un développement raccordé au sens de la norme

$$|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} := \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_N)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Xi_\varepsilon^* v} \right|}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}}, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon). \quad (4.5.1)$$

4.5.1 Stabilité de la trace de la dérivée normale

Pour démontrer un résultat de stabilité convenable, nous devons cette fois procéder en deux temps. Tout d'abord nous établissons une estimation sur l'opérateur $T_{\Gamma_\varepsilon} : H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$.

Lemme 4.5.1.

Il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{\Gamma_\varepsilon} v \, d\Gamma_\varepsilon \right| \leq \kappa \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Choisissons un $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire. On commence par utiliser la définition de $T_{\Gamma_\varepsilon} v$ donnée par (4.3.2), on applique une formule de Green dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ en testant contre la fonction constante égale à 1,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} T_{\Gamma_\varepsilon} v \, d\Gamma_\varepsilon = - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \Delta G_\varepsilon(v) = - \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} \underbrace{(\Delta G_\varepsilon(v) + \varpi^2 G_\varepsilon(v))}_{=0} + \varpi^2 \int_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} G_\varepsilon(v) = \varpi^2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N} \Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon(v) \quad (4.5.2)$$

Pour démontrer le résultat annoncé il suffit donc de majorer $\|\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)}$. On écrit $\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon(v) = \Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon \Xi_\varepsilon^\varepsilon(\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} v)$ en vue d'utiliser les propriétés de $\varepsilon \rightarrow \Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon \Xi_\varepsilon^\varepsilon$ que nous avons dérivées au §4.3.2. Nous avons vu en effet que, comme fonction à valeur dans l'espace des opérateurs continus de $H^{1/2}(\Gamma_N)$ dans $H^1(\Delta; \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)$, l'application $\varepsilon \mapsto \Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon \Xi_\varepsilon^\varepsilon$ est développable en série entière au voisinage de 0 cf (4.3.6). Ainsi, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε et de v telle que

$$\|\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} G_\varepsilon(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)} \leq \kappa \|\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (4.5.3)$$

Notons que $\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1}(\Omega_\varepsilon) \subset \Omega_N$ et que l'application trace de $H^1(\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1}(\Omega_\varepsilon))$ dans $H^{1/2}(\Gamma_N)$ est continue avec une constante de continuité indépendante de ε . On voit donc finalement qu'il existe des constantes $\kappa, \kappa' > 0$ indépendantes de ε telle que

$$\|\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \leq \kappa \|\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1} v\|_{H^1(\Xi_\varepsilon^{\varepsilon, -1}(\Omega_\varepsilon))} \leq \frac{\kappa'}{\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \quad (4.5.4)$$

En réunissant les inégalités (4.5.2), (4.5.3) et (4.5.4), ceci permet de terminer la preuve. ■

Nous démontrons à présent le résultat de stabilité utile directement pour dériver un développement raccordé de p^ε . Il est à noter que le membre de droite de l'estimation ci-dessous est le même que dans la proposition 4.3.2.

Proposition 4.5.1.

Il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ on ait (avec la norme définie par (4.5.1)),

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \left\| \Delta u + \omega^2 u \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} \right. \\ \left. + \left| \check{\mu}_\varepsilon[u] \right| + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\}$$

Preuve :

Choisissons un $u \in H^2(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire mais fixé jusqu'à la fin de la preuve. Avec la projection $\check{\pi}_\varepsilon$ nous décomposons le terme à estimer en deux morceaux. Par inégalité triangulaire on a,

$$|p|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq | \check{\pi}_\varepsilon[p] |_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} + \left| \frac{\check{p}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_0\{\ln(R)\} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \text{avec } p = \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u$$

En utilisant (4.2.2), la définition (4.5.1) et le fait que $H^{1/2}(\Gamma_N)$ s'injecte continuellement dans $L^2(\Gamma_N)$, on obtient $\kappa > 0$ indépendant de ε et u tel que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon[p] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} + \kappa | \check{p} | \\ \leq \kappa \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon[p] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} + \kappa \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{\Gamma_\varepsilon} u \, d\Gamma_\varepsilon \right| + \kappa \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \, d\Gamma_\varepsilon \right| \quad (4.5.5)$$

Au vu de l'estimation que nous cherchons à démontrer, il est clair qu'il suffit d'obtenir une majoration convenable des deux termes qui composent $| \check{p} |$. En utilisant la proposition 4.3.2 et le lemme 4.5.1 on voit qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} T_{\Gamma_\varepsilon} u \right| \leq \kappa \left\{ \left\| \Delta u + \omega^2 u \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left| \check{\mu}_\varepsilon[u] \right| + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\}$$

Il ne reste qu'à majorer le dernier terme du membre de droite de (4.5.5). Pour cela on applique une formule de Green dans Ω_ε ,

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \, d\Gamma_\varepsilon = - \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} = - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta u + \omega^2 u) + \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u + \int_\Gamma \left(\frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right) - \int_\Gamma T_\Gamma u \\ \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \, d\Gamma_\varepsilon \right| \leq \left\{ \left\| \Delta u + \omega^2 u \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u \right\|_{L^2(\Gamma)} + \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \right\}$$

Pour conclure il suffit d'utiliser la proposition 4.3.2 afin de majorer $\|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$. ■

4.5.2 Dérivation du développement asymptotique

Grâce à la proposition 4.5.1, nous pouvons maintenant dériver un développement asymptotique de p^ε . Rappelons en effet que les couples $(u_n^\varepsilon, \mathfrak{U}_n^\varepsilon)$ ont été construits de manière à ce que le membre de droite dans l'inégalité de la proposition 4.5.1 soit petit. Pour être plus explicite, notons pour un instant

$$\delta u_N^\varepsilon = u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \check{u}_n^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \check{u}_n^\varepsilon = (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon + \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{U}_n^\varepsilon$$

où on a rappelé la définition de la fonction χ^ε avec (4.4.5). En reprenant le raisonnement du paragraphe 2.2.5 et de la section 2.6, vu que les hypothèses **Hi, i=0...6** sont satisfaites pour le problème (4.3.4) on

voit qu'il existe $\alpha, \beta > 0$ indépendants de ε et N , et pour tout N il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tels que $\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} & \left| p^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left(\frac{\partial \tilde{u}_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} \tilde{u}_n^\varepsilon \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \\ & \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \left\{ \left\| \Delta \delta u_N^\varepsilon + \omega^2 \delta u_N^\varepsilon \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial \delta u_N^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \delta u_N^\varepsilon \right\|_{L^2(\Gamma)} \right. \\ & \quad \left. + \left| \check{\mu}_\varepsilon [\delta u_N^\varepsilon] \right| + \left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \varepsilon \check{\pi}_\varepsilon \left[\frac{\partial \delta u_N^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} \delta u_N^\varepsilon \right] \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \right\} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta} \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

ceci fournit directement un développement asymptotique par rapport à ε de p^ε . En effet puisque $\chi^\varepsilon = 1$ sur Γ_ε , et vu que les $\mathcal{U}_n^\varepsilon$ admettent la forme (4.4.1), on adapte facilement la preuve de la proposition 3.6.2 à partir de (4.5.6).

Proposition 4.5.2.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, Q_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendant éventuellement de N tels que

$$\left| p^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \left(\frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathcal{U}_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} \Xi_*^\varepsilon \mathcal{U}_n^\varepsilon \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

Cette proposition permet notamment de connaître le terme prépondérant de p^ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Plaçons-nous dans la situation où $u^0(0) \neq 0$, la fonction u^0 étant le champ limite défini par (1.2.1). Dans ce cas on a donc $\mathcal{U}_0^\varepsilon \neq 0$ d'après (4.4.10). Rappelons également que comme $\mathcal{U}_0^\varepsilon$ est proportionnel à $\check{\mathfrak{S}}_0\{\ln R\} = \mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ on a $\mathcal{U}_0^\varepsilon = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N$ (à l'intérieur de l'obstacle). On en tire donc $T_{\Gamma_\varepsilon} \mathcal{U}_0^\varepsilon = 0$. Puisqu'on connaît grâce à (4.4.10) le comportement de $\Xi_*^\varepsilon(n_{\Gamma_N} \cdot \nabla \mathcal{U}_0^\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ on en déduit que, lorsque $u^0(0) \neq 0$, il existe $\kappa_-, \kappa_+, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε telles que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on ait

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \leq |p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \quad \text{avec} \quad p^\varepsilon = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} + T_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon \quad \text{lorsque } u^0(0) \neq 0. \quad (4.5.7)$$

À l'instar de p^ε au chapitre 3, on tire de ces inégalités une estimation d'erreur relative pour le développement de p^ε à l'ordre 0 : si $u^0(0) \neq 0$ il existe $\kappa_0, \varepsilon_0, q_0 > 0$ indépendants de ε tels que

$$\left| p^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} \Xi_*^\varepsilon \left(\frac{\partial \mathcal{U}_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_N}} \right) \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^{q_0} |p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\quad \text{lorsque } u^0(0) \neq 0. \quad (4.5.8)$$

Signalons que lorsque $u^0(0) = 0$ les estimations d'erreur de la proposition 4.5.2 permettent aussi de dériver le comportement de p^ε , mais le calcul est un tout petit peu plus compliqué. Dans le cas $u^0(0) = 0$ on a $|p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} = o(|\ln \varepsilon|^{-1})$. À partir de la proposition 4.5.2 on démontre facilement le corollaire suivant

Corollaire 4.5.1.

Quel que soit u^0 il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε mais dépendants de u^0 tels que

$$|p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_0}{|\ln \varepsilon|} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

4.5.3 Interprétation en terme d'équation intégrale

Nous pouvons maintenant comparer les développements obtenus pour p^ε et p^ε . Intéressons-nous simplement aux termes d'ordre 0 des développements. Rappelons que, comme nous l'avons constaté avec (4.4.3), on a $\mathfrak{S}_0\{\ln R\} = \check{\mathfrak{S}}_0\{\ln R\}$, ce qui entraîne $U_0^\varepsilon = \mathcal{U}_0^\varepsilon$. Dans le cas où $u^0(0) \neq 0$, en rassemblant les deux estimations (3.6.4) et (4.5.8), on obtient qu'il existe $\kappa, q > 0$ indépendant de ε tel que

$$|p^\varepsilon - p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^q |p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \text{lorsque } u^0(0) \neq 0. \quad (4.5.9)$$

Afin d'interpréter ce résultat, rappelons qu'il est possible de définir p^ε autrement que suivant (4.1.4). En effet comme $u^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$, p^ε est le saut de dérivée normale de u^ε sur Γ^ε . D'après des résultats classiques sur les équations intégrales, que l'on peut trouver dans [29, 91] par exemple, p^ε est aussi caractérisé comme l'unique solution d'une équation intégrale par potentiel de simple couche,

$$p^\varepsilon \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad (4.5.10)$$

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \bar{q}(\mathbf{x}) \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} u^0(\mathbf{x}) \bar{q}(\mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Dans l'équation (4.5.10) la fonction p^ε apparaît comme une inconnue appartenant à un espace de dimension infinie. On peut de même caractériser p^ε comme l'unique solution d'une équation par potentiel de simple couche.

$$p^\varepsilon \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon), \quad (4.5.11)$$

$$\iint_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \bar{q}(\mathbf{x}) \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} u^0(\mathbf{x}) \bar{q}(\mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Dans cette seconde équation p^ε appartient à l'espace $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ qui est de dimension 1. Ainsi l'inconnue dans cette nouvelle équation est ... juste le nombre $\check{p}^\varepsilon \in \mathbb{C}$. L'équation (4.5.11) apparaît alors comme triviale. Pour s'en convaincre introduisons la notation

$$(\check{\mu}_\varepsilon \times \overline{\check{\mu}_\varepsilon}) \left[H_0^{(1)}(\omega|\cdot - \cdot|) \right] := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(\mathbf{x}) \overline{\frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(\mathbf{x}')} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) \in \mathbb{C},$$

En utilisant la relation (4.2.3) dans le second membre et en simplifiant par \check{q} de chaque côté de l'équation (4.5.11), on voit que celle-ci prend alors la forme d'une simple équation du premier degré,

$$\check{p}^\varepsilon \cdot (\check{\mu}_\varepsilon \times \overline{\check{\mu}_\varepsilon}) \left[H_0^{(1)}(\omega|\cdot - \cdot|) \right] = -\check{\mu}_\varepsilon[u^0]. \quad (4.5.12)$$

Notons que l'équation ci-dessus apparaît d'autant plus simple que nous avons vu avec (4.2.5) que $\check{\mu}_\varepsilon[u^0] = u^0(0) + O(\varepsilon)$. Pour résumer, si $u^0(0) \neq 0$, l'estimation d'erreur (4.5.9) nous permet, en commettant une petite erreur en $O(\varepsilon)$, de ramener l'équation (4.5.10) à l'équation scalaire triviale (4.5.12).

4.A Rappels sur les problèmes de type point-selle

Dans cette annexe nous désirons rappeler un résultat présenté au théorème 1.1 chapitre II de [15] sur l'existence et l'unicité des solutions de problèmes de type point-selle. Nous ne donnons aucune démonstration et renvoyons le lecteur à [15] pour tous les détails.

Avertissement : Dans cet annexe nous faisons référence à des formes sesquilineaires $a(,)$ et $b(,)$ et à un opérateur A sans lien *a priori* avec les formes bilinéaires et les opérateurs notés de la même manière dans le reste de cette thèse.

Théorème 4.A.1.

Soient deux espaces de Hilbert \mathbb{V} et \mathbb{Q} munis chacun des normes respectives $\| \cdot \|_{\mathbb{V}}$ et $\| \cdot \|_{\mathbb{Q}}$. On notera leur duals topologiques respectifs \mathbb{V}' et \mathbb{Q}' et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}}$ les crochets de dualité associés. Soient deux formes sesquilineaires continues $a : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$ et $b : \mathbb{Q} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$|a(w, v)| \leq \|a\| \cdot \|v\|_{\mathbb{V}} \|w\|_{\mathbb{V}} \quad \text{et} \quad |b(q, v)| \leq \|b\| \cdot \|q\|_{\mathbb{Q}} \|v\|_{\mathbb{V}}$$

On considère enfin deux éléments $f \in \mathbb{V}'$ et $g \in \mathbb{Q}'$. On s'intéresse alors au problème

Trouver $(u, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{Q}$ tels que

$$\begin{cases} a(u, v) + b(p, v) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}} & \forall v \in \mathbb{V} \\ b(q, u) = \langle g, q \rangle_{\mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}} & \forall q \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (4.A.1)$$

Sous ces hypothèses le problème (4.A.1) admet un unique couple solution $(u, p) \in \mathbb{V} \times \mathbb{Q}$ si et seulement si trois conditions dites "conditions inf-sup" sont satisfaites. Étant donné l'espace $\mathbb{V}_b = \{v \in \mathbb{V} \mid b(q, v) = 0 \forall q \in \mathbb{Q}\}$, ces conditions s'écrivent : il existe $\alpha_0, \beta_0 > 0$ tels que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_b} \sup_{w \in \mathbb{V}_b} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{\mathbb{V}} \|w\|_{\mathbb{V}}} \geq \alpha_0, \quad \inf_{w \in \mathbb{V}_b} \sup_{v \in \mathbb{V}_b} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{\mathbb{V}} \|w\|_{\mathbb{V}}} \geq \alpha_0 \quad \text{et} \quad \inf_{q \in \mathbb{Q}} \sup_{v \in \mathbb{V}} \frac{|b(q, v)|}{\|q\|_{\mathbb{Q}} \|v\|_{\mathbb{V}}} \geq \beta_0 \quad (4.A.2)$$

Si ces conditions sont satisfaites alors le couple solution (u, p) dépend continuellement des données et satisfait aux inégalités suivantes

$$\|u\|_{\mathbb{V}} \leq \frac{1}{\alpha_0} \|f\|_{\mathbb{V}'} + \frac{1}{\beta_0} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0}\right) \|g\|_{\mathbb{Q}'} \quad \text{et} \quad \|p\|_{\mathbb{Q}} \leq \frac{1}{\beta_0} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0}\right) \|f\|_{\mathbb{V}'} + \frac{\|a\|}{\beta_0^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0}\right) \|g\|_{\mathbb{Q}'}$$

$$\text{avec} \quad \|f\|_{\mathbb{V}'} = \sup_{v \in \mathbb{V}} \frac{\langle f, v \rangle_{\mathbb{V}' \times \mathbb{V}}}{\|v\|_{\mathbb{V}}} \quad \text{et} \quad \|g\|_{\mathbb{Q}'} = \sup_{q \in \mathbb{Q}} \frac{\langle g, q \rangle_{\mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}}}{\|q\|_{\mathbb{Q}}}.$$

Insistons sur le fait que les conditions inf-sup portant sur $a(,)$ doivent être satisfaites sur \mathbb{V}_b et non sur \mathbb{V} . Les deux conditions inf-sup sur $a(,)$ traduisent l'injectivité et la surjectivité d'un opérateur associé à $a(,)$ via un produit scalaire sur \mathbb{V}_b .

Discrétisation des problèmes de type point-selle Énonçons à présent un résultat d'approximation pour la discrétisation des problèmes de type point-selle que l'on trouve également dans [15]. Nous nous servirons surtout de ce résultat au chapitre 5. Le théorème que nous écrivons ci-dessous est en fait une forme condensée des propositions 2.6, 2.7 et du théorème 2.1 de [15].

Théorème 4.A.2.

Avec les mêmes notations qu'au théorème 4.A.1, soient des sous-espaces de dimension finie $\mathbb{V}^h \subset \mathbb{V}$ et $\mathbb{Q}^h \subset \mathbb{Q}$ munis respectivement des normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_Q$, indexés par $h > 0$ (paramètre de discrétisation). Considérons le problème suivant analogue discret de (4.A.1),

Trouver $(u_h, p_h) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{Q}^h$ tels que

$$\begin{cases} a(u_h, v) + b(p_h, v) = \langle f, v \rangle_{\mathbb{V} \times \mathbb{V}} \quad \forall v \in \mathbb{V}^h \\ b(q, u_h) = \langle g, q \rangle_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}} \quad \forall q \in \mathbb{Q}^h \end{cases} \quad (4.A.3)$$

Considérons enfin l'espace $\mathbb{V}_b^h = \{v \in \mathbb{V}^h \mid b(q, v) = 0, \forall q \in \mathbb{Q}^h\}$. Supposons qu'il existe des constantes $\alpha'_0, \beta'_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que les conditions inf-sup discrètes suivantes soient satisfaites pour tout $h \in]0, h_0[$,

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_b^h} \sup_{w \in \mathbb{V}_b^h} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} \geq \alpha'_0, \quad \inf_{w \in \mathbb{V}_b^h} \sup_{v \in \mathbb{V}_b^h} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_V \|w\|_V} \geq \alpha'_0 \quad \text{et} \quad \inf_{q \in \mathbb{Q}^h} \sup_{v \in \mathbb{V}^h} \frac{|b(q, v)|}{\|q\|_Q \|v\|_V} \geq \beta'_0 \quad (4.A.4)$$

Alors le problème discret (4.A.3) admet une unique solution (u_h, p_h) qui dépend continuellement des données g et f . De plus on a les estimations

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha'_0}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta'_0}\right) \inf_{v_h \in \mathbb{V}^h} \|u - v_h\|_V + \frac{\|b\|}{\alpha'_0} \inf_{q_h \in \mathbb{Q}^h} \|p - q_h\|_V. \\ \|p - p_h\|_Q &\leq \frac{\|a\|}{\beta'_0} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha'_0}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta'_0}\right) \inf_{v_h \in \mathbb{V}^h} \|u - v_h\|_V \\ &\quad + \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta'_0} + \frac{\|a\|}{\beta'_0} \frac{\|b\|}{\alpha'_0}\right) \inf_{q_h \in \mathbb{Q}^h} \|p - q_h\|_V. \end{aligned} \quad (4.A.5)$$

4.B Estimations d'erreur affinées dans le domaine Ω tout entier

Le but de cette annexe est de démontrer la proposition 4.4.6 qui fournit des estimations d'erreurs pour le développement raccordé de u^ε . Ces estimations sont plus fines que celles de la proposition 4.4.4 et elles valent dans tout le domaine Ω . Pour ceci nous combinerons les résultats des propositions 4.4.4, 4.4.5 et 4.4.3.

Le raisonnement que nous suivrons s'inspire beaucoup de celui de l'annexe 3.A. Tout d'abord on peut dire comme au chapitre 3 qu'en injectant la forme (4.4.4) dans les équations satisfaites par les couples $(\tilde{u}_n^\varepsilon, \tilde{U}_n^\varepsilon)$, on voit sans peine que

$$\Delta u_n^{[q]} + \omega^2 u_n^{[q]} = -\delta_n^0 f \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \Delta \mathfrak{U}_n^{[q]} = -\omega^2 \mathfrak{U}_{n-2}^{[q]} \quad \text{dans } \Omega_N \quad \forall n, q \in \mathbb{Z}.$$

Ceci démontre, par application des propositions 2.3.1 et 2.4.2 que chaque $u_n^{[q]}$ admet un développement par rapport à r au voisinage de 0 suivant les puissances entières de r , et que chaque $\mathfrak{U}_n^{[q]}$ admet un développement par rapport à R au voisinage de l'infini suivant les puissances entières de R . Ceci permet alors de démontrer un analogue de la proposition 3.A.1.

Proposition 4.B.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que $\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \varepsilon^{-n/2}, \forall \varepsilon \in]0, 1[$.

Nous ne démontrerons pas cette proposition car sa preuve est quasiment identique à celle de la proposition 3.A.1. Notons que cette estimation nous donne une information sur "la taille des \tilde{u}_n^ε dans Ω_ε ". Nous démontrons à présent une autre propriété sur les \tilde{u}_n^ε qui ressemble à celle-ci, mais il s'agit cette fois d'une estimation dans l'intérieur de l'obstacle.

Proposition 4.B.2.

L'opérateur G_ε étant défini par (4.3.1), pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_0, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Preuve :

Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ fixé jusqu'à la fin de la preuve. Rappelons dans un premier temps que suivant (4.4.5) on a par définition $\tilde{u}_n^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{U}_n^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon)u_n^\varepsilon$. Puisque $\chi^\varepsilon = 1$ sur Γ_ε , on a donc $\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = (\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{U}_n^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon} = \Xi_*^\varepsilon(\mathfrak{U}_n^\varepsilon|_{\Gamma_N})$. On a donc

$$\|G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq \|\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)} \leq \|(\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon)(\mathfrak{U}_n^\varepsilon|_{\Gamma_N})\|_{H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_N)}$$

Rappelons à présent que d'après l'identité (4.3.6), l'opérateur $\Xi_*^{\varepsilon,-1} G_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon$ est développable en série entière par rapport à ε . En particulier cet opérateur est borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Ainsi il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ dépendants éventuellement de n mais indépendants de ε tels que

$$\|G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_0 \|\mathfrak{U}_n^\varepsilon|_{\Gamma_N}\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Pour conclure, il reste à remplacer $\mathfrak{U}_n^\varepsilon$ par son expression fournie par (4.4.4). On obtient

$$\|G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon})\|_{H^1(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sum_{q=q_n}^{n+1} \frac{\|\mathfrak{U}_n^{[q]}\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}}{|\det \mathfrak{T}(\varepsilon)|^q}.$$

Il est clair que le membre de droite dans l'inégalité ci-dessus reste borné lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ car il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que $\kappa_+ |\ln \varepsilon| \geq |\det \mathfrak{T}(\varepsilon)| \geq \kappa_- |\ln \varepsilon|$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

En réunissant les résultats des propositions 4.B.1 et 4.B.2 on obtient une borne pour $\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$. De la même manière qu'avec la proposition 3.4.2, nous pouvons utiliser ce résultat pour aboutir à des estimations d'erreur optimales dans Ω tout entier, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition 4.4.6.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ et soient $(u_n^\varepsilon, \mathfrak{U}_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $(\mathfrak{P}_n^\varepsilon)$. On prolonge ces fonctions dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ en posant

$$u^\varepsilon = G_\varepsilon(u_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon = G_\varepsilon(\tilde{u}_n^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}) \quad \text{dans} \quad \Omega \setminus \Omega_\varepsilon.$$

Par construction on a $u^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ et $\tilde{u}_n^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ pour tout n . Par ailleurs pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ et $Q_N \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N/2+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

preuve :

Choisissons un $N \in \mathbb{N}$ fixé jusqu'à la fin de la preuve. Reprenons le résultat des propositions 4.4.4 et 4.4.5, et en particulier reprenons la même notation pour les constantes α et β intervenant dans les estimations de cette proposition. Soit $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N' + \beta > N/2 + 1/2$. D'après les propositions 4.4.4, 4.4.5, 4.B.1, et 4.B.2 il existe des constantes $\kappa', \kappa_n > 0, n = N+1 \dots N'$ et des entiers $p_n \in \mathbb{N}, n = N+1 \dots N'$ indépendantes de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a

$$\begin{aligned} \left\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} &\leq \left\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N'} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \kappa' \varepsilon^{\alpha N' + \beta} + \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa' \varepsilon^{N/2+1/2} + \sum_{n=N+1}^{N'} \varepsilon^n \kappa_n \varepsilon^{-n/2} |\ln \varepsilon|^{p_n} \end{aligned}$$

Attention, il est clair que la constante κ' dépend de N' et donc de N car nous avons choisi $N' \geq N$. En choisissant $\kappa'' = \max(\kappa', \kappa_{N+1}, \dots, \kappa_{N'})$ et $p'' = \max(p_{N+1}, \dots, p_{N'})$ on obtient la conclusion,

$$\left\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa'' |\ln \varepsilon|^{p''} \varepsilon^{N/2+1/2} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

■



CHAPITRE 5

Méthode numérique pour la diffraction par un petit obstacle et étude théorique du schéma de Holland

Introduction

Au chapitre 3 nous nous sommes intéressés à l'étude du comportement lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de la solution u^ε du problème dit "exact" (\mathcal{P}^ε) défini par (3.1.2). Dans le chapitre 4 nous avons déduit de ce comportement un autre problème (\mathfrak{P}^ε) dit approché, défini par (4.3.4), dont nous avons montré que la solution notée u^ε approche correctement u^ε au sens où $u^\varepsilon = u^\varepsilon + O(\varepsilon)$ pour la topologie $H_{\text{loc}}^1(\Omega_\star)$. Nous allons maintenant nous intéresser au calcul numérique de u^ε . Comme par construction (espace de multiplicateurs de Lagrange restreint) le problème (\mathfrak{P}^ε) est plus simple que le problème (\mathcal{P}^ε), nous proposons de calculer numériquement u^ε plutôt que u^ε .

Ce chapitre s'intéressera à différents schémas numériques susceptibles de calculer la fonction u^ε . Le contexte applicatif dans lequel s'inscrit cette thèse a largement suggéré certaines caractéristiques des méthodes numériques que nous avons envisagées. Nous nous plaçons en effet dans la situation où l'on dispose d'un code de calcul général basé sur une méthode *volumique* standard (différences finies ou éléments finis par exemple...) que l'on consent à modifier un peu afin que ce code puisse prendre en compte efficacement la présence d'un petit objet diffractant. Par "modifier un peu" on entend ne pas apporter de changement majeur dans la méthode de calcul utilisée.

Par ailleurs on se refuse à adapter le maillage à la présence des petits objets diffractants; on suppose que le maillage a été généré complètement indépendamment comme si les petits obstacles n'existaient pas. Cette exigence interdit au passage l'usage du raffinement de maillage local. Nous allons même supposer que la taille h caractéristique des mailles est bien supérieure au diamètre des petits objets diffractants

$$\varepsilon \ll h.$$

Une méthode performante répondant à toutes ces exigences existe déjà. Il s'agit d'un schéma que Holland et Simpson ont introduit dans [66] pour prendre en compte la présence de fils minces dans un code de calcul FDTD (différences finies) pour les équations de Maxwell. Cette méthode de couplage relie les équations volumiques d'un schéma FDTD classique dans lesquelles interviennent les champs électriques et magnétiques avec une équation d'onde 1D sur le fil. En suivant les idées de [26], il est possible de proposer une version scalaire bidimensionnelle de ce schéma de couplage que nous présenterons en

section 5.4. Pour décrire ici brièvement ce schéma, disons qu'il repose sur trois ingrédients principaux :

- **Hypothèse de fil mince** Le courant et la charge dans le fil, et le champ électrique sur le bord sont constants sur chaque section du fil, et leur direction est tangente à la ligne médiane du fil.
- **Hypothèse de quasi-staticité** Les courants de déplacement (le terme en ∂_t dans l'équation de Maxwell-Ampère) sont négligeables au voisinage du fil.
- **Paramètre de couplage** Notons s l'abscisse curviligne sur la ligne médiane I du fil. Soit $\mathbf{i}(s, t)$, $q(s, t)$ et $\mathbf{E}(s, t)$ les valeurs respectives du courant, de la charge et du champ électrique sur le bord du fil. Pour un certain nombre $\Lambda_{\epsilon, h}$ "bien choisi" indépendant de t , Holland écrit les équations (c étant la célérité de la lumière) :

$$\mathbf{E} - \Lambda_{\epsilon, h} \left(\frac{\partial \mathbf{i}}{\partial t} - c^2 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{i}}{\partial s} = 0 \quad \text{sur } I.$$

La question principale qui se pose est la valeur que doit prendre le paramètre $\Lambda_{\epsilon, h}$. Celui-ci est souvent appelé paramètre de Holland ou inductance linéique. En pratique il dépend du maillage et est choisi à l'aide d'un calibrage. Il n'existe à notre connaissance ni théorie, ni moyen systématique de déterminer sa valeur. Ce schéma est utilisé assez largement, car il est à notre connaissance le seul schéma volumique capable de prendre en compte les fils minces avec précision.

On trouve dans la littérature d'ingénieur des articles intéressés à l'étude de cette méthode dans le cadre FDTD d'origine, ou dans le cadre d'une méthode appelée TLM (transmission line modeling) qui correspond à une discrétisation de type volumes finis des équations de Maxwell cf [19, 40, 95, 111]. La plupart de ces articles proposent des formules heuristiques pour déterminer la valeur du paramètre de Holland. En effet déterminer "la bonne valeur" du paramètre de Holland est cruciale car, comme cela a été montré dans [26], la précision globale du schéma est très sensible aux variations de ce paramètre.

Si la communauté ingénieur s'est intéressée de près à la prise en compte de détail géométriques dans le domaine de calcul, en revanche l'effet de petits obstacles sur la résolution d'un problème elliptique n'a pas été fréquemment étudié dans la littérature du point de vue de l'analyse numérique. Sur ce sujet précis nous souhaitons citer deux articles. Tout d'abord dans [21] les auteurs étudient l'effet de petits disques avec une condition de Dirichlet ou mixte sur la résolution d'un problème de Laplace, mais ce n'est pas le sujet principal de cet article. Dans la deuxième référence [32], les auteurs s'intéressent à l'effet d'une petite perturbation du bord du domaine de calcul sur la résolution d'un problème d'électrostatique. Chacune de ces deux méthodes requiert un traitement spécial de la perturbation par un calcul préliminaire. Le schéma enrichi que nous présentons diffère de ces deux méthodes dans le fait qu'il ne réclame qu'un seul calcul.

La méthode de calcul "standard générale" que nous considérons dans ce chapitre sera la méthode des éléments finis. Nous proposerons dans un premier temps un schéma éléments finis classique pour calculer u^ϵ . Comme nous nous refusons à adapter le maillage au petit obstacle, nous aurons recours à une version discrète de la formulation en domaines fictifs (4.2.6). Nous présenterons les résultats de simulations avec un tel schéma et montrerons que celui-ci est verrouillant, c'est-à-dire que les performances de ce schéma se dégradent significativement lorsque le rapport ϵ/h tend vers 0. Ceci rendra irrecevable un schéma par éléments finis complètement standard.

Nous proposerons donc d'enrichir l'espace d'approximation à l'aide d'une fonction de forme issue des calculs d'analyse asymptotique des chapitres 3 et 4. Cette méthode est très proche de la méthode du complément singulier (ou de la fonction singulière) utilisée en électromagnétisme pour obtenir la consistance d'un schéma dans le cas où le bord du domaine contient des coins ou des arêtes rentrantes. Il existe une littérature étendue sur le sujet [13, 22, 34, 35, 58, 69] par exemple. Nous montrerons que

le schéma dit "de Galerkin enrichi" correspondant est non-verrouillant au sens où ses performances ne se dégradent que très peu lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par ailleurs nous étudierons en détail, d'un point de vue théorique, l'incidence de la fonction de forme additionnelle sur les propriétés d'approximation du schéma en démontrant notamment un résultat de consistance.

Finalement, suivant la démarche de [26], nous présenterons une version de la méthode de Holland adaptée à l'équation de Helmholtz bidimensionnelle avec petit obstacle. Nous présenterons une expérience numérique mettant en évidence la précision d'une telle méthode pourvu qu'elle soit calibrée convenablement. Nous montrerons ensuite que le schéma de Holland est, à une erreur d'approximation près, une reformulation du schéma de Galerkin enrichi. Ceci est à notre connaissance un résultat nouveau qui révèle, au moins en partie, la nature du schéma de Holland. Celui-ci apparaît comme une méthode de fonction singulière sous une forme cachée. Ceci mènera par ailleurs à une formule théorique pour le calcul du paramètre associé à la méthode de Holland.

Nous terminerons ce chapitre en présentant les résultats de diverses expériences numériques portant sur la dépendance en fréquence du calibrage de la méthode de Holland, sur la sensibilité de ce calibrage vis-à-vis de la position de l'obstacle dans le maillage, et enfin sur les problèmes en régime instationnaire.

5.1 Discrétisation standard du modèle approché

Dans cette section nous présentons une première approche standard pour calculer numériquement la solution u^ε de $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$. Nous disposons de deux formulations pour ce problème : (4.3.4) et (4.2.6). L'inconvénient de la formulation (4.3.4) est d'être posée dans Ω_ε . Discrétiser (4.3.4) pour calculer u^ε , suppose de construire un maillage approchant Ω_ε , ce qui signifie adapter le maillage au petit obstacle et va donc à l'encontre de nos exigences. Nous choisirons donc de discrétiser la formulation en domaines fictifs (4.2.6) qui est cette fois posée dans Ω tout entier. Rappelons que l'intérêt initial de la méthode des domaines fictifs est de pouvoir résoudre un problème sans adapter le maillage au domaine dans lequel les équations de départ sont posées.

5.1.1 Le maillage et l'espace d'approximation standard

Nous décrivons ici la discrétisation que nous employons compte tenu des remarques que nous avons faites en introduction. Nous aurons recours à une discrétisation par éléments finis standard. Pour une description détaillée des principes de la méthode des éléments finis nous renvoyons le lecteur à [97, 11] pour une introduction didactique, et à [23] pour une présentation détaillée. Concernant la résolution numérique des problèmes de type point-selle citons également [15]. Pour l'étude qui va suivre, il pourra s'agir d'éléments triangulaires ou quadrangulaires. Il semble que les résultats que nous présenterons peuvent aussi bien s'adapter à des schémas du type différences finis, ou Galerkin discontinu par exemple. Nous considérons une suite $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de triangulations de $\bar{\Omega}$ dans laquelle le paramètre h est destiné à tendre vers 0 et désignera le pas du maillage,

$$h = \max \{ \text{diam}(K) \mid K \in \mathcal{T}_h \} \rightarrow 0. \quad (5.1.1)$$

On notera $\Omega_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$. Dans la suite nous supposons connue de notre lecteur la notion de triangulation régulière d'un domaine cf [11, 23, 97] pour une définition détaillée de cette notion. Il s'agira d'une hypothèse. Nous supposerons par ailleurs que maillage ne contient pas de raffinement local.

M1 : La famille de triangulations $(\mathcal{T}_h)_{h \in]0,1[}$ est régulière. De plus il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de h tel que

$$\begin{aligned} \kappa_- h &\leq \rho_K \leq \kappa_+ h \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall h \in]0,1[, \\ \text{avec } \rho_K &:= \sup \{ \text{rayons des cercles inscrits dans } K \} \end{aligned}$$

Pour chaque h nous considérons une collection $(K, \Sigma_K, \Theta_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ d'éléments finis de Lagrange. D'après la définition d'une triangulation régulière, il existe un élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{\Theta})$ tel que pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$, il existe une bijection $F_K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, avec $F_K \in \mathbb{P}_k^2$ dans le cas des triangles et $F_K \in \mathbb{Q}_k^2$ dans le cas des quadrangles pour un certain $k \in \mathbb{N}$, et satisfaisant

$$K = F_K(\hat{K}), \quad \Sigma_K = F_K(\hat{\Sigma}_K) \quad \text{et} \quad \Theta_K = \{ \hat{u} \circ F_K^{-1} \mid \hat{u} \in \hat{\Theta} \}.$$

Dans nos expériences numériques $\hat{\Theta}$ correspondra à une famille de polynômes. Nous supposons que l'ordre des éléments finis utilisés est adapté à la régularité de la solution u^ε que nous désirons étudier. Suivant que nous considérons un maillage triangulaire ou quadrangulaire on aura

M2 : $\hat{\Theta} = \mathbb{P}_k$ ou \mathbb{Q}_k et avec $k =$ ordre de la méthode.

L'espace d'approximation que nous dirons "standard", qui est l'espace d'éléments finis de Lagrange classique (cf [97, 11, 23]), est défini par

$$\mathbb{V}^h := \{ v \in \mathcal{C}^0(\Omega_h) \mid v|_K \in \Theta_K \}. \quad (5.1.2)$$

C'est avec cet espace que nous allons approcher $H^1(\Omega)$. Sur \mathbb{V}^h on choisira de considérer la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega)}$. Nous noterons I_h le nombre total de degrés de liberté, c'est-à-dire $I_h = \text{card}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K)$. On suppose donnée une numérotation des degrés de libertés de sorte qu'à chaque $i \in \llbracket 1, I_h \rrbracket$ est associé de façon univoque un point $a_i \in \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$. Il est bien connu que l'on peut construire explicitement une base (ψ_i^h) de \mathbb{V}^h composé de I_h fonctions de formes que nous dirons "standard" définies par

$$\psi_i^h(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{de sorte que} \quad v = \sum_{i=1}^{I_h} v(a_i) \psi_i^h, \quad \forall v \in \mathbb{V}^h.$$

Rappelons au passage que si $v \in \mathbb{V}^h$ est telle que $v(a_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, I_h \rrbracket$ alors $v = 0$. Pour définir un élément $v \in \mathbb{V}^h$ il suffit de fixer sa valeur $v(a_i)$ en chaque a_i , $i \in \llbracket 1, I_h \rrbracket$. Nous définissons enfin l'opérateur d'interpolation de Lagrange $P_h : \mathcal{C}^0(\Omega_h) \rightarrow \mathbb{V}^h$ défini par

$$P_h v := \sum_{i=1}^{I_h} v(a_i) \psi_i^h, \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\Omega_h).$$

L'application P_h est surjective et c'est un projecteur. Ainsi on a $P_h v = v$ pour tout $v \in \mathbb{V}$. Rappelons également (cf [11, 23, 97]) que comme la triangulation \mathcal{T}_h est régulière il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que

$$\inf_{w_h \in \mathbb{V}^h} \| v - w_h \|_{H^1(\Omega_h)} \leq \| v - P_h v \|_{H^1(\Omega_h)} \leq \kappa_0 h \| v \|_{H^2(\Omega_h)}, \quad \forall v \in H^2(\Omega_h), \quad \forall h \in]0, h_0[. \quad (5.1.3)$$

Remarques au sujet de la discrétisation

En toute rigueur on a $\cup_{K \in \mathcal{T}_h} K = \Omega_h \neq \Omega$. En effet Ω_h ne constitue qu'une approximation de Ω , et ceci entraîne une erreur numérique. Cependant le code de calcul MONTJOIE que nous avons utilisé met en oeuvre des éléments isoparamétriques d'ordre aussi élevé que souhaité ce qui permet d'assurer que cette approximation géométrique ne dégrade pas l'ordre de convergence des schémas que nous proposerons lorsque le bord de Ω est très régulier (dans les expériences numériques de ce chapitre Ω est un disque). C'est la raison pour laquelle dans la suite nous confondrons Ω et $\Omega_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$.

Par ailleurs nous avons supposé plus haut que pour tout K on a $F_K \in \mathbb{P}_k^2$ (ou \mathbb{Q}_k^2). Nous imposerons en plus que $F_K \in \mathbb{P}_1^2$ (ou \mathbb{Q}_1^2) dès que $\partial K \cap \partial\Omega_h \neq \emptyset$. Ceci correspond à la situation dans laquelle nous avons réalisé nos expériences numériques, et l'hypothèse $F_K \in \mathbb{P}_k^2$ (ou \mathbb{Q}_k^2) ne se révèle "utile" que dans le cas d'éléments isoparamétriques qui n'interviennent dans notre cas que sur le bord du domaine de calcul.

Enfin dans l'étude qui suit nous ne nous sommes pas souciés des erreurs liées à la quadrature numérique des intégrales intervenant dans l'expression de $a(u, v)$ pour $u, v \in \mathbb{V}^h$. Nous supposerons que ces quantités sont calculées de manière exacte. En pratique, nous avons toujours appliqué des règles de quadrature d'ordre suffisamment élevé pour garantir que l'erreur due à la quadrature est négligeable devant les autres sources d'erreur.

5.1.2 Discrétisation associée à l'obstacle et hypothèse de maillage grossier

Puisque nous considérerons la formulation en domaines fictifs (4.2.6) qui est de type point-selle, nous devons également nous poser la question de la discrétisation de l'espace de multiplicateurs de Lagrange $\mathbb{E}_{ap}(\Gamma_\varepsilon)$. Cependant puisque $\dim(\mathbb{E}_{ap}(\Gamma_\varepsilon)) = 1$, cet espace est déjà discrétisé...

Dans la suite nous allons faire référence à une approximation discrète de u^ε . Cette approximation numérique sera notée $u^{\varepsilon, h}$. Elle dépendra en effet de deux petits paramètres : h et ε . Un réflexe naturel consiste à vouloir étudier la différence $u^\varepsilon - u^{\varepsilon, h}$ quand $h \rightarrow 0$ à ε fixé. Cependant comme nous désirons prendre en compte les résultats de notre étude asymptotique dans l'analyse d'erreur, nous allons plutôt étudier la différence $u^\varepsilon - u^{\varepsilon, h}$ lorsque $|\varepsilon| + |h| \rightarrow 0$. Pour des raisons purement techniques d'analyse mathématique cependant, nous ne pouvons pas supposer que ε et h tendent vers 0 complètement indépendamment. Nous considérons donc ε comme une fonction de h c'est-à-dire $\varepsilon = \varepsilon(h)$. Nous émettons une hypothèse sur la fonction $h \mapsto \varepsilon(h)$ qui traduit le fait que le maillage est grossier par rapport à ε . On impose

M3 : Il existe $\alpha > 0$ indépendant de h tel que $\varepsilon(h) = h^{1+\alpha}$, $\forall h \in]0, 1[$.

Notre point de vue peut paraître étrange au premier abord car une réaction naturelle consiste à trouver que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ le problème étudié est différent. Le "point de vue $\varepsilon \rightarrow 0$ " introduit seulement dans l'analyse l'approximation "petit obstacle".

5.1.3 La formulation discrète standard et son caractère bien posé

Nous appliquons maintenant la discrétisation standard décrite dans les deux paragraphes précédents à la formulation (4.2.6). Rappelons au préalable que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ avait été définie par

(4.1.5). La formulation discrète standard s'écrit

Trouver $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\begin{cases} a(u^{\varepsilon,h}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_{\Omega} f \bar{v} & \forall v \in \mathbb{V}^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u^{\varepsilon,h}} = 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (5.1.4)$$

De même que pour les problèmes continus du chapitre 4, pour que ce problème discret soit bien posé, il faut vérifier les conditions (4.A.2). Pour garantir certaines propriétés d'approximation, il faudra ici s'assurer que ces conditions inf–sup sont satisfaites uniformément par rapport à ε et h . Pour énoncer et démontrer ces conditions il nous faut introduire un équivalent discret de $H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ défini par 4.2.8. On pose donc

$$\mathbb{V}_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^h := \left\{ v \in \mathbb{V}^h \mid \int_{\Gamma_\varepsilon} q v = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \right\}.$$

Nous commençons par vérifier les deux conditions portant sur $a(\cdot, \cdot)$. Signalons que la preuve du lemme suivant ne fait pas appel à l'hypothèse **M3**.

Lemme 5.1.1.

Il existe des constantes $\alpha_0, \varepsilon_0, h_0 > 0$ indépendantes de ε et h tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $\forall h \in]0, h_0[$ on a

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^h} \sup_{w \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^h} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0 \quad \inf_{v \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^h} \sup_{w \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^h} \frac{|a(w, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0.$$

Preuve :

Nous ne démontrons que la première condition, la seconde se démontrant de la même manière. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe deux suites ε_n et h_n telles que $\varepsilon_n + h_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et une suite v_n telle que pour tout n ,

$$v_n \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_{\varepsilon_n}}^{h_n}, \quad \|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{w \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_{\varepsilon_n}}^{h_n}} \frac{|a(v_n, w)|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Puisque v_n est bornée dans $H^1(\Omega)$, il est possible d'en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega)$ et fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une limite $v_\infty \in H^1(\Omega)$. Choisissons un $w \in H_\star^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ arbitraire. Rappelons que $H_\star^1(\Omega)$ a été défini dans le lemme 1.2.2 et est dense dans $H^1(\Omega)$ (donc $H_\star^1(\Omega) \cap \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ aussi). Pour n suffisamment grand $P_{h_n} w \in \mathbb{V}_{\mu, \Gamma_{\varepsilon_n}}^{h_n}$ donc par hypothèse on a

$$a(v_n, w) = a(v_n, P_{h_n} w) + a(v_n, w - P_{h_n} w) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad a(v_\infty, w) = 0.$$

En effet d'après les propriétés de l'interpolation de Lagrange (cf par exemple [97]) on a $\|w - P_h w\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$. Comme w a été choisi arbitrairement, par densité on en tire que $a(v_\infty, w) = 0$ pour tout $w \in H^1(\Omega)$. Ceci implique $v_\infty = 0$ car le problème de Helmholtz dans tout Ω avec condition d'onde sortante est bien posé. Finalement

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Re \left\{ \int_{\Gamma} \bar{v}_n T_\Gamma v_n \right\} = a(v_n, v_n) + \omega^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On en tire finalement que $\|\nabla v_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ et ceci conduit à une contradiction puisque nous avons supposé au départ que $\|\nabla v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ pour tout n . ■

Il reste à prouver la dernière condition inf–sup de (4.A.2). La démonstration du lemme suivant est proche de celle du lemme 4.2.2.

Lemme 5.1.2.

Il existe des constantes $\beta_0, \varepsilon_0, h_0 > 0$ indépendantes de h et ε telles que

$$\inf_{q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)} \sup_{v \in \mathbb{V}^h} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_0 \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \forall h \in]0, h_0[.$$

preuve :

Considérons une fonction $v_0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans Ω et prenant la valeur 1 sur un voisinage de l'origine noté \mathcal{O} . Considérons son interpolant de Lagrange $P_h v_0$. Étant donné l'hypothèse de triangulation régulière pour \mathcal{T}_h , il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de h telle que

$$\|v_0 - P_h v_0\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa h \|v_0\|_{H^2(\Omega)}$$

Choisissons un voisinage de l'origine $\mathcal{O}' \subset \bar{\mathcal{O}}' \subset \mathcal{O}$. Il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0[$ on a $\|P_h v_0\|_{H^1(\Omega)} \leq 2 \|v_0\|_{H^1(\Omega)}$ et $P_h v_0 = v_0 = 1$ dans \mathcal{O}' . Choisissons $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ arbitraire. Il existe $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\check{q} = |\check{q}| e^{i\theta}$. En choisissant $w_0 = (P_h v_0) e^{i\theta}$ il vient

$$\sup_{v \in \mathbb{V}^h} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{w}_0}{\|w_0\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{|\check{q}| \check{\mu}_\varepsilon[P_h v_0]}{2 \|v_0\|_{H^1(\Omega)}} \geq \frac{|\check{q}|}{2 \|v_0\|_{H^1(\Omega)}}$$

Ci-dessus nous avons utilisé l'identité (4.2.3) et le lemme 3.2.5. Comme v_0 est indépendant de q , pour conclure il reste à utiliser l'équivalence des normes (4.2.2) et à prendre la borne inf sur les $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. ■

En rassemblant les lemmes 5.1.1 et 5.1.2 nous pouvons appliquer le théorème 4.A.2 qui montre que le problème (5.1.4) est bien posé. On obtient en plus une estimation de $u^\varepsilon - u^{\varepsilon, h}$ et $p^\varepsilon - p^{\varepsilon, h}$ donnée par (4.A.5). Notons que dans le cas présent on a $\inf_{q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)} |p^\varepsilon - q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} = 0$ puisque $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ est son propre espace d'approximation. Également en utilisant le lemme 1.4.2 et les inégalités (4.2.2), on peut trouver un $\kappa > 0$ indépendant de ε et h tel que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right| &= \varepsilon \left| \int_{\Gamma_N} \Xi_*^{\varepsilon, -1}(q \bar{v}) \right| \leq \varepsilon \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} q\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} v\|_{L^2(\Gamma_N)} \\ &\leq |\check{q}| \left\| \frac{\partial \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_N}} \right\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} v\|_{L^2(\Gamma_N)} \\ &\leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} |q|_{H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

En joignant l'inégalité de continuité (5.1.5) ci-dessus aux conditions inf–sup des lemmes 5.1.1 et 5.1.2, et en injectant dans (4.A.5) on aboutit à la propriété d'approximation suivante : il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε et h tels que

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + |p^\varepsilon - p^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_0 \sqrt{|\ln \varepsilon|} \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$$

D'après cette dernière inégalité, pour que $u^{\varepsilon, h}$ soit une bonne approximation de u^ε il suffit que la quantité $\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)}$ soit petite.

Défaut de consistance du schéma standard Le problème est que cette quantité n'est pas petite ! Il est possible de comprendre ceci de la manière suivante. Comme nous l'avons vu avec (4.4.10), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la fonction u^ε devient très proche d'une fonction u_0^ε qui possède une singularité logarithmique au voisinage de 0 (au travers de la fonction $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$). Or la fonction $x \mapsto \ln|x|$ n'appartient pas à $H^1(\Omega)$. La conséquence de ceci est un défaut de consistance pour le schéma numérique associé à la formulation (5.1.4). Nous le démontrerons plus tard avec le lemme 5.4.4. Nous allons pour l'instant nous contenter de le constater par l'expérience.

5.1.4 Expérience numérique : verrouillage du schéma standard

Dans ce paragraphe nous présentons les résultats d'une expérience numérique mettant en évidence le défaut de consistance du schéma associé à (5.1.4). Pour ces expériences, nous avons considéré que Ω était le disque de centre 0 et de rayon $\rho = 3$. Le domaine Ω_ε était l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon ε . Ainsi on avait

$$(\Gamma_\varepsilon) : r = \varepsilon .$$

Pour cette expérience numérique, ainsi que pour les expériences ultérieures, nous avons considéré un problème dont le terme source est légèrement différent de (4.1.1). Introduisons une onde incidente $u_i(r, \varphi) = -e^{i\omega r \cos(\varphi)}$. Rappelons que cette fonction satisfait $\Delta u_i + \omega^2 u_i = 0$. Nous nous intéressons dans les expériences de ce chapitre au problème

$$\text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ satisfaisant}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_r} + T_r u^\varepsilon = \frac{\partial u_i}{\partial n_r} + T_r u_i & \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

On peut adapter sans peine les études des chapitres 3 et 4 à des problèmes comportant ce type de terme source. En particulier on peut associer un problème approché au problème ci-dessus dont la solution est notée u^ε de la même manière qu'au chapitre 4.

Comme la géométrie que nous considérons dans ce paragraphe est très simple nous pouvons dériver analytiquement l'expression de u^ε et u^ε en reprenant le calcul mené au §1.3.6. Le développement de Fourier de $u_i(r, \varphi)$ par rapport à la variable φ nous est donné par la formule (1.3.15). Ainsi sa trace sur Γ_ε est donnée par

$$u_i(\mathbf{x}) = -J_0(\omega\varepsilon) - \sum_{|p| \geq 1} i^{|p|} J_{|p|}(\omega\varepsilon) e^{ip\varphi} \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon .$$

Nous invitons le lecteur à comparer les expressions analytiques de u^ε et u^ε résultantes, afin de se faire une idée de l'effet de la condition aux limites affaiblie (4.2.7),

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{p \in \mathbb{Z}} i^{|p|} J_p(\omega r) e^{ip\varphi} & \text{si } |\mathbf{x}| \leq \varepsilon \\ \sum_{p \in \mathbb{Z}} i^{|p|} J_p(\omega\varepsilon) \frac{H_p^{(1)}(\omega r)}{H_p^{(1)}(\omega\varepsilon)} e^{ip\varphi} & \text{si } |\mathbf{x}| \geq \varepsilon . \end{array} \right.$$

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u_i(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} J_0(\omega r) & \text{si } |\mathbf{x}| \leq \varepsilon \\ J_0(\omega\varepsilon) \frac{H_0^{(1)}(\omega r)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)} & \text{si } |\mathbf{x}| \geq \varepsilon . \end{array} \right.$$

Rappelons que nous désignons par p^ε le saut de dérivée normale de u^ε , conformément à l'énoncé de la proposition 4.3.1. Le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ peut être caractérisé comme l'unique solution d'un problème variationnel de type point-selle de la forme de (4.2.6) dans lequel intervient l'opérateur T_r . Il peut également

être caractérisé comme l'unique couple solution d'une autre formulation variationnelle de type point-selle,

Trouver $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega} u^\varepsilon \bar{v} + \lambda_\Gamma \int_{\Gamma} u^\varepsilon \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{v} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_r} + \lambda_\Gamma u_i \right) \bar{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{array} \right. \quad (5.1.6)$$

Dans cette formulation, on impose sur Γ une condition du type Robin au lieu de la condition de radiation usuelle. En rappelant cf (3.1.1) que l'équation de Γ est donnée par $r = \rho$ avec ici $\rho = 3$, cette condition de Robin modifiée s'écrit

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_r} + \lambda_\Gamma u^\varepsilon = \frac{\partial u_i}{\partial n_r} + \lambda_\Gamma u_i \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{avec } \lambda_\Gamma = -\omega \frac{H_0^{(1)'(\omega\rho)}}{H_0^{(1)}(\omega\rho)} \quad (5.1.7)$$

Nous avons choisi de discrétiser la formulation (5.1.6) plutôt que la formulation (4.2.6) parce que la condition aux limites (5.1.7) est nettement plus facile à implémenter. Nous résolûmes numériquement la formulation (5.1.6) en lui appliquant la discrétisation standard décrite au paragraphe précédent,

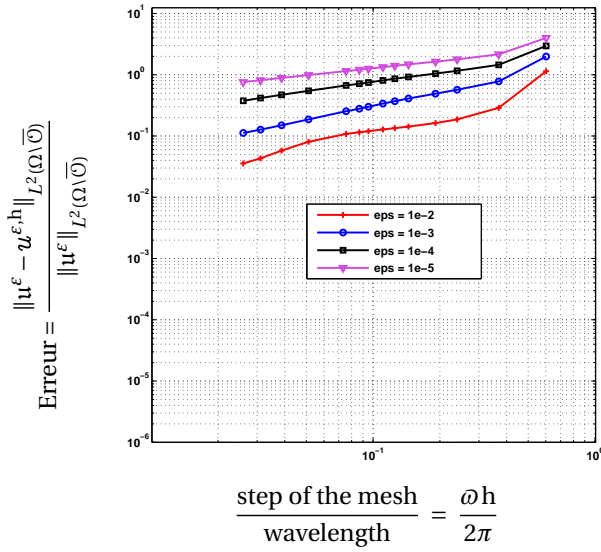
Trouver $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon,h} \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \bar{v} + \lambda_\Gamma \int_{\Gamma} u^{\varepsilon,h} \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_r} + \lambda_\Gamma u_i \right) \bar{v}, \quad \forall v \in \mathbb{V}^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^{\varepsilon,h} = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{array} \right. \quad (5.1.8)$$

Cette formulation a été implémentée en modifiant le code éléments finis MONTJOIE développé par Marc Duruflé au sein du projet POEMS au cours de sa thèse de doctorat [39]. Une documentation complète de ce code de calcul est disponible à l'adresse <http://www-rocq.inria.fr/~duruflé/publications.html>. Nous avons réalisé les calculs sur un maillage quadrangulaire avec des éléments finis \mathbb{Q}_k pour $k = 1, \dots, 5$.

Nous présentons les résultats obtenus avec des éléments finis \mathbb{Q}_3 . Nous avons considéré une longueur d'onde = 1 de sorte que la pulsation est $\omega = 2\pi$. Ce que nous représentons sur la Fig.25 c'est l'erreur relative en norme L^2 dans une région qui exclut un voisinage de Γ_ε . Cette erreur relative ne contient pas l'erreur du modèle $\|u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} / \|u^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$.

On constate sur cette figure que $u^{\varepsilon,h}$ calculé par la formulation (5.1.8) n'est pas une bonne approximation de u^ε . En effet pour $\omega\varepsilon/2\pi = 1\%$ et $\omega h/2\pi \simeq 1\%$ (100 points par longueur d'onde) on obtient une erreur relative supérieure à 3% ce qui n'est pas très satisfaisant pour des éléments finis d'ordre 3. Pour $\omega\varepsilon$ bien plus petit c'est-à-dire $\omega\varepsilon/2\pi = 0.001\%$ l'erreur relative se dégrade, elle est proche de 100% même pour $\omega h/2\pi \simeq 1\%$.



Domaine : $\Omega = D(0,3)$
 $\mathcal{O} = D(0,1)$

Éléments finis : \mathbb{Q}_3

ε	taux de convergence
10^{-2}	0.9051
10^{-3}	0.8697
10^{-4}	0.6163
10^{-5}	0.5074

Fig.25 Verrouillage du schéma standard

Dans cette figure nous avons également fait figurer le taux de convergence de la courbe correspondant à chacune des quatre valeurs de ε considérées. On voit que le taux de convergence n'est jamais de 1 alors qu'on voudrait qu'il soit de 4 puisque nous avons utilisé des éléments finis d'ordre 3.

On peut également calculer analytiquement la fonction p^ε . En effet en utilisant l'expression analytique de u^ε et la formule du wronskien pour les fonctions de Bessel (cf par exemple [82]) on obtient,

$$p^\varepsilon = \omega \frac{J_0(\omega\varepsilon) H_0^{(1)'}(\omega\varepsilon) - J_0'(\omega\varepsilon) H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)} = \frac{2i}{\pi\varepsilon H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)} \quad \text{d'où} \quad \check{p}^\varepsilon = 2\pi\varepsilon p^\varepsilon = \frac{4i}{H_0^{(1)}(\omega\varepsilon)}$$

Nous nous sommes également intéressé à l'erreur relative entre p^ε et $p^{\varepsilon,h}$ dans les conditions décrites plus haut. On peut en tracer des courbes de convergence pour lesquelles nous avons obtenu les taux de convergence suivant, tout aussi mauvais,

$$\text{Erreur} = \frac{|\check{p}^\varepsilon - \check{p}^{\varepsilon,h}|}{|\check{p}^\varepsilon|}$$

ε	taux de convergence
10^{-2}	0.7373
10^{-3}	0.7352
10^{-4}	0.5139
10^{-5}	0.4067

En conclusion cette expérience montre que le couple $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h})$ calculé avec le schéma standard (5.1.8) n'est pas une bonne approximation de $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Non seulement à ε fixé cette approximation est mauvaise, mais elle se dégrade lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. C'est pour cette raison que nous dirons que ce schéma souffre d'un phénomène de verrouillage numérique.

5.2 Le schéma de Galerkin enrichi

Nous allons remédier dans cette section au défaut de consistance du schéma standard mis en évidence au paragraphe précédent. Comme nous l'avons expliqué plus haut, ce défaut de consistance est

lié au comportement logarithmique que u^ε adopte lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ que l'espace d'approximation standard \mathbb{V}^h n'est pas en mesure de reproduire fidèlement. Nous proposons donc d'enrichir l'espace d'approximation avec une fonction de forme additionnelle notée $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ dont le rôle sera de reproduire ce comportement logarithmique apparaissant dans le développement raccordé.

5.2.1 Retour sur les formules explicites

Dans ce court paragraphe nous aimerions formuler quelques rappels sur \tilde{u}_0^ε le premier terme du développement raccordé de u^ε . Tout d'abord on a $\tilde{u}_0^\varepsilon = \tilde{u}_0^\varepsilon$ comme nous l'avons fait remarquer au §4.4.5. La fonction \tilde{u}_0^ε a été construite explicitement en section 3.5. Rappelons que d'après les formules (3.5.1) et (3.5.3) on a

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0^\varepsilon &= \tilde{u}_0^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_0^\varepsilon \quad \text{avec} \\ u_0^\varepsilon(\mathbf{x}) &= u^0(\mathbf{x}) + \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{I}(\varepsilon)} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|), \quad \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{I}(\varepsilon)} \mathfrak{S}_e(\mathbf{x}/\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Donnons par ailleurs les deux premiers termes des développements asymptotiques de $H_0^{(1)}(\omega r)$ lorsque $r \rightarrow 0$, et de $\mathfrak{S}_e(\mathbf{R}, \varphi)$ lorsque $\mathbf{R} \rightarrow \infty$, et rappelons l'expression explicite de $\det \mathfrak{I}(\varepsilon)$ en fonction de ceux-ci,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega r) - \ln\left(\frac{\omega r}{2}\right) - \gamma_e + i \frac{\pi}{2} &\in \mathcal{V}_{+1-\delta}^\infty(\Omega) \quad \forall \delta > 0, \\ \mathfrak{S}_e(\mathbf{R}, \varphi) - \ln(\mathbf{R}) - \mathcal{C}_0 &\in \mathcal{W}_{-1+\delta}^\infty(\Omega_N) \quad \forall \delta > 0, \\ \det \mathfrak{I}(\varepsilon) &= \ln\left(\frac{\omega \varepsilon}{2}\right) + \gamma_e - i \frac{\pi}{2} - \mathcal{C}_0. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

Ci-dessus γ_e désigne la constante d'Euler. La formule précédente sur $H_0^{(1)}(\omega r)$ se déduit des formules (1.3.4), (1.3.11) et du fait que $H_0^{(1)} = J_0 + iY_0$. L'identité sur $\mathfrak{S}_e(\mathbf{R}, \varphi)$ se déduit de sa construction par le lemme 3.2.4 (et l'équation (3.2.7)) et du fait qu'il admet un développement suivant les puissances entières de \mathbf{R} .

5.2.2 Définition de la fonction de forme additionnelle

Pour proposer une fonction de forme additionnelle nous nous inspirerons des formules ci-dessus. Nous proposons une fonction proche du profil \mathfrak{S}_e . Par ailleurs, pour réduire le nombre de fonctions de forme avec lesquels la fonction $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ interagira, nous aurons recours à une fonction de troncature

$$\chi^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1], \quad \chi^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{R}_+}), \quad \chi^\varepsilon \text{ décroissante}, \quad \chi^\varepsilon = 1 \text{ sur un voisinage de } 0. \quad (5.2.3)$$

La fonction χ^ε sera choisie arbitrairement suivant des considérations pratiques. Attention cette fonction de troncature ne dépend pas de ε contrairement à la fonction χ^ε intervenant dans les développements raccordés. En notant $\mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}$ la fonction caractéristique de l'ensemble Ω_ε , nous définissons la fonction de forme additionnelle par

$$\Psi_\varepsilon^\varepsilon := \chi^\varepsilon \cdot \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon} \cdot \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e \in H^1(\Omega). \quad (5.2.4)$$

La fonction $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ ainsi définie est dans $H^1(\Omega)$ car elle n'admet pas de saut de valeur sur Γ_ε et $\Psi_\varepsilon^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$. Le choix de la fonction de troncature χ^ε intervient comme un paramètre du schéma, il fixe le "rayon d'action" pour $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$. Rappelons que dans le cas où le petit obstacle est le disque de centre 0 et de rayon ε on a $\mathfrak{S}_e(\mathbf{R}, \varphi) = \ln \mathbf{R}$. Notons par ailleurs que $\int_{\Gamma_\varepsilon} \Psi_\varepsilon^\varepsilon \bar{q} = 0$ pour tout $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ puisque $\Psi_\varepsilon^\varepsilon = 0$ sur Γ_ε . Avec cette fonction additionnelle nous pouvons introduire un espace d'approximation enrichi,

$$\mathbb{V}_\varepsilon^h := \mathbb{V}^h \oplus \text{span}\{\Psi_\varepsilon^\varepsilon\} = \{v + \alpha \Psi_\varepsilon^\varepsilon \mid v \in \mathbb{V}^h, \alpha \in \mathbb{C}\}. \quad (5.2.5)$$

5.2.3 Formulation discrète enrichie

Avec ce nouvel espace d'approximation nous pouvons proposer une autre discrétisation de la formulation (4.2.6). Nous noterons $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h})$ le couple calculé à l'aide du schéma correspondant. Ce couple satisfait donc par définition

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \text{ tels que} \\ & \begin{cases} a(u^{\varepsilon,h}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_{\Omega} f \bar{v} & \forall v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u^{\varepsilon,h}} = 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

On peut démontrer en reproduisant quasiment les démonstrations des lemmes 5.1.1 et 5.1.2 que les conditions inf-sup (4.A.4) sont satisfaites pour cette formulation de manière uniforme par rapport à ε et h . En reproduisant le raisonnement de la section 5.1, on en tire donc l'existence d'une constante $\kappa > 0$ indépendante de h et ε telle que

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon,h}\|_{H^1(\Omega)} + |p^\varepsilon - p^{\varepsilon,h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5.2.7)$$

Cette fois le second membre de cette inégalité a des chances d'être petit : nous avons enrichi l'espace d'approximation exprès pour ça ! Nous allons donc montrer que, en un sens que nous préciserons, le schéma de Galerkin enrichi (5.2.6) est consistant.

Cette méthode d'enrichissement est non-locale Signalons par ailleurs une autre propriété de ce schéma qui joue un rôle important en pratique. Puisque le support de $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ est fixé indépendant de h . Lorsqu'on raffine le maillage à ε fixé, il s'étend sur un nombre de mailles d'autant plus grand que le maillage est fin. En ce sens, l'enrichissement de \mathbb{V}^h avec $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ "remplit" la matrice du système associé (5.2.6). Ceci a pour effet en pratique de ralentir l'inversion de cette matrice.

5.2.4 Consistance du schéma de Galerkin enrichi

Nous présentons maintenant un premier résultat de consistance qui donne une borne pour l'erreur sur tout le domaine Ω . Cependant, au vu des résultats numériques que nous présenterons, ce théorème ne semble pas "optimal". La preuve utilise directement l'analyse du chapitre 4, et en particulier les résultats de la section 4.4.5. Ceci nous donne donc au passage l'occasion de montrer qu'une étude telle que celle des chapitres 3 et 4 est exploitable en pratique !

Théorème 5.2.1.

Il existe $\kappa_0, q_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε et h telle que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^{q_0} (\sqrt{\varepsilon} + h), \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad h \in]0, 1[$$

Preuve :

Afin d'estimer le membre de gauche dans l'inégalité annoncée nous utiliserons le développement raccordé à l'ordre 0 de u^ε dont (5.2.1) nous donne une expression quasi-explicite. On sait d'après (4.4.7), qu'il existe des constantes $\kappa_0, q_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendantes de h et ε telles que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon|^{q_0} \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Par inégalité triangulaire on a donc $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} + \inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|\tilde{u}_0^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \kappa_0 |\ln \varepsilon|^q \sqrt{\varepsilon} + \inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \left\| \tilde{u}_0^\varepsilon - \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \Psi_\varepsilon^\varepsilon - v \right\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Dans le dernier terme de cette inégalité nous avons fait intervenir la fonction de forme additionnelle de manière à ce qu'elle "tue" la singularité de \tilde{u}_0^ε . En reprenant à présent l'expression (5.2.1) de \tilde{u}_0^ε et la définition (5.2.4) de $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0^\varepsilon - \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \Psi_\varepsilon^\varepsilon &= (1 - \chi^e) \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \right) \\ &\quad + (\chi^e - \chi^\varepsilon) \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) + \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \mathfrak{S}_e(\mathbf{x}/\varepsilon) \right) \\ &= (1 - \chi^e) \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \right) \\ &\quad + (\chi^e - \chi^\varepsilon) (u^0(\mathbf{x}) - u^0(0)) \\ &\quad + (\chi^e - \chi^\varepsilon) \frac{-u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \left(\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega r) - \ln\left(\frac{\omega r}{2}\right) - \gamma_e + i \frac{\pi}{2} \right) \\ &\quad + (\chi^e - \chi^\varepsilon) \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \left(\mathfrak{S}_e(r/\varepsilon, \varphi) - \ln(r/\varepsilon) - \mathfrak{C}_0 \right) \\ &:= v_1^\varepsilon + v_2^\varepsilon + v_3^\varepsilon + v_4^\varepsilon. \end{aligned}$$

Notre lecteur est invité à remarquer que nous avons fait apparaître ci-dessus les deux premières quantités de (5.2.2) en utilisant l'expression de $\det \mathfrak{T}(\varepsilon)$ fournie par (5.2.2). Pour terminer la preuve il suffit d'estimer $\inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|v_i^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)}$ pour $i = 1 \dots 4$. En premier lieu il est clair qu'il existe $\kappa_1 > 0$ indépendant de ε tel que $\|v_1^\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq \kappa_1$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En appliquant (5.1.3) on obtient donc une constante $\kappa'_1 > 0$ indépendante de ε telle que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|v_1^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \left\| (1 - \chi^e) \left(u^0(\mathbf{x}) - \frac{u^0(0)}{\det \mathfrak{T}(\varepsilon)} \frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\omega|\mathbf{x}|) \right) - v \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa'_1 h$$

Pour traiter les termes liés à $v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon$ et v_4^ε on utilise les lemmes techniques 5.A.1, 5.A.2 et 5.A.3 démontrés en annexe. Il reste à rassembler les estimations correspondantes et on obtient finalement l'existence de $\kappa, q, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε et h tels que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q (\sqrt{\varepsilon} + h) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \forall h \in]0, 1[.$$

■

Résultat de consistance final À l'aide du théorème 5.2.1 nous pouvons à présent formuler un résultat de consistance qui montre que le couple $(u^{\varepsilon, h}, \mathbf{p}^{\varepsilon, h})$, unique solution de (5.2.6), est une bonne approximation du couple $(u^\varepsilon, \mathbf{p}^\varepsilon)$. En effet en réunissant (5.2.7) et le théorème 5.2.1, on obtient

Corollaire 5.2.1.

Il existe $\kappa, q, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε et h tels que

$$\|u^\varepsilon - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + |\mathbf{p}^\varepsilon - \mathbf{p}^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q (\sqrt{\varepsilon} + h) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \forall h \in]0, 1[. \quad (5.2.9)$$

Ce dernier résultat suggère que l'ordre de convergence du schéma associé à (5.2.6) est assez lent puisque la borne dans l'estimation ci-dessus contient le terme $h|\ln \varepsilon|^q$, et ce quel que soit l'ordre k des éléments que nous utilisons. Par ailleurs la borne fournie par le corollaire (5.2.1) contient également un terme $\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|^q$ qui apparaît comme un défaut de consistance qui correspond à l'erreur due au modèle asymptotique.

Ordre de grandeur du multiplicateur de Lagrange Enfin le corollaire 5.2.1 permet d'obtenir l'ordre de grandeur de $p^{\varepsilon, h}$. En effet signalons d'abord avec l'hypothèse **M3** que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a $h|\ln \varepsilon(h)|^q \rightarrow 0$. Dans le cas où $u^0(0) \neq 0$, en combinant (4.5.7) avec (5.2.9) on obtient l'existence de constantes $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendantes de h telles que

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon(h)|} \leq |p^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon(h)|} \quad \forall h \in]0, 1[, \quad \text{lorsque } u^0(0) \neq 0. \quad (5.2.10)$$

Dans tous les cas, quelle que soit la valeur de $u^0(0)$, le corollaire 5.2.1 permet avec le corollaire 4.5.1 de démontrer l'existence de $\kappa_0 > 0$ indépendant de h telle que

$$|p^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_0}{|\ln \varepsilon(h)|} \quad \forall h \in]0, 1[.$$

5.2.5 Expérience numérique : schéma enrichi faiblement verrouillant

Dans ce paragraphe nous présentons des résultats numériques pour tester le schéma associé à la formulation enrichie (5.2.6). Nous verrons d'une part que ce schéma est "faiblement verrouillant" au sens où ses propriétés d'approximation ne se dégradent que très peu. Par ailleurs l'ordre de convergence est optimal : l'ordre de convergence est de k pour une discrétisation avec des éléments finis d'ordre k , ce qui est un résultat plus optimiste encore que celui du corollaire 5.2.1 qui ne suggérait qu'un ordre de convergence de 1.

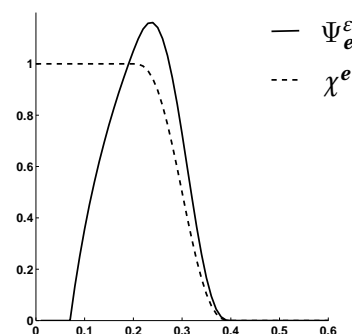
Cette expérience a été réalisée dans les mêmes conditions qu'au §5.1.4 : la géométrie, la longueur d'onde, les ε considérés, etc ... sont les mêmes. La seule différence avec l'expérience numérique précédente est que nous utilisons cette fois une formulation discrète enrichie avec une fonction de forme additionnelle. Dans le cas de la géométrie décrite au §5.1.4 (petit obstacle circulaire) la fonction additionnelle prend la forme suivante,

$$\Psi_\varepsilon^\varepsilon(\mathbf{x}) := \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) \cdot \ln\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right) \cdot \mathbf{1}_{r > \varepsilon}$$

Comme nous l'avons dit plus haut, il apparaît un arbitraire dans le choix de la fonction de troncature χ^ε . Lors des expériences numériques nous avons considéré la fonction suivante

$$\chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{x}| \leq \frac{\varrho_0}{3} \\ Q(|\mathbf{x}|) & \text{si } \frac{\varrho_0}{3} \leq |\mathbf{x}| \leq 2\frac{\varrho_0}{3} \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| \geq 2\frac{\varrho_0}{3} \end{cases}$$

avec
$$\begin{cases} \varrho_0 = 0.6 \\ Q(r) = 6 \cdot \left(\frac{2-3r}{\varrho_0}\right)^5 - 15 \cdot \left(\frac{2-3r}{\varrho_0}\right)^4 + 10 \cdot \left(\frac{2-3r}{\varrho_0}\right)^3 \end{cases}$$



Ci-dessus $\rho_0 \in \mathbb{R}_+$ est un réel positif qui mesure le "rayon d'action" de la fonction de troncature χ^ε . Celle-ci est d'autant plus localisée que ρ_0 est petit. Dans l'expression ci-dessus Q désigne un polynôme choisi de manière à assurer une certaine régularité à χ^ε . Pour l'expérience que nous présentons ici, nous avons choisi Q de façon à ce que $\chi^\varepsilon \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$. Ci-dessus nous avons représenté l'allure des fonctions χ^ε et Ψ_ε pour $\varepsilon = 0.06$.

Dans la Fig.26 ci-dessous nous représentons l'erreur relative entre u^ε et $u^{\varepsilon,h}$, dans le cas où le couple $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h})$ est l'unique solution de la formulation enrichie

Trouver $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \times \mathbb{E}_{ap}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon,h} \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega} u^{\varepsilon,h} \bar{v} + \lambda_{\Gamma} \int_{\Gamma} u^{\varepsilon,h} \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_r} + \lambda_{\Gamma} u_i \right) \bar{v}, & \forall v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u^{\varepsilon,h}} = 0, & \forall q \in \mathbb{E}_{ap}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (5.2.11)$$

Les résultats sont bien meilleurs qu'au §5.1.4 pour au moins trois raisons. Tout d'abord la précision du schéma associé à (5.2.11) est meilleur puisque nous obtenons une erreur relative d'environ 10^{-5} pour $\omega h / 2\pi \approx 0.01$ (environ 100 points par longueur d'onde), et ceci est vérifié quelle que soit la valeur de ε . Par ailleurs les résultats se dégradent peu lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$: la courbe se décale vers le haut mais assez lentement. Enfin les taux de convergence sont optimaux, nous avons utilisé des éléments finis d'ordre 3 et avons obtenu des taux de convergence de 4.

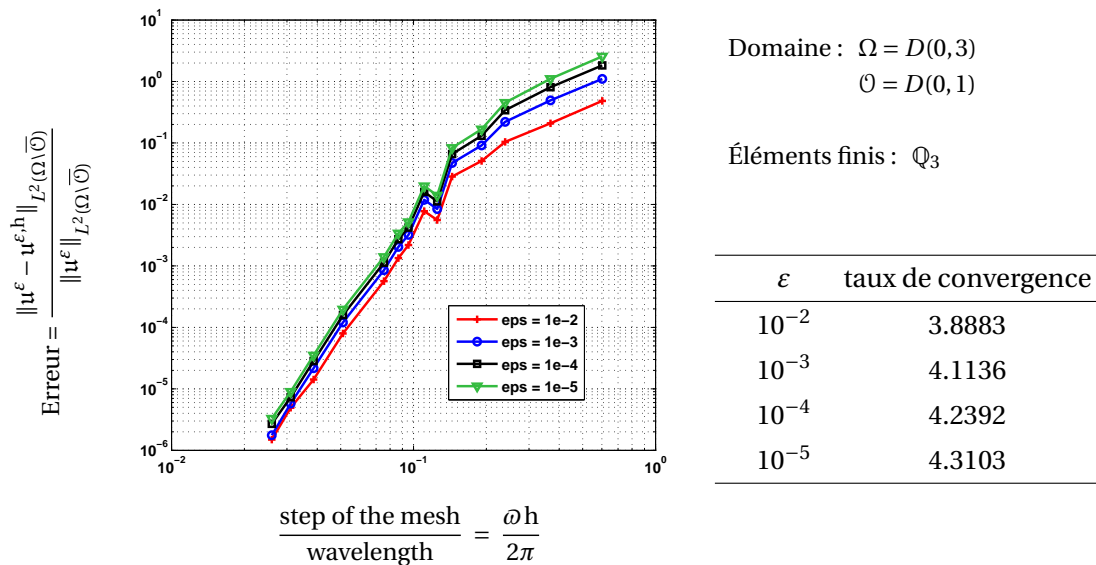
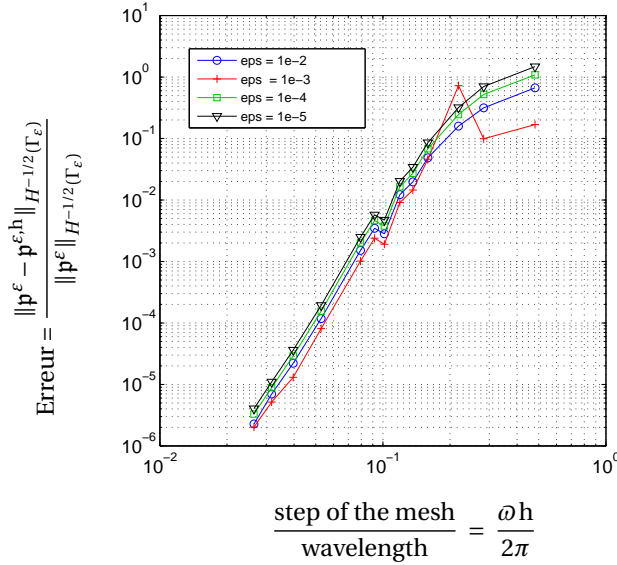


Fig.26 Erreur relative sur le champ pour le schéma de Galerkin enrichi

Signalons que la Fig.26 a été représentée à la même échelle que la Fig.25 pour pouvoir comparer plus facilement. Nous nous sommes également intéressés aux erreurs relatives sur les paramètres de Lagrange. Nous avons donc représenté les courbes de convergence correspondantes sur la figure Fig.27 ci-dessous.



ϵ	taux de convergence
10^{-2}	4.5777
10^{-3}	4.6909
10^{-4}	4.7637
10^{-5}	4.7968

Fig.27 Erreur relative sur le multiplicateur de Lagrange pour le schéma de Galerkin enrichi

Remarque concernant la quadrature numérique

Il est naturel de s'interroger sur la manière dont il a fallu calculer les intégrales intervenant dans l'expérience numérique ci-dessus et dans lesquelles apparaît la fonction de forme additionnelle Ψ_e^ϵ . En effet comme cette fonction doit reproduire un comportement logarithmique, on pourrait s'attendre à une mauvaise précision des formules de quadrature concernant le calcul des intégrales associées à $a(\Psi_e^\epsilon, \psi_i^h)$, $i = 1 \dots I_h$ et également pour celles associées à $a(\Psi_e^\epsilon, \Psi_e^\epsilon)$. Pour les calculer il est possible de tirer parti du fait que $\Delta \mathfrak{S}_e = 0$ avec ici $\mathfrak{S}_e(\mathbf{x}) = \ln |\mathbf{x}|$. Intéressons-nous par exemple à $a(\Psi_e^\epsilon, \psi_i^h)$ pour un certain i arbitraire. En appliquant une formule de Green sur Ω_ϵ dans l'expression de $a(\cdot, \cdot)$ donnée par (4.1.5) on obtient

$$a(\Psi_e^\epsilon, \psi_i^h) = - \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial \Xi_*^\epsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\epsilon}} \bar{\psi}_i^h d\Gamma_\epsilon - \int_{\Omega_\epsilon} \bar{\psi}_i^h (\Delta \chi^e + \omega^2 \chi^e) \ln |\mathbf{x}| - 2 \int_{\Omega} \bar{\psi}_i^h \nabla \chi^e \cdot \nabla (\ln |\mathbf{x}|).$$

Le terme de bord ci-dessus intervient déjà dans le calcul des intégrales couplant les fonctions de forme standard avec les multiplicateurs de Lagrange. C'est l'identité ci-dessus que nous avons utilisé pour réaliser le calcul de $a(\Psi_e^\epsilon, \psi_i^h)$. On peut écrire une identité semblable pour $a(\Psi_e^\epsilon, \Psi_e^\epsilon)$. En prenant en compte que $\Psi_e^\epsilon = 0$ sur Γ_ϵ , on a

$$a(\Psi_e^\epsilon, \Psi_e^\epsilon) = \int_{\Omega_\epsilon} (|\nabla \chi^e|^2 - \omega^2 |\chi^e|^2) \ln^2 |\mathbf{x}|.$$

5.3 Étude de la fonction de forme additionnelle

Dans cette section nous étudierons d'un peu plus près l'impact de la fonction de forme dans la formulation discrète (5.2.6). On sait que les fonctions de formes standard ψ_i^h forment une base de l'espace \mathbb{V}^h . En particulier elles sont indépendantes. Par ailleurs il est naturel de se demander dans quelle mesure la fonction additionnelle Ψ_e^ϵ est approchée par les fonctions ψ_i^h , ce qui est une autre manière de se demander ce qu'elle apporte dans l'espace \mathbb{V}_e^h en plus par rapport aux fonctions ψ_i^h .

5.3.1 Une remarque simplificatrice

Dans ce paragraphe nous formulons une remarque qui permettra de nous ramener au cas où Γ_ε est le cercle de centre de 0 et de rayon ε . Supposons qu'on ne s'intéresse qu'au calcul de u^ε dans une région $\mathcal{O} \subset \Omega$ qui exclut un voisinage fixe de l'origine 0. On a d'après le corollaire 3.4.1,

$$u^\varepsilon = u_0^\varepsilon + O(\varepsilon) \quad \text{dans } H^1(\mathcal{O}).$$

L'expression de la fonction u_0^ε a été rappelée par (5.2.1) et (5.2.2). Remarquons que d'après ces formules, la géométrie de Γ_ε intervient dans l'expression de u_0^ε seulement via la constante de capacité \mathcal{C}_0 . Considérons Γ'_ε le cercle de centre 0 et de rayon $\varepsilon \exp(\mathcal{C}_0)$ et notons $\Omega'_\varepsilon = \{ \mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| > \varepsilon \exp(\mathcal{C}_0) \}$. Notons enfin, pour ce paragraphe seulement, v^ε l'unique élément de $H^2(\Omega)$ satisfaisant

$$\Delta v^\varepsilon + \omega^2 v^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega'_\varepsilon, \quad \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad v^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma'_\varepsilon$$

D'après la discussion qui précède on voit que dans l'ouvert \mathcal{O} la fonction v^ε admet le même premier terme pour son développement asymptotique que u^ε . Autrement dit

$$v^\varepsilon = u_0^\varepsilon + O(\varepsilon) = u^\varepsilon + O(\varepsilon) \quad \text{dans } H^1(\mathcal{O}).$$

Cependant la géométrie du problème caractérisant v^ε (l'extérieur d'un disque de rayon $\varepsilon \exp(\mathcal{C}_0)$) est plus simple que celle dans laquelle est posée le problème associée à u^ε . Quitte à commettre une erreur de consistance en $O(\varepsilon)$, on peut donc se ramener au cas où Γ_ε est un cercle de rayon proportionnel à ε . Par conséquent nous supposons jusqu'à la fin du chapitre que

M4 : Γ_ε est donné par l'équation $r = \varepsilon$.

Avec cette remarque simplificatrice, l'expression de la fonction de forme additionnelle devient explicite. Elle est donnée par

$$\Psi_\varepsilon^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon \cdot \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon} \cdot \ln\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon}\right). \quad (5.3.1)$$

Cette expression nous permet alors d'effectuer quelques calculs explicites sur $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ qui nous serviront dans plusieurs estimations d'erreurs à venir. Un calcul facile d'intégrale permet d'exprimer $\|\Psi_\varepsilon^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ explicitement et montre qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε et h tel que

$$\|\Psi_\varepsilon^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\sqrt{|\Omega|} |\ln \varepsilon| \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[\quad (5.3.2)$$

5.3.2 Approximation globale par des fonctions de forme standard

Pour approcher $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ par une combinaison linéaire de fonctions de forme standard ψ_i^h on peut penser tout d'abord à son interpolé de Lagrange $P_h \Psi_\varepsilon^\varepsilon$. Cependant pour la suite nous préférons considérer un autre type d'approximation qui prend en compte la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ associée au problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$.

Rappels sur une propriété de $a(\cdot, \cdot)$ Pour construire ce deuxième type d'approximation nous devons nous intéresser à la résolution de problèmes liés à $a(\cdot, \cdot)$ dans le domaine Ω tout entier. Rappelons que la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est définie par (1.2.2) et que d'après (1.2.3) elle vérifie des conditions inf – sup "continues" c'est-à-dire sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.

En copiant et modifiant très légèrement la démonstration du lemme 5.1.1, on démontre (ceci est laissé au lecteur) que les conditions inf – sup discrètes suivantes sont également vérifiées : il existe une constante $\alpha_0 > 0$ indépendante de ε et h telle que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \sup_{w \in \mathbb{V}^h} \frac{|a(v, w)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0 \quad \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \sup_{w \in \mathbb{V}^h} \frac{|a(w, v)|}{\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0. \quad (5.3.3)$$

Définition des opérateurs de projection elliptique Nous introduisons deux nouveaux opérateurs de projection dans l'espace d'approximation standard $\Pi_h, {}^t\Pi_h : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}^h$ définis en résolvant des problèmes discrets associés à $a(\cdot, \cdot)$,

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(\Omega), \quad \Pi_h(u) \in \mathbb{V}^h \quad \text{t.q.} \quad a(\Pi_h(u), v) &= a(u, v) \quad \forall v \in \mathbb{V}^h. \\ {}^t\Pi_h(u) \in \mathbb{V}^h \quad \text{t.q.} \quad a(v, {}^t\Pi_h(u)) &= a(v, u) \quad \forall v \in \mathbb{V}^h. \end{aligned}$$

Ces problèmes sont bien posés donc Π_h et ${}^t\Pi_h$ sont bien définis car les conditions (5.3.3) sont vérifiées. De plus Π_h et ${}^t\Pi_h$ sont continus uniformément par rapport à h : il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de $h > 0$ telle que

$$\|\Pi_h(u)\|_{H^1(\Omega)} + \|{}^t\Pi_h(u)\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \forall h \in]0, 1[. \quad (5.3.4)$$

À nouveau ceci est une conséquence des conditions (5.3.3). On pose également une notation (attention à ne pas confondre avec le laplacien) pour l'erreur entre une fonction u et ses approximations $\Pi_h(u)$ et ${}^t\Pi_h(u)$,

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \Delta_h(u) := u - \Pi_h(u) \quad \text{et} \quad {}^t\Delta_h(u) := u - {}^t\Pi_h(u) \quad (5.3.5)$$

Enfin on utilise encore les conditions inf-sup vérifiées par $a(\cdot, \cdot)$ sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ avec (1.2.3) et sur $\mathbb{V}^h \times \mathbb{V}^h$ avec (5.3.3) ; on applique le lemme de Céa et de Bramble-Hilbert et on utilise le fait que la triangulation \mathcal{T}_h est régulière ; Finalement pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$ il existe une constante $\kappa_\alpha > 0$ dépendante de α mais indépendante de h telle que

$$\|\Delta_h(v)\|_{H^1(\Omega)} + \|{}^t\Delta_h(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_\alpha h^\alpha \|v\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)} \quad \forall h \in]0, 1[, \quad \forall v \in H^{1+\alpha}(\Omega). \quad (5.3.6)$$

On peut montrer (nous ne le ferons pas ici) que $\Psi_\varepsilon^\varepsilon \in H^{1+\alpha}(\Omega)$ pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$. Ainsi pour tout $\alpha \in]0, 1/2[$, il existe une constante $\kappa_\alpha > 0$ indépendante de h telle que $\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_\alpha h^\alpha \|\Psi_\varepsilon^\varepsilon\|_{H^{1+\alpha}(\Omega)}$ pour tout $h \in]0, 1[$. Si ε restait fixe et $h \rightarrow 0$, on aurait $\|\Psi_\varepsilon^\varepsilon - \Pi_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$.

Cependant nous avons supposé avec l'hypothèse **M3** que $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Et ceci implique que $\Pi_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)$ ne peut constituer une bonne approximation de $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ pour h tendant vers 0 comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.3.1.

Avec les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** il existe $\kappa > 0$ indépendante de h et ε telles que $\kappa < \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}$.

Preuve :

Le temps de cette preuve, nous noterons k l'ordre des éléments que nous utilisons pour la discrétisation. Nous donnerons la preuve de cette propriété dans le cas des éléments finis \mathbb{P}_k . Pour le cas d'éléments finis \mathbb{Q}_k il est très facile d'adapter les arguments que nous utilisons.

Étant donné la définition de h donnée par (5.1.1), nous voyons que pour tout $h \in]0, 1[$ il existe au moins un $K \in \mathcal{T}_h$ tel que $K \subset \{\mathbf{x} \in \Omega \mid h < |\mathbf{x}| < 4h\}$. Pour chaque h nous choisissons un tel K que nous noterons $K(h)$. Pour montrer le résultat souhaité il est donc suffisant de démontrer que

$$\exists \kappa_0 > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que} \quad \int_{K(h)} |\nabla(\Delta_h \Psi_\varepsilon^\varepsilon)|^2 d\mathbf{x} > \kappa_0 \quad \forall h \in]0, 1[.$$

Rappelons qu'au §5.1.1 nous avons introduit pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$ une bijection $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ où \hat{K} était un polyèdre de référence (triangle ou quadrangle). Cette fonction est telle que $F_K = (F_K^x, F_K^y)$ avec $F_K^x, F_K^y \in \mathbb{P}_1$. Pour la suite de cette preuve, nous noterons $\hat{\mathbf{x}}$ un point courant de \hat{K} . Par définition de $K(h)$, on a toujours $h < |F_K(\hat{\mathbf{x}})| < 4h$. Par changement de variable, il est alors suffisant de démontrer que

$$\exists \kappa_1 > 0 \text{ indépendant de } h \text{ tel que} \quad \inf_{Q \in \mathbb{P}_k} \int_{\hat{K}} \left| \frac{F_K^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_K(\hat{\mathbf{x}})|^2} - Q(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 |\text{Jac}(F_{K(h)})| d\hat{\mathbf{x}} > \kappa_1 \quad \forall h \in]0, 1[.$$

où k désigne l'ordre des éléments finis que nous utilisons, et $\text{Jac}(F_K)$ est le déterminant de la matrice jacobienne associée à F_K . Pour démontrer la propriété ci-dessus nous procéderons par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $h_n \rightarrow 0$ et une suite de polynômes $Q_n \in \mathbb{P}_k$ de degré au plus k telle que

$$\int_{\hat{K}} \left| \frac{F_{K(h_n)}^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_{K(h_n)}(\hat{\mathbf{x}})|^2} - \frac{1}{h_n} Q_n(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 |\text{Jac}(F_{K(h_n)})| d\hat{\mathbf{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Nous savons cf [53] qu'il existe une constante κ_2 telle que $|\text{Jac}(F_{K(h_n)})| > \kappa_2 h_n^2$ pour tout $h \in]0, 1[$ ce qui implique

$$\int_{\hat{K}} \left| \frac{F_{K(h_n)}^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_{K(h_n)}(\hat{\mathbf{x}})|^2} - \frac{1}{h_n} Q_n(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 |\text{Jac}(F_{K(h_n)})| d\hat{\mathbf{x}} > \kappa_2 \int_{\hat{K}} \left| \frac{h_n F_{K(h_n)}^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_{K(h_n)}(\hat{\mathbf{x}})|^2} - Q_n(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\hat{\mathbf{x}}$$

Comme $\|F_{K(h_n)}/h_n\|_{L^\infty(\hat{K})} < 4$, on en conclut que la suite $F_{K(h_n)}/h_n$ est bornée dans $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Comme cet espace est de dimension finie, quitte à en extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite $F_{K(h_n)}/h_n$ converge vers un $F_\infty = (F_\infty^x, F_\infty^y) \in \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. Alors par continuité $\forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}$, $1 < |F_\infty(\hat{\mathbf{x}})| < 4$. Ceci implique que $|F_\infty(\hat{\mathbf{x}})|$ est \mathcal{C}^∞ et ne s'annule pas sur \hat{K} . De la même manière $\|Q_n\|_{L^2(\hat{K})}$ reste borné lorsque $n \rightarrow \infty$, en effet

$$\|Q_n\|_{L^2(\hat{K})}^2 \leq 2 \int_{\hat{K}} \left| \frac{h_n F_{K(h_n)}^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_{K(h_n)}(\hat{\mathbf{x}})|^2} - Q_n(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\hat{\mathbf{x}} + 2 \int_{\hat{K}} \left| \frac{h_n F_{K(h_n)}^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_{K(h_n)}(\hat{\mathbf{x}})|^2} \right|^2 d\hat{\mathbf{x}}.$$

Comme $Q_n \in \mathbb{P}_k$ pour tout n et \mathbb{P}_k est de dimension finie on peut supposer, quitte à en extraire une sous-suite, que la suite (Q_n) converge vers un $Q_\infty \in \mathbb{P}_k$. Par passage à la limite, on obtient donc

$$\int_{\hat{K}} \left| \frac{F_\infty^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_\infty(\hat{\mathbf{x}})|^2} - Q_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \right|^2 d\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{F_\infty^x(\hat{\mathbf{x}})}{|F_\infty(\hat{\mathbf{x}})|^2} = Q_\infty(\hat{\mathbf{x}})$$

Supposons d'abord que Q_∞ n'est pas constant. Ceci mène à une contradiction car

$$\frac{|F_\infty^x(\hat{\mathbf{x}})|}{|F_\infty(\hat{\mathbf{x}})|^2} \xrightarrow{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} 0 \quad \text{alors que} \quad |Q_\infty(\hat{\mathbf{x}})| \xrightarrow{|\hat{\mathbf{x}}| \rightarrow \infty} \infty.$$

Par contre si nous supposons que Q_∞ est constant, ceci implique que F_∞ lui-même est constant, et ceci conduit à une autre contradiction car, par passage à la limite, on a $|\text{Jac}(F_\infty)| > \kappa_2 > 0$. En conclusion on aboutit forcément à une contradiction d'où l'on tire le résultat souhaité. ■

La proposition 5.3.1 ne donne pas seulement un renseignement sur $\|\Delta_h(\Psi_\epsilon^\epsilon)\|_{H^1(\Omega)}$. Elle montre que toute approximation de Ψ_ϵ^ϵ à l'aide de fonctions de forme standard est mauvaise. En effet en appliquant le lemme de Céa et la proposition 5.3.1, on obtient l'existence de $\kappa_0, \kappa'_0, h_0, \epsilon_0 > 0$ tels que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|\Delta_h(\Psi_\epsilon^\epsilon) - v\|_{H^1(\Omega)} = \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|\Psi_\epsilon^\epsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \geq \kappa'_0 \|\Delta_h(\Psi_\epsilon^\epsilon)\|_{H^1(\Omega)} \geq \kappa_0 \quad \forall h \in]0, h_0[, \quad \forall \epsilon \in]0, \epsilon_0[. \quad (5.3.7)$$

Avec le résultat précédent on pourrait penser qu'il est définitivement vain de vouloir approcher Ψ_ϵ^ϵ avec des fonctions de forme standard ψ_i^h . Le lemme suivant nuance cette conclusion.

Lemme 5.3.1.

Avec les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de h et ϵ telles que

$$\|\Delta_h(\Psi_\epsilon^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)} < \kappa h \|\Delta_h(\Psi_\epsilon^\epsilon)\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \epsilon \in]0, 1[, \quad \forall h \in]0, 1[.$$

Preuve :

Étant donné un $v \in L^2(\Omega)$ notons $g(v)$ l'unique élément de $H^2(\Omega)$ vérifiant $a(w, g(v)) = \int_{\Omega} w \bar{v}$. Une telle fonction existe d'après les conditions inf – sup (1.2.3). On écrit maintenant une caractérisation de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ à l'aide du produit scalaire sur $L^2(\Omega)$,

$$\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \bar{v}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} = \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), g(v))}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} = \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(g(v)))}{\|v\|_{L^2(\Omega)}}$$

Notons que la fonction $g(v)$ dépend continuellement de v : il existe une constante $\kappa_0 > 0$ telle que $\|g(v)\|_{H^2(\Omega)} \leq \kappa_0 \|v\|_{L^2(\Omega)} \forall v \in L^2(\Omega)$. Cette remarque, jointe à la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ sur $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et les estimations (5.3.6) montre qu'il existe $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de ε, h tels que

$$\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \leq \kappa \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \sup_{v \in L^2(\Omega)} \frac{\|\Delta_h(g(v))\|_{H^1(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \leq \kappa' h \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}.$$

■

Grâce à ce dernier lemme on en tire un résultat qui ressemble à la proposition 5.3.1. Remarquons tout d'abord que d'après la définition de Π_h on a $a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)) = a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))$. En utilisant l'inégalité (1.3.14) et la proposition 5.3.1 on voit qu'il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que pour tout $\varepsilon, h \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \Re\{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))\} &\geq \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}^2 - (1 + \omega^2) \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq (1 - \kappa(1 + \omega^2)h^2) \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

5.3.3 Approximation locale par des fonctions de forme standard

La démonstration de la proposition 5.3.1 a exploité le fait que $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ est de plus en plus singulière au voisinage de 0 à mesure que $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet c'est cette singularité qui empêche l'espace d'approximation standard \mathbb{V}^h de bien reproduire $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$. Qu'en est-il lorsqu'on ne s'intéresse à $\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)$ que dans une région qui exclut un voisinage fixé de 0? C'est l'objet du prochain lemme.

Lemme 5.3.2.

Soit k l'ordre des éléments utilisés pour la discrétisation. Soient deux ouverts $\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ tels que $\mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset (\Omega \setminus \{0\})$. Alors avec les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** il existe deux constantes $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendantes de ε et h telles que

$$\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon| h^k \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \forall h \in]0, 1[$$

Preuve :

Pour démontrer ceci nous utiliserons le théorème de Nitsche et Schatz [92] qui est rappelé en annexe sous une forme simplifiée avec le théorème 5.B.1. Considérons un deuxième ouvert \mathcal{O}' tel que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \subset \overline{\mathcal{O}'} \subset \Omega \setminus \{0\}$. Appliquons directement le théorème de Nitsche et Schatz à $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ dans \mathcal{O} : il existe des constantes $\kappa_0, \varepsilon_0, h_0 > 0$ indépendantes de ε et h telles que

$$\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq \kappa \left(h^k \|\Psi_\varepsilon^\varepsilon\|_{H^{k+1}(\mathcal{O}')} + \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^{-(k-1)}(\mathcal{O}')} \right) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \quad \forall h \in]0, h_0[\quad (5.3.9)$$

Tout d'abord, vue l'expression (5.3.1) de $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ et comme par hypothèse \mathcal{O}' exclut un voisinage de 0, il est clair qu'il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que $\|\Psi_\varepsilon^\varepsilon\|_{H^{k+1}(\mathcal{O}')} \leq \kappa |\ln \varepsilon|$. Conformément à l'usage, dans ce qui suit $H_0^{k-1}(\mathcal{O}')$ désignera l'adhérence de $\mathcal{D}(\mathcal{O}')$ dans $H^{k-1}(\mathcal{O}')$. On munit $H_0^{k-1}(\mathcal{O}')$ de la norme $\|\cdot\|_{H^{k-1}(\mathcal{O}')}$. Par définition $H^{-k+1}(\mathcal{O}')$ est le dual topologique de $H_0^{k-1}(\mathcal{O}')$ et sa norme est définie par

$$\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^{-(k-1)}(\mathcal{O}')} := \sup_{v \in H_0^{k-1}(\mathcal{O}')} \frac{\int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \bar{v}}{\|v\|_{H^{k-1}(\mathcal{O}')}} \quad (5.3.10)$$

Comme dans la preuve du lemme précédent, étant donné un $v \in L^2(\Omega)$ notons $g(v)$ l'unique élément de $H^2(\Omega)$ vérifiant $a(w, g(v)) = \int_{\Omega} w \bar{v}$. Étant donné la continuité de $a(\cdot, \cdot)$ dans $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que pour tout $v \in H^{k-1}(\Omega)$ on a

$$\left| \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}) \bar{v} \right| = |a(\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}), g(v))| = |a(\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}), \Delta_h(g(v)))| \leq \kappa \|\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} \|\Delta_h(g(v))\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarquons que pour $v \in H^{k-1}(\Omega)$ on a $g(v) \in H^{k+1}(\Omega)$ et il existe une constante $\kappa' > 0$ telle que $\|g(v)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq \kappa' \|v\|_{H^{k-1}(\Omega)}$ pour tout $v \in H^{k-1}(\Omega)$. En utilisant (5.3.6) on obtient l'existence d'une constante $\kappa'' > 0$ indépendante de ε, h telle que, pour tout $\varepsilon, h \in]0, 1[$ et pour tout $v \in H^{k-1}(\Omega)$, on a

$$\left| \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}) \bar{v} \right| \leq \kappa'' h^k \|\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} \|g(v)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq \kappa' \kappa'' h^k \|\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^{k-1}(\Omega)}.$$

Choisissons un $v \in H_0^{k-1}(\mathcal{O}')$. On peut étendre v par 0 dans $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}'}$ de sorte que $v \in H^{k-1}(\Omega)$. On a alors $\|v\|_{H^{k-1}(\Omega)} = \|v\|_{H^{k-1}(\mathcal{O}'})$. En reprenant l'inégalité précédente, on obtient donc l'existence d'un $\kappa > 0$ tel que

$$\left| \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}) \bar{v} \right| \leq \kappa h^k \|\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^{k-1}(\mathcal{O}')} \quad \forall v \in H_0^{k-1}(\mathcal{O}'), \quad \forall \varepsilon, h \in]0, 1[. \quad (5.3.11)$$

D'après (5.3.4) il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que $\|\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa \|\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)}$. Par ailleurs il existe $\varepsilon_0 > 0$ indépendante de ε, h telle que $\|\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}\|_{H^1(\Omega)} \leq 2\sqrt{|\Omega|} |\ln \varepsilon|$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. En injectant (5.3.11) dans (5.3.10) puis dans (5.3.9) on obtient le résultat annoncé. ■

5.3.4 Illustration numérique

La leçon que l'on peut tirer des résultats qui précèdent est que la fonction $\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}$ est bien approchée par les éléments de l'espace \mathbb{V}^h dans toute région qui exclut un voisinage de 0, en revanche son comportement au voisinage de 0 ne peut être reproduit par les fonctions de forme standard, et c'est la raison pour laquelle l'espace $\mathbb{V}_{\varepsilon}^h$ est plus riche que \mathbb{V}^h . C'est cette différence entre ces deux espaces qui permet au schéma associé à la formulation (5.2.6) d'être consistant. Nous illustrons ces conclusions par un calcul numérique.

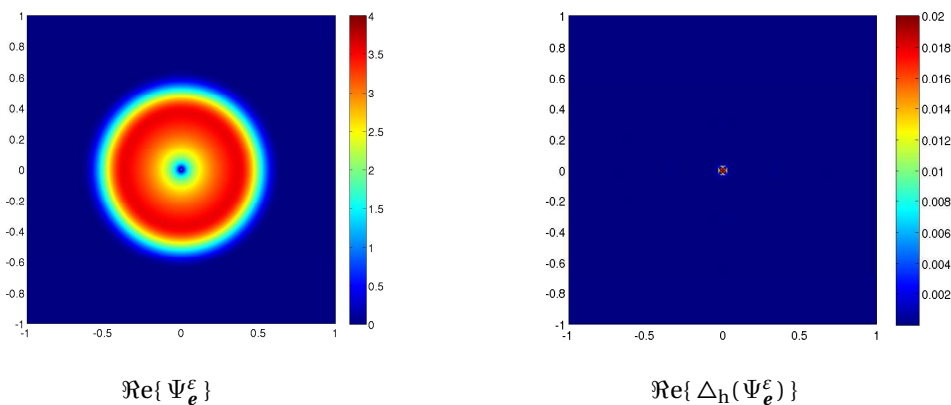


Fig.28 Approximation de la fonction additionnelle par des fonctions de forme standard

Ci-dessus sont représentées les valeurs que prennent $\Re\{\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon}\}$ et $\Re\{\Delta_h(\Psi_{\varepsilon}^{\varepsilon})\}$ dans la région $\max(|x|, |y|) < 1$ pour un obstacle de rayon $\varepsilon = 0.01$. Nous invitons notre lecteur à prendre garde à ce que les échelles

des deux graphes ne sont pas les mêmes. Sur l'image de droite on voit apparaître un point en 0 qui traduit le fait que $\Psi_\varepsilon^\varepsilon$ n'est pas bien approchée au voisinage de 0.

5.4 La méthode de Holland

Nous allons à présent nous intéresser à une nouvelle façon de résoudre numériquement le problème (4.2.6). C'est une méthode souvent utilisée en pratique. Il s'agit du schéma de Holland qui avait été proposé dans [66] pour la résolution des équations de Maxwell autour d'un fil mince parfaitement conducteur. Cet article propose une modification d'un schéma FDTD (différences finies) dans une grille cartésienne avec des fils alignés avec l'un des axes du maillage cartésien. Dans [26], Collino et Millot ont proposé un cadre continu dont une discrétisation standard redonne le schéma proposé par Holland dans [66]. Outre un cadre continu pour le schéma de Holland, [26] conduit à une généralisation de la méthode de Holland pour les éléments finis.

5.4.1 Présentation dans le cas de notre problème modèle

Nous allons présenter le principe du schéma de Holland lorsqu'il est transposé au problème de Helmholtz en 2D au moyen du cadre continu de [26]. Ce que nous présentons apparaît donc comme une version scalaire du schéma de [66]. L'idée centrale de cette méthode consiste à introduire un couplage entre les paramètres de Lagrange. Conformément à l'approche adoptée dans [26], nous appellerons schéma de Holland scalaire le schéma associé à la formulation discrète suivante

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}}, p_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}}) \in \mathbb{V}^{\mathbf{h}} \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \text{ tels que} \\ &\begin{cases} a(u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}} \bar{v} &= \int_{\Omega} f \bar{v} & \forall v \in \mathbb{V}^{\mathbf{h}} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}}} - \Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}} \cdot \check{q} \cdot \overline{\check{p}_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \mathbf{h}}} &= 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

Ici $\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}} \in \mathbb{C}$ dépend *a priori* de \mathbf{h} et ε . Le paramètre $\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}}$ est parfois appelé *inductance linéique* ou *paramètre de Holland*. Il s'agit d'un paramètre dont la valeur n'est pas connue *a priori*. Nous expliquerons au prochain paragraphe comment il est d'usage, en pratique, de déterminer la valeur de ce paramètre. Pour comprendre correctement la formulation ci-dessus rappelons que d'après la définition (4.2.1) on a

$$\check{q} = \int_{\Gamma_\varepsilon} q d\Gamma_\varepsilon \quad (5.4.2)$$

Il ne semble pas évident que la formulation variationnelle mixte associée à (5.4.1) soit bien posée. Puisque $\mathbb{V}^{\mathbf{h}} \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ est de dimension finie, pour le démontrer il suffit de prouver que seul le couple $(0, 0)$ satisfait les équations de (5.4.1) lorsque le second membre est nul. Le résultat suivant montre que cela est vérifié lorsque $\varepsilon, \mathbf{h} \rightarrow 0$ quel que soit le choix de $\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}}$ pourvu que $\Re\{\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}}\} \geq 0$.

Lemme 5.4.1.

Il existe des constantes $h_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendantes de ε, \mathbf{h} telles pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, pour tout $\mathbf{h} \in]0, h_0[$ et tout $\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}} \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\{\Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}}\} \geq 0$ la propriété suivante est vérifiée : si $(u, p) \in \mathbb{V}^{\mathbf{h}} \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ vérifie

$$\begin{cases} a(u, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p \bar{v} &= 0 & \forall v \in \mathbb{V}^{\mathbf{h}} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u} - \Lambda_{\varepsilon, \mathbf{h}} \cdot \check{q} \cdot \overline{\check{p}} &= 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases}$$

alors $(u, p) = (0, 0)$.

Preuve :

Cette preuve reprendra la démarche utilisée pour le lemme 5.1.1. Nous raisonnons donc par l'absurde et supposons l'existence d'une suite $(\varepsilon_n, h_n, \Lambda_n)$ telle que $\varepsilon_n + h_n \rightarrow 0$, $\Re\{\Lambda_n\} \geq 0$ et pour laquelle il existe des couples $(u_n, p_n) \in \mathbb{V}^{h_n} \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_{\varepsilon_n})$ vérifiant $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ et

$$\begin{cases} a(u_n, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_n \bar{v} = 0 & \forall v \in \mathbb{V}^{h_n} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}_n - \Lambda_n \cdot \check{q} \cdot \check{p}_n = 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_{\varepsilon_n}) \end{cases} \quad (5.4.3)$$

Puisque $H^1(\Omega)$ s'injecte de manière compacte dans $L^2(\Omega)$ on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que u_n converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers une limite $u_\infty \in H^1(\Omega)$. Montrons que $u_\infty = 0$. Il suffit de montrer que $a(u_\infty, v) = 0$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Comme $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H_\star^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ (cf lemme 1.2.2), il suffit de montrer $a(u_\infty, v) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H_\star^1(\Omega)$. Choisissons un $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H_\star^1(\Omega)$ arbitraire. Notons \mathcal{O} un voisinage borné de 0 tel que $v = 0$ dans \mathcal{O} . Choisissons un second voisinage de 0 noté \mathcal{O}' tel que $\bar{\mathcal{O}}' \subset \mathcal{O}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\Gamma_{\varepsilon_n} \subset \mathcal{O}' \quad \text{et} \quad P_{h_n} v = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{O}' \quad \text{dès que} \quad n \geq n_0.$$

On en tire en particulier $P_{h_n} v = 0$ sur Γ_{ε_n} dès que $n \geq n_0$. Comme $\|P_{h_n} v - v\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, par continuité de $a(\cdot, \cdot)$ il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de n telle que

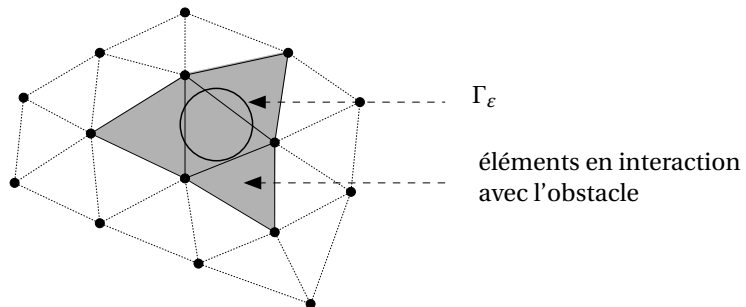
$$|a(u_\infty, v)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |a(u_n, v)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a(u_n, P_{h_n} v)| + \lim_{n \rightarrow \infty} |a(u_n, v - P_{h_n} v)| \leq \kappa \lim_{n \rightarrow \infty} \|P_{h_n} v - v\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

On en tire finalement $a(u_\infty, v) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H_\star^1(\Omega)$ ce qui implique que $u_\infty = 0$. On a donc $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Les équations (5.4.3) permettent de montrer que $\Re\{a(u_n, u_n) + \Lambda_n |\check{p}_n|^2\} = 0$. En utilisant (1.3.14) on a donc

$$\begin{aligned} \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Re\left\{\int_{\Gamma} \bar{u}_n T_{\Gamma} u_n\right\} + \Re\{\Lambda_n |\check{p}_n|^2\} \\ &\leq \Re\left\{a(u_n, u_n) + \Lambda_n |\check{p}_n|^2\right\} + \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|u_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

On en tire finalement que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ ce qui mène à une contradiction puisque nous avons supposé que $\|u_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ pour tout n . ■

La méthode de Holland est locale Notons également que dans la formulation (5.4.1) c'est l'espace d'approximation standard \mathbb{V}^h qui intervient, et non l'espace enrichi. Par ailleurs seul un nombre restreint de degrés de liberté sont couplés avec les paramètres de Lagrange qui "vivent sur le petit obstacle". Ces degrés de liberté correspondent aux fonctions de forme dont le support intersecte Γ_ε . Ainsi même quand $h \rightarrow 0$, le nombre de degrés de libertés couplés avec le petit obstacle reste borné. C'est en ce sens que nous dirons que le schéma associé à (5.4.1) est local : le schéma standard n'est perturbé par la présence du petit obstacle que sur un nombre fini de maille qui reste borné quand $h \rightarrow 0$.



Calibrage de la méthode de Holland Nous avons dit plus haut que la valeur du paramètre $\Lambda_{\varepsilon,h}$ est *a priori* inconnue. En pratique, quelle valeur choisir pour $\Lambda_{\varepsilon,h}$? L'expérience montre que, pour un ε et un h donnés, il existe une valeur de $\Lambda_{\varepsilon,h}$ pour laquelle l'erreur relative entre u^ε et $u_h^{\varepsilon,h}$ est très faible. En pratique on choisit la valeur de $\Lambda_{\varepsilon,h}$ à partir d'abaques. Ces abaques ont été établis en recherchant une valeur adéquate de $\Lambda_{\varepsilon,h}$ sur des cas modèles.

Illustrons ce propos par une expérience numérique. Plaçons-nous dans les conditions communes aux deux expériences des paragraphes 5.1.4 et 5.2.5 : petit obstacle circulaire de rayon ε , la source est une onde plane incidente, on impose la condition de Robin modifiée (5.1.7) sur $\Gamma \dots$ etc. Choisissons d'utiliser (5.4.1) pour discrétiser la formulation (5.1.6). Dans ce cas elle s'écrit

Trouver $(u_h^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_h^{\varepsilon,h} \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega} u_h^{\varepsilon,h} \bar{v} + \lambda_{\Gamma} \int_{\Gamma} u_h^{\varepsilon,h} \bar{v} + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n_{\Gamma}} + \lambda_{\Gamma} u_i \right) \bar{v}, & \forall v \in \mathbb{V}^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u_h^{\varepsilon,h}} - \Lambda_{\varepsilon,h} \cdot \check{q} \cdot \check{p}_h^{\varepsilon,h} = 0, & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (5.4.4)$$

Nous résolvons ce problème pour une épaisseur $\omega\varepsilon/2\pi = 10^{-5}$ fixe, un pas de maillage $\omega h/2\pi = 4 \cdot 10^{-2}$ fixe lui aussi, et des éléments finis \mathbb{Q}_3 . Nous faisons varier le paramètre $\Lambda_{\varepsilon,h}$ et représentons l'erreur relative correspondante. On obtient la courbe de la Fig.29.

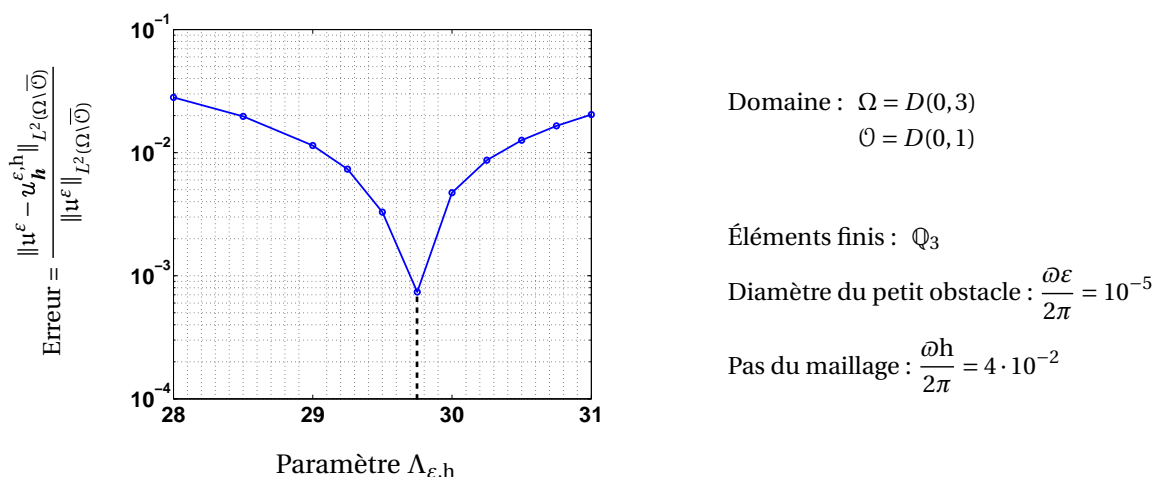


Fig.29 Calibrage de la méthode de Holland

On constate que pour une unique valeur critique du paramètre de Holland, l'erreur relative devient très faible. Cette erreur relative est même tout à fait comparable à celles que nous avons obtenues dans les mêmes conditions, avec les mêmes valeurs de ε et h pour le schéma enrichi associé à (5.2.11).

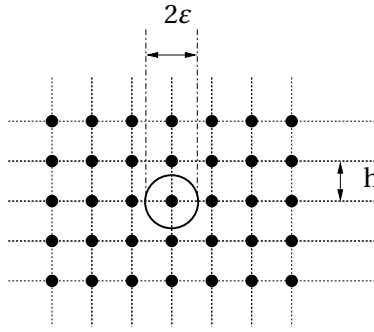
Ce que nous avons présenté sur le calibrage de la méthode de Holland concerne l'équation de Helmholtz autour d'un petit obstacle. Mais on rencontre exactement le même phénomène pour les équations de Maxwell en 3D autour d'un fil mince. Les abaques dont nous parlions plus haut répertorient des valeurs critiques de $\Lambda_{\varepsilon,h}$ correspondant à des cas modèles. Mais pour beaucoup de situations ces abaques ne sont que très approximatifs et il peut être difficile de déterminer une valeur du paramètre de Holland conduisant à une erreur relative raisonnable. À notre connaissance, dans le cas d'un maillage arbitraire avec un fil orienté arbitrairement, il n'existe pas dans la littérature de formule théorique ou de moyen

systematique pour calculer cette valeur.

Pour l'électromagnétisme, Collino et Millot dans [26] ont proposé une formule analytique pour le paramètre de Holland, dans le cas d'un fil aligné avec les axes d'un maillage cartésien. Présentons ce résultat lorsqu'il est transposé sur le problème de Helmholtz en 2D. Supposons que le maillage est cartésien au voisinage du petit obstacle. Supposons également que ce petit obstacle est un disque de rayon ε centré autour d'un noeud du maillage comme sur la figure ci-dessous. Dans cette situation, l'étude menée par Collino et Millot montre que

$$\Lambda_{\varepsilon,h} = \ln\left(\frac{h}{\varepsilon}\right) + C + O(\varepsilon + h)$$

avec un C indépendant de ε et h , et aussi indépendant de ω (!), mais qui dépend de la position de l'obstacle par rapport au maillage. La valeur de C résulte d'un calcul analytique faisant intervenir des fonctions elliptiques. Avec une telle valeur, l'erreur relative devient raisonnable (inférieure à quelques pourcents).



Comparaison avec le schéma de Galerkin enrichi En résumé, on peut dire que le schéma de Holland dispose de plusieurs avantages lorsqu'il est comparé au schéma de Galerkin enrichi. Il est aussi précis, il est local contrairement au schéma de Galerkin enrichi qui ne l'est pas. Enfin il est beaucoup plus facile à implémenter.

Cependant il souffre de plusieurs inconvénients. Tout d'abord il doit être calibré et, à notre connaissance, il n'existe pas de moyen systématique de calculer une valeur convenable du paramètre de Holland. Par ailleurs il n'existe pas non plus de justification théorique de la précision d'une telle méthode.

5.4.2 Retour sur le schéma de Galerkin enrichi

Nous allons exhiber un lien entre le schéma de Holland et le schéma de Galerkin enrichi. Ceci mènera à une formule théorique pour $\Lambda_{\varepsilon,h}$, et également à une preuve de consistance pour la méthode de Holland. Pour établir ce lien nous décomposons d'une manière particulière la fonction $u^{\varepsilon,h}$ résolvant (5.2.6). La définition (5.2.5) suggère en effet que $u^{\varepsilon,h}$ soit décomposée sous la forme $u^{\varepsilon,h} = v_h + \alpha \Psi_\varepsilon^\varepsilon$ avec $v_h \in \mathbb{V}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons qu'on a aussi

$$\mathbb{V}_\varepsilon^h = \mathbb{V}^h \oplus \text{span}\{\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\} = \mathbb{V}^h \oplus \text{span}\{{}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\}$$

Ainsi nous pouvons également considérer la décomposition

$$u^{\varepsilon,h} = u_r^{\varepsilon,h} + p_s^{\varepsilon,h} \cdot \frac{1}{2\pi} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \quad \text{avec} \quad u_r^{\varepsilon,h} \in \mathbb{V}, \quad p_s^{\varepsilon,h} \in \mathbb{C}. \quad (5.4.5)$$

Cette décomposition est bien évidemment unique, et elle constitue donc la définition de $u_r^{\varepsilon,h}$ et $p_s^{\varepsilon,h}$. Elle est intéressante car d'après la Fig.28 $\text{supp}(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))$ est concentré autour de 0 ce qui n'était pas le cas de

$\text{supp}(\Psi_\epsilon^\varepsilon)$. En injectant cette décomposition dans la formulation (5.2.6) on obtient

$(u_r^{\varepsilon,h}, p_s^{\varepsilon,h}, \mathbf{p}^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{C} \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_r^{\varepsilon,h}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{v} \mathbf{p}^{\varepsilon,h} = \int_{\Omega} f \bar{v} \quad \forall v \in \mathbb{V}^h \\ \frac{p_s^{\varepsilon,h}}{2\pi} a(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)) + \int_{\Gamma_\varepsilon} \overline{{}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} \mathbf{p}^{\varepsilon,h} = \int_{\Omega} f \overline{{}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u_r^{\varepsilon,h}} + \frac{p_s^{\varepsilon,h}}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} = 0 \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{array} \right. \quad (5.4.6)$$

Dans ces équations, plusieurs termes se sont éliminés car $a(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), v) = 0$ pour tout $v \in \mathbb{V}^h$. Nous nous débarrassons de l'inconnue $p_s^{\varepsilon,h}$ par une simple manipulation algébrique. Avec la deuxième équation on exprime $p_s^{\varepsilon,h}$ en fonction de $\mathbf{p}^{\varepsilon,h}$. On obtient

$$\frac{p_s^{\varepsilon,h}}{2\pi} = - \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} \overline{{}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} \mathbf{p}^{\varepsilon,h}}{a(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon))} + \frac{\int_{\Omega} \overline{{}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} f}{a(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon))} \quad (5.4.7)$$

Notons que d'après la définition de u^0 donnée par (3.1.5), on a $a(u^0, v) = \int_{\Omega} f \bar{v}$ pour tout $v \in H^1(\Omega)$. Vu la définition de ${}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)$ donnée par (5.3.5) on a donc

$$\int_{\Omega} f \overline{{}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} = a(\Delta_h(u^0), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)) = a(\Delta_h(u^0), \Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)) \quad (5.4.8)$$

En injectant (5.4.7) et (5.4.8) dans la troisième équation de (5.4.6), on voit que le couple $(u_r^{\varepsilon,h}, \mathbf{p}^{\varepsilon,h})$ satisfait les équations

$(u_r^{\varepsilon,h}, \mathbf{p}^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} a(u_r^{\varepsilon,h}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{v} \mathbf{p}^{\varepsilon,h} = \int_{\Omega} f \bar{v} \quad \forall v \in \mathbb{V}^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{u_r^{\varepsilon,h}} - c_{\varepsilon,h}(q, \mathbf{p}^{\varepsilon,h}) = g_{\varepsilon,h}(q) \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{array} \right. \quad (5.4.9)$$

avec $\bar{a}(u, v) := \overline{a(u, v)}$

$$c_{\varepsilon,h}(q, \mathbf{p}^{\varepsilon,h}) := \frac{\left(\int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} \right) \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon) \overline{\mathbf{p}^{\varepsilon,h}} \right)}{\bar{a}(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon))} \quad (5.4.10)$$

$$g_{\varepsilon,h}(q) := - \frac{\bar{a}(\Delta_h(u^0), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon))}{\bar{a}(\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon))} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Delta_h(\Psi_\epsilon^\varepsilon)} \right)$$

On peut regarder (5.4.9) comme une formulation variationnelle de type mixte dont le couple $(u_r^{\varepsilon,h}, \mathbf{p}^{\varepsilon,h})$ est solution. Remarquons que la formulation (5.4.9) ressemble beaucoup à (5.4.1). Elle fait intervenir le même type de couplage entre multiplicateurs de Lagrange. Cependant elle en diffère par le second membre $g_{\varepsilon,h}(q)$. Le lemme suivant montre que ce second membre est en réalité petit.

Lemme 5.4.2.

Soit k l'ordre des éléments utilisés pour la discrétisation. Alors il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de ε, h, f telles que

$$|g_{\varepsilon, h}(q)| \leq \kappa_0 \sqrt{|\ln \varepsilon|} h^k \|f\|_{H^{k-1}(\Omega)} |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{app}}(\Gamma_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall h \in]0, h_0[.$$

Preuve :

Comme on a par l'hypothèse **M2** que $f \in H^{k-1}(\Omega)$ on a donc $u^0 \in H^{k+1}(\Omega)$ par régularité elliptique et il existe $\kappa > 0$ indépendant de f tel que $\|u^0\|_{H^{k+1}(\Omega)} \leq \kappa \|f\|_{H^{k-1}(\Omega)}$. D'après (5.3.6) il existe donc $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que $\|\Delta_h(u^0)\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa h^k \|f\|_{H^{k-1}(\Omega)}$ pour tout $h \in]0, 1[$. Puisque la forme sesquilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, par application directe de (5.4.8) et (5.3.8), on obtient l'existence de $\kappa_1, \kappa_2, h_0 > 0$ indépendantes de ε, h telles que

$$\left| \frac{\bar{a}(\Delta_h(u^0), {}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))}{\bar{a}(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \right| \leq \kappa_1 \frac{\|\Delta_h(u^0)\|_{H^1(\Omega)}}{\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}} \leq \kappa_2 h^k \frac{\|f\|_{H^{k-1}(\Omega)}}{\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}} \quad \forall \varepsilon, h \in]0, 1[. \quad (5.4.11)$$

Pour majorer la deuxième partie de $|g_{\varepsilon, h}(q)|$ nous pouvons reprendre le calcul (5.1.5). On obtient l'existence de $\kappa_3 > 0$ indépendantes de ε, h, f telles que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)} \right| \leq \kappa_3 \sqrt{|\ln \varepsilon|} |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall \varepsilon, h \in]0, 1[. \quad (5.4.12)$$

Il reste à combiner les deux inégalités (5.4.11) et (5.4.12) et à prendre $\kappa_0 = \kappa_2 \kappa_3$. ■

Simplification du couplage entre multiplicateurs de Lagrange Avec le résultat qui précède, on est tenté de négliger le second membre $g_{\varepsilon, h}(q)$. Par ailleurs en appliquant la formule (4.2.3) dans (5.4.10) (dans le cas présent on a $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon) = 1/\varepsilon$ car $\mathfrak{S}_\varepsilon(\mathbb{R}, \varphi) = \ln \mathbb{R}$), on voit que la forme sesquilinéaire $c_{\varepsilon, h}(\cdot, \cdot)$ est bien de la forme

$$c_{\varepsilon, h}(p, q) = \Lambda_{\varepsilon, h}^0 \cdot \check{p} \overline{\check{q}}, \quad \text{avec} \quad \Lambda_{\varepsilon, h}^0 := \frac{\check{\mu}_\varepsilon[{}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)] \overline{\check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]}}{\bar{a}(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \quad (5.4.13)$$

Dans ces conditions on peut rapprocher (5.4.9) de la formulation (5.4.1) lorsqu'on choisit pour valeur de l'inductance $\Lambda_{\varepsilon, h} = \Lambda_{\varepsilon, h}^0$. Nous allons montrer en effet que, dans le cas de notre problème modèle, $\Lambda_{\varepsilon, h}^0$ correspond à une valeur critique du paramètre de Holland. Pour montrer ceci nous aurons besoin d'établir plusieurs résultats intermédiaires. La proposition suivante permettra plusieurs simplifications dans les identités que nous avons dérivées ci-dessus.

Proposition 5.4.1.

Sous les hypothèses **M1, M2, M3** et **M4**, il existe $\kappa, \varepsilon_0, h_0 > 0$ indépendants de ε, h tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et pour tout $h \in]0, h_0[$ on a

$$\left| \frac{2\pi \check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} - 1 \right| \leq \kappa h |\ln \varepsilon| \quad \text{et} \quad \left| \frac{2\pi \check{\mu}_\varepsilon[{}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]}{a({}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} - 1 \right| \leq \kappa h |\ln \varepsilon|.$$

Preuve :

Nous allons montrer la première estimation qui fait intervenir $\check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]$. La deuxième estimation se démontre de la même manière. Rappelons que $a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)) = a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Psi_\varepsilon^\varepsilon)$. En appliquant une formule de Green dans Ω_ε on obtient

$$\begin{aligned} a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)) &= \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\partial \Psi_\varepsilon^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - 2 \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \nabla \chi^e \cdot \nabla \ln |\mathbf{x}| \\ &\quad - \int_{\Omega} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon (\Delta \chi^e + \omega^2 \chi^e) \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \end{aligned} \quad (5.4.14)$$

Rappelons en effet qu'avec l'hypothèse **M4** on a $\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e(\mathbf{x}) = \ln(|\mathbf{x}|/\varepsilon) \cdot \mathbf{1}_{\Omega_\varepsilon}(\mathbf{x})$. Puisque $\chi^e = 1$ dans un voisinage de Γ_ε , on a donc

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\partial \overline{\Psi_\varepsilon^\varepsilon}}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\partial (\overline{\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e})}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 2\pi \check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]$$

Divisons (5.4.14) par $a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))$. Il vient

$$\frac{2\pi \check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} = 1 + 2 \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\nabla \chi^e \cdot \nabla \ln|\mathbf{x}|}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} + \int_{\Omega} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e \frac{(\Delta \chi^e + \omega^2 \chi^e) \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))}$$

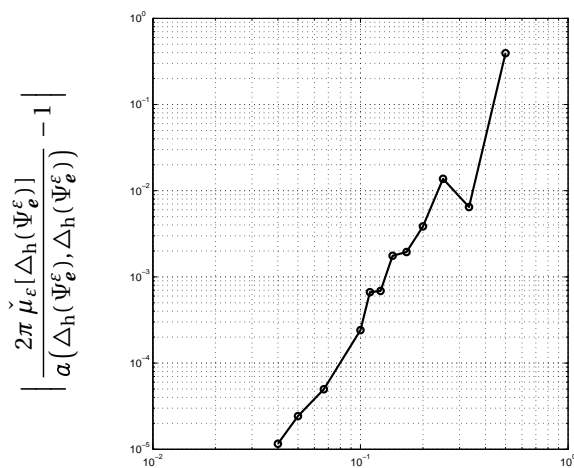
Il reste à majorer les deux derniers termes du membre de droite de l'identité ci-dessus. Rappelons que d'après (5.3.2) il existe un $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε tel que $\|\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\sqrt{|\Omega|} |\ln \varepsilon|$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. D'après (5.3.8) et la proposition 5.3.1 et le lemme 5.3.1 il existe des constantes $\kappa, \kappa' > 0$ indépendantes de ε, h telle que

$$\left| \int_{\Omega} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\nabla \chi^e \cdot \nabla \ln|\mathbf{x}|}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \right| \leq \kappa h \frac{\|\nabla \chi^e \cdot \nabla \ln|\mathbf{x}|\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}} \leq \kappa' h$$

$$\left| \int_{\Omega} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e(\mathbf{x}) \frac{(\Delta \chi^e + \omega^2 \chi^e) \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \right| \leq \kappa h |\ln \varepsilon| \frac{\|\Delta \chi^e + \omega^2 \chi^e\|_{L^2(\Omega)}}{\|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}} \leq \kappa h |\ln \varepsilon|$$

ce qui permet de conclure. ■

Nous avons pu vérifier la validité du résultat ci-dessus par une expérience numérique. Nous nous sommes replacés dans les mêmes conditions que pour l'expérience du §5.2.5. En nous plaçant à ε fixe et en faisant varier h on a obtenu la courbe suivante qui suggère que la convergence vers 1 est encore plus rapide que dans l'énoncé de la proposition 5.4.1.



$$\frac{\text{step of the mesh}}{\text{wavelength}} = \frac{\omega h}{2\pi}$$

$$\frac{\text{épaisseur obstacle}}{\text{pas du maillage}} = \frac{\varepsilon}{h} = 10^{-4}$$

Éléments finis : \mathbb{Q}_3

Rappelons qu'avec l'hypothèse **M3** nous avons supposé que $\varepsilon = \varepsilon(h) = h^{1+\alpha}$ et donc $h \ln \varepsilon(h) \rightarrow 0$. La proposition précédente permet alors de simplifier beaucoup l'expression de la constante $\Lambda_{\varepsilon, h}^0$. Il suffit de reprendre son expression donnée par (5.4.13) et d'utiliser la proposition 5.4.1 et le fait que $a({}^t \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), {}^t \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)) = a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))$.

Corollaire 5.4.1.

Si les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** sont satisfaites, alors il existe deux constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de ε, h telles que

$$\left| \Lambda_{\varepsilon, h}^0 - \frac{1}{4\pi^2} a(\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon)) \right| \leq \kappa_0 h |\ln h| \quad \forall h \in]0, h_0[.$$

Formulons deux remarques autour de ce résultat. Notons tout d'abord que comme $\Psi_\theta^\varepsilon = 0$ sur Γ_ε , avec l'hypothèse **M3** on a $2\pi \check{\mu}_\varepsilon[\Pi_h(\Psi_\theta^\varepsilon)] = a(\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon), {}^t\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon)) + O(h \ln h)$ ce qui simplifie grandement le calcul de $\Lambda_{\varepsilon, h}^0$. Par ailleurs le résultat ci-dessus indique l'existence d'un h'_0 indépendant de h tel que $\Re\{\Lambda_{\varepsilon, h}^0\} \geq 0$ pour tout $h \in]0, h'_0[$. Ceci est une conséquence de (5.3.8).

Corollaire 5.4.2.

Si les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** sont satisfaites, alors il existe deux constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de ε, h telles que

$$\Re\{\Lambda_{\varepsilon, h}^0\} \geq \kappa_0 \|\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall h \in]0, h_0[.$$

Démonstration du verrouillage du schéma de Galerkin standard Outre les propriétés sur la constante $\Lambda_{\varepsilon, h}^0$, la proposition 5.4.1 permet également de simplifier l'identité (5.4.7). Le résultat suivant donne du même coup un ordre de grandeur pour $p_s^{\varepsilon, h}$ grâce à (5.2.10). Sa démonstration est directe, il suffit de combiner (5.4.11) et le résultat de la proposition 5.4.1.

Lemme 5.4.3.

Si les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** sont satisfaites, alors il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que

$$|p_s^{\varepsilon, h} - \check{p}^{\varepsilon, h}| \leq \kappa_0 h |\ln h| \quad \forall h \in]0, h_0[$$

Dans le cas où $u^0(0) \neq 0$ il existe donc des constantes $\kappa_-, \kappa_+, h_0 > 0$ telles que

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon(h)|} \leq |p_s^{\varepsilon, h}| \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon(h)|} \quad \forall h \in]0, h_0[$$

Le lemme 5.4.3 permet également au passage de montrer que, quelle que soit la valeur de $u^0(0)$, il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que $|p_s^{\varepsilon, h}| \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon(h)|^{-1}$ pour tout $h \in]0, h_0[$. En rapprochant cette remarque avec le résultat du lemme 5.3.2, on obtient que pour tout ouvert \mathcal{O} tel que $\bar{\mathcal{O}} \subset \Omega \setminus \{0\}$, il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que

$$\|u^{\varepsilon, h} - u_r^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\mathcal{O})} = \frac{|p_s^{\varepsilon, h}|}{2\pi} \cdot \|\Delta_h(\Psi_\theta^\varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \kappa_0 h^k \quad h \in]0, h_0[\quad k = \text{ordre des éléments}. \quad (5.4.15)$$

Comme nous disposons d'un ordre de grandeur pour $p_s^{\varepsilon, h}$ et que nous savons d'après le théorème 5.2.1 que le schéma de Galerkin enrichi est consistant, le résultat précédent permet également de démontrer que le schéma de Galerkin standard est verrouillant.

Lemme 5.4.4.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ le couple solution de (4.2.6). Soit u^0 le champ limite défini par (3.1.5). Si les hypothèses **M1**, **M2**, **M3**, **M4** sont satisfaites et si $u^0(0) \neq 0$, alors il existe des constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \geq \frac{\kappa_0}{|\ln \varepsilon(h)|} \quad \forall h \in]0, h_0[\quad \text{pour } u^0(0) \neq 0.$$

Preuve :

Nous allons utiliser la consistance du schéma enrichi. Considérons $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h})$ le couple solution de (5.2.6). En faisant intervenir la décomposition (5.4.5), par inégalité triangulaire on a

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \geq \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^{\varepsilon,h} - v\|_{H^1(\Omega)} - \|u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \geq \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|p_s^{\varepsilon,h} \cdot \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) - v\|_{H^1(\Omega)} - \|u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$$

Rappelons que $p_s^{\varepsilon,h} \in \mathbb{C}$. Ainsi en utilisant (5.3.7) et le théorème 5.2.1, on obtient l'existence de constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ et d'un entier $q \in \mathbb{N}$ indépendantes de h telles que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \|u^\varepsilon - v\|_{H^1(\Omega)} \geq \kappa_0 |p_s^{\varepsilon,h}| - \kappa_0 |\ln \varepsilon(h)|^q (\sqrt{\varepsilon(h)} + h) \quad \forall h \in]0, h_0[.$$

Notons que l'hypothèse **M3** implique que $|\ln \varepsilon(h)|^q (\sqrt{\varepsilon(h)} + h) = o(|\ln \varepsilon(h)|^{-1})$. Le lemme 5.4.3 permet alors de conclure. ■

5.4.3 Consistance du schéma de Holland, formule théorique pour l'inductance

En résumé les équations de (5.4.9) ressemblent aux équations de (5.4.1), et puisque $h |\ln \varepsilon(h)| \rightarrow 0$ il existe $h_0 > 0$ tel que $\Re\{\Lambda_{\varepsilon,h}^0\} \geq 0$ dès que $h \in]0, h_0[$. La valeur $\Lambda_{\varepsilon,h}^0$ est alors un bon candidat pour le paramètre de Holland $\Lambda_{\varepsilon,h}$. En effet nous montrons maintenant que dans le cas où on choisit $\Lambda_{\varepsilon,h} = \Lambda_{\varepsilon,h}^0$ le couple $(u_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h})$ est proche de $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h})$ de sorte que le schéma de Holland devient consistant.

Proposition 5.4.2.

Si les hypothèses **M1**, **M2**, **M3** et **M4** sont satisfaites, soit $(u_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h})$ l'unique couple solution de (5.4.1) avec la valeur

$$\Lambda_{\varepsilon,h} = \frac{\check{\mu}_\varepsilon[\overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)] \overline{\check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]}}{\bar{a}(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \quad (5.4.16)$$

Soit également $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ l'unique couple solution de (5.2.6) et soit $u_\Gamma^{\varepsilon,h} \in \mathbb{V}^h$ défini par (5.4.5). Alors pour tout ouvert \mathcal{O} tel que $\overline{\mathcal{O}} \subset \Omega \setminus \{0\}$ il existe des constantes $\kappa_1, h_1 > 0$ indépendantes de h telles que

$$\|u_h^{\varepsilon,h} - u^{\varepsilon,h}\|_{H^1(\mathcal{O})} + |p_h^{\varepsilon,h} - p^{\varepsilon,h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_1 h^k |\ln h| \quad \forall h \in]0, h_1[. \quad (5.4.17)$$

Preuve :

Dans un premier temps, nous allons fabriquer un couple $(\tilde{u}_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ à partir de $(u_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h})$. Nous ferons apparaître $(\tilde{u}_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h})$ comme la solution de (5.2.6) avec une perturbation au second membre. Nous posons par définition

$$\tilde{u}_h^{\varepsilon,h} := u_h^{\varepsilon,h} + \left\{ -\frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} \overline{\overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)} p_h^{\varepsilon,h}}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} + \frac{\int_\Omega \overline{\overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)} f}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), \overset{t}{\Delta}_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \right\} \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)$$

En reprenant dans le sens inverse les calculs du §5.4.2 on obtient que le couple $(\tilde{u}_h^{\varepsilon,h}, p_h^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ satisfait

$$\begin{cases} a(\tilde{u}_h^{\varepsilon,h}, v) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p_h^{\varepsilon,h} \bar{v} = \int_\Omega f \bar{v} & \forall v \in \mathbb{V}_\varepsilon^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\tilde{u}_h^{\varepsilon,h}} = -g_{\varepsilon,h}(q) & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{cases} \quad (5.4.18)$$

Considérons alors la différence $(u^{\varepsilon,h} - \tilde{u}_h^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h} - p_h^{\varepsilon,h})$. Ce couple est solution d'une formulation semblable à (5.4.18) ci-dessus mais avec seulement $g_{\varepsilon,h}(q)$ au second membre. On peut alors appliquer le

résultat de continuité du théorème 4.A.1. Vu les lemmes 5.1.1 et 5.1.2, il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε, h telle que

$$\|\tilde{u}_h^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + |p_h^{\varepsilon, h} - p^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \sup_{q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)} \frac{|g_{\varepsilon, h}(q)|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}}$$

Injectons le résultat du lemme 5.4.2 dans cette inégalité. On obtient l'existence d'un $\kappa' > 0$ indépendant de ε, h telle que

$$\|\tilde{u}_h^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + |p_h^{\varepsilon, h} - p^{\varepsilon, h}|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_1 h^k |\ln h| \quad (5.4.19)$$

Par ailleurs nous écrivons que $\|v\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ et revenons à la décomposition (5.4.5). D'après l'identité (5.4.7) on a

$$\begin{aligned} \|u_h^{\varepsilon, h} - u_r^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leq \|\tilde{u}_h^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + \left\| \Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon) \frac{\int_{\Gamma_\varepsilon} \overline{t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)} (p_h^{\varepsilon, h} - p^{\varepsilon, h}) d\Gamma_\varepsilon}{a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))} \right\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \|\tilde{u}_h^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{O})} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \overline{t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)} (p_h^{\varepsilon, h} - p^{\varepsilon, h}) d\Gamma_\varepsilon \right|}{|a(\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon), t\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon))|} \end{aligned}$$

Rappelons que d'après (5.4.15) il existe des constantes $\kappa_2, h_2 > 0$ indépendantes de h telles que $\|u_r^{\varepsilon, h} - u^{\varepsilon, h}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \kappa_2 h^k$ pour tout $h \in]0, h_2[$. Pour conclure il suffit donc de combiner l'inégalité ci-dessus avec (5.1.5), (5.3.8), le lemme 5.3.2 et (5.4.19). ■

En résumé la proposition 5.4.2 fournit une formule théorique pour le calibrage de $\Lambda_{\varepsilon, h}$, en même temps qu'elle fournit une preuve de consistance. Par ailleurs cet énoncé permet d'identifier qualitativement la solution $u_h^{\varepsilon, h}$ comme la partie régulière de $u^{\varepsilon, h}$ car l'estimation d'erreur (5.4.17) ne vaut que dans tout ouvert \mathcal{O} excluant un voisinage de l'origine. On constate numériquement en effet que la méthode de Holland ne permet pas de reconstituer fidèlement u^ε au voisinage du petit obstacle.

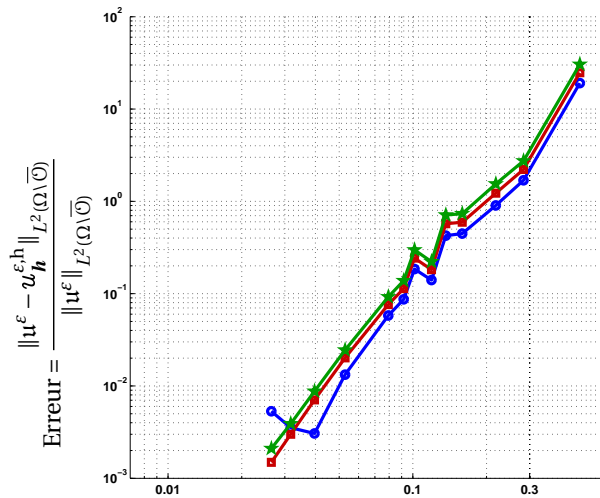
Il est possible de simplifier la formule (5.4.16) pour la rendre plus exploitable dans la pratique. Grâce à la proposition 5.4.1 on peut proposer de choisir plutôt

$$\Lambda_{\varepsilon, h} = \frac{1}{2\pi} \check{\mu}_\varepsilon[\Delta_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)] = \frac{1}{2\pi} \check{\mu}_\varepsilon[\Pi_h(\Psi_\varepsilon^\varepsilon)]. \quad (5.4.20)$$

Conclusion sur la nature de la méthode de Holland Comme nous l'avons annoncé en introduction ce résultat montre le lien entre le schéma de Galerkin enrichi et la méthode de Holland, et présente donc cette dernière comme une forme cachée de la méthode de la fonction singulière. Cette conclusion nous semble intéressante car elle permet de rattacher l'étude de la méthode de Holland à une littérature plus vaste cf [58, 34, 35, 13, 69, 22] et d'autres.

5.4.4 Validation numérique de la formule d'inductance critique

Nous présentons maintenant une expérience numérique destinée à valider la formule (5.4.16). Nous nous plaçons dans le même contexte que pour l'expérience du §5.1.4 avec $\Omega = D(0, 3)$, $\varpi = 2\pi$. Nous nous intéressons à résoudre numériquement la formulation (5.1.6) à l'aide du schéma de Holland (5.4.1) en choisissant pour $\Lambda_{\varepsilon, h}$ la valeur donnée par la formule (5.4.16). Nous avons utilisé des éléments finis \mathbb{Q}_2 . Ci-dessous sont représentées, pour trois valeurs de ε , les courbes d'erreur relative lorsque $h \rightarrow 0$. On constate en comparant avec les résultats du §5.2.5 que la précision est semblable à celle obtenue avec un schéma de Galerkin enrichi.



Domaine : $\Omega = D(0,3)$
 $\mathcal{O} = D(0,1)$

Éléments finis : \mathbb{Q}_2

Couleur	ε	taux de convergence
—	10^{-4}	2.9743
—	10^{-5}	3.1938
—	10^{-6}	3.1702

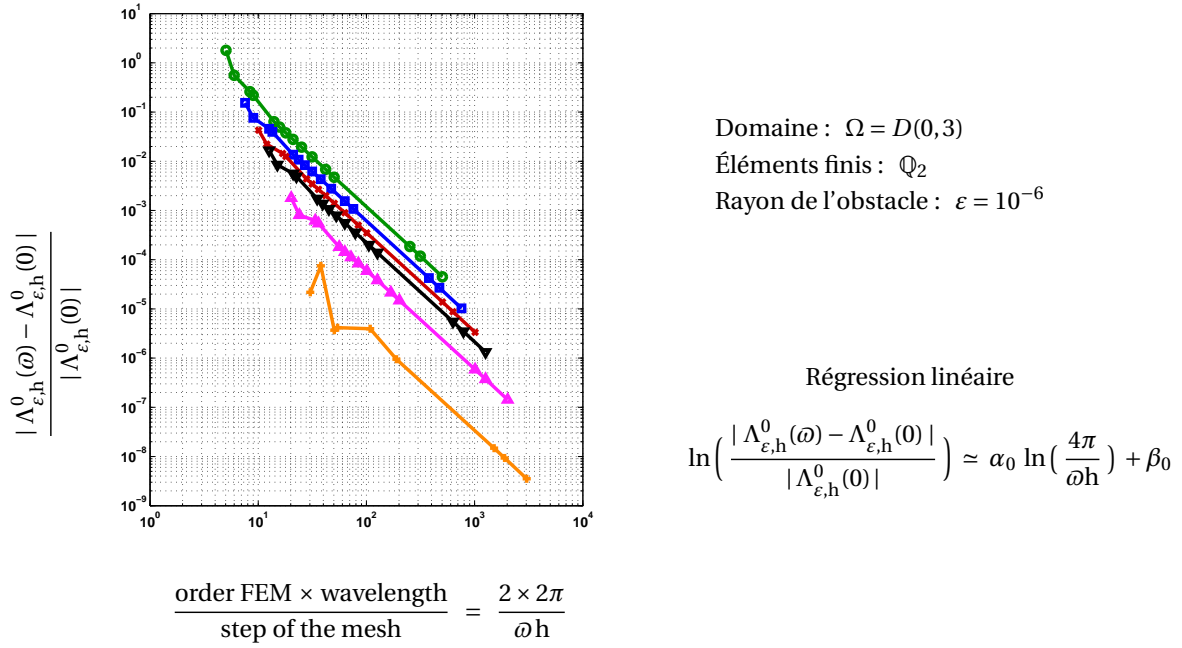
$$\frac{\text{step of the mesh}}{\text{wavelength}} = \frac{\omega h}{2\pi}$$

5.4.5 Dépendance du calibrage par rapport à la fréquence

Nous savons que le paramètre de Holland donné par la formule (5.4.16) dépend de h et de $\varepsilon(h)$. Il est naturel de s'interroger également sur sa dépendance vis-à-vis de ω . Nous n'avons pu apporter une étude théorique concluante sur cette question. Cependant nous présentons ici une étude numérique sur ce sujet. Notons $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega)$ le nombre calculé au moyen de la formule (5.4.16) lorsque la pulsation est ω .

Ci-dessous nous avons représenté les résultats d'une série de calculs réalisés dans les conditions suivantes. Tout d'abord nous avons considéré comme auparavant la formulation (5.1.6) posée dans le domaine $\Omega = D(0,3)$. Nous avons considéré un obstacle d'épaisseur fixé $\varepsilon = 10^{-6}$. Concernant la discrétisation nous avons utilisé un maillage en quadrangle avec des éléments \mathbb{Q}_2 . Nous avons considéré 6 maillages différents dont le pas est donné dans la table de la Fig.30 ci-dessous.

Pour chacun de ces maillages nous avons calculé $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega = 0)$ d'une part, et aussi $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega)$ pour ω variant dans l'intervalle $[0.03, 16]$. Les courbes ci-dessous représentent en échelle logarithmique, l'erreur relative entre $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega)$ et $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega = 0)$ lorsque ω varie. Enfin pour chaque pas de maillage, nous avons fait figuré les caractéristiques de la droite approchant le mieux la courbe $\omega \mapsto |\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega) - \Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)| / |\Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)|$ au sens des moindres carrés (obtenue à l'aide de la fonction 'polyfit' sous Matlab).



Couleur	Pas de maillage h	$\Re\{\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega=0)\}$	pente α_0	ordonnée à l'origine β_0
—	7.9372 1e-2	45.8579	-2.1569	3.1985
—	5.2872 1e-2	48.6451	-2.0430	2.0174
—	3.9638 1e-2	48.1400	-2.0236	1.3793
—	3.1703 1e-2	47.1408	-2.0182	0.8776
—	1.9807 1e-2	44.4313	-2.0131	-0.4394
—	1.3202 1e-2	41.9246	-1.9308	-3.9097

Fig.30 Dépendance de l'inductance critique par rapport à la fréquence

Ces résultats numériques suggèrent les conclusions suivantes (sans toutefois faire office de preuve!). Puisqu'à h fixé la pente de chaque droite est environ de -2 , il existe une constante κ_h dépendant éventuellement de h et $\varepsilon(h)$ mais indépendante de ω telle que

$$\frac{|\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega) - \Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)|}{|\Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)|} \leq \kappa_h \omega^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+$$

Signalons que cette pente -2 est sans rapport avec l'ordre des éléments : on obtient également des pentes de -2 avec des éléments finis Q_1 ou Q_3 . Par ailleurs on constate sur la figure Fig.30 qu'à ωh fixé on a $|\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega) - \Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)| \rightarrow 0$ lorsque $h \rightarrow 0$. Une étude des ordonnées à l'origine suggère que, à ε fixé, il existe une constante κ indépendante de h telle que

$$\frac{|\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega) - \Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)|}{|\Lambda_{\varepsilon,h}^0(0)|} \leq \kappa \omega^2 h^2 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+, \quad \forall h \in]0, 1[.$$

5.4.6 Dépendance du calibrage par rapport à la position de l'obstacle

Dans ce paragraphe nous désirons montrer à l'aide de résultats numériques, que la valeur de l'inductance critique donnée par (5.4.13) dépend significativement de la position de l'obstacle par rapport au maillage. Pour ceci nous avons réalisé le calcul de $\Lambda_{\varepsilon,h}^0$ donné par la formule (5.4.16) dans les conditions de l'expérience décrite au §5.1.4. Nous avons utilisé un maillage cartésien fixé, en plaçant l'obstacle à trois endroits différents comme sur les schémas de la Fig.31. Pour chaque position nous avons considéré le même pas de maillage $h = 0.07937$ et une épaisseur $\varepsilon = 10^{-4}$.

Pour chaque position nous avons calculé $\Lambda_{\varepsilon,h}^0(\omega = 0)$. Les figures ci-dessous montrent que cette valeur peut admettre une variation relative de l'ordre de 60% lorsque l'on perturbe à peine la position de l'obstacle en déplaçant son centre sur une distance de l'ordre du pas du maillage. Ceci démontre une grande sensibilité de l'inductance critique $\Lambda_{\varepsilon,h}^0$ vis-à-vis de la position de l'obstacle

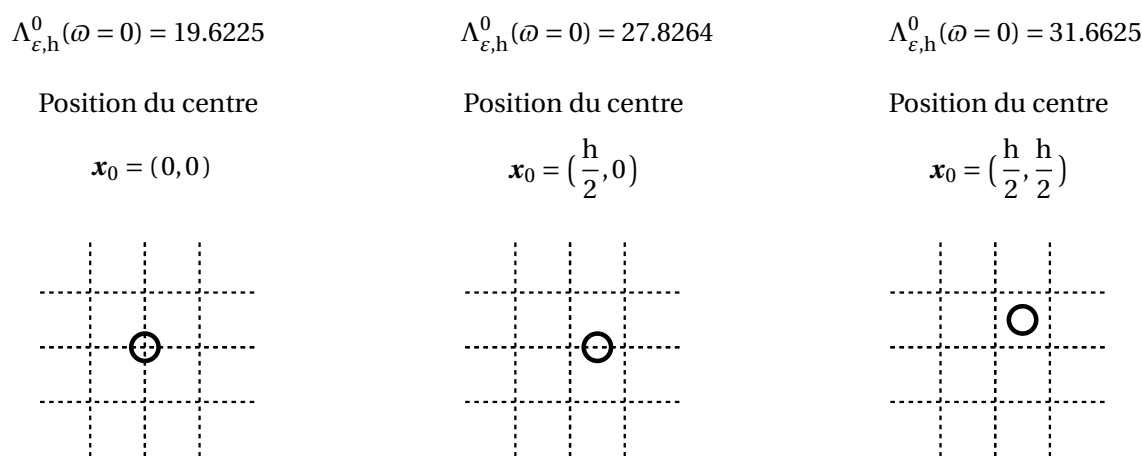


Fig.31 Dépendance de l'inductance critique par rapport à la position de l'objet diffractant dans le maillage

5.5 Perspectives vers les problèmes en temps

Au départ c'est un schéma en temps que Holland a proposé dans [66] pour prendre en compte l'influence des fils. De même [26] traite aussi de schémas en temps. Nous avons donc cherché à exploiter l'étude précédente pour proposer un schéma non-verrouillant (c'est-à-dire dont les propriétés d'approximation ne se dégradent pas lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) pour le régime temporel et capable de prendre en compte la présence de petits obstacles dans le domaine de calcul. Nous avons abouti à deux approches possibles correspondant aux deux schémas consistants que nous avons présenté : schéma type Galerkin enrichi et schéma type Holland.

Le problème continu Pour présenter ces schémas, nous considérerons le problème continu suivant. Étant donné un instant final noté $T \in \mathbb{R}_+$ (qui n'a rien avoir avec les opérateurs T_Γ ou $T_{\Gamma_\varepsilon} \dots$) nous considérerons une fonction source $f(\mathbf{x}, t) \in \mathcal{C}^2([0, T], L^2(\Omega))$. Le problème continu que nous chercherons à

résoudre numériquement s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 & u^\varepsilon(t) \in \mathcal{C}^1([0, T], L^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T], H^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad p^\varepsilon(t) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)) \quad \text{tels que} \quad \forall t \in [0, T], \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u^\varepsilon(t)}{\partial t^2} v + \int_{\Omega} \nabla u^\varepsilon(t) \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^\varepsilon(t)}{\partial t} v + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p^\varepsilon(t)}{\partial t} v = \int_{\Omega} f(t) v \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^\varepsilon(t) q = 0 \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \\ u^\varepsilon(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(t=0) = 0 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Ci-dessus il faut entendre la dérivée seconde en temps au sens faible (pour la notion de solution faible dans ce type de problème d'ordre 2 en temps nous renvoyons le lecteur à [49] par exemple). Nous admettons que ce problème est bien posé. Avec cette formulation nous imposons sur le bord Γ une condition aux limites absorbante d'ordre 1 (qui vaut au sens de $H^{-1/2}(\Gamma)$) i.e.

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma.$$

5.5.1 Schéma de Galerkin enrichi en régime instationnaire

Le premier schéma que nous proposons consiste en une généralisation du schéma de Galerkin enrichi au régime instationnaire. Puisque la fonction de forme additionnelle définie par (5.2.4) ne dépend pas de la pulsation ω , rien ne s'oppose à envisager le schéma semi-discrétisé en espace suivant (à nouveau il faut entendre la dérivée seconde en temps au sens faible)

$$\begin{aligned}
 & (u^{\varepsilon, h}(t), p^{\varepsilon, h}(t)) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{V}_e^h) \times \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)) \quad \text{satisfaisant} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u^{\varepsilon, h}(t)}{\partial t^2} v + \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon, h}(t) \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u^{\varepsilon, h}(t)}{\partial t} v + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p^{\varepsilon, h}(t)}{\partial t} v = \int_{\Omega} f(t) v \quad \forall v \in \mathbb{V}_e^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^{\varepsilon, h}(t) q = 0 \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \\ u^{\varepsilon, h}(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^{\varepsilon, h}}{\partial t}(t=0) = 0 \end{array} \right. \quad (5.5.1)
 \end{aligned}$$

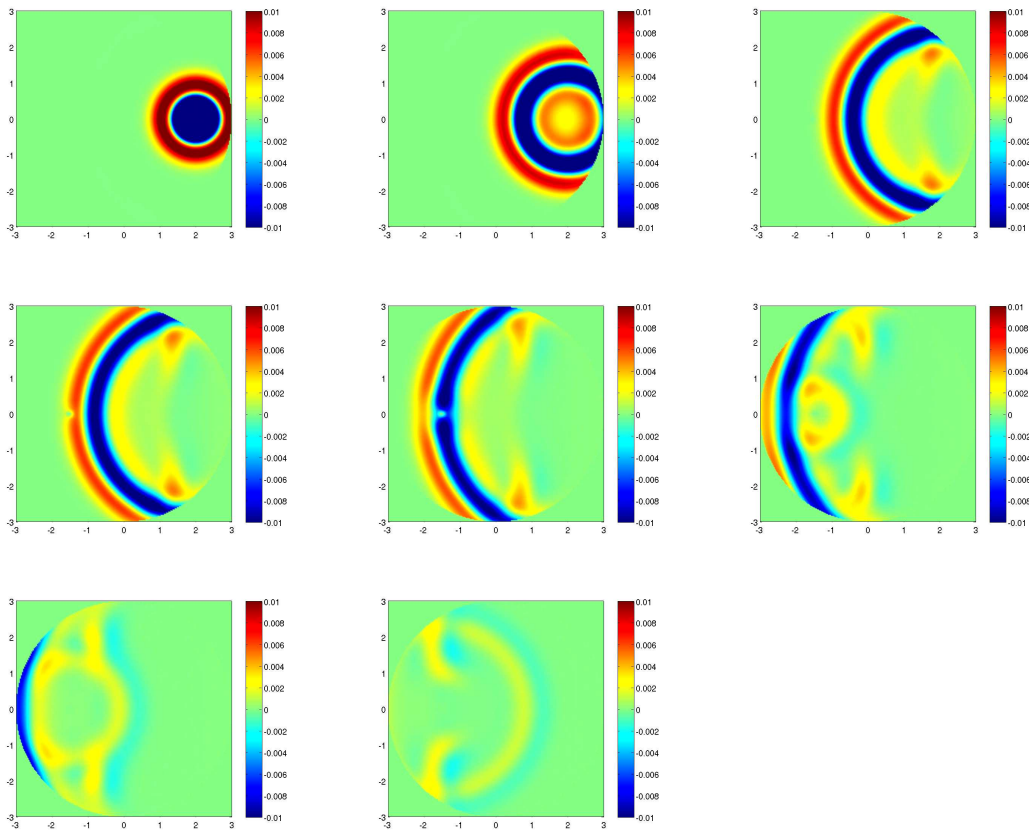
Nous proposons de discrétiser en temps la formulation (5.5.1) par un schéma saute-mouton. Considérons une suite discrète d'instants $t_n = n\Delta t$ et $t_{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$ avec $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ en fixant le pas Δt de discrétisation en temps. Le schéma totalement discrétisé que nous considérons est alors

$$\begin{aligned}
 & u^{\varepsilon, h}(t_n) \in \mathbb{V}_e^h, \quad p^{\varepsilon, h}(t_n) \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{satisfaisant} \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{u^{\varepsilon, h}(t_{n+1}) - 2u^{\varepsilon, h}(t_n) + u^{\varepsilon, h}(t_{n-1}))}{(\Delta t)^2} v + \int_{\Omega} \nabla u^{\varepsilon, h}(t_n) \cdot \nabla v \\ + \int_{\Gamma} \frac{u^{\varepsilon, h}(t_{n+1}) - u^{\varepsilon, h}(t_{n-1}))}{2\Delta t} v + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{p^{\varepsilon, h}(t_{n+1/2}) - p^{\varepsilon, h}(t_{n-1/2}))}{\Delta t} v = \int_{\Omega} f(t_n) v \quad \forall v \in \mathbb{V}_e^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} u^{\varepsilon, h}(t_n) q = 0 \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon), \\ u^{\varepsilon, h}(t_0) = 0 \quad \text{et} \quad u^{\varepsilon, h}(t_1) = \Delta t = 0. \end{array} \right. \quad (5.5.2)
 \end{aligned}$$

Nous avons implémenté ce schéma dans le code MONTJOIE et avons constaté expérimentalement que ce schéma est stable sous la même condition qu'en l'absence d'obstacle Γ_ε avec une discrétisation standard. En d'autres termes, les résultats numériques suggèrent que la condition CFL n'est pas dégradée lorsque le schéma prend en compte la présence d'un petit obstacle par la méthode de Galerkin enrichie.

Nous faisons figurer ci-dessous les instantanés d'une simulation obtenue en résolvant (5.5.2) à l'aide d'éléments finis \mathbb{Q}_2 . Dans cette expérience on se place dans le domaine $\Omega = D(0, 3)$ avec un petit obstacle circulaire de rayon $\varepsilon = 0.01$ centré autour du point $(-1.5, 0.0)$, et on considère une source $f(\mathbf{x}, t)$ de la forme

$$f(\mathbf{x}, t) = (a_0(t-1) - 1) \cdot e^{-b_0|t-1|^2} \cdot e^{-7|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2} \quad \text{avec } \mathbf{x}_0 = (2, 0), \quad a_0 = 19.74, \quad b_0 = 9.87$$



5.5.2 Schéma type Holland en régime instationnaire

Il est également possible de proposer un schéma de type Holland semblable à (5.4.1) mais en régime instationnaire. Le schéma semi-discret correspondant que nous proposons est le suivant

$$(u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t), p_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t)) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{V}^{\text{h}}) \times \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)) \quad \text{satisfaisant}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t)}{\partial t^2} v + \int_{\Omega} \nabla u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t) \cdot \nabla v + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t)}{\partial t} v + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial p_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t)}{\partial t} v = \int_{\Omega} f v & \forall v \in \mathbb{V}^{\text{h}} \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} u_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t) q - \Lambda_{\varepsilon, \text{h}} \cdot \check{q} \cdot \overline{\check{p}_{\mathbf{h}}^{\varepsilon, \text{h}}(t)} = 0 & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \\ u^{\varepsilon, \text{h}}(t_0 = 0) = 0 \quad \text{et} \quad u^{\varepsilon, \text{h}}(t_1 = \Delta t) = 0. \end{cases} \quad (5.5.3)$$

Ici \check{q} est toujours défini par (5.4.2). Avec le schéma ci-dessus une question incontournable est de savoir quelle valeur attribuer au paramètre $\Lambda_{\varepsilon,h}$. Dans le cadre du régime instationnaire cette question semble à première vue épineuse. Mais sur la base de l'étude que nous avons présentée au §5.4.5 ci-dessus, nous proposons de prendre $\Lambda_{\varepsilon,h} = \Lambda_{\varepsilon,h}^0 (\varpi = 0)$.

5.A Lemmes techniques pour la preuve de consistance du schéma enrichi

Dans cet annexe nous prouvons trois résultats purement techniques utiles lors de la démonstration du théorème 5.2.1 sur la consistance du schéma de Galerkin enrichi. Chacun de ces résultats correspond à un terme que nous avons fait apparaître au cours de l'estimation d'erreur dans la preuve du théorème.

Lemme 5.A.1.

L'espace \mathbb{V}^h étant un espace d'approximation associé à des éléments finis d'ordre $k \geq 1$, il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| (\chi^e(\mathbf{x}) - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) (u^0(\mathbf{x}) - u^0(0)) - v \|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa (\sqrt{\varepsilon} + h^k) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall h \in]0, 1[.$$

Preuve :

Notons tout d'abord qu'il existe $v^0 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)^2$ telle que $u^0(\mathbf{x}) = u^0(0) + \mathbf{x} \cdot v^0(\mathbf{x})$. Rappelons que χ^ε est définie par (4.4.5) et χ^e est définie par (5.2.3). Remarquons que si $\mathbf{x} \in \text{supp } \chi^\varepsilon$ alors $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{\varepsilon}$. Enfin suivant des résultats classiques sur les éléments finis (voir par exemple le théorème 3.2.1 de [23]) puisque $\chi^e \mathbf{x} \cdot v^0(\mathbf{x}) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, on obtient l'existence de $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de ε et h telles que $\forall \varepsilon, h \in]0, 1[$ on ait

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| (\chi^e(\mathbf{x}) - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) (u^0(\mathbf{x}) - u^0(0)) - v \|_{H^1(\Omega)} \\ \leq \underbrace{\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| \chi^e(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot v^0(\mathbf{x}) - v \|_{H^1(\Omega)}}_{\leq \kappa h^k \| \chi^e(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot v^0(\mathbf{x}) \|_{H^{k+1}(\Omega)}} + \underbrace{\| \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{x} \cdot v^0(\mathbf{x}) \|_{H^1(\Omega)}}_{\leq \kappa' \sqrt{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

■

Lemme 5.A.2.

L'espace \mathbb{V}^h étant un espace d'approximation associé à des éléments finis d'ordre $k \geq 1$, il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ et $\forall h \in]0, 1[$ on a

$$\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| (\chi^e(\mathbf{x}) - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) \left(\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\varpi r) - \ln\left(\frac{\varpi r}{2}\right) - \gamma_e + i \frac{\pi}{2} \right) - v \|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa (\sqrt{\varepsilon} + h).$$

Preuve :

La preuve de ce lemme fonctionne presque comme au lemme précédent. Rappelons que la fonction de Hankel $H_0^{(1)}$ est définie par les formules (1.3.4), (1.3.11) et par le fait que $H_0^{(1)}(\varpi r) := J_0(\varpi r) + iY_0(\varpi r)$. À partir de ces définitions on montre facilement l'existence d'une fonction v^0 vérifiant

$$v^0 \in H^2(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \quad \nabla v^0 \in L^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad H_0^{(1)}(\varpi |\mathbf{x}|) - \ln\left(\frac{\varpi r}{2}\right) - \gamma_e + i \frac{\pi}{2} = |\mathbf{x}| v^0(\mathbf{x}).$$

Rappelons à présent que χ^ε est définie par (4.4.5) et χ^e est définie par (5.2.3). Remarquons que si $\mathbf{x} \in \text{supp } \chi^\varepsilon$ alors $|\mathbf{x}| \leq \sqrt{\varepsilon}$. D'après (5.1.3) il existe $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de ε et h telles que

$$\begin{aligned} \inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| (\chi^e(\mathbf{x}) - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) \left(\frac{\pi}{2i} H_0^{(1)}(\varpi r) - \ln\left(\frac{\varpi r}{2}\right) - \gamma_e + i \frac{\pi}{2} \right) - v \|_{H^1(\Omega)} \\ \leq \underbrace{\inf_{v \in \mathbb{V}^h} \| \chi^e(\mathbf{x}) |\mathbf{x}| v^0(\mathbf{x}) - v \|_{H^1(\Omega)}}_{\leq \kappa h \| \chi^e(\mathbf{x}) |\mathbf{x}| v^0(\mathbf{x}) \|_{H^2(\Omega)}} + \underbrace{\| \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) |\mathbf{x}| v^0(\mathbf{x}) \|_{H^1(\Omega)}}_{\leq \kappa' \sqrt{\varepsilon}} \end{aligned}$$

■

Lemme 5.A.3.

Il existe une constante $\kappa > 0$ et un entier q indépendant de ε tels que

$$\left\| (\chi^e(\mathbf{x}) - \chi^\varepsilon(\mathbf{x})) \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} - \mathfrak{C}_0 \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

Preuve :

Rappelons tout d'abord que χ^e est définie par (4.4.5) et χ^ε est définie par (5.2.3). Commençons par remarquer que $\text{supp}(\chi^e - \chi^\varepsilon) \subset Z_F^\varepsilon$ avec $Z_F^\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| > \sqrt{\varepsilon}/2\}$. Rappelons également que pour tout $v \in H^1(Z_F^\varepsilon)$ on a $v \in \mathcal{V}_0^1(Z_F^\varepsilon)$ et d'après les définitions (3.1.8), il existe une constante $\kappa_0 > 0$ indépendante de ε telle que $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_0 \|v\|_{\mathcal{V}_0^1(Z_F^\varepsilon)}$. Ainsi pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left\| (\chi^e - \chi^\varepsilon) \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} - \mathfrak{C}_0 \right) \right\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_0 \left\| (\chi^e - \chi^\varepsilon) \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} - \mathfrak{C}_0 \right) \right\|_{\mathcal{V}_0^1(Z_F^\varepsilon)} \quad (5.A.1)$$

Par ailleurs notons que $\|\chi^e - \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ et qu'il existe une constante $\kappa_1 > 0$ indépendante de ε telle que $\|r \partial_r (\chi^e - \chi^\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa_1$. En utilisant ceci dans l'inégalité (5.A.1) ci-dessus et en appliquant le changement de variable Ξ_*^ε on obtient l'existence d'une constante $\kappa_2 > 0$ indépendante de ε telle que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \left\| (\chi^e - \chi^\varepsilon) \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} - \mathfrak{C}_0 \right) \right\|_{\mathcal{V}_0^1(Z_F^\varepsilon)} &\leq \kappa_2 \left\| \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e - \ln \frac{|\mathbf{x}|}{\varepsilon} - \mathfrak{C}_0 \right\|_{\mathcal{V}_0^1(Z_F^\varepsilon)} \\ &\leq \kappa_2 \left\| \mathfrak{S}_e - \ln |\mathbf{x}| - \mathfrak{C}_0 \right\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))} \end{aligned}$$

Enfin en utilisant la définition de $\mathfrak{S}_e = \mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ donnée par le lemme 3.2.4, on voit qu'il existe $a(R, \varphi) \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $\mathfrak{S}_e - \ln |\mathbf{x}| - \mathfrak{C}_0 - a(R, \varphi)/R \in \mathcal{W}_{-1}^1(\Omega_N)$. Remarquant que $|\mathbf{x}| \geq 1/(2\sqrt{\varepsilon})$ dès que $\mathbf{x} \in \Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon)$, on a donc

$$\begin{aligned} \left\| \mathfrak{S}_e - \ln |\mathbf{x}| - \mathfrak{C}_0 \right\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))} &\leq \left\| \mathfrak{S}_e - \ln |\mathbf{x}| - \mathfrak{C}_0 - \frac{a(R, \varphi)}{R} \right\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))} + \left\| \frac{a(R, \varphi)}{R} \right\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))} \\ &\leq 2\sqrt{\varepsilon} \left\| \mathfrak{S}_e - \ln |\mathbf{x}| - \mathfrak{C}_0 - \frac{a(R, \varphi)}{R} \right\|_{\mathcal{W}_{-1}^1(\Omega_N)} + \left\| \frac{a(R, \varphi)}{R} \right\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))}. \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à remarquer que comme $a \in \mathbb{P}_{\log}$, il existe une constante $\kappa > 0$ et un entier q indépendants de ε telle que $\|a(R, \varphi)/R\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_F^\varepsilon))} \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|^q$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. ■

5.B Le théorème de Nitsche et Schatz

Dans cet annexe nous rappelons un théorème du à Nitsche et Schatz qui permet notamment d'obtenir des estimations intérieures pour les schémas éléments finis. Nous reformulons ce théorème sous une forme simplifié dans le cadre restreint des éléments finis de Lagrange en deux dimensions pour l'équation de Helmholtz. Le théorème énoncé par Nitsche et Schatz est en réalité bien plus général et il est décrit et démontré en détail dans [92].

Théorème 5.B.1. (Nitsche et Schatz)

Soit $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie dans (4.1.5) et \mathbb{V}^h l'espace définis par (5.1.2). Soient deux ouverts $\Omega_0 \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \mathbb{R}^2$ et un nombre $p \in \mathbb{R}_+$. Notons enfin k l'ordre des éléments de \mathbb{V}^h . Alors il existe deux constantes $\kappa_0, h_0 > 0$ indépendantes de h telles que pour tout couple de fonctions $u \in H^{k+1}(\Omega_1)$, $u_h \in \mathbb{V}^h$ vérifiant

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{V}^h \text{ qui satisfait } \text{supp}(v) \subset \Omega_1,$$

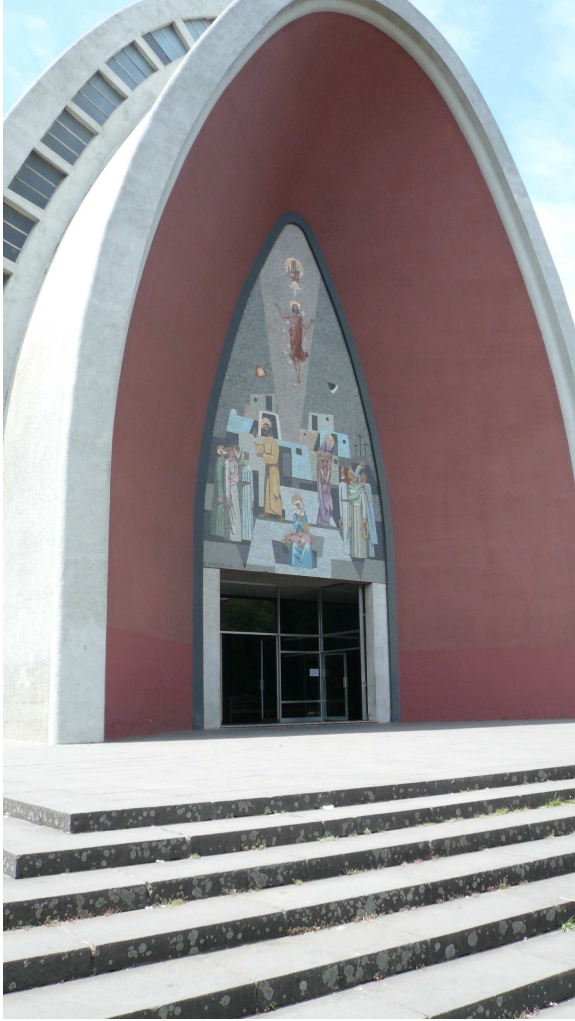
on a

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_0)} \leq \kappa_0 \left(h^{q-1} \|u\|_{H^q(\Omega_1)} + \|u - u_h\|_{H^{-p}(\Omega_1)} \right),$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega_0)} \leq \kappa_0 \left(h^q \|u\|_{H^q(\Omega_1)} + \|u - u_h\|_{H^{-p}(\Omega_1)} \right) \quad \forall h \in]0, h_0[, \quad \forall q \in \llbracket 1, k \rrbracket.$$

Troisième partie

Analyse asymptotique en géométrie filaire tridimensionnelle



Cathédrale de Chillán au Chili présentant une ressemblance troublante avec le système des coordonnées ellipsoïdales.



CHAPITRE 6

Équation de Helmholtz avec condition aux limites de Neumann

Introduction

Les chapitres précédents nous ont permis d'introduire la méthode des développements raccordés et de présenter une méthode générale pour conduire les calculs d'estimation d'erreur. Nous avons vu l'application de cette méthode à un problème bidimensionnel et comment elle pouvait conduire à l'élaboration d'un modèle approché. Cette troisième partie sera consacrée à l'étude d'un problème tridimensionnel, donc un peu plus compliqué, avec un obstacle filiforme dont les bouts sont arrondis de manière ellipsoïdale. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'analyse asymptotique du problème de Helmholtz avec condition de Neumann homogène. Ce chapitre remplit plusieurs objectifs. Tout d'abord il montre l'application des calculs présentés au chapitre 2 sur un problème tridimensionnel. Ensuite il permet d'introduire une géométrie et des techniques que nous réutiliserons pour traiter le cas de la condition de Dirichlet au chapitre suivant.

Il existe plusieurs références d'analyse asymptotique traitant d'un problème posé à l'extérieur d'un objet filaire. Parmi celles-ci seules [62, 50], et [85, 87] traitent d'un problème avec condition de Neumann. Les deux premières références sont issues du travail de Geer et Keller intéressés aux équations de l'aérodynamique et de l'électromagnétisme autour d'un corps élancé. Elles se basent sur une technique introduite par Keller qui consiste à représenter l'influence de l'obstacle sur la fonction à calculer comme un champ rayonné par un ensemble de points sources répartis le long de la ligne médiane du corps élancé. Dans [85] l'auteur adapte l'étude de [46] (qui portait sur le problème de Laplace avec condition de Dirichlet) pour examiner un problème de Helmholtz posé à l'extérieur d'un objet diffractant approchant un segment. Le terme source est une onde plane incidente dont le vecteur d'onde est aligné avec l'axe du fil. L'auteur considère que le fil est à symétrie de révolution. Notre géométrie est assez proche de celle de [85] mais notre fil ne sera pas forcément à symétrie de révolution. Dans [87] les auteurs examinent entre autres un problème de Helmholtz avec condition de Neumann posé dans l'extérieur d'un tube fin de forme toroïdale avec un terme source de forme assez générale. Pour cette géométrie les auteurs fournissent un développement asymptotique à tout ordre.

Nous commencerons par présenter le problème auquel on s'intéresse, l'équation de Helmholtz avec condition de Neumann homogène, mais également la géométrie. Nous allons considérer un objet diffractant filiforme dont nous supposerons les pointes "arrondies". Pour décrire correctement cette géo-

métrie nous serons amenés à introduire un système de coordonnées particulières appelées coordonnées ellipsoïdales. Nous utiliserons d'ailleurs, dans un but de concision, quelques objets de géométrie riemannienne tels que les tenseurs métriques ou la dérivée covariante sur S^2 . Pour une introduction rapide à ces concepts nous renvoyons à la thèse d'Erwan Faou [44], et pour une description plus détaillée nous renvoyons par exemple à [38, 81, 116]. Par ailleurs nous avons pris le parti dans ce chapitre d'abrégé certains calculs tout à fait standard de géométrie (calcul de la normale à une surface par exemple) dans une tentative pour limiter la quantité de calcul. Comme au chapitre 3 nous vérifierons ensuite que nous rentrons dans le contexte de l'étude du chapitre 2. Ceci nous mènera donc à démontrer l'existence et l'unicité de la solution des problèmes récurrents énoncés, en introduisant notamment des profils en champs lointain et proche. Nous terminerons le chapitre en vérifiant qu'on obtient bien un développement régulier de la solution u^ε de notre problème de diffraction.

6.1 Description de la géométrie

Nous décrivons dans un premier temps le cadre géométrique dans lequel nous nous plaçons. Il s'agit cette fois d'une géométrie tridimensionnelle. Étant donné un réel $\rho > 0$ suffisamment grand, le problème sans obstacle sera posé dans une boule de rayon ρ avec des conditions sur son bord,

$$\Omega := B(0, \rho) \quad \text{en notant aussi} \quad \Gamma := \partial\Omega.$$

Comme auparavant le choix de la valeur de ρ importera peu dans l'étude asymptotique que nous allons mener car Γ jouera le rôle d'une frontière fictive sur laquelle nous imposerons une condition de rayonnement. Nous allons nous intéresser à une situation dans laquelle Ω contient un objet filiforme droit de longueur finie (qui comporte donc des pointes). Nous désirons choisir la forme de cet obstacle de manière à ce qu'il approche le segment

$$I = \left\{ \mathbf{x}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \text{ et } |z| \leq 1 \right\} \quad (6.1.1)$$

Pour approcher ce segment, une démarche naturelle consiste à proposer une version épaissie de I . Concernant le choix d'un fil épais il y a plusieurs possibilités. Beaucoup d'articles traitant des fils minces [86, 103, 104, 74, 17] considèrent un fil cylindrique dont l'équation du bord est donnée par $\max\{(x^2 + y^2)/\varepsilon^2, z^2\} = 1$. La forme d'un tel fil épais est représentée sur la Fig.32 ci-dessous

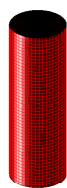


Fig.32 Fil mince cylindrique



Fig.33 Fil mince ellipsoïdal

Ces références ne traitent pas d'analyse asymptotique mais d'équations intégrales. Cependant la simplicité apparente de la géométrie cache des difficultés techniques sérieuses concernant son analyse asymptotique. Nous y reviendrons au §6.1.2. Ces difficultés sont liées à la forme des pointes. Avec une telle géométrie, il n'a été réalisée à notre connaissance aucune étude asymptotique.

Il est possible de considérer d'autres formes de fil épais, pour lesquelles l'analyse asymptotique devient possible. De telles formes ont été considérées dans [45, 100, 85, 119, 46, 87]. Les fils considérés dans

ces dernières références ont des pointes "arrondies", ce qui lève une partie des difficultés liées à l'analyse asymptotique. Ce type de géométrie est représentée sur la Fig.33. C'est ce type de fil que nous considérons. Comme nous l'avons évoqué plus haut, dans [87] les auteurs ont aussi considéré des fils circulaires sans pointes (en forme de tore fin par exemple). Il s'agit d'ellipsoïdes fins éventuellement perturbés. Pour donner l'équation du bord d'un tel fil nous allons avoir recours à un système de coordonnées particulier.

6.1.1 Définition des coordonnées ellipsoïdales

Il existe plusieurs types de coordonnées ellipsoïdales : les plus simples sont les systèmes prolates sphéroïdal et oblate sphéroïdal (j'ignore la traduction en français de "prolate" et "oblate"...). Dans tout le reste de cette thèse, il sera exclusivement question du système prolates sphéroïdal que nous présentons maintenant. Par volonté de concision nous l'appellerons système ellipsoïdal.

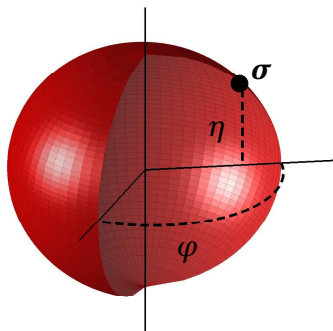
Le système des coordonnées ellipsoïdales s'apparente au système des coordonnées sphériques. En particulier il se compose de deux coordonnées angulaires et d'une coordonnée radiale. Parmi ses propriétés remarquables, notons qu'il s'agit de coordonnées orthogonales dans lesquelles les équations de Laplace et Helmholtz sont résolubles par séparation de variable [47, 65, 88, 99, 118]. Cependant il est à noter que les équations de Maxwell ne semblent pas résolubles par séparation de variables avec ces coordonnées contrairement aux coordonnées sphériques (cf [80]).

Notre construction des coordonnées ellipsoïdales va passer dans un premier temps par l'introduction d'une paramétrisation bien choisie de la sphère unité S^2 . Dans un deuxième temps nous déduisons de celle-ci une paramétrisation de l'espace tout entier \mathbb{R}^3 , et en particulier de Ω .

Remarque au sujet de la séparation de variables en coordonnées ellipsoïdales Bien que l'équation de Helmholtz à laquelle nous nous intéressons dans ce chapitre soit résoluble par séparation de variables dans les coordonnées ellipsoïdales, l'étude qui va suivre ne fera pas usage d'une telle technique. Les fonctions spéciales intervenant dans ce contexte sont appelées fonctions d'onde sphéroïdales (pour une description voir [47, 88, 99, 118]). Celles-ci n'ont pas fait l'objet d'une étude suffisamment approfondie pour permettre d'obtenir facilement les résultats dont nous aurons besoin dans ce chapitre. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi d'utiliser une autre technique (transformation de Mellin, etc ...).

Paramétrisation de la sphère unité

Notre paramétrisation de la sphère unité S^2 est très proche de la paramétrisation standard. Notons σ un point courant de S^2 . Notre paramétrisation consiste alors en une surjection $\phi_{S^2} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, 1] \rightarrow S^2$ qui associe à un couple $(\varphi, \eta) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, 1]$ le point $\sigma \in S^2$ de coordonnées cartésiennes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ données par



$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{1 - \eta^2} \cos \varphi, \\ \sigma_y &= \sqrt{1 - \eta^2} \sin \varphi, \\ \sigma_z &= \eta. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Fig.34 Paramétrisation de S^2

Nous avons choisi cette paramétrisation de la sphère à cause de l'équation $\sigma_z = \eta$ qui se révélera plus

commode pour la suite. En effectuant le changement de variable $\eta = \cos \theta$ on retrouve la paramétrisation usuelle de S^2 . L'application ϕ_{S^2} est ici un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, 1[$ (en dehors des pôles de la sphère). Dans la suite nous posons par définition

$$\phi_{S^2}^* u = u \circ \phi_{S^2}^{-1} \quad \forall u \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, 1[).$$

Ainsi la fonction $\phi_{S^2}^*$ transforme une fonction définie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, 1[$ en une fonction définie sur S^2 . Le tenseur métrique sur S^2 associé à ce paramétrage est donné par

$$(1 - \eta^2) d\varphi \otimes d\varphi + \frac{1}{1 - \eta^2} d\eta \otimes d\eta \quad (6.1.3)$$

de sorte que la mesure de surface sur S^2 a pour expression $d\varphi d\eta$. Ainsi si ω est un ouvert régulier inclus dans S^2 et $u \in L^1(\omega)$ alors on a la formule

$$\int_{\omega} u = \int_{\phi_{S^2}^{-1}(\omega)} u(\phi_{S^2}(\varphi, \eta)) d\varphi d\eta \quad (6.1.4)$$

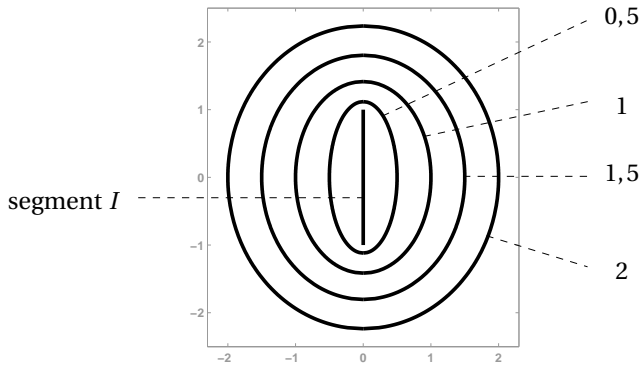
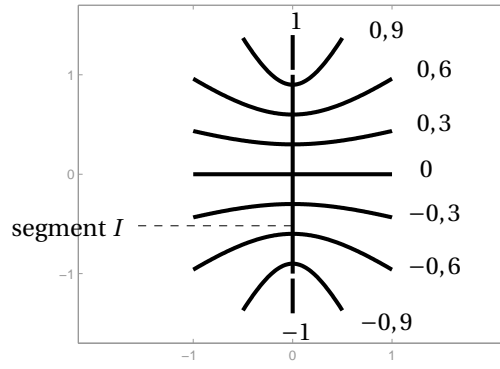
Cette paramétrisation fournit à moindre frais une paramétrisation sphérique de \mathbb{R}^3 tout entier, à savoir l'application qui à un triplet $(\rho, \varphi, \eta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, 1[$ associe le point $\rho \cdot \phi_{S^2}(\varphi, \eta)$ où \cdot signifie simplement la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Par la suite, nous n'aurons recours à ce système de coordonnées de \mathbb{R}^3 que très occasionnellement (seulement dans les annexes 6.A et 6.B).

Paramétrisation ellipsoïdale de l'espace

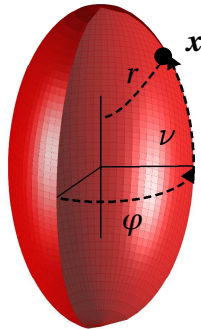
On va maintenant construire un autre système de coordonnées pour \mathbb{R}^3 tout entier, un peu plus élaboré que les coordonnées sphériques. Étant donné un $r \in \mathbb{R}_+$ considérons l'application linéaire $G(r) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe à un point \mathbf{x} de coordonnées cartésiennes (x, y, z) un autre point $G(r) \cdot \mathbf{x}$ de coordonnées cartésiennes $(rx, ry, \sqrt{1+r^2}z)$. L'application $G(r)$ envoie la sphère S^2 sur l'ellipsoïde de révolution d'équation

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{1+r^2} = 1. \quad (6.1.5)$$

Notons que les foyers de cet ellipsoïde sont les deux points de coordonnées cartésiennes $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$. Ces ellipsoïdes $(G(r) \cdot S^2)_{r \in \mathbb{R}_+}$ indexés par $r \in \mathbb{R}_+$ constituent une partition de l'espace \mathbb{R}^3 tout entier : pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, il existe un unique $r \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbf{x} \in G(r) \cdot S^2$. Ces ellipsoïdes sont tous emboîtés les uns dans les autres comme dans un oignon, et se resserrent autour de $G(0) \cdot S^2$ qui n'est autre que le segment I défini par (6.1.1) dont les extrémités sont les deux points de coordonnées cartésiennes $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$. Lorsque $r \rightarrow 0$ l'ellipsoïde décrit par l'équation (6.1.5) tend vers I , tandis que lorsque $r \rightarrow +\infty$ l'ellipsoïde décrit par l'équation (6.1.5) se rapproche de plus en plus de la sphère de rayon r centrée en 0, comme on le voit sur la Fig.35.


 Fig.35 Vue dans le plan xz de surfaces $r = cste$

 Fig.36 Vue dans le plan xz de surfaces $\nu = cste$

Voici comment la donnée de trois coordonnées (r, φ, ν) permet de désigner un unique point de \mathbb{R}^3 . Le paramétrage ellipsoïdal consiste en une fonction $\phi_{\text{el}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) = G(r) \cdot \phi_{S^2}(\varphi, \nu)$. Ainsi les coordonnées ellipsoïdales sont reliées aux coordonnées cartésiennes par les relations


 Fig.37 Paramétrisation ellipsoïdale de \mathbb{R}^3

$$\begin{aligned} x &= r\sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi \\ y &= r\sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi \\ z &= \xi(r) \nu \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

$$\text{avec } \xi(r) := \sqrt{1+r^2}.$$

Par commodité nous avons introduit la notation $\xi(r) = \sqrt{1+r^2}$ car cette quantité apparaîtra souvent dans les calculs. La fonction ϕ_{el} est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, +1[$. Pour une fonction u définie sur un ouvert $\omega \subset \Omega$, il nous arrivera de noter " $u(r, \varphi, \nu)$ " au lieu de " $u(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu))$ ". Par ailleurs nous posons par définition

$$\phi_{\text{el}}^* u := u \circ \phi_{\text{el}}^{-1}$$

pour tout u définie sur tout ou partie de $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, +1[$. Le tenseur métrique sur \mathbb{R}^3 associé à ce paramétrage est donné par

$$\frac{\xi(r)^2 - \nu^2}{\xi(r)^2} dr \otimes dr + r^2(1-\nu^2) d\varphi \otimes d\varphi + \frac{\xi(r)^2 - \nu^2}{1-\nu^2} d\nu \otimes d\nu. \quad (6.1.7)$$

On en déduit l'expression de la mesure de Lebesgue volumique dans ces coordonnées. Étant donné un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^3$ et une fonction $u \in L^1(\omega)$, on a en effet la formule

$$\int_{\omega} u = \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\omega)} u(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) \frac{\xi(r)^2 - \nu^2}{\xi(r)} r dr d\varphi d\nu. \quad (6.1.8)$$

Avertissement sur la notation Avec notre définition des coordonnées ellipsoïdales, une fonction $a(\sigma)$ définie sur S^2 induit naturellement une autre fonction b sur $\mathbb{R}^3 \setminus I$ définie en coordonnées ellipsoïdales par $b(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = a(\phi_{S^2}(\varphi, \nu))$. Cette fonction est constante par rapport à r . Nous confondrons parfois

b avec a . Il est intéressant de remarquer que si $a \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ alors $b \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus I)$.

Comme pour tout système de coordonnées locales, la paramétrisation ellipsoïdale engendre une base de champs de vecteurs. Suivant l'usage en géométrie différentielle nous noterons $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ la base cartésienne de \mathbb{R}^3 . Nous noterons également $\partial_\alpha := (\partial_\alpha \phi_{\text{el}}) \circ \phi_{\text{el}}^{-1}$ avec $\alpha = r, \varphi, \nu$; nous utilisons une fonte grasse car il s'agit bien de champs de vecteur. Ceci revient à la définition suivante plus explicite

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \\ \partial_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} & \frac{r\nu}{\xi(r)} \\ -y & x & 0 \\ \frac{-\nu x}{1-\nu^2} & \frac{-\nu y}{1-\nu^2} & \xi(r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \quad (6.1.9)$$

Surfaces simples décrites en coordonnées ellipsoïdales Décrivons en coordonnées ellipsoïdales quelques ensembles simples afin d'inviter le lecteur à se familiariser avec ce système de coordonnées. Tout d'abord le segment central I défini par (6.1.1) correspond à l'équation $r = 0$. Le plan d'équation cartésienne $z = 0$ est décrit en coordonnées ellipsoïdales par $\nu = 0$. L'ensemble d'équation $\nu = 1$ est la demi-droite $\{\mathbf{x}(x, y, z) \mid x = y = 0, z \geq 1\}$. Enfin la sphère $\Gamma = \partial\Omega$ de rayon ρ admet l'équation $r^2 + \nu^2 = \rho^2$.

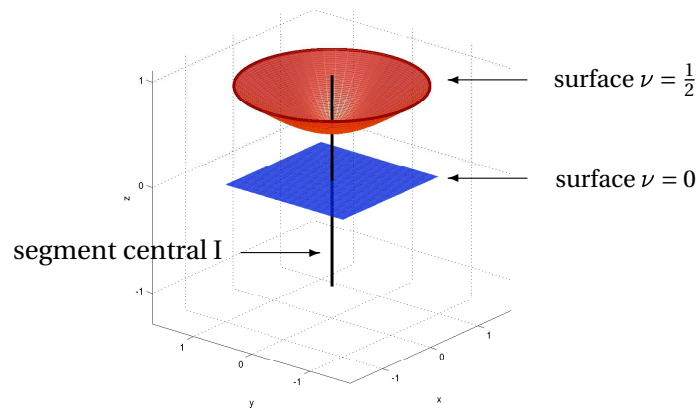


Fig.38 Vue 3D des surfaces $\nu = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$.

6.1.2 Définition de la surface du fil

C'est à l'aide des coordonnées ellipsoïdales que nous définissons la surface du fil mince. On définit Γ_ε et le domaine Ω_ε à partir de la donnée d'une fonction $\Phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \\ \Omega_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r > \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \cap \Omega \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Avec ce type d'équation Γ_ε apparaît comme une perturbation d'un ellipsoïde mince. En effet si on choisit $\Phi(\varphi, \nu) = 1$ pour tout $(\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1]$ alors Γ_ε est exactement un ellipsoïde dont l'équation en coordonnées cartésiennes est donnée par (6.1.5) avec $r = \varepsilon$. Nous supposons ici que la fonction Φ satisfait les trois propriétés suivantes

F 1 : Il existe $\Phi_0 \in]0, 1[$ tel que $\Phi_0 < \Phi(\varphi, \nu) < 1 \quad \forall (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1]$,

F 2 : Il existe $\nu_0 \in]0; 1[$ tel que $\partial_\varphi \Phi(\varphi, \nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_0$,

F 3 : $(\phi_{S^2}^* \Phi) \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$.

Parmi les trois hypothèses ci-dessus, **F1** n'est pas vraiment restrictive. La condition $\Phi(\varphi, \nu) < 1$ n'est pas indispensable pour ce qui suit mais permet de simplifier les calculs dans certains cas, et la condition $\Phi(\varphi, \nu) > 0$ est satisfaite dès que le fil est épais. L'hypothèse **F2** est un peu plus restrictive car elle impose la symétrie de révolution dans un voisinage des pointes de Γ_ε . L'hypothèse **F3** suppose que la surface du fil est régulière. D'après la définition des coordonnées ellipsoïdales, ces équations font de Γ_ε une variété de classe \mathcal{C}^∞ difféomorphe à S^2 . En effet on obtient directement un paramétrage de Γ_ε en considérant l'application $\phi_{\Gamma_\varepsilon} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \Gamma_\varepsilon$ définie par

$$\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu) := \phi_{\text{el}}(\varepsilon \Phi(\varphi, \nu), \varphi, \nu)$$

Par ailleurs un calcul de routine de géométrie montre que $\phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1} : S^2 \rightarrow \Gamma_\varepsilon$ se prolonge en un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur S^2 tout entier y compris en $\nu = \pm 1$. Ceci montre que, pour la structure de variété correspondante sur Γ_ε , le paramétrage $\phi_{\Gamma_\varepsilon}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, +1[$, c'est-à-dire en dehors des pointes correspondants à $\nu = \pm 1$.

Une formule pour calculer les intégrales sur le bord du fil Nous aurons besoin à plusieurs reprises de considérer des intégrales sur Γ_ε . Puisqu'il nous faudra parfois effectuer des estimations explicites sur ces termes de bord, il serait utile de disposer de l'expression de la mesure de surface sur Γ_ε dans la paramétrisation $\phi_{\Gamma_\varepsilon}$. Cependant cette expression est assez lourde, nous proposons par conséquent de dériver l'expression d'une quantité voisine dans laquelle intervient le vecteur normal n_{Γ_ε} sortant sur Γ_ε (dirigé vers l'intérieur de Ω_ε). Le lemme suivant est démontré en annexe.

Lemme 6.1.1.

En notant $n_{\Gamma_\varepsilon} = n_{\Gamma_\varepsilon}^r \partial_r + n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi \partial_\varphi + n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu \partial_\nu$ la décomposition du vecteur normal n_{Γ_ε} dans la base ellipsoïdale, la mesure de surface sur le bord du fil notée $d\Gamma_\varepsilon$ vérifie l'identité

$$n_{\Gamma_\varepsilon}^r d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \Phi(\varphi, \nu)^2} d\varphi d\nu$$

Les coordonnées ellipsoïdales sont adaptées aux objets filaires En choisissant de considérer ce type d'objet diffractant, on obtient bien un obstacle dont la forme approche celle d'un fil d'autant mieux que $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet prenons un exemple et supposons que $\Phi(\varphi, \nu) = 1 + \cos(2\pi\nu)/4$. Sur le dessin ci-dessous on a représenté les surfaces Γ_ε correspondantes vues en coupe transverse pour les valeurs $\varepsilon = 0; 0,2; 0,5$ et $0,8$.

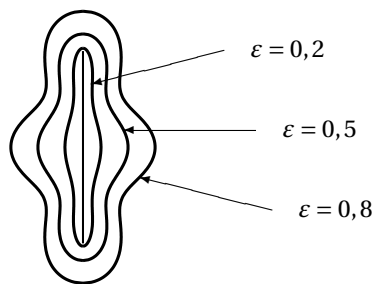


Fig.39 Coupe transverse de surfaces $r = \varepsilon\Phi(\varphi, \nu)$.

On constate que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la surface Γ_ε se rapproche de I . En fait on a $\Gamma_\varepsilon \rightarrow I$ au sens de la métrique de Hausdorff. De même, au moins formellement, Ω_ε tend vers $\Omega \setminus I$. C'est ainsi que nous serons amenés dans la suite à considérer l'ensemble

$$\Omega_\star := \Omega \setminus I.$$

Cette description n'est pas usuelle Pour essayer de bien faire comprendre en quoi cette géométrie diffère du type de géométrie correspondant à la Fig.32, considérons à nouveau une géométrie de fil usuelle donnée par l'équation $\max((x^2 + y^2)/\varepsilon^2, |z| - \varepsilon) = 1$. Ici nous imposons $|z| \leq 1 + \varepsilon$ au lieu de $|z| \leq 1$ mais ceci est sans incidence sur notre propos. Cette dernière surface est décrite en coordonnées ellipsoïdales par l'équation

$$r^2 = \varepsilon^2 \frac{1}{1 - \nu^2} \mathbf{1}_{|\nu| < \nu_\star(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^2 + 1 - \nu^2}{\nu^2} \mathbf{1}_{|\nu| > \nu_\star(\varepsilon)}, \quad \text{avec } 1 - \nu_\star(\varepsilon)^2 = \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon) + \sqrt{1 + (1 + \varepsilon)^2}}.$$

Cette équation ne peut se mettre sous la même forme que dans (6.1.10). L'allure de cette surface au voisinage des pointes a un comportement différent lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La pointe du fil carré évolue de manière auto-similaire lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui n'est pas le cas de la pointe ellipsoïdale.

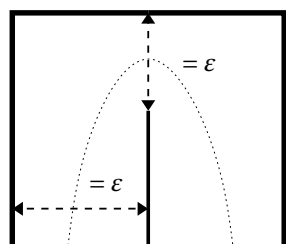


Fig.41 Pointe "carrée"

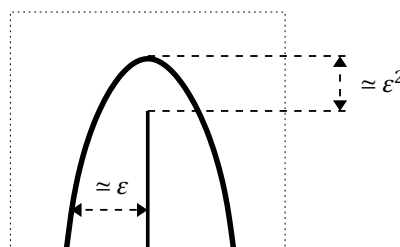


Fig.42 Pointe ellipsoïdale

6.1.3 Définition du domaine normalisé

Nous avons défini au paragraphe précédent le domaine Ω_ε dans lequel sera posé effectivement le problème de diffraction par un fil mince. Nous posons maintenant des notations relatives à la géométrie normalisée. Le domaine normalisé sera un sous-domaine de $\mathbb{R}_+ \times S^2$. Sur cet ensemble les coordonnées seront notées R, φ, η et nous utiliserons la paramétrisation naturelle issue du produit cartésien

$$\phi_{\text{sp}}(R, \varphi, \eta) := (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) .$$

Il s'agit d'un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, +1[$ en dehors des pôles correspondant à $\eta = \pm 1$. Le tenseur métrique associé à cette paramétrisation est donné par

$$dR \otimes dR + (1 - \eta^2) d\varphi \otimes d\varphi + \frac{1}{1 - \eta^2} d\eta \otimes d\eta \quad (6.1.11)$$

Comme le paramétrage ellipsoïdal correspond à la situation envisagée au §2.1.1 (l'application $(r, \sigma) \mapsto G(r) \cdot \sigma$ satisfait à l'hypothèse **H0**), nous proposons une définition de l'opérateur de dilatation adaptée à ce paramétrage. Cet opérateur est défini par

$$\begin{aligned} \Xi^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times S^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3 & \text{tel que} & & \phi_{\text{el}}^{-1} \circ \Xi^\varepsilon \circ \phi_{\text{sp}}(R, \varphi, \eta) &= (\varepsilon R, \varphi, \eta) \\ \Xi^{\varepsilon, -1} : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2 & \text{tel que} & & \phi_{\text{sp}}^{-1} \circ \Xi^{\varepsilon, -1} \circ \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) &= (r/\varepsilon, \varphi, \nu) \end{aligned}$$

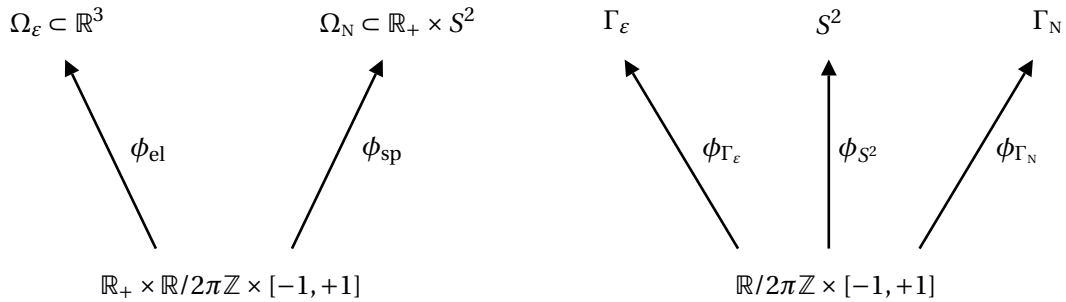
Nous noterons comme auparavant $\Xi_*^\varepsilon u = u \circ \Xi^{\varepsilon, -1}$ et $\Xi_*^{\varepsilon, -1} u = u \circ \Xi^\varepsilon$. Le changement d'échelle nous permet de définir le fil normalisé comme le dilaté de Γ_ε . Ici il s'agit d'une surface dans $\mathbb{R}_+ \times S^2$. On pose en effet

$$\begin{aligned} \Gamma_N &:= \{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R = \Phi(\varphi, \eta) \} = \Xi^{\varepsilon, -1}(\Gamma_\varepsilon), \\ \Omega_N &:= \{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R > \Phi(\varphi, \eta) \}. \end{aligned}$$

On définit pour la suite le paramétrage ϕ_{Γ_N} de Γ_N par $\phi_{\Gamma_N}(\varphi, \eta) = \phi_{\text{sp}}(\Phi(\varphi, \eta), \varphi, \eta)$. La mesure de surface sur Γ_N admet alors une expression particulièrement simple dans les coordonnées φ, η . En effet elle est donnée par

$$d\Gamma_N = \sqrt{1 + \frac{|\partial_\varphi \Phi|^2}{1 - \eta^2} + (1 - \eta^2) |\partial_\eta \Phi|^2} d\varphi d\eta. \quad (6.1.12)$$

Bilan sur les différentes paramétrisations Dans ce paragraphe nous voudrions résumer les différentes cartes que nous avons introduit auparavant et montrer comment elles s'organisent. Nous proposons deux schémas qui illustrent comment sont paramétrés Ω_ε et Ω_N d'une part, et Γ_ε , S^2 et Γ_N d'autre part.



6.2 Définition et étude des espaces à poids

Dans cette section nous introduisons les espaces à poids utilisés pour définir les termes d'un développement raccordé loin de Γ_ε (en champ lointain). Pour pouvoir écrire cette définition nous ramenons le domaine Ω à un sous-domaine de $\mathbb{R}_+ \times S^2$ au moyen de la carte $\phi_{\text{sp}} \circ \phi_{\text{el}}^{-1} : \Omega_* \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2$. Pour compacter les notations nous posons (le temps de ce chapitre seulement...)

$$\Psi := \phi_{\text{sp}} \circ \phi_{\text{el}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus I \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2 \quad \text{et} \quad \Psi_* u := u \circ \Psi^{-1} \quad \forall u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3 \setminus I). \quad (6.2.1)$$

L'application Ψ n'est définie que sur $\mathbb{R}^3 \setminus I$ car ϕ_{el}^{-1} n'est pas définie sur I . La définition qui suit est en accord avec (2.1.1) (dans ce chapitre on a $\mathcal{S} = S^2$). Étant donné un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^3$ on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_\alpha^k(\omega) &:= \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\omega \setminus I) \text{ tel que} \right. \\ &\left. \|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\omega)}^2 := \sum_{\beta+|\gamma|\leq k} \int_{\Psi(\omega)} \left| (r\partial_r)^\beta \nabla_\sigma^\gamma (\Psi_* v) \right|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\sigma}{r} < \infty \right\}. \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

Rappelons que ∇_σ^γ désigne la dérivée covariante d'ordre γ sur S^2 . Étudions d'un peu plus près dans ce cas les relations existant entre les espaces de Sobolev et les espaces à poids. Grâce à la formule (6.1.8) on obtient facilement l'expression de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ dans les coordonnées (r, φ, ν) et on constate que $\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset \mathcal{V}_{-2}^0(\Omega)$. De même, l'expression de $\|\nabla u\|_{L^2(\omega)}^2$ pour un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^3$ et $u \in H^1(\omega)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|_{L^2(\omega)}^2 &= \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\omega)} \left\{ |r\partial_r u|^2 + \frac{|\partial_\varphi u|^2}{\xi^2(r)} \right\} \frac{\xi(r) dr}{r} d\varphi d\nu \\ &+ \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\omega)} \left\{ (1-\nu^2) |\partial_\nu u|^2 + \frac{|\partial_\varphi u|^2}{\xi^2(r)(1-\nu^2)} \right\} \xi(r) r dr d\varphi d\nu \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

En utilisant l'expression (6.2.3) et la définition des espaces à poids (6.2.2), on déduit la relation $\mathcal{V}_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset \mathcal{V}_{-2}^1(\Omega)$. Si l'on considère une fonction $v(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = r^\lambda w(\phi_{S^2}(\varphi, \nu))$ avec $w \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ alors $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $\lambda \geq 0$. Les résultats des propositions 6.2.1 et 6.2.2 visent à généraliser ce type de relation à des ordres supérieurs de régularité. Avant de les énoncer nous établissons un résultat de calcul préliminaire dont nous nous servons notamment pour cette proposition mais aussi au cours du prochain chapitre.

Lemme 6.2.1.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa, \beta > 0$ dépendant seulement de p et de Ω tels que

$$\left\| \frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_\alpha^p(\Omega)} \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{V}_{\alpha+\beta}^p(\Omega)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathcal{V}_{\alpha+\beta}^p(\Omega).$$

Preuve :

Nous démontrons ce résultat par récurrence sur p . Dans le cas $p = 0$, choisissons un $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitraire. Il suffit de reprendre la définition (6.2.2) et de remarquer que $r^2 \leq \xi^2(r) - \nu^2$ sur Ω . Ainsi la proposition est vérifiée avec $\beta = 2$

$$\left\| \frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_\alpha^0(\Omega)}^2 = \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega)} \left| \frac{u(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu))}{\xi^2(r) - \nu^2} \right|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\varphi d\nu}{r} \leq \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega)} |u|^2 r^{-2(\alpha+2)} \frac{dr d\varphi d\nu}{r} = \|u\|_{\mathcal{V}_{\alpha+2}^0(\Omega)}^2$$

Supposons maintenant que l'énoncé du lemme ait été démontré aux rang $0, 1, \dots, p-1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous allons le démontrer au rang p . Nous commençons par écrire l'expression de $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_\alpha^p(\Omega)}$ à l'aide des dérivées covariantes. Rappelons que l'application Ψ est définie par (6.2.1). On a alors par définition

$$\left\| \frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_\alpha^p(\Omega)}^2 \leq \left\| \frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_{\alpha}^{p-1}(\Omega)}^2 + \sum_{q=0}^p \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega)} \left| (r\partial_r)^q \nabla_\sigma^{p-q} \Psi_* \left(\frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right) \right|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\sigma}{r} \quad (6.2.4)$$

Par hypothèse de récurrence il suffit de majorer le deuxième terme du membre de droite ci-dessus. On montre, à l'aide d'un calcul assez long (en utilisant des cartes locales par exemples), qu'il existe $\kappa, \beta > 0$ indépendants de α tels que

$$\sum_{q=0}^p \left| (r\partial_r)^q \nabla_\sigma^{p-q} \Psi_* \left(\frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right) \right|^2 \leq \kappa^2 r^{-2\beta} \sum_{q=0}^p \left| (r\partial_r)^q \nabla_\sigma^{p-q} (\Psi_* u) \right|^2, \quad \forall u \in H_{\text{loc}}^p(\Omega_*)$$

Il reste alors à injecter cette inégalité dans l'équation (6.2.4) et on obtient le résultat. ■

On peut comprendre ce résultat intuitivement de la manière suivante. Si $u \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors $r^{-2}u \in \mathcal{V}_{\alpha-2}^k(\Omega)$. De la même manière, comme $\xi^2(r) - \nu^2 = r^2 + 1 - \nu^2$, si $u \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ alors il existe $\beta > 0$ tel que $(\xi^2(r) - \nu^2)^{-1}u \in \mathcal{V}_{\alpha-\beta}^k(\Omega)$. Voici maintenant un résultat de densité dans les espaces à poids.

Lemme 6.2.2.

Soit $H_\star^1(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur un voisinage de } I\}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ l'espace $H_\star^1(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ est dense dans $\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)}$.

Preuve :

Considérons une fonction de troncature $\tau : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ , décroissante telle que $\tau(r) = 1$ lorsque $r \leq 1/2$ et $\tau(r) = 0$ dès que $r \geq 1$. Considérons également les fonction $\tau_\delta(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = \tau(r/\delta)$. Considérons une fonction $u \in \mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)$ arbitraire. Pour conclure il suffit de montrer que $\|\tau_\delta u\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. Or ceci est une conséquence du théorème de convergence dominée puisque qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de δ tel que

$$\|(r\partial_r)^q \tau_\delta\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \kappa \quad \forall \delta \in [0, 1], \quad \forall q = 0 \dots k.$$

■

Notons que, en revanche, l'espace $H_\star^1(\Omega) \cap H^k(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^k(\Omega)$ (pour la norme $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$) dès que $k \geq 3$. En effet l'application trace sur I est continue de $H^3(\Omega) \rightarrow L^2(I)$. Les deux résultats techniques précédents permettent de démontrer la proposition suivante qui donne une comparaison entre les espaces de Sobolev standard et les espaces à poids.

Proposition 6.2.1.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{V}_p^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ et il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{V}_p^k(\Omega)} \quad \forall u \in \mathcal{V}_p^k(\Omega).$$

Preuve :

Nous procédons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. Vue l'expression de la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ dans les coordonnées ellipsoïdales que l'on obtient grâce à (6.1.8), il est clair que $\mathcal{V}_{-1}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. La proposition est donc vraie au rang $k = 0$. Supposons à présent qu'elle soit vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$. Par densité, et d'après l'hypothèse de récurrence, il suffit de montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}$ et $\kappa > 0$ tels que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{H^k(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{H^k(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{V}_p^{k+1}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_\star^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega). \quad (6.2.5)$$

Nous allons démontrer cette estimation seulement pour le terme $\partial_x u$ figurant dans le membre de gauche de (6.2.5) car la preuve s'effectue de la même manière pour les deux autres termes. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $q \in \mathbb{R}$ et κ tels que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq \kappa \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\mathcal{V}_q^k(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_\star^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega).$$

Pour un $u \in H_\star^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$ écrivons $\partial_x u$ dans les coordonnées ellipsoïdales. En inversant la matrice de (6.1.9) on établit que

$$\begin{aligned} (\xi^2(r) - \nu^2) \frac{\partial u}{\partial x} &= \xi(r) \cos(\varphi) \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{r} r \partial_r u - \sin(\varphi) \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ &\quad - \frac{r \sin(\varphi)}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - r \nu \sqrt{1-\nu^2} \cos(\varphi) \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{aligned}$$

À présent on ré-exprime cette quantité dans les coordonnées de $\mathbb{R}_+ \times S^2$ en faisant intervenir l'application Ψ définie par (6.2.1). On en tire l'existence d'une fonction $a(\varphi, \eta) \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ et de deux champs de vecteurs \mathbf{v}, \mathbf{w} tangents à S^2 eux-aussi de classe \mathcal{C}^∞ tels que

$$\Psi_* \left((\xi^2(r) - \nu^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\xi(r)^2}{r} a(\boldsymbol{\sigma}) r \partial_r (\Psi_* u) - \frac{1}{r} \mathbf{v} \cdot \nabla_{S^2} (\Psi_* u) - r \mathbf{w} \cdot \nabla_{S^2} (\Psi_* u)$$

$$\text{avec } a(\varphi, \eta) := \cos(\varphi) \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \mathbf{v} := \sin(\varphi) \sqrt{1 - \eta^2} \boldsymbol{\partial}_\varphi,$$

$$\mathbf{w} := \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1 - \nu^2}} \boldsymbol{\partial}_\varphi + \nu \sqrt{1 - \nu^2} \cos(\varphi) \boldsymbol{\partial}_\nu$$

Ci-dessus ∇_{S^2} désigne le gradient tangentiel sur S^2 . Vérifier la régularité de $a, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ en tant que fonctions et champs de vecteurs tangents à S^2 est un exercice de calcul laissé au lecteur. En utilisant cette expression et d'après le lemme 6.2.1 on voit qu'il existe $\kappa, \alpha > 0$ tel que

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{H^k(\Omega)}^2 \leq \kappa \left\| (\xi^2(r) - \nu^2) \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{\mathcal{Y}_{q+\alpha}^k(\Omega)}^2 \leq \kappa \|u\|_{\mathcal{Y}_{q+\alpha+1}^{k+1}(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_*^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega).$$

La conclusion de la preuve vient par la densité de $H_*^1(\Omega) \cap H^{k+1}(\Omega)$ dans $\mathcal{Y}_{q+\alpha+1}^{k+1}(\Omega)$. ■

Voici enfin un théorème d'inclusion mais dans l'autre sens. Les espaces de Sobolev sont inclus dans des espaces dont le poids est "suffisant".

Proposition 6.2.2.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $H^k(\Omega) \subset \mathcal{Y}_{-2}^k(\Omega)$ et il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^k(\Omega)} \leq \kappa \|u\|_{H^k(\Omega)} \quad \forall u \in H^k(\Omega).$$

Preuve :

Nous démontrerons cette proposition par récurrence sur k . On sait déjà qu'elle est vraie au rang $k = 0$ et $k = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k + 1$. Soit $r_0 > 0$ suffisamment petit pour que $[0, r_0] \times S^2 \subset \Psi(\Omega)$. Étant donné un $\delta \in]0, r_0[$ destiné à tendre vers 0 notons $\omega_\delta = \Psi([0, r_0] \times S^2)$. Il suffit de montrer qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de δ tel que

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^{k+1}(\omega_\delta)} \leq \kappa \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega) \quad \forall \delta \in]0, r_0[.$$

Cette inégalité doit être satisfaite uniformément par rapport à δ de manière à pouvoir passer à la limite quand $\delta \rightarrow 0$. D'après la définition (6.2.2), il existe $\kappa > 0$ indépendant de δ tel que pour tout $u \in H^{k+1}(\Omega)$ on a

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^{k+1}(\omega_\delta)}^2 \leq \kappa \left(\|u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^k(\omega_\delta)}^2 + \|r \partial_r u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^k(\omega_\delta)}^2 + \int_\delta^{r_0} \int_{S^2} \left| \nabla_\sigma^{k+1} (\Psi_* u) \right|^2 r^4 \frac{dr d\sigma}{r} \right) \quad (6.2.6)$$

Nous allons donc majorer chacun des trois termes du membre de droite ci-dessus par $\kappa \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}$ pour un $\kappa > 0$ indépendant de u et de δ . Pour les deux premiers termes commençons par remarquer que d'après (6.1.9) on a $r \partial_r u = x \partial_x u + y \partial_y u + (r^2 / \xi(r)^2) z \partial_z u$ de sorte que si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ alors $r \partial_r u \in H^k(\Omega)$ et il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} + \|r \partial_r u\|_{H^k(\Omega)} \leq \kappa \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega).$$

Par hypothèse de récurrence on sait que si $u \in H^{k+1}(\Omega)$ alors $r \partial_r u \in \mathcal{Y}_{-2}^k(\Omega)$ et $u \in \mathcal{Y}_{-2}^k(\Omega)$ et par ailleurs il existe $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ indépendants de δ tels que $\forall \delta \in]0, r_0[$ on a

$$\|u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^k(\omega_\delta)} + \|r \partial_r u\|_{\mathcal{Y}_{-2}^k(\omega_\delta)} \leq \kappa_1 \|u\|_{H^k(\Omega)} + \|r \partial_r u\|_{H^k(\Omega)} \leq \kappa_2 \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)} \quad \forall u \in H^{k+1}(\Omega).$$

Il ne reste donc qu'à traiter le dernier terme de (6.2.6). Pour le majorer nous utiliserons des résultats standard de régularité elliptique sur la sphère unité selon lesquels il existe $\kappa > 0$ tel que $\|v\|_{H^{k+1}(S^2)} \leq \kappa (\|v\|_{L^2(S^2)} + \|\Delta_{S^2} v\|_{H^{k-1}(S^2)})$ pour tout $v \in H^{k+1}(S^2)$. Ainsi $\forall u \in H^{k+1}(\Omega)$ on a

$$\int_{\delta}^{r_0} \int_{S^2} \left| \nabla_{\sigma}^{k+1}(\Psi_* u) \right|^2 r^4 \frac{dr d\sigma}{r} \leq \kappa \int_{\delta}^{r_0} \int_{S^2} \left(|\Psi_* u|^2 + \left| \nabla_{\sigma}^{k-1}(\Delta_{S^2} \Psi_* u) \right|^2 \right) r^4 \frac{dr d\sigma}{r}. \quad (6.2.7)$$

Nous allons montrer qu'il existe des opérateurs différentiels D_1, D_2, \dots, D_p d'ordre 2 sur Ω à coefficients de classe \mathcal{C}^{∞} et des fonctions $a_1(\sigma), a_2(\sigma), \dots, a_p(\sigma)$ définies sur S^2 et de classe \mathcal{C}^{∞} tels que

$$\Delta_{S^2}(\Psi_* u) = \sum_{q=1}^p a_q(\sigma) \Psi_*(D_q u) \quad (6.2.8)$$

Pour obtenir une telle identité, nous utilisons l'expression du laplacien dans Ω en coordonnées ellipsoïdales. Celle-ci peut être dérivée à partir de la métrique (6.1.7). On en tire

$$\Psi_*^{-1} \Delta_{S^2}(\Psi_* u) = (\xi^2(r) - \nu^2) \Delta u - \frac{1}{r^2} \left((r\partial_r)^2 + \partial_{\varphi}^2 \right) u - (r\partial_r)^2 u - r\partial_r u$$

Pour montrer que l'identité (6.2.8) a bien lieu, il suffit de montrer que chacun des termes du membre de droite ci-dessus admet la forme de (6.2.8). Ceci est clairement vérifié pour le terme $(\xi^2(r) - \nu^2) \Delta u$ et également, d'après la remarque sur $r\partial_r u$ que nous avons énoncé plus haut, les deux termes $(r\partial_r)^2 u$ et $r\partial_r u$ conduisent également à la forme (6.2.8). Il reste seulement à examiner $r^{-2} \left((r\partial_r)^2 u + \partial_{\varphi}^2 u \right)$. En utilisant (6.1.9), un calcul assez long mais sans intérêt montre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left[(r\partial_r)^2 u + \partial_{\varphi}^2 u \right] &= \frac{1}{r^2} \left[(x\partial_x + y\partial_y)(x\partial_x u + y\partial_y u) + (-y\partial_x + x\partial_y)(-y\partial_x u + x\partial_y u) \right] \\ &+ \frac{1}{\xi(r)^2} \left[2\left(1 - \frac{r^2}{\xi(r)^2}\right) z\partial_z u + 2xz\partial_x \partial_z u + 2yz\partial_y \partial_z u + \frac{r^2}{\xi(r)^2} (z\partial_z)^2 u \right] \\ &= (1 - \nu^2) \left(\partial_x^2 u + \partial_y^2 u \right) \\ &+ \frac{1}{\xi(r)^2} \left[2\left(1 - \frac{r^2}{\xi(r)^2}\right) z\partial_z u + 2xz\partial_x \partial_z u + 2yz\partial_y \partial_z u + \frac{r^2}{\xi(r)^2} (z\partial_z)^2 u \right] \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que (6.2.8) est bien satisfaite. Pour conclure définitivement la preuve de la proposition, il reste à injecter la forme (6.2.8) dans le membre de droite de l'inégalité (6.2.7). Par inégalité triangulaire on en tire l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de $\delta > 0$ tel que

$$\int_{\delta}^{r_0} \int_{S^2} \left| \nabla_{\sigma}^{k+1}(\Psi_* u) \right|^2 r^4 \frac{dr d\sigma}{r} \leq \kappa \sum_{q=0}^p \int_{\delta}^{r_0} \int_{S^2} \left(|\Psi_* u|^2 + \left| \nabla_{\sigma}^{k-1} \Psi_*(D_q u) \right|^2 \right) r^4 \frac{dr d\sigma}{r}$$

Il reste à appliquer l'hypothèse de récurrence au membre de droite de l'inégalité ci-dessus. En tenant compte du fait que les opérateurs différentiels D_q sont au plus d'ordre 2, ceci mène à l'existence de $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ indépendants de δ tels que pour tout $u \in H^{k+1}(\Omega)$ et tout $\delta \in]0, r_0[$ on a

$$\int_{\delta}^{r_0} \int_{S^2} \left| \nabla_{\sigma}^{k+1}(\Psi_* u) \right|^2 r^4 \frac{dr d\sigma}{r} \leq \kappa_1 \sum_{q=0}^p \|D_q u\|_{H^{k-1}(\Omega)}^2 \leq \kappa_2 \|u\|_{H^{k+1}(\Omega)}^2$$

Il suffit maintenant de passer à la limite pour $\delta \rightarrow 0$. Ceci conclut la preuve. ■

6.3 Problème de Helmholtz avec condition de Neumann homogène

Dans ce chapitre nous nous intéresserons une fois encore à un problème de diffraction. Nous chercherons à résoudre l'équation de Helmholtz avec condition de Neumann homogène. La source sera une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact tel que $\text{supp} f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. Comme d'habitude, nous noterons u^ε la solution de notre problème. Nous chercherons la solution u^ε dans l'espace

$$H^1(\Omega_\varepsilon) := \{ v \in \mathcal{D}'(\Omega_\varepsilon) \mid \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 := \|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 < \infty \}.$$

Conditions aux limites Nous imposerons sur le bord Γ_ε une condition de Neumann homogène et sur la frontière $\Gamma = \partial\Omega$, nous imposerons une condition de Sommerfeld via un opérateur de Dirichlet-to-Neumann noté T_Γ continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Cet opérateur est classique, on peut en trouver une définition succincte dans l'appendice 6.B, et une description beaucoup plus complète dans [54, 91]. Les conditions aux limites s'écrivent donc

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Formulation du problème étudié Avec ces conditions aux limites, le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ de diffraction dans tout le domaine Ω_ε prend la même forme que dans les situations 2D que nous avons abordées aux chapitres 1 et 3. Il s'agit de la formulation usuelle

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right. \quad (6.3.1)$$

Ces opérateurs ne correspondent pas exactement aux opérateurs A et B que nous avons considérés au chapitre 2. Nous allons voir à la prochaine section quelles sont les définitions que nous choisissons pour A et B dans le cas présent. Nous posons dès à présent

$$C = n_\Gamma \cdot \nabla + T_\Gamma. \quad (6.3.2)$$

De même qu'auparavant on peut associer à ce problème une forme bilinéaire continue, ce qui permet de reformuler $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ variationnellement

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon), \\ &\text{avec } a_\varepsilon(u, v) := \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma u, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \end{aligned} \quad (6.3.3)$$

Ce problème est bien posé au même titre que les problèmes abordés dans les chapitres 1 et 3. On peut en trouver la preuve dans [28, 91]. Nous démontrerons plus loin que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition inf-sup uniformément par rapport à ε .

6.3.1 Forme des opérateurs

Avant de montrer la stabilité du problème (qui correspond à **H1**) nous allons tout d'abord étudier plus en détail la forme des opérateurs différentiels pour vérifier que le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ vérifie les hypothèses **H*i***, $i=2 \dots 6$ que nous avons formulé au chapitre 2. Pour pouvoir rentrer dans le cadre de cette étude nous ne choisirons pas directement $A = \Delta + \bar{\omega}^2$ et $B = n_{r_\varepsilon} \cdot \nabla$ comme au chapitre 3. Nous devons faire un choix un peu différent ce qui nous mènera à reformuler $(\mathcal{P}^\varepsilon)$.

Étude de l'opérateur volumique

Pour effectuer notre choix pour A et B nous devons passer par des expressions explicites des opérateurs différentiels. L'expression explicite de $\Delta + \bar{\omega}^2$ en coordonnées ellipsoïdales est plus facile à dériver que celle de $n_{r_\varepsilon} \cdot \nabla$, nous commençons donc par définir A . Nous écrivons tout d'abord l'expression du laplacien dans les coordonnées ellipsoïdales. On a

$$\Delta = \frac{1}{\xi^2(r) - \nu^2} \frac{1}{r^2} \left\{ (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2 + r^2 \left[(r\partial_r)^2 + r\partial_r + \partial_\nu(1 - \nu^2)\partial_\nu + \frac{1}{1 - \nu^2} \partial_\varphi^2 \right] \right\} \quad (6.3.4)$$

Remarquons tout d'abord qu'il apparaît un terme qui ressemble fort à un Laplacien Beltrami sur S^2 . En effet un calcul en utilisant les coordonnées (φ, η) nous donne

$$\Delta_{S^2} = \partial_\eta(1 - \eta^2)\partial_\eta + \frac{1}{1 - \eta^2} \partial_\varphi^2.$$

En particulier Δ_{S^2} envoie continuellement $H^{s+2}(S^2)$ dans $H^s(S^2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ c'est-à-dire $\Delta_{S^2} \in \mathcal{O}_2(S^2)$. Par la suite on notera $\Delta_\sigma := \partial_\nu(1 - \nu^2)\partial_\nu + (1 - \nu^2)^{-1} \partial_\varphi^2$. Attention il ne s'agit que d'une notation car ici $\partial_\nu(1 - \nu^2)\partial_\nu + (1 - \nu^2)^{-1} \partial_\varphi^2$ n'est pas le laplacien Beltrami sur la sphère unité puisque les coordonnées φ, ν ne renvoient pas à une paramétrisation de S^2 . On a en revanche

$$\Delta_\sigma = \Psi_*^{-1} \Delta_{S^2} \Psi_*.$$

où Ψ est défini par (6.2.1). Il apparaît également en facteur de l'expression (6.3.4) le terme $(\xi^2(r) - \nu^2)^{-1} = (r^2 + 1 - \nu^2)^{-1}$ qui est gênant car il n'est pas homogène par rapport à r . Notons que $\xi^2(r) - \nu^2 = 0$ si et seulement si $r = 0$ et $\nu = \pm 1$. Nous définissons l'opérateur A de manière à nous débarrasser de ce terme,

$$\begin{aligned} A &= (\xi^2(r) - \nu^2) \left(\Delta + \bar{\omega}^2 \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2 \right\} + (r\partial_r)^2 + r\partial_r + \Delta_\sigma + (1 - \nu^2) \bar{\omega}^2 + r^2 \bar{\omega}^2 \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Conformément à l'équation (2.1.5), les termes du développement de A admettent l'expression suivante en coordonnées ellipsoïdales

$$A_0 = (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2, \quad A_2 = (r\partial_r)^2 + r\partial_r + \Delta_{S^2} + (1 - \nu^2) \bar{\omega}^2, \quad A_4 = \bar{\omega}^2.$$

Avec cette définition, on voit que l'opérateur A correspond à la forme requise au §2.1.4. En particulier l'hypothèse **H3** est satisfaite puisqu'on a les expressions

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = \lambda^2 + \partial_\varphi^2, \quad \mathcal{A}_2(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + \Delta_{S^2} + (1 - \nu^2) \bar{\omega}^2, \quad \mathcal{A}_4(\lambda) = \bar{\omega}^2$$

Ainsi $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_2$ sont à valeur dans $\mathcal{O}_2(S^2)$ et \mathcal{A}_4 est à valeur dans $\mathcal{O}_0(S^2)$, et toutes ces familles d'opérateurs sont polynomiales par rapport à λ .

Vérification des hypothèses sur la partie dominante

Remarquons que $\mathcal{A}_0(\lambda)$ admet la même forme que son homologue du chapitre 3, à la différence qu'ici il n'est plus à valeur Fredholm (!). Pour s'en convaincre il suffit de considérer $\lambda = 0$, et alors le noyau de $\mathcal{A}_0(\lambda = 0) = \partial_\varphi^2$ n'est pas de dimension finie puisqu'il contient toutes les harmoniques sphériques y_n^0 , $n \in \mathbb{N}$ (dont la définition est rappelée en annexe 6.A). Nous pouvons néanmoins reprendre la même décomposition spectrale qu'au chapitre 3 à savoir

$$\mathcal{A}_0(\lambda) = \lambda^2 + \partial_\varphi^2 = \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\lambda^2 - p^2) P_p$$

$$\text{d'où } \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \frac{P_p}{\lambda^2 - p^2} = \frac{P_0}{\lambda^2} + \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{\lambda - p} \frac{P_p + P_{-p}}{2p} \quad (6.3.6)$$

$$\text{avec } (P_p v)(\varphi) = \frac{e^{ip\varphi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\alpha) e^{-ip\alpha} d\alpha.$$

En particulier on voit directement que $\mathcal{A}_0(\lambda)$, en tant que fonction valuée dans $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}^\infty(S^2), \mathcal{C}^\infty(S^2))$, admet un inverse dès que $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Par ailleurs cet inverse est clairement méromorphe à valeur dans $\mathcal{O}_{-2}(S^2)$. À nouveau nous rappelons que la somme ci-dessus ne converge pas nécessairement dans $\mathcal{O}_p(S^2)$ pour un certain p , mais qu'il s'agit d'une décomposition spectrale (cf par exemple [36, 102]). Nous venons de vérifier les hypothèses **H4** et **H5**. De la même manière qu'au §3.1.3 on démontre que l'hypothèse **H6** est également satisfaite. Cette fois cependant on a l'inégalité suivante

$$\| \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} v \|_{H^n(S^2)} \leq 2 \| v \|_{H^n(S^2)} \quad \text{dès que } \lambda = \alpha + i\beta \text{ avec } |\alpha| < a < |\beta| \text{ pour } a > 1. \quad (6.3.7)$$

Étude de l'opérateur de bord

Dériver l'expression explicite de l'opérateur de bord est un peu plus délicat parce qu'il faut calculer l'expression de la normale n_{Γ_ε} en fonction de r, φ, ν et $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_\nu$ définis par (6.1.9). Comme indiqué dans l'énoncé du lemme 6.1.1, n_{Γ_ε} désigne le champ de vecteurs de norme unité orthogonal à Γ_ε dirigé vers l'extérieur de la surface du fil. On peut décomposer la normale de la manière suivante

$$n_{\Gamma_\varepsilon} = n_{\Gamma_\varepsilon}^r \partial_r + n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi \partial_\varphi + n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu \partial_\nu,$$

et les composantes de ce champ de vecteur doivent nécessairement satisfaire trois équations : deux d'entre elles expriment que n_{Γ_ε} est orthogonal à Γ_ε , et la troisième exprime $|n_{\Gamma_\varepsilon}|^2 = 1$. Rappelons que par définition sur Γ_ε on a $r = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu)$. Le calcul fournit les expressions suivantes

$$\begin{aligned} r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} &= -\frac{1}{\xi^2} \frac{\xi^2 - \nu^2}{1 - \nu^2} \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} & r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} &= -\frac{\varepsilon^2 \Phi^2}{\xi^2} (1 - \nu^2) \frac{\partial_\nu \Phi}{\Phi} \\ n_{\Gamma_\varepsilon}^r &= \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - \nu^2}} & \text{avec ici } \xi &= \xi(\varepsilon \Phi) = \sqrt{1 + \varepsilon^2 \Phi^2} \end{aligned} \quad (6.3.8)$$

Notons que dans l'expression de $r n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi / n_{\Gamma_\varepsilon}^r$ intervient un facteur $(1 - \nu^2)^{-1}$ qui pourrait faire penser que cette quantité est singulière en $\nu = \pm 1$. Or d'après l'hypothèse **F2**, $\partial_\varphi \Phi = 0$ dans un voisinage de $\nu = \pm 1$, de sorte que ce terme est finalement régulier en tant que fonction sur Γ_ε .

En ce qui concerne l'expression assez lourde de $n_{\Gamma_\varepsilon}^r$, il nous suffira pour la suite de remarquer d'une part que $n_{\Gamma_\varepsilon}^r \neq 0$ sur Γ_ε , et d'autre part que $n_{\Gamma_\varepsilon}^r \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ et qu'il existe $\kappa_+, \kappa_- > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|n_{\Gamma_\varepsilon}^r\|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon)} \leq \frac{\kappa_+}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{1}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \right\|_{L^\infty(\Gamma_\varepsilon)} \leq \kappa_-$$

Grâce à l'expression des composantes du champ normal, on dérive directement l'expression de l'opérateur de bord sur Γ_ε . Dans ce qui suit on suppose que $r = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu)$ puisqu'on se place sur Γ_ε .

$$(n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u)|_{\Gamma_\varepsilon} = n_{\Gamma_\varepsilon}^r \partial_r u + n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi \partial_\varphi u + n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu \partial_\nu u = \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^r}{r} \left\{ r \partial_r u + r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\varphi u + r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\nu u \right\}$$

Dans cette expression le terme $n_{\Gamma_\varepsilon}^r$ devant l'accolade est gênant, nous prenons donc une définition pour B qui permet, de même qu'avec les opérateurs volumiques de s'en débarrasser. On pose

$$Bu := r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \cdot \nabla u = r \partial_r u + r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\varphi u + r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\nu u \quad (6.3.9)$$

Il nous faut maintenant vérifier que l'opérateur B ainsi défini admet la forme annoncée au §2.1.4. Pour ceci il suffit de regarder comment se développent les termes en facteur de $\partial_\varphi u$ et $\partial_\nu u$. En utilisant (6.3.8) on obtient

$$\begin{aligned} & r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\varphi u + r \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \partial_\nu u \\ &= - \left(1 + \frac{\nu^2 r^2}{\xi^2(r)(1-\nu^2)} \right) \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} \partial_\varphi u - \frac{r^2}{\xi^2 \Phi} \left(\frac{1}{1-\nu^2} \partial_\varphi \Phi \partial_\varphi u + (1-\nu^2) \partial_\nu \Phi \partial_\nu u \right) \end{aligned} \quad (6.3.10)$$

Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, le premier terme est régulier car $\partial_\varphi \Phi = 0$ dans un voisinage de $\nu = \pm 1$. Compte tenu de l'expression $\xi^2 = 1 + \varepsilon^2 \Phi^2$ valable sur Γ_ε , il se développe suivant les puissances de ε de la manière suivante

$$\left(1 + \frac{\nu^2 r^2}{\xi^2(r)(1-\nu^2)} \right) \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} \partial_\varphi u = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\nu^2 (\varepsilon \Phi)^{2(n+1)}}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} \partial_\varphi u$$

On voit que dans ce développement n'apparaissent que des opérateurs continus de $H^{s+1}(S^2)$ dans $H^s(S^2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, donc appartenant à $\mathcal{O}_1(S^2)$. Pour le deuxième terme de (6.3.10), notons tout d'abord que suivant le même principe

$$\frac{r^2}{\xi^2 \Phi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varepsilon \Phi)^{2(n+1)}}{\Phi}$$

Par ailleurs notons ∇_{S^2} le gradient surfacique sur la sphère S^2 . En tenant compte de l'expression (6.1.3) du tenseur métrique induit par notre paramétrisation de la sphère, si $w \in H^1(S^2)$ alors

$$\nabla_{S^2}(\phi_{S^2}^* \Phi) \cdot \nabla_{S^2} w = \frac{1}{1-\eta^2} \partial_\varphi \Phi \partial_\varphi w + (1-\eta^2) \partial_\eta \Phi \partial_\eta w.$$

Ceci montre que le deuxième terme dans (6.3.10) se développe suivant ε avec des termes à valeur dans $\mathcal{O}_1(S^2)$. La conclusion de ces calculs est donc finalement que $\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon$ se développe sous la forme suivante qui correspond bien à l'hypothèse **H2** du chapitre 2

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} B \Xi_*^\varepsilon = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n B_n \quad \text{avec} \quad B_0 u = r \partial_r u - \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} \partial_\varphi u, \quad \text{et} \quad B_n \in \mathcal{O}_1(S^2), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.3.11)$$

Reformulation du problème Nous venons de donner une définition pour les opérateurs A , B et C qui ne semble pas complètement en accord avec la formulation (6.3.1) que nous avons donnée pour le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ puisque $A \neq \Delta + \varpi^2$ et $B \neq n_{r_\varepsilon} \cdot \nabla$. Nous donnons donc une autre formulation $(\mathcal{P}^\varepsilon)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ Au^\varepsilon = -(\xi^2(r) - \nu^2) f \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ Bu^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \\ Cu^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right. \quad (6.3.12)$$

les opérateurs A, B et C ayant été définis respectivement par (6.3.5), (6.3.9) et (6.3.2). Cette formulation est strictement équivalente à (6.3.1) car $\xi^2(r) - \nu^2 \neq 0$ dans Ω_ε et $n_{r_\varepsilon}^r \neq 0$ sur Γ_ε . Elle permet de montrer que le problème de ce chapitre correspond aux problèmes envisagés au §2.1.3.

6.3.2 Stabilité

Nous venons de vérifier toutes les hypothèses des opérateurs pour rentrer dans le contexte de l'étude du chapitre 2. Il reste encore à démontrer la stabilité du problème. C'est ainsi que nous terminerons cette section. Les preuves qui suivent consistent pour l'essentiel en une adaptation des preuves de la section 1.2.

Lemme de densité De même qu'aux chapitres 1, 3 et 4 nous aurons besoin préalablement de démontrer un analogue du lemme 1.2.2. On peut intuitiver le résultat suivant en remarquant que l'application trace sur I n'est pas continue dans $H^1(\Omega)$.

Lemme 6.3.1.

L'espace $H_\star^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur un voisinage de } I\}$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Preuve :

Il s'agit d'adapter les arguments du lemme 1.2.2 à la géométrie ellipsoïdale. Par densité de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$, il suffit de considérer une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ arbitraire et de démontrer qu'on peut l'approcher par des éléments de $H_\star^1(\Omega)$. On définit alors des fonctions de troncature

$$\tau_\delta(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) := \begin{cases} 0 & \text{si } r < \delta, \\ \frac{\ln(r/\delta)}{\ln(1/\delta)} & \text{si } \delta \leq r < 1, \\ 1 & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

On peut effectuer quasiment le même calcul que dans la preuve du lemme 1.2.2. Posons alors $v_\delta = \tau_\delta v$. Pour tout δ on a $v_\delta \in H_\star^1(\Omega)$. On montre que $\|v - v_\delta\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$.

$$\begin{aligned} \|v - v_\delta\|_{H^1(\Omega)} &\leq 2\|(1 - \tau_\delta)v\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla(1 - \tau_\delta)v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2\|1 - \tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} (\|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^\infty(\Omega)}) + 2\|\nabla\tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dans le cas présent cependant il n'est pas complètement immédiat que $\|1 - \tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ et $\|\nabla\tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$. Pour le démontrer il suffit d'écrire les calculs explicitement. Nous le ferons pour montrer $\|\nabla\tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$, la preuve que $\|1 - \tau_\delta\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ s'effectue de la même manière. En utilisant (6.2.3) on a

$$|\partial_r \tau_\delta| = \frac{1}{|\ln \delta|} \frac{1}{r} \mathbf{1}_{\delta \leq r < 1} \quad \text{d'où} \quad \|\nabla\tau_\delta\|_{L^2(\Omega)}^2 = \frac{1}{|\ln \delta|^2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_\delta^1 \xi(r) \frac{dr}{r} d\varphi d\nu = \frac{4\sqrt{2}\pi}{|\ln \delta|}$$

ce qui prouve le résultat. ■

Stabilité faible : condition inf – sup uniforme

Avec le lemme de densité il est maintenant possible de démontrer la stabilité du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Comme d'habitude notre premier résultat de stabilité dit que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ satisfait une condition inf – sup uniforme.

Théorème 6.3.1.

Pour la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (6.3.3), il existe $\kappa > 0$ indépendante de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{w \in H^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}, \quad \forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon).$$

Preuve :

Nous reprendrons la preuve de stabilité du théorème 1.2.1 pour l'adapter à la géométrie ellipsoïdale. Cette preuve s'était déroulée en trois étapes. Nous n'en donnerons pas ici tous les détails mais signalerons à chaque fois comment il convient d'adapter la démarche. Nous raisonnerons également par l'absurde. Nous supposons donc l'existence d'une suite ε_n telle que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et l'existence d'une suite $v_n \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n})$ satisfaisant

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{w \in H^1(\Omega_{\varepsilon_n})} \frac{a_{\varepsilon_n}(v_n, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_{\varepsilon_n})}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \tag{6.3.13}$$

Jusqu'à la fin de la démonstration nous noterons Ω_n au lieu de Ω_{ε_n} . Nous allons démontrer, quitte à en extraire une sous-suite, que $\|v_n\|_{H^1(\Omega_n)} \rightarrow 0$ ce qui constituera une contradiction.

De la même manière que nous avons introduit des disques "emboîtés" dans la démonstration du théorème 1.2.1, nous introduisons ici les ellipsoïdes emboîtés $D_n = \{\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq r \leq 1/n\}$. On suppose quitte à extraire une sous-suite de ε_n , que $\Omega \setminus D_n \subset \Omega_n$. Comme nous venons de démontrer que l'espace $H^1_\star(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on peut répéter l'étape 1 de la preuve du théorème 1.2.1, et on obtient

1^{re} étape : Quitte à extraire une sous-suite, pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega \setminus D_j)} = 0$.

Il faut ensuite démontrer un analogue de la deuxième étape ce qui est moins évident puisque dans la preuve du théorème 1.2.1, l'étape 2 reposait sur l'utilisation de formules de Taylor dans les coordonnées polaires. Nous allons faire de même ici en remplaçant le "r" des coordonnées polaires par le "r" des coordonnées ellipsoïdales.

2^{me} étape : Pour tout $\delta > 0$ il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)} \leq \delta$ dès que $n \geq j$.

Notons pour la suite $r_j = 1/j$. Supposons $n \geq j$, on a donc $\varepsilon_n \Phi(\sigma) \leq r_j$ pour tout σ , car on a supposé que $\Omega \setminus D_n \subset \Omega_n := \Omega_{\varepsilon_n}$. Étant donné un $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_n \cap D_j)$ nous noterons $u(r, \varphi, \nu)$ au lieu de $u(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu))$ son expression dans les coordonnées ellipsoïdales. On a alors pour tout φ, ν et $r \in]\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu), r_j[$,

$$u(r, \varphi, \nu) = u(r_j, \varphi, \nu) - \int_r^{r_j} \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) ds \tag{6.3.14}$$

d'où $|u(r, \varphi, \nu)|^2 \leq 2|u(r_j, \varphi, \nu)|^2 + 2 \left| \int_r^{r_j} \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) ds \right|^2$

On peut majorer par Cauchy-Schwartz la deuxième intégrale portant sur $\partial_r u$ en faisant intervenir le

mesure de volume en coordonnées ellipsoïdales. Pour un $\kappa > 0$ indépendant de r, φ, ν on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_r^{r_j} \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) ds \right|^2 &\leq \int_r^{r_j} \frac{\xi(s)}{s} ds \int_r^{r_j} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) s ds \\ &\leq \kappa \ln\left(\frac{r_j}{r}\right) \int_{\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu)}^{r_j} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) s ds \end{aligned} \quad (6.3.15)$$

On intègre alors la dernière inégalité de (6.3.14) suivant les coordonnées angulaires. Dans ce qui suit on notera $\int_{\varphi, \nu}$ pour signifier qu'on intègre pour $\varphi \in [0, 2\pi]$ et $\nu \in [-1, +1]$. En majorant $(\xi^2(r) - \nu^2)/\xi(r)$ par une constante $\kappa > 0$ indépendante de r, φ, ν on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 &= \int_{\varphi, \nu} \int_{\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu)}^{r_j} |u(r, \varphi, \nu)|^2 \frac{\xi^2(r) - \nu^2}{\xi(r)} r dr d\varphi d\nu \\ &\leq \kappa r_j^2 \int_{\varphi, \nu} |u(r_j, \varphi, \nu)|^2 d\varphi d\nu + \kappa \int_{\varphi, \nu} \int_{\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu)}^{r_j} \ln\left(\frac{r_j}{r}\right) \int_r^{r_j} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) s ds r dr d\varphi d\nu \\ &\leq \kappa r_j^2 \int_{\varphi, \nu} |u(r_j, \varphi, \nu)|^2 d\varphi d\nu + \kappa r_j^2 \int_{\varphi, \nu} \int_{\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu)}^{r_j} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) s ds d\varphi d\nu \\ &\leq \kappa r_j^2 \int_{\varphi, \nu} |u(r_j, \varphi, \nu)|^2 d\varphi d\nu + \kappa r_j^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 \end{aligned}$$

Un calcul similaire à (6.3.14) et (6.3.15) avec r intégré sur $]r_j, r_0[$, au lieu d'être intégré sur $]\varepsilon_n \Phi(\varphi, \nu), r_j[$, fournit une estimation du terme intégral restant. Supposons en effet que $D_0 \subset \Omega$, quitte à choisir un Ω plus grand (rappelons qu'initialement $\Omega = B(0, \rho)$ avec ρ aussi grand que nécessaire),

$$\begin{aligned} r_j \int_{\varphi, \nu} |u(r_j, \varphi, \nu)|^2 d\varphi d\nu &\leq \kappa r_0 \int_{\varphi, \nu} |u(r_0, \varphi, \nu)|^2 d\varphi d\nu + \kappa r_j \int_{r_j}^{r_0} \int_{\varphi, \nu} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) d\varphi d\nu ds \\ &\leq \kappa \|u\|_{H^1(\Omega_n)}^2 + \kappa \int_{r_j}^{r_0} \int_{\varphi, \nu} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(s, \varphi, \nu) \right|^2 \xi(s) s d\varphi d\nu ds \leq \kappa \|u\|_{H^1(\Omega_n)} \end{aligned}$$

Ci-dessus nous avons utilisé le fait que $r_j \leq s$ lorsque $s \in [r_j, r_0]$ dans la deuxième inégalité. Les constantes κ intervenant dans ces inégalités étant indépendantes de n et j . La conclusion finale des estimations ci-dessus est l'existence d'une constante $\kappa > 0$ indépendante de n et j telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 \leq \kappa r_j \|u\|_{H^1(\Omega_n)}^2 \quad \forall u \in H^1(\Omega_n).$$

Considérons un $\delta > 0$ arbitraire. Comme $r_j \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow \infty$ et que $\|v_n\|_{H^1(\Omega_n)}^2 = 1$, choisissons j assez grand pour que $\kappa r_j < \delta$. On obtient alors le résultat attendu pour l'étape 2,

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega_n \cap D_j)}^2 \leq \kappa r_j \|v_n\|_{H^1(\Omega_n)}^2 \leq \delta \quad \text{pour tout } n \geq j.$$

Voilà l'étape 2 démontrée, il reste donc seulement à prouver l'étape 3. Celle-ci se démontre de la même manière qu'au théorème 1.2.1, en utilisant cette fois pour l'opérateur DtN la propriété signalée par (6.B.2) à la fin de ce chapitre.

3^{me} étape: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega_n)}^2 = 0$.

Ceci termine la démonstration de stabilité. ■

Convergence vers le champ incident De même que dans les précédents chapitres, l'utilisation de la condition inf–sup uniforme permet déjà de montrer que la limite de u^ε est la solution du problème sans fil. Nous définissons le champ incident u^0 comme l'unique fonction satisfaisant

$$u^0 \in H^2(\Omega), \quad \Delta u^0 + \varpi^2 u^0 = -f \text{ dans } \Omega \quad \text{et} \quad T_\Gamma u^0 + \frac{\partial u^0}{\partial n_\Gamma} = 0 \text{ sur } \Gamma \quad (6.3.16)$$

Même si cette fois l'obstacle est tridimensionnel, son influence constitue une petite perturbation du champ u^ε . Le champ u^0 apparaît alors comme une première approximation de u^ε . En effet, en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans le lemme 1.2.1 mais adaptées aux coordonnées ellipsoïdales on démontre le résultat suivant (la preuve est laissée au lecteur) qu'on peut interpréter en disant que, au premier ordre, le champ total u^ε "ne voit pas le fil".

Proposition 6.3.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon \sqrt{|\ln \varepsilon|}$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$.

Formulation forte de la stabilité

À l'aide de la condition inf–sup uniforme, il est maintenant possible de démontrer un résultat de stabilité mieux adapté à l'analyse asymptotique, permettant de satisfaire l'hypothèse **H1**. Nous énonçons un lemme intermédiaire qui a encore son équivalent en 2D. Nous ne donnerons pas la démonstration car elle consiste en une adaptation quasi directe de la preuve du lemme 1.4.2 en utilisant les estimations (6.3.14) et (6.3.15) ci-dessus.

Lemme 6.3.2.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|\Xi_*^{\varepsilon, -1} v\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$, $\forall v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$.

Cette estimation de trace conduit à un résultat de stabilité modifié qui permet de satisfaire **H1**. Ici encore il s'agit d'un analogue de la proposition 1.4.1. Il y a cependant quelques calculs d'ordre géométrique à fournir pour obtenir un résultat similaire.

Proposition 6.3.2.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left(\|Av\|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} + \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} Bv\|_{L^2(\Gamma_N)} + \|Cv\|_{L^2(\Gamma)} \right).$$

Preuve :

Nous reprenons le début de la preuve de la proposition 1.4.1. Considérons un $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, et choisissons un $w \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire mais tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. En vue d'utiliser le théorème 6.3.1, nous estimons dans un premier temps $a_\varepsilon(v, w)$. En appliquant la formule de Green, on obtient un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} |a_\varepsilon(v, w)| &\leq \left| - \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta v + \varpi^2 v) \bar{w} + \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right) \bar{w} - \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \\ &\leq \kappa \left(\|\Delta v + \varpi^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} + \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \right) \end{aligned}$$

Rappelons que $\xi^2(r) - \nu^2 > \varepsilon^2 \Phi_0^2$ sur Ω_ε . Étant donné l'expression de la norme L^2 en coordonnées ellipsoïdales, la définition de A et celle des espaces à poids, on a donc l'estimation

$$\|\Delta v + k^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 = \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega_\varepsilon)} \frac{|Av|^2}{(\xi^2(r) - \nu^2)^2} \frac{\xi^2(r) - \nu^2}{\xi(r)} r dr d\phi d\nu \leq \|Av\|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)}^2$$

Il reste donc à estimer le terme de bord. Pour ceci nous allons écrire explicitement l'intégrale sur Γ_ε en utilisant la paramétrisation $\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)$. Dans ce qui suit nous notons $d\Gamma_\varepsilon$ la mesure de surface sur Γ_ε . En vue d'utiliser le lemme 6.1.1, on écrit d'abord

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} = \int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{w} B v n_{\Gamma_\varepsilon}^r d\Gamma_\varepsilon \quad \text{avec} \quad \frac{n_{\Gamma_\varepsilon}^r}{r} d\Gamma_\varepsilon = \xi(\varepsilon\Phi(\varphi, \nu)) d\varphi d\nu$$

avec $\xi(\varepsilon\Phi(\varphi, \nu)) = (1 + \varepsilon^2\Phi(\varphi, \nu)^2)^{1/2}$. Par ailleurs comme la mesure sur Γ_N est donnée par (6.1.12) on en déduit qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $|\xi(\varepsilon\Phi)| \leq 2$, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. L'intégrale précédente est alors majorée par

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \leq \left\| \phi_{S^2}^*(\xi(\varepsilon\Phi)) \right\|_{L^\infty(S^2)} \left| \int_{\Gamma_N} \Xi_*^{\varepsilon, -1}(\bar{w} B v) d\Gamma_N \right| \leq 2 \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} \bar{w}\|_{L^2(\Gamma_N)} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} B v\|_{L^2(\Gamma_N)},$$

pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. On peut alors appliquer le lemme 6.3.2. Comme nous avons choisi w telle que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$, on obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{w} \right| \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} B v\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq \kappa \sqrt{|\ln \varepsilon|} \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} B v\|_{L^2(\Gamma_N)},$$

ce qui fournit le résultat. ■

6.4 Écriture des problèmes récurrents

Nous avons vérifié toutes les hypothèses nécessaires à l'application des résultats du chapitre 2. Nous pouvons maintenant poser les problèmes récurrents qui définiront les termes du développement asymptotique de u^ε .

Au préalable nous précisons comment écrire les équations de raccord. Avec l'expression de la partie dominante $A_0 = (r\partial_r)^2 + \partial_\varphi^2$, on peut définir les applications linéaires $\ell_\mu(\cdot)$ et $L_\mu(\cdot)$. Comme A_0 a la même forme qu'au chapitre 3, il en sera de même pour les $\ell_\mu(\cdot)$ et $L_\mu(\cdot)$.

$$\begin{aligned} \ell_p(u) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda \\ \ell_0(u) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \lambda \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Si $u \in \cup_\alpha \mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ et $\mathfrak{M}\{u\}(\lambda)$ est méromorphe au voisinage de $\lambda = 0$ alors $\ell_0(u)$ existe et admet une dépendance antisymétrique par rapport à la variable angulaire σ , c'est une fonction indépendante de φ . Les $L_p(\cdot)$ admettent également l'expression

$$\begin{aligned} L_p(U) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda \\ L_0(U) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft 0} \lambda \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{r > 1}\}(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Les mêmes propriétés qu'au chapitre 3 de commutation avec les projecteurs P_q valent ici. On peut alors reprendre le calcul que nous avons effectué et on obtient ainsi la même simplification substantielle des équations de raccord. Au final, les problèmes récurrents s'écrivent de la manière suivante

$$\begin{cases}
 u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\
 Au_n^\varepsilon = -\delta_0^n (\xi^2(r) - \nu^2) f & \text{dans } \Omega_\star, \\
 Cu_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma,
 \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_n^\varepsilon) \begin{cases}
 U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\
 A_0 U_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_N, \\
 B_0 U_n^\varepsilon = -\sum_{k=1}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_N,
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\
 L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\
 \ell_0(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon)
 \end{cases}$$

Ici δ_0^n désigne le symbole de Kronecker avec $\delta_0^n = 1$ si $n = 0$ et $\delta_0^n = 0$ si $n \neq 0$. Notons que, bien que l'équation étudiée (Helmholtz) soit la même qu'au chapitre 3, les problèmes récurrents ci-dessus diffèrent de ceux du chapitre 3 simplement à cause de la géométrie. Ici il apparaît en plus les termes $-R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon$ et $-\sum_{k=1}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon$ en second membre.

Une fois ces problèmes récurrents écrits, il reste d'une part à montrer que ces problèmes sont bien posés, et d'autre part à étudier la forme de l'ansatz induit par la résolution de ces problèmes. Ici nous montrerons que ces problèmes mènent à un développement régulier, c'est-à-dire que les termes du développement sont de la forme

$$u_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{Q_n} \ln^q(\varepsilon) u_n^{[q]} \quad \text{et} \quad U_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{Q_n} \ln^q(\varepsilon) U_n^{[q]}.$$

ce qui permettra d'abrégier considérablement l'estimation d'erreur au moyen des propositions 2.6.3 et 2.6.4 comme au chapitre 3.

6.5 Construction des profils en champ lointain

Pour montrer l'existence et l'unicité d'un couple solution de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$, nous aurons recours à des profils. Il s'agit de fonctions admettant un comportement singulier prescrit en coordonnées ellipsoïdales. Nous définissons dans un premier temps les profils en champ lointain, et pour ceci nous reprenons dans les grandes lignes la preuve du lemme 3.2.1. Nous aurons ainsi à résoudre des problèmes faisant intervenir l'opérateur A qui est très proche de $\Delta + \omega^2$; nous nous servirons donc des résultats d'existence-unicité pour l'équation de Helmholtz. Ces fonctions qui sont singulières au voisinage de I , c'est-à-dire quand $r \rightarrow 0$, vont nous servir à résoudre la partie du problème \mathcal{P}^ε liée au champ lointain.

Lemme 6.5.1.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $A_0 r^{-p} a(r, \sigma) = 0$, il existe une unique

solution au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathfrak{s}_{-p}\{a\} \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \text{ telle que} \\ A\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ C\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ \ell_{-p}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Preuve :

Unicité : Soit v une fonction satisfaisant les équations ci-dessus avec $a = 0$; alors on a $v \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ avec $\ell_{-q}(v) = 0$ pour $q \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Par ailleurs $d^\circ \ell_0(v) = 0$, c'est-à-dire $\ell_0(v)$ n'admet pas de terme logarithmique en temps qu'élément de \mathbb{P}_{\log} défini par (2.7.1). Bien que $\ell_0(v)$ soit une fonction définie sur S^2 , elle induit un élément de $H^1(\Omega)$ que nous noterons de même $\ell_0(v)$ (voir l'avertissement sur les notations formulé au §6.1.1). On en déduit alors $v - \ell_0(v) \in \mathcal{V}_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et donc $v \in H^1(\Omega)$. Comme $A = (\xi^2(r) - \nu^2)(\Delta + \omega^2)$, on obtient que v satisfait

$$v \in H^1(\Omega) \text{ avec } \Delta v + \omega^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_\star \text{ et } \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v = 0 \text{ sur } \Gamma.$$

La deuxième équation vaut au sens de $\mathcal{D}'(\Omega_\star)$. Par densité de $H_\star^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ cette équation vaut dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ tout entier. Finalement comme le problème de Helmholtz homogène avec condition d'onde sortante est bien posé, on en tire $v = 0$.

Existence : Nous allons construire une solution $v_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega)$ pour le problème de l'énoncé pour un $k \in \mathbb{N}$ arbitraire. Nous utiliserons la série formelle $\mathfrak{h}^{-p}[a]$ construite au §2.7.5 à l'aide des formules (2.7.9) et (2.7.10). Considérons $\alpha_k > 0$ tel que $\mathcal{V}_{\alpha_k}^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ avec injection continue. Un tel α_k existe d'après la proposition 6.2.1. Considérons également $\beta_k > 0$ comme dans le lemme 6.2.1 tel que

$$\left\| \frac{u}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_{\alpha_k}^k(\Omega)} \leq \kappa_k \|u\|_{\mathcal{V}_{\alpha_k + \beta_k}^k(\Omega)} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \mathcal{V}_{\alpha_k + \beta_k}^k(\Omega).$$

Soit $q_k \geq \alpha_k + \beta_k + 1$. Ce q_k est donc assez grand pour que $\mathcal{V}_{q_k-1/2}^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ avec injection continue d'après la façon dont nous avons définie α_k et β_k . On définit alors

$$\tilde{v}_k := \sum_{q=-p}^{q_k+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a], \quad \text{d'où} \quad \frac{A\tilde{v}_k}{\xi^2(r) - \nu^2} \in \mathcal{V}_{\alpha_k}^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega). \quad (6.5.1)$$

En effet en se servant des relations de récurrence (2.7.4), les premiers termes de la somme définissant $A\tilde{v}_k$ s'éliminent de proche en proche et il vient

$$A\tilde{v}_k = \sum_{q=q_k}^{q_k+1} r^{q+2} r^{-q} A_2 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] + \sum_{q=q_k-2}^{q_k+1} r^{q+4} r^{-q} A_4 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] \in \mathcal{V}_{\alpha_k + \beta_k}^\infty(\Omega). \quad (6.5.2)$$

On s'assure facilement par des calculs de routine que $\tilde{v}_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$. À présent, au lieu de rechercher une fonction v satisfaisant les équations de l'énoncé, nous recherchons $\tilde{w}_k = v_k - \tilde{v}_k$. Nous cherchons $\tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\Delta \tilde{w}_k + \omega^2 \tilde{w}_k = \frac{-1}{\xi^2(r) - \nu^2} A\tilde{v}_k \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{et} \quad \frac{\partial \tilde{w}_k}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma \tilde{w}_k = -\frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial n_\Gamma} - T_\Gamma \tilde{v}_k \quad \text{sur } \Gamma. \quad (6.5.3)$$

Rappelons que nous avons choisi q_k de sorte que $(\xi^2 - \nu^2)^{-1} A\tilde{v}_k \in H^k(\Omega)$. Alors l'existence d'un unique $\tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ solution du problème ci-dessus est un résultat classique (le problème de Helmholtz avec

condition d'onde sortante est bien posé). De plus les théorèmes sur la régularité des solutions des équations elliptiques nous garantissent que $\tilde{w}_k \in H^{k+2}(\Omega)$. D'après la proposition 6.2.2 on a $\tilde{w}_k \in \mathcal{V}_{-2}^k(\Omega)$.

En réalité $\tilde{w}_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega)$. En effet on sait que $A\tilde{w}_k = -A\tilde{v}_k$. À présent rappelons que par définition de α_k on a $\mathcal{V}_{\alpha_k}^k(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ et comme $\tilde{w}_k \in H^k(\Omega) \cap \mathcal{V}_{-2}^k(\Omega)$, à l'aide de la transformée de Mellin on voit qu'il existe une suite $\tilde{w}_{k,l} \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que

$$\tilde{w}_k - \sum_{l=-2}^{\alpha_k} r^l \tilde{w}_{k,l} \in \mathcal{V}_{\alpha_k}^k(\Omega) \subset H^k(\Omega) \quad \text{donc} \quad \sum_{l=-2}^{\alpha_k} r^l \tilde{w}_{k,l} \in H^k(\Omega) \subset H^1(\Omega).$$

Or ceci est impossible si il existe $l \leq 0$ tel que $\tilde{w}_{k,l} \neq 0$. On a donc nécessairement $\tilde{w}_{k,l} = 0$ dès que $l \leq 0$ et ainsi $\tilde{w}_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega)$. En résumé, en posant $v_k = \tilde{v}_k + \tilde{w}_k$ nous voyons que v_k satisfait,

$$v_k \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega), \quad Av_k = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_k}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v_k = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

En fait la fonction v_k construite de cette manière ne dépend pas de k . En effet, si k est donné, considérons un $l \geq k$. Alors on a $v_l - v_k = (\tilde{w}_l - \tilde{w}_k) + (\tilde{v}_l - \tilde{v}_k)$. Il est clair que $\tilde{w}_l - \tilde{w}_k \in H^1(\Omega)$ pour $k \geq 1$. Comme $\mathcal{V}_{q_k-1/2}^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ pour $k \geq 1$ on obtient

$$\tilde{v}_l - \tilde{v}_k := \sum_{q=q_k+2}^{q_l+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] \in H^1(\Omega), \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} v_l - v_k \in H^1(\Omega), \\ \Delta(v_l - v_k) + \omega^2(v_l - v_k) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial(v_l - v_k)}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma(v_l - v_k) = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Par densité de $H_\star^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ces équations valent dans tout Ω et pas seulement dans Ω_\star . D'après le caractère bien posé du problème de Helmholtz avec condition d'onde sortante on obtient finalement $v_l - v_k = 0$.

$$\text{Pour } v = v_k \quad \text{on a donc} \quad v \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_{-p-1/2}^k(\Omega) = \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega).$$

Choisissons un $l \in \mathbb{N}$. On sait par ailleurs que $\tilde{v}_l \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ et que v et \tilde{v}_l admettent un développement au voisinage de 0 suivant les puissances entières de r . Il en va donc de même pour \tilde{w}_l . Alors il existe $g_{-p}, \dots, g_0 \in \mathbb{P}_{\log}$ tels que

$$\tilde{w}_l - \sum_{q=-p}^0 r^q g_q \in \mathcal{V}_{1/2}^\infty(\Omega).$$

Puisque $\tilde{w}_l \in H^1(\Omega)$, ceci n'est possible que si $g_{-p}, g_{-p+1}, \dots, g_{-1} = 0$ et si g_0 n'admet pas de terme en $\ln(r)$ i.e. $d^\circ g_0 = 0$. On en conclut que $\tilde{w}_l \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. Finalement pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$\ell_{-k}(v) = \ell_{-k}(\tilde{v}_l + \tilde{w}_l) = \sum_{q=-p}^{q_l+1} \ell_{-k}(r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a]) + \ell_{-k}(\tilde{w}_l) = \begin{cases} a & \text{si } k = p, \\ 0 & \text{si } k \neq p, k > 0. \end{cases}$$

On en tire $\ell_{-q}(v) = 0$ pour $q = 1 \dots p-1$. Par ailleurs vu que $\ell_0(r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a]) = 0$ puisque $p \neq 0$ et $\tilde{w}_l \in H^1(\Omega)$, on a $d^\circ \ell_0(v) = 0$. En choisissant $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = v$, ceci conclut la démonstration. ■

Par la même technique on construit également un profil en champ lointain avec $p = 0$. Cette fois-ci la singularité prescrite lorsque $r \rightarrow 0$ admet un terme logarithmique.

Lemme 6.5.2.

Soit $a \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $A_0 a(r, \sigma) = 0$. Il existe un unique élément $\mathfrak{s}_0\{a\} \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$ satisfaisant

$$\begin{cases} A\mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ C\mathfrak{s}_0\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma, \\ d^\circ \{ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) - a \} = 0. \end{cases}$$

Remarquons en particulier que si $d^\circ a = 0$ alors $d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) = d^\circ a = 0$. Ainsi on voit que $\ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) \in H^1(\Omega)$. Puisque $\mathfrak{s}_0\{a\} - \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) \in \mathcal{V}_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on obtient $\mathfrak{s}_0\{a\} \in H^1(\Omega)$. Ce qui implique $\mathfrak{s}_0\{a\} = 0$. En résumé,

$$d^\circ a = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{s}_0\{a\} = 0.$$

Notons également que, d'une manière générale, les profils $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ admettent une dépendance linéaire vis-à-vis de leur argument a . En effet on a $\mathfrak{s}_{-p}\{a + \beta b\} = \mathfrak{s}_{-p}\{a\} + \beta \mathfrak{s}_{-p}\{b\}$ pour $a, b \in \mathbb{P}_{\log}$ et $\beta \in \mathbb{C}$. En particulier on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_{-p}\{a^\varepsilon\} &= \mathfrak{s}_{-p}\{a^{[m]}\} \ln^m(\varepsilon) + \dots + \mathfrak{s}_{-p}\{a^{[1]}\} \ln(\varepsilon) + \mathfrak{s}_{-p}\{a^{[0]}\} \\ \text{lorsque } a^\varepsilon &= a^{[m]} \ln^m \varepsilon + \dots + a^{[1]} \ln \varepsilon + a^{[0]}, \quad \text{avec } a^{[q]} \in \mathbb{P}_{\log}. \end{aligned} \tag{6.5.4}$$

Nous invitons notre lecteur à prendre garde à ce que l'application $a \mapsto \mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ n'est pas une application triviale comme au chapitre 1 ou 3 où on avait simplement " $\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = a \mathfrak{s}_{-p}$ ", sauf avec \mathfrak{s}_0 . Non seulement cette dernière identité n'est plus vérifiée, mais elle n'a plus de sens. En conclusion de ce paragraphe, chaque profil $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ admet au voisinage de I une croissance en r^{-p} si $p \neq 0$, et en $\ln(r)$ si $p = 0$. De plus les identités suivantes sont vérifiées.

$$\begin{array}{cc} \text{Cas } p < 0 & \text{Cas } p = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = a \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0 \quad q > 0 \text{ et } q \neq p \\ \ell_{+q}(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) \neq 0 \quad q \geq 0 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} d^\circ \{ \ell_0(\mathfrak{s}_0\{a\}) - a \} = 0 \\ \ell_{-q}(\mathfrak{s}_0\{a\}) = 0 \quad q > 0 \\ \ell_{+q}(\mathfrak{s}_0\{a\}) \neq 0 \quad q > 0 \end{array} \right. \tag{6.5.5} \\ d^\circ \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{a\}) = 0 & \end{array}$$

6.6 Construction des profils en champ proche

Nous allons maintenant construire des profils pour le champ proche en résolvant dans le domaine normalisé Ω_N des équations reliées à A_0 la partie dominante de l'opérateur A . Remarquons que le domaine normalisé est une variété de dimension 3 sur laquelle A_0 ne vérifie aucune propriété comme l'ellipticité qui permettrait de fournir un résultat d'existence puisque l'expression de $A_0 = (\mathbb{R}\partial_{\mathbb{R}})^2 + \partial_\varphi^2$ dans les coordonnées normalisées ne contient aucune dérivée par rapport à η . Cependant on peut constater que A_0 ressemble à un Laplacien en deux dimensions. Nous allons donc transformer le domaine normalisé de manière à nous ramener à cette situation.

6.6.1 Transformation du domaine normalisé

Alors que les équations du champ proche sont initialement posées dans $\Omega_N \subset \mathbb{R}_+ \times S^2$, nous allons nous ramener à un sous-domaine de $\mathbb{R}^2 \times [-1, +1]$. Nous noterons ρ, φ, ζ les coordonnées dans $\mathbb{R}^2 \times [-1, +1]$. Elles correspondent à la paramétrisation $\phi_{cy} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [-1, +1]$ qui associe à (ρ, φ, ζ) le triplet $((x, y), z)$ suivant les formules

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi \quad \text{et} \quad z = \zeta.$$

Le paramétrage ϕ_{cy} est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme sur $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times]-1, +1[$. Nous supposons par la suite que le domaine $\mathbb{R}^2 \times [-1, +1]$ est muni du tenseur métrique naturel correspondant aux coordonnées cylindriques usuelles à savoir

$$d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\varphi \otimes d\varphi + d\zeta \otimes d\zeta. \quad (6.6.1)$$

Remarquons que les deux paramétrages ϕ_{sp} et ϕ_{cy} ont le même ensemble de départ. Nous allons alors considérer l'image de Ω_N par $\phi_{cy} \circ \phi_{sp}^{-1}$. On pose en effet les notations suivantes

$$\hat{\Omega} := \phi_{cy} \circ \phi_{sp}^{-1}(\Omega_N), \quad \hat{\Omega}(\zeta) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ((x, y), \zeta) \in \hat{\Omega}\} \quad \text{et} \quad \hat{\Gamma}(\zeta) := \partial \hat{\Omega}(\zeta). \quad (6.6.2)$$

Par exemple dans le cas où $\Phi = 1$ (le fil est un ellipsoïde fin) $\hat{\Gamma}(\zeta)$ est donné par l'équation $\rho = 1$ pour tout ζ . Nous avons également introduit des "tranches" de $\hat{\Omega}$ car nous n'allons pas raisonner directement sur $\hat{\Omega}$ tout entier mais plutôt tranche par tranche. Les objets que nous manipulerons seront donc des objets bidimensionnels paramétrés par $\zeta \in [-1, +1]$. Nous noterons également

$$\hat{V} := V \circ \phi_{sp} \circ \phi_{cy}^{-1} \quad \text{de sorte que} \quad \partial_\rho \hat{V} = \widehat{\partial_R V}, \quad \partial_\varphi \hat{V} = \widehat{\partial_\varphi V} \quad \text{et} \quad \partial_\zeta \hat{V} = \widehat{\partial_\eta V}. \quad (6.6.3)$$

Par ailleurs une fonction suffisamment régulière \hat{V} définie sur une partie de $\mathbb{R}^2 \times [-1, +1]$ induit pour chaque ζ une autre fonction notée simplement $\hat{V}(\zeta)$ définie par

$$\hat{V}(\zeta) := \hat{V}(\cdot, \zeta) = V \circ \phi_{sp} \circ \phi_{cy}^{-1}(\cdot, \zeta) \quad (6.6.4)$$

Autrement dit $\hat{V}(\zeta) : \hat{\Omega}(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $(\hat{V}(\zeta))(x) = V \circ \phi_{sp} \circ \phi_{cy}^{-1}(x, \zeta)$ où $x \in \mathbb{R}^2$. Si la fonction \hat{V} est définie sur $\hat{\Omega}$, il est alors clair que chaque $\hat{V}(\zeta)$ est définie sur $\hat{\Omega}(\zeta)$. Notons par ailleurs que, en vertu des propriétés élémentaires des produit tensoriels entre espaces de Banach (ici il s'agit d'espaces de Sobolev), on a

$$(\partial_\rho \hat{V})(\zeta) = \partial_\rho(\hat{V}(\zeta)) \quad \text{et} \quad (\partial_\varphi \hat{V})(\zeta) = \partial_\varphi(\hat{V}(\zeta)). \quad (6.6.5)$$

6.6.2 Transformation des opérateurs

Examinons à présent comment les opérateurs intervenant dans les équations du champ proche se transforment sous l'action de $\phi_{cy} \circ \phi_{sp}^{-1}$. Pour ceci nous nous servirons des identités données par (6.6.3) et (6.6.5). Notons Δ_\perp le laplacien bidimensionnel pour la métrique cartésienne usuelle dont l'expression dans les coordonnées polaires (ρ, φ) est donnée par $\rho^2 \Delta_\perp = (\rho \partial_\rho)^2 + \partial_\varphi^2$. Pour la partie dominante A_0 on obtient alors

$$\widehat{A_0 V} = \widehat{(\mathbb{R} \partial_R)^2 V} + \widehat{\partial_\varphi^2 V} = (\rho \partial_\rho)^2 \hat{V} + \partial_\varphi^2 \hat{V} = \rho^2 \Delta_\perp \hat{V}.$$

On a par ailleurs l'identité $(\Delta_\perp \hat{V})(\zeta) = \Delta_\perp(\hat{V}(\zeta))$. De même que l'opérateur A_0 est relié au laplacien bidimensionnel, nous allons voir que l'équation $B_0 V = 0$ correspond à une condition de Neumann bidimensionnelle. Pour voir ceci, commençons par remarquer que dans les coordonnées polaires ρ, φ l'équation du bord $\hat{\Gamma}(\zeta)$ est donnée par $(\hat{\Gamma}(\zeta)) : \rho = \Phi(\varphi, \zeta)$. Notons alors $\hat{n}(\zeta)$ la normale sortante à $\hat{\Gamma}(\zeta)$. L'opérateur de dérivée normale sur $\hat{\Gamma}(\zeta)$ est donné par

$$\frac{\partial \hat{V}(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \frac{\hat{n}^\rho(\zeta)}{\Phi} \left\{ \rho \partial_\rho \hat{V}(\zeta) - \frac{\partial_\varphi \Phi}{\Phi} \partial_\varphi \hat{V}(\zeta) \right\}, \quad \text{avec} \quad \hat{n}^\rho(\zeta) = \frac{\Phi(\varphi, \zeta)}{\sqrt{\Phi^2(\varphi, \zeta) + (\partial_\varphi \Phi(\varphi, \zeta))^2}}.$$

Notons en particulier que $\hat{n}^\rho(\zeta) > 0$ quel que soit ζ . Entre accolade on retrouve formellement l'expression de l'opérateur B_0 à laquelle on avait abouti avec la formule (6.3.11). En notant que par définition $\rho = \Phi(\varphi, \zeta)$ sur $\hat{\Gamma}(\zeta)$, on a donc

$$\widehat{B_0 V}(\rho, \varphi, \zeta) = \frac{\Phi(\varphi, \zeta)}{\hat{n}^\rho(\zeta)} \frac{\partial \hat{V}(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)}.$$

6.6.3 Espaces à poids en domaine normalisé

De même que pour le champ lointain, les solutions des équations du champ proche sont autorisées à croître au voisinage de l'infini, et sont donc recherchées dans des espaces à poids. En notant ∇_σ^β la dérivée covariante sur S^2 d'ordre β , on a ici par définition

$$\mathscr{W}_\alpha^k(\Omega_N) = \left\{ V \in L_{\text{loc}}^2(\Omega_N) \text{ tel que } \|V\|_{\mathscr{W}_\alpha^k(\Omega_N)}^2 = \sum_{\beta+\gamma \leq k} \int_{\Omega_N} |(R\partial_R)^\beta \nabla_\sigma^\gamma V|^2 R^{-2\alpha} \frac{dR d\sigma}{R} < +\infty \right\} \quad (6.6.6)$$

Ici $d\sigma = d\varphi d\eta$ est la mesure de surface sur S^2 . Cependant comme nous allons ramener les équations du champ proche à des équations de Laplace 2D, nous aurons également à raisonner dans les espaces bidimensionnels $\mathscr{W}_\alpha^k(\hat{\Omega}(\zeta))$ dont la définition est donnée par exemple par (3.1.8).

Comme la transformation $\phi_{\text{cy}} \circ \phi_{\text{sp}}^{-1}$ est régulière sauf au voisinage de $\eta = \pm 1$, l'application des théorèmes de trace classiques par rapport à la variable η permettent de montrer que si V est régulier dans tout l'espace Ω_N , alors $\hat{V}(\zeta)$ est régulier dans chaque tranche $\hat{\Omega}(\zeta)$

Lemme 6.6.1.

Si $V \in \mathscr{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$, alors $\widehat{\partial_\eta^p V}(\zeta) \in \mathscr{W}_\alpha^\infty(\hat{\Omega}(\zeta))$ pour tout $\zeta \in]-1, +1[$ et tout $p \in \mathbb{N}$.

Nous voudrions obtenir une réciproque. Malheureusement celle-ci n'est pas vraie à cause du comportement de la métrique sphérique en $\eta = \pm 1$. Cependant voici un résultat qui en pratique sera suffisant. Nous reportons sa démonstration en annexe 6.D.

Proposition 6.6.1.

Soit $k \geq 2$. Étant donnés $g \in \mathscr{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)$ et $h \in H^k(\Gamma_N)$, soit $W(\zeta) \in \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))$ une famille indexée par $\zeta \in [-1, 1]$ satisfaisant pour tout $\zeta \neq \pm 1$,

$$\Delta_\perp W(\zeta) = \hat{g}(\zeta) \quad \text{dans } \hat{\Omega}(\zeta), \quad \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \hat{h}(\zeta) \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\hat{\Gamma}(\zeta)} W(\zeta) = 0$$

Alors il existe une (unique) fonction $V \in \mathscr{W}_{1/2}^k(\Omega_N)$ telle que $\hat{V}(\zeta) = W(\zeta)$ pour tout $\zeta \in [-1, 1]$. De plus il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g et h telle que

$$\|V\|_{\mathscr{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathscr{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right).$$

Enonçons une dernière remarque au sujet des liens entre les fonctions "tridimensionnelles" définies dans Ω_N , et leur définition en tranche dans chaque $\hat{\Omega}(\eta)$. Soit $V \in \mathscr{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ et vérifiant $A_0 V = 0$ au voisinage de l'infini, alors V admet un développement radial au voisinage de l'infini et $L_p(V)$ a un sens. Puisque $L_p(V) \in \mathbb{P}_{\log}$ on peut le transformer par l'application $\phi_{\text{cy}} \circ \phi_{\text{sp}}^{-1}$. On pose alors en définition

$$\hat{L}_p(\hat{V}(\zeta)) := \widehat{L_p(V)}(\zeta) \quad (6.6.7)$$

Il est naturel de se demander si $\hat{L}_p(\hat{V}(\zeta))$ est obtenu en appliquant le procédé de décomposition de la définition (2.7.6) avec une certaine partie dominante bidimensionnelle \hat{A}_0 . En utilisant (6.6.5) on voit que dans ce cas $\Delta_\perp \hat{V}(\zeta) = 0$ pour tout ζ . Posons alors $\hat{A}_0 = \rho^2 \Delta_\perp$. On voit que $\hat{L}_p(\hat{V}(\zeta))$ est obtenu en

appliquant la définition (2.7.6) avec \hat{A}_0 au lieu de A_0 ce qui rend légitime cette notation. Pour être plus explicite on a en effet

$$\hat{L}_p(\hat{V}(\zeta)) = \rho^{-p} [\hat{A}_0, \hat{A}_0^{(-1)}] \rho^p \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}_p} \mathfrak{M}\{\hat{V}(\zeta) \mathbf{1}_{\rho>1}\}(\lambda) \rho^{\lambda-p} d\lambda.$$

6.6.4 Définition des profils en champ proche

Avec la transformation géométrique que nous avons introduit au paragraphe précédent, il est maintenant possible de ramener les équations du type $A_0 V = 0$ posées dans Ω_N à une famille de problème 2D de la forme $\Delta_{\perp} \hat{V}(\zeta) = 0$ posés dans $\hat{\Omega}_N(\zeta)$. Pour ces problèmes 2D nous disposons de résultats d'existence et d'unicité. C'est cette méthode que nous allons mettre en oeuvre.

Lemme 6.6.2.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $A_0(\mathbb{R}^p a(\sigma)) = 0$, il existe un unique $\mathfrak{S}_p\{a\} \in \mathscr{W}_{p+1/2}^{\infty}(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ B_0 \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} L_q(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \\ L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Preuve :

Unicité : Considérons une fonction $V \in \mathscr{W}_{p+1/2}^{\infty}(\Omega_N)$ satisfaisant le problème homogène associé et montrons qu'elle est nulle. Étant donné que $L_p(V) = 0$ pour tout $p \geq 0$, on a déjà $V \in \mathscr{W}_{-1/2}^{\infty}(\Omega_N)$. À présent nous allons montrer que $\hat{V}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. Choisissons un $\eta \in]-1, +1[$ arbitraire. On sait d'après le lemme 6.6.1, que $\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{-1/2}^{\infty}(\hat{\Omega}(\eta)) \subset \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. Par ailleurs $\hat{V}(\eta)$ satisfait

$$\Delta_{\perp} \hat{V}(\eta) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{V}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta).$$

D'après la proposition 1.8.2, on en tire que $\hat{V}(\eta) = L_0(\hat{V}(\eta)) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. D'où finalement $V = 0$.

Existence : Revenons tout d'abord sur les hypothèses que nous avons formulées sur Φ et en particulier **F2**. Nous avons imposé que $\Phi(\varphi, \eta)$ ne dépende que de η dès que $|\eta| > \nu_0$. On en tire que $\hat{\Gamma}(\eta)$ est un cercle pour $|\eta| > \nu_0$, et la condition de Neumann homogène sur $\hat{\Gamma}(\eta)$ s'écrit alors $\partial_{\rho} \hat{V} = 0$. Introduisons la moyenne angulaire $\Phi_* : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\Phi_*(\phi_{S^2}(\varphi, \eta)) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, \eta) d\alpha, \quad \text{d'où } \Phi_* \in \mathscr{C}^{\infty}(S^2) \text{ et } \partial_{\varphi} \Phi_* = 0$$

La fonction Φ_* est donc indépendante de la variable φ . Nous noterons aussi $\Phi_*(\eta)$ au lieu de $\Phi_*(\phi_{S^2}(\varphi, \eta))$ ce qui est rappelons-le un abus de notation. L'équation du bord est donc $\hat{\Gamma}(\eta) : \rho = \Phi_*(\eta)$ dès que $|\eta| > \nu_0$. À présent considérons la fonction

$$V'(\mathbb{R}, \sigma) := \left[\left(\frac{\mathbb{R}}{\Phi_*(\sigma)} \right)^p + \left(\frac{\mathbb{R}}{\Phi_*(\sigma)} \right)^{-p} \right] \Phi_*^p(\sigma) a(\sigma)$$

Cette fonction est solution de l'équation de Laplace dans chaque tranche et admet le bon comportement au voisinage de l'infini puisque

$$V' \in \mathscr{W}_{p+1/2}^{\infty}(\Omega_N), \quad A_0 V' = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad L_p(V') = a \quad \text{et} \quad L_q(V') = 0, \quad q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket.$$

En revanche elle ne vérifie pas *a priori* la condition au bord $B_0 V' = 0$ sur Γ_N . Elle vérifie cependant cette équation au voisinage des pointes

$$\frac{\partial \hat{V}'(\eta)}{\partial \hat{h}(\eta)} = 0 \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\eta) \quad \text{pour } |\eta| > \nu_0.$$

Choisissons $\rho_0 > 0$ assez grand pour que $\hat{\Gamma}(\eta) \subset D(0, \rho_0)$ pour tout $\eta \in [-1, +1]$. Puisque $p \neq 0$, une formule de Green dans $\hat{\Omega}(\eta) \cap D(0, \rho_0)$ permet d'obtenir

$$\int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \frac{\partial \hat{V}'(\eta)}{\partial \hat{h}(\eta)} = - \int_{\hat{\Omega}(\eta) \cap D(0, \rho_0)} \Delta_{\perp} \hat{V}'(\eta) + \int_{\rho=\rho_0} \frac{\partial \hat{V}'(\eta)}{\partial \rho} = 0. \quad (6.6.8)$$

Nous prenons alors la trace de Neumann de $\hat{V}'(\eta)$ comme terme source d'un autre problème. Pour chaque $\eta \in]-1, +1[$, on considère la fonction $\hat{V}''(\eta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ unique solution de

$$\Delta_{\perp} \hat{V}''(\eta) = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega}(\eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{V}''(\eta)}{\partial \hat{h}(\eta)} = - \frac{\partial \hat{V}'(\eta)}{\partial \hat{h}(\eta)} \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\eta) \quad \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \hat{V}''(\eta) = 0. \quad (6.6.9)$$

Avec l'équation (6.6.8) la condition de compatibilité nécessaire à l'application de la proposition 1.8.2 est satisfaite. Montrons que $\eta \mapsto \hat{V}''(\eta)$ induit une fonction $V'' \in \mathcal{W}_{1/2}^{\infty}(\Omega_N)$. Notons que $\hat{V}''(\eta) = 0$ dès que $|\eta| > \nu_0$. Comme on a $\partial_{\hat{h}(\eta)} = \partial_{\rho}$ pour $|\eta| > \nu_0$, il est clair qu'il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^{\infty}(\Gamma_N)$ telle que $\partial_{\hat{h}(\eta)} \hat{V}''(\eta) = \hat{h}(\eta)$. Par application de la proposition 6.6.1, $V'' \in \mathcal{W}_{1/2}^{\infty}(\Omega_N)$. Pour conclure la preuve il suffit de prendre

$$V = V' + V'' - L_0(V''). \quad \blacksquare$$

Remarquons que dans la construction ci-dessus $\hat{V}''(\eta) = 0$ quand $|\eta| > \nu_0$ de sorte que, dans un voisinage de $\eta = \pm 1$, le profil $\mathfrak{S}_p\{a\}$ est la somme de seulement deux fonctions à variables séparées

$$\mathfrak{S}_p\{a\}(\mathbb{R}, \sigma) = \left[\left(\frac{\mathbb{R}}{\Phi_*(\sigma)} \right)^p + \left(\frac{\mathbb{R}}{\Phi_*(\sigma)} \right)^{-p} \right] \Phi_*^p(\sigma) a(\sigma), \quad \text{dès que } |\eta| > \nu_0. \quad (6.6.10)$$

Cette propriété est la conséquence de l'hypothèse **F2** i.e. $\partial_{\varphi} \Phi(\varphi, \nu) = 0$ lorsque $|\eta| > \nu_0$. Ceci permet de constater directement la régularité de $\mathfrak{S}_p\{a\}$ en $\eta = \pm 1$. Également dans le cas $\Phi(\varphi, \eta) = 1$, $\forall \varphi, \eta$, les profils sont donnés exactement par la formule (6.6.10) pour tout $\eta \in [-1, +1]$ (pas seulement pour $|\eta| > \nu_0$).

À l'instar des profils en champs lointain l'identité $\mathfrak{S}_p\{a\} = a \mathfrak{S}_p$ n'a pas non plus de sens, mais les profils $\mathfrak{S}_p\{a\}$ dépendent linéairement de leur argument a . Ainsi $\mathfrak{S}_p\{a + \beta b\} = \mathfrak{S}_p\{a\} + \beta \mathfrak{S}_p\{b\}$ pour $\beta \in \mathbb{C}$ et $a, b \in \mathbb{P}_{\log}$. En particulier

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_p\{a^{\varepsilon}\} &= \mathfrak{S}_p\{a^{[m]}\} \ln^m(\varepsilon) + \dots + \mathfrak{S}_p\{a^{[1]}\} \ln(\varepsilon) + \mathfrak{S}_p\{a^{[0]}\} \\ \text{lorsque } a^{\varepsilon} &= a^{[m]} \ln^m \varepsilon + \dots + a^{[1]} \ln \varepsilon + a^{[0]}, \quad \text{avec } a^{[q]} \in \mathbb{P}_{\log}. \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

6.7 Existence et unicité de la solution des problèmes récurrents

Nous allons démontrer dans cette section que le problème $\mathcal{P}_n^{\varepsilon}$ admet une unique solution. Nous commencerons par la preuve d'unicité au cours de laquelle nous utiliserons la transformation que nous avons introduite au §6.6.1, ce qui nous permettra d'utiliser les résultats d'unicité pour les problèmes de Laplace bidimensionnels.

Proposition 6.7.1.

Le problème $(\mathcal{P}_n^{\varepsilon})$ admet au plus un couple solution (unicité de la solution).

Preuve :

Il suffit de montrer que l'unique solution du problème homogène associé est le couple $(u, U) = (0, 0)$. Ce problème homogène s'écrit

$$\begin{cases} u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ Au = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ Cu = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{cases} \quad \begin{cases} U \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 U = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ B_0 U = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad \begin{cases} \ell_{-p}(u) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U) \\ L_p(U) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

Comme nous l'avons vu lors de la construction des profils en champ proche, la fonction U induit une application $\eta \mapsto \hat{U}(\eta)$. Nous allons montrer que $\hat{U}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. Si le couple (u, U) satisfait les équations ci-dessus alors en particulier $U \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ et $\hat{U}(\eta)$ satisfait

$$\hat{U}(\eta) \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta)), \quad \Delta_\perp \hat{U}(\eta) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta) \text{ et } \frac{\partial \hat{U}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta) \quad \forall \eta \in]-1, +1[.$$

En tant que solution d'une équation de Laplace $\hat{U}(\eta)$ est décomposable par séparation de variables et, compte tenu du fait que $L_p(U) = 0$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour un ρ_0 suffisamment grand on a

$$\hat{U}(\eta) = \sum_{p \leq 0} \rho^p \hat{L}_p(\hat{U}(\eta)) \quad \text{avec} \quad \int_{\rho=\rho_0} \hat{L}_p(\hat{U}(\eta)) = 0, \quad \forall p \neq 0.$$

Rappelons que cette série converge dans $H_{\text{loc}}^k(\Omega_N(\eta))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en dehors d'un disque de rayon suffisamment grand. Choisissons à présent un $\rho_0 > 0$ suffisamment grand pour que $D(0, \rho_0)$ contienne $\Gamma_N(\eta)$. Appliquons alors une formule de Green dans $\Omega_N(\eta) \cap D(0, \rho_0)$. On obtient

$$0 = \int_{\Omega_N(\eta) \cap D(0, \rho_0)} \Delta_\perp \hat{U}(\eta) = \int_{\rho=\rho_0} \frac{\partial \hat{U}(\eta)}{\partial \rho} - \int_{\Gamma_N(\eta)} \frac{\partial \hat{U}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 2\pi \rho_0 \frac{\partial L_0(\hat{U}(\eta))}{\partial \rho}.$$

Comme $d^\circ \hat{L}_0(\hat{U}(\eta)) \leq 1$ l'égalité ci-dessus nous donne $d^\circ \hat{L}_0(\hat{U}(\eta)) = 0$. On en déduit que $\hat{U}(\eta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. La fonction $\hat{L}_0(\hat{U}(\eta))$, de par sa définition ne dépend pas de φ . Au vu du développement radial de $\hat{U}(\eta)$, on a donc finalement

$$\hat{U}(\eta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta)), \quad \Delta_\perp \hat{U}(\eta) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{U}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta)$$

D'après la partie unicité (à une constante près) de la proposition 1.8.2, $\hat{U}(\eta)$ est une constante i.e. $\hat{U}(\eta) = L_0(\hat{U}(\eta))$. Nous allons maintenant nous servir de cela pour montrer que $u = 0$. Tout d'abord d'après les conditions de raccord on a $d^\circ \ell_0(u) = d^\circ \Xi_*^\varepsilon L_0(U) = 0$ et $\ell_{-p}(u) = 0$, $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$. On en conclut que $u - \ell_0(u) \in \mathcal{V}_0^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ et donc $u \in H^1(\Omega)$. En multipliant par $(\xi^2 - \nu^2)^{-1}$ les équations satisfaites par u , on en déduit que cette fonction vérifie

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \Delta u + \omega^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \\ \frac{\partial u}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u = 0 \quad \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (6.7.1)$$

Comme $H_\star^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ d'après le lemme 6.3.1, les équations ci-dessus sont en fait satisfaites dans Ω tout entier. Par ailleurs on sait que l'unique solution des équations (6.7.1) est 0 si bien qu'on a finalement $u = 0$. Enfin $U = L_0(U) = \ell_0(u) = 0$. Ceci conclut la preuve d'unicité.

■

Nous démontrons maintenant l'existence d'un couple solution pour $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Nous utiliserons les profils $\mathfrak{s}_p\{a\}$ et $\mathfrak{S}_p\{a\}$ pour résoudre partiellement le problème. Il restera une partie du problème liée aux seconds membres $-R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon$, que nous devons traiter autrement que par des profils.

Proposition 6.7.2.

Le problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admet au moins un couple solution (existence de la solution).

Preuve :

Nous proposons une preuve par récurrence. En guise d'hypothèse de récurrence, nous supposons que $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), (u_{n-2}^\varepsilon, U_{n-2}^\varepsilon), \dots$ satisfont les problèmes $(\mathcal{P}_{n-1}^\varepsilon), (\mathcal{P}_{n-2}^\varepsilon) \dots$. Notons que $U_{n-1}^\varepsilon, U_{n-2}^\varepsilon, \dots$ admettent un développement radial au voisinage de l'infini, d'après l'hypothèse de récurrence et la proposition 2.4.2. Effectuons un changement d'inconnue : au lieu de rechercher le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ solution de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$, nous chercherons le couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ défini par

$$\begin{aligned} v_n^\varepsilon &= u_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{\ell_{-p}(u_n^\varepsilon)\} - \delta_n^0 u^0 = u_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)\} - \delta_n^0 u^0 \\ V_n^\varepsilon &= U_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p\{L_p(U_n^\varepsilon)\} - \ell_0\left(\sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p}\{\ell_{-p}(u_n^\varepsilon)\} + \delta_n^0 u^0\right) \\ &= U_n^\varepsilon - \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p\left\{\ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right)\right\} \\ &\quad - \sum_{p=1}^n \ell_0(\mathfrak{s}_{-p}\{L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon)\}) - \delta_n^0 \ell_0(u^0). \end{aligned} \tag{6.7.2}$$

Ci-dessus δ_n^0 désigne le symbole de Kronecker ($= 0$ si $n \neq 0$ et $= 1$ sinon). Signalons que dans la définition de V_n^ε , le terme de la forme $\ell_0(\dots)$ est de degré égal à 0 i.e. est dépendant de ε mais indépendant de R et φ . Le champ limite u^0 a été défini par (6.3.16) ; il s'agit de la solution du problème sans obstacle. D'après les équations de raccord v_n^ε doit satisfaire $v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $\ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0, p \in [1, n]$. Il suffit donc de supposer $v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. En résumé le couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ doit satisfaire par définition

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega) \\ Av_n^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ Cv_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \ell_0(v_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(V_n^\varepsilon) \\ L_p(V_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in [1, n] \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 V_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon \text{ dans } \Omega_N, \\ B_0 V_n^\varepsilon = -\sum_{k=1}^n R^k B_k V_{n-k}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right.$$

Si nous arrivons à démontrer l'existence d'un couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ satisfaisant ces équations, alors l'existence de l'unique $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ satisfaisant $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ s'ensuivra automatiquement. Nous nous intéressons en premier lieu au champ proche. Le lemme 6.7.3 que nous démontrerons juste après, nous permet d'affirmer l'existence d'un unique $W_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 W_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon \text{ dans } \Omega_N, \\ B_0 W_n^\varepsilon = -\sum_{k=1}^n B_k U_{n-k}^\varepsilon \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} L_0^{(0)}(W_n^\varepsilon) = 0 \\ L_p(W_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in [1, n]. \end{array} \right.$$

Il reste à construire un v_n^ε convenable en veillant à ce que la dernière condition de raccord soit bien satisfaite. On choisit de poser

$$v_n^\varepsilon := \mathfrak{s}_0 \left\{ \Xi_*^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon) \right\}.$$

D'après les identités (6.5.5) pour les profils en champ lointain, avec cette définition on a $d^\circ \{ \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon) \} = 0$. Pour satisfaire la dernière équation de raccord nous posons donc

$$\alpha := \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(W_n^\varepsilon), \quad \text{et} \quad V_n^\varepsilon := W_n^\varepsilon + \alpha.$$

Ceci conclut la preuve d'existence. ■

Le résultat suivant montre comment construire le W_n^ε de la preuve ci-dessus. Le terme W_n^ε est la partie de $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ qui couple U_n^ε directement avec les termes antérieurs U_{n-2}^ε et U_{n-4}^ε . Par contre il n'intervient que indirectement dans les équations de raccord. Sa construction passe par une technique semblable à celle qui a servi à construire les profils $\mathfrak{S}_p\{a\}$.

Proposition 6.7.3.

Soient $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$ et $g \in \mathcal{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ tel que g admet un développement asymptotique radial au voisinage de l'infini. Il existe un unique $V \in \cup_\beta \mathcal{W}_\beta^\infty(\Omega_N)$ tel que

$$\begin{cases} A_0 V = R^2 g & \text{dans } \Omega_N, \\ B_0 V = h & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad \begin{cases} L_0^{(0)}(V) = 0 \\ L_p(V) = 0, \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Preuve :

Unicité : Considérons une fonction $V \in \mathcal{W}_\beta^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant le problème homogène associé et montrons qu'elle est nulle. Quitte à prendre un β plus grand, on peut supposer $\beta = p + 1/2$ avec $p \in \mathbb{N}$. Étant donné que $L_p(V) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et $A_0 V = 0$ dans Ω_N , on a déjà $V \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. À présent nous allons montrer que $\hat{V}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. Choisissons un $\eta \in]-1, +1[$ arbitraire. La fonction $\hat{V}(\eta) \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta))$ et satisfait

$$\Delta_\perp \hat{V}(\eta) = 0 \quad \text{dans } \hat{\Omega}(\eta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{V}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 0 \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\eta). \quad (6.7.3)$$

De même que dans la proposition 6.7.1, choisissons un réel $\rho_0 > 0$ suffisamment grand pour que $D(0, \rho_0)$ contienne $\hat{\Gamma}(\eta)$. On applique une formule de Green dans $\hat{\Omega}(\eta) \cap D(0, \rho_0)$,

$$0 = \int_{\hat{\Omega}(\eta) \cap D(0, \rho_0)} \Delta_\perp \hat{V}(\eta) = \int_{\rho=\rho_0} \frac{\partial \hat{V}(\eta)}{\partial \rho} - \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \frac{\partial \hat{V}(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = 2\pi \rho_0 \frac{\partial \hat{L}_0(\hat{V}(\eta))}{\partial \rho}.$$

Comme $d^\circ \hat{L}_0(\hat{V}(\eta)) \leq 1$, on en tire $d^\circ \hat{L}_0(\hat{V}(\eta)) = 0$, et alors on obtient que $\hat{V}(\eta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. Les équations (6.7.3) jointes à la proposition 1.8.2 montrent que $\hat{V}(\eta)$ est une fonction constante c'est-à-dire $\hat{V}(\eta) = \hat{L}_0(\hat{V}(\eta))$. Enfin la condition $L_0^{(0)}(V) = 0$ implique que $\hat{L}_0^{(0)}(\hat{V}(\eta)) = 0$ pour chaque $\eta \in]-1, +1[$. Ceci permet de déduire que $\hat{V}(\eta) = 0$ car $d^\circ \hat{L}_0^{(0)}(\hat{V}(\eta)) = 0$

Existence : Dans un premier temps nous allons construire $\hat{V}(\eta)$ pour chaque $\eta \in]-1, +1[$. On procède comme au chapitre 3, pour ramener le second membre $\hat{g}(\eta)$ à un élément de $\mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ à l'aide de la transformation de Mellin. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $g \in \mathcal{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ avec $\alpha > 0$. Il existe donc une fonction $g'' \in \mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ telle que g se décompose sous la forme

$$g = g'' + \sum_{|\operatorname{Re}\{p_j\}+2| \leq \alpha} R^{p_j} g_j = g'' + g' \quad \text{avec} \quad g_j \in \mathbb{P}_{\log} \quad g'' \in \mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\Omega_N).$$

On construit alors une fonction $V' \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant $A_0 V' = R^2 g'$ à l'aide de la transformation de Mellin. Nous procédons ici comme dans la preuve de la proposition 3.2.5. Nous remarquons tout d'abord que les pôles de $\mathfrak{M}\{g'\}(\lambda - 2)$ sont en nombre fini et tous situés dans la région $|\Re\{\lambda\}| < \alpha$. On considère alors un contour γ entourant ces pôles, comme dans la Fig.24 et on pose

$$V' = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{R^2 g' \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) R^\lambda d\lambda.$$

Avec cette définition et celle des $L_p(\cdot)$ donnée par (2.7.6), il est clair que $L_p(V) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On voudrait maintenant construire une deuxième fonction $\hat{V}''(\eta) \in \cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\hat{\Omega}(\eta))$ satisfaisant

$$\Delta_\perp \hat{V}''(\eta) = \hat{g}''(\eta) \quad \text{dans } \hat{\Omega}(\eta), \quad \text{et} \quad \frac{\partial \hat{V}''(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = \hat{h}''(\eta) := -\frac{\partial \hat{V}'(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} + \frac{\hat{n}^\rho(\eta)}{\Phi} \hat{h}(\eta) \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\eta)$$

Notons que comme $g'' \in \mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ alors d'après le lemme 6.6.1 on a $\hat{g}''(\eta) \in \mathcal{W}_{-\alpha-2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta)) \subset \mathcal{W}'_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ pour tout $\eta \neq \pm 1$. Par contre il n'est pas garanti ici que la condition de compatibilité de la proposition 1.8.2 soit satisfaite. Ainsi nous ne pouvons chercher *a priori* $\hat{V}''(\eta)$ dans $\mathcal{W}'_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. Pour résoudre ce problème introduisons $W'(\eta)$ définie par

$$2\pi W'(\eta) = \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \hat{h}''(\eta) + \int_{\hat{\Omega}(\eta)} \hat{g}''(\eta) = \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}(\eta)} (W'(\eta) \ln \rho)$$

L'intégrale sur $\hat{g}''(\eta)$ est bien définie car cette fonction a été supposée suffisamment décroissante au voisinage de l'infini. $W'(\eta)$ est donc constante par rapport à ρ , φ et n'est fonction que de η . Nous définissons par ailleurs $W''(\eta)$ comme l'unique élément de $\mathcal{W}'_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ satisfaisant les équations

$$\Delta_\perp \hat{W}''(\eta) = \hat{g}''(\eta) \quad \text{dans } \hat{\Omega}(\eta), \quad \frac{\partial \hat{W}''(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} = \hat{h}''(\eta) - \frac{\partial}{\partial \hat{n}(\eta)} (W'(\eta) \ln \rho) \quad \text{sur } \hat{\Gamma}(\eta) \quad \text{et} \quad \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \hat{W}''(\eta) = 0.$$

En posant $\hat{V}''(\eta) = \hat{W}'(\eta) \ln(\rho) + \hat{W}''(\eta)$ on obtient les propriétés voulues pour $\hat{V}''(\eta)$. Notons que $\hat{V}''(\eta) \in \mathcal{W}'_{1/2}(\hat{\Omega}(\eta))$. Enfin nous définissons

$$\hat{V}(\eta) = \hat{V}'(\eta) + \hat{V}''(\eta) - \hat{L}_0^{(0)} \left(\hat{V}'(\eta) + \hat{V}''(\eta) \right) = 0$$

qui vérifie bien les équations attendues pour chaque $\eta \in]-1, +1[$. En particulier cette définition permet d'assurer que $L_0^{(0)}(V) = 0$.

Pour terminer la preuve, il faut maintenant montrer qu'à $\eta \mapsto \hat{V}(\eta)$ il correspond bien un élément V de $\cup_\alpha \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$. La difficulté consiste à s'assurer de la régularité de V au voisinage de $\eta = \pm 1$. Il suffit de s'assurer que $V'' \in \mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$. Étant donné la régularité de h'' et g'' , et le fait que $\phi_{S^2}^* \Phi \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$, on obtient facilement que $W'(\sigma) \ln(R) \in \mathcal{W}'_{1/2}(\Omega_N)$. Enfin la proposition 6.6.1 nous montre que $W'' \in \mathcal{W}'_{1/2}(\Omega_N)$. ■

6.8 Validation de l'ansatz

Les propositions 6.7.1 et 6.7.2 nous ont montré que les problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ admettent un unique couple solution pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci nous permet d'utiliser les résultats du théorème 2.6.1. Cependant pour pouvoir affirmer que les sommes

$$\sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon = (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon + \chi^\varepsilon U_n^\varepsilon, \quad \text{et} \quad \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi\left(\frac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\mathbf{x}| < \sqrt{\varepsilon}/2 \\ 0 & \text{si } |\mathbf{x}| > \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

constituent une bonne approximation de u^ε , il reste encore à majorer l'erreur intervenant dans le membre de droite de l'inégalité proposée par le théorème 2.6.1. Pour ceci nous utiliserons les propositions 2.6.3 et 2.6.4. Il nous suffit donc de montrer que les termes de champs proche et lointain sont de la forme

$$u_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{Q_n} u_n^{[q]} \ln^q \varepsilon \quad \text{et} \quad U_n^\varepsilon = \sum_{q=0}^{Q_n} U_n^{[q]} \ln^q \varepsilon. \quad (6.8.1)$$

avec $u_n^{[q]}$ et $U_n^{[q]}$ indépendants de ε . Nous reprendrons pour ceci la démarche que nous avons adoptée au chapitre 1 pour le transposer à notre situation tridimensionnelle. Nous raisonnerons par récurrence.

Tout d'abord nous pouvons vérifier que le couple $(u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon) = (u^0, \ell_0(u^0))$ est bien l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_0^\varepsilon)$. Notons que $\ell_0(u^0)$ est en fait indépendant de r ou R car $d^\circ \ell_0(u^0) = 0$. En effet $\ell_0(u^0)$ est la trace sur I du champ incident u^0 ,

$$\ell_0(u^0)(\phi_{S^2}(\varphi, \nu)) = u^0(\phi_{\text{el}}(0, \varphi, \nu)).$$

La fonction $\ell_0(u^0) \in \mathbb{P}_{\log}$ est donc par ailleurs indépendante de φ . Le couple $(u^0, \ell_0(u^0))$ admet bien la forme (6.8.1). Avec ces résultats on retrouve une version vectorielle de ce que nous avons obtenu au chapitre 1 qui confirme par ailleurs le résultat de la proposition 6.3.1.

Supposons à présent que les couples $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ soient solutions des problèmes $(\mathcal{P}_{n-1}^\varepsilon), \dots, (\mathcal{P}_0^\varepsilon)$ et que ces couples soient de la forme (6.8.1). Revenons à la démonstration de la proposition 6.7.2 et à ses notations. Par linéarité des $\ell_p(\cdot), L_p(\cdot), \mathfrak{S}_p\{\cdot\}, \mathfrak{S}_p\{\cdot\}$ et d'après l'expression (6.7.2), il semble clair que $u_n^\varepsilon - v_n^\varepsilon$ et $U_n^\varepsilon - V_n^\varepsilon$ admettent la forme (6.8.1). Il est également clair que la fonction W_n^ε , construite au moyen de la proposition 6.7.3, dépend linéairement de U_{n-2}^ε et U_n^ε . Les définitions de v_n^ε et V_n^ε qui sont explicites montrent bien que W_n^ε admet la forme (6.8.1) lorsque v_n^ε et V_n^ε admettent eux-mêmes cette forme. Ceci conclut la preuve par récurrence. Nous pouvons donc appliquer les propositions 2.6.3 et 2.6.4, et on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 6.8.1.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ les uniques couples solutions des problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{avec} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon = \chi^\varepsilon u_n^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) U_n^\varepsilon.$$

Dans l'énoncé précédent les constantes α, β sont supposées indépendantes de N tandis que κ_N peut dépendre de N . De même qu'aux chapitres 1 et 3, ce résultat d'approximation globale n'est pas optimal mais il permet de démontrer des résultats d'approximation locale qui sont eux optimaux, et qui démontrent que les u_n^ε et les U_n^ε sont bien les termes de développements respectivement en champ lointain et proche. Nous ne donnons pas la preuve car elle s'effectue exactement comme pour le corollaire 3.4.1.

Corollaire 6.8.1.

Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendants éventuellement de N tels que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

De même pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_N$ borné et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendant éventuellement de N tels que

$$\|\Xi_*^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

6.A Rappels sur les fonctions de Legendre

Cet annexe vise à fournir des rappels introductifs relatifs aux fonctions de Legendre. Ces fonctions spéciales interviennent lors de la résolution par séparation de variables de l'équation de Laplace sur la sphère unité S^2 . Elles nous sont utiles tout d'abord pour définir un opérateur DtN dans \mathbb{R}^3 . Elles nous sont également utiles d'une manière générale pour calculer sur la sphère unité.

Une construction relativement concise des fonctions de Legendre est contenue dans [82, 94]. On peut trouver une présentation bien plus détaillée dans [43, 98]. Enfin l'exposé sur les fonctions de Legendre contenu dans [115] a le mérite de présenter de façon extrêmement naturelle ces fonctions spéciales.

Étant donné un nombre complexe $\mu \in \mathbb{C}$, une fonction $u(\eta)$ est fonction de Legendre d'ordre μ si c'est une solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}u(\eta) + \mu(\mu+1)u(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, +1]. \quad (6.A.1)$$

Fonctions de première espèce : les polynômes de Legendre

La classe la plus simple de fonctions de Legendre est constituée par les polynômes de Legendre. On pourra trouver un exposé restreint à ces polynômes seulement dans [28, 91, 89]. Il s'agit d'une famille de polynômes notés $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on peut définir grâce à la formule de Rodrigues

$$P_n(\eta) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\eta^n} (\eta^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.A.2)$$

On montre facilement que le polynôme de Legendre P_n est donc exactement de degré n . On peut démontrer aussi que ces polynômes constituent une base hilbertienne orthogonale de $L^2([-1, +1])$ au sens du produit scalaire $\langle u, w \rangle_{L^2(I)} = \int_I u \bar{w}$ (rappelons qu'on identifie le segment I à l'intervalle $[-1, +1]$). Cette famille n'est pas normée car on a

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\eta) \bar{P}_m(\eta) d\eta = \frac{2\delta_m^n}{2n+1}, \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (6.A.3)$$

où δ_m^n désigne le symbole de Kronecker. L'une des propriétés les plus intéressantes de ces polynômes est que $P_n(\eta)$ est une solution particulière de l'équation de Legendre d'ordre n ,

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{d}{d\eta}P_n(\eta) + n(n+1)P_n(\eta) = 0, \quad \eta \in [-1, +1], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Via la paramétrisation ϕ_{S^2} de la sphère unité définie au §6.1.1, on peut voir P_n comme la solution d'une équation de Laplace sur la sphère. Les harmoniques sphériques \mathcal{Y}_n^0 sont définies par

$$\mathcal{Y}_n^0(\phi_{S^2}(\varphi, \eta)) := \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}} P_n(\eta), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.A.4)$$

On vérifie facilement que $\mathcal{Y}_n^0 \in L^2(S^2)$. De plus un calcul direct en utilisant l'expression du Laplacien Beltrami dans les coordonnées (φ, η) montre que $\Delta_{S^2} \mathcal{Y}_n^0 + n(n+1)\mathcal{Y}_n^0 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le terme en facteur de P_n dans l'expression ci-dessus permet d'assurer que $\|\mathcal{Y}_n^0\|_{L^2(S^2)} = 1$. Par ailleurs les \mathcal{Y}_n^0 sont orthonormaux deux à deux au sens du produit scalaire sur $L^2(S^2)$, ce qu'on vérifie grâce à la relation (6.A.3).

Fonctions de Legendre de seconde espèce

On peut construire une autre solution indépendante à l'équation de Legendre d'ordre n . La solution usuellement proposée est notée Q_n et est appelée fonction de Legendre de deuxième espèce. Contrairement à $P_n(\eta)$, la fonction $Q_n(\eta)$ n'est pas une fonction régulière de η sur $[-1, +1]$ tout entier ; elle admet un comportement singulier logarithmique en $\eta = \pm 1$. Sa définition passe habituellement par l'usage de la fonction hypergéométrique. Nous en donnons une définition alternative et directe

$$Q_n(\eta) = \frac{P_n(\eta)}{2} \ln\left(\frac{\eta+1}{\eta-1}\right) + \tilde{Q}_n(\eta), \quad \eta \in]-1, +1[$$

où l'on peut donner grâce à [98] une expression explicite de $\tilde{Q}_n(\eta)$ en fonction des polynômes de Legendre à savoir

$$\tilde{Q}_0(\eta) = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{Q}_n(\eta) = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_k(\eta)P_{n-1-k}(\eta)}{k+1} \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Ainsi pour toute fonction u solution de l'équation de Legendre (6.A.1) avec $\mu = n$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $v = \alpha P_n + \beta Q_n$.

Fonctions de Legendre associées

Outre les fonctions de Legendre définies ci-dessus on définit également des fonctions dite de Legendre associées, qui interviennent lors d'une résolution par séparation de variables en coordonnées sphériques. Nous nous intéresserons seulement aux fonctions associées aux polynômes de Legendre (fonctions de première espèce),

$$P_n^m(\eta) := (\eta^2 - 1)^{m/2} \frac{d^m P_n(\eta)}{d\eta^m} = (\eta^2 - 1)^{m/2} \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{d\eta^{m+n}} (\eta^2 - 1)^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (6.A.5)$$

Cette famille de fonctions contient comme cas particulier les polynômes de Legendre ordinaire $P_n^0 = P_n$. On peut vérifier directement que ces fonctions sont solutions d'une équation légèrement différente de (6.A.1),

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2) \frac{d}{d\eta} P_n^m(\eta) + \left[\mu(\mu+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] P_n^m(\eta) = 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ces fonctions de Legendre associées mènent à la définition d'une famille plus générale d'harmoniques sphériques $\mathcal{Y}_n^m \in L^2(S^2)$ définies à l'aide de ϕ_{S^2} suivant la formule

$$\mathcal{Y}_n^m(\phi_{S^2}(\varphi, \eta)) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}} P_n^{|m|}(\eta) e^{im\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \llbracket -n, +n \rrbracket. \quad (6.A.6)$$

On vérifie par un calcul de routine que $\mathcal{Y}_n^m \in L^2(S^2)$ pour tout n, m . Par ailleurs le terme en facteur $P_n(\eta)$ ci-dessus permet d'assurer que $\|\mathcal{Y}_n^m\|_{L^2(S^2)} = 1$. Enfin en exprimant le Laplacien Beltrami Δ_{S^2} dans les coordonnées (φ, η) on obtient que ces fonctions satisfont l'équation

$$\Delta_{S^2} \mathcal{Y}_n^m + n(n+1) \mathcal{Y}_n^m = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \in \llbracket -n, +n \rrbracket. \quad (6.A.7)$$

En fait la famille des harmoniques sphériques que nous venons de définir constitue une base hilbertienne. La preuve de la densité de la famille (\mathcal{Y}_n^m) dans $L^2(S^2)$ peut être trouvée dans [28, 91, 89] par exemple. Cela permet en particulier de décomposer toute fonction $u \in L^2(S^2)$ sous la forme

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} u_n^m \mathcal{Y}_n^m, \quad \text{avec} \quad u_n^m = \int_{S^2} u(\sigma) \overline{\mathcal{Y}_n^m(\sigma)} d\sigma = \langle u, \mathcal{Y}_n^m \rangle_{L^2(S^2)}, \quad (6.A.8)$$

la somme ci-dessus convergeant au sens de la norme $\| \cdot \|_{L^2(S^2)}$ comme dans le cas des séries de Fourier. À l'aide de cette décomposition il est possible de caractériser les espaces de Sobolev sur la sphère unité. Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a

$$H^s(S^2) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(S^2) \mid \|u\|_{H^s(S^2)}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (1+n^2)^s |\langle u, \mathcal{Y}_n^m \rangle_{L^2(S^2)}|^2 < \infty \right\}. \quad (6.A.9)$$

6.B Séparation de variables pour l'équation de Helmholtz 3D

Pour définir un opérateur DtN en trois dimensions pour l'équation de Helmholtz, il nous faut introduire une dernière classe de Fonctions spéciales qui ne sont pas reliées aux fonctions de Legendre. Ces fonctions interviennent dans la partie radiale de la résolution par séparation de variables.

Fonctions de Bessel d'ordre demi-entier

Il s'agit des fonctions de Bessel et de Hankel d'ordre demi-entier. Au chapitre 1 section 1.3.1 nous avons fourni des formules explicites pour les fonctions de Bessel de première espèce J_n et de seconde espèce Y_n . Ces formules valaient *a priori* pour des n entier. Il est possible (cf [82] par exemple) de proposer des définitions générales qui valent pour des indices non entiers

$$J_\mu(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n) \Gamma(\mu+n)} \left(\frac{s}{2}\right)^{\mu+2n}, \quad \mu \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad Y_\mu(s) := \frac{J_\mu(s) \cos(\mu\pi) - J_{-\mu}(s)}{\sin(\mu\pi)}, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}.$$

Ces définitions valent au moins pour $s \in]0, \infty[$. La deuxième formule ci-dessus n'est pas directement valable pour $\mu \in \mathbb{Z}$ mais on peut vérifier que $\lim_{\mu \rightarrow n} Y_\mu(s) = Y_n(s)$. Ces définitions nous permettent également de définir des fonctions de Hankel d'ordre arbitraire pas forcément entier, mais dans le cadre de la séparation de variables nous nous intéresserons seulement aux ordres demi-entiers. On pose donc des notations adaptées

$$H_\mu^{(1)}(s) := J_\mu(s) + iY_\mu(s), \quad \mu \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_n(s) := \frac{1}{\sqrt{s}} H_{n+1/2}^{(1)}(s), \quad n \in \mathbb{N}, s \in]0, \infty[.$$

Les fonctions \mathcal{H}_n sont couramment appelées fonctions de Hankel sphériques. Avec les harmoniques sphériques elles permettent de construire des solutions à variables séparées de l'équation de Helmholtz tridimensionnelle. En effet

$$\text{Si } v(\rho \cdot \sigma) = \mathcal{H}_n(\omega\rho) \mathcal{Y}_n^m(\sigma) \quad \text{alors} \quad \Delta v + \omega^2 v = 0.$$

Opérateur de Dirichlet-to-Neumann en coordonnées sphériques

Ainsi nous disposons d'une famille complète de solutions de l'équation de Helmholtz tridimensionnelle. Nous pouvons utiliser ces solutions pour construire un opérateur DtN T_Γ agissant sur la frontière Γ . Il sera défini par

$$T_\Gamma v = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} v_n^m \omega \frac{\mathcal{H}'_n(\omega\rho)}{\mathcal{H}_n(\omega\rho)} \mathcal{Y}_n^m \quad \text{avec} \quad v_n^m = \int_{S^2} v(\sigma) \overline{\mathcal{Y}_n^m(\sigma)} d\sigma. \quad (6.B.1)$$

On démontre (cf par exemple [91]) que cet opérateur est continu de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. Lorsqu'elle est solution de l'équation de Helmholtz, on dira alors qu'une fonction v satisfait la condition de radiation si elle vérifie

$$\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v = 0.$$

Enfin on peut démontrer cf [91] que l'opérateur DtN satisfait une propriété de positivité analogue à celle du DtN du problème de diffraction 2D à savoir

$$\Re \left\{ \int_{\Gamma} \bar{v} T_\Gamma v \right\} \geq 0, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (6.B.2)$$

6.C Dérivation d'une identité pour la mesure de surface sur le fil

Le lemme suivant est utile lorsqu'il s'agit de calculer des intégrales sur Γ_ε . En particulier de telles intégrales apparaissent lorsqu'on applique une formule de Green dans le domaine Ω_ε . Dans cette dernière situation intervient une dérivée normale ce qui rend bien adaptée la formule suivante.

Lemme 6.1.1.

Si le vecteur normal n_{Γ_ε} se décompose dans la base ellipsoïdale sous la forme $n_{\Gamma_\varepsilon} = n_{\Gamma_\varepsilon}^r \partial_r + n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi \partial_\varphi + n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu \partial_\nu$, alors la mesure de surface sur le bord du fil notée $d\Gamma_\varepsilon$ vérifie l'identité

$$n_{\Gamma_\varepsilon}^r d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu) \sqrt{1 + \varepsilon^2 \Phi(\varphi, \nu)^2} d\varphi d\nu$$

Preuve :

Considérons les trois fonctions positives h_r, h_φ, h_ν telles que la métrique en coordonnées ellipsoïdales s'écrive $h_r^2 dr \otimes dr + h_\varphi^2 d\varphi \otimes d\varphi + h_\nu^2 d\nu \otimes d\nu$. Leur expression est donnée par (6.1.7). Le tenseur métrique induit sur Γ_ε est alors donné par

$$\begin{aligned} & h_r^2 d(\varepsilon\Phi) \otimes d(\varepsilon\Phi) + h_\varphi^2 d\varphi \otimes d\varphi + h_\nu^2 d\nu \otimes d\nu \\ &= \left[\varepsilon^2 h_r^2 (\partial_\varphi \Phi)^2 + h_\varphi^2 \right] d\varphi \otimes d\varphi + \left[\varepsilon^2 h_r^2 (\partial_\nu \Phi)^2 + h_\nu^2 \right] d\nu \otimes d\nu + \varepsilon^2 (\partial_\varphi \Phi \partial_\nu \Phi) (d\varphi \otimes d\nu + d\nu \otimes d\varphi) \end{aligned}$$

On obtient la densité de la mesure de surface $d\Gamma_\varepsilon$, notée pour un instant $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}$, en prenant la racine carré du déterminant de ce tenseur. On a donc

$$\frac{\gamma_{\Gamma_\varepsilon}^2}{(h_\varphi h_\nu)^2} = 1 + (\varepsilon \partial_\varphi \Phi)^2 \left(\frac{h_r}{h_\varphi} \right)^2 + (\varepsilon \partial_\nu \Phi)^2 \left(\frac{h_r}{h_\nu} \right)^2$$

Enfin la normale n_{Γ_ε} doit satisfaire par définition les trois équations

$$n_{\Gamma_\varepsilon}^r h_r^2 \varepsilon \partial_\varphi \Phi + n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi h_\varphi^2 = 0, \quad n_{\Gamma_\varepsilon}^r h_r^2 \varepsilon \partial_\nu \Phi + n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu h_\nu^2 = 0 \quad \text{et} \quad (n_{\Gamma_\varepsilon}^r)^2 h_r^2 + (n_{\Gamma_\varepsilon}^\varphi)^2 h_\varphi^2 + (n_{\Gamma_\varepsilon}^\nu)^2 h_\nu^2 = 1.$$

En injectant les deux premières équations ci-dessus dans la troisième on obtient une expression explicite de $(n_{\Gamma_\varepsilon}^r)^2$ dont on remarque qu'elle peut être reliée à l'expression de $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}^2$. En effet

$$(n_{\Gamma_\varepsilon}^r)^2 = \frac{1}{h_r^2} \frac{1}{1 + (\varepsilon \partial_\varphi \Phi)^2 \left(\frac{h_r}{h_\varphi} \right)^2 + (\varepsilon \partial_\nu \Phi)^2 \left(\frac{h_r}{h_\nu} \right)^2} = \frac{1}{h_r^2} \frac{(h_\varphi h_\nu)^2}{\gamma_{\Gamma_\varepsilon}^2}$$

D'où finalement la conclusion en utilisant l'expression de h_r, h_φ, h_ν donnée par (6.1.7) et le fait que $n_{\Gamma_\varepsilon}^r > 0$ puisque

$$(n_{\Gamma_\varepsilon}^r \gamma_{\Gamma_\varepsilon})^2 = \left(\frac{h_\varphi h_\nu}{h_r} \right)^2 = (\varepsilon \Phi)^2 (1 + (\varepsilon \Phi)^2).$$

■

6.D Régularité du champ proche au voisinage des pointes

Nous présentons ici la démonstration du résultat que nous utilisons en pratique pour démontrer la régularité des profils $\mathfrak{S}_p\{a\}$ et des termes de champ proche U_n^ε en $\eta = \pm 1$. Le but de cette annexe est donc la démonstration de la proposition 6.6.1. Avant de passer à cette démonstration, nous devons tout d'abord établir un résultat de continuité pour les solutions de problèmes au laplacien en deux dimensions. Nous reprenons ici les notations introduites au §6.6.

Lemme 6.D.1.

Étant donnés $g \in \mathcal{W}_{-5/2}^\infty(\Omega_N)$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$, soit $W(\zeta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))$ une famille indexée par $\zeta \in [-1, 1]$ satisfaisant pour tout ζ ,

$$\Delta_\perp W(\zeta) = \hat{g}(\zeta) \text{ dans } \hat{\Omega}(\zeta), \quad \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \hat{h}(\zeta) \text{ sur } \hat{\Gamma}(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\hat{\Gamma}(\zeta)} W(\zeta) = 0$$

Alors $W(\zeta) \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\hat{\Omega}(\zeta))$, $\forall \zeta \in [-1, +1]$. En outre pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ indépendant de ζ satisfaisant

$$\|W(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{1/2}^m(\hat{\Omega}(\zeta))} \leq \kappa \left(\|\hat{g}(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^{m-2}(\hat{\Omega}(\zeta))} + \|\hat{h}(\zeta)\|_{H^{m-3/2}(\hat{\Gamma}(\zeta))} \right), \quad \forall \zeta \in [-1, +1].$$

Preuve :

Ce lemme résulte de l'application des propositions 1.8.2 et 1.8.3, en prenant en plus en compte les estimations suivantes. À partir de la définition des espaces à poids (3.1.8) et celle de $\mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))$ donnée par (1.8.3), des calculs élémentaires montrent qu'il existe $\kappa > 0$ indépendante de ζ telle que

$$\|W(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{1/2}^1(\hat{\Omega}(\zeta))} \leq \kappa \|W(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))} \quad \text{et} \quad \|\hat{g}(\zeta)\|_{\mathcal{W}'_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))} \leq \kappa \|\hat{g}(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^0(\hat{\Omega}(\zeta))}$$

A priori les constantes de continuité κ qui intervenant dans les estimations sont indépendantes de ζ car Φ est de classe \mathcal{C}^∞ et ne s'annule jamais. ■

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du résultat de régularité tridimensionnelle souhaité pour le champ proche. Cette preuve est compliquée parce que nous ne considérons pas un problème elliptique tridimensionnel, mais une famille de problèmes elliptiques bidimensionnels.

Proposition 6.6.1.

Soit $k \geq 2$. Étant donnés $g \in \mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)$ et $h \in H^k(\Gamma_N)$, soit $W(\zeta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))$ une famille indexée par $\zeta \in [-1, 1]$ satisfaisant pour tout $\zeta \neq \pm 1$,

$$\Delta_\perp W(\zeta) = \hat{g}(\zeta) \text{ dans } \hat{\Omega}(\zeta), \quad \frac{\partial W(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \hat{h}(\zeta) \text{ sur } \hat{\Gamma}(\zeta) \quad \text{et} \quad \int_{\hat{\Gamma}(\zeta)} W(\zeta) = 0$$

Alors il existe une (unique) fonction $V \in \mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)$ telle que $\hat{V}(\zeta) = W(\zeta)$ pour tout $\zeta \in [-1, 1]$. De plus il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g et h telle que

$$\|V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right).$$

Preuve :

On peut déjà associer à la famille $W(\cdot)$ une fonction V vérifiant $\hat{V}(\eta) = W(\eta)$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. Il nous faut vérifier la régularité de V . Nous découperons ce problème en deux parties à l'aide de fonctions de troncature. On considère deux fonctions de troncature χ_0, χ_1 telles que

$$\chi_0 + \chi_1 = 1 \quad \text{et} \quad \chi_0 : [-1, +1] \rightarrow]0, 1[\quad \text{est de classe } \mathcal{C}^\infty \quad \text{et} \quad \chi_0(\eta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\eta| > \frac{1+\nu_0}{2} \\ 0 & \text{si } |\eta| < \nu_0 \end{cases}$$

où ν_0 est le nombre qui intervient dans l'hypothèse **F2** de la définition de Γ_ε . Nous posons alors $V_i = \chi_i V$, $i = 0, 1$ et nous étudions successivement ces deux fonctions pour montrer qu'elles sont régulières. Nous noterons également $g_i = \chi_i g$ et $h_i = \chi_i h$, $i = 0, 1$.

Cas i=0 Rappelons que pour $|\eta| > \nu_0$ le bord $\hat{\Gamma}(\eta)$ est le cercle d'équation $R = \Phi(\eta)$. Nous introduisons une fonction $\psi : \Omega_N \rightarrow [1, +\infty[\times S^2$ définie par $\psi(R, \sigma) := (R / \phi_{S^2}^* \Phi(\sigma), \sigma)$. Notons $V' = V_0 \circ \psi^{-1}$, $g' = g_0 \circ \psi^{-1}$ et $h' = h_0 \circ \psi^{-1}$. Vue la définition de ψ , il est assez clair que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ si $U \in \mathscr{W}_p^k(\Omega_N)$ alors $U \circ \psi^{-1} \in \mathscr{W}_p^k(\psi(\Omega_N))$ et il existe une constante $\kappa_1 > 0$ telle que

$$\frac{1}{\kappa_1} \|U\|_{\mathscr{W}_p^k(\Omega_N)} \leq \|U \circ \psi^{-1}\|_{\mathscr{W}_p^k(\psi(\Omega_N))} \leq \kappa_1 \|U\|_{\mathscr{W}_p^k(\Omega_N)} \quad \forall U \in \mathscr{W}_p^k(\Omega_N). \quad (6.D.1)$$

On pose $\Omega' := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(0, 1)$ et $\Gamma' := \partial\Omega'$. D'après les définitions qui précèdent on a donc $\phi_{\text{cy}} \circ \phi_{\text{sp}}^{-1}(\psi(\Omega_N)) = \Omega' \times [-1, +1]$ et $\phi_{\text{cy}} \circ \phi_{\text{sp}}^{-1}(\psi(\Gamma_N)) = \Gamma' \times [-1, +1]$. Par ailleurs la fonction $\hat{V}'(\zeta)$ vérifie les équations suivantes

$$\Delta_{\perp} \hat{V}'(\zeta) = \hat{g}'(\zeta) \quad \text{dans } \Omega' \quad \frac{\partial \hat{V}'(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \hat{h}'(\zeta) \quad \text{sur } \Gamma' \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma'} \hat{V}'(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in]-1, +1[$$

Nous décomposons maintenant les fonctions $V'(R, \cdot)$, $g'(R, \cdot)$ et $h'(R, \cdot)$ en harmoniques sphériques. On pose $v_{n,m}(R, \sigma) := \langle v(R, \cdot), \mathscr{Y}_n^m(\cdot) \rangle_{L^2(S^2)} \mathscr{Y}_n^m(\sigma)$ pour $v = V', g', h'$ et $n \in \mathbb{N}, |m| \leq n$. Vue la forme de $\psi(\Omega_N)$ on a alors

$$\Delta_{\perp} \hat{V}'_{n,m}(\zeta) = \hat{g}'_{n,m}(\zeta) \quad \text{dans } \Omega' \quad \frac{\partial \hat{V}'_{n,m}(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} = \hat{h}'_{n,m}(\zeta) \quad \text{sur } \Gamma' \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma'} \hat{V}'_{n,m}(\zeta) = 0 \quad \forall \zeta \in]-1, +1[$$

Nous appliquons maintenant les résultats des lemmes 1.8.2 et 1.8.3 à chacun des $\hat{V}'_{n,m}(\zeta)$. En remarquant qu'il existe une constante $\kappa > 0$ telle que $\|G\|_{\mathscr{W}'_{\log}(\Omega')} \leq \kappa \|G\|_{\mathscr{W}'_{-5/2}(\Omega')}$ pour tout $G \in \mathscr{W}'_{-5/2}(\Omega')$, on en tire l'existence d'une constante $\kappa_0 > 0$ telle que

$$\|\hat{V}'_{n,m}(\zeta)\|_{\mathscr{W}'_{1/2}(\Omega')} \leq \kappa_0 \left(\|\hat{g}'_{n,m}(\zeta)\|_{\mathscr{W}'_{-5/2}(\Omega')} + \|\hat{h}'_{n,m}(\zeta)\|_{H^{\alpha}(\Gamma')} \right) \quad \forall \zeta \in]-1, +1[, \quad \forall \alpha \in [0, k]. \quad (6.D.2)$$

Nous allons maintenant sommer ces inégalités suivant m et n . Exprimons les normes à poids à l'aide de la décomposition en harmoniques sphériques. Pour tout $p \in \mathbb{R}$ il existe une constante $\kappa_2 > 0$ telle que pour tout $v \in \mathscr{W}_p^k(\psi(\Omega_N))$

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathscr{W}_p^k(\psi(\Omega_N))}^2 &= \sum_{\alpha+\beta \leq k} \int_1^{\infty} \|(r\partial_r)^{\alpha} v\|_{H^{\beta}(S^2)}^2 R^{-2p} \frac{dR}{R} \\ &= \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} (1+n^2)^{\beta} \int_1^{\infty} \|(R\partial_R)^{\alpha} v_{n,m}\|_{L^2(S^2)}^2 R^{-2p} \frac{dR}{R} \\ &\leq \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} (1+n^2)^{\beta} \int_{-1}^{+1} \|\hat{v}_{n,m}(\zeta)\|_{\mathscr{W}_p^{\alpha}(\Omega')}^2 d\zeta \end{aligned} \quad (6.D.3)$$

et

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} (1+n^2)^{\beta} \int_{-1}^{+1} \|\hat{v}_{n,m}(\zeta)\|_{\mathscr{W}_p^{\alpha}(\Omega')}^2 d\zeta \\ &\leq \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} \sum_{\gamma+\delta \leq \alpha} (1+n^2)^{\beta} m^{2\delta} \int_1^{\infty} \|(R\partial_R)^{\gamma} v_{n,m}\|_{L^2(S^2)}^2 R^{-2p} \frac{dR}{R} \\ &\leq \kappa_2 \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} (1+n^2)^{\beta} \int_1^{\infty} \|(R\partial_R)^{\alpha} v_{n,m}\|_{L^2(S^2)}^2 R^{-2p} \frac{dR}{R} = \kappa_2 \|v\|_{\mathscr{W}_p^k(\psi(\Omega_N))}^2 \end{aligned} \quad (6.D.4)$$

Comme on sait déjà que $\hat{V}'_{n,m}(\zeta) \in \mathscr{W}'_{1/2}(\Omega')$ pour tout $\zeta \in]0, 1[$, pour montrer que $V' \in \mathscr{W}'_{1/2}(\psi(\Omega_N))$ il suffit de montrer que la dernière somme dans (6.D.3) est finie avec $\hat{v}_{n,m}(\zeta) = \hat{V}'_{n,m}(\zeta)$. Pour montrer ceci, il suffit d'utiliser (6.D.2), (6.D.4) et le fait qu'il existe une constante $\kappa_3 > 0$ indépendante de h telle que

$$\sum_{\alpha+\beta \leq k} \sum_{n \geq 0} \sum_{|m| \leq n} (1+n^2)^{\beta} \int_{-1}^{+1} \|\hat{v}_{n,m}(\zeta)\|_{H^{\alpha}(\Gamma')}^2 d\zeta \leq \kappa_3 \|v\|_{H^k(\psi(\Gamma_N))}^2 \quad \forall v \in H^k(\psi(\Gamma_N)). \quad (6.D.5)$$

En réunissant (6.D.3), (6.D.2), (6.D.4) et (6.D.5) on obtient que $V' \in \mathcal{W}_{1/2}^k(\psi(\Omega_N))$ et donc d'après (6.D.1) on a $V_0 \in \mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)$.

Par ailleurs comme les constantes intervenant dans (6.D.3), (6.D.2), (6.D.4) et (6.D.5) et dans les lemmes 1.8.2 et 1.8.3 sont indépendantes des données g et h , on en déduit l'existence d'une constante $\kappa_4 > 0$ indépendante de g et h telle que

$$\|\chi_0 V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|\chi_0 g\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|\chi_0 h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right). \quad (6.D.6)$$

Cas i=1 Il nous faut maintenant estimer $\|V_1\|_{\mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)}$ avec $V_1 = \chi_1 V$. Rappelons que $V_1(R, \varphi, \eta) = 0$ dès que $|\eta| > (1 + \nu_0)/2$. Notons $\Omega'' = \{\mathbf{x} = \phi_{\text{sp}}(R, \varphi, \eta) \mid |\eta| < (1 + \nu_0)/2\}$. Il est clair que $\phi_{\text{cy}} \circ \phi_{\text{sp}}^{-1}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\overline{\Omega''}$. Ainsi pour tout $p \in \mathbb{R}$, il existe une constante $\kappa_5 > 0$ telle que

$$\frac{1}{\kappa_5} \|U\|_{\mathcal{W}_p^k(\Omega'')}^2 \leq \sum_{m+n \leq k} \int_{-1}^{+1} \left\| \frac{\partial^n \widehat{U}}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_p^m(\hat{\Omega}(\zeta))}^2 d\zeta \leq \kappa_5 \|U\|_{\mathcal{W}_p^k(\Omega'')}^2 \quad \forall U \in \mathcal{W}_p^k(\Omega''). \quad (6.D.7)$$

Nous allons donc nous servir de ces inégalités avec V_1 . Pour chaque $n = 0 \dots k$, nous allons caractériser les $\frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta)$ comme solution de certains problèmes bidimensionnels pour lesquels nous pourrions utiliser les lemmes 1.8.2 et 1.8.3.

Nous allons procéder par récurrence sur $n \leq k$ pour montrer que pour tout $m \leq k - n$ il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g et h telle que $\forall \zeta \in]-1, +1[$

$$\left\| \frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{1/2}^m(\hat{\Omega}(\zeta))} \leq \kappa \sum_{\alpha=0}^n \left(\left\| \frac{\partial^\alpha \widehat{g}_1}{\partial \eta^\alpha}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^{m+n-\alpha}(\hat{\Omega}(\zeta))} + \left\| \frac{\partial^\alpha \widehat{h}_1}{\partial \eta^\alpha}(\zeta) \right\|_{H^{m+n-\alpha}(\hat{\Omega}(\zeta))} \right) \quad (6.D.8)$$

Par application directe des lemmes 1.8.2 et 1.8.3 ceci est clairement vérifié au rang $n = 0$. Supposons que ceci est vérifié au rang $n - 1$ et montrons que c'est encore vérifié au rang n . Un calcul sans intérêt montre qu'il existe des fonctions $\zeta \mapsto \mathbf{b}_{\alpha, \beta}(\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(\hat{\Gamma}(\zeta))^2$ et $\zeta \mapsto c_{\alpha, \beta}(\zeta) \in \mathcal{C}^\infty(\hat{\Gamma}(\zeta))$ pour $\alpha + \beta \leq n$ tels que

$$\begin{aligned} \Delta_\perp \left(\frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right) &= \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \left(\Delta_\perp \widehat{V}_1(\zeta) \right) = \frac{\partial^n \widehat{g}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) := \widehat{g}_n''(\zeta) \\ \frac{\partial}{\partial \hat{n}(\zeta)} \left(\frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right) &= \frac{\partial^n}{\partial \zeta^n} \left(\frac{\partial \widehat{V}_1(\zeta)}{\partial \hat{n}(\zeta)} \right) - \sum_{\substack{\alpha+\beta \leq n \\ \alpha \neq n}} \mathbf{b}_{\alpha, \beta}(\zeta) \cdot \nabla \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} \widehat{V}_1}{\partial \eta^\alpha \partial R^\beta}(\zeta) \right) := \widehat{h}_n''(\zeta) \\ \int_{\hat{\Gamma}(\zeta)} \frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) d\hat{\Gamma}(\zeta) &= - \sum_{\substack{\alpha+\beta \leq n \\ \alpha \neq n}} \int_{\hat{\Gamma}(\zeta)} c_{\alpha, \beta}(\zeta) \frac{\partial^{\alpha+\beta} \widehat{V}_1}{\partial \eta^\alpha \partial R^\beta}(\zeta) d\hat{\Gamma}(\zeta) := \mu_n''(\zeta) \end{aligned}$$

Ici ∇_\perp désigne le gradient bidimensionnel relatif à la métrique cartésienne. En appliquant le résultat de la proposition 6.D.1 et en utilisant la régularité des $\mathbf{b}_{\alpha, \beta}$ et des $c_{\alpha, \beta}$, on obtient l'existence de constantes $\kappa, \kappa' > 0$ indépendantes de g et h telles que

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^n \widehat{V}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{1/2}^m(\hat{\Omega}(\zeta))} &\leq \kappa \left(\|\widehat{g}_n''(\zeta)\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^{m-2}(\hat{\Omega}(\zeta))} + \|\widehat{h}_n''(\zeta)\|_{H^{m-3/2}(\hat{\Gamma}(\zeta))} + |\mu_n''(\zeta)| \right) \\ &\leq \kappa \left(\left\| \frac{\partial^n \widehat{g}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^{m-2}(\hat{\Omega}(\zeta))} + \left\| \frac{\partial^n \widehat{h}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{H^{m-3/2}(\hat{\Gamma}(\zeta))} + \sum_{\substack{\alpha+\beta \leq n \\ \alpha \neq n}} \left\| \frac{\partial^{\alpha+\beta} \widehat{V}_1}{\partial \eta^\alpha \partial R^\beta}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{1/2}^m(\hat{\Omega}(\zeta))} \right) \\ &\leq \kappa \left(\left\| \frac{\partial^n \widehat{g}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^m(\hat{\Omega}(\zeta))} + \left\| \frac{\partial^n \widehat{h}_1}{\partial \eta^n}(\zeta) \right\|_{H^m(\hat{\Gamma}(\zeta))} + \sum_{\substack{\alpha+\beta \leq n \\ \alpha \neq n}} \left\| \frac{\partial^\alpha \widehat{V}_1}{\partial \eta^\alpha}(\zeta) \right\|_{\mathcal{W}_{1/2}^{m+\beta}(\hat{\Omega}(\zeta))} \right) \end{aligned}$$

En injectant l'hypothèse de récurrence (6.D.8) dans l'inégalité ci-dessus on obtient alors bien (6.D.8) au rang n . À présent en utilisant (6.D.7) joint à (6.D.8) on obtient l'existence d'une constante $\kappa_6 > 0$ indépendante de g et h telle que

$$\|V_1\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \|V_1\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega'')} \leq \kappa_6 \left(\|g_1\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|h_1\|_{H^k(\Gamma_N)} \right) \quad (6.D.9)$$

Conclusion On termine la preuve en réunissant simplement les inégalités (6.D.6) et (6.D.9) compte tenu du fait que $\|V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \|\chi_0 V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} + \|\chi_1 V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)}$ d'une part, et compte tenu d'autre part qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de g et h tel que

$$\|\chi_i g\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|\chi_i h\|_{H^k(\Gamma_N)} \leq \kappa \|g\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \quad i = 0, 1.$$

■



CHAPITRE 7

Équation de Helmholtz avec condition aux limites de Dirichlet

Introduction

Dans ce chapitre nous allons proposer une étude semblable à celle que nous avons menée au chapitre 6 mais en imposant cette fois une condition aux limites de Dirichlet homogène. Bien qu'un tel problème présente de très nombreux points communs avec celui du chapitre précédent, la condition aux limites constitue une différence fondamentale qui influence profondément la nature du développement. En effet dans cette situation la solution u^ε de l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord du fil ne peut se mettre sous la forme (6.8.1). Ce phénomène a été rapporté dans [67] qui traite notamment d'un problème posé dans une géométrie cylindrique telle que celle de la figure Fig.43 ci-dessous.

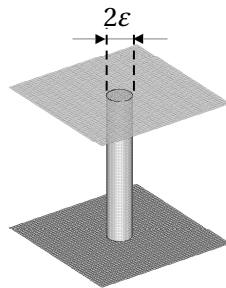


Fig.43 Géométrie considérée par Il'in

Néanmoins, il est possible de mener une démarche analogue à celle qui a été utilisée aux chapitres 3, 4 et 6 grâce à laquelle nous dériverons un développement asymptotique qui n'est pas régulier i.e. n'est pas de la forme (6.8.1). Pour appliquer cette méthode nous procéderons de la même manière que précédemment, mais nous profiterons du travail effectué aux chapitres 3 et 6.

Pour la littérature concernant l'analyse asymptotique autour d'un objet filiforme, dans le cas d'une condition aux limites de Dirichlet, nous désirons tout d'abord citer la série d'articles de Geer et Sellier [50, 51, 105, 106] intéressés par l'application d'une telle étude à l'aérodynamique et l'électromagnétisme

autour d'un corps élancé. Ces références relèvent d'une approche formelle du problème dans la mesure où ils ne fournissent pas d'estimation d'erreur et raisonnent sur des séries asymptotiques *a priori* non convergentes. Cependant ils sont intéressants d'un point de vue "qualitatif" car ils proposent d'approcher la solution exacte en faisant intervenir des champs rayonnés par une répartition linéique de points sources situés sur la ligne médiane de l'objet filaire.

Ensuite citons l'article de Fedoryuk [45] qui s'est intéressé à l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet à l'extérieur d'un objet tubulaire infini de section constante de diamètre $\varepsilon \rightarrow 0$ (il a également évoqué le cas de l'équation de Helmholtz dans sa version coercive) avec un terme source sur la frontière de l'obstacle. Il a dérivé un développement asymptotique par rapport à ε de la solution de ce problème à l'aide d'un développement multi-échelles en partant d'une représentation intégrale de la solution (dont la forme est la même que celle utilisé dans [50, 51]). Deux références [100, 46] ont ensuite généralisé les résultats de [45] au cas d'un obstacle fin de longueur finie pour l'équation de Laplace avec condition de Dirichlet sur le bord. Les deux auteurs accordent chacun un soin particulier à la définition de l'obstacle qu'il considèrent. Fedoryuk définit un objet à symétrie de révolution décrit en coordonnées ellipsoïdales. Rogier considère un objet décrit en coordonnées cylindriques qui n'est pas forcément à symétrie de révolution mais impose une forme particulière à la pointe du fil. Les deux études aboutissent à la résolution d'une équation intégrale 1D. Tandis que Fedoryuk dérive une base de diagonalisation (les polynômes de Legendre) de l'opérateur intégral et propose alors de résoudre cette équation par une méthode explicite en commettant une erreur petite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, Rogier démontre que cette équation admet une formulation variationnelle "du type coercif + compact" et propose d'appliquer l'alternative de Fredholm à cette équation. Les deux auteurs proposent le même résultat d'estimation d'erreur pour leur développement asymptotique mais il semble que, comme Rogier ne connaissait pas de base de diagonalisation explicite de l'opérateur intégral intervenant dans son étude (cf remarque de la p.173 de [100]), il manque un argument dans la preuve de son estimation d'erreur (p.190-191 de [100]).

Parallèlement [119] a proposé une généralisation de [46] pour l'équation de Helmholtz $\Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon$ avec $\Im\{\omega^2\} \neq 0$ avec une source donnée par une onde incidente dirigée suivant l'axe du fil. Enfin Maz'ya, Nazarov et Plamenevskii dans [87] ont repris la géométrie de Rogier et lui ont appliqué la technique de Fedoryuk pour dériver le premier terme d'un développement asymptotique. Par ailleurs [87] traite également de développements multi-échelles pour les problèmes elliptiques coercifs autour d'un objet filaire courbe sans pointe (un tore très fin par exemple) en dimension arbitraire, pour diverses conditions aux limites. Signalons enfin [67] qui s'est intéressé très brièvement à l'équation de Laplace dans une géométrie cylindrique, pour un obstacle qui est donc dépourvu de pointe. L'auteur ne dérive pas de développement asymptotique, mais montre simplement qu'il ne peut exister de développement par rapport à ε au sens habituel.

Dans ce chapitre nous proposons de dériver un développement asymptotique à tout ordre de la solution u^ε du problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un objet filaire décrit en coordonnées ellipsoïdales comme dans [45]. Nous reprendrons plusieurs ingrédients techniques présents dans cette référence concernant la régularisation de l'équation intégrale intervenant dans le raccord. Il y a cependant des différences avec cette étude car nous traitons de l'équation de Helmholtz (dans sa version non-coercive) et nous mettons en oeuvre la méthode des développements raccordés. Par ailleurs, nous nous intéresserons également à la trace de dérivée normale $n_{r_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$. Cette étude supplémentaire nous servira au prochain chapitre.

La dérivation à tout ordre d'un développement asymptotique de la solution de l'équation de Helmholtz (non coercive) avec condition de Dirichlet sur le bord d'un fil fini droit n'existait pas dans la littérature pour une géométrie de fil et un terme source aussi arbitraires que ceux que nous considérons. Par ailleurs signalons que le cas de la condition aux limites de Dirichlet nécessite un aménagement important des calculs d'estimation d'erreur (voir la section 7.5), ce que ne contient pas (à notre connaissance) la littérature existante telle que [87, 45, 46, 119]. Enfin les résultats d'estimation sur un développement du saut de dérivée normale sont nouveaux à notre connaissance.

Tout d'abord nous préciserons le cadre géométrique et le problème auquel on s'intéresse, sans revenir sur le système de coordonnées ellipsoïdales. Ensuite il faudra vérifier que les hypothèses nécessaires à l'application des résultats du chapitre 2 sont bien vérifiées. Il n'y aura presque rien à faire puisque nous aurons déjà vérifié ces hypothèses au chapitre précédent. Il suffira de démontrer un résultat de stabilité pour le problème avec condition de Dirichlet, ce qui s'avèrera plus simple que pour la condition de Neumann. Nous pourrons ensuite poser les problèmes récurrents qui définiront les termes du développement. Les définitions des $\ell_p(\cdot)$ et $L_p(\cdot)$ seront les mêmes qu'au chapitre 6 car la partie principale A_0 est également la même. La construction des profils en champ lointain aura déjà été réalisée au chapitre précédent, mais nous décrirons plus précisément les profils $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$ en montrant qu'ils sont reliés au noyau de Green sortant de l'équation de Helmholtz. En reprenant les notations introduites au §6.6.1, nous définirons également les profils en champ proche. Cette fois, puisque la condition aux limites a changé nous devons proposer une nouvelle construction. Nous tenterons ensuite de montrer que les problèmes récurrents destinés à définir les termes du développement raccordé sont bien posés. Nous verrons que malheureusement ce n'est pas le cas et que, en particulier, il n'y a pas en général existence d'un couple solution. Pour remédier à ce problème nous introduirons une perturbation régularisante dans les équations de raccord. Nous continuerons avec des estimations d'erreur. Nous terminerons le chapitre en nous intéressant à la trace de dérivée normale $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$.

7.1 Position du problème, vérification des hypothèses

Dans cette section nous décrirons la géométrie et le problème auxquels on s'intéresse pour tout le chapitre et nous vérifierons que les hypothèses nécessaires à l'application des résultats du chapitre 2 sont bien satisfaites. Naturellement une grande partie des notations et définitions que nous avons adoptées au chapitre précédent sera reprise ici.

7.1.1 Définition de la géométrie : la même qu'au chapitre précédent

La cadre géométrique sera rigoureusement le même qu'au chapitre 6. C'est pourquoi en ce qui concerne la géométrie nous reprendrons les mêmes notations qu'au chapitre précédent. Nous en rappelons ici les éléments essentiels.

Géométrie du domaine initial Étant donné un réel $\rho > 0$ suffisamment grand, le problème sans obstacle sera posé dans la boule de rayon ρ et de centre 0 avec des conditions sur son bord. On pose donc

$$\Omega := B(0, \rho) \quad \text{et} \quad \Gamma := \partial\Omega.$$

La frontière Γ interviendra en tant que frontière fictive sur laquelle sera appliquée une condition de rayonnement de Sommerfeld. Nous nous intéresserons au problème de la diffraction d'une onde acoustique par un obstacle de forme filaire c'est-à-dire un objet approchant le segment

$$I = \left\{ \mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \text{ et } |z| \leq 1 \right\} \quad (7.1.1)$$

Cet objet diffractant sera décrit dans les coordonnées ellipsoïdales que nous noterons à nouveau (r, φ, ν) . Ces coordonnées ont été introduites au §6.1.1. Elles sont définies par le paramétrage $\phi_{\text{el}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe à (r, φ, ν) le triplet (x, y, z) tel que

$$x = r\sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi, \quad y = r\sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi, \quad z = \xi(r)\nu \quad \text{avec} \quad \xi(r) = \sqrt{1+r^2}.$$

On introduit également le paramétrage de la sphère unité $\phi_{S^2} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ qui associe à un couple (φ, η) le point de la sphère σ de coordonnées cartésiennes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ données par

$$\sigma_x = \sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi, \quad \sigma_y = \sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi, \quad \sigma_z = \eta.$$

Dans la suite on notera $\phi_{S^2}^* u = u \circ \phi_{S^2}^{-1}$. Cette définition permet également d'introduire le paramétrage ϕ_{sp} défini par $\phi_{\text{sp}}(R, \varphi, \eta) = (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta))$. On définit enfin le domaine d'étude et le bord du fil à l'aide d'une équation exprimée dans le système de coordonnées ellipsoïdales, à l'aide d'une fonction $\Phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \\ \Omega_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r > \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \cap \Omega \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Ce type d'équation assure en particulier que " $\Gamma_\varepsilon \rightarrow I$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ". La fonction Φ est supposée être très régulière, et admettre la symétrie de révolution au voisinage des pointes. Ces hypothèses sont formulées de la manière suivante

F 1 : Il existe $\Phi_0 > 0$ tel que $\Phi(\varphi, \nu) > \Phi_0 \quad \forall (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1]$,

F 2 : Il existe $\nu_0 \in]0; 1[$ tel que $\partial_\varphi \Phi(\varphi, \nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_0$,

F 3 : $(\phi_{S^2}^* \Phi) \in C^\infty(S^2)$.

Définition du domaine normalisé On introduit également un ensemble de notations relatives au domaine "après changement d'échelle" dans lequel sera défini le champ proche. Tout d'abord rappelons la définition du changement d'échelle pour ce chapitre

$$\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \phi_{\text{el}}^{-1} \circ \Xi^\varepsilon \circ \phi_{\text{sp}}(R, \varphi, \eta) = (\varepsilon R, \varphi, \eta)$$

$$\Xi^{\varepsilon, -1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2 \quad \text{tel que} \quad \phi_{\text{sp}}^{-1} \circ \Xi^{\varepsilon, -1} \circ \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) = (r/\varepsilon, \varphi, \nu)$$

Le domaine normalisé sera en effet un sous-domaine de $\mathbb{R}_+ \times S^2$ dans lequel les coordonnées seront notées (R, φ, η) définie par le paramétrage $(R, \varphi, \eta) \mapsto (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta))$. Nous définirons alors le fil mis à l'échelle Γ_N comme l'image par Ξ^ε du fil Γ_ε et le domaine normalisé Ω_N sera son extérieur

$$\Gamma_N := \left\{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R = \Phi(\varphi, \eta) \right\} = \Xi^\varepsilon(\Gamma_\varepsilon),$$

$$\Omega_N := \left\{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R > \Phi(\varphi, \eta) \right\}.$$

7.1.2 Problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la solution de l'équation de Helmholtz posée dans Ω_ε avec condition de Dirichlet homogène. Nous noterons u^ε la solution du problème. Comme nous aurons recours à une formulation variationnelle, nous introduisons un espace prenant en compte la condition aux limites de Dirichlet,

$$H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon) := \left\{ v \in H^1(\Omega_\varepsilon) \mid v|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \right\}.$$

La source sera une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact tel que $\text{supp } f \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. Sur Γ_ε nous imposerons une condition de Dirichlet homogène et sur Γ nous imposerons une condition de radiation de Sommerfeld $\lim_{r \rightarrow \infty} r(\partial_r u^\varepsilon - ik u^\varepsilon) = 0$. Ces deux conditions de bord seront posées respectivement dans $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ et s'écriront

$$u_{|\Gamma_\varepsilon}^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Dans cette expression l'opérateur T_r est l'opérateur de Dirichlet-to-Neumann que nous avons utilisé au chapitre 6 et défini en coordonnées sphériques par l'équation (6.B.1). Notre problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ se formule finalement de la manière suivante,

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \bar{\omega}^2 u^\varepsilon = -f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon_{|\Gamma_\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_r} + T_r u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

On peut associer à ce problème une forme bilinéaire continue, ce qui conduit à reformuler $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ variationnellement.

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1_{0,\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon) \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) &= \int_{\Omega_\varepsilon} f \bar{v}, \quad \forall v \in H^1_{0,\Gamma_\varepsilon}(\Omega_\varepsilon), \\ \text{avec } a_\varepsilon(u, v) &:= \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \bar{\omega}^2 \int_{\Omega_\varepsilon} u \bar{v} + \int_{\Gamma} \bar{v} T_r u, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_\varepsilon). \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Selon des résultats standard [29, 91] cette formulation variationnelle est bien posée. En effet la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ vérifie une condition inf-sup. Nous démontrerons que cette condition est satisfaite de manière uniforme par rapport à ε .

Le but que nous poursuivrons dans ce chapitre est de dériver un développement asymptotique par rapport à ε de l'unique solution u^ε du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$. Dans les chapitres précédents, nous avons réussi à chaque fois à atteindre ce but en obtenant un développement régulier, c'est à dire un développement dans lequel seules les fonctions de jauge dépendent de ε , cf (1.2.7) §1.2.3. Dans ce chapitre nous obtenons seulement une série asymptotique de la forme

$$u^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_n \varepsilon^n u_n^\varepsilon \quad \text{dans } H^1(\omega), \quad \forall \omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star.$$

Les u_n^ε dépendront de ε . Par contre ces termes auront la vertu d'être "plus simple" que u^ε lui-même. Par exemple le terme u_0^ε d'ordre 0 sera la somme du champ limite u^0 (solution du problème sans fil) défini par (6.3.16) et d'un champ rayonné par une répartition linéique de points sources situés sur le fil limite I .

Définition des opérateurs associés au problème de Helmholtz Nous reprendrons la même définition pour les opérateurs A et C qu'au chapitre 6. Quand à l'opérateur de bord B , puisqu'il s'agit de la trace sur Γ_ε , sa définition est bien plus simple qu'au chapitre précédent. On pose donc

$$A u = (\xi^2(r) - \nu^2)(\Delta + \bar{\omega}^2) u, \quad B u = u_{|\Gamma_\varepsilon}, \quad C u = \frac{\partial u}{\partial n_r} + T_r u.$$

Avec ces définitions nous avons déjà vérifié au chapitre 6 que l'opérateur A admet la forme requise par (2.1.3), et il est clair qu'il en va de même pour B dans le cas présent. Par ailleurs au chapitre 6 nous avons également vu qu'avec ces définitions les hypothèses **Hi, i=0...6** sont vérifiées. En particulier on a ici

$$\begin{aligned} A_0 &= (r \partial_r)^2 + \partial_\varphi^2, & A_2 &= (r \partial_r)^2 + r \partial_r + \Delta_{S^2} + (1 - \nu^2) \bar{\omega}^2, & A_4 &= \bar{\omega}^2, \\ \mathcal{A}_0(\lambda) &= \lambda^2 + \partial_\varphi^2, & \mathcal{A}_2(\lambda) &= \lambda^2 + \lambda + \Delta_{S^2} + (1 - \nu^2) \bar{\omega}^2, & \mathcal{A}_4(\lambda) &= \bar{\omega}^2 \end{aligned}$$

On a par ailleurs $A_n = 0$ pour $n \neq 0, 2, 4$. Rappelons qu'avec cette définition les exposants singuliers associés à la partie dominante A_0 sont tous situés sur \mathbb{Z} . En d'autres termes $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est méromorphe avec des pôles situés sur \mathbb{Z} . Enfin dans le cas de la condition de Dirichlet, l'opérateur $\Xi_*^{\varepsilon, -1} B \Xi_*^\varepsilon$ est simplement l'opérateur de trace sur Γ_N et se développe donc bien sous la forme (2.1.4).

7.1.3 Stabilité

Pour pouvoir appliquer les résultats du chapitre 2, il convient de vérifier que le problème que nous traitons est stable quand $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire l'hypothèse **H1**. Ceci revient à montrer que pour des données bornées la solution du problème (\mathcal{P}^ε) reste borné.

Condition inf–sup uniforme De même que dans les chapitres précédents, nous commencerons par formuler une condition inf–sup que la forme bilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ satisfait uniformément par rapport à ε . Nous ne donnerons pas la preuve du résultat suivant. En effet d'après le lemme 6.3.1 l'espace $H_\star^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ sur un voisinage de } I\}$ est dense dans $H^1(\Omega)$, et par ailleurs l'opérateur de DtN T_Γ vérifie l'identité (6.B.2). Par conséquent on peut reprendre la preuve de la proposition 3.1.1 mot pour mot sans changer une seule ligne. La seule différence ici réside dans la dimension du problème (3 au lieu de 2) qui nécessitait de démontrer les deux résultats que nous venons d'évoquer.

Proposition 7.1.1.

Pour la forme sesquilinéaire $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ définie par (7.1.3), il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sup_{w \in H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)} \frac{a_\varepsilon(v, w)}{\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \quad \forall v \in H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Reformulation de la stabilité Pour pouvoir vérifier l'hypothèse **H3** nous devons reformuler le résultat de la proposition précédente. Dans cette reformulation, nous aurons recours à une norme à poids. La définition des espaces à poids pour le champ lointain passe par la paramétrisation $\Psi := \phi_{\text{sp}} \circ \phi_{\text{el}}^{-1} : \mathbb{R}^3 \setminus I \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2$. Notons $\Psi_* u = u \circ \Psi^{-1}$. Étant donné un ouvert $\mathcal{O} \subset \Omega$ ces espaces sont définis par

$$\mathcal{V}_\alpha^k(\mathcal{O}) := \left\{ v \in L_{\text{loc}}^2(\mathcal{O} \setminus I) \mid \|v\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\mathcal{O})}^2 := \sum_{\beta + |\gamma| \leq k} \int_{\Psi(\mathcal{O})} \left| (r \partial_r)^\beta \nabla_\sigma^\gamma (\Psi_* v) \right|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\sigma}{r} < \infty \right\}.$$

Ci-dessus ∇_σ^γ désigne la dérivée covariante sur S^2 d'ordre γ . Pour reformuler la stabilité nous procédons en deux étapes comme au chapitre 3. D'abord nous démontrons un résultat ne valant que pour les fonctions s'annulant sur Γ_ε .

Lemme 7.1.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \|A \cdot v\|_{\mathcal{V}_0^0(\Omega_\varepsilon)} + \|C \cdot v\|_{L^2(\Gamma)} \right\} \quad \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \cap H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Considérons un $v \in H^2(\Omega_\varepsilon)$, et choisissons un $w \in H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ arbitraire mais tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$. En appliquant la formule de Green sur l'expression de $a_\varepsilon(v, w)$ fournie par (7.1.3) on obtient l'existence d'une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que

$$|a_\varepsilon(v, w)| \leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta v + \varpi^2 v) \bar{w} - \int_\Gamma \left(\frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right) \bar{w} \right| \leq \|\Delta v + \varpi^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \kappa \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)}$$

Cette constante κ est reliée à la continuité de la trace de $H^1(\Omega)$ sur $H^{1/2}(\Gamma)$. Prenons ensuite le sup sur les $w \in H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ tel que $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = 1$ et appliquons la condition inf–sup uniforme. On obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \|\Delta v + \varpi^2 v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} + \kappa \left\| \frac{\partial v}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma v \right\|_{L^2(\Gamma)} \quad (7.1.4)$$

En comparant les expressions en coordonnées ellipsoïdales de $\| \cdot \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}$ obtenue par (6.1.8) et de $\| \cdot \|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)}$ rappelée ci-dessus, on constate l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| \Delta v + \omega v \|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} = \left\| \frac{A \cdot v}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \| A \cdot v \|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} \quad \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon).$$

On a utilisé la minoration $\xi^2(r) - \nu^2 \geq r^2$. En injectant cette estimation dans (7.1.4) ceci permet de conclure. ■

À présent nous utilisons le lemme ci-dessus pour proposer un résultat de stabilité valable pour tout élément de $H^2(\Omega_\varepsilon)$, y compris les fonctions non nulle sur Γ_ε . La proposition suivante permet par ailleurs de vérifier l'hypothèse **H1** du chapitre 2.

Proposition 7.1.2.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| v \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left\{ \| A \cdot v \|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} + \| \Xi_*^{\varepsilon, -1} v \|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \| C \cdot v \|_{L^2(\Gamma)} \right\} \quad \forall v \in H^2(\Omega_\varepsilon), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

On peut reprendre presque dans son intégralité la preuve du lemme 3.1.2 en se servant du lemme 7.1.1. Il y a seulement une chose dont nous devons nous assurer pour pouvoir reprendre cette démonstration. Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}_+ \times S^2$ un ouvert borné contenant le fil normalisé c'est-à-dire tel que $\mathbb{R}_+ \times S^2 \setminus \Omega_N \subset \mathcal{O}$. Nous devons montrer qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| \Xi_*^\varepsilon u \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \| u \|_{H^1(\Omega_N)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega_N), \quad \text{supp } u \subset \mathcal{O}. \quad (7.1.5)$$

Cette identité avait été appliquée dans la preuve du lemme 3.1.2 aux relèvements " g^ε ". Il faut prendre garde ici au fait que Ω_N est un sous domaine de $\mathbb{R}_+ \times S^2$. Rappelons que le tenseur métrique sur $\mathbb{R}_+ \times S^2$ est donné par $dR \otimes dR + (1 - \eta^2) d\varphi \otimes d\varphi + (1 - \eta^2)^{-1} d\eta \otimes d\eta$. Ainsi la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega_N)}$ admet pour expression

$$\| u \|_{H^1(\Omega_N)}^2 = \int_{\Omega_N} |u|^2 + |\partial_R u|^2 + \frac{1}{1 - \eta^2} |\partial_\varphi u|^2 + (1 - \eta^2) |\partial_\eta u|^2 dR d\varphi d\eta \quad (7.1.6)$$

En comparant cette norme avec la norme $\| \cdot \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ dont l'expression découle des identités (6.1.8) et (6.2.3), on constate que l'inégalité (7.1.5) est bien vérifiée. ■

7.1.4 Écriture des problèmes récurrents

Nous avons à présent vérifié toutes les hypothèses nécessaires pour pouvoir se placer dans le cadre de l'étude du chapitre 2. Nous posons donc les problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ destinés à définir les termes u_n^ε et U_n^ε du développement. Dans ces problèmes interviennent les $\ell_p(\cdot)$ et $L_p(\cdot)$ dont l'expression est donnée par (2.7.6) et dépend uniquement de la partie principale A_0 . Comme dans le présent chapitre la partie principale est la même qu'au chapitre 6, on peut réutiliser l'expression des $\ell_p(\cdot)$ et $L_p(\cdot)$ que nous avons donnée, et on a donc

$$\begin{aligned} \ell_p(u) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda \\ \ell_0(u) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_0} \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_0} \lambda \mathfrak{M}\{u \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

On a les mêmes formules pour les $L_p(\cdot)$ exprimées dans les coordonnées R, φ, η en changeant le sens des intégrales de Cauchy

$$\begin{aligned} L_p(U) &= \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\odot p} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2p} \frac{P_p + P_{-p}}{2i\pi} \int_{\odot p} (\lambda - p) \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) d\lambda \\ L_0(U) &= \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\odot 0} \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) d\lambda + \ln(r) \frac{P_0}{2i\pi} \int_{\odot 0} \lambda \mathfrak{M}\{U \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

À nouveau, comme la partie principale A_0 est la même qu'au chapitre 3 et 6, les équations de raccord peuvent être réduites de la même manière. On peut donc reprendre les équations (3.2.6) qui restent valables dans le cas présent. Les problèmes récurrents qui définiront les termes u_n^ε et U_n^ε s'écrivent par conséquent

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ Au = -\delta_0^n (\xi^2(r) - \nu^2) f & \text{dans } \Omega_\star, \\ Cu = 0 & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_n^\varepsilon) \begin{cases} \text{Trouver } U \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 U = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_N, \\ U = 0 & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ell_{-p}(u) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(U) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\ \ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U) \end{cases}$$

Dans le problème ci-dessus l'inconnue est le couple (u, U) et les couples $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon) \dots (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ sont supposés déjà construits. Dans la suite, après avoir construit les profils en vue d'étudier les problèmes récurrents, nous allons voir que $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ est mal posé. Nous ne pourrions donc pas définir le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ comme unique solution de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Nous introduirons donc une perturbation dans l'équation de raccord $\ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U)$ qui rendra ce problème à nouveau bien posé. Nous définirons alors le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ comme l'unique solution du problème régularisé (et donc pas solution du problème ci-dessus).

7.2 Construction des profils en champ proche et lointain

Cette section sera consacrée à la définition des profils de champ proche et lointain. Nous réutiliserons en grande partie les techniques déjà mises en oeuvre dans les chapitres précédents, mais en prenant garde à ce que la condition aux limites sur Γ_ε a changé.

Définition des profils en champ lointain

Comme la différence entre ce chapitre et le chapitre précédent réside dans la condition aux limites sur Γ_ε , et que cette même condition aux limites n'intervient pas dans la définition des profils en champ lointain, la définition de ces derniers sera la même qu'au chapitre 6. Dans ce chapitre les profils $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ sont donc définis au moyen de la proposition 6.5.1 si $p > 0$ et au moyen de la proposition 6.5.2 si $p = 0$.

Définition des profils en champ proche

Ceux-ci seront définis avec les mêmes techniques qu'au chapitre 6 mais cette fois-ci apparaîtra une différence dans la condition sur le bord Γ_N . Commençons par rappeler la définition des espaces à poids en champs proche pour ce chapitre.

$$\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N) = \left\{ V \in L_{loc}^2(\Omega_N) \text{ tel que } \|V\|_{\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)}^2 = \sum_{\beta+\gamma \leq k} \int_{\Omega_N} |(R\partial_R)^\beta \nabla_\sigma^\gamma V|^2 R^{-2\alpha} \frac{dR d\sigma}{R} < +\infty \right\}$$

Nous utiliserons les notations permettant de raisonner dans Ω_N "par tranche" que nous avons introduites au §6.6.1 et au §6.6.2. Rappelons que le lemme 6.6.1 donnait des informations sur la régularité des $\hat{V}(\eta)$ lorsque $\hat{V} \in \mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)$. Par ailleurs la proposition 6.6.1 fournissait une pseudo-réciproque. Cette proposition faisait intervenir la condition de Neumann. Nous énonçons un résultat semblable dans le cas de la condition de Dirichlet

Proposition 7.2.1.

Soit $k \geq 2$. Étant donnés $g \in \mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)$ et $h \in H^k(\Gamma_N)$, soit $W(\zeta) \in \mathcal{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\zeta))$ une famille indexée par $\zeta \in [-1, 1]$ satisfaisant pour tout $\zeta \neq \pm 1$,

$$\Delta_\perp W(\zeta) = \hat{g}(\zeta) \text{ dans } \hat{\Omega}(\zeta) \quad \text{et} \quad W(\zeta) = \hat{h}(\zeta) \text{ sur } \hat{\Gamma}(\zeta)$$

Alors il existe une (unique) fonction $V \in \mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)$ telle que $\hat{V}(\zeta) = W(\zeta)$ pour tout $\zeta \in [-1, 1]$. De plus il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de g et h telle que

$$\|V\|_{\mathcal{W}_{1/2}^k(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|g\|_{\mathcal{W}_{-5/2}^k(\Omega_N)} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right).$$

Nous ne démontrerons pas ce résultat, car la preuve est vraiment très proche de celle de la proposition 6.6.1. À l'aide de cette proposition nous démontrons maintenant un résultat intermédiaire qui nous permettra notamment de définir les profils en champ proche.

Proposition 7.2.2.

Soient $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$ et $g \in \mathcal{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ tel que g admet un développement asymptotique radial au voisinage de l'infini. Il existe un unique $V \in \mathcal{W}_\beta^\infty(\Omega_N)$ avec $\beta = \max(\alpha, 1/2)$ tel que

$$\begin{cases} A_0 V = R^2 g & \text{dans } \Omega_N, \\ V = h & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \quad \begin{cases} d^\circ L_0(V) = 0 \\ L_p(V) = 0, \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Preuve :

Cette preuve consiste à mixer les arguments de la proposition 3.2.5 pour gérer la condition aux limites de Dirichlet avec les arguments de la proposition 6.7.3 pour gérer l'aspect tridimensionnel du problème.

Unicité Supposons que $V \in \mathscr{W}_\beta^\infty(\Omega_N)$ soit solution du problème de l'énoncé avec $g = 0$ et $h = 0$. Quitte à prendre un β plus grand, on peut supposer $\beta = q + 1/2$ avec $q \in \mathbb{N}$. Étant donné que $L_p(V) = 0$ pour tout $p \geq 1$ et $A_0 V = 0$ dans Ω_N , on a déjà que $V \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. Reprenant les notations de la section 6.6, nous allons montrer que $\hat{V}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. Choisissons un $\eta \in]-1, +1[$ arbitraire. La fonction $\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta))$ et satisfait

$$\Delta_\perp \hat{V}(\eta) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta), \quad \hat{V}(\eta) = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta) \quad \text{et} \quad d^\circ \hat{L}_0(\hat{V}(\eta)) = 0 \quad (7.2.1)$$

Avec la condition à l'infini, $d^\circ \hat{L}_0(\hat{V}(\eta)) = 0$, on en déduit que $\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. D'après la partie unicité de la proposition 3.2.1, on en tire que $\hat{V}(\eta) = 0$.

Existence Nous allons construire $\hat{V}(\eta)$ pour chaque $\eta \in]-1, +1[$. On procède comme auparavant en décomposant le second membre en deux parties l'une suffisamment décroissante, et l'autre qui se met sous la forme d'un développement fini. Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $g \in \mathscr{W}_{\alpha-2}^\infty(\Omega_N)$ avec $\alpha > 1/2$. Il existe donc une fonction $g'' \in \mathscr{W}_{-5/2}^\infty(\Omega_N)$ telle que g se décompose donc sous la forme

$$g = g'' + \sum_{|\operatorname{Re}\{p_j\}+2| \leq \alpha} R^{p_j} g_j = g'' + g' \quad \text{avec} \quad g_j \in \mathbb{P}_{\log}.$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.2.5, on construit une fonction $V' \in \mathscr{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant $A_0 V' = R^2 g'$ à l'aide de la transformation de Mellin. On considère un contour γ entourant les pôles de $\mathfrak{M}\{R^2 g'\}(\lambda)$ qui sont en nombre fini comme sur la Fig.24, et on pose

$$V' = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{R^2 g' \mathbf{1}_{R>1}\}(\lambda) R^\lambda d\lambda. \quad (7.2.2)$$

Avec cette définition et celle des $L_p(\cdot)$ donnée par (2.7.6), on a $L_p(V) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $g'' \in \mathscr{W}_{-5/2}^\infty(\Omega_N)$ alors d'après le lemme 6.6.1 on a $\hat{g}''(\eta) \in \mathscr{W}_{-5/2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta)) \subset \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ pour tout $\eta \neq \pm 1$. À l'aide de la proposition 3.2.1 on définit $\hat{V}''(\eta)$ comme l'unique élément de $\mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$ satisfaisant

$$\Delta_\perp \hat{V}''(\eta) = \hat{g}''(\eta) \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta), \quad \text{et} \quad \hat{V}''(\eta) = \hat{h}''(\eta) := -\hat{V}'(\eta) + \hat{h}(\eta) \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta).$$

Ceci nous amène donc à définir

$$\hat{V}(\eta) = \hat{V}'(\eta) + \hat{V}''(\eta) \quad \text{pour tout } \eta \in]-1, +1[.$$

Cette définition induit une fonction $V(R, \varphi, \eta)$ sur la régularité de laquelle nous devons nous interroger, particulièrement pour $\eta = \pm 1$. D'après la définition (7.2.2) on a $V' \in \mathscr{W}_{\alpha+1/2}^\infty(\Omega_N)$. Il suffit donc de démontrer que $\hat{V}''(\eta)$ peut être associé à une fonction $V'' \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. On obtient ceci en utilisant la proposition 7.2.1. ■

Nous énonçons maintenant des résultats d'existence-unicité pour les profils en champ proche. Nous donnons la preuve complète, même si la démonstration de ces résultats ressemble beaucoup à celle du lemme 6.6.2. Ceci permettra notamment de relever les endroits de cette démonstration où intervient la condition aux limites.

Lemme 7.2.1.

Étant donné un entier $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et une fonction $a \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $A_0 R^p a(\sigma) = 0$, il existe une unique fonction $\mathfrak{S}_p\{a\}$ appelée profil en champs proche d'ordre p associé à $a(\sigma)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{S}_p\{a\} \in \mathscr{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N) \text{ telle que} \\ A_0 \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ \mathfrak{S}_p\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} d^\circ L_0(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0 \\ L_q(\mathfrak{S}_p\{a\}) = 0, \quad q \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \\ L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a. \end{array} \right.$$

Preuve :

Unicité : Considérons une fonction $V \in \mathscr{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant le problème homogène associé et montrons qu'elle est nulle. Étant donné que $L_p(V) = 0$ pour tout $p > 0$, on a déjà $V \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. À présent nous allons montrer que $\hat{V}(\eta) = 0$ pour tout η . Choisissons un $\eta \in]-1, +1[$ arbitraire. On sait d'après le lemme 6.6.1, que $\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\hat{\Omega}(\eta))$ et $d^\circ \hat{L}(\hat{V}(\eta)) = d^\circ L_0(V) = 0$. On obtient donc $\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta))$. En résumé cette fonction satisfait

$$\hat{V}(\eta) \in \mathscr{W}_{\log}(\hat{\Omega}(\eta)), \quad \Delta_\perp \hat{V}(\eta) = 0 \text{ dans } \hat{\Omega}(\eta) \quad \text{et} \quad \hat{V}(\eta) = 0 \text{ sur } \hat{\Gamma}(\eta).$$

Par application directe de la proposition 3.2.1, on en tire que $\hat{V}(\eta) = 0$ pour tout $\eta \in]-1, +1[$. D'où finalement $V = 0$.

Existence : De même que dans la preuve du lemme 7.2.1, nous nous débarrassons de la condition $L_p(\mathfrak{S}_p\{a\}) = a$ par une résolution semi-analytique. On introduit tout d'abord la fonction moyenne angulaire $\Phi_* : S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par

$$\Phi_*(\phi_{S^2}(\varphi, \eta)) := \int_0^{2\pi} \Phi(\alpha, \eta) d\alpha, \quad \text{d'où } \Phi_* \in \mathcal{C}^\infty(S^2) \text{ et } \partial_\varphi \Phi_* = 0$$

L'équation du bord est donc $\hat{\Gamma}(\eta) : \rho = \Phi_*(\eta)$ dès que $|\eta| > \nu_0$. À présent considérons la fonction

$$V'(\mathbf{R}, \boldsymbol{\sigma}) := \left[\left(\frac{\mathbf{R}}{\Phi_*(\boldsymbol{\sigma})} \right)^p - \left(\frac{\mathbf{R}}{\Phi_*(\boldsymbol{\sigma})} \right)^{-p} \right] \Phi_*^p(\boldsymbol{\sigma}) a(\boldsymbol{\sigma})$$

Cette fonction est solution de l'équation de Laplace dans chaque tranche et admet le bon comportement au voisinage de l'infini puisque $V' \in \mathscr{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ et

$$A_0 V' = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad L_p(V') = a, \quad L_q(V') = 0, \quad q \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket \quad \text{et} \quad d^\circ L_0(V') = 0.$$

En revanche elle ne vérifie pas *a priori* la condition de Dirichlet au bord $V' = 0$ sur Γ_N . Elle vérifie cependant cette équation au voisinage des pointes $\hat{V}'(\eta) = 0$ sur $\hat{\Gamma}(\eta)$ pour $|\eta| > \nu_0$. Pour compléter la preuve d'existence, il faut construire une fonction $V'' \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$A_0 V'' = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad V'' = -V' \text{ sur } \Gamma_N \quad \text{et} \quad d^\circ L_0(V'') = 0. \quad (7.2.3)$$

On obtient l'existence de V'' grâce à la proposition 7.2.2. Pour conclure il reste simplement à poser $\mathfrak{S}_p\{a\} = V' + V''$. ■

Comme au chapitre 3, mais à la différence des chapitres 1 et 6, on peut également construire des profils $\mathfrak{S}_0\{a\}$ d'ordre 0. Le procédé de construction est le même que dans la démonstration ci-dessus, nous nous contentons donc d'énoncer le résultat d'existence-unicité correspondant.

Lemme 7.2.2.

Étant donnée une fonction $a \in \mathbb{P}_{\log}$ telle que $A_0 a(\mathbf{R}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$, il existe un unique $\mathfrak{S}_0\{a\} \in \mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$A_0 \mathfrak{S}_0\{a\} = 0 \text{ dans } \Omega_N, \quad \mathfrak{S}_0\{a\} = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \quad \text{et} \quad d^\circ \{L_0(\mathfrak{S}_0\{a\}) - a\} = 0.$$

Signalons que, grâce à la condition aux limites de Dirichlet, les profils \mathfrak{S}_0 vérifient une propriété algébrique assez intéressante. Soit $a \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ telle que $\partial_\varphi a = 0$. Alors

$$\mathfrak{S}_0\{a \ln R\} = a \cdot \mathfrak{S}_0\{\ln R\} \quad (7.2.4)$$

Rappelons que cette propriété n'est pas vérifiée dans le cas d'une condition aux limites de Neumann. Ici $\ln(R)$ doit être considéré comme un élément de \mathbb{P}_{\log} c'est-à-dire dépendant de R, φ et η et vérifiant $A_0 \ln(R) = 0$. Notons également que par construction $L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln R\}) \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ et qu'il s'agit d'une fonction indépendante de φ , ne dépendant que de η . Nous lui attribuons une notation particulière

$$\mathfrak{C}_0 := -L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln R\}).$$

Puisque la fonction \mathfrak{C}_0 ne dépend pas de φ d'après l'expression de L_0 donnée par (7.1.8), on peut considérer une fonction c définie sur $[-1, +1]$ telle que $c(\eta) = \mathfrak{C}_0(\phi_{S^2}(\varphi, \eta))$. Des vérifications de routine montrent que $\mathfrak{C}_0 \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ entraîne $c \in \mathcal{C}^0([-1, +1]) \cap \mathcal{C}^\infty(]-1, +1[)$. Attention cependant $c \notin \mathcal{C}^\infty([-1, 1])$ elle n'est pas \mathcal{C}^∞ en ± 1 en tant que fonction d'une variable. Pour être précis c appartient à l'espace

$$\mathbb{E}^\infty([-1, 1]) := \{ v \in \mathcal{C}^0([-1, 1]) \mid (\phi_{S^2}^* v) \in \mathcal{C}^\infty(S^2) \}$$

Cet espace vérifie $\mathcal{C}^\infty(]-1, 1[) \subset \mathbb{E}^\infty([-1, 1]) \subset \mathcal{C}^\infty(]-1, 1[)$ et les deux inclusions sont strictes. L'espace $\mathbb{E}^\infty([-1, 1])$ peut être identifié à l'ensemble des fonctions $v \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ telles que $\partial_\varphi v = 0$. En pratique nous confondrons \mathfrak{C}_0 avec la fonction c , si bien que nous écrirons " $\mathfrak{C}_0(\eta)$ ". Nous allons faire référence à \mathfrak{C}_0 de nombreuses fois par la suite, et il sera également commode de le voir comme un opérateur $\mathfrak{C}_0 \cdot a$ vérifiant simplement $(\mathfrak{C}_0 \cdot a)(\sigma) = \mathfrak{C}_0(\sigma) a(\sigma)$. Enfin nous posons une notation que nous n'utiliserons qu'au prochain chapitre

$$\mathfrak{S}_e := \mathfrak{S}_0\{\ln R\} \quad (7.2.5)$$

7.3 À propos de l'unicité des solutions des problèmes récurrents

Dans cette section nous nous interrogerons au sujet de l'unicité d'un couple $(v^\varepsilon, V^\varepsilon)$ solution de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Nous allons tenter d'appliquer la même démarche que dans les chapitres précédents. Nous rencontrons un problème lié aux conditions de raccord. Ceci nous empêchera de conclure tout de suite et nous obligera à étudier en détail les profils $\mathfrak{s}_0\{a\}$ et $\mathfrak{S}_0\{a\}$. Nous terminerons la section en expliquant pourquoi il faut renoncer à démontrer l'unicité.

Ébauche d'une preuve d'unicité Entamons une démarche semblable à celle que nous avons eue aux chapitres 3 et 6. Nous partons d'abord d'un couple (u, U) solution du problème homogène associé à $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ et nous essayons de montrer que nécessairement $(u, U) = (0, 0)$ (j'annonce tout de suite que nous n'y arriverons pas!). On pose donc les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\ Au = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ Cu = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} U \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 U = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ U = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(u) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U) \\ L_p(U) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{array} \right. \quad (7.3.1)$$

Puisque $\ell_{-p}(u) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ alors $u \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. De même puisque $L_p(U) = 0$ pour tout $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $A_0 U = 0$ alors $U \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. D'après la partie unicité des lemmes 6.5.2 et 7.2.2, on a donc nécessairement

$$u = \mathfrak{s}_0\{\ell_0(u)\} = \mathfrak{s}_0\{\ell_0^{(1)}(u) \ln(r)\} \quad \text{et} \quad U = \mathfrak{S}_0\{L_0(U)\} = \mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(U) \ln(R)\}$$

Ainsi, $(u, U) = (0, 0)$ si et seulement si $(\ell_0^{(1)}(u), L_0^{(1)}(U)) = (0, 0)$. Grâce à la remarque (7.2.4) formulée plus haut sur \mathfrak{S}_0 on a $\mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(U) \ln(R)\} = L_0^{(1)}(U) \mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}$ d'où il sort

$$L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(U) \ln(R)\}) = L_0^{(1)}(U) L_0^{(0)}(\mathfrak{S}_0\{\ln(R)\}) = -\mathfrak{C}_0 \cdot L_0^{(1)}(U).$$

On ne peut malheureusement pas formuler une telle identité pour $\mathfrak{s}_0\{\ell_0^{(1)}(u) \ln(r)\}$. Ceci nous amène donc à introduire un opérateur comparable à \mathfrak{C}_0 mais pour le champ lointain.

$$\mathcal{L} : \mathbb{E}^\infty([-1, 1]) \rightarrow \mathbb{E}^\infty([-1, 1]) \quad \text{défini par} \quad \mathcal{L} \cdot a := \ell_0^{(0)}(\mathfrak{s}_0\{a(\nu) \ln(r)\}) \quad (7.3.2)$$

Par la suite nous appellerons \mathcal{L} opérateur de raccord. Cette définition implique notamment que l'opérateur \mathcal{L} ne dépend pas de la fonction Φ qui décrit la surface du fil, puisque les profils $\mathfrak{s}_0\{a\}$ n'en dépendent pas non plus. Dans cette définition nous considérons les fonctions $a \in \mathbb{E}^\infty([-1, 1])$ comme des fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ telles que $\partial_\varphi a = 0$. Pour bien préciser le sens de cette définition notons que par construction on a

$$\ell_0(\mathfrak{s}_0\{a(\nu) \ln(r)\}) = a(\nu) \ln(r) + (\mathcal{L} \cdot a)(\nu). \quad (7.3.3)$$

Pour revenir à la question de l'unicité, le système (7.3.1) et en particulier l'équation de raccord $\ell_0(u) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U)$ entraînent que les équations suivantes sont satisfaites

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathcal{L} & \ln(\varepsilon) + \mathfrak{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(u) \\ L_0^{(1)}(U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7.3.4)$$

Ce système d'équations est un peu le pendant, pour le problème de ce chapitre, du système (3.2.10) que nous avons rencontré en deux dimensions. Cependant ici il ne s'agit pas d'un simple système 2×2 puisque $\ell_0^{(1)}(u)$ et $L_0^{(1)}(U)$ sont bien des fonctions de la variable ν . Avec les équations ci-dessus $(\ell_0^{(1)}(u), L_0^{(1)}(U)) = (0, 0)$ si et seulement si l'équation

$$\left(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathfrak{C}_0 \right) \ell_0^{(1)}(u) = 0 \quad (7.3.5)$$

n'admet que $\ell_0^{(1)}(u) = 0$ comme solution. La question se pose donc de savoir si $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathfrak{C}_0$ est inversible. Il nous faut donc plus d'informations sur l'opérateur de raccord \mathcal{L} . Ainsi nous devons étudier en détail $\mathfrak{s}_0\{\ln(r)\}$.

7.3.1 Étude des profils de champ lointain d'ordre zéro

Comme nous venons de le voir les profils $\mathfrak{s}_0\{a\}$ jouent un rôle particulier dans l'analyse de ce chapitre. Nous allons en donner une expression explicite. Rappelons tout d'abord que ceux-ci sont construits d'après le lemme 6.5.2 pour des $a \in \mathbb{P}_{\log}$ tels que $A_0 a(r, \phi_{S^2}(\varphi, \nu)) = 0$. Étant donné l'expression de A_0 , les a qui conviennent sont donc de la forme

$$a(r, \phi_{S^2}(\varphi, \nu)) = a^{(0)}(\nu) + a^{(1)}(\nu) \ln r, \quad a^{(0)}, a^{(1)} \in \mathbb{E}^\infty([-1, 1]). \quad (7.3.6)$$

En particulier a est indépendant de φ . Comme dans la suite nous allons rencontrer souvent des fonctions dépendant seulement de ν définies sur le segment $[-1, +1]$, nous introduisons une notation spécialement pour celui-ci

$$J := [-1, +1]$$

Considérons une fonction $b \in \mathbb{E}^\infty(J)$ arbitraire. Dans un souci d'économie de notations nous confondons parfois la fonction $\tilde{b} : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\tilde{b}(\phi_{\text{el}}(0, 0, \nu)) := b(\nu)$ avec b elle-même. D'après les relations 6.5.5 rappelons que $\mathfrak{s}_0\{a\} = \mathfrak{s}_0\{a^{(1)}(\nu) \ln R\}$.

La proposition suivante donne une expression du profil $\mathfrak{s}_0\{a(\nu) \ln(r)\}$ en fonction du noyau de Green du problème \mathcal{P}^ε . On peut l'interpréter intuitivement. Elle dit que $\mathfrak{s}_0\{a(\nu) \ln(r)\}$ est le champ rayonné par une répartition linéique de points source distribués sur I suivant la fonction $a(\nu)$.

Proposition 7.3.1.

$$\mathfrak{s}_0\{a(\nu) \ln(r)\}(\mathbf{x}) = - \int_I (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}', \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_\star, \quad \forall a \in \mathbb{E}^\infty(J).$$

Preuve :

La preuve consiste à vérifier que l'intégrale dans le second membre de l'énoncé de cette proposition vérifie bien les équations du lemme 6.5.2. Le temps de cette preuve nous noterons $\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\}(\mathbf{x})$ cette intégrale. Clairement on $\Delta \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} + \omega^2 \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} = 0$ au sens des distributions dans $\Omega \setminus I$ et $C \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} = 0$ sur Γ car $\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\}$ est sortante. Comme $A = (\xi^2(r) - \nu^2)(\Delta + \omega^2)$ et $\xi^2(r) - \nu^2 \neq 0$ dans $\Omega \setminus I$, on a donc $A \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} = 0$ dans $\Omega \setminus I$. À présent nous allons vérifier que

$$\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} - a(\nu) \ln(r) \in H^1(\Omega) \tag{7.3.7}$$

En effet si la condition (7.3.7) est vérifiée, puisque $\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\} - a(\nu) \ln(r) \in H^1(\Omega)$ alors $\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\} - \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} \in H^1(\Omega)$ et ceci montre que les équations suivantes sont vérifiées au sens des distributions

$$(\Delta + \omega^2) \left(\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\} - \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\star, \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial}{\partial n_r} + T_r \right) \left(\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\} - \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Par unicité dans H^1 de la solution du problème de Helmholtz dans Ω avec condition d'onde sortante, la condition (7.3.7) entraînera finalement que $\mathfrak{s}_0\{a\} = \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\}$.

Grâce aux théorèmes standard de régularité elliptique, une technique simple et rapide pour montrer que la condition (7.3.7) est satisfaite consiste à prouver que $\Delta(\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} - a(\nu) \ln(r)) \in L^2(\Omega)$. En effet ceci entraînera alors $\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} - a(\nu) \ln(r) \in H_{\text{loc}}^2(\Omega)$. Tout d'abord on peut vérifier facilement que $\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} \in L^2(\Omega)$. Par ailleurs, comme $\tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\}$ est définie comme une convolution avec un noyau de Green de l'équation de Helmholtz, on a

$$\Delta \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} = 2\pi a \delta_I - \omega^2 \tilde{\mathfrak{s}}_0\{a\} \quad \text{où} \quad \langle a \cdot \delta_I, \psi \rangle := \int_I a(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Ci-dessus δ_I est la distribution de Dirac sur le segment I . Il suffit donc de vérifier une identité semblable pour $a(\nu) \ln(r)$. On va montrer que " $\Delta a(\nu) \ln(r) = 2\pi a \delta_I +$ une fonction L^2 ". Ainsi nous allons calculer explicitement $\Delta a(\nu) \ln(r)$ au sens des distributions. Nous allons utiliser l'expression du laplacien en coordonnées ellipsoïdales fournie par la formule (6.3.4). Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ une fonction test. On a donc par définition,

$$\begin{aligned} \langle \Delta a(\nu) \ln(r), \psi \rangle &= \langle a(\nu) \ln(r), \Delta \psi \rangle \\ &= \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega)} a(\nu) \ln(r) \left\{ (r\partial_r)^2 \psi + r^2 [(r\partial_r)^2 + r\partial_r + \partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu] \psi \right\} \frac{dr d\varphi d\nu}{r} \\ &= 2\pi \int_I a(\mathbf{x}') \psi(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' + \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(\Omega)} \left\{ [(r\partial_r)^2 - r\partial_r + \partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu] r^2 a(\nu) \ln(r) \right\} \psi \frac{dr d\varphi d\nu}{r} \\ &= \langle 2\pi a \cdot \delta_I, \psi \rangle + \left\langle \frac{r^2}{r^2 + 1 - \nu^2} \left\{ 3a + [2a + \partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu a] \ln(r) \right\}, \psi \right\rangle \end{aligned}$$

Ci-dessus \langle , \rangle désigne le crochet de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. On vérifie facilement que le second terme dans la dernière égalité ci-dessus est associé à une fonction $L^2(\Omega)$. Il est donc clair que $\Delta a(\nu) \ln(r)$ admet la forme souhaitée. Ceci conclut la preuve. ■

7.3.2 Expression de l'opérateur de raccord

Le résultat de la proposition 7.3.1 est intéressant tout d'abord parce qu'il permet d'explicitier un peu plus les fonctions $\mathfrak{s}_0\{a\}$ qui auparavant étaient définies indirectement comme solutions d'une EDP. Par ailleurs cette formule va nous conduire à une expression explicite de l'opérateur \mathcal{L} ce qui facilitera son étude. Voici un premier résultat qui fournit une nouvelle caractérisation de \mathcal{L} et l'identifie au second terme du développement asymptotique de $\mathfrak{s}_0\{a\}$.

Lemme 7.3.1.

Pour tout $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ on a $\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\} - a(\nu)\ln(r) - (\mathcal{L} \cdot a)(\nu) \in \mathcal{V}_{1/2}^\infty(\Omega)$.

Preuve :

Pour démontrer ce résultat, nous reprendrons le résultat du lemme 2.7.4. Celui-ci fournit une description détaillée du développement asymptotique des fonctions v satisfaisant $Av = 0$. Dans le cas présent nous avons $A\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\} = 0$, le lemme 2.7.4 s'applique donc à $\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\}$, on en tire en particulier que

$$\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\} - \mathfrak{h}_0^0[\ell_0(\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\})] \in \mathcal{V}_{1/2}^\infty(\Omega).$$

On en tire la conclusion puisque d'après (2.7.9) on a $\mathfrak{h}_0^0 = \text{Id}$ et d'après (7.3.3) on a $\ell_0(\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\}) = a(\nu)\ln(r) + (\mathcal{L} \cdot a)(\nu)$. ■

Notons que le résultat ci-dessus implique que si $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ alors $\mathcal{L} \cdot a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$. À présent, comme nous avons une expression explicite de $\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\}$, on peut en tirer une expression explicite de son développement asymptotique, et en particulier de \mathcal{L} .

Proposition 7.3.2.

Pour toute fonction $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ on a $\mathcal{L} \cdot a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ et

$$(\mathcal{L} \cdot a)(\nu) = \int_{-1}^{+1} \frac{a(\nu) - a(\nu')}{2|\nu - \nu'|} d\nu' - \int_{-1}^{+1} a(\nu') \frac{e^{i\omega|\nu - \nu'|} - 1}{2|\nu - \nu'|} d\nu' - a(\nu)\ln(2), \quad \forall \nu \in]-1, +1[.$$

Preuve :

Choisissons un $\nu \in]-1, +1[$ arbitraire. Nous allons vérifier la formule pour ce ν . Étant donné un $r \geq 0$ posons $\mathbf{x}(r, \nu) := \phi_{\text{el}}(r, 0, \nu)$. Notons que $\mathbf{x}(r, \nu)$ se rapproche de I lorsque $r \rightarrow 0$. Tout d'abord utilisons le résultat du lemme 7.3.1. Soit $\chi : \Omega \rightarrow [0, 1]$ une fonction de troncature ne dépendant que de la variable r i.e. $\chi = \chi(r)$. On suppose que χ est une fonction croissante et \mathcal{C}^∞ par rapport à r telle que $\chi(r) = 1$ au voisinage de $r = 0$ et $\text{supp } \chi \subset \Omega$. Posons également $w = \mathfrak{s}_0\{a\ln(r)\} - a\ln(r) - \mathcal{L} \cdot a$. En appliquant la formule (2.C.2) sur χw on obtient

$$\chi(r)w(\mathbf{x}(r, \cdot)) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=1/3} \mathfrak{M}\{\chi w\}(\lambda) r^\lambda d\lambda = \frac{r^{1/3}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}\{\chi w\}(1/3 + i\alpha) r^{i\alpha} d\alpha$$

La dernière intégrale ci-dessus est bien définie d'après la proposition 2.C.1. Grâce au $r^{1/3}$ en facteur de l'intégrale, on en tire donc que $w(\mathbf{x}(r, \nu)) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$. En résumé, à ν fixé, on a

$$\mathfrak{s}_0\{a(\nu)\ln(r)\}(\mathbf{x}(r, \nu)) = a(\nu)\ln(r) + (\mathcal{L} \cdot a)(\nu) + o(1). \quad (7.3.8)$$

Rappelons que $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 quand $r \rightarrow 0$ et dont l'expression importe peu. À présent reprenons la formule fournie par la proposition 7.3.1. Nous la décomposons en trois morceaux qui correspondront aux trois termes de la formule que nous cherchons à établir.

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}_0\{a\ln(r)\}(\mathbf{x}(r, \nu)) &= \int_I \frac{(\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}(r, \nu)) - (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}')}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \\ &\quad - \int_I (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} - 1}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' - (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}(r, \nu)) \int_I \frac{d\mathbf{x}'}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

Rappelons que nous avons posé $\mathbf{x}(r, \nu) := \phi_{\text{el}}(r, 0, \nu)$. Par ailleurs suivant les remarques que nous avons faites auparavant, on a par définition $(\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}(r, \nu)) = a \circ \phi_{\text{el}}^{-1}(\mathbf{x}(r, \nu)) = a(\nu)$. Afin de rendre l'expression ci-dessus encore plus explicite, supposons que $\mathbf{x}' = \phi_{\text{el}}(0, 0, \nu')$ et exprimons $|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|$ en coordonnées ellipsoïdales. On a

$$|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|^2 = r^2(1 - \nu^2) + (\xi(r)\nu - \nu')^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} (\nu - \nu')^2$$

Comme la fonction $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J}) \subset \mathcal{C}^\infty(]-1, +1[)$ les deux premiers termes de (7.3.9) convergent vers une limite finie. En effet d'après le théorème de convergence dominée

$$\int_I \frac{(\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}(r, \nu)) - (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}')}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \frac{a(\nu) - a(\nu')}{2|\nu - \nu'|} d\nu' \quad (7.3.10)$$

$$\int_I (\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} - 1}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} a(\nu') \frac{e^{i\omega|\nu - \nu'|} - 1}{2|\nu - \nu'|} d\nu'$$

On retrouve donc deux des termes qui composent la formule annoncée. Examinons le troisième terme. Nous en calculons cette fois la valeur exacte. Remarquons tout d'abord que comme la fonction a ne dépend que ν , on a $(\phi_{\text{el}}^* a)(\mathbf{x}(r, \nu)) = a \circ \phi_{\text{el}}^{-1}(\mathbf{x}(r, \nu)) = a(\nu)$ pour tout r . Concernant le terme intégral en facteur de a , en notant pour un instant ξ au lieu de $\xi(r) = \sqrt{1 + r^2}$, on a

$$\begin{aligned} - \int_I \frac{d\mathbf{x}'}{2|\mathbf{x}(r, \nu) - \mathbf{x}'|} &= -\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\nu'}{\sqrt{r^2(1 - \nu^2) + (\xi\nu - \nu')^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \xi\nu + \sqrt{r^2(1 - \nu^2) + (1 - \xi\nu)^2}}{-1 - \xi\nu + \sqrt{r^2(1 - \nu^2) + (-1 - \xi\nu)^2}} \right). \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Les termes à l'intérieur du logarithme ci-dessus se simplifient considérablement. En effet remarquons que $(\xi^2 - 1)(1 - \nu^2) + (1 - \xi\nu)^2 = (\xi - \nu)^2$ et de même $(\xi^2 - 1)(1 - \nu^2) + (1 + \xi\nu)^2 = (\xi + \nu)^2$. En remplaçant r^2 par $\xi^2 - 1$ dans la dernière égalité de (7.3.11), on obtient donc

$$-\frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \xi\nu + \sqrt{r^2(1 - \nu^2) + (1 - \xi\nu)^2}}{-1 - \xi\nu + \sqrt{r^2(1 - \nu^2) + (-1 - \xi\nu)^2}} \right) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\xi(r) + 1}{\xi(r) - 1} \right) = \ln \left(\frac{r}{2} \right) + o(r).$$

Signalons un fait curieux sans importance apparente. La valeur du terme logarithmique dans la deuxième égalité ci-dessus intervient également dans l'expression des fonctions de Legendre Q_n de seconde espèce. D'après (7.3.8) la limite de $\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\}(\mathbf{x}(r, \nu)) - a(\nu) \ln(r)$ lorsque $r \rightarrow 0$ est $\mathcal{L} \cdot a$. Or en réunissant les identités (7.3.9), (7.3.10) et (7.3.11) on obtient l'expression de cette limite à ν donné

$$\mathfrak{s}_0\{a \ln(r)\}(\mathbf{x}(r, \nu)) - a(\nu) \ln(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \int_{-1}^{+1} \frac{a(\nu) - a(\nu')}{2|\nu - \nu'|} d\nu' - \int_{-1}^{+1} a(\nu') \frac{e^{i\omega|\nu - \nu'|} - 1}{2|\nu - \nu'|} d\nu' - a(\nu) \ln(2).$$

■

Le but de la présente discussion est de déterminer si l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$ est inversible ou non. Avec le résultat de la proposition (7.3.2), on voit que l'opérateur de raccord \mathcal{L} se décompose en trois

morceaux. On pose donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ en définissant

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0 \cdot a)(\nu) &:= \int_{-1}^{+1} \frac{a(\nu) - a(\nu')}{2|\nu - \nu'|} d\nu' \\ (\mathcal{L}_1 \cdot a)(\nu) &:= \ln(1/2) a(\nu) \\ (\mathcal{L}_2 \cdot a)(\nu) &:= \int_{-1}^{+1} a(\nu') \frac{1 - e^{i\omega|\nu - \nu'|}}{2|\nu - \nu'|} d\nu' \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

Pour étudier ces opérateurs, nous devons choisir un cadre fonctionnel. Rappelons que $a(\nu)$ est supposé ne dépendre que de la seule variable $\nu \in J = [-1, +1]$. Les $\mathcal{L}_i \cdot a$ sont par ailleurs bien définis dès que $a \in \mathcal{C}^\infty(J)$. Ainsi pour cadre fonctionnel nous choisirons un espace de Hilbert qui contient $\mathcal{C}^\infty(J)$. Le choix le plus simple semble être $L^2(J)$ muni de son produit scalaire usuel et de la norme correspondante

$$\langle a, b \rangle_{L^2(J)} = \int_{-1}^{+1} a(\nu) \bar{b}(\nu) d\nu, \quad \|a\|_{L^2(J)}^2 = \langle a, a \rangle_{L^2(J)}$$

Interrogeons-nous sur les \mathcal{L}_i , $i = 1, 2, 3$ en tant qu'opérateurs définis sur $L^2(J)$. Il est clair que $\mathcal{L}_1 \cdot a$ et $\mathcal{L}_2 \cdot a$ sont bien définis et appartiennent à $L^2(J)$ lorsque $a \in L^2(J)$. En revanche il ne semble pas que $\mathcal{L}_0 \cdot a \in L^2(J)$ lorsque $a \in L^2(J)$. Par contre d'après les théorèmes d'injection de Sobolev, cf par exemple [14], il est clair que $\mathcal{L}_0 \cdot a \in L^2(J)$ dès que $a \in H^2(J)$. Ainsi \mathcal{L}_0 étant définie sur un sous-espace dense de $L^2(J)$, considérons-le comme un opérateur non-borné sur $L^2(J)$. Si on note $D(\mathcal{L}_0)$ son domaine de définition, on a donc $H^2(J) \subset D(\mathcal{L}_0) \subset L^2(J)$. Il s'agit par ailleurs d'un opérateur positif. En effet F. Rogier a montré dans sa thèse à l'aide de manipulations algébriques simples que

$$\langle \mathcal{L}_0 \cdot a, b \rangle_{L^2(J)} = \langle a, \mathcal{L}_0 \cdot b \rangle_{L^2(J)} = \iint_{J \times J} \frac{(a(\nu) - a(\nu')) \overline{(b(\nu) - b(\nu'))}}{2|\nu - \nu'|} d\nu d\nu', \quad \forall a, b \in D(\mathcal{L}_0).$$

Ce résultat est également contenu dans [46]. Ceci démontre donc que \mathcal{L}_0 est auto-adjoint. Il admet par conséquent une décomposition spectrale, cf par exemple [102]. Nous allons d'ailleurs exhiber une base hilbertienne qui diagonalise l'opérateur \mathcal{L}_0 ce qui permettra d'obtenir une description précise de celui-ci.

7.3.3 Décomposition spectrale de l'opérateur de raccord

La base de diagonalisation que nous mettons en évidence est la famille des polynômes de Legendre $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que nous avons présentée dans l'annexe 6.A au chapitre précédent. Signalons qu'il s'agit d'une base hilbertienne de $L^2(J)$ puisque pour toute fonction $u \in L^2(J)$ on a

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle P_n, u \rangle_{L^2(J)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}} P_n, \quad \forall u \in L^2(J).$$

la série convergeant au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2(J)}$. Dans cette décomposition intervient le facteur $\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)} = n + 1/2$ parce que les polynômes de Legendre ne sont pas normés au sens de $\|\cdot\|_{L^2(J)}$. Signalons que $u \in E^\infty(J)$ si et seulement si la famille (indexée par n) $(n^k |\langle u, P_n \rangle_{L^2(J)}|)_n$ est bornée quel que soit k .

Le résultat du théorème suivant qui paraît magique en première approche, se comprend bien si l'on sait que les fonctions spéciales intervenant dans la résolution par séparation de variables de l'équation de Laplace en coordonnées ellipsoïdales sont les fonctions de Legendre de première (les P_n) et seconde espèce (les Q_n).

Théorème 7.3.1.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{P_n(\nu) - P_n(\nu')}{2|\nu - \nu'|} d\nu' = \ln\left(\frac{1}{\mu_n}\right) P_n(\nu) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad \ln\left(\frac{1}{\mu_n}\right) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} & \text{si } n > 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

La démonstration de ce résultat est un peu technique, nous renvoyons le lecteur à [46] théorème 1.1. Dans cet énoncé nous avons défini de manière indirecte les nombres μ_n . En utilisant le développement asymptotique bien connu de la série harmonique $\sum_{k=1}^n 1/k$ pour $n \rightarrow \infty$, on voit que cette suite est telle que

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{-\gamma_e}}{n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3n} \leq \mu_n \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1. \quad (7.3.13)$$

Ici γ_e désigne la constante d'Euler. L'inégalité ci-dessus est obtenue facilement à partir de la définition de μ_n en utilisant la technique classique de comparaison série/intégrale. Notons qu'il convient de comprendre le symbole " \sim " au sens précisé au §1.2.3. Le théorème précédent nous donne une décomposition spectrale de l'opérateur \mathcal{L}_0 . Au sens de la convergence en norme $\|\cdot\|_{L^2(I)}$; on a

$$\mathcal{L}_0 \cdot u = \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{\mu_n}\right) \frac{\langle P_n, u \rangle_{L^2(I)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(I)}} P_n, \quad \forall u \in D(\mathcal{L}_0).$$

Vu le comportement de $\ln(\mu_n)$, de cette expression on tire notamment que si $u \in \mathbb{E}^\infty(J)$ alors $\mathcal{L}_0 \cdot u \in \mathbb{E}^\infty(J)$ aussi.

7.3.4 Non-unicité de la solution des problèmes récurrents

Avec l'identité ci-dessus, on constate que l'opérateur \mathcal{L}_0 n'est pas inversible puisque $\ln(1/\mu_0) = 0$. Cependant nous ne nous intéressons pas à \mathcal{L}_0 tout seul mais plutôt à $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$. Avec tout ce que nous savons sur \mathcal{L}_0 est-il possible de déterminer si $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$ est inversible ou injectif? Il semble difficile de récolter plus d'informations sur \mathcal{L} . Par ailleurs, comme \mathcal{C}_0 dépend directement de la géométrie il semble difficile de récolter également des informations sur cet opérateur.

En fait ce que nous savons déjà suggère que l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$ n'est pas injectif en général. En effet supposons un instant que nous nous soyons intéressé à l'équation de Laplace plutôt qu'à l'équation de Helmholtz, avec un fil décrit par l'équation $r = \varepsilon$ i.e. $\Phi = 1$. Notre lecteur devrait pouvoir se convaincre que nous aurions abouti à des équations similaires avec quelques différences, notamment là où intervient la fréquence ω . En particulier on aurait $\mathcal{L}_2 = 0$ et $\mathcal{C}_0 = 0$. L'équation (7.3.5) se ramène alors à

$$\left(\ln\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathcal{L}_0\right) \ell_0^{(1)}(u) = 0 \quad \iff \quad \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\mu_n}\right) \frac{\langle P_n, \ell_0^{(1)}(u) \rangle_{L^2(I)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(I)}} P_n = 0 \quad (7.3.14)$$

On voit que cette équation peut admettre une solution non nulle si ε appartient à l'ensemble de valeurs critiques $\{2\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Or comme $\mu_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, il est faux que : $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a $\varepsilon \notin \{2\mu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Autrement dit quelle que soit la valeur de ε , aussi petite soit-elle, il est toujours envisageable que l'équation (7.3.14) admette une solution non-nulle.

La conclusion de cette discussion est qu'il ne faut pas espérer que le problème $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ admette une solution unique pour tout ε . Ainsi nous renonçons à un tel résultat. À présent nous nous tournons vers la question de l'existence d'une solution à $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$.

7.4 Construction d'une solution approchée pour les problèmes récurrents

À défaut de montrer l'unicité de la solution des problèmes récurrents, nous pourrions tenter d'en construire une solution. Dans cette section nous verrons qu'il n'y a pas non plus en général existence d'un couple solution aux problèmes $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Ce propos sera l'objet du premier paragraphe. Cependant nous proposons dans un deuxième temps d'ajouter une perturbation régularisante aux équations de raccord qui rendra le problème bien posé. Le reste de la section sera donc consacré à proposer une telle régularisation, et à montrer qu'il y a existence d'un couple solution du problème régularisé.

7.4.1 Ébauche de la construction

Dans ce paragraphe nous tentons de construire un couple (u, U) solution de $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$. Nous supposons dans ce paragraphe que les couples $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$ sont déjà connus. Afin de traiter la partie du problème $\mathcal{P}_n^\varepsilon$ liée au terme $-R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon$ apparaissant en second membre, on introduit une fonction $\tilde{W}_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$A_0 \tilde{W}_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon \text{ dans } \Omega_N, \quad \tilde{W}_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \quad L_p(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0 \quad \forall p \geq 1, \quad d^0 L_0(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0.$$

L'existence d'une telle fonction se justifie par la proposition 7.2.2. Comme aux chapitres 3 et 6 nous effectuons alors un changement de fonctions inconnues qui permet de se débarrasser d'un maximum d'équations de raccord, en utilisant les profils et la fonction \tilde{W}_n^ε . On pose en effet

$$\begin{aligned} v_n^\varepsilon &= u - w_n^\varepsilon & \text{avec } w_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p} \{ L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \} + \delta_n^0 u^0 \\ v_n^\varepsilon &= U - \tilde{W}_n^\varepsilon - W_n^\varepsilon & \text{avec } W_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p \left\{ \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p} [\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)] \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.4.1)$$

Ci-dessus u^0 désigne le champ limite, c'est-à-dire la solution du même problème que u^ε mais sans l'obstacle filaire. Dans le cas présent on prend pour u^0 la même définition qu'au chapitre précédent : il s'agit de l'unique solution du problème (6.3.16).

Avec ces notations, construire un couple (u, U) solution du problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)$ revient à construire un couple $(v_n^\varepsilon, V_n^\varepsilon)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega) \\ A v_n^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_\star, \\ C v_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\ A_0 V_n^\varepsilon = 0 \text{ dans } \Omega_N, \\ V_n^\varepsilon = 0 \text{ sur } \Gamma_N, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ L_p(V_n^\varepsilon) = 0, \quad p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(V_n^\varepsilon) \\ \quad = -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon). \end{array} \right.$$

Par construction on a $\ell_{-p}(v_n^\varepsilon) = 0$ pour $p \geq 1$ et $A v_n^\varepsilon = 0$ dans Ω_\star donc nécessairement $v_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega)$. De même on a $L_p(V_n^\varepsilon) = 0$ pour $p \geq 1$ et $A_0 V_n^\varepsilon = 0$ dans Ω_N on a donc forcément $V_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$. Ceci suggère de rechercher ces fonctions sous la forme

$$v_n^\varepsilon = \mathfrak{s}_0 \{ \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \ln(r) \} \quad \text{et} \quad V_n^\varepsilon = \mathfrak{S}_0 \{ L_0(V_n^\varepsilon) \} = L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \mathfrak{S}_0 \{ \ln(R) \}. \quad (7.4.2)$$

Si l'on choisit de chercher v_n^ε et V_n^ε sous cette forme alors toutes les équations au-dessus sont satisfaites sauf éventuellement l'équation de raccord $\ell_0(v_n^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(V_n^\varepsilon) = -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon)$. Imposer que cette

dernière équation soit satisfaite revient à poser

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathcal{L} & \ln(\varepsilon) + \mathcal{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (7.4.3)$$

Rappelons que par construction on a bien $d^\circ \ell_0(w_n^\varepsilon) = d^\circ L_0(W_n^\varepsilon) = d^\circ L_0(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0$. Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, ce système d'équation se ramène à l'équation suivante qui apparaît comme une équation intégrale au vu de l'expression de \mathcal{L} fournie par la proposition 7.3.2,

$$\left(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 \right) \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) = -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) \quad (7.4.4)$$

En reprenant la discussion du §7.3.4, il n'y a pas de raison non plus que l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$ soit surjectif pour certaines valeurs critiques de ε en quantité dénombrable. Ainsi il ne faut pas espérer non plus trouver une solution $\ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon)$ à cette équation pour tout ε . Nous ne pouvons donc conclure à l'existence d'un couple (u, U) solution de $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Nous allons par conséquent proposer un problème régularisé dont $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ sera défini comme solution.

7.4.2 Régularisation de l'équation de raccord

Si l'on consent cependant à ajouter à l'équation (7.4.4) un terme de régularisation $\mathcal{R}(\varepsilon)$ qui se comporterait comme une perturbation petite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, alors nous allons montrer qu'il est possible d'aboutir à une équation bien posée dont la solution "satisfait asymptotiquement" l'équation (7.4.4). Nous présentons ici un procédé de régularisation particulier mais on pourrait en imaginer beaucoup d'autres. Nous recherchons l'opérateur $\mathcal{R}(\varepsilon)$ sous forme diagonale dans la base des polynômes de Legendre (P_n) c'est-à-dire nous le cherchons sous la forme

$$\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot u = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(\varrho_n(\varepsilon)) \frac{\langle P_n, u \rangle_{L^2(J)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}} P_n, \quad \varrho_n(\varepsilon) \in \mathbb{R} \quad (7.4.5)$$

Nous nous attelons maintenant à choisir les coefficients $\ln(\varrho_n(\varepsilon))$ de manière judicieuse. Nous les choisissons de manière à ce que $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)$ soit toujours bijectif de $D(\mathcal{L}_0)$ dans $L^2(J)$. Dans la base des polynômes de Legendre cet opérateur s'exprime de la manière suivante,

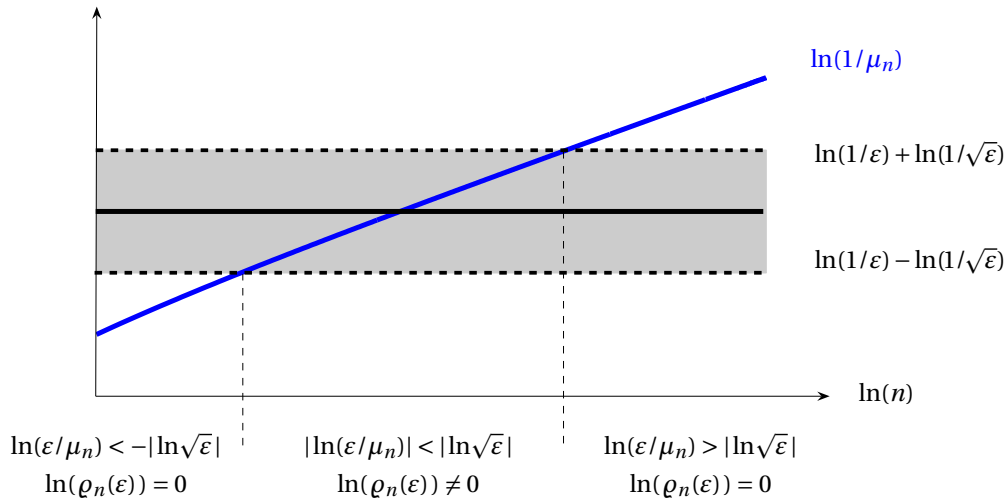
$$\left(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon) \right) u = \sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n} \right) \frac{\langle P_n, u \rangle_{L^2(J)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}} P_n,$$

Nous allons imposer que $|\ln(\varepsilon \varrho_n(\varepsilon) / \mu_n)| \geq |\ln \sqrt{\varepsilon}|$. En définissant les coefficients $\ln(\varrho_n(\varepsilon))$ de la manière suivante cette condition est assurée,

$$\ln(\varrho_n(\varepsilon)) := \begin{cases} \ln \sqrt{\varepsilon} - \ln(\varepsilon / \mu_n) & \text{si } n \text{ est tel que } |\ln(\varepsilon / \mu_n)| < |\ln \sqrt{\varepsilon}|, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.4.6)$$

Avec cette définition de l'opérateur de régularisation on obtient que $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}$ est continu de $L^2(J)$ dans $L^2(J)$, puisque ses coefficients dans la base des polynômes de Legendre sont majorés par $|\ln \sqrt{\varepsilon}|^{-1}$ d'après (7.4.6). En utilisant (7.3.13), des majorations assez simples montrent également que

$$\left| \ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n} \right) \right| \leq 2 \left(|\ln \varepsilon| + |\ln n| \right) \quad (7.4.7)$$



Pour se faire une idée plus précise des $\ln(\rho_n(\varepsilon))$ ainsi définis, recherchons les n tels que $|\ln(\varepsilon/\mu_n)| > |\ln\sqrt{\varepsilon}|$. À l'aide des inégalités sur μ_n fournies par (7.3.13), on peut établir les inégalités grossières (elles ne sont pas du tout optimales)

$$\text{Si } n \leq \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2} \text{ ou } n \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{3/2} \text{ alors } \ln(\rho_n(\varepsilon)) = 0. \quad (7.4.8)$$

Ceci montre que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \ln(\rho_n(\varepsilon)) \neq 0\}$ "part à l'infini". Ceci permettra un peu plus loin de montrer que lorsque $a \in L^2(J)$ est régulière, $\mathfrak{R}(\varepsilon) \cdot a$ est "petite".

7.4.3 Cadre fonctionnel adapté à l'équation de raccord : les espaces filaires

Nous voudrions énoncer des propriétés des opérateurs \mathcal{L}_i dans un cadre fonctionnel sur J un peu plus riche que $L^2(J)$. On pourrait penser étudier les propriétés de continuité de l'opérateur de raccord dans les espaces de Sobolev. Mais étant donné que $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0$ est diagonalisé par les polynômes de Legendre nous considérerons plutôt les espaces suivants, qui avait déjà été introduits par Fedoryuk dans [46],

$$\mathbb{E}^s(J) := \left\{ u \in L^2(J) \mid \|u\|_{\mathbb{E}^s(J)}^2 := \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)^s \frac{|\langle P_n, u \rangle_{L^2(J)}|^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}} < \infty \right\}, \quad s \in \mathbb{R}. \quad (7.4.9)$$

Les espaces filaires sont des sous-espaces de Sobolev sur la sphère unité Ces espaces sont construits de la même manière que les espaces de Sobolev sauf que l'on substitue ici une décomposition en polynômes de Legendre à une décomposition en série de Fourier. En fait on peut voir les espaces $\mathbb{E}^s(J)$ comme des sous-espaces des espaces de Sobolev, mais sur la sphère S^2 .

Lemme 7.4.1.

Pour $n \in \mathbb{N}$, une fonction $u \in \mathbb{E}^n(J)$ si et seulement si $v = (\phi_{S^2}^* u)$ est tel que $v \in H^n(S^2)$, l'application $\phi_{S^2}^*$ ayant été défini au §6.1.1. On a en particulier $\mathbb{E}^\infty(J) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}^k(J)$.

Preuve :

Rappelons qu'il est possible de caractériser les espaces $H^n(S^2)$ à l'aide du laplacien Beltrami Δ_{S^2} , comme l'indique par exemple dans [91]. En utilisant l'équation (6.A.7) satisfaite par les harmoniques sphériques et la décomposition (6.A.8), on a

$$H^n(S^2) = \left\{ v \in L^2(I) \mid \|v\|_{H^n(S^2)}^2 := \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq l} (1+l^2)^k |\langle v, y_l^m \rangle_{L^2(S^2)}|^2 < \infty \right\} \quad (7.4.10)$$

Rappelons que d'après leur définition (6.A.6) les y_l^m constituent une famille orthonormée dans $L^2(S^2)$. Considérons une fonction $u \in L^2(J)$ et $v = (\phi_{S^2}^* u)$. On obtient $v \in L^2(S^2)$ grâce à la formule (6.1.4). Comme $\partial_\varphi v = 0$ car u ne dépend pas de φ , on a les identités

$$|\langle v, y_l^0 \rangle_{L^2(S^2)}|^2 = \frac{|\langle u, P_l \rangle_{L^2(J)}|^2}{\langle P_l, P_l \rangle_{L^2(J)}} \quad \forall l \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \langle v, y_l^m \rangle_{L^2(S^2)} = 0 \quad \text{dès que } m \geq 1. \quad (7.4.11)$$

La comparaison des deux définitions (7.4.10) et (7.4.9) en tenant compte de (7.4.11) prouve le résultat. ■

Densité et dualité dans les espaces filaires Puisque les polynômes de Legendre appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(J)$, il est clair, à partir de la définition (7.4.9), que si il existe n_0 tel que $\langle u, P_n \rangle_{L^2(J)} = 0$ pour tout $n > n_0$, alors $u \in \mathcal{C}^\infty(J)$. D'ailleurs comme dans le cas des espaces de Sobolev, il y a densité de $\mathcal{C}^\infty(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. En effet on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{n=0}^N \frac{\langle P_n, u \rangle_{L^2(J)}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}} P_n \right\|_{\mathbb{E}^s(J)} = 0 \quad \forall u \in \mathbb{E}^s(J).$$

Notons également que pour deux fonctions $u, v \in L^2(J)$, le produit scalaire $\langle u, v \rangle_{L^2(J)}$ peut s'exprimer à l'aide des décompositions de u et v en polynômes de Legendre. De la même manière qu'avec les espaces de Sobolev on peut étendre la définition de $\int_J u \bar{v}$ au cas où $u \in \mathbb{E}^s(J)$ et $v \in \mathbb{E}^{-s}(J)$. On a par définition

$$\int_J u \bar{v} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle u, P_n \rangle_{L^2(J)} \overline{\langle v, P_n \rangle_{L^2(J)}}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(J)}}, \quad u \in \mathbb{E}^s(J), \quad v \in \mathbb{E}^{-s}(J)$$

On vérifie facilement que la série ci-dessus est bien définie et on a par ailleurs $|\int_J u \bar{v}| \leq \|u\|_{\mathbb{E}^s(J)} \|v\|_{\mathbb{E}^{-s}(J)}$. On constate également que le dual topologique de $\mathbb{E}^s(J)$ n'est autre que $\mathbb{E}^{-s}(J)$. On vérifie d'ailleurs facilement l'identité

$$\|u\|_{\mathbb{E}^{-s}(J)} = \sup_{w \in \mathbb{E}^s(J)} \frac{|\int_J u \bar{w}|}{\|w\|_{\mathbb{E}^s(J)}}.$$

Continuité dans les espaces filaires des opérateurs intervenant dans le raccord Grâce à l'expression diagonale de \mathcal{L}_0 dans la base des polynômes de Legendre, on constate que \mathcal{L}_0 est continu de $\mathbb{E}^{s+\delta}(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout $\delta > 0$. La même remarque vaut pour $\mathcal{R}(\varepsilon)$. Grâce à la caractérisation 7.4.1 on voit même que $\mathcal{R}(\varepsilon)$ envoie continuellement $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^\infty(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace $\mathbb{E}^\infty(J)$ étant muni de la topologie Fréchet qu'il hérite de $\mathcal{C}^\infty(S^2)$.

On peut aussi s'interroger sur les propriétés de continuité des opérateurs $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ et \mathcal{C}_0 au sens des espaces $\mathbb{E}^s(J)$. La caractérisation ci-dessus permet facilement de montrer que \mathcal{L}_1 et \mathcal{C}_0 sont continus de $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Pour \mathcal{L}_2 , on peut démontrer le lemme ci-dessous, qui est moins évident. Auparavant définissons autre opérateur apparenté à \mathcal{L}_2 ,

$$(\overline{\mathcal{L}_2} \cdot u)(v) := \int_{-1}^{+1} u(v') \frac{1 - e^{-i\omega|v-v'|}}{2|v-v'|} dv', \quad \forall u \in L^2(J).$$

On vérifie facilement que $\overline{\mathcal{L}_2}$ est l'adjoint de \mathcal{L}_2 en tant qu'opérateur agissant de $L^2(J)$ dans $L^2(J)$: $\langle \mathcal{L}_2 u, v \rangle_{L^2(J)} = \langle u, \overline{\mathcal{L}_2} v \rangle_{L^2(J)}$ pour tout $u, v \in L^2(J)$. Comme leur noyau sont conjugués l'un de l'autre, la technique utilisée pour démontrer la continuité de \mathcal{L}_2 dans les espaces $\mathbb{E}^s(J)$ peut aussi bien être utilisée pour $\overline{\mathcal{L}_2}$.

Lemme 7.4.2.

Les opérateurs \mathcal{L}_2 et $\overline{\mathcal{L}_2}$ sont continus de $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$.

La démonstration de ce résultat étant assez calculatoire, et sans grand intérêt pour notre étude, elle est donc renvoyée à l'annexe 7.B. Ceci montre que si $u \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ alors $\mathcal{L}_2 \cdot u \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ aussi. Nous aimerions pouvoir étendre la définition et obtenir la continuité de \mathcal{L}_2 de $\mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J})$ pour $s > 0$. On utilise pour ceci l'adjoint. Choisissons un $s > 0$ fixe. On sait que

$$\int_{\mathbb{J}} (\mathcal{L}_2 u) \bar{v} = \int_{\mathbb{J}} u \overline{(\mathcal{L}_2 v)}, \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{J}).$$

Par densité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ et $\mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J})$, cette identité permet d'étendre la définition de \mathcal{L}_2 à $\mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J})$ tout entier. Par ailleurs ceci montre que \mathcal{L}_2 étendu à $\mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J})$ est l'adjoint de $\overline{\mathcal{L}_2}$ restreint à $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$. Comme $\overline{\mathcal{L}_2}$ est continu de $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ dans lui-même, on en tire que

$$\mathcal{L}_2 : \mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J}) \rightarrow \mathbb{E}^{-s}(\mathbb{J}) \text{ est défini et continu pour tout } s \geq 0.$$

7.4.4 Stabilité de l'opérateur de raccord régularisé

Maintenant précisé un cadre fonctionnel un peu plus général que $L^2(\mathbb{J})$, on peut énoncer des propriétés de régularité pour les opérateurs intervenant dans les équations de raccord. Nous nous intéressons d'abord à la stabilité de l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)$. Le résultat suivant dit intuitivement que $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}$ décroît comme $1/\ln(\varepsilon)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Lemme 7.4.3.

Il existe $\kappa_-, \kappa_+, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'opérateur $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}$ est défini et continu de $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ et satisfait $\forall a \in \mathbb{E}^s(\mathbb{J}), \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \|a\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \leq \|(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})} \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon|} \|a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})}. \quad (7.4.12)$$

Preuve :

Ce résultat est facile à montrer car les opérateurs de même que les normes intervenant dans l'énoncé sont diagonaux dans la base des polynômes de Legendre. Tout d'abord explicitons $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} a$ en considérant la décomposition en polynômes de Legendre de a

$$(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n}\right)} \frac{\langle P_n, a \rangle_{L^2(\mathbb{J})}}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(\mathbb{J})}} P_n,$$

$$\text{d'où } \|(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+n^2)^s}{\left|\ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n}\right)\right|^2} \frac{|\langle P_n, a \rangle_{L^2(\mathbb{J})}|^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(\mathbb{J})}} \quad (7.4.13)$$

Les identités ci-dessus montrent implicitement que si $a \in \mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ alors également $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} a \in \mathbb{E}^s(\mathbb{J})$. L'inégalité de droite dans (7.4.12) se déduit directement de la définition (7.4.6) d'où l'on tire facilement que $|\ln(\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)/\mu_n)| > |\ln \sqrt{\varepsilon}|$. Pour démontrer l'inégalité de gauche dans (7.4.12) nous allons nous servir de (7.4.7). À l'aide de cette inégalité on démontre l'existence d'un $\kappa_- > 0$ indépendant de ε et n tel que

$$\frac{1+n^2}{\left|\ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n}\right)\right|^2} = \frac{1+n^2}{1+|\ln n|^2} \frac{1+|\ln n|^2}{\left|\ln\left(\frac{\varepsilon \varrho_n(\varepsilon)}{\mu_n}\right)\right|^2} \geq \frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Au passage on voit que l'inégalité annoncée n'est pas optimale car on a minoré ici $(1 + n^2)/(1 + |\ln n|^2)$ par 1. En utilisant (7.4.13), l'inégalité ci-dessus prouve l'inégalité de gauche dans (7.4.12). ■

Notons que les inégalités annoncées par le lemme 7.4.3 sont vérifiées pour tout $s \in \mathbb{R}$. Vue la caractérisation des $\mathbb{E}^n(\mathbb{J})$ en tant que sous-espaces de $H^n(S^2)$, si $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ et a est indépendant de ε , alors $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}a$ tend vers 0 au sens de la topologie Fréchet de $\mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$. À présent nous nous servons de ce lemme pour prouver un résultat similaire sur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)$ tout entier.

Lemme 7.4.4.

Il existe $\kappa_-, \kappa_+, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que pour tout $s \in \mathbb{R}$ l'opérateur $(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}$ est défini et continu de $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ et satisfait $\forall a \in \mathbb{E}^s(\mathbb{J}), \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \|a\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \leq \|(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})} \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon|} \|a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})} \quad (7.4.14)$$

Preuve :

La démonstration de ce résultat consiste seulement à utiliser la décomposition $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon) = (\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)) + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0)$ et à dire que le premier terme de cette décomposition est "grand devant" le second. On écrit donc

$$\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon) = (\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{R}(\varepsilon)) \cdot \left[\text{Id} + (\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} \cdot (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0) \right] \quad (7.4.15)$$

Rappelons que si F est une algèbre de Banach dont on note la norme $\| \cdot \|_F$ et dont Id_F est l'élément unité, alors pour tout élément $a \in F$ vérifiant $\|a\|_F < 1$, l'élément $\text{Id}_F + a$ est inversible. Ainsi la décomposition (7.4.15) montre que pour que $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)$ soit inversible et pour obtenir l'inégalité de droite dans (7.4.14) il suffit de démontrer l'existence de $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε telle que

$$\left\| (\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} \cdot (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0) \cdot a \right\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})} \leq \kappa_0 \frac{\|a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})}}{|\ln \varepsilon|} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[.$$

Étant donnée la continuité de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0$ de $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ et l'estimation (7.4.12), ceci est clairement vérifié. Il reste seulement à établir l'inégalité de droite dans (7.4.14). Choisissons $a \in \mathbb{E}^s(\mathbb{J})$ et notons $b^\varepsilon = (\ln(\varepsilon) + \mathcal{L}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1} \cdot (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0) \cdot a$. D'après l'estimation (7.4.12) et la continuité de $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{C}_0$ de $\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})$, il existe $\kappa'_0, \varepsilon'_0 > 0$ indépendants de a et ε tels que

$$\|b^\varepsilon\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \leq \kappa'_0 \frac{\|a\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})}}{|\ln \varepsilon|} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon'_0[.$$

Par ailleurs à nouveau en utilisant l'estimation (7.4.12) on obtient l'existence de $\kappa''_0, \varepsilon''_0 > 0$ indépendants de ε et a tels que

$$\begin{aligned} \|(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{R}(\varepsilon))^{-1}a\|_{\mathbb{E}^s(\mathbb{J})} &\geq \frac{\kappa''}{|\ln \varepsilon|} \|a + b^\varepsilon\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \geq \frac{\kappa''}{|\ln \varepsilon|} \left(\|a\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} - \|b^\varepsilon\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \right) \\ &\geq \frac{\kappa''}{|\ln \varepsilon|} \left(1 - \frac{\kappa}{|\ln \varepsilon|} \right) \|a\|_{\mathbb{E}^{s-1}(\mathbb{J})} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon''_0[. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. ■

Nous terminons ce paragraphe en énonçant un résultat d'estimation sur $\mathcal{R}(\varepsilon)$ tout seul. Ce résultat signifie que lorsque a est très régulier $\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot a$ est petite. Et si $a \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J}) = \cap_k \mathbb{E}^k(\mathbb{J})$ alors $\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot a$ décroît avec ε plus vite que ε^k pour tout k .

Lemme 7.4.5.

Pour tout $q, k \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot a\|_{\mathbb{E}^k(\mathcal{J})} \leq \kappa \varepsilon^{q/2} |\ln \varepsilon| \|a\|_{\mathbb{E}^{k+q+1}(\mathcal{J})} \quad \forall a \in \mathbb{E}^{k+q+1}(\mathcal{J}), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

On reprend en gros l'approche que nous avons utilisée pour le lemme 7.4.3. Choisissons des entiers $q, k \in \mathbb{N}$ et un $a \in \mathbb{E}^{k+q+1}(\mathcal{J})$. On exprime $\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot a$ explicitement à l'aide de la décomposition de a en polynômes de Legendre. On utilise par ailleurs les inégalités (7.4.7) et (7.4.8) pour majorer la norme. On obtient un $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot a\|_{\mathbb{E}^k(\mathcal{J})}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (1+n^2)^k |\ln(\varrho_n(\varepsilon))|^2 \frac{|\langle P_n, a \rangle_{L^2(\mathcal{J})}|^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(\mathcal{J})}} \\ &= \sum_{n \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} \frac{|\ln(\varrho_n(\varepsilon))|^2}{(1+n^2)^{q+1}} (1+n^2)^{k+q+1} \frac{|\langle P_n, a \rangle_{L^2(\mathcal{J})}|^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(\mathcal{J})}} \\ &\leq \kappa^2 \varepsilon^q \sum_{n \geq \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}} (1+n^2)^{k+q+1} \frac{|\langle P_n, a \rangle_{L^2(\mathcal{J})}|^2}{\langle P_n, P_n \rangle_{L^2(\mathcal{J})}} = \kappa^2 \varepsilon^q \|a\|_{\mathbb{E}^{k+q+1}(\mathcal{J})}^2 \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \end{aligned}$$

■

7.4.5 Équation de raccord et problèmes récurrents régularisés

Revenons sur nos motivations pour étudier l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon)$. Nous reprendrons les notations adoptées au cours du §7.4.1 dans lequel nous voulions construire une solution du problème récurrent $\mathcal{P}_n^\varepsilon$. Pour ceci nous avons été amenés à poser l'équation de raccord (7.4.4) que nous réécrivons ici

$$\left(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 \right) \cdot \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \stackrel{?}{=} -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon), \quad (7.4.16)$$

les quantités intervenant dans cette équation ayant été définies par (7.4.1). Ici l'inconnue est $\ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon)$. Nous avons fait figurer un "?" au dessus du signe "=" car, suite à la première étude de l'opérateur $\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0$ qui avait été menée au §7.3.4, nous avons renoncé à une résolution exacte de cette équation. Nous proposons donc de considérer plutôt l'équation de raccord régularisée suivante

$$\left(\ln(\varepsilon) + \mathcal{L} + \mathcal{C}_0 + \mathcal{R}(\varepsilon) \right) \cdot \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) = -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon), \quad (7.4.17)$$

L'opérateur $\mathcal{R}(\varepsilon)$ a été construit de manière à ce que cette équation soit toujours bien posée, quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Si l'on reprend en sens inverse le raisonnement du §7.4.1 nous sommes donc amenés à

considérer les problèmes récurrents régularisés suivants

$$\begin{cases}
 u_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\
 Au_n^\varepsilon = -\delta_0^n (\xi^2(r) - \nu^2) f & \text{dans } \Omega_\star, \\
 Cu_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma,
 \end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}} \begin{cases}
 U_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\
 A_0 U_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon & \text{dans } \Omega_N, \\
 U_n^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_N,
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \ell_{-p}(u_n^\varepsilon) = L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\
 L_p(U_n^\varepsilon) = \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) & \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\
 \ell_0(u_n^\varepsilon) + \mathfrak{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(U_n^\varepsilon)
 \end{cases}$$

Résolution des problèmes récurrents régularisés L'ajout de l'opérateur $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ dans la dernière équation de raccord ci-dessus permet d'obtenir une solution qui sera le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$. Nous en résumons maintenant la construction. Nous posons par définition

$$u_n^\varepsilon := v_n^\varepsilon + w_n^\varepsilon \quad \text{et} \quad U_n^\varepsilon := V_n^\varepsilon + W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon \quad (7.4.18)$$

Les fonctions w_n^ε et W_n^ε sont définies à l'aide de profils (construits en section 7.2) de manière à satisfaire la partie des équations de raccord du problème $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$ correspondant au problème $p \neq 0$. Les fonctions w_n^ε et W_n^ε sont définies suivant les formules

$$\begin{aligned}
 w_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{s}_{-p} \{ L_{-p}(U_{n-p}^\varepsilon) \} + \delta_n^0 u^0 \\
 W_n^\varepsilon &= \sum_{p=1}^n \mathfrak{S}_p \left\{ \ell_p(u_{n-p}^\varepsilon) - \ell_p\left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{-p}[\ell_{-p}(u_{n-p}^\varepsilon)]\right) \right\}
 \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

La fonction \tilde{W}_n^ε est définie à l'aide de la proposition 7.2.2 comme l'unique solution d'un problème dans lequel interviennent U_{n-2}^ε et U_{n-4}^ε ,

$$A_0 \tilde{W}_n^\varepsilon = -R^2 A_2 U_{n-2}^\varepsilon - R^4 A_4 U_{n-4}^\varepsilon \quad \text{dans } \Omega_N, \quad \tilde{W}_n^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad L_p(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0 \quad \forall p \geq 1, \quad d^\circ L_0(\tilde{W}_n^\varepsilon) = 0.$$

Enfin les fonctions v_n^ε et V_n^ε sont définies comme des profils associés à des $\ell_0(v_n^\varepsilon)$ et $L_0(V_n^\varepsilon)$ satisfaisant une version régularisée de l'équation de raccord (7.4.3), qui est bien posée par construction

$$\begin{aligned}
 v_n^\varepsilon &= \mathfrak{s}_0 \{ \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \ln(r) \} \quad \text{et} \quad V_n^\varepsilon = \mathfrak{S}_0 \{ L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \ln(R) \} \quad \text{avec} \\
 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \mathfrak{L} + \mathfrak{R}(\varepsilon) & \ln(\varepsilon) + \mathfrak{C}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ell_0^{(1)}(v_n^\varepsilon) \\ L_0^{(1)}(V_n^\varepsilon) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\ell_0(w_n^\varepsilon) + L_0(W_n^\varepsilon + \tilde{W}_n^\varepsilon) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

7.4.6 Dérivation du premier terme du développement raccordé

Nous voudrions ici préciser au maximum la forme que prennent les premiers termes du développement u_0^ε et U_0^ε . D'après la construction du paragraphe précédent, on a tout d'abord $W_0^\varepsilon = \tilde{W}_0^\varepsilon = 0$ et $w_0^\varepsilon = u^0$ où u^0 est le champ limite défini par (6.3.16). Ainsi en reprenant l'équation (7.4.18) on a

$$u_0^\varepsilon = u^0 + \mathfrak{s}_0 \{ a_\varepsilon \ln(r) \} \quad \text{et} \quad U_0^\varepsilon = \mathfrak{S}_0 \{ a_\varepsilon \ln(R) \} \quad (7.4.21)$$

où $a_\varepsilon \in \mathbb{E}^\infty(J)$ de sorte que $\phi_{S^2}^* a_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$. La fonction a_ε est définie comme l'unique solution de l'équation intégrale

$$\left(\mathcal{L} + \mathcal{R}(\varepsilon) + \ln(\varepsilon) + \mathcal{C}_0 \right) \cdot a_\varepsilon = -\ell_0(u^0). \quad (7.4.22)$$

Avec l'expression (7.4.21), le champ u_0^ε admet une forme relativement simple puisqu'il apparaît comme la somme du champ limite u^0 et d'un champ rayonné par des points sources situés sur le segment central I (cf proposition 7.3.1). Nous tirerons partie de cette forme particulière au prochain chapitre.

7.5 Estimation d'erreur

Il nous faut maintenant montrer que les couples construits par récurrence suivant le procédé exposé au §7.4.5 forment bien un développement asymptotique de la solution exacte u^ε du problème \mathcal{P}^ε . Nous allons montrer qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{avec} \quad \tilde{u}_n^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_n^\varepsilon. \quad (7.5.1)$$

Dans les chapitres précédents, pour obtenir un tel résultat nous avons fait appel aux propositions 2.6.3 et 2.6.4. Pour pouvoir utiliser ces propositions, nous avons montré par récurrence que les termes u_n^ε et U_n^ε admettaient respectivement la forme (2.6.4) et (2.6.3).

Ceci ne sera pas possible dans ce chapitre, comme nous l'avons déjà mentionné en introduction, et par dessus le marché les équations de raccord ne sont pas vérifiées de manière exacte. Seule une version régularisée est satisfaite. Par conséquent nous allons devoir d'une part montrer que l'erreur commise dans l'équation de raccord est petite, et d'autre part explicitement estimer le membre de droite de l'inégalité 2.6.2. Compte tenu des propositions 2.6.1 et 2.6.2 et du lemme 2.7.5, pour montrer (7.5.1) il nous suffit de prouver :

1. Estimation de l'erreur de régularisation :

Pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$ il existe une constante $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que

$$\| \mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_n^\varepsilon) \|_{H^p(S^2)} \leq \kappa \varepsilon^q \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.5.2)$$

2. Estimation du reste de champ lointain :

Pour tout $N, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$\| u_n^\varepsilon - \sum_{p < N - n + 1/2} u_{n,p}^\varepsilon r^p \|_{\mathcal{W}_{N-n+1/2}^m(\Omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.5.3)$$

3. Estimation du reste de champ proche :

Pour tout $N, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$\| U_n^\varepsilon \|_{\mathcal{W}_{n+1/2}^m(\Omega_N)} + \| U_n^\varepsilon - \sum_{p > -N + n - 1/2} U_{n,p}^\varepsilon R^p \|_{\mathcal{W}_{-N+n-1/2}^m(\Omega_N)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.5.4)$$

Pour les conditions suffisantes énoncées ci-dessus nous avons repris les notations du chapitre 2. En particulier les $u_{n,p}^\varepsilon$, $p \in \mathbb{Z}$ désignent les termes du développement de u_n^ε par rapport à r (bien définis par application de la proposition 2.3.1), et les $U_{n,p}^\varepsilon$, $p \in \mathbb{Z}$ désignent les termes du développement de U_n^ε par rapport à R (bien définis d'après la proposition 2.4.2).

7.5.1 Définition de notations dédiées à l'estimation d'erreur

Pour mener les calculs proprement nous allons introduire des quantités adaptées. Remarquons pour commencer que dans les chapitres 3, 6 et 7 nous avons eu affaire à des objets divers $u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon, \mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ et $\mathfrak{S}_p\{a\}$ dont on peut affirmer que leur transformée de Mellin est méromorphe avec des pôles localisés dans \mathbb{Z} et qui se développent suivant les puissances entières de r (avec éventuellement des logarithmes). Ceci résulte directement des propositions 2.3.1 et 2.4.2 et de la définition de ces objets. Nous introduisons par conséquent des sous-espaces de $\mathcal{V}_\alpha^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{W}_\alpha^\infty(\Omega_N)$ dont la définition prend en compte cette remarque. On pose pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) &:= \left\{ u \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \mid u \underset{r \rightarrow 0}{\asymp} \sum_{q=-p}^{\infty} (u)_q r^q, \quad (u)_q \in \mathbb{P}_{\log} \right\} \\ \mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N) &:= \left\{ U \in \mathcal{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N) \mid U \underset{R \rightarrow \infty}{\asymp} \sum_{q=-\infty}^{+p} (U)_q R^q, \quad (U)_q \in \mathbb{P}_{\log} \right\} \end{aligned}$$

Par application des propositions 2.3.1 et 2.4.2 on voit que $u_n^\varepsilon \in \mathbb{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega)$ et $U_n^\varepsilon \in \mathbb{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque toute fonction de $\mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ ou $\mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$, $p \in \mathbb{N}$ admet une transformée de Mellin méromorphe sur \mathbb{C} avec des pôles situés dans \mathbb{Z} , la fonction $\ell_q(u)$ est bien définie pour tout $q \in \mathbb{Z}$ et toute $u \in \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$. De même pour $L_q(U)$ lorsque $U \in \mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$.

Définition de semi-normes adaptées Rappelons que nous avons défini sur \mathbb{P}_{\log} des semi-normes notées $\|\cdot\|_{\log, k}$, $k \in \mathbb{N}$ définies par (2.7.1). Nous définissons maintenant pour $\mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ et $\mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ des semi-normes permettant de contrôler les termes des développements ainsi que le reste dans une norme à poids adéquate,

$$\begin{aligned} ((u))_{p,n} &:= \left\| u - \sum_{q=-p}^n (u)_q r^q \right\|_{\mathcal{V}_{-n-1/2}^n(\Omega)} + \sum_{q=-p}^n \|(u)_q\|_{\log, n} \\ \langle\langle U \rangle\rangle_{p,n} &:= \left\| U - \sum_{q=-n}^p (U)_q R^q \right\|_{\mathcal{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)} + \sum_{q=-n}^p \|(U)_q\|_{\log, n}. \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

Formulons deux remarques simples au sujet de ces semi-normes. Tout d'abord elles satisfont clairement l'inégalité triangulaire : si $u, v \in \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $((u+v))_{p,n} \leq ((u))_{p,n} + ((v))_{p,n}$. De même pour $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_{p,n}$. Ces semi-normes sont également "croissantes" au sens suivant. Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\begin{aligned} ((u))_{p,n} &\leq \kappa ((u))_{p,n+1} \quad \forall u \in \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \\ \langle\langle U \rangle\rangle_{p,n} &\leq \kappa \langle\langle U \rangle\rangle_{p,n+1} \quad \forall U \in \mathbb{W}_{-p-1/2}^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

La vérification de ces inégalités s'effectue par des calculs élémentaires, elle est laissée au lecteur. Enfin, étant donné les définitions des $\ell_q(\cdot)$ et $L_q(\cdot)$ données par (2.7.6), pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \|\ell_p(u)\|_{\log, n} &\leq \kappa ((u))_{p, |p|+n} \quad \forall u \in \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \\ \|L_p(U)\|_{\log, n} &\leq \kappa \langle\langle U \rangle\rangle_{p, |p|+n} \quad \forall U \in \mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N) \end{aligned} \tag{7.5.6}$$

7.5.2 Estimation de l'erreur de régularisation et des termes de reste

Nous montrons maintenant que les termes u_n^ε et U_n^ε sont contrôlés par u^0 au sens de ces semi-normes. Commençons par annoncer deux résultats que nous obtiendrons à la prochaine section. Tout d'abord voici un résultat qui montre en quelque sorte que les applications $a \mapsto \mathfrak{s}_p\{a\}$ et $a \mapsto \mathfrak{S}_p\{a\}$ sont continues. Remarquons que $\mathfrak{s}_p\{a\} \in \mathbb{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega)$ et $\mathfrak{S}_p\{a\} \in \mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega)$.

Proposition 7.5.1.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$((\mathfrak{s}_{-p}\{a\}))_{p,n} \leq \kappa \|a\|_{\log,k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0 r^{-p} a(r, \sigma) = 0$$

$$\langle\langle \mathfrak{S}_p\{b\} \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa \|b\|_{\log,k} \quad \forall b \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0 R^p b(R, \sigma) = 0$$

Ci-dessus κ et k dépendent de n et p . Ce dernier résultat sera précieux pour en démontrer un autre, comparable, qui quantifie la façon dont le couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ dépend des couples solutions précédentes lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proposition 7.5.2.

Si les couples $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$ désignent les solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$, alors pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k \sum_{q=0}^{p-1} \left\{ ((u_q^\varepsilon))_{q,k} + \langle\langle U_q^\varepsilon \rangle\rangle_{q,k} \right\} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Les propositions 7.5.1 et 7.5.2 ci-dessus seront démontrées dans la prochaine section. On peut déduire de ce qui précède comment u_p^ε et U_p^ε dépendent de u^0 . En effet à l'aide des inégalités de la proposition 7.5.2 ci-dessus, on démontre par récurrence que pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k \left\{ ((u_0^\varepsilon))_{0,k} + \langle\langle U_0^\varepsilon \rangle\rangle_{0,k} \right\} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

À présent notons que les deux fonctions u_0^ε et U_0^ε peuvent être définies uniquement à l'aide de profils et du champ limite. En effet en reprenant l'énoncé du problème $(\mathcal{P}_0^\varepsilon)_{\text{reg}}$, on voit que $u_0^\varepsilon = u^0 + \mathfrak{s}_0\{\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \ln(r)\}$ et $U_0^\varepsilon = \mathfrak{S}_0\{L_0^{(1)}(U_0^\varepsilon) \ln(R)\}$. En appliquant le résultat de la proposition 7.5.1 ci-dessus on obtient pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ l'existence de $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k \left\{ ((u^0))_{0,k} + \|\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)\|_{\log,k} + \|L_0^{(1)}(U_0^\varepsilon)\|_{\log,k} \right\} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Utilisons l'équation de raccord régularisée (7.4.20) satisfaite par $\ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)$ et $L_0^{(1)}(U_0^\varepsilon)$ en remarquant que $w_0^\varepsilon = u^0$ et $W_0^\varepsilon = \tilde{W}_0^\varepsilon = 0$. En utilisant le lemme 7.4.4 sur la stabilité de l'équation de raccord on en tire finalement la proposition suivante qui permet clairement d'obtenir les estimations (7.5.3) et (7.5.4).

Proposition 7.5.3.

Soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$ les couples solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$ définis par récurrence, et soit u^0 le champ limite défini par (6.3.16). Alors pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k ((u^0))_{0,k} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.5.7)$$

Pour terminer l'estimation d'erreur il reste seulement à estimer l'erreur due à la régularisation des équations de raccord. C'est-à-dire que nous devons démontrer (7.5.2). En combinant (7.5.6) avec le lemme 7.4.5 on voit que pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_p^\varepsilon)\|_{H^n(S^2)} \leq \kappa \varepsilon^{q/2} ((u_p^\varepsilon))_{p,|p|+n+q+1} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Pour conclure il suffit alors d'utiliser la proposition 7.5.3 ci-dessus pour majorer $((u_p^\varepsilon))_{p,|p|+n+q+1}$. On en tire la proposition suivante qui permet de démontrer (7.5.2).

Proposition 7.5.4.

Soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ les couples solutions des problèmes récurrents régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$ et u^0 le champ limite défini par (6.3.16). Soit $\mathcal{R}(\varepsilon)$ l'opérateur de régularisation défini par (7.4.5). Alors pour tout $n, p, q \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_p^\varepsilon)\|_{H^n(S^2)} \leq \kappa \varepsilon^q ((u^0))_{0,k} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

7.5.3 Conclusion finale

Le paragraphe précédent nous montre que les estimations d'erreur (7.5.2), (7.5.3) et (7.5.4) sont satisfaites. Ainsi en appliquant les propositions 2.6.1 et 2.6.2 on montre finalement que $\sum_n \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon$ constitue bien un développement asymptotique de u^ε .

Proposition 7.5.5.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{ap}}$. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ satisfaisant la propriété suivante : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.5.8)$$

Ce résultat d'estimation globale mène, comme dans les chapitres précédents à des estimations locales plus fines. La preuve est ici moins directe cependant.

Corollaire 7.5.1.

Pour tout ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendants éventuellement de N tels que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

De même pour tout ouvert $\omega \subset \Omega_N$ borné et pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa_N, \varepsilon_N > 0$ indépendants de ε mais dépendant éventuellement de N tels que

$$\|\Xi_{*}^{\varepsilon, -1} u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n U_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_N \varepsilon^{N+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_N[.$$

Preuve :

Nous donnons la preuve pour les estimations en champ lointain. Les estimations en champ proche se démontrent de la même manière. Considérons $N \in \mathbb{N}$ et un ouvert $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega_\star$ arbitraires mais fixe. Considérons également les α, β de la proposition 7.5.5 ci-dessus. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N_0 + \beta \geq N + 1$. Il existe $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de ε mais dépendant éventuellement de ω tel que

$$\|v\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa \|v\|_{\mathcal{V}_{-p-1/2}^1(\omega)} \leq \kappa' ((v))_{p,1} \quad \forall v \in \mathcal{V}_{-p-1/2}^\infty(\Omega) \quad \forall p \in [0, N].$$

En appliquant cette inégalité et la proposition 7.5.3, on en déduit l'existence de $\kappa, q > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q \quad \forall n \in [0, N], \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Il reste à appliquer la méthodologie utilisée dans la preuve du corollaire 3.4.1. Il existe $\kappa_0, \kappa_1, q_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} &\leq \left\| u^\varepsilon - \sum_{n=0}^{N_0} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon \right\|_{H^1(\omega)} \\ &\leq \kappa_0 \varepsilon^{\alpha N_0 + \beta} + \sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n \|u_n^\varepsilon\|_{H^1(\omega)} \leq \kappa_1 \varepsilon^{N+1} + \kappa_1 \sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n |\ln \varepsilon|^q. \end{aligned}$$

■

7.5.4 Estimations d'erreur affinées

Avec les estimations d'erreur globales fournies par la proposition 7.5.5, on peut également obtenir a posteriori des estimations globales affinées comme nous l'avons fait au chapitre 3 avec la proposition 3.4.2. Pour ceci nous pouvons procéder comme dans l'annexe du chapitre 3. Nous passons par un résultat intermédiaire qui donne un ordre de grandeur de chaque terme du développement raccordé.

Lemme 7.5.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, si \tilde{u}_n^ε est défini par (7.5.1), alors il existe $\kappa > 0$ et $p \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tel que $\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \varepsilon^{-n/2}$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$.

Preuve :

Choisissons un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé jusqu'à la fin de la preuve. Nous commencerons par reprendre le raisonnement de la proposition 3.A.1. D'après l'expression explicite de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ qu'on obtient grâce à (6.1.4) et (6.2.3), et celle de $\|\cdot\|_{\gamma_0^1(\Omega_\varepsilon)}$ donnée par (6.2.2) il existe $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_1 \|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_2' \left(\|\chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \|r \partial_r \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \right) \left(\|u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} + \|\Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon)} \right)$$

Rappelons comme nous l'avons expliqué avec (3.A.2) qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|\chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} + \|r \partial_r \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En appliquant le changement de variable $r = \varepsilon R$, il existe donc $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \left(\|u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} + \|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \right) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Il reste alors à majorer chacun des deux termes du membre de droite ci-dessus. Nous détaillons seulement comment majorer $\|u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)}$ car la manière de majorer $\|U_n^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))}$ est la même. Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \|u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} &\leq \left\| u_n^\varepsilon - \sum_{p=-n}^1 r^p u_{n,p}^\varepsilon \right\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} + \sum_{p=-n}^1 \|r^p u_{n,p}^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} \\ &\leq \left\| u_n^\varepsilon - \sum_{p=-n}^1 r^p u_{n,p}^\varepsilon \right\|_{\gamma_0^1(\Omega)} + \sum_{p=-n}^1 \varepsilon^{p/2} \|u_{n,p}^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} \\ &\leq ((u_n^\varepsilon))_{n,1} + \varepsilon^{-n/2} \sum_{p=-n}^1 \|u_{n,p}^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} \end{aligned} \quad (7.5.9)$$

Rappelons que, d'après la définition (2.3.6), pour tout $p \in \mathbb{Z}$ on a $u_{n,p}^\varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}$. Un calcul simple et explicite montre qu'il existe $\kappa, \kappa' > 0$ et $q \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que $\forall p \in [-n, -1]$ on a

$$\|u_{n,p}^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q \|u_{n,p}^\varepsilon\|_{\log,1} \leq \kappa' |\ln \varepsilon|^q ((u_n^\varepsilon))_{n,1} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Pour conclure il suffit alors d'appliquer la proposition 7.5.3. En injectant ceci dans (7.5.9), on en tire alors l'existence de $\kappa > 0$ et de $p \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$\|u_n^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \varepsilon^{-n/2} |\ln \varepsilon|^p \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad \blacksquare$$

À l'aide du lemme 7.5.1, il est maintenant possible d'exploiter la proposition 7.5.5 pour en tirer des estimations d'erreur globales plus fines. On aboutit alors à la proposition suivante dont la preuve est identique à celle de la proposition 3.4.2, c'est pourquoi nous ne la réécrivons pas.

Proposition 7.5.6.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{u}_n^\varepsilon\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N/2+1/2}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

7.6 Développement asymptotique des traces sur Γ_ε

De la même manière que pour les problèmes bidimensionnels des chapitres 3 et 4, maintenant que nous avons dérivé un développement raccordé de u^ε nous pouvons dériver également un développement asymptotique pour $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Pour exprimer des estimations d'erreur sur cet autre développement nous aurons recours à une norme notée $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ que nous décrivons précisément.

Définition de normes sur le bord du fil Dans la définition de $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ il faut prendre garde au fait que Γ_ε dépend de ε . Nous allons donc nous ramener à une surface fixe : nous nous ramènerons à Γ_N . Nous définissons des normes pour $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ par

$$\begin{aligned} |v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} &:= \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}, \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon) \\ |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} &:= \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_N)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Xi_*^\varepsilon v} \right|}{\|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}}, \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon). \end{aligned} \quad (7.6.1)$$

Notons en effet que $\Xi^{\varepsilon, -1}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de Γ_ε sur Γ_N . Bien que la topologie de $H^{1/2}(\Gamma_N)$ ne dépende pas de la manière dont nous définissons $\|\cdot\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}$, nous précisons également comment nous définissons celle-ci : en nous ramenant à la sphère S^2 . Notons que $\phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_N}^{-1}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de Γ_N sur S^2 . On pose alors

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} &:= \|v \circ \phi_{\Gamma_N} \circ \phi_{S^2}^{-1}\|_{H^{1/2}(S^2)} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_N) \\ \|v\|_{H^{1/2}(S^2)}^2 &:= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (1+n^2)^{1/2} |\langle v, y_n^m \rangle_{L^2(S^2)}|^2 \quad \forall v \in H^{1/2}(S^2) \end{aligned}$$

Remarquons enfin que d'après les définitions de $\phi_{\Gamma_\varepsilon}$ et ϕ_{Γ_N} données aux §6.1.2 et §6.1.3 respectivement, on a $\phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{\Gamma_N}^{-1} = \Xi^\varepsilon|_{\Gamma_N}$. Ainsi avec les définitions ci-dessus on a également

$$|v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} = \|v \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1}\|_{H^{1/2}(S^2)} \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon). \quad (7.6.2)$$

Stabilité C'est par rapport à la norme $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ que nous allons dériver un développement de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$. Pour commencer nous devons établir un résultat de stabilité. Nous ne démontrons pas le résultat suivant et l'admettons car sa démonstration est quasiment identique à celle de la proposition 3.6.1 (seulement on se sert de la proposition 7.1.2 au lieu du lemme 3.1.2).

Proposition 7.6.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \frac{\partial u}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \left\{ \|A \cdot u\|_{\gamma_0^0(\Omega_\varepsilon)} + \|\Xi_*^{\varepsilon, -1} u\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} + \|C \cdot u\|_{L^2(\Gamma)} \right\}, \quad \forall u \in H^2(\Omega_\varepsilon) \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

De la même manière qu'en section 3.6, en utilisant ce résultat de stabilité et en reprenant le raisonnement du §2.2.5, et les propositions 2.6.1 et 2.6.2 on démontre que les estimations d'erreur (7.5.8) fournissent des estimations d'erreur sur les traces de dérivées normales : pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N \varepsilon^{\alpha N + \beta}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.6.3)$$

Estimations optimales Ces estimations ne permettent pas de conclure directement que les $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon)_{|\Gamma_\varepsilon}$ forment un développement asymptotique de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u^\varepsilon)_{|\Gamma_\varepsilon}$. Cependant en connaissant le comportement de $(\nabla \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon)_{|\Gamma_\varepsilon}$ on déduit de (7.6.3) des estimations d'erreur plus fines qui permettront au prochain chapitre de conclure que, dans un cas assez général, il s'agit bien d'un développement asymptotique.

Proposition 7.6.2.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{ap}}$. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tel que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.6.4)$$

Preuve :

Soit $N \in \mathbb{N}$ fixe. Soit $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha N_0 + \beta \geq N + 1$ et $N_0 \geq N + 1$. D'après (7.6.3) ci-dessus il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε mais dépendant éventuellement de N telle que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon^{N+1} + \sum_{n=N+1}^{N_0} \varepsilon^n \left| \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}. \quad (7.6.5)$$

Il reste à majorer la somme dans le membre de droite ci-dessus. Considérons un ouvert $\omega = \Omega_N \cap ([0, R_0] \times S^2)$ avec $R_0 > 0$ suffisamment grand pour que $\Gamma_N \subset \bar{\omega}$. Reprenons par ailleurs l'expression de $\partial_{n_{\Gamma_\varepsilon}}$ que nous avons dérivée avec (6.3.9) et (6.3.10). On en déduit l'existence de $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tel que

$$\left\| \Xi_*^{\varepsilon, -1} \frac{1}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon U \right\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \leq \frac{\kappa_0}{\varepsilon} \|U\|_{H^2(\omega)} \quad \forall U \in H^2(\omega) \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \quad (7.6.6)$$

Notons $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}$ et γ_{Γ_N} des fonctions définies sur Γ_ε et Γ_N telles que $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) d\varphi d\nu$ et $\gamma_{\Gamma_N}(\phi_{\Gamma_N}(\varphi, \eta)) d\varphi d\eta$ sont respectivement les mesures de surface sur Γ_ε et Γ_N induites par les tenseurs métriques (6.1.7) et (6.1.11). En reprenant (6.1.12) et le lemme 6.1.1 on voit qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left\| \frac{\Xi_*^{\varepsilon, -1} (n_{\Gamma_\varepsilon}^r \gamma_{\Gamma_\varepsilon})}{\gamma_{\Gamma_N}} \right\|_{L^\infty(\Gamma_N)} \leq \kappa \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (7.6.7)$$

Considérons un $V \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ arbitraire et soit $n \in \llbracket N + 1, N_0 \rrbracket$. Notons $d\Gamma_\varepsilon$ la mesure de surface sur Γ_ε et $d\Gamma_N$ la mesure sur Γ_N . En réunissant les équations (7.6.6) et (7.6.7) on obtient l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε et de V tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \overline{\Xi_*^\varepsilon V} d\Gamma_\varepsilon \right| = \left| \int_{\Gamma_N} \left(\Xi_*^{\varepsilon, -1} \frac{1}{n_{\Gamma_\varepsilon}^r} \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon \right) \overline{V} \left(\frac{\Xi_*^{\varepsilon, -1} (n_{\Gamma_\varepsilon}^r \gamma_{\Gamma_\varepsilon})}{\gamma_{\Gamma_N}} \right) d\Gamma_N \right| \leq \kappa \|U_n^\varepsilon\|_{H^2(\omega)} \|V\|_{L^2(\Gamma_N)}$$

En prenant la borne supérieure sur tous les $V \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ tels que $\|V\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)} = 1$, d'après la définition de la norme $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ donnée par (7.6.1) il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left| \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \|U_n^\varepsilon\|_{H^2(\omega)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall n \in \llbracket N + 1, N_0 \rrbracket. \quad (7.6.8)$$

Enfin en appliquant la proposition 7.5.3, on voit qu'il existe $\kappa_1, \kappa_2, q > 0$ indépendants de ε tels que $\|U_n^\varepsilon\|_{H^2(\omega)} \leq \kappa_1 \langle\langle U_n^\varepsilon \rangle\rangle_{n,2} \leq \kappa_2 |\ln \varepsilon|^q$ pour tout $n \in \llbracket N + 1, N_0 \rrbracket$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En réunissant cette remarque avec (7.6.5) et (7.6.8), on conclut la preuve. ■

7.A Résultats techniques pour l'estimation d'erreur

Nous démontrons ici des résultats techniques importants pour les estimations d'erreur de la section 7.5. Les deux résultats principaux de cette annexe (et les plus difficiles à établir) sont les propositions 7.A.3 et 7.A.4. Ces propositions renseignent sur la manière dont $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ dépend de la fonction a et dont $\mathfrak{S}_p\{b\}$ dépend de b . Cette annexe sera structurée en trois parties. Nous démontrerons d'abord des résultats sur les profils $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$, puis dans une deuxième partie nous établirons une proposition sur les profils $\mathfrak{S}_p\{a\}$. Enfin dans une troisième partie nous en déduirons comment chaque couple $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ dépend des couples précédents $(u_{n-1}^\varepsilon, U_{n-1}^\varepsilon), \dots, (u_0^\varepsilon, U_0^\varepsilon)$.

7.A.1 Dépendance des profils en champ lointain par rapport à leur argument

Dans tout ce paragraphe nous reprendrons les notations que nous avons adoptées dans la preuve du lemme 6.5.1. Rappelons que dans cette preuve nous avons construit le profil $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ comme une somme

$$\mathfrak{s}_{-p}\{a\} = \tilde{v}_k + \tilde{w}_k \quad \text{avec} \quad \tilde{v}_k := \sum_{q=-p}^{q_k+1} r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a]. \quad (7.A.1)$$

La fonction \tilde{v}_k était définie par (6.5.1) et satisfaisait $\Delta \tilde{v}_k + \omega^2 \tilde{v}_k \in H^k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La fonction \tilde{w}_k était l'unique élément de $H^1(\Omega)$ satisfaisant (6.5.3). Rappelons que nous avons montré que la somme $\tilde{v}_k + \tilde{w}_k$ ne dépendait en réalité pas de k .

Proposition 7.A.1.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\mathcal{V}_{-p-2}^n(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0.$$

Preuve :

Commençons par choisir $p, n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{P}_{\log}$ satisfaisant $A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0$ qui seront fixés jusqu'à la fin de la preuve. Nous allons utiliser la décomposition (7.A.1) avec $k = n$. La proposition 6.2.2 nous donne l'existence d'un certain $\kappa > 0$ dépendant éventuellement de n et p mais pas de $a(r, \sigma)$ tels que

$$\|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\mathcal{V}_{-p-2}^n(\Omega)} \leq \|\tilde{v}_n\|_{\mathcal{V}_{-p-2}^n(\Omega)} + \|\tilde{w}_n\|_{\mathcal{V}_{-p-2}^n(\Omega)} \leq \kappa \|\tilde{v}_n\|_{\mathcal{V}_{-p-1/2}^n(\Omega)} + \kappa \|\tilde{w}_n\|_{H^n(\Omega)}$$

Revenons sur l'expression explicite de \tilde{v}_n donnée par (7.A.1), et rappelons que les fonctions $\mathfrak{h}_q^{-p} : \mathbb{P}_{\log} \rightarrow \mathbb{P}_{\log}$ définies par (2.7.9) et (2.7.10) vérifient le lemme 2.7.3. On en tire l'existence d'un $\kappa > 0$ et de $k \in \mathbb{N}$ indépendants de $a(r, \sigma)$ mais dépendant éventuellement de n et p , tels que

$$\|\tilde{v}_n\|_{\mathcal{V}_{-p-1/2}^n(\Omega)} \leq \kappa ((\tilde{v}_n))_{p, n} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad (7.A.2)$$

Il reste donc à majorer $\|\tilde{w}_n\|_{H^n(\Omega)}$. Rappelons que par hypothèse de construction on a $\Delta \tilde{v}_n + \omega^2 \tilde{v}_n \in H^n(\Omega)$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde{w}_n \in H^{n+2}(\Omega)$ et comme la solution du problème de Helmholtz correspondant à (6.5.3) dépend continuellement des données, il existe $\kappa > 0$ indépendant de \tilde{w}_n et \tilde{v}_n telle que

$$\|\tilde{w}_n\|_{H^{n+2}(\Omega)} \leq \kappa \|\Delta \tilde{v}_n + \omega^2 \tilde{v}_n\|_{H^n(\Omega)}. \quad (7.A.3)$$

Rappelons que \tilde{v}_n avait été construit tel que $A\tilde{v}_n \in \mathcal{V}_{q_n}^\infty(\Omega)$ avec $q_n \geq \alpha_n + \beta_n + 1$ où $\mathcal{V}_{\alpha_n}^n \subset H^n(\Omega)$ et β_n est comme dans l'énoncé du lemme 6.2.1. Ainsi il existe une constante $\kappa > 0$ dépendante seulement de la géométrie et de k , mais indépendante de $a(r, \sigma)$ telle que

$$\|\Delta \tilde{v}_n + \omega^2 \tilde{v}_n\|_{H^n(\Omega)} \leq \kappa \left\| \frac{A\tilde{v}_n}{\xi^2(r) - \nu^2} \right\|_{\mathcal{V}_{\alpha_n}^n(\Omega)} \leq \kappa \|A\tilde{v}_n\|_{\mathcal{V}_{\alpha_n+\beta_n}^n(\Omega)} \leq \kappa \|A\tilde{v}_n\|_{\mathcal{V}_{q_n}^n(\Omega)} \quad (7.A.4)$$

En examinant l'expression de $A\tilde{v}_n$ donnée par 6.5.2 on voit $\|A\tilde{v}_n\|_{\gamma_{q_n}^n(\Omega)}$ est contrôlé par un certain $\|a\|_{\log, q}$, $q \in \mathbb{N}$. En effet il existe $\kappa > 0$ indépendante de a telle que

$$\begin{aligned} \|A\tilde{v}_n\|_{\gamma_{q_n}^n(\Omega)} &= \left\| \sum_{q=q_n}^{q_n+1} r^{q+2} r^{-q} A_2 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] + \sum_{q=q_n-2}^{q_n+1} r^{q+4} r^{-q} A_4 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] \right\|_{\gamma_{q_n}^n(\Omega)} \\ &\leq \kappa \left\| \sum_{q=q_n}^{q_n+1} r^{q-q_n} r^{-q} A_2 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] + \sum_{q=q_n-2}^{q_n+1} r^{q-q_n+2} r^{-q} A_4 r^q \mathfrak{h}_q^{-p}[a] \right\|_{\gamma_{-1/2}^n(\Omega)} \quad (7.A.5) \\ &\leq \kappa \sum_{q=q_n-2}^{q_n+1} \|\mathfrak{h}_q^{-p}[a]\|_{\gamma_{-1/2}^{n+2}(\Omega)} \leq \kappa \sum_{q=q_n-2}^{q_n+1} \|\mathfrak{h}_q^{-p}[a]\|_{\log, n+2} \end{aligned}$$

On peut alors conclure puisqu'en réunissant les inégalités (7.A.3), (7.A.4) et (7.A.5) et le lemme 2.7.3 on obtient l'existence d'un $\kappa > 0$ et d'un $k \in \mathbb{N}$ indépendants de a tels que

$$\|\tilde{w}_n\|_{H^{n+2}(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k}.$$

Voici maintenant une proposition qui estime les termes du développement de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$. Ce résultat permet d'estimer "la moitié" de $(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_{p,n}$ correspondant aux premiers termes de son développement à l'ordre n .

Proposition 7.A.2.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$ et tout $q \in \mathbb{Z}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q\|_{\log, n} \leq \kappa_n \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0. \quad (7.A.6)$$

Preuve :

Commençons par choisir $p, q, n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{P}_{\log}$ satisfaisant $A_0 r^{-p}a(r, \sigma) = 0$ qui seront fixés jusqu'à la fin de la preuve. Sans nuire à la généralité on peut supposer $n > q$. À nouveau nous allons utiliser la décomposition (7.A.1) avec $k = 2n$. Pour établir le résultat nous partons de

$$\|(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q\|_{\log, n} \leq \|(\tilde{v}_{2n})_q\|_{\log, n} + \|(\tilde{w}_{2n})_q\|_{\log, n}$$

En réutilisant le raisonnement de la preuve précédente, on obtient déjà l'existence d'un $\kappa > 0$ et d'un $k \in \mathbb{N}$ indépendants de a tels que

$$\|(\tilde{v}_{2n})_q\|_{\log, n} \leq \|(\tilde{v}_{2n})_{p,n}\| \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \text{et} \quad \|\tilde{w}_{2n}\|_{H^{2n+2}(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k}$$

Il nous reste donc à majorer $\|(\tilde{w}_{2n})_q\|_{\log, n}$. Pour ceci nous allons utiliser la deuxième inégalité ci-dessus jointe à une formule de Taylor.

Signalons à présent que selon les théorèmes d'injection de Sobolev (cf par exemple [14]), puisque nous nous plaçons en dimension 3 on a $H^{2n+2}(\Omega) \subset \mathcal{C}^{2n}(\bar{\Omega})$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\tilde{w}_{2n} \in \mathcal{C}^{2n}(\bar{\Omega})$ et comme la solution du problème de Helmholtz dépend continuellement des données, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de \tilde{w}_{2n} telles que

$$\sum_{|\alpha| \leq 2n} \sup_{\Omega} |\partial_x^\alpha \tilde{w}_{2n}| \leq \kappa \|\tilde{w}_{2n}\|_{H^{2n+2}(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad (7.A.7)$$

$$\text{avec } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \text{ et } \partial_x^\alpha \tilde{w}_{2n} = \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} \partial_z^{\alpha_3} \tilde{w}_{2n}.$$

Nous appliquons maintenant une formule de Taylor avec reste intégral à \tilde{w}_{2n} . Considérons un triplet

de coordonnées ellipsoïdales (r, φ, ν) et définissons les deux points $\mathbf{x}_r = (x_r, y_r, z_r) = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)$ et $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) = \phi_{\text{el}}(0, \varphi, \nu)$. Puisque $\tilde{w}_{2n} \in \mathcal{C}^{n+1}(\bar{\Omega})$ on a

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_r) &= \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0) \\ &+ \sum_{|\alpha|=n+1} (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)) dt \end{aligned} \quad (7.A.8)$$

$$\text{en posant } (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha = (x_r - x_0)^{\alpha_1} (y_r - y_0)^{\alpha_2} (z_r - z_0)^{\alpha_3}$$

Remarquons que chaque $\partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0)$ n'est fonction que de ν et qu'en tant que telle $\mathbf{x}_0 \mapsto \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{C}^n(I)$. Si on pose $g(\eta) = \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\phi_{\text{el}}(0, 0, \eta))$ alors on a $g \in H^n(S^2)$. Exprimons maintenant $(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha$ en coordonnées ellipsoïdales. En utilisant leur définition donnée par (6.1.6) il vient

$$(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha = r^{|\alpha|} \left(\frac{r}{\xi(r) + 1} \right)^{\alpha_3} (\sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi)^{\alpha_1} (\sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi)^{\alpha_2} \nu^{\alpha_3} \quad (7.A.9)$$

Nous voyons qu'il s'agit de fonctions à variables séparées dont la dépendance angulaire (par rapport à φ et ν) fait intervenir trois fonctions $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ définies par

$$\sigma_x(\varphi, \nu) = \sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi, \quad \sigma_y(\varphi, \nu) = \sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi \quad \text{et} \quad \sigma_z(\varphi, \nu) = \nu. \quad (7.A.10)$$

Ces fonctions sont très régulières en tant que fonctions sur la sphère unité $\sigma_\beta(\varphi, \eta) \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$, $\beta = x, y, z$. On les retrouve dans notre paramétrisation de S^2 définie par (6.1.2). En rassemblant les équations (7.A.9), (7.A.10) et (7.A.7), en développant en série entière par rapport à r on obtient

$$\left\| \left((\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0) \right)_q \right\|_{\log, n} \leq \kappa \sum_{|\beta| \leq |\alpha| + n} \sup_{\Omega} |\partial_{\mathbf{x}}^\beta \tilde{w}_{2n}| \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad (7.A.11)$$

Ceci permet d'obtenir une estimation sur $\|(\tilde{w}_{2n})_q\|_{\log, n}$. En effet reprenant la formule de Taylor (7.A.8). Le terme de reste intégral peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=n+1} (\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)^\alpha \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)) dt \\ &= r^{n+1} \sum_{|\alpha|=n+1} \left(\frac{r}{\xi(r) + 1} \right)^{\alpha_3} \sigma^\alpha(\varphi, \nu) \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{\alpha!} \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_0)) dt \end{aligned} \quad (7.A.12)$$

$$\text{avec } \sigma^\alpha(\varphi, \nu) := \sigma_x^{\alpha_1}(\varphi, \nu) \sigma_y^{\alpha_2}(\varphi, \nu) \sigma_z^{\alpha_3}(\varphi, \nu).$$

Avec cette expression, on voit que le reste intégral appartient à $\mathcal{V}_{n+1/2}^0(\Omega)$. On en tire que sa transformée de Mellin est analytique dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < n + 1/2$. Or on a une expression des $(\tilde{w}_{2n})_q$ au moyen de la transformée de Mellin de \tilde{w}_{2n} . En effet d'après (2.3.2) on a

$$\begin{aligned} (\tilde{w}_{2n})_q &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_q} \mathfrak{M}\{\tilde{w}_{2n} \mathbf{1}_{r < 1}\}(\lambda) r^{\lambda-q} d\lambda \\ &= \frac{1}{2i\pi} \sum_{|\alpha| \leq n} \int_{\mathcal{O}_q} \mathfrak{M}\left\{ r^{|\alpha|} \left(\frac{r}{\xi(r) + 1} \right)^{\alpha_3} \sigma^\alpha(\varphi, \nu) \partial_{\mathbf{x}}^\alpha \tilde{w}_{2n}(\mathbf{x}_0) \mathbf{1}_{r < 1} \right\}(\lambda) r^{\lambda-q} d\lambda \end{aligned}$$

Ci-dessus il n'y a aucune intégrale de contour sur le reste dans la formule de Taylor donnée par (7.A.12) car comme nous l'avons précisé sa transformée de Mellin est analytique dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} < n + 1/2$. En utilisant (7.A.11) et l'expression ci-dessus, on tire l'existence de $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\|(\tilde{w}_{2n})_q\|_{\log, n} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad (7.A.13)$$

■

Voici une deuxième proposition qui permet d'estimer "l'autre moitié" de $((\mathfrak{s}_{-p}\{a\}))_{p, n}$. La preuve de ce résultat est férocement compliquée par le fait que l'opérateur A n'est pas homogène i.e $A_2 \neq 0$ et $A_4 \neq 0$. Il semble que le résultat qui suit est à rapprocher du théorème 3.3 de [76].

Proposition 7.A.3.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$((\mathfrak{s}_{-p}\{a\}))_{p, n} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0. \quad (7.A.14)$$

Preuve :

Choisissons $p, n \in \mathbb{N}$ qui seront fixés jusqu'à la fin de la preuve. Nous posons les notations suivantes pour le développement de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ à l'ordre n et le terme de reste correspondant

$$R\{a\} := \mathfrak{s}_{-p}\{a\} - \sum_{q=-p}^{+n} (\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q r^q \quad \text{et} \quad D\{a\} := \sum_{q=-p}^{+n} (\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q r^q$$

Étant donné le résultat de la proposition 7.A.2, il nous faut seulement montrer l'existence de $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de a (mais dépendants éventuellement de n) tels que le terme de reste satisfasse l'estimation

$$\|R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0.$$

Estimation du reste loin de I Soit $r_* > 0$. Considérons une fonction $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle $\tau(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = 0$ dès que $r < r_*$. Grâce aux résultats des deux lemmes précédents il n'est pas trop dur d'estimer $\|\tau R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)}$. En effet comme le support de τ exclut un voisinage de I , il existe une constante $\kappa > 0$ qui dépend bien sûr de τ mais qui ne dépend pas de a telle que

$$\begin{aligned} \|\tau R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} &\leq \|\tau \mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} + \|\tau D\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} \\ &\leq \kappa \|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^n(\Omega)} + \kappa \|D\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^n(\Omega)} \\ &\leq \kappa \|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^n(\Omega)} + \kappa \sum_{q=-p}^{+n} \|(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q\|_{\log, n} \end{aligned}$$

Vu le résultat des propositions 7.A.1 et 7.A.2, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de a , mais dépendant éventuellement de τ , tels que

$$\|\tau R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0.$$

Soit $r'_* > 0$ assez petit pour que $\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \in \Omega$ dès que $r < r'_*$. À présent choisissons une fonction de troncature $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ décroissante tel que $\chi(r) = 1$ si $r < r'_*/2$ et $\chi(r) = 0$ si $r > r'_*$. En reprenant le raisonnement ci-dessus avec $\tau = 1 - \chi$ nous montrons qu'il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ dépendants de χ, n et p mais indépendants de a tels que

$$\begin{aligned} \|R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} &\leq \|\chi R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} + \|(1 - \chi)R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} \\ &\leq \|\chi R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} + \kappa \|a\|_{\log, k}. \end{aligned}$$

Estimation du reste au voisinage de I Pour terminer la preuve il faut donc majorer $\|\chi R\{a\}\|_{\mathcal{V}_{n-1/2}^n(\Omega)}$. Pour ceci nous allons avoir recours à la transformée de Mellin. Commençons par rappeler que d'après l'identité de Parseval énoncé au §2.C.1, il existe $\kappa > 0$ indépendant de a tel que

$$\|\chi R\{a\}\|_{\mathcal{V}_{n-1/2}^n(\Omega)}^2 \leq \kappa \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=n-1/2} |\lambda|^{2(k-q)} \|\mathfrak{M}\{\chi R\{a\}\}(\lambda)\|_{H^q(S^2)}^2 d\lambda$$

Étant donnée une fonction $V \in H^k(S^2)$ posons

$$|V|_{S^2, k, \lambda}^2 := \sum_{q=0}^k |\lambda|^{2(k-q)} \|V\|_{H^q(S^2)}^2 \quad \text{d'où pour } \alpha \leq n,$$

$$\|\chi R\{a\}\|_{\mathcal{V}_{\alpha-1/2}^k(\Omega)}^2 \leq \kappa \sum_{l=0}^k \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\alpha-1/2} |\mathfrak{M}\{\chi R\{a\}\}(\lambda)|_{S^2, l, \lambda}^2 d\lambda.$$

Comme $\chi R\{a\} \in \mathcal{V}_{n-1/2}^\infty(\Omega)$ on a en particulier $\chi R\{a\} \in \mathcal{V}_{n-1/2}^{n+2}(\Omega)$. Considérons $g \in \mathcal{V}_{n-1/2}^n(\Omega)$ tel que $\text{supp } g \subset \Omega$ et satisfaisant $A_0 \chi R\{a\} = g$. Alors on peut appliquer la transformation de Mellin à cette relation et, en utilisant l'équation (6.3.7) qui traduit l'hypothèse **H6** satisfaite par $\mathcal{A}_0(\lambda)$, pour tout $\alpha \leq n$, on obtient $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ indépendants de $a(r, \sigma)$ tels que

$$\mathfrak{M}\{\chi R\{a\}\}(\lambda) = \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{g\}(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \quad \text{d'où} \tag{7.A.15}$$

$$\|\chi R\{a\}\|_{\mathcal{V}_{\alpha-1/2}^k(\Omega)}^2 \leq \frac{\kappa_1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\}=\alpha-1/2} |\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{g\}(\lambda)|_{S^2, k, \lambda}^2 d\lambda \leq \kappa_2 \|g\|_{\mathcal{V}_{\alpha-1/2}^k(\Omega)}^2$$

À présent nous allons utiliser l'équation satisfaite par $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ pour obtenir une estimation de cette norme. D'après la définition de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$ on a $A(R\{a\} + D\{a\}) = 0$ au voisinage de I , pour tout $\alpha \leq n$ on a

$$\begin{aligned} A\chi R\{a\} &= [A, \chi] R\{a\} + \chi AR\{a\} = [A, \chi] R\{a\} - \chi AD\{a\} \\ A_0 \chi R\{a\} &= [A, \chi] R\{a\} - \chi AD\{a\} - r^2 A_2 \chi R\{a\} - r^4 A_4 \chi R\{a\}. \end{aligned} \tag{7.A.16}$$

Dans les égalités ci-dessus, apparaît $A \cdot D\{a\}$ dont nous affirmons qu'il appartient à $\mathcal{V}_{n-1/2}^\infty(\Omega)$. En effet en nous servant du lemme 2.3.1 qui donne des relations algébriques satisfaites par les termes du développement de $\mathfrak{s}_{-p}\{a\}$, on obtient que

$$A \cdot D\{a\} = \sum_{q=n+1}^{n+2} r^2 A_2 r^{-2} r^q (\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_{q-2} + \sum_{q=n+1}^{n+4} r^4 A_4 r^{-4} r^q (\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_{q-4} \in \mathcal{V}_n^\infty(\Omega)$$

En utilisant cette expression et le fait que $[A, \chi] R\{a\}$ est nul pour les $\mathbf{x} = \phi_{e1}(r, \varphi, \nu)$ tels que $r < r'_*/2$, on en tire que pour tout $\alpha \leq n - 1/2$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ dépendants de m et α mais indépendants de a tels que

$$\|[A, \chi] R\{a\} - \chi AD\{a\}\|_{\mathcal{V}_\alpha^m(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0(r^{-p}a(r, \sigma)) = 0. \tag{7.A.17}$$

À partir de la deuxième équation de (7.A.16), en appliquant plusieurs fois l'identité (7.A.15) puis en utilisant en même temps (7.A.17), on en tire que l'existence de $\kappa_i > 0$, $i = 1, 2, 3, \dots$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de

a mais dépendants éventuellement de n, p, χ tels que

$$\begin{aligned}
 \|\chi R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} &\leq \kappa_1 \left(\|a\|_{\log, k} + \|R\{a\}\|_{\gamma_{n-2-1/2}^{n+2}(\Omega)} \right) \\
 &\leq \kappa_2 \left(\|a\|_{\log, k} + \|R\{a\}\|_{\gamma_{n-4-1/2}^{n+4}(\Omega)} \right) \\
 &\quad \vdots \\
 &\leq \kappa_3 \left(\|a\|_{\log, k} + \|R\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)} \right) \\
 &\leq \kappa_4 \left(\|a\|_{\log, k} + \|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)} + \|D\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)} \right) \\
 &\leq \kappa_5 \left(\|a\|_{\log, k} + \|\mathfrak{s}_{-p}\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)} + \sum_{q=-p}^n \|(\mathfrak{s}_{-p}\{a\})_q r^q\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)} \right)
 \end{aligned}$$

Pour conclure on utilise finalement le résultat de la proposition 7.A.2 et des majorations brutales qui permettent d'estimer $\|\chi D\{a\}\|_{\gamma_{-p-2}^{2n+p+2}(\Omega)}$. On en tire l'existence de $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de a tels que

$$\|\chi R\{a\}\|_{\gamma_{n-1/2}^n(\Omega)} \leq \kappa \|a\|_{\log, k}.$$

Ceci conclut la preuve. ■

7.A.2 Dépendance des profils en champ proche par rapport à leur argument

Nous allons maintenant chercher à démontrer un résultat semblable à celui de la proposition 7.A.3 mais pour des fonctions définies dans le domaine Ω_N . Au lieu de décomposer la preuve en trois propositions, comme nous l'avons fait pour le champ lointain, nous ne formulons qu'une seule proposition dont la preuve sera découpée en trois étapes. Ici la proposition 7.A.4 est un peu plus facile à démontrer que la proposition 7.A.3 car seule A_0 intervient (et pas A_2 et A_4). Le résultat suivant pourra notamment être appliqué aux profils en champ proche $\mathfrak{S}_p\{a\}$.

Proposition 7.A.4.

Soit $p \in \mathbb{N}$. Étant donnés $g \in \mathbb{W}_{p-3/2}^\infty(\Omega_N)$ et $h \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_N)$ soit $U \in \mathbb{W}_{p+1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$A_0 U = R^2 g \quad \text{dans } \Omega_N, \quad U = h \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad L_q(U) = 0 \quad \forall q \geq 1 \quad \text{et} \quad d^\circ L_0(U) = 0$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants des données g et h tels que

$$\langle\langle U \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p,k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right)$$

Preuve :

Pour démontrer ce résultat nous allons procéder en trois étapes qui ressemblent chacune à l'un des trois lemmes précédents que nous avons montré sur les profils en champ lointain. La situation est ici un peu différente parce que l'opérateur A_0 est homogène contrairement à A . Nous choisissons tout de suite un $p \in \mathbb{N}$ arbitraire mais fixé jusqu'à la fin de la preuve.

Étape 1 : On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de g et h tels que

$$\|U\|_{\mathcal{W}_{p+1/2}^n(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p,k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right)$$

Pour établir ceci nous reprenons la démonstration de la proposition 7.2.2 et nous considérons une décomposition de g sous la forme

$$g = g'' + \sum_{\Re\{p_j\} \geq -2} R^{p_j} g_j = g'' + g' \quad \text{avec} \quad g_j \in \mathbb{P}_{\log} \quad \text{et} \quad g'' \in \mathcal{W}_{-5/2}^\infty(\Omega_N).$$

On peut de même décomposer U sous la forme $U = U' + U''$ où on a $U' = A_0^{(-1)} \cdot R^2 g' = \sum_{q=0}^p R^q U'_q$ avec $U'_q \in \mathbb{P}_{\log}$ (rappelons que $A_0^{(-1)}$ a été défini par 2.7.5) et où U'' est l'unique élément de $\mathscr{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfaisant

$$A_0 U'' = R^2 g'' \quad \text{dans } \Omega_N, \quad U'' = h - U' \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad \text{et} \quad d^\circ L_0(U'') = 0$$

Nous estimons tour à tour U' puis U'' en norme à poids. D'après la proposition 2.7.1 il existe des $\kappa, \kappa', \kappa'' > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants des données g et h telles que

$$\|U'\|_{\mathscr{W}_{p+1/2}^n(\Omega_N)} \leq \kappa \sum_{q=0}^p \|U'_q\|_{\log, n} \leq \kappa' \sum_{q=0}^p \|g'_q\|_{\log, k} \leq \kappa'' \langle\langle g \rangle\rangle_{p, |p|+k} \quad (7.A.18)$$

Il reste à traiter le cas de U'' . Par application de la proposition 7.2.1, et en utilisant (7.A.18), on obtient l'existence de constantes $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 > 0$ indépendantes de g et h telles que

$$\begin{aligned} \|U''\|_{\mathscr{W}_{p+1/2}^n(\Omega_N)} &\leq \kappa_0 \|U''\|_{\mathscr{W}_{1/2}^n(\Omega_N)} \leq \kappa_1 \left(\|g''\|_{\mathscr{W}_{-3/2}^n(\Omega_N)} + \|h\|_{H^n(\Gamma_N)} + \|U'\|_{H^n(\Gamma_N)} \right) \\ &\leq \kappa_2 \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p, n+3} + \|h\|_{H^n(\Gamma_N)} + \sum_{q=0}^p \|U'_q\|_{\log, n} \right) \\ &\leq \kappa_3 \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p, n+3} + \|h\|_{H^n(\Gamma_N)} \right) \end{aligned} \quad (7.A.19)$$

La conclusion de l'étape 1 vient finalement en réunissant les inégalités (7.A.18) et (7.A.19). Nous passons à une deuxième étape. Nous noterons $(U)_q$ les termes du développement de U .

Etape 2 : On montre que pour tout $n, q \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de g et h tels que

$$\|(U)_q\|_{\log, n} \leq \kappa \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p, k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right)$$

Pour démontrer ceci considérons tout d'abord une fonction de troncature $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\chi(R) = 0$ tant que $R \leq 1$ et $\chi(R) = 1$ dès que $R \geq 2$. On a alors

$$A_0(\chi U) = \chi A_0 U + [A_0, \chi] U = \chi g + [A_0, \chi] U \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times S^2.$$

On pose pour la suite de cette étape $V := [A_0, \chi] U$. On obtient $(U)_q$ à partir de U par transformée de Mellin à partir de la formule (2.4.2),

$$(U)_q = \frac{1}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft q} \mathfrak{M}\{\chi U\}(\lambda) R^{\lambda-q} d\lambda = R^{-q} A_0^{(-1)} R^q g_{q-2} + \frac{1}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft q} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{V\}(\lambda) R^{\lambda-q} d\lambda$$

Remarquons que comme il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha > 0$ tel que $V(R, \sigma) = 0$ dès que $R < 1/\alpha$ ou $R > \alpha$, la fonction $\lambda \mapsto \mathfrak{M}\{V\}(\lambda)$ est analytique dans \mathbb{C} tout entier. Alors en reprenant l'expression de $\mathcal{A}_0(\lambda)$ donnée par (6.3.6) on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\circlearrowleft q} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \mathfrak{M}\{V\}(\lambda) R^{\lambda-q} d\lambda = \begin{cases} \frac{P_{+q} + P_{-q}}{2q} \cdot \mathfrak{M}\{V\}(q) & \text{si } q \neq 0 \\ P_0 \cdot \frac{d\mathfrak{M}\{V\}}{d\lambda}(0) + \ln(R) P_0 \cdot \mathfrak{M}\{V\}(0) & \text{si } q = 0 \end{cases}$$

Rappelons que les opérateurs P_q sont des projecteurs définis par (6.3.6). Dans tous les cas, en utilisant le lemme 2.7.1 pour majorer le terme associé à g , on voit qu'il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de g et h tels que

$$\|(U)_q\|_{\log, n} \leq \kappa \left(\|g_{q-2}\|_{\log, k} + \|\mathfrak{M}\{V\}(q)\|_{H^n(S^2)} + \left\| \frac{d\mathfrak{M}\{V\}}{d\lambda}(q) \right\|_{H^n(S^2)} \right) \quad (7.A.20)$$

Notons tout de suite qu'on a $\|g_{q-2}\|_{\log, k} \leq \langle\langle g \rangle\rangle_{p, |q|+k+2}$. Considérons un réel $\alpha > 0$ tel que $V(R, \sigma) = 0$ dès que $R < 1/\alpha$ ou $R > \alpha$. On a alors

$$\mathfrak{M}\{V\}(q) = \int_{1/\alpha}^{\alpha} V(R) R^{-q} \frac{dR}{R} \quad \text{et} \quad \frac{d\mathfrak{M}\{V\}}{d\lambda}(q) = \int_{1/\alpha}^{\alpha} V(R) \ln(1/R) R^{-q} \frac{dR}{R}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans ces expressions explicites et en reprenant la définition $V := [A_0, \chi]U$, on tire l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de g et h tels que

$$\|\mathfrak{M}\{V\}(q)\|_{H^n(S^2)} + \left\| \frac{d\mathfrak{M}\{V\}}{d\lambda}(q) \right\|_{H^n(S^2)} \leq \kappa \|U\|_{\mathscr{W}_{p+1/2}^{n+2}(\Omega_N)} \quad (7.A.21)$$

Pour conclure la preuve de l'étape 2, il suffit de réunir (7.A.20) et (7.A.21) et d'utiliser le résultat de la première étape.

Etape 3 : On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de g et h tels que

$$\|U - \sum_{q=-n}^{+p} R^q(U)_q\|_{\mathscr{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p,k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right)$$

Pour démontrer ce résultat on introduit à nouveau une fonction de troncature $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$ de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\chi(R) = 0$ tant que $R \leq 1$ et $\chi(R) = 1$ dès que $R \geq 2$, et on pose également les notations

$$W := U - \sum_{q=-n}^{+p} R^q(U)_q \quad \text{et} \quad G := R^2 g - R^2 \sum_{q=-n-2}^{p-2} R^q g_q$$

Pour estimer W en norme à poids, nous allons le décomposer en $W = \chi W + (1 - \chi)W$. Notons tout d'abord que grâce aux étapes 1 et 2 on démontre par un calcul simple l'existence de $\kappa, \kappa' > 0$ indépendants de g et h tels que

$$\|(1 - \chi)W\|_{\mathscr{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)} \leq \kappa \left(\|U\|_{\mathscr{W}_{p+1/2}^n(\Omega_N)} + \sum_{q=-n}^{+p} \|(U)_q\|_{\log, n} \right) \leq \kappa' \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p,k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right) \quad (7.A.22)$$

Nous allons maintenant traiter le cas de χW en utilisant la transformée de Mellin. Comme par construction $\chi W, \chi G \in \mathscr{W}_{-n-1/2}^\infty(\Omega_N)$ alors $\mathfrak{M}\{\chi W\}(\lambda)$ et $\mathfrak{M}\{\chi G\}(\lambda)$ sont analytiques dans le demi-plan $\Re\{\lambda\} \geq -n$. Suivant les équations satisfaites par U dans Ω_N on a

$$A_0 \chi W = [A_0, \chi]W + \chi G \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times S^2$$

$$\mathcal{A}_0(\lambda) \cdot \mathfrak{M}\{\chi W\}(\lambda) = \mathfrak{M}\{[A_0, \chi]W\}(\lambda) + \mathfrak{M}\{\chi G\}(\lambda) \quad \text{pour } \Re\{\lambda\} \geq -n$$

En utilisant l'hypothèse **H6** satisfaite par $\mathcal{A}_0(\lambda)$, on tire l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de g et h telle que $\forall \beta \in \mathbb{N}$ et $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\Re\{\lambda\} = -n - 1/2$ on a

$$\|\mathfrak{M}\{\chi W\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 \leq \kappa \left(\|\mathfrak{M}\{[A_0, \chi]W\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 + \|\mathfrak{M}\{\chi G\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 \right). \quad (7.A.23)$$

Pour exprimer la norme à poids de χW , on utilise maintenant la formule de type Parseval de la proposition 2.C.2 et on y injecte les inégalités (7.A.23). On obtient l'existence de $\kappa_0, \kappa_1 > 0$ indépendants de g et h tels que

$$\begin{aligned} \|\chi W\|_{\mathscr{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)}^2 &= \kappa_0 \sum_{\alpha+\beta \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\} = -n+1/2} |\lambda|^{2\alpha} \|\mathfrak{M}\{\chi W\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 d\lambda \\ &\leq \kappa_1 \sum_{\alpha+\beta \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\} = -n+1/2} |\lambda|^{2\alpha} \|\mathfrak{M}\{[A_0, \chi]W\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 d\lambda \\ &\quad + \kappa_1 \sum_{\alpha+\beta \leq n} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Re\{\lambda\} = -n+1/2} |\lambda|^{2\alpha} \|\mathfrak{M}\{\chi G\}(\lambda)\|_{H^\beta(S^2)}^2 d\lambda \end{aligned}$$

Comme il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $[A_0, \chi]W = 0$ dès que $R > \alpha$ ou $R < 1/\alpha$, en reprenant les résultats des étapes 1 et 2, on tire de ce qui précède l'existence de $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 > 0$ et de $k \in \mathbb{N}$ indépendants de g et h tels que

$$\begin{aligned} \|\chi W\|_{\mathcal{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)}^2 &\leq \kappa_2 \left(\| [A_0, \chi]W \|_{\mathcal{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)}^2 + \|\chi G\|_{\mathcal{W}_{-n+1/2}^n(\Omega_N)}^2 \right) \\ &\leq \kappa_3 \left(\|U\|_{\mathcal{W}_{p+1/2}^{n+2}(\Omega_N)}^2 + \sum_{q=-n}^p \|(U)_q\|_{\log, n+2}^2 + \left\| g - \sum_{q=-n-2}^{p-2} R^q g_q \right\|_{\mathcal{W}_{-n-3/2}^n(\Omega_N)}^2 \right) \quad (7.A.24) \\ &\leq \kappa_3 \left(\langle\langle g \rangle\rangle_{p,k} + \|h\|_{H^k(\Gamma_N)} \right) \end{aligned}$$

On peut conclure l'étape 3 en réunissant les inégalités (7.A.22) et (7.A.24). Avec l'étape 3 on conclut définitivement la preuve de la proposition. ■

7.A.3 Conclusions

Nous pouvons maintenant nous servir de la proposition 7.A.4 pour démontrer d'abord la proposition 7.5.1 que nous avons annoncé dans la section précédente.

Proposition 7.5.1.

Pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} (\langle\langle \mathfrak{s}_{-p}\{a\} \rangle\rangle)_{p,n} &\leq \kappa \|a\|_{\log, k} \quad \forall a \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0 r^{-p} a(r, \sigma) = 0 \\ \langle\langle \mathfrak{S}_p\{b\} \rangle\rangle_{p,n} &\leq \kappa \|b\|_{\log, k} \quad \forall b \in \mathbb{P}_{\log} \text{ tel que } A_0 R^p b(R, \sigma) = 0 \end{aligned}$$

Preuve :

Choisissons un $p \in \mathbb{N}$ qui restera fixé jusqu'à la fin de la preuve. Étant donnée la proposition 7.A.3 sur les profils en champ lointain, on peut se contenter de démontrer seulement le résultat sur $\mathfrak{S}_p\{b\}$. Revenons sur la preuve des lemmes 7.2.1 et 7.2.2. Rappelons que $\mathfrak{S}_p\{b\}$ peut se décomposer sous la forme $\mathfrak{S}_p\{b\} = R^p b(R, \sigma) + V$ où $V \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N)$ satisfait

$$A_0 V = 0 \quad \text{dans } \Omega_N, \quad V = -R^p b(R, \sigma) \quad \text{sur } \Gamma_N, \quad d^\circ L_0(V) = 0.$$

Par application de la proposition 7.A.4 pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe donc $\kappa, \kappa' > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de $b(R, \sigma)$ tels que

$$\langle\langle \mathfrak{S}_p\{b\} \rangle\rangle_{p,n} \leq \langle\langle R^p b(R, \sigma) \rangle\rangle_{p,n} + \langle\langle V \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa \left(\|b\|_{\log, k} + \|R^p b(R, \sigma)\|_{H^k(\Gamma_N)} \right) \leq \kappa' \|b\|_{\log, k}.$$

■

Il nous reste maintenant à démontrer un résultat semblable mais sur les fonctions u_n^ε et U_n^ε construites au §7.4.5, ce qui permettra de conclure définitivement l'estimation d'erreur.

Proposition 7.5.2.

Si les couples $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$ désignent les solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{reg}}$, alors pour tout $p, n \in \mathbb{N}$, il existe $\kappa > 0$ et $k, q \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k \sum_{q=0}^{p-1} \left\{ ((u_q^\varepsilon))_{q,k} + \langle\langle U_q^\varepsilon \rangle\rangle_{q,k} \right\} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Choisissons un $p \in \mathbb{N}$ qui sera fixé jusqu'à la fin de la preuve. Pour démontrer le résultat nous revenons à la construction de u_n^ε et U_n^ε exposée au §7.4.5 et en particulier à la décomposition (7.4.18). Commençons par noter que d'après la définition 7.4.20 et les propositions 7.4.4 et 7.5.1 pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} ((v_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle V_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} &\leq \kappa \left(\|\ell_0(w_p^\varepsilon)\|_{\log,k} + \|L_0(W_p^\varepsilon)\|_{\log,k} + \|L_0(\tilde{W}_p^\varepsilon)\|_{\log,k} \right) \\ &\leq \kappa \left(((w_p^\varepsilon))_{p,|p|+k} + \langle\langle W_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,|p|+k} + \langle\langle \tilde{W}_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,|p|+k} \right) \end{aligned}$$

D'où l'on tire directement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$((u_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle U_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa \left(((w_p^\varepsilon))_{p,k} + \langle\langle W_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,k} + \langle\langle \tilde{W}_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,k} \right) \quad (7.A.25)$$

À présent vue la définition de w_p^ε et W_p^ε donnée par (7.4.18) et par application directe de la proposition 7.5.1 on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$((w_p^\varepsilon))_{p,n} + \langle\langle W_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^k \sum_{q=0}^{p-1} ((u_q^\varepsilon))_{q,k} + \langle\langle U_q^\varepsilon \rangle\rangle_{q,k} \quad (7.A.26)$$

Enfin pour conclure la preuve, il reste à reprendre la définition de \tilde{W}_p^ε donnée au §7.4.5 et à lui appliquer la proposition 7.A.4; on en tire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\langle\langle \tilde{W}_p^\varepsilon \rangle\rangle_{p,n} \leq \kappa \left(\langle\langle U_{p-2}^\varepsilon \rangle\rangle_{p-2,k} + \langle\langle U_{p-4}^\varepsilon \rangle\rangle_{p-4,k} \right) \quad (7.A.27)$$

On conclut définitivement la preuve en réunissant les estimations (7.A.25), (7.A.26) et (7.A.27). ■

7.B Continuité de l'opérateur de raccord dans les espaces filaires

Le but de cette deuxième annexe est de démontrer la continuité de l'opérateur \mathcal{L}_2 et l'opérateur adjoint $\overline{\mathcal{L}}_2$ dans les espaces $\mathbb{E}^s(J)$, $s \in \mathbb{R}_+$. Commençons par énoncer quelques remarques permettant d'alléger cette preuve. Tout d'abord notons que, au vu de la définition des espaces $\mathbb{E}^s(J)$ donnée par (7.4.9), pour tout exposant $s \in \mathbb{R}_+$ l'espace $\mathbb{E}^s(J)$ peut être obtenu par interpolation entre deux espaces d'exposant entier pairs $\mathbb{E}^{2n}(J)$ (cf [83]). Ainsi si nous démontrons que l'opérateur \mathcal{L}_2 (resp. $\overline{\mathcal{L}}_2$) est continu de $\mathbb{E}^{2n}(J)$ dans $\mathbb{E}^{2n}(J)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il s'en suit d'après le théorème principal d'interpolation (voir théorème 5.1 chap.1 de [83]), que \mathcal{L}_2 (resp. $\overline{\mathcal{L}}_2$) est continu de $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$. Par ailleurs, la preuve qui suit étant basée sur l'expression explicite de \mathcal{L}_2 , nous ne l'effectuons que pour \mathcal{L}_2 et laissons au lecteur le soin de l'adapter pour $\overline{\mathcal{L}}_2$.

Proposition 7.B.1.

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, l'opérateur \mathcal{L}_2 est continu de $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$.

Preuve :

Par densité de $\mathcal{C}^\infty(J)$ dans $\mathbb{E}^{2n}(J)$ il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ tel que pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(J)$ on a $\mathcal{L}_2 u \in \mathbb{E}^{2n}(J)$ et $\|\mathcal{L}_2 u\|_{\mathbb{E}^{2n}(J)} \leq \kappa \|u\|_{\mathbb{E}^{2n}(J)}$. Puisque $e^{ikt|\nu-z|}$ est borné sur $[-1, +1]$, il est clair qu'il existe $\kappa > 0$ tel que $\mathcal{L}_2 u \in \mathbb{E}^0(J) = L^2(J)$ pour tout $u \in \mathcal{C}^\infty(J)$ et $\|\mathcal{L}_2 u\|_{\mathbb{E}^0(J)} \leq \kappa \|u\|_{\mathbb{E}^0(J)}$. Nous

montrons maintenant que ceci est vérifié pour $n > 0$. Avant d'entamer cette preuve nous énonçons une identité calculatoire facile à vérifier : $\forall u \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\int_0^1 \int_{-1}^{+1} (ikt)^{2n} u(z) e^{ikt|\nu-z|} dz dt \right) &= \int_0^1 \int_{-1}^{+1} (ikt)^{2n+1} \text{sign}(\nu-z) u(z) e^{ikt|\nu-z|} dz dt \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\int_0^1 \int_{-1}^{+1} (ikt)^{2n+1} \text{sign}(\nu-z) u(z) e^{ikt|\nu-z|} dz dt \right) &= \int_0^1 \int_{-1}^{+1} (ikt)^{2n+2} u(z) e^{ikt|\nu-z|} dz dt \\ &\quad + 2u(\nu) \int_0^1 (ikt)^{2n+1} dt \end{aligned}$$

Notons par ailleurs que $(1-\nu^2)\partial_\nu$ est continu de $\mathbb{E}^{k+1}(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^k(\mathbb{J})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (car $(1-\nu^2)\partial_\nu$ induit un opérateur différentiel d'ordre 1 sur S^2). Les identités ci-dessus permettent de montrer facilement par récurrence qu'il existe quatre familles de fonctions $g_q^{(1)}, g_q^{(2)}, g_q^{(3)}, g_q^{(4)} \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$, $q \in \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ on a

$$\begin{aligned} (\partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu)^n \mathcal{L}_2 u &= \\ &\sum_{q=0}^n g_q^{(1)}(\nu) \int_{-1}^{+1} \int_0^1 (ikt)^{2q} e^{ikt|\nu-z|} u(z) dt dz + \sum_{q=0}^{n-2} g_q^{(2)}(\nu) (1-\nu^2)\partial_\nu (\partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu)^q u \\ &+ \sum_{q=0}^n g_q^{(3)}(\nu) \int_{-1}^{+1} \int_0^1 (ikt)^{2q+1} \text{sign}(\nu-z) e^{ikt|\nu-z|} u(z) dt dz + \sum_{q=0}^{n-2} g_q^{(4)}(\nu) (\partial_\nu(1-\nu^2)\partial_\nu)^q u \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $ikt e^{ikt|\nu-z|}$ est borné par rapport à t et z sur $[0, 1] \times [-1, +1]$, ceci conduit directement à la preuve de la continuité de \mathcal{L}_2 de $\mathbb{E}^{2n}(\mathbb{J})$ dans $\mathbb{E}^{2n}(\mathbb{J})$. ■

CHAPITRE 8

Modèle approché et expériences numériques pour l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord d'un objet filiforme

Introduction

Nous suivons maintenant la méthodologie que nous avons illustrée en deux dimensions dans la deuxième partie de la thèse. À présent que nous disposons d'une étude asymptotique complète de l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un fil, nous allons utiliser cette analyse pour proposer un modèle approché. Ce chapitre sera une version tridimensionnelle des chapitres 4 et 5. Un tel modèle approché se prêtera mieux que le problème exact de départ à la résolution numérique parce qu'il exigera moins de degrés de liberté pour prendre en compte la présence du fil.

Dans une première section, nous reformulerons le problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet par la méthode des domaines fictifs. Dans une deuxième section nous présenterons le modèle approché qui consistera en une formulation en domaines fictifs semblable mais avec un espace de multiplicateurs de Lagrange restreint en tenant compte de l'analyse asymptotique du chapitre 7. Nous étudierons le caractère bien posé de ce modèle. Dans la section suivante nous en proposerons une analyse asymptotique, mais nous ne dériverons que le premier terme.

Ensuite nous montrerons que la formulation en domaines fictifs du modèle approché est équivalente à une équation intégrale que nous interpréterons comme une version scalaire de l'équation de Pocklington. Nous pourrions alors fournir un résultat d'estimation d'erreur entre la solution de l'équation intégrale par potentiel de simple couche associée au problème exact et la solution de l'équation intégrale associée au modèle simplifié.

Dans une dernière section nous nous intéresserons à la résolution numérique du modèle approché. Nous comparerons les performances d'un schéma de discrétisation standard et celles d'un schéma de Galerkin enrichi au travers de résultats numériques. Enfin nous proposerons un équivalent tridimensionnel du schéma de type Holland introduit en section 5.4, présenterons les résultats obtenus pour un calcul dans les mêmes conditions que pour les deux schémas précédents, et constaterons que la précision du schéma de type Holland est équivalente à celle du schéma de Galerkin enrichi.

8.1 Géométrie et formulation en domaines fictifs du problème exact

Dans cette section nous revenons sur le problème traité au chapitre précédent. Nous en rappelons brièvement la géométrie. Nous réutiliserons dans ce chapitre les notations introduites en section 6.1. Nous présenterons ensuite une formulation en domaine fictifs du problème traité au chapitre 7. Enfin nous introduirons la formulation en domaines fictifs correspondant au modèle approché.

Géométrie du domaine initial Étant donné un réel $\rho > 0$ suffisamment grand, le problème sans obstacle sera posé dans la boule de rayon ρ et de centre 0 avec des conditions sur son bord. On pose donc

$$\Omega := B(0, \rho) \quad \text{et} \quad \Gamma := \partial\Omega. \quad (8.1.1)$$

La frontière Γ interviendra en tant que frontière fictive sur laquelle sera appliquée une condition de rayonnement de Sommerfeld. Nous nous intéresserons au problème de la diffraction d'une onde acoustique par un obstacle de forme filaire, c'est-à-dire un objet approchant le segment

$$I = \left\{ \mathbf{x}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0 \text{ et } |z| \leq 1 \right\} \quad (8.1.2)$$

Cet objet diffractant sera décrit dans les coordonnées ellipsoïdales que nous noterons à nouveau (r, φ, ν) . Ces coordonnées ont été introduites au §6.1.1. Elles sont définies par le paramétrage $\phi_{\text{el}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui associe à (r, φ, ν) le triplet (x, y, z) tel que

$$x = r\sqrt{1-\nu^2} \cos \varphi, \quad y = r\sqrt{1-\nu^2} \sin \varphi, \quad z = \xi(r)\nu \quad \text{avec} \quad \xi(r) = \sqrt{1+r^2}.$$

On introduit également le paramétrage de la sphère unité $\phi_{S^2} : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$ qui associe à un couple (φ, η) le point de la sphère de coordonnées cartésiennes $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ données par

$$\sigma_x = \sqrt{1-\eta^2} \cos \varphi, \quad \sigma_y = \sqrt{1-\eta^2} \sin \varphi, \quad \sigma_z = \eta.$$

Cette définition permet également d'introduire le paramétrage ϕ_{sp} défini par $\phi_{\text{sp}}(\mathbb{R}, \varphi, \eta) = (\mathbb{R}, \phi_{S^2}(\varphi, \eta))$. On définit enfin le domaine d'étude et le bord du fil à l'aide d'une équation exprimée dans le système de coordonnées ellipsoïdales, à l'aide d'une fonction $\Phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

$$\begin{aligned} \Gamma_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r = \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), \quad (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \\ \Omega_\varepsilon &= \left\{ \mathbf{x} = \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid r > \varepsilon \Phi(\varphi, \nu), \quad (\varphi, \nu) \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1] \right\} \cap \Omega \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Ce type d'équation assure en particulier que " $\Gamma_\varepsilon \rightarrow I$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ ". La fonction Φ est supposée être très régulière, et admettre la symétrie de révolution au voisinage des pointes. Ces hypothèses sont formulées de la manière suivante

F 1 : Il existe $\Phi_0 > 0$ tel que $\Phi_0 < \Phi(\varphi, \nu) < 1 \quad \forall \sigma \in S^2$,

F 2 : Il existe $\nu_0 \in]0; 1[$ tel que $\partial_\varphi \Phi(\varphi, \nu) = 0$ pour $|\nu| > \nu_0$,

F 3 : $(\phi_{S^2}^* \Phi) \in C^\infty(S^2)$.

Définition du domaine normalisé On introduit également un ensemble de notations relatives au domaine "après changement d'échelle" dans lequel sera défini le champ proche. Tout d'abord rappelons la définition du changement d'échelle pour ce chapitre

$$\Xi^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que} \quad \phi_{\text{el}}^{-1} \circ \Xi^\varepsilon \circ \phi_{\text{sp}}(\mathbb{R}, \varphi, \eta) = (\varepsilon \mathbb{R}, \varphi, \eta)$$

$$\Xi^{\varepsilon^{-1}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+ \times S^2 \quad \text{tel que} \quad \phi_{\text{sp}}^{-1} \circ \Xi^{\varepsilon^{-1}} \circ \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) = (r/\varepsilon, \varphi, \nu)$$

Le domaine normalisé sera en effet un sous-domaine $\mathbb{R}_+ \times S^2$ dans lequel les coordonnées seront notées (R, φ, η) définie par le paramétrage $(R, \varphi, \eta) \mapsto (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta))$. Nous définirons alors le fil scalé Γ_N comme l'image par Ξ^ε du fil Γ_ε et le domaine normalisé Ω_N sera son extérieur

$$\Gamma_N := \{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R = \Phi(\varphi, \eta) \} = \Xi^{\varepsilon, -1}(\Gamma_\varepsilon),$$

$$\Omega_N := \{ (R, \phi_{S^2}(\varphi, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times S^2 \mid R > \Phi(\varphi, \eta) \}.$$

Problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet homogène La solution du problème de diffraction \mathcal{P}^ε auquel nous nous intéressons initialement est notée u^ε . Il s'agit d'un problème de Helmholtz avec un second membre $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dont le support exclut un voisinage de l'origine. On impose une condition de Dirichlet homogène sur Γ_ε et une condition de radiation qui se ramène à une équation posée sur Γ . En résumé le problème s'écrit

$$(\mathcal{P}^\varepsilon) : \begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^2(\Omega_\varepsilon) \text{ telle que} \\ \Delta u^\varepsilon + \omega^2 u^\varepsilon = -f & \text{dans } \Omega_\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 & \text{sur } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (8.1.4)$$

L'expression de T_Γ a été donnée par la formule (6.B.1). Le problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ ci-dessus est bien posé. Comme par définition $u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$, le prolongement de u^ε par 0 dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ est un élément de $H^1(\Omega)$. Nous le noterons u^ε . En vue d'introduire une formulation en domaine fictifs de $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ nous posons

$$p^\varepsilon := \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon}) - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u^\varepsilon|_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}) \quad (8.1.5)$$

Ici n_{Γ_ε} désigne la normale à Γ_ε dirigée vers l'intérieur de Ω_ε . Avec la deuxième égalité, nous avons fait apparaître p^ε comme le saut de la dérivée normale de u^ε sur Γ_ε . En reprenant le raisonnement du §4.1.3 mutatis mutandis, le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ est l'unique solution du problème de type point-selle, suivant dit "formulation en domaines fictifs"

$$(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{tels que}$$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{w} + a(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega} f \bar{w}, & \forall w \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, & \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon). \end{cases} \quad (8.1.6)$$

$$\text{avec } a(v, w) := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_{\Omega} v \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma v, \quad \forall v, w \in H^1(\Omega).$$

Équation intégrale associée au problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet Nous présentons de plus une autre formulation du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ qui prendra la forme d'une équation portant uniquement sur p^ε au lieu de porter sur u^ε ou sur $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$. Il s'agira d'une équation intégrale par potentiel de simple couche. Concernant les formulations intégrales pour les problèmes de diffraction scalaire nous renvoyons le lecteur à [29, 91].

Considérons à nouveau le champ limite u^0 défini par (6.3.16). On sait que u^0 satisfait $\Delta u^0 + \varpi^2 u^0 = -f$ dans Ω au sens de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Par ailleurs, en choisissant des fonctions test $v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$, on déduit de (8.1.6) que u^ε vérifie $\Delta u^\varepsilon + \varpi^2 u^\varepsilon = -f$ dans $\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon$ au sens de $L^2_{\text{loc}}(\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$. Par ailleurs u^ε et u^0 vérifient toutes les deux la condition d'onde sortante. En résumé $u^\varepsilon - u^0 \in H^1(\Omega)$ et

$$\Delta(u^\varepsilon - u^0) + \varpi^2(u^\varepsilon - u^0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial n_\Gamma}(u^\varepsilon - u^0) + T_\Gamma(u^\varepsilon - u^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Il est donc possible d'appliquer les théorèmes standard de représentation intégrale à $u^\varepsilon - u^0$ (cf [29, 91]). Notons que le saut de valeur de $u^\varepsilon - u^0$ au travers de Γ_ε est nul puisque $u^\varepsilon - u^0 \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs comme $u^0 \in H^2(\Omega)$, le saut de dérivée normale de $u^\varepsilon - u^0$ au travers de Γ_ε n'est autre que p^ε . Comme $u^\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon} = 0$ par définition, on a l'équation intégrale par potentiel de simple couche

$$u^0(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\varpi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon$$

Cette équation doit être entendue au sens de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Notons que si l'on considérait d'autres objets diffractants (autre que le fil) il faudrait modifier le noyau de Green intervenant dans cette équation. Elle peut être réécrite variationnellement en multipliant par une fonction test $q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. On obtient

$$p^\varepsilon \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{et} \quad \forall q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{on a} \quad (8.1.7)$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \bar{q}(\mathbf{x}') \frac{e^{i\varpi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u^0(\mathbf{x}) \bar{q}(\mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}).$$

8.2 Opérateur de moyenne

Maintenant que nous avons formulé le problème exact, nous nous préoccupons de proposer un modèle approché. En s'inspirant du chapitre 4, nous examinons le premier terme du développement de p^ε que nous avons dérivé en section 7.6. Nous savons d'après la proposition 7.6.2, qu'il existe $\kappa, q > 0$ indépendants de ε tels que

$$\left| p^\varepsilon - \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^q \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (8.2.1)$$

Cependant il ne s'agit pas d'une estimation d'erreur relative, si bien que l'inégalité ci-dessus n'est pas significative tant que nous ne connaissons ni le comportement de $|p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ ni celui de $|n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$. Nous nous attachons maintenant à dériver ce comportement. D'après (7.4.21) il existe une fonction $a_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ telle que

$$\partial_\varphi a_\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad U_0 = \mathfrak{S}_0\{a_\varepsilon \ln R\} = a_\varepsilon \mathfrak{S}_0\{\ln R\}.$$

Reprenons la notation $\mathfrak{S}_\varepsilon := \mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ adoptée avec (7.2.5). Puisque par construction $\mathfrak{S}_\varepsilon = 0$ sur Γ_ε , et comme a_ε ne dépend pas de r on en déduit

$$\frac{\partial \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} (a_\varepsilon \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon) = \frac{\partial a_\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon + a_\varepsilon \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = a_\varepsilon \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon. \quad (8.2.2)$$

Notons $d\Gamma_\varepsilon$ la mesure de surface sur Γ_ε et $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}$ la fonction définie sur Γ_ε telle que $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) d\varphi d\nu = d\Gamma_\varepsilon$. Si l'on teste $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla u_0^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon}$ contre une fonction $v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ on peut faire apparaître l'intégrale correspondante comme une intégrale 1D. En effet on a

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{v} d\Gamma_\varepsilon = \int_{-1}^{+1} a_\varepsilon(\nu) \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \bar{v} \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu) d\varphi \right] d\nu.$$

8.2.1 Mesure surfacique moyennée dans la direction transverse

L'identité ci-dessus nous amène à nous intéresser à un sous-espace particulier de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Pour définir cet espace nous introduisons un opérateur qui associe à une fonction $v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ une moyenne suivant la variable φ pondérée par une certaine fonction. Nous commençons par définir une fonction γ_μ^ε par

$$\gamma_\mu^\varepsilon(v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}(\alpha, \nu) d\alpha \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \quad \forall \nu \in [-1, +1].$$

Étant donnée la régularité de \mathfrak{S}_e d'après sa définition par le lemme 7.2.2 (et l'identité (7.2.5)), on a $\gamma_\mu^\varepsilon \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$. Avant de définir l'opérateur de moyenne, nous démontrons un résultat intermédiaire. Le lemme suivant, qui dit que γ_μ^ε est pratiquement égale à 1, est une version tridimensionnelle du lemme 3.2.5.

Lemme 8.2.1.

Il existe $\kappa > 0$ indépendante de ε telle que

$$\| 1 - (\phi_{S^2}^* \gamma_\mu^\varepsilon) \|_{L^\infty(S^2)} + \| \nabla_{S^2} (\phi_{S^2}^* \gamma_\mu^\varepsilon) \|_{L^\infty(S^2)} \leq \kappa \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

Preuve :

Nous reprendrons les notations introduites aux paragraphes 6.6.1 et 6.6.2. En particulier nous notons $\hat{n}(\eta)$ la normale à $\hat{\Gamma}(\eta)$ dirigée vers l'intérieur de $\hat{\Omega}(\eta)$. Notons $\hat{\gamma}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [-1, +1]$ telle que $\hat{\gamma}(\varphi, \eta) d\varphi$ soit la mesure sur $\hat{\Gamma}(\eta)$. Nous noterons $\hat{\gamma}(\cdot, \eta) := \hat{\gamma}(\cdot, \eta)$ et $\Phi(\eta) := \Phi(\cdot, \eta)$. En se rappelant que l'équation du bord $\hat{\Gamma}(\eta)$ est donnée par $\rho = \Phi(\varphi, \eta)$ on a alors

$$\hat{\gamma}(\eta) \hat{n}(\eta) \cdot \nabla v = \frac{1}{\Phi(\eta)} \left[\Phi(\eta)^2 \partial_\rho v - \partial_\varphi \Phi(\eta) \partial_\varphi v \right] \quad \forall v \in H^2(\hat{\Omega}(\eta)), \quad \forall \eta \in]0, 1[. \quad (8.2.3)$$

Notons par ailleurs que pour toute fonction $v \in L^2(\Gamma_\varepsilon)$ on a $v \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} = (\Xi_*^{\varepsilon, -1} v) \circ \phi_{\Gamma_N}$ parce que par définition $\Xi^\varepsilon \circ \phi_{\Gamma_N} = \phi_{\Gamma_\varepsilon}$. Un long calcul fournit alors

$$\begin{aligned} \left\{ \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu) &= \left\{ \Xi_*^{\varepsilon, -1} \left(\gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right) \right\} \circ \phi_{\Gamma_N}(\varphi, \nu) \\ \Xi_*^{\varepsilon, -1} \left(\gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right) &= \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \Phi^2}}{\Phi} \left[\Phi^2 \partial_R \mathfrak{S}_e - \partial_\varphi \Phi \partial_\varphi \mathfrak{S}_e \right] \\ &\quad - \frac{\varepsilon^2 \Phi}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \Phi^2}} \left[\frac{\eta^2}{1 - \eta^2} \partial_\varphi \Phi \partial_\varphi \mathfrak{S}_e + (1 - \eta^2) \partial_\eta \Phi \partial_\eta \mathfrak{S}_e \right] \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

Étant donnée la régularité de \mathfrak{S}_e (voir sa définition par le lemme 7.2.2) et en réunissant (8.2.3) et (8.2.4), on en déduit qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε, η tel que

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \frac{\partial \widehat{\mathfrak{S}}_e(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} d\hat{\Gamma}(\eta) \right| \leq \kappa \varepsilon \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[, \quad \forall \nu \in]0, 1[.$$

Rappelons que $\widehat{\mathfrak{S}}_e(\eta)$ désigne une fonction définie sur $\hat{\Omega}(\eta)$ suivant l'identité (6.6.4). D'après les équations satisfaites par $\widehat{\mathfrak{S}}_e(\eta)$ énoncées avec les lemmes 7.2.2, pour chaque η la fonction $\widehat{\mathfrak{S}}_e(\eta)$ n'est autre que le profil de (3.2.7) construit avec un obstacle normalisé dont le bord est $\hat{\Gamma}(\eta)$. Ainsi on peut affirmer, grâce au lemme 3.2.5, que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\hat{\Gamma}(\eta)} \frac{\partial \widehat{\mathfrak{S}}_e(\eta)}{\partial \hat{n}(\eta)} d\hat{\Gamma}(\eta) = 1. \quad \blacksquare$$

Le lemme ci-dessus implique notamment qu'il existe ε_0 indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $\forall \nu \in J$ on a $\gamma_\mu^\varepsilon(\nu) \neq 0$. Notons suivant des notations classiques $\|v\|_{W^{1,\infty}(S^2)} = \|v\|_{L^\infty(S^2)} + \|\nabla_{S^2} v\|_{L^\infty(S^2)}$ (cf [14] par exemple). L'équation (8.2.4) montre qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\left\| \left\{ \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1} \right\|_{W^{1,\infty}(S^2)} + \left\| \frac{1}{\gamma_\mu^\varepsilon \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1}} \right\|_{W^{1,\infty}(S^2)} \leq \kappa \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (8.2.5)$$

8.2.2 Définition et étude de l'opérateur de moyenne

Nous définissons maintenant l'opérateur de moyenne. Il s'agit d'une application qui "fabrique" une fonction 1D à partir d'une fonction définie sur la surface du fil Γ_ε (qui est une variété de dimension 2). En rappelant que $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) d\varphi d\nu$ désigne par définition la mesure de surface sur Γ_ε , on pose pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$

$$\check{\mu}_\varepsilon[v](\nu) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ v \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}(\alpha, \nu) d\alpha \quad \forall \nu \in J = [-1, +1], \quad \forall v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_\varepsilon). \quad (8.2.6)$$

D'après cette définition et la régularité de \mathfrak{S}_e et $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}$ si $v \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_\varepsilon)$ alors $\check{\mu}_\varepsilon[v] \in \mathbb{E}^\infty(J)$. Toujours d'après la régularité de \mathfrak{S}_e et $\gamma_{\Gamma_\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ il existe $\kappa > 0$ (dépendant éventuellement de ε) tel que $\|\check{\mu}_\varepsilon[v]\|_{L^2(J)} \leq \kappa \|v\|_{L^2(\Gamma_\varepsilon)}$ de sorte que l'on peut étendre l'opérateur $\check{\mu}_\varepsilon$ par densité à $L^2(\Gamma_\varepsilon)$ tout entier. Ce prolongement de $\check{\mu}_\varepsilon$ satisfait les propriétés de continuité suivantes.

Proposition 8.2.1.

Les espaces $\mathbb{E}^s(J)$ étant définis par (7.4.9), pour tout $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ l'application $\check{\mu}_\varepsilon$ réalise une surjection continue de $H^s(\Gamma_\varepsilon)$ sur $\mathbb{E}^s(J)$.

Preuve :

Choisissons un $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ arbitraire et fixe jusqu'à la fin de la preuve. Rappelons que, ϕ_{S^2} désignant la paramétrisation de S^2 définie par (6.1.2) et $\phi_{\Gamma_\varepsilon}$ celle de Γ_ε définie par (6.1.6), l'application $\phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}$ est un \mathcal{C}^∞ -difféomorphisme de Γ_ε sur S^2 . Ainsi l'application $v \mapsto v \circ \phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}$ réalise une bijection de $H^s(S^2)$ dans $H^s(\Gamma_\varepsilon)$. Pour démontrer la proposition il suffit donc de montrer que $v \mapsto \check{\mu}_\varepsilon[v \circ \phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}]$ réalise une surjection continue de $H^s(S^2)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$.

Notons que si $w \in \mathcal{C}^\infty(S^2)$ alors l'application $v \mapsto wv$ est continue de $H^s(S^2)$ dans $H^s(S^2)$. Et de même, on vérifie que si $w \in \mathbb{E}^\infty(J)$ alors $v \mapsto wv$ est continue de $\mathbb{E}^s(J)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$. Puisque

$$\gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma_\varepsilon) \implies \left[\gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right] \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1} \in \mathcal{C}^\infty(S^2).$$

on se ramène donc à montrer que l'application $v \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\phi_{S^2}(\varphi, \cdot)) d\varphi$ est une surjection continue de $H^s(S^2)$ dans $\mathbb{E}^s(J)$. On montre ceci en utilisant la caractérisation de $H^s(S^2)$ par séparation de variable que nous avons rappelé dans l'annexe 6.A. Notons P_n le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre définie par la formule (6.A.2). Compte tenu du fait que $\|P_n\|_{L^2(J)}^2 = (n+1/2)^{-1}$ on a donc

$$\begin{aligned} v \in H^s(S^2) &\iff \|v\|_{H^s(S^2)}^2 := \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} (1+n^2)^s |\langle v, \mathcal{Y}_n^m \rangle_{L^2(S^2)}|^2 < \infty \\ w \in \mathbb{E}^s(J) &\iff \|w\|_{\mathbb{E}^s(J)}^2 := \sum_{n=0}^{+\infty} (1+n^2)^{s+1/2} |\langle w, P_n \rangle_{L^2(J)}|^2 < \infty \end{aligned} \quad (8.2.7)$$

On peut alors conclure en remarquant que, d'après la formule (6.A.4), on a

$$\langle v, \mathcal{Y}_n^0 \rangle_{L^2(S^2)} = \frac{1}{\|P_n\|_{L^2(J)}} \int_{-1}^{+1} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\phi_{S^2}(\varphi, \nu)) d\varphi \right\} P_n(\nu) d\nu, \quad \forall v \in H^s(S^2).$$

■

Remarquons que pour les fonctions qui ne dépendent pas de φ on a $\check{\mu}_\varepsilon[q \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}] = \gamma_\mu^\varepsilon q, \forall q \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$. En reprenant (7.4.21), en appliquant directement la définition de $\check{\mu}_\varepsilon$ et en notant $d\Gamma_\varepsilon$ la mesure de surface sur Γ_ε on voit que

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{v} d\Gamma_\varepsilon = \int_{\Gamma_\varepsilon} a_\varepsilon \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{v} d\Gamma_\varepsilon = 2\pi \int_{-1}^{+1} a_\varepsilon(\nu) \overline{\check{\mu}_\varepsilon[v](\nu)} d\nu \quad (8.2.8)$$

Nous allons surtout nous intéresser à l'action de l'opérateur $\check{\mu}_\varepsilon$ dans l'espace $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Rappelons que l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ est le dual topologique de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ pour la norme définie par (7.6.1). Notons alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}$ le crochet de dualité correspondant. De même $\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})$ est le dual topologique de $\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})$ pour la norme définie par (7.4.9) et nous noterons $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{E}^{-1/2}, \mathbb{E}^{1/2}}$ le crochet de dualité correspondant. Comme $\check{\mu}_\varepsilon$ est continu de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dans $\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})$ on peut définir l'opérateur transposé ${}^t\check{\mu}_\varepsilon : \mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J}) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ par les identités

$$\langle {}^t\check{\mu}_\varepsilon[q], v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}} := \langle q, \check{\mu}_\varepsilon[v] \rangle_{\mathbb{E}^{-1/2}, \mathbb{E}^{1/2}} \quad \forall q \in \mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J}), \quad \forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon).$$

De la même manière que $\check{\mu}_\varepsilon$, par transposition ${}^t\check{\mu}_\varepsilon$ est continu de $\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})$ dans $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$. Comme $\check{\mu}_\varepsilon$ est surjective, ${}^t\check{\mu}_\varepsilon$ est injective. Les opérateurs $\check{\mu}_\varepsilon$ et ${}^t\check{\mu}_\varepsilon$ sont même "stables" lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ comme le montre la proposition suivante.

Proposition 8.2.2.

Il existe $\kappa, \kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

- i) $\forall v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon), \quad \|\check{\mu}_\varepsilon[v]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})} \leq \kappa \|v\|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$
- ii) $\forall q \in \mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J}), \quad \kappa_- \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})} \leq |{}^t\check{\mu}_\varepsilon[q]|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_+ \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}$

Preuve :

Pour prouver la première inégalité nous nous ramènerons à la sphère S^2 . En effet, d'après la définition de $| \cdot |_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$ donnée par (7.6.1) et (7.6.2) il suffit de montrer qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|\check{\mu}_\varepsilon[v \circ \phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})} \leq \kappa \|v\|_{H^{1/2}(S^2)} \quad \forall v \in H^{1/2}(S^2).$$

Posons pour un instant

$$g^\varepsilon = \left\{ \gamma_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right\} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon} \circ \phi_{S^2}^{-1} \quad (8.2.9)$$

D'après (8.2.5) il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|g^\varepsilon\| + \|\nabla_{S^2} g^\varepsilon\|_{L^\infty(S^2)} < \kappa$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En exprimant explicitement $\check{\mu}_\varepsilon$ d'après (8.2.6) on obtient

$$\check{\mu}_\varepsilon[v \circ \phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}](\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (v g^\varepsilon) \circ \phi_{S^2}(\alpha, \eta) d\alpha \quad \forall v \in H^{1/2}(S^2).$$

Par ailleurs c'est un exercice facile (et laissé au lecteur) sur les espaces de Sobolev de vérifier qu'il existe $\kappa > 0$ tel que $\|h v\|_{H^{1/2}(S^2)} \leq \kappa \|h\|_{W^{1, \infty}(S^2)} \|v\|_{H^{1/2}(S^2)}$ pour tout $v \in H^{1/2}(S^2)$ et tout $h \in W^{1, \infty}(S^2)$. En utilisant cette continuité et en reprenant les définitions (8.2.7) on obtient l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de g^ε tel que

$$\|\check{\mu}_\varepsilon[v \circ \phi_{S^2} \circ \phi_{\Gamma_\varepsilon}^{-1}]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})} \leq \|g^\varepsilon v\|_{H^{1/2}(S^2)} \leq \kappa \|g^\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(S^2)} \|v\|_{H^{1/2}(S^2)} \quad \forall v \in H^{1/2}(S^2).$$

avec $\|g^\varepsilon\|_{W^{1, \infty}(S^2)} := \|g^\varepsilon\|_{L^\infty(S^2)} + \|\nabla_{S^2} g^\varepsilon\|_{L^\infty(S^2)}$. Pour conclure il reste à utiliser la définition de g^ε (8.2.9) et l'estimation (8.2.5). Ceci démontre (i). Une moitié de (ii) découle de (i) par transposition. En effet

$$|{}^t\check{\mu}_\varepsilon[q]|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \frac{\langle {}^t\check{\mu}_\varepsilon[q], v \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}}}{\|v\|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}} = \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \frac{\langle q, \check{\mu}_\varepsilon[v] \rangle_{\mathbb{E}^{-1/2}, \mathbb{E}^{1/2}}}{\|\check{\mu}_\varepsilon[v]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}} \frac{\|\check{\mu}_\varepsilon[v]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}}{\|v\|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}}$$

En vertu de la proposition 8.2.1 l'opérateur $\check{\mu}_\varepsilon$ est surjectif de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dans $\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})$. D'après ce qui précède il existe donc $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$|\check{\mu}_\varepsilon[q]|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \sup_{v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \frac{\langle q, \check{\mu}_\varepsilon[v] \rangle_{E^{-1/2}, E^{1/2}}}{\|\check{\mu}_\varepsilon[v]\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}} = \kappa \sup_{v \in \mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})} \frac{\langle q, v \rangle_{E^{-1/2}, E^{1/2}}}{\|v\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}} = \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}$$

Il reste donc à démontrer la première inégalité de (ii). Choisissons un $q \in \mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})$. Considérons la décomposition de q sur la base des polynômes de Legendre

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n P_n \quad \text{avec} \quad \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|q_n|^2}{(n+1/2)\sqrt{n^2+1}} < +\infty$$

On définit $v \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ tel que $v(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) = p(\nu)/\gamma_\mu^\varepsilon(\nu)$ où la fonction intermédiaire $p \in \mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})$ est définie par

$$p(\nu) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q_n}{\sqrt{1+n^2}} P_n(\nu) \quad \text{d'où} \quad \|p\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|q_n|^2}{(n+1/2)\sqrt{n^2+1}} = \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}^2$$

D'après la définition alternative de $|\cdot|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$ donnée par (7.6.2) et la propriété sur γ_μ^ε donnée par le lemme 8.2.1, il existe κ_-, κ_+ indépendants de ε tels que $\kappa_- \|p\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})} \leq |v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_+ \|p\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}$ et également puisque v ne dépend pas de φ on a $\check{\mu}_\varepsilon[v] = p$. Enfin on vérifie aisément que

$$\langle q, \check{\mu}_\varepsilon[v] \rangle_{E^{-1/2}, E^{1/2}} = \langle q, p \rangle_{E^{-1/2}, E^{1/2}} = \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}^2 = \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})} \|p\|_{\mathbb{E}^{1/2}(\mathbb{J})}.$$

On en tire donc l'existence de $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que

$$\kappa_- \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})} |v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \langle q, \check{\mu}_\varepsilon[v] \rangle_{E^{-1/2}, E^{1/2}} \leq \kappa_+ \|q\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})} |v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$$

■

La stabilité des opérateurs $\check{\mu}_\varepsilon$ et ${}^t\check{\mu}_\varepsilon$ permet de déduire le comportement de $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla u_0^\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. En effet dans le cas où $\ell_0(u^0) \neq 0$, comme a_ε est définie comme l'unique solution de l'équation intégrale (7.4.22) alors d'après le lemme 7.4.4 il existe $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ tels que

$$\frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \|\ell_0(u^0)\|_{H^{-3/2}(\mathbb{S}^2)} \leq \|a_\varepsilon\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})} \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon|} \|\ell_0(u^0)\|_{H^{-1/2}(\mathbb{S}^2)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (8.2.10)$$

Ainsi $\|a_\varepsilon\|_{\mathbb{E}^{-1/2}(\mathbb{J})}$ se comporte comme $|\ln \varepsilon|^{-1}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Or grâce à l'équation (8.2.8) on voit que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} = 2\pi {}^t\check{\mu}_\varepsilon[a_\varepsilon]$$

Donc dans le cas où $\ell_0(u^0) \neq 0$, d'après la proposition 8.2.2 et les inégalités (8.2.10) ci-dessus, on tire l'existence de $\kappa_-, \kappa_+ > 0$ indépendants de ε tels que

$$\text{Si } \ell_0(u^0) \neq 0 \text{ alors} \quad \frac{\kappa_-}{|\ln \varepsilon|} \|\ell_0(u^0)\|_{H^{-3/2}(\mathbb{S}^2)} \leq \left| \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \frac{\kappa_+}{|\ln \varepsilon|} \|\ell_0(u^0)\|_{H^{-1/2}(\mathbb{S}^2)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

On ne peut aboutir si vite à une telle conclusion cependant dans le cas où $\ell_0(u^0) = 0$. Avec cette dernière inégalité on peut revenir sur les estimations d'erreur de la proposition 7.6.2, et formuler directement des estimations d'erreur relatives.

Lemme 8.2.2.

Soit u^ε l'unique solution du problème \mathcal{P}^ε et soient $(u_n^\varepsilon, U_n^\varepsilon)$ définis comme les uniques couples solutions des problèmes régularisés $(\mathcal{P}_n^\varepsilon)_{\text{ap}}$ écrits au §7.4.5. Si $\ell_0(u^0) \neq 0$ alors pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa_N, Q_N > 0$ indépendants de ε tels que

$$\left| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \frac{\partial \Xi_n^\varepsilon U_n^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa_N |\ln \varepsilon|^{Q_N} \varepsilon^{N+1} \left| \frac{\partial u_0^\varepsilon}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \right|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[. \quad (8.2.11)$$

8.3 Modèle approché : formulation en domaines fictifs dégradée

Pour proposer un modèle approché nous procéderons comme au chapitre 4. Nous reprenons la formulation en domaines fictifs (8.1.6) et réduisons l'espace de multiplicateurs de Lagrange. Nous noterons $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ l'espace réduit. Pour choisir cet espace nous nous inspirons de (8.2.1) et (8.2.2). Nous posons par définition

$$\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) := \check{\mu}_\varepsilon[\mathbb{E}^{-1/2}(\mathcal{J})] = \left\{ \check{\mu}_\varepsilon[q] = (\phi_{\Gamma_\varepsilon}^* q) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \mid q \in \mathbb{E}^{-1/2}(\mathcal{J}) \right\}$$

On a donc par construction $n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot (\nabla \tilde{u}_0^\varepsilon)|_{\Gamma_\varepsilon} \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Cet espace est en bijection avec $\mathbb{E}^{-1/2}(\mathcal{J})$ qui est unidimensionnel. Nous passons donc d'un espace de multiplicateur de Lagrange bidimensionnel $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ à un espace unidimensionnel $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. C'est parce que l'on a réduit la dimension de 1 que nous considérons que le modèle que nous proposons à présent est plus simple que le problème de départ. Ce problème réduit se formule de la manière suivante

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H^1(\Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \text{ satisfaisant} \\ (\mathfrak{P}^\varepsilon) : & \begin{cases} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon \bar{w} + a(u^\varepsilon, w) = \int_{\Omega} f \bar{w}, & \forall w \in H^1(\Omega), \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^\varepsilon = 0, & \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon). \end{cases} \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

Avec cette nouvelle formulation, on impose plus une condition de Dirichlet homogène complète, mais plutôt une condition de Dirichlet moyennée grâce à la deuxième équation ci-dessus. Cette nouvelle condition sur Γ_ε est exactement équivalente à imposer

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (\phi_{\Gamma_\varepsilon}^* q) \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \bar{u}^\varepsilon d\Gamma_\varepsilon = 0, \quad \forall q \in \mathbb{E}^{-1/2}(\mathcal{J}) \quad \iff \quad \check{\mu}_\varepsilon[u^\varepsilon] = 0.$$

Il convient à présent d'examiner si le problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ est bien posé. Comme il s'agit d'un problème de type point-selle, nous aurons recours au théorème 4.A.1. Nous devons donc vérifier des conditions inf-sup. Pour énoncer celles-ci nous introduisons l'espace

$$H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega) := \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \check{\mu}_\varepsilon[u] = 0 \right\}.$$

Cet espace joue le rôle de $H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega_\varepsilon)$ mais pour la condition de moyenne nulle sur Γ_ε . Par ailleurs on a clairement $H_{0, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \mid u|_{\Gamma_\varepsilon} = 0 \} \subset H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$. On vérifie les deux premières conditions inf-sup de (4.A.2) de manière uniforme par rapport à ε .

Lemme 8.3.1.

Il existe $\alpha_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a

$$\inf_{u \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \sup_{v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0 \quad \inf_{u \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \sup_{v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \frac{|a(v, u)|}{\|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \alpha_0$$

Preuve :

Nous reprendrons une dernière fois le raisonnement de la preuve de la proposition 3.1.1. Nous ne démontrerons que la première des deux conditions inf-sup, la seconde se démontre de la même manière. Nous procéderons par l'absurde et supposons l'existence d'une suite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ et d'une suite $v_n \in H_{\mu, \Gamma_{\varepsilon_n}}^1(\Omega)$ telles que

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{w \in H_{\mu, \Gamma_{\varepsilon_n}}^1(\Omega)} \frac{|a(v_n, w)|}{\|w\|_{H^1(\Omega)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par injection compacte de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ on peut supposer quitte à en extraire une sous-suite, que la suite (v_n) converge fortement dans $L^2(\Omega)$ et faiblement dans $H^1(\Omega)$ vers un $v_\infty \in H^1(\Omega)$. Considérons un $w \in H_\star^1(\Omega) := \{w \in H^1(\Omega) \mid w = 0 \text{ sur un voisinage de } 0\}$. Par passage à la limite faible on a

$$\int_{\Omega} \nabla v_\infty \cdot \nabla \bar{w} - \omega^2 \int_{\Omega} v_\infty \bar{w} + \int_{\Gamma} \bar{w} T_\Gamma v_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a(v_n, w) = 0, \quad \forall w \in H_\star^1(\Omega).$$

Par densité de $H_\star^1(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$ (comme démontré au lemme 6.3.1) on en conclut que cette identité variationnelle vaut en fait pour tout $w \in H^1(\Omega)$ et ceci implique alors $v_\infty = 0$ car le problème de Helmholtz homogène dans Ω avec condition d'onde sortante est bien posé. On obtient alors $\|v_n\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On conclut la preuve en notant que

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \Re \left\{ \int_{\Gamma} \bar{v}_n T_\Gamma v_n \right\} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \omega^2 \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \Re \{ a(v_n, v_n) \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous avons utilisé la propriété de positivité de l'opérateur DtN : $\Re \{ \int_{\Gamma} \bar{v} T_\Gamma v \} \geq 0, \forall v \in H^{1/2}(\Gamma)$. On en tire $\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ ce qui mène à une contradiction et conclut donc définitivement la démonstration. ■

Il nous faut maintenant vérifier la dernière condition inf–sup de (4.A.2). Cette vérification sera facilitée par le choix de la norme $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$ que nous avons effectué avec (7.6.1).

Lemme 8.3.2.

Il existe $\beta_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a

$$\inf_{q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \inf_{q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)} \sup_{v \in H^1(\Omega)} \frac{\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{v} \right|}{|q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \|v\|_{H^1(\Omega)}} \geq \beta_0$$

Preuve :

Soit $\omega = [0, R_0] \times S^2$ avec $R_0 > 0$ suffisamment grand pour que $\Gamma_N \subset \omega$. Introduisons une application relèvement continue $g : H^{1/2}(\Gamma_N) \rightarrow H^1(\mathbb{R}_+ \times S^2)$ tel que pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ on a $\text{supp } g(v) \subset \omega$ et il existe $\kappa > 0$ tel que $\|g(v)\|_{H^1(\mathbb{R}_+ \times S^2)} \leq \kappa \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma_N)}$ pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$. Rappelons, comme nous l'avons signalé dans la preuve de la proposition 7.1.2 qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|\Xi_\star^\varepsilon v\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa \|v\|_{H^1(\mathbb{R}_+ \times S^2)} \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}_+ \times S^2) \text{ tel que } \text{supp}(v) \subset \omega,$$

en rappelant que $\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}_+ \times S^2)}$ est donnée par (7.1.6). Ainsi il existe $\kappa > 0$ tel que $\|\Xi_\star^\varepsilon g(v)\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\Xi_\star^\varepsilon v|_{1/2, \Gamma_\varepsilon}$ pour tout $v \in H^{1/2}(\Gamma_N)$. Enfin d'après la définition de $|\cdot|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$, pour tout $q \in H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ il existe $v_q \in H^{1/2}(\Gamma_N)$ tel que

$$\left| \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Xi_\star^\varepsilon v_q} \right| \geq \frac{1}{2} |\Xi_\star^\varepsilon v_q|_{1/2, \Gamma_\varepsilon} |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \geq \frac{1}{2\kappa} \|\Xi_\star^\varepsilon g(v_q)\|_{H^1(\Omega)} |q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}.$$

Notons d'une part que la constante $\kappa > 0$ intervenant dans l'inégalité ci-dessus est indépendante de q . D'autre part sur Γ_ε on a $\Xi_\star^\varepsilon g(v_q)|_{\Gamma_\varepsilon} = \Xi_\star^\varepsilon v_q$. Ceci permet de conclure en choisissant $\beta_0 = 1/(2\kappa)$. ■

Avec les résultats des lemmes 8.3.1 et 8.3.2 on peut appliquer le théorème 4.A.1 et conclure que le problème \mathfrak{P}^ε est bien posé et nous noterons donc $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ son unique couple solution. Nous allons maintenant dériver un développement raccordé de u^ε et p^ε .

8.4 Développement raccordé au premier ordre pour le modèle approché

Nous ne dériverons pas, pour u^ε , un développement à tout ordre comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents. Nous nous attacherons seulement à dériver un terme \tilde{u}_0^ε d'approximation à l'ordre 0. En effet la dérivation des termes d'ordre plus élevés dans le développement raccordé de u^ε nous obligerait à rentrer dans des complications techniques que nous avons choisi d'évacuer. Nous n'utiliserons pas le formalisme du chapitre 2 et passerons par une méthode directe d'estimation d'erreur.

Revenons sur le premier terme \tilde{u}_0^ε du développement raccordé de u^ε unique solution de (8.1.4). Celui-ci, par définition, admet la forme

$$\tilde{u}_0^\varepsilon := \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_0^\varepsilon \quad \text{avec} \quad \chi^\varepsilon(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = \chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \leq \sqrt{\varepsilon}/2 \\ 0 & \text{si } r \geq \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

Rappelons que, suivant les notations du chapitre 2, on définit la zone de champ proche $Z_N^\varepsilon = \text{supp} \chi^\varepsilon$ et la zone de champ lointain $Z_F^\varepsilon = \text{supp}(1 - \chi^\varepsilon)$. On a en particulier dans ce chapitre

$$Z_N^\varepsilon := \left\{ \phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \mid 0 \leq r < \sqrt{\varepsilon} \quad \varphi \in \mathbb{R}_+ / 2\pi\mathbb{Z}, \nu \in [-1, +1] \right\}. \quad (8.4.1)$$

Cette zone inclut l'intérieur du fil $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. La fonction \tilde{u}_0^ε est définie dans Ω_ε et s'annule sur le bord du fil $\tilde{u}_0^\varepsilon = 0$ sur Γ_ε . On peut donc considérer son prolongement par 0 à l'intérieur de Γ_ε que nous noterons \tilde{u}_0^ε par commodité. Ainsi dans le reste de ce chapitre nous considérerons que $\tilde{u}_0^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ avec $\tilde{u}_0^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$ et \tilde{u}_0^ε définie par (7.4.21) dans Ω_ε . Nous allons montrer l'existence de $\kappa_0, \varepsilon_0, q_0 > 0$ indépendants de ε telle que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon|^{q_0} \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \quad (8.4.2)$$

Nous ne dériverons pas des inégalités optimales comme celles du corollaire 7.5.1 parce que nous ne construirons pas un développement asymptotique à tout ordre.

8.4.1 Début de l'estimation d'erreur

Pour estimer l'erreur (8.4.2) nous allons commencer par appliquer le résultat de stabilité du lemme 8.3.1 à la différence $u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon$. D'après la première de ces deux conditions inf-sup il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa \sup_{v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)} \frac{a(u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

Étant donné un $v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ arbitraire, nous cherchons à évaluer $a(u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon, v)$. Puisque le couple $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ est l'unique solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ et que $\check{\mu}_\varepsilon[v] = 0$ sur Γ_ε on a déjà $a(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega f \bar{v}$. À présent en injectant l'expression $\tilde{u}_0^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_0^\varepsilon$ dans $a(\tilde{u}_0^\varepsilon, v)$ un calcul direct donne

$$\begin{aligned} a(\tilde{u}_0^\varepsilon, v) &= \int_\Omega \nabla \bar{v} \cdot \nabla [\chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_0^\varepsilon] - \omega^2 \int_\Omega \bar{v} [\chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + (1 - \chi^\varepsilon) u_0^\varepsilon] + \int_\Gamma \bar{v} T_\Gamma u_0^\varepsilon \\ &= \int_\Omega \nabla [(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] \cdot \nabla u_0^\varepsilon - \omega^2 \int_\Omega [(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] u_0^\varepsilon + \int_\Gamma [(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] T_\Gamma u_0^\varepsilon \\ &\quad + \int_\Omega \nabla (\chi^\varepsilon \bar{v}) \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - \omega^2 \int_\Omega (\chi^\varepsilon \bar{v}) \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon \\ &\quad + \int_\Omega \bar{v} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) - \int_\Omega \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

Comme par hypothèse $\text{supp}(f)$ exclut un voisinage de I , il existe $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε tel que $f(1 - \chi^\varepsilon) = f$, $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Puisque $\Delta u_0^\varepsilon + \omega^2 u_0^\varepsilon = -f$ au sens des distributions dans $\Omega \setminus I$ et comme u_0^ε est sortante, selon sa définition donnée par (7.4.21), donc pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a

$$\int_{\Omega} f \bar{v} = \int_{\Omega} \nabla[(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] \cdot \nabla u_0^\varepsilon - \omega^2 \int_{\Omega} [(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] u_0^\varepsilon + \int_{\Gamma} [(1 - \chi^\varepsilon) \bar{v}] T_{\Gamma} u_0^\varepsilon$$

En réunissant cette identité avec (8.4.3) on en tire finalement l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\begin{aligned} a(u^\varepsilon - \tilde{u}_0^\varepsilon, v) &= \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \nabla(\chi^\varepsilon \bar{v}) \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - \omega^2 \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} (\chi^\varepsilon \bar{v}) \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon \\ &+ \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \bar{v} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) - \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

Nous nous ramenons au final à estimer quatre terme regroupés deux par deux. Les deux premiers sont reliés au champ proche, il s'agit d'intégrales sur Z_N^ε car $\text{supp} \chi^\varepsilon = Z_N^\varepsilon$ et $\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon = 0$ dans $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$. Les deux derniers sont reliés à $\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon$ dans la zone de raccord, il s'agit d'intégrales dans $Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon$ car $\nabla \chi^\varepsilon$ est non nul seulement dans cette zone. Nous estimons maintenant tour à tour chacun d'entre eux.

8.4.2 Estimation des termes reliés au champ proche

Nous commençons par appliquer une formule de Green sur le terme contenant les gradients. En prenant en compte l'équation (8.2.8), pour $v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ aucun terme de bord n'intervient

$$\int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \nabla(\chi^\varepsilon \bar{v}) \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - \omega^2 \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} (\chi^\varepsilon \bar{v}) \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon = - \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \chi^\varepsilon \bar{v} \left(\Delta \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + \omega^2 \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon \right) \quad (8.4.5)$$

Nous explicitons maintenant l'intégrale du membre de droite ci-dessus. Pour ceci nous reprenons l'expression du laplacien en coordonnées ellipsoïdales donnée par (6.3.4). D'après la définition de U_0^ε donnée par (7.4.21) et celle de $\mathfrak{S}_0\{\ln R\}$ donnée par le lemme 7.2.2 on a

$$(\xi^2(r) - \nu^2) (\Delta \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + \omega^2 \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon \left((R \partial_R)^2 U_0^\varepsilon + R \partial_R U_0^\varepsilon + \Delta_{S^2} U_0^\varepsilon + (1 - \nu^2) \omega^2 U_0^\varepsilon + \varepsilon^2 R^2 U_0^\varepsilon \right)$$

En injectant ceci dans le membre de droite de (8.4.5), en utilisant la formule (6.1.8) et en prenant en compte le fait que $R < 1/\sqrt{\varepsilon}$ dès que $(R, \sigma) \in \Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon)$, on en tire que pour tout $v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \chi^\varepsilon \bar{v} \left(\Delta \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon + \omega^2 \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon \right) \right| \\ & \leq \int_{\phi_{\text{el}}^{-1}(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} |v| \left| \Xi_*^\varepsilon \left((R \partial_R)^2 U_0^\varepsilon + R \partial_R U_0^\varepsilon + \Delta_{S^2} U_0^\varepsilon + (1 - \nu^2) \omega^2 U_0^\varepsilon + \varepsilon^2 R^2 U_0^\varepsilon \right) \right| \frac{r}{\xi(r)} dr d\varphi d\nu \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} \|U_0^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^2(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon))} \end{aligned}$$

D'une part d'après le lemme 8.4.1 que nous démontrerons plus loin, il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\|v\|_{\mathcal{W}_{-1}^0(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

D'autre part, puisque par définition on a $\mathfrak{S}_0\{\ln R\} - \ln R - \mathcal{C}_0 \in \mathcal{W}_{-1/2}^\infty(\Omega_N)$ et qu'il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que $\|\ln R + \mathcal{C}_0\|_{\mathcal{W}_0^2(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon))} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p$, $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, il existe donc κ, p indépendants de ε tels que

$$\|U_0^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^2(\Xi^{\varepsilon, -1}(Z_N^\varepsilon))} \leq \kappa \|\phi_{S^2}^* a_\varepsilon\|_{\log, 2} |\ln \varepsilon|^p \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[$$

où $a_\varepsilon \in \mathbb{E}^\infty(\mathbb{J})$ est défini par l'équation intégrale (7.4.22). Pour estimer $\|\phi_{S^2}^* a_\varepsilon\|_{\log, 2}$, comme $\phi_{S^2}^* a_\varepsilon = \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)$ il suffit d'utiliser la proposition 7.5.3. On obtient l'existence de $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels

que $\|\phi_{S^2}^* a_\varepsilon\|_{\log,2} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. En conclusion on déduit l'existence de $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que $\forall v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left| \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} \nabla(\chi^\varepsilon \bar{v}) \cdot \nabla \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - \omega^2 \int_{Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon} (\chi^\varepsilon \bar{v}) \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon \right| \leq \kappa \varepsilon |\ln \varepsilon|^p \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.4.6)$$

8.4.3 Estimation des termes de raccord

Pour majorer les deux derniers termes de (8.4.4), notons tout d'abord que $\chi^\varepsilon(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = \chi(r/\sqrt{\varepsilon})$ ne dépend que de r . Par ailleurs $\|r \partial_r \chi^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\partial_r \chi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}$. Donc il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $u \in H^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)$, d'après (6.1.7) on a la majoration

$$\left| \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla u \right| = \left| \frac{\xi^2(r)}{r(\xi^2(r) - \nu^2)} r \partial_r \chi^\varepsilon \partial_r u \right| \leq \kappa \frac{\xi(r) |\partial_r u|}{r(\xi^2(r) - \nu^2)} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

On reprend alors (8.4.4) et on injecte cette majoration dans les deux derniers termes en explicitant les intégrales, on obtient l'existence de $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \bar{v} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) - \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \right| \\ & \leq \kappa \|v\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} \|\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

Tout d'abord d'après le lemme 8.4.1 démontré un peu plus loin il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\|v\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon| \|v\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ et tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Pour le deuxième terme ci-dessus on a

$$\begin{aligned} \|\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} & \leq \|\Xi_*^\varepsilon (U_0^\varepsilon - L_0(U_0^\varepsilon))\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} + \|u_0^\varepsilon - \ell_0(u_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ & \quad + \|\ell_0(u_0^\varepsilon) - \Xi_*^\varepsilon L_0(U_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ & \leq \|U_0^\varepsilon - L_0(U_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} + \|u_0^\varepsilon - \ell_0(u_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \\ & \quad + \|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \end{aligned} \quad (8.4.8)$$

Il nous reste à majorer chacun des trois termes ci-dessus. Commençons par le terme lié à la régularisation de l'équation de raccord. Comme $\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) \in \mathbb{P}_{\log}$ tel que $d^\circ \mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon) = 0$ et que $\sqrt{\varepsilon}/2 \leq r \leq \sqrt{\varepsilon}$ si et seulement si $\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu) \in Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon$, il existe donc $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tel que

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa_0 \|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)\|_{\log,1} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Pour majorer le membre de droite de l'inégalité ci-dessus il suffit d'utiliser la proposition 7.5.4. On en déduit l'existence de $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tels que

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon) \cdot \ell_0^{(1)}(u_0^\varepsilon)\|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa_0 \varepsilon^2 \quad \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[. \quad (8.4.9)$$

Nous estimons maintenant le premier terme dans le membre de droite de (8.4.8). Pour ceci rappelons que U_0^ε satisfait $(R \partial_R)^2 U_0^\varepsilon + \partial_\varphi^2 U_0^\varepsilon = 0$ dans Ω_N . En rappelant que nous notons $U_{0,0}^\varepsilon$ et $U_{0,-1}^\varepsilon$ les deux premiers termes du développement de U_0^ε par rapport à R au voisinage de l'infini, signalons que $L_0(U_0^\varepsilon) = U_{0,0}^\varepsilon$. Alors il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\begin{aligned} \|U_0^\varepsilon - L_0(U_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} & \leq 2\sqrt{\varepsilon} \|U_0^\varepsilon - L_0(U_0^\varepsilon)\|_{\mathcal{W}_{-1}^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \\ & \leq 2\sqrt{\varepsilon} \left(\|U_0^\varepsilon - U_{0,0}^\varepsilon - R^{-1}U_{0,-1}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{-1}^1(\Omega_N)} + \|R^{-1}U_{0,-1}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_{-1}^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \right) \\ & \leq 2\sqrt{\varepsilon} \left(\langle\langle U_0^\varepsilon \rangle\rangle_{0,1} + \|U_{0,-1}^\varepsilon\|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \right) \end{aligned}$$

Rappelons que par définition $U_{0,-1}^\varepsilon \in \mathbb{P}_{\log}$, il s'agit d'un polynôme par rapport à $\ln R$. Or on vérifie par un calcul explicite que pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $\| \ln^p R \|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^{p+1}$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$. Ainsi il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tel que

$$\| U_{0,-1}^\varepsilon \|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \| U_{0,-1}^\varepsilon \|_{\log,1} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En tenant compte des remarques précédentes, et en appliquant la proposition 7.5.3, on obtient l'existence de $\kappa, \kappa', p > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\| U_0^\varepsilon - L_0(U_0^\varepsilon) \|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon))} \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} \left(\langle\langle U_0^\varepsilon \rangle\rangle_{0,1} + \| U_{0,-1}^\varepsilon \|_{\mathcal{W}_0^1(\Xi^{\varepsilon,-1}(Z_N^\varepsilon))} \right) \leq \kappa' \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|^p. \quad (8.4.10)$$

Avec un raisonnement analogue et les mêmes résultats, dont la proposition 7.5.3, on démontre également qu'il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\| u_0^\varepsilon - \ell_0(u_0^\varepsilon) \|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|^p. \quad (8.4.11)$$

Finalement en réunissant les estimations (8.4.9), (8.4.10) et (8.4.11) on obtient qu'il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tels que

$$\| \Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon \|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon)} \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|^p \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

En injectant cette estimation dans (8.4.7) on obtient finalement l'existence de $\kappa, p > 0$ indépendant de ε tel que $\forall v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega)$ et $\forall \varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\left| \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \bar{v} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) - \int_{Z_N^\varepsilon \cap Z_F^\varepsilon} \nabla \chi^\varepsilon \cdot \nabla \bar{v} (\Xi_*^\varepsilon U_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \right| \leq \kappa \sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|^p \| v \|_{H^1(\Omega)}. \quad (8.4.12)$$

8.4.4 Lemme intermédiaire

Au cours des paragraphes précédents nous avons utilisé un lemme technique. Il s'agit d'une sorte de lemme de Poincaré pour lequel intervient une constante dont on borne la dépendance par rapport à ε . Pour définitivement clore la preuve il reste à le démontrer.

Lemme 8.4.1.

En rappelant que Z_N^ε est définie par (8.4.1), il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que

$$\| v \|_{\gamma_0^1(Z_N^\varepsilon \cap \Omega_\varepsilon)} \leq \kappa |\ln \varepsilon| \| v \|_{H^1(\Omega)} \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Preuve :

Dans cette preuve nous noterons $v(r, \varphi, \nu)$ au lieu de $v(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu))$. Il s'agit de démontrer qu'il existe $\kappa_0, \varepsilon_0 > 0$ indépendants de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et tout $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon\Phi}^{\sqrt{\varepsilon}} |v(r, \varphi, \nu)|^2 \frac{dr d\varphi d\nu}{r} \leq \kappa_0 |\ln \varepsilon|^2 \| v \|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Par densité de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, il suffit de démontrer qu'il existe $\kappa > 0$ vérifiant une telle inégalité $\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$. Choisissons donc un tel v arbitraire; considérons également $r_0 > 0$ tel que $\phi_{\text{el}}(r_0, \varphi, \nu) \in \Omega$ pour tout φ, ν . On écrit une formule de Taylor suivant la variable radiale entre r et r_0 ,

$$\begin{aligned} |v(r, \varphi, \nu)|^2 &= \left| v(r_0, \varphi, \nu) - \int_r^{r_0} \partial_r v(s, \varphi, \nu) ds \right|^2 \leq 2|v(r_0, \varphi, \nu)|^2 + 2 \ln\left(\frac{r_0}{r}\right) \int_{\varepsilon\Phi}^{r_0} |\partial_r v(s, \varphi, \nu)|^2 \xi(s) ds \\ \int_{\varepsilon\Phi}^{\sqrt{\varepsilon}} |v(r, \varphi, \nu)|^2 \frac{dr}{r} &\leq 2 \ln\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon\Phi}\right) |v(r_0, \varphi, \nu)|^2 + \ln^2\left(\frac{\varepsilon\Phi}{r_0}\right) \int_{\varepsilon\Phi}^{r_0} |\partial_r v(s, \varphi, \nu)|^2 \xi(s) ds \end{aligned}$$

Notons pour un instant Γ' la surface dans Ω admettant pour équation $r = r_0$. Si l'on considère la paramétrisation de Γ' induite par les coordonnées φ et ν la mesure de surface sur Γ' est donnée par $r_0(r_0^2 + 1 - \nu^2)^{1/2} d\nu d\varphi$. Notons $\gamma_{\Gamma'}(\varphi, \nu) = r_0(r_0^2 + 1 - \nu^2)^{1/2}$, on a donc $\|v\|_{L^2(\Gamma')}^2 = \int_{\varphi, \nu} |v(r, \varphi, \nu)|^2 \gamma_{\Gamma'}(\varphi, \nu) d\varphi d\nu$. En intégrant suivant φ et ν on voit qu'il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$ on a

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon\Phi}^{\sqrt{\varepsilon}} |v|^2 \frac{dr d\varphi d\nu}{r} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon\Phi}^{\sqrt{\varepsilon}} |\partial_r v|^2 \xi(r) r dr d\varphi d\nu + \kappa |\ln \varepsilon| \|v\|_{L^2(\Gamma')}^2$$

Par continuité de l'application trace, et au vue de l'expression de $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2$ fournie par (6.2.3), il existe $\kappa' > 0$ indépendant de ε et de v tel que

$$|\ln \varepsilon|^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon\Phi}^{\sqrt{\varepsilon}} |\partial_r v|^2 \xi(r) r dr d\varphi d\nu + |\ln \varepsilon| \|v\|_{L^2(\Gamma')}^2 \leq \kappa' |\ln \varepsilon|^2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Comme $v \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est arbitraire et que tous les constantes κ sont indépendantes de v , ceci permet finalement de conclure. ■

8.4.5 Conclusions

Pour terminer l'estimation d'erreur et prouver (8.4.2), il reste simplement à rassembler (8.4.6) et (8.4.12), à injecter ces estimations dans (8.4.4) et à utiliser la stabilité donnée par le lemme 8.3.1. Ceci démontre le résultat annoncé (8.4.2). Par inégalité triangulaire, d'après la proposition 7.5.6, ceci démontre également la proposition suivante qui justifie qu'on parle de "modèle approché" au sujet du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$.

Proposition 8.4.1.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ donné par (8.1.4) et soit $(u^\varepsilon, \mathfrak{p}^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ donné par (8.3.1). Alors il existe $\kappa, p > 0$ indépendant de ε tel que

$$\|u^\varepsilon - \mathfrak{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

La proposition 8.4.1 à son tour permet de montrer un autre résultat d'estimation d'erreur sur les multiplicateurs de Lagrange cette fois. En effet reprenons (8.1.6) satisfait par $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ et (8.3.1) satisfait par $(\mathfrak{u}^\varepsilon, \mathfrak{p}^\varepsilon)$. Par différence on obtient

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} (p^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon) \bar{v} = -a(u^\varepsilon - \mathfrak{u}^\varepsilon, v) \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue, d'après la condition inf-sup fournie par le lemme 8.3.2, il existe donc $\kappa > 0$ indépendant de ε tel que $|p^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa \|u^\varepsilon - \mathfrak{u}^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$. Par application directe de la proposition 8.4.1 ci-dessus il vient

Corollaire 8.4.1.

Soit $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathcal{P}^\varepsilon)$ donné par (8.1.4) et soit $(u^\varepsilon, \mathfrak{p}^\varepsilon)$ l'unique couple solution du problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ donné par (8.3.1). Alors il existe $\kappa, p > 0$ indépendants de ε tel que

$$|p^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^p \sqrt{\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[.$$

Comme on sait que $\|u^\varepsilon - u^0\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ et que $\|u^0\|_{H^1(\Omega)} \neq 0$, cela signifie que $\|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}$ admet une limite non nulle lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ de sorte que l'estimation d'erreur fournie par la proposition 8.4.1 conduit à une estimation d'erreur relative.

Une telle remarque ne vaut pas avec le corollaire 8.4.1 car on ne connaît pas exactement le comportement de $|p^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon}$. Cependant dans le cas où $u|_I^0 \neq 0$, puisque $p^\varepsilon = n_{\Gamma_\varepsilon} \cdot \nabla(u^\varepsilon|_{\Omega_\varepsilon})|_{\Gamma_\varepsilon}$ le lemme 8.2.2 permet de montrer l'existence de $\kappa, q > 0$ indépendants de ε tels que

$$|p^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \leq \kappa |\ln \varepsilon|^q \sqrt{\varepsilon} |p^\varepsilon|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[\quad \text{si } u|_I^0 \neq 0.$$

8.5 Équation intégrale associée au modèle approché

Selon des résultats classiques (cf [29, 91] par exemple) la résolution du problème de Helmholtz avec condition de Dirichlet autour d'un objet diffractant avec condition d'onde sortante peut être ramener à la résolution d'une équation intégrale posée sur la surface de l'objet diffractant. L'un des intérêts de cette méthode est qu'elle permet de réduire la dimension du problème.

Lorsqu'on s'intéresse à la diffraction d'une onde électromagnétique tridimensionnelle par un objet diffractant, on peut donc se ramener à résoudre un problème posé sur une surface bidimensionnelle. Dans le cas où l'objet diffractant est filiforme, on devrait aussi considérer une équation intégrale bidimensionnelle puisqu'en toute rigueur la surface d'un fil est bidimensionnelle. Mais comme l'épaisseur d'un fil est très petite vis-à-vis de la longueur d'onde (par définition !) Pocklington a proposé dans ce cas une équation intégrale 1D posée sur la ligne médiane (voir [16, 96, 72, 73]).

Une telle équation intégrale est très intéressante en termes de coût de calcul puisqu'on ramène la résolution d'un problème 3D à celle d'un problème 1D. De nombreuses références sont consacrées à l'étude de l'équation de Pocklington. Concernant l'étude du caractère bien posé on peut citer [86, 103, 104, 74]. Concernant la résolution numérique de l'équation de Pocklington citons [86, 17, 37].

Outre les propriétés de l'équation de Pocklington elle-même, on peut s'interroger sur le lien entre cette équation et l'équation intégrale bidimensionnelle "exacte". Jusqu'à maintenant il n'existait pas à notre connaissance de résultat quantifiant l'erreur que l'on commet lorsqu'on résout l'une au lieu de l'autre. Ce paragraphe propose un tel résultat dans le cas où l'on s'intéresse non pas aux équations de Maxwell mais à l'équation de Helmholtz.

8.5.1 Dérivation formelle de l'équation de Pocklington scalaire

En effet il est possible de proposer une version "scalaire" de l'équation de Pocklington en reprenant les calculs de [72] appliqués à l'équation de Helmholtz avec condition de Dirichlet sur le bord du fil et condition d'onde sortante à l'infini. Nous montrons ici comment on l'obtient dans le cas où Γ_ε admet la forme présentée sur la Fig.32. La dérivation de l'équation de Pocklington repose sur trois approximations que nous signalerons. Les calculs qui viennent maintenant n'ont pas tous des fondements mathématiques bien établis comme nous l'avons précisé plus haut.

Nous considérons, juste pour ce paragraphe, le même cadre géométrique que celui présenté en section 8.1 sauf que l'équation de Γ_ε est donnée par

$$\Gamma_\varepsilon = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \max\{(x^2 + y^2)/\varepsilon^2, z^2\} = 1 \}$$

au lieu d'être donnée par (8.1.3) en coordonnées ellipsoïdales. Rappelons que u^0 désigne le champ limite c'est-à-dire l'unique solution du problème sans fil (6.3.16). Il est alors classique (cf [29, 91] par exemple) que p^ε définie par (8.1.5) peut être caractérisée comme l'unique solution de l'équation intégrale suivante par potentiel de simple couche

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') = u^0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

L'identité ci-dessus vaut au sens de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ et non au sens de $\mathcal{C}^0(\Gamma_\varepsilon)$. Nous décomposons l'intégrale ci-dessus en trois morceaux $\Gamma_\varepsilon^\parallel = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 = \varepsilon^2, |z| \leq 1 \}$ et $\Gamma_\varepsilon^\perp = \{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2, |z| = 1 \}$. L'ensemble $\Gamma_\varepsilon^\parallel$ correspond à la partie centrale et longitudinale du bord du fil, tandis que Γ_ε^\perp correspond aux deux extrémités. On a alors

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^\parallel} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') + \int_{\Gamma_\varepsilon^\perp} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') = u^0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon$$

Approximation n°1 :

On néglige l'influence de l'intégrale sur Γ_ε^\perp ce qui revient à supposer que le fil est un tube creux ("hollow tube approximation").

On peut justifier intuitivement une telle approximation par le fait que l'aire de Γ_ε^\perp est en $O(\varepsilon^2)$ tandis que celle de $\Gamma_\varepsilon^\parallel$ est en $O(\varepsilon)$. Si on injecte cette approximation dans l'équation intégrale précédente on obtient

$$\int_{\Gamma_\varepsilon^\parallel} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') \simeq u^0(\mathbf{x}) \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \quad (8.5.1)$$

Nous allons maintenant écrire plus explicitement l'intégrale ci-dessus. Notons ρ, φ, z les coordonnées cylindriques c'est-à-dire $x = \rho \cos(\varphi)$ et $y = \rho \sin(\varphi)$. Sur Γ_ε on a $\rho = \varepsilon$ de sorte que la mesure de surface sur $\Gamma_\varepsilon^\parallel$ est donnée par $\varepsilon d\varphi dz$. Par ailleurs si $\mathbf{x}(\varphi, z)$ désigne le point de Γ_ε de coordonnées cylindriques ε, φ, z alors on a

$$|\mathbf{x}(\varphi, z) - \mathbf{x}(\varphi', z')|^2 = (z - z')^2 + 4\varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\varphi - \varphi'}{2}\right)$$

En injectant ceci dans l'intégrale de (8.5.1) on obtient $\forall \varphi \in [0, 2\pi], \forall z \in [-1, +1]$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} p^\varepsilon(\mathbf{x}(\varphi', z')) \frac{e^{i\omega\sqrt{(z-z')^2 + 4\varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)}}}{4\pi\sqrt{(z-z')^2 + 4\varepsilon^2 \sin^2\left(\frac{\varphi-\varphi'}{2}\right)}} \varepsilon d\varphi dz \simeq u^0(\mathbf{x}(\varphi, z)).$$

Voici les deux autres approximations du modèle de Pocklington qui permettent maintenant de simplifier encore plus la forme de cette équation intégrale. Celles-ci traduisent le fait que le champ limite u^0 et le saut de dérivée normale p^ε sont presque constants sur chaque section transverse du fil car ce dernier est très fin.

Approximations n°2 et n°3 :

Il existe deux fonctions $\check{p}^\varepsilon(z)$ et $\check{\mu}_\varepsilon[u^0](z)$ dépendant seulement de z satisfaisant

$$p^\varepsilon(\mathbf{x}(\varphi, z)) \simeq \frac{\check{p}^\varepsilon(z)}{2\pi\varepsilon} \quad \text{et} \quad u^0(\mathbf{x}(\varphi, z)) \simeq \check{\mu}_\varepsilon[u^0](z)$$

Ceci permet alors de faire sortir \check{p}^ε de l'intégrale sur φ , et en effectuant le changement de variable $\alpha = (\varphi - \varphi')/2$ on aboutit à une équation intégrale purement 1D avec un noyau intégral moyenné azymuthalement,

$$\int_{-1}^{+1} \check{p}^\varepsilon(z') K^\varepsilon(z - z') dz' = \check{\mu}_\varepsilon[u^0](z) \quad z \in [-1, +1] \quad (8.5.2)$$

$$\text{avec } K^\varepsilon(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega\sqrt{z^2 + 4\varepsilon^2 \sin^2(\alpha)}}}{4\pi\sqrt{z^2 + 4\varepsilon^2 \sin^2(\alpha)}} d\alpha$$

L'équation ci-dessus est appelée équation de Hallen. Elle intervient lors de l'étude de l'équation de Pocklington de la même façon que l'équation de Helmholtz joue un rôle dans l'étude des équations de Maxwell. Le noyau intégral $K^\varepsilon(z)$ sera donc appelé noyau de Hallen.

8.5.2 Dérivation de l'équation intégrale associée au modèle approché

Nous reprenons à présent le cadre géométrique présenté en section 8.1 et en particulier nous considérons à nouveau que Γ_ε est défini par (8.1.3). Repartons de la formulation (8.3.1). Outre la formulation

en domaines fictifs, le problème $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ admet également une formulation variationnelle "plus standard". En effet il est immédiat à partir de (8.3.1) et de la définition de $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ que u^ε satisfait

$$u^\varepsilon \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega) \quad \text{et} \quad a(u^\varepsilon, v) = \int_\Omega f \bar{v}, \quad \forall v \in H_{\mu, \Gamma_\varepsilon}^1(\Omega). \quad (8.5.3)$$

Par ailleurs la condition inf-sup du lemme 8.3.1 nous permet d'affirmer que u^ε est la seule fonction à satisfaire un tel problème. (8.5.3) constitue la formulation variationnelle standard de $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$. En appliquant (8.5.3) avec des $v \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$ (donc $v = 0$ dans un voisinage de Γ_ε) on voit que u^ε vérifie au sens des distributions

$$\Delta u^\varepsilon + \varpi^2 u^\varepsilon = -f \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\Gamma} + T_\Gamma u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$ ces équations valent *a fortiori* dans $L_{\text{loc}}^2(\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$. En reprenant la définition de u^0 donnée par (6.3.16) on a donc au sens de $L_{\text{loc}}^2(\Omega \setminus \Gamma_\varepsilon)$

$$\Delta(u^\varepsilon - u^0) + \varpi^2(u^\varepsilon - u^0) = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma_\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial n_\Gamma}(u^\varepsilon - u^0) + T_\Gamma(u^\varepsilon - u^0) = 0 \quad \text{sur } \Gamma.$$

Les théorèmes classiques de représentation intégrale [29, 91] peuvent donc s'appliquer directement à $u^\varepsilon - u^0$. Notons que le saut de valeur de $u^\varepsilon - u^0$ à travers Γ_ε est nul car $u^\varepsilon - u^0 \in H^1(\Omega)$. Par ailleurs le saut de dérivée normale de u^0 est nul de sorte que

$$p^\varepsilon = \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u_{|\Omega_\varepsilon}^\varepsilon - u_{|\Omega_\varepsilon}^0) - \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}}(u_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}^\varepsilon - u_{|\Omega \setminus \Omega_\varepsilon}^0)$$

Les théorèmes de représentation intégrale donnent donc en définitive, au sens de $H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$,

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) - u^0(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \frac{e^{i\varpi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\varepsilon$$

On peut alors tester cette équation contre un élément de $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$, et comme par définition on a $\int_{\Gamma_\varepsilon} \bar{u}^\varepsilon q = 0$ pour tout $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$, il vient une formulation variationnelle de l'équation intégrale ci-dessus

$$p^\varepsilon \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{on a} \quad (8.5.4)$$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \times \Gamma_\varepsilon} p^\varepsilon(\mathbf{x}') \bar{q}(\mathbf{x}') \frac{e^{i\varpi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}') d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma_\varepsilon} u^0(\mathbf{x}) \bar{q}(\mathbf{x}) d\Gamma_\varepsilon(\mathbf{x})$$

Cette nouvelle équation intégrale apparaît comme une version simplifiée de l'équation (8.1.7) parce que l'espace variationnel a été réduit, en passant de $H^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon)$ dans (8.1.7) à $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ dans (8.5.4).

Retour sur l'équation de Hallen Nous montrons maintenant que l'équation (8.5.4) peut aussi être interprété comme l'équation de Hallen pour le cas où la forme de Γ_ε est celle de la Fig.33 au lieu d'être celle de la Fig.32. Comme $p^\varepsilon \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$, par définition il existe un unique $\check{p}^\varepsilon \in \mathbb{E}^{-1/2}(\text{J})$ tel que

$$p^\varepsilon = {}^t\check{\mu}_\varepsilon[\check{p}^\varepsilon].$$

De la même manière on peut associer à tout $q \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ un unique $\check{q} \in \mathbb{E}^{-1/2}(\text{J})$ tel que $q = {}^t\check{\mu}_\varepsilon[\check{q}]$. Nous injectons alors une telle décomposition dans l'équation (8.5.4). Par transposition, on aboutit à

$$\check{p}^\varepsilon \in \mathbb{E}^{-1/2}(\text{J}) \quad \text{et} \quad \forall \check{q} \in \mathbb{E}^{-1/2}(\text{J}) \quad \text{on a}$$

$$\int_{\text{J} \times \text{J}} \check{p}^\varepsilon(\nu') \check{q}(\nu) K^\varepsilon(\nu, \nu') d\nu d\nu' = \int_{\text{J}} \check{\mu}_\varepsilon[u^0](\nu) \check{q}(\nu) d\nu$$

$$\text{avec} \quad K^\varepsilon(\nu, \nu') := \left(\check{\mu}_\varepsilon \times \check{\mu}_\varepsilon \right) \left\{ \frac{e^{i\varpi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right\}(\nu, \nu')$$

Le noyau K^ε ci-dessus a été obtenu en moyennant l'expression du noyau de Green deux fois : une fois sur la coordonnée φ de \mathbf{x} et une autre fois sur la coordonnée φ' de \mathbf{x}' . Cette équation peut encore se réécrire au sens fort dans $\mathbb{E}^{1/2}(\mathcal{J})$ de la manière suivante

$$\int_{\mathcal{J}} \check{\mathfrak{p}}^\varepsilon(\nu') K^\varepsilon(\nu, \nu') d\nu' = \check{\mu}_\varepsilon[u^0](\nu) \quad \nu \in \mathcal{J}$$

Nous avons noté le noyau intégral K^ε de la même manière que dans l'équation de Hallen (8.5.2) car en effet il s'agit d'une version du noyau de Hallen adapté à un fil à pointes ellipsoïdales. Pour mettre ceci bien en évidence, plaçons-nous dans le cas où le fil est un ellipsoïde mince i.e. Γ_ε est défini par (8.1.3) avec en plus $\Phi(\varphi, \nu) = 1$ donc l'équation de Γ_ε est simplement $r = \varepsilon$. Dans ce cas particulier le calcul conduit à l'expression explicite

$$K^\varepsilon(\nu, \nu') = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega D(\nu, \nu', \alpha)}}{4\pi D(\nu, \nu', \alpha)} d\alpha$$

$$\text{avec } D(\nu, \nu', \alpha) = \sqrt{(\nu - \nu')^2 + 2\varepsilon^2 \left(1 - \nu\nu' - \sqrt{1 - \nu^2} \sqrt{1 - \nu'^2} + 2\sqrt{1 - \nu^2} \sqrt{1 - \nu'^2} \sin^2(\alpha) \right)}.$$

En conclusion, on peut dire que $\check{\mathfrak{p}}^\varepsilon$ est solution de la version scalaire de l'équation de Pocklington. Or on a $\mathfrak{p}^\varepsilon = \check{\mu}_\varepsilon[\check{\mathfrak{p}}^\varepsilon]$ et le corollaire 8.4.1 nous donne une estimation d'erreur pour la différence $\mathfrak{p}^\varepsilon - \mathfrak{p}^\varepsilon$. Dans le cas où $u_{|J}^0 \neq 0$, c'est-à-dire lorsqu'on est capable de fournir une estimation d'erreur relative, cette estimation d'erreur justifie que l'on calcule $\check{\mathfrak{p}}^\varepsilon$ au lieu de \mathfrak{p}^ε et valide alors le modèle de Pocklington. À notre connaissance, il s'agit d'un résultat nouveau.

8.6 Expériences numériques

Nous proposons maintenant d'utiliser la formulation (8.3.1) afin de calculer l'onde diffracté par un objet filiforme. Nous nous inspirerons de la démarche que nous avons adoptée au chapitre 5 pour proposer une discrétisation de ce problème dont les qualités d'approximation ne se dégradent pas lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ et qui s'améliorent lorsque $h \rightarrow 0$ (h désignant le pas du maillage).

8.6.1 Maillage volumique et espace d'approximation standard

Dans ce contexte tridimensionnel, nous avons recours au même type de discrétisation que celui qui a été décrit au chapitre 5 en ce qui concerne le domaine Ω . Nous supposons que les hypothèses **M1**, **M2** et **M3** transposées au cadre tridimensionnel sont encore vérifiées. Revenons rapidement sur ces notations et hypothèses de base.

Nous considérons une triangulation régulière $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ du domaine de calcul (hypothèse **M1**). Ici la triangulation sera composée de tétraèdres ou d'hexaèdres au lieu d'être composée de triangles ou de quadrangles. Pour chaque h nous considérons une collection $(K, \Sigma_K, \Theta_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$ d'éléments finis de Lagrange. Dans ce chapitre nous supposons que chaque (K, Σ_K, Θ_K) est affine équivalent à un élément fini de référence $(\hat{K}, \hat{\Sigma}, \hat{\Theta})$, c'est-à-dire que pour tout $h > 0$ et tout $K \in \mathcal{T}_h$ il existe une bijection $F_K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, avec $F_K \in \mathbb{P}_1^3$ ou $F_K \in \mathbb{Q}_1^3$ suivant que l'on considère des tétraèdres ou des hexaèdres et satisfaisant

$$K = F_K(\hat{K}), \quad \Sigma_K = F_K(\hat{\Sigma}) \quad \text{et} \quad \Theta_K = \{ \hat{u} \circ F_K^{-1} \mid \hat{u} \in \hat{\Theta} \}.$$

En notant k l'ordre des éléments finis, suivant que nous considérons un maillage en tétraèdres ou en hexaèdres nous supposons $\hat{\Theta} = \mathbb{P}_k$ ou \mathbb{Q}_k , et nous supposons également que la source f vérifie $f \in H^{k-1}(\Omega)$ (hypothèse **M2**). L'espace d'approximation standard sera alors défini par

$$\mathbb{V}^h := \{ v \in \mathcal{C}^0(\Omega) \mid v|_K \in \Theta_K \}.$$

Soit I_h le nombre total de degrés de liberté, c'est-à-dire $I_h = \text{card}(\cup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K)$. On suppose donné une numérotation des degrés de libertés de sorte qu'à chaque $i \in \llbracket 1, I_h \rrbracket$ est associé de façon univoque un point $a_i \in \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \Sigma_K$. On définit la base (ψ_i^h) des fonctions de forme standard de \mathbb{V}^h ainsi que l'opérateur d'interpolation de Lagrange $P_h : \mathcal{C}^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}^h$ par

$$\psi_i^h(a_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad \text{et} \quad P_h v := \sum_{i=1}^{I_h} v(a_i) \psi_i^h, \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\Omega). \quad (8.6.1)$$

8.6.2 Espace d'approximation filaire

Contrairement à la situation que nous avons présentée au chapitre 4, l'espace $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ n'est pas de dimension 1 mais est encore de dimension infinie. Il convient donc de proposer un espace de discrétisation aussi pour $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$. Nous le noterons \mathbb{E}^h et le définirons par

$$\mathbb{E}^h := \left\{ {}^t\check{\mu}_\varepsilon[q] = (\phi_{\Gamma_\varepsilon}^* q) \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Xi_\varepsilon^* \mathfrak{S}_e}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \mid q \in \mathbb{P}_{N(h)}(J) \right\}$$

avec $\mathbb{P}_{N(h)}(J) =$ polynômes de degré au plus $N(h)$ sur J .

Le nombre $N(h)$ est un entier tel que $N(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$. C'est un paramètre de discrétisation jouant le rôle de h mais pour le fil. Il s'agit d'une discrétisation de type spectral. Comme nous l'avons vu au paragraphe 7.4.3 l'espace $\mathcal{C}^\infty(J)$ est dense dans $\mathbb{E}^{-1/2}(J)$. Par continuité de ${}^t\check{\mu}_\varepsilon$ d'après la proposition 8.2.2, il est donc clair que

$$\forall p \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \quad \text{on a} \quad \inf_{q \in \mathbb{E}^h} |p - q|_{-1/2, \Gamma_\varepsilon} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Par ailleurs, de même qu'au chapitre 5, nous supposons que l'épaisseur du fil est fonction du pas de maillage $\varepsilon(h) = h^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ (hypothèse **M3**).

8.6.3 Schéma de Galerkin standard

Nous commençons par nous intéresser à la résolution de la formulation obtenue lorsqu'on applique directement la discrétisation décrite plus haut à la formulation (8.3.1). Dans le cadre des expériences numériques que nous présentons ici la source provient d'une condition aux limites de Dirichlet non-homogène correspondant à une fonction $g \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, au lieu d'être donnée comme une fonction $f \in L^2(\Omega_\varepsilon)$ second membre de l'équation de Helmholtz comme dans (8.3.1). La formulation discrète que nous considérons dans le cas d'une discrétisation standard s'écrit alors

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (u^{\varepsilon, h}, p^{\varepsilon, h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}^h \text{ satisfaisant} \\ &\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon, h} \bar{w} + a(u^{\varepsilon, h}, w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}^h, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^{\varepsilon, h} = \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{g}, \quad \forall q \in \mathbb{E}^h. \end{array} \right. \quad (8.6.2) \end{aligned}$$

8.6.4 Schéma de Galerkin enrichi

En reprenant les conclusions auxquelles nous avons abouti au chapitre 5, il est naturel de s'interroger sur la précision du schéma de Galerkin standard dans le cas d'un fil très fin. On peut s'attendre à ce qu'un schéma basé seulement sur les espaces d'approximation standard \mathbb{V}^h et \mathbb{E}^h souffre d'un phénomène de verrouillage numérique. Nous allons montrer qu'il est possible d'en améliorer significativement

la précision en ayant recours à des fonctions de formes additionnelles singulières.

Suivant la démarche que nous avons adoptée au chapitre 5, nous proposons d'augmenter l'espace \mathbb{V}^h avec des fonctions de formes additionnelles inspirées de la forme du champ proche que nous avons dérivée au paragraphe 7.4.6. On définit donc

$$\mathbb{V}_e^h := \mathbb{V}^h \oplus \text{span} \left\{ (\phi_{\text{el}}^* q) \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e = \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_0 \{ (\phi_{\text{el}}^* q) \ln R \} \mid q \in \mathbb{P}_{N(h)}(J) \right\}.$$

Rappelons que \mathfrak{S}_e est la fonction définie par (7.2.5). En particulier on a $\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e = 0$ sur Γ_ε . Notons également que si $q \in \mathbb{P}_{N(h)}(J)$ alors

$$\frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \left((\phi_{\text{el}}^* q) \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e \right) = (\phi_{\text{el}}^* q) \frac{\partial}{\partial n_{\Gamma_\varepsilon}} \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e \right) \in \mathbb{E}^h.$$

Nous appelons formulation enrichie la formulation discrète obtenue en prenant le couple d'espaces discrets $\mathbb{V}_e^h \times \mathbb{E}^h$ comme espaces d'approximation. Toujours en considérant comme source une condition de Dirichlet non-homogène correspondant à une fonction $g \in H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon)$, celle-ci s'écrit

Trouver $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}_e^h \times \mathbb{E}^h$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{w} + a(u^{\varepsilon,h}, w) = 0, \quad \forall w \in \mathbb{V}_e^h, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^{\varepsilon,h} = \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{g}, \quad \forall q \in \mathbb{E}^h. \end{array} \right. \quad (8.6.3)$$

8.6.5 Comparaison entre les deux méthodes

Nous présentons une expérience numérique dans laquelle nous avons testé les deux méthodes. Pour des raisons pratiques, le domaine de calcul Ω que nous avons considéré n'est pas une boule comme avec la définition (8.1.1), mais un cube de coté 4. Pour faciliter le calcul d'une solution de référence nous avons choisi de considérer $\varpi = 0.7957$. Le fil Γ_ε est un ellipsoïde fin donné en coordonnées ellipsoïdales (r, φ, ν) par l'équation $r = \varepsilon$ centré autour d'un segment I de longueur 2. Nous avons choisi un fil d'épaisseur $\varepsilon = 10^{-6}$. En résumé

$$\varpi = 0.7957, \quad \varepsilon = 10^{-6} \quad \text{et} \quad \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e = \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \mathbf{1}_{r>\varepsilon}.$$

Nous avons considéré un fil dans deux positions différentes. Une position alignée avec les axes de la boîte de calcul Ω , et une position oblique.

Extrémités de I dans la position 1

$$(0, 0, -1) \quad \text{et} \quad (0, 0, 1)$$

Extrémités de I dans la position 2

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ci-dessous nous avons représenté la boîte de calcul Ω ainsi que les deux plans de coupe dans lesquels nous allons représenter l'amplitude des champs.

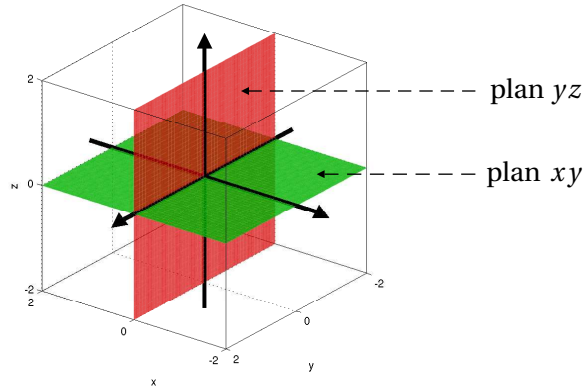


Fig.44 Position des plans de coupe

Calcul d'une solution de référence Dans le cadre de ces expériences tridimensionnelles, outre l'implémentation des schémas à tester, s'est posée une problématique expérimentale supplémentaire : comment obtenir une solution de référence? C'est la raison pour laquelle, en guise de source, nous avons imposé une condition de Dirichlet non-homogène sur Γ_ε . Dans cette situation nous pouvions alors calculer une solution analytique par séparation de variables.

En reprenant les notations et résultats de Flammer dans [47], la séparation de variables fournit une famille de solutions sortantes de l'équation de Helmholtz indexée par deux indices $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [-n, +n]$. Ces solutions à variable séparées s'écrivent

$$S_{m,n}(\varpi, \nu) R_{m,n}^{(1)}(\varpi, \xi(r)) e^{im\varphi} \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in [-n, +n] \quad \nu \in [-1, +1], \quad r \in]0, +\infty[. \quad (8.6.4)$$

Chacune des fonctions spéciales $S_{m,n}$ et $R_{m,n}^{(1)}$ admettent ϖ comme paramètre et en dépendent de façon non triviale. Les fonctions $\nu \mapsto S_{m,n}(\varpi, \nu)$ sont définies et de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1, +1]$, et les fonctions $\xi \mapsto R_{m,n}^{(1)}(\varpi, \xi)$ sont définies et de classe \mathcal{C}^∞ sur $]1, +\infty[$ et sont singulières au voisinage 1. Pour chaque m la famille $(S_{m,n}(\varpi, \cdot))_{n \geq |m|}$ est orthogonale pour le produit scalaire standard sur $L^2([-1, +1])$,

$$\int_{-1}^{+1} S_{m,k}(\varpi, \nu) S_{m,l}(\varpi, \nu) d\nu = 0 \quad \text{si } k \neq l.$$

Toute solution sortante de l'équation de Helmholtz à l'extérieur de l'ellipsoïde d'équation $r = \varepsilon$ se décompose comme une somme hilbertienne (au sens de la convergence dans $L^2(\Omega_\varepsilon)$) des fonctions de (8.6.4). Ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} v \in H^2(\Omega_\varepsilon) \\ v \text{ sortante} \\ \Delta v + \varpi^2 v = 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} v(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=-n}^{+n} v_{m,n} S_{m,n}(\varpi, \nu) \frac{R_{m,n}^{(1)}(\varpi, \xi(r))}{R_{m,n}^{(1)}(\varpi, \xi(\varepsilon))} e^{im\varphi} \\ \text{avec } v_{m,n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{S_{m,n}(\varpi, \nu) e^{-im\varphi}}{\|S_{m,n}(\varpi, \cdot)\|_{L^2(J)}^2} v(\phi_{\text{el}}(\varepsilon, \varphi, \nu)) d\nu d\varphi \end{array} \right.$$

Ainsi dans le cas où l'on considère $g = S_{0,n}(\varpi, \nu)$ pour la condition aux limites sur Γ_ε , la solution exacte de notre problème est alors donnée par

$$u^\varepsilon(\phi_{\text{el}}(r, \varphi, \nu)) = S_{0,n}(\varpi, \nu) \frac{R_{0,n}^{(1)}(\varpi, \xi(r))}{R_{0,n}^{(1)}(\varpi, \xi(\varepsilon))} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \quad \text{pour } g(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) = S_{0,n}(\varpi, \nu). \quad (8.6.5)$$

Nous avons donc considéré des conditions aux limites de la forme $g(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) = S_{0,n}(\varpi, \nu)$ pour différents $n \in \mathbb{N}$. La solution analytique donnée par (8.6.5) a alors été calculée à l'aide des routines FORTRAN fournies avec [118] et également en accès libre sur la page <http://jin.ece.uiuc.edu/routines/routines.html>. Ci-dessous nous représentons la solution calculée au moyen des ces routines dans les positions 1 et 2 pour le second membre $g(\phi_{\Gamma_\varepsilon}(\varphi, \nu)) = S_{0,0}(\varpi, \nu)$. Nous représentons le champ u^ε dans le plan xy et xz .

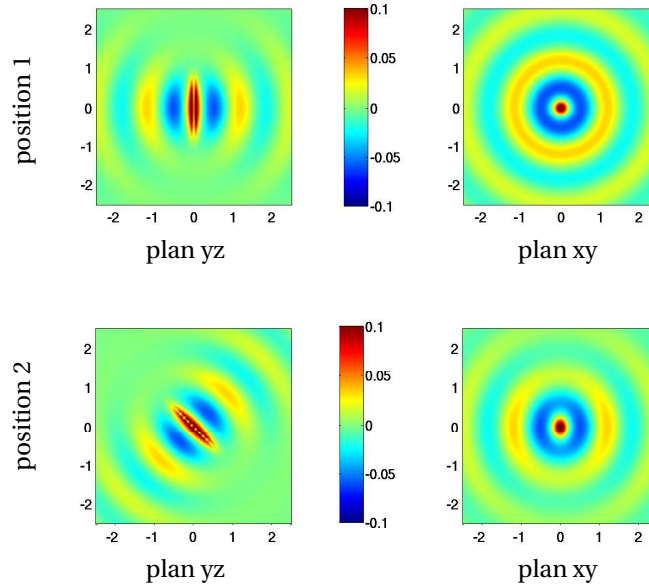


Fig.45 Amplitude de la solution analytique u^ε

Discrétisation du domaine de calcul, résultats avec un schéma standard Pour domaine Ω nous avons considéré un maillage cartésien dont les axes étaient alignés avec les arêtes de Ω . Réparties autour du domaine Ω nous avons considéré une couche PML pour imposer la condition de rayonnement. Celle-ci a été paramétrée de manière à induire une erreur relative d'ordre inférieure à 10^{-3} . Nous avons utilisé des éléments finis \mathbb{Q}_2 . Enfin l'erreur a été mesurée dans une partie du plan xy notée Γ_{xy} et définie ci-après. Les expériences que nous présentons ont été réalisées avec les valeurs suivantes

$$h \approx 9.253 \cdot 10^{-2}, \quad N(h) = 8 \quad \text{et} \quad \Gamma_{xy} = \left\{ (x, y, z) \in \Omega \text{ t.q. } z = 0 \text{ et } \sqrt{x^2 + y^2} > 0.6 \right\}.$$

Avec ces caractéristiques, le problème discrétisé compte 1 295 029 degrés de liberté auxquels peuvent s'ajouter une dizaine de degrés de liberté dans le cas du schéma de Galerkin enrichi. Nous avons donc utilisé un solveur itératif basé sur un algorithme de gradient conjugué. Nous avons représenté ci-dessous en Fig.46 la différence $u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon$ dans les plans xy et yz pour les deux positions de fil, lorsque $u^{\varepsilon,h}$ est calculé en résolvant la formulation discrète standard (8.6.2). Nous mesurons l'erreur relative en norme L^2 dans le domaine Γ_{xy} .

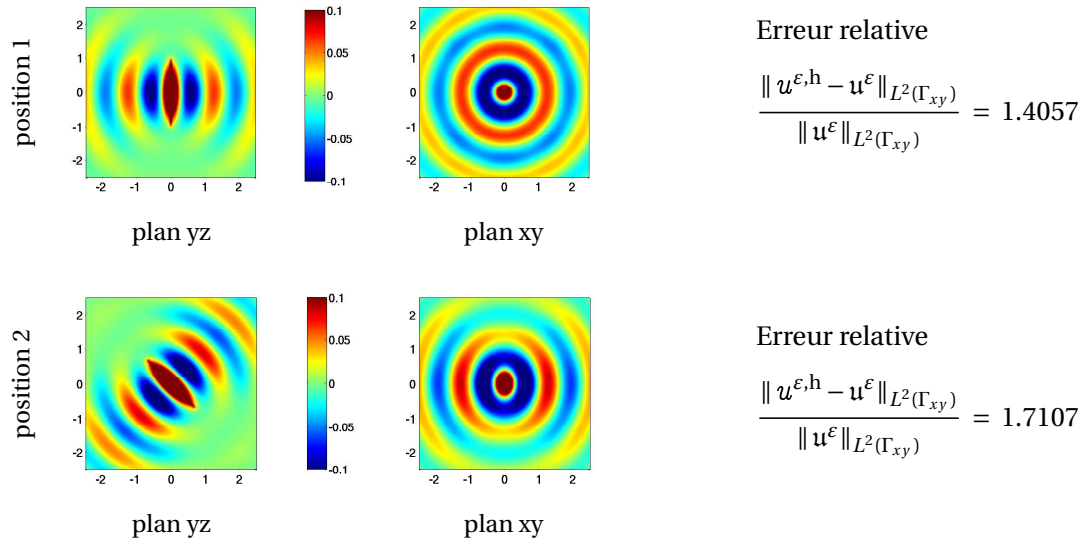


Fig.46 Amplitude du champ $u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon$ pour un schéma de Galerkin standard

L'approximation apparaît plutôt mauvaise. En effet en comparant avec la solution exacte que nous avons représentée sur la Fig.45, on constate que l'erreur relative est de l'ordre de 100%. Ce mauvais résultat vient du fait que le schéma standard n'est pas capable de "voir" des échelles en-dessous de celles du pas du maillage (on rappelle qu'ici $h \simeq 0.1$).

Tout se passe comme si, pour le schéma de Galerkin standard, le fil admet une épaisseur plus proche de h . Posons $\delta_1 = 0.01$ et $\delta_2 = 0.02$ reprenons la solution $u^{\varepsilon,h}$ calculée plus haut pour $\varepsilon = 10^{-6}$ avec le schéma standard. Enfin considérons les solutions analytiques u^{δ_1} et u^{δ_2} calculées au moyen de la formule (8.6.5) mais avec δ_1 et δ_2 au lieu de ε . Nous représentons alors sur la figure Fig.47 la différence $u^{\varepsilon,h} - u^{\delta_1}$ pour le fil dans la position 1 et la différence $u^{\varepsilon,h} - u^{\delta_2}$ pour le fil dans la position 2.

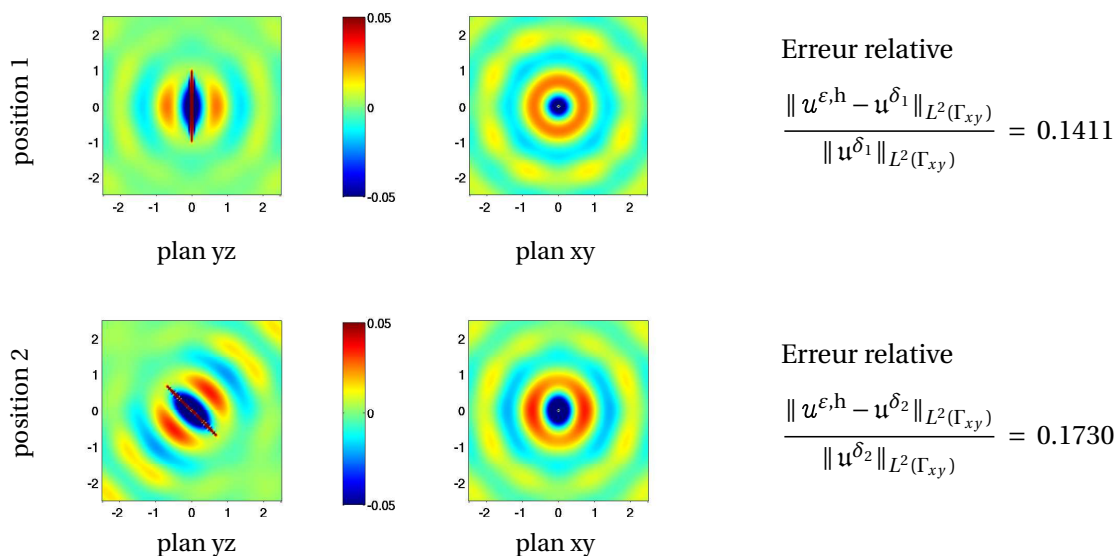


Fig.47 Amplitude des champ $u^{\varepsilon,h} - u^{\delta_i}$ $i = 1, 2$ pour un schéma de Galerkin standard

Suivant les résultats ci-dessus les erreurs relatives se situent entre 10% et 20% pour chacune des deux positions. On peut en tirer la conclusion suivante : lorsque l'épaisseur ε du fil est vraiment petite vis-à-vis du pas de la maille h , le schéma de Galerkin enrichi "se trompe" sur l'épaisseur du fil.

Revenons aux ordres de grandeurs pour les applications aux réseaux d'antennes que nous avons présenté en introduction, en multipliant toutes les quantités intervenant dans le calcul par 1 km : on a $h = 9.253 \cdot 10^{-2} * 1\text{km}$ et $\varepsilon = 10^{-6} * 1\text{km}$. Avec les résultats que nous venons de présenter, tout se passe comme si le schéma standard voyait un fil d'épaisseur 10m au lieu d'un fil d'épaisseur 1 mm ... Par ailleurs ce défaut de la méthode standard est assez pernicieux, car le résultat numérique "a l'air juste". De fait il est juste qualitativement, mais il est faux quantitativement.

Résultats avec un schéma de Galerkin enrichi Comparons maintenant les résultats fournis par une discrétisation standard avec les résultats obtenus en résolvant la formulation (8.6.3) correspondant au schéma de Galerkin enrichi. Les expériences ont été réalisées dans les mêmes conditions la seule chose qui change est la présence de fonctions de forme additionnelles dans le cas de Galerkin enrichi. La Fig.48 montre que les résultats sont bien meilleurs puisque l'erreur relative n'est plus que de 5% environ, et ceci reste valable dans le cas où le fil est disposé de manière oblique par rapport au maillage.

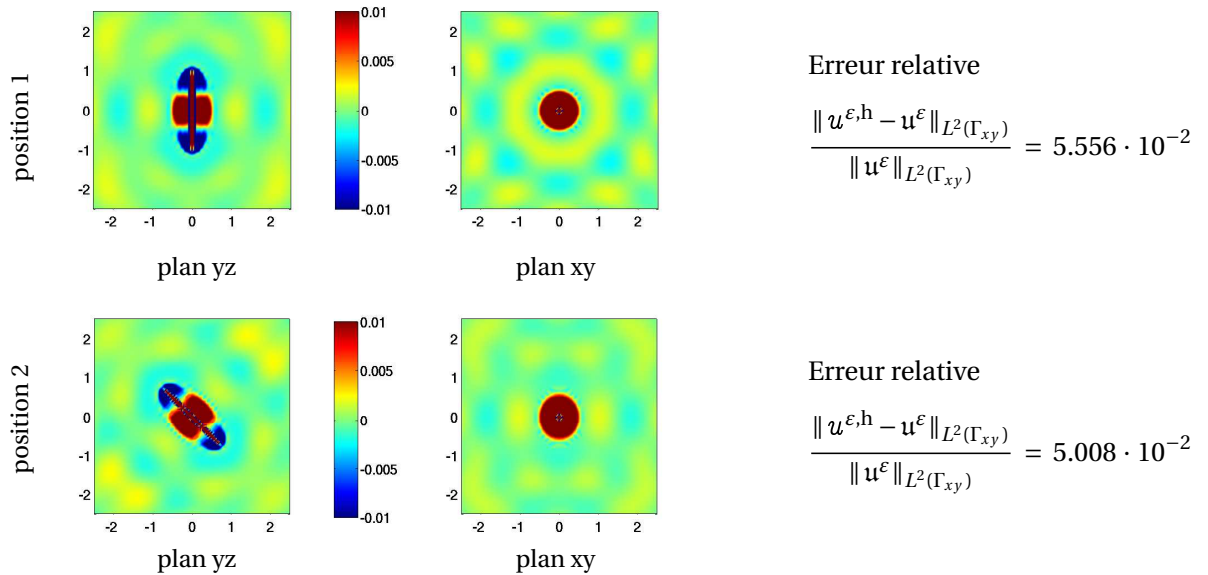


Fig.48 Amplitude du champ $u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon$ pour un schéma de Galerkin enrichi

8.6.6 Une version matricielle de la méthode de Holland

Le schéma de Galerkin enrichi est intéressant, car il permet de prendre en compte avec précision la présence d'objets filiformes dans le domaine de calcul quel que soit le maillage et la disposition du fil par rapport à celui-ci. Cependant il souffre de quelques inconvénients incontournables lorsqu'il s'agit de calculs tridimensionnels. En effet rappelons que pour appliquer le schéma enrichi il faut calculer des termes de la forme

$$a((\phi_{el}^* q) \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e, v) \quad \text{avec } v \in \mathbb{V}^h, q \in \mathbb{E}^h.$$

Ces termes sont difficiles à calculer car les fonctions $\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e$ admettent un gradient d'autant plus fort au voisinage de $r = 0$ que ε est petit, ce qui réclame l'usage de formules de quadrature d'ordre élevé. Par ailleurs les fonctions $(\phi_{el}^* q) \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e$ ont un support indépendant de h qui s'étend sur plusieurs mailles, et ceci dégrade le conditionnement de la matrice éléments finis à inverser, ralentissant la convergence de la méthode itérative utilisée pour l'inversion de cette matrice. Pour donner un ordre de grandeur sur lequel nous reviendrons plus loin, les calculs de l'expérience ci-dessus pour le schéma de Galerkin enrichi ont demandé 4h 14min pour le fil dans la position 1, et 4h 46min pour le fil dans la position 2.

Nous avons donc tenté une autre méthode que le schéma de Galerkin enrichi. Cette méthode est inspirée des principes de la méthode de Holland que nous avons présentée au chapitre 5. Nous proposons cette approche en suivant l'intuition, mais celle-ci n'est pas basée sur une justification mathématique. Cette approche que nous baptisons "méthode de Holland matricielle" vise à rendre plus locale la méthode de Galerkin enrichie dans le contexte 3D. Ce schéma correspond la formulation variationnelle suivante

Trouver $(u^{\varepsilon,h}, p^{\varepsilon,h}) \in \mathbb{V}^h \times \mathbb{E}^h$ satisfaisant

$$\begin{cases} a(u^{\varepsilon,h}, w) + \int_{\Gamma_\varepsilon} p^{\varepsilon,h} \bar{w} = 0, & \forall w \in \mathbb{V}^h, \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{u}^{\varepsilon,h} - c_{\varepsilon,h}(q, p^{\varepsilon,h}) = \int_{\Gamma_\varepsilon} q \bar{g}, & \forall q \in \mathbb{E}^h. \end{cases} \quad (8.6.6)$$

Dans ces équations $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ désigne une forme sesquilinéaire dont nous expliquons maintenant en détail comment nous la calculons. Avant ceci rappelons que, suivant la discussion que nous avons menée en section 5.4, la formulation ci-dessus apparaît comme un schéma du type Holland et ici ce qui joue le rôle de paramètre de Holland est la forme sesquilinéaire $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$.

Définition de la forme sesquilinéaire $c_{\varepsilon,h}$ Pour définir cette forme sesquilinéaire nous commençons par définir une partie du maillage que nous noterons \mathcal{O}_h . L'ensemble \mathcal{O}_h consiste en une union d'éléments formant un voisinage de I . Considérons un $r_0 > 0$ arbitraire. En pratique nous avons choisi $r_0 = 0.8$. On définit alors les deux ensembles

$$\mathcal{O}_0 = \{ \phi_{el}(r, \varphi, \nu) \mid r \in [0, r_0], \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \nu \in [-1, +1] \} \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_h^0 = \{ K \in \mathcal{T}_h \mid K \cap \mathcal{O}_0 \neq \emptyset \}.$$

On pose alors

$$\mathcal{O}_h := \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h^0} K \quad \mathbb{V}_{|\mathcal{O}_h}^h := \{ v_{|\mathcal{O}_h} \mid v \in \mathbb{V}^h \} \quad \text{et} \quad \tilde{a}_h(u, v) := \int_{\mathcal{O}_h} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\mathcal{O}_h} u \bar{v} \quad \forall u, v \in H^1(\mathcal{O}_h).$$

Nous définissons alors un opérateur Π_h semblable à celui que nous avons introduit (avec la même notation) au §5.3.2. Sauf qu'ici nous le définissons par le biais d'un problème posé sur \mathcal{O}_h au lieu d'être posé sur Ω tout entier. En effet, pour tout $v \in H^1(\Omega)$ on définit $\Pi_h(v)$ comme l'unique élément de $\mathbb{V}_{|\mathcal{O}_h}^h$ satisfaisant

$$\Pi_h(v) = P_h(v) \text{ sur } \partial\mathcal{O}_h \quad \text{et} \quad \tilde{a}_h(\Pi_h(v), w) = \tilde{a}_h(v, w) \quad \forall w \in \mathbb{V}_{|\mathcal{O}_h}^h \text{ tel que } w = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O}_h. \quad (8.6.7)$$

où l'opérateur P_h a été défini par (8.6.1) ci-dessus. Le calcul de $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ passe par Π_h ; nous avons donc introduit le "sous-maillage" \mathcal{O}_h de manière à localiser quelque peu la méthode. Nous posons

$$c_{\varepsilon,h}(q, p) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_\varepsilon} q \overline{\Pi_h((\phi_{el}^* p) \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{S}_e)} d\Gamma_\varepsilon \quad \forall p, q \in \mathbb{E}^h. \quad (8.6.8)$$

Nous avons été amené à proposer cette définition pour $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ par pure analogie avec la formule (5.4.20). Si $N(h)$ désigne le degré des polynômes de \mathbb{E}^h pour calculer $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$ il faut donc résoudre $N(h)$ problème de la forme (8.6.7). C'est la raison pour laquelle plus le domaine \mathcal{O}_h est restreint, plus rapide est l'évaluation de $c_{\varepsilon,h}(\cdot, \cdot)$. Résoudre ces $N(h)$ revient à effectuer un calibrage automatique de la méthode de Holland.

Validation de la méthode de Holland matricielle Nous avons testé cette méthode en nous plaçant dans les mêmes conditions que précédemment (même épaisseur de fil, même maillage, etc...). Nous présentons les résultats sur la figure Fig.49 ci-dessous. La méthode de Holland matricielle s'avère aussi précise que le schéma le Galerkin enrichi. De plus l'expérience a été menée sur la même machine, et le temps de calcul est cette fois de 1h 24min et 1h 26min ce qui est au moins deux fois plus rapide !

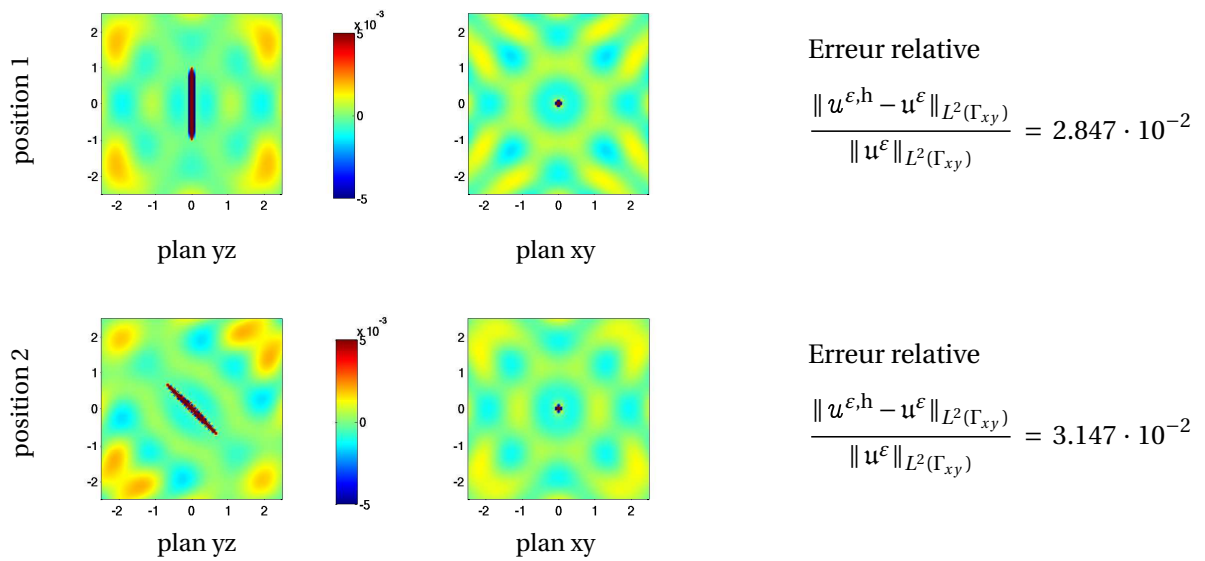


Fig.49 Amplitude du champ $u^{\varepsilon,h} - u^\varepsilon$ avec la méthode de Holland matricielle



Conclusions et perspectives

Dans les deux dernières parties de la thèse nous avons voulu exposer une sorte d'algorithme permettant d'aboutir à des schémas de calcul efficaces pour la simulation de la propagation d'ondes autour d'un fil mince. Selon toute vraisemblance, cette démarche peut fort bien s'appliquer à des équations ou des géométries filaires plus diverses que celles abordées dans le cadre de cette thèse. À l'instar de la partie 2, cet algorithme se structure en trois parties :

1. on dérive un développement asymptotique de la solution du modèle exact,
2. on utilise la forme des premiers termes du développement pour proposer un modèle approché,
3. on discrétise le modèle approché soit par une formulation de Galerkin enrichie avec des fonctions de forme issues de l'analyse asymptotique ou par son "équivalent Holland".

On voit que l'analyse asymptotique joue un rôle fondamental dans cette démarche, et que nous ne pouvons en faire l'économie. C'est la raison pour laquelle cette thèse a été dominée par les techniques asymptotiques. Nous concluons par quelques paragraphes ouvrant sur des extensions potentielles et des travaux futurs ; puis nous décrivons (sans donner de preuve) comment le travail de cette thèse peut être adapté aux équations de Maxwell.

9.1 Quelques perspectives immédiates

Le travail contenu dans cette thèse a laissé plusieurs questions ouvertes notamment concernant l'analyse numérique. Par ailleurs il serait intéressant d'explorer de nouveaux problèmes qui diffèrent de ceux de cette thèse par la géométrie ou par les équations considérés. Nous passons brièvement quelques perspectives en revue.

9.1.1 Extension des résultats d'analyse numérique

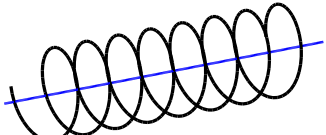
Dans le chapitre 5, on constate que les taux de convergence du schéma de Galerkin enrichi sont de fait plus importants que ceux prédits par notre théorème de consistance. En effet avec une discrétisation éléments finis d'ordre 3, la Fig.26 annonce une convergence au moins en h^3 dans les régions qui excluent un voisinage fixe (par rapport à ε) du petit obstacle. Or le théorème 5.2.1 ne suggère qu'une convergence en h (avec une erreur de consistance en $\sqrt{\varepsilon}$). Ceci montre que le théorème 5.2.1 n'est pas optimal, et il serait intéressant d'obtenir un raffinement de ce résultat lorsque la discrétisation standard est d'ordre supérieur à 1. Nous pensons par ailleurs que si l'on se servait de développements multi-échelles plutôt

que de développements raccordés dans la preuve de ce théorème, le défaut de consistance ne serait plus en $\sqrt{\varepsilon}$ mais en ε .

Une autre extension naturelle consisterait à proposer une analyse d'erreur pour montrer que le schéma tridimensionnel de Galerkin enrichi et la méthode de Holland matricielle sont consistants et faiblement verrouillants. La difficulté principale consiste à montrer qu'une condition inf-sup telle que celle du lemme 8.3.2 est vérifiée uniformément par rapport à ε et h car cette fois l'espace de multiplicateurs de Lagrange $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$ n'est plus trivial.

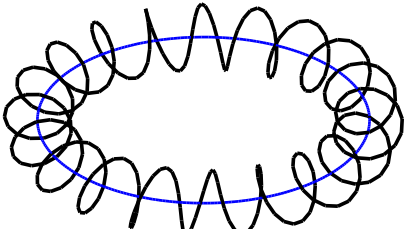
9.1.2 Les fils courbes

Signalons que les résultats de la troisième partie peuvent se généraliser sans trop de difficulté (si ce n'est celle des notations) au cas d'un fil courbe. Ce fil peut être fermé, ou comporter des pointes de forme ellipsoïdale comme décrit au chapitre 6. Ci-dessous nous avons représenté une forme de fil (avec $a, b \in \mathbb{R}$ donnés) pour lequel une telle extension serait possible. Par ailleurs signalons que l'étude que nous avons présenté peut être adaptée très facilement pour prendre en compte la présence d'autres objets diffractants et plusieurs fils minces.



$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t), \\ y(t) = a \sin(t), \\ z(t) = b t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Il serait intéressant d'effectuer des expériences numériques tridimensionnelles comparables à celles que nous avons présentées au §8.6 mais pour des géométries particulières comme celles de la figure ci-dessus qui pourraient mettre en évidence l'apparition de modes guidés.

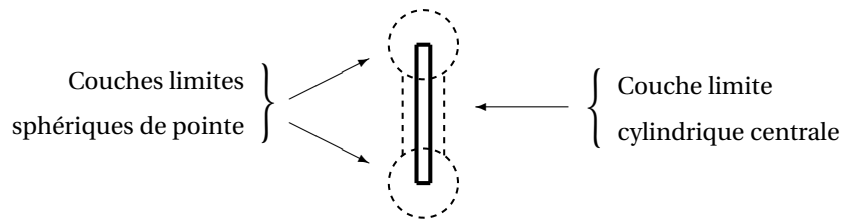


$$\begin{cases} x(\theta) = [a + b(\varepsilon) \cos(n(\varepsilon)\theta)] \cos(\theta), \\ y(\theta) = [a + b(\varepsilon) \cos(n(\varepsilon)\theta)] \sin(\theta), \\ z(\theta) = b(\varepsilon) \sin(n(\varepsilon)\theta). \end{cases}$$

La géométrie de type fil torsadé comme sur la figure ci-dessus (avec $a, b(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$, $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ et $b(\varepsilon) \rightarrow 0$, $n(\varepsilon) \rightarrow \infty$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$) serait intéressante à examiner également car c'est une situation plus proche encore des applications. On pourrait l'aborder comme un problème mélangeant analyse asymptotique et homogénéisation. Signalons à ce sujet un article intéressant de Nazarov [90] qui s'intéresse à un problème d'homogénéisation dans une géométrie filaire.

9.1.3 Les pointes "carrées"

Un autre travail très intéressant consisterait en une analyse asymptotique identique à celle des chapitres 6 et 7 mais en considérant le fil de la Fig.32. Les pointes ne seraient plus ellipsoïdales. Une idée pourrait consister à considérer deux couches limites de forme sphérique au voisinage de chacune des pointes, et une couche limite cylindrique au voisinage du tronçon central du fil comme sur la figure ci-dessous.



Il y a tout lieu de penser que si nous étions capable de traiter un tel problème d'analyse asymptotique, il deviendrait alors possible du même coup de traiter des problèmes de jonctions entre fils, ou de jonction d'un fil avec une plaque.

9.2 Les équations de Maxwell

Une extension naturelle de ce travail serait bien entendu l'étude des équations de Maxwell. Nous ne connaissons que très peu de références qui traitent d'analyse asymptotique pour les équations de Maxwell dans une géométrie filaire. Signalons l'article [3] qui a proposé une analyse asymptotique pour un modèle de courants de Foucault autour d'un fil toroïdal mince.

Nous avons introduit le formalisme du chapitre 2 en vue de pouvoir réaliser une extension de notre travail aux équations de Maxwell. Nous n'avons pu, faute de temps, faire aboutir cette étude. Cependant nous présentons ici la manière dont nous aborderions le problème pour le régime harmonique. En particulier nous proposons de décrire, sans fournir d'estimation d'erreur, la manière dont nous dériverions les termes d'un développement asymptotique de la solution des équations de Maxwell en régime harmonique dans une géométrie filaire donnée. Ensuite nous présenterons le modèle approché et le schéma de Galerkin enrichi qui en découlent naturellement. Ce qui suit relève d'une discussion intuitive, notre lecteur est invité à n'y voir qu'un raisonnement informel.

Difficultés techniques : stabilité, traitement des pointes

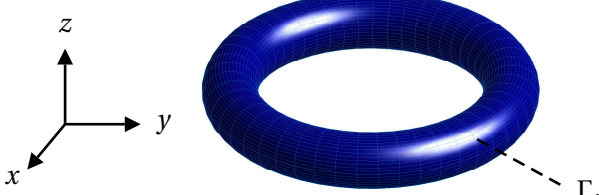
Les équations de Maxwell dans un domaine comportant un objet filiforme parfaitement conducteur soulèvent plusieurs difficultés techniques sérieuses. La première concerne la stabilité du problème. Pour l'étude asymptotique des équations de Maxwell en régime harmonique pour une pulsation $\omega \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ il n'existe pas à notre connaissance de résultat de stabilité. En outre, même pour l'analyse asymptotique des équations de Maxwell autour d'un petit objet parfaitement conducteur nous pensons que la stabilité du problème reste une question ouverte. Signalons cependant que [6, 7] contiennent un résultat de stabilité pour les équations de Maxwell autour d'une petite inhomogénéité qui passe par une démonstration assez astucieuse. La deuxième difficulté qui se pose concerne les pointes éventuelles du fil, et l'étude des comportements singuliers des solutions des équations de Maxwell au voisinage d'un fil. Sur ce sujet il est instructif de consulter [31] qui s'intéresse aux singularités du champ électromagnétique dans un domaine dont le bord comporte des arêtes.

9.2.1 Cas modèle du fil circulaire, système de coordonnées

Nous choisissons un problème particulier pour lequel une partie de ces difficultés techniques ne se pose pas. Nous nous plaçons dans la boule $\Omega = B(0, \rho) \subset \mathbb{R}^3$ pour un $\rho \in \mathbb{R}$, $\rho > 2$. On note Γ le bord de cette boule $\Gamma := \partial\Omega$. Nous considérons le cercle $I = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \text{ et } z = 0 \}$. Dans cette situation le fil que nous considérons se resserre autour de I . Pour le décrire nous introduisons une paramétrisation toroïdale

$$\phi_{\text{to}} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

qui à un triplet de coordonnées courbes $(r, \varphi, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ associe un triplet de coordonnées cartésiennes $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ suivant les formules

$$\begin{cases} x = (1 + r \cos(\varphi)) \cos(\nu), & \varphi \in [-\pi, +\pi[\\ y = (1 + r \cos(\varphi)) \sin(\nu), & \nu \in [-\pi, +\pi[\\ z = r \sin(\varphi), & r \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$$


Nous définissons le bord du fil Γ_ε par l'équation $r = \varepsilon$. Il s'agit de la surface d'un tore mince. On a $\Gamma_\varepsilon \subset \Omega$ dès que $\varepsilon < 1$ d'après la définition de Ω ci-dessus. On définit alors Ω_ε comme le sous-domaine de Ω extérieur à Γ_ε . On a donc par définition

$$\Omega_\varepsilon := \{ \phi_{\text{to}}(r, \varphi, \nu) \in \Omega \mid r > \varepsilon, (\varphi, \nu) \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2 \}$$

On a en particulier $\partial\Omega_\varepsilon = \Gamma \cup \Gamma_\varepsilon$. Nous précisons maintenant ce qu'est, pour le cas de la géométrie toroïdale, l'ensemble \mathcal{S} introduit au début du chapitre 2. Celui-ci est muni des coordonnées θ, η et est défini par

$$\mathcal{S} := (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \quad \text{muni de la métrique} \quad d\theta \otimes d\theta + d\eta \otimes d\eta.$$

La paramétrisation que nous considérons sur \mathcal{S} est simplement la paramétrisation triviale $(\theta, \eta) \mapsto (\theta, \eta)$. Étant donnée les coordonnées et la métrique que nous considérons sur \mathcal{S} , on peut schématiser cet ensemble par un carré sur lequel θ et η désignent les coordonnées cartésiennes. Nous aurons besoin de nous référer à un domaine "mis à l'échelle" c'est-à-dire ne dépendant pas de ε , nous introduisons donc le domaine normalisé

$$\Omega_N := \{ \mathbf{x} \in (\mathbb{R}, (\theta, \eta)) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \mid R > 1 \}.$$

Remarquons que la paramétrisation toroïdale n'est pas injective et en particulier ϕ_{to}^{-1} n'est pas bien défini sur Ω tout entier. Cependant il existe $r_0 > 0$ tel que ϕ_{to} réalise un difféomorphisme de $]0, r_0[\times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2$ sur $\phi_{\text{to}}(]0, r_0[\times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2)$. Pour la suite nous supposons un tel $r_0 > 0$ choisi et fixé et nous noterons

$$\tilde{\Omega}_N :=]0, r_0[\times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^2, \quad \tilde{\Omega} := \phi_{\text{to}}(\tilde{\Omega}_N) \quad \text{et} \quad \Psi := \phi_{\text{to}}^{-1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}.$$

De même que dans les chapitres 6 et 7, l'application Ψ permet de transporter les fonctions définies sur Ω_ε dans Ω_N . Nous utiliserons plus loin l'application Ψ pour définir des espaces à poids. Cette application induit un opérateur Ψ_* qui agit sur une fonction u définie sur $\tilde{\Omega}$ suivant la formule

$$\Psi_* u = u \circ \Psi^{-1} \quad \text{de sorte que} \quad \partial_\theta(\Psi_* u) = \Psi_*(\partial_\varphi u) \quad \text{et} \quad \partial_\eta(\Psi_* u) = \Psi_*(\partial_\nu u)$$

Nous définirons plus loin un équivalent vectoriel de cet opérateur. On introduit aussi comme à l'habitude un opérateur de changement d'échelle Ξ^ε . Pour des raisons pratiques, nous commençons par définir son inverse qui n'est défini que sur $\tilde{\Omega}$ par

$$\Xi^{\varepsilon, -1} : \tilde{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \quad \text{défini par} \quad \Xi^{\varepsilon, -1} \circ \phi_{\text{to}}(r, \varphi, \nu) := (r/\varepsilon, \varphi, \nu)$$

On pose alors par définition $\Xi^\varepsilon = (\Xi^{\varepsilon, -1})^{-1}$. Ainsi l'opérateur Ξ^ε n'est pas défini sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ tout entier, mais seulement sur $\{ (R, \varphi, \nu) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{S} \mid R < r_0/\varepsilon \}$.

Décomposition des champs de vecteurs Puisque les équations de Maxwell sont des équations vectorielles, nous devons définir sur quelle base nous décomposons les champs de vecteurs. Nous utilisons la base notée $\partial_r, \partial_\varphi, \partial_\nu$ naturellement associée aux coordonnées toroïdales

$$\begin{bmatrix} \partial_r \\ \partial_\varphi \\ \partial_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\nu & \cos\varphi \sin\nu & \sin\varphi \\ -r \sin\varphi \cos\nu & -r \sin\varphi \sin\nu & r \cos\varphi \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix}$$

Ci-dessus $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ désigne la base de champs de vecteur associée aux coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^3 . Notons que $\partial_\varphi, \partial_\nu$ constituent un base des champs de vecteur tangents à Γ_ε . Nous ne décomposons pas les équations de Maxwell directement sur cette base mais plutôt sur la base $\partial_r/r, \partial_\varphi/r^2$ et ∂_ν . Étant donné un champ de vecteurs $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ on définit ses composantes u^r, u^φ, u^ν par

$$\mathbf{u} = u^r \frac{\partial_r}{r} + u^\varphi \frac{\partial_\varphi}{r^2} + u^\nu \partial_\nu \quad (9.2.1)$$

Il s'agit à nouveau d'une base de champs de vecteur sur $\Omega \setminus I$. Nous avons choisi cette base précisément car les équations adoptent la forme désirée lorsqu'on les décompose ainsi (nous ignorons la raison profonde de ceci). Nous représenterons les champs de vecteur tangents à $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ comme des couples de la forme $(u, \mathbf{u}_\mathcal{S})$ où u est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ à valeur scalaire et $\mathbf{u}_\mathcal{S}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ à valeurs dans les vecteurs tangents à \mathcal{S} . Nous décomposons les champs de vecteur tangents à \mathcal{S} de la manière suivante

$$\mathbf{u}_\mathcal{S} = u^\theta \partial_\theta + u^\eta \partial_\eta.$$

De même que nous avons introduit l'application Ψ qui associe un point de $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ à un point de $\tilde{\Omega}$, on définit l'application

$$\Psi_* \mathbf{u} = \Psi_* \left(u^r \frac{\partial_r}{r} + u^\varphi \frac{\partial_\varphi}{r^2} + u^\nu \partial_\nu \right) := \left((\Psi_* u^r), (\Psi_* u^\varphi) \partial_\theta + (\Psi_* u^\nu) \partial_\eta \right)$$

qui associe un champ de vecteur tangent à $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ à un champ de vecteurs sur $\tilde{\Omega}$. Nous définissons enfin un opérateur de changement d'échelle agissant sur les champs de vecteur. Pour un champ de vecteur \mathbf{u} tangent à Ω défini sur $\tilde{\Omega}$ on pose

$$\Xi_*^{\varepsilon,-1} \mathbf{u} = \Xi_*^{\varepsilon,-1} \left(u^r \frac{\partial_r}{r} + u^\varphi \frac{\partial_\varphi}{r^2} + u^\nu \partial_\nu \right) := \left(u^r \circ \Xi^\varepsilon, u^\varphi \circ \Xi^\varepsilon \partial_\theta + u^\nu \circ \Xi^\varepsilon \partial_\eta \right).$$

On pose enfin $\Xi_*^\varepsilon := (\Xi_*^{\varepsilon,-1})^{-1}$.

9.2.2 Formulation des équations de Maxwell

Pour formuler les équations de Maxwell il est usuel d'introduire un espace, légèrement différent des espaces de Sobolev, plus en harmonie avec l'opérateur rotationnel. Nous le notons avec une police grasse car il s'agit d'un espace de champs de vecteur,

$$\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_\varepsilon) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon) \mid \|\mathbf{u}\|_{\text{curl}, \Omega_\varepsilon}^2 := \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\mathbf{curl}(\mathbf{u})\|_{\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)}^2 < \infty \right\}$$

On s'intéresse aux équations de Maxwell dans la cavité Ω_ε avec condition de conducteur parfait sur le bord du domaine dans le cas où le milieu est homogène et dissipatif i.e. $\omega \in \mathbb{C}$ et $\Im\{\omega\} \neq 0$. Notons n_Γ et n_{Γ_ε} les champs de vecteur unitaires normaux à Γ et Γ_ε dirigés respectivement vers l'extérieur et l'intérieur de Ω_ε . Le problème de Maxwell s'écrit

Trouver $(\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{h}^\varepsilon) \in \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_\varepsilon) \times \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega_\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \mathbf{e}^\varepsilon + \text{curl}(\mathbf{h}^\varepsilon) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \text{curl}(\mathbf{e}^\varepsilon) - i\omega \mathbf{h}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_\varepsilon \\ \mathbf{e}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{e}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_\varepsilon \end{array} \right. \quad (9.2.2)$$

Ci-dessus \mathbf{f} est le terme source du problème. On suppose $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, $\text{div}(\mathbf{f}) \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ et $\text{supp}(\mathbf{f}) \subset \Omega_\varepsilon$ pour ε assez petit. Les deux premières équations de (9.2.2) valent dans $\mathbf{L}^2(\Omega_\varepsilon)$ et les deux autres dans $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ et $\mathbf{L}^2(\Gamma_\varepsilon)$.

Pour une raison de simplicité d'écriture nous considérons ici que la permittivité électrique (habituellement notée ε) est égale à 1 et de même que la perméabilité magnétique (habituellement notée μ) est égale à 1. Puisque $\Im\{\omega\} \neq 0$, il est classique que le problème ci-dessus est bien posé (voir [89] par exemple). En outre l'hypothèse $\Im\{\omega\} \neq 0$ permet d'assurer la coercivité d'une formulation variationnelle associée au problème (9.2.2) ce qui fournit directement un résultat de stabilité. Enfin nous considérons le cas de la condition aux limites $\mathbf{e}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_\Gamma = \mathbf{0}$ de conducteur parfait sur Γ pour simplifier la présentation, mais on pourrait tout aussi bien considérer une condition de Silver-Müller.

On cherche un développement du couple $(\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{h}^\varepsilon)$ sous la même forme que dans les chapitres précédents. Il ne s'agit que d'un développement local qui doit satisfaire

$$(\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{h}^\varepsilon) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n (\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) \quad \text{dans } \mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{curl}, \Omega \setminus I) \quad (9.2.3)$$

Ci-dessus "dans $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{curl}, \Omega \setminus I)$ " signifie que la convergence doit avoir lieu au sens de $\mathbf{H}_{\text{loc}}(\text{curl}, \omega)$ pour tout $\omega \subset \bar{\omega} \subset \Omega \setminus I$. Pour obtenir une telle suite $(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon)$, dans l'esprit de la méthode des développements raccordés, nous proposons de construire une suite de champs approchés $(\tilde{\mathbf{e}}_n^\varepsilon, \tilde{\mathbf{h}}_n^\varepsilon)$ vérifiant les estimations suivantes : il existe $\kappa > 0$ indépendant de ε mais dépendant éventuellement de N , et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ indépendant de ε et N tels que

$$\left\| \mathbf{e}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{\mathbf{e}}_n^\varepsilon \right\|_{\text{curl}, \Omega_\varepsilon} + \left\| \mathbf{h}^\varepsilon - \sum_{n=0}^N \varepsilon^n \tilde{\mathbf{h}}_n^\varepsilon \right\|_{\text{curl}, \Omega_\varepsilon} < \kappa \varepsilon^{N/2+\alpha} \quad \forall \varepsilon \in]0, 1[,$$

$$(\tilde{\mathbf{e}}_n^\varepsilon, \tilde{\mathbf{h}}_n^\varepsilon) = (1 - \chi^\varepsilon) (\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) + \chi^\varepsilon \Xi_*^\varepsilon (\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon) \quad \text{avec } \chi^\varepsilon(\phi_{\text{to}}(r, \varphi, \nu)) := \chi\left(\frac{r}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

Ci-dessus la fonction $\chi = \chi(r)$ est une fonction de troncature de classe \mathcal{C}^∞ telle que $\chi(r) = 1$ tant que $r < r_0/2$ et $\chi(r) = 0$ dès que $r > r_0$. Pour construire les champs approchés $(\tilde{\mathbf{e}}_n^\varepsilon, \tilde{\mathbf{h}}_n^\varepsilon)$ il faut donc définir siouxement les couples $(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon)$ et $(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon)$. Précisons tout d'abord dans quels espaces nous allons les chercher. De même que précédemment il s'agit d'espaces à poids.

Pour les définir nous formulons d'abord une remarque technique. Un champ de vecteur \mathbf{U} tangent à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$ peut se décomposer sous la forme $\mathbf{U} = (U, \mathbf{U}_\mathbb{S})$ où U est à valeur scalaire et où $\mathbf{U}_\mathbb{S}$ est à valeur dans les champs de vecteur tangents à \mathbb{S} . On pose alors par définition $\nabla_\sigma^\gamma \mathbf{U} = (\nabla_\sigma^\gamma U, \nabla_\sigma^\gamma \mathbf{U}_\mathbb{S})$ où ∇_σ^γ désigne la dérivée covariante d'ordre γ sur \mathbb{S} . À présent nous définissons les espaces à poids en champ lointain. Comme ces espaces sont décrits à l'aide des coordonnées toroïdales et que la paramétrisation ϕ_{to} n'est pas globalement injective, nous devons considérer deux fonctions de troncature $\chi_0, \chi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que $\chi_0, \chi_1 \geq 1$ avec $\chi_1 = 1 - \chi_0$, et où χ_0 vérifie les propriétés suivantes : $\chi_0(\mathbf{x}) = 1$ lorsque $\mathbf{x} = \phi_{\text{to}}(r, \varphi, \nu)$ avec $r < r_0/2$; et $\chi_0(\mathbf{x}) = 1$ dès que $\mathbf{x} = \phi_{\text{to}}(r, \varphi, \nu)$ avec $r > r_0$. On pose alors par définition

$$\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega) := \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^k(\Omega) \mid \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)}^2 = \sum_{\beta+|\gamma|\leq k} \int_\Omega \left| (r\partial_r)^\beta \nabla_\sigma^\gamma \Psi_*(\chi_0 \mathbf{u}) \right|^2 r^{-2\alpha} \frac{dr d\sigma}{r} + \|\chi_1 \mathbf{u}\|_{H^k(\Omega)}^2 < +\infty \right\}$$

$$\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N) := \left\{ \mathbf{U} \in \mathbf{H}^k(\Omega_N) \mid \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{W}_\alpha^k(\Omega_N)}^2 = \sum_{\beta+|\gamma|\leq k} \int_{\Omega_N} \left| (R\partial_R)^\beta \nabla_\sigma^\gamma \mathbf{U} \right|^2 R^{-2\alpha} \frac{dR d\sigma}{R} < +\infty \right\}$$

Il s'agit d'espaces de champs de vecteur. Il est assez clair que la topologie engendrée par la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}_\alpha^k(\Omega)}$ ne dépend pas du choix des fonctions de troncature. Nous proposons de rechercher les couples $(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon)$ et $(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon)$ dans ces espaces

$$\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathcal{V}_{-n-1/2}^k(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N) := \bigcap_{k=0}^{+\infty} \mathcal{W}_{n+1/2}^k(\Omega_N)$$

9.2.3 Étude explicite des opérateurs en coordonnées toroïdales

Nous proposons de suivre la méthodologie que nous avons utilisé dans toute cette thèse adaptée au cas vectoriel. Il faut mettre le problème (9.2.2) sous la forme (2.1.2). Si nous décomposons les équations de Maxwell sur Ω_ε comme dans (9.2.1) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{1,r}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := i\omega(1+r\cos\varphi) e^r + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left((1+r\cos\varphi)^2 h^\nu \right) - \frac{\partial h^\varphi}{\partial\nu} = (1+r\cos\varphi) f^r \\ A^{1,\varphi}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := i\omega(1+r\cos\varphi) e^\varphi + \frac{\partial h^r}{\partial\nu} - r \frac{\partial}{\partial r} \left((1+r\cos\varphi)^2 h^\nu \right) = (1+r\cos\varphi) f^\varphi \\ A^{1,\nu}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := i\omega r^2 (1+r\cos\varphi) e^\nu + r \frac{\partial h^\varphi}{\partial r} - \frac{\partial h^r}{\partial\varphi} = (1+r\cos\varphi) r^2 f^\nu \end{array} \right. \quad (9.2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A^{2,r}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := -i\omega(1+r\cos\varphi) h^r + \frac{\partial}{\partial\varphi} \left((1+r\cos\varphi)^2 e^\nu \right) - \frac{\partial e^\varphi}{\partial\nu} = 0 \\ A^{2,\varphi}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := -i\omega(1+r\cos\varphi) h^\varphi + \frac{\partial e^r}{\partial\nu} - r \frac{\partial}{\partial r} \left((1+r\cos\varphi)^2 e^\nu \right) = 0 \\ A^{2,\nu}(\mathbf{e}, \mathbf{h}) := -i\omega r^2 (1+r\cos\varphi) h^\nu + r \frac{\partial e^\varphi}{\partial r} - \frac{\partial e^r}{\partial\varphi} = 0 \end{array} \right.$$

Ceci correspond à une version vectorielle de la forme (2.1.3). Ici les conditions aux limites de conducteur parfait sur Γ_ε prennent une forme extrêmement simples, elles s'écrivent simplement $e^\nu = 0$ et $e^\varphi = 0$ sur Γ_ε . Les équations ci-dessus nous fournissent l'expression d'un \mathbf{A} agissant continuellement de $\mathbf{H}^{k+1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{k+1}(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^k(\Omega) \times \mathbf{H}^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ défini par

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \left(A^{1,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial r}{r} + A^{1,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial \varphi}{r^2} + A^{1,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\nu, A^{2,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial r}{r} + A^{2,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial \varphi}{r^2} + A^{2,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\nu \right)$$

À partir de ces expressions nous allons définir les $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ adaptés à ce problème. L'expression de \mathbf{A}_n est obtenue en ne retenant dans les équations (9.2.4) que les opérateurs en facteur de r^n . Ainsi on voit que $\mathbf{A}_n = \mathbf{0}$ dès que $n > 2$. Bornons-nous à donner l'expression détaillée de \mathbf{A}_0 . Celle-ci est donnée par

$$\mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \left(A_0^{1,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial r}{r} + A_0^{1,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial \varphi}{r^2} + A_0^{1,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\nu, A_0^{2,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial r}{r} + A_0^{2,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\partial \varphi}{r^2} + A_0^{2,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\nu \right)$$

$$\begin{cases} A_0^{1,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := i\omega u^r + \frac{\partial v^\nu}{\partial \varphi} - \frac{\partial v^\varphi}{\partial \nu} \\ A_0^{1,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := i\omega u^\varphi + \frac{\partial v^r}{\partial \nu} - r \frac{\partial v^\nu}{\partial r} \\ A_0^{1,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := r \frac{\partial v^\varphi}{\partial r} - \frac{\partial v^r}{\partial \varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} A_0^{2,r}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -i\omega v^r + \frac{\partial u^\nu}{\partial \varphi} - \frac{\partial u^\varphi}{\partial \nu} \\ A_0^{2,\varphi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -i\omega v^\varphi + \frac{\partial u^r}{\partial \nu} - r \frac{\partial u^\nu}{\partial r} \\ A_0^{2,\nu}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := r \frac{\partial u^\varphi}{\partial r} - \frac{\partial u^r}{\partial \varphi} \end{cases}$$

Intéressons-nous maintenant à l'opérateur $\mathcal{A}_0(\lambda)$ image de \mathbf{A}_0 par transformée de Mellin c'est-à-dire celui qu'on obtient en partant de l'expression de \mathbf{A}_0 et en remplaçant $r\partial_r$ par la variable $\lambda \in \mathbb{C}$.

Au préalable, précisons que nous notons $H^k(\mathcal{S})$ l'ensemble des fonctions à valeurs scalaires v définies sur \mathcal{S} telles que $\|\nabla^\alpha v\|_{L^2(\mathcal{S})} < +\infty$ pour tout $\alpha \leq k$ où ∇^α désigne la dérivée covariante d'ordre α sur \mathcal{S} . De même nous notons $\mathbf{H}^k(\mathcal{S})$ l'ensemble des champs de vecteur \mathbf{u} tangents à \mathcal{S} tels que $\|\nabla^\alpha \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{S})} < +\infty$ pour tout $\alpha \leq k$. À présent étant donné un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in (H^1(\mathcal{S}) \times \mathbf{H}^1(\mathcal{S}))^2$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) := & \left(\mathcal{A}_0^{1,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathcal{A}_0^{1,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\theta + \mathcal{A}_0^{1,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\eta, \right. \\ & \left. \mathcal{A}_0^{2,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \mathcal{A}_0^{2,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\theta + \mathcal{A}_0^{2,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\eta \right) \in (L^2(\mathcal{S}) \times \mathbf{L}^2(\mathcal{S}))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0^{1,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := i\omega u^r + \frac{\partial v^\eta}{\partial \theta} - \frac{\partial v^\theta}{\partial \eta} \\ \mathcal{A}_0^{1,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := i\omega u^\theta + \frac{\partial v^r}{\partial \eta} - \lambda v^\eta \\ \mathcal{A}_0^{1,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \lambda v^\theta - \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathcal{A}_0^{2,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -i\omega v^r + \frac{\partial u^\eta}{\partial \theta} - \frac{\partial u^\theta}{\partial \eta} \\ \mathcal{A}_0^{2,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := -i\omega v^\theta + \frac{\partial u^r}{\partial \eta} - \lambda u^\eta \\ \mathcal{A}_0^{2,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \lambda u^\theta - \frac{\partial u^r}{\partial \theta} \end{cases} \quad (9.2.5)$$

Avec cette expression, il est clair que $\lambda \mapsto \mathcal{A}_0(\lambda)$ est polynomial en λ à valeur dans $\mathcal{O}_1(\mathcal{S})$. Dans le cas présent on prend comme définition

$$\mathcal{O}_p(\mathcal{S}) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_c \left((H^{k+p}(\mathcal{S}) \times \mathbf{H}^{k+p}(\mathcal{S}))^2, (H^k(\mathcal{S}) \times \mathbf{H}^k(\mathcal{S}))^2 \right)$$

La famille $\lambda \mapsto \mathcal{A}_0(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en tant que famille d'opérateurs continus de $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \times \mathbf{C}^\infty(\mathcal{S}))^2$ dans $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \times \mathbf{C}^\infty(\mathcal{S}))^2$ en notant $\mathbf{C}^\infty(\mathcal{S})$ l'ensemble des champs de vecteurs de classe \mathcal{C}^∞ tangents à \mathcal{S} . En effet introduisons la famille d'opérateurs $\widetilde{\mathcal{A}}_0(\lambda)$ définie par

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}}_0(\lambda) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{v}) := & \left(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\theta + \widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\eta, \right. \\ & \left. \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\theta + \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \partial_\eta \right) \in (L^2(\mathcal{S}) \times \mathbf{L}^2(\mathcal{S}))^2 \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{\lambda}{i\omega} \left(\lambda u^r + \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial v^\eta}{\partial \theta} \\ \widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda u^r + \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \right) + \lambda v^\eta \\ \widetilde{\mathcal{A}}_0^{1,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda u^r + \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u^\eta}{\partial \eta} \right) - i\omega u^\eta + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} - \lambda v^\theta \end{array} \right. \quad (9.2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,r}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{-\lambda}{i\omega} \left(\lambda v^r + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\eta}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial u^\eta}{\partial \theta} \\ \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,\theta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{-1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\lambda v^r + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\eta}{\partial \eta} \right) + \lambda u^\eta \\ \widetilde{\mathcal{A}}_0^{2,\eta}(\lambda)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \frac{-1}{i\omega} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda v^r + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\eta}{\partial \eta} \right) + i\omega v^\eta + \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - \lambda u^\theta \end{array} \right.$$

Alors on vérifie par un calcul assez long (sans subtilité...) que $\widetilde{\mathcal{A}}_0(\lambda) \cdot \mathcal{A}_0(\lambda) = (\lambda^2 + \partial_\theta^2) \cdot \text{Id}$ où toutes les quantités intervenant dans cette identité appartiennent à $\mathcal{O}_p(\mathcal{S})$ pour un certain $p \in \mathbb{R}$. Or il est clair que $(\lambda^2 + \partial_\theta^2) \cdot \text{Id}$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. On a donc

$$\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} = (\lambda^2 + \partial_\theta^2)^{-1} \cdot \widetilde{\mathcal{A}}_0(\lambda) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (9.2.7)$$

Par ailleurs cette identité montre que, en tant que famille à valeurs dans les opérateurs continus de $(\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \times \mathbf{C}^\infty(\mathcal{S}))^2$ dans lui-même, la famille $\mathcal{A}_0(\lambda)^{-1}$ est méromorphe avec des pôles d'ordre 1 en les points de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et un pôle d'ordre 2 en 0.

9.2.4 Écriture des problèmes récurrents

L'expression de l'inverse de $\mathcal{A}_0(\lambda)$ donnée à la fois par (9.2.6) et (9.2.7) nous permet notamment de fournir une expression explicite des applications $\ell_p(\cdot)$ et $L_p(\cdot)$. Pour obtenir ces expressions on reprend les calculs de l'exemple développé à la section 2.7.4 mais cette fois $\mathcal{A}_0(\lambda)$ est un un polynôme de degré 1 par rapport à λ . Étant donné un champ de vecteur \mathbf{u} tangent à $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$ de classe \mathcal{C}^∞ on peut considérer sa transformée de Mellin par rapport à la variable r que l'on note $\mathfrak{M}\{\mathbf{u}\}(\lambda)$. Pour chaque λ la fonction $\mathfrak{M}\{\mathbf{u}\}(\lambda)$ appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{S}) \times \mathbf{C}^\infty(\mathcal{S})$. On pose alors

$$\begin{aligned} \ell_p(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(p) r^{\lambda-p} d\lambda \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} \mathfrak{M}\{\Psi_*(\mathbf{u}, \mathbf{v})\}(\zeta) d\zeta \\ L_p(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &:= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} \mathcal{A}_0(\lambda)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathcal{A}_0}{\partial \lambda}(p) R^{\lambda-p} d\lambda \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{O}_p} \mathfrak{M}\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}(\zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (9.2.8)$$

On pourrait obtenir une expression encore plus explicite en injectant dans les formules ci-dessus l'identité (9.2.7) et les définitions (9.2.6) et (9.2.5) mais nous laissons ce calcul au lecteur désireux de se familiariser un peu plus avec ces équations. Nous pouvons maintenant écrire les problèmes récurrents. En reprenant les résultats de la section 2.8, les problèmes récurrents s'écrivent donc

$$\begin{cases}
(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) \in \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \times \mathcal{V}_{-n-1/2}^\infty(\Omega) \\
\mathbf{A}(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) = \delta_n^0(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{0}) \quad \text{dans } \Omega \setminus I, \quad \text{avec } \tilde{\mathbf{f}} := (1 + r \cos \varphi) \left(f^r \frac{\partial \mathbf{r}}{r} + f^\varphi \frac{\partial \varphi}{r^2} + f^\nu \partial_\nu \right) \\
\mathbf{e}_n^\varepsilon \wedge n_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \\
\\
(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon) \in \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N) \times \mathcal{W}_{n+1/2}^\infty(\Omega_N), \\
\mathbf{A}_0(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon) = - \sum_{k=1}^n \mathbb{R}^k \mathbf{A}_k(\mathbf{E}_{n-k}^\varepsilon, \mathbf{H}_{n-k}^\varepsilon) \quad \text{dans } \Omega_N, \\
\mathbf{E}_n^{\varepsilon, \theta} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_n^{\varepsilon, \eta} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_N, \\
\\
\ell_{-p}(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon \mathbb{L}_{-p}(\mathbf{E}_{n-p}^\varepsilon, \mathbf{H}_{n-p}^\varepsilon) \\
+ \sum_{k=1}^{-p+n} \ell_{-p} \left(r^{-p} \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_{-p}^{-p-k} [\mathbb{L}_{-p-k}(\mathbf{E}_{n-p-k}^\varepsilon, \mathbf{H}_{n-p-k}^\varepsilon)] \right) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket \\
\\
\Xi_*^\varepsilon \mathbb{L}_p(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon) = \ell_p(\mathbf{e}_{n-p}^\varepsilon, \mathbf{h}_{n-p}^\varepsilon) \\
- \sum_{k=1}^n \ell_p \left(r^p \Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_p^{p-k} [\mathbb{L}_{p-k}(\mathbf{E}_{n-k}^\varepsilon, \mathbf{H}_{n-k}^\varepsilon)] \right) \quad \forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \\
\\
\ell_0(\mathbf{e}_n^\varepsilon, \mathbf{h}_n^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon \mathbb{L}_0(\mathbf{E}_n^\varepsilon, \mathbf{H}_n^\varepsilon) \\
+ \sum_{k=1}^n \ell_0 \left(\Xi_*^\varepsilon \mathfrak{h}_0^{-k} [\mathbb{L}_{-k}(\mathbf{E}_{n-k}^\varepsilon, \mathbf{H}_{n-k}^\varepsilon)] \right)
\end{cases} \tag{9.2.9}$$

Rappelons que les fonctions \mathfrak{h}_p^q ont été définies par les formules (2.7.9) et (2.7.10). Contrairement aux situations que nous avons rencontrées auparavant, la géométrie n'admet pas de symétrie notable, de sorte que les équations de raccord ne se simplifient pas comme aux chapitres 1,3, 4, 6 et 7.

Nous pensons que les problèmes récurrents ci-dessus ne sont en fait pas bien posés en général, de la même manière qu'au chapitre 7. Nous préconisons dans ce cas d'appliquer la même technique de régularisation des équations de raccord.

9.2.5 Termes d'ordre zéro

Nous ne décrivons pas la résolution des problèmes récurrents. Signalons rapidement que celle-ci passe par la construction de profils, suivant la même démarche que dans les chapitres précédents. En revanche nous nous proposons dans ce paragraphe d'examiner un peu plus en détail le problème récurrent caractérisant les termes d'ordre zéro $(\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon)$ et $(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon)$. Le problème récurrent d'ordre zéro s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon) \in \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega) \times \mathcal{V}_{-1/2}^\infty(\Omega) \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon) = (\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{0}) \quad \text{dans } \Omega \setminus I, \\ \mathbf{e}_0^\varepsilon \wedge n_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon) \in \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N) \times \mathcal{W}_{1/2}^\infty(\Omega_N), \\ \mathbf{A}_0 \cdot (\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}) \quad \text{dans } \Omega_N, \\ E_0^{\varepsilon, \theta} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad E_0^{\varepsilon, \eta} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_N, \end{array} \right. \quad (9.2.10)$$

$$\ell_0(\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon)$$

Donnons dans le cas présent une expression plus détaillée de $\ell_0(\cdot)$. En utilisant une formule de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de 0 pour $\tilde{\mathcal{A}}_0(\lambda)$ on obtient facilement à partir de (9.2.8) que

$$\ell_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = P_0 \cdot \left(\frac{d\tilde{\mathcal{A}}_0}{d\lambda}(0) + \ln(r) \tilde{\mathcal{A}}_0(0) \right) \cdot \frac{d\mathcal{A}_0}{d\lambda}(0) \cdot \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}_0} \mathfrak{M}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}(\lambda) d\lambda$$

Ci-dessus P_0 désigne le projecteur spectral qui avait été défini par (3.1.4); ici nous supposons qu'il agit composante par composante c'est-à-dire que si $\mathbf{u} = (u, u^\theta \partial_\theta + u^\eta \partial_\eta)$ est un champ de vecteur tangents à $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$ alors

$$P_0 \cdot \mathbf{u} = P_0 \cdot (u, u^\theta \partial_\theta + u^\eta \partial_\eta) := (P_0 u, (P_0 u^\theta) \partial_\theta + (P_0 u^\eta) \partial_\eta)$$

$$\text{avec } (P_0 v)(r, \theta, \eta) := (P_0 v)(r, \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\phi_{\text{to}}(r, \alpha, \eta)) d\alpha$$

Cet opérateur provient de la décomposition spectrale de $(\lambda^2 + \partial_\theta^2)^{-1}$. Pour résoudre le problème (9.2.10), il est naturel de considérer dans un premier temps le champ limite $(\mathbf{e}^0, \mathbf{h}^0)$ défini comme l'unique élément de $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \times \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \mathbf{e}^0 + \mathbf{curl}(\mathbf{h}^0) = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{curl}(\mathbf{e}^0) - i\omega \mathbf{h}^0 = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{e}^0 \wedge n_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma \end{array} \right.$$

L'hypothèse $\Im\{\omega\} \neq 0$ permet ici encore de montrer que ce problème admet une formulation variationnelle coercive et donc qu'il est bien posé. Nous proposons de rechercher $(\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon)$ sous la forme suivante

$$\mathbf{e}_0^\varepsilon = \mathbf{e}^0 + \mathbf{u}^0(\mathbf{p}^\varepsilon) - \nabla \left\{ \int_I \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} (\nabla_I \cdot \mathbf{p}^\varepsilon)(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} - \omega^2 \int_I \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathbf{p}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (9.2.11)$$

$$\mathbf{h}_0^\varepsilon = \mathbf{h}^0 + \mathbf{v}^0(\mathbf{p}^\varepsilon) + i\omega \mathbf{curl} \left(\int_I \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathbf{p}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)$$

Ci-dessus \mathbf{p}^ε est un champ de vecteur tangent à I que nous choisissons un peu plus tard, et qui est donc de la forme $\mathbf{p}^\varepsilon = \mathbf{p}^\varepsilon(\nu) = a^\varepsilon(\nu) \partial_\nu$. La fonction $(\nabla_I \cdot \mathbf{p}^\varepsilon)$ est simplement la divergence de \mathbf{p}^ε sur I c'est-à-dire

$$(\nabla_I \cdot \mathbf{p}^\varepsilon)(\nu) = \frac{\partial a^\varepsilon}{\partial \nu} \quad \text{si } \mathbf{p}^\varepsilon(\nu) = a^\varepsilon(\nu) \partial_\nu.$$

Le potentiel \mathbf{p}^ε dans (9.2.11) est supposé vérifier $\mathbf{p}^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(I)$ et $\nabla_I \cdot \mathbf{p}^\varepsilon \in L^2(I)$. Enfin, pour un \mathbf{p}^ε donné (champ de vecteur tangent à I), le couple $(\mathbf{u}^0(\mathbf{p}^\varepsilon), \mathbf{v}^0(\mathbf{p}^\varepsilon))$ est défini comme l'unique élément de $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega) \times \mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{l} i\omega \mathbf{u}^0(\mathbf{p}^\varepsilon) + \mathbf{curl}(\mathbf{v}^0(\mathbf{p}^\varepsilon)) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{curl}(\mathbf{u}^0(\mathbf{p}^\varepsilon)) - i\omega \mathbf{v}^0(\mathbf{p}^\varepsilon) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega, \\ \left[\mathbf{u}^0(\mathbf{p}^\varepsilon) - \nabla \left\{ \int_I \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} (\nabla_I \cdot \mathbf{p}^\varepsilon)(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right\} - \omega^2 \int_I \frac{e^{i\omega|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \mathbf{p}^\varepsilon(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] \wedge n_\Gamma = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma. \end{array} \right.$$

Ces fonctions \mathbf{u}^0 et \mathbf{v}^0 ont pour seule utilité d'assurer que la condition aux limites sur Γ est respectée. La forme (9.2.11) que nous proposons correspond au champ limite auquel s'ajoute le champ rayonné par le fil lorsqu'il est parcouru par le courant \mathbf{p}^ε . Il s'agit d'une version vectorielle de la formule donnée par la proposition 7.3.1. Pour les termes d'ordre 0 du champ proche, rappelons que le couple $(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon)$ est par définition un champ de vecteur tangent à $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{S}$. Nous proposons de rechercher ce couple sous la forme suivante

$$\mathbf{E}_0^\varepsilon = \left(\frac{\partial b^\varepsilon}{\partial \nu}, \left(\frac{\partial^2 b^\varepsilon}{\partial \nu^2} + \omega^2 b^\varepsilon \right) \ln(R) \boldsymbol{\partial}_\nu \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_0^\varepsilon = (0, i\omega b^\varepsilon \boldsymbol{\partial}_\theta) \quad (9.2.12)$$

Ci-dessus $b^\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(I)$; cette fonction reste à déterminer. Avec les formes (9.2.11) et (9.2.12), les équations du problème récurrent d'ordre 0 sont toutes satisfaites sauf la condition de raccord. Le problème se ramène alors à choisir a^ε et b^ε de manière à ce que l'équation $\ell_0(\mathbf{e}_0^\varepsilon, \mathbf{h}_0^\varepsilon) = \Xi_*^\varepsilon L_0(\mathbf{E}_0^\varepsilon, \mathbf{H}_0^\varepsilon)$ soit satisfaite.

Nous pensons que cette équation de raccord se réécrit sous la forme d'un système d'équations intégrales sur a^ε et b^ε , et que ce système d'équations est très proche de (7.4.3). Par ailleurs ces équations nécessiteront certainement le recours à un procédé de régularisation comme en section 7.4.

9.2.6 Modèle approché et schéma de Galerkin enrichi

Comme indiqué dans [26] ou [49], on peut proposer une formulation en domaines fictifs du problème ci-dessus qui ne fait intervenir que le champ électrique \mathbf{e}^ε ainsi qu'un champ de vecteur \mathbf{j}^ε tangent à Γ_ε qui est proportionnel au courant induit dans le fil. Pour écrire cette formulation en domaines fictifs on introduit les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma_\varepsilon) &:= \{ \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \mid \text{div}_{\Gamma_\varepsilon}(\mathbf{g}) \in \mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_\varepsilon) \} \\ \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \mathbf{curl}(\mathbf{u}) \in \mathbf{L}^2(\Omega), \mathbf{u} \wedge \mathbf{n}_\Gamma = 0 \text{ sur } \Gamma \} \end{aligned}$$

Ci-dessus $\text{div}_{\Gamma_\varepsilon}$ est l'opérateur de divergence associé à la métrique surfacique sur Γ_ε . La condition aux limites sur Γ est prise en compte dans la définition de l'espace $\mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega)$. La formulation en domaines fictifs s'écrit alors sous la forme mixte

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } (\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{j}^\varepsilon) \in \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma_\varepsilon) \\ &\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\varepsilon) \cdot \mathbf{curl}(\bar{\mathbf{u}}) - \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{e}^\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{j}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = 0 \quad \mathbf{p} \in \mathbf{H}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma_\varepsilon) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Nous proposons tout d'abord un modèle approché en réduisant l'espace de multiplicateurs de Lagrange de la même manière que cela était suggéré dans [26, 86]. L'espace de multiplicateurs de Lagrange réduits que nous proposons consiste en l'ensemble des courants alignés avec l'axe du fil et "à symétrie de révolution" c'est-à-dire indépendants de φ ,

$$\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) := \{ a(\nu) \boldsymbol{\partial}_\nu \text{ t.q. } a \in H^{1/2}(I) \}$$

Notons qu'il s'agit bien d'un espace de champs de vecteur tangents à Γ_ε , et non à I , mais avec sa définition on peut le réinterpréter comme un espace unidimensionnel de fonctions définies sur I . Notons également que $\text{div}_{\Gamma_\varepsilon}(a(\nu) \boldsymbol{\partial}_\nu) = \partial_\nu a$ de sorte que $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \subset \mathbf{H}^{-1/2}(\text{div}, \Gamma_\varepsilon)$. La formulation en domaines

fictifs dégradée s'écrit alors

Trouver $(\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{j}^\varepsilon) \in \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) \times \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\varepsilon) \cdot \mathbf{curl}(\bar{\mathbf{u}}) - \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{e}^\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{j}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega) \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = 0 \quad \mathbf{p} \in \mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon) \end{array} \right.$$

Il conviendrait de s'assurer que cette dernière formulation est bien posée. Nous proposons maintenant une manière de discrétiser cette formulation. Précisons tout d'abord le type de discrétisation standard que nous considérons. Nous notons h le pas du maillage. Soit \mathbb{X}^h un espace d'approximation "standard" pour $\mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega)$ (par exemple les éléments finis d'arête de Nédélec cf [89, 93]). Nous proposons par ailleurs une approximation spectrale de l'espace de multiplicateurs de Lagrange $\mathbb{E}_{\text{ap}}(\Gamma_\varepsilon)$

$$\mathbb{E}^h := \left\{ q(\nu) \boldsymbol{\partial}_\nu \mid q \in \mathbb{P}_{N(h)}(I) \right\} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{N(h)}(I) = \text{polynômes en } e^{i\nu} \text{ de degré au plus } N(h).$$

Ci-dessus $N(h) \in \mathbb{N}$ est un paramètre de discrétisation tel que $N(h) \rightarrow \infty$ lorsque $h \rightarrow 0$. Enfin nous précisons le type d'enrichissement que nous préconisons, en nous inspirant de (9.2.12). Soit une fonction de troncature $\chi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\chi = \chi(r)$, χ est décroissante et de classe \mathcal{C}^∞ par rapport à r et $\chi(r) = 1$ tant que $r < 1/3$ et $\chi(r) = 0$ dès que $r > 2/3$. En nous inspirant de la forme du premier terme de champ proche donnée par (9.2.12) nous proposons l'espace d'approximation enrichi suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_e^h &:= \mathbb{X}^h \oplus \text{span} \left\{ \Psi_e^\varepsilon[a] \mid a \in \mathbb{P}_{N(h)}(I) \right\} \\ \text{avec} \quad \Psi_e^\varepsilon[a] &:= \left[\left(\frac{\partial^2 a}{\partial \nu^2} + \omega^2 a \right) \ln\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) \boldsymbol{\partial}_\nu + \frac{\partial a}{\partial \nu} \frac{\boldsymbol{\partial}_r}{r} \right] \chi(r) \mathbf{1}_{r>\varepsilon} \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Ce choix d'enrichissement est directement inspiré de (9.2.12). Notons que la composante suivant $\boldsymbol{\partial}_\nu$ des fonctions de forme que nous ajoutons s'annule sur Γ_ε de sorte qu'on a encore $\mathbb{X}_e^h \subset \mathbf{H}_0(\text{curl}, \Omega)$. De plus, grâce au choix de la fonction χ que nous avons fait plus haut, les fonctions de forme additionnelles sont des champs de vecteur de classe \mathcal{C}^∞ dans Ω_ε . Le schéma de Galerkin enrichi correspondant à ces espaces d'approximation est donc

Trouver $(\mathbf{e}^\varepsilon, \mathbf{j}^\varepsilon) \in \mathbb{X}_e^h \times \mathbb{E}^h$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \mathbf{curl}(\mathbf{e}^\varepsilon) \cdot \mathbf{curl}(\bar{\mathbf{u}}) - \omega^2 \int_{\Omega} \mathbf{e}^\varepsilon \cdot \bar{\mathbf{u}} + \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{j}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = i\omega \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{X}_e^h \\ \int_{\Gamma_\varepsilon} (\mathbf{p} \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) \cdot (\bar{\mathbf{e}}^\varepsilon \wedge \mathbf{n}_{\Gamma_\varepsilon}) = 0 \quad \mathbf{p} \in \mathbb{E}^h. \end{array} \right.$$

Pour implémenter ce schéma, à cause du comportement en $1/r$ des fonctions de forme additionnelles, on pourrait s'attendre à devoir réaliser la quadrature d'intégrales qui deviennent singulières lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Cependant les fonctions $\Psi_e^\varepsilon[a]$ définies ci-dessus ont été choisies de manière à annuler la partie dominante de l'opérateur associé au problème (9.2.2) de sorte que ce problème ne se posera pas.

9.2.7 Le régime transitoire

Le cas le plus intéressant à examiner serait bien entendu celui des équations de Maxwell en régime instationnaire. Une bonne entrée en matière consisterait à mener une analyse asymptotique de l'équation des ondes en 2D autour d'un petit obstacle avec condition de Dirichlet, puis dériver un modèle approché par l'approche proposée au chapitre 4 (écriture sous forme domaines fictifs + réduction de

l'espace de multiplicateurs de Lagrange), ensuite proposer un schéma de discrétisation (par exemple ceux que nous avons suggérés au §5.5) et mener une analyse d'erreur numérique et une étude de stabilité de ce schéma. Pour l'étude des équations de Maxwell complètes en régime instationnaire, une difficulté supplémentaire apparaît semble-t-il à cause du fait que l'enrichissement (9.2.13) dépend de la fréquence.

Liste de publications

En conclusion finale, voici la liste des articles auxquels a mené cette thèse

X. Claeys et H. Haddar *Scattering from infinite rough tubular surfaces*, Math. Meth. Appl. Sci., 30 (2007),no. 4,389–414.

X. Claeys *On the theoretical justification of the Pocklington's equation*, accepté pour publication dans M3AS.

X. Claeys et F. Collino *Augmented Galerkin schemes for the numerical solution of scattering by thin wires*, soumis à Numerische Mathematik.

Par ailleurs le contenu du chapitre 5 conduira à la préparation d'un second article. Enfin notre travail a également donné lieu à deux proceedings

X. Claeys, F. Collino et M. Duruflé *A generalized Holland model for wave diffraction by thin wires*, Conference on Computational Electromagnetism and Acoustics, Oberwolfach Allemagne, feb, 2007 .

X. Claeys *Theoretical justification of Pocklington's equation for diffraction by thin wires*, conference WAVES Reading Angleterre, jul, 2007.

X. Claeys et F. Collino *A generalized Holland model for wave diffraction by thin wires*, International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA, Turin Italie, sep, 2007 .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Yves Achdou, O. Pironneau, and F. Valentin. Effective boundary conditions for laminar flows over periodic rough boundaries. *J. Comput. Phys.*, 147(1) :187–218, 1998.
- [2] Shmuel Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.
- [3] Youcef Amirat and Rachid Touzani. Asymptotic behavior of the inductance coefficient for thin conductors. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(2) :273–289, 2002.
- [4] H. Ammari and J.-C. Nédélec. Full low-frequency asymptotics for the reduced wave equation. *Appl. Math. Lett.*, 12(1) :127–131, 1999.
- [5] Habib Ammari and Chiraz Latiri-Grouz. Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(4) :673–693, 1999.
- [6] Habib Ammari, Michael S. Vogelius, and Darko Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the electromagnetic fields due to the presence of inhomogeneities of small diameter. II. The full Maxwell equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(8) :769–814, 2001.
- [7] Habib Ammari and Darko Volkov. Asymptotic formulas for perturbations in the eigenfrequencies of the full Maxwell equations due to the presence of imperfections of small diameter. *Asymptot. Anal.*, 30(3-4) :331–350, 2002.
- [8] Michel Artola and Michel Cessenat. Diffraction d’une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un corps conducteur épais. II. Cas d’inclusions (ou d’une couche) de forte permittivité et de forte perméabilité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 313(6) :381–385, 1991.
- [9] E. Bécache, J. Rodríguez, and C. Tsogka. A fictitious domain method with mixed finite elements for elastodynamics. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(3) :1244–1267 (electronic), 2007.
- [10] A. Bendali and K. Lemrabet. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 56(6) :1664–1693, 1996.
- [11] A-S. Bonnet-Bendhia and E. Lunéville. Résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Cours ENSTA, 2003/2004.
- [12] Maryse Bourlard, Monique Dauge, Mbaro-Saman Lubuma, and Serge Nicaise. Coefficients of the singularities for elliptic boundary value problems on domains with conical points. III. Finite element methods on polygonal domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29(1) :136–155, 1992.
- [13] Maryse Bourlard, Monique Dauge, and Serge Nicaise. Error estimates on the coefficients obtained by the singular function method. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 10(11-12) :1077–1113 (1990), 1989.

-
- [14] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications.
- [15] Franco Brezzi and Michel Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*, volume 15 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [16] Leon Brillouin. The antenna problem. *Quart. Appl. Math.*, 1 :201–214, 1943.
- [17] Oscar P. Bruno and Michael C. Haslam. Regularity theory and superalgebraic solvers for wire antenna problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(4) :1375–1402 (electronic), 2007.
- [18] Gabriel Caloz, Martin Costabel, Monique Dauge, and Grégory Vial. Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer. *Asymptot. Anal.*, 50(1-2) :121–173, 2006.
- [19] W. Carpes, G. Ferreira, A. Raizer, Pichon L., and A. Razek. Tlm and fem methods applied in the analysis of electromagnetics coupling. *IEEE Trans. Magn.*, 36(4) :982–985, July 2000.
- [20] Juan Casado-Díaz, Manuel Luna-Laynez, and François Murat. Asymptotic behavior of an elastic beam fixed on a small part of one of its extremities. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 338(12) :975–980, 2004.
- [21] Zhiming Chen and Xinye Yue. Numerical homogenization of well singularities in the flow transport through heterogeneous porous media. *Multiscale Model. Simul.*, 1(2) :260–303 (electronic), 2003.
- [22] P. Ciarlet, Jr., B. Jung, S. Kaddouri, S. Labrunie, and J. Zou. The Fourier singular complement method for the Poisson problem. I. Prismatic domains. *Numer. Math.*, 101(3) :423–450, 2005.
- [23] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [24] A. Cimetière, G. Geymonat, H. Le Dret, A. Raoult, and Z. Tutek. Asymptotic theory and analysis for displacements and stress distribution in nonlinear elastic straight slender rods. *J. Elasticity*, 19(2) :111–161, 1988.
- [25] X. Claeys, H. Haddar, and P. Joly. Etude d’un problème modèle pour la diffraction par des fils minces par développements asymptotiques raccordés cas 2d. Technical Report RR-6195, INRIA, 2007.
- [26] F. Collino and F. Millot. Fils et méthodes d’éléments finis pour les équations de maxwell. le modèle de holland revisité. Technical Report 3472, Inria, 1998.
- [27] Francis Collino, Patrick Joly, and Florence Millot. Fictitious domain method for unsteady problems : application to electromagnetic scattering. *J. Comput. Phys.*, 138(2) :907–938, 1997.
- [28] David Colton and Rainer Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [29] David L. Colton and Rainer Kress. *Integral equation methods in scattering theory*. Pure and Applied Mathematics (New York). John Wiley & Sons Inc., New York, 1983. A Wiley-Interscience Publication.
- [30] Martin Costabel and Monique Dauge. A singularly perturbed mixed boundary value problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 21(11-12) :1919–1949, 1996.
- [31] Martin Costabel and Monique Dauge. Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 151(3) :221–276, 2000.
- [32] Marc Dambrine and Grégory Vial. A multiscale correction method for local singular perturbations of the boundary. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 41(1) :111–127, 2007.
- [33] M. Dauge. *Elliptic boundary value problem on corner domains*. Springer-Verlag, 1988.
- [34] M. Dauge, S. Nicaise, M. Bourlard, and J. Mbaro-Saman Lubuma. Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. II. Quelques opérateurs particuliers. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 24(3) :343–367, 1990.

- [35] Monique Dauge, Serge Nicaise, Maryse Bourlard, and Jean Mbaro-Saman Lubuma. Coefficients des singularités pour des problèmes aux limites elliptiques sur un domaine à points coniques. I. Résultats généraux pour le problème de Dirichlet. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 24(1) :27–52, 1990.
- [36] Robert Dautray and Jacques-Louis Lions. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 3.* Springer-Verlag, Berlin, 1990. Spectral theory and applications, With the collaboration of Michel Artola and Michel Cessenat, Translated from the French by John C. Amson.
- [37] P.J. Davies, D.B. Duncan, and S.A. Funken. Accurate and efficient algorithms for frequency domain scattering from a thin wire. *J.Comput.Phys.*, 168(1) :155–183, 2001.
- [38] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry.* Mathematics : Theory & Applications. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.
- [39] Marc Durufle. *Intégration Numérique et éléments finis d'ordre élevé appliqués aux équations de Maxwell en régime harmonique.* PhD thesis, Université Paris Dauphine, février 2006.
- [40] F. Edelvik. A new technique for accurate and stable modeling of arbitrarily oriented thin wires in the fdtd method. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 45(2) :416–423, May 2003.
- [41] B. Engquist and J-C. Nédélec. Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers. Technical Report (278), Ecole Polytechnique (France), 1993.
- [42] Bjorn Engquist and Andrew Majda. Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Math. Comp.*, 31(139) :629–651, 1977.
- [43] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi. *Higher transcendental functions. Vol. I.* Robert E. Krieger Publishing Co. Inc., Melbourne, Fla., 1981. Based on notes left by Harry Bateman, With a preface by Mina Rees, With a foreword by E. C. Watson, Reprint of the 1953 original.
- [44] Erwan Faou. *Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques.* PhD thesis, Université de Rennes I, 2000.
- [45] M.V. Fedoryuk. Asymptotics of the solution of the dirichlet problem for the laplace and helmholtz equations in the exterior of a slender cylinder. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1981.
- [46] M.V. Fedoryuk. The dirichlet problem for the laplace operator in the exterior of a thin body of revolution. In *Theory of Cubature Formulas and the Applications of Functionnal Analysis to Problems of Mathematical Physics*, number 2 in 126. American Mathematical Society Translations, 1985.
- [47] Carson Flammer. *Spheroidal wave functions.* Stanford University Press, Stanford, California, 1957.
- [48] R. R. Gadyl'shin. The method of matching asymptotic expansions in a singularly perturbed boundary value problem for the Laplace operator. *Sovrem. Mat. Prilozh.*, (5, Asimptot. Metody Funkts. Anal.) :3–32, 2003.
- [49] S. Garces. *Une méthode de domaines fictifs pour la modélisation des structures rayonnantes tridimensionnelles.* PhD thesis, Ecole nationale supérieure de l'aéronautique et de l'espace, Toulouse, 1997.
- [50] James Geer. The scattering of a scalar wave by a slender body of revolution. *SIAM J. Appl. Math.*, 34(2) :348–370, 1978.
- [51] James Geer. Electromagnetic scattering by a slender body of revolution : axially incident plane wave. *SIAM J. Appl. Math.*, 38(1) :93–102, 1980.
- [52] V. Girault and R. Glowinski. Error analysis of a fictitious domain method applied to a Dirichlet problem. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 12(3) :487–514, 1995.

-
- [53] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [54] Dan Givoli. Nonreflecting boundary conditions. *J. Comput. Phys.*, 94(1) :1–29, 1991.
- [55] Roland Glowinski and Serguei Lapin. Solution of a wave equation by a mixed finite element–fictitious domain method. *Comput. Methods Appl. Math.*, 4(4) :431–444 (electronic), 2004.
- [56] Roland Glowinski, Tsorng-Whay Pan, and Jacques Périaux. Fictitious domain/ domain decomposition methods for partial differential equations. In *Domain-based parallelism and problem decomposition methods in computational science and engineering*, pages 177–192. SIAM, Philadelphia, PA, 1995.
- [57] Israel Gohberg, Seymour Goldberg, and Marinus A. Kaashoek. *Classes of linear operators. Vol. I*, volume 49 of *Operator Theory : Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.
- [58] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [59] Housseem Haddar. *Asymptotic models in ferromagnetism : thin layer approximations and homogenization*. PhD thesis, ENPC, 2000.
- [60] Housseem Haddar, Patrick Joly, and Hoai-Minh Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(8) :1273–1300, 2005.
- [61] Housseem Haddar, Patrick Joly, and Hoai-Minh Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering by strongly absorbing obstacles : the scalar case. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15, no. 8 :1273–1300, 2005.
- [62] Richard A. Handelsman and Joseph B. Keller. Axially symmetric potential flow around a slender body. *J. Fluid Mech.*, 28 :131–147, 1967.
- [63] Erkki Heikkola, Yuri A. Kuznetsov, and Konstantin N. Lipnikov. Fictitious domain methods for the numerical solution of three-dimensional acoustic scattering problems. *J. Comput. Acoust.*, 7(3) :161–183, 1999.
- [64] Erkki Heikkola, Yuri A. Kuznetsov, Pekka Neittaanmäki, and Jari Toivanen. Fictitious domain methods for the numerical solution of two-dimensional scattering problems. *J. Comput. Phys.*, 145(1) :89–109, 1998.
- [65] E. W. Hobson. *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea Publishing Company, New York, 1955.
- [66] R. Holland and L. Simpson. Finite-difference analysis of emp coupling to thin struts and wires. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 1981.
- [67] Il'in. *Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems*, volume 102 of *Translation of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1992.
- [68] A. M. Il'in, A. R. Danilin, and S. V. Zakharov. Application of the method of matching asymptotic expansions to the solution of boundary value problems. *Sovrem. Mat. Prilozh.*, (5, Asimptot. Metody Funkts. Anal.) :33–78, 2003.
- [69] Erell Jamelot. *Résolution des équations de Maxwell avec des éléments finis de Galerkin continus*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2005.
- [70] Pierre Jeanquartier. Transformation de Mellin et développements asymptotiques. *Enseign. Math.* (2), 25(3-4) :285–308 (1980), 1979.
- [71] Patrick Joly and Sébastien Tordeux. Asymptotic analysis of an approximate model for time harmonic waves in media with thin slots. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(1) :63–97, 2006.

- [72] D. S. Jones. A thin wire approximation. *SIAM J. Appl. Math.*, 50(2) :547–558, 1990.
- [73] D. S. Jones. *Methods in electromagnetic wave propagation*, volume 40 of *Oxford Engineering Science Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, second edition, 1994. Oxford Science Publications.
- [74] D.S. Jones. Note on the integral equation for a straight wire antenna. *IEE Proc.*, (128) :114–16, 1981.
- [75] R. Kleinman and B. Vainberg. Full low-frequency asymptotic expansion for second-order elliptic equations in two dimensions. *Math. Methods Appl. Sci.*, 17(12) :989–1004, 1994.
- [76] V. A. Kondrat'ev. Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points. *Trudy Moskov. Mat. Obšč.*, 16 :209–292, 1967.
- [77] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, and J. Rossmann. *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, volume 52 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [78] Vladimir Kozlov and Vladimir Maz'ya. *Differential equations with operator coefficients with applications to boundary value problems for partial differential equations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [79] Yu. A. Kuznetsov and K. N. Lipnikov. The method of fictitious domains for solving the Helmholtz wave equation in an unbounded domain. In *Numerical methods and mathematical modeling (Russian)*, pages 56–70. Ross. Akad. Nauk Inst. Vychisl. Mat., Moscow, 1992.
- [80] Jen Lang, Hu Shuanshui, and Sheng Kemin. Separation of the helmholtz equation in prolate spheroidal coordinates. *Journal of applied physics*, 56(5) :1532–1535, 1984.
- [81] Serge Lang. *Fundamentals of differential geometry*, volume 191 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [82] N.N. Lebedev. *Special Functions and their applications*. Dover Publications, 1972.
- [83] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [84] Alexandre L. Madureira and Frédéric Valentin. Asymptotics of the Poisson problem in domains with curved rough boundaries. *SIAM J. Math. Anal.*, 38(5) :1450–1473 (electronic), 2006/07.
- [85] G.F. Maslennikova. A neumann problem for the helmholtz operator in the exterior to a thin body of revolution. *Differential equations*, 20 (2) :316–324, 1984.
- [86] A. Mazari. *Détermination par une méthode d'équations intégrales du champ électromagnétique rayonné par une structure filiforme*. PhD thesis, Université Paris VI, 1991.
- [87] V. Maz'ya, S. Nazarov, and B. Plamenevskii. *Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol II*. Number 111 in Operator theory :Advances and Applications. Birkhäuser Verlag, 2000.
- [88] Josef Meixner and Friedrich Wilhelm Schäfke. *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen mit Anwendungen auf physikalische und technische Probleme*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band LXXI. Springer-Verlag, Berlin, 1954.
- [89] Peter Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.
- [90] S. A. Nazarov. Averaging of boundary value problems in a domain that contains a thin cavity with a periodically changing cross section. *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, 53 :98–129, 260, 1990.
- [91] J-C. Nédélec. *Acoustic and Electromagnetic Equations*. Springer, 2001.
- [92] Joachim A. Nitsche and Alfred H. Schatz. Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 28 :937–958, 1974.

-
- [93] J-C. Nédélec. Mixte finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35 :315–41, 1980.
- [94] F.W.J Olver. *Asymptotics and special functions*. Computer Science and Applied Mathematics. Academic Press, 1974.
- [95] J. Paul, C. Christopoulos, D. Thomas, and X. Liu. Time-domain modeling of electromagnetic wave interaction with thin-wires using tlm. *IEEE Trans. Electromagn. Compat.*, 47(3) :447–455, August 2005.
- [96] H.C. Pocklington. Electrical oscillations in wires. *Pro. of the Cambridge Philosophical Society*, 1897.
- [97] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983.
- [98] L. Robin. *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales*. Gauthier-Villars, 1957.
- [99] Louis Robin. *Fonctions sphériques de Legendre et fonctions sphéroïdales. Tomes I,II,III*. Gauthier-Villars, Paris, 1957. Préface de H. Villat.
- [100] F. Rogier. *Problèmes mathématiques et numériques liés à l'approximation de la géométrie d'un corps diffractant dans les équations de l'électromagnétisme*. PhD thesis, Paris VI, 1989.
- [101] W. Rudin. *Real and complex analysis*. Mc-Graw-Hill, 1966.
- [102] Walter Rudin. *Functional analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.
- [103] B.P. Rynne. The well-posedness of the integral equations for thin wire antennas. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1992.
- [104] B.P. Rynne. On the well-posedness of pocklington's equation for a straight wire antenna and convergence of numerical solutions. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 14 :1489–1503, 2000.
- [105] A. Sellier. Asymptotic solution for the electrostatic field around a slender conducting body. *IMA J. Appl. Math.*, 62(2) :167–193, 1999.
- [106] A. Sellier. Asymptotic solution of 2D and 3D boundary integral equations arising in fluid mechanics and electrostatics. *Comput. Mech.*, 25(6) :600–612, 2000.
- [107] T.B.A Senior and J.L Volakis. Approximate boundary conditions in electromagnetics. *IEE Electromagnetic waves series*, 1995.
- [108] Stanly Steinberg. Meromorphic families of compact operators. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 31 :372–379, 1968/1969.
- [109] S. Tordeux. *Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes*. PhD thesis, UVSQ-Universite de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, 2004.
- [110] Sébastien Tordeux, Grégory Vial, and Monique Dauge. Matching and multiscale expansions for a model singular perturbation problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343(10) :637–642, 2006.
- [111] K. Umashankar, A. Taflove, and B. Beker. Calculation and experimental validation of induced currents on coupled wires in an arbitrary shaped cavity. *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, AP-35(11) :1248–1257, November 1987.
- [112] Milton Van Dyke. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 8. Academic Press, New York, 1964.
- [113] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2003.
- [114] S. Vial, G. et Tordeux. Matching of asymptotic expansions and multiscale expansion for the rounded corner problem. Technical report, SAM, ETH, Zürich, 2006.

- [115] N. Ja. Vilenkin. *Special functions and the theory of group representations*. Translated from the Russian by V. N. Singh. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 22. American Mathematical Society, Providence, R. I., 1968.
- [116] Claude Wagschal. *Dérivation, intégration*. Collection Méthodes. [Methods Collection]. Hermann, Paris, 1999.
- [117] G.N Watson. *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge Univ. Press, 1944.
- [118] Shanjie Zhang and Jianming Jin. *Computation of special functions*. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons Inc., New York, 1996. With 1 IBM-PC floppy disk.
- [119] G.V. Zhdanova. Dirichlet problem for the helmholtz operator in the exterior of a thin body of revolution. *Differential Equations*, 20 (8) :1403–1411, 1984.