



Dimension de Hausdorff de lieux de bifurcations maximales en dynamique des fractions rationnelles

Thomas Gauthier

► To cite this version:

Thomas Gauthier. Dimension de Hausdorff de lieux de bifurcations maximales en dynamique des fractions rationnelles. Systèmes dynamiques [math.DS]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT: . tel-00646407

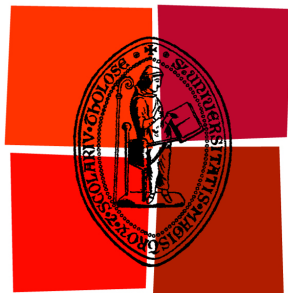
HAL Id: tel-00646407

<https://theses.hal.science/tel-00646407>

Submitted on 29 Nov 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par :

Université Toulouse III Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)

Discipline ou spécialité :

Mathématiques

Présentée et soutenue par

Thomas Gauthier

le : 25 novembre 2011

Titre :

Dimension de Hausdorff de lieux de bifurcations maximales en dynamique
des fractions rationnelles.

École doctorale :

Mathématiques, Informatique et Télécommunications (MITT)

Unité de recherche :

Institut de Mathématiques de Toulouse UMR 5219

Directeur de thèse :

François Berteloot, Professeur, Université Toulouse III,

Rapporteurs :

Nessim Sibony, Professeur, Université d'Orsay,

Tan Lei, Professeur, Université d'Angers

Membres du jury :

François Berteloot, Professeur, Université Toulouse III,

Xavier Buff, Professeur, Université Toulouse III,

Arnaud Chéritat, Chargé de Recherche, Université Toulouse III,

Tien-Cuong Dinh, Professeur, Université Pierre et Marie Curie,

Nessim Sibony, Professeur, Université d'Orsay,

Tan Lei, Professeur, Université d'Angers.

Remerciements.

Mes remerciements vont en premier lieu à François Berteloot pour avoir dirigé ce travail de Thèse. Au cours de ces trois années, il a su me transmettre sa passion pour la recherche en mathématiques. Je lui suis reconnaissant pour le temps et l'énergie qu'il m'a consacrés sans compter, ainsi que pour les discussions, mathématiques ou non, au cours desquelles il m'a beaucoup apporté.

Je suis très touché de l'honneur que me font Nessim Sibony et Tan Lei en ayant accepté de rapporter ce travail. J'exprime également toute ma gratitude à Xavier Buff, Arnaud Chéritat et Tien-Cuong Dinh pour leur participation à mon jury.

Je souhaite également remercier d'autres personnes pour le temps qu'ils m'ont accordé durant ces trois années. Je suis très reconnaissant envers tous les membres de l'équipe de dynamique holomorphe de l'Institut de Mathématiques de Toulouse, à savoir Xavier Buff, Arnaud Chéritat et Pascale Roesch, pour toutes les discussions mathématiques très enrichissantes que j'ai pu avoir avec eux et pour leur très grande disponibilité. J'ai aussi eu la chance de pouvoir profiter des conseils avisés de Vincent Guedj et Ahmed Zeriahi en théorie du pluripotentiel. J'ai aussi eu la chance de croiser Romain Dujardin dont les questions m'ont aidé à aborder la démonstration des estimées de dimension et Charles Favre dont les conseils m'ont permis notamment d'améliorer ma façon d'exposer mon travail. Je tiens également à remercier Adam Epstein, John Hubbard et Mitsuhiro Shishikura, sans oublier Christophe Dupont.

Je remercie Agnès Requis, sans qui la vie des doctorants de mathématiques de Toulouse serait beaucoup plus compliquée, ainsi qu'Éric Lombardi et Jean-Michel Roquejoffre pour leur aide "administrative" au cours de l'été 2011. Je tiens à remercier ma mère et Chantal Lejeune pour leur relecture détaillée de ce texte qui a permis de supprimer nombre de coquilles.

Je ne peux pas écrire de remerciements sans citer James, Jean-Christophe, Christophe, Cécile et Bastien avec qui j'ai partagé mon bureau au cours de ces années et qui ont supporté mes heures de marche devant le tableau. Je pense aussi à Thomas, Arnaud, Yohann, Charlotte, Leandro et à nos discussions surréalistes du midi et à mes collègues doctorants Jacques, Julien, Léonard, Brice, Virginie, Amic, Sandrine, Alice, Alexandre, Guitta, Daniel, Tony, Arnaud, Ilies, Robin, Matthieu, Dmitriy, Luna, Boubacar, Anne, Marion, Anne, Yann, Claire, Frédéric, Valentina, Ismael, Matthias,... (et tous ceux que j'aurais oublié et qui se reconnaîtront) qui ont rendu ces années passées au sein de l'Institut de Mathématiques, ainsi que divers événements mathématiques, agréables et intéressantes.

Je salue également Claire, Mika, Cédric, Marianne, Jean-Fé et Anne-Laure, mes copains de Licence et Master, qui ont montré un intérêt pour mes travaux tout au long de ces années, ainsi qu'à mes amis de 15 ans Fabien et Jeff, qui m'ont soutenu tout au long de ces années, tout en

pensant que j'étais vraiment fou de vouloir faire des maths toute ma vie. Je ne peux non plus oublier ni Sébastien avec ses questions de maths entre deux ballons de rugby, ni Koen avec qui nous avons eu des fous rires mémorables sur le vélo en compagnie de Thomas.

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à mes parents qui ont cru en moi, m'ont accordé toute leur confiance et m'ont soutenu tout au long de mes études, ainsi qu' à mon frère qui a toujours porté un grand intérêt à mon travail et m'a appris énormément de choses sur son futur métier de médecin au cours de discussions amusantes.

Finalement, les derniers mots seront pour Marion qui a supporté toutes mes soirées LaTeX, ainsi que mes week-end chargés en mathématiques. Elle a cru en moi, n'a eu de cesse de m'encourager et a su être présente tout au long de ces trois années. Merci.

Introduction.

L'objet de cette thèse est l'étude des bifurcations de familles holomorphes de fractions rationnelles ou de polynômes au moyen de techniques pluripotentialistes.

Au début du vingtième siècle, les travaux de Fatou et Julia ont donné naissance à la théorie de l'itération des fractions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$ (voir [Al]). Ils ont mis en lumière une dichotomie : l'ensemble de Fatou est constitué des points au voisinage desquels la dynamique est stable et son complémentaire, l'ensemble de Julia, en supporte la partie chaotique. Dans les années 80, de nouveaux outils font leur apparition, principalement les applications quasi-conformes. Depuis, la dynamique sur l'ensemble de Fatou est totalement comprise mais il reste des questions intéressantes concernant l'ensemble de Julia.

Toujours dans les années 80, un intérêt est porté à l'étude des familles de fractions rationnelles. Mañé Sad et Sullivan mettent en évidence une dichotomie dans l'espace des paramètres [MSS]. L'ensemble de stabilité est l'ouvert maximal de cet espace où l'ensemble de Julia bouge holomorphiquement. Mañé-Sad-Sullivan montrent que son complémentaire, le lieu de bifurcation, est un fermé d'intérieur vide. Dans cette perspective, Douady et Hubbard initient leur étude systématique de la famille de polynômes quadratiques $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ dont le lieu de bifurcation coïncide avec la frontière de l'ensemble de Mandelbrot.

Shishikura a montré dans [Sh] que la frontière de l'ensemble de Mandelbrot est de dimension de Hausdorff 2. Tan Lei a généralisé ce résultat en montrant que la frontière du lieu de connexité de toute famille de polynômes est de dimension de Hausdorff maximale et, plus généralement, que le lieu de bifurcation de toute famille de fractions rationnelles est de dimension totale (voir [T]). McMullen a donné une autre démonstration de ce dernier résultat dans [Mc3].

Dans ce travail, nous nous intéressons à un sous-ensemble de l'espace des paramètres où les bifurcations sont, en un certain sens, extrémales. Nous montrons que ce lieu est lui aussi de dimension de Hausdorff maximale. Ceci nous permet en particulier d'obtenir le résultat suivant, pour lequel nous rappelons que, d'après l'inégalité de Fatou-Shishikura, une fraction rationnelle ne peut posséder plus de $2d - 2$ cycles neutres :

Théorème 1 *Notons $p(f)$ (resp. $s(f)$, $c(f)$) le nombre de cycles paraboliques (resp. Siegel, Cremer) distincts de $f \in \text{Rat}_d$. Soient $p, s, c \in \mathbb{N}$ tels que $p + s + c = 2d - 2$. Notons aussi*

$$\mathcal{N}_d(p, s, c) := \{[f] \in \mathcal{M}_d \mid p(f) = p, s(f) = s, c(f) = c\}.$$

Alors l'ensemble $\overline{\mathcal{N}_d(p, s, c)}$ est de dimension de Hausdorff maximale $2(2d - 2)$ et homogène.

La théorie du potentiel est l'un des principaux outils utilisés dans notre travail. Celle-ci a été introduite par Brolin en 1965 pour l'étude dynamique des polynômes (voir [Bro]). Ces méthodes se sont avérées extrêmement fructueuses en dynamique à plusieurs variables (voir [DS]) et semblent très utiles pour étudier les espaces de paramètres. La thèse de DeMarco en 2002 est le point de départ. Elle montre que pour toute famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ de fractions rationnelles, l'exposant de Lyapounov de f_λ par rapport à sa mesure d'entropie maximale est le potentiel d'un courant positif fermé dont le support est précisément le lieu de bifurcation. Le courant $T_{\text{bif}} := dd^c L(f_\lambda)$ est appelé courant de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$. Les premiers à avoir étudié les autointersections T_{bif}^k ($k \leq 2d - 2$) du courant T_{bif} sont Bassanelli et Berteloot. Ils ont démontré que les courants T_{bif}^k détectent des bifurcations plus fortes et, en particulier, la présence d'au moins k cycles neutres distincts. La mesure de bifurcation μ_{bif} , qu'ils introduisent sur l'espace des modules $\mathcal{M}_d$, détecte donc des bifurcations maximales. Ces courants T_{bif}^k ont été utilisés dans plusieurs travaux pour étudier la géométrie du lieu de bifurcation (voir [Ph, BB1, DF, BB2, BE, Du2, BB3]).

Comme dans les travaux de Shishikura et Tan Lei que nous avons mentionnés plus haut, les fractions rationnelles de type Misiurewicz donnent accès aux estimations de dimension de Hausdorff des lieux de bifurcation. Une fraction rationnelle est k -Misiurewicz si son ensemble de Julia contient exactement k points critiques comptés avec multiplicités, si elle ne possède aucun cycle parabolique et si l'ensemble ω -limite de tout point critique contenu dans son ensemble de Julia évite son ensemble critique. Il s'agit d'établir la présence, dans le lieu de bifurcation, de fractions k -Misiurewicz pour lesquels l'ensemble ω -limite des points critiques est de dimension suffisamment grande. Notons que Buff et Epstein [BE] ont prouvé que les fractions rationnelles strictement postcritiquement finies, qui sont des cas particuliers de fractions rationnelles $(2d-2)$ -Misiurewicz, appartiennent au support de T_{bif}^{2d-2} .

Nous allons maintenant détailler un peu le contenu de cette thèse. L'une des clés est de généraliser le résultat de Buff et Epstein en montrant que, dans la famille Rat_d de toutes les fractions rationnelles de degré d , une fraction k -Misiurewicz appartient au support de T_{bif}^k .

Pour ce faire, il faut mettre au point un processus de renormalisation dynamique aux paramètres Misiurewicz. C'est ce processus qui permet de mettre en lumière un phénomène de similarité entre l'espace des paramètres et l'espace dynamique. Le chapitre 2 regroupe les outils techniques utiles à la mise au point du procédé de renormalisation. En particulier, nous y établissons un Théorème de Koenigs non-autonome, ou plus précisément, un Théorème de linéarisation le long d'une orbite uniformément répulsive. Le procédé lui-même fait l'objet du chapitre 3 (voir Théorème 3.9).

Pour pouvoir utiliser le procédé de renormalisation, il faut que les activité des orbites critiques soient indépendantes les unes des autres. Etablir cete indépendance revient à prouver une certaine condition de transversalité dans l'espace des paramètres. Pour les paramètres strictement postcritiquement finis, Buff et Epstein l'ont établi à l'aide de différentielles quadratiques. Ces outils ne permettent pas de traiter le cas où les orbites critiques sont infinies. Nous sommes donc revenus à des méthodes plus classiques et avons repris des idées de van Strien et Aspenberg (voir [vS] et [As2]) pour établir un résultat de transversalité « faible ». Ceci fait l'objet du chapitre 4 (voir Théorème 4.1 pour un énoncé général et Lemme 4.11 pour une application

dans Rat_d). Soulignons que la « faiblesse » de notre résultat de transversalité est compensée par une exploitation plus systématique de la souplesse des outils pluripotentiaistes. Remarquons que Rivera-Letelier a démontré un résultat de transversalité dans le cas semi-hyperbolique (voir [RL] Appendice 2). En combinant les résultats des chapitres 3 et 4, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 2 *Soient $1 \leq k \leq 2d - 2$ et $f \in \text{Rat}_d$ une fraction rationnelle k -Misiurewicz qui n'est pas un exemple de Lattès flexible. Alors $f \in \text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1})$.*

Le chapitre 5 est dévolu aux estimées de dimension de Hausdorff. Pour démontrer le Théorème 1, nous devons montrer que l'ensemble des fractions rationnelles k -Misiurewicz est de dimension de Hausdorff maximale $2(2d + 1)$ dans Rat_d . Pour cela, comme dans les travaux de Shishikura et de Tan Lei, nous cherchons à « recopier » de gros ensembles hyperboliques dans l'espace des paramètres. Ces copies sont obtenues au moyen d'une famille d'applications de transfert du plan dynamique dans l'espace des paramètres. Nous les construisons à l'aide du résultat de transversalité établi au chapitre 4 et vérifions qu'elles possèdent les propriétés de régularité Hölder voulues. Dans le cas $k = 1$, notre preuve est en réalité légèrement plus simple que la preuve originale de Shishikura concernant la frontière de l'ensemble de Mandelbrot. Le premier résultat du chapitre 5 est le suivant (voir Théorème 5.1) :

Théorème 3 *Soit $1 \leq k \leq 2d - 2$. Notons $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble des fractions rationnelles k -Misiurewicz de degré d à points critiques simples qui ne sont pas des exemples de Lattès flexible. Alors, pour tout $f \in \mathfrak{M}_k$ et tout voisinage $V_0 \subset \text{Rat}_d$ de f on a :*

$$\dim_H(\mathfrak{M}_k \cap V_0) \geq 2(2d + 1 - k) + k \dim_{\text{hyp}}(f).$$

Un Théorème de Shishikura utilisant des techniques d'implosion parabolique (voir Théorème 1.15) combiné au Théorème 3 permettent d'établir que $\text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1})$ est de dimension de Hausdorff maximale $2(2d + 1)$ (voir Théorème 5.10). Le Théorème 1 est maintenant simplement obtenu en combinant le Théorème 5.10 à un résultat de Bassanelli et Berteloot (voir Théorème 1.26).

Mentionnons que tous ces résultats ont leur équivalent dans les familles de polynômes. On peut remarquer que le support de μ_{bif} coïncide avec la frontière de Shilov du lieu de connexité $\mathcal{C}_d$ de la famille $\mathcal{P}_d$ (voir [DF] Proposition 6.14). Le Théorème 5.10 peut alors être reformulé comme suit :

Théorème 4 *Dans l'espace des modules $\mathcal{P}_d$ des polynômes de degré d , la frontière de Shilov de $\mathcal{C}_d$ est homogène de dimension de Hausdorff maximale $2(d - 1)$.*

Le chapitre 6, indépendant des autres, est consacré à l'étude du courant et de la mesure de bifurcation dans l'espace des modules $\mathcal{M}_2$ des fractions rationnelles quadratiques. Dans [Mil],

Milnor a montré qu'il existait une paramétrisation naturelle de $\mathcal{M}_2$ par $\mathbb{C}^2$. Il a étudié les courbes $\text{Per}_n(w)$ des classes de fractions rationnelles possédant un cycle de période n et de multiplicateur donné w dans la compactification projective de $\mathcal{M}_2$ en $\mathbb{P}^2$. L'utilisation de ces courbes permet de montrer que le courant de bifurcation T_{bif} possède un prolongement naturel en un $(1, 1)$ -courant positif fermé de masse $1/2$ à $\mathbb{P}^2$. L'étude de Milnor, complétée des travaux d'Epstein [Eps1], décrit précisément les points d'accumulation du lieu de bifurcation à l'infini. Ceci nous permet de calculer les nombres de Lelong du courant T_{bif} à l'infini, en les reliant à la géométrie de l'ensemble de Mandelbrot $\mathbf{M}$:

Théorème 5 *Soit $\mu_{\mathbf{M}}$ la mesure de bifurcation de la famille $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$. Soient $\mathcal{L}_{p/q}$ le membre p/q de l'ensemble de Mandelbrot et $\infty_{p/q} = [1 : 2 \cos(2\pi p/q) : 0]$ si $1 \leq p \leq q/2$ et $p \wedge q = 1$. Soit $\mathfrak{L}_{\infty}$ la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2$ dans la paramétrisation de Milnor. Alors :*

1. $\nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q}) = \mu_{\mathbf{M}}(\mathcal{L}_{p/q} \cup \mathcal{L}_{-p/q}) = \frac{1}{2^q - 1},$
2. $\nu(T_{\text{bif}}, a) = 0$ si $a \in \mathbb{P}^2 \setminus \{\infty_{p/q} / 1 \leq p \leq q/2 \text{ et } p \wedge q = 1\},$
3. La mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_{\infty}]$ est bien définie et $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_{\infty}] = \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1} \delta_{\infty_{p/q}}.$

Dans le même chapitre, nous montrons que, contrairement au cas des familles de polynômes, le support de la mesure μ_{bif} est non-compact dans $\mathcal{M}_2$.

Table des matières

Remerciements.	i
Introduction.	iii
1 Préliminaires.	1
1.1 Familles holomorphes de fractions rationnelles.	1
1.1.1 Définition et exemples.	1
1.1.2 Familles munies d'un point critique marqué.	2
1.1.3 Les hypersurfaces $\text{Per}_n(w)$	4
1.1.4 Théorie de Mañé-Sad-Sullivan.	4
1.1.5 L'espace des modules $\mathcal{M}_2$	6
1.2 Dimension hyperbolique d'une fraction rationnelle.	8
1.2.1 Ensembles hyperboliques.	8
1.2.2 Formalisme thermodynamique.	10
1.2.3 Implosion parabolique.	12
1.3 Les courants de bifurcation.	15
1.3.1 Courants positifs.	15
1.3.2 Fonction de Green, mesure de Green et exposant de Lyapounov.	18
1.3.3 Formule de DeMarco et courant de bifurcation.	20
1.3.4 Auto-intersections du courant de bifurcation.	23
1.3.5 Quelques phénomènes d'équidistribution.	25
2 Robustesse des dynamiques hyperboliques.	27
2.1 Mouvement holomorphe.	27
2.2 Linéarisation le long d'une orbite répulsive.	32
2.2.1 Linéarisation pour une chaîne de contractions.	33
2.2.2 Familles de branches inverses.	35
2.2.3 Linéarisation le long d'orbites répulsives.	37
3 Auto-intersections du courant de bifurcation aux paramètres Misiurewicz.	39
3.1 Fractions rationnelles Misiurewicz.	39
3.2 L'application d'activité.	41
3.3 Préliminaires et esquisse la démonstration du Théorème 3.9.	44
3.4 Première étape : encadrements locaux de $\mu^{(q)}$	50
3.5 Deuxième étape : renormalisation.	52
3.6 Troisième étape : réduction asymptotique à une donnée dynamique.	54

4	Transversalité aux paramètres Misiurewicz.	57
4.1	Bonnes familles de fractions rationnelles.	58
4.2	Transversalité dans les bonnes familles.	67
4.3	Ubiquité des bonnes familles.	69
4.4	Transversalité dans Rat_d	71
5	Estimées de dimension de Hausdorff.	73
5.1	Rappels sur la dimension de Hausdorff.	74
5.2	Perturbations de $f \in \mathfrak{M}_k$: une application de la transversalité.	77
5.3	Les applications de transfert.	78
5.4	Estimées locales de dimension de Hausdorff.	82
5.5	Dimension du support de la mesure de bifurcation.	83
6	Les courants de bifurcation dans $\mathcal{M}_2$.	85
6.1	Prolongement du courant de bifurcation T_{bif} à $\mathbb{P}^2$	85
6.2	Nombres de Lelong de T_{bif} à l'infini.	87
6.3	Les mesures μ_{bif} et T_{bif}^2	89
	Bibliographie	93
	Résumé	97

Chapitre 1

Préliminaires.

Dans tout le texte, d désigne un nombre entier supérieur ou égal à deux. On note ω la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^1$ et $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ la projection canonique.

1.1 Familles holomorphes de fractions rationnelles.

1.1.1 Définition et exemples.

Une *famille holomorphe* de fractions rationnelles de degré d est une application holomorphe :

$$f : X \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1,$$

où X est une variété complexe et où $f_\lambda := f(\lambda, \cdot)$ est une fraction rationnelle de degré d pour tout $\lambda \in X$. On notera $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ la famille $f : X \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

Dans ce contexte, on note $\mathcal{J}_\lambda := \mathcal{J}_{f_\lambda}$ l'ensemble de Julia de f_λ et $\mathcal{F}_\lambda := \mathcal{F}_{f_\lambda}$ son ensemble de Fatou.

Exemple 1.1 La famille $p : \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$, définie par $p_c(z) = z^2 + c$, est une famille holomorphe de polynômes quadratiques. Tout polynôme de degré 2 est conjugué par une application affine de $\mathbb{C}$ à un unique polynôme p_c . Notons $\mathbf{M}$ l'ensemble de Mandelbrot, c'est-à-dire l'ensemble

$$\mathbf{M} := \{c \in \mathbb{C} \mid (p_c^n(0))_{n \geq 0} \text{ est bornée dans } \mathbb{C}\}.$$

Il s'agit d'un compact connexe simplement connexe de $\mathbb{C}$ (voir [CG] Théorème 1.2 page 124). On sait que l'ensemble de Julia d'un polynôme p_c est connexe si et seulement si $c \in \mathbf{M}$. En outre, comme nous le verrons ultérieurement, l'ensemble de Mandelbrot joue un rôle particulier dans la famille des fractions rationnelles quadratiques.

Exemple 1.2 L'espace $\mathcal{P}_3$ des polynômes cubiques modulo conjugaison affine sur $\mathbb{C}$ n'est pas une famille holomorphe de polynômes. En revanche, on peut considérer la famille suivante : pour $\lambda = (c, a) \in \mathbb{C}^2$, on pose $P_\lambda(z) := \frac{1}{3}z^3 - \frac{c}{2} + a^3$. Le polynôme P_λ a pour points critiques 0 et c et vérifie $P_\lambda(0) = a^3$. Tout polynôme de degré 3 est conjugué par une application affine à au plus 6 polynômes de la forme $P_\lambda(z)$, c'est-à-dire que la projection canonique $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^2} \longrightarrow \mathcal{P}_3$ est un revêtement ramifié de degré 6. Il s'agit d'une famille raisonnable pour étudier l'espace $\mathcal{P}_3$.

On note Rat_d l'ensemble de toutes les fractions rationnelles de degré d , c'est-à-dire l'ensemble des applications holomorphes $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui s'écrivent $f = p/q$, où p et q sont des polynômes sans zéro commun et tels que $\max(\deg(p), \deg(q)) = d$. Le Lemme suivant montre que Rat_d peut être considérée comme une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d (voir [BB1] Section 1.1) :

Lemme 1.1 *L'ensemble Rat_d est un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^{2d+1}$ et son complémentaire dans $\mathbb{P}^{2d+1}$ est une hypersurface irréductible. Par conséquent, Rat_d est une variété complexe connexe de dimension $2d + 1$.*

Soit $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ le groupe des automorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^1$. Ce groupe agit par conjugaison sur Rat_d . Puisque deux fractions rationnelles qui sont conjuguées ont la même dynamique, il peut s'avérer plus pertinent de travailler dans l'espace des modules

$$\mathcal{M}_d := \text{Rat}_d / \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$$

des fractions rationnelles de degré d . Rappelons quelques faits connus sur $\mathcal{M}_d$ (voir [Sil] Remarque p. 43) :

1. La projection canonique $\Pi : \text{Rat}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ est ouverte,
2. pour tout $f \in \text{Rat}_d$, le stabilisateur $\text{Aut}(f)$ de f sous l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est fini. Localement, il existe une sous-variété complexe V , invariante par $\text{Aut}(f)$, transverse à l'orbite $\mathcal{O}(f)$ de f pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, telle que Π induit un biholomorphisme $V / \text{Aut}(f) \rightarrow \Pi(V)$, où $\Pi(V)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_d$,
3. Il existe un ensemble analytique $Y \subset \text{Rat}_d$ tel que la projection naturelle $\Pi : \text{Rat}_d \setminus Y \rightarrow \mathcal{M}_d \setminus \Pi(Y)$ est un fibré principal.

Lorsque $d > 2$, l'espace $\mathcal{M}_d$ n'est pas lisse. Puisque les groupes $\text{Aut}(f)$ sont tous finis, et puisque $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ est une variété complexe de dimension 3, l'orbite $\mathcal{O}(f)$ de tout $f \in \text{Rat}_d$ est une sous-variété de Rat_d et l'espace $\mathcal{M}_d$ est un orbifold de dimension $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_d = \dim_{\mathbb{C}} \text{Rat}_d - 3 = 2d - 2$.

Exemple 1.3 L'espace $\mathcal{M}_2$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré 2 qui est isomorphe à $\mathbb{C}^2$. Nous développons en détail l'étude de $\mathcal{M}_2$ à la section 1.1.5.

1.1.2 Familles munies d'un point critique marqué.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . On dit que $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est munie d'un *point critique marqué* c s'il existe une application holomorphe $c : X \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant $f'_\lambda(c(\lambda)) = 0$ pour tout $\lambda \in X$.

Exemple 1.4

1. La famille des polynômes quadratiques donnée en exemple 1.1 est munie d'un point critique marqué $c_1(c) \equiv 0$.

2. La famille des polynômes cubiques donnée en exemple 1.2 est munie de deux points critiques marqués $c_1(\lambda) \equiv 0$ et $c_2(\lambda) = c$.

Définition 1.1 *On dit que le point critique marqué c est actif en $\lambda_0 \in X$ si la suite $(f_\lambda^n(c(\lambda)))_{n \geq 0}$ n'est pas une famille normale en λ_0 . Sinon, on dit que c est passif en λ_0 . On appelle lieu d'activité de c l'ensemble des $\lambda \in X$, où c est actif.*

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe munie d'un point critique marqué c . Lorsque c est actif en $\lambda_0 \in X$, le Théorème de Montel permet d'approcher λ_0 par des paramètres λ_t pour lesquels la dynamique de f_{λ_t} au point $c(\lambda_t)$ est contrôlée. Plus précisément, on dispose des deux lemmes suivants :

Lemme 1.2 *Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie de $2d - 2$ points critiques marqués $c_1, \dots, c_{2d-2}$ et $\lambda_0 \in X$. Supposons que c_i soit actif en λ_0 . Alors il existe $\lambda_t \in X$, arbitrairement proche de λ_0 , pour lequel $c_i(\lambda_t)$ est un point périodique super-attractif pour f_{λ_t} .*

Démonstration : Soit c_{-1} une préimage de c_i . Puisque c_i est actif, c_{-1} est distinct de c_i . Si $c_{-1} \in C(f_{\lambda_0})$, alors il s'agit d'une application holomorphe du paramètre. Sinon, le Théorème des fonctions implicites appliqué à $f_\lambda(z) - c_i(\lambda)$ en (λ_0, z_0) donne un voisinage V de λ_0 et une application holomorphe $c_{-1} : V \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant

$$f_\lambda(c_{-1}(\lambda)) = c_i(\lambda), \text{ pour tout } \lambda \in V.$$

De même, il existe un voisinage W de λ_0 dans V et une application $c_{-2} : W \rightarrow \mathbb{P}^1$, pour lesquels $f_\lambda^2(c_{-2}(\lambda)) = c_{-1}(\lambda)$ et $c_{-2}(\lambda_0) \notin \{c_i(\lambda_0), c_{-1}(\lambda_0)\}$. Quitte à réduire W , on peut supposer que $c(\lambda)$, $c_{-1}(\lambda)$ et $c_{-2}(\lambda)$ sont trois points distincts de $\mathbb{P}^1$ pour tout $\lambda \in W$. Comme c est actif en λ_0 , la famille $(f_\lambda^n(c_i(\lambda)))_{n \geq 0}$ n'est pas normale sur W . D'après le Théorème de Montel, il existe alors λ_t arbitrairement proche de λ_0 et $N_t \geq 1$ tels que

$$f_{\lambda_t}^{N_t}(c_i(\lambda_t)) \in \{c_{-2}(\lambda_t), c_{-1}(\lambda_t), c_i(\lambda_t)\}.$$

C'est le résultat annoncé. $\square$

Lemme 1.3 *Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille de fractions rationnelles de degré d munie d'un point critique marqué c et $\lambda_0 \in X$. Supposons que c est actif en λ_0 . Alors il existe $\lambda_t \in X$ arbitrairement proche de λ_0 , tel que $c(\lambda_t)$ est prépériodique à un cycle répulsif de f_{λ_t} .*

Démonstration : Soient $z_0, z_1, z_2 \in \mathbb{P}^1$ trois points périodiques répulsifs distincts pour f_{λ_0} . D'après le Théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de λ_0 et trois applications holomorphes $w_0, w_1, w_2 : V \rightarrow \mathbb{P}^1$, vérifiant les assertions suivantes :

- $w_0(\lambda_0) = z_0$, $w_1(\lambda_0) = z_1$ et $w_2(\lambda_0) = z_2$,
- $w_0(\lambda)$, $w_1(\lambda)$ et $w_2(\lambda)$ sont trois points périodiques répulsifs distincts pour f_λ pour tout $\lambda \in V$.

Puisque c est actif en λ_0 , la famille $(f_\lambda^n(c(\lambda)))_{n \geq 1}$ n'est pas normale sur V et, d'après le Théorème de Montel, il existe $n_t \geq 1$ et $\lambda_t \in V$, tels que $f_{\lambda_t}^{n_t}(c(\lambda_t)) \in \{w_0(\lambda_t), w_1(\lambda_t), w_2(\lambda_t)\}$. $\square$

1.1.3 Les hypersurfaces $\text{Per}_n(w)$.

Pour comprendre la géométrie d'une famille holomorphe, on peut par exemple s'intéresser à l'ensemble des fractions rationnelles possédant un cycle de multiplicateur et de période donnés. Le Théorème suivant décrit l'ensemble de tels paramètres :

Théorème 1.4 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe une fonction holomorphe $p_n : X \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que*

1. *Pour tout $w \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $p_n(\lambda, w) = 0$ si et seulement si f_λ a un cycle de période exactement n et de multiplicateur w ,*
2. *$p_n(\lambda, 1) = 0$ si et seulement si f_λ a un cycle de période exactement n et de multiplicateur 1 ou f_λ a un cycle de période m et de multiplicateur une racine r -ième de l'unité avec $n = mr$,*
3. *pour tout $\lambda \in X$, la fonction $p_n(\lambda, \cdot)$ est un polynôme de degré $N_d(n) \sim \frac{1}{n}d^n$.*

Pour $n \geq 1$ et $w \in \mathbb{C}$ on pose

$$\text{Per}_n(w) := \{\lambda \in X \mid p_n(\lambda, w) = 0\}.$$

Lorsque $w \neq 1$ l'ensemble analytique $\text{Per}_n(w)$ coïncide avec l'ensemble des paramètres $\lambda \in X$ pour lesquels f_λ possède un cycle de multiplicateur w et de période exactement n . Il s'agit soit d'une hypersurface de X soit de X tout entier. Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons au chapitre 4 du livre de Silverman [Sil] ou l'article de Milnor [Mil].

Un des premiers problèmes qui se posent est la compréhension du lieu où vont s'accumuler les $\text{Per}_n(w)$, avec w fixé. Une bonne manière d'aborder ce problème est de considérer la suite de courants d'intégration (voir section 1.3.1) :

$$[\text{Per}_n(w)] := dd_\lambda^c \log |p_n(\lambda, w)|$$

et de se demander si la suite de courants $(d^{-n}[\text{Per}_n(w)])_{n \geq 1}$ converge, et le cas échéant, vers quoi. Une réponse à cette question a été donnée par Bassanelli et Berteloot (voir [BB2] et [BB3]). Nous exposerons le cas $|w| < 1$ à la section 1.3.5.

1.1.4 Théorie de Mañé-Sad-Sullivan.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Comme l'ensemble de Julia $\mathcal{J}_\lambda$ de f_λ est l'adhérence des cycles répulsifs de f_λ , il est naturel d'étudier comment $\mathcal{J}_\lambda$ varie avec le paramètre λ , grâce à la paramétrisation des cycles répulsifs de f_λ . D'après le Théorème des fonctions implicites, si z_0 est un point périodique répulsif de f_{λ_0} , on peut le suivre holomorphiquement sur un voisinage de λ_0 dans X en un cycle répulsif de f_λ . On peut donc se demander quelle est la structure de l'ensemble des paramètres au voisinage desquels de tels cycles peuvent tous être suivis holomorphiquement. La théorie de Mañé-Sad-Sullivan apporte une réponse à cette question.

Rappelons qu'un *mouvement holomorphe* de $E \subset \mathbb{P}^1$ paramétré par (X, λ_0) est une application $h : X \times E \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant :

- $h_{\lambda_0} = \text{id}$,
- $h_\lambda := h(\lambda, \cdot)$ est injective sur E pour tout $\lambda \in X$,
- $\lambda \mapsto h_\lambda(z_0)$ est holomorphe pour tout $z_0 \in E$.

Le résultat de base concernant les mouvements holomorphes est le λ -Lemma. Le premier point est une application très simple du Théorème de Montel et du Lemme de Hurwitz. Le deuxième point est un résultat délicat dû à Ślodkowski (voir [Hu] Théorème 5.2.5 page 197 par exemple) :

Lemme 1.5 (λ -Lemma) 1. *Un mouvement holomorphe de E paramétré par $(\mathbb{D}, 0)$ admet un unique prolongement en un mouvement holomorphe de $\overline{E}$. De plus, ce prolongement est une application continue $h : \mathbb{D} \times \overline{E} \rightarrow \mathbb{P}^1$.*

2. *Un mouvement holomorphe de E paramétré par $(\mathbb{D}, 0)$ admet un unique prolongement en un mouvement holomorphe de $\mathbb{P}^1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$ l'application $h_\lambda : E \rightarrow \mathbb{P}^1$ est la restriction d'un homéomorphisme quasiconforme de $\mathbb{P}^1$.*

Donnons maintenant un énoncé précis du Théorème de Mañé-Sad-Sullivan. Considérons $E \subset [0, 1]$ un sous-ensemble dense. Pour $n \geq 1$ et $\theta \in E$, on note $\text{Per}^*(X, n, e^{2i\pi\theta})$ la réunion des composantes irréductibles de codimension 1 de $\text{Per}_n(e^{2i\pi\theta})$ dans X et :

$$\mathcal{R}(X) := \{\lambda_0 \in X \mid \text{tout cycle répulsif de } f_{\lambda_0} \text{ bouge holomorphiquement sur un voisinage } V_0 \subset X \text{ fixé de } \lambda_0\},$$

$$\mathcal{C}(X) = \{\lambda_0 \in X \mid (\lambda \mapsto f_\lambda^n(C(f_\lambda)))_{n \geq 0} \text{ est équicontinue en } \lambda_0\},$$

$$\mathcal{N}_1(X, E) := \{\lambda_0 \in X \mid f_{\lambda_0} \text{ admet un cycle non-persistant de multiplicateur } e^{2i\pi\theta} \text{ avec } \theta \in E\} = \bigcup_{n \geq 1, \theta \in E} \text{Per}^*(X, n, e^{2i\pi\theta}),$$

$$\mathcal{S}(X) := \{\lambda_0 \in X \mid \text{Il existe un voisinage } V_0 \text{ de } \lambda_0 \text{ et un mouvement holomorphe } h : V_0 \times \mathcal{J}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{P}^1 \text{ tel que } h_\lambda \circ f_{\lambda_0} = f_\lambda \circ h_\lambda \text{ sur } \mathcal{J}_{\lambda_0}\},$$

$$\mathcal{A}(X) := \{\lambda_0 \in X \mid \text{le nombre } A(\lambda) \text{ de cycles attractifs de } f_\lambda \text{ est constant au voisinage de } \lambda_0\}.$$

Le Théorème suivant est dû à Mañé, Sad et Sullivan ([MSS]) :

Théorème 1.6 (Mañé-Sad-Sullivan) *Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d et $E \subset [0, 1]$ un sous-ensemble dense. Alors*

$$X \setminus \mathcal{R}(X) = X \setminus \mathcal{S}(X) = \overline{\mathcal{N}_1(X, E)} = X \setminus \mathcal{C}(X) = X \setminus \mathcal{A}(X)$$

et $\mathcal{S}(X)$ est un ouvert dense de X .

Esquisse de la démonstration du Théorème 1.6 : Le λ -Lemma donne de manière immédiate $\mathcal{S}(X) = \mathcal{R}(X)$. Par ailleurs, si l'ensemble de Julia ne bouge pas holomorphiquement au voisinage de λ_0 , alors au moins un cycle réplusif de f_λ devient neutre, puis attractif pour λ arbitrairement proche de λ_0 . L'application qui au paramètre associe le multiplicateur de ce cycle étant ouverte, ceci donne $X \setminus \mathcal{R}(X) \subset \overline{\mathcal{N}_1(X, E)} \subset X \setminus \mathcal{A}(X)$. Les cycles attractifs de f_λ étant stables par petites perturbations de λ , si $\lambda_0 \in X \setminus \mathcal{A}(X)$, il existe alors λ_1 arbitrairement proche de λ_0 pour lequel f_{λ_1} a au moins un cycle attractif de plus que f_{λ_0} . Puisque le cycle attractif ainsi créé attire un point critique qui avait une dynamique différente en λ_0 , cela donne $X \setminus \mathcal{A}(X) \subset X \setminus \mathcal{C}(X)$.

Supposons qu'il existe un mouvement holomorphe h de $\mathcal{J}_{\lambda_0}$ au voisinage de λ_0 . Puisque h conjugue les dynamiques et puisque l'ensemble de Julia est un compact parfait, on peut trouver trois points distincts $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{J}_{\lambda_0}$ tels que $h_\lambda(z_i) \notin \overline{\{f_\lambda^n(c) / n \geq 0, c \in C(f_\lambda)\}}$ pour λ voisin de λ_0 . Le Théorème de Montel donne alors $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{C}(X)$.

Finalement, on peut montrer que $\mathcal{A}(X)$ est dense dans X . Soit $\lambda_0 \in X \setminus \mathcal{A}(X)$. Les cycles attractifs de f_λ étant stables par petites perturbations de λ , la fonction $\lambda \mapsto A(\lambda)$ est semi-continue inférieurement et prend ses valeurs dans $\{0, \dots, 2d - 2\}$. L'ensemble $\mathcal{A}(X)$ est donc bien un sous-ensemble dense de X . $\square$

Définition 1.2 Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . L'ensemble $X \setminus \mathcal{S}(X)$ est appelé lieu de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$.

Remarque 1.5 Lorsqu'une famille holomorphe $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ de fractions rationnelles de degré d est munie de $2d - 2$ points critiques marqués $c_1, \dots, c_{2d-2}$, le Théorème 1.6 stipule que la réunion des lieux d'activités des c_i coïncide avec le lieu de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$.

Exemple 1.6 Revenons sur l'exemple 1.1 de la famille des polynômes quadratiques. Rappelons qu'on a noté $p_c(z) = z^2 + c$. Le lieu de bifurcation de la famille $(p_c)_{c \in \mathbb{C}}$ est la frontière $\partial \mathbf{M}$ de l'ensemble de Mandelbrot. En effet, si $c_0 \in \partial \mathbf{M}$, alors il existe une suite $c_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{M}$ qui converge vers c_0 . Puisque $c_k \notin \mathbf{M}$, la suite $(p_{c_k}^n(0))_{n \geq 1}$ est non-bornée pour tout k . L'ensemble de Mandelbrot étant fermé, la suite $(p_{c_0}^n(0))_{n \geq 1}$ est bornée, ce qui empêche l'équicontinuité de la suite $(p_c^n(0))_{n \geq 1}$ en c_0 . Par ailleurs, si $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbf{M}$, puisque $\mathbf{M}$ est fermé, la suite $(p_c^n(0))_{n \geq 1}$ converge vers ∞ pour c voisin de c_0 . Ainsi, la famille $(p_c^n(0))_{n \geq 1}$ est normale en c_0 . Finalement, si $c_0 \in \mathring{\mathbf{M}}$ le Théorème de Montel stipule que $(p_c^n(0))_{n \geq 1}$ est normale en c_0 .

1.1.5 L'espace des modules $\mathcal{M}_2$.

Intéressons-nous maintenant plus particulièrement à l'espace des modules $\mathcal{M}_2$ des fractions rationnelles quadratiques. Milnor a étudié cet espace dans [Mil]. Il s'est notamment intéressé aux courbes $\text{Per}_n(w)$. On note α, β, γ les multiplicateurs des trois points fixes de $f \in \text{Rat}_2$ et $\sigma_1 = \alpha + \beta + \gamma$, $\sigma_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ et $\sigma_3 = \alpha\beta\gamma$ les fonctions symétriques de ces multiplicateurs. La formule de l'indice holomorphe donne (voir [Mil], Lemme 3.1) :

Lemme 1.7 *La seule relation vérifiée par les fonctions symétriques σ_i est $\sigma_3 = \sigma_1 - 2$. En particulier, l'application $[f] \in \mathcal{M}_2 \mapsto (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{C}^2$ est un isomorphisme canonique.*

Puisque les multiplicateurs des cycles d'une fraction rationnelle sont invariants par conjugaison par une transformation de Moebius, les polynômes $p_n(\lambda, w)$ définis à la section 1.1.3 descendent à $\mathcal{M}_2$. On peut donc toujours définir les courbes $\text{Per}_n(w)$ dans $\mathcal{M}_2$. Via cette identification à $\mathbb{C}^2$, on peut voir les $p_n(\lambda, w)$ comme des polynômes de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}$.

Pour étudier les courbes $\text{Per}_n(w)$ pour $n \geq 2$, il est utile de compactifier $\mathcal{M}_2$. Le Lemme 1.7, donne une compactification projective naturelle de $\mathcal{M}_2$ via l'injection :

$$[f] \in \mathcal{M}_2 \hookrightarrow [\sigma_1 : \sigma_2 : 1] \in \mathbb{P}^2.$$

On note $\mathfrak{L}_\infty$ la droite à l'infini de $\mathcal{M}_2$ dans cette paramétrisation, c'est-à-dire

$$\mathfrak{L}_\infty = \{[\sigma_1 : \sigma_2 : 0] \in \mathbb{P}^2 / (\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}.$$

Dans cette compactification, les courbes $\text{Per}_n(w)$ se prolongent en des courbes algébriques de $\mathbb{P}^2$. Milnor a décrit leur comportement à l'infini (voir [Mil] Lemmes 3.4 et 4.1 et Théorème 4.2) :

Proposition 1.8 (Milnor) 1. *Pour tout $w \in \mathbb{C}$ la courbe $\text{Per}_1(w)$ est une droite de $\mathbb{P}^2$ dont l'équation dans $\mathbb{C}^2$ est $(w^2 + 1)\lambda_1 - w\lambda_2 - (w^3 + 2) = 0$ et qui intersecte la droite à l'infini $\mathfrak{L}_\infty$ au point $[w : w^2 + 1 : 0]$. En particulier, la courbe $\text{Per}_1(0)$ des polynômes quadratiques est la droite verticale $\{\lambda_1 = 2\}$ et son point à l'infini est $[0 : 1 : 0]$.*

2. *Pour tout $n \geq 2$ et tout $w \in \mathbb{C}$ la courbe $\text{Per}_n(w)$ est une courbe algébrique de $\mathbb{P}^2$ de degré égal au nombre $d(n)$ de composantes hyperboliques de période n de l'ensemble de Mandelbrot, qui peut être défini par récurrence par*

$$2^{n-1} = \sum_{m|n} d(m), \text{ pour tout } n \geq 1.$$

De plus, l'intersection $\text{Per}_n(w) \cap \mathfrak{L}_\infty$ est contenue dans l'ensemble $\{[1 : u + 1/u : 0] \in \mathbb{P}^2 / u^q = 1 \text{ avec } q \leq n\}$.

Golberg et Keen (voir [GK] Section 1) ont montré comment l'ensemble de Mandelbrot détermine le lieu de connexité pour les fractions rationnelles de degré 2 ayant un point fixe attractif. Bassanelli et Berteloot ont donné une démonstration de ce résultat basée sur les propriétés de l'exposant de Lyapounov (voir [BB2] Théorème 5.4).

Théorème 1.9 (Goldberg-Keen, Bassanelli-Berteloot) *Il existe un mouvement holomorphe $\sigma : \mathbb{D} \times \text{Per}_1(0) \rightarrow \mathbb{P}^2$ tel que $\mathbf{M}_t := \sigma(\{t\} \times \mathbf{M}) \in \text{Per}_1(t) \cap \mathbb{C}^2$ est le lieu de connexité de la droite $\text{Per}_1(t)$. Par ailleurs, si $|w| \leq 1$, si $n \geq 1$ et si $c_0 \in \text{Per}_1(0) \cap \text{Per}_n(w)$, alors $\sigma(t, c_0) \in \text{Per}_1(t) \cap \text{Per}_n(w)$.*

Notons $\heartsuit$ la cardioïde principale de l'ensemble de Mandelbrot et $\mathcal{L}_{p/q}$ le membre p/q de $\mathbf{M}$, c'est-à-dire la composante connexe de $\overline{\mathbf{M}} \setminus \overline{\heartsuit}$ qui intersecte $\partial\heartsuit$ au paramètre $c_{p/q} \in \mathbb{C}$ pour lequel $p_{c_{p/q}}(z) = z^2 + c_{p/q}$ a un point fixe parabolique de multiplicateur $e^{2i\pi p/q}$ (voir [Bra] page 84). Alors l'ensemble de Mandelbrot se décompose sous la forme :

$$\mathbf{M} = \overline{\heartsuit} \cup \bigcup_{\substack{1 \leq p \leq q \\ p \wedge q = 1}} \mathcal{L}_{p/q}.$$

Notons $d_{p/q}(n)$ le nombre de composantes hyperboliques de $\mathcal{L}_{p/q}$ de période n et posons

$$D_{p/q}(n) = \begin{cases} d_{p/q}(n) & \text{si } p/q = 1/2, \\ 2d_{p/q}(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $1 \leq p \leq q/2$ avec $p \wedge q = 1$, on pose

$$\infty_{p/q} := [1 : 2 \cos(2\pi p/q) : 0].$$

En utilisant entre autres le mouvement holomorphe de $\text{Per}_1(0)$ donné par le Théorème 1.9, Epstein [Eps1] a déterminé de façon précise l'intersection de $\text{Per}_n(w)$ avec la droite $\mathfrak{L}_\infty$. Son résultat peut être reformulé comme suit :

Proposition 1.10 (Epstein) *Pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 2$, on a*

$$[\text{Per}_n(w)] \wedge [\mathfrak{L}_\infty] = \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \leq n/2 \\ p \wedge q = 1}} \nu([\text{Per}_n(w)], \infty_{p/q}) \delta_{\infty_{p/q}} = \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \leq n/2 \\ p \wedge q = 1}} D_{p/q}(n) \delta_{\infty_{p/q}},$$

où $\nu([\text{Per}_n(w)], \infty_{p/q})$ désigne le nombre de Lelong de $[\text{Per}_n(w)]$ en $\infty_{p/q}$ (voir section 1.3.1). En particulier, la courbe $\text{Per}_n(w)$ n'intersecte $\mathfrak{L}_\infty$ qu'aux points $\infty_{p/q}$.

1.2 Dimension hyperbolique d'une fraction rationnelle.

1.2.1 Ensembles hyperboliques.

Définition 1.3 Soient $f \in \text{Rat}_d$ et $E \subset \mathbb{P}^1$ un ensemble f -invariant. On dit que E est f -hyperbolique s'il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha > 1$ telles que $|(f^n)'(z)| \geq C\alpha^n$ pour $z \in E$ et $n \geq 0$,

Un compact f -hyperbolique est aussi dit expansif pour f , puisqu'on peut montrer que f est dilatante sur E (voir [dMvS] Lemme 2.1 page 220) :

Proposition 1.11 Soient $f \in \text{Rat}_d$ et $E \subset \mathbb{P}^1$ un compact f -invariant. E est f -hyperbolique si et seulement si pour une métrique appropriée sur $\mathbb{P}^1$, il existe une constante $K > 1$ telle que $|f'(z)| \geq K$ pour tout $z \in E$. On dit que K est une constante d'hyperbolicité de E .

Exemple 1.7 Soit $f \in \text{Rat}_d$ une fraction rationnelle hyperbolique. Alors $\mathcal{J}_f$ est un compact f -hyperbolique. En particulier, le cercle unité $\mathbb{S}^1$ est un ensemble hyperbolique pour $f(z) = z^2$.

Rappelons qu'un *répulsleur conforme* est un triplet $(\{\mathcal{U}_i\}_{1 \leq i \leq N}, \mathcal{U}, g)$, où $\mathcal{U}$ est les $\mathcal{U}_i$ sont des disques topologiques, $\bigcup_{1 \leq i \leq N} \mathcal{U}_i \Subset \mathcal{U}$ et $g : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}$ est un biholomorphisme. Un tel répulsleur conforme pour lequel $g : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}$ coïncide avec une certaine itérée de $f \in \text{Rat}_d$ permet de construire un ensemble de Cantor f -hyperbolique. Rappelons que l'ensemble postcritique de f est défini par $\mathcal{P}_f := \overline{\{f^n(c) / n \geq 1, c \in C(f)\}}$.

Lemme 1.12 *Soient $f \in \text{Rat}_d$ une fraction rationnelle et $\mathcal{P}_f := \overline{\{f^n(c) / c \in C(f) \text{ et } n \geq 0\}}$. Supposons que $\mathcal{J}_f \not\subset \mathcal{P}_f$. Alors il existe un ensemble de Cantor $E_0 \subset \mathcal{J}_f$ qui est f -hyperbolique.*

Démonstration : Puisque les cycles répulsifs de f sont denses dans $\mathcal{J}_f$ et puisque $\mathcal{J}_f \not\subset \mathcal{P}_f$, il existe un cycle répulsif $\mathcal{C} = \{z_0, \dots, f^{q-1}(z_0)\}$ de f de période $q \geq 2$ vérifiant $\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_f = \emptyset$. Soit $\mathbb{D}_i$ un disque centré en $z_i := f^i(z_0)$ pour $0 \leq i \leq q-1$. Puisque z_i est un point fixe répulsif de f^q , on peut prendre $\mathbb{D}_i$ assez petit pour que $d(\mathbb{D}_i, \mathcal{P}_f) > 0$, $\mathbb{D}_i \Subset f^q(\mathbb{D}_i)$ et f^q est injective sur $\mathbb{D}_i$. Il est par ailleurs bien connu que $\bigcup_{n \geq 0} f^{nq}(\mathbb{D}_i) = \mathbb{P}^1 \setminus \mathcal{E}(f)$. Il existe donc $n_i \geq 1$ tel que

$$\bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j \Subset f^{n_i q}(\mathbb{D}_i).$$

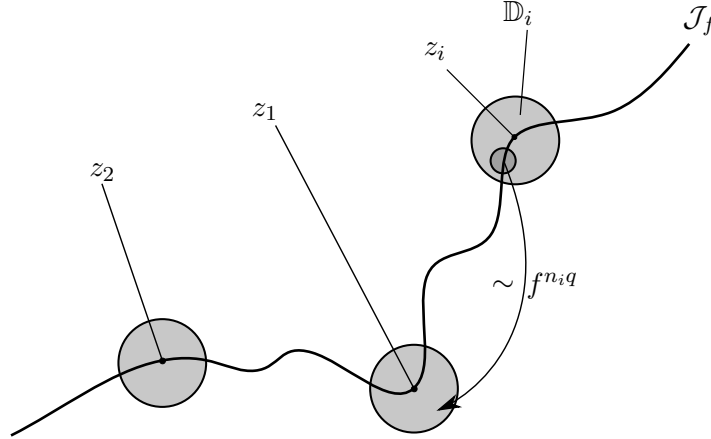


FIGURE 1.1 – dynamique de $f^{n_i q}$ sur les $\mathbb{D}_i$.

On définit alors une application holomorphe $g : \bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j \rightarrow \Omega := \bigcup_{0 \leq j \leq q-1} f^{n_j q}(\mathbb{D}_j)$ en posant $g(z) := f^{n_i q}(z)$ lorsque $z \in \mathbb{D}_i$. Par définition de g on a $g^{-1}(\bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j) \subset \bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j$ et, puisque $\mathbb{D}_i$ est un disque qui évite $\mathcal{P}_f$, l'application $g : g^{-1}(\bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j) \rightarrow \bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j$ définit un répulsleur conforme. Son ensemble limite est donné par :

$$E_1 := \bigcap_{i \geq 0} g^{-i} \left(\bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j \right).$$

Il s'agit d'un compact non-vidé de $\bigcup_{0 \leq j \leq q-1} \mathbb{D}_j$. Montrons qu'il s'agit bien d'un ensemble de Cantor. Pour cela on va montrer que l'application suivante est une bijection :

$$\begin{aligned} \tau : E_1 &\longrightarrow \{0, \dots, q-1\}^{\mathbb{N}} \\ z &\longmapsto (\tau_0(z), \tau_1(z), \dots, \tau_n(z), \dots) \end{aligned}$$

où $1 \leq \tau_n(z) \leq q$ est défini par $g^n(z) \in \mathbb{D}_{\tau_n(z)}$. La suite $\tau(z) = (\tau_0(z), \tau_1(z), \dots)$ décrit l'« histoire » de z dans $\mathbb{D}_0 \cup \dots \cup \mathbb{D}_{q-1}$. On peut montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$, tout

$a_0, \dots, a_n \in \{0, \dots, q-1\}$ et tout $z_0 \in \mathbb{D}_{a_n}$ il existe $x \in \mathbb{D}_{a_0}$ tel que $f^{n_{a_i}q} \circ \dots \circ f^{n_{a_0}q}(x) \in \mathbb{D}_{a_i}$ pour $0 \leq i \leq n$ et tel que $f^{n_{a_n}q} \circ \dots \circ f^{n_{a_0}q}(x) = z_0$.

Il est alors clair que l'application τ est surjective et que pour tout $a \in \{0, \dots, q-1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble $\tau^{-1}\{a\}$ est une composante connexe de E_1 . Par ailleurs, si C est une composante connexe de E_1 , pour tout $n \geq 0$ il existe $0 \leq i_n, j_n \leq q-1$ tel que C est contenu dans une composante connexe de $g^{-n}(\mathbb{D}_{j_n}) \cap \mathbb{D}_{i_n}$. Comme les z_i sont répulsifs, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| > 1$ tel que g se comporte comme la multiplication par β avec $|\beta| \geq |\alpha|$ sur $\mathbb{D}_i$. Le diamètre d'une composante connexe de $g^{-n}(\mathbb{D}_{j_n}) \cap \mathbb{D}_{i_n}$ est donc comparable à $|\alpha|^{-n} \text{diam } \mathbb{D}_{j_n} = 2\delta|\alpha|^{-n}$. Par conséquent le diamètre de C est nul et τ est bijective. L'ensemble E_1 étant un Cantor f^N -invariant, on définit un ensemble de Cantor f -invariant en posant pour $N = \max(n_i q)$:

$$E_0 := \bigcup_{j=0}^{N-1} f^j(E_1).$$

Par construction, $E_0 \subset \mathcal{J}_f \setminus \mathcal{P}_f$. En particulier, il évite $C(f)$ et les cycles paraboliques éventuels de f . Un théorème de Mañé stipule alors que E_0 est un ensemble f -hyperbolique (voir [ST] Théorème 1.2 page 266). $\square$

Rappelons que $E \subset \mathbb{P}^1$ est dit *homogène* si pour tout $z \in E$ et tout voisinage V de z dans $\mathbb{P}^1$, $\dim_H(E \cap V) = \dim_H(E)$. La définition suivante a été donnée par Shishikura [Sh] :

Définition 1.4 La dimension hyperbolique d'une fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_d$, notée $\dim_{\text{hyp}}(f)$, est définie par $\dim_{\text{hyp}}(f) := \sup\{\dim_H(E) \mid E \text{ est un compact } f\text{-hyperbolique homogène}\}$.

1.2.2 Formalisme thermodynamique.

McMullen a montré à l'aide du formalisme thermodynamique que lorsque f est géométriquement finie, c'est-à-dire lorsque $\{f^n(c) \mid c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f \text{ et } n \geq 0\}$ est un ensemble fini, alors $\dim_{\text{hyp}}(f) = \dim_H(\mathcal{J}_f)$ (voir [Mc2], Théorème 6.1). Rappelons que si $f \in \text{Rat}_d$ et $z \in \mathbb{P}^1$, l'ensemble *omega limite* $\omega(z)$ de z est donné par $\omega(z) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(z) \mid k > n\}}$. En adaptant son argument et en utilisant un Lemme d'Urbanski, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 1.13 Soit $f \in \text{Rat}_d$ une fraction rationnelle. Supposons que $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$ pour tout $c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f$ et que f n'a pas de cycles paraboliques. Alors $\dim_{\text{hyp}}(f) = \dim_H(\mathcal{J}_f)$.

La démonstration de la Proposition 1.13 nécessite la notion d'ensemble de Julia radial :

Définition 1.5 Soit $f \in \text{Rat}_d$. On dit que x est radial pour f s'il existe $r > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un voisinage U de x et $n \geq 1$ tels que $\text{diam}(U) < \epsilon$ et $f^n : U \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(f^n(x), r)$ est un homéomorphisme. On note $\mathcal{J}_{\text{rad}f}$ l'ensemble des points radiaux de f et on l'appelle ensemble de Julia radial de f .

La première chose à remarquer est que $\mathcal{J}_{\text{rad}f} \subset \mathcal{J}_f$. Grâce au formalisme thermodynamique, on peut montrer que $\dim_H(\mathcal{J}_{\text{rad}f}) = \dim_{\text{hyp}}(f)$ et que :

$$\dim_H(\mathcal{J}_{\text{rad}f}) = \sup\{\dim_H(E) \mid E \text{ est un compact } f\text{-hyperbolique}\}$$

(voir [Mc2], Théorème 1.1 et [PRLS] Théorème A). Pour prouver la Proposition 1.13, il suffit donc de montrer que, lorsque $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$ pour tout $c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f$ et f n'a pas de cycles paraboliques, alors $\dim_H(\mathcal{J}_{\text{rad}f}) = \dim_H(\mathcal{J}_f)$.

Par définition, $\mathcal{J}_{\text{rad}f} \subset \mathcal{J}_f \setminus \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{J}_f \cap C(f))$. Pour $z \in \mathcal{J}_f$, on note $C(z) := \{c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f \mid c \in \omega(z)\}$. La Proposition suivante due à Urbanski (voir [U] Proposition 6.1) peut être reformulée comme suit : si $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$ pour tout $c \in \mathcal{J}_f \cap C(f)$ et si f ne possède aucun cycle parabolique, alors $\mathcal{J}_f \setminus \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{J}_f \cap C(f)) \subset \mathcal{J}_{\text{rad}f}$. En particulier, cela signifie que $\mathcal{J}_f \setminus \mathcal{J}_{\text{rad}f}$ est dénombrable et que $\dim_H(\mathcal{J}_{\text{rad}f}) = \dim_H(\mathcal{J}_f)$.

Proposition 1.14 (Urbanski) *Soit $f \in \text{Rat}_d$. Supposons que $z \in \mathcal{J}_f \setminus \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(\mathcal{J}_f \cap C(f))$, alors il existe $\eta(z) > 0$, une suite d'entiers $n_j \rightarrow +\infty$ et $x \in \omega(z) \setminus \omega(C(z))$ tels que :*

1. $\lim_{j \rightarrow \infty} f^{n_j}(z) = x$,
2. $f^{n_j} : U(z, f^{n_j}, \eta(z)) \rightarrow \mathbb{D}(f^{n_j}(z), \eta(z))$ est un biholomorphisme,
3. $\lim_{j \rightarrow \infty} |(f^{n_j})'(z)| = +\infty$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{diam}(U(z, f^{n_j}, \eta(z))) = 0$.

Démonstration : Commençons par remarquer que $\omega(z) \not\subset \omega(C(z))$ pour tout $z \in \mathcal{J}_f$. En effet, si $\omega(z) \subset \omega(C(z))$, alors $C(z) \neq \emptyset$ et il existe $c \in \mathcal{J}_f \cap C(f)$ tel que $c \in \omega(z) \subset \omega(C(z))$. En particulier $c \in \omega(C(z))$ et il existe $c' \in C(z) \subset C(f) \cap \mathcal{J}_f$ tel que $c \in \omega(c')$, ce qui est impossible par l'hypothèse.

Fixons $y \in \omega(z) \setminus \omega(C(z))$ et posons $\eta := \text{dist}(y, \omega(C(z)))/2 > 0$, alors il existe un entier $k \geq 0$ et une suite d'entiers $m_j \rightarrow +\infty$ tels que :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{m_j}(z) = y, \tag{1.2.1}$$

$$\mathbb{D}(f^{m_j}(z), \eta) \cap \left(\bigcup_{n \geq k} f^n(C(z)) \right) = \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Montrons maintenant qu'il existe $\eta(z) > 0$, tel que pour tout j assez grand,

$$U(z, f^{m_j-k}, \eta(z)) \cap C(f^{m_j-k}) = \emptyset. \tag{1.2.3}$$

Pour ce faire, supposons que 1.2.3 est faux. On peut alors trouver une suite $\eta_i \rightarrow 0$ avec $0 < \eta_i < \eta$ et une sous-suite $m_{j_i} \rightarrow +\infty$ de $(m_j)_{j \geq 1}$ telles que

$$U(z, f^{m_{j_i}-k}, \eta_i) \cap C(f^{m_{j_i}-k}) \neq \emptyset$$

pour tout $i \geq 1$. Choisissons $\tilde{c}_i \in U(z, f^{m_{j_i}-k}, \eta_i) \cap C(f^{m_{j_i}-k})$, alors il existe $c_i \in C(f)$ et $0 \leq p_i \leq m_{j_i} - k - 1$ tels que $f^{p_i}(\tilde{c}_i) = c_i$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $c_i = c$ est indépendant de i .

Comme $\eta_i \rightarrow 0$ un Théorème de Mañé (voir [ST], Théorème 1.1 page 266) assure que $z = \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{c}_i$ et puisque $z \notin \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}(C(f) \cap \mathcal{J}_f)$, cela donne $\lim_{j \rightarrow \infty} p_i = +\infty$. Le Théorème de Mañé combiné au fait que $f^{p_i}(\tilde{c}_i) = c$ assurent que $c \in C(z)$. L'assertion 1.2.2 nous donne alors $m_{j_i} - p_i < k$, ce qui contredit le fait que $p_i \leq m_{j_i} - k - 1$. On a donc bien montré 1.2.3.

Pour conclure, il suffit de poser $n_j := m_j - k$ et de choisir $x \in f^{-k}\{y\}$. Puisque $z \in \mathcal{J}_f$ et puisqu'il existe une suite de branches inverses $f_z^{-n_j} : \mathbb{D}(f^{n_j}(z), \eta(z)) \rightarrow \mathbb{P}^1$, toute valeur d'adhérence de $(f_z^{-n_j})_{j \geq 1}$ est constante, ce qui montre que $\lim_{j \rightarrow \infty} |(f^{n_j})'(z)| = +\infty$. D'après le Théorème $\frac{1}{4}$ de Koebe, cela signifie que, quitte à réduire $\eta(z)$, $\text{diam}(U(z, f^{n_j}, \eta(z))) \rightarrow 0$. $\square$

1.2.3 Implosion parabolique.

Une fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_d$ a un point n -périodique *parabolique* en $z_0 \in \mathbb{P}^1$ si le multiplicateur $(f^n)'(z_0)$ du cycle $\{z_0, \dots, f^{n-1}(z_0)\}$ est une racine de l'unité. Le *bassin parabolique* de z_0 est l'ensemble

$$\mathcal{B}_f(z_0) := \{z \in \mathbb{P}^1 \mid \text{les seules valeurs d'adhérence de } (f^n(z))_{n \geq 1} \text{ sont } z_0, \dots, f^{n-1}(z_0)\}.$$

Le bassin parabolique immédiat de z_0 est la réunion des composantes de $\mathcal{B}_f(z_0)$ dont le bord contient z_0 .

Soit $p_c(z) = z^2 + c$ un polynôme quadratique possédant un point fixe parabolique, alors $c \in \partial\mathcal{H}$ et Douady a observé que, si on approche le bord de la cardioïde tangentiellement, l'ensemble de Julia ne varie pas continuellement (voir [Do]). Cette discontinuité est liée à un phénomène appelé *implosion parabolique*. Une compréhension approfondie des phénomènes d'implosion parabolique permet de montrer le résultat suivant de Shishikura (voir [Sh] Théorème 2 et [T] Théorème 1.1) :

Théorème 1.15 (Shishikura) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Supposons qu'il existe $\lambda_0 \in X$ pour lequel f_{λ_0} possède un k -cycle parabolique non-persistant $\{\zeta, \dots, f_{\lambda_0}^{k-1}(\zeta)\}$ et que le bassin parabolique immédiat de ζ pour $f_{\lambda_0}^k$ contient seulement un point critique de $f_{\lambda_0}^k$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\lambda_1 \in X$ arbitrairement proche de λ_0 pour lequel f_λ possède un k -cycle neutre non-persistant et $\dim_{\text{hyp}}(f) > 2 - \epsilon$.*

Dans cette section, nous donnons les définitions et propriétés principales des outils utilisés pour démontrer ce Théorème dans le cas des polynômes quadratiques. Nous donnons ensuite une idée de sa démonstration en suivant [Z].

Coordonnées de Fatou et applications de cornes. Pour plus de simplicité, on traite le cas du polynôme quadratique $f(z) = z + z^2$. Le bassin immédiat de 0 contient le seul point critique de f . On peut démontrer l'existence de coordonnées de Fatou sur des domaines bordés par 0 :

Proposition 1.16 (Coordonnées de Fatou) *Il existe des ouverts $U^\pm$ (+ pour répulsif et – pour attractif) tels que $0 \in \partial U^\pm$, $f(U^-) \subset U^-$, $U^+ \subset f(U^+)$ et $U^+ \cap U^- \neq \emptyset$ et deux applications holomorphes injectives $\varphi^\pm : U^\pm \rightarrow \mathbb{C}$ telles que*

$$\varphi^\pm \circ f(z) = \varphi^\pm(z) + 1$$

tant que $z, f(z) \in U^\pm$. De plus, les applications $\varphi^\pm$ sont uniques à addition d'une constante près.

La coordonnée de Fatou attractive φ^- s'étend à un domaine maximal $\mathcal{P}_-$ appelé *pétal attractif* via l'équation fonctionnelle $\varphi^- \circ f(z) = \varphi^- + 1$ et l'application $\psi := (\varphi^+)^{-1}$ s'étend en une application surjective $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Par ailleurs, on peut définir une application $H := \varphi^- \circ (\varphi^+)^{-1}$ sur $\varphi^+(U^+ \cap U^-)$.

Considérons un domaine fondamental $U^\pm/f$ de l'action de f sur $U^\pm$. En identifiant les deux composantes de son bord, on construit un cylindre infini biholomorphe à $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{C}^*$. D'après la Proposition précédente, les applications $\varphi^\pm$ induisent des isomorphismes

$$\tilde{\varphi}^\pm : U^\pm/f \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}/\mathbb{Z}$$

tels que $\tilde{\varphi}^\pm(w+1) = \tilde{\varphi}^\pm(w) + 1$. L'application H descend en un isomorphisme h d'un voisinage V des bouts du cylindre $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ appelé *application de corne*. De plus, via $z \mapsto \exp(2i\pi z)$, h est conjuguée à $\tilde{h}$ qui s'étend holomorphiquement en 0 par $\tilde{h}(0) = 0$ et $\tilde{h}'(0) \neq 0$ et par $\tilde{h}(\infty) = \infty$ et $\tilde{h}(\infty)' \neq 0$.

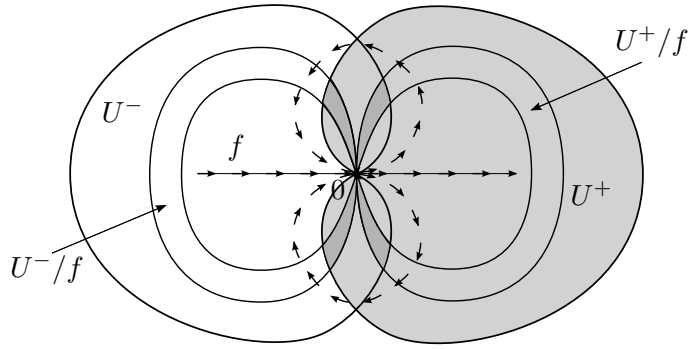


FIGURE 1.2 – Dynamique de f au voisinage de 0.

Applications de Lavaurs. On considère maintenant des perturbations de f de la forme

$$f_\varepsilon(z) := (1 + i\varepsilon)f(z) = (1 + i\varepsilon)(z + z^2),$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Si ε est proche de 0, alors f_ε a deux points fixes au voisinage de 0, comptés avec multiplicité. Ces points fixes sont 0 et $\sigma(\varepsilon) = -2i\varepsilon(1 + o(1))$ et un « passage » s'ouvre entre les deux points fixes. Une telle perturbation est appelée *implosion parabolique* du polynôme f . Le terme d'implosion vient du fait que lorsque ε est proche de 0, l'ensemble de Julia de f_ε contient certaines décorations qui ne sont pas présentes lorsque $\varepsilon = 0$.

Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$ et considérons l'application de corne $h_\alpha := t_{p(\alpha)} \circ h$, où $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ est la projection naturelle et $t_{p(\alpha)}$ est la translation $z \mapsto z + p(\alpha)$. Shishikura a montré que h_α est répulsive à un bout du cylindre $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$. Lorsque l'on impose un point fixe parabolique, une famille d'applications apparaissent : les *applications de Lavaurs*

$$g_\alpha := \psi \circ t_\alpha \circ \varphi^-$$

qui sont définies sur $\mathcal{P}_-$. On peut les étendre à tout l'ensemble de Julia rempli de f par les équations fonctionnelles $\varphi^- \circ f = t_1 \circ \varphi^-$ et $\psi \circ t_1 = f \circ \psi$. Ces applications ont deux propriétés essentielles :

1. g_α est conjuguée aux bouts du cylindre $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ à l'application h_α ,
2. g_α est une limite de grandes itérées de f_ε .

Théorème 1.17 (Shishikura) *Supposons que ε tend vers 0 et qu'il existe un entier N_ε tel que $N_\varepsilon - \frac{\pi}{\varepsilon} \rightarrow \alpha \in \mathbb{C}$, alors $f_\varepsilon^{N_\varepsilon}$ converge uniformément localement vers l'application de Lavaurs g_α sur $\mathcal{P}_-$.*

Construction d'un ensemble hyperbolique. L'idée est de construire un répulseur conforme $(\{\mathcal{U}_j\}_{1 \leq j \leq N}, \mathcal{U}, s)$, où les $s_j : \mathcal{U}_j \rightarrow \mathcal{U}$ sont de grandes itérées de $e^{2i\pi p/q} f$ et d'une application de Lavaurs g_α associée à $e^{2i\pi p/q} f$ dont l'ensemble limite est de dimension de Hausdorff $> 2q/(q+1)$. Le Théorème 1.17 permet d'en construire un analogue pour des itérées de $e^{2i\pi p/q} f_\varepsilon$ avec ε proche de 0. Son ensemble limite est alors $e^{2i\pi p/q} f_\varepsilon$ -hyperbolique et sa dimension de Hausdorff est encore $> 2q/(q+1)$. Puisque f peut être approché par des polynômes $e^{2i\pi p/q} f$ avec q arbitrairement grand, cette construction est suffisante.

Donnons une idée de la construction du répulseur conforme pour f . Fixons $\alpha \in \mathbb{C}$. Le bord de $\mathcal{P}_-$ contient une préimage z_0 de 0. On note $\zeta \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ le point correspondant à z_0 . Soit $\Omega \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ le voisinage d'un des bouts sur lequel h_α est répulsive et injective, alors $\zeta \in \partial\Omega$ et il existe $\zeta_1 \in \Omega \cap h_\alpha^{-1}\{\zeta\}$ et soit $\zeta_n := h_\alpha^{-(n-1)}(\zeta_1)$. Puisque h_α est répulsive sur Ω , il existe un voisinage W_1 de ζ_1 qui est envoyé par h_α sur un voisinage W de ζ pour lequel $(f^k \circ (\tilde{\varphi}^+)^{-1})|_W$ est un isomorphisme sur un voisinage V de 0. Chaque ζ_n est dans un voisinage W_n pour lequel $h_\alpha^n : W_n \xrightarrow{\sim} W$. Finalement, ces W_n correspondent dans le plan dynamique à des ouverts $V_{n,k}$ contenus dans $U^+ \cap U^-$ et pour lesquels, lorsque cela a un sens, $V_{n,k+1} = f(V_{n,k})$ et $V_{n,k} = g_\alpha(V_{n+1,k})$. De plus, si $n \geq n_0$, les $V_{n,k}$ sont relativement compacts dans V .

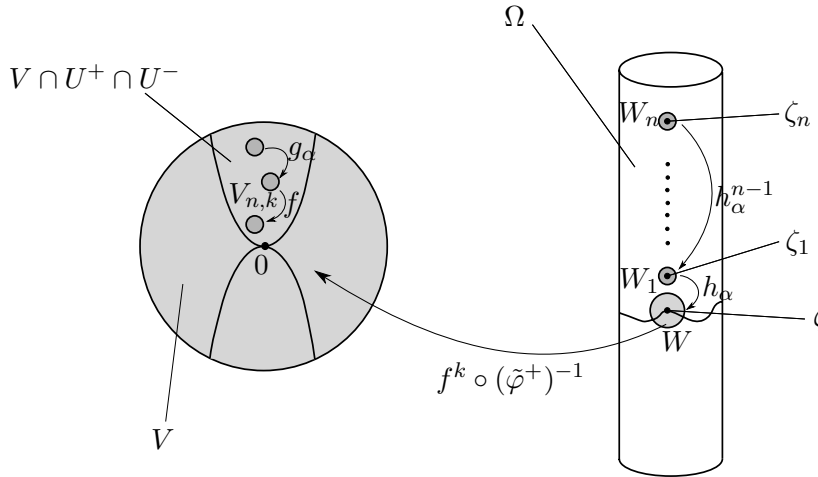


FIGURE 1.3 – Construction d'un répulseur conforme.

On a donc construit un répulseur conforme $(\{V_{n,k}\}_{n_0 \leq n \leq N, |k| \leq \varepsilon n}, V, s)$, où $s|_{V_{n,k}}$ est une composée d'itérées de f et de g_α . Notons X_α son ensemble limite. La formule de Bowen (voir [Bo] preuve du Lemme 10) stipule alors que :

$$\dim_H(X_\alpha) \geq \frac{\log \text{Card}\{(n, k)\}}{\log \left(\max_{(n, k)} \sup_{z \in V_{n, k}} |s'_{n, k}(z)| \right)}.$$

Combiné à un contrôle des distorsions de f et g_α , cela donne $\dim_H(X_\alpha) > 1$ si N est assez grand.

1.3 Les courants de bifurcation.

La théorie de Mañé-Sad-Sullivan peut s'écrire dans le langage des courants. Si $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d , on peut définir un $(1,1)$ -courant positif fermé dont le support est le lieu de bifurcation. Une formule de DeMarco permet d'avoir deux expressions distinctes pour ce courant, chacune d'entre elles détectant une bifurcation liée à un phénomène différent. Pour un exposé détaillé sur la théorie pluripotentielle, on pourra consulter [Dem], [DS] et [Sib].

1.3.1 Courants positifs.

Définition et exemples. Sur une variété complexe X de dimension $\dim_{\mathbb{C}} X = n$ on peut définir des formes différentielles de bidegré (p, q) à coefficients complexes, qui s'écrivent $u = \sum_{|I|=p, |J|=q} u_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ dans des cartes, ainsi que des opérateurs différentiels ∂ et $\bar{\partial}$ respectivement de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$ et tels que $d = \partial + \bar{\partial}$. On note $\mathcal{D}_{p,q}(X)$ l'espace des (p, q) -formes tests. L'espace des (p, q) -courants sur X est alors le dual topologique de $\mathcal{D}_{n-p, n-q}(X)$. Cet espace s'identifie à l'espace des (p, q) -formes $T = \sum_{|I|=p, |J|=q} T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$, où les $T_{I,J}$ sont des distributions. Remarquons que le produit extérieur permet de voir une (p, q) forme comme un (p, q) -courant.

Une (p, p) -forme u est dite *fortement positive* si pour toutes $(1, 0)$ -formes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}$, la forme volume $u \wedge i\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1 \wedge \dots \wedge i\alpha_{n-p} \wedge \bar{\alpha}_{n-p}$ est positive. Une (p, p) -forme u est dite *positive* si pour toute $(n-p, n-p)$ -forme fortement positive v , la forme volume $u \wedge v$ est positive. Ceci signifie que u est positive si et seulement si sa restriction $u|_V$ à toute sous-variété complexe $V \subset X$ de dimension p est une forme volume positive sur V .

Définition 1.6 Un (p, p) -courant T sur X est positif si $T \wedge u$ est une mesure positive pour toute forme fortement positive $u \in \mathcal{D}_{n-p, n-p}(X)$.

Un forme positive est donc un courant positif. La positivité est une propriété locale. De plus, si $T = \sum_{|I|=|J|=p} T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ est un courant positif, alors les $T_{I,J}$ sont des mesures complexes. Notons $d^c := \frac{1}{2i\pi}(\partial - \bar{\partial})$ de sorte que $dd^c = \frac{i}{\pi}\partial\bar{\partial}$ et Δ le laplacien normalisé de sorte que $\Delta \log |z| = \delta_0$. La *mesure trace* σ_T de T est la mesure définie par $\sigma_T = \frac{1}{(n-p)!} T \wedge \beta^{n-p}$, où dans des cartes, $\beta := dd^c \|z\|^2$. Si T est un courant positif, les valeurs absolues $|T_{I,J}|$ des $T_{I,J}$ vérifient $|T_{I,J}| \leq 2^p \sigma_T$.

Exemple 1.8

1. Soit V un ensemble analytique de dimension p de X et soit V_{sing} sa partie singulière. On définit un $(n-p, n-p)$ -courant en posant :

$$\langle [V], \alpha \rangle := \int_{V \setminus V_{\text{sing}}} \alpha, \text{ pour } \alpha \in \mathcal{D}_{p,p}(X).$$

Un Théorème de Lelong stipule que $[V]$ est un (p, p) -courant positif fermé sur X . Le (p, p) -courant positif fermé $[V]$ est appelé *courant d'intégration* sur V .

2. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un fermé et soit $h : \mathbb{D} \times E \rightarrow \mathbb{C}$ un mouvement holomorphe de E . On note $\mathbb{D}_z := h(\mathbb{D} \times \{z\})$, alors il s'agit d'une courbe analytique de $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$. Soit μ une mesure de probabilité supportée par E , alors le courant :

$$T := \int_E [\mathbb{D}_z] d\mu(z)$$

est un $(1, 1)$ -courant positif fermé sur $\mathbb{D} \times \mathbb{C}$.

Fonctions plurisousharmoniques. Soit $\varphi : X \rightarrow [-\infty, +\infty[$ une fonction *scs* et L^1_{loc} sur X , alors $dd^c \varphi = \frac{i}{\pi} \sum_{1 \leq j, k \leq n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k$, où les dérivées sont prises au sens des distributions, et $dd^c \varphi$ est un $(1, 1)$ -courant positif fermé si et seulement si la matrice hermitienne $(\partial^2 \varphi / \partial z_j \partial \bar{z}_k)_{j, k}$ est positive.

Définition 1.7 On dit que $\varphi : X \rightarrow [-\infty, +\infty[$ est une fonction plurisousharmonique, (*p.s.h*) si φ est *scs*, si $\varphi \not\equiv -\infty$ et si $dd^c \varphi$ est un $(1, 1)$ -courant positif fermé.

Cette notion est la généralisation naturelle, dans le cas complexe, de la notion de fonction convexe. En dimension 1 complexe, cela correspond au fait que $\Delta \varphi$ est une mesure positive. On peut montrer que φ est *p.s.h* sur X si et seulement si φ est *scs*, $\varphi \not\equiv -\infty$ et φ vérifie l'inégalité de moyenne :

$$\varphi \circ h(0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \circ h(re^{i\theta}) d\theta$$

pour tout disque holomorphe $h : \mathbb{D} \rightarrow X$ et tout $0 < r < 1$, ce qui signifie que φ est sousharmonique le long de tout disque holomorphe de X . On dit aussi que φ est *pluriharmonique* si $dd^c \varphi = 0$, ce qui équivaut à l'harmonicité de φ le long des disques holomorphes. On note $\mathcal{PSH}(X)$ l'espace des fonctions *p.s.h* sur X . On peut montrer que :

1. $\mathcal{PSH}(X)$ est un cône convexe stable par limite décroissante et enveloppe supérieure d'une suite de fonctions *p.s.h*,
2. si $F : Y \rightarrow X$ est holomorphe et $\varphi \in \mathcal{PSH}(X)$, alors $\varphi \circ F \in \mathcal{PSH}(Y)$,
3. les fonctions de la forme $\varphi := \sum_{1 \leq k \leq m} \alpha_k \log |f_k|$ avec $\alpha_k > 0$ et f_k holomorphe sur X sont *p.s.h*. De plus, $dd^c \varphi = \sum_{1 \leq k \leq m} \alpha_k [V_k]$, où $[V_k] = dd^c \log |f_k|$.
4. si (φ_j) est une suite localement uniformément majorée de fonctions *p.s.h*, alors soit (φ_j) converge localement uniformément vers $-\infty$, soit (φ_j) admet une sous-suite qui converge dans $L^1_{\text{loc}}(X)$ vers une fonction *p.s.h*.
5. si T est un $(1, 1)$ -courant positif fermé sur X , alors pour tout $z_0 \in X$ il existe un voisinage $\Omega \subset X$ de z_0 et $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ telle que $T = dd^c u$ sur Ω .

Exemple 1.9 Soit ω_2 la forme de Fubini-Study sur $\mathbb{P}^2$, c'est-à-dire la forme définie par $\pi^* \omega_2 = dd^c \log \|\cdot\|$, où $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ est la projection naturelle. Soit $[z_0 : z_1 : z_2]$ des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$. Alors dans la carte $z_0 \neq 0$, on a $\omega_2 = \frac{1}{2} dd^c \log(1 + |z_1|^2 + |z_2|^2)$.

On dit que $E \subset X$ est *pluripolaire complet* si pour tout $z_0 \in E$, il existe un voisinage $\Omega \subset X$ de z_0 et une fonction $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ telle que $E \cap \Omega = \{z \in \Omega / u(z) = -\infty\}$ et $u \not\equiv -\infty$. En particulier, une réunion dénombrable d'ensembles analytiques est pluripolaire.

Théorème 1.18 (Skoda-El Mir) *Soient $E \subset X$ un ensemble pluripolaire complet et T un (p, p) -courant positif fermé sur $X \setminus E$. Supposons que T est localement de masse finie au voisinage de tout point de E , c'est-à-dire que pour tout $z \in E$ il existe un voisinage $\Omega \subset X$ de z tel que $\sigma_T(\Omega \setminus E) < +\infty$. Alors l'extension triviale $\tilde{T}$ de T à X obtenue en prolongeant les mesures $T_{I,J}$ par 0 sur E est encore un courant fermé.*

Intersection de courants positifs. Soient $u \in \mathcal{PSH}(X)$ et T un (p, p) -courant positif fermé. Lorsque u est $\mathcal{C}^\infty$ et T est une forme lisse, le produit $dd^c u \wedge T$ a un sens et $dd^c u \wedge T = dd^c(uT)$. On veut généraliser cette définition dans le cas où u et T ne sont pas lisses. A priori, $dd^c u \wedge T$ n'est pas bien défini, puisque $dd^c u$ et T sont des courants à coefficients mesures et que le produit de deux mesures n'a en général pas de sens. Lorsque u est localement bornée, puisque T est à coefficients mesures, le courant uT est bien défini et Bedford et Taylor ont défini $dd^c u \wedge T$ par

$$dd^c u \wedge T := dd^c(uT).$$

Il s'agit d'un $(p+1, p+1)$ -courant positif fermé. Etant données q fonctions *p.s.h* localement bornées sur X , avec $q+p \leq n$, on peut définir par récurrence le produit de $dd^c u_1, \dots, dd^c u_q$ avec T en posant $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T := dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T)$.

Lorsque les fonctions u_j ne sont pas localement bornées, sous certaines conditions, le produit $dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T$ est toujours bien défini. Notons $S(u_j)$ est l'ensemble des points au voisinage desquels u_j n'est pas minorée. Les deux conditions suivantes sont suffisantes pour que ce produit soit bien défini (voir [Dem] Chapitre III section 4) :

1. si X admet un recouvrement par des ouverts Stein Ω pour lesquels $\partial\Omega \cap S(u_j) \cap \text{supp}(T) = \emptyset$,
2. $\mathcal{H}_{2(n-p)-2m+1}(S(u_{j_1}) \cap \dots \cap S(u_{j_m}) \cap \text{supp}(T)) = 0$ pour tout choix d'indices $j_1 < \dots < j_m$ de $\{1, \dots, q\}$, où $\mathcal{H}_{2(n-p)-2m+1}$ est la mesure de Hausdorff $(2(n-p)-2m+1)$ -dimensionnelle.

Exemple 1.10 Intersection de courants d'intégration : Supposons que $u_j := \log |f_j|$, où f_j est holomorphe sur X , et notons H_j l'hypersurface $\{f_j = 0\}$. Supposons par ailleurs que $\text{codim } H_1 \cap H_2 = 2$ et notons $C_1, \dots, C_N$ les composantes irréductibles de $H_1 \cap H_2$. Alors le $(2, 2)$ -courant $[H_1] \wedge [H_2]$ est bien défini et il existe des entiers m_j tels que :

$$[H_1] \wedge [H_2] = \sum_{j=1}^N m_j [C_j].$$

Plus généralement, lorsque des ensembles analytiques $H_1, \dots, H_q$ s'intersectent proprement, le courant $[H_1] \wedge \dots \wedge [H_q]$ peut être défini de façon similaire.

Cet exemple nous amène à appeler *intersection* de T et S le courant $T \wedge S$ lorsque celui-ci est bien défini. Remarquons finalement que, lorsque $T \wedge S$ est bien défini,

$$\text{supp}(T \wedge S) \subset \text{supp}(T) \cap \text{supp}(S).$$

Nombres de Lelong.

Définition 1.8 Soit T un $(n-p, n-p)$ -courant positif fermé sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Le nombre de Lelong de T en z_0 est défini par $\nu(T, z_0) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sigma_T(\mathbb{B}(z_0, r))}{\pi^p r^{2p}/p!}$.

Lorsque $T = dd^c u$, avec $u \in \mathcal{PSH}(\Omega)$ et $u(z_0) = -\infty$ pour un certain $z_0 \in \Omega$, on peut voir que le nombre de Lelong $\nu(T, z_0)$ vaut $\nu(T, z_0) = \liminf_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)/\log \|z - z_0\|$. Il s'agit également du plus grand nombre réel $\gamma \geq 0$ pour lequel $u(z) \leq \gamma \log \|z - z_0\| + \mathcal{O}(1)$ au voisinage de z_0 .

Exemple 1.11 Soit $[A]$ le courant d'intégration sur un ensemble analytique A de codimension p . On a alors $\nu([A], z) = 0$ si et seulement si $z \notin A$, $\nu([A], z) = 1$ si $z \in A$ et si A est lisse en z . De plus, un Théorème de Thie stipule que $\nu([A], z)$ est la multiplicité de A au point z .

Si T_n est une suite de (p, p) -courants positifs fermés sur $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ qui converge vers un (p, p) -courant positif fermé T , alors pour tout $a \in \Omega$,

$$\nu(T, a) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(T_n, a)$$

(voir [Dem] Proposition 5.13 page 161). De plus, une comparaison des nombres de Lelong de deux courants est possible lorsque l'on peut comparer leurs potentiels (voir [Dem] Théorème 7.8 page 169) :

Théorème 1.19 (comparaison) Soient u et v deux fonctions p.s.h intersectables avec un courant T . Supposons que $u(z_0) = v(z_0) = -\infty$ et $z_0 \in \text{supp}(T)$. Supposons par ailleurs que $l := \limsup_{z \rightarrow z_0, z \neq z_0} v(z)/u(z) < +\infty$, alors

$$\nu(dd^c u \wedge T, z_0) \leq l \nu(dd^c v \wedge T, z_0).$$

De plus, $\nu(dd^c u, z_0) \nu(T, z_0) \leq \nu(dd^c u \wedge T, z_0)$.

1.3.2 Fonction de Green, mesure de Green et exposant de Lyapounov.

Rappelons que toute fraction rationnelle f de degré d est induite sur $\mathbb{P}^1$ par un endomorphisme polynomial $F : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ homogène de degré d non-dégénérée. Autrement dit $F(tz_1, tz_2) = t^d F(z_1, z_2)$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $F^{-1}\{0\} = \{0\}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1. \end{array}$$

En effet, si $f = p/q$ avec p et q sans zéros communs et $q \neq 0$, on peut poser $F_1(z_1, z_2) = z_2^d p(z_1/z_2)$ et $F_2(z_1, z_2) = z_2^d q(z_1/z_2)$. On note $\mathcal{H}_d$ l'espace des endomorphismes polynomiaux homogènes non-dégénérés de degré d de $\mathbb{C}^2$. On peut identifier $\mathcal{H}_d$ à un ouvert de $\mathbb{C}^{2d+2}$, via l'application

$$(a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_d) \longrightarrow \left(\sum_{j=0}^d a_j z_1^j z_2^{d-j}, \sum_{j=0}^d b_j z_1^j z_2^{d-j} \right).$$

Notons $\Sigma_d := \left\{ \text{Rés} \left(\sum_{j=0}^d a_j z_1^j z_2^{d-j}, \sum_{j=0}^d b_j z_1^j z_2^{d-j} \right) = 0 \right\}$. On peut remarquer que $F \in \mathcal{H}_d$ si et seulement si $(a_0, \dots, a_d, b_0, \dots, b_d) \notin \Sigma_d$. On peut donc identifier Rat_d à un ouvert de Zariski de $\mathbb{P}^{2d+1}$, via l'identification $\text{Rat}_d = \pi_d(\mathcal{H}_d) = \mathbb{P}^{2d+1} \setminus \pi_d(\Sigma_d)$, où $\pi_d : \mathbb{C}^{2d+2} \longrightarrow \mathbb{P}^{2d+1}$ la projection canonique.

Considérons $F \in \mathcal{H}_d(\mathbb{C}^2)$ et posons $G_{n,F}(z) := d^{-n} \log \|F^n(z)\|$ pour $z \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et $n \geq 1$ et $G_F(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} G_{n,F}(z)$. La Proposition suivante regroupe les principales propriétés de la fonction $G_F(z)$ (voir [Sib] Théorèmes 1.6.1 et 1.6.5 ou [BB1] Proposition 1.2). Nous n'en donnerons pas la démonstration.

Proposition 1.20 1. Pour tout compact $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}_d(\mathbb{C}^2)$, la suite $G_{n,F}(z)$ converge uniformément vers $G_F(z)$ sur $\mathcal{K} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$. En particulier, la fonction $G_F(z)$ est p.s.h et continue sur $\mathcal{H}_d(\mathbb{C}^2) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$. Elle vérifie les propriétés d'homogénéité :

$$G_F(tz) = \log |t| + G_F(z), \text{ pour } t \in \mathbb{C}^* \text{ et } z \in \mathbb{C}^2,$$

$$G_{\lambda F}(z) = G_F(z) + \frac{1}{d} \log |\lambda| \text{ pour } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ et } z \in \mathbb{C}^2,$$

ainsi que l'équation fonctionnelle :

$$G_F \circ F = dG_F.$$

2. La fonction $G_F(z)$ est Hölder continue sur tout compact de $\mathcal{H}_d(\mathbb{C}^2) \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})$.

Définition 1.9 La fonction G_F est la fonction de Green de F .

Considérons maintenant $f \in \text{Rat}_d$ la fraction rationnelle induite par F et μ_f la mesure sur $\mathbb{P}^1$ définie par $\pi^* \mu_f = dd^c G_F$. La mesure μ_f ne dépend que de f .

Définition 1.10 La mesure μ_f est appelée mesure de Green de la fraction rationnelle f .

On peut également construire μ_f de la manière suivante : on définit une suite g_n de fonctions ω -sousharmoniques sur $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire telles que $\omega + \Delta g_n \geq 0$, par $g_0 \circ \pi(w) = d^{-1} \log \|F(w)\| - \log \|w\|$ pour $w \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et $g_n := g_0 + d^{-1} g_{n-1} \circ f$. La suite g_n converge dans L_{loc}^1 vers une fonction g_f qui est appelée fonction de Green de f . Elle vérifie

1. $g_f - d^{-1}g_f \circ f = g_0$,
2. $g_f \circ \pi = G_F - \log \|\cdot\|$,
3. $\mu_f = \omega + \Delta g_f$.

Voici quelques propriétés de la mesure μ_f que nous utiliserons ultérieurement (voir [DS]) :

Proposition 1.21 *Soient $f \in \text{Rat}_d$ et μ_f sa mesure de Green. Alors :*

1. $\text{supp}(\mu_f) = \mathcal{J}_f$,
2. $f^*\mu_f = d\mu_f$ et $f_*\mu_f = \mu_f$,
3. μ_f est mélangeante. En particulier, elle est ergodique.

La mesure de Green μ_f est aussi la mesure d'entropie maximale de f (voir [Lj] et [Mañ]). Nous n'utiliserons pas cette propriété.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'exposant de Lyapounov d'une fraction rationnelle. Soit $|\cdot|$ une métrique sur $\mathbb{P}^1$. Pour $f \in \text{Rat}_d$ on pose

$$L(f) := \int_{\mathbb{P}^1} \log |f'| d\mu_f.$$

Puisque la mesure μ_f possède des potentiels locaux continus, on a $\log |f'| \in L^1(\mu_f)$ et il s'agit d'un nombre réel qui ne dépend pas du choix de la métrique. Le Théorème ergodique de Birkhoff montre que $L(f)$ est le taux de croissance exponentielle de f le long d'une orbite type pour la mesure μ_f et l'inégalité de Margulis-Ruelle assure que $L(f) \geq \frac{1}{2} \log d$. Le nombre $L(f)$ est l'*exposant de Lyapounov* de f par rapport à sa mesure d'entropie maximale. Nous aurons besoin dans la suite du résultat suivant (voir [BDM] pour les endomorphismes de $\mathbb{P}^k$ et [Be] ou [O] pour les fractions rationnelles) :

Théorème 1.22 *Soient $f \in \text{Rat}_d$, μ_f sa mesure de Green et $L(f)$ l'exposant de Lyapounov de f par rapport à μ_f . Alors*

$$L(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nd^n} \sum_{x \in \mathcal{R}_n(f)} \log |(f^n)'(x)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \sum_{x \in \mathcal{R}_n(f)} \log |f'(x)|,$$

où $\mathcal{R}_n(f) = \{x \in \mathbb{P}^1 / x \text{ est } n\text{-périodique et } |(f^n)'(x)| > 1\}$.

1.3.3 Formule de DeMarco et courant de bifurcation.

Dans tout ce qui va suivre, la formule de DeMarco (voir [DeM] Corollaire 1.6 ou [BB1] Théorème 3.1) joue un rôle fondamental. Elle nous permettra de définir le courant de bifurcation d'une famille holomorphe de fractions rationnelles :

Théorème 1.23 (Formule de DeMarco) *Soit $f \in \text{Rat}_d$ une fraction rationnelle. Soient F un relevé polynomial homogène non-dégénéré de degré d de f et $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{2d-2} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tels que $\det D_z F = \prod_{j=1}^{2d-2} \tilde{c}_j \wedge z$. Alors :*

$$L(f) + \log d = \sum_{j=1}^{2d-2} G_F(\tilde{c}_j) - \frac{2}{d} \log |\text{Rés}(F)|.$$

Démonstration : Nous donnons ici la démonstration dans le cas d'un polynôme unitaire p de degré d de la formule de Przytycki (voir [Pr] Proposition 4), dont la formule de DeMarco est une généralisation. La formule de Przytycki s'écrit :

$$L(p) = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} g_p(c_j),$$

où $g_p(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log^+ |p^n(z)|$ vérifie $G_P = g_p \circ \pi$ et $c_1, \dots, c_{d-1}$ sont les points critiques de p comptés avec multiplicités. Rappelons que dans le cas d'un polynôme, $\mu_p = \Delta g_p$ (voir [St] Section I.5 page 14 et Section 6.1 page 147). Par définition de $L(p)$ on a

$$L(p) = \int_{\mathbb{C}} \log |p'| \mu_p = \int_{\mathbb{C}} \log |d \prod_{j=1}^{d-1} (z - c_j)| \mu_p = \log d + \sum_{j=1}^{d-1} \int_{\mathbb{C}} \log |z - c_j| \mu_p.$$

Par ailleurs, en effectuant une double intégration par parties, on trouve :

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z - c_j| \mu_p = \int_{\mathbb{C}} \log |z - c_j| \Delta g_p = \int_{\mathbb{C}} g_p \Delta \log |z - c_j| = g_p(c_j)$$

et la formule est démontrée pour un polynôme. □

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . La fonction

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \lambda &\longmapsto L(\lambda) := L(f_\lambda) \end{aligned}$$

est appelée *fonction de Lyapounov* de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$.

Lorsque $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d , on note $G_\lambda := G_{F_\lambda}$ la fonction de Green de F_λ . Dans le cas particulier d'une famille holomorphe munie de $2d - 2$ points critiques marqués, le Théorème 1.23 permet d'établir le fait suivant (voir [BB1] Corollaire 3.3 et Corollaire 3.4) :

Corollaire 1.24 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe munie de $2d - 2$ points critiques marqués. Supposons qu'il existe une famille holomorphe $(F_\lambda)_{\lambda \in X}$ de relevés polynomiaux de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$. Supposons aussi que les $2d - 2$ points critiques marqués admettent des relevés holomorphes $\tilde{c}_j : X \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ pour lesquels $\det D_z F_\lambda = \prod_{j=1}^{2d-2} \tilde{c}_j(\lambda) \wedge z$. Alors*

1. $dd^c L(\lambda) = \sum_{j=1}^{2d-2} dd^c G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)),$
2. la fonction de Lyapounov de $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est une fonction p.s.h et Hölder continue sur X .

Nous pouvons maintenant définir le courant de bifurcation d'une famille holomorphe :

Définition 1.11 *Le courant de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est le $(1,1)$ -courant positif fermé sur X dont L est le potentiel :*

$$T_{\text{bif}} := dd^c L(\lambda).$$

La formule de DeMarco apporte un point de vue potentialiste sur la théorie de Mañé-Sad-Sullivan. D'un côté, la fonction de Lyapounov permet de détecter un phénomène de bifurcation lié à l'instabilité des cycles répulsifs ou neutres. D'un autre côté, la fonction de Green évaluée aux points critiques permet de détecter une bifurcation liée à l'instabilité d'une ou de plusieurs orbites critiques. C'est à travers le Corollaire 1.24 que l'on peut établir un lien entre le courant T_{bif} et le lieu de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ (voir [DeM] Théorème 1.1, [BB1] Théorème 5.2 ou [DF] Théorème 3.2) :

Théorème 1.25 (DeMarco) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Le support de T_{bif} coïncide avec le lieu de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ au sens de Mañé-Sad-Sullivan.*

Démonstration : On se place sous les hypothèses du Corollaire 1.24. Puisque le lieu de bifurcation est la réunion des lieux d'activité des c_j , il suffit de vérifier que $\text{supp}(dd^c G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)))$ est le lieu d'activité de c_j .

Soit $\mathbb{B} \subset X$ une boule sur laquelle $G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda))$ est pluriharmonique. Il existe alors une fonction holomorphe $h_j : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^*$ telle que $G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)) = \log |h_j(\lambda)|$. Remplaçons $\tilde{c}_j(\lambda)$ par $\tilde{c}_j(\lambda)/h_j(\lambda)$. D'après la propriété d'homogénéité de la fonction de Green, on a $G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)) \equiv 0$. Le point 1 de la Proposition 1.20 donne alors $\{F_\lambda^n(\tilde{c}_j(\lambda)) / n \geq 1\} \subset G_\lambda^{-1}\{0\}$ pour $\lambda \in \mathbb{B}$. La fonction de Green étant continue en (λ, z) , pour toute boule $\mathbb{B}' \Subset \mathbb{B}$ il existe un compact $K \subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $G_\lambda^{-1}\{0\} \subset K$ pour $\lambda \in \mathbb{B}'$. Le Théorème de Montel permet d'en déduire que la suite $(f_\lambda^n(c_j(\lambda)))_{n \geq 1}$ est normale sur $\mathbb{B}'$ pour tout $1 \leq j \leq 2d - 2$, c'est-à-dire que c_j est passif sur $\mathbb{B}$.

Supposons maintenant que c_j est passif sur $\mathbb{B}$. Il existe alors une suite extraite $f_\lambda^{n_k}(c_j(\lambda))$ qui converge localement uniformément sur $\mathbb{B}$ vers une application holomorphe $h : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{P}^1$. De plus, on peut trouver une section σ de π pour laquelle $\pi \circ F_\lambda^n \circ \sigma \circ c_j(\lambda) = f_\lambda^n(c_j(\lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}$ et des fonctions holomorphes $t_n : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^*$ telles que

$$F_\lambda^n(\tilde{c}_j(\lambda)) = t_n(\lambda) \cdot \sigma \circ f_\lambda^n(c_j(\lambda)),$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}$. Comme $dd^c G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} dd^c \log \|F_\lambda^n(\tilde{c}_j(\lambda))\|$, on trouve

$$dd^c G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda))|_{\mathbb{B}} = \lim_{k \rightarrow \infty} d^{-n_k} (dd^c \log |t_{n_k}| + \log \|\sigma \circ f_\lambda^{n_k}(c_j(\lambda))\|) \equiv 0,$$

puisque $\log |t_{n_k}|$ est pluriharmonique sur $\mathbb{B}$ et puisque $f_\lambda^{n_k}(c_j(\lambda))$ converge sur $\mathbb{B}$. $\square$

Exemple 1.12 Revenons au cas de la famille $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ des polynômes quadratiques. La fonction de Lyapounov L est sous-harmonique et continue sur $\mathbb{C}$. De plus, si g_c désigne la fonction de Green du polynôme $p_c(z) := z^2 + c$, on a $g_c(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log^+ |p_c^n(z)|$ et la formule de Przytycki s'écrit :

$$L(c) = g_c(0) + \log 2.$$

Ainsi la mesure de bifurcation de la famille $(p_c)_{c \in \mathbb{C}}$ est la mesure :

$$\mu_{\mathbf{M}} := \Delta L = \Delta g_c(0).$$

Puisque $p_c^n(c) \sim c^{2^n}$ lorsque $|c|$ est assez grand, on voit que $g_c(c) \sim \log |c|$ lorsque $|c| \rightarrow +\infty$. Par ailleurs, il est clair que $g_c(c) \geq 0$ et que $g_c(c) = 0$ si et seulement si $c \in \mathbf{M}$. Ainsi, $c \mapsto g_c(c)$ est la fonction de Green de $\mathbb{C} \setminus \mathbf{M}$ avec pôle en ∞ et $\Delta g_c(c)$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{C}$ dont le support est exactement $\partial \mathbf{M}$ (voir [Ra] Définition 4.4.1 et Théorème 4.4.2). Finalement, l'équation fonctionnelle vérifiée par g_c donnant $g_c(c) = 2g_c(0)$, la mesure $\mu_{\mathbf{M}}$ est de masse 1/2.

1.3.4 Auto-intersections du courant de bifurcation.

La continuité et le caractère *p.s.h* de la fonction L justifient la définition suivante :

Définition 1.12 Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d et $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} X$. On appelle k -ième courant de bifurcation de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ et on note T_{bif}^k le (k, k) -courant positif fermé sur X défini par :

$$T_{\text{bif}}^k := (dd^c L)^k = \underbrace{dd^c L \wedge \cdots \wedge dd^c L}_{k \text{ fois}}.$$

Les supports des courants T_{bif}^k vérifient les inclusions suivantes :

$$\text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1}) \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}^k).$$

L'étude des courants T_{bif}^k renseigne sur la géométrie du lieu de bifurcation. Plusieurs résultats ont été récemment obtenus sur les courants T_{bif}^k (voir [BB1, BB2, BB3, BE, DS, Du2, DF]). Rappelons ici quelques résultats que nous allons utiliser. Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Fixons $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} X$ et $E_1, \dots, E_k \subset]0, 1[$ des sous-ensembles denses. Pour $N_k = (n_1, \dots, n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ et $\Theta_k = (\theta_1, \dots, \theta_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, on pose :

$$\text{Per}(X, N_k, e^{2i\pi\Theta_k}) := \text{Per}_{n_1}(e^{2i\pi\theta_1}) \cap \cdots \cap \text{Per}_{n_k}(e^{2i\pi\theta_k}).$$

On note alors $\text{Per}^*(X, N_k, e^{2i\pi\Theta_k})$ la réunion des composantes irréductibles de codimension k de $\text{Per}(X, N_k, e^{2i\pi\Theta_k})$ et

$$\mathcal{N}_k(X, E_1, \dots, E_k) := \bigcup_{\substack{N_k \in (\mathbb{N}^*)^k \\ \theta_i \in E_i}} \text{Per}^*(X, N_k, e^{2i\pi\Theta_k}).$$

Ainsi $\mathcal{N}_k(X, E_1, \dots, E_k)$ est un ensemble des fractions rationnelles ayant au moins k cycles neutres non-persistants distincts où les multiplicateurs ont été prescrits à valeurs respectivement dans $e^{2i\pi E_j}$. Nous combinerons dans la suite nos résultats avec le résultat suivant qui est dû à Bassanelli et Berteloot (voir [BB1] Théorème 5.5) :

Théorème 1.26 (Bassanelli-Berteloot) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d et $1 \leq k \leq \dim_{\mathbb{C}} X$. Soient $E_1, \dots, E_k \subset]0, 1[$ des sous-ensembles denses. Alors :*

$$\text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \subset \overline{\mathcal{N}_k(X, E_1, \dots, E_k)}.$$

Démonstration dans le cas $k = \dim_{\mathbb{C}} X = 2$: Commençons par montrer que si $U \subset \mathbb{C}^2$, est un ouvert et si $(f_\lambda)_{\lambda \in U}$ est une famille holomorphe, lorsque L est harmonique sur tous les $\text{Per}_{n_1}(e^{2i\pi\theta_1})$ avec $n_1 \geq 1$ et $\theta_1 \in E_1$, alors $T_{\text{bif}}^2 \equiv 0$.

Posons $\mu := T_{\text{bif}}^2$ et considérons $\mathbb{B} \Subset U$ une boule euclidienne de U et $\tilde{L}$ la solution au problème de Dirichlet-Monge-Ampère avec donnée L au bord. La fonction $\tilde{L}$ est continue sur $\overline{\mathbb{B}}$ et $p.s.h$ maximale sur $\mathbb{B}$ (voir [BT]). En particulier, $L \leq \tilde{L}$ sur $\mathbb{B}$. On pose alors :

$$\Sigma_\epsilon := \{\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{B} \mid 0 \leq \tilde{L}(\lambda) - L(\lambda) \leq \epsilon\}.$$

D'après un Lemme de Briend-Duval (voir [BD] ou [Sib] Théorème A.10.2), il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de L et $\mathbb{B}$ telle que $\mu(\Sigma_\epsilon) \leq C\epsilon$. Il est donc suffisant de montrer que $\text{supp}(\mu) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B} \subset \Sigma_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

L'ensemble $\mathcal{N}_1(X, E_1)$ est une réunion de courbes complexes. Soit V une de ces courbes, alors V est une composante irréductible d'un $\text{Per}_n(e^{2i\pi\theta})$ avec $\theta \in E_1$ et $n \geq 1$. Puisque nous avons supposé que L est harmonique sur $V \cap \mathbb{B}$, la fonction $\tilde{L} - L$ est sous-harmonique sur $V \cap \mathbb{B}$. Puisque $\tilde{L} - L \equiv 0$ sur $\partial\mathbb{B}$, le principe du maximum entraîne $L = \tilde{L}$. On a donc montré que $\tilde{L} - L = 0$ sur $\mathcal{N}_1(X, E_1) \cap \mathbb{B}$. Finalement, puisque $\text{supp}(\mu) \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}) = \overline{\mathcal{N}_1(X, E_1)}$ (voir Théorème 1.6) et la continuité de $\tilde{L} - L$ implique que $\text{supp}(\mu) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B} \subset \Sigma_\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$.

Soient maintenant $\lambda_0 \in \text{supp}(T_{\text{bif}}^2)$ et $U \subset X$ un voisinage de λ_0 . On peut supposer que U est assez petit pour qu'on l'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^2$. On vient de voir qu'il existe $\theta_1 \in E_1$ et $n_1 \geq 1$ pour lesquels $\text{Per}_{n_1}(e^{2i\pi\theta_1})$ est une courbe et L n'est pas harmonique sur $\text{Per}_{n_1}(e^{2i\pi\theta_1})$. Ainsi il existe une courbe lisse $\Gamma \subset \text{Per}_{n_1}(e^{2i\pi\theta_1})$ telle que $\Delta(L|_\Gamma)$ est une mesure non-nulle. D'après les Théorèmes 1.6 et 1.25, on a

$$\text{supp}(\Delta(L|_\Gamma)) = \overline{\mathcal{N}_1(\Gamma, E_2)}.$$

Ainsi, il existe $n_2 \geq 1$ et $\theta_2 \in E_2$ pour lesquels la courbe $\text{Per}_{n_2}(e^{2i\pi\theta_2})$ intersecte Γ de façon propre. Ceci implique que $\text{Per}^*(X, N, e^{2i\pi\Theta}) \cap U \neq \emptyset$ pour $N = (n_1, n_2)$ et $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$. $\square$

L'exposant de Lyapounov étant invariant par conjugaison par une transformation de Moebius, la fonction $L : \text{Rat}_d \rightarrow \mathbb{R}$ est constante sur l'orbite $\mathcal{O}(f)$ d'une fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_d$. La fonction L descend donc en une fonction $\hat{L} : \mathcal{M}_d \rightarrow \mathbb{R}$ qui est $p.s.h$ continue (voir [BB1] Proposition 6.2). On appelle alors *mesure de bifurcation* la mesure μ_{bif} de Monge-Ampère de $\hat{L}$, c'est-à-dire la mesure définie par

$$\mu_{\text{bif}} := (dd^c \hat{L})^{2d-2}.$$

Remarquons que $\Pi^* \mu_{\text{bif}} = T_{\text{bif}}^{2d-2}$. Bassanelli et Berteloot ont montré que cette mesure est une mesure finie non-nulle et que les classes des exemples de Lattès non-flexibles appartiennent à son support (voir [BB1] Propositions 6.3 et 6.6).

Notons $\mathcal{SPCF}_d \subset \mathcal{M}_d$ l'ensemble des classes de fractions rationnelles de degré d qui sont strictement postcritiquement finies et qui ne sont pas des exemples de Lattès flexibles. Soient $E_1, \dots, E_{2d-2} \subset]0, 1[$ des sous-ensembles denses. On note $\mathcal{N}_{2d-2}(E_1, \dots, E_{2d-2})$ l'ensemble des classes de fractions rationnelles de degré d possédant exactement $2d - 2$ cycles neutres distincts de multiplicateurs respectifs $e^{2i\pi\theta_j}$ avec $\theta_j \in E_j$. Buff et Epstein ont démontré le résultat suivant (voir [BE] Théorème Principal) :

Théorème 1.27 (Buff-Epstein) *Dans l'espace des modules $\mathcal{M}_d$, on a*

$$\text{supp}(\mu_{\text{bif}}) = \overline{\mathcal{SPCF}_d} = \overline{\mathcal{N}_{2d-2}(E_1, \dots, E_{2d-2})}.$$

Un argument perturbatif permet de montrer que $\mathcal{N}_{2d-2}(E_1, \dots, E_{2d-2}) \subset \overline{\mathcal{SPCF}_d}$. La preuve de $\mathcal{SPCF}_d \subset \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$ repose sur un principe de transversalité et sur le point de vue fonction de Green évaluée aux points critiques. Le Théorème 1.26, qui repose sur le point de vue exposant de Lyapounov, permet de conclure la preuve du Théorème 1.27.

1.3.5 Quelques phénomènes d'équidistribution.

Soit Poly_d la famille de tous les polynômes complexes de degré d . Le groupe $\text{Aut}(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur Poly_d et on note $\mathcal{P}_d := \text{Poly}_d / \text{Aut}(\mathbb{C})$ l'espace quotient. Il s'agit de l'espace de modules des polynômes de degré d . Pour $c = (c_1, \dots, c_{d-2}) \in \mathbb{C}^{d-2}$ et $a \in \mathbb{C}$ on note $\lambda = (c, a) \in \mathbb{C}^{d-1}$ et on pose

$$P_{c,a}(z) := \frac{1}{d} z^d + \sum_{j=2}^{d-1} (-1)^{d-j} \frac{\sigma_{d-j}(c)}{j} z^j + a^d.$$

Cette famille a été introduite par Branner et Hubbard dans [BH] pour étudier le lieu de connexité $\mathcal{C}_d$ de la famille $\mathcal{P}_d$. La Proposition suivante résume deux aspects intéressants de cette paramétrisation (voir [BH] Section 2 et Corollaire 3.7 ou [DF] Proposition 5.1 et Proposition 6.2 ou [BB3] Section 4.2) :

Proposition 1.28 *1. La projection naturelle $\Pi : \mathbb{C}^{d-1} \longrightarrow \mathcal{P}_d$ est propre de degré $d(d-1)$,
2. Le lieu de connexité $\mathcal{C}_d$ de la famille $(P_{c,a})_{(c,a) \in \mathbb{C}^{d-1}}$ est compact dans $\mathbb{C}^{d-1}$.*

En utilisant les propriétés des exposants de Lyapounov, Bassanelli et Berteloot ont montré que les hypersurfaces $\text{Per}_n(w)$ équidistribuent le courant de bifurcation dans la famille polynomiale lorsque $|w| \leq 1$ et dans toute famille de fractions rationnelles, lorsque $|w| < 1$. Précisément, ils ont prouvé le résultat suivant (voir [BB3]) :

Théorème 1.29 (Bassanelli-Berteloot) 1. Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Pour tout $w \in \mathbb{D}$, la suite $d^{-n} \log |p_n(\cdot, w)|$ converge ponctuellement et dans L^1_{loc} vers L sur X . En particulier,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} [\text{Per}_n(w)] = T_{\text{bif}}.$$

2. Fixons $w \in \overline{\mathbb{D}}$. Dans la famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^{d-1}}$, la suite $d^{-n} \log |p_n(\cdot, w)|$ converge dans L^1_{loc} vers la fonction L .

Démonstration de 1 dans le cas $w = 0$: Ecrivons pour $\lambda \in X$ et $w \in \mathbb{D}$:

$$p_n(\lambda, w) = \prod_{i=1}^{N_d(n)} (w - w_{n,i}(\lambda)). \quad (1.3.4)$$

D'après le Théorème 1.4 l'ensemble $\{w_{n,j}(\lambda) / w_{n,j}(\lambda) \neq 1 \text{ et } 1 \leq j \leq N_d(n)\}$ coïncide avec l'ensemble des multiplicateurs des cycles de période n de f_λ et de multiplicateurs distincts de 1 comptés avec multiplicités. L'inégalité de Fatou-Shishikura stipule que f_λ a un nombre fini de cycles non-répulsifs donc il existe $n_0 \geq 1$ (dépendant de λ) tel que $|w_{n,j}(\lambda)| > 1$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $1 \leq j \leq N_d(n)$. Ainsi 1.3.4 devient :

$$\frac{1}{d^n} \log |p_n(\lambda, 0)| = \frac{1}{d^n} \sum_{j=1}^{N_d(n)} \log |w_{n,j}(\lambda)| = \frac{1}{d^n} \sum_{j=1}^{N_d(n)} \log^+ |w_{n,j}(\lambda)| = \frac{1}{nd^n} \sum_{p \in \mathcal{R}_n(f_\lambda)} \log |(f_\lambda^n)'(p)|$$

dès que $n \geq n_0$. Le Théorème 1.22 donne alors $L(\lambda) = \lim_{n \rightarrow \infty} d^{-n} \log |p_n(\lambda, 0)|$ pour tout $\lambda \in X$. Par ailleurs, le fait que $d^{-n} N_d(n) \sim \frac{1}{n}$ nous permet d'affirmer que la suite $d^{-n} \log |p_n(\lambda, 0)|$ est localement uniformément majorée sur X . D'après un résultat classique de théorie du potentiel, la suite $d^{-n} \log |p_n(\lambda, 0)|$ converge dans L^1_{loc} vers L (voir [Hö] Théorème 4.1.9). Finalement, la convergence de $d^{-n} [\text{Per}_n(0)]$ découle de la convergence L^1_{loc} de $d^{-n} \log |p_n(\lambda, 0)|$. $\square$

Chapitre 2

Robustesse des dynamiques hyperboliques.

Ce chapitre est consacré à l'étude des perturbations d'un compact f_0 -hyperbolique dans une famille holomorphe $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$. Nous allons commencer par montrer qu'un ensemble hyperbolique admet un mouvement holomorphe, puis nous montrerons que l'on peut estimer les distorsions de f_λ^n sur un ensemble hyperbolique. Finalement, nous établirons un résultat de linéarisation le long d'une orbite contenue dans un ensemble hyperbolique.

2.1 Mouvement holomorphe.

Nous donnons une démonstration du résultat suivant (voir [Sh] (1.2) page 233) :

Théorème 2.1 (de Melo-van Strien) *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0,r) \subset \mathbb{C}^m$. On suppose qu'il existe un compact $E_0 \subset \mathbb{P}^1$ f_0 -invariant et hyperbolique. Alors il existe $\rho \leq r$ et un mouvement holomorphe*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{B}(0,\rho) \times E_0 &\longrightarrow E_\lambda \subset \mathbb{P}^1 \\ (\lambda, z) &\longmapsto h_\lambda(z) \end{aligned}$$

qui conjugue f_0 à f_λ , c'est-à-dire tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0,\rho)$ le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{f_0} & E_0 \\ h_\lambda \downarrow & & \downarrow h_\lambda \\ E_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & E_\lambda \end{array}$$

commute. Si $\mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon) \subset \mathbb{B}(0,\rho)$ et $E_{\lambda_0} := h_{\lambda_0}(E_0)$ alors il existe un unique mouvement holomorphe $g : \mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon) \times E_{\lambda_0} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que

$$h_\lambda(z) = g_\lambda \circ h_{\lambda_0}(z)$$

pour tout $z \in E_0$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon)$.

Soit $K > 1$ la constante d'hyperbolicité de E_0 . Quitte à diminuer K et r , on trouve un δ -voisinage $\mathcal{N}_\delta$ de E_0 tel que

$$|f'_\lambda(z)| \geq K > 1 \text{ pour tout } (z, \lambda) \in \mathcal{N}_\delta \times \mathbb{B}(0, r).$$

Pour démontrer le Théorème 2.1 il nous faudra contrôler la taille des branches inverses. Ceci fait l'objet du Lemme suivant :

Lemme 2.2 (branches inverses) *Sous les hypothèses du Théorème 2.1, il existe $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$, tels que pour tout $z_0 \in E_0$, il existe une application $f_{z_0, \lambda}^{-1}(w)$ holomorphe sur $\mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0(z_0), \varepsilon)$ à valeurs dans $\mathbb{D}(z_0, \varepsilon)$ vérifiant :*

1. $f_{z_0, 0}^{-1}(f_0(z_0)) = z_0$,
2. $f_\lambda(f_{z_0, \lambda}^{-1}(w)) = w$ pour tout $(\lambda, w) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0(z_0), \varepsilon)$,
3. $\left| (f_{z_0, \lambda}^{-1})'(w) \right| \leq \frac{1}{K}$ pour tout $(\lambda, w) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0(z_0), \varepsilon)$.

Démonstration : • Soient $z_0 \in E_0$ et $w_0 := f_0(z_0)$. En appliquant le Théorème des fonctions implicites à $(\lambda, z, w) \mapsto f_\lambda(z) - w$, en $(0, z_0, w_0)$ on trouve $\varepsilon > 0$ et $\rho > 0$ dépendants de z_0 et une fonction holomorphe $g_{z_0} : \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(w_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant

$$\begin{aligned} - g_{z_0}(0, w_0) &= z_0 \\ - f_\lambda(g_{z_0}(\lambda, w)) &= w, \text{ pour tout } (\lambda, w) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(w_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Par compacité de E_0 , on peut supposer que g_{z_0} est définie sur $\mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(w_0, \varepsilon)$ pour tout $z_0 \in E_0$. On supposera aussi que $2\varepsilon < \delta$.

• Posons $M := \frac{1}{K} \sup_{\xi \in \mathcal{N}_\delta, \lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)} \|D_\lambda f_\lambda(\xi)\|$. En différentiant l'expression 2.1.1 par rapport à λ on a :

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}(g_{z_0}(\lambda, w)) \cdot D_\lambda g_{z_0}(\lambda, w) + D_\lambda f_\lambda(g_{z_0}(\lambda, w)) = 0.$$

Comme $\left| \frac{\partial f_\lambda}{\partial z}(g_{z_0}(\lambda, w)) \right| \geq K$ lorsque $g_{z_0}(\lambda, w) \in \mathcal{N}_\delta$, on en déduit que $\|D_\lambda g_{z_0}(\lambda, w)\| \leq M$ lorsque $g_{z_0}(\lambda, w) \in \mathcal{N}_\delta$ et $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$.

Soit $K' > 1$, tel que $\frac{1}{K} + \frac{1}{K'} \leq 1$. Quitte à diminuer $\rho > 0$, on peut supposer que $M\rho < \frac{\varepsilon}{K'}$. Alors, par le Théorème des accroissements finis, on a

$$g_{z_0}(\mathbb{B}(0, \rho) \times \{w_0\}) \subset \mathbb{D}(z_0, \frac{\varepsilon}{K'}) \subset \mathcal{N}_\delta. \quad (2.1.2)$$

• En dérivant l'expression 2.1.1 par rapport à w on a

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial z}(g_{z_0}(\lambda, w)) \cdot \frac{\partial g_{z_0}}{\partial w}(\lambda, w) = 1$$

et donc $\left| \frac{\partial g_{z_0}}{\partial w}(\lambda, w) \right| \leq \frac{1}{K}$ lorsque $g(\lambda, w) \in \mathcal{N}_\delta$ et $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$. Par le Théorème des accroissements finis et en tenant compte de 2.1.2 on a

$$g_{z_0}(\{\lambda\} \times \mathbb{D}(w_0, \varepsilon)) \subset \mathbb{D}(g_{z_0}(\lambda, w_0), \frac{\varepsilon}{K})$$

puis pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$

$$g_{z_0}(\{\lambda\} \times \mathbb{D}(w_0, \varepsilon)) \subset \mathbb{D}(z_0, \varepsilon(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^7})) \subset \mathbb{D}(z_0, \varepsilon) \subset \mathcal{N}_\delta.$$

L'application $f_{z_0, \lambda}^{-1}(w) := g_{z_0}(\lambda, w)$ convient. $\square$

Démonstration du Théorème 2.1 : Soit $z \in E_0$. Par le Lemme 2.2 il existe des branches inverses $f_{f_0^{n-1}(z), \lambda}^{-1}, \dots, f_{z, \lambda}^{-1}$ issues respectivement de $f_0^{n-1}(z), \dots, f_0(z), z$. Plus précisément, on peut définir pour tout $z \in E_0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ une application $f_{z, \lambda}^{-n} := f_{z, \lambda}^{-1} \circ \dots \circ f_{f_0^{n-1}(z), \lambda}^{-1}$ holomorphe sur $\mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0^n(z), \varepsilon)$, à valeurs dans $\mathbb{D}(z, \varepsilon)$ et vérifiant :

1. $f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_0^n(z) = z$,
2. $f_\lambda^n(f_{z, \lambda}^{-n}(w)) = w$ pour tout $(\lambda, w) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0^n(z), \varepsilon)$,
3. $|(f_{z, \lambda}^{-n})'(w)| \leq K^{-n}$ pour tout $(\lambda, w) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times \mathbb{D}(f_0^n(z), \varepsilon)$.

- Posons pour $z \in E_0$, $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$ et $n \geq 1$:

$$h_n(\lambda, z) := f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_0^n(z).$$

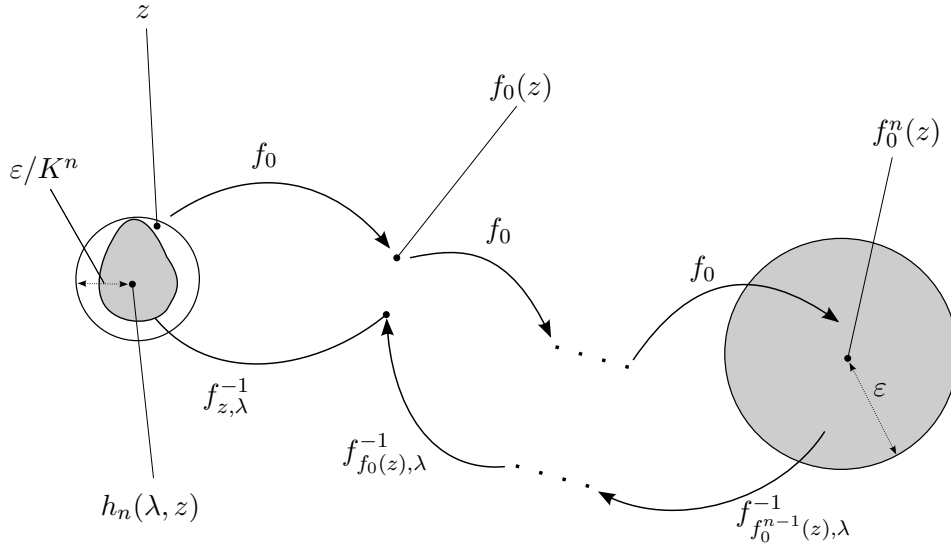


FIGURE 2.1 – Construction de l'application $h_n(\lambda, z)$.

On a alors :

$$h_{n+1}(\lambda, z) - h_n(\lambda, z) = f_{z, \lambda}^{-n}(f_{f_0^n(z), \lambda}^{-1} \circ f_0^{n+1}(z)) - f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_0^n(z).$$

D'après ce qui précède on a $f_{f_0^n(z), \lambda}^{-1} \circ f_0^{n+1}(z) \in \mathbb{D}(f_0^n(z), \varepsilon)$ et

$$|h_{n+1}(\lambda, z) - h_n(\lambda, z)| \leq K^{-n}\varepsilon, \text{ pour tout } (\lambda, z) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0.$$

La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc uniformément de Cauchy sur $\mathbb{B}(0, \rho) \times E_0$. On pose alors

$$h(\lambda, z) := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(\lambda, z).$$

L'application $h : \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ ainsi définie vérifie

1. $h : \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est continue,
2. $h(\cdot, z) : \mathbb{B}(0, \rho) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est holomorphe pour tout $z \in E_0$,
3. $h(0, z) = z$ pour tout $z \in E_0$,

Soient $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$, $z \in E_0$ et $n \geq 1$, alors

$$f_\lambda \circ h_{n+1}(\lambda, z) = f_\lambda \circ f_{z, \lambda}^{-(n+1)} \circ f_0^{n+1}(z) = f_{f_0(z), \lambda}^{-n} \circ f_0^n \circ f_0(z) = h_n(\lambda, f_0(z)).$$

Par passage à la limite on obtient $f_\lambda \circ h_\lambda(z) = h_\lambda \circ f_0(z)$ pour $(\lambda, z) \in \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0$.

• Soient $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, \rho)$ et $0 < \varepsilon \leq \rho - \|\lambda_0\|$ alors, d'après ce que l'on vient de voir l'application $g : \mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon) \times E_{\lambda_0} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ donnée par $g_\lambda(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_{\lambda_0}^n(z)$ est bien définie. On a alors

$$h_\lambda(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_0^n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{z, \lambda}^{-n} \circ f_{\lambda_0}^n) \circ (f_{z, \lambda_0}^{-n} \circ f_0^n(z)) = g_\lambda \circ h_{\lambda_0}(z).$$

• Il reste à vérifier que $h_\lambda : E_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ est injective pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$. Supposons que $h_{\lambda_0}(z) = h_{\lambda_0}(z')$, où $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, \rho)$ et $z, z' \in E_0$ et fixons $0 < \varepsilon \leq \rho - \|\lambda_0\|$. D'après le point précédent on a :

$$h_\lambda(z) = g_\lambda \circ h_{\lambda_0}(z) = g_\lambda \circ h_{\lambda_0}(z') = h_\lambda(z')$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon)$. Puisque les applications $\lambda \longmapsto h_\lambda(z)$ et $\lambda \longmapsto h_\lambda(z')$ sont holomorphes sur $\mathbb{B}(0, \rho)$ le principe du prolongement analytique donne $h_\lambda(z) = h_\lambda(z')$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$. En particulier, $z = h_0(z) = h_0(z') = z'$ et h_{λ_0} est injective. $\square$

Définition 2.1 Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r) \subset \mathbb{C}^m$ et $E_0 \subset \mathbb{P}^1$ un compact f_0 -invariant hyperbolique. Un mouvement holomorphe $h : \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0 \longrightarrow \mathbb{P}^1$ qui conjugue f_0 à f_λ sur E_0 sera appelé dans la suite un mouvement holomorphe dynamique de E_0 .

Remarque 2.1 Le Théorème 2.1 donne l'existence de tels mouvements holomorphes, en revanche, il n'en garantit pas l'unicité.

Il nous sera utile de remarquer que les branches inverses sont compatibles avec le mouvement holomorphe. Notons $B := \max_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r), z \in \mathcal{N}_\delta} |f'_\lambda(z)|$ et h un mouvement holomorphe dynamique de E_0 .

Lemme 2.3 Sous les hypothèses du Théorème 2.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $w_0 \in E_0$ et tout $k \geq 1$, il existe une branche inverse $f_{f_0^{k-1}(w_0), \lambda}^{-1}(z)$ de f_λ définie sur $\mathbb{B}(0, r) \times \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon)$ et à valeurs dans $\mathbb{D}(f_0^{k-1}(w_0), \varepsilon)$ et telle que :

1. $h_\lambda(f_0^{k-1}(w_0)) = f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1} \circ h_\lambda(f_0^k(w_0))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$.

2. pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z, w \in \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon)$,

$$\frac{1}{B}|z - w| \leq |f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1}(z) - f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1}(w)| \leq \frac{1}{K}|z - w|.$$

Démonstration : Utilisons le Lemme 2.2 et fixons $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $k \geq 1$ il existe $f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1}(z)$ définie sur $\mathbb{B}(0, r) \times \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon)$ et à valeurs dans $\mathbb{D}(f_0^{k-1}(w_0), \varepsilon)$ telle que

$$\frac{1}{B}|z - w| \leq |f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1}(z) - f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1}(w)| \leq \frac{1}{K}|z - w| \quad (2.1.3)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z, w \in \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon)$. Comme $h_\lambda(z)$ est continue sur $\mathbb{B}(0, r) \times \mathcal{N}_\delta$, quitte à réduire r et δ on peut supposer que

$$f_\lambda^k(h_\lambda(w_0)) = h_\lambda(f_0^k(w_0)) \in \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon/2)$$

pour tout $k \geq 0$ et donc que $\mathbb{D}(f_\lambda^k(w_0), \varepsilon/2) \subset \mathbb{D}(f_0^k(w_0), \varepsilon)$. Finalement, si on suit les notations de la démonstration du Théorème 2.1, il suffit de remarquer que

$$f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-(n+1)} \circ f_0^{n+1}(f_0^{k-1}(w_0)) = f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1} \circ f_{f_0^k(w_0),\lambda}^{-n} \circ f_0^n(f_0^k(w_0))$$

et de passer à la limite sur n pour obtenir $h_\lambda(f_0^{k-1}(w_0)) = f_{f_0^{k-1}(w_0),\lambda}^{-1} \circ h_\lambda(f_0^k(w_0))$. $\square$

Nous aurons besoin du Lemme de distorsion suivant qui est dû à Aspenberg (voir [As1], Lemme 4.2) :

Lemme 2.4 (Distorsion) Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Soient $E_0 \subset \mathcal{J}_0$ un ensemble f_0 -invariant hyperbolique et $h : \mathbb{B}(0, \rho) \times E_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique de E_0 . Quitte à supposer $r \leq \rho$, il existe $C > 0$ et $l \geq 1$ tels que pour tout $n \geq 1$ et tout $w_0 \in E_0$

$$\left| \frac{(f_\lambda^n)'(h_\lambda(w_0))}{(f_0^n)'(w_0)} - 1 \right| \leq nC \|\lambda\|^l \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{B}(0, r/2).$$

Démonstration : Soient $n \geq 1$ et $0 \leq j \leq n-1$. Notons $w_j(\lambda) := f_\lambda^j(h_\lambda(w_0))$ et écrivons le développement de $f'_\lambda(w_j(\lambda))$ en série entière sur $\mathbb{B}(0, r)$ sous la forme

$$f'_\lambda(w_j(\lambda)) = f'_0(w_j(0)) \left(1 + \sum_{|\alpha| \geq l_j} c_{j,\alpha} \lambda^\alpha \right) \text{ avec } \sum_{|\alpha| = l_j} c_{j,\alpha} \lambda^\alpha \neq 0.$$

Posons $l = \min\{l_j / 0 \leq j \leq n-1\}$ et, pour $|\alpha| = l$, $C_\alpha := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} c_{j,\alpha}$. Il vient alors pour $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$

$$(f_\lambda^n)'(w_0(\lambda)) = \prod_{j=0}^{n-1} f'_\lambda(w_j(\lambda)) = \prod_{j=0}^{n-1} f'_0(w_j(0)) \left(1 + \sum_{|\alpha| = l} c_{j,\alpha} \lambda^\alpha + \mathcal{O}_j(\|\lambda\|^{l+1}) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= (f_0^n)'(w_0(0)) \prod_{j=0}^{n-1} \left(1 + \sum_{|\alpha|=l} c_{j,\alpha} \lambda^\alpha + \mathcal{O}_j(\|\lambda\|^{l+1})\right) \\
&= (f_0^n)'(w_0(0)) \left(1 + n \sum_{|\alpha|=l} C_\alpha \lambda^\alpha + \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{O}_j(\|\lambda\|^{l+1})\right).
\end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ on pose $\varphi_j(\lambda) := f'_\lambda(w_j(\lambda))$. Comme la fonction h_λ est uniformément continue sur $\mathbb{B}(0, r) \times E_0$ et $w_j(\lambda) = h_\lambda(f_0^j(w_0))$, la suite $(w_j)_{j \geq 0}$ est équicontinue sur $\mathbb{B}(0, r)$. L'application $(\lambda, z) \mapsto f'_\lambda(z)$ étant uniformément continue sur $\mathbb{B}(0, r) \times \mathcal{N}_\delta$ il s'ensuit que la suite $(\varphi_j)_{j \geq 0}$ est également équicontinue sur $\mathbb{B}(0, r)$.

Comme $w_j(0) \in E_0$ pour tout $j \geq 0$ on a $|f'_0(w_j(0))| \geq K > 1$ pour tout $j \geq 0$. Des inégalités de Cauchy et de l'équicontinuité de $(\varphi_j)_{j \geq 0}$ sur $\mathbb{B}(0, r)$ on déduit l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de j telle que

$$\left| \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha \varphi_j}{\partial \lambda^\alpha}(0) \lambda^\alpha \right| \leq \frac{C}{r^{l+1}} \|\lambda\|^{l+1} \left(\frac{\|\lambda\|}{r} \right)^{|\alpha| - l - 1}$$

pour tout $|\alpha| \geq l$, tout $j \geq 0$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$. Alors il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leq j \leq n-1} \mathcal{O}_j(\|\lambda\|^{l+1}) \leq \frac{C_1}{r^{l+1}} \|\lambda\|^{l+1} \text{ sur } \mathbb{B}(0, r/2)$$

et $|C_\alpha| = \frac{1}{n} \left| \sum_{0 \leq j \leq n-1} (f'(w_j(0)))^{-1} \frac{\partial^\alpha \varphi_j}{\partial \lambda^\alpha}(0) \right| \leq \frac{C}{r^l K}$. Il vient finalement

$$\left| \frac{(f_\lambda^n)'(w_0(\lambda))}{(f_0^n)'(w_0(0))} - 1 \right| \leq n \left(\sum_{|\alpha|=l} \frac{C}{r^l K} + \frac{C_1}{r^l} \right) \|\lambda\|^l \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{B}(0, r/2).$$

□

2.2 Linéarisation le long d'une orbite répulsive.

Le but de cette section est de démontrer le résultat de linéarisation suivant :

Proposition 2.5 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d . Soient $E_0 \subset \mathcal{J}_0$ un ensemble f_0 -invariant hyperbolique et $h : \mathbb{B}(0, r) \times E_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique de E_0 . Fixons $w_0 \in E_0$ et posons $w(\lambda) := h_\lambda(w_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$. Alors il existe $\rho, C > 0$ et, pour tout $n \geq 1$, une fonction continue $\rho_n : \mathbb{B}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et des injections holomorphes $\psi_{0,\lambda}^{(n)}, \psi_{1,\lambda}^{(n)}$ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ définies respectivement sur $\mathbb{D}(0, \rho_n(\lambda))$ et $\mathbb{D}(0, \rho)$ et vérifiant :*

- $f_\lambda^n(z + w(\lambda)) - f_\lambda^n(w(\lambda)) = \psi_{1,\lambda}^{(n)} \left((f_\lambda^n)'(w(\lambda)) \cdot \psi_{0,\lambda}^{(n)}(z) \right),$
- $\rho_n(\lambda) := \frac{\rho}{2} |(f_\lambda^n)'(w(\lambda))|^{-1},$
- $|\psi_{i,\lambda}^{(n)}(z) - z| \leq C|z|^2.$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho_n(\lambda))$ (ou $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$). De plus, on peut supposer que $C\rho < 1$.

La démonstration de la Proposition 2.5 utilise deux ingrédients. Le premier est un résultat de linéarisation pour une chaîne de contractions. Le second est une construction de "bonnes" branches inverses le long d'une orbite de E_0 à laquelle on appliquera le principe de linéarisation pour les chaînes de contractions.

2.2.1 Linéarisation pour une chaîne de contractions.

Définition 2.2 Soient $a \leq b < 0$. Une (a, b) -chaîne de contractions holomorphes est une suite d'applications holomorphes

$$g_j : \mathbb{D}(0, \eta) \longrightarrow \mathbb{D}(0, \eta)$$

telles que $e^a|z| \leq |g_j(z)| \leq e^b|z|$, pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \eta)$. On dit que la chaîne dépend holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ si $g_j(z) = g_{j,\lambda}(z)$ est holomorphe en $(\lambda, z) \in \mathbb{B}(0, r) \times \mathbb{D}(0, \eta)$.

Le principe de linéarisation suivant pour les chaînes de contractions est une version du Théorème de Koenigs dans le cas non-autonome :

Théorème 2.6 (Linéarisation) Soient $a \leq b < 0$ et $(g_{j,\lambda})_{j \geq 1}$ une (a, b) -chaîne de contractions holomorphes sur $\mathbb{D}(0, \eta)$ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$. Notons $l_{j,\lambda}$ la partie linéaire de $g_{j,\lambda}$ en 0 et supposons que $2b - a \leq b/2$. Alors il existe $0 < \rho \leq \eta/2$ et une suite d'injections holomorphes $\varphi_{j,\lambda} : \mathbb{D}(0, \rho) \longrightarrow \mathbb{D}(0, 2\rho)$ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{D}(0, \rho) & \xrightarrow{g_{1,\lambda}} & \mathbb{D}(0, \rho) & \xrightarrow{g_{2,\lambda}} & \cdots & \xrightarrow{g_{j-1,\lambda}} & \mathbb{D}(0, \rho) & \xrightarrow{g_{j,\lambda}} & \mathbb{D}(0, \rho) & \xrightarrow{g_{j+1,\lambda}} & \cdots \\ \downarrow \varphi_{1,\lambda} & & \downarrow \varphi_{2,\lambda} & & & & \downarrow \varphi_{j,\lambda} & & \downarrow \varphi_{j+1,\lambda} & & \\ \mathbb{D}(0, 2\rho) & \xrightarrow{l_{1,\lambda}} & \mathbb{D}(0, 2\rho) & \xrightarrow{l_{2,\lambda}} & \cdots & \xrightarrow{l_{j-1,\lambda}} & \mathbb{D}(0, 2\rho) & \xrightarrow{l_{j,\lambda}} & \mathbb{D}(0, 2\rho) & \xrightarrow{l_{j+1,\lambda}} & \cdots \end{array}$$

De plus, il existe $C_0 > 0$ telle que pour tout $j \geq 1$, tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$

$$|\varphi_{j,\lambda}(z) - z| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a} C_0 |z|^2.$$

Démonstration : • Pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \eta)$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ on a

$$|g_{j,\lambda}(z) - l_{j,\lambda}(z)| = \left| \sum_{n \geq 2} \frac{g_{j,\lambda}^{(n)}(0)}{n!} z^n \right| \leq |z|^2 \sum_{n \geq 2} \frac{|g_{j,\lambda}^{(n)}(0)|}{n!} \cdot |z|^{n-2}.$$

Par les inégalités de Cauchy on a $\frac{|g_{j,\lambda}^{(n)}(0)|}{n!} \leq e^b \frac{\eta}{\eta^n} = \frac{e^b}{\eta^{n-1}}$ et donc

$$\sum_{n \geq 2} \frac{|g_{j,\lambda}^{(n)}(0)|}{n!} \cdot |z|^{n-2} \leq e^b \sum_{n \geq 2} \frac{|z|^{n-2}}{\eta^{n-1}} = \frac{e^b}{\eta} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{|z|}{\eta}\right)^k.$$

Il vient alors :

$$|g_{j,\lambda}(z) - l_{j,\lambda}(z)| \leq 2 \frac{e^{b_j}}{\eta} |z|^2 \text{ pour } z \in \mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2}), \lambda \in \mathbb{B}(0, r) \text{ et } j \geq 1. \quad (2.2.4)$$

- Posons pour $j \geq 1, n \geq 1, \lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et $z \in \mathbb{D}(0, \eta)$

$$\varphi_{j,n,\lambda}(z) := l_{j,\lambda}^{-1} \circ \dots \circ l_{j+n-1,\lambda}^{-1} \circ g_{j+n-1,\lambda} \circ \dots \circ g_{j,\lambda}(z)$$

et $\varphi_{j,0,\lambda} = \text{id}$. Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ l'assertion

$$(\mathcal{A}_n) : \quad \forall j \geq 1, \forall z \in \mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2}), |\varphi_{j,n+1,\lambda}(z) - \varphi_{j,n,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a+n(2b-a)} |z|^2.$$

D'après 2.2.4 on a $|g_{j,\lambda}(z) - l_{j,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\eta} e^b |z|^2$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2})$ et donc

$$|\varphi_{j,1,\lambda}(z) - \varphi_{j,0,\lambda}(z)| = |l_{j,\lambda}^{-1} \circ g_{j,\lambda}(z) - z| \leq e^{-a} |g_{j,\lambda}(z) - l_{j,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a} |z|^2.$$

Supposons maintenant que $(\mathcal{A}_n)$ est vraie et montrons $(\mathcal{A}_{n+1})$. Puisque $|g_{j,\lambda}(z)| \leq \frac{\eta}{2}$ pour $z \in \mathbb{D}(0, \eta/2)$, on peut appliquer $(\mathcal{A}_n)$ à $g_{j,\lambda}(z)$. On trouve alors

$$|\varphi_{j+1,n+1,\lambda}(g_j(z)) - \varphi_{j+1,n,\lambda}(g_j(z))| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a+n(2b-a)} |g_{j,\lambda}(z)|^2.$$

Comme $|g_{j,\lambda}(z)| \leq e^b |z|$ on trouve

$$|\varphi_{j+1,n+1,\lambda}(g_{j,\lambda}(z)) - \varphi_{j+1,n,\lambda}(g_{j,\lambda}(z))| \leq \frac{2}{\eta} e^{b+(n+1)(2b-a)} |z|^2.$$

En appliquant $l_{j,\lambda}^{-1}$ on trouve

$$|\varphi_{j,n+2,\lambda}(z) - \varphi_{j,n+1,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a+(n+1)(2b-a)} |z|^2.$$

On a donc montré que $(\mathcal{A}_n)$ est vraie pour $n \geq 1$. Puisque $(2b-a) \leq b/2$, cela donne

$$|\varphi_{j,n+1,\lambda}(z) - \varphi_{j,n,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a} e^{nb/2} |z|^2$$

pour $z \in \mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2})$ et $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$.

- Comme $b < 0$ la suite $(\varphi_{j,n,\lambda})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2}) \times \mathbb{B}(0, r)$ vers une fonction holomorphe $\varphi_{j,\lambda} = \text{id} + \sum_{n \geq 0} (\varphi_{j,n+1,\lambda} - \varphi_{j,n,\lambda})$ satisfaisant

$$|\varphi_{j,\lambda}(z) - z| \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a} C_0 |z|^2 \text{ pour tout } z \in \mathbb{D}(0, \frac{\eta}{2}) \text{ et tout } \lambda \in \mathbb{B}(0, r). \quad (2.2.5)$$

où $C_0 := (1 - e^{b/2})^{-1}$. Soit $\rho := \min(\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2e^{b-a}C_0})$, l'estimation 2.2.5 permet d'affirmer que

$$|\varphi_{j,\lambda}(z)| \leq \rho + \frac{2}{\eta} e^{b-a} C_0 \rho^2 \leq 2\rho$$

pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$. Par construction on a $\varphi_{j+1,n,\lambda} \circ g_{j,\lambda} = l_{j,\lambda} \circ \varphi_{j,n+1,\lambda}$ et en passant à la limite :

$$\varphi_{j+1,\lambda} \circ g_{j,\lambda} = l_{j,\lambda} \circ \varphi_{j,\lambda}.$$

Il reste à vérifier que les $\varphi_{j,\lambda}$ sont injectives sur un disque de taille fixe. Posons

$$\psi_{j,\lambda}(z) := \varphi_{j,\lambda}(z) - z$$

et $\rho' := \rho/2$. Alors $\mathbb{D}(z, \rho/2) \subset \mathbb{D}(0, \rho)$ pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho')$ et l'assertion 2.2.5 et les inégalités de Cauchy assurent que pour $z \in \mathbb{D}(0, \rho')$:

$$|\psi'_{j,\lambda}(z)| \leq \frac{2}{\rho} \frac{2}{\eta} e^{b-a} C_0 (\rho')^2 \leq \frac{2}{\eta} e^{b-a} C_0 \frac{\rho}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Alors $|\psi_{j,\lambda}(z) - \psi_{j,\lambda}(w)| \leq \frac{1}{2}|z - w|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z, w \in \mathbb{D}(0, \rho')$. Il vient que $|\varphi_{j,\lambda}(z) - z - \varphi_{j,\lambda}(w) + w| \leq \frac{1}{2}|z - w|$ et $|\varphi_{j,\lambda}(z) - \varphi_{j,\lambda}(w)| \geq \frac{1}{2}|z - w|$. Ainsi $\varphi_{j,\lambda}$ est injective sur $\mathbb{D}(0, \rho')$. $\square$

2.2.2 Familles de branches inverses.

Revenons au cas d'une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ pour laquelle il existe $E_0 \subset \mathcal{J}_0$ un compact f_0 -invariant hyperbolique. Nous allons maintenant construire une "bonne" suite de branches inverses. Soient h un mouvement holomorphe dynamique de E_0 et $w_0 \in E_0$. Par compacité de E_0 , l'orbite de w_0 est "presque" périodique : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $m \neq n \geq 1$ tels que $|f_0^m(w_0) - f_0^n(w_0)| \leq \varepsilon$. Grâce à cette propriété il est possible de définir des branches inverses de f_λ à toutes les profondeurs le long d'une orbite de E_λ :

Lemme 2.7 *On reprend les hypothèses et les notations de la Proposition 2.5. Soient $n \geq 1$, $w_0 \in E_0$ et posons $w(\lambda) := h_\lambda(w_0)$. Il existe $B > K > 1, \eta > 0$ qui ne dépend ni de n , ni de w_0 et une suite $(f_{\lambda,j}^{-1})_{j \geq 1}$ de branches inverses de f_λ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ tels que*

1. $f_{\lambda,j}^{-1}$ est définie sur $\mathbb{D}(z_j(\lambda), \eta)$, pour tout $j \geq 1$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$, où

$$z_j(\lambda) := f_{\lambda,j-1}^{-1} \circ \cdots \circ f_{\lambda,1}^{-1}(f_\lambda^n(w(\lambda))),$$

2. $z_i(\lambda) = f_\lambda^{n-i+1}(w(\lambda))$ pour tout $1 \leq i \leq n+1$,

3. pour tout $j \geq 1$, tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et pour tout $z \in \mathbb{D}(z_j(\lambda), \eta)$

$$\frac{1}{B}|z - z_j(\lambda)| \leq |f_{\lambda,j}^{-1}(z) - z_{j+1}(\lambda)| \leq \frac{1}{K}|z - z_j(\lambda)|. \quad (2.2.6)$$

Démonstration : • Soit $K > 1$ la constante d'hyperbolicité de E_0 . On note $\mathcal{N}_\delta$ un δ -voisinage de E_0 dans $\mathbb{P}^1$. Quitte à réduire r, δ et K on peut supposer que $|f'_\lambda(z)| \geq K$ pour tout $(\lambda, z) \in \mathbb{B}(0, r) \times \mathcal{N}_\delta$. Posons $B := \max_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r), z \in \mathcal{N}_\delta} |f'_\lambda(z)|$. Reformulons le Lemme 2.3. Il existe $\alpha > 0$ tel que pour $q \geq 1$, il existe $f_{f_0^{q-1}(w_0), \lambda}^{-1}(z)$ définie sur $\mathbb{B}(0, r) \times \mathbb{D}(f_0^q(w_0), \alpha)$ et telle que

- $f_\lambda^{q-1}(w(\lambda)) = f_{f_0^{q-1}(w_0), \lambda}^{-1} \circ f_\lambda^q(w(\lambda))$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$.
- pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z, w \in \mathbb{D}(f_0^q(w_0), \alpha)$:

$$\frac{1}{B}|z - w| \leq |f_{f_0^{q-1}(w_0), \lambda}^{-1}(z) - f_{f_0^{q-1}(w_0), \lambda}^{-1}(w)| \leq \frac{1}{K}|z - w|. \quad (2.2.7)$$

• Fixons $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{K\varepsilon}{K-1} < \frac{\alpha}{4}$. Par compacité de E_0 on trouve $n_0 \geq 0$ et $m \geq 1$ tels que $|f_0^{m+n_0}(w_0) - f_0^{n_0}(w_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Il suffit clairement de faire la construction pour $f_0^{n_0}(w_0)$. On supposera donc que $|f_0^m(w_0) - w_0| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et, quitte à diminuer r , que :

$$|f_\lambda^m(w(\lambda)) - w(\lambda)| \leq \varepsilon \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{B}(0, r).$$

Posons $z_i(\lambda) := f_\lambda^{l-i+1}(w(\lambda))$ et $f_{\lambda, i}^{-1}(z) := f_{f_0^{l-i}(w_0), \lambda}^{-1}(z)$ pour $1 \leq i \leq l$, $z_{l+1}(\lambda) := w(\lambda)$. Notons $\varepsilon_k := \varepsilon(1 + \frac{1}{K^m} + \dots + \frac{1}{K^{km}})$ pour $k \geq 0$ et remarquons que $\varepsilon_k \leq \frac{\alpha}{4}$.

• Posons $\eta := \alpha/4$. Nous allons maintenant montrer par récurrence que les branches inverses $f_{\lambda, j}^{-1}$ existent et que les points $z_j(\lambda)$ sont bien définis pour $j \geq n+1$ et vérifient :

$$|z_j(\lambda) - f_\lambda^{m-l}(w(\lambda))| \leq \frac{\varepsilon_k}{K^l} \text{ lorsque } j = n + km + l + 1 \text{ où } 0 \leq l \leq m-1, k \geq 0. \quad (2.2.8)$$

Puisque $z_{n+1}(\lambda) = w(\lambda)$ on a bien $|z_{n+1}(\lambda) - f_\lambda^m(w(\lambda))| \leq \varepsilon = \varepsilon_0$. Supposons maintenant que $|z_j(\lambda) - f_\lambda^{m-l}(w(\lambda))| \leq \frac{\varepsilon_k}{K^l}$, lorsque $j = n + km + l + 1$ où $k \geq 0$ et $0 \leq l \leq m-1$. Nous allons construire $f_{\lambda, j}^{-1}$ et $z_{j+1}(\lambda)$. Puisque $z_j(\lambda) \in \mathbb{D}(f_\lambda^{m-l}(w(\lambda)), \alpha/2)$, on peut poser

$$f_{\lambda, j}^{-1} := f_{f_0^{m-l-1}(w_0), \lambda}^{-1} \text{ et } z_{j+1}(\lambda) := f_{f_0^{m-l-1}(w_0), \lambda}^{-1}(z_j(\lambda)).$$

Le fait que $f_{f_0^{m-l-1}(w_0), \lambda}^{-1}(f_\lambda^{m-l}(w(\lambda))) = f_\lambda^{m-l-1}(w(\lambda))$ combiné à l'assertion 2.2.7 donne :

$$|z_{j+1}(\lambda) - f_\lambda^{m-j-1}(w(\lambda))| \leq \frac{1}{K}|z_j(\lambda) - f_\lambda^{m-l}(w(\lambda))| \leq \frac{\varepsilon_k}{K^{l+1}}$$

Lorsque $0 \leq l \leq m-2$, alors $(j+1) = n + km + l + 2$ et il s'agit de l'estimation recherchée. Lorsque $l = m-1$ alors $j+1 = n + (k+1)m + 1$ et cette estimation s'écrit

$$|z_{j+1}(\lambda) - w(\lambda)| \leq \frac{1}{K}|z_j(\lambda) - f_\lambda(w(\lambda))| \leq \frac{\varepsilon_k}{K^m}.$$

Comme $|w(\lambda) - f_\lambda^m(w(\lambda))| \leq \varepsilon$ on en déduit que

$$|z_{j+1}(\lambda) - f_\lambda^m(w(\lambda))| \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon_k}{K^m} = \varepsilon_{k+1}$$

qui est l'estimation voulue. On a donc montré que $z_j(\lambda)$ est bien défini, qu'il existe $1 \leq l(j) \leq m$ tel que $z_j(\lambda) \in \mathbb{D}(f_\lambda^{l(j)}(w(\lambda)), \eta)$ pour tout $j \geq 1$ et que l'application $f_{\lambda, j}^{-1}$ est bien définie sur $\mathbb{D}(z_j(\lambda), \eta)$. $\square$

2.2.3 Linéarisation le long d'orbites répulsives.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer la Proposition 2.5 :

Démonstration de la Proposition 2.5 : • Rappelons que $w_0 \in E_0$ est fixé et que $w(\lambda) = h_\lambda(w_0)$, où h_λ est le mouvement holomorphe dynamique de E_0 . Soient K , B , $f_{\lambda,j}^{-1}$ et $z_j(\lambda)$ donnés par le Lemme 2.7 pour $z_1(\lambda) = f_\lambda^n(w(\lambda))$. Pour $j \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et $z \in \mathbb{D}(0, \eta)$ on note :

$$g_{j,\lambda}(z) := f_{\lambda,j}^{-1}(z + z_j(\lambda)) - z_{j+1}(\lambda),$$

$$l_{j,\lambda}(z) := (f_{\lambda,j}^{-1})'(z_j(\lambda)).z.$$

A translation près, $g_{j,\lambda}$ est une branche inverse de f_λ . On note alors

$$a_j := \log \inf_{\substack{|z| \leq \eta \\ \|\lambda\| \leq r}} |g'_{j,\lambda}(z)|, \quad a := \inf_{j \geq 1} a_j, \quad b_j := \log \sup_{\substack{|z| \leq \eta \\ \|\lambda\| \leq r}} |g'_{j,\lambda}(z)| \text{ et } b := \sup_{j \geq 1} b_j.$$

En vertu du Lemme 2.7, pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$, tout $j \geq 1$ et tout $z \in \mathbb{D}(0, \eta)$ on a

$$\frac{1}{B}|z| \leq e^a|z| \leq e^{a_j}|z| \leq |g_{j,\lambda}(z)| \leq e^{b_j}|z| \leq e^b|z| \leq \frac{1}{K}|z|. \quad (2.2.9)$$

D'après les inégalités de Cauchy on voit que quitte à réduire r et η , $\sup_j |a_j - b_j|$ est arbitrairement petit. En particulier on peut supposer que $e^{2b_j - a_j} \leq e^{b/2}$ pour tout $j \geq 1$ ce qui assure en passant au $\sup_{j \geq 1}$ que

$$e^{2b-a} \leq e^{b/2}. \quad (2.2.10)$$

• Notons f_λ^{-n} est la branche inverse de f_λ^n vérifiant $f_\lambda^{-n}(f_\lambda^n(w(\lambda))) = w(\lambda)$ obtenue en composant les branches inverses de f_λ données par le Lemme 2.7. En appliquant le Théorème 2.6 on trouve deux injections holomorphes $\tilde{\psi}_{1,\lambda}^{(n)}$ et $\psi_{0,\lambda}^{(n)}$ définies sur $\mathbb{D}(0, \rho)$, à valeurs dans $\mathbb{D}(0, 2\rho)$, dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et telles que

$$\psi_{0,\lambda}^{(n)}(f_\lambda^{-n}(z + f_\lambda^n(w(\lambda))) - w(\lambda)) = (f_\lambda^{-n})'(f_\lambda^n(w(\lambda)))\tilde{\psi}_{1,\lambda}^{(n)}(z) \quad (2.2.11)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$, tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$. De plus, le Théorème 2.6 stipule qu'il existe $C > 0$ telle

$$|\psi_{0,\lambda}^{(n)}(z) - z| \leq C|z|^2 \text{ et } |\tilde{\psi}_{1,\lambda}^{(n)}(z) - z| \leq C|z|^2$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho)$.

Quitte à réduire ρ on peut supposer que $\psi_{1,\lambda}^{(n)} := \tilde{\psi}_{1,\lambda}^{(n)-1}$ est définie et injective sur $\mathbb{D}(0, \rho)$ et que $C\rho < 1$. D'après les inégalités de Cauchy on a alors $|(\psi_{1,\lambda}^{(n)})^{-1})'(z) - 1| \leq C\rho$. Comme $1 - C\rho > 0$ on a $\frac{1}{|(\psi_{1,\lambda}^{(n)})^{-1})'(z)|} \leq \frac{1}{1-C\rho}$ et $|\psi_{1,\lambda}^{(n)}(z)| \leq \frac{1}{1-C\rho}|z|$. Ainsi

$$|\psi_{1,\lambda}^{(n)}(z) - z| \leq C|\psi_{1,\lambda}^{(n)}(z)|^2 \leq \frac{C}{(1-C\rho)^2}|z|^2.$$

Quitte à remplacer C par $\frac{C}{(1-C\rho)^2}$ on a la constante recherchée. Finalement, pour $z \in \mathbb{D}(0, \rho_n(\lambda))$ on a $|\psi_{0,\lambda}^{(n)}(z)| \leq |z| + C|z|^2 \leq \rho_n(\lambda) + C\rho_n(\lambda)^2 \leq 2\rho_n(\lambda)$ et

$$|(f_\lambda^n)'(w(\lambda))\psi_{0,\lambda}^{(n)}(z)| \leq |(f_\lambda^n)'(w(\lambda))|2\rho_n(\lambda) \leq \rho.$$

On peut donc inverser l'assertion 2.2.11 pour conclure la démonstration. □

Chapitre 3

Auto-intersections du courant de bifurcation aux paramètres Misiurewicz.

Dans ce chapitre, nous allons dégager une condition suffisante pour qu'une fraction rationnelle k -Misiurewicz f_0 dans une famille holomorphe $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ appartienne au support de T_{bif}^k . Pour ce faire nous définissons une application holomorphe $\chi : \mathbb{B}(0,r) \rightarrow \mathbb{C}^k$, appelée application d'activité de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ en $\lambda = 0$ qui détecte l'instabilité des points critiques dont l'orbite est captée par un compact hyperbolique invariant. Notre objectif est de montrer que le degré d'auto-intersection du courant de bifurcation en un paramètre Misiurewicz est égal à la codimension de la fibre de l'application d'activité.

3.1 Fractions rationnelles Misiurewicz.

Soit $f \in \text{Rat}_d$. Rappelons que pour $z \in \mathbb{P}^1$ l'ensemble *omega limite* $\omega(z)$ de z est donné par $\omega(z) = \bigcap_{n \geq 0} \overline{\{f^k(z) / k > n\}}$ et qu'un point $z \in \mathbb{P}^1$ est *récurrent* si $z \in \omega(z)$.

Définition 3.1 Une fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_d$ est dite Misiurewicz si f n'a pas de cycle parabolique, $C(f) \cap \mathcal{J}_f \neq \emptyset$ et $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$ pour tout $c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f$. On dit que f est k -Misiurewicz si f est Misiurewicz et si $\mathcal{J}_f$ contient exactement k points critiques de f comptés avec multiplicités.

Commençons par donner quelques propriétés dynamiques des fractions rationnelles Misiurewicz. Les trois Théorèmes suivants dûs à Mañé (voir [ST] Théorèmes 1.1, 1.2 et 1.3 page 266) font partie des principaux outils pour l'étude dynamique des fractions rationnelles Misiurewicz :

Théorème 3.1 (Version locale) Soit f une fraction rationnelle de degré d . Alors il existe $N \geq 1$ ne dépendant que de f pour lequel, si $x \in \mathcal{J}_f$ n'est ni un point parabolique de f , ni contenu dans l'ensemble ω -limite d'un point critique récurrent de f , alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{P}^1$ tel que pour tout entier $n \geq 0$ et toute composante connexe V de $f^{-n}(U)$:

1. $\text{diam}(V) \leq \varepsilon$ et $\deg(f^n : V \rightarrow U) \leq N$,

2. pour tout ε_1 , il existe $n_0 \geq 1$ pour lequel $\text{diam}(V) \leq \varepsilon_1$ dès que $n \geq n_0$.

Théorème 3.2 (Version compact) Soient f une fraction rationnelle de degré d et $K \subset \mathcal{J}_f$ un compact f -invariant ne contenant ni points critiques ni points paraboliques de f . Si K ne rencontre l'ensemble ω -limite d'aucun point critique récurrent de f , alors K est f -hyperbolique.

Théorème 3.3 (Une application) Soit f une fraction rationnelle de degré d . Supposons que $\Gamma \subset \mathbb{P}^1$ est soit un cycle de Cremer, soit le bord d'un disque de Siegel soit une composante connexe du bord d'un anneau de Herman f . Alors il existe un point critique récurrent c de f pour lequel $\Gamma \subset \omega(c)$.

Le fait suivant découle du Théorème 3.3 :

Proposition 3.4 Si f est une fraction rationnelle Misiurewicz, alors f n'a pas de cycles neutres et les composantes périodiques de $\mathcal{F}_f$ sont des bassins d'attraction.

Démonstration : Il suffit de montrer que f n'a ni cycle neutre, ni anneau de Hermann. Par hypothèse, f n'a pas de bassin parabolique. Dans les cas restants, on procède par l'absurde. Si z_0 est un point périodique de Cremer, on note Γ son orbite. Si z_0 est un point périodique linéarisable, on note Γ le bord du disque de Siegel associé. Si f possède un anneau de Hermann, on note Γ une composante connexe de son bord.

Dans tous les cas, le Théorème 3.3 affirme qu'il existe $c \in C(f)$ récurrent tel que $\Gamma \subset \omega(c)$. On voit alors grâce au Théorème de non-errance et à la classification des composantes périodiques de Fatou que $c \in \mathcal{J}_f$, ce qui contredit le fait que f soit Misiurewicz. $\square$

Si f est une fraction rationnelle Misiurewicz, pour tout entier $k \geq 1$, on pose

$$P^k(f) := \overline{\{f^n(c) \mid n \geq k \text{ et } c \in C(f) \cap \mathcal{J}_f\}}.$$

Il s'agit d'un compact f -invariant contenu dans $\mathcal{J}_f$. Puisque $\omega(c) \cap C(f) = \emptyset$ lorsque $c \in \mathcal{J}_f \cap C(f)$, il existe un entier $k_0 \geq 1$, tel que $P^{k_0}(f) \cap C(f) = \emptyset$.

Par construction, $P^{k_0}(f)$ est un compact f -invariant vérifiant $P^{k_0}(f) \cap C(f) = \emptyset$. De plus, f n'a aucun point parabolique. Comme $P^{k_0}(f)$ ne contient aucun point critique récurrent de f , le Théorème 3.2 stipule que $P^{k_0}(f)$ est hyperbolique. Ceci justifie le fait suivant :

Proposition 3.5 Pour toute fraction rationnelle Misiurewicz f il existe un compact f -invariant et hyperbolique captant les orbites des points critiques de f appartenant à $\mathcal{J}_f$.

Rappelons la définition suivante :

Définition 3.2 $f \in \text{Rat}_d$ est dite semi-hyperbolique s'il existe $\delta > 0$ et $d_0 \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $z \in \mathcal{J}_f$ et tout $n \in \mathbb{N}$ le degré de l'application $f^n : U(z, f^n, \delta) \rightarrow \mathbb{D}(f^n(z), \delta)$ est inférieur ou égal à d_0 , où $U(z, f^n, \delta)$ est la composante connexe de $f^{-n}(\mathbb{D}(f^n(z), \delta))$ contenant z .

Le fait suivant est une conséquence du Théorème 3.1 :

Lemme 3.6 *Soit $f \in \text{Rat}_d$ une fraction Misiurewicz, alors f est semi-hyperbolique.*

Démonstration : Par définition, f n'a ni point critique récurrent ni cycle parabolique dans son ensemble de Julia. Alors, d'après le Théorème 3.1, il existe $N \geq 1$ et pour tout $z \in \mathcal{J}_f$, il existe un voisinage U_z de z dans $\mathbb{P}^1$ tels que pour tout $n \geq 0$ et toute composante connexe V de $f^{-n}(U_z)$, $f^n|_V$ est de degré au plus N . Par compacité de $\mathcal{J}_f$ il existe $z_1, \dots, z_M \in \mathcal{J}_f$ tels que $U := U_{z_1} \cup \dots \cup U_{z_M}$ soit un voisinage de $\mathcal{J}_f$ dans $\mathbb{P}^1$.

On choisit alors $0 < \delta \leq \inf_{w \in \mathcal{J}_f} d(w, \partial U)$. Soient $z \in \mathcal{J}_f$ et $n \in \mathbb{N}$ alors il existe $1 \leq i \leq M$ tel que $\mathbb{D}(f^n(z), \delta) \subset U_{z_i}$. L'application $f^n : U(z, f^n, \delta) \rightarrow \mathbb{D}(f^n(z), \delta)$ est donc de degré au plus N . $\square$

Un résultat classique permet d'obtenir (voir par exemple [BM] Théorème VI.32) :

Lemme 3.7 *Soit $f \in \text{Rat}_d$ une fraction Misiurewicz, alors $\mathcal{J}_f = \mathbb{P}^1$ si $\mathcal{J}_f$ n'est pas de mesure de Lebesgue nulle.*

Rappelons que si $f \in \text{Rat}_d$, un point $z_0 \in \mathcal{J}_f$ est appelé *point conique* de l'application f s'il existe des suites $(\rho_j)_{j \geq 0} \searrow 0$ et $(n_j)_{j \geq 0} \rightarrow \infty$ ainsi qu'une application holomorphe non-constante Ψ , telles que

$$(f^{n_j}(\rho_j z + z_0))_{j \geq 0} \rightarrow \Psi(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

uniformément sur le disque $\mathbb{D}$. L'ensemble de ces points est appelé *ensemble conique* de f et noté Λ_f . Si $f \in \text{Rat}_d$ est semi-hyperbolique alors $\Lambda_f = \mathcal{J}_f$ (voir [BM] page 109). En particulier si f est $(2d-2)$ -Misiurewicz on a $\Lambda_f = \mathbb{P}^1$.

3.2 L'application d'activité.

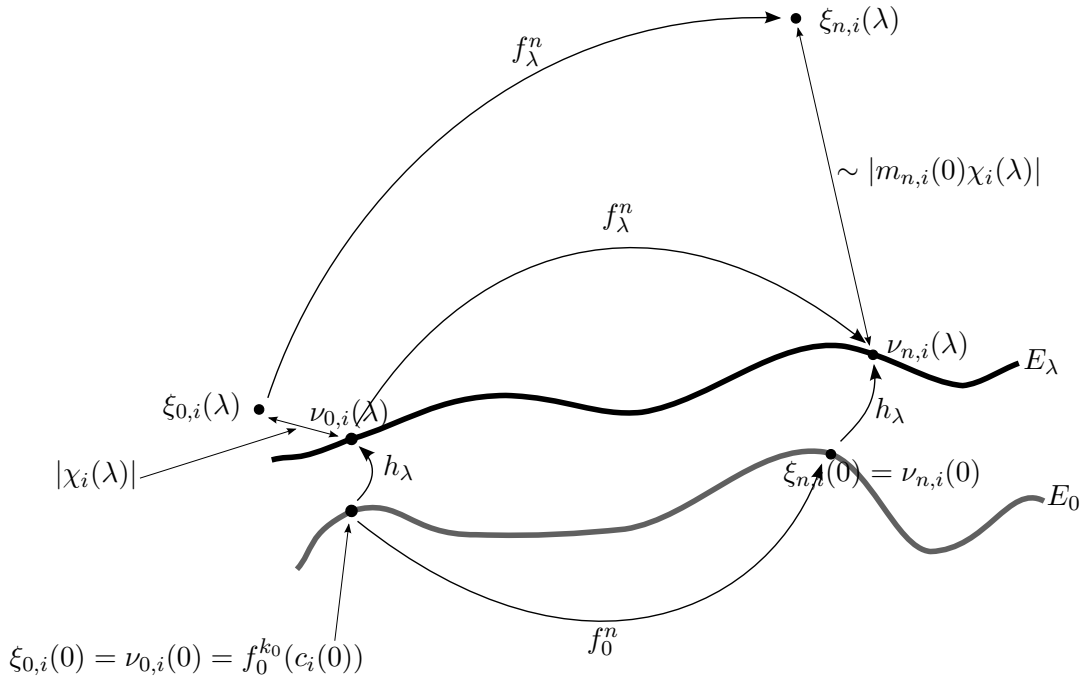
Commençons par préciser le cadre et fixer les notations qui seront utilisées dans toute cette section. Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r)$ de dimension m munie de $2d-2$ points critiques $c_1, \dots, c_{2d-2}$ marqués. On suppose que f_0 est k -Misiurewicz ($k \leq m$) et que $c_1(0), \dots, c_k(0) \in \mathcal{J}_0$. Alors, f_0 étant k -Misiurewicz, la Proposition 3.4 assure que les points $c_{k+1}(0), \dots, c_{2d-2}(0)$ sont dans des bassins d'attraction de f_0 , et par conséquent sont passifs sur $\mathbb{B}(0, r)$.

Rappelons qu'il existe $k_0 \geq 1$ pour lequel

$$E_0 := P^{k_0}(f_0) = \overline{\{f_0^n(c_i(0)) \mid n \geq k_0 \text{ et } 1 \leq i \leq k\}}$$

est un ensemble hyperbolique de constante d'hyperbolicité $K > 1$ et qu'il existe un mouvement holomorphe dynamique h_λ de $P^{k_0}(f_0)$ paramétré par $\mathbb{B}(0, r)$ (voir Théorème 2.1). Pour $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$, $n \geq 0$ et $1 \leq i \leq k$ on note

$$\chi_i(\lambda) := \xi_{0,i}(\lambda) - \nu_{0,i}(\lambda).$$



Nous allons commencer par caractériser de l'activité d'un point critique.

2. $\xi_{0,i} \neq \nu_{0,i}$ sur $\mathbb{B}(0, r)$ si et seulement si c_i est actif en tout $\lambda_0 \in \chi_i^{-1}\{0\}$.

Démonstration : • Commençons par prouver 1. Pour tout $\lambda \in \chi_i^{-1}\{0\}$, on a $\xi_{0,i}(\lambda) = h_\lambda(\xi_{0,i}(0)) \in E_\lambda := h_\lambda(E_0)$. Par ailleurs, h_λ conjugue f_0 à f_λ sur E_0 et donc pour tout $\lambda \in \chi_i^{-1}\{0\}$ et tout $n \geq 0$,

$$\xi_{n,i}(\lambda) = f_\lambda^n(\xi_{0,i}(\lambda)) = f_\lambda^n \circ h_\lambda(\xi_{0,i}(0)) = h_\lambda(\xi_{n,i}(0)).$$

L'équicontinuité de $(\xi_{n,i})_{n \geq 1}$ résulte alors de la continuité uniforme de h sur $\mathbb{B}(0, r) \times E_0$. Ceci conclut la preuve de (1).

• D'après 1, on sait déjà que $\chi_i \neq 0$ lorsque c_i est actif en $\lambda_0 \in \chi_i^{-1}\{0\}$. Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que $\xi_{0,i} \neq \nu_{0,i}$ sur $\mathbb{B}(0, r)$ et que c_i est passif en $\lambda_0 \in \chi_i^{-1}\{0\}$. Commençons par remarquer qu'il suffit de raisonner pour $\lambda_0 = 0$. En effet, par le Théorème 2.1, il existe $\rho \leq r - \|\lambda_0\|$ et un unique mouvement holomorphe $g : \mathbb{B}(\lambda_0, \rho) \times E_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui vérifie $g_\lambda \circ f_{\lambda_0} = f_\lambda \circ g_\lambda$ sur E_{λ_0} et $h_\lambda = g_\lambda \circ h_{\lambda_0}$ sur E_0 . Il vient alors $\chi_i(\lambda) = \xi_{0,i}(\lambda) - g_\lambda(\xi_{0,i}(\lambda_0))$ pour $\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, \rho)$. On peut alors considérer $\chi_i|_{\mathbb{B}(\lambda_0, \rho)}$.

• Soient $\mathcal{N}_\delta$ un δ -voisinage de E_0 dans $\mathbb{P}^1$ et $K > 1$ la constante d'hyperbolicité de E_0 . Quitte à réduire r , δ et K , on peut supposer que

$$|f'_\lambda(z)| \geq K > 1 \text{ pour } z \in \mathcal{N}_\delta \text{ et } \lambda \in \mathbb{B}(0, r). \quad (3.2.1)$$

Quitte à diminuer r , par continuité de h , on peut supposer que $E_\lambda \subset \mathcal{N}_\delta$, pour $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$. Compte tenu de notre hypothèse de passivité, la famille $(\xi_{n,i})_{n \geq 0}$ est équicontinue en 0 et on peut encore diminuer r pour que

$$\xi_{n,i}(\lambda) \in \mathbb{D}(\xi_{n,i}(0), \delta) \subset \mathcal{N}_\delta, \text{ pour } \lambda \in \mathbb{B}(0, r) \text{ et pour } n \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Pour $n \geq 0$ on pose

$$\epsilon_{n,i}(\lambda) := \xi_{n,i}(\lambda) - \nu_{n,i}(\lambda), \text{ pour } \lambda \in \mathbb{B}(0, r).$$

Notons que $\epsilon_{0,i} \equiv \chi_i$ sur $\mathbb{B}(0, r)$. Par hypothèse $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 0}$ est équicontinue en 0. Par ailleurs pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et tout $n \geq 0$ on a

$$\epsilon_{n+1,i}(\lambda) = \xi_{n+1,i}(\lambda) - h_\lambda(\xi_{n+1,i}(0)) = f_\lambda(\xi_{n,i}(\lambda)) - f_\lambda(h_\lambda(\xi_{n,i}(0))) = f_\lambda \circ \xi_{n,i}(\lambda) - f_\lambda \circ \nu_{n,i}(\lambda),$$

ce qui donne en différentiant par rapport à λ :

$$D_\lambda \epsilon_{n+1,i} = f'_\lambda \circ \xi_{n,i} D_\lambda \epsilon_{n,i} - (f'_\lambda \circ \nu_{n,i} - f'_\lambda \circ \xi_{n,i}) D_\lambda \nu_{n,i} + D_\lambda f_\lambda \circ \xi_{n,i} - D_\lambda f_\lambda \circ \nu_{n,i}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ petit. Puisque $\xi_{n,i}$ et $\nu_{n,i}$ sont équitcontinues, quitte à réduire r , les estimées 3.2.1 et 3.2.2 donnent

$$\|D_\lambda \epsilon_{n+1,i}\| \geq K \|D_\lambda \epsilon_{n,i}\| - \varepsilon.$$

En itérant cette inégalité, on obtient $\|D_\lambda \epsilon_{n,i}\| \geq K^n (\|D_\lambda \chi_i\| - \varepsilon(1 - K^{-n})/(K - 1))$. Ceci contredit l'équicontinuité de $(\epsilon_{n,i})_{n \geq 0}$, puisque $\chi_i \neq 0$. $\square$

Définition 3.3 L'application d'activité χ de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ associée à h en $\lambda = 0$ est définie par :

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{B}(0, r) &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ \lambda &\longmapsto (\chi_1(\lambda), \dots, \chi_k(\lambda)) \end{aligned}$$

où les fonctions χ_i sont données par $\chi_i(\lambda) := \xi_{0,i}(\lambda) - \nu_{0,i}(\lambda)$. On pourra appeler χ une application d'activité, lorsque le choix de h n'a pas d'importance.

Notre objectif est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.9 Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie de $2d - 2$ points critiques marqués et paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r) \subset \mathbb{C}^m$. Supposons que f_0 est k -Misiurewicz ($k \leq m$) et considérons χ une application d'activité de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ en $\lambda = 0$. Si $\chi^{-1}\{0\}$ est de codimension pure $1 \leq q \leq k$, alors $f_0 \in \text{supp}(T_{\text{bif}}^q)$.

Nous allons utiliser les notations introduites dans la section précédente. Pour $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ on note F_λ un relevé polynômial homogène non-dégénéré de f_λ à $\mathbb{C}^2$ par la projection canonique $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1$. Quitte à réduire r on peut supposer que les points critiques marqués $c_i(\lambda)$ admettent des relevés holomorphes $\tilde{c}_i(\lambda)$ par π et que F_λ dépend holomorphiquement de λ .

Fixons $1 \leq q \leq k$. Quitte à réordonner $c_1, \dots, c_k$ on peut supposer que $\chi^{-1}\{0\} = \chi_1^{-1}\{0\} \cap \dots \cap \chi_q^{-1}\{0\}$ et quitte à remplacer $\mathbb{C}^m$ par un sous-espace transverse à $\chi^{-1}\{0\}$ on peut se ramener au cas où $m = q$ et $\chi^{-1}\{0\}$ discret. C'est ce que montre le Lemme suivant :

Lemme 3.10 $\text{supp}(dd^c(L|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)})^q) \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}^q)$.

Démonstration : Par un argument de tranchage, on a $T_{\text{bif}}^q|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)} = dd^c(L|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)})^q$. De plus, si $f_0 \in \text{supp}(dd^c(L|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)})^q)$, alors $dd^c(L|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)})^q$ est une mesure non-nulle sur tout voisinage V de 0 dans $\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0, r)$. Par continuité de L et par continuité de l'opérateur de Monge-Ampère par rapport à la convergence uniforme locale, la mesure $dd^c(L(\cdot + a)|_{\mathbb{C}^q \cap \mathbb{B}(0,r)})^q$ est également une mesure non-nulle sur $\{\lambda \in V / \lambda + a \in \mathbb{B}(0, r)\}$ pour tout $a \in \mathbb{C}^{m-q} \cap \mathbb{B}(0, r)$. Finalement, encore par un argument de tranchage, si T_{bif}^q était nul au voisinage de 0, presque tous ses tranches seraient nuls aussi. $\square$

On notera alors $\mathbb{B}_r$ pour $\mathbb{B}(0, r)$ et χ pour l'application d'activité

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{B}_r &\longrightarrow \mathbb{C}^q \\ \lambda &\longmapsto (\chi_1(\lambda), \dots, \chi_q(\lambda)). \end{aligned}$$

Quitte à réduire r on peut supposer que $\chi^{-1}\{0\} = \{0\}$.

3.3 Préliminaires et esquisse la démonstration du Théorème 3.9.

Définition 3.4 Pour $\epsilon > 0$ on note $\mathbb{D}_\epsilon^q := \mathbb{D}(0, \epsilon) \times \dots \times \mathbb{D}(0, \epsilon)$ un polydisque de $\mathbb{C}^q$ centré en 0. Rappelons que $m_{n,i}(0) = (f_0^n)'(\nu_{0,i}(0)) = (f_0^n)'(f_0^{k_0}(c_i(0)))$ et que $|m_{n+1,i}(0)| \geq K|m_{n,i}(0)|$, où $K > 1$. On définit une suite de dilatations D_n par : $D_0 := \text{id}_{\mathbb{C}^q}$ et

$$\begin{aligned} D_n : \mathbb{C}^q &\longrightarrow \mathbb{C}^q \\ (x_1, \dots, x_q) &\longmapsto (m_{n,1}(0).x_1, \dots, m_{n,q}(0).x_q). \end{aligned}$$

Etablissons quelques propriétés de χ :

Proposition 3.11 Pour tout $n \geq 0$, soient $E_n := D_n^{-1}(\mathbb{D}_\epsilon^q)$ et Ω_n la composante connexe de $\chi^{-1}(E_n)$ contenant 0. Alors, quitte à diminuer r et ϵ :

1. $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ pour $n \geq 0$, $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ est une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_r$ et $\Omega_0 \in \mathbb{B}_r$.
2. $\chi : \Omega_n \rightarrow E_n$ est un revêtement ramifié fini de degré constant p pour tout $n \geq 0$.
3. Il existe $C_1 > 0$ telle que $\|\lambda\| \leq C_1 \|\chi(\lambda)\|^{1/p}$ pour $\lambda \in \Omega_0$.
4. Il existe $C_2 > 0$ et $K > 1$ telles que $\Omega_n \subset \mathbb{B}(0, C_2(\frac{\epsilon}{K^n})^{1/p})$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration : 1. Par hypothèse, $\chi^{-1}\{0\} = \{0\}$ pour r assez petit. Comme χ est continue, Ω_n est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{B}_r$ et $E_{n+1} = D_{n+1}^{-1}(\mathbb{D}_\epsilon^q) \subset D_n^{-1}(\mathbb{D}_\epsilon^q) = E_n$ donc $\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$. Puisque $\{0\} \subset \bigcap_{n \geq 0} \Omega_n \subset \chi^{-1}\left(\bigcap_{n \geq 0} E_n\right) = \chi^{-1}\{0\} = \{0\}$, on voit que $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ est une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_r$. Quitte à réduire ϵ on peut aussi supposer que $\Omega_0 \in \mathbb{B}_r$.

2. Si ϵ est assez petit, alors Ω_0 est relativement compacte dans $\mathbb{B}_r$ car sinon la condition $\chi^{-1}\{0\} = \{0\}$ serait violée. Par continuité, $\chi(\partial\Omega_n) \subset \partial E_n$ et $\chi : \Omega_n \rightarrow E_n$ est propre. Par holomorphicité cette application est alors un revêtement ramifié fini (voir [Ru] Théorème 15.1.9, page 303). Puisque $\chi^{-1}\{0\} = \{0\}$, le degré de $\chi : \Omega_n \rightarrow E_n$ est égal à la multiplicité p de χ en 0.

3. Pour $w \in \mathbb{D}_\epsilon^q = E_0$ on note $w^{(1)}, \dots, w^{(p)}$ les p préimages de w par χ comptées avec multiplicités et $w_j^{(i)}$ la j -ième coordonnée de $w^{(i)}$. Pour $t \in \mathbb{C}$ et $w \in \mathbb{D}_\epsilon^q$ on pose

$$P_j(t, w) := \prod_{i=0}^{p-1} (t - w_j^{(i)}) = t^p + g_{p-1,j}(w)t^{p-1} + \dots + g_{1,j}(w)t + g_{0,j}(w).$$

Par construction $g_{i,j}(w)$ est un polynôme homogène symétrique de degré $p-i$ en les $w_j^{(1)}, \dots, w_j^{(p)}$ et donc une fonction holomorphe; P_j est un polynôme de Weierstrass défini sur $\mathbb{C} \times \mathbb{D}_\epsilon^q$. Puisque $\chi^{-1}\{0\} = \{0\}$ les fonctions $g_{i,j}$ sont toutes nulles en 0. Pour $\lambda \in \Omega_0$ si λ_j représente la j -ième coordonnée de λ on a $|\lambda_j| \leq r$ et

$$0 = P_j(\lambda_j, \chi(\lambda)) = \lambda_j^p + g_{p-1,j}(\chi(\lambda))\lambda_j^{p-1} + \dots + g_{1,j}(\chi(\lambda))\lambda_j + g_{0,j}(\chi(\lambda)).$$

On peut supposer $r \leq 1$ et donc

$$|\lambda_j|^p \leq \sum_{i=0}^{p-1} |g_{i,j}(\chi(\lambda))| \text{ pour tout } \lambda \in \Omega_0.$$

Comme $g_{i,j}$ est holomorphe et $g_{i,j}(0) = 0$ il existe une constante $C_{i,j} > 0$ telle que $|g_{i,j}(w)| \leq C_{i,j}\|w\|$ pour tout $w \in \mathbb{D}_\epsilon^q$. Ainsi il existe $C_1 > 0$ telle que

$$|\lambda_j| \leq C_1 \|\chi(\lambda)\|^{1/p} \text{ pour tout } \lambda \in \Omega_0 \text{ et tout } 1 \leq j \leq q.$$

4. D'après ce que l'on vient de voir il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\|\lambda\| \leq C_2 \max_{1 \leq j \leq q} |\chi_j(\lambda)|^{1/p} \text{ pour tout } \lambda \in \Omega_0. \quad (3.3.3)$$

Comme $|m_{n,j}(0)| \geq K^n$ on déduit de 3.3.3 que $\|\lambda\| \leq C_2 \left(\frac{\epsilon}{K^n}\right)^{1/p}$ pour $\lambda \in \Omega_n$. □

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie de $2d - 2$ points critiques marqués. Le Théorème suivant nous permet d'affirmer que pour que $\lambda_0 \in X$ soit dans le support de T_{bif}^k , il est nécessaire que k points critiques soient actifs en λ_0 :

Théorème 3.12 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe munie de $2d-2$ points critiques marqués. Supposons qu'il existe une famille holomorphe $(F_\lambda)_{\lambda \in X}$ de relevés polynomiaux de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ et que les $2d-2$ points critiques marqués admettent des relevés holomorphes $\tilde{c}_j : X \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ pour lesquels $\det D_z F_\lambda = \prod_{j=1}^{2d-2} \tilde{c}_j(\lambda) \wedge z$. Alors*

$$dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) \wedge dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) \equiv 0.$$

En particulier,

$$T_{\text{bif}}^k = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} dd^c G_\lambda(\tilde{c}_{i_1}(\lambda)) \wedge \dots \wedge dd^c G_\lambda(\tilde{c}_{i_k}(\lambda)).$$

Démonstration : Si le point critique c_j est stable sur X ou si $\dim X \leq 1$, il n'y a rien à faire. On supposera donc que $\dim X = k \geq 2$ et que $dd^c G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda)) \neq 0$ sur X . Notons $g(\lambda) := G_\lambda(\tilde{c}_j(\lambda))$ et considérons $\lambda_0 \in \text{supp}(dd^c g)$. Comme il s'agit d'une propriété locale, on peut supposer que $X = \mathbb{C}^m$. Soit $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$ une boule de $\mathbb{C}^m$ centrée en λ_0 .

Soient V un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$ et $\mu_V := (dd^c(g|_V))^2$. Par un argument de tranchage, μ_V est la tranche de $(dd^c g)^2$ par V et il suffit de montrer que μ_V est nulle sur $\frac{1}{2}\mathbb{B}$ pour toute boule $\mathbb{B} \Subset V$, pour tout sous-espace affine V de dimension 2 de $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$, pour avoir $(dd^c g)^2 = 0$ sur $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$.

Soit h la solution au problème de Dirichlet-Monge-Ampère sur $\mathbb{B}$ avec donnée $g|_V$ au bord. La fonction h est continue sur $\overline{\mathbb{B}}$, coïncide avec $g|_V$ sur $\partial\mathbb{B}$ et est *p.s.h* maximale sur $\mathbb{B}$ (voir [BT]). Par maximalité de h on a $g|_V \leq h$ sur $\overline{\mathbb{B}}$. On note pour $\varepsilon > 0$

$$\mathcal{S}_\varepsilon := \{\lambda \in \frac{1}{2}\mathbb{B} / 0 \leq h(\lambda) - g|_V(\lambda) \leq \varepsilon\}.$$

Un Théorème de Briend-Duval (voir [Sib] Théorème A.10.2) stipule que $\mu_V(\mathcal{S}_\varepsilon) \leq C\varepsilon$, où la constante C ne dépend que de $g|_V$ et de $\mathbb{B}$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $\text{supp}(\mu_V) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B} \subset \mathcal{S}_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Posons $\text{Per}(n) := \{\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, r) / f_\lambda^n(c_j(\lambda)) = c_j(\lambda)\}$ pour $n \geq 1$. Puisque le lieu d'activité de c_j rencontre $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$, les ensembles analytiques $\text{Per}(n)$ sont tous des courbes de $\mathbb{B}(\lambda_0, r)$ et dans $\text{Per}(n)$ on a

$$\partial(\text{Per}(n) \cap \mathbb{B}) = \text{Per}(n) \cap \partial\mathbb{B}.$$

Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$ la fonction $g|_V$ est harmonique sur la courbe $\text{Per}(n) \cap \mathbb{B}$. Ainsi $h - g|_V$ est une fonction sous-harmonique sur $\text{Per}(n) \cap \mathbb{B}$. De plus, par définition de h , la fonction $h - g|_V$ est nulle sur $\text{Per}(n) \cap \partial\mathbb{B}$. Par le principe du maximum on a donc $h \leq g|_V$ sur $\text{Per}(n) \cap \mathbb{B}$. Comme h est *p.s.h* maximale sur $\mathbb{B}$, on trouve $h - g|_V \equiv 0$ sur $\text{Per}(n) \cap \mathbb{B}$.

D'après le Lemme 1.2, on a $\text{supp}(dd^c(g|_V)) \subset \overline{\bigcup_{n \geq 1} \text{Per}(n)}$. Puisque la fonction $h - g|_V$ est continue, ceci donne $h - g|_V \equiv 0$ sur $\text{supp}(dd^c(g|_V)) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B}$. Finalement, par définition de μ_V on a

$\text{supp}(\mu_V) \subset \text{supp}(dd^c(g|_V))$. D'après ce qui précède, on a donc $h - g|_V \equiv 0$ sur $\text{supp}(\mu_V) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B}$, ce qui assure que $\text{supp}(\mu_V) \cap \frac{1}{2}\mathbb{B} \subset \Sigma_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. $\square$

Nous allons maintenant décrire le principe de la démonstration du Théorème 3.9 en nous plaçant dans le cas particulier où $q = 2$ et $\chi : \mathbb{B}_r \rightarrow \mathbb{C}^2$ est un biholomorphisme local en 0. Nous adaptons la démarche suivie par X. Buff et A. Epstein pour démontrer le Théorème Principal de [BE].

• **Première étape : changement de coordonnées locales.** On note $\mu^{(2)} := T_{\text{bif}} \wedge T_{\text{bif}}$. Le Théorème 3.12 donne :

$$\mu^{(2)}(\Omega_n) = 2 \int_{\Omega_n} dd^c G_\lambda(\tilde{c}_1(\lambda)) \wedge dd^c G_\lambda(\tilde{c}_2(\lambda))$$

pour tout $n \geq 0$. Par construction il existe un relevé $\tilde{\xi}_{n,i}$ de $\xi_{n,i}$ à $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ par π sur Ω_n . La propriété de fonctorialité $G_\lambda \circ F_\lambda = dG_\lambda$ et celle d'homogénéité $G_\lambda(tz) = \log|t| + G_\lambda(z)$ de G_λ assurent que

$$\mu^{(2)}(\Omega_n) = 2d^{-2(n+k_0)} \int_{\Omega_n} dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,1}(\lambda)) \wedge dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,2}(\lambda)).$$

Comme χ est inversible, il vient

$$dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,1}(\lambda)) \wedge dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,2}(\lambda)) = \chi^* \left(dd^c G_{\chi^{-1}(x)}(\tilde{\xi}_{n,1} \circ \chi_1^{-1}(x)) \wedge dd^c G_{\chi^{-1}(x)}(\tilde{\xi}_{n,2} \circ \chi_2^{-1}(x)) \right)$$

d'où , comme $\chi(\Omega_n) = E_n$,

$$\mu^{(2)}(\Omega_n) = 2d^{-2(n+k_0)} \int_{E_n} dd^c G_{\chi^{-1}(x)}(\tilde{\xi}_{n,1} \circ \chi_1^{-1}(x)) \wedge dd^c G_{\chi^{-1}(x)}(\tilde{\xi}_{n,2} \circ \chi_2^{-1}(x)).$$

On pose

$$G_{n,i}(x) = G_{(D_n \circ \chi)^{-1}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ (D_n \circ \chi)_i^{-1}(x)).$$

Puisque $D_n : E_n \rightarrow \mathbb{D}_\epsilon^2$ est un biholomorphisme, il vient

$$\begin{aligned} \mu^{(2)}(\Omega_n) &= 2d^{-2(n+k_0)} \int_{E_n} D_n^* \left(dd^c G_{n,1}(n) \wedge dd^c G_{n,2}(x) \right) \\ &= 2d^{-2(n+k_0)} \int_{\mathbb{D}_\epsilon^2} dd^c G_{n,1}(x) \wedge dd^c G_{n,2}(x). \end{aligned}$$

• **Deuxième étape : renormalisation.** Grâce au procédé de linéarisation (voir Proposition 2.5)) on montre qu'il existe deux fonctions holomorphes non-constantes $p_1, p_2 : \mathbb{D}(0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{P}^1$ avec $p_i(0) \in \mathcal{J}_0$ telles que la suite $(G_{n,i}(x))_{n \geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbb{D}_\epsilon^2$ vers $G_i = G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i))$, où σ_i est une section locale de $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^1$ définie au voisinage de $p_i(0)$.

• **Troisième étape : transfert au plan dynamique.** On déduit des deux points précédents que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{2(n+k_0)} \mu^{(2)}(\Omega_n) = 2 \int_{\mathbb{D}_\epsilon^2} dd^c G_0 \circ \sigma_1(p_1(x_1)) \wedge dd^c G_0 \circ \sigma_2(p_2(x_2)).$$

Par Fubini il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d^{2(n+k_0)} \mu^{(2)}(\Omega_n) = 2 \prod_{i=1}^2 \int_{\mathbb{D}(0, \epsilon)} dd^c G_0 \circ \sigma_1(p_i(x_i)) = 2 \prod_{i=1}^2 \mu_{f_0}(p_i(\mathbb{D}(0, \epsilon))).$$

Comme $p_i(0) \in \mathcal{J}_0$ on a $\mu_{f_0}(p_i(\mathbb{D}(0, \epsilon))) > 0$ et le fait que $(\Omega_n)_{n \geq 0}$ soit une base de voisinages de 0 dans $\mathbb{B}_r$ permet de conclure.

Nous allons maintenant développer les idées données dans la section précédente. Il y a deux difficultés techniques à surmonter. La première est due au fait que χ est ramifiée. La seconde réside dans la mise au point d'un procédé de renormalisation au moyen de la linéarisation (voir Proposition 2.5). Les Lemmes 3.13 et 3.14 donnent quelques informations utiles pour aborder ces difficultés.

Rappelons que les fonctions $\nu_{n,i}(\lambda)$, $\xi_{n,i}(\lambda)$ et $m_{n,i}(\lambda)$ ont été définies au début de la section 3. Le procédé de linéarisation (voir Proposition 2.5) nous donne l'existence de fonctions continues $\rho_{n,i} : \mathbb{B}_r \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et de biholomorphismes locaux $\psi_{0,\lambda}^{(n,i)}, \psi_{1,\lambda}^{(n,i)}$ définis respectivement sur $\mathbb{D}(0, \rho_{n,i}(\lambda))$ et $\mathbb{D}(0, \rho)$, dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}_r$ et tels que

$$f_\lambda^n(z + \nu_{0,i}(\lambda)) = \psi_{1,\lambda}^{(n,i)}(m_{n,i}(\lambda) \cdot \psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(z)) + \nu_{n,i}(\lambda) \quad (3.3.4)$$

pour tout $z \in \mathbb{D}(0, \rho_{n,i}(\lambda))$. Le Lemme suivant précise comment nous utiliserons 3.3.4 pour établir le procédé de renormalisation :

Lemme 3.13 1. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$(a) \quad \rho_{n,i}(\lambda) \geq \frac{\epsilon}{|m_{n,i}(0)|},$$

$$(b) \quad |m_{n,i}(\lambda) \psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(\chi_i(\lambda))| \leq \rho \text{ et}$$

$$(c) \quad f_\lambda^{n+k_0}(c_i(\lambda)) = \xi_{n,i}(\lambda) = \psi_{1,\lambda}^{(n,i)}(m_{n,i}(\lambda) \cdot \psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(\chi_i(\lambda))) + \nu_{n,i}(\lambda)$$

pour tout $1 \leq i \leq q$, tout $n \geq n_0$ et tout $\lambda \in \Omega_n$.

2. modulo extraction, la suite $(\nu_{n,i}(0))_{n \geq 0}$ converge vers $z_i \in \mathcal{J}_0$ pour tout $1 \leq i \leq q$. Il existe des sections $\sigma_i : \mathbb{D}(z_i, \tilde{\alpha}) \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de π , telles que les applications

$$\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda) := \sigma_i \circ \xi_{n,i}(\lambda)$$

soient bien définies sur Ω_n pour tout $n \geq n_0$ et telles que $\sigma_i(\mathbb{D}(z_i, \tilde{\alpha})) \Subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$.

Démonstration : • D'après le Lemme de distorsion 2.4 et le 4. de la Proposition 3.11 il existe $C > 0$, $K > 1$, $p \geq 1$ et $l \geq 1$ tels que

$$\left| \frac{m_{n,i}(\lambda)}{m_{n,i}(0)} - 1 \right| \leq C \frac{n}{K^{nl/p}},$$

pour tout $\lambda \in \Omega_n$. Il existe donc $n_1 \geq 1$ tel que $\left| 1 - \frac{m_{n,i}(\lambda)}{m_{n,i}(0)} \right| \leq \left| 1 - \frac{m_{n,i}(\lambda)}{m_{n,i}(0)} \right| \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq n_1$ et tout $\lambda \in \Omega_n$. Ainsi

$$\rho_{n,i}(\lambda) = \frac{\rho}{2|m_{n,i}(\lambda)|} \geq \frac{\rho}{3|m_{n,i}(0)|}$$

pour tout $n \geq n_1$ et tout $\lambda \in \Omega_n$. Quitte à réduire ϵ on a $\epsilon \leq \rho/3$, d'où (a).

Si $\lambda \in \Omega_n$, on a maintenant $|\chi_i(\lambda)| \leq \frac{\epsilon}{|m_{n,i}(0)|} \leq \rho_{n,i}(\lambda)$ et la Proposition 2.5 stipule qu'il existe $C > 0$ telle que $C\rho_{n,i}(\lambda) \leq C\rho \leq 1$ et

$$|\psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(\chi_i(\lambda)) - \chi_i(\lambda)| \leq C|\chi_i(\lambda)|^2.$$

Alors $|\psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(\chi_i(\lambda))| \leq 2\rho_{n,i}(\lambda) = \rho|m_{n,i}(\lambda)|^{-1}$ et le (b) est démontré.

Puisque

$$f_\lambda^{n+k_0}(c_i(\lambda)) = f_\lambda^n(\xi_{0,i}(\lambda)) = f_\lambda^n(\chi_i(\lambda) + \nu_{0,i}(\lambda)),$$

l'assertion 3.3.4 devient

$$\xi_{n,i}(\lambda) = f_\lambda^{n+k_0}(c_i(\lambda)) = \psi_{1,\lambda}^{(n,i)}(m_{n,i}(\lambda) \cdot \psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(\chi_i(\lambda))) + \nu_{n,i}(\lambda),$$

c'est le (c).

• La suite $(\nu_{n,i}(0))_{n \geq 0}$ est relativement compacte donc, quitte à extraire, elle converge vers $z_i \in \mathcal{J}_0$. Comme $\nu_{n,i}(\lambda) = h_\lambda(\nu_{n,i}(0))$, la suite $(\nu_{n,i})_{n \geq 0}$ est équicontinue sur $\mathbb{B}_r$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$ il existe $n_2 \geq 1$ et $\eta > 0$ tels que $|\nu_{n,i}(\lambda) - z_i| \leq \epsilon$ pour tout $n \geq n_2$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \eta)$. Le 1. de la Proposition 3.11 assure qu'il existe $n_3 \geq n_2$ tel que $\Omega_n \subset \mathbb{B}(0, \eta)$ pour tout $n \geq n_3$. Si $n \geq n_1$, les (b) et (c) de 1. donnent $\xi_{n,i}(\lambda) \in \mathbb{D}(\nu_{n,i}(\lambda), \rho)$ pour tout $\lambda \in \Omega_n$. Posons $\tilde{\alpha} := \rho + \epsilon$. Si ϵ et ρ sont assez petits, il existe des sections $\sigma_i : \mathbb{D}(z_i, 2\tilde{\alpha}) \longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de π et $|\xi_{n,i}(\lambda) - z_i| < \tilde{\alpha}$ pour tout $n \geq \max(n_1, n_3)$. On trouve donc bien $\sigma_i(\mathbb{D}(z_i, \tilde{\alpha})) \subseteq \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. $\square$

L'application $\chi : \Omega_0 \longrightarrow \mathbb{D}_\epsilon^q$ étant un revêtement ramifié fini, il existe un ensemble analytique $\mathcal{R} \subset \mathbb{D}_\epsilon^q$ de codimension 1 tel que $\chi : \Omega_0 \setminus \chi^{-1}(\mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{D}_\epsilon^q \setminus \mathcal{R}$ est un revêtement fini. Posons $A_n := D_n(E_n \cap \mathcal{R})$ pour tout $n \geq 1$.

Rappelons qu'une suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ d'ensembles analytiques p -dimensionnels d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}^q$ est dite *converger* vers l'ensemble $Z \subset U$ si :

1. Z est l'ensemble limite de la suite $(Z_n)_{n \geq 0}$, c'est-à-dire l'ensemble des $\lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}$ avec $x_{n_j} \in Z_{n_j}$ et $(n_j)_j$ strictement croissante.
2. Pour tout compact K de Z et tout $\epsilon > 0$ il existe $N(\epsilon, K) \geq 1$ tel que K est contenu dans un ϵ -voisinage de Z_n pour tout $n \geq N(\epsilon, K)$.

On a le Lemme suivant :

Lemme 3.14 *Quitte à extraire, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'ensembles analytiques de codimension 1 converge vers un ensemble analytique A_∞ de codimension 1.*

Démonstration : Ecrivons $\mathcal{R} = \{\lambda \in \mathbb{D}_\epsilon^q / F(\lambda) = 0\}$ et choisissons un q -uplet $\alpha_{(1)}$ tel que le coefficient de $\lambda^{\alpha_{(1)}}$ dans le développement en série entière de F est non-nul. Alors on peut écrire

$$F(\lambda) = a_{\alpha_{(1)}} \lambda^{\alpha_{(1)}} + \cdots + a_{\alpha_{(N)}} \lambda^{\alpha_{(N)}} + \sum_{\alpha_j > \alpha_{(1),j}} a_\alpha \lambda^\alpha.$$

Pour un q -uplet α , on note $m_n^\alpha := m_{n,1}(0)^{\alpha_1} \dots m_{n,q}(0)^{\alpha_q}$. Soit $1 \leq s \leq N$ tel que $|m_n^{\alpha(s)}| = \inf_{1 \leq j \leq N} |m_n^{\alpha(j)}|$. On a alors clairement $A_n = \{\lambda \in \mathbb{D}_\epsilon^q / m_n^{\alpha(s)} \cdot F \circ D_n^{-1}(\lambda) = 0\}$ pour $n \geq 1$ et le développement en série de $m_n^{\alpha(s)} F \circ D_n^{-1}$ peut être écrit

$$m_n^{\alpha(s)} F \circ D_n^{-1}(\lambda) = \sum_{j=1}^N a_{\alpha(j)} \frac{m_n^{\alpha(s)}}{m_n^{\alpha(j)}} \lambda^{\alpha(j)} + \sum_{\alpha_j > \alpha(1), j} a_\alpha \frac{m_n^{\alpha(s)}}{m_n^\alpha} \lambda^\alpha.$$

D'après le choix de s , la première somme converge localement uniformément (à extraction près) vers une fonction F_∞ polynômiale sur $\mathbb{D}_\epsilon^q$. Encore d'après le choix de s , la deuxième somme converge clairement uniformément localement vers 0 sur $\mathbb{D}_\epsilon^q$. Ainsi, la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ converge (à extraction près) vers un ensemble analytique $A_\infty = \{\lambda \in \mathbb{D}_\epsilon^q / F_\infty(\lambda) = 0\}$ de $\mathbb{D}_\epsilon^q$ de codimension 1. $\square$

On pose alors :

$$X_\infty := \overline{\bigcup_{n \geq 0} A_n} = A_\infty \cup \bigcup_{n \geq 0} A_n \text{ et } \dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q := \mathbb{D}_\epsilon^q \setminus X_\infty.$$

D'après un Théorème de recouvrement de Besicovitch (voir [Mat] page 30), il existe un entier $P(q)$ et une famille dénombrable $(\mathbb{B}_i)_{i \geq 1}$ de boules fermées telles que $2\mathbb{B}_i \subset \dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q$ et :

$$\mathbb{1}_{\dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_i} \leq P(q) \cdot \mathbb{1}_{\dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q}. \quad (3.3.5)$$

D'après le Théorème de convergence dominée de Lebesgue, ceci donne $\int_{\mathbb{D}_\epsilon^q} \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_i} \cdot \mu = \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(\mathbb{B}_i)$ pour toute mesure de Radon finie μ sur $\mathbb{D}_\epsilon^q$. Nous pouvons maintenant commencer la démonstration du Théorème 3.9.

3.4 Première étape : encadrements locaux de $\mu^{(q)}$.

Rappelons que $\Omega_n \xrightarrow{\chi} E_n \xrightarrow{D_n} \mathbb{D}_\epsilon^q$ où, d'après la Proposition 3.11, χ est un revêtement ramifié fini de degré p sur Ω_n .

Lemme 3.15 1. Posons $\mu^{(q)} := (T_{\text{bif}}|_{\mathbb{B}_r})^q$. Alors pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{1}{P(q)} \sum_{i=1}^{+\infty} (D_n \circ \chi)_* \mu^{(q)}(\mathbb{B}_i) \leq \mu^{(q)}(\Omega_n) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (D_n \circ \chi)_* \mu^{(q)}(\mathbb{B}_i).$$

2. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $j \geq 1$ et tout $n \geq n_0$, il existe p branches inverses $S_{n,1,j}, \dots, S_{n,p,j} : \mathbb{B}_i \longrightarrow \Omega_n$ de $D_n \circ \chi$ de sorte que $\bigcup_{1 \leq l \leq p} S_{n,l,j}(\mathbb{B}_j)$ soit une réunion disjointe et pour lesquelles :

$$(D_n \circ \chi)_* \mu^{(q)}(\mathbb{B}_j) = q! d^{-q(n+k_0)} \sum_{l=1}^p \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i}(S_{n,l,j}(x))).$$

Démonstration : 1. Puisque L est continue, $\mu^{(q)}$ ne charge pas les ensembles pluripolaires. En particulier, $\mu^{(q)}(\Omega_n) = \mu^{(q)}(\Omega_n \setminus (D_n \circ \chi)^{-1}(X_\infty))$. D'après 3.3.5, on a

$$\mathbb{1}_{\mathbb{D}_\epsilon^q} \circ (D_n \circ \chi) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_i} \circ (D_n \circ \chi) \leq P(q) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{D}_\epsilon^q} \circ (D_n \circ \chi),$$

ce qui donne

$$\mathbb{1}_{\Omega_n \setminus (D_n \circ \chi)^{-1}(X_\infty)} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_i} \circ (D_n \circ \chi) \leq P(q) \cdot \mathbb{1}_{\Omega_n \setminus (D_n \circ \chi)^{-1}(X_\infty)}.$$

En évaluant la mesure positive $\mu^{(q)}$, on trouve

$$\mu^{(q)}(\Omega_n) = \mu^{(q)}(\Omega_n \setminus (D_n \circ \chi)^{-1}(X_\infty)) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu^{(q)}(\mathbb{1}_{\mathbb{B}_i} \circ (D_n \circ \chi)) = \sum_{i=1}^{+\infty} (D_n \circ \chi)_* \mu^{(q)}(\mathbb{B}_i).$$

On montre de façon similaire l'autre inégalité.

2. Par le point 2 du Lemme 3.13, le courant $dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda))$ est bien défini sur Ω_n pour $1 \leq i \leq q$ et $n \geq n_0$. La formule de DeMarco (voir Corollaire 1.24) montre que

$$T_{\text{bif}} = \sum_{i=1}^{2d-2} dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) = \sum_{i=1}^k dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) \quad (3.4.6)$$

où la seconde égalité découle du fait que les points critiques $c_{k+1}, \dots, c_{2d-2}$ sont passifs. Pour $\lambda \in \Omega_n$ on a $\pi \circ F_\lambda^{n+k_0}(\tilde{c}_i(\lambda)) = f_\lambda^{n+k_0} \circ \pi(\tilde{c}_i(\lambda)) = f_\lambda^{n+k_0}(c_i(\lambda)) = \xi_{n,i}(\lambda) = \pi(\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda))$ et il existe donc une fonction holomorphe $\alpha_{n,i}$ définie sur Ω_n et ne s'annulant pas telle que $F_\lambda^{n+k_0}(\tilde{c}_i(\lambda)) = \alpha_{n,i}(\lambda) \cdot \tilde{\xi}_{n,i}(\lambda)$. On en déduit que

$$G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda)) + \log |\alpha_{n,i}(\lambda)| = G_\lambda(F_\lambda^{n+k_0}(\tilde{c}_i(\lambda))) = d^{n+k_0} G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda))$$

puis, comme $\log |\alpha_{n,i}|$ est pluriharmonique sur Ω_n que

$$d^{n+k_0} dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) = dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda)) \quad (3.4.7)$$

Grâce au Théorème 3.12, on déduit de 3.4.6 et 3.4.7 que

$$\mu^{(q)}(U_n) = T_{\text{bif}}^q(U_n) = q! \int_{U_n} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_\lambda(\tilde{c}_i(\lambda)) = q! d^{-q(n+k_0)} \int_{U_n} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_\lambda(\tilde{\xi}_{n,i}(\lambda))$$

pour tout borélien $U_n \subset \Omega_n$ et tout $n \geq n_0$.

Par hypothèse, $\mathbb{B}_j \cap X_\infty = \emptyset$. Comme $D_n \circ \chi$ est un revêtement de degré p sur $\Omega_n \setminus \chi^{-1}(A_n)$, il existe p branches inverses $S_{n,1,j}, \dots, S_{n,p,j}$ de $D_n \circ \chi$ définies sur $\mathbb{B}_j$ et à valeurs dans Ω_n . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{q!} d^{q(n+k_0)} (D_n \circ \chi)_* \mu^{(q)}(\mathbb{B}_j) &= \sum_{l=1}^p \int_{S_{n,l,j}(\mathbb{B}_j)} (D_n \circ \chi)^* \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i}(S_{n,l,j}(x))), \\ &= \sum_{l=1}^p \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i}(S_{n,l,j}(x))). \end{aligned}$$

C'est l'estimation annoncée. $\square$

3.5 Deuxième étape : renormalisation.

Soient $\mathbb{B} \subset \mathbb{D}_\epsilon^q$ une boule fermée et $S_{n,1} \dots, S_{n,p}$ les branches inverses de $D_n \circ \chi$ définies sur $\mathbb{B}$ et à valeurs dans Ω_n . La famille $(S_{n,l})_{n \geq 0}$ est une suite d'applications holomorphes sur $\mathbb{B}$.

Lemme 3.16 *Soit $\mathbb{B}$ une boule fermée contenue dans $\mathbb{D}_\epsilon^q \setminus X_\infty$. Après extraction, les suites suivantes ($1 \leq l \leq p$ et $1 \leq i \leq q$) convergent uniformément sur $\mathbb{B}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} S_n^{(l)} &\longrightarrow 0, \\ \xi_{n,i} \circ S_{n,l}(x) &\longrightarrow p_i(x_i), \\ G_{S_{n,l}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l}(x)) &\longrightarrow G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i)), \end{aligned}$$

où p_i est une fonction holomorphe sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ vérifiant $p_i'(0) = 1$ et $p_i(0) = z_i \in \mathcal{J}_0$. De plus, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\left\| G_{S_{n,l}}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{B})} \leq M$$

pour toute boule $\mathbb{B} \subset \mathbb{D}_\epsilon^q$, tout $n \geq n_0$, tout $1 \leq i \leq q$ et tout $1 \leq l \leq p$.

Démonstration : • Par construction $S_{n,l}(\mathbb{B}) \subset \Omega_n$ donc la suite $(S_{n,l})_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{B}$. Utilisons maintenant le Lemme 3.13. Le point 1.(c) nous permet d'écrire

$$\xi_{n,i}(S_{n,l}(x)) = \psi_{1,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(m_{n,i}(S_{n,l}(x)) \cdot \psi_{0,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \right) + \nu_{n,i}(S_{n,l}(x)).$$

Comme la suite $(\nu_{n,i}(0))_{n \geq 0}$ converge, à extraction près, vers $z_i \in \mathcal{J}_0$ et comme $(\nu_{n,i})_{n \geq 0}$ est équicontinue, nous voyons que $(\nu_{n,i} \circ S_{n,l})_{n \geq 0}$ converge uniformément vers z_i sur $\mathbb{B}$.

• Intéressons-nous maintenant à $\xi_{n,i} \circ S_{n,l} - \nu_{n,i} \circ S_{n,l}$ et Commençons par regarder l'expression obtenue en remplaçant $S_{n,l}(x)$ par 0 :

$$u_{n,i}(x_i) := \psi_{1,0}^{(n,i)} \left(m_{n,i}(0) \cdot \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \right)$$

pour $n \geq 0$, $x_i \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$ et $1 \leq i \leq q$. Les changements de variables $\psi_{1,0}^{(n,i)}$ et $\psi_{0,0}^{(n,i)}$ sont tangents à l'identité à l'ordre 2 et plus précisément (voir Proposition 2.5), il existe $C_1 > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \left| u_{n,i}(x_i) - m_{n,i}(0) \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \right| &\leq C_1 \left| m_{n,i}(0) \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \right|^2 \\ \left| m_{n,i}(0) \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) - x_i \right| &\leq C_1 \frac{|x_i|^2}{|m_{n,i}(0)|} \leq \frac{C_1}{K} |x_i|^2. \end{aligned}$$

On en déduit qu'il existe $C_2 > 0$ telle que

$$|u_{n,i}(x_i) - x_i| \leq C_2 |x_i|^2 \tag{3.5.8}$$

pour tout $n \geq 0$ et tout $x_i \in \mathbb{D}(0, \epsilon)$. La famille $(u_{n,i})_{n \geq 0}$ est donc équicontinue et (à extraction près) converge uniformément localement sur $\mathbb{D}(0, \epsilon)$ vers une fonction holomorphe q_i , qui, d'après l'estimation 3.5.8, vérifie $q'_i(0) = 1$ et $q_i(0) = 0$. Posons $p_i := q_i + z_i$.

• Posons maintenant

$$u_{n,l,i}(x) := \psi_{1,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(m_{n,i}(S_{n,l}(x)) \cdot \psi_{0,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \right),$$

$$v_{n,l,i}(x) := m_{n,i}(S_{n,l}(x)) \psi_{0,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) \text{ et}$$

$$v_{n,i}(x_i) := m_{n,i}(0) \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right)$$

pour tout $x \in \mathbb{B}$. Pour conclure la démonstration du Lemme il suffit de montrer que $(u_{n,l,i}(x) - u_{n,i}(x_i))_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{B}$. On a vu qu'il existe une constante $C_3 > 0$ telle que les changements de variables $\psi_{0,\lambda}^{(n,i)}, \psi_{1,\lambda}^{(n,i)}$ vérifient

$$|\psi_{0,\lambda}^{(n,i)}(z) - z| \leq C_3 |z|^2 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{B}_r \text{ et tout } z \in \mathbb{D}(0, \rho_{n,i}(\lambda)). \quad (3.5.9)$$

$$|\psi_{1,\lambda}^{(n,i)}(w) - w| \leq C_3 |w|^2 \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{B}_r \text{ et tout } w \in \mathbb{D}(0, \rho). \quad (3.5.10)$$

Il vient alors de 3.5.9 pour tout $x \in \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned} \left| \psi_{0,S_{n,l}(x)}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) - \frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right| &\leq C_3 \left| \frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right|^2. \\ \left| \psi_{0,0}^{(n,i)} \left(\frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right) - \frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right| &\leq C_3 \left| \frac{x_i}{m_{n,i}(0)} \right|^2. \end{aligned}$$

Comme $S_{n,l}(\mathbb{B}) \subset \Omega_n$, par le Lemme de distorsion 2.4 et le 4. de la Proposition 3.11 il existe $C_4 > 0$, $K > 1$, $p \geq 1$ et $l_0 \geq 1$ tels que $\left| \frac{m_{n,i}(S_{n,l}(x))}{m_{n,i}(0)} - 1 \right| \leq C_4 \frac{n}{K^{nl_0/p}}$. On déduit des trois dernières inégalités que pour tout $x \in \mathbb{B}$ et tout $n \geq n_0$

$$|v_{n,l,i}(x) - v_{n,i}(x_i)| \leq \frac{nC_4}{K^{nl_0/p}} |x_i| + C_3 \left(2 + \frac{nC_4}{K^{nl_0/p}} \right) \frac{|x_i|^2}{|m_{n,i}(0)|}.$$

Ainsi la suite $(v_{n,l,i}(x) - v_{n,i}(x_i))_{n \geq 0}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{B}$.

• Comme $S_{n,l}(\mathbb{B}) \subset \Omega_n$ le (b) du 1. du Lemme 3.13 dit que $|v_{n,l,i}(x)| \leq \rho$ et $|v_{n,i}(x_i)| \leq \rho$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in \mathbb{B}$ et donc que les suites $(v_{n,l,i}(x))_{n \geq 0}$ et $(v_{n,i}(x_i))_{n \geq 0}$ convergent uniformément, à extraction près, vers une même fonction $v_i(x_i)$ sur $\mathbb{B}$. D'après l'assertion 3.5.10, la suite $(\psi_{1,\lambda}^{(n,i)}(z))_{n \geq 0}$ est équicontinue sur $\mathbb{B}_r \times \mathbb{D}(0, \rho)$ et donc les deux suites $(u_{n,i}(x_i))_{n \geq 0}$ et $(u_{n,l,i}(x))_{n \geq 0}$ sont équicontinues sur $\mathbb{B}_r$.

Comme $u_{n,l,i}(x) = \psi_{1,S_{n,l}(x)}^{(n,i)}(v_{n,l,i}(x))$ et $u_{n,i}(x_i) = \psi_{1,0}^{(n,i)}(v_{n,i}(x_i))$, le fait que $S_{n,l}(x)$ converge uniformément vers 0 et le fait que $(v_{n,l,i}(x))_{n \geq 0}$ et $(v_{n,i}(x_i))_{n \geq 0}$ convergent uniformément vers une même fonction sur $\mathbb{B}$ permettent alors de conclure.

Considérons finalement un voisinage ouvert $W \Subset \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ de $\bigcup_{1 \leq i \leq q} \sigma_i(\mathbb{D}(0, \tilde{\alpha}))$ (voir point 2 du Lemme 3.13). Puisque $(\lambda, z) \mapsto G_\lambda(z)$ est continue sur $\mathbb{B}_r \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ et puisque $\Omega_0 \Subset \mathbb{B}_r$ (voir point 1 de la Proposition 3.11), on peut trouver une constante $M > 0$ pour laquelle $\|G_\lambda(z)\|_{L^\infty(\Omega_0 \times W)} \leq M$. $\square$

3.6 Troisième étape : réduction asymptotique à une donnée dynamique.

On définit une mesure de Radon sur $\mathbb{C}^q$ en posant pour tout borélien $A \subset \mathbb{C}^q$

$$\mu(A) := \int_{A \cap \mathbb{D}_\epsilon^q} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i)).$$

où les p_i sont données par le Lemme 3.16.

Lemme 3.17 *Posons $\ell := \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(\mathbb{B}_j)$. Alors :*

$$0 < \mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) \leq \ell \leq P(q) \cdot \mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) < +\infty.$$

Démonstration : Comme les fonctions $G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i))$ sont continues, la mesure μ ne charge pas les ensembles pluripolaires. En particulier, $\mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) = \mu(\dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q)$. D'après 3.3.5, on trouve

$$\mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) = \mu(\dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q) \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \mu(\mathbb{B}_j) \leq P(q) \cdot \mu(\dot{\mathbb{D}}_\epsilon^q) = P(q) \cdot \mu(\mathbb{D}_\epsilon^q).$$

La fonction $G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i))$ ne dépendant que de la i -ième variable, le Théorème de Fubini et un argument de régularisation montrent que

$$\mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) = \int_{\mathbb{D}_\epsilon^q} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_0 \circ \sigma_i(p_i(x_i)) = \prod_{i=1}^q \int_{\mathbb{D}(0, \epsilon)} dd^c G_0 \circ \sigma_i(p_i(z)).$$

Posons $W_i := p_i(\mathbb{D}(0, \epsilon))$ pour $1 \leq i \leq q$. Comme p_i est non-constante elle est ouverte et W_i est un voisinage ouvert de $p_i(0) = z_i$. On en déduit que pour $1 \leq i \leq q$ l'ouvert $W_i \subset \mathbb{P}^1$ est un voisinage de $z_i \in \mathcal{J}_0$ et donc que $0 < \mu_{f_0}(W_i) < +\infty$. Ainsi

$$0 < \mu(\mathbb{D}_\epsilon^q) = \prod_{i=1}^q \mu_{f_0}(W_i) < +\infty,$$

ce qui donne l'encadrement voulu. □

Nous sommes maintenant en mesure de finir la démonstration du Théorème 3.9 :

Lemme 3.18 $0 \in \text{supp}(\mu^{(q)})$. Plus précisément, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^{(q)}(\Omega_n)}{n} = -q \log d$.

Démonstration : D'après les inégalités de Chern-Levine-Nirenberg et le Lemme 3.16, il existe une constante $M > 0$ telle que, dès que $n \geq n_0$,

$$\int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x)) \leq \text{Leb}(\mathbb{B}_j) \cdot M^q < +\infty$$

pour tout $j \geq 1$ et tout $1 \leq l \leq p$. Ainsi, en sommant sur j et sur l on trouve pour tout $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^p \sum_{j \geq N+1} \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x)) &\leq \left(\sum_{l=1}^p \sum_{j \geq N+1} \text{Leb}(\mathbb{B}_j) \right) . M^q \\ &\leq p . M^q \sum_{j \geq N+1} \text{Leb}(\mathbb{B}_j) \end{aligned}$$

pour $n \geq n_0$. Comme $\sum_{j \geq 1} \mathbb{1}_{\mathbb{B}_j} \leq P(q) . \mathbb{1}_{\mathbb{D}_\epsilon^q}$, la série $\sum_{j \geq 1} \text{Leb}(\mathbb{B}_j)$ est convergente. On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \geq 1$ tel que pour $N \geq N_0$ on trouve :

$$0 \leq \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x)) - \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{N_0} \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x)) \leq \varepsilon.$$

On montre de façon similaire qu'il existe $N_1 \geq 1$ tel que pour $N \geq N_1$ on trouve :

$$0 \leq p . \ell - \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{N_1} \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_0(\sigma_i \circ p_i(x_i)) \leq \varepsilon.$$

D'après le Lemme 3.16, la suite $G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x))$ converge vers $G_0(\sigma_i \circ p_i(x_i))$ uniformément sur $\mathbb{B}_j$. On a donc montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{l=1}^p \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{B}_j} \bigwedge_{i=1}^q dd^c G_{S_{n,l,j}(x)}(\tilde{\xi}_{n,i} \circ S_{n,l,j}(x)) = p . \ell > 0.$$

Combiné aux Lemmes 3.15 et 3.17, ceci nous assure l'existence d'une suite $\ell_n \rightarrow \ell$, telle que

$$P(q)^{-1} q! p . d^{-q(n+k_0)} \ell_n \leq \mu^{(q)}(\Omega_n) \leq q! p . d^{-q(n+k_0)} \ell_n.$$

Comme $\ell > 0$ et comme (Ω_n) est une base de voisinages de 0, on a bien montré que $0 \in \text{supp}(\mu^{(q)})$. De plus, cet encadrement peut se réécrire :

$$\frac{\log(P(q)^{-1} q! p \ell_n)}{n} - \left(1 + \frac{k_0}{n}\right) q \log d \leq \frac{\log \mu^{(q)}(\Omega_n)}{n} \leq \frac{\log(q! p \ell_n)}{n} - \left(1 + \frac{k_0}{n}\right) q \log d.$$

Puisque la suite ℓ_n converge, on conclut en passant à la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$. $\square$

Chapitre 4

Transversalité aux paramètres Misiurewicz.

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'à une fraction rationnelle k -Misiurewicz f_0 dans une famille holomorphe $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ est naturellement associé un ensemble analytique $\chi^{-1}\{0\}$ pour lequel f_λ est k -Misiurewicz pour tout $\lambda \in \chi^{-1}\{0\}$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in \chi^{-1}\{0\}}$ est stable. Nous avons également établi que sous la condition de transversalité $\text{codim } \chi^{-1}\{0\} = k$, la fraction rationnelle f_0 est dans le support de T_{bif}^k . Dans ce chapitre, nous allons montrer que cette condition de transversalité est réalisée, sous des conditions génériques. Il s'agit d'un résultat de transversalité dans l'esprit de ceux de vanStrien [vS] et de Buff-Epstein [BE].

Dans tout le chapitre nous considérons un entier $1 \leq k \leq 2d - 2$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule de $\mathbb{C}^{2d-2}$ et telle que f_0 soit k -Misiurewicz. On suppose que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ est munie de $2d - 2$ points critiques marqués $c_1(\lambda), \dots, c_{2d-2}(\lambda)$ et que $c_1(0), \dots, c_k(0) \in \mathcal{J}_0$. Faisons quelques rappels. Il existe $k_0 \geq 1$ tel que

$$P^{k_0}(f_0) = \overline{\{f_0^n(c_i(0)) \mid n \geq k_0, 1 \leq i \leq k\}}$$

est un ensemble f_0 -invariant hyperbolique et il existe un mouvement holomorphe h_λ de $P^{k_0}(f_0)$ paramétré par $\mathbb{B}(0,r)$ conjuguant f_λ à f_0 sur $P^{k_0}(f_0)$ (voir Théorème 2.1). Nous avons alors noté :

$$\xi_{n,i}(\lambda) = f_\lambda^{n+k_0}(c_i(\lambda))$$

$$\nu_{n,i}(\lambda) = h_\lambda(f_0^{n+k_0}(c_i(0)))$$

$$\chi_i(\lambda) = \xi_{0,i}(\lambda) - \nu_{0,i}(\lambda)$$

$$\chi(\lambda) = (\chi_1(\lambda), \dots, \chi_k(\lambda))$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0,r)$, tout $n \geq 1$ et tout $1 \leq i \leq k$.

Rappelons que $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ agit sur Rat_d par conjugaison et que l'on a noté $\mathcal{M}_d$ l'espace des modules des fractions rationnelles de degré d , c'est-à-dire $\mathcal{M}_d = \text{Rat}_d / \text{Aut}(\mathbb{P}^1)$. Si $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d , on note $\Pi : \mathbb{B}(0,r) \rightarrow \mathcal{M}_d$ la projection naturelle. On a alors :

$$\Pi^{-1}(\Pi(\lambda_0)) = \{\lambda \in \mathbb{B}(0, r) \mid \exists \phi \in PSL_2(\mathbb{C}) \text{ tel que } f_\lambda \circ \phi = \phi \circ f_{\lambda_0} \text{ sur } \mathbb{P}^1\}.$$

Le but de ce chapitre est d'établir le résultat de transversalité suivant :

Théorème 4.1 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r) \subset \mathbb{C}^{2d-2}$ et munie de $2d-2$ points critiques marqués. Supposons que f_0 est k -Misiurewicz mais n'est pas un exemple de Lattès flexible et que pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, r)$ l'ensemble $\Pi^{-1}(\Pi(\lambda_0))$ est discret. Alors $\text{codim } \chi^{-1}\{0\} = k$.*

La démonstration de ce résultat nécessite la notion de bonnes familles dont il est question dans la section 4.1. Nous montrons que dans une bonne famille les bassins d'attractions admettent un mouvement holomorphe. Nous établissons ensuite un résultat de transversalité dans les bonnes familles en Section 4.2. La section 4.3 est consacrée à la démonstration du Théorème 4.1. Enfin, nous montrons en section 4.4 comment appliquer ce résultat dans Rat_d .

Commençons par le fait utile suivant :

Lemme 4.2 *Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie de $2d-2$ points critiques marqués et paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r) \subset \mathbb{C}^{2d-2}$. Supposons que f_0 est k -Misiurewicz. Alors, quitte à réduire r , la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \chi^{-1}\{0\}}$ est stable et f_λ est k -Misiurewicz pour tout $\lambda \in \chi^{-1}\{0\}$.*

Démonstration : Supposons que $c_1(0), \dots, c_k(0) \in \mathcal{J}_0$ et $c_{k+1}(0), \dots, c_{2d-2}(0) \in \mathcal{F}_0$. Puisque $\chi = 0$ sur $\chi^{-1}\{0\}$, les points critiques $c_1(\lambda), \dots, c_k(\lambda)$ sont captés par un ensemble hyperbolique pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et le Lemme 3.8 stipule qu'ils sont passifs sur $\chi^{-1}\{0\}$. De plus, d'après la Proposition 3.4, les points critiques $c_{k+1}(0), \dots, c_{2d-2}(0)$ sont dans des bassins d'attraction de f_0 et donc, quitte à réduire r , sont passifs et restent dans les mêmes bassins respectifs. $\square$

4.1 Bonnes familles de fractions rationnelles.

La notion de bonne famille a été introduite par Aspenberg dans [As2] :

Définition 4.1 *Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles munie de $2d-2$ points critiques marqués et $X \subset \mathbb{B}(0, r)$ un ensemble analytique. On dit que $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est une bonne famille de fractions rationnelles si pour tout $\lambda_0 \in X$ l'ensemble $\Pi^{-1}(\Pi(\lambda_0))$ est discret et si tout cycle attractif $\mathcal{C}_\lambda$ de f_λ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ vérifie les assertions suivantes :*

1. le multiplicateur de $\mathcal{C}_\lambda$ est constant sur X ,
2. les multiplicités des points critiques contenus dans le bassin d'attraction $\mathcal{A}_\lambda$ du cycle $\mathcal{C}_\lambda$ sont constantes sur X ,

3. si $z(\lambda) \in \mathcal{C}_\lambda$ vérifie $f_\lambda^p(z(\lambda)) = z(\lambda)$ pour tout $\lambda \in X$ et un certain entier $p \geq 1$, il existe une coordonnée φ_λ de Koenigs/Böttcher pour f_λ^p en $z(\lambda)$ telle que tout point critique $c(\lambda)$ de f_λ , qui est dans le bassin d'attraction $\mathcal{A}_\lambda$ du cycle $\mathcal{C}_\lambda$ pour tout $\lambda \in X$, vérifie $\varphi_\lambda(f_\lambda^n(c(\lambda))) = \varphi_0(f_0^n(c(0)))$ pour tout $\lambda \in X$ et pour un certain entier $n \geq 1$.

On dit qu'une bonne famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ est lisse si X est lisse.

Remarque 4.1 Tout sous-ensemble analytique d'une bonne famille de fractions rationnelles est lui-même une bonne famille de fractions rationnelles.

Lorsque $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0,r)}$ est une bonne famille stable de fractions rationnelles les propriétés suivantes sont vérifiées :

Lemme 4.3 Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0,r)}$ une bonne famille stable de fractions rationnelles, $\mathcal{C}_0$ un cycle attractif de f_0 et $\mathcal{A}_0$ le bassin d'attraction de f_0 . Alors :

1. La courbe analytique

$$C := \{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{P}^1 / f_\lambda(z) = f_\lambda(c(\lambda)) \text{ pour un certain } c(0) \in \mathcal{A}_0\}$$

est une réunion disjointe de graphes holomorphes au-dessus de $\mathbb{D}(0, r)$.

2. Soit $U_0 \subset \mathcal{A}_0$. Supposons qu'il existe $\phi : \mathbb{D}(0, r) \times U_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe qui envoie $f_0(C(f_0)) \cap U_0$ sur $f_\lambda(C(f_\lambda)) \cap \phi_\lambda(U_0)$ et tel que $\phi_\lambda : U_0 \rightarrow \phi_\lambda(U_0)$ est un biholomorphisme. Soit

$$\mathcal{U}_0 := \{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, r) \times \mathbb{P}^1 / f_\lambda(z) \in \phi_\lambda(U_0)\}.$$

Le nombre de composantes connexes de $\mathcal{U}_0$ est le même que le nombre de composantes connexes de $f_0^{-1}(U_0)$.

3. Soient V_0 une composante connexe de $f_0^{-1}(U_0)$ et $\mathcal{V}_0$ la composante connexe de $\mathcal{U}_0$ qui contient $\{0\} \times V_0$. Notons $V_\lambda \subset \mathbb{P}^1$ le domaine pour lequel $\mathcal{V}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1) = \{\lambda\} \times V_\lambda$. Alors V_λ est homéomorphe à V_0 et l'application fibrée :

$$\begin{aligned} F : \mathcal{V}_0 &\longrightarrow \mathbb{D}(0, r) \times U_0 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \phi_\lambda^{-1} \circ f_\lambda(z)) \end{aligned}$$

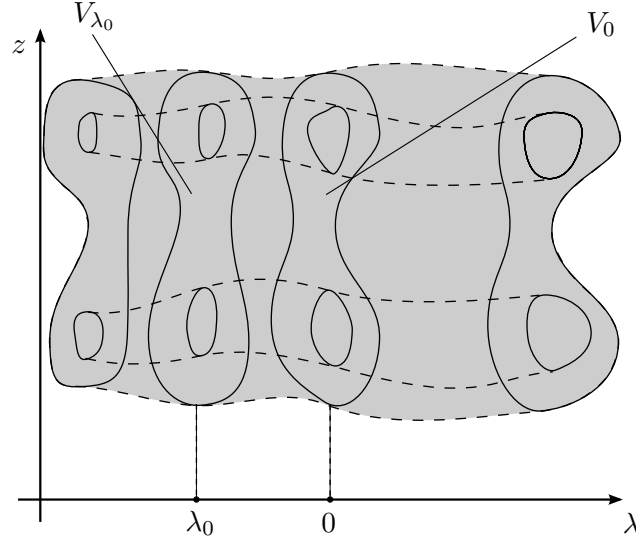
est un revêtement ramifié holomorphe de degré $\deg(f_0 : V_0 \rightarrow U_0)$ et de lieu de ramification $\{(\lambda, c(\lambda)) \in \mathcal{V}_0 / c(0) \in C(f_0) \cap V_0\}$.

Démonstration : • Commençons par supposer que deux composantes irréductibles C_1 et C_2 de C s'intersectent en (λ_0, z_0) . Soient $(\lambda_i, z_i) \in C_i \setminus \{(\lambda_0, z_0)\}$ alors

$$\deg(f_{\lambda_0}, z_0) = \deg(f_{\lambda_1}, z_1) + \deg(f_{\lambda_2}, z_2).$$

Ceci contredit l'hypothèse 2 de la définition de bonne famille. Ainsi les composantes irréductibles de C sont deux-à-deux disjointes. Soit C_1 une composante irréductible de C . On a deux possibilités :

- $C_1 = \{(\lambda, c(\lambda))\}$ pour un certain point critique $c(0) \in f_0^{-1}(U_0)$ et il s'agit bien d'un graphe holomorphe.

FIGURE 4.1 – Structure de $\mathcal{V}_0$

- Dans le cas contraire, l'hypothèse 2 de la définition de bonne famille donne $f'_\lambda(z) \neq 0$ pour tout $(\lambda, z) \in C_1$. Le Théorème des fonctions implicites stipule que localement C_1 est un graphe holomorphe $\{(\lambda, z(\lambda))\}$.

Soit $0 < \eta \leq r$ maximal tel que C_1 est un graphe $\{(\lambda, z(\lambda))\}$ au-dessus de $\mathbb{D}(0, \eta)$. Si $\eta < r$, alors d'après le Théorème des fonctions implicites, pour tout $\lambda_0 \in \partial\mathbb{D}(0, \eta)$ il existe $\eta_{\lambda_0} > 0$ et une unique fonction holomorphe $z_{\lambda_0} : \mathbb{D}(\lambda_0, \eta_{\lambda_0}) \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant $z_{\lambda_0}(\lambda) = z(\lambda)$ sur $\mathbb{D}(0, \eta) \cap \mathbb{D}(\lambda_0, \eta_{\lambda_0})$. Par compacité de $\partial\mathbb{D}(0, \eta)$ on peut extraire une famille finie $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ pour laquelle

$$\partial\mathbb{D}(0, \eta) \subset \bigcup_{j=1}^n \mathbb{D}(\lambda_i, \eta_{\lambda_i}).$$

Ceci permet de définir un prolongement de $z(\lambda)$ à un disque $\mathbb{D}(0, \eta')$ avec $\eta < \eta'$ ce qui contredit la maximalité de η . On a donc bien montré que $\eta = r$.

- D'après l'hypothèse 2 de la définition de bonne famille $\mathcal{U}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1)$ est un domaine non-vide de $\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1$ et le nombre de composantes connexes de $\mathcal{U}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1)$ est le même que celui de $f_0^{-1}(U_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$ et le point 2 est démontré.

• Soient V_0 une composante connexe de $f_0^{-1}(U_0)$ et $\mathcal{V}_0$ la composante connexe de $\mathcal{U}_0$ contenant $\{0\} \times V_0$. Toujours d'après l'hypothèse 2 de la définition de bonne famille, la formule de Riemann-Hurwitz stipule que son groupe fondamental ne dépend pas de $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Notons $V_\lambda \subset \mathbb{P}^1$ l'ouvert pour lequel $\{\lambda\} \times V_\lambda = \mathcal{V}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1)$. On vient de voir que V_λ est homéomorphe à V_0 . Finalement, l'application F étant une application fibrée, pour trouver les points de ramification de F il suffit de trouver les points de ramification de $F_2(\lambda, \cdot)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Puisque ϕ_λ^{-1} est un biholomorphisme il s'agit des points de ramification de f_λ et le lieu de ramification de F est donné par $\{(\lambda, c(\lambda)) \in \mathcal{V}_0 / c(0) \in V_0\}$. $\square$

L'utilité des bonnes familles réside dans le fait suivant :

Proposition 4.4 Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0,r)}$ une bonne famille lisse de fractions rationnelles paramétrée par un disque. Supposons que 0 est un paramètre de stabilité dans la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0,r)}$. Supposons par ailleurs que f_λ admet un cycle attractif $\mathcal{C}_\lambda$ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{D}(0,r)$ et notons $\mathcal{A}_\lambda$ son bassin d'attraction, alors il existe $0 < \rho \leq r$ et un mouvement holomorphe $\phi : \mathcal{A}_0 \times \mathbb{D}(0,\rho) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0,\rho)$:

1. $\phi_\lambda : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda$ est un biholomorphisme,
2. le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\phi_\lambda} & \mathcal{A}_\lambda \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_\lambda \\ \mathcal{A}_0 & \xrightarrow{\phi_\lambda} & \mathcal{A}_\lambda. \end{array}$$

Idee de la démonstration : On adapte la méthode utilisée par McMullen pour fabriquer des champs de droites invariants (voir [Mc1], Théorème 4.9 page 62). Plaçons-nous dans le cas le plus simple : $\mathcal{C}_\lambda = \{z(\lambda)\}$ est un point fixe super-attractif et $\mathcal{A}_\lambda$ ne contient aucun autre point critique que $z(\lambda)$. Alors il existe $s \geq 1$ et un biholomorphisme $\varphi_\lambda : \mathcal{A}_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}$ qui dépend holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{D}(0,r)$ tels que :

$$\varphi_\lambda \circ f_\lambda(z) = (\varphi_\lambda(z))^s$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0,r)$ et tout $z \in \mathcal{A}_\lambda$. On peut alors définir un mouvement holomorphe de $\mathcal{A}_0$ en posant :

$$\phi_\lambda(z) := \varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_0(z).$$

L'application $\phi_\lambda : \mathcal{A}_0 \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda$ ainsi définie est un biholomorphisme et

$$\phi_\lambda \circ f_0(z) = \varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_0 \circ f_0(z) = \varphi_\lambda^{-1}((\varphi_0(z))^s) = f_\lambda \circ \varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_0 = f_\lambda \circ \phi_\lambda(z). \quad \square$$

Démonstration de la Proposition 4.4 : Quitte à réduire r on peut supposer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0,r)}$ est stable. Pour démontrer ce résultat nous procédons de la façon suivante : nous allons montrer qu'il existe $\rho \leq r$ et Ω_0 un ouvert f_0 -invariant contenant $\mathcal{C}_0$ tels que ϕ est définie sur $\mathbb{D}(0,\rho) \times \Omega_0$ et a les propriétés recherchées. Nous étendrons ensuite ϕ (voir Lemme 4.6).

• **Première étape : construction de ϕ_λ au voisinage d'un point du cycle :**

Soit q la période de $\mathcal{C}_\lambda$. On note $z_0(\lambda), \dots, z_{q-1}(\lambda)$ les points du cycle $\mathcal{C}_\lambda$, de sorte que $z_{i+1}(\lambda) = f_\lambda(z_i(\lambda))$ pour $0 \leq i \leq q-2$ et que $z_0(\lambda) = f_\lambda(z_{q-1}(\lambda))$. Dans ce qui suit, nous allons privilégier le point $z_{q-1}(\lambda)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0,r)$, il existe un voisinage V_λ de $z_{q-1}(\lambda)$ et

$$\varphi_\lambda : V_\lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(0,\varepsilon)$$

qui conjugue f_λ^q à sa forme normale et qui dépend holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{D}(0,r)$. On pose alors

$$\phi_{\lambda,q-1}(z) := \varphi_{\lambda}^{-1} \circ \varphi_0(z)$$

pour tout $z \in V_0$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, r)$ l'application $\phi_{\lambda,q-1}$ est un biholomorphisme et pour tout $z \in V_0$, $\lambda \mapsto \phi_{\lambda,q-1}(z)$ est clairement holomorphe sur $\mathbb{D}(0, r)$. Par construction l'application $\phi_{\lambda,q-1}$ vérifie :

$$f_{\lambda}^q \circ \phi_{\lambda,q-1} = \phi_{\lambda,q-1} \circ f_0^q \text{ sur } V_0. \quad (4.1.1)$$

Utilisons l'hypothèse (3) de la définition de bonne famille. Soit U un voisinage connexe de $z_0(0)$ tel $V_0 = f_0^{q-1}(U)$. Il existe $0 < \rho \leq r$ pour lequel, quitte à diminuer U , on peut supposer que :

1. $f_0^q(U) \subset U$,
2. si $V_{\lambda,i}$ désigne la composante connexe de $f_{\lambda}^{-i}(\phi_{\lambda,q-1}(U))$ qui contient $z_{q-i}(\lambda)$, alors $V_{\lambda,i} \cap V_{\lambda,j} = \emptyset$ dès que $0 \leq i \neq j \leq q-1$,
3. $C(f_{\lambda}) \cap (\phi_{\lambda,q-1}(V_0) \cup V_{\lambda,1} \cup \dots \cup V_{\lambda,q-1}) \subset \mathcal{C}_{\lambda}$.

Notons alors $\Omega_0 := U \cup f_0(U) \cup \dots \cup f_0^{q-1}(U)$. Quitte à réduire U on peut supposer que $f_0(\Omega_0) \Subset \Omega_0$.

• **Deuxième étape : relèvement de ϕ_{λ} au voisinage des autres points du cycle :**

Soit $0 \leq i \leq q-1$. Supposons que $\phi_{\lambda,i}$ est défini sur $f_0^i(U)$ et que $\phi_{\lambda,i}(z)$ est holomorphe et injective par rapport à z et holomorphe par rapport à λ . On peut "relever" $\phi_{\lambda,i} \circ f_0$ par f_{λ} pour construire $\phi_{\lambda,i-1}$. Ceci fait l'objet du Lemme suivant :

Lemme 4.5 *Il existe $\phi_{\lambda,i-1}$ une injection holomorphe définie sur $f_0^{i-1}(U)$, dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$ et telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} f_0^{i-1}(U) & \xrightarrow{\phi_{\lambda,i-1}} & \phi_{\lambda,i-1}(f_0^{i-1}(U)) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_{\lambda} \\ f_0^i(U) & \xrightarrow{\phi_{\lambda,i}} & \phi_{\lambda,i}(f_0^i(U)). \end{array}$$

De plus, $\phi_{0,i-1} = \text{id}$ sur $f_0^{i-1}(U)$.

Démonstration : Si $f_0'(z_{i-1}(0)) \neq 0$ on peut appliquer le théorème des fonctions implicites. Quitte à réduire ρ et U on a le résultat voulu. On supposera donc par la suite que $f_0'(z_{i-1}(0)) = 0$. Posons $V_0 := f_0^{i-1}(U)$ et $U_0 := f_0^i(U)$ et notons $\mathcal{U}_0$ la composante connexe de $\{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 / f_{\lambda}(z) \in \phi_{\lambda}(U_0)\}$ qui contient $\mathcal{Z} := \{(\lambda, z_{i-1}(\lambda)) / \lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)\}$.

Commençons par remarquer qu'il existe un homéomorphisme :

$$\begin{aligned} u : \mathcal{U}_0 &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, u_{\lambda}(z)). \end{aligned}$$

En effet, si V_λ le domaine de $\mathbb{P}^1$ pour lequel $\mathcal{U}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1) = \{\lambda\} \times V_\lambda$, la formule de Riemann-Hurwitz nous assure que V_λ est un disque topologique et il est clair que V_λ et $V_\lambda \cap V_0$ dépendent continuellement de $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Quitte à réduire ρ on peut supposer qu'il existe $z_0 \in V_0 \cap V_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$ et que $V_0 \cap V_\lambda$ est un disque topologique.

Soient λ_n une suite convergeant vers 0 et $v_n : V_{\lambda_n} \cap V_0 \rightarrow \mathbb{D}$ l'application de Riemann qui envoie z_0 sur 0. D'après le Théorème de Montel et puisque $v_n(z_0) = 0$, quitte à extraire la suite v_n converge vers une application holomorphe injective $v_\star : V_0 \rightarrow \mathbb{D}$. De même, la suite v_n^{-1} converge vers une application holomorphe injective $w_\star : \mathbb{D} \rightarrow V_0$. Puisque $v_n^{-1} \circ v_n = \text{id}$ on trouve $w_\star = v_\star^{-1}$ et le Lemme de Schwarz stipule que $v_\star$ est l'application de Riemann de V_0 qui envoie z_0 sur 0.

L'application de Riemann v_λ de V_λ envoyant z_0 sur 0 dépend donc continuellement du paramètre λ et il suffit de poser $u(\lambda, z) := (\lambda, v_\lambda^{-1}(z))$ pour conclure.

L'homéomorphisme u induit alors un homéomorphisme

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z} &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times (V_0 \setminus \{z_{i-1}(0)\}) \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \tilde{u}_\lambda(z)). \end{aligned}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} F_1 : \mathcal{U}_0 &\longmapsto \mathbb{D}(0, \rho) \times U_0 & F_2 : \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0 &\longmapsto \mathbb{D}(0, \rho) \times U_0 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \phi_i^{-1} \circ f_\lambda(z)) & \text{et} & & (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, f_0(z)). \end{aligned}$$

D'après le point 3. du Lemme 4.3 les applications fibrées $F_1|_{\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z}}$ et $F_2|_{\mathbb{D}(0, \rho) \times (V_0 \setminus \{z_{i-1}(0)\})}$ sont des revêtements holomorphes de même degré. D'après la théorie des revêtements pour montrer qu'ils sont isomorphes il suffit de vérifier que

$$(F_1)_* \pi_1(\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z}) = (F_2)_* \pi_1(\mathbb{D}(0, \rho) \times (V_0 \setminus \{z_{i-1}(0)\})).$$

Soit $\gamma(t) := (\lambda(t), z(t))$ un lacet de $\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z}$ alors il est homotope au lacet $\Gamma(t) = (0, \tilde{u}_0^{-1} \circ \tilde{u}_{\lambda(t)}(z(t)))$ à travers l'homotopie $(s, t) \mapsto (s\lambda(t), \tilde{u}_{s\lambda(t)}^{-1} \circ \tilde{u}_{\lambda(t)}(z(t)))$. Le groupe $(F_1)_* \pi_1(\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z})$ consiste donc en les classes de chemins de la forme $(0, f_0 \circ z(t))$, $t \in [0, 1]$. Ceci nous donne bien $(F_1)_* \pi_1(\mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z}) = (F_2)_* \pi_1(\mathbb{D}(0, \rho) \times (V_0 \setminus \{z_{i-1}(0)\}))$. Il existe donc un biholomorphisme Φ_{i-1} qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}(0, \rho) \times (V_0 \setminus \{z_{i-1}(0)\}) & \xrightarrow{\Phi_{i-1}} & \mathcal{U}_0 \setminus \mathcal{Z} \\ & \searrow F_2 & \swarrow F_1 \\ & \mathbb{D}(0, \rho) \times (U_0 \setminus \{z_i(0)\}) & \end{array}$$

Puisque F_1 et F_2 sont fibrées Φ_{i-1} l'est aussi et $\Phi_{i-1}(\lambda, z) = (\lambda, \phi_{\lambda, i-1}(z))$. En prolongeant Φ_{i-1} par continuité à $\mathbb{D}(0, \rho) \times V_0$ on finit la démonstration. $\square$

Montrons maintenant que ϕ_λ conjugue f_0 et f_λ au voisinage de $\mathcal{C}_0$. Dans tous les cas on a construit $\phi_{\lambda, i-1}$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} f_0^{i-1}(U) & \xrightarrow{\phi_{\lambda, i-1}} & f_0^{i-1}(U) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_\lambda \\ f_0^i(U) & \xrightarrow{\phi_{\lambda, i}} & f_0^i(U) \end{array}$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. On peut alors définir ϕ_λ sur Ω_0 en posant :

$$\phi_\lambda(z) := \phi_{\lambda,i}(z) \text{ si } z \in f_0^i(U).$$

Pour montrer que ϕ_λ conjugue f_0 à f_λ il reste à vérifier que $\phi_{\lambda,0} \circ f_0 = f_\lambda \circ \phi_{\lambda,q-1}$ sur $f_0^{q-1}(U)$. Le Lemme 4.5 stipule que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\phi_{\lambda,-1}} & \phi_{\lambda,-1}(V) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_\lambda \\ U & \xrightarrow{\phi_{\lambda,0}} & \phi_{\lambda,0}(U) \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_\lambda \\ f_0^{q-1}(U) & \xrightarrow{\phi_{\lambda,q-1}} & \phi_{\lambda,q-1}(f_0^{q-1}(U)) \end{array}$$

où V est la composante connexe de $f_0^{-1}(U)$ qui contient $z_{q-1}(0)$. Il suffit donc de montrer que $\phi_{\lambda,-1} = \phi_{\lambda,q-1}$ au voisinage de $z_{q-1}(0)$. D'après le diagramme ci-dessus on a

$$f_\lambda^q \circ \phi_{\lambda,-1} = \phi_{\lambda,q-1} \circ f_0^q$$

au voisinage de $z_{q-1}(0)$ et par construction de $\phi_{\lambda,q-1}$, cela donne :

$$f_\lambda^q \circ \phi_{\lambda,-1} = \varphi_\lambda^{-1} \circ \varphi_0 \circ f_0^q$$

au voisinage de $z_{q-1}(0)$, ce qui devient $\varphi_\lambda \circ f_\lambda^q \circ \phi_{\lambda,-1} = \varphi_0 \circ f_0^q$. Puisque φ_λ est une coordonnée locale de f_λ^q au voisinage de $z_{q-1}(\lambda)$ dans laquelle f_λ^q s'écrit sous sa forme normale, on trouve $(\varphi_\lambda \circ \phi_{\lambda,-1})^k = \varphi_0^k$ où k est le degré local de f_0^q en $z_{q-1}(0)$. Ceci nous permet d'affirmer qu'il existe $u \in \mathbb{C}$ avec $u^k = 1$ pour lequel la fonction :

$$(\lambda, z) \mapsto \frac{\varphi_\lambda \circ \phi_{\lambda,-1}(z)}{\varphi_0(z)}$$

est constante égale à u sur $\mathbb{D}(0, \rho) \times W$, où W est un voisinage de $z_{q-1}(0)$. Puisque $\phi_{0,-1} = \text{id}$ cela donne $u = 1$ en $\lambda = 0$ et $\phi_{\lambda,-1} = \phi_{\lambda,q-1}$ au voisinage de $z_{q-1}(0)$. Par prolongement analytique on a bien $\phi_{\lambda,-1} = \phi_{\lambda,q-1}$.

• **Troisième étape : prolongement de ϕ à $\mathbb{D}(0, \rho) \times \mathcal{A}_0$.**

Il suffit d'itérer le Lemme suivant :

Lemme 4.6 Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)}$ une bonne famille lisse de fractions rationnelles paramétrée par un disque $\mathbb{D}(0, \rho)$. Supposons que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}(0, \rho)}$ est stable et que f_λ admet un cycle attractif $\mathcal{C}_\lambda$ dépendant holomorphiquement de $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$ et notons $\mathcal{A}_\lambda$ le bassin d'attraction de $\mathcal{C}_\lambda$. Considérons $\Omega \subset \mathcal{A}_0$ un ouvert f_0 -invariant pour lequel $f_0(\Omega) \Subset \Omega$ et supposons qu'il existe $\phi : \mathbb{D}(0, \rho) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe tel que

1. $f_\lambda \circ \phi_\lambda(z) = \phi_\lambda \circ f_0(z)$, pour tout $z \in \Omega$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$,
2. $\phi_\lambda : \Omega \longrightarrow \phi_\lambda(\Omega)$ est un biholomorphisme pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$.

Alors, il existe un mouvement holomorphe $\tilde{\phi} : \mathbb{D}(0, \rho) \times f_0^{-1}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tel que

1. $\tilde{\phi}_\lambda|_\Omega = \phi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$,
2. $f_\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda(z) = \tilde{\phi}_\lambda \circ f_0(z)$, pour tout $z \in f_0^{-1}(\Omega)$ et tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$,
3. $\tilde{\phi}_\lambda : f_0^{-1}(\Omega) \longrightarrow f_\lambda^{-1}(\phi_\lambda(\Omega))$ est un biholomorphisme pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$.

Le Lemme 4.6 nous assure que ϕ se prolonge à

$$\mathbb{D}(0, \rho) \times \left(\bigcup_{n \geq 0} f_0^{-n}(\Omega_0) \right) = \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathcal{A}_0.$$

tout en conservant les propriétés de ϕ . De plus, il faut remarquer que $\phi_\lambda(\Omega)$ est un voisinage f_λ -invariant de $\mathcal{C}_\lambda$ et que

$$\phi_\lambda(f_0^{-n}(\Omega)) = f_\lambda^{-n}(\phi_\lambda(\Omega)).$$

Ainsi, $\phi_\lambda(\mathcal{A}_0) = \mathcal{A}_\lambda$, ce qui conclut la démonstration. $\square$

Montrons maintenant le Lemme 4.6 :

Démonstration du Lemme 4.6 : • La stratégie est la même que pour démontrer le Lemme 4.5. Soient U_0 une composante connexe de Ω et V_0 une composante connexe de $f_0^{-1}(U_0)$. Notons $\mathcal{V}_0$ la composante connexe de $\{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 / f_\lambda(z) \in \phi_\lambda(U_0)\}$ qui contient $\{0\} \times V_0$. D'après le point 2. du Lemme 4.3, $\mathcal{V}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1)$ est un domaine non-vide de $\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1$ et son groupe fondamental ne dépend pas de $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Nous allons par la suite utiliser le Lemme suivant que nous démontrerons ultérieurement :

Lemme 4.7 *Il existe un homéomorphisme*

$$\begin{aligned} u : \mathcal{V}_0 &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, u_\lambda(z)). \end{aligned}$$

Posons maintenant $\mathcal{W} := \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0$ et

$$\begin{aligned} F_1 : \mathcal{V}_0 &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times U \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \phi_\lambda^{-1} \circ f_\lambda(z)) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} F_2 : \mathcal{W} &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times U \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, f_0(z)). \end{aligned}$$

D'après le Lemme 4.7 les ouverts $\mathcal{V}_0$ et $\mathcal{W}$ sont homéomorphes. D'après le Lemme 4.3 les applications F_1 et F_2 sont des revêtements ramifiés de même degré et $C(\mathcal{V}_0) := \{(\lambda, z) \in \mathcal{V}_0 / f_\lambda(z) \in f_\lambda(C(f_\lambda))\}$ est une réunion de graphes holomorphes disjoints. Notons

$$\mathcal{V}'_0 := \mathcal{V}_0 \setminus C(\mathcal{V}_0) \text{ et } \mathcal{W}' := \mathcal{W} \setminus (\mathbb{D}(0, \rho) \times (f_0^{-1}(f_0(C(f_0))) \cap V_0).$$

L'homéomorphisme $u : \mathcal{V}_0 \longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0$ induit donc un homéomorphisme

$$\begin{aligned}\tilde{u} : \mathcal{V}'_0 &\longrightarrow \mathcal{W}' \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \tilde{u}_\lambda(z)).\end{aligned}$$

• D'après la théorie des revêtements, pour montrer que les revêtements $F_1|_{\mathcal{V}'_0}$ et $F_2|_{\mathcal{W}'}$ sont isomorphes il reste à montrer que $(F_1)_*\pi_1(\mathcal{V}'_0) = (F_2)_*\pi_1(\mathcal{W}')$. Considérons donc $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{V}'_0$ un chemin de $\mathcal{V}'_0$ donné par $\gamma(t) = (\lambda(t), z(t))$ pour $t \in [0, 1]$. Posons

$$\begin{aligned}\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{V}'_0 \\ (s, t) &\longmapsto (s\lambda(t), \tilde{u}_{s\lambda(t)}^{-1} \circ \tilde{u}_{\lambda(t)}(z(t))).\end{aligned}$$

Il s'agit d'une homotopie entre γ et le chemin $\tilde{\gamma}$ donné par $\tilde{\gamma}(t) = (0, \tilde{u}_0^{-1} \circ \tilde{u}_{\lambda(t)}(z(t)))$. On a donc montré que tout chemin de $\mathcal{V}'_0$ est homotope à un chemin de la forme $(0, z(t))$ et il est alors clair que $(F_1)_*\pi_1(\mathcal{V}'_0)$ est l'ensemble des classes de chemins de la forme $(0, f_0(z(t)))$ où $z(t)$ est un chemin de $V_0 \setminus f_0^{-1}(f_0(C(f_0)))$. Puisque $\mathcal{W}' = \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0 \setminus (f_0^{-1}(f_0(C(f_0))))$ on a bien $(F_1)_*\pi_1(\mathcal{V}'_0) = (F_2)_*\pi_1(\mathcal{W}')$. On a donc une application $\tilde{\Phi} : \mathcal{W}' \longrightarrow \mathcal{V}'_0$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{W}' & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & \mathcal{V}'_0 \\ & \searrow F_2 \quad \swarrow F_1 & \\ & \mathbb{D}(0, \rho) \times U. & \end{array}$$

De plus, puisque F_1 et F_2 sont des applications fibrées on sait que $\tilde{\Phi}$ s'écrit

$$\tilde{\Phi}(\lambda, z) = (\lambda, \tilde{\phi}_\lambda(z))$$

pour $(\lambda, z) \in \mathcal{W}'$. Finalement, en prolongeant $\tilde{\Phi}$ par continuité on finit la construction de $\tilde{\phi}_\lambda$ sur V_0 .

• Il reste à montrer que $\tilde{\phi}_\lambda$ est bien un prolongement de ϕ_λ . Considérons donc $z \in \Omega$, alors $\tilde{\phi}_\lambda(z) \in f_\lambda^{-1}[f_\lambda \circ \phi_\lambda(z)]$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Soient U une composante connexe de Ω et $z_0 \in U \setminus f_0^{-1}(f_0(C(f_0)))$. Alors il existe un voisinage $V_0 \subset U$ de z_0 et un voisinage $W_0 \subset \mathbb{D}(0, \rho)$ de 0 pour lesquels $\tilde{\phi}_\lambda(z) \notin f_\lambda^{-1}[f_\lambda(C(f_\lambda))]$ pour $(\lambda, z) \in W_0 \times V_0$.

L'ensemble $\{(\lambda, z) \in W_0 \times V_0 / f_\lambda \circ \tilde{\phi}_\lambda(z) = f_\lambda \circ \phi_\lambda(z)\}$ est donc une réunion disjointe de graphes holomorphes. Puisque $\tilde{\phi}_0(z) = z = \phi_0(z)$ cela donne $\tilde{\phi}_\lambda(z) = \phi_\lambda(z)$ pour $(\lambda, z) \in W_0 \times V_0$. Puisque les applications holomorphes

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{D}(0, \rho) \times U &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \phi_\lambda(z))\end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned}\tilde{\Phi} : \mathbb{D}(0, \rho) \times U &\longrightarrow \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\lambda, \tilde{\phi}_\lambda(z))\end{aligned}$$

coïncident sur un ouvert non-vide, le principe du prolongement analytique stipule que $\Phi = \tilde{\Phi}$ sur $\mathbb{D}(0, \rho) \times U$. $\square$

Démonstration du Lemme 4.7 : Notons V_λ le domaine de $\mathbb{P}^1$ pour lequel

$$\mathcal{V}_0 \cap (\{\lambda\} \times \mathbb{P}^1) = \{\lambda\} \times V_\lambda.$$

Soit $z_0 \in \partial V_0$ fixé. Puisque $f_0(\Omega_0) \Subset \Omega_0$ on peut poser :

$$\tilde{A} := \{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 \mid f_\lambda(z) = \phi_\lambda \circ f_0(z_0)\}.$$

La courbe $\tilde{A}$ est contenue dans la frontière de $\{(\lambda, z) \in \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 \mid f_\lambda(z) \in \phi_\lambda(U)\}$ dans $\mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1$. On considère alors $A := \tilde{A} \cap \partial\mathcal{V}_0$. D'après le point 1 du Lemme 4.3 il s'agit d'une réunion disjointe de graphes holomorphes. En particulier, il existe une unique application holomorphe $z_{z_0} : \mathbb{D}(0, \rho) \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant :

- $f_\lambda(z_{z_0}(\lambda)) = \phi_\lambda \circ f_0(z_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$,
- $z_{z_0}(0) = z_0$.

On pose alors $v_\lambda(z_0) := z_{z_0}(\lambda)$ pour $(\lambda, z_0) \in \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1$. Montrons que v_λ est injective pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$ pour montrer que cela définit un mouvement holomorphe

$$v : \mathbb{D}(0, \rho) \times \partial V_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$$

Soient $z_1, z_2 \in \partial V_0$ tels que $v_\lambda(z_1) = v_\lambda(z_2)$ alors par définition de v_λ on a nécessairement $z_1 = z_2$. Prouvons finalement que $v_\lambda(\partial V_0) = \partial V_\lambda$. Soit $\lambda_0 \in \mathbb{D}(0, \rho)$. Supposons que $v_{\lambda_0}(\partial V_0) \neq \partial V_{\lambda_0}$ et donc il existe $z_0 \in \partial V_{\lambda_0}$ tel que $v_{\lambda_0}(\partial V_0) \subset \partial V_{\lambda_0} \setminus \{z_0\}$. Puisque v est un mouvement holomorphe, $v_{\lambda_0}(\partial V_0)$ est homéomorphe à ∂V_0 . Ainsi, nécessairement, le nombre de composantes connexes de ∂V_0 diffère du nombre de composantes connexes de ∂V_{λ_0} . Ceci contredit le fait que, d'après le point 3 du Lemme 4.3, il existe un homéomorphisme $h : V_0 \rightarrow V_{\lambda_0}$.

D'après le Théorème de Slodkowski (voir [Hu] Théorème 5.2.5 page 197) ce mouvement holomorphe se prolonge en un mouvement holomorphe continu $v : \mathbb{D}(0, \rho) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Ce mouvement holomorphe vérifie $v_\lambda(V_0) = V_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{D}(0, \rho)$. On a donc un homéomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{V} : \mathbb{D}(0, \rho) \times V_0 &\rightarrow \mathcal{V}_0 \\ (\lambda, z) &\mapsto (\lambda, v_\lambda(z)). \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser $u := \mathcal{V}^{-1}$. □

4.2 Transversalité dans les bonnes familles.

Nous établissons maintenant les résultats de transversalité concernant l'application d'activité dans le cadre des bonnes familles. Rappelons que dans une famille holomorphe $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ munie de $2d - 2$ points critiques marqués, pour laquelle f_0 est k -Misiurewicz, l'application d'activité $\chi : (X, 0) \rightarrow \mathbb{C}^k$ de $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ en $\lambda = 0$ est donnée au voisinage de 0 par

$$\chi(\lambda) = \left(f_\lambda^{k_0}(c_1(\lambda)) - h_\lambda(f_0^{k_0}(c_1(0))), \dots, f_\lambda^{k_0}(c_k(\lambda)) - h_\lambda(f_0^{k_0}(c_k(0))) \right)$$

où h_λ est un mouvement holomorphe dynamique de $P^{k_0}(f_0)$.

Proposition 4.8 *Soient $1 \leq k \leq 2d - 2$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une bonne famille de fractions rationnelles de degré d munie de points critiques marqués et telle que $0 \in X$. Supposons que f_0 est k -Misiurewicz mais n'est pas un exemple de Lattès flexible et que $c_1(0), \dots, c_k(0) \in \mathcal{J}_0$. Soit χ une application d'activité de $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ en $\lambda = 0$.*

1. *Alors il existe $1 \leq i \leq 2d - 2$ tel que c_i est actif en 0 dans X , ce qui signifie que $\chi^{-1}\{0\}$ est de codimension 1 dans X .*

2. Supposons de plus que $\dim X \geq k$, alors l'ensemble analytique $\chi^{-1}\{0\}$ est de codimension k dans X .

On s'intéressera également aux exemples de Lattès flexibles et pour ce faire on utilisera le Lemme suivant :

Lemme 4.9 *Soient $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une bonne famille de fractions rationnelles de degré d et $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset X$ une suite convergeant vers $\lambda_0 \in X$ et telle que f_{λ_n} est un exemple de Lattès flexible. Alors f_{λ_0} est un exemple de Lattès flexible et il existe une courbe $\Lambda \subset X$ de Lattès flexibles telle que $\lambda_0 \in \Lambda$ et modulo extraction $\lambda_n \in \Lambda$ pour tout n assez grand.*

Démonstration : Comme la fonction exposant de Lyapounov L est continue sur X (voir [BB1]) et comme L prend sa valeur minimale $\log \sqrt{d}$ en f si et seulement si f est un exemple de Lattès (voir [Le]) on a $L(f_{\lambda_0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(f_{\lambda_n}) = \log \sqrt{d}$ et f_{λ_0} est un exemple de Lattès. Nous allons maintenant utiliser une caractérisation des exemples de Lattès flexibles donnée par Milnor dans [Mi3] :

Un exemple de Lattès est flexible si et seulement si le multiplicateur de toutes ses orbites périodiques est un entier.

Comme f_{λ_0} est un exemple de Lattès tous ses cycles sont répulsifs. Soient $p \geq 1$ et $\mathcal{C}$ un p -cycle de f_{λ_0} . Par le Théorème des fonctions implicites il existe un voisinage V de λ_0 dans X sur lequel on peut suivre holomorphiquement $\mathcal{C}$ en un cycle répulsif $\mathcal{C}_\lambda$ de f_λ . Notons $m(\lambda)$ le multiplicateur de $\mathcal{C}_\lambda$. On a $m(\lambda_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\lambda_n) \in \mathbb{Z}$ et donc f_{λ_0} est un exemple de Lattès flexible.

Puisque X est une bonne famille, il n'existe qu'un nombre fini de courbes de Lattès flexibles dans X et elles sont fermées (voir [Mi3] page 18 pour le cas des familles normalisées). On peut donc affirmer qu'il existe une courbe $\Lambda \subset X$ d'exemples de Lattès flexibles telle que modulo extraction, $\lambda_n \in \Lambda$ et $\lambda_0 \in \Lambda$. $\square$

Passons maintenant à la démonstration de la Proposition 4.8 :

Démonstration de la Proposition 4.8 : • Commençons par montrer l'assertion 1. Raisonnons par l'absurde en supposant que c_i est passif en 0 dans X pour tout $1 \leq i \leq k$. D'après le Lemme 3.8 on a $X = X \cap \chi^{-1}\{0\}$ et f_λ est k -Misiurewicz pour tout $\lambda \in X$. Soient V la partie régulière de X , $\lambda_0 \in V$ et $\psi : \mathbb{D} \rightarrow V$ un disque holomorphe non-constant centré en λ_0 . Dans la suite nous identifierons $\mathbb{D}$ et $\psi(\mathbb{D})$ et serons amenés réduire $\mathbb{D}$. Distinguons deux cas :

Si $1 \leq k < 2d - 2$ alors f_{λ_0} a au moins un bassin d'attraction et $\mathcal{J}_{\lambda_0} \neq \mathbb{P}^1$. D'après la Proposition 4.4 et la Proposition 3.4 il existe un mouvement holomorphe $\phi : \mathbb{D} \times \mathcal{F}_{\lambda_0} \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui conjugue conformement f_{λ_0} et f_λ sur leurs ensembles de Fatou pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$.

Par le λ -Lemme, ϕ_λ s'étend en un homéomorphisme quasi-conforme $\phi_\lambda : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui conjugue f_{λ_0} à f_λ . D'après le Lemme 3.7, $\mathcal{J}_{\lambda_0}$ est de mesure nulle et donc l'homéomorphisme ϕ_λ est conforme presque partout. On en déduit que ϕ_λ est conforme pour tout $\lambda \in \mathbb{D}$, ce qui contredit l'hypothèse $\Pi^{-1}(\Pi(\lambda_0))$ discret.

Si $k = 2d - 2$ alors $\mathcal{J}_{\lambda_0} = \mathbb{P}^1$. Nous allons utiliser la théorie de Mañé-Sad-Sullivan (voir [MSS]). Puisque tous les points critiques sont passifs, le paramètre λ_0 est stable. Il existe donc un mouvement holomorphe quasi-conforme $\phi : \mathbb{D} \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ qui conjugue f_{λ_0} à f_λ . Soit $\lambda \in \mathbb{D} \setminus \{\lambda_0\}$ on note μ^λ la forme de Beltrami vérifiant $\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial \bar{z}}(z) = \mu^\lambda(z) \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial z}(z)$, pour presque tout $z \in \mathbb{P}^1$ et S_λ son support. Il existe $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$ telle que $\text{mes}(S_{\lambda_n}) > 0$, car sinon X ne serait pas une bonne famille.

$\mathcal{J}_{\lambda_n}$ porte donc un champ de droites invariant. Comme f_{λ_n} est semi-hyperbolique on a $\Lambda_{f_{\lambda_n}} = \mathcal{J}_{\lambda_n} = \mathbb{P}^1$ (voir [BM] Exemple VII.20). Le Théorème VII.22 de [BM] nous permet d'affirmer que f_{λ_n} est un exemple de Lattès et l'existence du champ de droites invariant permet d'affirmer qu'il s'agit d'un exemple de Lattès flexible (voir [Mc1], Corollaire 3.18).

Ainsi il existe une suite $(f_{\lambda_n})_{n \geq 1} \subset X$ de Lattès flexibles convergeant vers f_0 dans Y . Ceci contredit le Lemme 4.9.

• Etablissons maintenant l'assertion 2. On a montré en 1 qu'il existe $1 \leq p \leq k$ pour lequel $\text{codim } \chi_i^{-1}\{0\} = 1$. Si $k \geq 2$, alors $\chi_i^{-1}\{0\}$ est une bonne famille de dimension $k - 1 \geq 1$ et l'assertion 1 fournit $j \neq i$ tel que c_j est actif en 0 dans $(f_\lambda)_{\lambda \in \chi_i^{-1}\{0\}}$. En itérant ce raisonnement $k - 1$ fois, on prouve 2. $\square$

4.3 Ubiquité des bonnes familles.

Nous montrons maintenant le Théorème 4.1. Il s'agira essentiellement d'exhiber une bonne famille où appliquer la Proposition 4.8. Le point 2 de la Proposition 4.8 nous ramène à construire une bonne famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ avec $X \subset \mathbb{B}(0, r)$ de dimension $\dim X \geq k$. On aura alors $\text{codim } X \cap \chi^{-1}\{0\} = \text{codim } X + k$ et donc $\text{codim } \chi^{-1}\{0\} \geq k$. Puisque $\chi : \mathbb{B}(0, r) \rightarrow \mathbb{C}^k$ cela donne bien $\text{codim } \chi^{-1}\{0\} = k$.

Lemme 4.10 *Soient $1 \leq k \leq 2d - 2$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0, r) \subset \mathbb{C}^{2d-2}$ et munie de $2d - 2$ points critiques marqués. Supposons que f_0 soit une fraction rationnelle k -Misiurewicz sans être un exemple de Lattès flexible et que pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, r)$ l'ensemble $\Pi^{-1}(\Pi(\lambda_0))$ est discret. Alors il existe une bonne famille $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ de dimension $\dim X \geq k$ telle que $0 \in X \subset \mathbb{B}(0, r)$.*

Démonstration : • Lorsque $k = 2d - 2$, l'ensemble de Fatou $\mathcal{F}_0$ de f_0 est vide et la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ est une bonne famille. On supposera donc que $1 \leq k < 2d - 2$. Quitte à permuter les points critiques de f_0 , on peut supposer que $c_1(0), \dots, c_k(0) \in \mathcal{J}_0$ et que $c_{k+1}(0), \dots, c_{2d-2}(0) \in \mathcal{F}_0$. On sera parfois amené à diminuer r , on le fera sans le mentionner.

• Commençons par construire une famille N de suffisamment grande dimension vérifiant les hypothèses 1 et 2 de la définition de bonne famille. D'après la Proposition 3.4, les points critiques $c_{k+1}(0), \dots, c_{2d-2}(0)$ sont contenus dans des bassins d'attraction de f_0 . Notons $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_p$ les cycles attractifs de f_0 , $q_1, \dots, q_p$ leurs périodes respectives et $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{D}$ leurs multipliateurs respectifs. On pose

$$N := \mathbb{B}(0, r) \cap \text{Per}_{q_1}(m_1) \cap \cdots \cap \text{Per}_{q_p}(m_p).$$

Il s'agit d'un ensemble analytique de $\mathbb{B}(0, r)$ de codimension au plus égale à p et contenant 0, puisque les hypersurfaces $\text{Per}_{q_1}(m_1), \dots, \text{Per}_{q_p}(m_p)$ contiennent 0. En remplaçant N par l'ensemble analytique $N \cap \{\lambda \in \mathbb{B}(0, r) \mid c_i(\lambda) = c_j(\lambda)\}$ lorsque $c_i(0) = c_j(0)$ et $c_i \not\equiv c_j$ avec $i \neq j \geq k+1$, on obtient un ensemble analytique N qui satisfait les conditions 1 et 2 de la définition de bonne famille. La codimension de N dans $\mathbb{B}(0, r)$ est alors au plus égale à

$$p + \sum (\text{mult}(c_j(0)) - 1),$$

où la somme est prise sur les points critiques de f_0 contenus dans $\mathcal{F}_0$ comptés *sans* multiplicités.

• Pour conclure, nous devons trouver une sous-famille de N vérifiant l'hypothèse 3 de la définition de bonne famille. Soient $\mathcal{C}(\lambda)$ un cycle attractif de f_λ existant pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$, $z(\lambda)$ est un point de $\mathcal{C}(\lambda)$ et $p \geq 1$ le plus petit entier tel que $f_\lambda^p(z(\lambda)) = z(\lambda)$. D'après l'hypothèse 2 de la définition de bonne famille, on a alors deux cas à traiter :

1. $\mathcal{C}(\lambda)$ n'est pas super-attractif. Il existe un voisinage V_λ de $z(\lambda)$ et une coordonnée de Koenigs $\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ qui linéarise f_λ^p au voisinage de $z(\lambda)$. De plus il y a au moins un point critique $c_i(\lambda)$ de f_λ d'orbite infinie dans le bassin d'attraction de $\mathcal{C}(\lambda)$ et, puisque $c_i(\lambda)$ est attiré par le cycle $\mathcal{C}(\lambda)$, il existe $n_i \geq 1$ minimal tel que $f_\lambda^{n_i}(c_i(\lambda)) \in V_\lambda$. On renormalise ψ_λ en posant :

$$\psi_\lambda(z) := \frac{\varphi_\lambda(z)}{\varphi_\lambda(f_\lambda^{n_i}(c_i(\lambda)))}$$

pour tout $\lambda \in N$ et tout $z \in V_\lambda$.

2. $\mathcal{C}(\lambda)$ est super-attractif. Alors il existe un point critique $c_i(\lambda)$ de f_λ qui est un point du cycle $\mathcal{C}(\lambda)$. Quitte à remplacer $z(\lambda)$ par une itérée par f_λ on peut considérer que $z(\lambda) = c_i(\lambda)$. De plus il existe un voisinage V_λ de $z(\lambda)$ un entier $s \geq 1$ et une coordonnée de Böttcher $\varphi_\lambda : V_\lambda \rightarrow \mathbb{C}$ qui conjugue f_λ^p à $z \mapsto z^s$ sur V_λ . Dans ce cas, on pose $\psi_\lambda = \varphi_\lambda$.

Lors de cette étape de la démonstration, on n'a pas changé la codimension de N . De plus, p points critiques distincts de f_0 contenus dans $\mathcal{F}_0$ vérifient l'hypothèse (3) de la définition de bonne famille.

Si le bassin d'attraction de $\mathcal{C}(0)$ contient un autre point critique $c_j(0)$ de f_0 , on remplace alors N par

$$N \cap \{\lambda \in \mathbb{B}(0, r) \mid \psi_\lambda(f_\lambda^{n_j}(c_j(\lambda))) = \psi_0(f_0^{n_j}(c_j(0)))\}.$$

Etant donné que p points critiques comptés sans multiplicités ont été pris en compte lors de l'étape précédente, cette opération ne change pas N pour au moins p points critiques distincts de f_0 et la codimension de N dans $\mathbb{B}(0, r)$ est au plus de

$$p + \sum (\text{mult}(c_j(0)) - 1) - p + \sum 1 = \sum \text{mult}(c_j(0)) = 2d - 2 - k,$$

où les sommes sont prises sur les points critiques de f_0 contenus dans $\mathcal{F}_0$ comptés sans multiplicités. On a construit une bonne famille N de dimension au moins k . $\square$

4.4 Transversalité dans Rat_d .

Finalement, le Théorème 4.1 peut être formulé dans la famille Rat_d de toutes les fractions rationnelles de degré d . Rappelons que l'on a noté $\mathcal{M}_d$ l'espace des modules des fractions rationnelles de degré d et $\Pi : \text{Rat}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$ l'application quotient. Pour $f \in \text{Rat}_d$, on note $\text{Aut}(f)$ le stabilisateur de f pour l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$, c'est-à-dire que $\text{Aut}(f) = \{\phi \in \text{PSL}_2(\mathbb{C}) / \phi^{-1} \circ f \circ \phi = f\}$. Le Théorème de transversalité 4.1 peut être formulé comme suit :

Lemme 4.11 *Soient $1 \leq k \leq 2d - 2$ et f_0 une fraction rationnelle k -Misiurewicz à points critiques simples. Soit $\mathbb{B}(0, r) \subset \text{Rat}_d$ une boule centrée en f_0 , telle que $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ est munie de $2d - 2$ points critiques marqués. Soit χ une application d'activité de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ en $\lambda = 0$. Alors $\text{codim } \chi^{-1}\{0\} = k$.*

Démonstration : Un résultat de Silverman stipule que pour tout $f \in \text{Rat}_d$, il existe une sous-variété complexe locale V_f de Rat_d contenant f de dimension complexe $2d - 2$ qui est transverse à l'orbite $\mathcal{O}(f) \subset \text{Rat}_d$ de f sous l'action de $\text{Aut}(\mathbb{P}^1)$ (voir par exemple [BB1] page 226). De plus, $\text{Aut}(f)$ est un groupe fini, V_f est invariante par $\text{Aut}(f)$, $\Pi(V_f)$ est un ouvert de $\mathcal{M}_d$ et $\Pi : V_f / \text{Aut}(f) \rightarrow \Pi(V_f)$ est un biholomorphisme.

Ainsi, pour tout $g \in V_f$, l'ensemble $\Pi^{-1}(\Pi(g))$ contient au plus $\text{card}(\text{Aut}(f)) < +\infty$ éléments. On conclut en appliquant le Théorème 4.1. $\square$

Chapitre 5

Estimées de dimension de Hausdorff.

Le résultat fondamental et liminaire concernant la dimension de Hausdorff d'un lieu de bifurcation est celui de Shishikura. Il stipule que la dimension de Hausdorff du bord de l'ensemble de Mandelbrot est égale à deux (voir [Sh]). Tan Lei a généralisé ce résultat aux familles de fractions rationnelles en montrant que le lieu de bifurcation est vide ou de dimension de Hausdorff totale. Tan Lei a également montré que le bord du lieu de connexité des polynômes de degré d est de dimension de Hausdorff totale (voir [T]). McMullen a donné une autre démonstration du résultat de Tan Lei (voir [Mc3]). Dans ce chapitre nous généralisons ces résultats aux supports des T_{bif}^k et en particulier au support de la mesure de bifurcation μ_{bif} . Observons que pour les polynômes de degré d , le support de μ_{bif} est beaucoup plus petit que le bord du lieu de connexité. On peut par exemple l'identifier à son bord de Shilov (voir [DF] Proposition 6.4).

Dans ce chapitre, nous allons utiliser les résultats des chapitres 2 et 4 pour estimer la dimension de Hausdorff locale de l'ensemble des fractions rationnelles k -Misiurewicz. Nous en déduirons ensuite, à l'aide du travail effectué au chapitre 3, une estimée sur la dimension du support de μ_{bif} .

Pour $1 \leq k \leq 2d - 2$ on note $\mathfrak{M}_k$ l'ensemble défini par :

$$\mathfrak{M}_k := \{f \in \text{Rat}_d / f \text{ est } k\text{-Misiurewicz, } f \text{ n'est pas un Lattès flexible et les points critiques de } f \text{ sont simples}\}.$$

Remarque 5.1 La condition " f n'est pas un Lattès flexible" n'a de sens que lorsque d est le carré d'un nombre entier et $k = 2d - 2$.

Rappelons qu'une partie $E \subset X$ d'un espace métrique (X, d) est dite *homogène* si pour tout ouvert $U \subset X$ tel que $U \cap E \neq \emptyset$, on a $\dim_H(U \cap E) = \dim_H(E)$. Rappelons que la notion de *dimension hyperbolique* de $f \in \text{Rat}_d$ a été introduite par Shishikura dans [Sh] :

$$\dim_{\text{hyp}}(f) := \sup\{\dim_H(E) / E \text{ est } f\text{-invariant hyperbolique et homogène}\}.$$

Notre résultat est le suivant :

Théorème 5.1 Soit $1 \leq k \leq 2d - 2$. Alors, pour tout $f \in \mathfrak{M}_k$ et tout voisinage V_0 de f dans Rat_d on a :

$$\dim_H(\mathfrak{M}_k \cap V_0) \geq 2(2d + 1 - k) + k \dim_{\text{hyp}}(f).$$

Décrivons brièvement le mécanisme de la démonstration du Théorème 5.1. Soit E_f un compact f -hyperbolique homogène avec $\dim_H(E_f) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - \varepsilon$. En utilisant le Lemme 5.6 on peut trouver $g \in \mathfrak{M}_k$, arbitrairement proche de f , et $N \geq 1$ tels que $g^N(C(g) \cap \mathcal{J}_g) \subset E_g$ et $\dim_H(E_g \cap \mathbb{D}(g^N(c_j(g)), \eta)) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon$. À l'aide d'un mouvement holomorphe nous allons construire des applications de transfert qui "recopient" une partie de $E_g^k \times \mathbb{C}^{2d+1-k}$ au voisinage de g dans $\mathfrak{M}_k$ et qui possèdent de bonnes propriétés de régularité. Finalement, nous estimons précisément la dimension de Hausdorff de ces copies pour obtenir une borne inférieure locale pour la dimension Hausdorff de $\mathfrak{M}_k$ au voisinage de f .

5.1 Rappels sur la dimension de Hausdorff.

Commençons par rappeler la définition de la dimension de Hausdorff d'un ensemble. Soient $\delta > 0$, $t \geq 0$ et E un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) . Un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de E est appelé un δ -recouvrement de E si $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ pour tout $i \in I$. On définit :

$$\mathcal{H}_\delta^t(E) := \inf \left\{ \sum_{i \in I} (\text{diam}(U_i))^t \mid (U_i)_{i \in I} \text{ est un } \delta\text{-recouvrement de } E \right\}.$$

Lorsque δ décroît vers 0, la borne inférieure $\mathcal{H}_\delta^t(E)$ croît. On peut donc définir :

$$\mathcal{H}^t(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^t(E).$$

Cette limite existe pour tout sous-ensemble E de X , mais peut valoir 0 ou $+\infty$. L'application $\mathcal{H}^t$ ainsi définie est une mesure sur X appelée *mesure de Hausdorff t -dimensionnelle*. La fonction $t \mapsto \mathcal{H}^t(E)$ se comporte de la manière suivante :

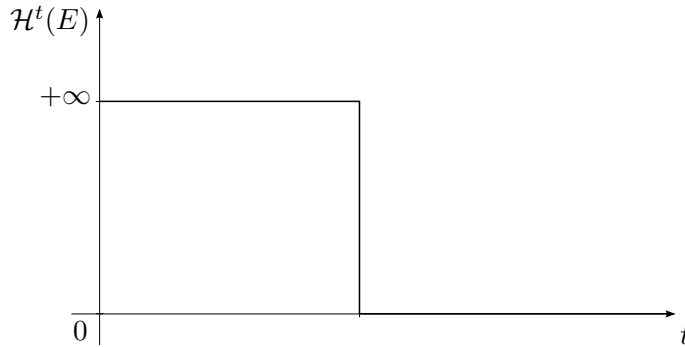


FIGURE 5.1 – Graphe de $t \mapsto \mathcal{H}^t(E)$.

La *dimension de Hausdorff* d'un ensemble $E \subset X$ peut donc être définie par :

$$\dim_H(E) := \inf\{t \geq 0 \mid \mathcal{H}^t(E) = 0\} = \sup\{t \geq 0 \mid \mathcal{H}^t(E) = +\infty\}.$$

On a alors le Lemme suivant (voir [F] Proposition 2.3, page 29) :

Lemme 5.2 Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques.

1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application pour laquelle il existe $C > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ tels que :

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leq C d(x_1, x_2)^\alpha, \forall x_1, x_2 \in X.$$

Alors :

$$\dim_H(f(E)) \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H(E)$$

pour tout ensemble E contenu dans X .

2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application pour laquelle il existe $C > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$ tels que :

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \geq C d(x_1, x_2)^{\frac{1}{\alpha}}, \forall x_1, x_2 \in X.$$

Alors :

$$\dim_H(f(E)) \geq \alpha \dim_H(E)$$

pour tout ensemble E contenu dans X .

Démonstration : • Les démonstrations des deux points étant similaires, nous ne montrerons que le point 2. Soient $\delta > 0$ et $(U_i)_{i \in I}$ un δ -recouvrement de $f(E)$. Pour $i \in I$,

$$\text{diam}(U_i) \geq \text{diam}(f(E) \cap U_i) \geq C \text{diam}(E \cap f^{-1}(U_i))^{\frac{1}{\alpha}}. \quad (5.1.1)$$

Posons $\varepsilon := (\frac{\delta}{C})^\alpha$. L'inégalité 5.1.1 nous montre que le recouvrement $(E \cap f^{-1}(U_i))_{i \in I}$ est un ε -recouvrement de E et que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \text{diam}(U_i)^t &\geq C^t \sum_{i \in I} \text{diam}(E \cap f^{-1}(U_i))^{t/\alpha} \\ &\geq C^t \mathcal{H}_\varepsilon^{t/\alpha}(E). \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{H}_\delta^t(f(E)) \geq C^t \mathcal{H}_\varepsilon^{t/\alpha}(E).$$

Comme ε tend vers 0 si et seulement si δ tend vers 0, cela donne finalement :

$$\mathcal{H}^t(f(E)) \geq C^t \mathcal{H}^{t/\alpha}(E). \quad (5.1.2)$$

• Posons $t = \alpha s$ et supposons que $s < \dim_H(E)$, alors 5.1.2 donne $\mathcal{H}^{\alpha s}(f(E)) \geq C^{\alpha s} \mathcal{H}^s(E) = +\infty$ et $\dim_H(f(E)) \geq \alpha s$. En faisant tendre s vers $\dim_H(E)$ on obtient l'inégalité recherchée. $\square$

Le Lemme suivant est démontré dans [Mc3], page 15 :

Lemme 5.3 Soient Y un espace métrique et $X \subset Y \times [0, 1]^k$. Notons X_t la tranche $X_t := \{y \in Y / (y, t) \in X\}$. Si $X_t \neq \emptyset$ pour presque tout $t \in [0, 1]^k$, alors

$\dim_H(X) \geq k + \dim_H(X_t)$, pour presque tout t .

Démonstration : Il suffit de traiter le cas où $k = 1$. Soit $\delta > 0$ tel que $\delta + 1 > \dim_H(X)$; montrons que $\delta \geq \dim_H(X_t)$ pour presque tout t . Comme $\delta + 1 > \dim_H(X)$, pour tout $n \geq 1$ il existe un recouvrement de X par des ouverts de la forme $B(y_i, r_i) \times I_i$ avec $|I_i| = r_i$ et $\sum_{i \in I} r_i^{\delta+1} < 4^{-n}$. Remarquons que $X_t \subset \bigcup_{i \in I_i} B(y_i, r_i)$ et que

$$\int_0^1 \sum_{t \in I_i} r_i^\delta dt = \sum_{i \in I} r_i^{\delta+1} < 4^{-n}. \quad (5.1.3)$$

Posons $E_n := \{t \in [0, 1] / \sum_{t \in I_i} r_i^\delta \geq 2^{-n}\}$ pour $n \geq 1$ et notons Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Alors 5.1.3 entraîne

$$\sum_{n \geq 1} Leb(E_n) \leq \sum_{n \geq 1} 2^{-n} < +\infty.$$

D'après le Lemme de Borel-Cantelli, cela signifie que presque tout $t \in [0, 1]$ appartient au plus à un nombre fini de E_n . Autrement dit, presque tout X_t admet un recouvrement par des ensembles de diamètres r_i tels que $\sum r_i^\delta < 2^{-n}$ et n est arbitrairement grand. Ainsi $\delta \geq \dim_H(X_t)$ pour presque tout t . $\square$

Les inégalités de Harnack permettent de montrer qu'un mouvement holomorphe est bi-Hölder par rapport à la variable "dynamique" (voir [Du1], Lemme 1.1). Par la suite, nous combinerons cette estimation avec le Lemme 5.2.

Lemme 5.4 Soient $E \subset \mathbb{P}^1$ et $h : \mathbb{B}(0, r) \times E \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe de E . Alors, pour tout $z_0 \in E$, il existe $0 < r_1 \leq r$ et $\eta > 0$ tels que pour tout $0 < r' < r_1$ il existe des constantes $C(r'), C'(r') > 0$ pour lesquelles :

$$C'(r')|z - z'|^{\frac{r_1 + \|\lambda\|}{r_1 - \|\lambda\|}} \leq |h(\lambda, z) - h(\lambda, z')| \leq C(r')|z - z'|^{\frac{r_1 - \|\lambda\|}{r_1 + \|\lambda\|}} \quad (5.1.4)$$

pour tout $z, z' \in \mathbb{D}(z_0, \eta) \cap E$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r')$.

Démonstration : Soit $z_0 \in E$. Par continuité de h , il existe $0 < \eta < 1$ et $0 < r_1 \leq r$ tels que

$$|h(\lambda, z) - h(\lambda, z_0)| < 1$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r_1)$ et tout $z \in \mathbb{D}(z_0, \eta) \cap E$. Fixons alors $z, z' \in \mathbb{D}(z_0, \eta) \cap E$ distincts et $\lambda \in \mathbb{B}(0, r_1) \setminus \{0\}$ et posons

$$g_{z, z'}^\lambda(t) := -\log \frac{|h(r_1 t \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z) - h(r_1 t \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z')|}{2}, \quad t \in \mathbb{D}.$$

Comme $z \neq z'$ et $z, z' \in \mathbb{D}(z_0, \eta) \cap E$ on a

$$0 < |h(r_1 t \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z) - h(r_1 t \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z')| < 2$$

pour tout $t \in \mathbb{D}$ et la fonction $g_{z,z'}^\lambda$ est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}$. Les inégalités de Harnack entraînent

$$\frac{1-|t|}{1+|t|} g_{z,z'}^\lambda(0) \leq g_{z,z'}^\lambda(t) \leq \frac{1+|t|}{1-|t|} g_{z,z'}^\lambda(0)$$

pour tout $t \in \mathbb{D}$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{|z-z'|}{2} \right)^{\frac{1+|t|}{1-|t|}} \leq \frac{|h(rt \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z) - h(rt \frac{\lambda}{\|\lambda\|}, z')|}{2} \leq \left(\frac{|z-z'|}{2} \right)^{\frac{1-|t|}{1+|t|}}$$

pour $t \in \mathbb{D}$. Pour $t = \|\lambda\|/r_1$ cela devient

$$\left(\frac{|z-z'|}{2} \right)^{\frac{r_1+\|\lambda\|}{r_1-\|\lambda\|}} \leq \frac{|h(\lambda, z) - h(\lambda, z')|}{2} \leq \left(\frac{|z-z'|}{2} \right)^{\frac{r_1-\|\lambda\|}{r_1+\|\lambda\|}}.$$

Pour conclure, il suffit de poser $C(r') := 2^{\frac{2r'}{r_1+r'}}$ et $C'(r') := 2^{\frac{-2r'}{r_1-r'}}$ pour $0 < r' < r_1$. $\square$

5.2 Perturbations de $f \in \mathfrak{M}_k$: une application de la transversalité.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in X}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie d'un point critique marqué c , qui est actif en $\lambda_0 \in X$. Soit $E \subset \mathcal{J}_{\lambda_0}$ un compact f_{λ_0} -hyperbolique contenant au moins trois points et h_λ un mouvement holomorphe dynamique. Une application bien connue du Théorème de Montel est que l'on peut trouver $\lambda_1 \in X$, arbitrairement proche de λ_0 , et $n_1 \geq 1$ tels que $f_{\lambda_1}^{n_1}(c(\lambda_1)) \in h_{\lambda_1}(E)$. Cependant, on ne sait pas en général comment étendre ce résultat au cas de deux, ou plus, points critiques actifs. Le Lemme de transversalité 4.11 autorise une telle généralisation dans le cas où f_{λ_0} est Misiurewicz.

Lemme 5.5 *Soient $f_{\lambda_0} \in \mathfrak{M}_k$ et $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d telle que $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B}(\lambda_0, r) = 2d + 1$. Supposons que $\{f_\lambda / \lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, r)\}$ est un voisinage de f_{λ_0} dans Rat_d . Soit $E \subset \mathcal{J}_{\lambda_0}$ un compact f_{λ_0} -hyperbolique contenant au moins trois points. Alors il existe un mouvement holomorphe dynamique $h : \mathbb{B}(\lambda_0, \rho) \times E \rightarrow \mathbb{P}^1$ de E et, pour tout $0 < \varepsilon < \rho$, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{B}(\lambda_0, \varepsilon)$ et un entier $N_1 \geq 1$ tel que $f_{\lambda_1} \in \mathfrak{M}_k$ et $f_{\lambda_1}^{N_1}(c_j(\lambda_1)) \in h_{\lambda_1}(E)$ pour $1 \leq j \leq k$.*

Démonstration : Puisque f_{λ_0} est à points critiques simples, quitte à réduire r , on peut supposer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_0, r)}$ est munie de $2d - 2$ points critiques marqués. Nous allons montrer un résultat un peu plus général que l'on peut énoncer comme suit :

Fait 1 *Soient E_1 et E_2 deux compacts $f_{\lambda_{p+1}}$ -hyperboliques. Supposons que E_2 contient au moins trois points distincts. Soit $h : \mathbb{B}(\lambda_{p+1}, \rho_{p+1}) \times (E_1 \cup E_2) \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique. Supposons que*

$$f_{\lambda_{p+1}}^{k_0}(c_1(\lambda_{p+1})), \dots, f_{\lambda_{p+1}}^{k_0}(c_p(\lambda_{p+1})) \in E_1 \text{ et } f_{\lambda_{p+1}}^{k_0}(c_{p+1}(\lambda_{p+1})), \dots, f_{\lambda_{p+1}}^{k_0}(c_k(\lambda_{p+1})) \in E_2.$$

Alors pour tout $0 < \varepsilon < \rho_{p+1}$, il existe $\lambda_p \in \mathbb{B}(\lambda_{p+1}, \varepsilon/k) \cap \mathfrak{M}_k$ et $N_p \geq k_0$ pour lesquels

$$f_{\lambda_p}^{N_p}(c_1(\lambda_p)), \dots, f_{\lambda_p}^{N_p}(c_{p-1}(\lambda_p)) \in h_{\lambda_p}(E_1) \text{ et } f_{\lambda_p}^{N_p}(c_p(\lambda_p)), \dots, f_{\lambda_p}^{N_p}(c_k(\lambda_p)) \in h_{\lambda_p}(E_2).$$

Pour conclure, fixons un mouvement holomorphe dynamique $h : \mathbb{B}(\lambda_0, \rho) \times (E_1 \cup E_2) \longrightarrow \mathbb{P}^1$, où $E_1 = p^{k_0}(f_{\lambda_0})$ et $E_2 = E$. En prenant $0 < \varepsilon < \rho$ et en appliquant k fois le Fait 1 en gardant le même mouvement holomorphe h à chaque étape, on prouve le Lemme. $\square$

Démonstration du Fait 1 : Soient $\chi : \mathbb{B}(\lambda_{p+1}, \rho_{p+1}) \longrightarrow \mathbb{C}^k$ l'application d'activité de la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_{p+1}, r)}$ associée à h en $\lambda = \lambda_{p+1}$ et $0 < \varepsilon < \rho_{k+1}$. D'après le Lemme 4.11 et le Lemme 3.8, le point critique c_p est actif en λ_{p+1} dans la famille $X_{p+1} := \chi_1^{-1}\{0\} \cap \dots \cap \chi_{p-1}^{-1}\{0\} \cap \chi_{p+1}^{-1}\{0\} \cap \dots \cap \chi_k^{-1}\{0\}$. D'après le Théorème de Montel, il existe $\lambda_p \in X \cap \mathbb{B}(\lambda_{p+1}, \varepsilon/k)$ et $N_p \geq k_0$ tels que $f_{\lambda_p}^{N_p}(c_p(\lambda_p)) \in h_{\lambda_p}(E_2)$.

Puisque $\lambda_p \in X_0$ et $N_p \geq k_0$ on trouve $f_{\lambda_p}^{N_p}(c_j(\lambda_p)) \in h_{\lambda_p}(E_1)$ si $1 \leq j \leq p-1$ et $f_{\lambda_p}^{N_p}(c_j(\lambda_p)) \in h_{\lambda_p}(E_2)$ si $p+1 \leq j \leq k$. D'après la Proposition 3.4, il est alors clair que $f_{\lambda_p} \in \mathfrak{M}_k$. $\square$

Il sera crucial dans la démonstration du Théorème 5.1 d'observer que, sous une petite perturbation, tous les points critiques actifs de $f \in \mathfrak{M}_k$ peuvent être capturés par un compact hyperbolique de "grande" dimension de Hausdorff.

Lemme 5.6 *Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $f \in \mathfrak{M}_k$. Soient $V_0 \subset \text{Rat}_d$ un voisinage de f et $F_0 \subset \mathcal{J}_f$ un compact f -hyperbolique homogène tel que $\dim_H(F_0) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - \varepsilon$. Alors on peut trouver f_t arbitrairement proche de f et un compact f_t -hyperbolique F_t tel que $f_t^N(C(f_t) \cap \mathcal{J}_{f_t}) \subset F_t$ pour un certain $N \geq 1$ et $\dim_H(U_t \cap F_t) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon$ pour tout ouvert U_t intersectant F_t .*

Démonstration : Supposons que $f = f_0$ où $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$ est une famille holomorphe, $f_\lambda \in V_0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B}(0, r) = 2d+1$. Soit $h : \mathbb{B}(0, r) \times F_0 \cup P^{k_0}(f) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique et $F_\lambda := h_\lambda(F_0)$. Il ressort du Lemme 5.4 et de l'homogénéité de F_0 , qu'il existe $0 < r_1 \leq r$ tel que :

$$\dim_H(F_\lambda \cap U_\lambda) \geq \frac{r_1 - \|\lambda\|}{r_1 + \|\lambda\|} \dim_H(F_0) \quad (5.2.5)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, r_1/2)$ et tout ouvert $U_\lambda \subset \mathbb{P}^1$ intersectant F_λ .

Supposons que $\mathcal{J}_0 \cap C(f_0) = \{c_1(0), \dots, c_k(0)\}$. Soit $0 < \tau < 1/2$. Grâce au Lemme 5.5, on sait qu'il existe $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, \tau r_1)$ et $N \geq 1$ satisfaisant $f_{\lambda_0}^N(c_j(\lambda_0)) \in F_{\lambda_0} = h_{\lambda_0}(F_0)$ pour tout $1 \leq j \leq k$. D'après 5.2.5 on a $\dim_H(F_{\lambda_0} \cap U_{\lambda_0}) \geq \frac{1-\tau}{1+\tau} \dim_H(F_0) \geq \frac{1-\tau}{1+\tau} (\dim_{\text{hyp}}(f) - \varepsilon)$ et on conclut en prenant τ assez petit. $\square$

5.3 Les applications de transfert.

Commençons par donner une définition formelle des applications de transfert. On justifiera ensuite leur existence et on étudiera leurs propriétés de régularité.

Dans ce qui suit, nous allons écrire $\lambda \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{2d+1-k}$ sous la forme $\lambda = \lambda' + \lambda''$ avec $\lambda' \in \mathbb{C}^k$ et $\lambda'' \in \mathbb{C}^{m-k}$. De façon similaire, on notera $\mathbb{B}'(0', r')$ (resp. $\mathbb{B}''(0'', r'')$) la boule de $\mathbb{C}^k$ (resp. $\mathbb{C}^{m-k}$)

de rayon r' (resp. r'') centrée à l'origine. Finalement, on note $\mathbb{D}_\eta^k(z_0) \subset (\mathbb{P}^1)^k$ le polydisque de rayon η centré en $z_0 \in (\mathbb{P}^1)^k$.

Définition 5.1 Soit $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d munie de $2d-2$ points critiques marqués $c_1(\lambda), \dots, c_{2d-2}(\lambda)$ et paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0,r) \subset \mathbb{C}^m$, $m \geq k$. Supposons que g_0 est k -Misiurewicz et que $g_0^N(c_j(0)) \in E_0$, où E_0 est un compact g_0 -hyperbolique, pour $j \leq k$. Notons $z_0 := (g_0^N(c_1(0)), \dots, g_0^N(c_k(0)))$ et considérons $h : \mathbb{B}(0,\rho) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe qui induit un mouvement holomorphe dynamique de E_0 , ($\rho \leq r$). Posons $\mathcal{X}_j(\lambda, z) := g_\lambda^N(c_j(\lambda)) - h_\lambda(z)$ et :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} : \mathbb{B}(0,\rho) \times (\mathbb{P}^1)^k &\longrightarrow (\mathbb{P}^1)^k \\ (\lambda, z) &\longmapsto (\mathcal{X}_1(\lambda, z), \dots, \mathcal{X}_k(\lambda, z)). \end{aligned}$$

Les applications de transfert associées à h consistent en une famille d'applications

$$T_{\lambda''} : \mathbb{D}_\eta^k(z_0) \longrightarrow \mathbb{B}'(0', \delta')$$

définies pour $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$, $(\delta', \delta'' \leq \rho)$ et telles que

$$\mathcal{X}(T_{\lambda''}(z) + \lambda'', z) = 0.$$

Remarque 5.2

1. Soit χ l'application d'activité de $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ associée à h en $\lambda = 0$ (voir Section 3.2), alors

$$\mathcal{X}(\lambda, z_0) = \chi(\lambda).$$

2. Il résulte immédiatement du Lemme 4.2 et de la Définition ci-dessus que, quitte à réduire ρ , $T_{\lambda''}(E_0^k) + \lambda'' \subset \mathfrak{M}_k$ pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$. Les applications $T_{\lambda''}$ transfèrent donc des copies de $E_0^k \cap \mathbb{D}_\eta^k(z_0)$ dans $\mathfrak{M}_k$.

Justifions maintenant l'existence de telles applications de transfert dans le contexte suivant : soient $g \in \mathfrak{M}_k$ et V_0 un voisinage de g dans Rat_d . Supposons que $g = g_0$, où $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ est une famille holomorphe paramétrée par une boule $\mathbb{B}(0,r) \subset \mathbb{C}^{2d+1}$ et où $g_\lambda \in V_0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0,r)$. Supposons aussi que $g_0^N(c_j(0)) \in E_0$, où E_0 un compact g_0 -hyperbolique, pour $j \leq k$.

Soient $0 < \varepsilon < 1$ et $h : \mathbb{B}(0,r) \times E_0 \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique. D'après le Théorème de Bers-Royden (voir [BR] Théorème 3), le mouvement h s'étend en un mouvement holomorphe continu $h : \mathbb{B}(0,\rho) \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, avec $\rho := r/3$. Bien que l'application $\mathcal{X}$ définie ci-dessus ne soit pas un mouvement holomorphe, elle en hérite des propriétés de Hölder régularité.

Lemme 5.7 *L'application $\mathcal{X}$ est continue sur $\mathbb{B}(0, \rho) \times (\mathbb{P}^1)^k$ et*

1. $\mathcal{X}(\cdot, z)$ est holomorphe sur $\mathbb{B}(0, \rho)$ pour tout $z \in (\mathbb{P}^1)^k$,
2. $\mathcal{X}(\lambda, \cdot)$ est injective sur $(\mathbb{P}^1)^k$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho)$.

De plus, il existe $0 < \rho_1 \leq \rho$ et $\eta > 0$ pour lesquels pour tout $0 < \rho' < \rho_1$, il existe des constantes $C(\rho'), C'(\rho') > 0$ telles que pour tout $z_0 \in (\mathbb{P}^1)^k$:

$$C'(\rho') \|z - w\|^{\frac{\rho_1 + \|\lambda\|}{\rho_1 - \|\lambda\|}} \leq \|\mathcal{X}(\lambda, z) - \mathcal{X}(\lambda, w)\| \leq C(\rho') \|z - w\|^{\frac{\rho_1 - \|\lambda\|}{\rho_1 + \|\lambda\|}}$$

pour tout $z, w \in \mathbb{D}_\eta^k(z_0)$ et tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \rho')$.

Démonstration : La continuité, ainsi que l'holomorphie en λ et l'injectivité en z découlent immédiatement de la définition de $\mathcal{X}$. Soit $z_0 = (z_{0,1}, \dots, z_{0,k}) \in (\mathbb{P}^1)^k$, d'après le Lemme 5.4, puisque $(\mathbb{P}^1)^k$ est compact, il existe $0 < \rho_1 \leq \rho$ et $\eta > 0$ pour lesquels pour tout $0 < \rho' < \rho_1$, il existe des constantes $C_1(\rho'), C'_1(\rho') > 0$ indépendantes de z_0 et λ telles que pour tout $1 \leq i \leq k$

$$C'_1(\rho') |z_i - w_i|^{\frac{\rho_1 + \|\lambda\|}{\rho_1 - \|\lambda\|}} \leq |\mathcal{X}_i(\lambda, z_i) - \mathcal{X}_i(\lambda, w_i)| \leq C_1(\rho') |z_i - w_i|^{\frac{\rho_1 - \|\lambda\|}{\rho_1 + \|\lambda\|}}$$

pour tout $z_i, w_i \in \mathbb{D}(z_{0,i}, \eta)$. En passant trois fois au sup sur i on trouve l'estimation voulue. $\square$

D'après le Lemme 4.11 et le point (1) de la Remarque 5.2, l'ensemble analytique $\{\mathcal{X}(\lambda, z_0) = 0\}$ est de codimension k . Ainsi, quitte à changer de coordonnées et à réduire ε on peut supposer que $\mathbb{C}^{2d+1} = \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{2d+1-k}$ et

$$\{\lambda' \in \mathbb{B}'(0', \varepsilon \rho_1) / \mathcal{X}(\lambda', z_0) = 0\} = \{0'\}.$$

Notons $p \geq 1$ la multiplicité de $0'$ en tant que zéro de $\mathcal{X}(\cdot, z_0)$ dans $\mathbb{B}'(0', \varepsilon \rho_1)$. Le Lemme suivant assure l'existence des applications de transfert :

Lemme 5.8 *Il existe $\delta', \delta'', \eta_1 > 0$, tels que :*

1. $\mathbb{B}'(0', \delta') \times \mathbb{B}''(0'', \delta'') \subset \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$,
2. pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$ et tout $z \in \mathbb{D}_{\eta_1}^k(z_0)$, l'application $\mathcal{X}(\cdot + \lambda'', z)$ a exactement p racines comptées avec multiplicités dans $\mathbb{B}'(0', \delta')$.

Démonstration : Soit $\delta' > 0$ tel que $\mathcal{X}(\lambda', z_0) \neq 0$ sur $\partial \mathbb{B}'(0', \delta')$. On a alors

$$0 = |\mathcal{X}(\lambda', z_0) - \mathcal{X}(\lambda', z_0)| < |\mathcal{X}(\lambda', z_0)|$$

pour tout $\lambda' \in \partial \mathbb{B}'(0', \delta')$. Comme la fonction $|\mathcal{X}(\lambda' + \lambda'', z) - \mathcal{X}(\lambda', z_0)| - |\mathcal{X}(\lambda', z_0)|$ est continue, il existe $0 < \delta'' \leq \delta'$ et $\eta_1 > 0$ tels que

$$|\mathcal{X}(\lambda' + \lambda'', z) - \mathcal{X}(\lambda', z_0)| - |\mathcal{X}(\lambda', z_0)| < 0$$

pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$ et tout $z \in \mathbb{D}_{\eta_1}^k(z_0)$. Quitte à réduire δ' et δ'' on peut supposer que $\mathbb{B}'(0', \delta') \times \mathbb{B}''(0'', \delta'') \subset \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$. Un Théorème à la Rouché (voir [C], Théorème 1 section 10.3 page 110) stipule que pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0, \delta'')$ et tout $z \in \mathbb{D}_{\eta_1}^k(z_0)$, l'application $\mathcal{X}(\cdot + \lambda'', z)$ a exactement p racines comptées avec multiplicités dans $\mathbb{B}'(0', \delta')$. $\square$

La Proposition suivante résume les propriétés des applications de transfert, notamment les propriétés de régularité nécessaires à la démonstration du Théorème 5.1 :

Proposition 5.9 *Il existe $\rho_1 > 0$ et $0 < \varepsilon_0 < 1$ tels que pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, il existe $\eta > 0$ et $0 < \delta' \leq \delta'' \leq \varepsilon \rho_1$ pour lesquels :*

1. *les applications $T_{\lambda''} : \mathbb{D}_{\eta}^k(z_0) \longrightarrow \mathbb{B}'(0', \delta')$ introduites dans la Définition 5.1 existent,*
2. *il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :*

$$\|T_{\lambda''}(z_1) - T_{\lambda''}(z_2)\| \geq C_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$ et tout $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_{\eta}^k(z_0)$,

3. *$T_{\lambda''}(\mathbb{D}_{\eta}^k(z_0) \cap (E_0)^k) + \lambda'' \subset \mathfrak{M}_k \cap \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$ pour tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$.*

Démonstration : Le point (1) est une conséquence du Lemme 5.8 et le point (3) n'est autre qu'une partie de la Remarque 5.2. Il reste donc à établir le point (2). D'après le Lemme 5.7 il existe $0 < \eta \leq \frac{1}{2}$, $\rho_1 > 0$ et des constantes $C_\varepsilon, C'_\varepsilon > 0$ telles que pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$ et tout $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_{\eta}^k(z_0)$, l'application $\mathcal{X}$ vérifie :

$$C'_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{\rho_1 + \|\lambda\|}{\rho_1 - \|\lambda\|}} \leq \|\mathcal{X}(\lambda, z_1) - \mathcal{X}(\lambda, z_2)\| \leq C_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{\rho_1 - \|\lambda\|}{\rho_1 + \|\lambda\|}}.$$

De plus, puisque $\|z_1 - z_2\| < 1$,

$$C'_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \leq \|\mathcal{X}(\lambda, z_1) - \mathcal{X}(\lambda, z_2)\| \leq C_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}. \quad (5.3.6)$$

Comme $\mathcal{X}$ est continue en les deux variables et holomorphe en λ sur $\mathbb{B}(0, \rho_1)$, il existe $\tilde{C}_{\varepsilon, \eta} > 0$ telle que

$$\|\mathcal{X}(\lambda_1, z) - \mathcal{X}(\lambda_2, z)\| \leq \tilde{C}_{\varepsilon, \eta} \|\lambda_1 - \lambda_2\| \quad (5.3.7)$$

pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$ et tout $z \in \mathbb{D}_{\eta}^k(z_0)$. En combinant 5.3.6 et 5.3.7 on trouve :

$$\|\mathcal{X}(\lambda_1, z_1) - \mathcal{X}(\lambda_2, z_2)\| \geq C'_\varepsilon \|z_1 - z_2\|^{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} - \tilde{C}_{\varepsilon, \eta} \|\lambda_1 - \lambda_2\|$$

pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{B}(0, \varepsilon \rho_1)$ et tout $z_1, z_2 \in \mathbb{D}_{\eta}^k(z_0)$. Évalué en $\lambda_1 = T_{\lambda''}(z_1) + \lambda''$ et $\lambda_2 = T_{\lambda''}(z_2) + \lambda''$, cela donne l'inégalité annoncée. $\square$

5.4 Estimées locales de dimension de Hausdorff.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 5.1. Soient $f \in \mathfrak{M}_k$ et V_0 un voisinage de f dans Rat_d . Soient $0 < \varepsilon < 1$ et F_0 un compact f -hyperbolique homogène tel que $\dim_H(F_0) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - \varepsilon$. Supposons que $f = f_0$, où $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, R)}$ est une famille holomorphe de fractions rationnelles et $f_\lambda \in V_0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0, R)$, avec $\dim \mathbb{B}(0, R) = 2d + 1$.

D'après le Lemme 5.6, il existe $\lambda_0 \in \mathbb{B}(0, R/2)$ et un compact f_{λ_0} -hyperbolique F_{λ_0} tels que $f_{\lambda_0}^N(C(f_{\lambda_0}) \cap \mathcal{J}_{f_{\lambda_0}}) \subset F_{\lambda_0}$ pour un certain $N \geq 1$ et tels que $\dim_H(U_j \cap F_{\lambda_0}) \geq \dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon$ pour tout voisinage U_j de $f_{\lambda_0}^N(c_j(\lambda_0))$, pour $1 \leq j \leq k$.

Soit $0 < r \leq R/2$. Posons $E_0 := F_{\lambda_0}$, $g_0 := f_{\lambda_0}$ et $g_\lambda := f_{\lambda + \lambda_0}$. Notons par ailleurs $T_{\lambda''}$ les applications de transfert associées à h dans la famille $(g_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0, r)}$. Soient $\rho_1, \delta', \delta'', \eta$ comme donnés dans la Proposition 5.9. Pour $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$ on pose :

$$\mathcal{E}_{\lambda''} := T_{\lambda''}(\mathbb{D}_\eta^k(z_0) \cap (E_0)^k) + \lambda''.$$

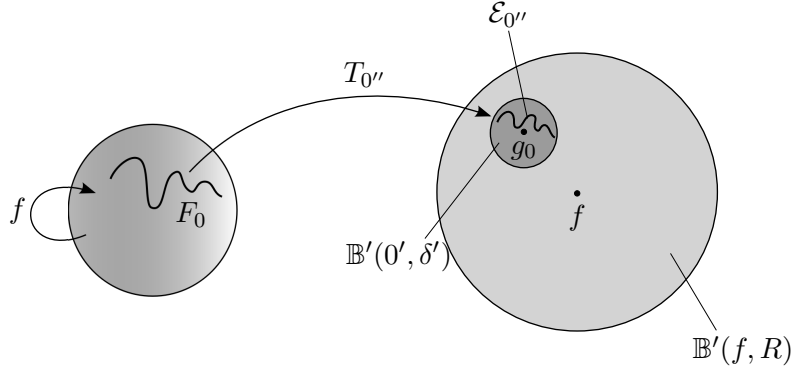


FIGURE 5.2 – Transfert du plan dynamique à l'espace des paramètres.

De la Proposition 5.9 et du Lemme 5.2 on déduit :

$$\dim_H(\mathcal{E}_{\lambda''}) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \dim_H((E_0)^k \cap \mathbb{D}_\eta^k(z_0)) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \sum_{i=1}^k \dim_H(E_0 \cap \mathbb{D}(z_{0,i}, \eta)).$$

Le choix de E_0 donne alors

$$\dim_H(\mathcal{E}_{\lambda''}) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} k(\dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon). \quad (5.4.8)$$

Posons $\mathcal{E} := \{\lambda = \lambda' + \lambda'' \in \mathbb{B}'(0', \delta') \times \mathbb{B}''(0'', \delta'') \mid \lambda' \in \mathcal{E}_{\lambda''}\} \subset \mathbb{B}'(0', \delta') \times \mathbb{B}''(0'', \delta'')$. Le Lemme 5.3 stipule que pour presque tout $\lambda'' \in \mathbb{B}''(0'', \delta'')$ on a

$$\dim_H(\mathcal{E}) \geq \dim_H(\mathbb{B}''(0'', \delta'')) + \dim_H(\mathcal{E}_{\lambda''}). \quad (5.4.9)$$

Puisque $\dim_H(\mathbb{B}''(0'', \delta'')) = 2(2d + 1 - k)$, 5.4.8 et 5.4.9 donnent :

$$\dim_H(\mathcal{E}) \geq 2(2d + 1 - k) + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} k(\dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon).$$

Comme $\mathcal{E} \subset \mathfrak{M}_k \cap V_0$ (voir Proposition 5.9), on trouve :

$$\dim_H(\mathfrak{M}_k \cap V_0) \geq 2(2d + 1 - k) + \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} k(\dim_{\text{hyp}}(f) - 2\varepsilon).$$

On conclut en faisant tendre ε vers 0. □

5.5 Dimension du support de la mesure de bifurcation.

Le Théorème 5.1, combiné au Théorème 3.9 et au Lemme 4.11, nous permet d'établir que la dimension de Hausdorff de $\text{supp}(T_{\text{bif}}^k)$ est maximale dans la famille Rat_d . Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 5.10 1. Dans la famille Rat_d , on a

$$\dim_H(\text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1})) = 2(2d + 1).$$

2. Le support de T_{bif}^{2d-2} est homogène dans Rat_d et $\dim_H(\text{supp}(T_{\text{bif}}^{2d-2})) = 2(2d + 1)$. Ainsi, dans $\mathcal{M}_d$, le support de la mesure de bifurcation μ_{bif} est homogène et

$$\dim_H(\text{supp}(\mu_{\text{bif}})) = 2(2d - 2).$$

Démonstration : Commençons par montrer le point 1. D'après le Théorème 3.9 et d'après le Lemme 4.11, on a $\mathfrak{M}_k \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}^k)$. Par ailleurs, le Théorème 3.12 garantit que, lorsque $f \in \mathfrak{M}_k$, f ne peut pas avoir plus de k points critiques actifs. Ainsi $\mathfrak{M}_k \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}^k) \setminus \text{supp}(T_{\text{bif}}^{k+1})$. D'après le Théorème 5.1, il suffit pour conclure de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in \mathfrak{M}_k$ pour laquelle $\dim_{\text{hyp}}(f) \geq 2 - \epsilon$.

Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ une famille holomorphe de fractions rationnelles de degré d avec $f = f_0$ et $f_\lambda \in V_0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(0,r)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{B}(0,r) = 2d + 1$. Rappelons que l'on avait noté $\chi(\lambda) = (\chi_1(\lambda), \dots, \chi_k(\lambda))$ une application d'activité de $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{B}(0,r)}$ en $\lambda = 0$. Le Lemme 4.11, combiné au Lemme 3.8, stipule que le point critique c_1 est actif en 0 dans $X := \chi_2^{-1}\{0\} \cap \dots \cap \chi_k^{-1}\{0\} \cap \mathbb{B}(0,r)$. D'après le Théorème de Mañé-Sad-Sullivan, il existe $\lambda_1 \in X$, arbitrairement proche de 0, tel que f_{λ_1} a un cycle parabolique non-persistant.

Puisque tout point critique excepté c_1 est passif dans X , son bassin parabolique immédiat contient exactement un point critique, c_1 . Dans ces conditions, d'après le Théorème 1.15, il existe $\lambda_2 \in X$, arbitrairement proche de λ_1 , pour lequel $\dim_{\text{hyp}}(f_{\lambda_2}) > 2 - \epsilon$ et f_{λ_2} admet un cycle neutre qui est non-persistant dans X .

Considérons maintenant $E \subset \mathcal{J}_{\lambda_2}$ un compact f_{λ_2} -hyperbolique homogène avec $\dim_H(E) \geq 2 - \epsilon$ et $h : \mathbb{B}(\lambda_2, \rho) \times E \rightarrow \mathbb{P}^1$ un mouvement holomorphe dynamique ($\rho \leq r - \|\lambda_2\|$). D'après le Lemme 5.4 et le Lemme 5.2, on peut trouver $0 < \rho' < \rho$ tel que

$$\dim_H(h_\lambda(E) \cap U_\lambda) \geq \dim_H(E) - \epsilon$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{B}(\lambda_2, \rho')$ et tout ouvert U_λ intersectant $h_\lambda(E)$. Puisque f_{λ_2} a un cycle neutre non-persistant, le paramètre λ_2 appartient au lieu de bifurcation de $X \cap \mathbb{B}(\lambda_2, \rho')$ et le point critique c_1 est actif en λ_2 . D'après le Théorème de Montel, il existe $\lambda_3 \in X \cap \mathbb{B}(\lambda_2, \rho')$, arbitrairement proche de λ_2 , et $N \geq 1$ tels que $f_{\lambda_3}^N(c_1(\lambda_3)) \in h_{\lambda_3}(E)$ et f_{λ_3} est k -Misiurewicz. De plus, le formalisme thermodynamique permet de montrer que $\dim_{\text{hyp}}(f) = \sup\{\dim_H(E) / E \text{ est un compact } f\text{-hyperbolique}\}$ (voir Section 1.2). On a donc trouvé $f \in \mathfrak{M}_k$ pour laquelle $\dim_{\text{hyp}}(f) \geq 2 - 2\epsilon$.

Montrons maintenant le point 2. On peut le montrer de deux façons différentes : d'après le point 1, l'ensemble $\mathfrak{M}_{2d-2}$ est homogène et est de dimension de Hausdorff maximale $2(2d + 1)$. Une autre manière de le justifier est la suivante : d'après la Proposition 1.13, pour toute fraction rationnelle Misiurewicz $f \in \text{Rat}_d$,

$$\dim_{\text{hyp}}(f) = \dim_H(\mathcal{J}_f).$$

De plus, si $f \in \mathfrak{M}_{2d-2}$ alors $\mathcal{J}_f = \mathbb{P}^1$ (voir Proposition 3.4). D'après le Théorème 5.1, l'ensemble $\mathfrak{M}_{2d-2}$ est donc homogène et est de dimension de Hausdorff maximale. Combiné au Théorème Principal de [BE] et au fait qu'en dehors d'un ensemble analytique, la projection naturelle $\Pi : \text{Rat}_d \longrightarrow \mathcal{M}_d$ est un fibré principal (voir section 1.1.1), cela donne le résultat. $\square$

Expliquons maintenant comment en déduire le Théorème 1. Soient $\mathcal{B} \subset]0, 1[$ l'ensemble des nombres de Brjuno et $\mathcal{C} \subset]0, 1[$ l'ensemble des nombres de rotations de Cremer. D'après le Corollaire 11.5 de [Mi2], l'ensemble $\mathcal{B}$ est de mesure de Lebesgue totale dans $]0, 1[$. En particulier, il est bien dense dans $[0, 1]$. D'après le Corollaire 11.3 de [Mi2], l'ensemble $\mathcal{C}$ est gras au sens de Baire. En particulier, il est dense dans $[0, 1]$. Posons $E_1 = \dots = E_p = \mathbb{Q} \cap]0, 1[$, $E_{p+1} = \dots = E_{p+s} = \mathcal{B}$ et $E_{p+s+1} = \dots = E_{2d-2} = \mathcal{C}$, alors le Théorème 5.10 combiné au Théorème 1.27 donne le Théorème 1.

Chapitre 6

Les courants de bifurcation dans $\mathcal{M}_2$.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au cas particulier de l'espace des modules $\mathcal{M}_2$ des fractions rationnelles quadratiques. Comme nous l'avons rappelé à la section 1.1.5, l'espace des modules $\mathcal{M}_2$ est relativement bien compris. Comme dans le cas des familles de polynômes, on connaît partiellement le comportement du lieu de bifurcation au voisinage de l'infini. Dans ce chapitre, nous utilisons cette compréhension pour montrer que le courant de bifurcation de $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{C}^2$ s'étend naturellement en un $(1,1)$ -courant positif fermé T_{bif} sur $\mathbb{P}^2$. Nous étudions ensuite les singularités de ce courant le long de la droite à l'infini en montrant que des nombres de Lelong reliés à la géométrie de l'ensemble de Mandelbrot y apparaissent. Nous nous intéressons finalement à la mesure de bifurcation μ_{bif} . Nous mettons notamment en lumière une différence fondamentale avec le cas des familles polynomiales : le support de μ_{bif} est non-compact dans $\mathcal{M}_2$.

6.1 Prolongement du courant de bifurcation T_{bif} à $\mathbb{P}^2$.

On note T_{bif} le prolongement trivial du courant $dd^c L$ à $\mathbb{P}^2$. On note aussi

$$\mathfrak{S}_{\text{bif}} := \{[1 : 2 \cos \theta : 0] \in \mathbb{P}^2 / \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Soit ω_2 la forme de Fubini-Study de $\mathbb{P}^2$ normalisée de sorte que ω_2^2 soit une mesure de masse 1 sur $\mathbb{P}^2$. Lorsque T est un (p,p) -courant positif fermé ($p \leq 2$) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{P}^2$ on appelle *masse* de T sur Ω le nombre

$$\|T\|_{\Omega} := \int_{\Omega} T \wedge \omega_2^{2-p}.$$

On note $\|T\| := \|T\|_{\mathbb{P}^2}$ si T est un courant sur $\mathbb{P}^2$. La quantité $\|T\|$ est la *masse* de T .

Lemme 6.1 *Soit $t \in \mathbb{C}$ tel que $|t| \leq 1$. Supposons que la suite $2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$ converge sur $\mathbb{C}^2$ vers un $(1,1)$ -courant positif fermé T . Alors le prolongement trivial $\tilde{T}$ de T à $\mathbb{P}^2$ est un $(1,1)$ -courant positif fermé de masse $\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{P}^2$, $\text{supp}(\tilde{T}) \subset \text{supp}(T) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}}$ et $\tilde{T} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$.*

Démonstration : Commençons par montrer que le prolongement trivial $\tilde{T}$ du courant T est bien un courant positif fermé de masse au plus $1/2$. Puisque $\text{Per}_n(t) \cap \mathfrak{L}_\infty$ est un ensemble fini (voir Proposition 1.8), on a

$$\|[\text{Per}_n(t)]\|_{\mathbb{C}^2} = \|[\text{Per}_n(t)]\| \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Si $n \geq 2$, d'après la Proposition 1.8, $\text{Per}_n(t) \cap \text{Per}_1(0)$ est relativement compact dans $\mathbb{C}^2$. Ainsi la mesure $[\text{Per}_n(t)]|_{\text{Per}_1(0)}$ est à support compact dans $\mathbb{C}^2$ et de masse $\|[\text{Per}_n(t)]\|_{\mathbb{C}^2}$. En effet, on a $\|[\text{Per}_n(t)]|_{\text{Per}_1(0)}\| = \|[\text{Per}_n(t)] \wedge [\text{Per}_1(0)]\|$ et le Théorème de Bézout donne $\|[\text{Per}_n(t)] \wedge [\text{Per}_1(0)]\| = \|[\text{Per}_n(t)]\| \cdot \|[\text{Per}_1(0)]\|$. D'après le point 1 de la Proposition 1.8, la courbe $\text{Per}_1(0)$ est une droite. En particulier, $\|[\text{Per}_1(0)]\| = 1$.

Par hypothèse, la suite $2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$ converge vers le courant T sur $\mathbb{C}^2$. Ainsi

$$\|T\|_{\mathbb{C}^2} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-n_k} \|[\text{Per}_{n_k}(0)]\|_{\mathbb{C}^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-n_k} \|[\text{Per}_{n_k}(0)]|_{\text{Per}_1(0)}\|,$$

ce qui, d'après le Théorème 1.29, donne $\|T\|_{\mathbb{C}^2} \leq (T_{\text{bif}}|_{\text{Per}_1(0)})(\text{Per}_1(0)) = 1/2 < +\infty$. Le Théorème de Skoda-El Mir stipule que le prolongement trivial de T à $\mathbb{P}^2$ est bien un $(1,1)$ -courant positif fermé (voir [Dem], Théorème 2.3 page 139) de masse au plus $1/2$.

D'après la Proposition 1.8, la courbe $\text{Per}_n(t)$ est de masse $\|[\text{Per}_n(t)]\| \leq 2^{n-1}$, ce qui implique que la suite de courants $2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$ est bornée et admet donc des sous-suites convergentes. Supposons, quitte à extraire, que la suite $(2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)])_{k \geq 1}$ converge et notons T_∞ sa limite. Le Théorème de Siu donne $\alpha \geq 0$ et un courant S_∞ qui ne charge pas $\mathfrak{L}_\infty$ tels que

$$T_\infty = \alpha[\mathfrak{L}_\infty] + S_\infty.$$

Remarquons que l'on a alors $\alpha + \|S_\infty\| = \frac{1}{2}$. Il reste à montrer que $\text{supp}(\tilde{T}) \subset \text{supp}(T) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}}$ et que $\tilde{T} = S_\infty$ pour conclure.

On a deux possibilités : soit $\alpha = 0$, soit le courant T_∞ charge la droite à l'infini $\mathfrak{L}_\infty$. Notons $\Omega := \bigcup_{|u| < 1} (\text{Per}_1(u) \setminus \mathbf{M}_u)$, où $\mathbf{M}_u$ est le lieu de connexité de la droite $\text{Per}_1(u)$ (voir Section 1.1.5), et montrons que la suite $2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$ converge vers 0 sur l'ouvert Ω , c'est-à-dire que $\alpha = 0$. D'après la Proposition 1.8, on a $\Omega \cap \mathfrak{L}_\infty = \mathfrak{L}_\infty \setminus \mathfrak{S}_{\text{bif}}$. Supposons qu'il existe $\zeta \in \Omega \cap \mathfrak{L}_\infty$ qui est un point d'accumulation des courbes $\text{Per}_{n_k}(t)$. Alors $\zeta \in \text{Per}_1(u_0)$ pour un certain $u_0 \in \mathbb{D}$ et il existe une suite $n_{k_j} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} +\infty$ et une suite $\lambda_k \in \text{Per}_{n_{k_j}}(t) \cap \text{Per}_1(u_j) \cap \mathbb{C}^2$ qui converge vers ζ avec $u_j \sim u_0$. Soit $\epsilon > 0$ pour lequel $|u_0| + \epsilon < 1$. Pour $j \geq j_0$ assez grand, on a $|u_j| \leq |u_0| + \epsilon$. Le Théorème 1.9 nous permet d'affirmer qu'il existe une suite $c_j \in \mathbf{M}$ telle que $\lambda_j = \sigma_{c_j}(u_j)$ et que $\lambda_j \in \bigcup_{|u| \leq |u_0| + \epsilon} \mathbf{M}_u$ pour $j \geq j_0$. Puisque $\bigcup_{|u| \leq |u_0| + \epsilon} \mathbf{M}_u$ est compact dans $\mathbb{C}^2$, ceci contredit l'hypothèse $\zeta \in \mathfrak{L}_\infty$.

On a donc montré que $\alpha = 0$ et $T_\infty = S_\infty$. Le courant S_∞ ne chargeant pas la droite à l'infini d'après le Théorème de Siu, il est le prolongement trivial de $S_\infty|_{\mathbb{C}^2}$ à $\mathbb{P}^2$. Puisque la suite $2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$ converge vers T sur $\mathbb{C}^2$ et puisque $S_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^{-n_k}[\text{Per}_{n_k}(t)]$, on a $T = S_\infty|_{\mathbb{C}^2}$, c'est-à-dire que $\tilde{T} = S_\infty$. Finalement, puisque $\text{supp}(\tilde{T}) = \text{supp}(T) \subset \bigcup_{k \geq 1} \text{Per}_{n_k}(t)$, la Proposition 1.8 donne $\text{supp}(\tilde{T}) \subset \text{supp}(T) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}}$. $\square$

Compte tenu du Théorème 1.29, lorsque $t \in \mathbb{D}$, le Lemme 6.2 donne :

Lemme 6.2 *Le prolongement trivial T_{bif} de $dd^c L$ à $\mathbb{P}^2$ est un $(1, 1)$ -courant positif fermé de masse $1/2$. De plus, $\text{supp}(T_{\text{bif}}) = \text{supp}(T_{\text{bif}}|_{\mathbb{C}^2}) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}}$. En particulier, le courant T_{bif} ne charge pas la droite $\mathfrak{L}_\infty$. Finalement, la suite $(2^{-n}[\text{Per}_n(t)])_{n \geq 1}$ converge au sens des courants dans $\mathbb{P}^2$ vers T_{bif} pour tout $t \in \mathbb{D}$. En particulier, $\deg_\lambda(p_n(\lambda, t)) \sim 2^{n-1}$.*

Démonstration : La seule chose qu'il reste à prouver est l'inclusion

$$\text{supp}(T_{\text{bif}}|_{\mathbb{C}^2}) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}} \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}).$$

Remarquons que, d'après le Théorème 1.6 de Mañé-Sad-Sullivan,

$$\bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \text{Per}_1(e^{i\theta}) \cap \mathbb{C}^2 \subset \text{supp}(T_{\text{bif}}|_{\mathbb{C}^2}).$$

De plus, la Proposition 1.8 permet d'affirmer que $\text{Per}_1(e^{i\theta}) \cap \mathfrak{L}_\infty = \{[1 : 2 \cos \theta : 0]\}$. Ceci donne donc $\text{supp}(T_{\text{bif}}|_{\mathbb{C}^2}) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}} \subset \text{supp}(T_{\text{bif}})$. $\square$

6.2 Nombres de Lelong de T_{bif} à l'infini.

Puisque la fonction de Lyapounov est continue sur $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{C}^2$, le courant T_{bif} ne possède aucun nombre de Lelong non-nul dans $\mathbb{C}^2$. Nous montrons ici que le courant T_{bif} possède des nombres de Lelong à l'infini. Rappelons que $\infty_{p/q} = [1 : 2 \cos(2i\pi p/q) : 0]$ est le point de la droite à l'infini vers lequel s'échappe $\sigma(\{t\} \times \mathcal{L}_{p/q})$ lorsque t tend non-tangentiellement vers $e^{-2i\pi p/q}$ (voir [Pe] Corollaire 2). Nous montrons ici que le nombre de Lelong $\nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q})$ correspond à la masse pour la mesure $\mu_{\mathbf{M}}$ de bifurcation de la famille $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ des membres $\mathcal{L}_{p/q}$ et $\mathcal{L}_{-p/q}$. Ceci « quantifie » la disparition de ce membre sous le mouvement holomorphe σ . Le résultat suivant utilise de manière centrale les travaux [Eps1] d'Epstein et [BS] de Bullett et Sentenac.

Théorème 6.3 1. *La mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ est bien définie. De plus,*

$$T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty] = \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q}) \delta_{\infty_{p/q}} = \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1} \delta_{\infty_{p/q}}.$$

2. *Les nombres de Lelong de T_{bif} sont donnés par*

$$\nu(T_{\text{bif}}, a) = \begin{cases} \mu_{\mathbf{M}}(\mathcal{L}_{p/q} \cup \mathcal{L}_{-p/q}) = \frac{1}{2^q - 1} & \text{si } a = \infty_{p/q}, \\ 0 & \text{si } a \notin \{\infty_{p/q} / p \wedge q = 1, 1 \leq p \leq q/2\}. \end{cases}$$

3. *Pour tout $w \in \mathbb{C}$, la suite $(2^{-n}[\text{Per}_n(w)] \wedge [\mathfrak{L}_\infty])_{n \geq 1}$ converge vers la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$.*

Démonstration : Commençons par prouver que la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ est bien définie. Pour cela, nous devons tout d'abord "changer" la droite à l'infini de $\mathbb{P}^2$ en regardant $\mathbb{P}^2$ comme la réunion de $\text{Per}_1(0)$ et de $\mathbb{C}^2$, de sorte que $\mathfrak{S}_{\text{bif}}$ soit relativement compact dans $\mathbb{C}^2$. Puisque la fonction L est continue sur $\mathcal{M}_2$, on peut trouver une fonction $u \in \mathcal{PSH}(\mathbb{C}^2)$ telle que $T_{\text{bif}}|_{\mathbb{C}^2} = dd^c u$, $\{u = -\infty\} \subset \mathfrak{S}_{\text{bif}}$ et $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{C}^2 \setminus \mathfrak{S}_{\text{bif}})$.

Considérons alors $\mathbb{B}_1 \Subset \mathbb{C}^2$ une boule telle que $\mathfrak{S}_{\text{bif}}$ est compact dans $\mathbb{B}_1$ et $(\mathbb{B}_i)_{i \geq 2}$ un recouvrement de $\mathbb{C}^2 \setminus \mathbb{B}_1$ pour lesquelles $\mathfrak{S}_{\text{bif}} \cap \overline{\mathbb{B}_i} = \emptyset$ pour tout $i \geq 2$. Puisque $\mathfrak{L}_\infty \cap \mathfrak{S}_{\text{bif}} \cap \partial \mathbb{B}_i = \emptyset$ pour tout $i \geq 1$ et puisque $\mathbb{B}_i$ est pseudoconvexe, un résultat de Demailly (voir [Dem] Proposition

4.1 page 150) stipule que la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]_{\mathbb{C}^2}$ est bien définie. Puisque T_{bif} est à potentiel continu sur un voisinage de $\text{supp}(T_{\text{bif}}) \cap \text{Per}_1(0)$, la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ est bien définie.

Puisque L est continue sur $\mathcal{M}_2$, on sait que $\nu(T_{\text{bif}}, a) = 0$ pour tout $a \in \mathcal{M}_2$. D'après le point 3 du Lemme 6.2, la suite $2^{-n}[\text{Per}_n(0)]$ converge au sens des courants vers T_{bif} sur $\mathbb{P}^2$. Fixons $1 \leq p \leq q/2$ avec $p \wedge q = 1$. Un résultat classique (voir section 1.3.1) donne alors :

$$\nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu(2^{-n}[\text{Per}_n(0)], \infty_{p/q}) = \limsup_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \nu([\text{Per}_n(0)], \infty_{p/q}).$$

Par ailleurs, d'après la Proposition 1.10, $\nu([\text{Per}_n(0)], \infty_{p/q}) = D_{p/q}(n)$ est le nombre de composantes n -hyperboliques de $\mathcal{L}_{p/q} \cup \mathcal{L}_{-p/q}$. Le Théorème 1.29 permet alors d'affirmer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \nu([\text{Per}_n(0)], \infty_{p/q}) = \mu_{\mathbf{M}}(\mathcal{L}_{p/q} \cup \mathcal{L}_{-p/q})$$

où $\mu_{\mathbf{M}}$ est la mesure de bifurcation de la famille $(z^2 + c)_{c \in \mathbb{C}}$ des polynômes quadratiques (voir exemple 1.12). Par ailleurs, Bullett et Sentenac ont montré que $\mu_{\mathbf{M}}(\mathcal{L}_{p/q} \cup \mathcal{L}_{-p/q}) = \frac{1}{2^q - 1}$ (voir [BS]). On a donc établi que

$$\nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q}) \geq \frac{1}{2^q - 1}.$$

D'après le Théorème 1.19, on a $\nu(T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty], a) \geq \nu(T_{\text{bif}}, a) \nu([\mathfrak{L}_\infty], a)$ pour $a \in \mathfrak{L}_\infty$ et, comme $\mathfrak{L}_\infty$ est une droite de $\mathbb{P}^2$, cela donne $\nu(T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty], a) \geq \nu(T_{\text{bif}}, a)$ pour $a \in \mathfrak{L}_\infty$. Ainsi, la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ vérifie :

$$T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty] \geq \mu_\infty := \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2, \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1} \delta_{\infty_{p/q}}.$$

Comme les mesures $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ et μ_∞ sont des mesures positives, il suffit de montrer qu'elles ont même masse pour avoir $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty] = \mu_\infty$.

Le Théorème de Bézout, combiné au fait que $\mathfrak{L}_\infty$ est une droite de $\mathbb{P}^2$, donne $\|T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]\| = \|T_{\text{bif}}\| \cdot \|\mathfrak{L}_\infty\| = \|T_{\text{bif}}\|$. D'après le Lemme 6.2, cela donne $\|T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]\| = 1/2$. Notons $\phi(n)$ la fonction d'Euler, c'est-à-dire que $\phi(n)$ est le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à n qui sont premiers avec n , 1 inclu. Puisque l'ensemble $\{1 \leq p \leq q/2, p \wedge q = 1\}$ est en bijection avec l'ensemble $\{q - p / 1 \leq p \leq q/2, p \wedge q = 1\}$, on trouve

$$\begin{aligned} \mu_\infty(\mathbb{P}^2) &= \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2, \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1 \leq p < q, \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q \geq 2} \left(\sum_{\substack{1 \leq p < q, \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{2^q - 1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{2^q - 1}. \end{aligned}$$

Un résultat classique de Théorie des nombres (voir [HW] Théorème 309 page 258) stipule que la série $\sum_{n \geq 1} \phi(n) \frac{x^n}{1-x^n}$ converge localement uniformément sur $\mathbb{D}$ et que sa somme est $\frac{x}{(1-x)^2}$. Ceci donne :

$$\mu_\infty(\mathbb{P}^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{q \geq 1} \frac{\phi(q)}{2^q - 1} - \phi(1) \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{q \geq 1} \frac{\phi(q)(\frac{1}{2})^q}{1 - (\frac{1}{2})^q} - \phi(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

On a donc bien montré le point 1. Pour prouver le point 2, il suffit de remarquer que

$$\frac{1}{2^q - 1} \leq \nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q}) \leq \nu(T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty], \infty_{p/q}) = \frac{1}{2^q - 1}$$

et que $\nu(T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty], a) = 0$ pour tout $a \in \mathfrak{L}_\infty \setminus \{\infty_{p/q} / 1 \leq p \leq q/2 \text{ et } p \wedge q = 1\}$.

Finalement, pour prouver le point 1, on a montré que $2^{-n}[\text{Per}_n(0)] \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ converge vers $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ et la Proposition 1.10 donne $[\text{Per}_n(w)] \wedge [\mathfrak{L}_\infty] = [\text{Per}_n(0)] \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ pour tout $w \in \mathbb{C}$ et tout $n \geq 2$, ce qui donne le point 3. $\square$

6.3 Les mesures μ_{bif} et T_{bif}^2 .

Dans la famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^{d-1}}$ des polynômes de degré d (voir section 1.3.5), le support de la mesure de bifurcation est un compact de $\mathbb{C}^{d-1}$ (voir [DF]). L'espace des modules $\mathcal{M}_2$ est souvent comparé à l'espace des paramètres de la famille $(P_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{C}^2}$. La situation est en effet, assez similaire, puisque dans les deux cas, l'espace des paramètres est $\mathbb{C}^2$ et les fonctions concernées possèdent deux points critiques. On note μ_{bif} la mesure de bifurcation de $\mathcal{M}_2 \simeq \mathbb{C}^2$. Nous commençons cette section en pointant une différence importante entre le cas des polynômes cubiques et le cas des fractions rationnelles quadratiques en montrant que le support de μ_{bif} est non-compact dans $\mathbb{C}^2$. A cette fin, on pose :

$$\lambda_1(s, t) := e^{2i\pi(s-t)} + 2 \cdot \frac{1 - \cos(2\pi t)e^{2i\pi s}}{1 - e^{2i\pi s}} \quad \text{et} \quad \lambda_2(s, t) := 2 \cos(2\pi t)\lambda_1(s, t) + e^{i\pi t} \cos(3\pi t)$$

et on note :

$$\begin{aligned} \Lambda :]0, 1[^2 &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (s, t) &\longmapsto (\lambda_1(s, t), \lambda_2(s, t)). \end{aligned}$$

On note finalement $U := \{(s, t) \in]0, 1[^2 / s \neq 2t \pmod{1} \text{ et } t \neq 1/2\}$.

Proposition 6.4 *La surface réelle $\Lambda(U)$ est contenue dans le support de la mesure de bifurcation μ_{bif} . De plus, pour tout $0 < t < 1$, $t \neq 1/2$, on a*

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Lambda(s, t) = \lim_{s \rightarrow 1} \Lambda(s, t) = [1 : 2 \cos(2\pi t) : 0] \in \mathfrak{L}_\infty.$$

En particulier, le support de μ_{bif} est non-compact dans $\mathbb{C}^2$ et

$$\overline{\text{supp}(\mu_{\text{bif}})} = \text{supp}(\mu_{\text{bif}}) \cup \mathfrak{S}_{\text{bif}}.$$

Démonstration : Soit $(s, t) \in U$. Puisque $\cos(2\pi t) \neq \cos(2\pi(s-t))$, la Proposition 1.8 stipule que les droites $\text{Per}_1(e^{2i\pi t})$ et $\text{Per}_1(e^{2i\pi(s-t)})$ ne s'intersectent pas à l'infini. Elles s'intersectent donc dans $\mathbb{C}^2$. Notons $[f_{s,t}] \in \mathbb{C}^2$ leur point d'intersection. D'après le Théorème 1.27, on a $[f_{s,t}] \in \text{supp}(\mu_{\text{bif}})$. Ainsi, d'après la formule de l'indice holomorphe, le multiplicateur du troisième point fixe de $f_{s,t}$ est donné par :

$$\gamma_{s,t} = \frac{2 - (e^{2i\pi t} + e^{2i\pi(s-t)})}{1 - e^{2i\pi s}} = e^{2i\pi t} + 2 \cdot \frac{1 - \cos(2\pi t)}{1 - e^{2i\pi s}}. \quad (6.3.1)$$

Les coordonnées du point $[f_{s,t}]$ dans $\mathbb{C}^2$ étant les deux fonctions symétriques $(\sigma_1(s, t), \sigma_2(s, t))$ des multiplicateurs des points fixes de $f_{s,t}$, on trouve $\sigma_1(s, t) = \lambda_1(s, t)$. Puisque $[f_{s,t}] \in \text{Per}_1(e^{2i\pi t})$, la Proposition 1.8 donne $\sigma_2(s, t) = \lambda_2(s, t)$. Comme les coordonnées $\lambda_1(s, t)$ et $\lambda_2(s, t)$ sont des fonctions symétriques en les multiplicateurs des points fixes, l'une d'elles tend en module vers l'infini si et seulement si l'un au moins des multiplicateurs tend en module vers $+\infty$. L'équation 6.3.1 permet d'affirmer que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Lambda(s, t) = \lim_{s \rightarrow 1} \Lambda(s, t) \in \mathfrak{L}_\infty$$

et les expressions de λ_1 et λ_2 donnent $\lim_{s \rightarrow 0} \Lambda(s, t) = [1 : 2 \cos(2\pi t) : 0]$. $\square$

Le Théorème d'équidistribution 1.29 de Bassanelli et Berteloot permet aisément de montrer que le support de la mesure μ_{bif} peut être approché par des fractions rationnelles possédant exactement deux cycles attractifs distincts de multiplicateurs prescrits. Plus précisément, il permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 6.5 *Soient $w_1, w_2 \in \mathbb{D}$. Alors $\mu_{\text{bif}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} d^{-(n+m)} [\text{Per}_n(w_1)] \wedge [\text{Per}_m(w_2)]|_{\mathbb{C}^2}$.*

Démonstration : Posons $L_n(\lambda, w) := d^{-n} \log |p_n(\lambda, w)|$. D'après le Théorème 1.29, la suite $dd_\lambda^c L_m(\lambda, w_2)$ converge vers T_{bif} dans la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \text{Per}_n(w_1)}$. Puisque $L_m(\cdot, w_2)|_{\text{Per}_n(w_1)}$ est un potentiel de la mesure $dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1) \wedge dd_\lambda^c L_m(\lambda, w_2)$ et puisque $L|_{\text{Per}_n(w_1)}$ est un potentiel de la mesure $dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1) \wedge T_{\text{bif}}$, ceci donne

$$\lim_{m \rightarrow \infty} dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1) \wedge dd_\lambda^c L_m(\lambda, w_2) = dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1) \wedge T_{\text{bif}}.$$

Comme L est continue, la suite de courants $L dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1)$ converge faiblement vers le courant $L dd^c L$ et par conséquent la suite de mesures $dd_\lambda^c L_n(\lambda, w_1) \wedge dd^c L$ converge vers la mesure $dd^c L \wedge dd^c L$. $\square$

Proposition 6.6 1. *La mesure μ_{bif} vérifie :*

$$\mu_{\text{bif}}(\mathbb{C}^2) \leq \frac{5}{48} - \frac{1}{16} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2}.$$

2. *La mesure $T_{\text{bif}}^2 = T_{\text{bif}} \wedge T_{\text{bif}}$ est bien définie sur $\mathbb{P}^2$ et est de masse $1/4$. De plus, si on note toujours μ_{bif} la mesure μ_{bif} de $\mathbb{C}^2$ prolongée trivialement à $\mathbb{P}^2$, alors il existe une mesure positive non-nulle μ_∞ avec $\text{supp}(\mu_\infty) \subset \mathfrak{S}_{\text{bif}}$ et telle que :*

$$T_{\text{bif}} \wedge T_{\text{bif}} = \mu_{\text{bif}} + \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{(2^q - 1)^2} \delta_{\infty_{p/q}} + \mu_\infty.$$

Démonstration : Commençons par montrer le point 1. D'après le Théorème 6.5, la suite $2^{-(n+m)} [\text{Per}_n(0)] \wedge [\text{Per}_m(0)]$ converge vers μ_{bif} sur $\mathbb{C}^2$ lorsque l'on fait $m \rightarrow +\infty$ puis $n \rightarrow +\infty$, ce qui impose que

$$\mu_{\text{bif}}(\mathbb{C}^2) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-(n+m)} ([\text{Per}_n(0)] \wedge [\text{Per}_m(0)])(\mathbb{C}^2). \quad (6.3.2)$$

On dit qu'une composante hyperbolique $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ est de périodes (n, m) si toute fraction rationnelle $f \in \text{Rat}_2$ pour laquelle $[f] \in \Omega$ possède un cycle attractif de période n et un cycle attractif de période m . Kiwi et Rees ont montré que le nombre de composantes hyperboliques de périodes (n, m) est majoré par :

$$\left(\frac{5}{48} 2^n - \frac{1}{8} \sum_{q=2}^n \frac{\phi(q) \nu_q(n)}{2^q - 1} \right) 2^m + \mathcal{O}(2^m), \quad (6.3.3)$$

où $\nu_q(n) \sim \frac{1}{2(2^q-1)}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ (voir [KR] Théorème 1.1). Puisque les courbes $\text{Per}_n(0)$ et $\text{Per}_m(0)$ s'intersectent transversalement (voir [Eps2] Théorème 2 et Section 5.4) et puisque les composantes hyperboliques de périodes (n, m) sont paramétrées par les multiplicateurs des deux cycles attractifs (voir par exemple [BB2] Théorème 2.8), la masse $([\text{Per}_n(0)] \wedge [\text{Per}_m(0)])(\mathbb{C}^2)$ coïncide avec le nombre de composantes hyperboliques de priodes (n, m) de $\mathcal{M}_2$. L'estimée 6.3.3 donne donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} 2^{-(n+m)} ([\text{Per}_n(0)] \wedge [\text{Per}_m(0)])(\mathbb{C}^2) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \left(\frac{5}{48} 2^n - \frac{1}{8} \sum_{q=2}^n \frac{\phi(q) \nu_q(n)}{2^q - 1} \right) \\ &\leq \frac{5}{48} - \frac{1}{16} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2}. \end{aligned}$$

Combiné à l'assertion 6.3.2, cela donne le point 1.

Montrons maintenant le point 2. Pour montrer que la mesure T_{bif}^2 est bien définie sur $\mathbb{P}^2$, on procède comme au Théorème 6.3 pour démontrer que la mesure $T_{\text{bif}} \wedge [\mathfrak{L}_\infty]$ est bien définie. Comme T_{bif} est de masse 1/2 et comme $\|T_{\text{bif}}^2\| = \|T_{\text{bif}}\|^2$, on trouve bien $\|T_{\text{bif}}^2\| = 1/4$. Par ailleurs, le Théorème 1.19 stipule que $\nu(T_{\text{bif}}^2, \infty_{p/q}) \geq \nu(T_{\text{bif}}, \infty_{p/q})^2 = 1/(2^q - 1)^2$ pour $1 \leq p \leq q/2$ avec $p \wedge q = 1$. Ceci donne immédiatement

$$T_{\text{bif}} \wedge T_{\text{bif}} \geq \mu_{\text{bif}} + \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{(2^q - 1)^2} \delta_{\infty_{p/q}}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'une égalité, alors

$$\frac{1}{4} = \|T_{\text{bif}}^2\| = \|\mu_{\text{bif}}\| + \sum_{\substack{1 \leq p \leq q/2 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{(2^q - 1)^2} = \|\mu_{\text{bif}}\| + \frac{1}{2} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2}.$$

Le point 1 de la Proposition permet alors d'affirmer que :

$$\frac{1}{4} \leq \frac{5}{48} - \frac{1}{16} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2} + \frac{1}{2} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2} = \frac{5}{48} + \frac{7}{16} \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2}.$$

On trouve alors $\frac{1}{3} \leq \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2}$. Puisque $\frac{1}{(2^q - 1)^2} \leq \frac{1}{2^{q-1}(2^q - 1)}$ lorsque $q \geq 2$, ceci donne :

$$\frac{1}{3} \leq \sum_{q \geq 2} \frac{\phi(q)}{(2^q - 1)^2} \leq \frac{\phi(2)}{6} + \frac{\phi(3)}{28} + \frac{1}{8} \sum_{q \geq 4} \frac{\phi(q)}{2^q - 1}.$$

Finalement, comme $\sum_{q \geq 1} \frac{\phi(q)}{2^q - 1} = 2$ (voir preuve du Théorème 6.3), ceci donne $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{7} < \frac{1}{3}$, ce qui est une contradiction. $\square$

Bibliographie

- [Al] Daniel S. Alexander. *A history of complex dynamics*. Aspects of Mathematics, E24. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994. From Schröder to Fatou and Julia.
- [As1] Magnus Aspenberg. Perturbations of rational misiurewicz maps, 2008. preprint math.DS/0804.1106.
- [As2] Magnus Aspenberg. Rational Misiurewicz maps are rare. *Comm. Math. Phys.*, 291(3) :645–658, 2009.
- [BB1] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Bifurcation currents in holomorphic dynamics on $\mathbb{P}^k$. *J. Reine Angew. Math.*, 608 :201–235, 2007.
- [BB2] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Lyapunov exponents, bifurcation currents and laminations in bifurcation loci. *Math. Ann.*, 345(1) :1–23, 2009.
- [BB3] Giovanni Bassanelli and François Berteloot. Distribution of polynomials with cycles of a given multiplier. *Nagoya Math. J.*, 201 :23–43, 2011.
- [BT] Eric Bedford and B. A. Taylor. The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampere equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 82(1) :102–104, 1976.
- [BR] Lipman Bers and H. L. Royden. Holomorphic families of injections. *Acta Math.*, 157(3-4) :259–286, 1986.
- [Be] François Berteloot. Lyapunov exponent of a rational map and multipliers of repelling cycles. *Riv. Math. Univ. Parma*, 1(2) :263–269, 2010.
- [BDM] François Berteloot, Christophe Dupont, and Laura Molino. Normalization of bundle holomorphic contractions and applications to dynamics. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(6) :2137–2168, 2008.
- [BH] Bodil Branner and John H. Hubbard. The iteration of cubic polynomials. I. The global topology of parameter space. *Acta Math.*, 160(3-4) :143–206, 1988.
- [BM] François Berteloot and Volker Mayer. *Rudiments de dynamique holomorphe*, volume 7 of *Cours Spécialisés*. Société Mathématique de France, Paris, 2001.
- [Bo] Rufus Bowen. Hausdorff dimension of quasicircles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 50 :11–25, 1979.
- [Bra] Bodil Branner. The Mandelbrot set. In *Chaos and fractals (Providence, RI, 1988)*, volume 39 of *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 75–105. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [BD] Jean-Yves Briend and Julien Duval. Exposants de Liapounoff et distribution des points périodiques d’un endomorphisme de $\mathbb{CP}^k$. *Acta Math.*, 182(2) :143–157, 1999.

- [Bro] Hans Brolin. Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6 :103–144 (1965), 1965.
- [BE] Xavier Buff and Adam L. Epstein. Bifurcation measure and postcritically finite rational maps. In *Complex dynamics : families and friends / edited by Dierk Schleicher*, pages 491–512. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachussets, 2009.
- [BS] Shaun Bullett and Pierrette Sentenac. Ordered orbits of the shift, square roots, and the devil’s staircase. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 115(3) :451–481, 1994.
- [CG] Lennart Carleson and Theodore W. Gamelin. *Complex dynamics*. Universitext : Tracts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [C] E. M. Chirka. *Complex analytic sets*, volume 46 of *Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. Translated from the Russian by R. A. M. Hoksbergen.
- [Dem] J.-P. Demailly. Complex analytic and differential geometry, 2011. free accessible book ([http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ demailly/manuscripts/agbook.pdf](http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf)).
- [DeM] Laura DeMarco. Dynamics of rational maps : Lyapunov exponents, bifurcations, and capacity. *Math. Ann.*, 326(1) :43–73, 2003.
- [dMvS] Welington de Melo and Sebastian van Strien. *One-dimensional dynamics*, volume 25 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [DS] Tien-Cuong Dinh and Nessim Sibony. Dynamics in several complex variables : endomorphisms of projective spaces and polynomial-like mappings. In *Holomorphic dynamical systems*, volume 1998 of *Lecture Notes in Math.*, pages 165–294. Springer, Berlin, 2010.
- [Do] Adrien Douady. L’ensemble de Julia dépend-il continûment du polynôme ? In *Aspects des systèmes dynamiques*, pages 125–166. Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2009.
- [Du1] Romain Dujardin. Approximation des fonctions lisses sur certaines laminations. *Indiana Univ. Math. J.*, 55(2) :579–592, 2006.
- [Du2] Romain Dujardin. Cubic polynomials : a measurable view on parameter space. In *Complex dynamics : families and friends / edited by Dierk Schleicher*, pages 451–490. A K Peters, Ltd., Wellesley, Massachussets, 2009.
- [DF] Romain Dujardin and Charles Favre. Distribution of rational maps with a preperiodic critical point. *Amer. J. Math.*, 130(4) :979–1032, 2008.
- [Eps1] Adam Lawrence Epstein. Bounded hyperbolic components of quadratic rational maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 20(3) :727–748, 2000.
- [Eps2] Adam Epstein. Transversality in holomorphic dynamics, 2009. preprint.
- [F] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990. Mathematical foundations and applications.
- [GK] Lisa R. Goldberg and Linda Keen. The mapping class group of a generic quadratic rational map and automorphisms of the 2-shift. *Invent. Math.*, 101(2) :335–372, 1990.
- [HW] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, fifth edition, 1979.

- [Hö] Lars Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. I*, volume 256 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1983. Distribution theory and Fourier analysis.
- [Hu] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.
- [KR] Jan Kiwi and Mary Rees. Counting hyperbolic components, 2010. preprint arXiv : math.DS/1003.6104v1.
- [Le] François Ledrappier. Quelques propriétés ergodiques des applications rationnelles. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 299(1) :37–40, 1984.
- [Lj] M. Ju. Ljubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(3) :351–385, 1983.
- [Mañ] Ricardo Mañé. On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps. *Bol. Soc. Brasil. Mat.*, 14(1) :27–43, 1983.
- [MSS] R. Mañé, P. Sad, and D. Sullivan. On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 16(2) :193–217, 1983.
- [Mat] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.
- [Mc1] Curtis T. McMullen. *Complex dynamics and renormalization*, volume 135 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1994.
- [Mc2] Curtis T. McMullen. Hausdorff dimension and conformal dynamics. II. Geometrically finite rational maps. *Comment. Math. Helv.*, 75(4) :535–593, 2000.
- [Mc3] Curtis T. McMullen. The Mandelbrot set is universal. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 1–17. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [Mi1] John Milnor. Geometry and dynamics of quadratic rational maps. *Experiment. Math.*, 2(1) :37–83, 1993. With an appendix by the author and Lei Tan.
- [Mi2] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [Mi3] John Milnor. On Lattès maps. In *Dynamics on the Riemann sphere*, pages 9–43. Eur. Math. Soc., Zürich, 2006.
- [O] Yûzuke Okuyama. Lyapunov exponents in complex dynamics and potential theory, 2010. preprint arXiv math.CV/1008.1445v1.
- [Pe] Carsten Lunde Petersen. No elliptic limits for quadratic maps. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(1) :127–141, 1999.
- [Ph] Ngoc-mai Pham. Lyapunov exponents and bifurcation current for polynomial-like maps, 2005. preprint arXiv : math.DS/0512557v1.

- [Pr] Feliks Przytycki. Hausdorff dimension of harmonic measure on the boundary of an attractive basin for a holomorphic map. *Invent. Math.*, 80(1) :161–179, 1985.
- [PRLS] Feliks Przytycki, Juan Rivera-Letelier, and Stanislav Smirnov. Equality of pressures for rational functions. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 24(3) :891–914, 2004.
- [Ra] Thomas Ransford. *Potential theory in the complex plane*, volume 28 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [RL] Juan Rivera-Letelier. On the continuity of Hausdorff dimension of Julia sets and similarity between the Mandelbrot set and Julia sets. *Fund. Math.*, 170(3) :287–317, 2001.
- [Ru] Walter Rudin. *Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$* , volume 241 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [Sh] Mitsuhiro Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. of Math. (2)*, 147(2) :225–267, 1998.
- [ST] Mitsuhiro Shishikura and Lei Tan. An alternative proof of Mañé’s theorem on non-expanding Julia sets. In *The Mandelbrot set, theme and variations*, volume 274 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 265–279. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [Sib] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de $\mathbf{P}^k$. In *Dynamique et géométrie complexes (Lyon, 1997)*, volume 8 of *Panor. Synthèses*, pages ix–x, xi–xii, 97–185. Soc. Math. France, Paris, 1999.
- [Sil] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of dynamical systems*, volume 241 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2007.
- [St] Norbert Steinmetz. *Rational iteration*, volume 16 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993. Complex analytic dynamical systems.
- [T] Lei Tan. Hausdorff dimension of subsets of the parameter space for families of rational maps. (A generalization of Shishikura’s result). *Nonlinearity*, 11(2) :233–246, 1998.
- [U] Mariusz Urbański. Rational functions with no recurrent critical points. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 14(2) :391–414, 1994.
- [vS] Sebastian van Strien. Misiurewicz maps unfold generically (even if they are critically non-finite). *Fund. Math.*, 163(1) :39–54, 2000.
- [Z] Michel Zinsmeister. Fleur de Leau-Fatou et dimension de Hausdorff. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 326(10) :1227–1232, 1998.

RÉSUMÉ

Dans l'espace $\mathcal{M}_d$ des modules des fractions rationnelles de degré d , le lieu de bifurcation est le support d'un $(1, 1)$ -courant positif fermé T_{bif} appelé *courant de bifurcation*. Ce courant induit une mesure $\mu_{\text{bif}} := (T_{\text{bif}})^{2d-2}$ dont le support est le siège de bifurcations maximales. Notre principal résultat est que le support de μ_{bif} est de dimension de Hausdorff totale $2(2d - 2)$. Il s'ensuit que l'ensemble des fractions rationnelles de degré d possédant $2d - 2$ cycles neutres distincts est dense dans un ensemble de dimension de Hausdorff totale. Remarquons que jusqu'alors, seule l'existence de telles fractions rationnelles (Shishikura) était connue. Mentionnons que pour notre démonstration, nous établissons au préalable que les fractions rationnelles $(2d - 2)$ -Misiurewicz appartiennent au support de μ_{bif} .

Le dernier chapitre, indépendant du reste de la thèse, traite de l'espace $\mathcal{M}_2$. Nous montrons que, dans ce cas, le courant T_{bif} se prolonge naturellement à $\mathbb{P}^2$ en un $(1, 1)$ -courant positif fermé dont nous calculons les nombres de Lelong. Nous montrons aussi que le support de la mesure μ_{bif} est non-borné dans $\mathcal{M}_2$.

ABSTRACT

In the moduli space $\mathcal{M}_d$ of degree d rational maps, the bifurcation locus is the support of a closed $(1, 1)$ positive current T_{bif} called *bifurcation current*. This current gives rise to a measure $\mu_{\text{bif}} := (T_{\text{bif}})^{2d-2}$ whose support is the seat of strong bifurcations. Our main result says that $\text{supp}(\mu_{\text{bif}})$ has maximal Hausdorff dimension $2(2d - 2)$. It follows that the set of degree d rational maps having $2d - 2$ distinct neutral cycles is dense in a set of full Hausdorff dimension. Note that previously, only the existence of such rational maps (Shishikura) was known. Let us mention that for our proof, we first establish that the $(2d - 2)$ -Misiurewicz rational maps belong to the support of μ_{bif} .

The last chapter, which is independent of the rest of the thesis, deals with the space $\mathcal{M}_2$. We prove that, in this case, the current T_{bif} naturally extends to a $(1, 1)$ -closed positive current on $\mathbb{P}^2$ which we calculate the Lelong numbers. We also show that the support of μ_{bif} is unbounded in $\mathcal{M}_2$.