



**HAL**  
open science

## Statistiques d'extrêmes d'interfaces en croissance

Joachim Rambeau

► **To cite this version:**

Joachim Rambeau. Statistiques d'extrêmes d'interfaces en croissance. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112161 . tel-00648731

**HAL Id: tel-00648731**

**<https://theses.hal.science/tel-00648731>**

Submitted on 12 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

LABORATOIRE DE PHYSIQUE THÉORIQUE D'ORSAY

**THÈSE DE DOCTORAT**

Spécialité : **Physique Théorique**

**STATISTIQUES D'EXTRÊMES D'INTERFACES EN  
CROISSANCE**

**Joachim RAMBEAU**

Soutenue le mardi 13 septembre 2011 devant le jury composé de :

Bertrand BERCHE	(Examineur)
Alain COMTET	(Examineur)
David DEAN	(Rapporteur)
Henk HILHORST	(Président du jury)
Joachim KRUG	(Examineur)
Cécile MONTHUS	(Rapporteur)
Grégory SCHEHR	(Directeur)



---

# Table des matières

---

<b>Préambule</b>	<b>9</b>
<b>1 Croissance d'interfaces et statistiques d'extrêmes</b>	<b>17</b>
1.1 Croissance d'interfaces . . . . .	17
1.1.1 Le modèle de dépôt aléatoire : une interface décorrélée	19
1.1.2 Dynamique relaxante linéaire : l'équation d'Edwards-Wilkinson . . . . .	22
1.1.3 Dynamique relaxante et d'agrégation non-linéaire : l'équation de Kardar-Parisi-Zhang . . . . .	26
1.2 Extrêmes . . . . .	29
1.2.1 Champs d'application des statistiques d'extrêmes . . .	30
1.2.2 La théorie des statistiques d'extrêmes pour des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid) . . . .	32
1.2.3 Le cas de variables aléatoires corrélées . . . . .	38
1.3 De la statistique du maximum d'interfaces . . . . .	39
1.3.1 Statistique de la hauteur maximale dans le modèle du dépôt aléatoire . . . . .	40
1.3.2 La suite . . . . .	42
<b>2 Maximum de la hauteur relative d'interfaces à l'équilibre</b>	<b>45</b>
2.1 La méthode d'intégrale de chemin . . . . .	46
2.1.1 Le mouvement brownien en deux mots . . . . .	46
2.1.2 Propagateur et mécanique quantique . . . . .	50
2.1.3 Le maximum du pont brownien . . . . .	52
2.1.4 Fonction de corrélation du pont brownien . . . . .	55

2.2	Interfaces à l'équilibre . . . . .	57
2.2.1	Solution stationnaire des équations d'Edwards-Wilkinson et Kardar-Parisi-Zhang . . . . .	57
2.2.2	Hauteurs relatives usuelles . . . . .	57
2.3	Hauteur relative généralisée . . . . .	60
2.3.1	Définition . . . . .	61
2.3.2	Normalisation du poids de probabilité . . . . .	63
2.3.3	Distribution marginale de la hauteur $h^\kappa(x)$ . . . . .	65
2.3.4	Deux autres façons de calculer $Z_\kappa$ . . . . .	69
2.4	Distribution du maximum de la hauteur relative . . . . .	71
2.4.1	Passage dans l'espace de Laplace . . . . .	73
2.4.2	Fonction d'échelle . . . . .	76
2.4.3	Les limites $\kappa \rightarrow 0$ et $\kappa \rightarrow 1$ . . . . .	77
2.4.4	Asymptotes de la distribution $f^\kappa(x_m)$ . . . . .	80
2.4.5	Premier moment de $f^\kappa(x_m)$ . . . . .	82
2.4.6	Simulations numériques – effets de taille finie . . . . .	83
2.5	Un Brownien qui ne manque pas d'aire . . . . .	86
2.5.1	Aire sous un brownien . . . . .	86
2.5.2	Aire tronquée sous le pont brownien . . . . .	88
2.5.3	Aire tronquée sous l'excursion brownienne . . . . .	89
<b>3</b>	<b>Maximum de la hauteur relative d'interfaces en milieu désor-</b>	
	<b>donné</b> . . . . .	<b>93</b>
3.1	Interfaces élastiques en milieu désordonné . . . . .	94
3.1.1	Exemple de dynamique forcée, systèmes expérimentaux . . . . .	94
3.1.2	Phénoménologie succincte . . . . .	96
3.1.3	Objectif du chapitre . . . . .	98
3.2	Maximum d'interfaces gaussiennes . . . . .	100
3.2.1	Interfaces gaussiennes avec un bruit en $1/f^\alpha$ . . . . .	100
3.2.2	Synthèse des résultats concernant la distribution du maxi- mum . . . . .	101
3.3	Maximum d'interfaces en milieu désordonné . . . . .	105
3.3.1	Echantillonnage numérique . . . . .	106
3.3.2	Distribution d'échelles numériques . . . . .	109
3.4	Comparaison des interfaces désordonnées avec les interfaces gaussiennes . . . . .	113
3.4.1	Echantillonnage numérique des interfaces gaussiennes . . . . .	113
3.4.2	Comparaisons des distributions $\phi$ . . . . .	113

3.4.3	Comparaison des distributions cumulées . . . . .	116
3.4.4	Analyse de la gaussianité/non-gaussianité . . . . .	118
3.4.5	Conclusion . . . . .	122
<b>4</b>	<b>Maximum dans la phase de croissance et modèle de pastèques</b>	<b>123</b>
4.1	Un modèle d'interface dans la phase de croissance . . . . .	125
4.1.1	Le modèle PNG en gouttelette . . . . .	126
4.1.2	Le PNG sur réseau et le polymère dirigé en milieu aléatoire	132
4.1.3	Statistique du maximum du PNG . . . . .	135
4.2	Le modèle de pastèques . . . . .	137
4.2.1	Définition, variantes et programme . . . . .	138
4.2.2	Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour $N = 1$ . . . . .	141
4.2.3	Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour $N = 2$ . . . . .	145
4.2.4	La pastèque à $N$ lignes et les matrices aléatoires . . . . .	158
4.2.5	Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour les $N$ -pastèques . . . . .	162
4.3	Comparaison et discussion . . . . .	165
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Éléments de la théorie des matrices aléatoires</b>	<b>173</b>
A.1	Ensembles gaussiens . . . . .	173
A.1.1	Mesure sur les matrices . . . . .	174
A.1.2	Distribution jointe des valeurs propres . . . . .	175
A.1.3	Densité de valeurs propres . . . . .	176
A.2	Distributions de Tracy et Widom . . . . .	178
<b>B</b>	<b>Publications</b>	<b>183</b>
B.1	Publication 1 . . . . .	185
B.2	Publication 2 . . . . .	211
B.3	Publication 3 . . . . .	219
B.4	Publication 4 . . . . .	247
	<b>Bibliographie</b>	<b>261</b>



---

## Table des figures

---

1.1	Modèle de dépôt aléatoire . . . . .	19
1.2	Modèle de dépôt aléatoire avec relaxation . . . . .	23
1.3	Modèle de dépôt balistique . . . . .	26
1.4	Distribution du maximum relatif de l'interface générée par dépôt aléatoire et comparaison avec la distribution de Gumbel . . . . .	42
2.1	Trajectoire dans l'espace-temps . . . . .	50
2.2	Maximum du pont brownien . . . . .	52
2.3	Distributions d'Airy et de Rayleigh . . . . .	61
2.4	Hauteur relative maximale d'une interface à l'équilibre . . . . .	62
2.5	Distribution marginale de la hauteur relative (représentation de l'écart quadratique moyen) . . . . .	68
2.6	Potentiels ressentis par la particule brownienne . . . . .	75
2.7	Distribution exacte du maximum de la hauteur relative pour $\kappa = 0, 1/32, 1/4, 1/2, 1$ . . . . .	78
2.8	Loi d'échelle des distributions du maximum de la hauteur relative obtenues par simulations numériques . . . . .	83
2.9	Comparaison des résultats analytiques aux résultats numériques . . . . .	85
2.10	Aire tronquée sous l'excursion brownienne . . . . .	89
3.1	Interface élastique en milieu aléatoire . . . . .	95
3.2	Réalisation d'une ligne de plus basse énergie sur réseau . . . . .	107
3.3	Loi d'échelle selon $L^\zeta$ . . . . .	109
3.4	Loi d'échelle selon la moyenne . . . . .	110
3.5	Loi d'échelle selon la variance . . . . .	112



3.6	Comparaison entre les lois d'échelle selon la moyenne des interfaces en milieu désordonné et les interfaces gaussiennes . . . . .	114
3.7	Asymptote avec l'échelle selon la moyenne . . . . .	115
3.8	Différence des distributions cumulées à l'équilibre . . . . .	116
3.9	Différence des distributions cumulées au dépiégeage . . . . .	117
3.10	Ecart relatif des rapports des moments en faisant varier la taille des échantillons en milieu désordonné . . . . .	121
4.1	Système expérimental de cristaux liquides turbulents et interface KPZ . . . . .	124
4.2	Dynamique du modèle PNG . . . . .	126
4.3	Processus de Hammersley . . . . .	128
4.4	PNG et chemins de Hammersley . . . . .	129
4.5	PNG multi-couches . . . . .	131
4.6	Réalisation d'une pastèque . . . . .	137
4.7	$N = 2$ pont browniens belliqueux . . . . .	146
4.8	Distribution du temps d'atteinte $\tau_M$ pour $N = 2$ ponts browniens belliqueux. . . . .	153
4.9	$N = 2$ excursions browniennes belliqueuses . . . . .	154
4.10	Distribution du temps d'atteinte $\tau_M$ pour $N = 2$ excursions browniennes belliqueuses. . . . .	155
4.11	Etoile brownienne à $N = 2$ branches belliqueuses . . . . .	156
4.12	Distribution du temps d'atteinte $\tau_M$ d'une étoile brownienne à $N = 2$ branches belliqueuses . . . . .	157
4.13	Distributions du temps d'atteinte $\tau_M$ pour $N$ ponts browniens belliqueux, avec $N = 2, 3, 4, 5, 10$ . . . . .	163
4.14	Distribution de la variable d'échelle $y_m$ . . . . .	167
A.1	Distributions de Tracy-Widom . . . . .	180

---

# Préambule

---

## Organisation du manuscrit

Le manuscrit est divisé en 4 chapitres. Après un premier chapitre introductif aux deux thèmes principaux, la croissance d'interfaces et les statistiques d'extrêmes, les chapitres restants traitent de plusieurs facettes de la réunion de ces deux grands thèmes. Ces différentes facettes utilisent des méthodes et notions similaires, ainsi il est conseillé de lire le manuscrit dans l'ordre. Néanmoins le lecteur intéressé particulièrement par un chapitre trouvera les références aux notions présentées antérieurement dans le texte.

Le premier chapitre est un chapitre introductif qui décrit brièvement en deux parties les thèmes majeurs de cette thèse. D'abord nous abordons les interfaces comme le fruit d'un processus de croissance. A ce stade nous définissons les deux classes d'universalité d'Edwards-Willinson et de Kardar-Parisi-Zhang. Puis, pour poursuivre le chapitre introduction, nous examinerons les statistiques d'extrêmes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Par essence les statistiques d'extrêmes ont joué un rôle marginal dans l'établissement de la physique statistique à l'équilibre, où la thermodynamique n'explore que peu ou prou les queues des distributions, terreau des statistiques d'extrêmes. Cependant un regain d'intérêt est naturel du côté de la physique statistique hors-équilibre et la physique des systèmes désordonnés, où les statistiques d'extrêmes peuvent donner des renseignements essentiels pour caractériser le comportement typique. De même la statistique du maximum peut aider à caractériser la géométrie de systèmes à l'équilibre ther-

modynamique. Une motivation plus fondamentale est : peut-on trouver une régularité des statistiques d'extrêmes dans les systèmes fortement corrélés ?

Dans un second chapitre, nous commencerons nos investigations quant à la statistique du maximum d'une interface à l'équilibre. Nous introduirons le mouvement brownien et la mesure sur les chemins qui y est associée. Après cette introduction à la méthode analytique d'intégrale de chemin, nous calculerons la distribution du maximum de la hauteur relative généralisée, que nous aurons pris soin de définir en détail. De nouveaux résultats concernant la statistique de l'aire tronquée sous un mouvement brownien conditionné seront dérivés. L'exposé de la méthode d'intégrale de chemin pour le mouvement brownien sera utile pour les calculs du chapitre 4.

Le troisième chapitre concerne l'étude d'interfaces élastiques en milieu aléatoire. La pertinence de ce modèle pour toute une classe de systèmes physiques rend son étude cruciale. Les difficultés associées aux systèmes désordonnés rendent une approche analytique délicate, c'est pourquoi nous avons utilisé principalement des analyses numériques. L'émergence d'un nombre fini de classes d'universalité, à l'instar des systèmes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, semble utopique. Néanmoins nous pouvons donner des informations précises quant à ces systèmes élastiques désordonnés.

Enfin le dernier chapitre concerne la caractérisation des statistiques d'extrêmes d'une interface KPZ dans le régime de croissance, pour lequel des expériences sont en mesure de confronter nos résultats théoriques aux systèmes réels. Après avoir fait une brève revue de l'état de l'art en ce qui concerne la statistique du maximum de ce type d'interfaces, et le lien particulier avec le polymère dirigé en milieu aléatoire, nous introduirons notre modèle qui repose sur un processus de mouvements browniens qui ne se croisent pas. Nous améliorerons les techniques d'intégrales de chemin auparavant présentées pour trouver non seulement le maximum mais également son temps d'atteinte, quantité cruciale pour caractériser la géométrie des interfaces ou encore la position de l'extrémité libre du polymère dirigé en milieu aléatoire.

En conclusion, nous résumons les résultats de cette thèse en les replaçant dans un contexte général. Nous proposons certaines ouvertures encouragées par les travaux présentés dans ce manuscrit.

L'annexe A fournit quelques éléments de la théorie des matrices aléatoires afin de faciliter l'exposé des résultats du chapitre 4. L'annexe B contient une reproduction par ordre chronologique des articles publiés :

- ★ B.1 : [148] J. Rambeau and G. Schehr. Maximum relative height of one-dimensional interfaces: from Rayleigh to Airy distribution. *J. Stat. Mech.*, page P09004, 2009 (chapitre 2) ;
- ★ B.2 : [149] J. Rambeau and G. Schehr. Extremal statistics of curved growing interfaces. *Euro. Phys. Lett.*, 91:60006, 2010 (chapitre 4) ;
- ★ B.3 : [150] J. Rambeau and G. Schehr. Distribution of the time at which  $N$  vicious walkers reach their maximal height. *Phys. Rev. E*, 83:061146, 2011 (chapitre 4) ;
- ★ B.4 : [147] J. Rambeau, A. B. Kolton, S. Bustingorry, and G. Schehr. Maximal relative height of elastic interfaces in random media. *Phys. Rev. E*, 84:041131, 2011\* (chapitre 3).

---

\*Cet article a été soumis en juillet 2011 (arXiv : 1107.5997), et accepté pour publication deux semaines après la soutenance.



## Quelques notations

La hauteur d'une interface sera notée  $h(x, t)$ , fonction de l'espace  $x$  et du temps  $t$ , ou  $h(x)$  dans la limite stationnaire.

Le mouvement brownien et ses processus conditionnés sont notés comme leur trajectoire  $x(\tau)$  au cours du temps  $\tau$ . Indiquons les notations usuelles des mathématiciens (les processus seront définis dans le texte) :

- ★  $W_t$  : le mouvement brownien,  $t > 0$ ,
- ★  $B_t$  : le pont brownien,  $0 \leq t \leq 1$ ,
- ★  $E_t$  : l'excursion brownienne,  $0 \leq t \leq 1$ .

En ce qui concerne les probabilités,

- ★  $\mathbb{P}[\dots]$  signifie la probabilité pour que l'assertion ... soit vérifiée,

et les mesures, avec  $\mathcal{D}x(\tau)$  la mesure plate (définie dans le paragraphe 2.1.1) :

- ★  $\mathbb{W}[x(\tau)]\mathcal{D}x(\tau)$  : mesure du mouvement brownien,
- ★  $\mathbb{B}[x(\tau)]\mathcal{D}x(\tau)$  : mesure du pont brownien,
- ★  $\mathbb{E}[x(\tau)]\mathcal{D}x(\tau)$  : mesure de l'excursion brownienne.

Le prototype du propagateur entre les points  $a$  au temps  $\tau_a$  et  $b$  au temps  $\tau_b$  est donnée par :

- ★  $G(b, \tau_b | a, \tau_a)$ .

Lorsque l'on considère plusieurs particules, il est commode d'utiliser la notation vectorielle  $\mathbf{x}(\tau) = (x_1(\tau), \dots, x_N(\tau))$ , et pour le prototype du propagateur :

- ★  $G(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a)$ , avec  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$  et  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N)$ .

En ce qui concerne les développements asymptotique nous utilisons (ici les exemples donnés pour  $x \rightarrow \infty$ ) :

$$f(x) \approx g(x), \quad (x \rightarrow \infty) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \quad (1)$$

Nous utilisons également

$$f(x) \sim g(x), \quad (x \rightarrow \infty) \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log f(x)}{\log g(x)} = 1. \quad (2)$$

Les résultats nouveaux sont encadrés.



## Remerciements

J'ai eu le plaisir de travailler pendant trois années à l'élaboration de cette thèse au Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay. Je remercie son directeur Henk Hilhorst qui place l'épanouissement scientifique des doctorants parmi l'un des objectifs essentiels du laboratoire. Son soutien et son écoute ont toujours été valorisants. Le bien-être que l'on peut ressentir au sein du laboratoire est aussi le fruit du travail d'une équipe administrative efficace et cordiale, je remercie donc Jocelyne Puech, Mireille Calvet, Philippe Molle et Odile Heckenaue, ainsi que Patricia Dubois-Violette à la bibliothèque. Je tiens également à remercier le directeur adjoint Philippe Boucaud et Olivier Brand-Foissac pour leur gestion de l'informatique du laboratoire, outil essentiel aux calculs numériques présentés dans cette thèse.

Je remercie Cécile Monthus et David Dean d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et Bertrand Berche, Alain Comtet, Henk Hilhorst et Joachim Krug de faire partie du jury.

J'ai eu le plaisir d'être l'organisateur du SINJE (Séminaire Informel des Jeunes) pendant ma deuxième année de thèse (2009-2010). Je remercie Blaise Goutéraux de m'avoir fait confiance lors du passage de témoin. J'ai pu bénéficier de l'aide précieuse de Max Ebbinghaus, co-organisateur du Sinje lors de ses séjours au LPT. Je remercie également Yannis Bardoux, Antonin Coutant et Guillaume Toucas qui ont brillamment repris le flambeau pour cette année 2010-2011. Enfin je remercie les orateurs et l'audience qui font vivre ce séminaire des thésards.

Durant cette thèse j'ai eu la chance de faire deux séjours d'un mois à Bariloche en Argentine, dans le cadre d'une coopération ECOS-SUD. Je remercie Daniel Dominguez, directeur du groupe Teoría de Sólidos au Centro Atómico Bariloche, pour son accueil très chaleureux au sein de son équipe, Alejandro Kolton et Sebastian Bustingorry, les chercheurs argentins avec qui nous avons travaillé, et Alberto Rosso qui participait aussi à ce programme, avec qui nous avons eu des discussions intéressantes. Alejandro et Sebastian m'ont beaucoup appris de leur spécialité scientifique, m'ont fait découvrir leur belle région du lac Nahuel Huapi et les miracles du Bife de Chorizo. Ils m'ont enfin très bien conseillé pour les quelques "petites" escapades que j'ai pu entreprendre en Ar-

---

J'exprime ma gratitude à Mélanie Rambeau, professeur de français, qui a eu la gentillesse de relire intégralement le manuscrit pour en supprimer les fautes d'orthographe. C'était un travail substantiel!



gentine, et qui ont rendu ces séjours inoubliables. Je les remercie beaucoup pour le temps qu'ils m'ont consacré lorsque j'étais au Centro Atómico.

Je souhaite remercier Bertrand Berche, Alejandro Kolton et Satya Majumdar pour l'aide précieuse qu'ils m'ont fournie dans la recherche de postdoc.

Je tiens à remercier les personnes de mon entourage qui ont rendu ces trois années agréables : Lorenzo Battarra, Sébastien Bardin, Thomas Baron, Edouard Beauvier, Alex Bohé, Emeline Cluzel, Aurélien Decelle, Max Ebbinghaus, Nicolas Perrin, Julien Staub, Cédric Tournier-Colletta, Ines Weber, Elia Zarinelli, ainsi que les personnes avec qui j'ai partagé d'agréables moments pendant les écoles d'été auxquelles j'ai eu la chance de participer, en particulier Aurélien et Elia, Gaëtan Borot, Vincent Démery, Hélène Grandclaude, Vivien Lecomte, Céline Nadal, Jean-Marie Stephan.

Je remercie mes parents d'avoir toujours été à mon écoute en toute circonstance. Leur soutien a été un moteur actif dans la réalisation de mes études et en particulier pour cette thèse.

J'adresse enfin un grand "merci" à mon directeur de thèse Grégory Schehr. Son esprit aiguisé et sa rigueur ont été des exemples que je m'efforce de suivre, et je lui suis reconnaissant d'avoir partagé ses connaissances, ses méthodes et ses idées au cours de cette formation doctorale. Sa disponibilité, sa bonne humeur, sa pédagogie et sa patience, qui n'ont d'égale que sa haute compétence scientifique, ont rendu cette relation directeur-thésard très agréable et productive. Grégory s'inscrit dans la lignée des enseignants et chercheurs qui m'ont donné la passion de la physique théorique et auxquels j'exprime ma plus grande gratitude.

---

# Croissance d'interfaces et statistiques d'extrêmes

---

Dans ce premier chapitre, nous introduisons le concept d'interfaces en croissance et les deux classes d'universalité pertinentes qui nous intéresseront au long de ce manuscrit. La mesure du maximum d'une interface permet d'affiner notre connaissance de ces objets étendus, fortement corrélés et parfois en présence de désordre. Afin de préparer cette étude des statistiques d'extrêmes, nous présentons les principaux résultats obtenus dans le cas de variables aléatoires indépendantes ou faiblement corrélées. Enfin, en guise de conclusion de ce chapitre introductif nous traiterons le cas d'un modèle d'interface sans corrélation.

## 1.1 Croissance d'interfaces

Une interface est une zone de l'espace qui sépare deux régions différentiables par leurs propriétés physiques, notées génériquement  $A$  et  $B$ . Il existe de nombreux exemples d'interfaces, dont nous pouvons citer quelques-uns familiers. Un métal ferromagnétique fortement anisotrope dans une direction présente, en dessous de la température critique, des zones d'aimantation positive (région  $A$ ) et négative (région  $B$ ), dont l'orientation est suivant l'axe

d’anisotropie. Dans un métal tri-dimensionnel, des surfaces bidimensionnelles séparent les zones aimantées vers le haut de celles aimantées vers le bas. Un verre est renversé sur une nappe en papier et l’on observe une ligne de séparation entre la région mouillée (région  $A$ ) et la région encore sèche (région  $B$ ). La surface d’une planète tellurique distingue la partie solide (région  $A$ ) de son atmosphère gazeuse (région  $B$ ).

Tous ces exemples simples partagent une même propriété : toutes ces interfaces connaissent, ou ont connu, une phase de *croissance* [113, 10, 90]. On peut observer autant de dynamiques microscopiques qu’il existe de modèles à étudier. Néanmoins l’émergence de classes d’universalité simplifie grandement le spectre d’étude. Une dynamique microscopique particulière précise l’évolution spatio-temporelle de l’une des deux régions, par exemple la région  $A$ , et on aboutit à un modèle très fidèle de la réalité mais rarement soluble. Cependant certaines propriétés géométriques de la séparation  $A/B$  sont communes à différents modèles. En effet, alors que la région  $A$  aura des propriétés différentes (en volume) pour deux processus de croissance différents, on pourra relever des comportements identiques pour la surface de séparation entre  $A$  et  $B$ . Pour pouvoir avancer des résultats exacts on construit directement une dynamique de l’interface elle-même, guidée uniquement par les symétries du modèle initial [10].

Dans cette section, nous allons donner des exemples de dynamiques microscopiques, et la dynamique générale associée, pour trois classes d’universalité distinctes. La première, triviale mais instructive pour la suite de l’exposé, concerne des interfaces qui ne présentent pas de corrélations. Les deux suivantes décrivent des interfaces corrélées, un premier type issu d’une dynamique d’équilibre, et le second d’une dynamique hors-équilibre. Nous tâcherons de donner des exemples physiques précis pour chacune d’entre elles en plus du modèle microscopique associé.

Tout au long de ce manuscrit, nous n’aborderons que des interfaces unidimensionnelles, c’est-à-dire repérées par un champ de hauteur  $h(x, t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de la variable réelle  $x$  position le long du substrat, et du temps de croissance  $t$ .

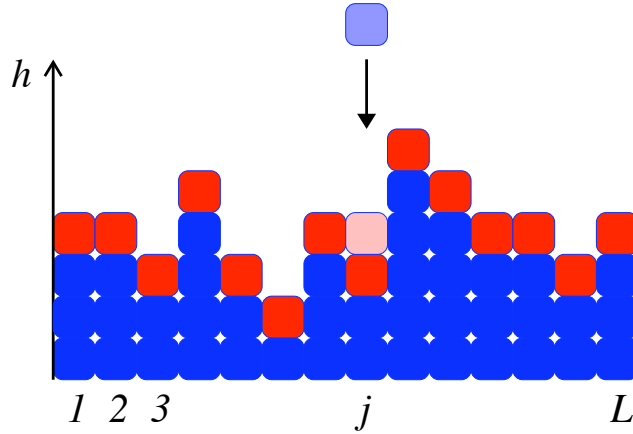


FIGURE 1.1 – Modèle de dépôt aléatoire : une colonne  $j$  est tirée au hasard, et une particule (bleu clair) est déposée de sorte que  $h_j \rightarrow h_j + 1$  (rouge clair). Une particule tout juste déposée est nécessairement en haut de sa pile (couleur rouge), mais elle peut être recouverte au fil du processus de dépôt (couleur bleue). Les particules rouges à un instant donné forment le champ de hauteur  $\{h_j\}_{1 \leq j \leq L}$ .

### 1.1.1 Le modèle de dépôt aléatoire : une interface décorrélée

Le modèle de dépôt aléatoire représente le modèle le plus simple imaginable d'une croissance d'interface. Prenons un substrat de  $L$  sites, et empilons  $N$  carrés de taille unité  $1 \times 1$ . La règle de remplissage est la suivante : choisissons au hasard l'une des  $L$  colonnes accessibles, et plaçons le carré sur la pile déjà formée.

Il en résulte que le champ de hauteurs est constitué de la succession des hauteurs  $h_j \in \mathbb{N}$  de chaque colonne, qui sont indépendantes les unes des autres, et identiquement distribuées. Nous générons donc une interface sans corrélations, ce qui en fait un modèle jouet qui n'a pas la prétention de décrire une interface réelle. En revanche on peut calculer explicitement la distribution jointe des hauteurs, factorisable :

$$P_{N,L}(h_1, h_2, \dots, h_L) = \frac{1}{Z_{N,L}} \prod_{j=1}^L p_{N,L}(h_j) \delta_{N, \sum_{j=1}^L h_j}, \quad (1.1)$$

avec  $p_{N,L}(h)$  la distribution de hauteur d'une colonne après l'ajout de  $N$  particules au total

$$p_{N,L}(h) = \mathbb{P}[h_j = h], \quad 1 \leq j \leq L, \quad (1.2)$$

la fonction  $\delta$  de Kronecker imposant que la somme de hauteurs soit égale au nombre  $N$  de particules déposées, et  $Z_{N,L}$  la constante de normalisation :

$$Z_{N,L} = \sum_{h_1=0}^N \sum_{h_2=0}^N \cdots \sum_{h_L=0}^N \prod_{j=1}^L p_{N,L}(h_j) \delta_{N, \sum_{j=1}^L h_j}, \quad (1.3)$$

Ce type de distribution jointe intervient dans le modèle du processus de portée nulle [169, 52, 53, 81] : partant d'un état des hauteurs  $h_j$  quelconque, la dynamique consiste à faire sauter la particule la plus haute d'une colonne vers son plus proche voisin avec un taux qui ne dépend que du nombre de particules dans la colonne de départ. L'état stationnaire de cette dynamique est donné par la distribution jointe (1.1).

La corrélation générée par la contrainte de somme des hauteurs est marginale : on peut en effet considérer que  $L - 1$  colonnes sont tirées indépendamment, et que la colonne numéro  $L$  s'ajuste de façon à avoir  $\sum_{j=1}^L h_j = N$ . Ainsi, quitte à "jeter" une colonne, on peut considérer les colonnes indépendantes, et ne s'intéresser qu'à la statistique de l'une d'elles. La distribution  $p_{N,L}(h)$  est binomiale

$$p_{N,L}(h) = \binom{N}{h} \left(\frac{1}{L}\right)^h \left(1 - \frac{1}{L}\right)^{N-h}, \quad (1.4)$$

avec  $1/L$  la probabilité de choisir une des colonnes au hasard uniformément,  $h$  le nombre de fois qu'on a choisi la colonne considérée,  $N - h$  le nombre de fois qu'on a rempli une des autres colonnes, et  $\binom{N}{h}$  le nombre de combinaisons réalisables. On en déduit donc la hauteur moyenne d'une colonne,

$$\langle h \rangle = \sum_{h=0}^N h p_{N,L}(h) = \frac{N}{L}, \quad (1.5)$$

et la moyenne du carré de la hauteur

$$\langle h^2 \rangle = \frac{N(N-1)}{L^2} + \frac{N}{L}. \quad (1.6)$$

Dans notre modèle, nous pouvons définir une unité de temps de croissance par le nombre moyen de couches formées après un dépôt de  $N$  particules

$$t \equiv \frac{N}{L}. \quad (1.7)$$

Remarquons que  $\langle h \rangle = t$  : dans la limite où  $L \rightarrow \infty$ , cela signifie que la hauteur moyennée dans l'espace  $\bar{h} = (1/L) \sum_j h_j$  d'un échantillon grandit linéairement avec le temps, ce qui justifie a posteriori la définition du temps.

Une façon de quantifier les fluctuations de l'interface est de considérer la largeur de l'interface définie ici par

$$\sigma^2(t, L) = \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 = t \left( 1 - \frac{1}{L} \right) \quad (1.8)$$

Ceci permet de définir l'exposant de croissance  $\beta$  par

$$\sigma^2(t, L) \sim t^{2\beta}, \quad \text{avec ici } \beta = \frac{1}{2}. \quad (1.9)$$

Notons que la largeur croît indéfiniment, sans saturer.

Nous pouvons donner une description continue dans l'espace en remplaçant l'indice de colonne  $j$  par la coordonnée  $x$  et la hauteur  $h_j$  devient le champ de hauteur  $h(x, t)$ . Alors que le temps était précédemment relié à une quantité discrète (le nombre de particules déposées par unité de longueur), il est maintenant une quantité continue. L'équation la plus simple [10] rendant compte de ce modèle est

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = F + \eta(x, t), \quad (1.10)$$

avec  $F$  le flux moyen de particules déposées, uniforme dans l'espace et constant dans le temps, et  $\eta(x, t)$  représente les fluctuations de dépôt au site  $x$  au temps  $t$ .  $F$  est relié au rapport  $N/L$  du modèle microscopique, et le bruit  $\eta$  doit être décorréolé spatialement et dans le temps. Nous prenons une moyenne nulle  $\langle \eta(x, t) \rangle = 0$  et des corrélations de portées spatiales et temporelles nulles

$$\langle \eta(x, t) \eta(x', t') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (1.11)$$

La résolution de (1.10) est immédiate

$$h(x, t) = Ft + \int_0^t dt' \eta(x, t'). \quad (1.12)$$

Ainsi la valeur moyenne croît proportionnellement au temps

$$\langle h(x, t) \rangle = Ft, \quad (1.13)$$

et on quantifie les fluctuations de hauteur autour de la valeur moyenne au temps  $t$  par

$$\sigma^2(t, x - x') = \langle h(x, t)h(x', t) \rangle - \langle h(x, t) \rangle \langle h(x', t) \rangle = 2Dt\delta(x - x') \quad (1.14)$$

Nous retrouvons bien que les fluctuations de hauteur sont décorrélées (le delta de Dirac). En “un site donné” ces fluctuations croissent indéfiniment dans le temps comme  $\sigma \sim t^\beta$  avec  $\beta = 1/2$ . L’équation (1.10) est une version continue fidèle du modèle de dépôt aléatoire.

### 1.1.2 Dynamique relaxante linéaire : l’équation d’Edwards-Wilkinson

Un moyen simple d’améliorer le modèle de dépôt aléatoire est d’y ajouter une contribution de relaxation de la surface [55]. Lorsque la particule arrive sur la colonne  $j$ , elle diffuse sur les sites voisins  $\dots, j-2, j-1, j, j+1, j+2, \dots$  jusqu’à ce qu’elle trouve un minimum (local). En pratique [55], il suffit d’explorer les plus proches voisins : une particule arrivant sur la colonne  $j$  choisit le minimum parmi  $(h_{j-1}, h_j, h_{j+1})$ . Cette contribution va avoir tendance à lisser l’interface, et à induire des corrélations sur le champ de hauteur  $\{h_j\}$ .

Introduisons la largeur  $w(t, L)$  moyenne de l’interface définie par

$$w^2(t, L) \equiv \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \langle (h_j - \bar{h})^2 \rangle, \quad (1.15)$$

avec la moyenne spatiale  $\bar{h} = (\sum_k h_k)/L$ . Rappelons que le ‘temps’ (1.7) de ce modèle microscopique correspond au nombre de particules déposées par unité de longueur. On distingue alors deux régimes. Aux temps courts nous avons un régime de croissance pendant lequel la largeur croît comme  $w(t, L) \sim t^\beta$ . À partir d’un temps  $t_\times$  la largeur sature à une valeur limite qui croît avec la taille du système  $L$  comme  $w(\infty, L) \sim L^\zeta$ , où  $\zeta$  est l’exposant de rugosité. Une autre façon de distinguer les deux régimes est d’observer la longueur de corrélation  $\xi(t, L)$  de l’interface de taille  $L$ . Cette longueur de corrélation mesure la longueur caractéristique des corrélations le long de

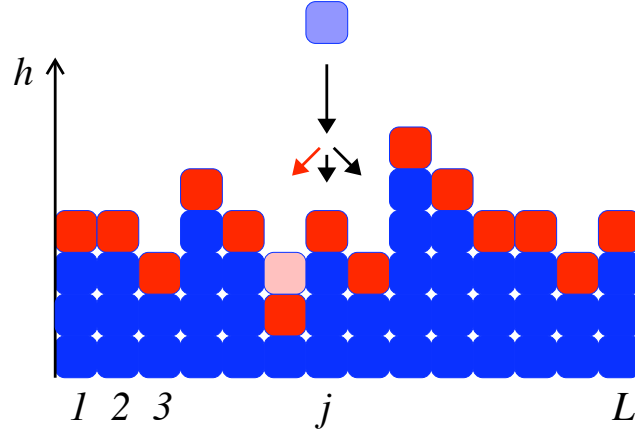


FIGURE 1.2 – Modèle de dépôt aléatoire avec relaxation. La particule déposée à la colonne  $j$  va se positionner au minimum local, ici  $j - 1$ .

l'interface. Pour  $t < t_\times$  cette longueur de corrélation  $\xi(t, L)$  croit depuis une valeur nulle en  $t = 0$  avec la loi de puissance  $\xi(t, L) \sim t^{1/z}$ , avec  $z$  l'exposant dynamique. Au bout d'un certain temps  $t_\times$  la longueur de corrélation devient comparable à la taille du substrat  $L$ , et elle devient stationnaire : pour  $t > t_\times$ ,  $\xi(t, L) \sim L$ . Les deux comportements devant coïncider en  $t = t_\times$ , cela nous donne le comportement du temps de saturation en fonction de la taille du système  $t_\times \sim L^z$ , et on obtient la relation sur les exposants  $z = \zeta/\beta$ . La loi d'échelle qui décrit ce comportement est donnée par

$$w(t, L) = L^\zeta f\left(\frac{t}{L^z}\right), \quad (1.16)$$

la fonction d'échelle ayant les comportements asymptotiques

$$f(x) \sim \begin{cases} x^\beta & \text{si } x \ll 1, \\ 1 & \text{si } x \gg 1. \end{cases} \quad (1.17)$$

Les premières évaluations numériques pour ce modèle ont donné [55]

$$\beta = 0.25 \pm 0.01 \quad \text{et} \quad \zeta = 0.48 \pm 0.02, \quad (1.18)$$

et donc un exposant dynamique  $z \simeq 2$ . Nous pouvons comparer l'exposant  $\beta$  qui est ici plus faible de moitié par rapport au premier modèle simpliste, pour lequel on n'observait pas de saturation.



Edwards et Wilkinson ont introduit une équation donnant la dynamique de ce type de dépôt aléatoire incluant une relaxation de l'interface [48]. À cette fin ils rajoutent un terme de diffusion dans le membre de droite de l'équation naïve (1.10) :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \eta(x, t), \quad (1.19)$$

avec  $\nu$  une constante positive appelée tension de surface, et encore un bruit de moyenne nulle  $\langle \eta(x, t) \rangle = 0$  et non corrélé spatialement et dans le temps  $\langle \eta(x, t) \eta(x'; t') \rangle = 2D \delta(x - x') \delta(t - t')$ . Notons que nous avons absorbé la vitesse moyenne de croissance  $F$  en redéfinissant le champ de hauteur  $h \rightarrow Ft + h$ , ce terme ne changeant pas le profil de l'interface. Le terme  $\partial^2 h / \partial x^2$  contribue bien à lisser l'interface : il favorise le 'remplissage' des minima et défavorise celui des maxima (pour  $\nu > 0$ ).

Cette équation est linéaire et sa résolution est réalisable dans l'espace de Fourier (voir la réf. [191] dans le cas d'un bruit corrélé). La largeur carrée moyenne est donnée par (voir par exemple Nattermann et Tang [137]) :

$$w^2(t, L) = \frac{DL}{\nu} f_{EW} \left( \frac{\nu t}{L^2} \right), \quad (1.20)$$

avec la fonction d'échelle donnée par

$$f_{EW}(x) = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-8\pi^2 x} + 2\pi \sqrt{2\pi x} \operatorname{Erfc} \left( 2\pi \sqrt{2x} \right) \right). \quad (1.21)$$

Ses comportements asymptotiques sont

$$f_{EW}(x) \simeq \begin{cases} \pi \sqrt{2\pi x}^{1/2} & \text{lorsque } x \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2} & \text{lorsque } x \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (1.22)$$

La première limite correspond au régime de croissance, et la seconde au régime stationnaire. Ceci permet d'identifier les exposants de l'équation d'Edwards-Wilkinson à une dimension :

$$\beta = \frac{1}{4}, \quad \zeta = \frac{1}{2}, \quad z = 2. \quad (1.23)$$

Nous retrouvons les exposants évalués par simulation numérique du modèle de dépôt avec relaxation, indiquant que ces deux modèles appartiennent à la même classe d'universalité.

La dynamique d'Edwards-Wilkinson (1.19) est une dynamique d'équilibre : il n'y a pas de force extérieure appliquée, et l'interface cherche à minimiser son énergie à chaque instant (diffusion vers les minima locaux). L'interface produite aux temps longs  $t \gg L^2$  (régime stationnaire) est donc nécessairement équilibrée. L'équation (1.19) peut être déduite en écrivant l'équation de Langevin

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = -\frac{\delta H[h(x, t)]}{\delta h(x, t)} + \eta(x, t) \quad (1.24)$$

avec l'énergie élastique

$$H[h(x, t)] = \frac{\nu}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.25)$$

L'équation de Fokker-Planck associée à l'équation (1.19) donne l'évolution de la distribution de probabilité  $\Pi_t[h(x)]$  d'observer un profil  $h(x)$  au temps  $t$  :

$$\frac{\partial \Pi_t[h(x)]}{\partial t} = \int_0^L dx \left\{ -\frac{\delta}{\delta h(x)} \left[ \left( \nu \frac{d^2 h(x)}{dx^2} \right) \Pi_t[h(x)] \right] + D \frac{\delta^2}{\delta h(x)^2} \Pi_t[h(x)] \right\}. \quad (1.26)$$

Sa solution stationnaire  $\Pi_\infty[h(x)]$  est donnée par la solution d'équilibre de Boltzmann-Gibbs ( $D$  joue le rôle de la température) :

$$\Pi_\infty[h(x)] = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{1}{D} H[h(x)] \right) = \frac{1}{Z} \exp \left( -\frac{\nu}{2D} \int_0^L dx \left( \frac{dh(x)}{dx} \right)^2 \right). \quad (1.27)$$

Le modèle microscopique a été introduit pour décrire l'adsorption de vapeur sur un substrat froid solide [55]. Edwards et Wilkinson ont introduit cette équation pour décrire la sédimentation de particules dans un liquide [48, 90]. De manière générale cette classe d'universalité décrit toutes sortes d'interfaces à l'équilibre, par exemple les parois de domaines magnétiques (sans champ extérieur appliqué et surtout sans désordre, ce qui est néanmoins difficile sinon impossible expérimentalement) ou la séparation de fluides immiscibles [10].

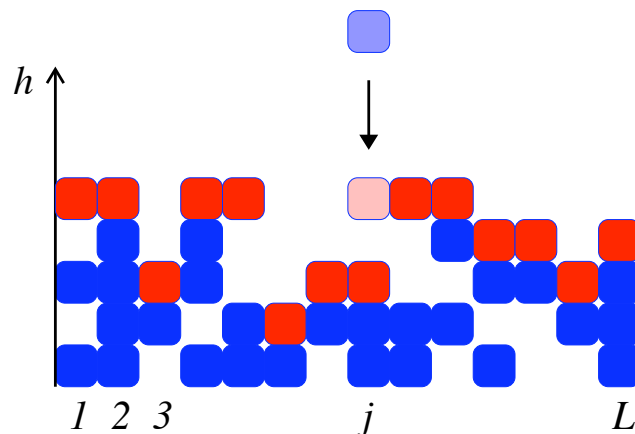


FIGURE 1.3 – Modèle de dépôt balistique. La particule déposée à la colonne  $j$  se colle à la première particule qu'elle rencontre, ici ce sera à gauche de la particule de la colonne  $j + 1$ .

### 1.1.3 Dynamique relaxante et d'agrégation non-linéaire : l'équation de Kardar-Parisi-Zhang

Considérons un autre modèle microscopique simple : le dépôt balistique\* [182, 129]. Les particules arrivent tour à tour verticalement, et vont se fixer dès qu'elles touchent une des particules déjà agrégées. Pour éviter une fonction hauteur multivaluée, on définit la hauteur  $h_j(N)$  de la colonne  $j$  après un dépôt de  $N$  particules par l'altitude de la dernière particule déposée sur la colonne  $j$ . En effet la règle de construction autorise les trous dans le volume, et on ne regarde que la position la plus haute pour chaque colonne pour définir la hauteur de l'interface. La règle d'actualisation pour une particule arrivant dans la colonne  $j$  est donc  $h_j(N + 1) = \max(h_{j-1}(N), h_j(N) + 1, h_{j+1}(N))$ . L'interface générée est donc hors de l'équilibre, car les particules ne cherchent pas les minima locaux d'énergie. Les corrélations se développent car nous relierons par définition la hauteur d'une colonne à celles de ses voisines. Ce phénomène se propage ainsi au cours du dépôt, et on s'attend à retrouver un comportement similaire à celui observé pour les interfaces à l'équilibre. De

\*Ce modèle de dépôt balistique a été étudié initialement pour décrire les propriétés de volume de la sédimentation de particules colloïdales en suspension [182]. Il a été repris dans les années 80 pour ses propriétés de surface en lien avec la croissance de films minces [129].

ce fait, et avec l'appui de simulations numériques, Family et Vicsek [56] ont conjecturé en 1985 pour ce modèle précis le comportement d'échelle

$$w(t, L) = L^\zeta f\left(\frac{t}{L^z}\right), \quad (1.28)$$

avec les comportements asymptotiques

$$f(x) \simeq \begin{cases} x^\beta & \text{pour } x \ll 1, \\ \text{const.} & \text{pour } x \gg 1. \end{cases} \quad (1.29)$$

Ils ont évalué les exposants  $\beta = 0.30 \pm 0.02$  et  $\zeta = 0.42 \pm 0.03$ . Des études numériques ultérieures [130, 9] ont précisé les valeurs

$$\beta = 0.33 \pm 0.006 \quad \text{et} \quad \zeta = 0.47 \pm 0.02. \quad (1.30)$$

Ces exposants sont différents de ceux (1.23) de la classe d'universalité d'Edwards-Wilkinson.

Kardar, Parisi et Zhang [107] ont alors introduit en 1986 une équation d'évolution avec cette fois-ci l'ajout d'un terme non-linéaire dans l'objectif de décrire ce type de modèle :

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left( \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \eta(x, t). \quad (1.31)$$

$\nu$  est la tension de surface,  $\lambda$  un paramètre positif dans le cas de croissance, négatif si l'on modélise la corrosion, et  $\eta$  le bruit défini précédemment. Le second terme du membre de droite rend compte de la croissance isotrope. C'est le terme non-linéaire le plus simple qui respecte les symétries de translation. En revanche il brise la symétrie de retournement  $h \rightarrow -h$ , et de ce fait donne une vitesse moyenne de croissance non-nulle.

En dimension un, le groupe de renormalisation prouve le comportement d'échelle à la "Family et Vicsek" décrit par les équations (1.28) et (1.29) avec les exposants :

$$\beta = \frac{1}{3}, \quad \zeta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z = \frac{3}{2}. \quad (1.32)$$

Ces exposants sont en accord avec les évaluations numériques pour le modèle de dépôt balistique. Notons toutefois que ce modèle microscopique n'inclut pas

de ‘terme de relaxation’ en  $\partial_x^2 h$  dans sa définition. Les exposants étant correct, ceci indique que le ‘terme non-linéaire’, représenté par la règle d’attachement sur le premier voisin, domine l’effet de rugosité.

Les exposants de croissance  $\beta$  et dynamique  $z$  sont différents de ceux obtenus pour l’équation d’Edwards-Wilkinson. En revanche, on retrouve un exposant de rugosité  $\zeta = 1/2$ . Ceci signifie que pour une interface sur un substrat fini de longueur  $L$ , dans le régime stationnaire  $t \gg L^{3/2}$ , on s’attend à ce que les profils d’interface donnés par KPZ soient similaires à ceux d’EW. En effet, on peut vérifier que la distribution de probabilité stationnaire donnée dans le paragraphe précédent Eq. (1.27) est une solution de l’équation de Fokker-Planck associée à l’équation KPZ (1.31). Notons que cette équation peut être dérivée comme une équation de Langevin avec un hamiltonien type “KPZ” déjà identifié en 1979 auparavant par Wallace et Zia [185, 11].

Au delà du modèle de dépôt balistique, le modèle d’Eden [47] appartient à la classe d’universalité KPZ. Il décrit la croissance d’une colonie de cellules sans mobilité. Ce modèle est défini sur un réseau carré bi-dimensionnel (une extension à d’autres réseaux et à des dimensions supplémentaires est possible). Les cellules ne peuvent occuper que les noeuds du réseau. On définit les sites adjacents d’une cellule en  $(x, y)$  par les noeuds  $(x, y \pm 1)$  et  $(x \pm 1, y)$ . Au temps  $t = 0$  le site à l’origine est occupé par la cellule mère. Au temps suivant  $t = \Delta t$ , la cellule se divise, et la cellule fille se fixe dans un des 4 sites adjacents ( $x = 0, y = \pm 1$ ) ou ( $x = \pm 1, y = 0$ ). L’instant d’après, il y a encore une division cellulaire, et la cellule fille se fixe sur l’un des sites adjacents de l’agrégat, etc... La zone active de l’agrégat, le lieu où de nouvelles cellules peuvent se fixer, appartient à la classe d’universalité KPZ. Le processus d’agrégation limitée par la diffusion [190, 140], et de nombreux modèles SOS (Solid On Solid) partagent cette propriété [113, 90]. L’équivalence avec une équation de la turbulence (équation de Burgers) a été largement utilisée dans l’obtention des résultats théoriques [107, 131, 90].

Malgré les efforts théoriques et numériques concernant l’équation KPZ et la diversité des modèles dans sa classe d’universalité, peu de montages expérimentaux ont identifiés le comportement KPZ. Une des premières expériences arrive près de 10 ans après l’identification de l’équation KPZ : la combustion lente de papier [128]. Plus récemment Takeuchi et Sano ont identifié le comportement KPZ dans la croissance de phases turbulentes de cristaux liquides [172]. Ce dispositif expérimental précis permet de caractériser les statistiques d’extrêmes dans la phase de croissance  $t \ll L^2$ . Ces résultats seront discutés dans le chapitre 4.

La plupart des études sur les interfaces concernaient principalement la caractérisation de la largeur (1.15), ses propriétés d'échelle (1.16) et les exposants associés. Cela a permis d'identifier les deux principales classes d'universalité EW et KPZ. Une extension directe pour affiner nos connaissances des interfaces a été d'étudier la distribution statistique complète de la largeur [141, 74].

Nous allons nous intéresser à une autre observable pertinente, voire cruciale si l'on pense à une application technologique, celle du maximum de l'interface. Nous verrons plus loin dans ce manuscrit (chapitre 4) un modèle particulier de croissance nommé 'Polynuclear growth' (croissance polynucléée) à propos duquel les propriétés du maximum ont été identifiées dans les dix dernières années [144, 145]. Ce modèle nous intéressera particulièrement pour son lien avec un modèle de mouvements browniens non-intersectants. Avant de s'intéresser au maximum d'interfaces, nous rappelons brièvement la théorie des valeurs extrêmes, en particulier pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

## 1.2 Extrêmes

Donnons-nous un ensemble de variables aléatoires

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.33)$$

que l'on appelle échantillon de  $n$  variables. Le caractère gras indique qu'il s'agit d'un vecteur. Dans ce paragraphe, ce vecteur aura  $n$  composantes, et nous utiliserons cette notation à différentes reprises dans d'autres chapitres (en spécifiant le nombre de composantes à chaque fois que cela s'impose). De même, introduisons une notation commode :  $\mathbb{P}[\dots]$ , signifiant *la probabilité pour que* l'assertion [...] soit vérifiée. Ces variables aléatoires sont distribuées avec une loi

$$\mathbb{P}[\mathbf{x} \in [\mathbf{z}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}]] = P(z_1, z_2, \dots, z_n) dz_1 dz_2 \dots dz_n, \quad (1.34)$$

où  $P(z_1, z_2, \dots, z_n)$  est appelée la distribution jointe des  $n$  variables. Les statistiques d'extrêmes se focalisent sur les propriétés statistiques du maximum (ou du minimum) de cet ensemble, en particulier lorsque  $n \rightarrow \infty$  (limite thermodynamique). Le maximum est défini par

$$X_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.35)$$

et l’objectif usuel est de calculer la distribution cumulée

$$\mathbb{P}[X_n \leq X]. \quad (1.36)$$

La probabilité que le maximum soit inférieur ou égal à une certaine valeur donnée  $X$  est égale à la probabilité pour que chaque membre de l’échantillon ait une valeur inférieure ou égale à  $X$ , et on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n \leq X] &= \mathbb{P}[x_1 \leq X, x_2 \leq X, \dots, x_n \leq X] \\ &= \int^X \int^X \dots \int^X P(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \end{aligned} \quad (1.37)$$

où l’on a utilisé la loi jointe (1.34), et pris l’habitude des physiciens de ne plus distinguer les variables aléatoires de leurs valeurs. Les bornes inférieures des intégrales correspondent aux bornes inférieures du support de la distribution jointe pour les variables correspondantes.

Après cette introduction formelle, présentée pour fixer les notations et l’objectif principal, nous allons examiner quels sont les champs d’application du calcul de ces statistiques d’extrêmes, puis aborder le cas particulier des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

### 1.2.1 Champs d’application des statistiques d’extrêmes

Les statistiques d’extrêmes ont pour objet de déterminer les propriétés des valeurs non typiques d’un ensemble donné de variables aléatoires : les queues des distributions. Les champs d’application de ce type d’étude sont multiples, les premiers à se pencher sur la question sont les statisticiens. Selon l’ouvrage d’E. J. Gumbel [84], la source historique remonte à Nicolas Bernoulli en 1709, confronté à un problème d’actuariat : parmi un groupe de  $n$  individus ayant le même âge et mourant “aléatoirement” dans un intervalle de  $t$  années, quelle est la durée de vie moyenne du dernier survivant ? Un autre problème concret concerne les crues, problème pour lequel Gumbel a consacré de nombreux travaux dans les années 1950. Le problème est simple : étant donné des mesures quotidiennes du niveau d’une rivière, peut-on estimer la hauteur maximale atteinte lors d’une crue ? Dans le cadre de l’océanographie, D. E. Cartwright et M. S. Longuet-Higgins s’interrogent en 1956 [27] sur la distribution de la hauteur maximale des vagues.

Les problèmes de statistiques d'extrêmes en hydrologie ont été remis au goût du jour depuis une décennie environ et le problème du réchauffement climatique : ou comment utiliser la théorie des valeurs extrêmes pour sonder la hausse globale des températures [110]. Dans le même esprit, les statistiques d'extrêmes de températures et de précipitations dans des zones géographiques limitées permettent également d'avoir une mesure indirecte du réchauffement climatique [19, 109].

Il faut attendre la fin des années 1990 pour reconnaître leur pertinence en physique statistique, notamment dans l'étude des milieux désordonnés [17]. Les réussites de la physique statistique à l'équilibre étaient bien entendu basées sur le fait que les comportements microscopiques typiques dominaient largement le comportement macroscopique. Ainsi les queues des distributions de probabilité étaient muettes. Il a fallu attendre les développements de la physique statistique hors équilibre et la pertinence des événements rares pour expliquer la "thermodynamique" de tels systèmes. En particulier la physique des milieux désordonnés est dominée par les minima locaux du paysage énergétique (énergie ou énergie libre selon le système considéré). Ainsi une meilleure compréhension des statistiques d'extrêmes pour des paysages d'énergie fortement corrélés semble être une approche fructueuse si ce n'est indispensable pour caractériser les propriétés des verres, un des exemples les plus concrets de la physique statistique des milieux désordonnés. Dans cet ordre d'idée, les statistiques d'extrêmes sont également pertinentes dans le domaine de l'évolution en biologie. Les populations subissent des contraintes externes et des mutations, et leur dynamique converge vers les maxima d'un paysage de *fitness* (adaptabilité) pouvant être modélisé par un processus aléatoire [96, 95]. Un autre point de vue de mécanique statistique consiste à mettre en parallèle les propriétés de sommes de variables aléatoires, souvent utilisées comme grandeur macroscopique (exemple de la magnétisation), avec les propriétés des extrema de ces variables aléatoires [33]. Cette approche permet une caractérisation indirecte des systèmes physiques à l'étude. Nous discuterons de ce point de vue au cours de ce manuscrit. Enfin un champ d'application moderne est la finance [18, 51, 177, 122].

Nous mentionnons de façon très brève la notion dérivée de record. Prenons l'exemple d'un processus aléatoire temporel comme la mesure de la température dans le temps en un endroit donné. Au-delà du comportement déterministe diurne ou saisonnier, la température fluctue autour de sa valeur moyenne attendue à un certain moment de la journée car elle est soumise aux aléas



météorologiques (que l'on peut modéliser raisonnablement par un processus aléatoire). Mesurons la température à Lacanau-Océan à 12h00 (GMT) tous les jours, pour former la séquence temporelle  $T_1, T_2, \dots, T_N \dots$ . Une mesure de température  $T^R$  est qualifiée de record jusqu'à la journée  $M$  si pour tout  $1 \leq k \leq M$  nous avons  $T^R \geq T_k$  (le plus grand des maxima locaux jusqu'à la journée  $M$ ). Bien entendu le record  $T^R$  jusqu'à la journée  $M$  pourra être battu lors d'une journée suivante  $N > M$ . Les records d'un processus aléatoire forment donc une suite croissante de maxima. Les modèles pour lesquels la notion de record a été étudiée sont relativement proches de ceux discutés dans ce manuscrit, comme par exemple les études analytiques pour des modèles de marches aléatoires [126, 168]. Par extension des statistiques d'extrêmes, les statistiques des records sont utilisés dans les mêmes cadres que ceux que nous avons cités précédemment : quantifier les effets de l'évolution du climat [156, 187], en biologie [77] et en finance [186].

Les records ne seront pas abordés dans la suite de ce manuscrit. Ils constituent une extension aux valeurs extrêmes dès qu'une série temporelle peut être identifiée. Nous nous consacrerons exclusivement aux statistiques d'extrêmes. Le paragraphe suivant récapitule succinctement les résultats de la théorie des valeurs extrêmes dans le cas de variables aléatoires indépendantes.

### 1.2.2 La théorie des statistiques d'extrêmes pour des variables indépendantes et identiquement distribuées (iid)

Nous introduisons dans ce paragraphe les notations et méthodes qui seront utilisées dans la suite du manuscrit en passant en revue les principes et résultats de la théorie des valeurs extrêmes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Cette théorie, initiée par les articles fondateurs [78, 71, 183, 80], est présentée en détails dans l'ouvrage de référence de E. J. Gumbel [84].

Comme annoncé plus haut, donnons-nous un ensemble de variables aléatoires

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

que nous prenons dorénavant indépendantes

$$\mathbb{P}[\mathbf{x} \in [\mathbf{z}, \mathbf{z} + \mathbf{dz}]] = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[x_i \in [z_i, z_i + dz_i]], \quad (1.38)$$

et identiquement distribuées

$$\mathbb{P}[x_i \in [z, z + dz]] = p(z)dz, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (1.39)$$

où  $p(z)$  est appelée la distribution de probabilité *mère* de chaque variable de l'échantillon. Suivant les notations usuelles en physique, nous écrirons les variables aléatoires  $x_i$  directement dans les densités jointes ou marginales au lieu des valeurs  $z_i$ . En combinant (1.34) et (1.39), la relation d'indépendance (1.38) devient :

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n p(x_i). \quad (1.40)$$

La distribution de probabilité cumulée mère d'une variable est

$$\mathbb{P}[x_i \leq x] = \int^x p(x')dx', \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (1.41)$$

La borne inférieure de l'intégrale correspond à la borne inférieure du support de la distribution mère  $p(x)$ .

Nous nous intéressons à la loi de probabilité de la plus grande valeur parmi l'échantillon  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , *i.e.* la distribution cumulée du maximum

$$X_n = \max(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1.42)$$

qui est la distribution cumulée jointe de chaque variable de l'échantillon

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_n \leq X] &= \mathbb{P}[x_1 \leq X, x_2 \leq X, \dots, x_n \leq X] \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{P}[x_i \leq X] \quad (\text{indépendance}) \\ &= \left[ \int^X p(x')dx' \right]^n \quad (\text{identiquement distribuées}). \end{aligned} \quad (1.43)$$

En première approche, on peut se convaincre que la valeur moyenne de  $X_n$  ne peut que croître avec la taille  $n$  de l'échantillon : plus on agrandit l'échantillon, plus on a de chance d'aller explorer la queue de la probabilité mère  $p(x)$ .

La théorie des valeurs extrêmes s’intéresse à la distribution asymptotique de  $X_n$  lorsque l’échantillon devient infiniment grand, *i.e.* lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Pour espérer identifier une distribution limite dont le support ne se réduise pas à un point, il faut donc utiliser une loupe qui pointe approximativement vers  $\langle X_n \rangle$  avec un grossissement qui donne des fluctuations appréciables “macroscopiquement”. On utilisera donc une variable d’échelle

$$z = \frac{X_n - a_n}{b_n}, \quad (1.44)$$

avec des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  identifiés pour chaque distribution mère  $p(x)$  (coefficients non-universels) de sorte que la limite suivante existe :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{X_n - a_n}{b_n} \leq z \right] = F_k(z). \quad (1.45)$$

Dans ces conditions, les possibles distributions limites  $F_k(x)$  indexées par  $k$  seront nommées distributions asymptotiques du maximum. Dans le cas de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, un théorème [80] assure l’existence d’un couple de suite  $(a_n, b_n)$  permettant une telle convergence vers l’une des trois asymptotes :

$$(I) \text{ Gumbel : } F_{\text{I}}(z) = \exp(-e^{-z}). \quad (1.46a)$$

$$(II) \text{ Fréchet : } F_{\text{II}}(z) = \begin{cases} 0 & \text{si } z \leq 0, \\ \exp(-z^{-\gamma}) & \text{si } z > 0. \end{cases} \quad (\gamma > 1). \quad (1.46b)$$

$$(III) \text{ Weibull : } F_{\text{III}}(z) = \begin{cases} \exp(-|z|^\gamma) & \text{si } z \leq 0, \\ 1 & \text{si } z \geq 0. \end{cases} \quad (\gamma > 1). \quad (1.46c)$$

Il y a donc trois bassins d’attraction suivant le comportement de la distribution mère  $p(x)$ , à grand argument (quand  $x \rightarrow \infty$  si le support n’est pas borné, ou  $x \rightarrow S^-$  si  $S$  est la borne supérieure de la distribution mère). Les distributions mères  $p(x)$  à support non borné avec une décroissance plus rapide que n’importe quelle puissance lorsque  $x \rightarrow \infty$  ont une distribution du maximum qui tombe dans la classe de Gumbel (I). La classe de Fréchet (II) concerne les distributions mères qui décroissent en loi de puissance  $p(x) \sim 1/x^{1+\gamma}$  lorsque  $x \rightarrow \infty$ . Enfin les distributions mères à support borné à droite (*i.e.* du type  $[I, S]$  pour  $I < S$  ou  $]-\infty, S]$ ), et dont le comportement au voisinage de la borne supérieure  $S$  est en loi de puissance  $(S-x)^{\gamma-1}$  convergent vers la classe de Weibull (III). Examinons ces résultats sur un premier exemple simple : la distribution exponentielle.

### Exemple de la distribution exponentielle

Prenons comme distribution mère la distribution exponentielle

$$p(x) = \exp(-x), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (1.47)$$

Calculons la distribution cumulée du maximum mis à l'échelle, avec pour l'instant  $a_n$  et  $b_n$  deux suites inconnues. Pour une taille d'échantillon  $n$  donnée

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left[ \frac{X_n - a_n}{b_n} \leq z \right] &= \mathbb{P} [X_n \leq a_n + b_n z] \\ &= \left[ \int_0^{a_n + b_n z} p(x') dx' \right]^n \quad \text{cf. \u00e9q. (1.43)} \\ &= [1 - e^{-(a_n + b_n z)}]^n \end{aligned}$$

Il s'agit alors de prendre la limite  $n \rightarrow \infty$ . Si pour une valeur donnée de  $z$  le terme  $(a_n + b_n z)$  est borné lorsque  $n \rightarrow \infty$  alors on aura une distribution singulière égale à z\u00e9ro partout sauf en  $z = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n$  si la limite existe. Ainsi le terme  $(a_n + b_n z)$  doit diverger lorsque  $n \rightarrow \infty$ . De la m\u00eame mani\u00e8re on se convainc que la suite  $a_n$  doit diverger, sinon la distribution asymptotique aurait encore un support singulier (localis\u00e9 en  $+\infty$ ). \u00c9crivons alors

$$\mathbb{P} \left[ \frac{X_n - a_n}{b_n} \leq z \right] = \left[ 1 - \frac{1}{n} e^{-(a_n - \log n + b_n z)} \right]^n \simeq \exp \left( -e^{-(a_n - \log n + b_n z)} \right), \quad (1.48)$$

qui admet une limite non singul\u00e8re si on prend  $a_n = \log n + K$  avec  $K$  une constante r\u00e9elle arbitraire. Comme cette constante est une translation finie lorsque  $n \rightarrow \infty$ , on la prend \u00e9gale \u00e0  $K = 0$ . Alors la suite  $b_n$  doit converger vers une limite finie que l'on prend \u00e9gale \u00e0 1 (dilatation finie arbitraire). Par simplicit\u00e9 on prend donc les suites

$$\begin{aligned} a_n &= \log n, \\ b_n &= 1, \end{aligned} \quad (1.49)$$

(on pourrait ajouter des termes arbitraires de limite nulle sans changer les r\u00e9sultats asymptotiques). En ins\u00e9rant ces valeurs dans l'expression pr\u00e9c\u00e9dente, on obtient la convergence vers la distribution de Gumbel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [X_n - \log n \leq z] = \exp(-e^{-z}) = F_1(z). \quad (1.50)$$

### Un moyen simple d'évaluer le coefficient $a_n$

Pour des variables aléatoires indépendantes, il existe un critère simple qui permet d'évaluer le coefficient  $a_n$ , c'est-à-dire l'endroit où se trouve typiquement le maximum pour un échantillon de  $n$  variables : il y en a une qui prend une valeur supérieure ou égale à  $a_n$  (le maximum  $X_n$ ), les  $n - 1$  autres étant inférieures. Ceci permet d'écrire

$$\frac{1}{n} = \int_{a_n}^S p(x) dx, \quad (1.51)$$

avec  $S$  la borne supérieure du support de la distribution  $p(x)$ . Traitons le cas de l'exponentielle, pour lequel  $S = +\infty$ , alors

$$\frac{1}{n} = \int_{a_n}^{\infty} e^{-x} dx = e^{-a_n}, \quad (1.52)$$

et on retrouve bien  $a_n = \log n$ . Il faut prendre la précaution d'interpréter ces relations à la limite asymptotique  $n \rightarrow \infty$ .

### Exemple de la distribution gaussienne

Prenons maintenant la distribution gaussienne

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (1.53)$$

L'analyse asymptotique étant plus pénible, cette distribution mère a ralenti les efforts des statisticiens au début du XXème siècle [84].

Utilisons la relation (1.51) pour trouver le coefficient  $a_n$ . Tout d'abord nous avons le résultat asymptotique lorsque  $z \gg 1$  :

$$\begin{aligned} \int_z^{+\infty} p(x) dx &= \int_z^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \frac{\sigma}{z\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^2}\right)\right) \end{aligned} \quad (1.54)$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , la valeur typique  $a_n$  du maximum tend vers l'infini, et donc en utilisant la relation (1.51) et l'asymptote précédente avec  $z = a_n$ , on obtient l'équation :

$$\frac{a_n^2}{2\sigma^2} + \log a_n - \log n = \log\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right). \quad (1.55)$$

La solution asymptotique est

$$a_n = \sigma\sqrt{2\log n} - \frac{\sigma \log(\log n)}{2\sqrt{2\log n}} - \frac{\sigma}{2} \frac{4\pi}{\sqrt{2\log n}} + \frac{o(1)}{\sqrt{\log n}}, \quad (1.56)$$

avec la notation  $o(1)$  indiquant un terme qui tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Seul le premier terme est divergent à la limite  $n \rightarrow \infty$ , les autres sont des corrections asymptotiques.

Pour  $n$  fini (mais grand), nous avons, d'après (1.43) et (1.54) :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\frac{X_n - a_n}{b_n} \leq z\right] &= \mathbb{P}[X_n \leq a_n + b_n z] \\ &= \left[1 - \frac{\sigma}{(a_n + b_n z)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(a_n + b_n z)^2}{2\sigma^2}}\right]^n \\ &= \left[1 - \frac{1}{n} e^{-\left[\frac{a_n^2}{2\sigma^2} \left(1 + \frac{b_n}{a_n} z\right)^2 + \log a_n - \log n - \log\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\right) + \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n} z\right)\right]}\right]^n \end{aligned} \quad (1.57)$$

Prenons alors la limite  $n \rightarrow \infty$ . Nous supposons que les fluctuations de la valeur maximale autour de la valeur typique sont petites devant la valeur typique :  $b_n \ll a_n$ . Ceci paraît raisonnable, sans quoi des valeurs de  $X_n < 0$  auraient un poids non-nul à la limite  $n \rightarrow \infty$ . En développant au premier ordre dans l'exponentielle en  $b_n/a_n$ , et en utilisant l'équation (1.55) vérifiée par  $a_n$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\frac{X_n - a_n}{b_n} \leq z\right] = \exp\left(-e^{-[a_n b_n z + \frac{b_n}{a_n} z]}\right). \quad (1.58)$$

Cette limite asymptotique n'a de sens que si

$$b_n = \frac{\sigma}{\sqrt{2\log n}}, \quad (1.59)$$

et on retombe bien sur la distribution de Gumbel (en omettant les termes correctifs dans  $a_n$ ) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{2\log n}}{\sigma} \left(X_n - \sigma\sqrt{2\log n}\right) \leq z\right] = \exp(-e^{-z}) = F_1(z). \quad (1.60)$$

## Convergence, effets de taille finie

Pour clôturer ce paragraphe, notons que les résultats (1.46) sont asymptotiques, et que la convergence est souvent remarquablement lente. Ce problème est présent dès les premières analyses [71] du fait de son importance pour les applications pratiques [89], nous verrons un exemple dans le dernier paragraphe de ce chapitre. Il a été étudié de plus près par la communauté des mathématiciens [38, 39]. Plus récemment, les méthodes du groupe de renormalisation ont été utilisées par la communauté des physiciens pour caractériser les effets de taille finie de la théorie des valeurs extrêmes de variables aléatoires iid [88, 87, 14]. L'idée repose sur le principe de stabilité des distributions asymptotiques, principe présent dès les premières analyses [71]. Prenons un échantillon de  $n$  variables de distribution mère  $p(x)$ , dont la statistique du maximum converge vers l'une des trois classes  $F_k(z)$ ,  $k$  parmi (I), (II) ou (III). Séparons ces variables en  $p$  échantillons distincts, chacun contenant donc  $n/p$  variables. Lorsque l'on prend la limite asymptotique  $n \rightarrow \infty$  à  $p$  fixé, alors au sein de chaque sous-ensemble, la statistique du maximum converge vers  $F_k(z)$  avec les coefficients  $a_{n/p}$  et  $b_{n/p}$ . Mais pour le grand échantillon de taille  $n$ , le maximum est également distribué avec  $F_k(z)$ , approchée avec les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ . Ceci impose que la valeur maximale du maximum de chaque sous-échantillon (distribution mère  $F'_k(x)$ ) est distribuée avec  $F_k(z)$ , d'où la stabilité des  $F_k(z)$ . Pour produire une analyse de groupe de renormalisation, on étend cette idée à  $p$  rationnel puis à tout  $p$  réel positif (par densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ ). On peut alors définir une transformation infinitésimale et écrire les équations de renormalisation. Une étude détaillée permet d'obtenir les corrections de taille finie aux distributions limites  $F_k(z)$ .

### 1.2.3 Le cas de variables aléatoires corrélées

La théorie des valeurs extrêmes pour des échantillons de variables aléatoires indépendantes est donc bien établie. Les idées du groupe de renormalisation permettent d'étendre ces résultats au cas de variables aléatoires faiblement corrélées. Dès que les variables de l'échantillon ne sont pas indépendantes, on dit qu'elles sont corrélées. La distribution jointe des  $n$  variables ne se factorise plus en un produit de  $n$  facteurs. Par analogie avec les systèmes usuels de la mécanique statistique, deux cas peuvent être alors distingués : faible corrélation et forte corrélation. Si la fonction de corrélation décroît avec une longueur caractéristique  $\xi$ , la longueur de corrélation, alors dans

le cas où cette longueur  $\xi$  est très petite devant la taille du système ( $\xi \ll n$  pour un échantillon de  $n$  variables), alors on est dans le cas de faibles corrélations. Le traitement consiste à diviser le système en blocs de taille  $\xi$ . Deux blocs différents seront essentiellement indépendants, et donc la valeur maximale parmi les valeurs maximales de chaque bloc convergera vers l'une des trois distributions asymptotiques des variables iid (1.46). Il s'agit alors d'identifier la distribution mère de la valeur maximale au sein de chaque bloc pour déterminer quelle classe d'universalité est en jeu parmi Gumbel (1.46a), Fréchet (1.46b) ou Weibull (1.46c). A l'inverse, si la taille de chaque bloc croît proportionnellement à la taille du système, alors on ne pourra plus appliquer les résultats des variables indépendantes.

Ainsi lorsque les corrélations s'étendent à une partie de support mesurable à la limite où  $n$  tend vers l'infini, on change de registre et l'identification des statistiques d'extrêmes n'est plus régie par la théorie des variables iid. A l'heure actuelle, une classification similaire – en différentes classes d'universalité – n'existe pas. La décroissance des lois marginales n'est plus suffisante pour caractériser le comportement du maximum global, et trouver un critère de classification au sein des variables aléatoires fortement corrélées semble être un projet difficilement réalisable.

La stratégie adoptée est de se confronter à des cas particuliers, et de constater ou non une régularité dans différents systèmes. En pratique de nombreux exemples présentent de fortes corrélations, et de nombreux efforts ont été consacrés au traitement de ces exemples pertinents en physique durant ces dix dernières années comme par exemple pour le cas de variables hiérarchiques [40], la plus grande valeur propre de certains ensembles de matrices aléatoires [175, 176], pour les interfaces dans le régime d'équilibre [154, 85, 123, 124, 116, 164, 86, 23], le maximum d'une interface KPZ en croissance [144, 145] en lien avec le maximum d'un modèle de pastèques [166].

## 1.3 De la statistique du maximum d'interfaces

Après avoir présenté succinctement les deux thèmes majeurs de ce manuscrit, la croissance d'interfaces et les statistiques d'extrêmes, nous entrons dans le vif du sujet en les mettant en rapport. Dans ce dernier paragraphe nous discutons, à titre d'introduction, de la statistique de la hauteur maximale de l'interface générée par le modèle de dépôt aléatoire introduit dans le para-



graphe 1.1.1, voir la figure 1.1, comme application directe de la théorie des valeurs extrêmes pour des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées.

### 1.3.1 Statistique de la hauteur maximale dans le modèle du dépôt aléatoire

Dans ce dernier paragraphe de ce premier chapitre, nous nous proposons d'analyser le cas du modèle de dépôt aléatoire. Pour une étude précise des statistiques d'extrêmes d'un ensemble de variables donné formellement par (1.1), nous renvoyons à la référence [54] dans laquelle Evans et Majumdar examinent en détail la statistique d'extrêmes de la solution stationnaire du processus de portée nulle. Ici nous traitons plus simplement l'interface du dépôt aléatoire comme étant totalement décorrélée (la corrélation induite par la contrainte que la somme des hauteurs soit égale au nombre de particules déposées est marginale, et ne change pas la physique du problème). Ainsi la statistique de la hauteur maximale doit entrer dans le cadre de la théorie pour des variables aléatoires iid. La distribution mère est binomiale. Lorsque le nombre de particules déposées par unité de longueur  $N/L = t$  (le temps effectif) est grand, les hauteurs  $h_j$  peuvent être considérées comme des variables continues, car l'incrément de hauteur est petit devant la hauteur typique  $\delta h_j = 1 \ll t$ . Dans cette limite, la hauteur  $h_j$  à la colonne  $j$  est distribuée avec la loi normale de moyenne  $t$  et de variance  $t(1 - 1/L)$ . Lorsque  $N \rightarrow \infty$  à  $L$  fixé, on a

$$p_{N,L}(h) \rightarrow p_{t,L}(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(1 - \frac{1}{L})}} \exp\left(-\frac{(h-t)^2}{2t(1 - \frac{1}{L})}\right). \quad (1.61)$$

Alors, à la limite où la taille du substrat  $L$  tend vers l'infini, on s'attend à ce que le maximum parmi les variables  $(h_j - t)$  pour  $1 \leq j \leq L$  soit distribué avec la loi de Gumbel  $F'_1$ . Les coefficients d'approche asymptotique sont à l'ordre dominant

$$\begin{aligned} a_L &= \sqrt{2t\left(1 - \frac{1}{L}\right) \log L}, \\ b_L &= \sqrt{\frac{t\left(1 - \frac{1}{L}\right)}{2 \log L}}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Notons que la notion de hauteur est ici relative à la hauteur moyenne de chaque colonne, étant donné que nous traitons des variables aléatoires. Pour des interfaces corrélées, on doit se donner un point de référence pour mesurer le champ de hauteur qui nous affranchisse de la symétrie par translation  $h_j \rightarrow h_j + c$  avec  $c$  une constante, symétrie présente dans les deux équations EW et KPZ. Un moyen simple d'y parvenir est de mesurer le champ de hauteur relativement à la moyenne spatiale de la réalisation concernée. On définit donc un champ de hauteur relative

$$x_j = h_j - \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h_i, \quad (1.63)$$

dont on souhaite connaître la distribution du maximum,

$$\mathbb{P} \left[ \max_{1 \leq j \leq L} x_j \leq X \right]. \quad (1.64)$$

Nous reviendrons sur ce type de définition au prochain chapitre. Notons qu'avec cette définition, les variables  $x_j$  issues du modèle de dépôt aléatoire sont corrélées si  $L$  est fini. En effet on peut calculer la fonction de corrélation

$$\langle x_j x_k \rangle - \langle x_j \rangle \langle x_k \rangle = t \left( 1 - \frac{1}{L} \right) \left[ \delta_{jk} - \frac{1}{L} \right]. \quad (1.65)$$

Le terme en  $1/L$  montre la corrélation induite par notre définition, il s'annule à la limite  $L \rightarrow \infty$ . Cette corrélation est du même type que celle induite par la contrainte  $\sum_{j=1}^L h_j = N$  discutée auparavant. Donc à la limite  $L \rightarrow \infty$ , on doit retrouver la distribution de Gumbel. Cela peut se voir en prenant la limite dans la définition (1.63), la moyenne spatiale  $(1/L) \sum_i h_i$  convergeant vers la moyenne d'ensemble  $\langle h \rangle = t$ . Ainsi avec les coefficients  $a_L$  et  $b_L$  donnés par (1.62), on obtient le résultat pour le maximum de la hauteur relative d'une interface générée par dépôt aléatoire

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{\max_j x_j - a_L}{b_L} \leq z \right] = F_I(z). \quad (1.66)$$

La portée de ce résultat est cependant limitée : d'une part ce type d'interface est totalement éloigné de la réalité, et d'autre part la convergence très lente vers la distribution de Gumbel n'aide pas à prendre les limites  $N \rightarrow \infty$  à  $L$  fixé, puis  $L \rightarrow \infty$  concrètement, par exemple lors d'une simulation numérique.

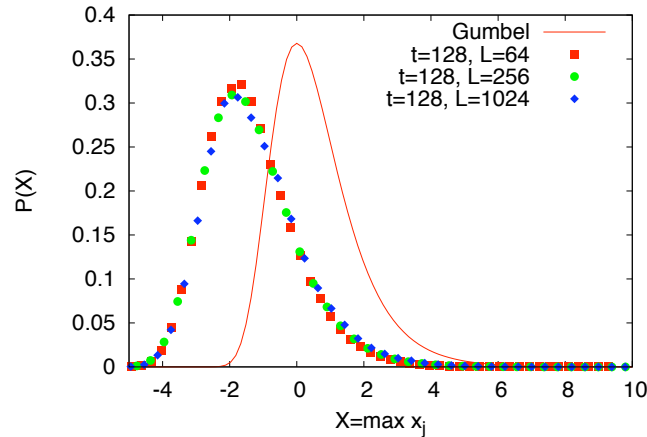


FIGURE 1.4 – Distributions du maximum des hauteurs relatives (1.63) pour  $t = 128$  et trois différentes tailles  $L = 64, 256, 1024$ , en symboles. La distribution de Gumbel  $F'_1$  en trait plein.

Nous illustrons cette difficulté déjà mentionnée en figure 1.4 avec les distributions du maximum relatif mises à l'échelle avec les coefficients  $a_L$  et  $b_L$  qui sont très proches l'une de l'autre pour différentes valeurs de  $L = 64, 256, 1024$ , mais encore très éloignées de la distribution de Gumbel  $F'_1(z)$ . Insistons sur le fait que la limite  $t \gg 1$  est atteinte rapidement (par exemple  $t = 128$  pour nos simulations), mais que la limite  $L \rightarrow \infty$  paraît difficile à obtenir en un temps de simulation raisonnable (entre  $L = 64$  et  $L = 1024$ , il n'y a pas beaucoup de variations dans la distribution mise à l'échelle).

### 1.3.2 La suite

L'objectif de ce manuscrit est d'apporter des réponses précises quant à la statistique du maximum pour les interfaces de type EW et KPZ. Si l'interface est équilibrée à la limite  $t \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire lorsqu'elle atteint le régime stationnaire décrit par (1.27), nous nous intéresserons à la distribution de la hauteur relative. Nous introduirons une définition généralisée de cette hauteur relative, nécessaire pour s'affranchir de l'invariance par translation uniforme

---

de tout le champ de hauteur. La distribution du maximum de la hauteur relative est calculée par la méthode d'intégrale de chemin, méthode analytique principale utilisée pendant cette thèse. Ces méthodes et résultats sont introduits dans le chapitre 2. Ensuite nous analyserons dans le chapitre 3, à l'aide de simulations numériques principalement, la distribution du maximum de la hauteur relative d'interfaces élastiques en milieu désordonné. Enfin dans un dernier chapitre nous nous intéresserons au maximum d'une interface KPZ en croissance, qui ne s'équilibre pas. A cette fin nous procéderons dans le chapitre 4 à une introduction à l'état de l'art en décrivant les résultats obtenus à propos de modèles dans la classe KPZ. Nous exposerons alors l'étude de la valeur et de la position du maximum (le long du substrat) pour un modèle de mouvements browniens qui ne se croisent pas, modèle qui permet d'approcher la physique de l'interface KPZ en question.



---

## Maximum de la hauteur relative d'interfaces à l'équilibre

---

Ce chapitre est consacré à l'analyse de la statistique du maximum d'interfaces équilibrées. Nous introduisons dans un premier temps la méthode d'intégrale de chemin, efficace pour traiter toute mesure équivalente au mouvement brownien. Nous aurons pris soin de présenter ce dernier et la mesure associée à partir d'une marche aléatoire à temps discret. Après avoir défini une hauteur relative généralisée, nous caractérisons la distribution marginale de la hauteur. Enfin nous calculons exactement la distribution du maximum de la hauteur relative, et comme corollaire, nous retrouvons les cas limites déjà connus. Dans une dernière section, nous nous intéressons à la distribution de l'aire sous des mouvements browniens conditionnés, et donnons en particulier une formule pour la distribution de l'aire tronquée sous une excursion brownienne.

La majeure partie des résultats de ce chapitre est contenue dans la publication [148], que nous avons reproduite en annexe B. L'appendice de cet article contient en particulier les détails du traitement des problèmes de mécanique quantique rencontrés dans ce chapitre.

## 2.1 La méthode d'intégrale de chemin

La méthode d'intégrale de chemin est la méthode principale utilisée dans cet exposé pour calculer les distributions des valeurs extrêmes d'interface. Cette méthode est particulièrement adaptée au mouvement brownien, pour lequel le calcul de propriétés statistiques se traduit par une utilisation des méthodes de mécanique quantique élémentaires.

Dans un premier temps nous rappelons la définition – au sens physique – du mouvement brownien, par le biais de l'équation de Langevin associée. Nous justifions la mesure en terme d'intégrale de chemin par le parallèle discret sur une marche aléatoire. Enfin nous utilisons cette mesure pour calculer un premier exemple de statistique d'extrêmes pour des variables aléatoires fortement corrélées : le calcul de la distribution du maximum d'un pont brownien.

### 2.1.1 Le mouvement brownien en deux mots

Le mouvement brownien est certainement un des modèles de physique les plus étudiés depuis la description théorique du mouvement de diffusion des particules en suspension dans un liquide faite par Einstein [50] et Smoluchowski [184] au début du siècle dernier. L'étendue du mouvement brownien rend difficile une bibliographie exhaustive, aussi bien en physique, en mathématiques ou encore en biologie : contentons-nous de pointer les ouvrages de référence de Feller [59, 60] (côté mathématique), de Van Kampen [180] (côté physique) et de Berg [12] (côté biologie). Quelques noms historiques seraient, à la suite d'Einstein [50] et de Smoluchowski [184], Langevin [114], Wiener [188], Lévy [118], Uhlenbeck et Ornstein [178], et Chandrasekhar [30] (avec des applications en astronomie). La note synthétique de Finch [66] résume clairement la définition et certaines propriétés intéressantes du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et du mouvement brownien. Une revue récente de Duplantier [45], à l'occasion du centenaire des travaux d'Einstein, retrace les détails de la formulation de cette théorie, en particulier du côté physique, et on renvoie à une note historique de Kahane [104] pour les premiers développements de la théorie en mathématiques. Une revue de Frey et Kroy retrace également les aspects historiques et les liens avec la biologie [79]. Pour les distributions du maximum ou de l'aire du mouvement brownien et de ses variantes, la note synthétique de Finch [67] fournit un condensé des différents résultats obtenus.

En ce qui concerne la méthode d'intégrale de chemin, la référence historique est sans nul doute la formulation de Feynman de la mécanique quantique [62] qu'il donne en 1948 et le livre qu'il a co-écrit avec Hibbs [63]. A propos des chemins en question, il remarque : «*The paths involved are, therefore, continuous but possess no derivative. They are of a type familiar from study of Brownian motion*». Nous renvoyons en particulier à la revue de Majumdar [120] sur l'étude de fonctionnelles du mouvement brownien, comme l'aire sous la trajectoire ou les temps de premier passage.

Considérons le mouvement brownien unidimensionnel, où l'on suit la trajectoire erratique  $x(\tau)$  de la particule pendant le temps  $0 \leq \tau \leq T$  qui part de l'origine au temps initial  $x(0) = 0$ . La notation  $x(\tau)$  est courante en physique (cette notation sous-entend la notion de trajectoire), alors que les mathématiciens considèrent généralement le processus de Wiener-Lévy  $W_t$  sur l'intervalle unité  $0 \leq t \leq 1$ . L'équation de Langevin du mouvement brownien s'écrit

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \xi(\tau), \quad (\text{condition initiale : } x(0) = 0), \quad (2.1)$$

avec  $\xi(\tau)$  un bruit aléatoire de moyenne nulle  $\langle \xi(\tau) \rangle = 0$  et de corrélations  $\langle \xi(\tau)\xi(\tau') \rangle = \delta(\tau - \tau')$ , où l'on choisit un coefficient de diffusion égal à  $1/2$ . Nous prenons  $\xi(\tau)$  un bruit blanc gaussien vérifiant ces propriétés, de sorte que la "densité" de probabilité d'une réalisation du bruit  $\{\xi(\tau)\}_{0 \leq \tau \leq T}$  est proportionnelle à

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \xi^2(\tau) \right].$$

En utilisant l'équation de Langevin (2.1) on obtient la mesure de la trajectoire brownienne  $\{x(\tau)\}$  pendant  $0 \leq \tau \leq T$  :

$$\mathbb{W}_{[0,T]} [x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) = \exp \left[ -\int_0^T d\tau \frac{1}{2} \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right] \mathcal{D}x(\tau). \quad (2.2)$$

Nous détaillons dans le paragraphe ci-dessous ("marche aléatoire et limite continue") la construction du mouvement brownien à partir d'une marche aléatoire discrète en temps. On déduit la mesure sur les chemins (2.2) à partir de la mesure discrète sur les réalisations des marches aléatoires. On montre que cette mesure est correctement normalisée :

$$\int \mathbb{W}_{[0,T]} [x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) = 1, \quad (2.3)$$



où l'intégrale porte sur tous les chemins  $\{x(\tau), x(0) = 0\}_{0 \leq \tau \leq T}$  possibles.

Avant d'examiner la construction du mouvement brownien, remarquons que la distribution des profils  $\mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)]$  dans l'équation (2.2) rappelle fortement la distribution des profils  $\Pi_\infty[h(x)]$  d'une interface à l'équilibre (1.27), à cela près que cette dernière n'est pas normalisée tant qu'on ne se donne pas une référence pour mesurer les hauteurs (problème de l'invariance par translation  $h(x) \rightarrow h(x) + c$ ). Cette équivalence nous permet d'appliquer la méthode d'intégrale de chemin aux interfaces à l'équilibre, mais cela nécessite l'introduction d'une définition précise de la hauteur d'une interface (il faut fixer une référence).

### Marche aléatoire, et limite continue

On peut voir l'équation du mouvement brownien (2.1) comme la limite continue d'une marche aléatoire de  $n$  pas d'équation, pour tout entier  $1 \leq i \leq n$ , et tout réel  $\epsilon > 0$

$$x_i = x_{i-1} + \epsilon \xi_i, \quad (2.4)$$

avec la condition initiale  $x_0 = 0$  et les  $\{\xi_i\}$  des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

$$\mathbb{P}[\xi_i \in [\xi, \xi + d\xi]] = \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon \xi^2}{2}} d\xi,$$

de sorte que  $\langle \xi_i \rangle = 0$  et  $\langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}/\epsilon$ . On retrouve les propriétés usuelles des marches aléatoires discrètes non-biaisées, pour  $1 \leq i, j \leq n$  :

$$\langle x_i \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle x_i x_j \rangle = \epsilon \min(i, j).$$

En particulier après  $n$  pas  $\langle x_n^2 \rangle = \epsilon n$ .

Pour prendre la limite continue, on souhaite avoir une infinité de points séparés par un intervalle de temps qui tend vers zéro. On va donc prendre  $n \rightarrow \infty$  et  $\epsilon \rightarrow 0$  de sorte à avoir le produit  $\epsilon n = T < \infty$  fixé. En effectuant cette limite on retrouve bien l'équation de Langevin (2.1) à partir de l'équation discrète (2.4). Les propriétés précédentes se traduisent par  $(0 \leq \tau_a, \tau_b \leq T)$  :

$$\langle x(\tau_a) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle x(\tau_a) x(\tau_b) \rangle = \min(\tau_a, \tau_b). \quad (2.5)$$

L'ensemble de variables aléatoire  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  devient le bruit blanc gaussien  $\xi(\tau)$ . La mesure continue d'une réalisation du bruit  $\xi(\tau)$  est définie par la limite

$$\exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \xi^2(\tau) \right] \mathcal{D}\xi(\tau) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon \xi_i^2} \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} d\xi_i \right).$$

Cette mesure est correctement normalisée si l'on se donne comme règle que la somme sur tous les chemins  $\{\xi(\tau)\}$  du membre de gauche correspond à intégrer sur toutes les positions intermédiaires  $\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_i$ , pour  $i = 1, 2, \dots, n$ , dans le membre de droite :

$$\int e^{-\frac{1}{2} \int_0^T \xi^2(\tau) d\tau} \mathcal{D}\xi(\tau) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \epsilon \xi_i^2} d\xi_i \right) = 1. \quad (2.6)$$

On obtient la mesure le long du chemin discret  $(x_0 = 0, x_1, \dots, x_n)$  en effectuant le changement de variables  $\xi_i \rightarrow x_i$  donné par (2.4) dans le membre de droite, dont le jacobien  $\det_{i,j}(d\xi_i)/(dx_j) = (1/\epsilon)^n$  diverge à la limite continue. Ainsi la mesure le long du chemin  $x(\tau)$  construit comme la limite continue de  $(x_0 = 0, x_1, \dots, x_n)$  est :

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) &= \exp \left[ -\frac{1}{2} \int_0^T d\tau \xi^2(\tau) \right] \mathcal{D}\xi(\tau) \\ &\equiv \lim_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \epsilon \xi_i^2} \prod_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{\epsilon}{2\pi}} d\xi_i \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{2} \epsilon \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - x_{i-1}}{\epsilon} \right)^2} \prod_{i=1}^n \left( \frac{dx_i}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \right) \\ &\equiv \exp \left[ -\int_0^T d\tau \frac{1}{2} \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 \right] \mathcal{D}x(\tau). \end{aligned}$$

Les termes divergents sont "cachés" dans la mesure élémentaire  $\mathcal{D}x(\tau)$ . Cependant, lorsque l'on revient à la marche discrète à  $n$  et  $\epsilon$  fixés, tout est bien défini, et on doit garder cette limite à l'esprit pour la cohérence des résultats. En utilisant (2.6), on obtient la propriété (2.3) : la mesure du mouvement brownien est correctement normalisée.

Le mouvement brownien est un processus markovien, et nous utiliserons cette propriété à plusieurs reprises. Cela signifie que si l'on coupe le processus en deux, les deux morceaux sont statistiquement indépendants, et cela itérativement. En effet pour tout temps intermédiaire  $0 \leq \tau_a \leq T$

$$\mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) = \mathbb{W}_{[0,\tau_a]}[x(\tau)] \mathcal{D}_{[0,\tau_a]}x(\tau) \times \mathbb{W}_{[\tau_a,T]}[x(\tau)] \mathcal{D}_{[\tau_a,T]}x(\tau), \quad (2.7)$$

avec uniquement la condition de continuité en  $\tau_a$ , et la notation encombrante  $\mathcal{D}_{[0,\tau_a]}x(\tau)$  pour la mesure élémentaire sur une partie  $[0, \tau_a]$  de l'intervalle  $[0, T]$ . Dans la suite, on ne gardera que la notation  $\mathcal{D}x(\tau)$  car le contexte sera suffisant pour identifier l'intervalle de temps correspondant.

### 2.1.2 Propagateur et mécanique quantique

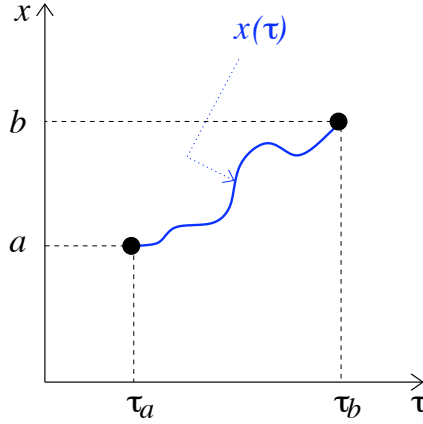


FIGURE 2.1 – Trajectoire dans l'espace-temps. Le propagateur libre  $G_0(b, \tau_b | a, \tau_a)$  est la probabilité que le mouvement brownien atteigne  $x(\tau_b) = b$  à  $db$  près, sachant qu'il est parti de  $x(\tau_a) = a$ . En bleu un exemple de chemin qui contribue au propagateur.

Une quantité utile dans la suite est la notion de propagateur : c'est la probabilité de trouver la particule brownienne à un certain point  $b$  (à  $db$  près) au temps  $\tau_b$  sachant qu'elle est partie de  $a$  au temps  $\tau_a$ , avec  $0 \leq \tau_a \leq \tau_b \leq T$  (voir la figure 2.1). Ce propagateur s'écrit, en terme d'intégrale de chemin :

$$G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) = \frac{\int_{x(\tau_a)=a} \mathcal{D}x(\tau) \delta(b - x(\tau_b)) \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]} [x(\tau)]}{\int_{x(\tau_a)=a} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]} [x(\tau)]} \quad (2.8)$$

Au numérateur on somme les poids de tous les chemins partant de  $a$  au temps  $\tau_a$  et passant par  $b$  (à  $db$  près) au temps  $\tau_b$ , et au dénominateur, on garde l'ensemble plus grand de chemins qui partent de  $a$  au temps  $\tau_a$ , en laissant leur extrémité  $x(\tau_b)$  libre. La mesure  $\mathcal{D}x(\tau) = \mathcal{D}_{[\tau_a, \tau_b]} x(\tau)$ , de sorte que le dénominateur est égal à 1 (*cf.* équation (2.3)). Ce propagateur est une probabilité conditionnelle, et sa normalisation est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) = 1. \quad (2.9)$$

En passant l'intégrale au numérateur de (2.8), et en échangeant l'ordre des intégrales, on retrouve bien un numérateur identique au dénominateur car  $\int db \delta(b - x_b(\tau)) = 1$  quel que soit  $x_b(\tau_b)$ .

Le dernier pas à franchir pour calculer explicitement ce propagateur est de réaliser que le poids de probabilité (2.2) est exactement celui de la particule libre en mécanique quantique, l'exponentielle de l'action calculée le long de la trajectoire  $x(t)$ , où l'on a changé le temps  $t = -i\tau$ . En effet le propagateur de la particule brownienne satisfait l'équation de Fokker-Planck [180]

$$\frac{\partial}{\partial \tau_b} G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial b^2} G_0(b, \tau_b | a, \tau_a), \quad (2.10)$$

identifiée à l'équation de Schrödinger de la particule libre lorsque  $t = -i\tau$ . Ceci motive l'utilisation des notations usuelles de la mécanique quantique :

$$G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) = \langle b | e^{-(\tau_b - \tau_a) H_0} | a \rangle, \quad (2.11)$$

avec  $|a\rangle$  l'état propre de l'opérateur position  $X$  associé à la position  $a$  :  $X|a\rangle = a|a\rangle$ . On identifie naturellement l'opérateur  $H_0$  avec le hamiltonien de la particule libre en dérivant membre à membre (2.11) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_b} G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) &= \langle b | (-H_0) e^{-(\tau_b - \tau_a) H_0} | a \rangle \\ &= -H_0(b) \langle b | e^{-(\tau_b - \tau_a) H_0} | a \rangle, \end{aligned}$$

où  $H_0(b)$  est la représentation position de l'opérateur  $H_0$ , et en comparant avec (2.10), on obtient

$$H_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (2.12a)$$

Les états propres sont les ondes planes  $|k\rangle$ ,  $k \in \mathbb{R}$  de représentation position

$$\langle x | k \rangle = \phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad (2.12b)$$

avec l'énergie associée

$$E_k = \frac{k^2}{2}. \quad (2.12c)$$

La décomposition sur la base propre  $\{|k\rangle\}$  permet de calculer le propagateur

$$\begin{aligned} G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \phi_k^*(b) e^{-(\tau_b - \tau_a) \frac{k^2}{2}} \phi_k(a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_b - \tau_a)}} \exp\left(-\frac{(b-a)^2}{2(\tau_b - \tau_a)}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Une intégration directe de l'équation de Schrödinger (2.10), avec la condition initiale  $G_0(b, \tau_a | a, \tau_a) = \delta(b-a)$  redonne ce résultat.

### 2.1.3 Le maximum du pont brownien

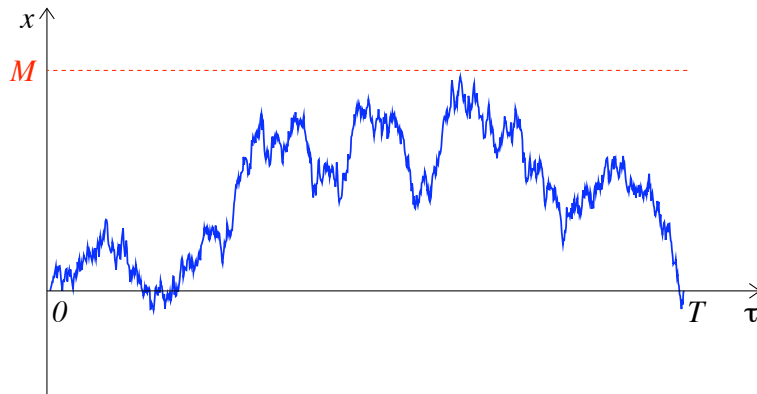


FIGURE 2.2 – Une réalisation du pont brownien (en bleu) et son maximum  $M$  (en rouge). Pour le calcul de la distribution cumulée, la droite  $x = M$  est un mur de potentiel pour la particule brownienne.

Dans la suite nous prendrons des interfaces soumises aux conditions aux limites périodiques. Dans cette optique nous introduisons le *pont brownien* (souvent noté  $B_t$  sur un intervalle de temps unité  $0 \leq t \leq 1$  dans la littérature mathématique). C'est un mouvement brownien dans l'intervalle  $0 \leq \tau \leq T$

qui part de l'origine  $x(0) = 0$  et que l'on conditionne à revenir à l'origine  $x(T) = 0$ , comme représenté en figure 2.2. Le maximum d'un pont brownien

$$X_T = \max_{0 \leq \tau \leq T} x(\tau) \quad \text{avec la condition} \quad x(0) = x(T) = 0, \quad (2.14)$$

dépend de la réalisation du pont. Calculons alors la distribution cumulée du maximum du pont brownien sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  :

$$F_T(M) = \mathbb{P}[X_T \leq M]. \quad (2.15)$$

Nous appliquons alors la règle simple du calcul des probabilités : on divise le poids de probabilité des événements satisfaisant la condition  $X_T \leq M$  par le poids de probabilité de tous les événements possibles. Ceci donne

$$F_T(M) = \frac{\int \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \delta(x(T)) \prod_{0 \leq \tau \leq T} \theta(M - x(\tau))}{\int \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \delta(x(T))}. \quad (2.16)$$

Au dénominateur on reconnaît le propagateur libre pris entre  $x(0) = 0$  et  $x(T) = 0$  :  $G_0(0, T|0, 0)$ . Au numérateur le produit de fonctions de Heaviside  $\theta(M - x(\tau))$  sélectionne les chemins qui restent intégralement sous  $M$ .

De manière plus traditionnelle, nous pouvons définir une mesure sur les ponts browniens

$$\mathbb{B}_{[0,T]}[x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) = \frac{1}{z_0} \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \delta(x(T)) \mathcal{D}x(\tau), \quad (2.17a)$$

normalisée  $\int \mathbb{B}_{[0,T]}[x(\tau)] \mathcal{D}x(\tau) = 1$  avec la constante de normalisation

$$z_0 = \int \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \delta(x(T)) \mathcal{D}x(\tau) = G_0(0, T|0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}. \quad (2.17b)$$

Ensuite on obtient la distribution cumulée du maximum du pont brownien en intégrant cette mesure sur tous les chemins qui respectent  $x(\tau) < M$  pour tout  $0 \leq \tau \leq T$  :

$$F_T(M) = \int \mathbb{B}_{[0,T]}[x(\tau)] \prod_{0 \leq \tau \leq T} \theta(M - x(\tau)) \mathcal{D}x(\tau), \quad (2.18)$$

formule équivalente à (2.16).

Introduisons alors le propagateur des chemins browniens soumis à la condition  $x(\tau) < M$ ,

$$G_{<M}(b, \tau_b | a, \tau_a) = \frac{\int_{x(\tau_a)=a} \mathcal{D}x(\tau) \delta(b - x(\tau_b)) \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]}[x(\tau)] \prod_{\tau_a \leq \tau \leq \tau_b} \theta(M - x(\tau))}{\int_{x(\tau_a)=a} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]}[x(\tau)] \prod_{\tau_a \leq \tau \leq \tau_b} \theta(M - x(\tau))}, \quad (2.19)$$

qui donne la probabilité pour un chemin brownien d'arriver en  $b$  au temps  $\tau_b$  en étant parti de  $x(\tau_a) = a$ , avec la condition que  $x(\tau) \leq M$  pour tout  $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$ . On peut intégrer cette condition dans l'action en ajoutant un terme de potentiel  $V_{<M}(x)$ , mur infini en  $x = M$  :

$$\mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]}[x(\tau)] \prod_{\tau_a \leq \tau \leq \tau_b} \theta(M - x(\tau)) \equiv \exp \left[ - \int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ \frac{1}{2} (\dot{x}(\tau))^2 + V_{<M}(x(\tau)) \right\} d\tau \right], \quad (2.20)$$

avec la notation habituelle  $\dot{x}(\tau) = dx(\tau)/d\tau$ , et le potentiel

$$V_{<M}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < M, \\ +\infty & \text{si } x > M. \end{cases} \quad (2.21a)$$

Le hamiltonien s'écrit

$$H_{<M} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{<M}(x) \quad (2.21b)$$

et ses fonctions et énergies propres sont

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k(M - x)), \quad \text{avec } E_k = \frac{k^2}{2} \quad \text{pour tout réel } k > 0. \quad (2.21c)$$

Comme dans le paragraphe précédent on utilise les outils de la mécanique quantique pour calculer le propagateur

$$\begin{aligned} G_{<M}(b, \tau_b | a, \tau_a) &= \langle b | e^{-(\tau_b - \tau_a) H_{<M}} | a \rangle \\ &= \int_0^\infty dk \varphi_k^*(b) e^{-(\tau_b - \tau_a) \frac{k^2}{2}} \varphi_k(a) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau_b - \tau_a)}} \left[ e^{-\frac{(b-a)^2}{2(\tau_b - \tau_a)}} - e^{-\frac{((M-b)+(M-a))^2}{2(\tau_b - \tau_a)}} \right] \\ &= G_0(b, \tau_b | a, \tau_a) - G_0(M - b, \tau_b | - (M - a), \tau_a), \end{aligned} \quad (2.22)$$

résultat classique de la méthode des images.

Forts de ces résultats nous pouvons récrire l'équation (2.16) comme le rapport des deux propagateurs

$$F_T(M) = \frac{G_{<M}(0, T|0, 0)}{G_0(0, T|0, 0)},$$

et en utilisant les formules explicites pour les propagateurs (2.13,2.22), on obtient finalement

$$F_T(M) = 1 - e^{-2M^2/T}. \quad (2.23a)$$

Ce résultat montre que  $M \sim \sqrt{T}$  échelle usuelle du mouvement brownien. La densité de probabilité d'obtenir le maximum  $M$  à  $dM$  près s'obtient en différenciant la distribution cumulée

$$P_T(M) = \frac{dF_T(M)}{dM} = \frac{4M}{T} e^{-2M^2/T}, \quad (2.23b)$$

et sa forme d'échelle

$$P_T(M) = \frac{1}{\sqrt{T}} f_{\text{Ray}}\left(\frac{M}{\sqrt{T}}\right) \quad (2.23c)$$

où  $f_{\text{Ray}}$  est la distribution de Rayleigh [155]

$$f_{\text{Ray}}(x) = 4x e^{-2x^2}. \quad (2.23d)$$

#### 2.1.4 Fonction de corrélation du pont brownien

Cette méthode d'intégrale de chemin est également très efficace pour calculer des fonctions de corrélations. Par exemple pour la fonction de corrélation à deux points du pont brownien, pour  $0 \leq \tau_a \leq \tau_b \leq T$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle x(\tau_a)x(\tau_b) \rangle &= \int \mathbb{B}_{[0,T]}[x(\tau)] x(\tau_b)x(\tau_a) \mathcal{D}x(\tau) \\ &= \frac{\int \mathbb{W}_{[0,T]}[x(\tau)] \delta(x(T)) x(\tau_b)x(\tau_a) \mathcal{D}x(\tau)}{G_0(0, T|0, 0)}. \end{aligned} \quad (2.24)$$



où l'on a utilisé la mesure du pont brownien (2.17). Pour traiter le numérateur, on coupe l'intervalle de temps en trois parties  $[0, T] = [0, \tau_a] \cup [\tau_a, \tau_b] \cup [\tau_b, T]$ , et en utilisant la propriété (2.7), on a

$$\langle x(\tau_a)x(\tau_b) \rangle = \frac{\int_{x(0)=0}^{x(T)=0} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[\tau_b, T]}[x(\tau)] x(\tau_b) \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]}[x(\tau)] x(\tau_a) \mathbb{W}_{[0, \tau_a]}[x(\tau)]}{G_0(0, T|0, 0)} \quad (2.25)$$

En écrivant sous l'intégrale de chemin  $x(\tau_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} b \delta(b - x(\tau_b)) db$  (et la même chose pour  $x(\tau_a)$  en changeant  $b$  en  $a$ ), et en intervertissant l'ordre des intégrales, on reconnaît les propagateurs de sorte que

$$\langle x(\tau_a)x(\tau_b) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} db \int_{-\infty}^{+\infty} da G_0(0, T|b, \tau_b) b G_0(b, \tau_b|a, \tau_a) a G_0(a, \tau_a|0, 0)}{G_0(0, T|0, 0)} \quad (2.26)$$

Après avoir identifié le noyau gaussien, fonction de  $\tau_a$ ,  $\tau_b$  et  $T$ , on obtient

$$\langle x(\tau_a)x(\tau_b) \rangle = \tau_a \left(1 - \frac{\tau_b}{T}\right). \quad (2.27)$$

Cette fonction s'annule pour  $\tau_a = 0$  ou  $\tau_b = T$ , conséquences des conditions aux bords  $x(0) = x(T) = 0$  pour toutes les réalisations concernées. Le déplacement quadratique moyen en un point s'obtient en prenant  $\tau_a = \tau_b = \tau$ , pour  $0 \leq \tau \leq T$ , d'où  $\langle x^2(\tau) \rangle = \tau \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)$ . Il est maximum en  $\tau = T/2$ , et vaut  $\langle x^2(T/2) \rangle = T/4$ , soit la moitié du déplacement quadratique moyen du mouvement brownien non conditionné à revenir à l'origine. Il faut cependant réaliser que la distribution de la position du maximum du pont brownien est uniforme\* sur le segment  $[0, T]$ , ceci étant dû à la condition périodique.

---

\*Nous ferons le calcul à titre d'exemple explicitement dans le dernier chapitre

## 2.2 Interfaces à l'équilibre

### 2.2.1 Solution stationnaire des équations d'Edwards-Wilkinson et Kardar-Parisi-Zhang

Les dynamiques EW (1.19) et KPZ (1.31) admettent une solution stationnaire lorsque  $t \gg L^z$  pour des conditions aux limites périodiques  $h(0) = h(L)$  et  $h'(0) = h'(L)$  (continuité de la hauteur et de sa dérivée au bord). Le profil de l'interface est décrit par la solution d'équilibre (1.27)

$$\Pi_\infty[h(x), L] = \frac{1}{Z} \exp \left( - \int_0^L dx \frac{1}{2} \left( \frac{dh(x)}{dx} \right)^2 \right),$$

où l'on a pris  $\nu = D = 1$ . Le profil d'interface  $\{h(x)\}$  est gaussien vis-à-vis de l'énergie élastique  $(1/2)(\partial_x h(x))^2$  intégrée sur la longueur  $L$  du substrat. Sans plus de précision quant à la référence de mesure des hauteurs, une telle définition est incomplète, à cause de l'invariance par translation  $h(x) \rightarrow h(x) + c$ , et la constante de normalisation  $Z$  mal définie. C'est pourquoi nous devons introduire la notion de hauteur relative, seul moyen de donner un sens précis à cette définition.

La correspondance entre le poids de probabilité (1.27) et (2.2) permet alors d'utiliser les outils d'intégrales de chemin développés dans le paragraphe précédent pour calculer diverses quantités pour les interfaces. On peut donc voir une interface à l'équilibre comme une réalisation d'un pont brownien, à cela près que le point de départ (et d'arrivée par périodicité) n'est pas fixé à l'origine, mais est distribué "uniformément" sur l'axe réel. Par construction, nous avons l'invariance par translation verticale : pour tout réel  $c$ , la transformation  $h(x) \rightarrow h(x) + c$  pour tout  $0 \leq x \leq L$  laisse le poids de probabilité (1.27) inchangé. Ceci implique qu'il n'y a pas d'échelle absolue pour mesurer le champ de hauteur de façon à pouvoir comparer deux réalisations différentes. Il faut alors se donner une référence des hauteurs issue de la réalisation elle-même.

### 2.2.2 Hauteurs relatives usuelles

Un moyen simple de définir la hauteur relative est de considérer le premier point  $h(0)$  comme altitude de référence pour le reste de la réalisation [23].

Définissons

$$h^0(x) = h(x) - h(0). \quad (2.28)$$

On a alors une égalité en loi entre le champ de hauteur relative  $h^0(x)$  et le pont brownien  $B_t : h^0(Lt)/\sqrt{L} \equiv B_t$ . Par exemple la fonction de corrélation pour  $0 \leq x_a \leq x_b \leq L$  est, d'après (2.27)

$$\langle h^0(x_a)h^0(x_b) \rangle = x_a \left(1 - \frac{x_b}{L}\right). \quad (2.29)$$

La maximum de la hauteur relative  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^0(x)$  obéit à la loi d'échelle déduite des formules (2.23)

$$P^0(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^0\left(\frac{h_m}{\sqrt{L}}\right), \quad (2.30a)$$

avec la fonction d'échelle donnée par la distribution de Rayleigh

$$f^0(x) = f_{\text{Ray}}(x) = 4x e^{-2x^2}. \quad (2.30b)$$

Une autre définition usuelle est de comparer le champ de hauteur à sa moyenne spatiale sur chaque réalisation. Cette définition s'écrit pour chaque réalisation :

$$h^1(x) = h(x) - \frac{1}{L} \int_0^L h(x') dx'. \quad (2.31)$$

C'est la définition couramment employée qui élimine le mode  $k = 0$  correspondant à l'invariance par translation.  $h^1(x)$  étant une hauteur relative, on peut remplacer dans le membre de droite  $h(x)$  par n'importe quelle hauteur relative, et en particulier pour  $h^0(x)$ , on constate l'égalité en loi entre le champ des hauteurs  $h^1$  et le pont brownien ramené à sa valeur moyenne :

$$\frac{h^1(Lt)}{\sqrt{L}} \equiv B_t - \int_0^1 B_s ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (2.32)$$

avec  $B_t$  le pont brownien. Cette relation est utile pour faire le lien avec les résultats des mathématiciens, et pour les simulations numériques.

La fonction de corrélation à deux points s'obtient exactement en résolvant l'équation d'Ewards-Wilkinson, et dans le régime stationnaire on obtient :

$$\langle h^1(x_a)h^1(x_b) \rangle = \frac{L}{12} \left[ 1 - \frac{6(x_b - x_a)}{L} \left( 1 - \frac{x_b - x_a}{L} \right) \right]. \quad (2.33)$$

Pour cette définition de la hauteur relative, Majumdar et Comtet [123, 124] ont obtenu la distribution du maximum avec la loi d'échelle

$$P^1(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^1\left(\frac{h_m}{\sqrt{L}}\right), \quad (2.34a)$$

et la fonction d'échelle nommée distribution d'Airy

$$f^1(x) = f_{\text{Airy}}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n/x^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2), \quad (2.34b)$$

avec les coefficients  $b_n = 2\alpha_n^3/27$ , les  $\alpha_n > 0$  étant les zéros de la fonction d'Airy  $\text{Ai}(-x)$  sur le demi-axe réel négatif ( $\alpha_1 = 2.3381\dots$ ,  $\alpha_2 = 4.0879\dots$ ,  $\alpha_3 = 5.5205\dots$ , etc  $\dots$ , voir la note de Finch sur la fonction d'Airy et ses zéros [64]), et  $U(a, b, z)$  est la fonction hypergéométrique confluyente de première espèce [1]. Cette distribution avait été obtenue auparavant par Darling [35] comme la distribution du maximum de  $B_t - \int_0^1 B_s ds$ , ainsi que par Louchard [119] comme la distribution de l'aire sous une excursion brownienne  $E_t$  (voir le paragraphe 2.5), exprimée dans les deux cas sous la forme de la transformée de Laplace de l'expression (2.34b) :

$$\tilde{f}_{\text{Airy}}(s) = \int_0^{+\infty} f_{\text{Airy}}(x) e^{-sx} dx = s\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\alpha_n s^{2/3} 2^{-1/3}}. \quad (2.34c)$$

La distribution d'Airy intervient dans plusieurs problèmes a priori indépendants, par exemple dans la théorie des graphes et en informatique théorique [120, 72].

Examinons les asymptotes de cette distribution.

- ★ Lorsque  $x \rightarrow 0$ , en utilisant la propriété que  $U(a, b, z) \approx z^{-a}$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ , et en ne gardant que le terme dominant  $n = 1$  dans la somme (les autres étant des corrections exponentiellement petites), on obtient [123, 124] :

$$f_{\text{Airy}}(x) \approx \frac{8}{81} \alpha_1^{9/2} x^{-5} e^{-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{1}{x^2}}, \quad (x \rightarrow 0), \quad (2.35)$$

comportement singulier en  $x = 0$ , à comparer au comportement régulier de l'asymptote en 0 de la distribution de Rayleigh (2.30b) :  $f_{\text{Ray}}(x) \approx 4x$  lorsque  $x \rightarrow 0$ . Les seules réalisations qui contribuent pour un maximum

relatif proche de zéro sont les interfaces quasi-plates ; ceci est à comparer au cas du pont brownien : les réalisations qui contribuent pour un maximum proche de zéro sont libres d’explorer la partie négative, et sont beaucoup plus nombreuses, d’où le comportement linéaire de la distribution de Rayleigh à petit argument.

- ★ Lorsque  $x \rightarrow \infty$ , nous avons montré [147] qu’une application d’un lemme de Pickands [139] permet de calculer

$$f_{\text{Airy}}(x) \approx 72 \sqrt{\frac{6}{\pi}} x^2 e^{-6x^2}, \quad (x \rightarrow \infty), \quad (2.36)$$

formule obtenue par Janson et Louchard [97] par une autre méthode. La décroissance en  $x \rightarrow +\infty$  est dominée par une queue gaussienne, similaire à celle de la distribution de Rayleigh avec un coefficient différent (6 pour Airy, 2 pour Rayleigh). La correction algébrique est différente ( $x^2$  pour Airy,  $x$  pour Rayleigh).

Györgyi *et al.* utilisent également cette définition  $h^1(x)$  dans leur étude [86] du maximum de signaux gaussiens en  $1/f^\alpha$ , que nous définirons dans le chapitre suivant. Le cas que nous traitons à présent correspondant au cas particulier  $\alpha = 2$ . Nous poursuivrons dans le chapitre 3 avec cette définition de la hauteur ramenée à sa moyenne spatiale pour étudier le cas d’interfaces en milieu aléatoire.

## 2.3 Hauteur relative généralisée

Les deux définitions précédentes aboutissent à deux résultats différents. Bien entendu le comportement d’échelle est le même  $h_m \sim \sqrt{L}$ , ceci étant dû à l’équivalence de la mesure avec celle du mouvement brownien. Cependant, une modification de la référence des hauteurs change la fonction d’échelle radicalement entre la distribution de Rayleigh (2.30b) et la distribution d’Airy (2.34b). L’objectif est alors de trouver une définition de la hauteur relative qui permette d’interpoler entre ces deux résultats. Dans cette section, nous donnons une définition de la hauteur relative généralisée qui interpole de façon continue entre les définitions  $h^0(x)$  et  $h^1(x)$ . En étant affranchi du problème de l’invariance par translation verticale, nous donnons explicitement la distribution jointe des hauteurs relatives, correctement normalisée. Le calcul de

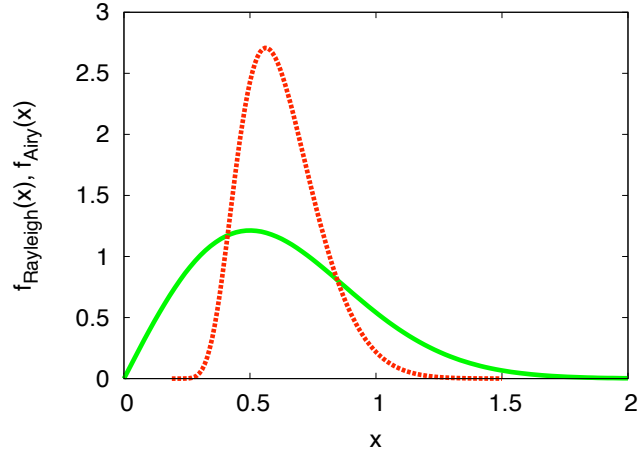


FIGURE 2.3 – Fonctions d’échelle des distributions de probabilité du maximum des hauteurs relative  $h^0$  et  $h^1$ . La courbe verte en trait plein représente la distribution de Rayleigh  $f^0 = f_{\text{Ray}}$ . La courbe rouge en trait discontinu est la fonction de distribution d’Airy  $f^1 = f_{\text{Airy}}$ .

la constante de normalisation fait intervenir le processus d’accélération aléatoire [21], et en approfondissant la méthode, nous donnons au passage la distribution marginale de la hauteur relative généralisée en un point  $0 \leq x \leq L$ .

### 2.3.1 Définition

Introduisons alors une définition des hauteurs qui interpole continûment entre les deux précédentes. Pour tout  $0 < \kappa \leq 1$ ,

$$h^\kappa(x) = h(x) - \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} h(x') dx'. \quad (2.37)$$

Pour  $\kappa = 1$  on retombe bien sur la définition de la hauteur relative (2.31) de Majumdar et Comtet. La limite  $\kappa \rightarrow 0$  est bien définie et correspond à  $h^0(x)$  définie plus haut (2.28). Nous renvoyons à la figure 2.4 pour une représentation

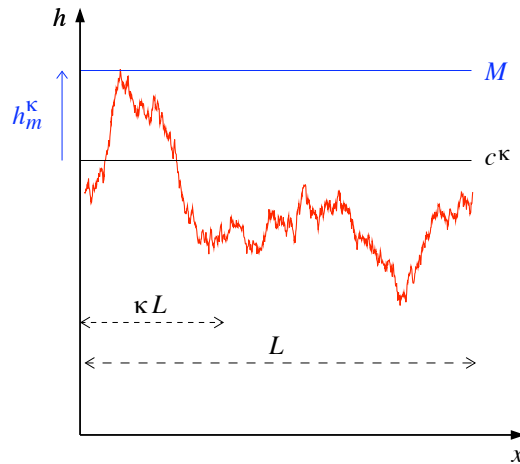


FIGURE 2.4 – Illustration d'une réalisation d'une interface à l'équilibre pour laquelle on détermine la moyenne tronquée  $c^\kappa = \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} h(x) dx$ , référence de mesure de la hauteur relative généralisée  $h^\kappa(x) = h(x) - c^\kappa$ . L'objectif principal du chapitre est de calculer la distribution du maximum de la hauteur relative généralisée,  $h_m^\kappa = M - c^\kappa$  (maximum absolu moins la référence).

graphique de l'interface, de sa moyenne tronquée et de la mesure du maximum de la hauteur relative généralisée.

$h^\kappa(x)$  étant une hauteur relative, on peut changer dans le membre de droite la hauteur absolue  $h(x)$  par n'importe quelle autre hauteur relative : en prenant  $h^0(x)$ , on en déduit l'égalité en loi entre le champ de hauteur  $h^\kappa(x)$  et le pont brownien ramené à sa moyenne tronquée :

$$\frac{h^\kappa(Lt)}{\sqrt{L}} \equiv B_t - \int_0^\kappa B_s ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.38)$$

Cette relation sera utilisée en particulier pour les simulations numériques.

Cette définition peut se révéler utile expérimentalement lorsque le dispositif de mesure des hauteurs ne permet d'explorer qu'une fraction  $\kappa$  de l'interface, mais pour laquelle une évaluation des fluctuations *globales* – sur toute la longueur de l'interface – est pertinente.

### 2.3.2 Normalisation du poids de probabilité

Premièrement reprenons la définition de la probabilité jointe des hauteurs compte-tenu de cette nouvelle définition (2.37), pour tout  $0 < \kappa \leq 1$  :

$$\Pi [h^\kappa(x), L] = \frac{1}{Z_\kappa} e^{-\int_0^L \frac{1}{2} (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \delta(h^\kappa(0) - h^\kappa(L)) \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right). \quad (2.39)$$

$Z_\kappa$  est une constante de normalisation que nous allons calculer. On reconnaît ensuite le poids élastique – type mouvement brownien. La première fonction de Dirac conditionne les interfaces à être périodiques, et la seconde impose la moyenne spatiale tronquée sur  $[0, \kappa L]$  à être nulle.

Alors que l'on peut poser  $\kappa = 1$  dans cette formule pour obtenir la mesure de Majumdar et Comtet [123, 124] pour  $h^1(x)$ , la limite  $\kappa \rightarrow 0$  est moins triviale. Un comportement singulier apparaît dans la dernière distribution de Dirac. En effet l'intégrale  $\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx \simeq \kappa L h^0(0)$  à l'ordre dominant en  $\kappa L$ . En utilisant la propriété  $\delta(\alpha x) = (1/\alpha)\delta(x)$  pour  $\alpha > 0$ , la mesure (2.39) sera définie lorsque  $\kappa \rightarrow 0$  et coïncidera avec la mesure du pont brownien (2.17)

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \Pi [h^\kappa(x), L] \equiv \mathbb{B}_{[0,L]}[h^0(x)], \quad (2.40a)$$

si la constante de normalisation  $Z_\kappa$  vérifie

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa L \times Z_\kappa = z_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}}. \quad (2.40b)$$

La distribution de probabilité jointe des hauteurs (2.39) doit être normée de sorte que

$$\int \mathcal{D}h^\kappa(x) \Pi [h^\kappa(x), L] = 1, \quad (2.41)$$

où l'on somme sur toutes les réalisations possibles de l'interface  $h^\kappa(x)$ . Seules les réalisations périodiques, et de moyenne tronquée nulle seront conservées dans cette somme, à cause des deux fonctions de Dirac dans l'expression (2.39). Ceci implique que, pour  $0 < \kappa \leq 1$ ,

$$Z_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-\int_0^L \frac{1}{2} (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right), \quad (2.42)$$



où l'on intègre sur  $u$  la position initiale et finale de l'interface. Coupons l'intervalle de temps en deux  $[0, L] = [0, \kappa L] \cup [\kappa L, L]$ . Utilisons alors la propriété (2.7) d'indépendance des deux parties, en sommant sur la valeur du point intermédiaire  $v = h^\kappa(\kappa L)$ , on peut écrire :

$$Z_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \left[ \int_{h^\kappa(\kappa L)=v}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-\int_{\kappa L}^L \frac{1}{2}(\partial_x h^\kappa(x))^2} \right] \times \left[ \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(\kappa L)=v} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-\int_0^{\kappa L} \frac{1}{2}(\partial_x h^\kappa(x))^2} \delta \left( \int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx \right) \right]. \quad (2.43)$$

Le premier crochet concerne la propagation brownienne entre  $h^\kappa(\kappa L) = v$  au 'temps'  $x = \kappa L$  et  $h^\kappa(L) = u$  au 'temps'  $x = L$ . On identifie donc le propagateur libre  $G_0(u, L|v, \kappa L)$  de l'équation (2.8), correctement normalisé du fait de la construction à partir de la marche aléatoire discrète. Pour traiter le second crochet, nous introduisons le changement de variables, pour tout  $0 \leq x \leq \kappa L$

$$y(x) = \int_0^x h^\kappa(x') dx', \quad y(0) = 0, \quad (2.44)$$

L'équation de Langevin vérifiée par la variable  $y(x)$

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = \xi(x), \quad (2.45)$$

avec  $\xi(x)$  le bruit blanc gaussien habituel, correspond au processus aléatoirement accéléré [22] (avec l'abréviation anglaise 'rap' pour random acceleration process). Le processus  $y(x)$  n'est pas markovien, mais le processus joint  $(y(x), y'(x))$  l'est. Le propagateur de processus rap donne la probabilité pour la particule accélérée aléatoirement d'arriver en  $y_b$  à  $dy_b$  près avec la vitesse  $v_b$  à  $dv_b$  près au temps  $\tau_b$ , sachant qu'elle est partie de  $y_a$  avec la vitesse  $v_a$  au temps  $\tau_a$  :

$$G_{\text{rap}}(y_b, v_b, \tau_b | y_a, v_a, \tau_a) = \int_{y(\tau_a)=y_a, y'(\tau_a)=v_a}^{y(\tau_b)=y_b, y'(\tau_b)=v_b} \mathcal{D}y(x) \exp \left[ - \int_{\tau_a}^{\tau_b} \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \right)^2 dx \right] = \frac{\sqrt{3}}{\pi T^2} e^{-\frac{6}{T^3}(y_b - y_a - v_b T)(y_b - y_a - v_a T) - \frac{2}{T}(v_b - v_a)^2}. \quad (2.46)$$

avec  $T = \tau_b - \tau_a$  (voir l'appendice de l'article [148], reproduit en annexe B.1). Ainsi nous avons pour le second crochet de l'équation (2.43) :

$$\begin{aligned} & \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(\kappa L)=v} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-\int_0^{\kappa L} \frac{1}{2} (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \delta \left( \int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx \right) \\ &= \int_{y(0)=0} \mathcal{D}y(\tau) e^{-\int_0^{\kappa L} \frac{1}{2} \left( \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} \delta(y(\kappa L)) = G_{\text{rap}}(0, v, \kappa L | 0, u, 0). \end{aligned}$$

On peut donc récrire (2.43) comme la convolution des deux propagateurs, et en utilisant (2.13, 2.46), on obtient

$$\begin{aligned} Z_\kappa &= \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv G_0(u, L | v, \kappa L) G_{\text{rap}}(0, v, \kappa L | 0, u, 0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi L(1-\kappa)}} \frac{\sqrt{3}}{\pi(\kappa L)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-\frac{1}{2L(1-\kappa)}(u-v)^2 - \frac{2}{\kappa L}(u^2+v^2+uv)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

En effectuant les intégrales sur  $u$  et  $v$ , on obtient la constante de normalisation

$$\boxed{Z_\kappa = \frac{1}{\kappa L \sqrt{2\pi L}}}. \quad (2.48)$$

Cette expression vérifie la limite (2.40b). Nous donnons deux autres méthodes pour obtenir  $Z_\kappa$  dans le paragraphe 2.3.4. La méthode qui vient d'être exposée, quoique lourde, permet de se familiariser avec les méthodes d'intégrales de chemin et l'identification des différents propagateurs.

### 2.3.3 Distribution marginale de la hauteur $h^\kappa(x)$ .

Dans l'intégrale (2.47), le point de départ/arrivée  $u = h^\kappa(0) = h^\kappa(L)$  et le point intermédiaire  $v = h^\kappa(\kappa L)$  jouent le même rôle. On peut lire dans cette formule (2.47) la distribution jointe de  $(h^\kappa(0), h^\kappa(\kappa L))$ ,

$$\begin{aligned} p(u, v) du dv &= \mathbb{P}[h^\kappa(0) \in [u, u + du], h^\kappa(\kappa L) \in [v, v + dv]] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\kappa L \sqrt{(1-\kappa)}} e^{-\frac{1}{2L(1-\kappa)}(u-v)^2 - \frac{2}{\kappa L}(u^2+v^2+uv)} du dv, \end{aligned} \quad (2.49)$$

marginale à deux points ( $x_a = 0, x_b = \kappa L$ ) de la distribution jointe des hauteurs (2.39). Cette distribution n'est pas factorisable, signe que les hauteurs en  $x = 0$  et en  $x = \kappa L$  sont corrélées. En effet

$$\langle h^\kappa(0)h^\kappa(\kappa L) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} uv p(u, v) dudv = \frac{\kappa L(3\kappa - 2)}{12}. \quad (2.50)$$

La distribution jointe  $p(u, v)$  de ( $u = h^\kappa(0), v = h^\kappa(\kappa L)$ ) est symétrique dans l'échange de ses deux arguments, ce qui implique que les distributions marginales à un point  $h^\kappa(0)$  et  $h^\kappa(\kappa L)$  sont identiques

$$\begin{aligned} p_{(0)}(v|\kappa L, L) &= \mathbb{P}[h^\kappa(0) \in [v, v + dv]] \\ &= \mathbb{P}[h^\kappa(\kappa L) \in [v, v + dv]] = p_{(\kappa)}(v|\kappa L, L). \end{aligned}$$

Cette propriété tient du fait que la dynamique de croissance d'interface équilibrée possède, outre la condition aux limites périodique, l'invariance par renversement  $x \rightarrow -x$ . Ainsi, les extrémités du segment sur lequel on effectue la moyenne tronquée sont statistiquement équivalentes. Pour identifier cette distribution marginale à un point, intégrons la distribution jointe  $p_{(0, \kappa), \kappa L}(u, v)$  sur  $u$  :

$$p_{(\kappa)}(v|\kappa L, L) = \sqrt{\frac{6}{\pi L \kappa (4 - 3\kappa)}} e^{-\frac{6}{L \kappa (4 - 3\kappa)} v^2}. \quad (2.51)$$

Elle est gaussienne comme l'on pouvait s'y attendre : à partir d'une distribution jointe de l'interface gaussienne, la distribution marginale d'une hauteur ne peut être que gaussienne. Il en est de même pour la distribution marginale en un point quelconque  $x$  du segment  $[0, L]$ . Définissons la distribution marginale de la hauteur, pour  $\xi \in [0, 1]$  :

$$p_{(\xi)}(v|\kappa L, L)dv = \mathbb{P}[h^\kappa(L\xi) \in [v, v + dv]]. \quad (2.52)$$

En utilisant la caractéristique du mouvement brownien, on s'attend au comportement d'échelle

$$\boxed{p_{(\xi)}(v|\kappa L, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} g_{(\xi)}^\kappa \left( \frac{v}{\sqrt{L}} \right)}, \quad (2.53a)$$

avec la fonction d'échelle gaussienne

$$\boxed{g_{(\xi)}^\kappa(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^\kappa(\xi)}} e^{-\frac{y^2}{2[\sigma^\kappa(\xi)]^2}}, \quad (2.53b)}$$

où le seul paramètre à évaluer est la déviation standard  $\sigma^\kappa(\xi)$ , fonction de  $\xi$  et paramétrée par  $\kappa$ . De la distribution marginale (2.51), on tire que

$$\sigma^\kappa(0) = \sigma^\kappa(\kappa) = \sqrt{\frac{\kappa(4-3\kappa)}{12}}. \quad (2.54)$$

Nous nous proposons de calculer  $\sigma^\kappa(\xi)$  pour tout  $\xi \in [0, 1]$  et  $\kappa \in [0, 1]$ . Avant cela examinons les cas extrêmes  $\kappa = 1$  et  $\kappa = 0$  :

- ★ Pour  $\kappa = 1$  on restaure l'invariance par translation globale de  $h^1(x)$ , et donc  $\sigma^\kappa(\xi) = \sigma^1$ , indépendant de  $\xi$  (tous les points sont équivalents), et en prenant  $\kappa = 1$  dans notre formule (2.54), on retrouve le résultat que Majumdar et Comtet ont trouvé pour calculer  $Z_1$  [124]

$$\sigma^1 = \frac{1}{\sqrt{12}}. \quad (2.55a)$$

Notons que l'on peut obtenir ce résultat rapidement à partir de la fonction de corrélation à deux points (2.33) avec  $\sigma^1 = [(\langle h^1(x) \rangle)^2 / L]^{1/2}$ , indépendant de  $x$ .

- ★ Pour  $\kappa = 0$ , en prenant  $x_a = x_b = L\xi$  dans la fonction de corrélation à deux points (2.29), on obtient le comportement d'échelle

$$\sigma^0(\xi) = \sqrt{\frac{\langle h^0(L\xi)h^0(L\xi) \rangle}{L}} = \sqrt{\xi(1-\xi)}. \quad (2.55b)$$

Pour  $0 < \kappa < 1$  on peut calculer explicitement  $\sigma^\kappa(\xi)$ , pour tout  $0 \leq \xi \leq 1$

$$\begin{aligned} [\sigma^\kappa(\xi)]^2 &= \frac{\langle h^\kappa(L\xi)h^\kappa(L\xi) \rangle}{L} \\ &= \begin{cases} \frac{\iiint\int du dv dz G_0(u,1|v,\kappa) G_{\text{rap}}(0,v,\kappa|y,z,\xi) z^2 G_{\text{rap}}(y,z,\xi|0,u,0)}{L} & \text{si } \xi < \kappa, \\ \frac{\iiint du dv dz G_0(u,1|z,\xi) z^2 G_0(z,\xi|v,\kappa) G_{\text{rap}}(0,v,\kappa|0,u,0)}{Z_\kappa} & \text{si } \xi > \kappa. \end{cases} \end{aligned}$$

Après avoir calculé les intégrales, on obtient :

$$\boxed{[\sigma^\kappa(\xi)]^2 = \begin{cases} \frac{\kappa(4-3\kappa)}{12} + \frac{(1-\kappa)\xi(\xi-\kappa)}{\kappa} & \text{si } \xi < \kappa, \\ \frac{\kappa(4-3\kappa)}{12} + (1-\xi)(\xi-\kappa) & \text{si } \xi > \kappa. \end{cases}} \quad (2.56)$$

(on a pris  $L = 1$  dans  $Z_\kappa$ ). Les inégalités entre  $\xi$  et  $\kappa$  sont strictes  $0 \leq \xi < \kappa < 1$  et  $0 < \kappa < \xi \leq 1$  respectivement. On a bien la continuité en  $\xi = \kappa$

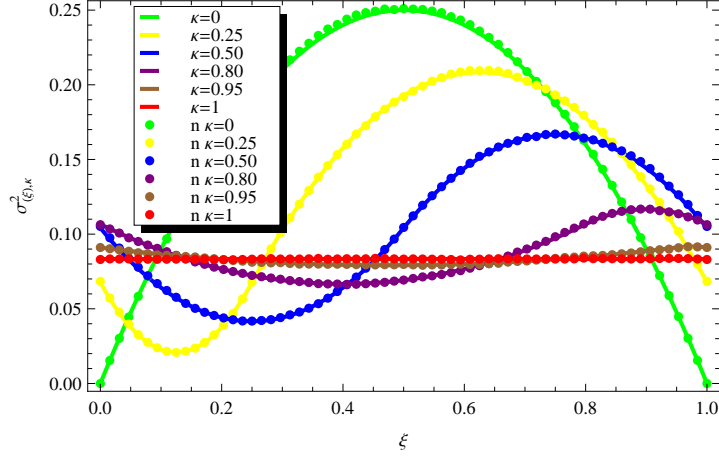


FIGURE 2.5 – Écart quadratique moyen  $[\sigma^\kappa(\xi)]^2$  de la distribution marginale d'échelle  $g_{(\xi)}^\kappa(y)$  de la hauteur  $h^\kappa(L\xi)/\sqrt{L}$  pour différentes valeurs de la fraction  $\kappa = 0, 0.25, 0.5, 0.8, 0.95, 1$ . Les points sont issus de simulations numériques (aucun paramètre d'ajustement).

et en  $\xi = 0, 1$  (périodicité) avec la valeur (2.54). Compte-tenu des inégalités strictes entre  $\xi$  et  $\kappa$ , pour prendre la limite  $\kappa \rightarrow 1$  à  $0 \leq \xi \leq 1$  fixé, on prend la ligne du haut,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} [\sigma^\kappa(\xi)]^2 = \frac{1}{12} = [\sigma^1]^2,$$

et pour prendre la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , on prend la ligne du bas,

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} [\sigma^\kappa(\xi)]^2 = (1 - \xi)\xi = [\sigma^0]^2.$$

Nous présentons en figure 2.5 la courbe théorique de l'écart quadratique moyen  $[\sigma^\kappa(\xi)]^2$  pour plusieurs valeurs du paramètre  $\kappa$ , ainsi que le résultat issu de simulations numériques (dont le protocole est présenté succinctement dans le paragraphe 2.4.6).

### 2.3.4 Deux autres façons de calculer $Z_\kappa$ .

Par comparaison directe des mesures

Reprenons l'expression (2.39) de la mesure des hauteurs  $\{h^\kappa(x)\}$

$$\Pi [h^\kappa(x), L] = \frac{1}{Z_\kappa} e^{-\int_0^L \frac{1}{2} (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \delta(h^\kappa(0) - h^\kappa(L)) \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right).$$

À une réalisation  $h^\kappa(x)$  donnée correspond une réalisation  $h^0(x)$  : nous allons exploiter cette équivalence pour calculer  $Z_\kappa$  à partir de la normalisation  $z_0$  de la mesure du pont brownien (2.17). Utilisons la définition (2.28) pour laquelle on peut utiliser n'importe quelle mesure de la hauteur relative dans le membre de droite, en particulier  $h^0(x) = h^\kappa(x) - h^\kappa(0)$ . De même la définition (2.37), évaluée en  $x = 0$ , permet d'obtenir  $\kappa L h^\kappa(0) = \kappa L h^0(0) - \int_0^{\kappa L} h^0(x') dx'$ . En combinant ces deux égalités, on peut récrire la dernière distribution de Dirac de (2.39), en utilisant  $\delta(\alpha x) = (1/\alpha)\delta(x)$ ,

$$\delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right) = \delta\left(\kappa L h^\kappa(0) + \int_0^{\kappa L} h^0(x) dx\right) = \frac{1}{\kappa L} \delta(h^0(x)).$$

Ainsi il vient

$$\begin{aligned} \Pi [h^\kappa(x), L] &= \frac{1}{\kappa L Z_\kappa} e^{-\int_0^L \frac{1}{2} (\partial_x h^0(x))^2 dx} \delta(h^0(0) - h^0(L)) \delta(h^0(x)) \\ &= \frac{z_0}{\kappa L Z_\kappa} \mathbb{B}_{[0,L]} [h^0(x)], \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les notations de la mesure du pont brownien (2.17) avec  $T = L$ . Avec le changement de variables  $h^0(x) = h^\kappa(x) - h^\kappa(0)$ , les mesures élémentaires sont inchangées  $\mathcal{D}h^\kappa(x) = \mathcal{D}h^0(x)$ . En intégrant membre à membre

$$\int \Pi [h^\kappa(x), L] \mathcal{D}h^\kappa(x) = \frac{z_0}{\kappa L Z_\kappa} \int \mathbb{B}_{[0,L]} [h^0(x)] \mathcal{D}h^0(x),$$

et par la normalisation des mesures, on obtient

$$\kappa L Z_\kappa = z_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}},$$

en accord avec notre premier calcul (2.48).

En exprimant la distribution de l'aire sous le pont brownien

À partir de la formule (2.42), effectuons le changement de variable visant à faire apparaître le pont brownien  $r(x) = u - h^\kappa(x)$  :

$$Z_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{r(0)=0}^{r(L)=0} \mathcal{D}r(x) e^{-\int_0^L \frac{1}{2}(\partial_x r(x))^2} \delta\left(\kappa Lu - \int_0^{\kappa L} r(x) dx\right).$$

Ecrivons alors la distribution de l'aire tronquée  $A_\kappa = \int_0^{\kappa L} r(x) dx$  sous le pont brownien  $r(x)$  :

$$\begin{aligned} P_{\text{pont}}^\kappa(A_\kappa, L) dA_\kappa &= \mathbb{P}\left[\int_0^{\kappa L} r(x) dx \in [A_\kappa, A_\kappa + dA_\kappa]\right] \\ &= \frac{\int_{r(0)=0}^{r(L)=0} \mathcal{D}r(x) e^{-\int_0^L \frac{1}{2}(\partial_x r(x))^2} \delta\left(A_\kappa - \int_0^{\kappa L} r(x) dx\right)}{\int_{r(0)=0}^{r(L)=0} \mathcal{D}r(x) e^{-\int_0^L \frac{1}{2}(\partial_x r(x))^2}} dA_\kappa \\ &= \frac{\int_{r(0)=0}^{r(L)=0} \mathcal{D}r(x) e^{-\int_0^L \frac{1}{2}(\partial_x r(x))^2} \delta\left(A_\kappa - \int_0^{\kappa L} r(x) dx\right)}{G_0(0, L|0, 0)} dA_\kappa. \end{aligned}$$

Cette distribution de l'aire tronquée est normalisée  $\int_0^\infty P_{\text{pont}}^\kappa(A_\kappa, L) dA_\kappa = 1$ , et on reconnaît au dénominateur le propagateur libre du pont brownien (2.13), qui vaut  $G_0(0, L|0, 0) = (2\pi L)^{-1/2}$ . En utilisant cette dernière égalité, et en faisant le changement de variables  $v = \kappa Lu$ , on obtient

$$\begin{aligned} Z_\kappa &= \int_{-\infty}^{+\infty} du G_0(0, L|0, 0) P_{\text{pont}}^\kappa(\kappa Lu, L) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{\kappa L} P_{\text{pont}}^\kappa(v, L) = \frac{1}{\kappa L \sqrt{2\pi L}}. \end{aligned}$$

où l'on a uniquement utilisé la normalisation de la distribution de l'aire tronquée sous un pont brownien. En comparant cette dernière formule avec (2.47), nous pouvons déduire la distribution  $P_{\text{pont}}^\kappa(v, L)$ . Nous ferons le calcul explicitement dans le paragraphe 2.5.2, avec le résultat (2.93).

## 2.4 Distribution du maximum de la hauteur relative

Dans cette section, nous calculons explicitement la distribution de probabilité  $P^\kappa(h_m, L)$  du maximum

$$h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^\kappa(x), \quad (2.57)$$

pour toute valeur  $0 < \kappa < 1$  de la fraction utilisée pour tronquer la moyenne. Notons que le support de la distribution est positif :

$$h_m \geq 0. \quad (2.58)$$

En effet pour une réalisation donnée, le maximum est atteint sur l'intervalle  $[0, \kappa L]$  ou sur l'intervalle  $[\kappa L, L]$ . Dans le premier cas, on a pour tout  $x \in [0, \kappa L]$ ,  $h_m \geq h^\kappa(x)$ , et en sommant sur l'intervalle :  $(\kappa L)h_m \geq \int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx = 0$  par définition de la moyenne tronquée. Dans le second cas, on a la condition plus forte  $h_m \geq \max_{0 \leq x \leq \kappa L} h^\kappa(x)$ , et on retrouve que pour tout  $x \in [0, \kappa L]$ ,  $h_m \geq h^\kappa(x)$ , d'où la conclusion en sommant sur  $x \in [0, \kappa L]$ .

Dans un premier temps nous calculons la distribution cumulée

$$F^\kappa(h_m, L) = \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq x \leq L} h^\kappa(x) \leq h_m \right], \quad (2.59)$$

et la densité de probabilité s'obtient par différentiation

$$P^\kappa(h_m, L) = \frac{d}{dh_m} F^\kappa(h_m, L).$$

Par la nature brownienne de la mesure, on s'attend à trouver un comportement d'échelle  $h_m \sim \sqrt{L}$ . On identifiera clairement ce comportement ainsi que la fonction d'échelle associée

$$P^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^\kappa \left( \frac{h_m}{\sqrt{L}} \right).$$

Après avoir discuté les limites  $\kappa \rightarrow 0$  et  $\kappa \rightarrow 1$  pour retrouver respectivement les distributions de Rayleigh (2.30b) et d'Airy (2.34b), nous donnerons



quelques propriétés de la fonction d'échelle  $f^\kappa(x_m)$  (avec  $x_m = h_m/\sqrt{L}$ ). Nous décrivons enfin les simulations numériques qui confirment les résultats exacts.

De la même manière que lors du calcul de la distribution cumulée du maximum du pont brownien, la distribution cumulée s'obtient en sommant les poids de probabilité des interfaces relatives comprises intégralement sous le maximum fixé à l'avance  $h_m \geq 0$  :

$$F^\kappa(h_m, L) = \int \mathcal{D}h^\kappa(x) \Pi[h^\kappa(x), L] \times \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(h_m - h^\kappa(x)).$$

Le produit des fonctions de Heaviside sélectionne les interfaces relatives contenues intégralement sous  $h_m$ . En développant la distribution jointe des hauteurs relatives (2.39), on a

$$F^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{Z_\kappa} \int_{-\infty}^{h_m} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-\frac{1}{2} \int_0^L (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \\ \times \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x') dx'\right) \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(h_m - h^\kappa(x)).$$

Procédons au changement de variables  $y(x) = h_m - h^\kappa(x)$  et  $v = h_m - u$  pour avoir

$$F^\kappa(h_m, L) = \kappa L \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\frac{1}{2} \int_0^L dx (\partial_x y)^2} \\ \times \delta\left(h_m \kappa L - \int_0^{\kappa L} y(x') dx'\right) \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(y(x)),$$

où le produit de fonction de Heaviside est une condition de positivité qui peut être intégrée dans l'action sous la forme d'un potentiel  $V_{>0}(y)$  de type mur infini en  $x = 0$  :

$$V_{>0}(y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } y < 0, \\ 0 & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

De plus, en utilisant la propriété  $\delta(\alpha x) = (1/\alpha)\delta(x)$ , on isole la variable  $h_m$  de façon à avoir

$$F^\kappa(h_m, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^L dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{>0}(y(x)) \right\}} \times \delta \left( h_m - \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} y(x') dx' \right). \quad (2.60)$$

Comme le support de la distribution est positif,  $h_m \geq 0$  pour toute réalisation, on s'affranchit de la fonction delta de Dirac en prenant la transformée de Laplace de cette expression.

### 2.4.1 Passage dans l'espace de Laplace

La transformée de Laplace de l'expression (2.60) prend la forme simple

$$\begin{aligned} \tilde{F}^\kappa(p, L) &= \int_0^{+\infty} F^\kappa(h_m, L) e^{-ph_m} dh_m \\ &= \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^L dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{>0}(y(x)) \right\}} e^{-\frac{p}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} y(x) dx}. \end{aligned}$$

Séparons dans l'exponentielle l'intégrale en deux parties, l'une pour  $x \in [0, \kappa L]$  et l'autre pour  $x \in [\kappa L, L]$ . En intégrant sur tous les valeurs possibles du point intermédiaire  $u = y(\kappa L)$ , et en utilisant la propriété markovienne du processus, on sépare l'intégrale de chemin en deux parties indépendantes – à la continuité près, l'une pour  $x \in [0, \kappa L]$  et l'autre pour  $x \in [\kappa L, L]$  :

$$\begin{aligned} \tilde{F}^\kappa(p, L) &= \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} du \left[ \int_{y(\kappa L)=u}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_{\kappa L}^L dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{>0}(y(x)) \right\}} \right] \\ &\quad \times \left[ \int_{y(0)=v}^{y(\kappa L)=u} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^{\kappa L} dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{>0}(y(x)) + \frac{p}{\kappa L} y(x) \right\}} \right]. \quad (2.61) \end{aligned}$$

Cette séparation est réminiscente de celle utilisée pour calculer la constante de normalisation. En revanche les problèmes de mécanique quantique associés aux deux crochets ci-dessus diffèrent de ceux identifiés pour le calcul de  $Z_\kappa$ . Le premier crochet, pour  $x \in [\kappa L, L]$  correspond au propagateur d'une particule libre avec un mur infini en  $y = 0$  :

$$\begin{aligned} G_{>0}(v, L|u, \kappa L) &= \int_{y(\kappa L)=u}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_{\kappa L}^L dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{>0}(y(x)) \right\}} \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dq \sin(qv) \sin(qu) e^{-\frac{L(1-\kappa)}{2} q^2}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

La formule ci-dessus obtenue par décomposition spectrale (on peut consulter l'appendice de la référence [148] pour les problèmes de mécanique quantique associés, article reproduit en annexe B). Le second, concernant l'intervalle  $[0, \kappa L]$ , est le propagateur d'une particule dans un potentiel triangulaire composé d'un mur infini "à gauche" en  $y = 0$ , et d'une partie linéaire "à droite" en  $py/(\kappa L)$ , appelé propagateur d'Airy de paramètre la pente  $p/(\kappa L)$  :

$$G_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(u, \kappa L|v, 0) = \int_{y(0)=v}^{y(\kappa L)=u} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^{\kappa L} dx \left\{ \frac{1}{2}(\partial_x y)^2 + V_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(y(x)) \right\}}. \quad (2.63)$$

Le potentiel d'Airy de paramètre  $p/(\kappa L)$  est donné par (voir la figure 2.6) :

$$V_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(y) = V_{>0}(y) + \frac{p}{\kappa L} y. \quad (2.64)$$

La solution physique de l'équation stationnaire de Schrödinger d'une particule dans ce potentiel est la fonction d'Airy  $\text{Ai}(y)$ , d'où le nom utilisé pour le propagateur et le potentiel. Le propagateur d'Airy prend la forme (voir l'appendice de la référence [148], reproduit en annexe B) :

$$\begin{aligned} G_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(u, \kappa L|v, 0) &= \left( \frac{2p}{\kappa L} \right)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n 2^{-1/3} (p\sqrt{\kappa L})^{2/3}} \\ &\times \frac{\text{Ai} \left( \left( \frac{2p}{\kappa L} \right)^{1/3} u - \alpha_n \right) \text{Ai} \left( \left( \frac{2p}{\kappa L} \right)^{1/3} v - \alpha_n \right)}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

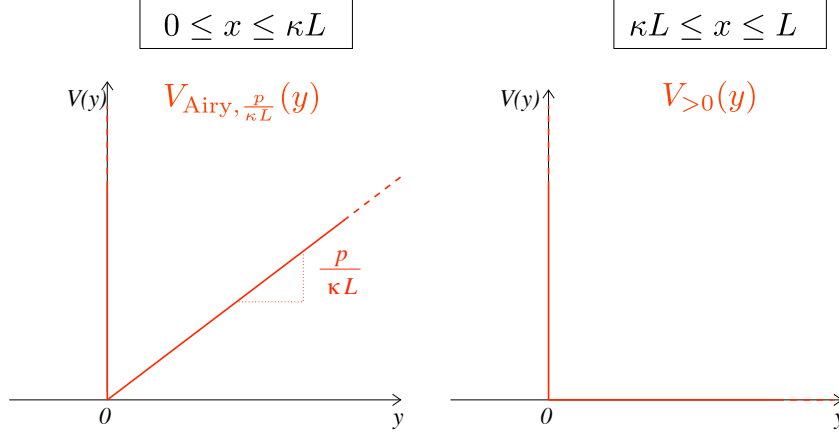


FIGURE 2.6 – Représentation des potentiels ressentis par la particule brownienne  $y(x)$ . Pour l’intervalle de “temps”  $0 \leq x \leq \kappa L$  (à gauche) c’est le potentiel d’Airy  $V_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(y)$  et le propagateur associé  $G_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(u, \kappa L|v, 0)$ , et pour  $\kappa L \leq x \leq L$  (à droite) il reste uniquement la barrière de potentiel  $V_{>0}(y)$  en  $y = 0$  avec le propagateur associé  $G_{>0}(v, L|u, \kappa L)$ .

où les  $\alpha_n$  sont les valeurs absolues des zéros de la fonction d’Airy sur l’axe réel négatif. Ainsi la transformée de Laplace de la distribution cumulée s’exprime simplement comme

$$\tilde{F}^\kappa(p, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} du \left\{ G_{>0}(v, L|u, \kappa L) \times G_{\text{Airy}, \frac{p}{\kappa L}}(u, \kappa L|v, 0) \right\}, \quad (2.66)$$

la dépendance en  $p$  étant uniquement dans le propagateur d’Airy.

Par la propriété de la transformée de Laplace de la dérivée d’une fonction, on a

$$\tilde{P}^\kappa(p, L) = p\tilde{F}^\kappa(p, L) + F^\kappa(0, L) = p\tilde{F}^\kappa(p, L).$$

En insérant les expressions (2.62) et (2.65) des propagateurs dans l’expres-

sion (2.66) et en procédant au changement de variables

$$v' = (2p/(\kappa L))^{-1/3}v, \quad (2.67a)$$

$$u' = (2p/(\kappa L))^{-1/3}u, \quad (2.67b)$$

$$q' = (2p/(\kappa L))^{1/3}q, \quad (2.67c)$$

on obtient l'expression (où l'on a enlevé les primes) :

$$\begin{aligned} \tilde{P}^\kappa(p, L) = p\sqrt{\frac{8L}{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^\infty dq \sin(qu) \sin(qv) e^{-2^{-1/3}(1-\kappa)\kappa^{-2/3}(p\sqrt{L})^{2/3}q^2} \\ \times \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha_n 2^{-1/3}\kappa^{1/3}(p\sqrt{L})^{2/3}} \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)\text{Ai}(v - \alpha_n)}{[\text{Ai}'(-\alpha_n)]^2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

## 2.4.2 Fonction d'échelle

On identifie dans l'expression (2.68) ci-dessus la variable d'échelle de Laplace  $s = p\sqrt{L}$ . Ceci correspond dans l'espace réel à la variable d'échelle  $x_m = h_m/\sqrt{L}$ . On identifie donc la loi d'échelle

$$\boxed{P^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^\kappa\left(\frac{h_m}{\sqrt{L}}\right)}, \quad (2.69)$$

avec la transformée de Laplace de la fonction d'échelle donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\kappa(s) = s\sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \sin(qu) \sin(qv) e^{-\frac{1}{2}(1-\kappa)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-2/3}s^{2/3}q^2} \\ \times \sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)\text{Ai}(v - \alpha_n)}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} e^{-\alpha_n 2^{-1/3}\kappa^{1/3}s^{2/3}}. \end{aligned} \quad (2.70)$$

En introduisant la fonction indexée par  $n$  (indice des zéros de la fonction d'Airy)

$$g_n(q) = \int_0^\infty du \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qu), \quad (2.71)$$

on peut récrire la transformée de Laplace sous la forme plus compacte

$$\tilde{f}^\kappa(s) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [g_n(q)]^2 s e^{-2^{-1/3} s^{2/3} (\alpha_n \kappa^{1/3} + (1-\kappa) \kappa^{-2/3} q^2)}. \quad (2.72)$$

Pour inverser cette transformée de Laplace, nous utilisons un résultat obtenu par Takacs [171] :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \sqrt{2\pi} s e^{-2^{-1/3} s^{2/3} \gamma_n} \right] (x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}} e^{-b_n/x^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2),$$

où  $b_n = 2\gamma_n^3/27$  et  $U(a, b, z)$  est la fonction hypergéométrique confluyente [1]. A l'aide de cette inversion, on obtient la fonction d'échelle

$$f^\kappa(x_m) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x_m^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [g_n(q)]^2 b_n(q, \kappa)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/x_m^2} \times U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/x_m^2). \quad (2.73)$$

avec les coefficients  $b_n(q, \kappa) = \frac{2\kappa}{27} (\alpha_n + \frac{1-\kappa}{\kappa} q^2)^3$ . Cette classe de distributions pour  $0 < \kappa < 1$  interpole de façon continue entre la distribution de Rayleigh  $f^0$  et la distribution d'Airy  $f^1$ . La figure 2.7 présente les courbes obtenues pour quelques les valeurs  $\kappa = 1/32, 1/4, \text{ et } 1/2$  en plus des deux distributions limites pour  $\kappa = 0$  et  $\kappa = 1$ . Le prochain paragraphe est consacré aux limites  $\kappa \rightarrow 0$  et  $\kappa \rightarrow 1$ .

Les formules (2.69) et (2.73) donnent la réponse exacte à la distribution du maximum de la hauteur relative définie par rapport à la moyenne tronquée sur une fraction  $\kappa$  de la longueur de l'interface équilibrée.

### 2.4.3 Les limites $\kappa \rightarrow 0$ et $\kappa \rightarrow 1$

Les calculs que nous avons faits sont valides pour une valeur de la fraction  $0 < \kappa < 1$ . Nous montrons dans ce paragraphe qu'en prenant les limites  $\kappa \rightarrow 0$  et  $\kappa \rightarrow 1$  sur notre formule (2.73), nous obtenons bien les distributions de Rayleigh et d'Airy respectivement.

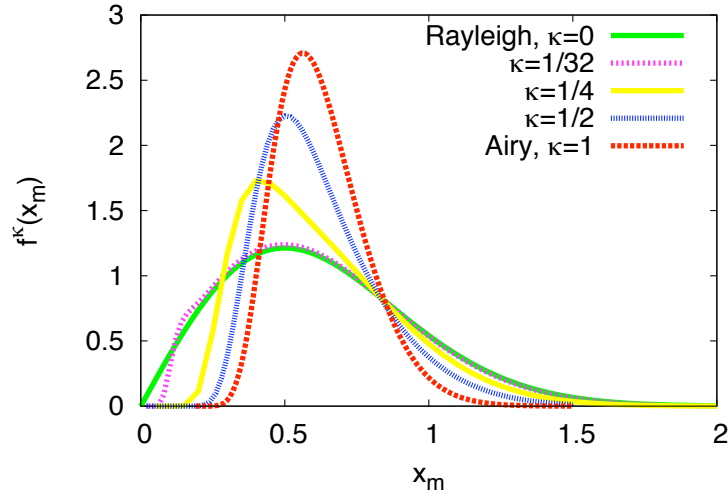


FIGURE 2.7 – Distribution exacte du maximum de la hauteur relative pour  $\kappa = 0, 1/32, 1/4, 1/2, 1$ .

### La limite $\kappa \rightarrow 0$ et la distribution de Rayleigh

Cette limite est la plus singulière des deux. En effet il s'agit de comparer le calcul précédent dans l'espace de Laplace au calcul du maximum du pont brownien du paragraphe 2.1.3 pour lequel on est resté dans l'espace réel. Pour prendre cette limite  $\kappa \rightarrow 0$ , nous avons besoin d'une identité sur la fonction d'Airy, dérivée dans l'appendice de l'article [148], reproduit en annexe B. Alors en partant de la formule intermédiaire (2.70), et en effectuant le changement de variables réciproque de (2.67), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\kappa(s) &= s \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \sin(qu) \sin(qv) e^{-\frac{1}{2}(1-\kappa)q^2} \\ &\times \left(\frac{2s}{\kappa}\right)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}\left[\left(\frac{2s}{\kappa}\right)^{1/3} u - \alpha_n\right] \text{Ai}\left[\left(\frac{2s}{\kappa}\right)^{1/3} v - \alpha_n\right]}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} e^{\alpha_n 2^{-1/3} \kappa^{1/3} s^{2/3}}. \end{aligned}$$

La seconde ligne de cette expression possède une limite lorsque  $\kappa \rightarrow 0$ , voir l'appendice de [148], reproduit en annexe B.1, et on a

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{f}^\kappa(s) &= s \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \sin(qu) \sin(qv) e^{-\frac{1}{2}q^2} \delta(u-v) e^{-su} \\ &= s \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \sin^2(qu) e^{-\frac{1}{2}q^2} e^{-su}.\end{aligned}$$

En faisant l'intégrale sur  $q$  puis en intégrant par parties sur  $u$  on trouve

$$\begin{aligned}\lim_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{f}^\kappa(s) &= \int_0^{+\infty} 2ue^{-u^2} e^{-su} du \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f^\kappa(x_m) e^{-sx_m} dx_m \quad \text{par définition,}\end{aligned}$$

et en comparant ces deux lignes on en déduit qu'on peut permuter la limite et l'intégrale de façon à obtenir

$$\boxed{\lim_{\kappa \rightarrow 0} f^\kappa(x_m) = 2x_m e^{-x_m^2} = f_{\text{Ray}}(x_m).} \quad (2.74)$$

La limite  $\kappa \rightarrow 1$  et la distribution d'Airy

Cette limite est plus naturelle car on peut répéter notre procédure avec  $\kappa = 1$  dès le début : c'est le calcul de Majumdar et Comtet [123, 124]. Prenons la limite dans l'expression finale (2.73), en s'aidant premièrement de

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} b_n(q, \kappa) = b_n = \frac{2\alpha_n^3}{27},$$

de sorte que la dépendance en  $q$  est uniquement dans la fonction  $g_n(q)$ , et

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dq [g_n(q)]^2 &= \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qu) \frac{\text{Ai}(v - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qv) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty du \left( \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \right)^2 = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Alors on a

$$\boxed{\begin{aligned}\lim_{\kappa \rightarrow 1} f^\kappa(x_m) &= 2\sqrt{6}x_m^{-10/3} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n/x_m^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x_m^2) \\ &= f_{\text{Airy}}(x).\end{aligned}} \quad (2.75)$$



### 2.4.4 Asymptotes de la distribution $f^\kappa(x_m)$

Une différence entre la distribution de Rayleigh et la distribution d'Airy est particulièrement visible dans le comportement asymptotique pour  $x_m \rightarrow 0$ . Nous examinons en détail ce cas pour tout  $0 < \kappa < 1$  et prêterons une attention particulière aux comportements lorsque  $\kappa \rightarrow 0$  et  $\kappa \rightarrow 1$ . Enfin grâce à nos résultats concernant la distribution marginale de la hauteur relative généralisée, nous serons en mesure d'appliquer un théorème de Berman [13] permettant d'analyser le comportement asymptotique (dominant) lorsque  $x \rightarrow \infty$ .

#### Asymptote pour $x \rightarrow 0$

L'analyse asymptotique est similaire à celle effectuée pour la distribution d'Airy. Premièrement procédons au changement de variable  $q = x\tilde{q}$  dans l'expression (2.73), de sorte que  $b_n(x\tilde{q}, \kappa)/x^2$  ait le développement lorsque  $x \rightarrow 0$  :

$$\frac{b_n(x\tilde{q}, \kappa)}{x^2} = \frac{2\kappa\alpha_n}{27x^2} + \frac{6\alpha_n^2(1-\kappa)\tilde{q}^2}{27\kappa} + \mathcal{O}(x^2). \quad (2.76)$$

Ainsi seul le terme  $n = 1$  sera pertinent dans la somme lorsque  $x \rightarrow 0$ , et, en utilisant  $U(a, b, z) \approx z^{-a}$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ , on obtient, pour  $0 < \kappa < 1$ ,

$$f^\kappa(x) \approx \sqrt{\frac{2}{9\pi}} \alpha_1^{3/2} [\chi(\alpha_1)]^2 \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^{3/2} x^{-2} \exp\left[-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{\kappa}{x^2}\right], \quad (2.77)$$

avec  $\chi(\alpha_1) = \int_0^\infty du u \text{Ai}(u - \alpha_1)/\text{Ai}'(-\alpha_1) = 1.8173\dots$  le coefficient du terme dominant du développement  $g_1(x\tilde{q}) \approx \chi(\alpha_1)(x\tilde{q}) + \mathcal{O}(x^2)$  (cf. équation (2.71)). Ce résultat est valide pour  $0 < \kappa < 1$ . Les limites  $\kappa \rightarrow 0$  et  $\kappa \rightarrow 1$  nécessitent l'identification de deux comportements d'échelle.

★ Pour  $\kappa \rightarrow 0$ , la comparaison avec la distribution de Rayleigh suggère de prendre la variable d'échelle  $x_m/\sqrt{\kappa}$  :

$$f^\kappa(x_m) \approx x_m h_{\approx 0} \left( \frac{x_m}{\sqrt{\kappa}} \right), \quad (x \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 0), \quad (2.78)$$

avec la fonction d'échelle

$$h_{\approx 0}(u) \sim \begin{cases} 1 & \text{lorsque } u \rightarrow \infty, \\ u^{-3} \exp\left(-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{1}{u^2}\right) & \text{lorsque } u \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

La limite  $u \rightarrow 0$  correspond à prendre d'abord la limite  $\kappa \rightarrow 0$ , et ensuite  $x_m \rightarrow 0$  : on obtient bien l'asymptote de la distribution de Rayleigh. La seconde ligne  $u \rightarrow 0$  correspond à prendre  $x_m \rightarrow 0$  pour  $\kappa$  fixé ( $x_m \ll \sqrt{\kappa}$ ), et on retrouve bien le résultat (2.77) calculé en suivant ce protocole.

- ★ De la même manière, une comparaison entre (2.77) et l'asymptote de la distribution d'Airy (2.35) suggère de prendre la variable d'échelle  $x_m/\sqrt{1-\kappa}$  :

$$f^\kappa(x_m) \approx x_m^{-5} \exp\left(-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{\kappa}{x_m^2}\right) h_{\approx 1}\left(\frac{x_m}{\sqrt{1-\kappa}}\right), \quad (x \rightarrow 0, \kappa \rightarrow 1), \quad (2.80)$$

avec la fonction d'échelle

$$h_{\approx 1}(v) \sim \begin{cases} 1 & \text{lorsque } v \rightarrow \infty, \\ v^3 & \text{lorsque } v \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.81)$$

La limite  $v \rightarrow \infty$  signifie que nous prenons d'abord  $\kappa \rightarrow 1$  et ensuite  $x_m \rightarrow 0$ , et on retrouve l'asymptote de la distribution d'Airy (2.35). La limite  $v \rightarrow 0$  signifie que l'on prend d'abord la limite  $\kappa \rightarrow 1$  puis  $x_m \rightarrow 0$  (équivalent à  $\sqrt{1-\kappa} \ll x_m$ ), et on retrouve notre résultat (2.77).

### Asymptote pour $x \rightarrow \infty$

Pour calculer l'asymptote lorsque  $x_m \rightarrow \infty$ , on utilise un théorème de Berman [13] (une version affinée est donnée par Talagrand [173]), qui stipule que cette asymptote est égale, à l'ordre dominant, à l'asymptote de la distribution marginale (2.52) de la hauteur relative au point  $0 \leq L\xi_0 \leq L$  où sa variance est maximale :

$$P^\kappa(h_m, L) \sim p_{(\xi)}(h_m | \kappa L, L), \quad (h_m \rightarrow \infty),$$

ou en prenant les fonctions d'échelles (2.53b) et (2.69),

$$f^\kappa(x_m) \sim g_{(\xi_0)}^\kappa(x_m), \quad (x_m \rightarrow \infty), \quad (2.82a)$$

où  $\xi_0$  est la position du maximum de la variance  $\sigma^\kappa(\xi)$  de l'équation (2.56). Une simple étude de fonctions confirme l'intuition que le maximum des fluctuations est atteint au milieu du segment "libre" – voir figure 2.5,

$$\xi_0 = \frac{1 + \kappa}{2},$$

et pour cette valeur, la variance vaut

$$[\sigma^\kappa(\xi_0)]^2 = \frac{\kappa(4-3\kappa)}{12} + \left(\frac{1-\kappa}{2}\right)^2 = \frac{3-2\kappa}{12}. \quad (2.82b)$$

En utilisant (2.82a) et (2.82b), nous obtenons l'asymptote

$$f^\kappa(x_m) \sim \exp\left(-\frac{6}{3-2\kappa}x_m^2\right), \quad (x_m \rightarrow \infty). \quad (2.83)$$

Cette asymptote est valide pour tout  $0 < \kappa < 1$ . Pour  $\kappa = 0$ , ce résultat doit être valide par continuité de la distribution marginale en  $\kappa = 0$ . En effet

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} f^\kappa(x_m) \sim \exp(-2x_m^2), \quad (x_m \rightarrow \infty), \quad (2.84)$$

qui est bien le comportement dominant de l'asymptote de la distribution de Rayleigh. A priori, pour  $\kappa = 1$  nous perdons la validité de l'hypothèse du maximum unique de la variance, celle-ci étant constante  $\sigma_{(\xi),1} = \sigma_1$  sur l'intervalle  $\xi \in [0, 1]$ . Toutefois, en prenant la limite  $\kappa \rightarrow 1$  dans la formule (2.83),

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} f^\kappa(x) \sim \exp(-6x_m^2), \quad (x_m \rightarrow \infty), \quad (2.85)$$

qui est bien le comportement dominant de l'asymptote de la distribution d'Airy (2.36). Ce théorème de Berman ne fournit cependant pas les préfacteurs algébriques.

#### 2.4.5 Premier moment de $f^\kappa(x_m)$

Si l'on note  $M_n^\kappa = \int_0^\infty dx x^n f^\kappa(x)$  les moments de la distribution  $f^\kappa(x)$ , on peut montrer simplement que les moments de la distribution de Rayleigh sont donnés par  $M_n^{\kappa=0} = 2^{-n/2}\Gamma(1+n/2)$ . Le calcul des moments pour  $M_n^{\kappa=1}$  de la distribution d'Airy est beaucoup moins simple. Dans la référence [171], Takacs a trouvé une façon de les calculer de façon récursive. M.J. Kearney *et al.* ont trouvé une représentation explicite de ces moments [111]

$$M_n^1 = \frac{4\sqrt{\pi}n!}{\Gamma(\frac{3n-1}{2})2^{\frac{n}{2}}} K_n, \quad K_n = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^{\frac{3(n-1)}{2}}}{\text{Ai}^2(z) + \text{Bi}^2(z)} dz, \quad (2.86)$$

où  $\text{Ai}(z)$  et  $\text{Bi}(z)$  sont les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle d'Airy  $y''(z) - zy(z) = 0$ .

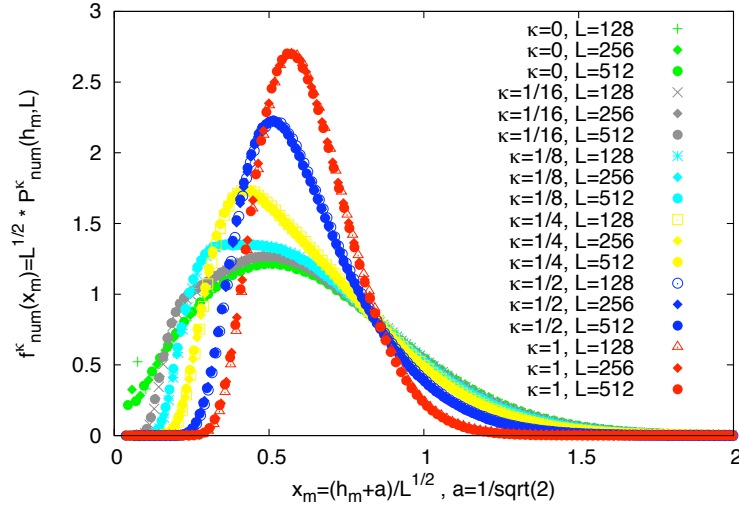


FIGURE 2.8 – Histogrammes d'échelle obtenus à partir de simulations numériques pour trois différentes tailles  $L = 128, 256$  et  $512$  pour chaque valeur de  $\kappa = 0, 1/16, 1/8, 1/4, 1/2, 1$ .

Le calcul des moments  $M_n^\kappa$  pour tout  $0 < \kappa < 1$  est un problème difficile. Nous nous contentons ici de calculer le premier moment de la distribution  $f^\kappa$  car il jouit d'une propriété particulière : il ne dépend pas de  $\kappa$ . En effet, en écrivant  $M_1^\kappa = \int_0^{+\infty} x_m f^\kappa(x_m) dx_m$ , et en permutant l'intégrale sur  $x_m$  avec l'intégrale sur  $q$  et la somme sur  $n$ , on peut faire le changement de variable  $y = b_n(q, \kappa) / x_m^2$  qui élimine toute dépendance en  $\kappa$ . Ainsi

$$\boxed{M_1^\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \forall 0 \leq \kappa \leq 1.} \quad (2.87)$$

### 2.4.6 Simulations numériques – effets de taille finie

Pour comparer nos résultats analytiques à des simulations numériques, nous avons échantillonné des interfaces élastiques. Par équivalence avec la me-

sure brownienne, il suffit de construire des échantillons de ponts browniens, mouvement brownien périodique. Numériquement on construit une marche aléatoire  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq L}$  de  $L$  pas, avec  $x_0 = 0$  et en appliquant la relation itérative (2.4) avec des sauts gaussiens. Pour obtenir les conditions périodiques, on construit à partir de la marche aléatoire  $\{x_i\}$  le pont brownien  $\{b_i\}_{0 \leq i \leq L}$  avec, pour tout  $0 \leq i \leq L$

$$b_i = x_i - \frac{i}{L}x_L.$$

On définit alors la hauteur relative pour tout  $\kappa L$  entier compris entre 0 et  $L$  par l'équivalent discret de (2.38) :

$$h_i^\kappa = b_i - \frac{1}{\kappa L} \sum_{j=0}^{\kappa L-1} b_j.$$

et on dresse la statistique  $P_{\text{num}}^\kappa(h_m, L)$  du maximum (histogramme)  $h_m = \max_{0 \leq i \leq L} h_i^\kappa$  à partir de  $10^7$  échantillons pour différentes valeurs du paramètre  $\kappa$ . On teste la loi d'échelle en représentant en abscisse  $h_m/\sqrt{L}$  et en ordonnée  $\sqrt{L}P_{\text{num}}^\kappa(h_m, L)$  pour trois différentes tailles  $L = 128, 256$  et  $512$ . Sans paramètre d'ajustement on constate une légère déviation des courbes. Cette légère déviation est un effet de taille finie, ayant pour origine le caractère discret en temps de la marche aléatoire utilisée pour les simulations numériques. Pour  $\kappa = 1$  ces corrections de taille finie ont été identifiées par Schehr et Majumdar [164], dont le caractère universel revêt une importance cruciale : tous les modèles de type solide-sur-solide à une dimension, avec les conditions périodiques, auront la distribution d'Airy comme distribution du maximum de la hauteur relative  $h^1$ . En outre, les corrections dues au caractère discret de ces modèles prend la forme :

$$P_{\text{discrete}}^1(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left( f^1 \left( \frac{h_m}{\sqrt{L}} \right) + \frac{a}{\sqrt{L}} f^{1'} \left( \frac{h_m}{\sqrt{L}} \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \right), \quad (2.88)$$

où  $a$  est une constante non-universelle qui dépend des détails du hamiltonien du modèle solide-sur-solide considéré. Dans la référence [88] Györgyi *et al.* discutent ces effets de taille finie pour la statistique d'extrêmes de signaux gaussiens en  $1/f^\alpha$  : pour  $\alpha > 1$  les corrections s'expriment en fonction de la distribution elle-même, cas pertinent pour notre étude, car nous avons pour le profil brownien/interface à l'équilibre la valeur  $\alpha = 2$ . La première correction

peut être “re-sommée” de sorte à avoir :

$$P_{\text{discrete}}^1(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left( f^1 \left( \frac{h_m + a}{\sqrt{L}} \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \right), \quad (2.89)$$

qui est une bonne astuce pour se débarrasser des effets dominants de taille finie. En suivant cette démarche, exacte dans le cas  $\kappa = 1$ , nous représentons nos données numériques avec en abscisse  $(h_m + a)/\sqrt{L}$  et en ordonnée  $\sqrt{L}P_{\text{num}}^\kappa(h_m)$ , avec  $a$  une constante que nous ajustons de façon à avoir une superposition idéale des fonctions d’échelles numériques. La valeur  $a = 1/\sqrt{2}$  semble être le meilleur choix (voir la figure 2.8), et on obtient un très bon accord avec nos calculs exacts pour cette valeur (voir la figure 2.9).

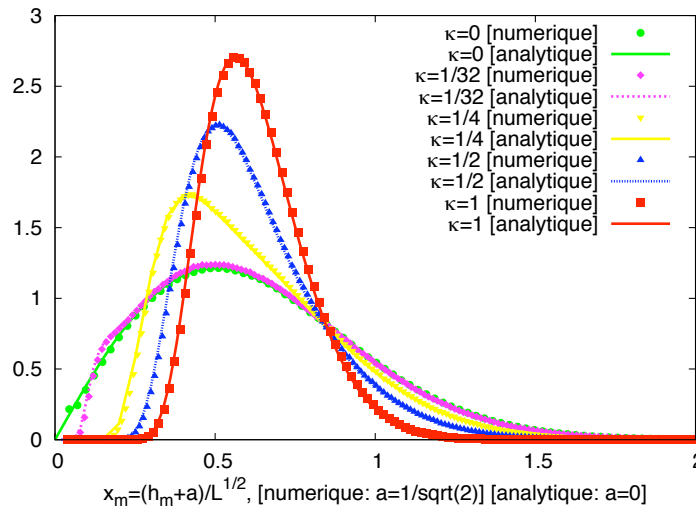


FIGURE 2.9 – Comparaison des résultats analytiques aux histogrammes numériques pour lesquels on a utilisé l’astuce de translation pour absorber à l’ordre dominant les effets de taille finie. Nous avons représenté les valeurs  $\kappa = 0, 1/32, 1/4, 1/2, 1$ , et utilisé les données numériques pour  $L = 512$ .

## 2.5 Un Brownien qui ne manque pas d'aire

La question de la distribution de l'aire sous le mouvement brownien et ses dérivées a été beaucoup étudiée, en majeure partie par les mathématiciens. Alors que la distribution de l'aire sous un brownien est gaussienne d'après le théorème central limite, dès que l'on va considérer un processus annexe pour lequel on aura une aire définie positive, la distribution sera différente, et souvent non-triviale. L'exemple qui nous intéresse le plus est celui de la distribution de l'aire sous une excursion brownienne  $E_t$ , pont brownien conditionné à rester positif : Louchard obtient en 1984 [119] que sa distribution est donnée par la distribution d'Airy (2.34b) – il obtient plus précisément sa transformée de Laplace, qui sera inversée en 1995 par Takács [171], lequel donnera une formule récursive pour en calculer les moments. Majumdar et Comtet [124] retrouvent ce résultat en utilisant la méthode d'intégrale de chemin présentée dans ce chapitre. L'identité qui en découle est que le maximum relatif à la moyenne du pont brownien  $\max_t [B_t - \int_0^1 B_s ds]$  sur l'intervalle unité est distribué identiquement à l'aire sous une excursion sur un intervalle de temps unité  $\int_0^1 E_s ds$ . Dans cette section, nous appliquons notre méthode au calcul de la distribution de l'aire tronquée sous une excursion, et nous montrons qu'elle diffère pour tout  $0 < \kappa < 1$  de la distribution du maximum de la hauteur relative  $h^\kappa$ .

Citons encore deux exemples de calcul de distribution d'aire. Kac s'intéresse en 1946 à l'aire sous la valeur absolue du mouvement brownien et obtient sa transformée de Laplace [103], problème complété par Takács en 1993 : il obtient une expression pour la distribution, ainsi que ses moments [170]. D'autres auteurs ont calculé la distribution de l'aire sous la partie positive du mouvement brownien et du pont brownien [138], et plus récemment sous un pont de Lévy [165].

### 2.5.1 Aire sous un brownien

Ce problème est très simple car on sait que la distribution est gaussienne par le théorème de la limite centrale. Toutefois, la méthode d'intégrale de chemin est adaptée à ce type de problème, et il n'est jamais mauvais de retrouver un résultat classique en quelques lignes de calcul par une méthode originale. De plus, cela permet d'introduire les techniques pour le problème plus technique de l'excursion.

Soit  $x(\tau)$  le mouvement brownien sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , sans contraintes. Nous souhaitons calculer la distribution de l'aire

$$P(A_T, T) dA_T = \mathbb{P} \left[ \int_0^T x(\tau) d\tau \in [A_T, A_T + dA_T] \right]. \quad (2.90)$$

En utilisant la mesure du mouvement brownien (2.2), on a

$$P(A_T, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{x(0)=0}^{x(T)=z} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[0,T]} [x(\tau)] \delta \left( A_T - \int_0^T x(\tau) \right).$$

En procédant au changement de variable déjà utilisé (2.44)  $y(\tau) = \int_0^\tau x(\tau') d\tau'$ , avec  $y(0) = 0$ , on fait apparaître le processus d'accélération aléatoire, et la distribution de l'aire du mouvement brownien est égale à la distribution du point d'arrivée de ce processus rap :

$$P(A_T, T) = \int_{-\infty}^{+\infty} dz G_{\text{rap}}(A_T, z, T | 0, 0, 0),$$

où l'intégrale porte sur la vitesse finale  $z = \dot{y}(T)$ . Notons que le propagateur seul est égal à la distribution de l'aire sachant que le mouvement brownien finit sa course en  $x(T) = z$  :

$$\begin{aligned} P(A_T, T | x(T) = z) &= G_{\text{rap}}(A_T, z, T | 0, 0, 0) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi T^2} e^{-\frac{6}{T^3} A_T^2 - \frac{2}{T} z^2 + \frac{6}{T^2} A_T z}. \end{aligned}$$

En effectuant l'intégrale gaussienne sur  $z$ , on trouve la loi d'échelle

$$P(A_T, T) = \frac{1}{T^{3/2}} g \left( \frac{A_T}{T^{3/2}} \right), \quad (2.91a)$$

avec

$$g(a) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3}{2} a^2}. \quad (2.91b)$$

Cette méthode peut être utilisée pour calculer la distribution de l'aire sous le processus d'accélération aléatoire, et plus généralement pour n'importe quel processus du type  $x^{(n)}(\tau) = d^n x(\tau) / d\tau^n = \xi(\tau)$  avec  $\xi(\tau)$  le bruit blanc gaussien, si l'on est suffisamment patient pour calculer le propagateur du processus de rang  $n + 1$  (voir par exemple [167] jusqu'à  $n = 5$ ).



## 2.5.2 Aire tronquée sous le pont brownien

Considérons maintenant le pont brownien  $x(\tau)$  sur l'intervalle  $0 \leq \tau \leq T$ . Dans un premier temps, calculons la distribution de l'aire totale  $A_T$  sous le pont brownien.

$$\begin{aligned} P_{\text{pont}}(A_T, T) &= \frac{\int_{x(0)=0}^{x(T)=0} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[0,T]} [x(\tau)] \delta \left( A_T - \int_0^T x(\tau) d\tau \right)}{\int_{x(0)=0}^{x(T)=0} \mathcal{D}x(\tau) \mathbb{W}_{[0,T]} [x(\tau)]} \\ &= \frac{G_{\text{rap}}(A_T, 0, T | 0, 0, 0)}{G_0(0, T | 0, 0)}. \end{aligned}$$

On en déduit directement la loi d'échelle

$$P_{\text{pont}}(A_T, T) = \frac{1}{T^{3/2}} g_{\text{pont}} \left( \frac{A_T}{T^{3/2}} \right), \quad (2.92a)$$

avec

$$g_{\text{pont}}(a) = \sqrt{\frac{6}{\pi}} e^{-6a^2}. \quad (2.92b)$$

Le calcul de la distribution de l'aire tronquée sous le pont brownien

$$A_{\kappa T} = \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau$$

s'effectue en séparant l'intervalle de temps en deux  $[0, T] = [0, \kappa T] \cup [\kappa T, T]$ . Sur le premier, on effectue le changement de variable pour obtenir le processus rap, alors que le second reste inchangé. De cette manière, on obtient la distribution sous la forme de la convolution

$$P_{\text{pont}}^{\kappa}(A_{\kappa T}, T) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dz G_0(0, T | z, \kappa T) G_{\text{rap}}(A_t, z, \kappa T | 0, 0, 0)}{G_0(0, T | 0, 0)}$$

On peut alors faire l'intégrale pour trouver que

$$P_{\text{pont}}^{\kappa}(A_{\kappa T}, T) = \frac{1}{(\kappa T)^{3/2}} g_{\text{pont}}^{\kappa}(a) \left( \frac{A_{\kappa T}}{(\kappa T)^{3/2}} \right), \quad (2.93a)$$

avec

$$g_{\text{pont}}^{\kappa}(a) = \sqrt{\frac{6}{\pi(4-3\kappa)}} e^{-\frac{6}{4-3\kappa} a^2}. \quad (2.93b)$$

Il est intéressant de noter que la distribution de l'aire tronquée est reliée à la distribution marginale d'échelle de la hauteur relative  $h^\kappa(\kappa L)$  de la formule (2.53b) par

$$g_{\text{pont}}^\kappa(a) = \sqrt{\kappa} g_{(\xi=\kappa)}^\kappa(\sqrt{\kappa}a),$$

et que cette relation était déjà présente plus haut lorsque nous avons calculé la constante de normalisation  $Z_\kappa$  de deux façons différentes. La conclusion est que les deux variables aléatoires  $h^\kappa(\kappa L)/\sqrt{\kappa L}$  et  $A_{\kappa T}/(\kappa T)^{3/2}$  sont identiquement distribuées, ou encore l'égalité en loi

$$\boxed{\frac{h^\kappa(\kappa L)}{\sqrt{\kappa L}} \equiv \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} \frac{h^0(x)}{\sqrt{\kappa L}} dx.} \quad (2.94)$$

### 2.5.3 Aire tronquée sous l'excursion brownienne

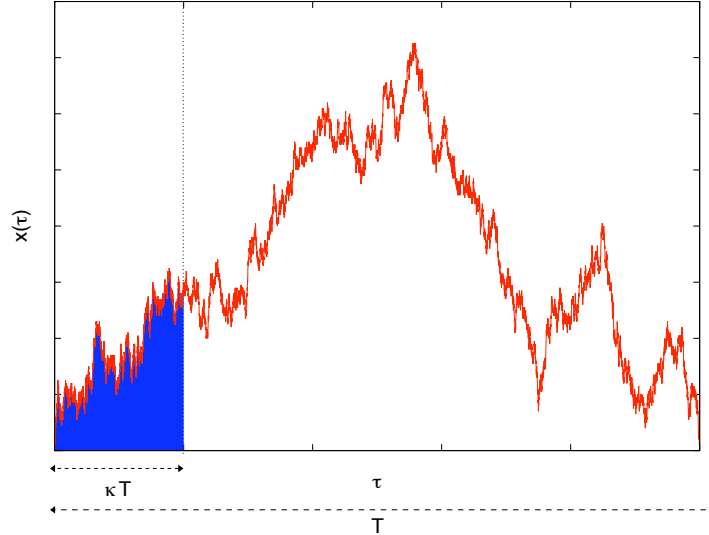


FIGURE 2.10 – Illustration de l'aire tronquée (en bleu) sur une fraction  $\kappa$  du temps  $T$  de l'excursion brownienne (trajectoire en rouge).

L'excursion brownienne est le mouvement brownien  $x(\tau)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ ,  $x(0) = 0$  conditionné à revenir à l'origine  $x(T) = 0$  et à rester positif

$x(\tau) > 0$  pour tout  $0 < \tau < T$ . Elle est notée  $E_t$ , en général sur l'intervalle unité  $0 \leq t \leq 1$  par les mathématiciens. C'est le processus de Wiener conditionné à  $E_0 = E_1 = 0$  et pour tout  $0 < t < 1$ ,  $E_t > 0$ . Dans ce paragraphe nous calculons la distribution de l'aire tronquée sous l'excursion

$$w^\kappa(x)dx = \mathbb{P} \left[ \int_0^\kappa E_s ds \in [x, x + dx] \right]. \quad (2.95)$$

Pour  $0 < \kappa < 1$  nous montrons que cette distribution est différente de la distribution du maximum de la hauteur relative généralisée (2.73)

$$w^\kappa(x)dx \neq f^\kappa(x)dx = \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq t \leq 1} \left( B_t - \int_0^\kappa B_s ds \right) \in [x, x + dx] \right], \quad (2.96)$$

où l'on a utilisé l'égalité en loi (2.38), alors que pour  $\kappa = 1$  [35, 119, 171, 124] on a  $w^1(x) = f^1(x) = f_{\text{Airy}}(x)$ .

Pour décrire l'excursion en terme d'intégrale de chemin, on doit régulariser la trajectoire en  $\tau = 0$  et  $\tau = T$  : du fait de la nature brownienne de  $x(\tau)$  on ne peut pas strictement imposer, en terme de trajectoire,  $x(0) = 0$  et pour  $\tau > 0$ ,  $x(\tau) > 0$ . En effet la trajectoire explorant une région d'ordre  $\sqrt{\tau}$ , si la particule part en  $x(0) = 0$  strictement, elle visitera avec une probabilité 1 le demi-axe négatif  $x < 0$  [60]. La méthode usuelle de régularisation consiste à faire partir la particule de  $x(0) = \epsilon$  et de prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  à la fin du calcul. Ainsi la mesure de l'excursion brownienne régularisée est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{[0,T]}[x(\tau), \epsilon] \mathcal{D}x(\tau) &= \frac{1}{Z(\epsilon)} e^{-\int_0^T dx \frac{1}{2} (\partial_\tau x)^2} \prod_{0 < \tau < T} \theta(x(\tau)) \\ &\quad \times \delta(x(0) - \epsilon) \delta(x(0) - x(T)) \mathcal{D}x(\tau), \end{aligned} \quad (2.97)$$

où le produit de fonction de Heaviside impose la positivité (et peut être absorbé dans l'action sous la forme du potentiel  $V_{>0}$  – cf. paragraphe 2.4), la première fonction de Dirac concerne la régularisation, et la seconde la condition périodique. Enfin  $Z(\epsilon)$  est la constante de normalisation

$$\begin{aligned} Z(\epsilon) &= \int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T dx \left\{ \frac{1}{2} (\partial_\tau x)^2 + V_{>0}(x(\tau)) \right\}} \\ &= G_{>0}(\epsilon, T | \epsilon, 0), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les méthodes et notations du paragraphe 2.4. On obtient la distribution de l'aire tronquée

$$P_{\text{exc}}^\kappa(A_{\kappa T}, T) dA_{\kappa T} = \mathbb{P} \left[ \left( \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau \right) \in [A_{\kappa T}, A_{\kappa T} + dA_{\kappa T}] \right] \quad (2.98)$$

en faisant la moyenne

$$P_{\text{exc}}^\kappa(A_{\kappa T}, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{Z(\epsilon)} \int \delta \left( A_{\kappa T} - \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau \right) \mathbb{E}_{[0, T]}[x(\tau), \epsilon] \mathcal{D}x(\tau).$$

L'aire tronquée  $A_{\kappa T}$  étant définie positive, on prend la transformée de Laplace

$$\tilde{P}^\kappa(p, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\tau x)^2 + V_{>0}(x(\tau)) \right\}} e^{-p \int_0^{\kappa T} d\tau x(\tau)}}{G_0(\epsilon, T | \epsilon, 0)}.$$

On coupe l'intervalle en deux  $[0, T] = [0, \kappa T] \cup [\kappa T, T]$  et on identifie la convolution de propagateurs

$$\tilde{P}^\kappa(p, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^\infty dz G_{>0}(\epsilon, T | z, \kappa T) G_{\text{Airy}, p}(z, \kappa T | \epsilon, 0)}{G_{>0}(\epsilon, T | \epsilon, 0)}.$$

On développe à l'ordre dominant au numérateur et au dénominateur ( $\epsilon^2$ ) afin de prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , et après des manipulations similaires à celles du paragraphe 2.4, on obtient la loi d'échelle

$$\boxed{P_{\text{exc}}^\kappa(A_{\kappa T}, T) = \frac{1}{(\kappa T)^{3/2}} w^\kappa \left( \frac{A_{\kappa T}}{(\kappa T)^{3/2}} \right)}, \quad (2.99a)$$

avec la fonction d'échelle paramétrée par  $\kappa$

$$\boxed{w^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [q g_n(q)] \left( \frac{b_n(q, \kappa)}{\kappa} \right)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/(\kappa x^2)} U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/(\kappa x^2))}, \quad (2.99b)$$

avec les coefficients  $b_n(q, \kappa)$  de l'équation (2.73) et les  $g_n(q)$  définies dans l'équation (2.71). Malgré une forme similaire, on constate que pour tout  $0 < \kappa < 1$ ,  $w^\kappa(x) \neq f^\kappa(x)$ . En revanche, en prenant la limite  $\lim_{\kappa \rightarrow 1} w^\kappa(x) = f^1(x)$ .



---

## Maximum de la hauteur relative d'interfaces en milieu désordonné

---

Dans le premier chapitre, nous avons introduit les interfaces comme étant le produit d'un processus de croissance. Le dépôt de particules est contrôlé par un bruit d'origine thermique, que nous avons modélisé dans la description continue par un bruit blanc gaussien qui dépendait uniquement de la position  $x$  le long du substrat, et du temps  $t$ . Dans le second chapitre nous nous intéressons à la statistique d'extrêmes des interfaces générées par les deux dynamiques proposées, Edwards-Wilkinson et Kardar-Parisi-Zhang, dans leur état stationnaire. Pour la dynamique KPZ l'interface possède une vitesse de propagation  $v$  non-nulle et constante dans l'état stationnaire. Par un changement de référentiel galiléen, le profil de l'interface KPZ équilibrée ( $t \gg L^z$ ) est identique à l'état stationnaire d'équilibre de l'interface EW.

Cependant de nombreux systèmes expérimentaux de propagation d'interfaces possèdent une composante que nous n'avons pas pris en compte jusqu'à présent : les éventuels défauts rencontrés par l'interface lors de sa progression. En reprenant un des exemples du premier chapitre, les fluctuations de la largeur de la nappe en papier modifient localement la vitesse de propagation du front mouillé.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier la statistique du maximum de la hauteur relative pour des systèmes élastiques en milieu désordonné. Les systèmes désordonnés jouissent d'une complexité particulière qui rend les

traitements analytiques et numériques délicats. C’est pourquoi de nombreux efforts théoriques visent à comparer des systèmes désordonnés à des systèmes “purs” – souvent appelés *modèles jouets*. L’objectif est de caractériser d’une façon aussi précise que possible les premiers à partir des connaissances acquises sur les seconds. Ainsi les interfaces gaussiennes avec un bruit en  $1/f^\alpha$  (que nous définirons dans le paragraphe 3.2) constituent une approximation simple de ces systèmes élastiques en milieu désordonné. Dans un premier temps nous motivons l’étude des systèmes élastiques en milieu désordonné par leur pertinence expérimentale. A cette fin, nous donnons les traits caractéristiques de leur phénoménologie. Ensuite nous examinerons le cas des interfaces gaussiennes pour lesquelles il existe de nombreux résultats à propos de la statistique du maximum. Enfin nous décrirons les principaux résultats numériques obtenus pour le maximum d’interfaces en milieu désordonné, en terminant par la comparaison avec les interfaces gaussiennes.

Ce chapitre est le fruit d’un travail en collaboration avec Sebastian Bustingorry et Alejandro Kolton, du Centro Atómico Bariloche, Argentina, et Grégory Schehr. Une publication est en cours de préparation [147].

## 3.1 Interfaces élastiques en milieu désordonné

### 3.1.1 Exemple de dynamique forcée, systèmes expérimentaux

Une interface élastique harmonique est caractérisée par un champ de hauteur  $u(x, t)$ , fonction univaluée de  $x$ , et son énergie élastique est donnée par

$$H_{\text{el}} [u(x, t)] = \int_0^L \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (3.1)$$

où  $\nu$  est la constante d’élasticité. Soumettons une telle interface à une force extérieure uniforme  $F$  (force par unité de longueur). Si le substrat est sans défaut, on retrouve l’équation d’Edwards-Wilkinson (1.19) avec l’ajout au second membre de la force  $F$ . En revanche, si le substrat présente des défauts dans tout le plan  $(x, u)$  on adjoint à cette équation un terme de bruit dû au désordre. Si le désordre est dominant devant le bruit thermique, on peut

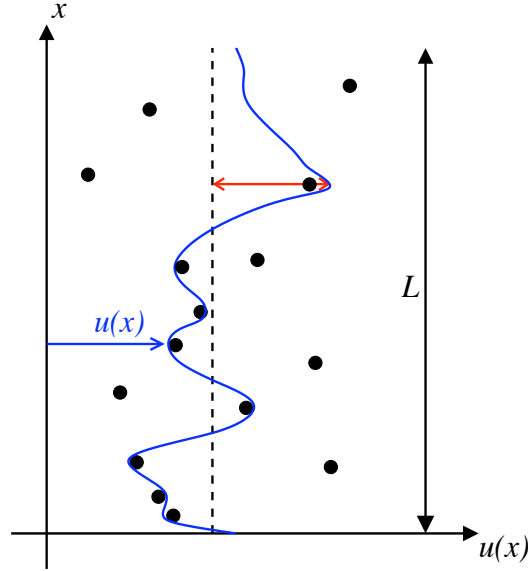


FIGURE 3.1 – Interface élastique  $u(x)$  (en bleu) en milieu aléatoire. Les défauts sont symbolisés par des points qui accrochent la ligne élastique. La droite verticale en pointillés symbolise la valeur moyenne spatiale  $\int_0^L u(x)dx/L$ , et la flèche (en rouge) indique le maximum  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} u(x) - (1/L) \int_0^L u(x')dx'$  pour cette réalisation.

négliger ce dernier (limite de température nulle) et l'équation de la dynamique s'écrit [90] :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F + \eta(x, u(x, t)), \quad (3.2)$$

où le bruit ne dépend pas explicitement du temps, mais de la région visitée par l'interface. Ce bruit est de moyenne nulle  $\overline{\eta(x, u)} = 0$ , où le trait horizontal signifie la moyenne sur les réalisations du désordre, et de corrélations

$$\overline{\eta(x, u)\eta(x', u')} = \delta(x - x')\Delta(u - u'), \quad (3.3)$$

avec une fonction  $\Delta(z)$  qui décroît rapidement vers 0 sur une distance de coupure finie  $a$ .

Ce type d'équation a été proposé pour décrire la dynamique des parois de domaine dans des modèles d'Ising désordonnés [20]. La dynamique de l'in-



terface entre deux fluides non miscibles dans un milieu poreux quasi bidimensionnel [161] est un autre exemple expérimental de ce type d'interface élastique. Le terme de bruit peut être écrit directement comme dans l'équation ci-dessus, ou comme la dérivée d'un potentiel aléatoire : cela correspond à la distinction champ aléatoire ou couplage aléatoire (voir par exemple [58]). Ces systèmes élastiques sont dans la classe *variété élastique* (en anglais *random manifold*), car le champ de déplacement  $u$  est distinct de la coordonnée longitudinale  $x$ . Une seconde classe parmi ces systèmes élastiques, encore décrit par ce type d'équation sont les *structures périodiques élastiques* comme les ondes de densité de charge [49], ou les réseaux de vortex dans les supraconducteurs de type II [115, 15]. Ces systèmes sont périodiques dans la direction  $x$ , et le champ  $u(x, t)$  correspond aux fluctuations du réseau, dans la direction  $x$ . A une dimension, cela correspond à une chaîne d'oscillateurs harmoniques couplés, pour laquelle la présence de désordre entre en compétition avec les modes propres d'oscillation.

### 3.1.2 Phénoménologie succincte

D'un côté, l'énergie élastique privilégie les interfaces plates dans le cas des variétés, et les déformations de réseau nulles dans le cas des structures périodiques. De l'autre, les impuretés ont tendance à piéger l'interface ou la structure périodique dans des configurations aléatoires. La compétition entre ces deux comportements antagonistes crée des profils d'interface (ou de déformation de réseau) rugueux, dont la caractérisation est essentielle étant donnée la diversité des systèmes physiques associés.

Selon l'intensité de la force extérieure appliquée  $F$ , nous pouvons distinguer deux cas de figures à température nulle  $T = 0$ . Si la force est assez faible, l'interface va se déplacer sous l'effet de la traction jusqu'à ce qu'elle tombe dans un puits de potentiel suffisamment profond : l'interface est dans une configuration piégée. A contrario si la force est suffisamment intense aucune configuration des défauts ne pourra piéger l'interface, qui va se déplacer avec une vitesse moyenne non nulle.

A température nulle, nous pouvons distinguer trois régimes pour lesquels une étude des propriétés de rugosité de l'interface est pertinente. Pour une force appliquée nulle  $F = 0$ , le système est à l'équilibre et va minimiser son énergie totale : l'interface est piégée dans l'état fondamental (premier régime). En augmentant  $F$  en deçà d'une valeur critique  $F_c$ , à partir d'une condition

initiale quelconque, l'interface va se déplacer jusqu'à être piégée avec une vitesse nulle dans l'un des états métastables. Ainsi en attendant suffisamment longtemps, pour  $F < F_c$ , l'interface atteint un état stationnaire de vitesse nulle. La multitude des états métastables disponibles rend difficile une caractérisation géométrique de l'interface pour une valeur quelconque de la force  $0 < F < F_c$ . Lorsqu'on dépasse  $F > F_c$ , l'interface se meut avec une vitesse moyenne non nulle, avec un déplacement par sauts (avalanches). Pour une réalisation donnée du désordre, et pour une force appliquée égale à la force critique, il existe une unique configuration qui piège l'interface, appelée configuration de dépiégeage (deuxième régime). Le dépiégeage est un phénomène critique faisant intervenir un comportement collectif d'un grand nombre de degrés de liberté : c'est une transition de phase d'un système hors-équilibre avec désordre. Ainsi la physique associée est riche et les revues de Kardar [106] et Fisher [69] couvrent une bonne partie du sujet (analyses d'échelles, groupe de renormalisation fonctionnel, avalanches, propriétés de transport, applications) Enfin lorsque  $F \gg F_c$ , le comportement dominant est du type  $u(x, t) = Ft$  à des fluctuations  $\delta u(x, t)$  près. En insérant cette forme dans le bruit, on retrouve une dépendance explicite en temps et les fluctuations  $\delta u(x, t)$  obéissent à l'équation d'Edwards-Wilkinson habituelle, avec un bruit thermique effectif dû à la visite très rapide des défauts [90] (troisième régime).

L'objectif de ce chapitre est de fournir une étude statistique du maximum de la hauteur relative de tels systèmes élastiques en milieu désordonné pour les deux régimes :

- (a) Configuration d'équilibre  $F = 0$  ;
- (b) Configuration de dépiégeage  $F = F_c$ .

Le dernier régime  $F \rightarrow \infty$  est équivalent à une interface d'équilibre sans désordre, dont la statistique du maximum a été largement étudiée analytiquement dans le chapitre précédent. Ainsi nous nous focaliserons sur les cas (a) et (b) pour lesquels nous sommes en mesure de générer numériquement les configurations de l'interface.

La dépendance en temps est supprimée : on attend suffisamment longtemps pour que l'interface ait trouvée la configuration d'équilibre (a) ou la configuration de dépiégeage (b). De plus nous adopterons le point de vue *couplage aléatoire* : le système élastique  $u(x)$  est plongé dans un potentiel désordonné  $V(x, u)$  de moyenne nulle  $\overline{V(x, u)} = 0$  et de corrélations

$$\overline{V(x, u)V(x', u')} = \delta(x - x')R_0(u - u'), \quad (3.4)$$

où  $R_0(u - u')$  est une fonction qui décroît rapidement au-delà de la distance  $a$ . C'est le corrélateur nu (*bare*) en terme du groupe de renormalisation fonctionnel [42]. Ainsi l'énergie d'une configuration  $\{u(x), 0 \leq x \leq L\}$  dans une réalisation donnée du potentiel aléatoire est

$$H[\{u(x)\}] = \int_0^L dx \left\{ \frac{\nu}{2} (\nabla u(x))^2 + V(x, u(x)) \right\}. \quad (3.5)$$

Le champ élastique  $u(x)$  est soumis aux conditions périodiques aux limites, et nous reprenons la définition usuelle du champ de hauteur relative

$$u^1(x) = u(x) - \frac{1}{L} \int_0^L u(x') dx'. \quad (3.6)$$

Un premier critère dont nous avons déjà discuté au premier chapitre est la largeur carrée moyenne de l'interface, définie ici par

$$w^2(L) = \frac{1}{L} \int_0^L \overline{[u^1(x)]^2} dx, \quad (3.7)$$

dont le comportement d'échelle,

$$w(L) \sim L^\zeta, \quad (3.8)$$

permet de définir l'exposant de rugosité  $\zeta$  de l'interface.

Le choix de prendre un hamiltonien (3.5) du type *couplage aléatoire* plutôt que *champ aléatoire* ne modifie pas l'exposant de rugosité au dépiégeage [136, 32]. A l'équilibre, l'exposant dépend du type de désordre, et la pertinence du type *couplage aléatoire* parmi les systèmes expérimentaux encourage l'utilisation de cette classe de modèles pour nos simulations numériques.

### 3.1.3 Objectif du chapitre

L'objectif de ce chapitre est d'analyser numériquement la distribution du maximum  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} u^1(x)$  de la hauteur relative pour les deux régimes : l'équilibre et le dépiégeage (à température nulle). Nous gardons la notation  $h_m$  de façon générique. Pour chacun de ces deux régimes, nous distinguerons le cas *variété* élastique et le cas *structure périodique* élastique. Les exposants de rugosité associés à chacun de ces deux cas, dans les deux régimes d'équilibre ou de dépiégeage sont résumés dans le tableau 3.1. L'exposant de la variété

élastique à l'équilibre  $\zeta_{\text{eq,v}} = 2/3$  a été proposé numériquement par Huse et Henley en 1985 [93], puis confirmé la même année numériquement par Kardar [105] et par des arguments théoriques par Huse, Henley et Fisher [92]. Ces derniers dérivent l'équation de Schrödinger du hamiltonien (3.5) pour le propagateur de l'interface en milieu désordonné ( $x$  joue encore le rôle du temps). Par un changement de variable, elle se réduit à l'équation de Burgers forcée pour laquelle une relation de fluctuation-dissipation permet de compléter une analyse des fluctuations de l'énergie libre pour en déduire les exposants, dont  $\zeta_{\text{eq,v}}$ . L'exposant de la structure périodique à l'équilibre  $\zeta_{\text{eq,sp}} = 1/2$  se déduit de l'analogie avec un modèle SOS sur substrat désordonné. En dimension 1 ce modèle est décrit au niveau de ses propriétés à grande distance par une marche aléatoire [157], pour laquelle l'exposant est  $1/2$ . L'universalité de la distribution d'Airy pour les modèles SOS [164] s'étend donc au cas de la structure périodique à l'équilibre. Pour les exposants au dépiégeage, la valeur exacte pour la variété n'est pas connue, mais les évaluations numériques [98, 117, 158], corroborées par des calculs du groupe de renormalisation fonctionnel (FRG) [31] donnent  $\zeta_{\text{dep,v}} \simeq 1.25$ . Pour les structures périodiques un argument du FRG [44] donne la valeur  $\zeta_{\text{dep,sp}} = 3/2$  en accord avec les évaluations numériques [24].

	Variété élastique	Structure périodique
Etat fondamental	$\zeta_{\text{eq,v}} = 2/3$ [93, 105, 92]	$\zeta_{\text{eq,sp}} = 1/2$ [157]
Dépiégeage	$\zeta_{\text{dep,v}} \simeq 1.25$ [98, 117, 158, 31]	$\zeta_{\text{dep,sp}} = 3/2$ [44, 24]

TABLE 3.1 – Exposants de rugosité des systèmes élastiques ('v' pour Variété, 'sp' pour Structure périodique) en milieu désordonné à l'équilibre 'eq' et au dépiégeage 'dep'.

La prochaine section est consacrée aux interfaces gaussiennes. Nous exposerons ensuite les résultats numériques concernant la statistique du maximum de la hauteur relative des interfaces en milieu désordonné. Enfin nous discuterons de la comparaison entre ces deux types d'interfaces.

## 3.2 Maximum d'interfaces gaussiennes

Dans cette section nous résumons certaines propriétés de la statistique du maximum de la hauteur relative d'interfaces gaussiennes, dont nous rappelons d'abord la définition.

### 3.2.1 Interfaces gaussiennes avec un bruit en $1/f^\alpha$

Le champ de hauteur relative  $h^1(x)$  – de moyenne spatiale nulle – soumis aux conditions périodiques peut se décomposer en série de Fourier

$$h^1(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi kx}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kx}{L}\right), \quad (3.9)$$

A une distribution du champ de hauteur  $\{h^1(x), 0 \leq x \leq L\}$  donnée correspond une distribution des coefficients de Fourier  $\{(a_k, b_k), k = 1, 2, \dots\}$ . Une interface est dite gaussienne lorsque les coefficients sont distribués indépendamment avec une loi gaussienne de moyenne nulle  $\langle a_k \rangle = \langle b_k \rangle = 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots$  (on utilise  $\langle \dots \rangle$  pour les moyennes d'ensemble sur les distributions des coefficients) et des corrélations, pour tout  $k, k' = 1, 2, \dots$ ,

$$\langle a_k a_{k'} \rangle = \langle b_k b_{k'} \rangle = \delta_{k,k'} \frac{2L^{\alpha-1}}{(2\pi k)^\alpha} \quad \text{et} \quad \langle a_k b_{k'} \rangle = 0, \quad (3.10)$$

où le coefficient  $\alpha$  est réel positif. On peut écrire explicitement la mesure

$$\Pi_\alpha [h^1(x)] \mathcal{D}h^1(x) \equiv e^{-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\pi k)^\alpha}{4L^{\alpha-1}} (a_k^2 + b_k^2)} \prod_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(2\pi)^{2\alpha-1}}{4L^{2(\alpha-1)}} da_k db_k \right] \quad (3.11)$$

Ce type de signal (3.9) distribué avec la mesure (3.11) présente un spectre de puissance du type  $1/f^\alpha$ . Par comparaison directe avec (1.27), les interfaces à l'équilibre (sans désordre) sont décrites par la série (3.9) associée à la mesure (3.11) avec le paramètre  $\alpha = 2$ . Le cas  $\alpha = 1$  est relié au cas de la ligne de contact d'une goutte liquide sur un substrat solide rugueux [37], et correspond à des interactions à longue portée [99]. Le cas  $\alpha = 4$  est également particulier : il correspond à l'état stationnaire d'interfaces dont le mécanisme de relaxation est dominé par la minimisation de la courbure  $(\nabla^2 h)^2$  plutôt que de la pente  $(\nabla h)^2$ . Cela correspond au processus d'accélération aléatoire

dont nous avons parlé au chapitre précédent. Ce type de dynamique – dite de *diffusion de surface* – joue un rôle crucial pour modéliser le procédé de dépôt par épitaxie [10, 133, 181, 174].

Une première façon de caractériser la géométrie des interfaces gaussiennes concerne les propriétés statistiques de la largeur carrée  $w^2[h^1(x), L]$  d'une réalisation

$$w^2[h^1(x), L] = \frac{1}{L} \int_0^L [h^1(x)]^2 dx, \quad (3.12)$$

avec des résultats exacts pour  $\alpha = 2$  [74],  $\alpha = 4$  [141] et  $\alpha = 1$  [4]. On distingue alors deux domaines de valeurs pour le paramètre  $\alpha$  [5] : le cas  $\alpha \leq 1/2$  valeurs pour lesquelles la distribution de  $w^2$  est gaussienne, du cas  $\alpha > 1/2$  pour lesquelles les distributions sont non gaussiennes et dépendent continûment de  $\alpha$ . La distribution de la largeur carrée pour  $\alpha = 1$  est donnée par la distribution limite de Gumbel décrite au premier chapitre [4].

L'évaluation de la valeur moyenne de cette variable aléatoire  $w^2$

$$\begin{aligned} w^2(L) = \langle w^2[h^1(x), L] \rangle &= \int \mathcal{D}h^1(x) w^2[h(x), L] \Pi_\alpha [h^1(x)] \\ &= \frac{2\zeta(\alpha)}{(2\pi)^\alpha} L^{\alpha-1} \sim L^{2\zeta}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

avec  $\zeta(\alpha) = \sum_{n>0} 1/n^\alpha$  la fonction zeta de Riemann, permet d'identifier l'exposant de rugosité  $\zeta$  de l'interface gaussienne de paramètre  $\alpha > 1$  :

$$\zeta = \frac{\alpha - 1}{2}, \quad \text{pour } \alpha > 1. \quad (3.14)$$

Cette gamme de valeurs  $\alpha > 1$  est donc pertinente pour une éventuelle comparaison avec des interfaces rugueuses. Pour  $\alpha = 1$  la largeur carrée moyenne croît logarithmiquement avec la taille de l'interface  $L$ , et pour des valeurs  $\alpha < 1$ ,  $\langle w^2(L) \rangle$  ne dépend plus de  $L$  mais de la valeur de coupure à petite distance [5].

### 3.2.2 Synthèse des résultats concernant la distribution du maximum

Notre objectif étant de comparer les résultats concernant les interfaces en milieu désordonné aux interface gaussiennes, nous restreignons une présentation des résultats à  $\zeta > 0$ , c'est-à-dire  $\alpha > 1$ , régime de fortes corrélations.

Les résultats présentés dans [86] concernent également le régime des faibles corrélations  $0 < \alpha \leq 1$  : malgré des effets de taille finie complexes, la distribution du maximum attendue pour ce régime est la distribution de Gumbel. Nous n'entrerons pas dans les détails de cette analyse ici, et nous nous focaliserons sur le régime de forte corrélation  $\alpha > 1$ , dont la plupart des résultats proviennent de l'article de Györgyi *et al.* [86].

Notations : en anticipant la comparaison aux interfaces en milieu désordonné, les distributions tirées des interfaces gaussiennes sont notées avec un tilde et indexées par  $\zeta$  déduit de  $\alpha$  par la relation (3.14) : par exemple  $\tilde{P}_\zeta(h_m, L)$  est la distribution du maximum  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^1(x)$  de la hauteur relative des interfaces gaussiennes de paramètre  $\alpha = 2\zeta + 1$  et de taille  $L$ .

### Loi d'échelle en $L^\zeta$

Il existe différentes façons de comparer les distributions du maximum pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . La première d'entre elles est l'échelle naturelle : la valeur maximale de la hauteur relative croît avec la longueur  $L$  de l'interface avec la même échelle que les fluctuations de hauteur données par la racine de la largeur carrée moyenne, c'est-à-dire comme  $L^\zeta$ . La variable d'échelle est alors  $z = h_m/L^\zeta$ , et la distribution du maximum  $h_m$  pour un système gaussien de taille  $L$  paramétré par  $\alpha > 1$  obéit à la relation d'échelle

$$\tilde{P}_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{L^\zeta} \tilde{f}_\zeta \left( \frac{h_m}{L^\zeta} \right), \quad (3.15)$$

où  $\zeta$  est donné par (3.14). Le cas particulier  $\alpha = 2$  est le seul tractable analytiquement afin d'obtenir la distribution complète, ceci étant dû à l'équivalence avec le mouvement brownien : la distribution du maximum est la distribution d'Airy [119, 171, 123, 124]  $\tilde{f}_{1/2}(z) = f_{\text{Airy}}(z)$ , dont les propriétés ont été discutées au chapitre précédent. Pour des valeurs de  $\alpha = 2n$ , une approche analytique est encore réalisable, avec la méthode d'intégrale de chemin et l'identification successive des processus de vitesse aléatoire (processus de Wiener,  $n = 1$ ,  $h'(x) = \xi(x)$  bruit blanc gaussien), d'accélération aléatoire ( $n = 2$ ,  $h''(x) = \xi(x)$ ) et ses généralisations aux entiers  $n > 2$  quelconques ( $h^{(n)}(x) = \xi(x)$ ). Cependant, les problèmes de mécanique quantique associés, quoique simples à formuler, n'ont pas été résolus dans le cas  $n$  quelconque [86], ce qui empêche un calcul exact de la distribution. Néanmoins, on peut extraire des informations quant aux comportements asymptotiques des distributions

d'échelles à petit argument, celui-ci étant relié à l'état fondamental du problème de mécanique quantique associé – dans le même esprit que nos développements à  $x_m$  petits du chapitre précédent. Ainsi le comportement à  $z \ll 1$  est donnée par [86]

$$\tilde{f}_\zeta(z) \approx C z^{-\gamma} \exp\left(-\frac{B}{z^\beta}\right), \quad (z \rightarrow 0), \quad (3.16a)$$

avec les exposants

$$\beta = \frac{2}{\alpha - 1} = \frac{1}{\zeta}, \quad \gamma = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1} = 2 + \frac{3}{2\zeta}, \quad (3.16b)$$

et les amplitudes exprimées en fonction du fondamental du hamiltonien adimensionné associé  $\epsilon_0(\alpha) > 0$  (voir [86])

$$B = \frac{\alpha - 1}{2} \left(\frac{2\epsilon_0(\alpha)}{\alpha + 1}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \quad C = \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}} \left(\frac{2\epsilon_0(\alpha)}{\alpha + 1}\right)^{\frac{3}{2} \frac{\alpha+1}{\alpha-1}}. \quad (3.16c)$$

Alors que ce comportement est exact pour  $\alpha = 2n$  avec  $n$  entier, les simulations numériques semblent étendre la validité à tout réel  $\alpha > 1$  [86].

Pour  $z \gg 1$  on peut utiliser un théorème de Pickands [139] pour obtenir le comportement asymptotique conjecturé numériquement par Görgyi *et al.* [86] :

$$\tilde{f}_\zeta(z) \approx D z^\delta e^{-Ez^2}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.17a)$$

avec l'exposant

$$\delta = \begin{cases} \frac{2}{\alpha-1} = \frac{1}{\zeta} & \text{si } 1 < \alpha < 3, \\ 1 & \text{si } \alpha > 3. \end{cases} \quad (3.17b)$$

(et l'on s'attend à des corrections logarithmiques pour  $\alpha = 3$ ). L'amplitude dans l'exponentielle est donnée par

$$E = \frac{(2\pi)^\alpha}{4\zeta(\alpha)}, \quad (3.17c)$$

et l'amplitude  $D$  s'exprime en fonction de la constante de Pickands  $H_{\alpha-1}$ , qui possède elle-même une expression compliquée [139]. Il est possible de l'évaluer pour  $\alpha = 2$  et  $\alpha \geq 3$  :

$$D = \begin{cases} 72 \sqrt{\frac{6}{\pi}} & \text{si } \alpha = 2 \\ \sqrt{\frac{\zeta(\alpha-2)}{\zeta(\alpha)} \frac{(2\pi)^\alpha}{2\zeta(\alpha)}} & \text{si } \alpha > 3. \end{cases} \quad (3.17d)$$



### Loi d'échelle à moyenne fixée

Jusqu'à présent, nous avons utilisé la variable d'échelle naturelle  $z = h_m/L^\zeta$ . Afin de fournir une étude comparative entre des interfaces générées de façons différentes, nous introduisons dans ce paragraphe une variable d'échelle couramment utilisée :  $x = h_m/\langle h_m \rangle$ , où la valeur moyenne du maximum est

$$\langle h_m \rangle = \int_0^\infty h_m \tilde{P}_\zeta(h_m, L) dh_m. \quad (3.18)$$

Cette variable est de moyenne unité pour toutes valeurs  $\zeta = (\alpha - 1)/2$ , et la loi d'échelle prend la forme

$$\tilde{P}_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{\langle h_m \rangle} \tilde{\phi}_\zeta \left( \frac{h_m}{\langle h_m \rangle} \right). \quad (3.19)$$

Ce type d'échelle diffère du précédent par un facteur multiplicatif :

$$\langle h_m \rangle = \tilde{a}_\zeta L^\zeta, \quad (3.20)$$

avec l'exposant de rugosité  $\zeta$  déduit de  $\alpha$  par la relation (3.14), et le tilde est utilisé pour indiquer qu'il s'agit des interfaces gaussiennes (nous utiliserons par la suite un coefficient  $a_\zeta$  pour les interfaces en milieu désordonné). Cette échelle permet d'absorber des effets de construction de l'interface non-pertinents, par exemple lors d'un échantillonnage numérique. La relation entre  $\tilde{\phi}_\zeta$  et  $\tilde{f}_{\zeta_\alpha}$  est :

$$\tilde{\phi}_\zeta(x) = \tilde{a}_\zeta \tilde{f}_\zeta(\tilde{a}_\zeta x). \quad (3.21)$$

Les comportements asymptotiques prennent donc la même forme, avec des amplitudes différentes. Pour  $x \ll 1$  :

$$\tilde{\phi}_\zeta(x) \approx C' x^\gamma \exp\left(-\frac{B'}{x^\beta}\right), \quad (x \rightarrow 0) \quad (3.22)$$

avec les valeurs (3.16b) pour les exposants  $\beta$  et  $\gamma$ , et les amplitudes modifiées à partir de  $B$  et  $C$  de (3.16c) :  $B' = B/[\tilde{a}_\zeta]^\beta$  et  $C' = C[\tilde{a}_\zeta]^\gamma$ . Pour  $x \gg 1$ ,

$$\tilde{\phi}_\zeta(x) \approx D' x^\delta e^{-E' x^2}, \quad (x \rightarrow \infty), \quad (3.23)$$

avec l'exposant  $\delta$  de la formule (3.17b), et les amplitudes  $E' = [\tilde{a}_\zeta]^2 E$  et  $D' = [\tilde{a}_\zeta]^\delta D$  déduites des équations (3.17c) et (3.17d).

### Loi d'échelle à moyenne et variance fixées

Une autre variable d'échelle commode est  $y = (h_m - \langle h_m \rangle) / \sigma$ , avec la variance

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (h_m - \langle h_m \rangle)^2 \tilde{P}_\zeta(h_m, L) dh_m. \quad (3.24)$$

Ce changement de variable est le plus général changement de variable linéaire envisageable, et est du même type que les changements de variable effectués dans le premier chapitre pour la statistique d'extrêmes de variables aléatoires indépendantes. Le premier et le second moment de  $y$  sont fixés respectivement à 0 et 1, de sorte que les différences ne seront visibles graphiquement que dans les queues car elles expriment les moments d'ordre supérieur. La loi d'échelle s'exprime alors

$$\tilde{P}_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{\sigma} \tilde{\psi}_\zeta \left( \frac{h_m - \langle h_m \rangle}{\sigma} \right). \quad (3.25)$$

Ces fonctions d'échelles possèdent un support mesurable (non réduit à un point) pour tout  $\alpha > 1$ , ce qui implique la proportionnalité

$$\sigma = \tilde{b}_\zeta L^\zeta. \quad (3.26)$$

Ainsi la fonction d'échelle  $\tilde{\psi}_\zeta$  se déduit de  $\tilde{f}_\zeta$  par

$$\tilde{\psi}_\zeta(y) = \tilde{b}_\zeta \tilde{f}_\zeta \left( \tilde{b}_\zeta y + \tilde{a}_\zeta \right). \quad (3.27)$$

Les comportements asymptotiques se déduisent encore une fois de ceux (3.16) et (3.17) de  $f_\alpha$ . Insistons exclusivement sur le développement pour  $y \gg 1$ , dominé par

$$\tilde{\psi}_\zeta(y) \sim \exp \left( -E \left[ \tilde{b}_\zeta \right]^2 y^2 - 2\tilde{a}_\zeta \tilde{b}_\zeta y \right), \quad y \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

## 3.3 Maximum d'interfaces en milieu désordonné

Dans cette section, nous analysons numériquement la distribution du maximum de la hauteur relative  $u^1(x)$  des systèmes élastiques décrits dans la section 3.1 pour les deux régimes d'équilibre et de dépiégeage. Après avoir exposé

les simulations numériques effectuées, nous analyserons les distributions obtenues par échantillonnage des interfaces. Enfin nous consacrerons la section suivante à la comparaison des résultats avec ceux des interfaces gaussiennes.

### 3.3.1 Echantillonnage numérique

Les simulations numériques et les méthodes Monte Carlo utilisées pour les systèmes purs ont montré leurs limites pour les simulations des systèmes désordonnés. Ainsi l’échantillonnage de systèmes élastiques en milieu désordonné n’est pas un problème trivial, et une description détaillée des méthodes utilisées sort du cadre de ce manuscrit. Le cas du système élastique à l’équilibre est le plus simple à traiter : il se ramène à l’échantillonnage du polymère dirigé en milieu aléatoire, pour lequel le problème d’optimisation globale est résolu par une construction récursive type “matrice de transfert”. En ce qui concerne les interfaces au dépiégeage, le problème est beaucoup plus délicat, et a été résolu par la conception d’un algorithme par Rosso et Krauth [159], que nous détaillons dans [147]\*.

A partir des échantillons des systèmes élastiques pour chaque configuration (voir le tableau 3.1), nous dressons les histogrammes numériques  $P_\zeta(h_m, L)$  du maximum  $h_m$  de la hauteur relative du système de taille  $L$ , pour différentes tailles  $L = 128, 256, 512$  pour le dépiégeage, et jusqu’à  $L = 1024, 2048, 4096$  à l’équilibre.

#### Régime d’équilibre : le polymère dirigé

Numériquement, nous travaillons sur un espace discret : le réseau carré sur le rectangle de dimensions  $L \times \ell$ . Les points du réseau sont indexés par le couple d’entiers  $(i, j)$ ,  $0 \leq i \leq L$ ,  $0 \leq j \leq \ell$ . Le désordre est une variable aléatoire  $V_{ij}$  en chaque point du réseau, avec une moyenne nulle  $\overline{V_{ij}} = 0$  et des corrélations

$$\overline{V_{ij}V_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (3.29)$$

Nous avons pris des variables gaussiennes indépendantes de site à site. La condition périodique  $h(0) = h(L)$  se traduit par une identification des sites  $(0, j)$  et  $(L, j)$  pour tout  $0 \leq j \leq \ell$ . De même dans la direction transverse (la

---

\*Nous avons bénéficié pour ce travail d’une collaboration avec A. Kolton et S. Bustingorry, qui ont implémenté le code pour les interfaces au dépiégeage.

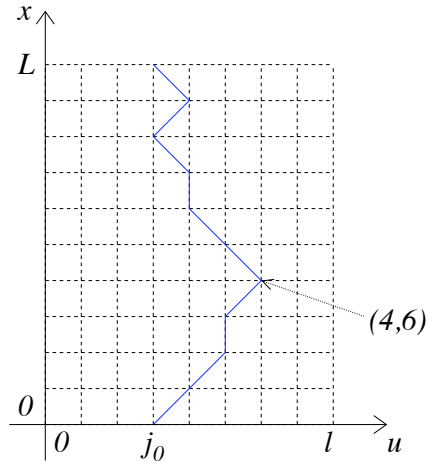


FIGURE 3.2 – La ligne bleue représente le chemin de plus basse énergie : il part de  $j_0 = 3$ . Le maximum est atteint en  $i = 4$  et sa valeur est  $j_4 = 6$ . Si  $(j_i)_{0 \leq i \leq L}$  est la suite des hauteurs visitées par le polymère, on retranche la valeur moyenne spatiale  $\sum_{i=0}^{L-1} j_i / L$  pour obtenir le maximum de la hauteur relative  $h^1$ .

direction du champ de hauteur), nous travaillons avec des conditions périodiques en identifiant les sites  $(i, 0)$  et  $(i, \ell)$  pour tout  $0 \leq i \leq L$ .

Une configuration  $\mathcal{C}$  de la ligne élastique est donnée par l'ensemble des sites  $(i, j)$  visités. Comme nous sommes dans la limite élastique, le chemin ne peut pas faire de boucles ou de retour en arrière. Cela signifie que pour un chemin donné  $\mathcal{C}$ , il ne correspond qu'une hauteur  $j$  à l'abscisse  $i$ . Plutôt que de prendre en compte le hamiltonien (3.5) directement sur réseau, nous nous affranchissons du terme élastique par la contrainte métrique : la ligne élastique au site  $(i, j)$  ne peut que passer par l'un des sites  $(i + 1, j - 1)$ ,  $(i + 1, j)$  ou  $(i + 1, j + 1)$ . Cette contrainte métrique impose un saut d'au plus une unité, et rend donc d'une manière effective de l'énergie élastique. Cette élasticité effective n'est pas harmonique, elle reste néanmoins de courte portée. Les propriétés auto-affines ne sont pas changées, et en particulier, l'exposant de rugosité est le même.

Sous ces conditions l'énergie d'une configuration  $\mathcal{C}$  est donnée par la somme

des variables de désordre des sites visités :

$$E(\mathcal{C}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} V_{ij}. \quad (3.30)$$

Ainsi nous nous ramenons au problème bien connu du polymère dirigé en milieu aléatoire. La différence avec les définitions standards tient uniquement au fait qu'on autorise des sauts  $-1, 0, +1$  alors que l'usage est de définir le polymère dirigé sur réseau carré avec des sauts vers le nord ou vers l'est. Si l'on regarde le réseau carré suivant sa première bissectrice, alors ceci revient (avec un facteur d'échelle  $1/\sqrt{2}$ ) à autoriser les sauts  $-1, +1$  uniquement. Cette différence n'affecte pas les propriétés auto-affines du polymère.

La stratégie pour trouver le chemin de plus basse énergie pour un échantillon de désordre donné est une construction récursive du chemin (voir par exemple [105] avec  $T = 0$ ). Si l'on note  $E(i, j)$  l'énergie du chemin optimal arrivant en  $(i, j)$ , alors la construction récursive s'écrit :

$$E(i+1, j) = \min(E(i, j-1), E(i, j), E(i, j+1)) + V_{(i+1)j}. \quad (3.31)$$

En imposant la périodicité, on est ainsi capable de trouver le chemin optimal  $\mathcal{C}_{j_0}^*$  dont l'origine et l'arrivée sont en  $(0, j_0) = (L, j_0)$ . Le chemin de plus basse énergie  $\mathcal{C}^*$  est déduit en minimisant l'énergie  $E(\mathcal{C}_{j_0}^*)$  sur tous les points de départ/arrivée  $0 \leq j_0 \leq \ell$ . Il faut alors choisir l'extension latérale  $\ell$  de la bonne façon. Pour le cas "variété élastique", on s'attend à ce que les fluctuations soit d'ordre  $L^\zeta$ . Ainsi on doit choisir  $\ell \gtrsim L^\zeta$  pour explorer les régions corrélées. Dans nos simulations nous avons pris  $\ell = L$  de façon à vérifier cette hypothèse. En pratique l'échantillon de désordre est un tore dont le trou central se réduit à un point : c'est un donut joufflu. D'un autre côté, pour la "structure périodique" (deuxième cas) nous prenons une largeur  $\ell \ll L$  : dans ce cas l'échantillon torique ressemble à un cerceau et la ligne élastique peut s'enrouler plusieurs fois autour.

Une fois le chemin échantillonné  $\mathcal{C}^* = \{(i, j_i), 0 \leq i \leq L\}$ , on dresse l'histogramme  $P_{\zeta_{\text{eq}}}(h_m, L)$  du maximum de la hauteur relative empirique du système de taille  $L$  :

$$h_m \equiv \max_{0 \leq i \leq L} \left[ j_i - \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} j_k \right]. \quad (3.32)$$

### 3.3.2 Distribution d'échelles numériques

Loi d'échelle en  $L^\zeta$

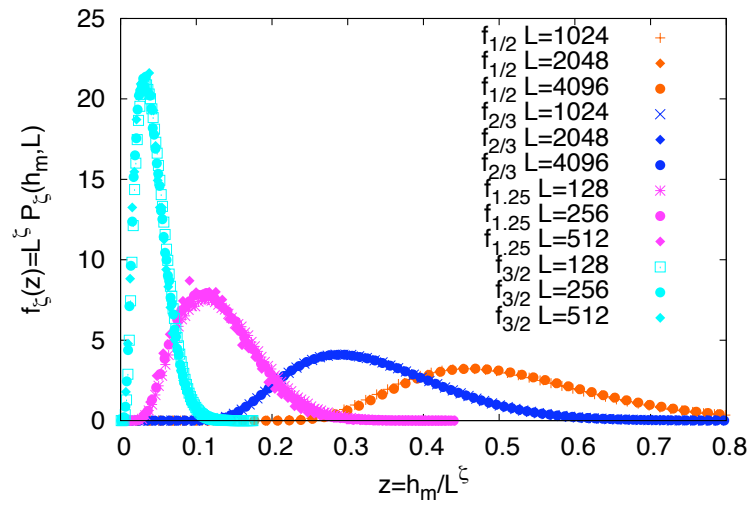


FIGURE 3.3 – Fonctions d'échelle  $f_\zeta(z)$  obtenues avec la mise à l'échelle  $L^\zeta$  des histogrammes numériques  $P_\zeta(h_m, L)$  avec les exposants  $\zeta$  du tableau 3.1. Pour les systèmes à l'équilibre, les données numériques sont tirées d'échantillons de taille  $L = 1024, 2048, 4096$  (avec un nombre d'échantillons  $> 10^6$ ). Au dépiégeage les tailles accessibles sont  $L = 128, 256, 512$  (avec un nombre d'échantillons d'ordre  $10^5$  pour les deux premières tailles, et  $10^4$  pour  $L = 512$ ).

Sur la figure 3.3, on observe que les distributions  $P_\zeta(h_m, L)$  obtenues numériquement pour les différentes tailles sont en accord avec la loi d'échelle

$$\boxed{P_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{L^\zeta} f_\zeta\left(\frac{h_m}{L^\zeta}\right)}, \quad (3.33)$$

avec des fonctions d'échelle  $f_\zeta$  qui dépendent continûment de l'exposant de rugosité  $\zeta$ . On constate que lorsque  $\zeta$  croît, la distribution d'échelle  $f_\zeta(z)$  tend

à devenir de plus en plus piquée, avec un pic qui se rapproche de l'origine. La question centrale est : peut-on trouver un régime d'échelle qui permette de comparer ces distributions sur un pied d'égalité ? Pour tenter d'y répondre, nous analysons les résultats à la lumière des changements d'échelle déjà introduites pour les interfaces gaussiennes.

Loi d'échelle à moyenne fixée

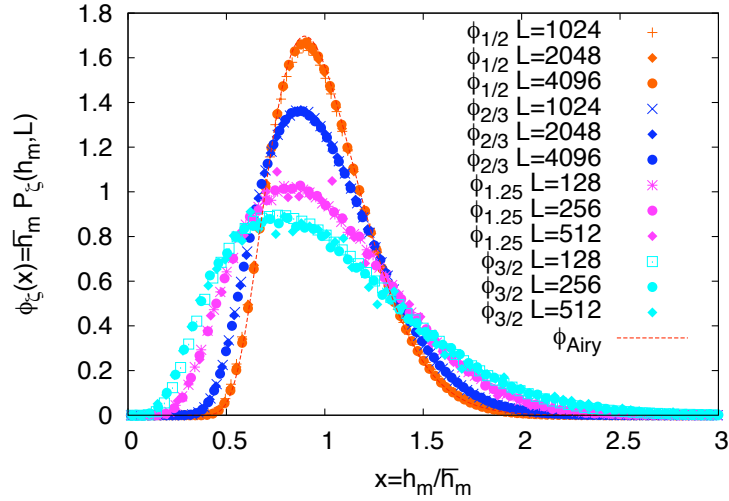


FIGURE 3.4 – Fonctions d'échelle  $\phi_\zeta(x)$  à moyenne fixée à 1 obtenues à partir des histogrammes numériques  $P_\zeta(h_m, L)$ . Pour les systèmes à l'équilibre, les distributions sont obtenues à partir des tailles  $L = 1024, 2048, 4096$ . Au dépiégeage, les échantillons sont obtenus pour  $L = 128, 256, 512$ .

La valeur moyenne de la hauteur maximale sur le désordre étant

$$\bar{h}_m = \int_0^\infty h_m P_\zeta(h_m, L) dh_m, \quad (3.34)$$

nous vérifions en figure 3.4 le comportement d'échelle

$$P_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{\bar{h}_m} \phi_\zeta \left( \frac{h_m}{\bar{h}_m} \right). \quad (3.35)$$

Combinée à (3.33) cette relation montre la proportionnalité entre  $\bar{h}_m$  et  $L^\zeta$ ,

$$\bar{h}_m = a_\zeta L^\zeta, \quad (3.36)$$

avec un coefficient qui dépend, outre  $\zeta$ , des détails du modèle. Encore une fois, les distributions d'échelle  $\phi_\zeta$  diffèrent selon le cas.

Notons que pour le cas de la structure périodique à l'équilibre  $\zeta = 1/2$ , des effets de taille finie sont appréciables pour les tailles  $L = 128, 256, 512$  (non représentées sur la figure), et en comparant avec le cas variété à l'équilibre, on constate que des effets de taille finie sont encore présents pour les tailles  $L = 1024, 2048, 4096$  : les distributions d'échelle  $\phi_{1/2}$  ne se superposent pas aussi bien que  $\phi_{2/3}$ . Nous reviendrons sur ces effets plus loin.

Une conclusion est que les données pour les différents cas ne se superposent pas avec cette échelle à moyenne fixée. Ainsi les différents modèles produisent des statistiques différentes de la valeur maximale de la hauteur relative.

### Loi d'échelle à moyenne et variance fixées

Les données sont en accord avec une loi d'échelle du type

$$P_\zeta(h_m, L) = \frac{1}{\sigma} \psi_\zeta \left( \frac{h_m - \bar{h}_m}{\sigma} \right), \quad (3.37)$$

où la variance est donnée par

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (h_m - \bar{h}_m)^2 P_\zeta(h_m, L) dh_m. \quad (3.38)$$

Associée à (3.33), cette relation d'échelle montre que

$$\sigma = b_\zeta L^\zeta, \quad (3.39)$$

où encore une fois, le coefficient  $b_\zeta$  dépend des détails du modèle.

Sur la figure 3.5 on peut constater que les courbes sont très proches les unes des autres mais ne semblent pas coïncider pour des valeurs de  $\zeta$  différentes, comme on peut le constater en observant finement la queue gauche



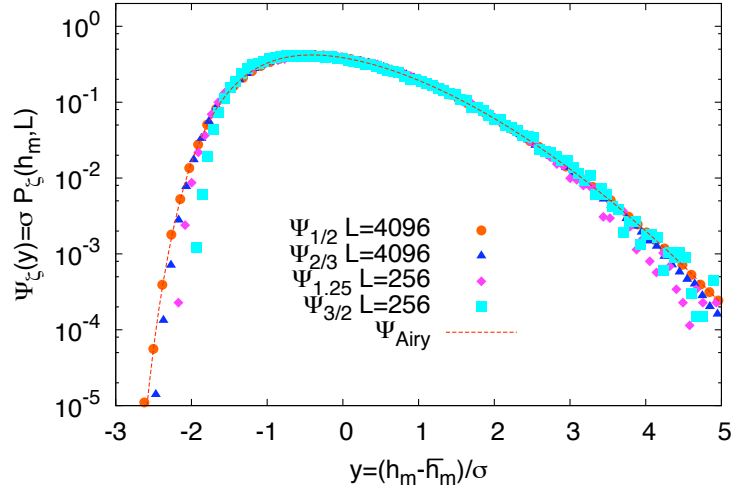


FIGURE 3.5 – Fonctions d'échelle  $\psi_\zeta(y)$  en échelle log-linéaire. Par souci de clarté du graphe, du fait de la proximité des courbes, nous ne montrons qu'une seule taille pour chaque cas (les autres tailles se superposant). Pour l'équilibre nous prenons la plus grande taille  $L = 4096$  ( $4.3 \times 10^6$  échantillons). Pour le dépiégeage, nous prenons la taille  $L = 256$  pour optimiser la statistique ( $10^5$  échantillons) et les effets de taille finie.

des distributions par exemple. Ainsi le changement de variables linéaire le plus général indique que les distributions du maximum dépendent de  $\zeta$  de façon continue. Toutefois, avec cette échelle qui fixe le premier et le second moments à respectivement 0 et 1, les différences sont minimales. En particulier les queues des distributions semblent avoir des comportements similaires, et nous étudierons le comportement asymptotique  $x \rightarrow \infty$  lors de la comparaison aux interfaces gaussiennes. Notons dès à présent que la distribution d'Airy correctement rescalée ( $\equiv \tilde{\psi}_{1/2}$ ) semble se superposer parfaitement à la fonction d'échelle pour la structure périodique à l'équilibre  $\psi_{1/2}$ , confirmant l'universalité de la distribution d'Airy [164].

## 3.4 Comparaison des interfaces désordonnées avec les interfaces gaussiennes

Des travaux de Rosso *et al.* ont montré que les distributions de la largeur carrée  $w^2[u^1(x), L]$  des interfaces en milieu désordonné  $u^1(x)$  et au dépiégeage étaient différentes des distributions correspondantes pour les interfaces gaussiennes  $h^1(x)$ , quoique ces dernières fournissent une bonne approximation [160].

Nous établissons ici la comparaison pour la distribution du maximum  $h_m$  de la hauteur relative.

### 3.4.1 Échantillonnage numérique des interfaces gaussiennes

Afin de préparer une comparaison des résultats obtenus pour les interfaces en milieu désordonné, nous générons les distributions des interfaces gaussiennes numériquement. Pour échantillonner, nous construisons l'interface par le développement de Fourier (3.9) tronquée au mode  $k = L$  pour une interface de longueur  $L$ . Ce choix pour la troncature de la série est motivé par le fait que les modes supérieurs concernent des fluctuations d'ordre  $1 \ll L^\zeta$  pour les tailles considérées, et en pratique, les fonctions d'échelle se superposent pour différentes tailles  $L$ . Malgré cela des effets de taille finie sont présents, mais sont en général négligeables devant les effets de taille finie des interfaces en milieu désordonné.

### 3.4.2 Comparaisons des distributions $\phi$

Pour s'affranchir des détails des modèles, nous comparons les distributions d'échelle  $\phi_\zeta(x)$  aux distributions issues des interfaces gaussiennes correspondantes  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$ . Une première observation en figure 3.6 montre que les distributions  $\phi_\zeta(x)$  sont très proches de leur analogue gaussien  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$ , en particulier à l'équilibre pour les variétés et les structures périodiques. Pour ces dernières à l'équilibre on s'attend à avoir l'égalité stricte  $\phi_{1/2}(x) = \tilde{\phi}_{1/2}(x) = \phi_{\text{Airy}}$  à la limite où  $L \rightarrow \infty$ . En effet ce cas particulier est équivalent à un modèle SOS, qui est équivalent à grande distance à une marche aléatoire [157]. Ceci confirme

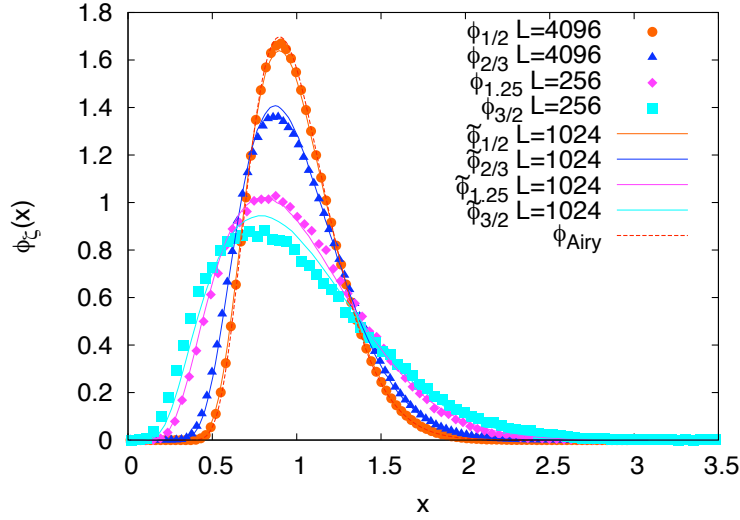


FIGURE 3.6 – Comparaison entre les fonctions d'échelle  $\phi_\zeta(x)$  des interfaces en milieu désordonné (les symboles) à celles  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$  des interfaces gaussiennes (les courbes en traits pleins). En traits discontinus, nous avons représenté la distribution d'Airy  $\phi_{\text{Airy}}(x)$ , mise à l'échelle par rapport à sa valeur moyenne  $\sqrt{\pi/8}$  : elle se distingue difficilement de  $\tilde{\phi}_{1/2}(x)$  et de  $\phi_{1/2}(x)$  comme attendu.

l'universalité de la distribution d'Airy pour différents types de modèles SOS montrée par Schehr et Majumdar [164].

Pour le régime du dépiégeage, des arguments du groupe de renormalisation fonctionnelle [160, 147] montrent que les distributions ne peuvent pas être identiques, au moins à l'ordre le plus bas dans un développement en  $\epsilon = 4 - d$  – avec ici  $d = 3$ . Afin de confirmer cette approche théorique, nous devons vérifier que les légères différences que nous voyons entre les distributions ne peuvent pas être attribuées à des effets de taille finie. Pour cela, un moyen simple est d'étudier l'évolution de la différence des distributions cumulées avec la taille  $L$ , présentée dans le prochain paragraphe.

Asymptote  $x \rightarrow \infty$

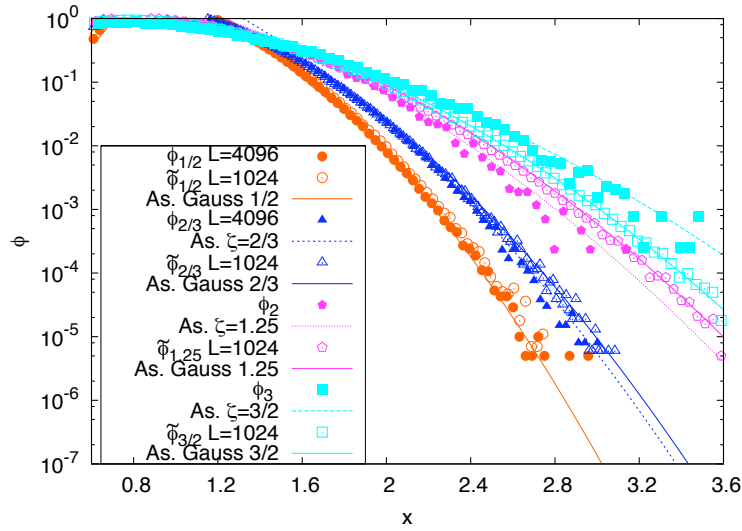


FIGURE 3.7 – Queues  $x \gg 1$  des distributions  $\phi_\zeta(x)$  et  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$  issues des données numériques. Nous avons représenté les asymptotes gaussiennes exactes. Les amplitudes  $D'$  et  $E'$  de l'équation (3.23) sont déduites de  $D$  et  $E$  grâce à une estimation de  $\tilde{\alpha}_\zeta = \langle h_m \rangle / L^\zeta$  à partir des données, sauf pour  $\zeta = 2/3$  où nous avons ajusté la valeur de  $D'$  uniquement. Les asymptotes des données désordonnées sont ajustées avec le comportement dominant gaussien  $\exp(-D'_\zeta x^2)$ .

En figure 3.7 nous examinons la queue  $x \gg 1$  de ces distributions. Les résultats exacts de la section 3.2 se superposent aux données numériques des interfaces gaussiennes. Les données des interfaces en milieu désordonné sont en accord avec un comportement asymptotique dominant du même type  $\phi_\zeta(x) \sim \exp(-D'_\zeta x^2)$ , quoiqu'une évaluation précise du coefficient  $D'_\zeta$  semble délicate. Pour les structures périodiques, on connaît exactement la distribution et son comportement asymptotique, et on constate que les données se superposent très bien aux prédictions théoriques. Pour la variété à l'équilibre (le polymère dirigé), la queue est très proche de la queue gaussienne correspondante, dont on connaît exactement le comportement (3.23).

Notons également deux “relations d’ordre”. Tout d’abord pour le cas variété à l’équilibre  $\zeta = 2/3$  et au dépiégeage  $\zeta = 1.25$ , on constate que la queue des données désordonnées est *en dessous* des asymptotes exactes des interfaces gaussiennes correspondantes. Pour les structures périodiques à l’équilibre et au dépiégeage, c’est l’inverse, les queues des distributions des données désordonnées sont *au-dessus* des asymptotes exactes des interfaces gaussiennes correspondantes. Nous quantifierons cette remarque dans le dernier paragraphe de cette section.

### 3.4.3 Comparaison des distributions cumulées

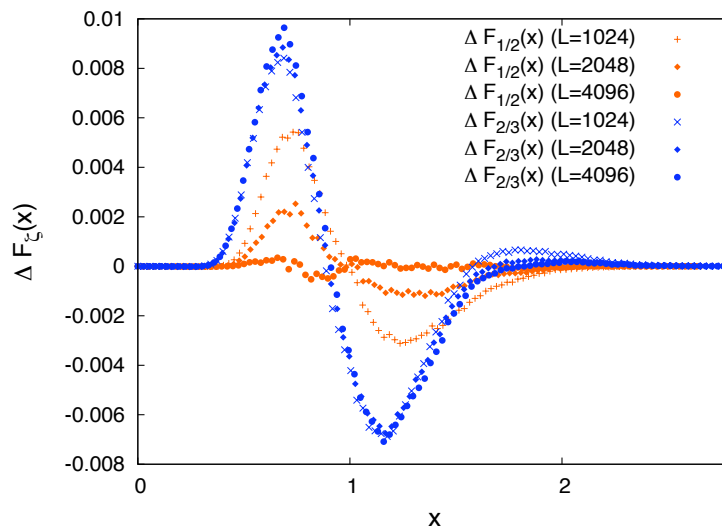


FIGURE 3.8 – Différence des distributions cumulées  $\Delta F_\zeta(x)$  obtenues pour différentes tailles  $L$  pour la configuration d’équilibre pour les structures périodiques  $\zeta = 1/2$  et les variétés élastiques  $\zeta = 2/3$ .

Les distributions cumulées correspondant aux densités de probabilité  $\phi_\zeta$

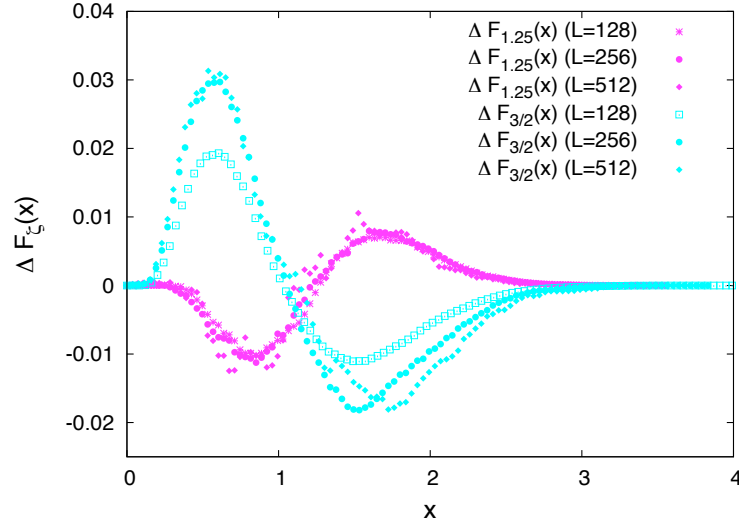


FIGURE 3.9 – Différence des distributions cumulées  $\Delta F_\zeta(x)$  obtenues pour différentes tailles  $L$  pour la configuration de dépiégeage pour les structures périodiques  $\zeta = 1/2$  et les variétés élastiques  $\zeta = 2/3$ .

et  $\tilde{\phi}_\zeta$  sont définies par

$$F_\zeta(x) = \int_0^x \phi_\zeta(x') dx', \quad L = \begin{cases} 1024, 2048, 4096 & \text{à l'équilibre,} \\ 128, 256, 512 & \text{au dépiégeage,} \end{cases} \quad (3.40a)$$

$$\tilde{F}_\zeta(x) = \int_0^x \tilde{\phi}_\zeta(x') dx', \quad L = 4096. \quad (3.40b)$$

Les distributions cumulées vérifient  $F_\zeta(0) = \tilde{F}_\zeta(0) = 0$  et  $F_\zeta(\infty) = \tilde{F}_\zeta(\infty) = 1$ . Pour les interfaces gaussiennes, nous prenons la taille maximale  $L = 4096$  à notre disposition, taille pour laquelle les effets de taille finie sont négligeables pour chacun des cas traités. Pour les interfaces désordonnées, nous faisons varier la taille  $L$  comme indiqué ci-dessus. Ainsi, nous comparons les différences  $\Delta F_\zeta(x) = F_\zeta(x) - \tilde{F}_\zeta(x)$  pour plusieurs tailles  $L$  pour les interfaces

désordonnées pour l'état d'équilibre en figure 3.8 et pour le dépiégeage en figure 3.9. Les données semblent être en accord avec  $\Delta F_\zeta \neq 0$  pour le régime du dépiégeage, *i.e.* pour  $\zeta_{\text{dep,v}} = 1.25$  et  $\zeta_{\text{dep,sp}} = 1.5$ , ce qui confirme l'argument théorique évoqué plus haut. Pour le régime d'équilibre, alors que la différence semble tendre vers 0 pour le cas des structures périodiques  $\Delta F_{1/2}(x) \rightarrow 0$  pour tout  $x \geq 0$  lorsque  $L \rightarrow \infty$ , on constate que  $\Delta F_{2/3}(x) \neq 0$  pour les variétés élastiques, et dont l'amplitude des différences est comparable à celle de  $\Delta F_{1.25}(x)$ .

### 3.4.4 Analyse de la gaussianité/non-gaussianité

Dans ce paragraphe, nous procédons à une analyse numérique basée sur les deux premiers moments des distributions  $P_\zeta(h_m, L)$  et de leurs analogues gaussiennes  $\tilde{P}_\zeta(h_m, L)$ . Plus exactement, nous analysons l'évolution avec  $L$  des coefficients

$$a_\zeta = \frac{\overline{h_m}}{L^\zeta}, \quad (3.41a)$$

$$b_\zeta = \frac{\sqrt{\overline{(h_m - \overline{h_m})^2}}}{L^\zeta}, \quad (3.41b)$$

pour les moyennes sur les réalisations des interfaces en milieu désordonné (avec  $P_\zeta(h_m, L)$ ) et des coefficients déjà introduits dans la section 3.2

$$\tilde{a}_\zeta = \frac{\langle h_m \rangle}{L^\zeta}, \quad (3.41c)$$

$$\tilde{b}_\zeta = \frac{\sqrt{\langle (h_m - \langle h_m \rangle)^2 \rangle}}{L^\zeta}, \quad (3.41d)$$

pour les moyennes sur les réalisations des interfaces gaussiennes (avec  $\tilde{P}_\zeta(h_m, L)$ ).

### Comparaison à la même taille $L$ pour les deux types de données

Prenons l'hypothèse que le champ de hauteurs relatives de l'interface  $u^1(x)$  soit distribué identiquement au champ de hauteurs relatives gaussiennes  $h^1(x)$  à un coefficient de dilatation  $\chi$  près :

$$u^1(x) \equiv \chi h^1(x). \quad (3.42)$$

	$\zeta_{\text{eq,sp}} = 1/2$	$\zeta_{\text{eq,v}} = 2/3$	$\zeta_{\text{dep,v}} = 1.25$	$\zeta_{\text{dep,sp}} = 3/2$
$L = 128$	-0.0975	0.0312	0.0358	-0.0542
$L = 256$	-0.0676	0.0294	0.0385	-0.0868
$L = 512$	-0.0464	0.0280	0.0357	-0.1002
$L = 1024$	-0.0323	0.0246		
$L = 2048$	-0.0227	0.0219		
$L = 4096$	-0.0160	0.0194		

TABLE 3.2 – Liste des écarts relatifs  $e$  définis par la formule (3.45). Pour la première colonne  $\zeta_{\text{eq,sp}} = 1/2$ , les valeurs des coefficients gaussiens sont données par les deux premiers moments de la distribution d’Airy  $M_1 = \sqrt{\pi/8}$  et  $M_2 = 5/12$  par  $\tilde{a}_{1/2} = M_1 = \sqrt{\pi/8}$  et  $\tilde{b}_{1/2} = \sqrt{M_2 - M_1^2} = \sqrt{5/12 - \pi/8}$ . Pour les autres, nous avons évalué les coefficients  $a_\zeta$ ,  $b_\zeta$  et  $\tilde{a}_\zeta$ ,  $\tilde{b}_\zeta$  pour chaque taille indiquée à partir des données numériques (interfaces désordonnées et gaussiennes).

La contrainte de moyenne spatiale nulle empêche un terme de translation. Ainsi le maximum du champ  $u^1(x)$  devrait être distribué comme le maximum du champ  $h^1(x)$  multiplié par le coefficient  $\chi$ . En prenant la moyenne sur chaque ensemble, on doit avoir

$$\overline{h_m} = \chi \langle h_m \rangle \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{a_\zeta}{\tilde{a}_\zeta}. \quad (3.43)$$

De même en calculant la variance de chaque ensemble il vient

$$\overline{(h_m - \overline{h_m})^2} = \chi^2 \langle (h_m - \langle h_m \rangle)^2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \chi = \frac{b_\zeta}{\tilde{b}_\zeta}. \quad (3.44)$$

Ainsi sous l’hypothèse que le champ de hauteurs désordonnées est identiquement distribué au champ de hauteur gaussien à un coefficient de dilatation près, nous en déduisons que les rapports des coefficients  $a_\zeta/\tilde{a}_\zeta$  et  $b_\zeta/\tilde{b}_\zeta$  doivent être identiques.

Dans le tableau 3.2, nous avons représenté l’écart relatif défini par

$$e_\zeta = \frac{(a_\zeta/\tilde{a}_\zeta) - (b_\zeta/\tilde{b}_\zeta)}{\min(a_\zeta/\tilde{a}_\zeta, b_\zeta/\tilde{b}_\zeta)}, \quad (3.45)$$



en fonction de la taille  $L$ , lorsque nous comparons les données désordonnées aux données gaussiennes pour la même taille  $L$ . Une première observation est que pour les deux premières colonnes concernant le régime d’équilibre, l’écart relatif décroît en magnitude avec la taille  $L$ , signe d’effets de taille finie. Nous reviendrons sur ce point en dessous. La seconde observation concerne le signe de  $e$ . Pour les structures périodiques, il est négatif, et positif pour la variété élastique. Nous pouvons relier ce comportement à notre remarque précédente concernant la “relation d’ordre” entre les queues des données désordonnées et les asymptotes exactes des données gaussiennes correspondantes (voir le paragraphe 3.4.2 et la figure 3.7). Si l’on compare les distributions  $\phi_\zeta(x)$  pour les tailles  $L$  du tableau aux distributions des interfaces gaussiennes  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$  dans la limite  $L \rightarrow \infty$ , nous pouvons comparer la première quantité possiblement non identique : la variance. En effet la moyenne  $\bar{x} = \langle x \rangle = 1$  pour les deux types d’interfaces. En revanche les variances sont reliées à l’écart  $e_\zeta$  :

$$\overline{(x - \bar{x})^2} = \left( \frac{b_\zeta}{a_\zeta} \right)^2 \quad (\text{interfaces désordonnées}), \quad (3.46a)$$

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \left( \frac{\tilde{b}_\zeta}{\tilde{a}_\zeta} \right)^2 \quad (\text{interfaces gaussiennes}). \quad (3.46b)$$

Ainsi un écart  $e_\zeta > 0$  indique que la variance associée à  $\phi_\zeta(x)$  (3.46a) est inférieure à la variance associée à  $\tilde{\phi}_\zeta(x)$  (3.46b), et cela est vérifié pour les variétés. Ces distributions ayant une moyenne unité et étant monotones décroissantes pour  $x > 1$ , les queues de  $\phi_\zeta$  des variétés (pour  $L$  fini) sont *en dessous* des asymptotes exactes de  $\tilde{\phi}_\zeta$  (pour  $L \rightarrow \infty$ ). Et inversement pour les structures périodiques :  $e_\zeta > 0$  et les queues (pour  $L$  fini) sont *au-dessus* des asymptotes exactes gaussiennes.

### Comparaison aux données gaussiennes avec $L = 4096$

Nous présentons maintenant une comparaison pour laquelle nous prenons les données exactes ou celles pour lesquelles les effets de taille finie sont négligables pour les interfaces gaussiennes, à l’instar des comparaisons des distributions cumulées où nous faisons varier uniquement la taille  $L$  des données désordonnées.

En figure 3.10 nous présentons les écarts calculés lorsqu’on prend la valeur exacte des coefficients  $\tilde{a}_\zeta$  et  $\tilde{b}_\zeta$ , ou l’évaluation numérique sur la plus grande taille  $L = 4096$  à notre disposition pour les données gaussiennes. Pour cette

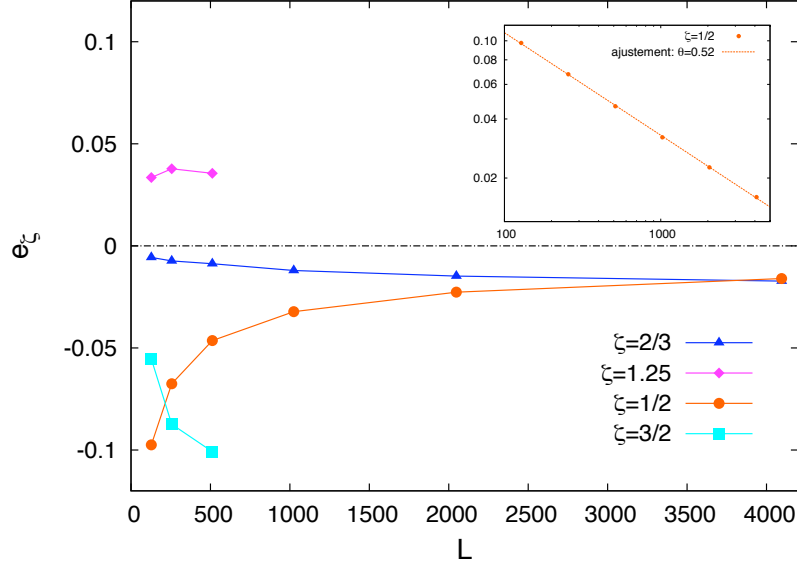


FIGURE 3.10 – Ecart  $e_\zeta$  pour chaque cas lorsqu'on prend les valeurs exactes des coefficients  $\tilde{a}_{1/2}$  et  $\tilde{b}_{1/2}$  et les valeurs minimisant les effets de taille finie obtenues pour la taille  $L = 4096$  pour  $\tilde{a}_{2/3}, \tilde{a}_{1.25}, \tilde{a}_{3/2}$  et  $\tilde{b}_{2/3}, \tilde{b}_{1.25}, \tilde{b}_{3/2}$ . En échelle log-log dans l'insert nous montrons la convergence en loi de puissance pour  $e_{1/2}$ .

valeur, les données gaussiennes présentent des effets de taille finie négligeables. Ainsi nous étudions effectivement la convergence des données désordonnées, alors que dans le paragraphe précédent, les effets de taille finie des données gaussiennes se combinaient de manière non triviale aux données désordonnées.

La conclusion que nous tirons de cette analyse est que seul le cas de la structure périodique à l'équilibre converge vers le cas des données gaussiennes associées : les données montrent que  $e_{1/2}$  tend vers 0 à mesure que  $L$  augmente. Cette convergence est lente, et dans l'insert nous constatons qu'une convergence en loi de puissance  $e_{1/2} \sim L^{-\theta}$  avec  $\theta \simeq 0.5$  est pertinente. Pour les trois autres cas des variétés élastiques à l'équilibre et au dépiégeage et des structures périodiques au dépiégeage, nous remarquons que les écarts convergent vers des valeurs différentes de zéro, ce qui montre que les interfaces désordonnées sont bien différentes des données gaussiennes pour ces cas.

La variété élastique à l'équilibre est équivalente au polymère dirigé en milieu aléatoire. Or nous allons voir au chapitre suivant que le polymère dirigé en milieu aléatoire possède des caractéristiques non-gaussiennes, comme par exemple la distribution du point d'arrivée pour un polymère de taille  $L$  avec une condition de bord libre pour l'une de ses extrémités. Pour les conditions aux bords périodiques, la distribution de l'énergie du polymère est également non-gaussienne, et reliée à la distribution des valeurs propres d'une certaine classe de matrices aléatoires.

### 3.4.5 Conclusion

La conclusion que nous pouvons dresser sur la base de ces analyses numériques est que les interfaces gaussiennes fournissent une approximation simple à réaliser et dont on peut quantifier l'erreur relative à l'aide de notre écart relatif  $e_\zeta$ . Dans le cas particulier  $\zeta = 1/2$  des structures périodiques à l'équilibre, cette approximation devient une relation exacte à la limite  $L \rightarrow \infty$ . Pour le polymère dirigé, équivalent à la variété élastique en milieu désordonné à l'équilibre, les données semblent indiquer que l'interface gaussienne associée ne décrit pas *exactement* l'interface désordonnée à la limite  $L \rightarrow \infty$ . Une vérification de cette conjecture est une motivation supplémentaire pour une meilleure compréhension au niveau théorique.

---

## Statistiques du maximum dans la phase de croissance et le modèle de pastèques

---

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la statistique d'extrêmes d'une interface KPZ dans le régime de croissance. Une expérience récente de Takeuchi et Sano [172], dont une image a été reproduite en figure 4.1, a révélé que l'interface en croissance entre deux phases turbulentes de cristaux liquides appartient à la classe d'universalité KPZ. De plus les auteurs de ce travail expérimental montrent que les fluctuations du rayon  $R(t)$ , dans le régime des grands temps  $t \gg 1$ , sont données par la distribution de Tracy-Widom [175, 176] de l'ensemble gaussien unitaire GUE [132] (*cf.* annexe A), en accord avec les prédictions théoriques de Prähofer et Spohn [144, 145].

Dans une première partie, nous présentons les travaux théoriques concernant les interfaces KPZ en géométrie courbe, qui possèdent la propriété d'être en phase de croissance indéfiniment. Dans le cas de l'expérience mentionnée, cette phase s'achève lorsque l'interface atteint les limites du substrat. Nous décrivons le modèle PNG de Prähofer et Spohn [144, 145], ainsi que celui de Johansson [100] équivalent à un modèle spécifique de polymère sur réseau. Nous discutons les résultats de ces auteurs concernant les fluctuations asymptotiques de l'interface. Nous donnons également la distribution asymptotique du maximum à la lumière de résultats de Baik et Deift [8].

Dans une seconde partie nous introduisons un modèle de mouvements browniens conditionnés à ne pas se croiser, que nous appelons modèle de *pas-*

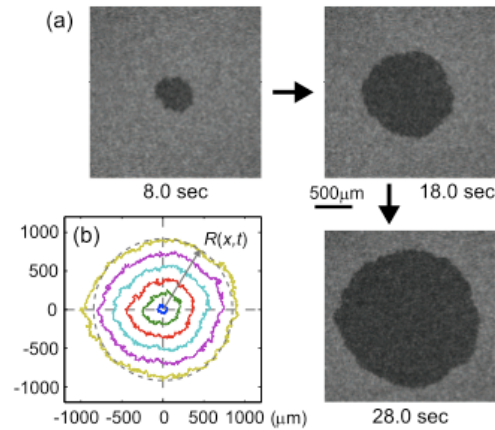


FIGURE 4.1 – Identification de l’interface KPZ en croissance dans un système expérimental de cristaux liquides turbulents : (a) progression isotrope de la phase désordonnée DSM2 (en noir) dans la phase désordonnée DSM1 (en gris), et (b) profils du rayon  $R(t)$  de l’interface pour différents temps. Image provenant de l’expérience de Takeuchi et Sano [172], pour laquelle ils ont identifié la distribution de Tracy-Widom pour la distribution des fluctuations d’échelle du rayon  $R(t)$ . Reproduit avec l’autorisation de Kazumasa Takeuchi.

*tèques* en référence à la forme typique des trajectoires d’espace-temps de ce processus stochastique. Par des méthodes d’intégrale de chemin, nous calculons la distribution jointe du maximum et du temps auquel il est atteint. Dans le cadre des interfaces, cela revient à calculer la distribution jointe du maximum, et de sa position, et pour le polymère avec une extrémité libre, cela correspond à la distribution jointe de l’énergie de l’état fondamental et de la position de l’extrémité libre.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été annoncés dans une lettre [149] et détaillés dans la version longue [150]. Ces deux articles sont reproduits en annexe B.2 et B.3. Nous n’avons pas repris l’intégralité des résultats et détails de calcul dans ce chapitre, afin de privilégier une approche complémentaire et pédagogique. A ce titre, nous renvoyons dans le texte le lecteur à cette seconde référence.

Notons également qu’un calcul exact de la distribution jointe asymptotique a été proposé récemment par Moreno Flores, Quastel et Remenik [73].

## 4.1 Un modèle d'interface dans la phase de croissance

Nous introduisons dans cette section un modèle de croissance à nucléations multiples [76, 82], abrégé PNG selon l'appellation anglo-saxonne *Polynuclear Growth*. Le PNG *en gouttelette* a été proposé par Prähofer et Spohn [144]. Ce modèle d'interface à géométrie circulaire appartient à la classe d'universalité KPZ et possède la particularité de rester pour tout temps dans le régime de croissance, différent du régime d'équilibre auparavant discuté au chapitre 2. Ces auteurs ont identifié la distribution des fluctuations asymptotiques de hauteur de l'interface à la distribution de Tracy-Widom  $F_{\text{GUE}}$  [175, 176]. Celle-ci correspond à la distribution asymptotique des fluctuations de la plus grande valeur propre de matrices aléatoires de l'ensemble gaussien unitaire [132].

Premièrement nous donnons une description de la dynamique de ce modèle dans l'espace-temps continu. La dynamique est reliée au processus de *chemins de Hammersley* [91], trouvant lui même une origine dans le problème d'Ulam [179] concernant la statistique de la plus longue sous-suite croissante d'une permutation aléatoire. Ces liens permettent d'utiliser les résultats obtenus par Baik, Deift et Johansson [6], afin de calculer la distribution des hauteurs dans le régime de croissance. En second lieu nous présenterons un modèle du PNG de Johansson défini dans l'espace-temps discret [100]. Ce modèle définit en parallèle une version particulière du polymère dirigé en milieu aléatoire à température nulle. Le PNG continu ou le PNG discret ont la particularité de converger au temps long vers un processus stationnaire nommé processus d'Airy<sub>2</sub> [145, 101]. Ce processus limite intervient pour une certaine classe de processus déterminantaux, en particulier les systèmes de trajectoires non-intersectantes, et sera le fil conducteur de ce chapitre. En combinant ces résultats avec ceux de Baik et Rains [8], nous serons en mesure d'identifier la statistique du maximum du PNG en gouttelette.

Cette première section est essentiellement bibliographique, et vise à présenter d'une part le processus asymptotique d'une interface KPZ en géométrie circulaire en croissance, et les liens étroits avec le modèle du polymère dirigé en milieu aléatoire à température nulle. En plus des articles originaux [6, 7, 8, 100, 101, 144, 145], les notes de cours de Majumdar [121] ou de Ferrari [61] donnent de nombreux détails pour des développements plus poussés en physique ou dans les mathématiques associées.

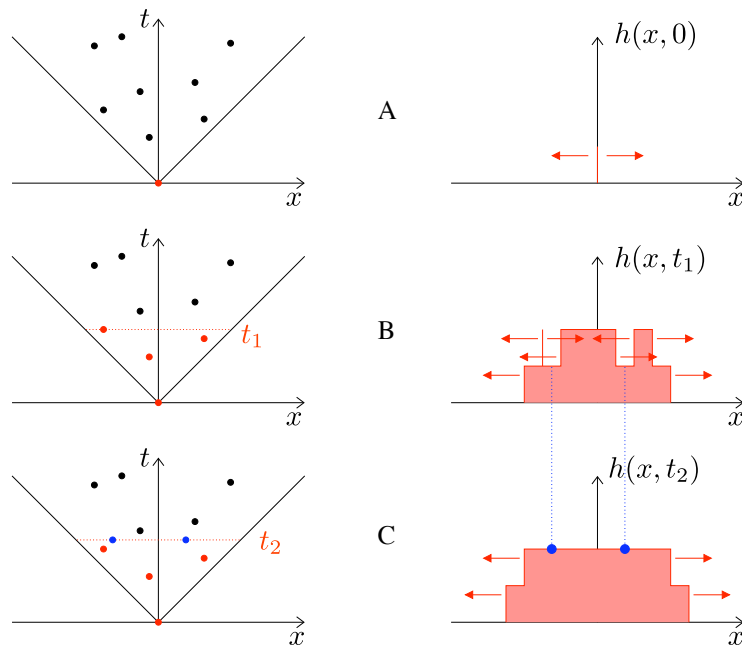


FIGURE 4.2 – Description du modèle PNG. En colonne de gauche, un échantillon des sites de nucléations dans le plan  $(x, t)$  restreint au cône  $|x| \leq t$ . En colonne de droite, le profil de l'interface  $h(x, t)$ . **A** : À  $t = 0$  nous avons la première nucléation en  $x = 0$ . **B** : À  $t = t_1$  trois autres nucléations ont eu lieu (les sites sont coloriés en rouge à gauche), dans le même temps, les marches se propagent à vitesse unité dans les deux directions (à droite). **C** : Pour  $t = t_2$ , à droite, les marches adjacentes fusionnent en deux endroits, indiqués par des points bleus, que nous reportons dans le diagramme d'espace-temps à gauche comme des points de nucléation annexes, utilisé pour le modèle multi-couches.

### 4.1.1 Le modèle PNG en gouttelette

Le modèle PNG est un modèle de croissance d'interface dans la classe d'universalité KPZ [144, 143]. En dimensions  $1 + 1$  l'interface est décrite par la fonction de l'espace et du temps  $h(x, t)$  à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels  $(0, 1, 2, \dots)$  pour tout couple de réels  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ . La condition initiale est  $h(x, 0^-) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , voir la ligne **A** de la figure 4.2. La dynamique pour  $t \geq 0$  est composée d'une partie aléatoire : les *nucléations*.

Une nucléation en  $(x, t)$  correspond à une croissance locale d'une unité dans la direction orthogonale au substrat (l'axe des  $x$ ) :  $h(x, t) = h(x, t - \delta t) + 1$ . Les sites de nucléation dans le demi-plan  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  sont tirés aléatoirement suivant une distribution poissonnienne de densité moyenne uniforme  $\rho(x, t) = 2$ . En figure 4.2, les sites nucléés sont indiqués par des points dans les diagrammes d'espace-temps de la colonne de gauche. La deuxième partie de la dynamique concerne la progression spatiale des sites nucléés : ils s'élargissent suivant l'axe du substrat (l'axe des  $x$ ) avec une vitesse unité vers la gauche et vers la droite. Cette partie de la dynamique correspond au terme non-linéaire de l'équation KPZ. Enfin lorsque deux marches adjacentes se rencontrent, elles fusionnent : ce dernier point modélise la relaxation en remplissant les minima locaux créés par les nucléations successives. Cette dernière étape se produit en des points spécifiques du cône d'espace-temps, que nous avons repérés par deux points bleus à la ligne **C** de la figure 4.2.

Pour générer une interface en forme de gouttelette, nous restreignons les sites de nucléation au cône  $|x| \leq t$ , pour tout  $0 \leq t < \infty$ . Ainsi si l'on impose une première nucléation en  $(x, t) = (0, 0)$ , le support de l'interface au temps  $t \geq 0$  sera  $-t \leq x \leq t$ , et pour tout  $|x| > t$ ,  $h(x, t) = 0$ . La taille du support permet de définir la taille  $L$  de la gouttelette au temps  $t$  :  $L = 2t$ . Nous sommes intéressés par le régime stationnaire  $t \gg 1$ , qui reste un régime de croissance car  $L^z = (2t)^{3/2} \gg t \gg 1$ , par opposition au régime stationnaire d'équilibre  $L^z \ll t$  inaccessible pour ce modèle compte-tenu de sa définition.

## Processus de Hammersley et plus longue sous-suite croissante

Ce type de modèle de croissance est équivalent au processus de Hammersley [91, 65, 7]. Plaçons-nous dans le cône  $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, |x| \leq t\}$ , et définissons une classe de chemins dirigés rectilignes par morceaux, chaque segment devant rester dans le cône de lumière futur de sa première extrémité. Cette dernière condition assure le caractère *dirigé* du chemin. Une image commode est de considérer une particule sur une ligne qui se déplace avec une vitesse constante et inférieure à 1 (la vitesse de la lumière) entre deux virages successifs à des temps et positions aléatoires. Son diagramme d'espace-temps est une ligne brisée correspondant à un chemin dirigé. Etant donnée une réalisation des nucléations  $\{(0, 0), (x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots\}$ , les chemins ne sont autorisés à prendre un virage qu'aux sites  $(x_i, t_i)$ . Un chemin de Hammersley, qui relie l'origine  $(0, 0)$  à un point  $(x, t)$ , est l'un de ces chemins dirigés qui possèdent un nombre de sites croisés maximal, comme indiqué par le chemin en poin-



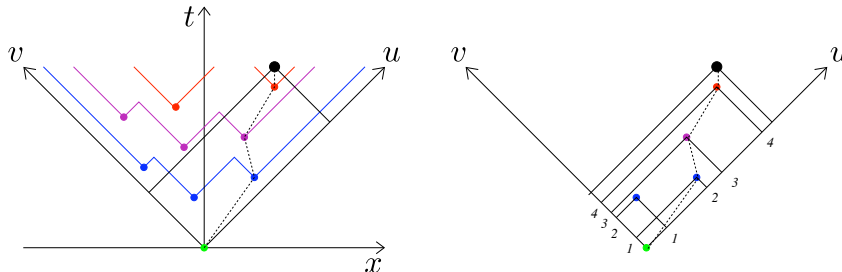


FIGURE 4.3 – Processus de Hammersley. Le chemin de Hammersley entre  $(0, 0)$  et  $(x, t)$  est en pointillés, sa “taille” est donnée par le nombre maximal de sites croisés par le chemin dirigé. Avec les axes  $u$  et  $v$ , on identifie une permutation dont la longueur de la plus longue sous-suite croissante est égale à la “taille” du polymère.

tillés sur la figure 4.3. La “taille” de ce polymère dirigé est égale au nombre de sites croisés. Comme on peut le constater sur cette figure, ce chemin n’est pas unique : pour un point d’arrivée donné, il peut exister plusieurs chemins ayant un nombre maximal de sites croisés (les deux points bleus sont équivalents). Toujours sur cette figure, en introduisant les axes  $(u, v)$ , la région d’espace-temps pertinente pour le point d’arrivée  $(x, t)$  est un rectangle, intersection du cône de lumière futur de l’origine et du cône de lumière passé du point  $(x, t)$ . Il suffit alors de considérer les sites nucléés dans ce rectangle. En excluant le point de départ (de nucléation artificielle), nous avons un nombre poissonien de sites de nucléation et leur position relative suivant les axes  $u$  et  $v$  définissent une permutation. Par exemple sur cette figure, nous avons 4 sites nucléés que nous étiquetons  $\{(1, v_1), (2, v_2), (3, v_3), (4, v_4)\}$ , avec  $v_i = \sigma(i)$ . Sur l’exemple de la figure 4.3  $\sigma = (2, 1, 3, 4)$ . La longueur  $l_N(\sigma)$  de la plus grande sous-suite croissante de la permutation  $\sigma$  définit la “taille” du chemin de Hammersley, ici  $l_4(\sigma) = 3$ . On pourra également consulter la référence de Aldous et Diaconis [2] exhibant les liens entre les jeux de patience et la plus longue sous-suite croissante d’une permutation.

La hauteur  $h(x, t)$  de l’interface PNG associée correspond exactement à la taille du polymère de Hammersley entre  $(0, 0)$  et  $(x, t)$ , voir la figure 4.4. Ainsi on a une équivalence statistique entre la hauteur du PNG et la longueur de la plus grande sous-suite croissante d’une permutation d’un nombre poissonien d’entiers. Les résultats concernant la statistique du PNG obtenus par Präho-

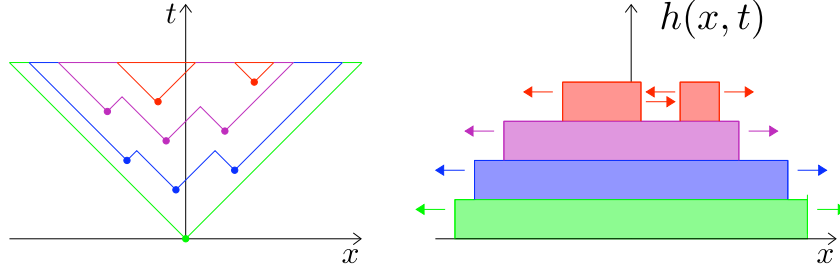


FIGURE 4.4 – Le profil de hauteur  $h(x, t)$  au temps  $t$  égale la taille des chemins de Hammersley entre  $(0, 0)$  et  $(x, t)$ . Pour identifier les couches successives du PNG, on intersecte itérativement les cônes de lumière futurs de chaque site de nucléation. Ceci crée un ensemble de chemins qui ne se coupent pas (de couleurs différentes sur le schéma de gauche). Chacun de ces chemins correspond à  $+1$  pour la variable  $h$ . En faisant une coupe à  $t$  fixé, on identifie rapidement le profil de l'interface à droite (correspondance des couleurs).

fer et Spohn prennent leurs racines dans le résultat initial de Baik, Deift et Johansson [6], concernant ce problème d'Ulam\* :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{l_N - 2\sqrt{N}}{N^{1/6}} \leq x \right] = F_{\text{GUE}}(x), \quad (4.1)$$

où  $l_N$  est la longueur de la plus grande sous-suite croissante de la permutation de  $N$  entiers (avec une distribution uniforme sur les permutations), et  $F_{\text{GUE}}(x)$  la distribution de Tracy-Widom pour l'ensemble gaussien unitaire de matrices aléatoires, voir l'appendice A et la figure A.1.

### Propriétés statistiques du PNG

Dans la limite  $1 \ll t \ll L^z$ , l'interface possède en moyenne un profil semi-circulaire [144, 145, 143] :

$$\langle h(x, t) \rangle = 2t \sqrt{1 - \left( \frac{x}{t} \right)^2}, \quad (4.2)$$

\*A strictement parler le problème d'Ulam concerne l'identification de la constante  $c = 2$  dans la limite  $\lim_{N \rightarrow \infty} l_N / \sqrt{N} = c$ , les auteurs BDJ sont allés nettement plus loin.

où la moyenne est prise par vis-à-vis des différentes réalisations du tirage des sites de nucléation. En exploitant l'équivalence avec le processus de Hammersley, un premier résultat crucial de Prähofer et Spohn est de montrer que les fluctuations de hauteur en un point  $-t \leq x \leq t$  donné sont liées à la distribution de Tracy-Widom  $F_{\text{GUE}}$ . Plus précisément, pour tout  $-t \leq x \leq t$ ,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{h(x, t) - 2t\sqrt{1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2}}{t^{1/3} \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)^{1/3}} \leq x \right] = F_{\text{GUE}}(x). \quad (4.3)$$

En particulier en  $x = 0$ , où l'on attend le maximum de l'interface en moyenne, on a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{h(0, t) - 2t}{t^{1/3}} \leq x \right] = F_{\text{GUE}}(x). \quad (4.4)$$

Prähofer et Spohn vont plus loin et s'intéressent aux propriétés statistiques non locales. D'après la théorie KPZ, les fluctuations locales de hauteur sont proportionnelles à  $t^\beta = t^{1/3}$ , et sur des échelles de longueur  $x \propto t^{1/z} = t^{2/3}$ . Ainsi on souhaite caractériser le processus défini par

$$h_t(y) = \frac{h(yt^{2/3}, t) - 2t}{t^{1/3}}, \quad (4.5)$$

lorsque  $t \rightarrow \infty$ . A cette fin examinons le modèle PNG multi-couches.

### Le PNG multi-couches

Le modèle PNG multi-couches est une extension du PNG en gouttelette qui permet d'identifier un processus de  $N$  chemins qui ne se croisent pas. La position de ces chemins à un instant donné fournit un processus aléatoire dont les fonctions de corrélation à  $n$  points ( $1 \leq n \leq N$ ) se présentent sous la forme d'un déterminant d'un noyau particulier. Ce type de processus est appelé processus ponctuel déterminantal, dont un exemple classique est donné par les valeurs propres d'une matrice aléatoire. Une vision dynamique revient à considérer des propagateurs à  $n$  points, qui s'écrivent eux-mêmes comme des déterminants de propagateurs à deux points usuels et pour lequel des méthodes issues des polynômes orthogonaux permettent de calculer les fonctions de corrélation [61]. Définissons tout d'abord le modèle PNG multi-couches, à l'aide de la figure 4.5. Les couches sont indexées par un entier négatif

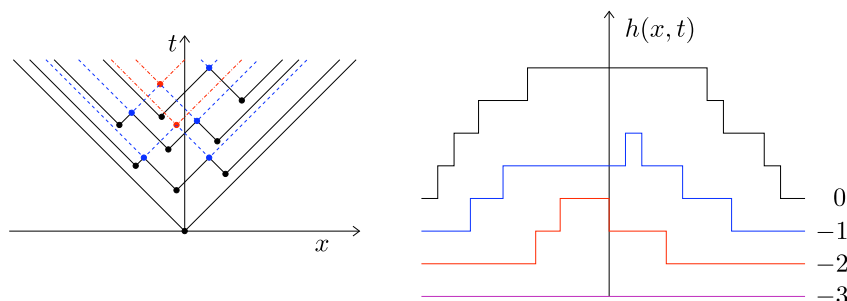


FIGURE 4.5 – Le PNG multi-couches. À gauche, les sites de nucléations primaires (en noir) donnent lieu à la courbe  $h_0(x, t)$  à droite, équivalente au PNG en gouttelette. Les intersections des cônes de lumière des sites primaires (lignes en noir) donnent des sites de nucléations secondaires (en bleu). Ceux-ci se traduisent par la courbe  $h_{-1}(x, t)$  en bleu à droite. De même les cônes de lumière des sites secondaires donnent naissance aux sites tertiaires (en rouge), et à la ligne  $h_{-2}(x, t)$  correspondante. Les cônes de lumière tertiaires ne se croisant pas, la ligne  $h_{-3}(x, t)$  est plate (couleur magenta).

$h_0(x, t), h_{-1}(x, t), h_{-2}(x, t), \dots$ , et l'état initial est  $h_{-i}(x, 0^-) = -i$  pour tout  $i = 0, 1, 2, \dots$  (une succession de couches plates). De la même façon nous tirons aléatoirement des points de nucléation *primaires* dans le cône  $|x| \leq t$ , pour  $t \geq 0$ , et reprenons la même image que précédemment. Nous avons vu que la fusion de deux marches du modèle PNG correspond à l'intersection de leurs cônes de lumière futurs respectifs. Ces points d'intersection des cônes primaires vont définir les sites de nucléations *secondaires*, qui construiront la deuxième couche, indexée  $-1$ , avec les mêmes règles (nucléation, croissance latérale et fusion). Les cônes de lumière des sites secondaires sont transparents à ceux des sites primaires, et leurs intersections vont générer des sites de nucléations *tertiaires*, etc... La construction est itérative, et la couche  $-k$  ne dépend que des couches supérieures  $-i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, k - 1$ . Par construction les couches successives ne peuvent pas se croiser, et définissent un processus ponctuel déterminantal pour lequel Prähofer et Spohn ont calculé, par des méthodes de théorie des champs fermioniques, la fonction de corrélation à deux points, et sa limite asymptotique. En particulier la couche supérieure étant totalement indépendante des autres, elle est équivalente à l'interface de PNG en gouttelette  $h_0(x, t) = h(x, t)$ , et ils parviennent à identifier le processus

stationnaire associé à la variable d'échelle  $h_t(y)$  de la formule (4.5) lorsque  $t \rightarrow \infty$  :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_t(y) = \mathcal{A}(y) - y^2, \quad (4.6)$$

où  $\mathcal{A}(y)$  est appelé processus d'Airy<sub>2</sub>, processus stationnaire défini par son propagateur [101, 61] :

$$K_{\mathcal{A}}(\xi_b, \tau_b | \xi_a, \tau_a) = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(\tau_b - \tau_a)} \text{Ai}(\xi_b + \lambda) \text{Ai}(\xi_a + \lambda) d\lambda & \text{si } \tau_b \geq \tau_a, \\ - \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda(\tau_b - \tau_a)} \text{Ai}(\xi_b + \lambda) \text{Ai}(\xi_a + \lambda) d\lambda & \text{si } \tau_b < \tau_a, \end{cases} \quad (4.7)$$

où  $K_{\mathcal{A}}(\xi_b, \tau_b | \xi_a, \tau_a)$  est la probabilité que  $\mathcal{A}(\tau_b) = \xi_b$  à  $d\xi_b$  près sachant que  $\mathcal{A}(\tau_a) = \xi_a$ . Ce propagateur est appelé noyau d'Airy modifié. A temps égaux  $\tau_a = \tau_b$ , on retrouve le noyau d'Airy qui intervient par exemple pour le calcul de la distribution de Tracy-Widom  $F_{\text{GUE}}$  [175, 176, 61] (*cf.* appendice A)

### 4.1.2 Le PNG sur réseau et le polymère dirigé en milieu aléatoire

Il est bien connu que le polymère dirigé en milieu aléatoire est dans la classe d'universalité KPZ [90]. L'équivalence entre le processus PNG de Prähofer et Spohn et le polymère de Hammersley témoigne de cette appartenance à cette classe KPZ.

Discrétisons l'espace-temps de sorte que  $(x, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , et les axes  $(u, v)$  deviennent  $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ . En chaque point du cône d'espace-temps  $|x| \leq t$ , on tire un nombre aléatoire  $\omega(x, t)$  indépendant de site à site. Une première possibilité est de tirer 0 ou 1 avec une probabilité  $p$  et  $1 - p$  respectivement, en ajustant  $p$  pour retomber sur le modèle de Prähofer et Spohn à la limite continue. Alors la règle de croissance est simplement

$$h(x, t + 1) = \max(h(x - 1, t), h(x, t), h(x + 1, t)) + \omega(x, t). \quad (4.8)$$

C'est ce type de modèle que nous avons adopté pour les simulations numériques. Notons que cette règle d'actualisation est réminiscente de la construction (3.31) du polymère dirigé discuté dans le chapitre précédent.

Johansson [100, 101] a introduit un modèle PNG dans l'espace-temps discret, avec une correspondance rigoureuse avec un modèle de polymère dirigé sur réseau carré. Premièrement les variables aléatoires  $\omega(x, t)$  sont nulles  $\omega(x, t) = 0$  si  $t - x$  est pair, ou si  $|x| \geq t$ . Ensuite définissons les variables aléatoires du polymère dirigé en fonction des variables aléatoires du PNG par

$$w(i, j) = \omega(i - j, i + j - 1), \quad (i, j = 1, 2, \dots), \quad (4.9)$$

distribuées avec la loi géométrique

$$\mathbb{P}[w(i, j) = m] = (1 - q)q^m, \quad (4.10)$$

avec le paramètre  $0 < q < 1$ . A la différence du modèle de Prähofer et Spohn, les nucléations interviennent dans des endroits bien spécifiques et non aléatoires, en l'occurrence un site sur deux du réseau  $(x, t)$ . De plus la croissance élémentaire n'est pas restreinte à une hauteur unité, mais à n'importe quel entier, distribué avec la loi géométrique (4.10). Ainsi on peut associer un cône de lumière à chacun des sites  $(x, t)$  avec une valeur  $m$  donnée par le tirage  $m = \omega(x, t)$  pour les sites nucléés (avec  $t - x$  impair) et avec une valeur 0 pour les sites vides ( $t - x$  pair). Les sites de nucléations secondaires sont définis de la même façon : ils se situent à l'intersection des cônes de lumière des sites primaires. L'intensité de la nucléation secondaire est alors donnée par la hauteur commune des marches fusionnées, c'est-à-dire le minimum des deux entiers  $\min(m, m')$  des cônes de valeur  $m$  et  $m'$  qui se croisent. Encore une fois, ce processus conduit à un ensemble de chemins qui ne se coupent pas, et pour lesquels Johansson a calculé le processus asymptotique [101].

Pour examiner ce processus, définissons d'abord l'énergie du polymère au point  $(i, j)$  en fonction de la hauteur PNG

$$E(i, j) = -h(i - j, i + j - 1). \quad (4.11)$$

à valeurs dans  $\mathbb{R}^-$ . En utilisant (4.8), il vient

$$E(i, j) = \min(E(i - 1, j), E(i, j - 1)) - w(i, j), \quad (4.12)$$

équation d'évolution classique du polymère dirigé, dont les sauts de taille unité dans le réseau  $(i, j)$  ne peuvent être que vers le haut ou vers la droite. L'énergie du polymère d'origine  $(1, 1)$  et de point final  $(M, N)$  est donnée par le minimum sur tous les chemins dirigés  $\mathcal{C}$  liant  $(1, 1)$  et  $(M, N)$  de l'énergie le long de ce chemin :

$$E(M, N) = \min_{\mathcal{C}} \sum_{(i, j) \in \mathcal{C}} [-w(i, j)]. \quad (4.13)$$

Une quantité intéressante physiquement concerne le fondamental d'un polymère de longueur fixée. Fixons le nombre total de pas à  $2(N - 1)$ , de sorte que le polymère de plus basse énergie partant de  $(1, 1)$  atteigne l'un des sites  $(N + u, N - u)$  avec  $u$  un entier tel que  $-N \leq u \leq N$ . Il s'agit alors de comparer les énergies  $E(N + u, N - u)$  lorsque  $u$  varie entre  $-N$  et  $N$ . Avant de procéder à cette comparaison dans la section suivante, fixons le point d'arrivée  $(N + u, N - u)$  et examinons la distribution de l'énergie du polymère optimal qui lie  $(1, 1)$  à  $(N + u, N - u)$  en  $2(N - 1)$  pas. Ceci correspond pour le PNG discret à examiner la distribution de la hauteur  $h(2u, 2N - 1)$  aux sites spatiaux pairs  $x = 2u$  aux temps impairs  $t = 2N - 1$ . Connaissant le modèle continu, on s'attend à ce qu'à la limite des grands  $N$ , l'énergie fluctue avec une échelle  $N^{1/3}$  autour de l'énergie moyenne d'ordre  $N$ , et l'échelle naturelle pour observer le point d'arrivée est  $u$  d'ordre  $N^{2/3}$ . A l'aide de [8, 100] et des facteurs

$$\eta(q) = \frac{2\sqrt{q}}{1 - \sqrt{q}}, \quad \rho(q) = \frac{(\sqrt{q})^{1/3} (1 + \sqrt{q})^{1/3}}{1 - \sqrt{q}}, \quad (4.14)$$

le comportement asymptotique de l'énergie est donné par la fonction d'échelle  $H_N(y)$  définie par [101]

$$E(N + u, N - u) = -\eta(q)N - \rho(q)N^{1/3}H_N\left(\frac{\rho(q)(1 - \sqrt{q})}{1 + \sqrt{q}}\frac{u}{N^{2/3}}\right), \quad (4.15)$$

équivalent de l'équation (4.5). Cette quantité est l'énergie du polymère de longueur  $2(N - 1)$  (nombre de sauts) partant de  $(1, 1)$  et arrivant en  $(N + u, N - u)$ , ou encore au signe près à la hauteur de l'interface  $h(2u, 2N - 1)$  aux sites pairs  $x = 2u$  au temps  $2N - 1$ . L'équivalence avec le modèle de Prähofer et Spohn intervient dans la limite  $N \gg 1$  et  $q \rightarrow 0$ . En particulier Johansson [101] montre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_N(y) = \mathcal{A}(y) - y^2, \quad (4.16)$$

l'équivalent pour le modèle discret et le polymère en milieu aléatoire de l'équation (4.6) pour le PNG dans l'espace-temps continu. Johansson démontre un résultat équivalent du résultat (4.4) :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P}[H_N(0) \leq x] = F_{\text{GUE}}(x). \quad (4.17)$$

Notons également que Johansson a identifié le processus d'Airy<sub>2</sub> dans un problème de pavage du diamant aztèque par des dominos [102] : c'est le théorème du cercle arctique. Encore une fois cette identification est rendue possible grâce à l'introduction de chemins qui ne se croisent pas.

### 4.1.3 Statistique du maximum du PNG

Jusqu'à présent nous avons discuté de la statistique de l'interface  $h(x, t)$  aux temps longs, ou de l'énergie  $E(N + u, N - u)$  du polymère dirigé de longueur  $2(N - 1)$  pour  $N \gg 1$ , pour lequel on fixe son point d'arrivée en  $(N + u, N - u)$ . Une question essentielle pour le polymère est : quelle est l'énergie de l'état fondamental d'un polymère de longueur  $2N$ , lorsque son extrémité d'arrivée est libre ? Pour l'interface PNG en gouttelette : quelle est la distribution de la hauteur maximale ?

Considérons le maximum du PNG continu

$$h_m(t) = \max_{-t \leq x \leq t} h(x, t) = h(x_m, t), \quad (4.18)$$

où  $h_m(t)$  est le maximum de la réalisation  $h(x, t)$  au temps  $t$ , et  $x_m$  est la position du maximum suivant l'axe  $x$ . D'un autre côté l'état fondamental du polymère dirigé est donnée par

$$E_m(N) = \min_{-N \leq u \leq N} E(N + u, N - u) = E(N + u_m, N - u_m), \quad (4.19)$$

avec  $u_m$  l'écart par rapport à la position moyenne du polymère de longueur  $2(N - 1)$ . Dans la dernière équation,  $u_m$  n'est pas nécessairement unique pour  $N$  fini, donc sa définition requiert quelques précautions. En revanche pour  $N \rightarrow \infty$ , on s'attend à ce que  $u_m$  soit unique presque sûrement [101].

Les comportements d'échelles de ces quantités sont déjà identifiés : cela revient à examiner le maximum du processus d'Airy

$$\xi_m = \max_{-\infty < y < +\infty} (\mathcal{A}(y) - y^2) = \mathcal{A}(y_m) - y_m^2, \quad (4.20)$$

avec le maximum à l'échelle asymptotique

$$\xi_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_m(t) - 2t}{t^{1/3}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{-E_m(N) - \eta(q)N}{\rho(q)N^{1/3}}, \quad (4.21)$$



et sa position

$$y_m = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_m}{t^{2/3}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\rho(q)(1 - \sqrt{q})}{1 + \sqrt{q}} \frac{u_m}{N^{2/3}}. \quad (4.22)$$

En utilisant un résultat de Baik et Rains [8] généralisant le processus de Hammersley à des permutations symétrisées, Johansson [101] prouve que

$$\mathbb{P} [\xi_m \leq 2^{-2/3}x] = F_{\text{GOE}}(x), \quad (4.23)$$

avec  $F_{\text{GOE}}$  la distribution d'échelle de la plus grande valeur propre d'une matrice de l'ensemble gaussien orthogonal (voir la figure A.1). Pour ce résultat il indique « *The proof of (1.14) [ici (4.23)] is very indirect. It would be interesting to see a more straightforward approach.* ». Une preuve directe a été donnée récemment par Corwin, Quastel et Remenik [34] par une approche type processus déterminantaux.

Pour comprendre la preuve “indirecte” de Johansson, considérons le résultat de Baik et Rains [8], dans le langage du polymère dirigé de Johansson, et tirons aléatoirement la valeur  $w(i, j)$  avec la loi géométrique (4.10) pour les sites dans le triangle  $\{(i, j), 1 \leq i, j \leq 2N, i + j \leq 2N\}$ . Pour compléter le carré, on symétrise cette distribution par rapport à l'anti-diagonale  $\{(2Nt, 2N(1-t)), 0 \leq t \leq 1\}$ . Alors pour cette configuration le résultat de Baik et Rains (avec leur notation  $\boxtimes$ ) est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{-E^{\boxtimes}(2N) - \eta(q)2N}{\rho(q)(2N)^{1/3}} \leq x \right] = F_{\text{GOE}}(x). \quad (4.24)$$

Ensuite il suffit de réaliser que (pour  $N$  pair)

$$\min_{-N \leq u \leq N} E(N+u, N-u) = \frac{1}{2} E^{\boxtimes}(2N), \quad (4.25)$$

d'où la distribution de l'état fondamental du polymère avec une extrémité fixe

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \frac{-E_m(N) - \eta(q)N}{\rho(q)N^{1/3}} \leq 2^{-2/3}x \right] = F_{\text{GOE}}(x), \quad (4.26)$$

et on en déduit le résultat (4.23). Cette construction géométrique s'applique également au modèle continu de Prähofer et Spohn, ce qui permet de déterminer en outre la distribution de la hauteur du modèle PNG en configuration plate (indépendante de  $x$ ), et de la relier en loi au maximum de la hauteur de la configuration en gouttelette [143, 150].

Récemment Moreno Flores, Quastel et Remenik [73] ont calculé la distribution jointe du maximum  $\xi_m$  et de sa position  $y_m$  du processus  $\mathcal{A}(y) - y^2$  par des méthodes de processus déterminantaux.

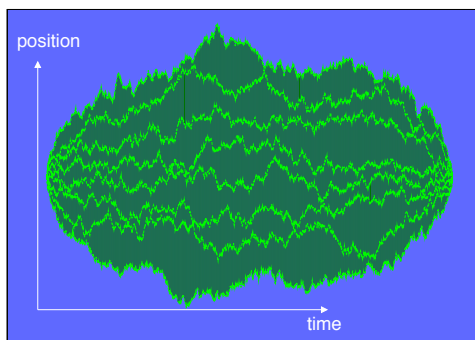


FIGURE 4.6 – Réalisation d'une pastèque : trajectoires dans l'espace-temps de 8 ponts browniens qui ne se coupent pas, et que nous appelons *belliqueux*.

## 4.2 Le modèle de pastèques

Dans cette section nous introduisons le modèle de pastèques, systèmes de  $N$  ponts browniens conditionnés à ne pas se croiser. Nous introduisons la méthode de calcul de la distribution jointe du maximum et de son temps d'atteinte, tout d'abord sur le cas trivial  $N = 1$ , puis en détail pour le cas  $N = 2$  pour lequel nous présentons des résultats originaux publiés dans les références [149, 150]. Puis nous calculons la fonction de corrélation à  $N$  points pour  $N$  ponts browniens qui ne se croisent pas, et identifions le processus déterminantal ponctuel associé aux valeurs propres des matrices aléatoires de l'ensemble gaussien unitaire GUE. D'un point de vue dynamique, le processus asymptotique lorsque  $N \rightarrow \infty$  du pont brownien le plus haut est encore une fois le processus d'Airy (4.6) et (4.7). Nous donnons les résultats pour la distribution jointe du maximum et de son temps d'atteinte pour  $N$  ponts browniens, et nous renvoyons à l'article long [150] reproduit en annexe B.3 pour les détails de calcul, et le cas des excursions browniennes.

### 4.2.1 Définition, variantes et programme

#### Les pastèques : ponts browniens belliqueux

Considérons  $N$  ponts browniens  $\{x_i(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$ ,  $1 \leq i \leq N$  unidimensionnels sur une période de temps unité. Nous avons introduit le concept du pont brownien (unique) au chapitre 2 dans le paragraphe 2.1.3 (voir la figure 2.2 par exemple). Pour rappel un pont  $x_i(\tau)$  est un mouvement brownien issu de l'origine à  $\tau = 0$ ,  $x_i(0) = 0$ , conditionné à revenir à l'origine au temps final  $\tau = T$ ,  $x_i(T) = 0$ . Dans toute cette section nous prendrons  $T = 1$  sans nuire à la généralité des résultats. Une analyse dimensionnelle permet d'instaurer un temps final  $T$  quelconque à n'importe quelle étape de l'analyse. Le modèle de *pastèques* est une collection de  $N$  ponts browniens sur l'intervalle unité conditionnés à ne pas se croiser, de sorte que pour tout  $0 < \tau < 1$ ,

$$x_1(\tau) < x_2(\tau) < \dots < x_N(\tau). \quad (4.27)$$

Une représentation des trajectoires dans le plan  $(x, t)$  fournit une explication quant à l'utilisation du terme *pastèque*, voir la figure 4.6. Un système de mouvements browniens qui ne se croisent pas a été introduit par de Gennes [36] pour modéliser des structures fibreuses (polymères) dans la limite élastique soumise à des contraintes stériques. Dans le chapitre 2, nous avons étudié la statistique du maximum d'un pont brownien unique, par le biais d'intégrale de chemin et de problèmes de mécanique quantiques ponctuels à un corps. Suivant de Gennes, la condition de non-croisement est implémentée dans ce formalisme par une assemblée de  $N$  fermions. A partir de cette description nous serons en mesure de proposer une méthode pour calculer la distribution jointe du maximum  $M \in [0, \infty]$  du marcheur le plus haut  $x_N(\tau)$ , *i.e.* du sommet de la pastèque, et de son temps d'atteinte  $\tau_M \in [0, 1]$  :

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) = x_N(\tau_M). \quad (4.28)$$

L'équivalent de ce type de processus pour des marches aléatoires a été étudié par (M. E.) Fisher [70]. Il fournit une image imprégnée d'humour britannique : une marche aléatoire est un individu errant dans une rue à la sortie d'un pub («*Drunk Walker*»). Parfois cet individu est accompagné de collègues, qui s'essayaient aux mêmes activités erratiques («*Harmless Drunks*»). Leur objectif est de se réunir tous ensemble afin de discuter la meilleure direction pour retrouver leur hôtel. Ceci correspond aux  $N$  ponts browniens indépendants.

Enfin un cas extrême se présente lorsque les individus sont d’humeur belliqueuse : dès que deux individus se rencontrent, ils se neutralisent (« *Vicious Drunks* »). Fisher a étudié en détails les probabilités de réunion de ce temps d’arrêt : le temps auquel tous les individus se rencontrent en un point donné. Dans notre cas, nous fixons ce temps d’arrêt à  $T = 1$  et étudions la statistique d’extrêmes conditionnée à cette réunion en  $\tau = T = 1$ . Les murs de domaine dans les transitions de phases commensuré/incommensuré sont un exemple physique de l’utilisation de ce modèle. Notons à ce titre que nous pouvons également considérer des “ponts déformés” tels que  $x_i(0) = 0$  et  $x_i(1) = Y$  pour tout  $i = 1, 2, \dots, N$  et pour un point de réunion  $Y \in \mathbb{R}$  quelconque. Nous donnerons des résultats également pour le maximum et sa position pour le cas de ces *pastèques déformées*.

Pour le vocabulaire, nous parlerons de *ponts browniens belliqueux*\* ou de *pastèques* pour ce processus de ponts browniens sur l’intervalle  $\tau \in [0, 1]$  soumis à la condition (4.27). Pour distinguer ce processus des suivants, nous indiquerons avec un indice  $B$  (pour l’anglais *Bridges*) les quantités relatives aux ponts belliqueux. Nous donnerons les détails de calcul pour ce cas des ponts belliqueux.

Pour une définition de ce processus sur réseau (discret en temps et en espace), on pourra consulter la note synthétique de Finch [68].

### Première variante : les excursions belliqueuses

Une variante est de considérer  $N$  excursions browniennes  $\{x_i(\tau), 0 \leq \tau \leq 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , définie par des mouvements browniens contraints de rester positifs

$$x_i(\tau) > 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.29)$$

conditionnés également par le non-croisement (4.27). Nous parlerons dans ce cas d’excursions belliqueuses, et utiliserons un indice  $E$  (*Excursions*) dans la présentation des résultats.

### Deuxième variante : les étoiles belliqueuses

Dans ce cas, on libère la contrainte de réunion et on ne considère que des mouvements browniens soumis à la condition de non-croisement (4.27). Les

---

\*Tentative de traduction de *Vicious Brownian Bridges*.

trajectoires typiques sont en forme d'étoile d'où le nom, et nous utiliserons l'indice  $S$  (*Stars*) pour les quantités reliées.

## Résultats connexes et programme

La méthode que nous utilisons pour calculer la distribution jointe du maximum et de sa position a été utilisée par Randon-Furling et Majumdar [152] en premier lieu pour calculer le temps d'atteinte du maximum  $\tau_M$  du mouvement brownien d'origine  $x(0) = x_0$  avant son temps de premier passage, *i.e.* le temps auquel il croise l'origine pour la première fois. La limite  $x_0 \rightarrow 0$  correspond au cas de  $N = 1$  excursion brownienne. Cette limite est non-triviale (nous reviendrons sur ce point plus loin dans le texte). Ces mêmes auteurs, avec Kearney et Yor [127], donnent des résultats exacts quant à la distribution de  $\tau_M$  pour un mouvement brownien soumis à différentes contraintes, dont le cas de l'excursion. Schehr et Le Doussal ont également calculé ces distributions jointes pour le mouvement brownien et certains processus conditionnés par une méthode du groupe de renormalisation dans l'espace réel [163], dont la décimation successive des degrés de liberté marginaux s'adapte intuitivement à la recherche des valeurs extrêmes. Enfin la statistique du maximum et de son temps d'atteinte pour  $N$  ponts browniens indépendants (*Harmless Walkers*) possède des liens étroits avec la statistique de l'enveloppe convexe de mouvement brownien dans le plan [125]. Randon-Furling, Majumdar et Comtet ont utilisé les méthodes d'intégrale de chemin pour calculer la statistique des ponts browniens indépendants [153, 151], avec des applications en écologie.

Notre méthode de calcul de la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$  reste dans la veine des méthodes d'intégrales de chemin utilisées dans le chapitre 2, auxquelles il faut ajouter deux caractéristiques : identifier le temps d'atteinte  $\tau_M$ , et implémenter la condition de non-croisement (4.27). Dans un premier temps nous présenterons le raffinement des méthodes du chapitre 2 pour calculer la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$  pour un seul mouvement brownien  $N = 1$ , et nous prendrons l'exemple du pont brownien. Cet exemple fournit un bon aperçu de l'utilisation de l'intégrale de chemin pour calculer la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$ , à partir de laquelle on peut retrouver la distribution de Rayleigh (2.23d) pour le maximum  $M$ , et la distribution uniforme du temps d'atteinte  $\tau_M$  sur  $[0, 1]$  due à la périodicité du pont. Dans un second temps nous exposerons la façon de prendre en compte la condition de non-croisement pour le cas  $N = 2$  ponts browniens belliqueux en détail. Nous donnerons les résultats pour  $N = 2$  excursions et étoiles belliqueuses. Enfin nous traiterons

le cas général  $N$  ponts belliqueux. Avant de donner le résultat de la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$ , nous identifierons la relation avec un modèle de matrices aléatoires, qui permet d'extraire de nombreux renseignements quand à la limite  $N \rightarrow \infty$  et le lien avec le processus d'Airy. Ce dernier étant le dénominateur commun aux pastèques et aux modèles de croissance PNG et du polymère dirigé discutés dans la première partie de ce chapitre.

## 4.2.2 Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour $N = 1$

### $N = 1$ pont brownien

Dans le chapitre 2 nous avons donné la mesure d'une réalisation d'un pont brownien en terme d'intégrale de chemin (2.17). Le calcul de la probabilité de passage en un point donné  $y$  à  $dy$  près à un instant donné  $\tau_c$  pour le pont brownien est bien connu. Il suffit de couper la réalisation en deux intervalles de temps,  $[0, \tau_c]$  et  $[\tau_c, 1]$ . En utilisant la propriété de Markov du mouvement brownien que nous avons explicité en équation (2.7), on peut traiter les deux parties indépendamment, et la distribution de  $y$  est simplement donnée par le produit des deux propagateurs concernés, à une constante de normalisation près. Ainsi la densité de probabilité de trouver le pont brownien en  $y$  au temps  $\tau_c$  est

$$\begin{aligned} P_{\tau_c}(y) &= \int \mathbb{B}_{[0,1]}[x(\tau)] \delta(x(\tau_c) - y) \mathcal{D}x(\tau) \\ &= \frac{G_0(0, 1|y, \tau_c) G_0(y, \tau_c|0, 0)}{G_0(0, 1|0, 0)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

avec les notations introduites dans le chapitre 2 et le propagateur libre  $G_0$  donné par la formule (2.13). Notons alors que le temps de coupure  $\tau_c$  est un paramètre et que seul  $y$  a le statut de variable aléatoire.

Pour calculer la probabilité jointe de  $(M, \tau_M)$ , on souhaite appliquer ce même type de protocole, en imposant  $x(\tau) < M$  pour tout  $0 \leq \tau \leq 1$  et  $x(\tau_M) = M$ . Or il est impossible de restreindre le mouvement brownien à passer en un point sans qu'il visite son entourage : c'est une caractéristique fondamentale du mouvement brownien [60]. Pour contourner ce problème, nous devons introduire un schéma de régularisation : nous gardons la première contrainte  $x(\tau) < M$  pour tout  $0 \leq \tau \leq 1$ , mais nous imposons que  $x(\tau_M) = M - \eta$ , avec un réel  $\eta > 0$ . Ainsi dans un premier temps nous calculons le

poids des chemins qui satisfont ces deux conditions :

$$W_{1,B}(M - \eta, \tau_M) = \int \mathbb{B}_{[0,1]} [x(\tau)] \delta(x(\tau_M) - (M - \eta)) \times \prod_{0 \leq \tau \leq 1} \theta(M - x(\tau)) \mathcal{D}x(\tau), \quad (4.31)$$

avec le produit des fonctions de Heaviside qui contraint les chemins à rester sous  $x = M$  (*cf.* le paragraphe 2.1.3). Pour avoir la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$ , nous normalisons ce poids pour un paramètre  $\eta > 0$  fixé

$$Z_{1,B}(\eta) = \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M W_{1,B}(M - \eta, \tau_M), \quad (4.32)$$

et enfin nous prenons la limite de sorte que la distribution jointe soit

$$P_{1,B}(M, \tau_M) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_{1,B}(M - \eta, \tau_M)}{Z_{1,B}(\eta)}. \quad (4.33)$$

La limite  $\eta \rightarrow 0$  assure avec une probabilité 1 que le maximum est atteint en  $\tau_M$  et confère donc le statut de variable aléatoire à  $\tau_M$  (pour  $\eta > 0$  fixé  $\tau_M$  ne possède que le statut de paramètre à l'image de  $\tau_c$  discuté avant). Le programme est de calculer le poids (4.31)

$$W_{1,B}(M - \eta, \tau_M) = G_{<M}(0, 1 | M - \eta, \tau_M) G_{<M}(M - \eta, \tau_M | 0, 0), \quad (4.34)$$

avec la formule (2.22) pour le propagateur, à l'ordre le plus bas dans un développement en puissance du paramètre de régularisation  $\eta$ . En utilisant la décomposition spectrale

$$G_{<M}(b, \tau_b | a, \tau_a) = \int_0^\infty dk \varphi_k(b) e^{-(\tau_b - \tau_a)k^2/2} \varphi_k^*(a), \quad (4.35)$$

avec les fonctions d'onde (2.21c), on a à l'ordre le plus bas pour le propagateur entre  $\tau = 0$  et  $\tau = \tau_M$ , en développant la fonction d'onde  $\varphi_k(M - \eta)$  :

$$G_{<M}(M - \eta, \tau_M | 0, 0) = \eta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M}{\tau_M^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}} + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (4.36)$$

et une formule similaire avec  $\tau_M \rightarrow 1 - \tau_M$  par renversement du temps pour le second propagateur. D'où le poids des chemins considérés, à l'ordre le plus bas en  $\eta$  :

$$W_{1,B}(M-\eta, \tau_M) = \eta^2 \frac{2}{\pi} \frac{M^2}{[\tau_M(1-\tau_M)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{M^2}{2\tau_M(1-\tau_M)}\right) + \mathcal{O}(\eta^4). \quad (4.37)$$

La normalisation (4.32) possède un développement similaire

$$Z_{1,B}(\eta) = K_{1,B} \eta^2 + \mathcal{O}(\eta^4), \quad (4.38)$$

et nous déterminons la constante  $K_{1,B}$  de sorte que les probabilités soient normées à la limite  $\eta \rightarrow 0$  :

$$\int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M P_{1,B}(M, \tau_M) = 1. \quad (4.39)$$

L'intégration sur  $M$  puis sur  $\tau_M$  de  $W_{1,B}$  permet d'identifier  $K_{1,B} = \sqrt{2/\pi}$ . En combinant ces résultats nous obtenons :

$$P_{1,B}(M, \tau_M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M^2}{[\tau_M(1-\tau_M)]^{3/2}} \exp\left(-\frac{M^2}{2\tau_M(1-\tau_M)}\right). \quad (4.40)$$

L'intégrale sur  $M$  donne un résultat indépendant de  $\tau_M$  (changement de variables  $u = M/[\tau_M(1-\tau_M)]^{1/2}$ ) : la distribution marginale de la position du maximum d'un pont brownien est uniforme, comme l'on s'y attendait :

$$P_{1,B}(\tau_M) = \int_0^\infty dM P_{1,B}(M, \tau_M) = 1. \quad (4.41)$$

En intégrant la distribution jointe sur  $\tau_M$  nous obtenons la distribution de Rayleigh (2.23d) déjà calculée

$$P_{1,B}(M) = \int_0^1 d\tau_M P_{1,B}(M, \tau_M) = f_{\text{Ray}}(M). \quad (4.42)$$

### $N = 1$ excursion brownienne

Cette méthode est également applicable pour une excursion. Pour ce cas, il faut également régulariser l'expression aux points de départ et d'arrivée. En effet on ne peut pas imposer simultanément  $x(\tau) > 0$  et  $x(0) = 0$ . Nous



renvoyons au paragraphe 2.5.3 sur l'aire tronquée sous une excursion brownienne pour les détails de la régularisation. En utilisant la mesure régularisée  $\mathbb{E}[x(\tau), \epsilon]$  de l'excursion brownienne (2.97), on calcule le poids

$$W_{1,E}(M - \eta, \tau_M | \epsilon) = \int \mathbb{E}_{[0,1]} [x(\tau), \epsilon] \delta(x(\tau_M) - (M - \eta)) \times \prod_{0 \leq \tau \leq 1} \theta(M - x(\tau)) \mathcal{D}x(\tau). \quad (4.43)$$

La mesure  $\mathbb{E}[x(\tau), \epsilon]$  est déjà normalisée, avec une normalisation qui dépend du paramètre  $\epsilon : G_{>0}(\epsilon, 1 | \epsilon, 0)$ . La suite du calcul est similaire, à la différence du potentiel de mécanique quantique associé qui est celui de la particule dans une boîte. Nous renvoyons le lecteur à la référence [127] pour les détails du calcul. Avec nos notations, la distribution jointe est obtenue comme la limite

$$P_{1,E}(M, \tau_M) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G_{\text{Box}}(\epsilon, 1 | M - \eta, \tau_M) G_{\text{Box}}(M - \eta, \tau_M | \epsilon, 0)}{K_{1,E} \eta^2 \epsilon^2}, \quad (4.44)$$

où l'on a développé à l'ordre le plus bas la normalisation au dénominateur. On obtient finalement l'expression de Majumdar *et al.* :

$$P_{1,E}(M, \tau_M) = \frac{\sqrt{2\pi} \pi^4}{M^4} \sum_{m,n>0} (-1)^{m+n} m^2 n^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [(1-\tau_M)m^2 + \tau_M n^2]}, \quad (4.45)$$

et renvoyons à leur référence [127] pour l'expression des marginales.

Notons que cette constante de normalisation est factorisable en deux termes : l'un pour la régularisation  $\eta$  au maximum, et l'autre pour la régularisation de l'excursion. C'est-à-dire que l'on peut écrire  $K_{1,E} \eta^2 \epsilon^2 = (k_\eta \eta^2)(k_\epsilon \epsilon^2)$ . La partie pour  $\epsilon$  provient exclusivement de la normalisation de la mesure  $\mathbb{E}[x(\tau), \epsilon]$ , avec  $k_\epsilon = \sqrt{2/\pi}$ , et l'autre de la régularisation au voisinage du maximum, avec  $k_\eta = 2$ .

$N = 1$  étoile (mouvement brownien)

Le cas du mouvement brownien non contraint se traite identiquement, avec le poids

$$W_{1,S}(M - \eta, \tau_M) = \int \mathbb{W}_{[0,1]} [x(\tau)] \delta(x(\tau_M) - (M - \eta)) \times \prod_{0 \leq \tau \leq 1} \theta(M - x(\tau)) \mathcal{D}x(\tau), \quad (4.46)$$

que l'on récrit en fonction des propagateurs

$$W_{1,S}(M-\eta, \tau_M) = \int_{-\infty}^M dz G_{<M}(z, 1|M-\eta, \tau_M) G_{<M}(M-\eta, \tau_M|0, 0), \quad (4.47)$$

où l'intégrale porte sur le point d'arrivée, compris entre  $-\infty$  et le maximum  $M$ . De la même façon la normalisation admet un développement en  $\eta$  avec à l'ordre le plus bas  $Z_{1,S}(\eta) = K_{1,S} \eta^2$ , et la constante  $K_{1,S} = 1/2$ . En prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$  on obtient la distribution jointe

$$P_{1,S}(M, \tau_M) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\tau_M}} \frac{M}{\tau_M^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}}. \quad (4.48)$$

En intégrant sur  $M$  on trouve la distribution du temps d'atteinte, résultat de Lévy [118] (loi de l'arc sinus pour la distribution cumulée) :

$$P_{1,S}(\tau_M) = \frac{1}{\pi \sqrt{\tau_M(1-\tau_M)}}, \quad (4.49)$$

et en intégrant la distribution jointe sur  $\tau_M$  on retrouve la distribution du maximum du mouvement brownien sur l'intervalle  $[0, 1]$  :

$$P_{1,S}(M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-M^2/2}. \quad (4.50)$$

### 4.2.3 Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour $N = 2$

Dans ce paragraphe, nous introduisons la méthode fermionique introduite en premier lieu par de Gennes [36], pour prendre en compte la condition de non croisement (4.27). Nous traitons en détail l'exemple de  $N = 2$  ponts browniens belliqueux, et donnons les résultats pour les excursions et étoiles belliqueuses.

#### $N = 2$ ponts belliqueux

Nous considérons maintenant deux ponts browniens et utilisons la notation vectorielle  $\mathbf{x}(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau))$ , avec des vecteurs à deux composantes pour tout le paragraphe 4.2.3. La conditions de non-croisement est donc

$$x_1(\tau) < x_2(\tau), \quad \text{pour tout } 0 < \tau < 1, \quad (4.51)$$

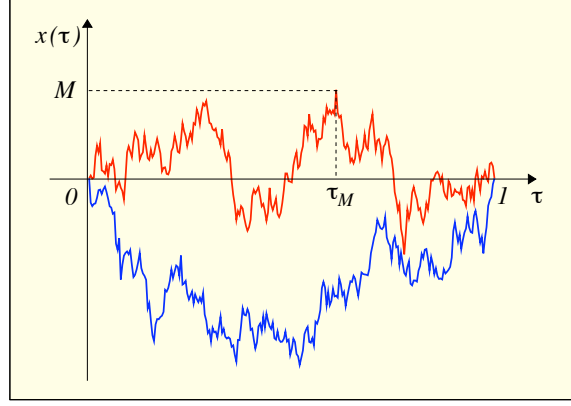


FIGURE 4.7 – Une réalisation de  $N = 2$  ponts browniens belliqueux, avec le maximum  $M$  et son temps d'atteinte  $\tau_M$

et les ponts sont définis par  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1) = (0, 0)$ . Nous souhaitons calculer la distribution jointe du maximum  $M$  du pont le plus haut  $x_2(\tau)$  et de son temps d'atteinte  $\tau_M$  :

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_2(\tau) = x_2(\tau_M). \quad (4.52)$$

Dans cette optique nous souhaitons d'abord calculer le propagateur à deux particules entre  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  au temps  $\tau_a$  et  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  au temps  $\tau_b$ , avec  $a_1 < a_2$  et  $b_1 < b_2$ , qui prend en compte la condition de non-croisement et du maximum  $x_1(\tau) < x_2(\tau) < M$  pour tout  $0 < \tau_a \leq \tau_b < 1$  :

$$G_{<M}(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) = \int_{x_1(\tau_a)=a_1}^{x_1(\tau_b)=b_1} \mathcal{D}x_1(\tau) \int_{x_2(\tau_a)=a_2}^{x_2(\tau_b)=b_2} \mathcal{D}x_2(\tau) \left\{ \mathbb{W}[x_1(\tau)] \mathbb{W}[x_2(\tau)] \right. \\ \left. \times \prod_{\tau_a \leq \tau \leq \tau_b} [\theta(M - x_2(\tau))\theta(x_2(\tau) - x_1(\tau))] \right\}, \quad (4.53)$$

où l'on a abrégé la notation  $\mathbb{W}[x_i(\tau)] = \mathbb{W}_{[\tau_a, \tau_b]}[x_i(\tau)]$  pour  $i = 1, 2$ , et utilisé le produit de fonctions de Heaviside pour prendre en compte le non-croisement et la limite supérieure  $M$ . Nous gardons la même notation que pour le propagateur à une particule, la distinction se faisant au niveau des arguments.

Premièrement nous avons  $\theta(M - x_2(\tau))\theta(x_2(\tau) - x_1(\tau)) = \theta(M - x_2(\tau))\theta(M - x_1(\tau))\theta(x_2(\tau) - x_1(\tau))$ , pour tout  $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$  ce qui permet d'intégrer la condition "mur de potentiel en  $x = M$ " pour les deux particules de sorte que

$$G_{<M}(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) = \int_{x_1(\tau_a)=a_1}^{x_1(\tau_b)=b_1} \mathcal{D}x_1(\tau) \int_{x_2(\tau_a)=a_2}^{x_2(\tau_b)=b_2} \mathcal{D}x_2(\tau) \left\{ \prod_{\tau_a \leq \tau \leq \tau_b} [\theta(x_2(\tau) - x_1(\tau))] \right. \\ \left. \times \prod_{i=1}^2 e^{-\int_{\tau_a}^{\tau_b} \left\{ \frac{1}{2}(\partial_\tau x_i)^2 + V_{<M}(x_i(\tau)) \right\} d\tau} \right\}. \quad (4.54)$$

Sans la condition de non-croisement nous aurions deux mouvements browniens indépendants et le propagateur à deux particules serait le produit des deux propagateurs à une particule (*Harmless Drunks*). Pour intégrer la condition de non-croisement  $x_1(\tau) < x_2(\tau)$  il est équivalent à une dimension de considérer des fermions : deux fermions ne peuvent occuper le même état quantique (ici la même position) au même instant. Comme nous sommes dans un espace à une dimension, les particules ne peuvent pas "sauter" l'une au-dessus de l'autre. Ainsi, elles conservent leur ordre respectif au cours de leurs trajectoires, fixé par les conditions initiales : si  $a_1 < a_2$ , alors  $x_1(\tau) < x_2(\tau)$  pour tout  $\tau_a \leq \tau \leq \tau_b$ . Le produit de fonctions de Heaviside est égal à un pour toutes les trajectoires fermioniques, et nous traitons donc deux fermions identiques (même hamiltonien à une particule) et indiscernables. Le hamiltonien à deux particules s'écrit :

$$H_{<M} = H_{<M}^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes H_{<M}^{(2)}, \quad (4.55)$$

avec  $H_{<M}^{(i)}$  le hamiltonien à une particule  $i = 1, 2$  en représentation position

$$H_{<M}^{(i)} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_i^2} + V_{<M}(x_i), \quad i = 1, 2, \quad (4.56)$$

avec les fonctions d'ondes à une particule  $\phi_k(x)$ , voir les fomules (2.21). D'après les outils élémentaires de la mécanique quantique les fonctions propres du hamiltonien à deux particules fermioniques sont données par le produit antisymétrisé des fonctions d'onde à une particule. Autrement dit l'état propre de  $H_{<M}$  avec l'énergie  $E = (k_1^2 + k_2^2)/2$  est donné par le déterminant de Slater

$$\Phi_{k_1, k_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2!}} \det_{1 \leq i, j \leq 2} \varphi_{k_i}(x_j). \quad (4.57)$$

En notations bra-ket, l'état propre d'impulsion  $k_1$  et  $k_2$  s'écrit

$$|k_1, k_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|k_1\rangle \otimes |k_2\rangle - |k_2\rangle \otimes |k_1\rangle), \quad (4.58)$$

avec  $|k_i\rangle$  l'état propre à une particule, de projection  $\langle x|k_i\rangle = \varphi_{k_i}(x)$ . On retrouve le déterminant de Slater (4.57) en prenant la projection de cet état propre à deux particules fermioniques :  $\Phi_{k_1, k_2}(\mathbf{x}) = (\langle x_1| \otimes \langle x_2|) |k_1, k_2\rangle$ . Nous sommes alors en mesure d'écrire la décomposition spectrale du propagateur à 2 particules :

$$\begin{aligned} G_{<M}(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) &= (\langle b_1| \otimes \langle b_1|) e^{-(\tau_b - \tau_a)H_{<M}} (|a_1\rangle \otimes |a_2\rangle) \\ &= \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \Phi_{k_1, k_2}(\mathbf{b}) e^{-(\tau_b - \tau_a)\frac{k_1^2 + k_2^2}{2}} \Phi_{k_1, k_2}^*(\mathbf{a}). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Nous retrouvons par des méthodes de mécanique quantique le résultat de Karlin et McGregor [108] qui indique que le propagateur à deux particules soumises à la condition de non-croisement est donné par le déterminant des propagateurs à une particule. Pour le voir à partir de notre formule (4.59), nous utilisons la formule de Cauchy-Binet, dont nous fournissons une démonstration dans l'appendice de la réf. [150], article reproduit en annexe B.3 :

$$\begin{aligned} I^{(N)} &= \int d\mathbf{x} \det_{1 \leq i, j \leq N} (f_i(x_j)) \det_{1 \leq k, l \leq N} (g_k(x_l)) \\ &= N! \det_{1 \leq i, j \leq N} \left\{ \int dx h(x) f_i(x) g_j(x) \right\}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

En effet récrivons le propagateur comme

$$\begin{aligned} G_{<M}(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) &= \frac{1}{2!} \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left( \varphi_{k_i}(b_j) e^{-(\tau_b - \tau_a)\frac{k_i^2}{4}} \right) \\ &\quad \times \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left( \varphi_{k_i}(a_j) e^{-(\tau_b - \tau_a)\frac{k_i^2}{4}} \right), \end{aligned} \quad (4.61)$$

alors la formule de Cauchy -Binet pour  $N = 2$  (avec l'intégrale sur  $k_1, k_2$ ) donne

$$\begin{aligned} G_{<M}(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) &= \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left( \int_0^\infty dk \varphi_k(b_j) e^{-(\tau_b - \tau_a)\frac{k^2}{2}} \varphi_k(a_i) \right) \\ &= \det_{1 \leq i, j \leq 2} (G_{<M}(b_j, \tau_b | a_i, \tau_a)), \end{aligned} \quad (4.62)$$

avec le propagateur à une particule dans le déterminant, résultat de Karlin et McGregor [108].

Avec l'expression (4.59), nous sommes équipés pour appliquer notre méthode de calcul de la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$ . Il reste cependant une dernière étape : nous souhaitons avoir des ponts qui partent et reviennent à l'origine, tout en maintenant la condition de non-croisement (4.51) pour  $0 < \tau < 1$ . Encore une fois, la combinaison stricte de ces deux conditions donne un ensemble de chemin de mesure nulle, pour lequel on ne peut pas calculer de probabilité. Il est donc nécessaire d'introduire une régularisation, déjà utilisée par exemple dans le travail de Schehr *et al.* [166]. Cette régularisation consiste à séparer les points de départ et d'arrivée par un paramètre  $\epsilon > 0$ . Nous prenons  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1) = (0, \epsilon) \equiv \boldsymbol{\epsilon}$ . Ainsi nous allons calculer le poids des chemins partant de  $\mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\epsilon}$ , passant au temps  $\tau = \tau_M$  en  $\mathbf{x}(\tau_M) = (y_1, M - \eta)$  et arrivant en  $\mathbf{x}(1) = \boldsymbol{\epsilon}$  au temps final  $\tau = 1$ , en sommant sur les valeurs intermédiaires du marcheur  $x_1(\tau_M) = y_1$  :

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{-\infty}^{M-\eta} dy_1 G_{<M}(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | (y_1, M - \eta), \tau_M) \times G_{<M}((y_1, M - \eta), \tau_M | \boldsymbol{\epsilon}, 0), \quad (4.63)$$

avec le propagateur à deux particules fermioniques (4.59). La normalisation est donnée à  $\epsilon, \eta > 0$  fixés par

$$Z_{2,B}(\epsilon, \eta) = \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon), \quad (4.64)$$

de sorte que la distribution jointe soit obtenue par la double limite

$$\boxed{P_{2,B}(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{2,B}(\epsilon, \eta)}}. \quad (4.65)$$

Nous calculons le poids dans un développement de plus bas degré en  $\eta$  et  $\epsilon$ , identifions la normalisation au même ordre, et prenons la limite  $\eta, \epsilon \rightarrow 0$  pour obtenir la distribution jointe.

En utilisant l'expression (4.59) dans (4.63), il vient

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{-\infty}^{M-\eta} dy_1 \left\{ \int_0^{\infty} d\mathbf{k}' \Phi_{\mathbf{k}'}(\epsilon) e^{-(1-\tau_M)\frac{\mathbf{k}'^2}{2}} \Phi_{\mathbf{k}'}^*(y_1, M - \eta) \right. \\ \left. \times \int_0^{\infty} d\mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}}(y_1, M - \eta) e^{-(\tau_M)\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\epsilon) \right\}, \quad (4.66)$$

avec la convention  $\int d\mathbf{k} = \int dk_1 \int dk_2$  et  $\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2$ . Les deux intégrandes sont symétriques dans l'échange  $k'_1 \leftrightarrow k'_2$  et  $k_1 \leftrightarrow k_2$  respectivement. Cette opération permet de simplifier l'un des deux déterminants de chaque intégrande par le produit des termes diagonaux uniquement. Par exemple pour la deuxième intégrale, nous avons

$$\int_0^{\infty} d\mathbf{k} \Phi_{\mathbf{k}}(y_1, M - \eta) e^{-(\tau_M)\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\epsilon) \\ = 2 \int_0^{\infty} d\mathbf{k} \frac{\varphi_{k_1}(y_1) \varphi_{k_2}(M - \eta)}{\sqrt{2!}} e^{-(\tau_M)\frac{\mathbf{k}^2}{2}} \Phi_{\mathbf{k}}^*(\epsilon), \quad (4.67)$$

et un résultat similaire pour la première intégrale avec  $\mathbf{k}'$  plutôt que  $\mathbf{k}$ . En développant les fonctions d'onde à l'ordre le plus bas en  $\eta$

$$\varphi_k(M - \eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \eta + \mathcal{O}(\eta^3),$$

il vient à l'ordre le plus bas en  $\eta$ ,

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} d\mathbf{k}' d\mathbf{k} k'_2 k_2 \Phi_{\mathbf{k}'}(\epsilon) \Phi_{\mathbf{k}}^*(\epsilon) e^{-\frac{(1-\tau_M)\mathbf{k}'^2 + \tau_M \mathbf{k}^2}{2}} \\ \times \int_{-\infty}^M dy_1 \varphi_{k'_1}^*(y_1) \varphi_{k_1}(y_1) + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (4.68)$$

où nous avons permuté l'ordre des intégrales. Les fonctions d'onde forment

une base de l'espace de Hilbert :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^M dy_1 \varphi_{k'_1}^*(y_1) \varphi_{k_1}(y_1) &= \int_{-\infty}^M dy_1 \langle k'_1 | y_1 \rangle \langle y_1 | k_1 \rangle \\ &= \langle k'_1 | \left( \int_{-\infty}^M |y_1\rangle \langle y_1| \right) | k_1 \rangle = \langle k'_1 | k_1 \rangle = \delta(k'_1 - k_1), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation de fermeture sur les états propres de position entre  $-\infty$  et  $M$ . En faisant l'intégrale sur  $k'_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) &= \eta^2 \frac{4}{\pi} \int_0^\infty dk_1 dk_2 dk'_2 \left\{ \Phi_{\mathbf{k}'}(\epsilon) \Phi_{\mathbf{k}}(\epsilon) \right. \\ &\quad \left. \times k'_2 k_2 e^{-\frac{k_1^2 + (1-\tau_M)k'_2{}^2 + \tau_M k_2^2}{2}} \right\} + \mathcal{O}(\eta^3), \end{aligned} \quad (4.69)$$

où l'intégrale porte sur  $k_1$ ,  $k_2$  et  $k'_2$ . Il s'agit maintenant de développer les déterminants de Slater à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1, k_2}(\epsilon) &= \sqrt{\frac{1}{2!}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(0) & \phi_{k_1}(\epsilon) \\ \phi_{k_2}(0) & \phi_{k_2}(\epsilon) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(0) & \phi'_{k_1}(0) \\ \phi_{k_2}(0) & \phi'_{k_2}(0) \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{M} \Theta_2(q_1, q_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (4.70)$$

où nous avons utilisé le changement de variables  $q_i = k_i M$  et le déterminant

$$\Theta_2(q_1, q_2) = \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left( q_i^{j-1} \cos \left( q_i - j \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (4.71)$$

En faisant la même opération pour  $\Phi_{k_1, k'_2}(\epsilon)$ , on obtient le poids à l'ordre le plus bas en  $\eta$  et  $\epsilon$

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^2 W_{2,B}(M, \tau_M) + \mathcal{O}(\eta^3 \epsilon^2, \eta^2 \epsilon^3), \quad (4.72)$$

avec le terme de plus bas degré

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M, \tau_M) &= \frac{8}{\pi^3 M^7} \int_0^\infty dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2M^2}} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^\infty dq'_2 q'_2 \Theta_2(q_1, q'_2) e^{-(1-\tau_M) \frac{q'^2_2}{2M^2}} \int_0^\infty dq_2 q_2 \Theta_2(q_1, q_2) e^{-\tau_M \frac{q_2^2}{2M^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.73)$$



La factorisation des intégrales de la seconde ligne suggère la forme

$$W_{2,B}(M, \tau_M) = \frac{8}{\pi^3 M^7} \int_0^\infty dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2M^2}} \Upsilon_2(q_1|M, 1-\tau_M) \Upsilon_2(q_1|M, \tau_M), \quad (4.74)$$

avec les fonctions  $\Upsilon_2$ ,

$$\Upsilon_2(q_1|M, \tau_M) = \int_0^\infty dq_2 q_2 e^{-\tau_M \frac{q_2^2}{2M^2}} \Theta_2(q_1, q_2), \quad (4.75)$$

qui peuvent être également réécrites comme des déterminants :

$$\Upsilon_2(q_1|M, \tau_M) = \sqrt{\pi} \left( \frac{M}{\sqrt{2\tau_M}} \right)^2 e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}} \begin{vmatrix} \cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) & q_1 \cos(q_1 - \pi) \\ H_1\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) & \left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) \end{vmatrix}. \quad (4.76)$$

$H_1(x) = 2x$  et  $H_2(x) = 4x^2 - 2$  sont les polynômes de Hermite de degré un et deux respectivement, polynômes définis par

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (4.77)$$

Cette expression pour  $\Upsilon_2$  est obtenue en factorisant la dépendance en  $q_2$  dans la dernière ligne du déterminant, et en faisant l'intégration directement dans cette dernière ligne. Enfin, en développant les déterminants et en procédant aux intégrales sur  $q_1$ , nous obtenons une expression que nous devons encore normaliser. La normalisation possède un développement similaire en  $\eta$  et  $\epsilon$

$$Z_{2,B}(\eta, \epsilon) = K_{2,B} \eta^2 \epsilon^2 + \dots, \quad (4.78)$$

avec  $K_{2,B}$  un nombre que l'on peut calculer en intégrant sur  $M$  et  $\tau_M$  l'expression du poids  $W_{2,B}(M, \tau_M)$ , avec le résultat  $K_{2,B} = 1/\pi$ . L'expression pour la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$  de deux ponts belliqueux est finalement

$$\boxed{P_{2,B}(M, \tau_M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{[\tau_M(1-\tau_M)]^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M(1-\tau_M)}} \times \left\{ \frac{1}{4} H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2(1-\tau_M)}}\right) (1 - e^{-2M^2}) + M^2 e^{-2M^2} \left( H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) + H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2(1-\tau_M)}}\right) \right) + M^2 \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-2M^2} H_2(\sqrt{2}M) \right) \right\}, \quad (4.79)}$$

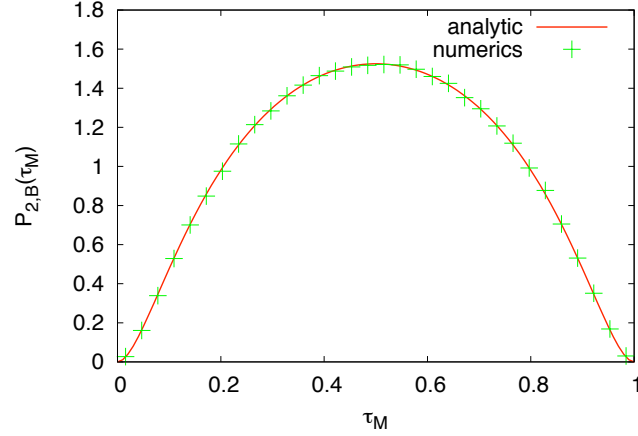


FIGURE 4.8 – Distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  pour  $N = 2$  ponts browniens belliqueux.

où nous avons gardé le polynôme de Hermite du second degré  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ .

Une intégration sur  $M$  donne la distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  pour  $N = 2$  ponts belliqueux

$$P_{2,B}(\tau_M) = 4 \left( 1 - \frac{1 + 10\tau_M(1 - \tau_M)}{[1 + 4\tau_M(1 - \tau_M)]^{5/2}} \right). \quad (4.80)$$

Comme attendu par les conditions périodiques, cette distribution est symétrique par rapport à  $\tau_M = 1/2$ . On peut réexprimer la distribution en fonction de la variable recentrée  $u_M = 2(\tau_M - 1/2)$ ,  $-1 \leq u_M \leq +1$ , de sorte que

$$P_{2,B}^{\text{centered}}(u_M) = 2 - \frac{5}{(2 - u_M^2)^{3/2}} + \frac{3}{(2 - u_M^2)^{5/2}}. \quad (4.81)$$

★ Pour  $\tau_M \rightarrow 0$ , la distribution du temps d’atteinte est

$$P_{2,B}(\tau_M) \approx 120\tau_M^2 + \mathcal{O}(\tau_M^3), \quad (\tau_M \rightarrow 0). \quad (4.82)$$

avec une expression identique lorsque  $\tau_M \rightarrow 1$  en remplaçant  $\tau_M$  par  $1 - \tau_M$ .

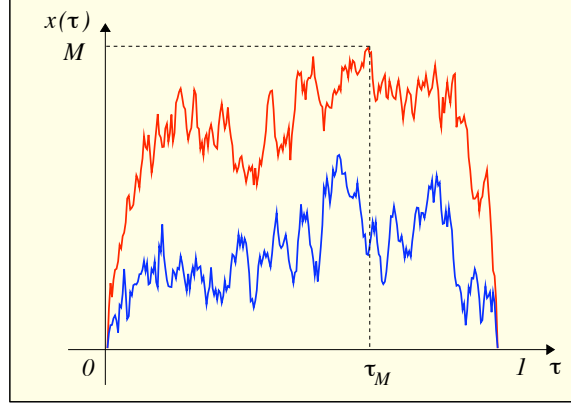


FIGURE 4.9 – Une réalisation de  $N = 2$  excursions browniennes belliqueuses, avec le maximum  $M$  et son temps d'atteinte  $\tau_M$

- ★ Au voisinage du maximum de la distribution en  $\tau_M = 1/2$ , le comportement est parabolique avec les coefficients (exprimés avec la variable recentrée  $u_m$ ) :

$$P_{2,B}^{\text{centered}}(u_M) \approx \left(4 - \frac{7}{2\sqrt{2}}\right) - \frac{15u_M^2}{8\sqrt{2}} + \mathcal{O}(u_M^3), \quad (\tau_M \rightarrow 1/2). \quad (4.83)$$

En intégrant la distribution jointe (4.79) sur  $\tau_M$  (par exemple avec le changement de variables  $\tau_M = (1 + \sin \theta)/2$ ), on retrouve la distribution du maximum

$$P_{2,B}(M) = \int_0^1 d\tau_M P_{2,B}(M, \tau_M) = 8Me^{-4M^2} - 8Me^{-2M^2} + 16M^3e^{-2M^2}, \quad (4.84)$$

résultat consistant avec celui de la référence [166] sous sa forme cumulée  $F_{2,B}(x) = \int_0^x P_{2,B}(M)dM = 1 - 4x^2e^{-2x^2} - e^{-4x^2}$ .

### $N = 2$ excursions belliqueuses

La méthode est la même, seul change le problème de mécanique quantique associé, et la régularisation aux points de départ et d'arrivée. Comme nous l'avons vu dans le cas  $N = 1$  excursion, les particules sont dans un puits de potentiel. Leur énergie est quantifiée, et les sommes seront discrètes.

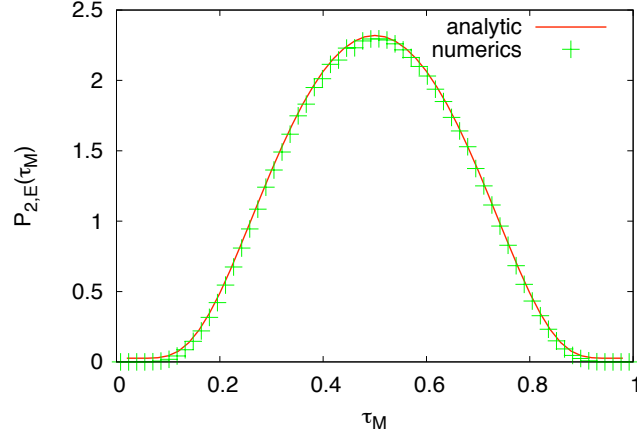


FIGURE 4.10 – Distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  pour  $N = 2$  excursions browniennes belliqueuses.

Pour la régularisation, nous prenons les points de départ et d’arrivée  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(1) = (\epsilon, 2\epsilon) = \boldsymbol{\varepsilon}$ , le premier marcheur ne pouvant pas partir exactement de l’origine. Le reste du calcul suit la même démarche, et est détaillé dans la publication [150] fournie en annexe B.3. Le résultat pour la distribution jointe s’exprime comme une triple somme

$$P_{2,E}(M, \tau_M) = \frac{\pi^{11}}{3M^{13}} \sum_{n_1, n_2, n_3 > 0} (-1)^{n_2+n_3} n_1^2 n_2^2 n_3^2 \times (n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [n_1^2 + \tau_M n_2^2 + (1-\tau_M)n_3^2]}. \quad (4.85)$$

Une intégration sur  $M$  donne la distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  :

$$P_{2,E}(\tau_M) = \int_0^\infty dM P_{2,E}(M, \tau_M) = \frac{1280}{\pi} \sum_{n_i > 0} (-1)^{n_2+n_3} \frac{(n_1 n_2 n_3)^2 (n_1^2 - n_2^2)(n_1^2 - n_3^2)}{[n_1^2 + \tau_M n_2^2 + (1-\tau_M)n_3^2]^6}, \quad (4.86)$$

représentée en figure 4.10.

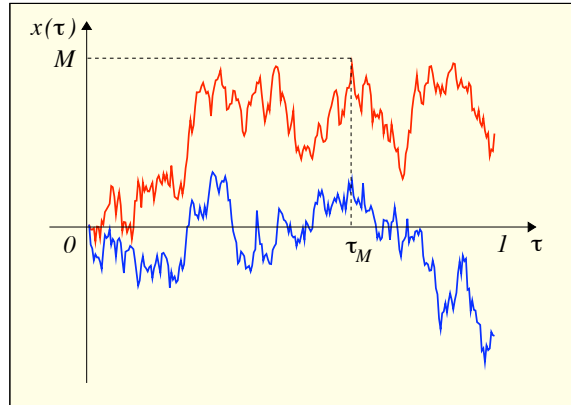


FIGURE 4.11 – Une réalisation d’une étoile brownienne à  $N = 2$  branches belliqueuses, avec le maximum  $M$  et son temps d’atteinte  $\tau_M$

- ★ Une analyse asymptotique détaillée dans la référence [150] (annexe B.3) permet d’obtenir le comportement de la distribution du temps  $\tau_M$  lorsque  $\tau_M \rightarrow 0$ ,

$$P_{2,E}(\tau_M) \approx \frac{8\pi^5}{5} \frac{1}{\tau_M^5} e^{-\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{\tau_M}}}, \quad (\tau_M \rightarrow 0). \quad (4.87)$$

Le comportement asymptotique lorsque  $\tau_M \rightarrow 1$  est identique en remplaçant  $\tau_M$  par  $1 - \tau_M$ .

### $N = 2$ étoiles belliqueuses

La régularisation intervient uniquement en  $\mathbf{x}(0) = (0, \epsilon) = \epsilon$ , et les deux points finals sont libres, compte-tenu de la condition de non-croisement (4.51). Le problème de mécanique quantique associé est le même que pour les ponts, avec des niveaux d’énergie continus. Les détails de calcul sont fournis dans [150]

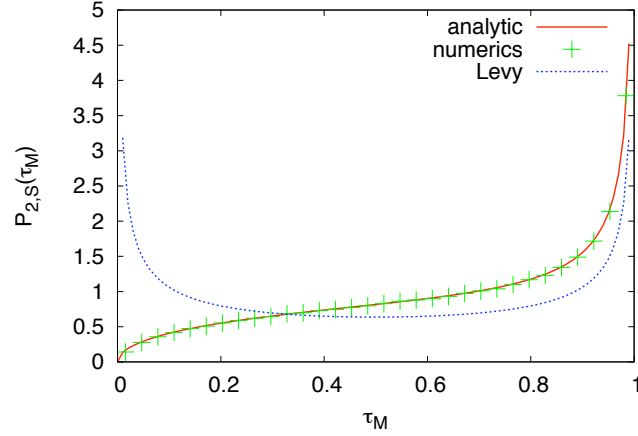


FIGURE 4.12 – Distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  d’une étoile brownienne à  $N = 2$  branches belliqueuses, et loi de Lévy (en pointillés bleu) pour une étoile à  $N = 1$  branche.

reproduit en annexe B.3. La distribution jointe s’écrit dans ce cas

$$\begin{aligned}
 P_{2,S}(M, \tau_M) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M^2}{[\tau_M(1-\tau_M)]^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}} \\
 & \times \left\{ \frac{1-\tau_M}{2\sqrt{2}M^2} H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) \operatorname{Erf}\left(\frac{M}{\sqrt{2}}\right) \right. \\
 & \quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{M} \frac{\tau_M(1-\tau_M)}{2-\tau_M} e^{-\frac{M^2}{2}} \\
 & \quad + \sqrt{2} \left(\frac{1-\tau_M}{2-\tau_M}\right)^{3/2} \operatorname{Erf}\left(\sqrt{\frac{1-\tau_M}{2-\tau_M}} \frac{M}{\sqrt{2}}\right) e^{-\frac{M^2}{2(2-\tau_M)}} \\
 & \quad \left. \times \left[ 1 - \frac{2-\tau_M}{M^2} \frac{1}{2} H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) \right] \right\} \quad (4.88)
 \end{aligned}$$

exprimée encore une fois à l’aide du polynôme de Hermite du second degré  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ . L’intégration sur  $M$  permet d’obtenir la distribution du

temps d'atteinte  $\tau_M$  pour  $N = 2$  étoiles belliqueuses :

$$P_{2,S}(\tau_M) = \frac{2}{\pi} \left( \arctan \left( \sqrt{\frac{\tau_M(1-\tau_M)}{2}} \right) + \frac{1}{1+\tau_M} \sqrt{\frac{2\tau_M}{1-\tau_M}} \right). \quad (4.89)$$

Bien entendu cette distribution n'est plus symétrique car nous n'avons pas imposé de condition périodique. Les comportements asymptotiques sont donnés par

★ lorsque  $\tau_M \rightarrow 0$ , le comportement est régulier

$$P_{2,S}(\tau_M) \approx \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \tau_M^{1/2} + \mathcal{O}(\tau_M^{3/2}), \quad (4.90)$$

★ et lorsque  $\tau_M \rightarrow 1$ , nous avons une divergence

$$P_{2,S}(\tau_M) \approx \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1-\tau_M)^{-1/2}, \quad (4.91)$$

comparable à la divergence de la loi de Lévy (4.49) obtenue pour  $N = 1$ .

#### 4.2.4 La pastèque à $N$ lignes et les matrices aléatoires

Nous considérons maintenant le cas de  $N$  ponts browniens belliqueux (pastèque à  $N$  lignes). Dans ce paragraphe, nous utilisons nos méthodes fermioniques pour calculer la distribution des positions à un instant donné  $0 < \tau_c < 1$ . Les méthodes présentées pour  $N = 2$  s'étendent à  $N$  quelconque : les mouvements browniens soumis à la condition de non-croisement (4.27) sont interprétés comme des particules fermioniques indépendantes (sans interaction mutuelle) et indiscernables. Les principes de la mécanique quantique suggèrent l'utilisation des déterminants de Slater pour les états propres, et dans la décomposition spectrale des propagateurs. La régularisation des chemins à l'origine devient  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{1} = (0, \epsilon, \dots, (N-1)\epsilon) = \boldsymbol{\epsilon}$ , avec des vecteurs à  $N$  composantes.

Nous souhaitons calculer la distribution des points intermédiaires  $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\tau_c)$  : encore une fois nous coupons l'intervalle de temps en deux parties  $[0, 1] = [0, \tau_c] \cup [\tau_c, 1]$  et calculons le produit des deux propagateurs libres fermioniques  $G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0)$  pour la première partie et  $G_0(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | \mathbf{y}, \tau_c)$  pour la

seconde partie. La constante de normalisation pour un paramètre de régularisation  $\epsilon > 0$  fixé est simplement le propagateur libre fermionique entre  $\tau = 0$  et  $\tau = 1$ . Le hamiltonien et les fonctions d'onde à une particule sont celui du problème libre (2.12) car nous n'imposons pas de conditions supplémentaires. Ainsi la probabilité jointe des points intermédiaires est donnée par

$$P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{G_0(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | \mathbf{y}, \tau_c) G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0)}{G_0(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | \boldsymbol{\epsilon}, 0)}, \quad (4.92)$$

normalisée lorsqu'on intègre sur les variables ordonnées  $y_1 < y_2 < \dots < y_N$  :

$$\int_{\text{ord}} d\mathbf{y} P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c) = 1. \quad (4.93)$$

Le propagateur libre à  $N$  particules fermioniques peut s'obtenir par décomposition spectrale :

$$G_0(\mathbf{b}, \tau_b | \mathbf{a}, \tau_a) = \frac{1}{N!} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \det_{1 \leq i, j \leq N} \phi_{k_i}(b_j) e^{-(\tau_b - \tau_a) \frac{\mathbf{k}^2}{2}} \det_{1 \leq m, n \leq N} \phi_{k_m}^*(a_n). \quad (4.94)$$

Calculons alors le propagateur  $G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0)$ . Par symétrie de l'intégrande par échange  $k_i \leftrightarrow k_j$ , le déterminant de Slater en  $\mathbf{y}$  est ramené à  $N!$  fois le produit de ses termes diagonaux :

$$G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{k} \prod_{1 \leq i \leq N} \phi_{k_i}(y_i) e^{-\tau_c \frac{\mathbf{k}^2}{2}} \det_{1 \leq m, n \leq N} \phi_{k_m}^*((n-1)\epsilon). \quad (4.95)$$

Le deuxième déterminant de Slater évalué en  $\boldsymbol{\epsilon}$  peut être calculé à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ . En développant l'exponentielle  $e^{-ik_m(n-1)\epsilon}$  et en ne gardant que l'ordre le plus bas par colonne ( $n$  est l'indice de colonne), il vient

$$\det_{1 \leq m, n \leq N} \phi_{k_m}^*((n-1)\epsilon) \simeq \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} (-i\epsilon)^{N(N-1)/2} \left[ \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n^n}{n!} \right] \det_{1 \leq m, n \leq N} k_m^{n-1}, \quad (4.96)$$

avec  $i^2 = -1$ , et où l'on reconnaît le déterminant de Vandermonde

$$\Delta_N(\mathbf{k}) = \det_{1 \leq m, n \leq N} k_m^{n-1}. \quad (4.97)$$



Ainsi, en factorisant ligne par ligne la dépendance en  $k_m$  dans l'expression (4.95), l'intégrale sur  $k_1, \dots, k_N$  se factorisant également, nous obtenons

$$G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0) \simeq \frac{(-i\epsilon)^{N(N-1)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[ \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n^n}{n!} \right]_{1 \leq m, n \leq N} \det \left( \int_{-\infty}^{+\infty} dk k^{n-1} \phi_k(y_m) e^{-\tau_c \frac{k^2}{2}} \right), \quad (4.98)$$

à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ . L'élément  $(m, n)$  de la matrice dont on prend le déterminant peut se récrire

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk k^{n-1} \phi_k(y_m) e^{-\tau_c \frac{k^2}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-i)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y_m^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-[iy_m k + \tau_c \frac{k^2}{2}]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tau_c}} (-i)^{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y_m^{n-1}} e^{-\frac{y_m^2}{2\tau_c}} \\ &= \frac{i^{n-1}}{\sqrt{\tau_c}} \frac{1}{(2\tau_c)^{\frac{n-1}{2}}} H_{n-1} \left( \frac{y_m}{\sqrt{2\tau_c}} \right) e^{-\frac{y_m^2}{2\tau_c}}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

où l'on a utilisé la définition des polynômes de Hermite (4.77). Lorsque nous prenons le déterminant de cette matrice, nous pouvons extraire tous les facteurs constants par ligne ou par colonne et nous ramener au déterminant du polynôme de Hermite

$$\det_{1 \leq m, n \leq N} \left[ H_{n-1} \left( \frac{y_m}{\sqrt{2\tau_c}} \right) \right] = \frac{2^{N(N-1)/2}}{(2\tau_c)^{N(N-1)/4}} \det_{1 \leq m, n \leq N} [y_m^{n-1}], \quad (4.100)$$

égalité obtenue par combinaison linéaire de colonnes, et où l'on reconnaît le déterminant de Vandermonde. En utilisant ces résultats, on trouve que le propagateur est égal à

$$G_0(\mathbf{y}, \tau_c | \boldsymbol{\epsilon}, 0) \simeq \frac{\epsilon^{N(N-1)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[ \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n^n}{n!} \right] \tau_c^{-N^2/2} \Delta_N(\mathbf{y}) e^{-\frac{\mathbf{y}^2}{2\tau_c}}, \quad (4.101)$$

à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ . Par symétrie, le second propagateur est

$$G_0(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | \mathbf{y}, 1) \simeq \frac{\epsilon^{N(N-1)/2}}{(2\pi)^{N/2}} \left[ \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n^n}{n!} \right] (1 - \tau_c)^{-N^2/2} \Delta_N(\mathbf{y}) e^{-\frac{\mathbf{y}^2}{2(1-\tau_c)}}, \quad (4.102)$$

à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$ . Enfin par des méthodes similaires, en particulier en utilisant la relation d'orthogonalité des polynômes de Hermite [1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}, \quad (4.103)$$

avec la fonction  $\Gamma(n)$  d'Euler, nous obtenons le facteur de normalisation à l'ordre le plus bas en  $\epsilon$  :

$$G_0(\epsilon, 1|\epsilon, 0) \simeq \frac{\epsilon^{N(N-1)}}{(2\pi)^{N/2}} \left[ \prod_{n=1}^{N-1} \frac{n^n}{n!} \right]^2 \prod_{i=1}^N \Gamma(i). \quad (4.104)$$

Ainsi en prenant la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous obtenons la distribution jointe des positions intermédiaires  $\mathbf{y}$  au temps  $\tau_c$  est

$$P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c) = \frac{[\tau_c(1-\tau_c)]^{-N^2/2}}{(2\pi)^{N/2} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} (\Delta_N(\mathbf{y}))^2 e^{-\frac{\mathbf{y}^2}{2\tau_c(1-\tau_c)}}. \quad (4.105)$$

Avec le changement de variable

$$\frac{y_i}{\sqrt{2\tau_c(1-\tau_c)}} = \lambda_i, \quad (4.106)$$

nous reconnaissons la distribution jointe  $P_{\text{GUE}}(\boldsymbol{\lambda})$  des valeurs propres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  de l'ensemble de matrices  $N \times N$  de l'ensemble gaussien unitaire (GUE), voir la formule (A.3) dans l'appendice A. Ceci nous permet de déterminer la distribution ponctuelle asymptotique du marcheur du haut :

$$\frac{x_N(\tau_c)}{\sqrt{2\tau_c(1-\tau_c)}} = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/6} \chi_2, \quad (N \rightarrow \infty), \quad (4.107)$$

avec  $\chi_2$  distribué selon Tracy-Widom :  $\mathbb{P}[\chi_2 \leq x] = F_{\text{GUE}}(x)$  [176].

Dans le même esprit que ce qui a été présenté dans la première section, on peut montrer [61] que le processus asymptotique auquel obéit le marcheur du haut  $x_N(\tau)$  est également le processus d'Airy, ceci résultant encore une fois d'un système de chemins qui ne se croisent pas. La correspondance précise est

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2 \left( x_N \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2N^{1/3}} u \right) - \sqrt{N} \right)}{N^{-1/6}} = \mathcal{A}(u) - u^2. \quad (4.108)$$

Cette équivalence motive le calcul de la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$  pour notre système de pastèques à  $N$  lignes, en particulier pour en extraire la distribution de  $\tau_M$ , comparable par l'intermédiaire de la limite asymptotique ci-dessus, à la distribution de la position du maximum  $x_m$  du PNG ou du point final  $u_m$  du polymère dirigé en milieu aléatoire.

#### 4.2.5 Distribution jointe de $(M, \tau_M)$ pour les $N$ -pastèques

Une extension des techniques fermioniques présentées pour le cas  $N = 2$  permet d'obtenir la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$  pour  $N$  ponts browniens belliqueux, avec le résultat :

$$P_{N,B}(M, \tau_M) = B_{N,B} \det [D_{N,B}] {}^t \mathbf{U}(M, 1 - \tau_M) D_{N,B}^{-1} \mathbf{U}(M, \tau_M), \quad (4.109)$$

avec la constante de normalisation

$$B_{N,B}^{-1} = \sqrt{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} j! 2^j, \quad (4.110)$$

le vecteur colonne  $\mathbf{U}$  de composantes

$$U_j(M, t) = t^{-\frac{j+1}{2}} H_j \left( \frac{M}{\sqrt{2t}} \right) e^{-\frac{M^2}{2t}}, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (4.111)$$

avec  $H_j(x)$  les polynômes de Hermite, et la matrice  $D_{N,B}$  fonction de  $M$  d'expression

$$(D_{N,B})_{i,j} = (-1)^{i-1} H_{i+j-2}(0) - e^{-2M^2} H_{i+j-2}(\sqrt{2}M), \quad i, j = 1, 2; \dots, N. \quad (4.112)$$

Cette matrice intervient dans l'expression de la distribution cumulée du maximum seul [57] :

$$F_{N,B}(M) = \mathbb{P} \left[ \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) \leq M \right] = \frac{1}{\prod_{j=1}^{N-1} (j! 2^j)} \det D_{N,B}. \quad (4.113)$$

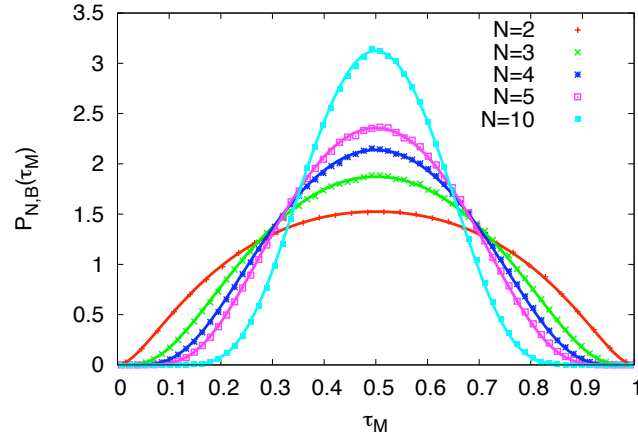


FIGURE 4.13 – Distributions du temps d’atteinte  $\tau_M$  pour  $N$  ponts browniens belliqueux, avec  $N = 2, 3, 4, 5, 10$ , en traits pleins pour les résultats analytiques, et avec les symboles pour les résultats des simulations numériques.

Pour des valeurs de  $N$  jusqu’à  $\sim 20$ , une intégration sur  $M$  de la formule (4.109) permet de calculer la distribution du temps d’atteinte  $\tau_M$  (au moins à l’aide de logiciels de calcul formel). Nous représentons en figure 4.13 les distributions du temps d’atteinte  $\tau_M$  obtenues exactement pour  $N = 2, 3, 4, 5, 10$ , et les comparons aux résultats des simulations numériques, sans paramètre d’ajustement.

Les détails du calcul ainsi que d’autres propriétés et les résultats pour  $N$  excursions belliqueuses sont fournis dans l’article long [150] reproduit en annexe B.3. Pour les excursions la structure de la distribution jointe est identique, et on retrouve la matrice identifiée par Kobayashi, Izumi et Katori [112] intervenant dans la distribution du maximum. La distribution asymptotique lorsque  $N \rightarrow \infty$  du maximum  $M$  de  $N$  excursions belliqueuses correctement mis à l’échelle a été calculée récemment par des méthodes de polynômes orthogonaux par Forrester, Majumdar et Schehr [75], en lien avec la théorie de Yang-Mills bidimensionnelle sur la sphère.

## Simulations numériques

Dans la référence [150] nous présentons en détail l'équivalence entre le processus des  $N$  ponts browniens belliqueux et un processus défini par la dynamique des valeurs propres d'une matrice aléatoire hermitienne dont les entrées indépendantes sont des ponts browniens : c'est un type particulier du mouvement brownien de Dyson [46]. Nous utilisons en particulier cette équivalence pour générer des échantillons des  $N$  ponts browniens jusqu'à un nombre  $N = 20$  pour générer suffisamment de statistiques. Cette restriction à  $N \leq 20$  correspond à des simulations numériques de temps raisonnable (inférieur à 24 heures) pour avoir de l'ordre de  $10^6$  échantillons.

En figure 4.13, nous comparons la distribution du temps d'atteinte  $\tau_M$  obtenue exactement à partir de l'intégration sur  $M$  de la formule (4.109) pour les valeurs de  $N$  indiquées, et celle obtenue par l'échantillonnage numérique que nous venons de décrire. Ces courbes se superposent sans aucun paramètre d'ajustement.

Notons qu'il existe également un algorithme exact de construction de ponts qui ne se croisent pas sur réseau [16]. Cependant les effets de taille finie générés par le réseau pour la statistique du maximum et de sa position rendent cet algorithme moins efficace pour notre étude que celui défini par le mouvement brownien sur les matrices.

## Un mot sur la constante de normalisation

La détermination de la constante de normalisation  $B_{N,B}$  est délicate, étant donné que l'intégration directe de la formule (4.109) pour  $N$  quelconque est une tâche difficile. La technique que nous avons utilisée dans [150] est de voir l'intégrale sur  $\tau_M$  de la distribution jointe (4.109) comme un produit de convolution évalué au temps final  $T$  que l'on réinstalle comme variable annexe. Nous calculons l'intégrale sur  $\tau_M$  en prenant la transformée de Laplace du produit de convolution. En inversant la transformée de Laplace, et en prenant finalement  $T = 1$ , nous sommes en mesure d'identifier la constante de normalisation de  $P_{N,B}(M) = \int_0^1 d\tau_M P_{N,B}(M, \tau_M)$  avec la dérivée de la distribution cumulée (4.113). Ce calcul de la constante de normalisation est assez complexe (les détails sont présentés dans [150]), et nous n'avons pas trouvé de moyen plus direct (ou au moins intuitif). Il est toutefois possible qu'une telle méthode n'existe pas du fait de la construction même du calcul de la distribution jointe de  $(M, \tau_M)$ . En effet, pour un paramètre de régularisation

fixé  $\eta > 0$ , le temps  $\tau_M$  du point  $x(\tau_M) = M - \eta < M$  est un paramètre, à l'instar du temps de coupure  $\tau_c$  de la formule (4.30). C'est la limite  $\eta \rightarrow 0$  qui donne au point  $x(\tau_M) = M$  le statut de maximum (presque sûrement), et confère alors à  $\tau_M$  le caractère de *temps d'atteinte du maximum* qui est une variable aléatoire.

### Les pastèques déformées

Nous pouvons effectuer les mêmes types de calculs pour une pastèque déformée, c'est-à-dire composée de ponts belliqueux entre  $x = 0$  à  $\tau = 0$  et  $x = Y$  à  $\tau = 1$ . Sous forme régularisée, cela donne  $\mathbf{x}(0) = (0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, (N-1)\epsilon) = \boldsymbol{\epsilon}$  et  $\mathbf{x}(1) = (Y, Y + \epsilon, Y + 2\epsilon, \dots, Y + (N-1)\epsilon)$ . Premièrement, nous pouvons calculer exactement la distribution cumulée du maximum

$$F_{N,B}(M|Y) = \frac{2^{-N(N-1)/2} e^{NY^2/2}}{\prod_{i=1}^N \Gamma(i)} \det(D_{N,B}^Y(M)), \quad (4.114)$$

avec la matrice "déformée" donnée par, pour  $1 \leq i, j \leq N$  :

$$D_{ij}^Y(M) = (-1)^{j-1} e^{-\frac{Y^2}{2}} H_{i+j-2} \left( \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) - e^{-\frac{(2M-Y)^2}{2}} H_{i+j-2} \left( \frac{2M-Y}{2} \right). \quad (4.115)$$

La distribution jointe du maximum et de son temps d'atteinte  $\tau_M$  est donnée par une formule avec la même structure :

$$P_{N,B}(M, \tau_M|Y) = B_{N,B}^Y \det D_{N,B}^Y \times {}^t \mathbf{U}(M - Y, 1 - \tau_M) (D_{N,B}^Y)^{-1} \mathbf{U}(M, \tau_M), \quad (4.116)$$

avec la même expression pour le vecteur  $\mathbf{U}$  que la formule (4.111), et une constante de normalisation  $B_{N,B}^Y$  pour laquelle nous ne connaissons que la valeur pour  $Y = 0$  (4.110).

## 4.3 Comparaison et discussion

Dans ce paragraphe nous comparons nos résultats théoriques obtenus pour la distribution du temps d'atteinte  $\tau_M$  du maximum du processus de  $N$  ponts

browniens belliqueux, avec les distributions de la position  $x_m$  du maximum du PNG ou de l'extrémité  $u_m$  libre du polymère dirigé en milieu aléatoire.

A ce titre nous avons échantillonné numériquement une version discrétisée du PNG de Prähofer et Spohn, pour lequel nous maîtrisons exactement les amplitudes de la variable d'échelle  $y_m$  définie en formule (4.22). Ces simulations ont été faites en faisant croître l'interface en gouttelette pendant des temps  $T = 64, 90$  en unités de temps arbitraires. La variable d'échelle est

$$y_m = \frac{x_m}{T^{2/3}}. \quad (4.117)$$

Nous avons gardé la version du polymère dirigé présentée dans le chapitre précédent, pour lequel nous ne connaissons pas l'amplitude de la variable d'échelle  $u_m$  contrairement au modèle de Johansson présenté dans la première partie de ce chapitre. La variable d'échelle est

$$y_m = \frac{u_m}{aL^{2/3}}, \quad (4.118)$$

avec  $a$  une amplitude non connue *a priori*, et  $L$  la longueur de polymère (qui correspond au temps  $T$  du PNG). Ainsi nous avons ajusté cette amplitude  $a$  pour la distribution de la position de l'extrémité du polymère que nous avons construit à partir de l'échantillonnage numérique présenté au chapitre précédent. Nous avons utilisé des simulations de ce polymère pour des tailles  $L = 100, 200$  avec la même unité que pour le PNG.

La distribution du modèle de pastèque a été mise à l'échelle en utilisant la variable

$$y_m = \frac{\tau_M - 1/2}{N^{-1/3}}, \quad (4.119)$$

pour  $N = 12, 14, 16$ .

Nous constatons en figure 4.14 que les distributions d'échelles semblent se superposer d'un côté pour les pastèques, de l'autre côté pour le PNG et le polymère (ajustement de  $a$ ). Cependant ces deux groupes de courbes ne se superposent pas ensemble, et sont toutes deux mal décrites par une distribution gaussienne. Un argument de Zhang et de Halpin-Healy [90] \* suggère que la distribution d'échelle de la position de l'extrémité du polymère dirigé se comporte comme  $\exp(-Ay_m^3)$  lorsque  $|y_m| \gg 1$ , avec  $A$  une constante non

---

\*Je remercie Joachim Krug de m'avoir indiqué la formule (5.40) de cette référence.

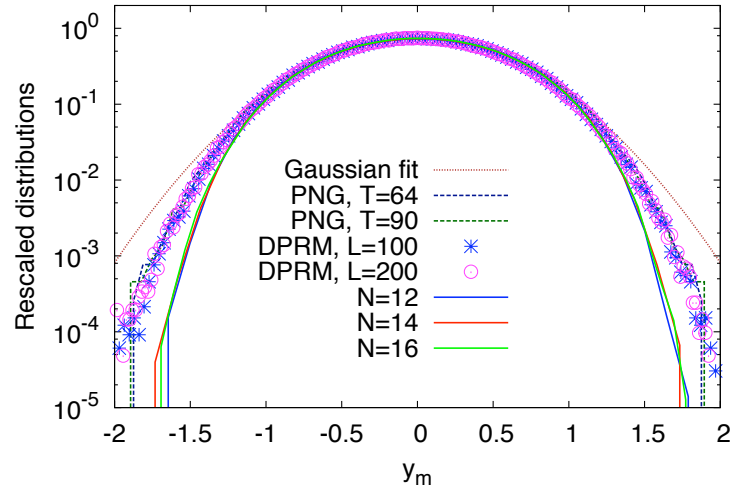


FIGURE 4.14 – Distributions de la variable d'échelle  $y_m$  correspondant : à  $\tau_M$  pour les ponts, à  $x_m$  pour le PNG et à  $u_m$  pour le polymère dirigé, en échelle log-linéaire. Une courbe gaussienne est également représentée.

déterminée par leur analyse. Nos données sont en accord avec ce type de décroissance, quoiqu'il semble aventureux de donner une détermination précise de la constante  $A$ . En effet, les données indiquent que le régime d'échelle obtenu en  $T \rightarrow \infty$  pour le PNG,  $L \rightarrow \infty$  pour le polymère et  $N \rightarrow \infty$  pour les pastèques semble être encadré par les courbes que nous présentons en échelle logarithmique en figure 4.14. Ceci ne permet pas de conclure quant à la valeur précise de  $A$  d'une part, et cela ne nous renseigne pas sur la région  $y_m \sim 0$ .

Le problème exact a été résolu récemment par Moreno Flores, Quastel et Remenik [73] qui obtiennent une formule pour la distribution jointe du maximum  $\xi_m$  et de sa position  $y_m$  du processus  $\mathcal{A}(y) - y^2$ .





---

## Conclusion et perspectives

---

La statistique d'extrêmes de variables aléatoires fortement corrélées est un domaine actif de la physique statistique. En effet la plupart des processus stochastiques qui rendent compte de phénomènes tels que la croissance d'interfaces abordée dans ce manuscrit génèrent des systèmes fortement corrélés. La caractérisation de ces systèmes *via* leur statistique d'extrêmes est pertinente tant d'un point de vue pratique dans le contrôle statistique des événements rares, que d'un point de vue théorique en ce qui concerne la physique des milieux désordonnés, comme pointé par Bouchaud et Mézard [17].

Les travaux menés dans le cadre de cette thèse s'inscrivent dans cette caractérisation des statistiques d'extrêmes d'objets présentant de fortes corrélations : des interfaces de type Edwards-Wilkinson (chapitre 2) et Kardar-Parisi-Zhang (chapitre 4), et de systèmes élastiques en milieu désordonné (chapitre 3). Ces derniers représentent une extension des interfaces équilibrées (même élasticité) lorsque le substrat présente des défauts, et sont liés aux interfaces en croissance de la classe KPZ par le biais du polymère dirigé en milieu aléatoire, un des modèles les plus emblématiques de la physique des milieux désordonnés.

Les chapitres 2 et 3 ont pour but de caractériser le maximum de la hauteur relative d'une interface élastique, respectivement en l'absence et en présence de désordre. Schehr et Majumdar [164] ont démontré l'universalité de la distribution d'Airy pour tout modèle de type SOS (sans désordre). Les travaux du chapitre 3 montrent que cette universalité s'étend au modèle SOS sur un substrat désordonné, équivalent à la classe des structures périodiques dans leur état fondamental. Dans les autres cas traités les distributions du maximum sont différentes de la distribution d'Airy, et des interfaces gaussiennes de

même exposant de rugosité  $\zeta$ , ce qui implique que les propriétés géométriques liées au maximum relatif sont liées au caractère non-gaussien des interfaces générées en milieu désordonné. Cependant les différences restent minimales, et les interfaces gaussiennes fournissent une approximation utile par les résultats exacts qui y sont associés.

Pour le régime du dépiégeage, des résultats du groupe de renormalisation fonctionnel [42] permettent de caractériser d'un point de vue théorique ces différences. Les résultats que nous apportons pour le régime de l'état fondamental motive une meilleure compréhension théorique de ces systèmes. Une approche envisageable dans ce cadre consisterait en l'adaptation de méthodes de renormalisation dans l'espace réel pour des marcheurs aléatoires en milieu aléatoire (le problème de Sinai) [43, 94] pour le calcul des statistiques d'extrêmes.

Pour les chapitres 2 et 4 nous avons utilisé et développé des méthodes d'intégrales de chemin sur des processus dérivés du mouvement brownien. Cette approche analytique s'inscrit dans la gamme d'outils théoriques *intuitifs* de la physique statistique, dont la relative simplicité conceptuelle ne restreint guère la qualité et l'exactitude des résultats obtenus. Cette approche par les intégrales de chemin se révèle être un outil puissant dans l'étude des fonctionnelles du mouvement brownien [120], en particulier pour les statistiques d'extrêmes qui y sont associées [124, 127, 166, 134, 148, 125, 150]. Le groupe de renormalisation dans l'espace réel est une autre méthode qui permet de traiter les statistiques d'extrêmes d'un mouvement brownien avec différentes contraintes [163], mais une implémentation de la condition de non-croisement pour plusieurs marcheurs n'a pas encore été réalisée.

Les calculs exposés au chapitre 4 permettent d'obtenir des résultats précis avec des méthodes intuitives. La distribution jointe du maximum  $M$  et du temps d'atteinte  $\tau_M$  pour le modèle de pastèques (4.109) possède une structure similaire à la formule proposée par Moreno Flores, Quastel et Remenik récemment [73], obtenue directement sur le processus d'Airy<sub>2</sub>  $\mathcal{A}(y) - y^2$  par des manipulations de noyaux non-triviales. Le pas à franchir à partir de notre formule (4.109) est de prendre la limite asymptotique  $N \rightarrow \infty$ . Les techniques récentes utilisant les polynômes orthogonaux [75, 135] puisant leur inspiration dans les travaux (dans le cadre de la QCD) de Gross et Matytsin [83] sont une piste intéressante pour y parvenir.

Cette approche *via* le modèle de pastèques [166, 149, 150] s'inscrit dans les processus de chemins qui ne se croisent pas [144, 145, 101, 102, 57], et

fournit une alternative intuitive aux méthodes rigoureuses de manipulations de noyaux et de déterminants de Fredholm [34, 73], aux méthodes d'ansatz de Bethe [26, 41, 25], ou encore aux méthodes de résolution exacte de l'équation KPZ (par transformation de Cole-Hopf et théorie des répliques) [162, 3, 146], utilisées pour déterminer :

- ★ les fluctuations de l'énergie du polymère dirigé avec les deux extrémités fixées, qui correspond aux fluctuations de hauteur de l'interface KPZ en géométrie courbe, et dans notre cas aux fluctuations de hauteur du dernier marcheur du modèle de pastèques :  $F_{\text{GUE}}(x)$  ;
- ★ les fluctuations de l'énergie du polymère dirigé avec une extrémité libre, qui correspond au maximum de l'interface KPZ en géométrie courbe (ou aux fluctuations de hauteur en géométrie plate), et au maximum du modèle de pastèques :  $F_{\text{GUE}}(2^{2/3}x)$  ;
- ★ les fluctuations de position de l'extrémité libre du polymère dirigé, qui correspond à la position du maximum de l'interface KPZ, ou encore au temps d'atteinte du maximum dans notre modèle de pastèques.

En dépit des résultats récents exacts pour la distribution jointe du maximum  $\xi_m$  et de son temps d'atteinte  $y_m$  pour le processus asymptotique  $\mathcal{A}(y) - y^2$ , une formule explicite pour le dernier point n'est pas encore proposée, ni une caractérisation précise de son comportement asymptotique  $\sim \exp(-y_m^3)$  conjecturé par l'argument de Zhang et Halpin-Healy [90] et confirmé par nos analyses.



---

# Éléments de la théorie des matrices aléatoires

---

Cette annexe résume les résultats de la théorie des matrices aléatoires utilisés dans le texte. Après une présentation succincte des ensembles gaussiens, nous examinerons la distribution de la plus grande valeur propre. Ces notes sont tirées du livre de Mehta [132], des articles originaux de Tracy et Widom [175, 176], dont les résultats essentiels sont présentés très clairement par Nadal et Majumdar [135], et du cours de Ferrari [61].

## A.1 Ensembles gaussiens

La théorie des matrices aléatoires a pour objet d'analyser les propriétés statistiques des valeurs propres de matrices dont les entrées sont des variables aléatoires. Dans cette annexe, nous nous restreignons aux ensembles gaussiens : les entrées indépendantes de la matrice sont des nombres gaussiens. Selon les symétries de la matrice de taille  $N \times N$  nous distinguons les trois principales classes :

- ★ l'ensemble gaussien orthogonal **GOE** composé de matrices réelles symétriques, d'indice  $\beta = 1$  ;
- ★ l'ensemble gaussien unitaire **GUE** composé de matrices complexes hermi-

tiennes, d'indice  $\beta = 2$  ;

- ★ l'ensemble gaussien symplectique **GSE** composé de matrices quaternioniques auto-duales, d'indice  $\beta = 4$ .

Pour l'ensemble **GOE**, il y a  $N(N + 1)/2$  éléments de matrices réels indépendants. Pour l'ensemble **GUE**, les entrées indépendantes sont complexes hors diagonales et réels sur la diagonale, ce qui fait  $N^2$  éléments réels indépendants. Pour **GSE**, les entrées indépendantes sont quaternioniques hors diagonale et réelles sur la diagonale : il y a  $N(2N - 1)$  éléments réels indépendants. Dans le texte, nous sommes confrontés exclusivement aux deux premiers ensembles **GOE** et **GUE**.

### A.1.1 Mesure sur les matrices

Soit  $H$  une matrice  $N \times N$  de l'un des trois ensembles **GOE**, **GUE** ou **GSE**, alors la mesure gaussienne sur les entrées de la matrice est :

$$\mu_\beta(H)dH = \exp\left(-\frac{\beta}{2}\text{Tr}H^2 + a_\beta\right)dH, \quad (\text{A.1})$$

où  $a_\beta$  est un réel qui assure la normalisation, et la mesure plate  $dH$  :

$$dH = \begin{cases} \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} dH_{ij} & \beta = 1 \text{ GOE}, \\ \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} d\Re H_{ij} d\Im H_{ij} & \beta = 2 \text{ GUE}, \\ \prod_{i=1}^N dH_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq N} \prod_{\lambda=0}^3 dH_{ij}^{(\lambda)} & \beta = 4 \text{ GSE}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

où  $\Re H_{ij}$  et  $\Im H_{ij}$  sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de l'élément de matrice  $H_{ij}$  pour le cas **GUE**, et  $H_{ij}^{(\lambda)}$  est la composante  $\lambda = 0, 1, 2, 3$  dans la base des quaternions  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$  pour le cas **GSE**.

La mesure est invariante par transformation  $H \rightarrow X^{-1}HX$  avec  $X$  une matrice orthogonale pour **GOE**, unitaire pour **GUE** et symplectique pour **GSE**, et chaque entrée réelle indépendante est une variable aléatoire gaussienne d'après (A.1), d'où le nom des ensembles.

Toute matrice de l'un des trois ensemble est diagonalisable et de valeurs propres réelles. Il est possible de donner la distribution jointe des valeurs propres pour ces trois ensembles.

### A.1.2 Distribution jointe des valeurs propres

Soit  $H$  une matrice de l'un des trois ensembles ci-dessus, munis de la mesure (A.1). Alors la distribution jointe des  $N$  valeurs propres  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$  s'écrit :

$$P_\beta(\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\lambda} = C_{N\beta} (\Delta_N(\boldsymbol{\lambda}))^\beta e^{-\frac{\beta}{2}\boldsymbol{\lambda}^2}, \quad (\text{A.3})$$

avec le déterminant de Vandermonde

$$\Delta_N(\boldsymbol{\lambda}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} |\lambda_j - \lambda_i| = \det_{1 \leq i, j \leq N} \lambda_i^{j-1}, \quad (\text{A.4})$$

et  $C_{N\beta}$  la constante donnée par une intégrale de Selberg [132]

$$C_{N\beta}^{-1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} \beta^{-\frac{N}{2} - \beta \frac{N(N-1)}{4}} \left[ \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \right]^{-N} \prod_{j=1}^N \Gamma\left(1 + \frac{\beta j}{2}\right), \quad (\text{A.5})$$

assurant la normalisation

$$\int P_\beta(\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_\beta(\lambda_1, \dots, \lambda_N) d\lambda_1 \dots d\lambda_N = 1. \quad (\text{A.6})$$

Nous obtenons dans le chapitre 4.2.1 la formule (4.105) : la distribution des positions de notre modèle de pastèques est, à un facteur d'échelle dépendant du temps de coupure  $\tau_c$ , la distribution jointe des valeurs propres  $P_2(\boldsymbol{\lambda}) = P_{\text{GUE}}(\boldsymbol{\lambda})$  dans le texte. En effet en reprenant (4.105) nous avons :

$$P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c)d\mathbf{y} = \frac{2^{\frac{N^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} \frac{(\Delta_N(\mathbf{y}))^2}{[2\tau_c(1-\tau_c)]^{\frac{N(N-1)}{2}}} e^{-\frac{\mathbf{y}^2}{2\tau_c(1-\tau_c)}} \prod_{j=1}^N \frac{dy_j}{\sqrt{2\tau_c(1-\tau_c)}}, \quad (\text{A.7})$$

où l'on identifie  $P_{\beta=2}(\boldsymbol{\lambda})$  de (A.3) en posant  $\lambda_i = y_i / \sqrt{2\tau_c(1-\tau_c)}$  :

$$P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c)d\mathbf{y} = \frac{2^{\frac{N^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} C_{N2}^{-1} P_{\beta=2}(\boldsymbol{\lambda})d\boldsymbol{\lambda}. \quad (\text{A.8})$$



Or la distribution jointe  $P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c)$  du membre de gauche est normée de sorte que l'intégration ordonnée sur le domaine  $-\infty < y_1 < y_2 < \dots < y_N < \infty$  donne 1 (ce domaine ordonné porte le nom de chambre de Weyl). Or pour une intégrande  $f(x_1, \dots, x_N)$  symétrique par permutation de ses arguments, nous avons

$$\int_{\text{ord}} d\mathbf{x} f(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N!} \int f(x_1, \dots, x_N), \quad (\text{A.9})$$

où l'intégrale dans le membre de droite porte sur le domaine  $\mathbb{R}^N$  (sans restriction d'ordre). Ainsi

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} P_{\text{jointe}}(\mathbf{y}, \tau_c) = \frac{1}{N!} \frac{2^{\frac{N^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} C_{N2}^{-1} \int P_{\beta}(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda} \\ &= \frac{1}{N!} \frac{2^{\frac{N^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \prod_{i=1}^N \Gamma(i)} C_{N2}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

et, avec la propriété  $N! = \Gamma(N+1)$ , nous retrouvons bien avec notre calcul sur le modèle de pastèques (4.105) la constante de normalisation  $C_{N2}$

$$C_{N2}^{-1} = (2\pi)^{\frac{N}{2}} 2^{-\frac{N^2}{2}} \prod_{j=1}^N \Gamma(1+j),$$

donnée en (A.5) en posant  $\beta = 2$ .

### A.1.3 Densité de valeurs propres

Une observable macroscopique est la densité de valeurs propres, c'est-à-dire la probabilité de trouver une valeur propre entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  :

$$\rho_N(\lambda) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \right\rangle, \quad (\text{A.11})$$

où la moyenne est prise sur la mesure jointe des valeurs propres (A.3),

$$\rho_N(\lambda) = \int d\lambda_2 \dots \int d\lambda_N P_{\beta}(\lambda, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (\text{A.12})$$

par symétrie de la distribution par permutations des  $\lambda_i$ . Cette densité (aussi appelé fonction de corrélation à un point) est normalisée, de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_N(\lambda) d\lambda = 1. \quad (\text{A.13})$$

Un résultat de Wigner [189] est la loi du demi-cercle. Lorsque  $N \rightarrow \infty$ , la densité de valeurs propres est nulle en dehors du support fini  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$  et suit un demi-cercle :

$$\rho_N(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} g\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2N}}\right), \quad (N \rightarrow \infty, |\lambda| \leq \sqrt{2N}), \quad (\text{A.14a})$$

avec la fonction d'échelle

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} & \text{pour } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{A.14b})$$

Cette loi permet de déduire que la valeur propre maximale

$$\lambda_{\max} = \max(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N), \quad (\text{A.15})$$

est à l'ordre dominant centrée en  $\sqrt{2N}$  (le bord du support de la densité) :

$$\langle \lambda_{\max} \rangle = \sqrt{2N} + o(\sqrt{N}), \quad (N \rightarrow \infty). \quad (\text{A.16})$$

## Fonctions de corrélation et noyau

De manière générale les fonctions de corrélation à  $n$  points s'expriment comme le déterminant d'une matrice  $n \times n$  dont l'élément de matrice  $(i, j)$  est  $K_N(\lambda_i, \lambda_j)$ , où  $K_N(x, y)$  est le noyau pour l'ensemble de matrices de taille  $N \times N$ . En particulier pour le cas  $\beta = 2$  des matrices de l'ensemble GUE, ce noyau s'exprime en fonction des polynômes de Hermite normalisés  $\tilde{H}_n(x)$

$$\tilde{H}_n(x) = [2^n n! \sqrt{\pi}]^{-1/2} H_n(x), \quad (\text{A.17})$$

avec  $H_n(x)$  défini dans la formule (4.77). Introduisons alors le noyau défini par

$$K_N(x, y) = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{H}_k(x) \tilde{H}_k(y). \quad (\text{A.18})$$

Avec des manipulations similaires à celles du paragraphe 4.2.4, on peut exprimer la distribution jointe des valeurs propres de GUE par

$$P_{\text{GUE}}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{N!} \det_{1 \leq i, j \leq N} K_N(\lambda_i, \lambda_j). \quad (\text{A.19})$$

La fonction de corrélation à  $n$  points peut alors être exprimée par [132]

$$\begin{aligned} \rho_N^{(n)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \int d\lambda_{n+1} \dots \int d\lambda_N P(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \\ &= \frac{(N-n)!}{N!} \det_{1 \leq i, j \leq n} K_N(\lambda_i, \lambda_j). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

La loi de Wigner (A.14) peut être retrouvée en utilisant l'asymptote

$$K_N(\lambda, \lambda) \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi} (2N - \lambda^2) & \text{si } |\lambda| < \sqrt{2N} \\ 0 & \text{si } |\lambda| > \sqrt{2N} \end{cases}, \quad (N \rightarrow \infty). \quad (\text{A.21})$$

## A.2 Distributions de Tracy et Widom

Par une étude du comportement du noyau lorsque  $\lambda$  est au bord de la *mer de Wigner*  $[-\sqrt{2N}, \sqrt{2N}]$ , Tracy et Widom [175, 176] ont obtenu la distribution des fluctuations de la plus grande valeur propre (au voisinage de  $\sqrt{2N}$ ). Leur résultat est que les fluctuations de la plus grande valeur propre sont à l'échelle

$$\lambda_{\max} \approx \sqrt{2N} + a_\beta \frac{1}{N^{1/6}} \chi_\beta, \quad (N \rightarrow \infty), \quad (\text{A.22})$$

avec les coefficients  $a_{1,2} = 1/\sqrt{2}$  et  $a_4 = 2^{-7/6}$ , et  $\chi_\beta$  une variable aléatoire indépendante de  $N$ , dont la distribution cumulée est donnée par

$$\mathbb{P}[\chi_\beta \leq x] = F_\beta(x), \quad (\text{A.23})$$

avec les distributions de Tracy-Widom pour les trois ensembles gaussiens GUE ( $\beta = 2$ ), GOE ( $\beta = 1$ ) et GSE ( $\beta = 4$ ) :

$$F_2(x) = \exp \left( - \int_x^\infty (z-x)q^2(z) dz \right), \quad (\text{A.24a})$$

$$F_1(x) = [F_2(x)]^{1/2} \exp \left( \frac{1}{2} \int_x^\infty q(z) dz \right), \quad (\text{A.24b})$$

$$F_4(x) = [F_2(x)]^{1/2} \cosh \left( \frac{1}{2} \int_x^\infty q(z) dz \right), \quad (\text{A.24c})$$

où  $q(z)$  est la solution de l'équation différentielle de Painlevé II

$$q''(z) = 2q^3(z) + zq(z), \quad (\text{A.25})$$

avec le comportement asymptotique  $q(z) \sim \text{Ai}(z)$  lorsque  $z \rightarrow \infty$ . Les comportements asymptotiques de la densité de probabilité  $F'_\beta(x)$  sont données par :

$$F'_\beta(x) \sim \begin{cases} \exp \left[ -\frac{\beta}{24}|x|^3 \right] & (x \rightarrow -\infty), \\ \exp \left[ -\frac{2\beta}{3}x^{3/2} \right] & (x \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (\text{A.26})$$

La distribution de Tracy-Widom de GUE  $F_2(x) = F_{\text{GUE}}(x)$  s'exprime comme le déterminant de Fredholm

$$F_{\text{GUE}}(x) = \det(I - K_{\text{Ai}})_{L^2[x, \infty)}, \quad (\text{A.27})$$

de l'opérateur ayant le noyau d'Airy (une forme d'échelle du noyau (A.18)) :

$$K_{\text{Ai}}(\xi_b, \xi_a) = \int_0^\infty \text{Ai}(\xi_b + \lambda) \text{Ai}(\xi_a + \lambda) d\lambda. \quad (\text{A.28})$$

Ce noyau d'Airy est égal au propagateur d'Airy  $K_{\mathcal{A}}(\xi_b, \tau_b | \xi_a, \tau_a)$  de la formule (4.7) lorsqu'on prend des temps égaux  $\tau_a = \tau_b$ . La dérivation de Tracy et Widom s'appuie sur une analyse de ce déterminant de Fredholm. Récemment Nadal et Majumdar [135] ont proposé une dérivation de la distribution  $F_{\text{GUE}}(x)$  avec des méthodes de polynômes orthogonaux, inspirée des travaux de Gross et Matytsin en QCD bdimensionnelle [83]. La dérivation de  $F_{\text{GOE}}(x)$  par Forrester, Majumdar et Schehr [75] pour le maximum des excursions belliqueuses utilise également cette méthode des polynômes orthogonaux.

Les distributions de Tracy et Widom ont été identifiées pour la statistique de la plus grande valeur propre de matrices aléatoires. Dans le texte, nous constatons que ces distributions interviennent pour la description des fluctuations de hauteur (respectivement de l'énergie) d'interfaces KPZ en géométrie courbe (respectivement du polymère dirigé en milieu aléatoire avec les deux extrémités fixes) – GUE – et plate (respectivement du polymère dirigé avec une extrémité libre) – GOE – voir la figure A.1.

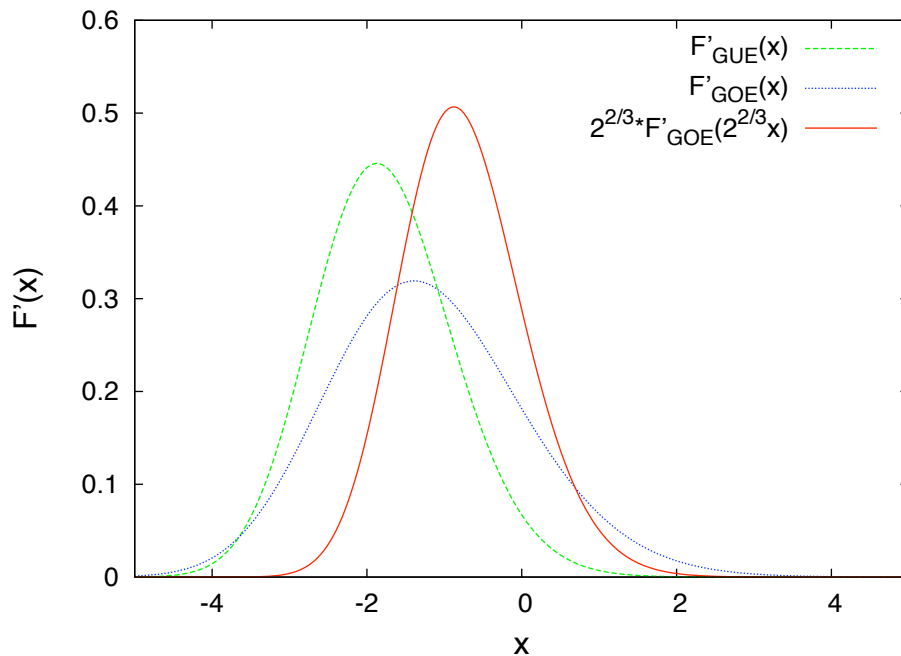


FIGURE A.1 – Densité de probabilité de Tracy-Widom pour les ensembles GUE  $F'_{\text{GUE}}(x)$  (en tirets vert), et GOE  $F'_{\text{GOE}}(x)$  (en pointillés bleu). En trait plein rouge, nous avons représenté la densité de probabilité du maximum  $\xi_m$  du processus d'Airy  $\mathcal{A}(y) - y^2$  défini au chapitre 4 (voir les formules (4.21) et (4.23)), *i.e.*  $\mathbb{P}[\xi_m \in [x, x + dx]] = 2^{2/3} F'_{\text{GOE}}(2^{2/3}x) dx$ . Les tables numériques des distributions de Tracy-Widom utilisée ici proviennent de Prähofer [142].

## Nota Bene

Des résultats récents [29] indiquent la présence de la distribution de Tracy et Widom **GOE** dans un problème de physique statistique des verres de spin – distinct des problèmes abordés dans ce manuscrit : les fluctuations de taille finie de la température critique du modèle de Sherrington-Kirkpatrick. Pour ce modèle la matrice d'interaction est une matrice réelle symétrique dont les éléments hors diagonale sont indépendants et identiquement distribués (gaussiens), mais les éléments diagonaux sont corrélés aux éléments hors diagonale, ligne par ligne. Castellana et Zarinelli ont montré que ces corrélations sont négligeables à la limite des grandes matrices, et la distribution de Tracy et Widom pour **GOE** intervient naturellement. Cependant cette analyse se limite à ce modèle particulier SK (sur réseau complet) : des arguments numériques [28] montrent que cette identification n'a plus lieu d'être pour des modèles de verres de spin avec interaction à courte portée, montrant les limites de l'universalité de la distribution de TW dans ce cadre précis.



---

B

Publications

---





## B.1 Publication 1

[148] J. Rambeau and G. Schehr. Maximum relative height of one-dimensional interfaces: from Rayleigh to Airy distribution. *J. Stat. Mech.*, page P09004, 2009

# Maximum relative height of one-dimensional interfaces: from Rayleigh to Airy distribution

Joachim Rambeau and Grégory Schehr

Laboratoire de Physique Théorique (UMR du CNRS 8627),  
Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay Cedex, France  
E-mail: [rambeau@th.u-psud.fr](mailto:rambeau@th.u-psud.fr) and [Gregory.Schehr@th.u-psud.fr](mailto:Gregory.Schehr@th.u-psud.fr)

Received 29 June 2009

Accepted 3 August 2009

Published 9 September 2009

Online at [stacks.iop.org/JSTAT/2009/P09004](http://stacks.iop.org/JSTAT/2009/P09004)

[doi:10.1088/1742-5468/2009/09/P09004](https://doi.org/10.1088/1742-5468/2009/09/P09004)

**Abstract.** We introduce an alternative definition of the relative height  $h^\kappa(x)$  of a one-dimensional fluctuating interface indexed by a continuously varying real parameter  $0 \leq \kappa \leq 1$ . It interpolates between the height relative to the initial value (i.e. in  $x = 0$ ) when  $\kappa = 0$  and the height relative to the spatially averaged height for  $\kappa = 1$ . We compute exactly the distribution  $P^\kappa(h_m, L)$  of the maximum  $h_m$  of these relative heights for systems of finite size  $L$  and periodic boundary conditions. One finds that it takes the scaling form  $P^\kappa(h_m, L) = L^{-1/2} f^\kappa(h_m L^{-1/2})$  where the scaling function  $f^\kappa(x)$  interpolates between the Rayleigh distribution for  $\kappa = 0$  and the Airy distribution for  $\kappa = 1$ , the latter being the probability distribution of the area under a Brownian excursion over the unit interval. For arbitrary  $\kappa$ , one finds that it is related to, albeit different from, the distribution of the area restricted to the interval  $[0, \kappa]$  under a Brownian excursion over the unit interval.

**Keywords:** stochastic particle dynamics (theory), kinetic roughening (theory), fluctuations (theory), stochastic processes (theory)

**ArXiv ePrint:** [0906.4698](https://arxiv.org/abs/0906.4698)

**Contents**

<b>1. Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2. Distribution of the maximum of a Brownian bridge: a path-integral approach</b>	<b>6</b>
<b>3. Distribution of the maximum relative height <math>P^\kappa(h_m, L)</math></b>	<b>7</b>
3.1. Normalization constant . . . . .	7
3.2. Cumulative distribution of the maximal relative height (MRH) . . . . .	8
<b>4. Recovering Rayleigh and Airy distributions</b>	<b>11</b>
4.1. The limit $\kappa \rightarrow 0$ and the Rayleigh distribution . . . . .	11
4.2. The limit $\kappa \rightarrow 1$ and the Airy distribution . . . . .	12
<b>5. Some properties of the distribution <math>f^\kappa(x)</math></b>	<b>12</b>
5.1. Asymptotic limit of the scaling function . . . . .	12
5.2. Moments of the distribution . . . . .	14
<b>6. Numerical results</b>	<b>14</b>
<b>7. Truncated area under Brownian excursion</b>	<b>15</b>
<b>8. Conclusion</b>	<b>17</b>
<b>Appendix A. Quantum mechanics problems</b>	<b>17</b>
A.1. Free particle . . . . .	18
A.2. Free particle with a wall . . . . .	19
A.3. Particle in a box . . . . .	19
A.4. Linear potential and a wall: Airy potential . . . . .	20
A.5. Linear potential and asymptotic form of the Airy propagator . . . . .	21
<b>Appendix B. Another calculation of the normalization constant <math>\tilde{Z}_\kappa</math></b>	<b>22</b>
<b>References</b>	<b>24</b>

**1. Introduction**

While the study of extreme value statistics (EVS) is by now a long-standing issue in the fields of engineering [1], finance [2] or environmental sciences [3], it was recognized only recently that EVS plays a crucial role in the theory of complex and disordered systems [4]. Since then, the understanding of EVS in spatially extended systems has been the subject of many recent theoretical studies in statistical physics. Indeed, although the EVS of a set of independent or weakly correlated random variables is well understood, thanks to the identification of a limited number of universality classes, much less is known for the case of *strongly correlated* random variables. In that respect, the study of fluctuating elastic interfaces has recently attracted much attention [5]–[14]. Although simpler to study, these models, in low dimension, furnish an interesting example of strongly correlated variables where analytical progress can be made.

Here we are interested in the extremal statistics of the relative height of a one-dimensional elastic line described, at equilibrium, by the Gibbs–Boltzmann weight  $P_{\text{st}} \propto \exp(-\mathcal{H})$  with

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 dx, \quad (1)$$

where  $H(x)$  is the height of the interface and  $L$  is the linear size of the system. Such models (1) have been extensively studied to describe various experimental situations such as fluctuating step edges on crystals with attachment/detachment dynamics of adatoms [16]. Here we also impose periodic boundary conditions (pbc) such that  $H(0) = H(L)$  and the process defined by  $\mathcal{H}$  in equation (1) is thus a Brownian bridge, i.e. a Brownian motion constrained to start and end at the same point. The Hamiltonian  $\mathcal{H}$  is obviously invariant under a global shift  $H(x) \rightarrow H(x) + c$  and therefore a more physically relevant quantity is the *relative* height. Here *relative* means measured with respect to some (arbitrary) reference value. Up to now two different reference values have been considered: (i) the spatial average value as in [6]–[13] or (ii) the height at  $x = 0$ ,  $H(0)$  (or at any other point in space because of pbc) which is a rather natural choice in the context of time series [14] (note that a recent work considered, for weakly correlated random variables, yet another choice where the reference is the minimum value of the height field on  $[0, L]$  [15] which we will not discuss here). This yields two distinct definitions of the relative height:

$$(i) \ h^1(x) = H(x) - L^{-1} \int_0^L H(x') dx', \quad (ii) \ h^0(x) = H(x) - H(0). \quad (2)$$

Once a reference value is chosen, one defines  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^1$  (or  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^0$ ) and we ask the question: what is the probability density  $f^{0,1}(h_m, L)$ ? It is straightforward to see from equation (1) that

$$(i) \ \langle h^1(x_0) h^1(x_0 + x) \rangle = \frac{L}{12} \left[ 1 - \frac{6x}{L} \left( 1 - \frac{x}{L} \right) \right], \quad (3)$$

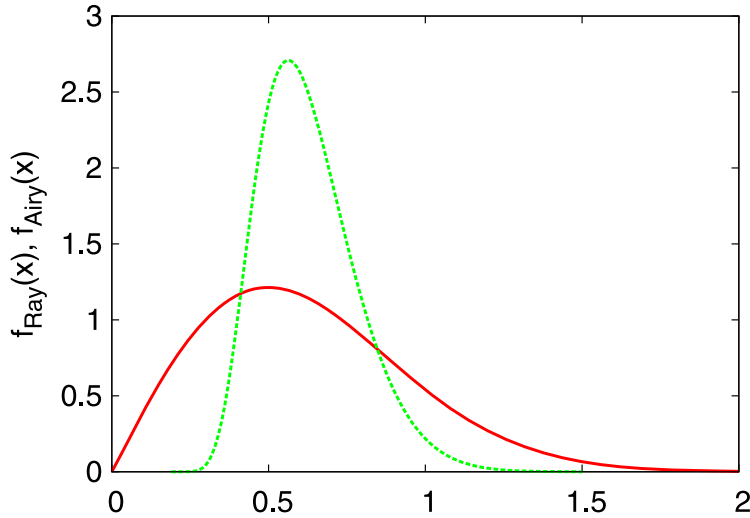
$$(ii) \ \langle h^0(x_0) h^0(x_0 + x) \rangle = x_0 \left( 1 - \frac{x + x_0}{L} \right), \quad (4)$$

so that the variables  $h^1(x)$  or  $h^0(x)$  are obviously strongly correlated: the computation of  $h_m$  is thus non-trivial.

The distribution  $f^1(h_m, L)$ , studied numerically in [6], was then computed analytically by Majumdar and Comtet [7, 8] who showed, for the model described in equation (1) with pbc, that  $P^1(h_m, L) = L^{-1/2} f_{\text{Airy}}(h_m L^{-1/2})$  and computed exactly  $f_{\text{Airy}}(x)$ . Its Laplace transform is given by [7]

$$\int_0^\infty f_{\text{Airy}}(x) e^{-px} dx = p\sqrt{2\pi} \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha_n p^{2/3} 2^{-1/3}}, \quad (5)$$

where  $\alpha_n$ s are the magnitudes of the zeros of the standard Airy function  $\text{Ai}(z)$  on the negative real axis [17]. For example,  $\alpha_1 = 2.3381\dots$ ,  $\alpha_2 = 4.0879\dots$ ,  $\alpha_3 = 5.5205\dots$ ,



**Figure 1.** The dashed green line represents the Airy distribution function  $f^1 = f_{\text{Airy}}$ : this is the pdf of the maximum measured relative to the spatial average value of heights of the interface on the interval  $[0, 1]$ . The solid red line represents the Rayleigh distribution function  $f^0 = f_{\text{Ray}}$ : this is the pdf of the maximum measured relative to the first point of the interface on the interval  $[0, 1]$ .

etc [17]. It is then possible to invert the Laplace transform [8, 18]

$$f_{\text{Airy}}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-b_n/x^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2), \quad (6)$$

where  $b_n = 2\alpha_n^3/27$  and  $U(a, b, z)$  is the confluent hypergeometric function [17]. This inversion is useful as it can then be evaluated numerically and plotted as in figure 1. In particular, for small  $x$  it behaves as [8]

$$f_{\text{Airy}}(x) \sim \frac{8}{81} \alpha_1^{9/2} x^{-5} e^{-2\alpha_1^3/27x^2} \quad \text{as } x \rightarrow 0, \quad (7)$$

while at large  $x$ ,  $f_{\text{Airy}}(x) \sim (72\sqrt{6/\pi})x^2 e^{-6x^2}$  [19].

Interestingly, the Airy distribution in equation (6) also describes the distribution of the area under a Brownian excursion over the unit interval. We recall that a Brownian excursion is a Brownian motion starting and ending at the same point and constrained to stay positive in-between, on the unit interval [8, 20]. Surprisingly, this distribution arises in various seemingly unrelated problems in computer science and graph theory [21].

On the other hand, Burkhardt *et al* focused on  $f^0(h_m, L)$  [14] which is different from the Airy distribution. Indeed, it is easy to see that in that case the distribution of  $h_m$  is just the distribution of the maximum of a Brownian bridge on the interval  $[0, L]$ . Therefore  $P^0(h_m, L) = L^{-(1/2)} f_{\text{Ray}}(h_m L^{-(1/2)})$  where

$$f_{\text{Ray}}(x) = 4x \exp(-2x^2), \quad (8)$$

which is known in the literature as the Rayleigh distribution. In the literature on random matrix theory,  $f_{\text{Ray}}(x)$  (which is plotted in figure 1) is also known under the name of

‘Wigner surmise’ as it approximates the distribution of the spacing between consecutive energy levels in the Gaussian orthogonal ensemble (GOE). In [14] it was also pointed out that the distribution of  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h(x)$ , for generic translationally invariant systems, is related to the distribution of near extreme events, which has recently attracted some attention in statistical physics [22].

Although the definition of these two relative heights are *a priori* only slightly different (see equation (2)), the distribution of their maximum in equations (6) and in (8) has completely different expressions. These two definitions of the maximal relative heights thus lead to qualitatively different distributions: this is particularly striking if one considers their small argument behavior in equations (7) and (8). The goal of this paper is to understand how the distribution of the maximum evolves when one changes the definition of the relative height from  $h^1(x)$  to  $h^0(x)$ . To that purpose, we choose an alternative reference value, indexed by a continuously varying parameter  $0 \leq \kappa \leq 1$  to define the relative height  $h^\kappa(x)$  as

$$h^\kappa(x) = H(x) - \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} H(x') dx', \quad (9)$$

such that  $\lim_{\kappa \rightarrow 1} h^\kappa(x) = h^1(x)$  and  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} h^\kappa(x) = h^0(x)$ :  $h^\kappa(x)$  thus interpolates between  $h^1(x)$  and  $h^0(x)$ . Using path-integral methods, we compute exactly the distribution  $P^\kappa(h_m, L)$  of the maximal relative height  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^\kappa(x)$  and find that  $P^\kappa(h_m, L) = L^{-(1/2)} f^\kappa(h_m L^{-(1/2)})$ , where  $f^\kappa(x)$ , which interpolates between the Airy distribution for  $\kappa = 1$  and the Rayleigh distribution for  $\kappa = 0$ , is given by

$$f^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [F_n(q)]^2 b_n(q, \kappa)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/x^2} U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/x^2), \quad (10)$$

where  $b_n(q, \kappa) = (2\kappa/27)(\alpha_n + (1 - \kappa)q^2/\kappa)^3$  and where the coefficients  $F_n(q)$  are given below (42). In particular, for small argument, we show that it behaves as

$$f^\kappa(x) \sim \left( \frac{\kappa}{1 - \kappa} \right)^{3/2} x^{-2} \exp\left( -\frac{2\alpha_1^3 \kappa}{27 x^2} \right). \quad (11)$$

This paper is organized as follows. In section 2, we illustrate the method of path integral to compute the distribution  $f^0(x)$ , i.e. the distribution of the maximum of a Brownian bridge. In section 3, we use this path-integral formalism to compute the distribution of the maximum of the relative heights  $h^\kappa(x)$  defined in equation (9). In section 4, we analyze in detail the limits  $\kappa \rightarrow 1$  and  $\kappa \rightarrow 0$  of the scaling function  $f^\kappa(x)$  in equation (10) and in section 5 we present the comparison of our exact results with numerical simulations for different values of  $0 \leq \kappa \leq 1$ . In section 6, guided by the fact that  $f^1(x) = f_{\text{Airy}}(x)$  describes the distribution of the area under a Brownian excursion over a unit interval, we show that  $f^\kappa(x)$  is related to, albeit different from, the distribution of the area restricted to the interval  $[0, \kappa]$  under a Brownian excursion over the unit interval. Finally, we conclude in section 7. For clarity, some technical details have been left in the appendices A and B.

## 2. Distribution of the maximum of a Brownian bridge: a path-integral approach

In this section, we derive the distribution of the maximal relative height  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^0(x)$ , where  $h^0(x) = H(x) - H(0)$ . The joint distribution of these heights  $h^0(x)$ , given equation (1), is

$$P[\{h^0\}] = Z_L^{-1} \exp \left( -\frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial h^0(x)}{\partial x} \right)^2 dx \right) \delta(h^0(0) - h^0(L)) \delta(h^0(0)), \quad (12)$$

where  $Z_L$  is a normalization constant. In this expression (12), the first delta function ensures the pbc while the second one ensures simply the definition of  $h^0(x)$  in equation (2). From this statistical weight, one directly obtains the cumulative distribution of the maximum  $F^0(h_m, L) = \text{Prob}[\max_{0 \leq x \leq L} h^0(x) < h_m, L]$  as

$$F^0(h_m, L) = \frac{1}{Z_L} \int_{h^0(0)=0}^{h^0(L)=0} \mathcal{D}h(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x h^0(x))^2 dx} \times \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(h_m - h^0(x)), \quad (13)$$

where the product of Heaviside step functions constrains the paths to stay under  $h_m$ . Note that the normalization constant  $Z_L$  has just the same path-integral representation as in equation (13) but without the constraint ensured by the step functions:

$$Z_L = \int_{h^0(0)=0}^{h^0(L)=0} \mathcal{D}h(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x h^0(x))^2 dx}. \quad (14)$$

One sees explicitly in these expressions (13) and (14) that  $F^0(h_m, L)$  is the cumulative distribution of the maximum of a Brownian bridge on the interval  $[0, L]$ . One can now use path-integral techniques to write  $F^0(h_m, L)$  as

$$F^0(h_m, L) = \frac{\langle 0 | \exp(-L\hat{H}_m) | 0 \rangle}{\langle 0 | \exp(-L\hat{H}_{\text{free}}) | 0 \rangle}, \quad (15)$$

where  $\hat{H}_{\text{free}} = -(1/2)(d^2/dx^2)$  and  $\hat{H}_m = -(1/2)(d^2/dx^2) + V_m(x)$ , where  $V_m(x)$  is a confining potential such that  $V_m(x) = 0$  if  $-\infty < x < h_m$  and  $V_m(x) = +\infty$  if  $x > h_m$ . The numerator and denominator in equation (15) can be computed in a similar way: if one denotes  $|E\rangle$  the eigenvectors of a Hamiltonian  $\hat{H}$ , with eigenvalues  $E$ ,  $\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle$  then the propagator can be expanded on the eigenbasis as

$$\langle y | \exp(-L\hat{H}) | x \rangle = \sum_E \psi_E^*(x) \psi_E(y) e^{-LE}, \quad (16)$$

where  $\psi_E(x) = \langle x | E \rangle$ . Applying this formula (16) to  $\hat{H}_m$  one has

$$\langle 0 | \exp(-L\hat{H}_m) | 0 \rangle = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dq (\sin(q h_m))^2 e^{-(Lq^2/2)} = \frac{1}{\sqrt{2L\pi}} \left( 1 - e^{-2(h_m^2/L)} \right), \quad (17)$$

and similarly  $\langle 0 | \exp(-L\hat{H}_{\text{free}}) | 0 \rangle = (2\pi L)^{-(1/2)}$ . Finally one obtains the cumulative distribution function as

$$F^0(h_m, L) = 1 - e^{-2(h_m^2/L)}, \quad (18)$$



from which one deduces that the probability distribution function  $P^0(h_m, L) = \partial_{h_m} F^0(h_m, L)$  takes the scaling form (valid for all  $L$  for this model)

$$P^0(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^0\left(\frac{h_m}{\sqrt{L}}\right), \quad f^0(x) = 4xe^{-2x^2}, \quad (19)$$

which is known in the literature as the Rayleigh function. Of course there are other simpler methods to compute  $f^0(h_m, L)$  for the present case (see, for instance, [14]). However the path-integral method presented here can be extended to more complicated situations, and will be used below.

### 3. Distribution of the maximum relative height $P^\kappa(h_m, L)$

In this section, we extend the calculation presented above to the computation of the cumulative distribution of the maximal relative height  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h^\kappa(x)$ , where  $h^\kappa(x)$  is defined in equation (9). As above we start with the joint distribution of the heights  $h^\kappa(x)$  which, from equation (1), can be computed as

$$P[\{h^\kappa\}] = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial h^\kappa(x)}{\partial x}\right)^2 dx\right) \delta(h^\kappa(0) - h^\kappa(L)) \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x') dx'\right), \quad (20)$$

where  $\tilde{Z}_\kappa$  is a normalization constant which ensures that  $\int \mathcal{D}h^\kappa(x) P[\{h^\kappa\}] = 1$ . The cumulative distribution of the maximum  $F^\kappa(h_m, L)$  can thus be written as

$$F^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \int_{-\infty}^{h_m} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \times \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(h_m - h^\kappa(x)) \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x') dx'\right), \quad (21)$$

which is the starting point of our exact computation.

#### 3.1. Normalization constant

As above (see section 2), the normalization constant  $\tilde{Z}_\kappa$  has the same path-integral expression as equation (21), but without the constraint that each path must stay below  $h_m$ , that is

$$\tilde{Z}_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x') dx'\right). \quad (22)$$

Let us make the change of variable  $y(x) = h^\kappa(x) - u$  to obtain

$$\tilde{Z}_\kappa = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{y(0)=0}^{y(L)=0} \mathcal{D}y(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x y(x))^2 dx} \delta\left(\int_0^{\kappa L} y(x') dx' - \kappa Lu\right). \quad (23)$$

The path integral is, up to a normalization constant, the probability that the truncated area  $A_\kappa = \int_0^{\kappa L} y(x) dx$  under a Brownian bridge  $\{y(x), 0 \leq x \leq L\}$  is equal to  $\kappa Lu$ . One

thus has

$$\text{Proba}(A_\kappa = \kappa Lu, L) = \frac{\int_{y(0)=0}^{y(L)=0} \mathcal{D}y(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x y(x))^2 dx} \delta \left( \int_0^{\kappa L} y(x') dx' - \kappa Lu \right)}{\int_{y(0)=0}^{y(L)=0} \mathcal{D}y(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x y(x))^2 dx}}. \quad (24)$$

The denominator is just  $(2\pi L)^{-1/2}$ , as computed before (in section 2). Then we simply have

$$\tilde{Z}_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int_{-\infty}^{+\infty} du \text{Proba}(A_\kappa = \kappa Lu, L). \quad (25)$$

Changing  $v = \kappa Lu$ , and using the property that  $P(A_\kappa, L)$  is, by definition, normalized (24), we find that

$$\tilde{Z}_\kappa = \frac{1}{\sqrt{2\pi L \kappa L}}. \quad (26)$$

### 3.2. Cumulative distribution of the maximal relative height (MRH)

Proceeding as in section 2, we now compute the cumulative distribution of the MRH using path integrals. We start with the expression given in equation (21):

$$F^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \int_{-\infty}^{h_m} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_0^L (\partial_x h^\kappa(x))^2 dx} \\ \times \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(h_m - h^\kappa(x)) \delta \left( \int_0^{\kappa L} dx' h^\kappa(x') \right), \quad (27)$$

where  $\tilde{Z}_\kappa$  is given above (26). The first integral in equation (27) indicates that we sum over all initial points  $u$  (which has to be below  $h_m$ ), and then we sum over all paths beginning in  $u$  and constrained to stay entirely under the height  $h_m$  (imposed by the product of step functions). Performing the change of variable  $y(x) = h_m - h^\kappa(x)$  and  $v = h_m - u$ , we get all  $h_m$  dependence in the delta function, and we constrain the paths  $y(x)$  to be positive:

$$F^\kappa(h_m, L) = \kappa L \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-(1/2) \int_0^L dx (\partial_x y)^2} \\ \times \delta \left( h_m \kappa L - \int_0^{\kappa L} y(x') dx' \right) \prod_{0 \leq x \leq L} \theta(y(x)). \quad (28)$$

The constraint of positivity can be incorporated rather easily by adding a potential term  $V_0(y)$  in the exponential, with  $V_0(y) = +\infty$  if  $y < 0$  and  $V_0(y) = 0$  if  $y > 0$ . Then we have

$$F^\kappa(h_m, L) = \kappa L \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^L dx \{(1/2)(\partial_x y)^2 + V_0(y(x))\}} \\ \times \delta \left( \kappa L h_m - \int_0^{\kappa L} y(x) dx \right). \quad (29)$$

Using  $\delta(\alpha x) = (1/\alpha)\delta(x)$ , we isolate the variable  $h_m$  and we write

$$F^\kappa(h_m, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^L dx \{(1/2)(\partial_x y)^2 + V_0(y(x))\}} \\ \times \delta\left(h_m - \frac{1}{\kappa L} \int_0^{\kappa L} y(x') dx'\right), \quad (30)$$

and all the dependence on  $h_m$  is contained in the  $\delta$  function. Thus its Laplace transform with respect to  $h_m$ ,  $\tilde{F}^\kappa(p, L) = \int_0^\infty dh_m F^\kappa(h_m, L) e^{-ph_m}$  (notice that  $h_m$  is necessarily positive) has a simple expression

$$\tilde{F}^\kappa(p, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_{y(0)=v}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^L dx \{(1/2)(\partial_x y)^2 + V_0(y(x))\}} e^{-(p/\kappa L) \int_0^{\kappa L} y(x) dx}. \quad (31)$$

Let us call  $u = y(\kappa L)$  the intermediary point and, using the Markov property, we can split the path integral into two independent blocks: one for the time interval  $[0, \kappa L]$  and the other for the time interval  $[\kappa L, L]$ . We have

$$\tilde{F}^\kappa(p, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} du \int_{y(0)=v}^{y(\kappa L)=u} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_0^{\kappa L} dx \{(1/2)(\partial_x y)^2 + V_0(y(x)) + (p/\kappa L)y(x)\}} \\ \times \int_{y(\kappa L)=u}^{y(L)=v} \mathcal{D}y(x) e^{-\int_{\kappa L}^L dx \{(1/2)(\partial_x y)^2 + V_0(y(x))\}}. \quad (32)$$

The first factor is the propagator between time 0 and  $\kappa L$  of a quantum particle in the triangular potential  $V_{0,p/(\kappa L)}(x) = V_0(x) + (p/\kappa L)x$ , denoted as  $G_{\text{Airy}}(u, \kappa L|v, 0)$  (the index ‘Airy’ refers to the fact that the solution of the Schrödinger equation with a triangular potential  $V_{0,p/(\kappa L)}(x)$  is solved by Airy functions), and the second term, denoted as  $G_0(v, L|u, \kappa L)$ , is simply the propagator of a quantum particle in the potential  $V_0(x)$  between the times  $\kappa L$  and  $L$ . One thus has

$$\tilde{F}^\kappa(p, L) = \sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} du \{G_0(v, L|u, \kappa L) \times G_{\text{Airy}}(u, \kappa L|v, 0)\}, \quad (33)$$

where the  $p$  dependence is entirely contained in the Airy propagator. Note that our calculation is completely justified when  $0 < \kappa < 1$ , because of the cut in two parts of the path integral. We will examine in more detail the two limiting cases  $\kappa \rightarrow 0$  and  $\kappa \rightarrow 1$  below.

The probability density function of the MRH  $P^\kappa(h_m, L)$  is simply the derivative of  $F^\kappa(h_m, L)$  with respect to  $h_m$ . Its Laplace transform  $\tilde{P}^\kappa(p, L) = \int_0^\infty e^{-ph_m} P^\kappa(h_m, L) dh_m$  is thus  $\tilde{P}^\kappa(p, L) = p\tilde{F}^\kappa(p, L)$ :

$$\tilde{P}^\kappa(p, L) = p\sqrt{2\pi L} \int_0^{+\infty} dv \int_0^{+\infty} du \{G_0(v, L|u, \kappa L) \times G_{\text{Airy}}(u, \kappa L|v, 0)\}. \quad (34)$$

We first start with  $G_0(v, L|u, \kappa L)$  which is the propagator of a particle with a wall at the origin. It is given by

$$G_0(v, L|u, \kappa L) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L(1-\kappa)}} \left( e^{-((u-v)^2/2L(1-\kappa))} - e^{-((u+v)^2/2L(1-\kappa))} \right) \quad (35)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} dq \sin(qv) \sin(qu) e^{-L(1-\kappa)/2 q^2}, \quad (36)$$

where the expression in the second line will be useful in the following. The propagator  $G_{\text{Airy}}(u, \kappa L|v, 0)$  can be computed using the formula in equation (16) (see also in section A.4, formula (A.25)):

$$G_{\text{Airy}}(u, \kappa L|v, 0) = \left(\frac{2p}{\kappa L}\right)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}((2p/\kappa L)^{1/3}u - \alpha_n)\text{Ai}((2p/\kappa L)^{1/3}v - \alpha_n)}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} \times e^{-\alpha_n 2^{-1/3}(p\sqrt{\kappa L})^{2/3}}. \quad (37)$$

We then perform the changes of variables  $v \rightarrow (2p/(\kappa L))^{-1/3}v$  and  $u \rightarrow (2p/(\kappa L))^{-1/3}u$  followed by  $q \rightarrow (2p/(\kappa L))^{1/3}q$  to obtain

$$\begin{aligned} \tilde{P}^\kappa(p, L) &= p\sqrt{\frac{8L}{\pi}} \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \int_0^\infty dq \sin(qu) \sin(qv) \\ &\times \exp[-2^{-1/3}(1-\kappa)\kappa^{-2/3}(p\sqrt{L})^{2/3}q^2] \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)\text{Ai}(v - \alpha_n)}{[\text{Ai}'(-\alpha_n)]^2} \exp[-\alpha_n 2^{-1/3}\kappa^{1/3}(p\sqrt{L})^{2/3}]. \end{aligned} \quad (38)$$

One recognizes the scaling variable  $p\sqrt{L}$  in the Laplace space which implies that the scaling variable in the real space is, as expected,  $h_m/\sqrt{L}$ , and then we can write the scaling law

$$P^\kappa(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} f^\kappa\left(\frac{h_m}{\sqrt{L}}\right), \quad (39)$$

where the Laplace transform of  $f^\kappa(x)$  with respect to  $x$  is given by

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\kappa(p) &= p\sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \sin(qu) \sin(qv) \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\right)(1-\kappa)\left(\frac{\kappa}{2}\right)^{-2/3}p^{2/3}q^2\right] \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)\text{Ai}(v - \alpha_n)}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} \exp[-\alpha_n 2^{-1/3}\kappa^{1/3}p^{2/3}]. \end{aligned} \quad (40)$$

This formula can be written in the more compact form

$$\tilde{f}^\kappa(p) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^{\infty} [F_n(q)]^2 p e^{-2^{-1/3}p^{2/3}(\alpha_n\kappa^{1/3} + (1-\kappa)\kappa^{-2/3}q^2)}, \quad (41)$$

with

$$F_n(q) = \int_0^\infty du \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qu). \quad (42)$$

To invert the Laplace transform in equation (41) we will make use of the result found by Takacs in [18]:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{2\pi}pe^{-2^{-1/3}p^{2/3}\gamma_n}\right](x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}}e^{-b_n/x^2}b_n^{2/3}U(-5/6, 4/3, b_n/x^2), \quad (43)$$

where  $b_n = 2\gamma_n^3/27$  and  $U(a, b, z)$  is the confluent hypergeometric function [17]. This yields here

$$f^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [F_n(q)]^2 b_n(q, \kappa)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/x^2} U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/x^2). \quad (44)$$

where  $b_n(q, \kappa) = ((2\kappa)/27)(\alpha_n + (1 - \kappa)/\kappa)q^2)^3$ . This class of distributions indexed by the real parameter  $0 \leq \kappa \leq 1$  smoothly interpolates between the Rayleigh distribution for  $\kappa \rightarrow 0$  and the Airy distribution when  $\kappa \rightarrow 1$ . This will be demonstrated analytically (in particular the behavior when  $\kappa \rightarrow 0$  is not obvious in equation (44)) in section 4.1 and numerically in section 6.

#### 4. Recovering Rayleigh and Airy distributions

In this section, we show how  $f^\kappa(x)$  yields back—as it should—the Rayleigh distribution (respectively the Airy distribution) in the limit  $\kappa \rightarrow 0$  (respectively in the limit  $\kappa \rightarrow 1$ ).

##### 4.1. The limit $\kappa \rightarrow 0$ and the Rayleigh distribution

We first study the limit  $\kappa \rightarrow 0$ . From the definition of  $h^\kappa(x)$  given in equation (9) one expects that it yields back the definition of  $h^0(x)$ , i.e. the relative height relative to  $H(0)$  in equation (2). This is also rather obvious on the joint distribution in equation (20), together with  $\tilde{Z}_\kappa \propto 1/\kappa L$ , that it yields the joint distribution of a Brownian bridge. Therefore one expects indeed that  $f^\kappa(x)$  will converge to the Rayleigh distribution  $f_{\text{Ray}}(x)$  in equation (8). However, this limit  $\kappa \rightarrow 0$  in our formulae for  $f^\kappa(x)$ , or in its Laplace transform  $\tilde{f}^\kappa(p)$ , is not trivial. This is partially due to the fact that the computation of the Rayleigh distribution has been performed in ‘direct’ space while for the Airy distribution the computation is more conveniently performed in Laplace variables. Indeed, one needs an identity about the behavior of the Airy propagator when the time difference tends to zero. In section A.5, we show the identity (A.37) which we then use straightforwardly in equation (40) to compute the limit  $\kappa \rightarrow 0$ .

Indeed, from the Laplace transform of the scaling function in equation (40), one performs the change of variables  $v' = (2p/\kappa)^{-1/3}v$ ,  $u' = (2p/\kappa)^{-1/3}u$ , and  $q' = (2p/\kappa)^{1/3}q$ , so that we have

$$\begin{aligned} \tilde{f}^\kappa(p) &= p \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq' \int_0^\infty du' \int_0^\infty dv' \sin(q'u') \sin(q'v') \exp\left[-\frac{1}{2}(1 - \kappa)q'^2\right] \\ &\quad \times \left(\frac{2p}{\kappa}\right)^{1/3} \sum_{n=1}^\infty \frac{\text{Ai}[(2p/\kappa)^{1/3}u' - \alpha_n] \text{Ai}[(2p/\kappa)^{1/3}v' - \alpha_n]}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} \\ &\quad \times e^{-\alpha_n 2^{-1/3} \kappa^{1/3} p^{2/3}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Now, the second and third lines in that equation has a good limit when  $\kappa \rightarrow 0$ , as shown in appendix A.5. We then make use of the identity in equation (A.37) to obtain the limit

$\kappa \rightarrow 0$  (with  $u = u'$ ,  $v = v'$ ,  $q = q'$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa \rightarrow 0} \tilde{f}^\kappa(p) &= p \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \sin(qu) \sin(qv) \exp\left[-\frac{q^2}{2}\right] \times \delta(u-v) e^{-pu} \\ &= p \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int_0^\infty du e^{-pu} \int_0^\infty dq \sin^2(qu) e^{-q^2/2} = \int_0^\infty du 4u e^{-2u^2} e^{-pu}. \end{aligned} \quad (46)$$

Now we recognize immediately the scaling function in real space, since  $\tilde{f}^0(p) = \int_0^\infty du f^0(u) e^{-pu}$  such that

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} f^\kappa(x) = f^0(x) = 4xe^{-2x^2}, \quad (47)$$

as expected.

## 4.2. The limit $\kappa \rightarrow 1$ and the Airy distribution

The analysis of the limit  $\kappa \rightarrow 1$  is straightforward and can be done directly on the expression of our scaling function  $f^\kappa(x)$  in equation (44). In the limit  $\kappa \rightarrow 1$  one has

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} b_n(q, \kappa) = b_n(q, 1) = b_n, \quad (48)$$

independently of  $q$ . Therefore the only dependence left in the integrand of equation (44) is contained in  $F_n(q)$ . It is straightforward to obtain the useful relation

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dq [F_n(q)]^2 &= \int_0^\infty dq \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qu) \frac{\text{Ai}(v - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \sin(qv) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty du \left( \frac{\text{Ai}(u - \alpha_n)}{\text{Ai}'(-\alpha_n)} \right)^2 = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (49)$$

where we have used in the last line the identity  $\int_0^\infty du (\text{Ai}(u - \alpha_n))^2 = (\text{Ai}'(-\alpha_n))^2$ . Using this relation (49) in the expression of  $f^\kappa(x)$  we get

$$\lim_{\kappa \rightarrow 1} f^\kappa(x) = f_{\text{Airy}}(x) = 2\sqrt{6}x^{-10/3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n^{2/3} e^{-b_n/x^2} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2), \quad (50)$$

which is the Airy distribution function.

## 5. Some properties of the distribution $f^\kappa(x)$

In this section, we derive some properties of the distribution  $f^\kappa(x)$ .

### 5.1. Asymptotic limit of the scaling function

In this subsection, we study the asymptotic limit of the scaling function when  $x \ll 1$ , which corresponds to  $h_m \ll L$ . One main difference between Rayleigh and Airy distributions is the singularity of the latter for  $x = 0$ . The Rayleigh distribution is perfectly analytic when  $x \rightarrow 0$  ( $\sim x$ ), in contrast to the Airy distribution which exhibits an essential singularity  $f_{\text{Airy}} \sim x^{-5} e^{-2\alpha_1^3/27x^2}$ , see equation (7). Here we show that  $f^\kappa(x)$  exhibits an intermediate behavior with an essential singularity when  $x \rightarrow 0$  (see equation (53) below).

We start with the expression for  $f^\kappa(x)$  given in equation (44) which we recall here:

$$f^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [F_n(q)]^2 b_n(q, \kappa)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/x^2} U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/x^2). \quad (51)$$

that we want to analyze in the asymptotic limit  $x \rightarrow 0$ . To this purpose, we perform a change of variable  $q = x\tilde{q}$  such that  $b_n(x\tilde{q}, \kappa)/x^2$  has the following small  $x$  expansion:

$$\frac{b_n(x\tilde{q}, \kappa)}{x^2} = \frac{2\kappa\alpha_n}{27x^2} + \frac{6\alpha_n^2(1-\kappa)\tilde{q}^2}{27\kappa} + \mathcal{O}(x^2), \quad (52)$$

so that, due to the exponential factor  $\exp(-b_n(x\tilde{q}, \kappa)/x^2)$  in equation (51), only the term with  $n = 1$  can be retained in the sum over  $n$ . Besides, using that  $U(-5/6, 4/3, y) \sim y^{5/6}$  for  $y \gg 1$ , [17] we have

$$f^\kappa(x) \approx \sqrt{\frac{2}{9\pi}} \alpha_1^{3/2} [\chi(\alpha_1)]^2 \left(\frac{\kappa}{1-\kappa}\right)^{3/2} x^{-2} \exp\left[-\frac{2\alpha_1^3 \kappa}{27 x^2}\right], \quad (53)$$

with  $\chi(\alpha_1) = \int_0^\infty du u \text{Ai}(u - \alpha_1)/\text{Ai}'(-\alpha_1) = 1.8173\dots$  where we have used the small argument behavior of  $F_1(q)$  given in equation (42)  $F_1(x\tilde{q}) = \chi(\alpha_1)(x\tilde{q}) + \mathcal{O}(x^2)$ . Of course, such a formula is only valid for  $0 < \kappa < 1$  strictly. One sees in this expression (53) that this probability is exponentially small as soon as  $h_m \ll \sqrt{\kappa L}$ . This behavior might be qualitatively understood by noticing that the configurations for which  $h_m \ll \sqrt{\kappa L}$  are actually essentially *flat* on the interval  $[0, \kappa L]$ .

A comparison between this asymptotic behavior in equation (53) and the small argument behavior of the Rayleigh distribution (8) suggests that there exists a scaling regime  $x \rightarrow 0$ ,  $\kappa \rightarrow 0$  keeping the ratio  $x/\sqrt{\kappa}$  fixed such that

$$f^\kappa(x) \propto xg\left(\frac{x}{\sqrt{\kappa}}\right), \quad (54)$$

with the scaling function

$$g(u) \sim \begin{cases} \text{constant} & \text{when } u \rightarrow \infty, \\ u^{-3} \exp\left(-\frac{2\alpha_1^3}{27} \frac{1}{u^2}\right) & \text{when } u \rightarrow 0. \end{cases} \quad (55)$$

The limit  $u \rightarrow \infty$  means that, for  $x$  small but fixed, we take formally  $\kappa \rightarrow 0$ , and then we recover the asymptotic behavior of the Rayleigh distribution. On the other hand, for  $u \rightarrow 0$  we keep  $x$  much smaller than  $\kappa$  (actually  $x \ll \sqrt{\kappa}$  as done previously), and one recovers the result above (53). Similarly, a comparison between the behavior in equations (7) and (53) suggests that there also exists a scaling regime where  $x \rightarrow 0$  and  $(1-\kappa) \rightarrow 0$  keeping  $x/\sqrt{1-\kappa}$  fixed such that

$$f^\kappa(x) \propto x^{-5} \exp\left(-\frac{2\alpha_1^3 \kappa}{27 x^2}\right) h\left(\frac{x}{\sqrt{1-\kappa}}\right), \quad (56)$$

where the scaling function  $h(v)$  has asymptotic behaviors

$$h(v) \sim \begin{cases} \text{constant} & \text{when } v \rightarrow \infty, \\ v^3 & \text{when } v \rightarrow 0. \end{cases} \quad (57)$$

Again  $v \rightarrow \infty$  means that we keep  $x$  fixed, but small, and we take  $\kappa \rightarrow 1$ , thus we recover the asymptotic behavior of the Airy distribution. When  $v \rightarrow 0$ , we look at the region where  $x \ll \sqrt{1 - \kappa} \ll 1$ , thus recovering the behavior obtained above (53).

## 5.2. Moments of the distribution

If one denotes the moments of  $f^\kappa(x)$  as  $M_n^\kappa = \int_0^\infty dx x^n f^\kappa(x)$ , it is straightforward to show that, for the Rayleigh distribution,  $M_n^{\kappa=0} = 2^{-n/2} \Gamma(1 + n/2)$ . On the other hand, the computation of the moments of the Airy distribution  $M_n^{\kappa=1}$  is highly non-trivial. In [18], Takacs found a recursive method to compute them and recently Kearney *et al* found an explicit integral representation of these moments as [23]

$$M_n^1 = \frac{4\sqrt{\pi}n!}{\Gamma((3n-1)/2)2^{n/2}} K_n, \quad K_n = \frac{3}{4\pi^2} \int_0^\infty \frac{z^{3(n-1)/2}}{\text{Ai}^2(z) + \text{Bi}^2(z)} dz, \quad (58)$$

where  $\text{Ai}(z)$  and  $\text{Bi}(z)$  are the two linearly independent solutions of Airy's differential equation  $y''(z) - zy(z) = 0$ .

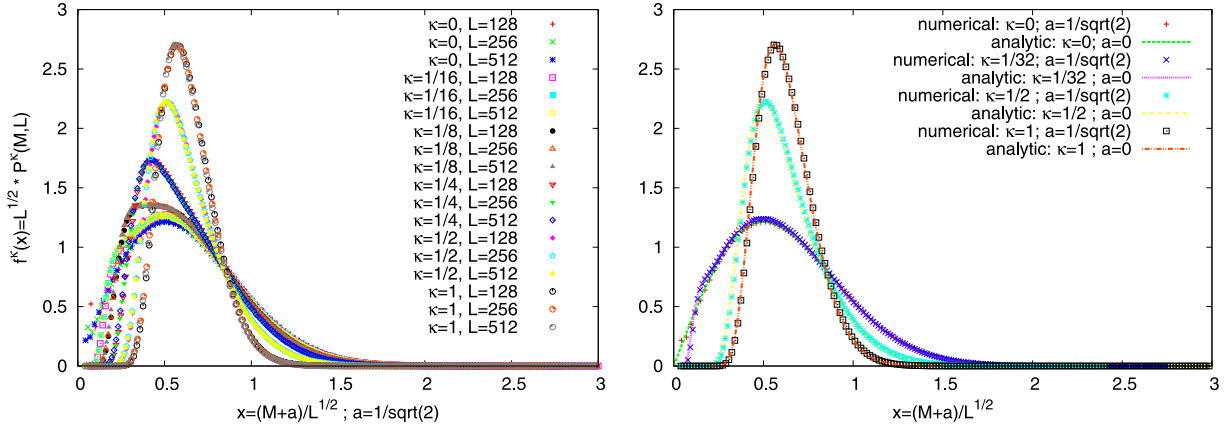
The computation of the moments  $M_n^\kappa$  for arbitrary  $\kappa$  seems to be highly complicated and we have been able to compute only the first one  $M_1^\kappa = \int_0^\infty x f^\kappa(x) dx$ . Indeed, permuting the integral over  $x$  and the integral over  $q$  together with the discrete sum over  $n$  and then performing the change of variable  $x \rightarrow x\sqrt{b_n(q, \kappa)}$  one obtains that  $M_1^\kappa$  is actually independent of  $\kappa$ , yielding

$$M_1^\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \forall \kappa \in [0, 1]. \quad (59)$$

## 6. Numerical results

We have compared our analytical results with numerical simulations. To generate the configurations of the interface distributed according to the Gibbs–Boltzmann weight  $P_{\text{st}} \propto \exp(-\mathcal{H})$  with  $\mathcal{H}$  given in equation (1), one could of course use the standard Monte Carlo method. However, this suffers from critical slowing down (with dynamical exponent  $z = 2$ ) and this is not very efficient. Instead, as in [24], one can use the property that the process defined by this statistical weight equation (1) together with periodic boundary conditions is a Brownian bridge. To generate it, one first generates numerically an ordinary Brownian motion  $B_0 = 0$  and  $B_i = B_{i-1} + \eta_i$ , where  $\eta_i$ s are independent and identically distributed (i.i.d.) random variables drawn from a distribution  $\text{Proba}(\eta = x) = g(x)$ . One can then generate a Brownian bridge through the relation  $H_i = B_i - (i/L)B_L$ , which ensures pbc. One can show that this procedure yields the correct statistical weight for large system size  $L$  (when  $g(x)$  is a Gaussian, this procedure is exact for all  $L$ ). The relative height is simply  $h_i^\kappa = H_i - (1/\kappa L) \sum_{j=1}^{\kappa L} H_j$  and the distribution of  $h_m = \max_{0 \leq i \leq L} h_i^\kappa$  is then computed for different system sizes  $L = 128, 256, 512$  by averaging over  $10^7$  samples. From the raw histograms representing  $P_{\text{num}}^\kappa(h_m, L)$ , for a given  $L$ , we want to extract the scaling function  $f_{\text{num}}^\kappa(x)$  to first check that the data for different sizes  $L$ , with  $\kappa$  fixed, satisfy the scaling form that we have obtained analytically in equation (39). If we plot directly  $\sqrt{L}P_{\text{num}}^\kappa(h_m, L)$  and as a function of  $x = h_m/\sqrt{L}$ , one can observe some finite size corrections to this scaling form.





**Figure 2.** Left: test of the scaling relation with numerical plots. From the raw histogram  $P_{\text{num}}^{\kappa}(h_m, L)$ , we draw as coordinate  $x = (h_m + a)/\sqrt{L}$ , with  $a = 1/\sqrt{2}$  and as ordinate  $f^{\kappa}(x) = \sqrt{L}P_{\text{num}}^{\kappa}(h_m, L)$ . Histograms with different  $L$  but same  $\kappa$  collapse in the same curve, which proves the scaling relation. Right: test of the analytical result. The dots are the numerical simulations (where we use the ‘translation’ parameter  $a$ ) and the curves represents numerical computations of the analytic function with the help of Mathematica.

These finite size effects can be understood using the analysis done in [12] where the first finite size corrections to the Airy distribution were computed (see also the discussion in [25]). There it was found that

$$P_{\text{discrete}}^1(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left( f^1 \left( \frac{h_m}{\sqrt{L}} \right) + \frac{a}{\sqrt{L}} f^{1'} \left( \frac{h_m}{\sqrt{L}} \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \right) \quad (60)$$

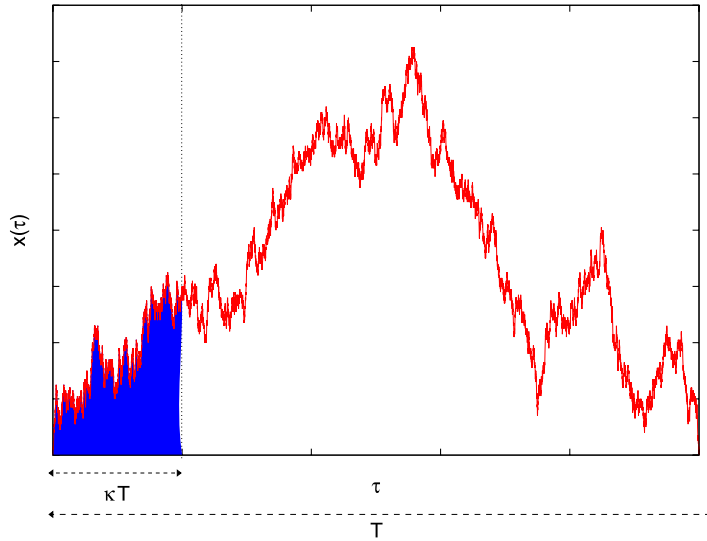
where  $a$  is the non-universal constant (that depends on the details of the Hamiltonian) and  $f^1 = f_{\text{Airy}}$  is the Airy distribution function. This first correction can be resummed as

$$P_{\text{discrete}}^1(h_m, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \left( f^1 \left( \frac{h_m + a}{\sqrt{L}} \right) + \mathcal{O}(L^{-1}) \right), \quad (61)$$

which is a good trick to get rid of the leading finite size effects. Following this exact result for  $\kappa = 1$  (61), we thus plot on figure 2 (left)  $\sqrt{L}P_{\text{num}}^{\kappa}(h_m, L)$  as a function of  $x = (h_m + a)/\sqrt{L}$  with  $a = 1/\sqrt{2}$  for all  $\kappa$  and observe a very good collapse of curves for different  $L$ . In figure 2 (right), we show a comparison between  $\sqrt{L}P_{\text{num}}^{\kappa}(h_m, L)$  and our analytical predictions in equation (44) evaluated with Mathematica for different values of  $\kappa = 0, 1/32, 1/2$  and 1. The very good agreement between analytics and numerics is obtained here via a single ‘fitting’ parameter  $a = 1/\sqrt{2}$  for all values of  $\kappa$ , adjusted to take into account finite size corrections (61).

## 7. Truncated area under Brownian excursion

In this section we explore further the connections between the distribution of the MRH for arbitrary  $\kappa$  and the distribution of areas below constrained Brownian motions [20]. Indeed, for  $\kappa = 1$ , it was shown in [7, 8] that  $f^1(x)$  describes the distribution of the area under



**Figure 3.** Truncated area (in blue) under a realization of a Brownian excursion (in red).

a Brownian excursion on a unit interval. Here we consider a Brownian excursion, i.e. a Brownian path  $\{x(\tau), 0 \leq \tau \leq T\}$  starting and ending at the origin  $x(0) = x(T) = 0$  and which stays positive in between  $\forall \tau \in ]0, T[, x(\tau) > 0$  and consider the random variable  $\mathcal{A}_\kappa = \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau$ , which we call the *truncated area* (see figure 3). We compute its distribution, which can be obtained by a similar calculation as shown above.

We start with the joint distribution of positions of the Brownian excursion

$$\begin{aligned} P[x(\tau)] &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{Z}(\epsilon)} e^{-(1/2) \int_0^T (\partial_\tau x)^2 d\tau} \delta(x(0) - x(T)) \delta(x(0) - \epsilon) \prod_{0 \leq \tau \leq T} \theta(x(\tau)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{Z}(\epsilon)} e^{-\int_0^T d\tau \{(1/2)(\partial_\tau x)^2 + V_0(x(\tau))\}} \delta(x(0) - x(T)) \delta(x(0) - \epsilon), \end{aligned} \quad (62)$$

where  $\epsilon$  is a regularization parameter which is needed because of the non-smoothness of the Brownian path (see [7, 8]) and  $\mathcal{Z}(\epsilon)$  is the normalization constant

$$\mathcal{Z}(\epsilon) = \int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \{(1/2)(\partial_\tau x)^2 + V_0(x(\tau))\}} = G_0(\epsilon, T | \epsilon, 0), \quad (63)$$

where  $G_0(b, t_b | a, t_a)$  is the propagator of the free particle with a wall in  $x = 0$  (35). The distribution of the truncated area  $\int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau$ , for the Brownian excursion  $\{x(\tau), 0 \leq \tau \leq T\}$  is then

$$P(\mathcal{A}_\kappa, T) = \text{Prob} \left( \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau = \mathcal{A}_\kappa \right) = \left\langle \delta \left( \mathcal{A}_\kappa - \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau \right) \right\rangle, \quad (64)$$

where the mean value is taken respectively to the distribution of excursions  $P[x(\tau)]$ . We have

$$P(\mathcal{A}_\kappa, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) \delta \left( \mathcal{A}_\kappa - \int_0^{\kappa T} x(\tau) d\tau \right) e^{-\int_0^T d\tau \{(1/2)(\partial_\tau x)^2 + V_0(x(\tau))\}}}{\int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \{(1/2)(\partial_\tau x)^2 + V_0(x(\tau))\}}}. \quad (65)$$

We now take a Laplace transform with respect to  $\mathcal{A}_\kappa$ , which is a positive quantity. So we have

$$\tilde{P}(p, T) = \int_0^\infty d\mathcal{A}_\kappa P(\mathcal{A}_\kappa, T) e^{-p\mathcal{A}_\kappa} \quad (66)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{x(0)=\epsilon}^{x(T)=\epsilon} \mathcal{D}x(\tau) e^{-\int_0^T d\tau \left\{ (1/2)(\partial_\tau x)^2 + V_0(x(\tau)) \right\}} e^{-p \int_0^T d\tau x(\tau)}}{G_0(\epsilon, T | \epsilon, 0)}. \quad (67)$$

By similar techniques, one can identify a convolution of propagators. Expanding the numerator and denominator in powers of the regulator  $\epsilon$ , one finds that the lowest order is  $\epsilon^2$  for the numerator and the denominator. Taking the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ , one finds that the distribution of the truncated area obeys the following scaling form:

$$P(\mathcal{A}_\kappa, T) = \frac{1}{(\kappa T)^{3/2}} w^\kappa \left( \frac{\mathcal{A}_\kappa}{(\kappa T)^{3/2}} \right), \quad (68)$$

with the scaling function, parameterized by  $\kappa$ , given by

$$w^\kappa(x) = \frac{4\sqrt{6}}{\pi} x^{-10/3} \int_0^\infty dq \sum_{n=1}^\infty [q F_n(q)] \left( \frac{b_n(q, \kappa)}{\kappa} \right)^{2/3} e^{-b_n(q, \kappa)/(\kappa x^2)} \\ \times U(-5/6, 4/3, b_n(q, \kappa)/(\kappa x^2)), \quad (69)$$

with the same coefficient  $b_n(q, \kappa)$  as in equation (44) and  $F_n(q)$  defined in equation (42). We can check easily that the scaling function  $w^\kappa(x)$  converges to the Airy distribution function as  $\kappa \rightarrow 1$ , as shown in [7, 8]. However, for  $\kappa \neq 1$  these two distributions  $f^\kappa(x)$  and  $w^\kappa(x)$  are different, albeit having similar expressions.

## 8. Conclusion

To conclude, we have introduced an alternative definition of the relative height  $h^\kappa(x)$  of an elastic one-dimensional interface with pbc, indexed by a real  $\kappa \in [0, 1]$ , which interpolates smoothly between the height relative to the initial value when  $\kappa \rightarrow 0$  and the height relative to the spatial average value for  $\kappa \rightarrow 1$ . We have obtained, using path-integral techniques, the exact distribution of the maximal relative height  $f^\kappa(x)$  which interpolates between the well-known Rayleigh ( $\kappa = 0$ ) and Airy ( $\kappa = 1$ ) distributions (see figure 1). This thus constitutes one new family, parameterized by  $\kappa$ , of strongly correlated variables where such analytical calculations can be done. Although our calculations have been done for a continuum model (1), the arguments presented in [12], based on the Central Limit Theorem, show that our results actually hold in the limit of large system size, for a wide class of lattice models of interfaces  $\mathcal{H} = \sum_i |H_i - H_{i+1}|^p$  with arbitrary  $p$  and in that sense this distribution  $f^\kappa(x)$  in equation (44) is *universal*. Finally we have shown that the method employed here to compute this distribution can be used to compute the distribution of the truncated area  $\mathcal{A}_\kappa$  (see figure 3) under a Brownian excursion.

## Appendix A. Quantum mechanics problems

In our path-integral calculations of distribution of MRH, we have to deal with simple one-dimensional quantum mechanics problem. This appendix summarizes the results used in the main text.

### A.1. Free particle

Let us consider a free particle in one dimension. The Hamiltonian is

$$H_{\text{free}} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}. \quad (\text{A.1})$$

The solution of the Schrödinger equation are the plane waves:

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}, \quad (\text{A.2})$$

with  $-\infty < k < +\infty$ . The associated energy to  $\varphi_k$  is  $E_k = k^2/2$ . The calculation of the propagator is done by decomposing onto the eigenbasis

$$\begin{aligned} G_{\text{free}}(y, t|x, s) &= \langle y | e^{-(t-s)H_{\text{free}}} | x \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \varphi_k^*(x) \varphi_k(y) e^{-(t-s)k^2/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Another way of doing it is to follow Feynman's prescription [26]: if the Lagrangian is a quadratic form of its variables, then the propagator is proportional to the exponential of minus the classical action joining the two points in spacetime. Moreover, if the Lagrangian does not depend explicitly on time, the constant of proportionality is simply a function of the difference of the two times:

$$G(y, t|x, s) = F(t-s) \exp(-S[x_{\text{classical}}(\tau)]). \quad (\text{A.4})$$

When we are in imaginary time, because we are dealing directly with probabilities, the function  $F(t-s)$  can be obtained by normalization. For the example of the free particle, the action is

$$S[x(\tau)] = \int_s^t d\tau \frac{1}{2} \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2, \quad (\text{A.5})$$

and the solution of the Euler–Lagrange equation between  $(x, s)$  and  $(y, t)$  is

$$x_{\text{classical}}(\tau) = \frac{y-x}{t-s}(\tau-s) + x. \quad (\text{A.6})$$

Inserting it into the action, we recover directly the free propagator (A.3), by imposing the normalization

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy G(y, t|x, s) = 1. \quad (\text{A.7})$$

## A.2. Free particle with a wall

We impose that some region of space cannot be visited by the particle, for example, we want to keep our particle in the positive region  $x > 0$ . To do this, we put a potential

$$V_0(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } x > 0. \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

The solution of the associated Schrödinger equation is

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(kx), \quad (\text{A.9})$$

with  $0 < k < +\infty$ , for  $x > 0$ , and  $\varphi_k(x) = 0$  for  $x < 0$ . Now the normalization constant is found directly from what we impose on the free particle solution (the only freedom is the phase of the solution, which is unphysical). The associated energy is  $k^2/2$ .

If the particle is constrained to stay below some value  $M$ , then

$$\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(k(M-x)), \quad (\text{A.10})$$

with  $0 < k < +\infty$ , for  $x < M$  and  $\varphi_k(x) = 0$  for  $x > M$ .

Let us compute the propagator when the wall is in  $x = 0$ :

$$G_0(y, t|x, s) = \int_0^{+\infty} dk \frac{2}{\pi} \sin(ky) \sin(kx) e^{-(t-s)k^2/2} \quad (\text{A.11})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} (e^{-((y-x)^2/2(t-s))} - e^{-((y+x)^2/2(t-s))}). \quad (\text{A.12})$$

The asymptotic form, when  $t \rightarrow s$ , of this propagator is just

$$\lim_{t \rightarrow s} G_0(y, t|x, s) = \delta(y-x) - \delta(y+x). \quad (\text{A.13})$$

## A.3. Particle in a box

The Hamiltonian is

$$H_{0,M} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{0,M}(x), \quad (\text{A.14})$$

with the box potential

$$V_{0,M}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x < 0, \\ 0 & \text{if } 0 < x < M, \\ +\infty & \text{if } x > M. \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

The solution is indexed by a positive integer  $n = 1, 2, \dots$ :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \quad (\text{A.16})$$

with energy  $E_n = n^2\pi^2/(2M^2)$  and the propagator is

$$G_{0,M}(y, t|x, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{M} \sin\left(\frac{n\pi}{M}y\right) \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right) \exp\left(- (t-s) \frac{n^2\pi^2}{2M^2}\right). \quad (\text{A.17})$$

#### A.4. Linear potential and a wall: Airy potential

The name ‘Airy potential’ is used for convenience, and like in the main text, we use in this subsection the index ‘Airy’ for all quantities referring to the quantum mechanical problem of a particle in the potential

$$V_{\text{Airy}}(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } -\infty < x < 0, \\ \lambda x & \text{if } 0 < x < +\infty, \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

where  $\lambda$  is a real positive parameter. We want to solve the stationary Schrödinger equation:

$$H_{\text{Airy}}\psi_n(x) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\psi_n}{dx^2}(x) + V_{\text{Airy}}(x)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x). \quad (\text{A.19})$$

Because of the confining potential, we already know that the energy spectrum will be discrete. Thus we use an integer  $n$  index. For  $x > 0$ , one can re-write this equation

$$\psi_n''(x) - 2\lambda\left(x - \frac{E_n}{\lambda}\right)\psi_n(x) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Putting  $\psi_n(x) = \chi(x - E_n/\lambda)$ , then  $\chi(y) = \varphi((2\lambda)^{1/3}y)$ , one obtains

$$\varphi''(u) - u\varphi(u) = 0, \quad (\text{A.21})$$

which is solved by the Airy functions ( $\text{Ai}(x)$  and  $\text{Bi}(x)$ ). That explains the name ‘Airy’ used since the beginning. We eliminate  $\text{Bi}(x)$  because the wavefunction needs to tend to zero when  $x \rightarrow \infty$ . The solutions are of the form  $\psi_n(x) = (1/K)\text{Ai}((2\lambda)^{1/3}(x - E_n/\lambda))$  with  $K$  a normalization constant. The energy levels are determined by the condition that the wavefunction vanishes in  $x = 0$ . They are then related to the zeros  $-\alpha_n$  of the Airy function  $\text{Ai}(x)$  on the negative axis ( $\alpha_n > 0$ ):

$$\text{Ai}\left(-\frac{2^{1/3}}{\lambda^{2/3}}E_n\right) = 0 \Rightarrow E_n = \alpha_n 2^{-1/3}\lambda^{2/3} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\text{A.22})$$

The normalized wavefunctions are

$$\begin{aligned} \psi_n(x) &= \frac{\text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}x - \alpha_n]}{\sqrt{\int_0^\infty \text{Ai}^2[(2\lambda)^{1/3}y - \alpha_n]dy}} \\ &= \frac{\text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}x - \alpha_n]}{\sqrt{(2\lambda)^{-1/3}(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2}}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

where, from the first to the second line, we have just modified the expression of the normalization constant, using the property that  $\int_{-\alpha_n}^\infty \text{Ai}^2(z)dz = (\text{Ai}'(-\alpha_n))^2$ . Let us compute the propagator of the particle in such a potential:

$$\begin{aligned} G_{\text{Airy}}(y, t|x, s) &= \langle y|e^{-(t-s)H_{\text{Airy}}}|x\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(y) e^{-(t-s)E_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}y - \alpha_n]}{\sqrt{(2\lambda)^{-1/3}(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2}} \frac{\text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}x - \alpha_n]}{\sqrt{(2\lambda)^{-1/3}(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2}} e^{-(t-s)\alpha_n 2^{-1/3}\lambda^{2/3}}. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

The general form of the Airy propagator, for the potential  $V_{\text{Airy}}(x) = V_0(x) + \lambda x$ , is

$$G_{\text{Airy}}(y, t|x, s) = (2\lambda)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}y - \alpha_n] \text{Ai}[(2\lambda)^{1/3}x - \alpha_n]}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} e^{-\alpha_n(t-s)2^{-1/3}\lambda^{2/3}}. \quad (\text{A.25})$$

### A.5. Linear potential and asymptotic form of the Airy propagator

For the purpose of the main text, we have to obtain the asymptotic form of the Airy propagator in equation (A.25) when  $|t - s| \rightarrow 0$ . Here, we consider the simple case of the linear potential (constant force), we compute exactly the propagator and then we take the limit, showing that this is equivalent to taking the limit of the Airy problem. First, the action is, between  $(x, s)$  and  $(y, t)$  along the path  $x(\tau)$ :

$$S[x(\tau)] = \int_s^t d\tau \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{dx(\tau)}{d\tau} \right)^2 + \lambda x(\tau) \right\}. \quad (\text{A.26})$$

Because the Lagrangian is a quadratic form in its variables  $(x(\tau), \dot{x}(\tau))$ , we know that the propagator is of the form

$$G_{\text{lin}}(y, t|x, s) = F(t - s) e^{-S[x_{\text{classical}}(\tau)]}, \quad (\text{A.27})$$

where  $x_{\text{classical}}(\tau)$  is the classical path between  $(x, s)$  and  $(y, t)$ . Without loss of generality because of time translation invariance, let us take  $s = 0$ . The classical path is

$$x_{\text{classical}}(\tau) = \frac{1}{2}\lambda\tau^2 + \left\{ (y - x) - \frac{1}{2}\lambda t^2 \right\} \frac{\tau}{t} + x. \quad (\text{A.28})$$

The action, computed along the classical path, is then

$$S[x_{\text{classical}}(\tau)] = -\frac{1}{24}\lambda^2 t^3 + \frac{(y - x)^2}{2t} + \frac{1}{2}\lambda t(x + y). \quad (\text{A.29})$$

Because we are dealing directly with probabilities, we can compute the function  $F(t)$  by the normalization condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy G_{\text{lin}}(y, t|x, 0) = 1. \quad (\text{A.30})$$

Thus we obtain

$$G_{\text{lin}}(y, t|x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t - s)}} \exp \left( -\frac{\lambda(t - s)^3}{8} - \frac{(y - x)^2}{2(t - s)} - \frac{\lambda(t - s)}{2}(x + y) \right). \quad (\text{A.31})$$

For an infinitesimal difference in time, i.e. for  $t = s + \epsilon$ , we have

$$G_{\text{lin}}(y, s + \epsilon|x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp \left( -\frac{\lambda^2\epsilon^3}{8} - \frac{(y - x)^2}{2\epsilon} - \frac{\lambda\epsilon}{2}(x + y) \right). \quad (\text{A.32})$$

Here, let us remark that  $\lambda$  can have a dependence in the time difference  $\epsilon$  (which can have any value at this stage). That is not introducing any dangerous time dependence: we give a linear potential  $\lambda(\epsilon)x$  for the particle at point  $x$ , with a slope given by any function of  $\epsilon$ , and we ask what is the probability of finding at a certain point  $y$  at time

$t = s + \epsilon$ , given that the particle started at point  $x$  at time  $s$ . However, we see in the previous formula that the expression of the propagator becomes ill-defined when  $\epsilon \rightarrow 0$  as soon as  $\lambda(\epsilon) \propto \epsilon^{-(1+\alpha)}$ , with  $\alpha > 0$ .

Now let us take  $\lambda = p/\epsilon$ , with  $p$  a fixed positive number. We have at leading order in  $\epsilon \ll 1$ :

$$G_{\text{lin}}(y, s + \epsilon|x, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\epsilon} - \frac{p}{2}(x+y)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^{1/2}). \quad (\text{A.33})$$

The limit  $\epsilon \rightarrow 0$  can be taken in formula (A.32) and one obtains

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\text{lin}}(y, s + \epsilon|x, s) = \delta(y-x)e^{-px}. \quad (\text{A.34})$$

The difference between the linear propagator and the Airy propagator is that there is in the latter a wall in  $x = 0$ . But if we have to take the Airy propagator between two infinitesimally close points, the particle, placed in  $x > 0$ , does not have the time to feel the wall. Indeed, for a time  $\epsilon$ , the Brownian particle will explore a space region of order  $\epsilon^{1/2}$ . So, as close as we are to the wall, we can choose an  $\epsilon$  small enough not to feel the wall. In this limit, the Airy propagator is equivalent to the linear propagator, that is, for  $t = s + \epsilon$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\text{Airy}}(y, s + \epsilon|x, s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\text{lin}}(y, s + \epsilon|x, s), \quad (\text{A.35})$$

for the same expression for the linear part of the potential. With the potential  $V_{\text{Airy}}(x) = V_0(x) + (p/\epsilon)x$ , we thus have

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} G_{\text{Airy}}(y, s + \epsilon|x, s) = \delta(y-x)e^{-px}. \quad (\text{A.36})$$

Explicitly, this yields the identity

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\frac{2p}{\epsilon}\right)^{1/3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Ai}[(2p/\epsilon)^{1/3}y - \alpha_n] \text{Ai}[(2p/\epsilon)^{1/3}x - \alpha_n]}{(\text{Ai}'[-\alpha_n])^2} e^{-\alpha_n 2^{-1/3} \epsilon^{1/3} p^{2/3}} = \delta(y-x)e^{-px}. \quad (\text{A.37})$$

## Appendix B. Another calculation of the normalization constant $\tilde{Z}_\kappa$

In this appendix, we compute the normalization constant  $\tilde{Z}_\kappa$  involved in section 3 using the random acceleration process, which is described by the stochastic equation of motion  $\ddot{x}(t) = \zeta(t)$ , where  $\zeta$  is Gaussian white noise. From the joint distribution of heights  $P[\{h^\kappa\}]$ , one can determine the marginal distribution of one height, say  $h^\kappa(x_0)$ , for a particular  $x_0$ . The joint distribution of the heights is Gaussian and therefore the marginal distribution of a single height must be Gaussian (by virtue of the central limit theorem). One simple way to compute  $\tilde{Z}_\kappa$  is to consider the marginal distribution of  $h^\kappa(\kappa L)$ : let us call  $p(v) = \text{Prob}(h^\kappa(\kappa L) = v)$  this probability.  $p(v)$  is a centered Gaussian with a variance  $\sigma^2$  which we now determine.



Integrating the joint distribution  $P[\{h^\kappa\}]$  over all paths (bridges, i.e. with pbc) such that  $h^\kappa(0) = h^\kappa(L) = u$  for  $u \in ]-\infty, \infty[$ , and keeping  $h^\kappa(\kappa L) = v$  fixed, one recovers  $p(v)$ :

$$p(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) P[\{h^\kappa\}] \delta(h^\kappa(\kappa L) - v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-v^2/(2\sigma^2)}. \quad (\text{B.1})$$

The path integral in this last expression (B.1) is explicitly

$$p(v) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2)[\int_0^{\kappa L} dx (\partial_x h^\kappa)^2 + \int_{\kappa L}^L dx (\partial_x h^\kappa)^2]} \times \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right) \delta(h^\kappa(\kappa L) - v).$$

As  $h^\kappa(\kappa L) = v$  is fixed, and because the process is Markovian, one can cut the whole path integral into two independent blocks: one for the time interval  $[0, \kappa L]$  and one for the interval  $[\kappa L, L]$ . This yields

$$p(v) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{h^\kappa(\kappa L)=v}^{h^\kappa(L)=u} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_{\kappa L}^L dx (\partial_x h^\kappa)^2} \times \int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(\kappa L)=v} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_0^{\kappa L} dx (\partial_x h^\kappa)^2} \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right). \quad (\text{B.2})$$

The block for  $[\kappa L, L]$  is simply the propagator of the free Brownian motion, but the path integral for  $[0, \kappa L]$  contains an additional delta function, which constrains the Brownian trajectories to have a null area. In the latter, let us write  $r(x) = \int_0^x h^\kappa(x') dx'$ , so that  $h^\kappa(x) = (dr(x)/dx) = \dot{r}(x)$ , and

$$\int_{h^\kappa(0)=u}^{h^\kappa(\kappa L)=v} \mathcal{D}h^\kappa(x) e^{-(1/2) \int_0^{\kappa L} dx (\partial_x h^\kappa)^2} \delta\left(\int_0^{\kappa L} h^\kappa(x) dx\right) \equiv \int_{\dot{r}(0)=u}^{\dot{r}(\kappa L)=v} \mathcal{D}\dot{r}(x) e^{-(1/2) \int_0^{\kappa L} dx (\partial_x \dot{r}(x))^2} \delta(r(\kappa L)). \quad (\text{B.3})$$

We recognize the propagator of the random acceleration process (RAP) between position  $r(0) = 0$  and speed  $\dot{r}(0) = u$ , and position  $r(\kappa L) = 0$  and speed  $\dot{r}(\kappa L) = v$ . The propagator  $G_{\text{RAP}}$  is the probability of finding the randomly accelerated particle at point  $x_2$  with speed  $v_2$  at time  $t = T$ , knowing that it was in point  $x_1$  with speed  $v_1$  at time  $t = 0$ , and is given by the formula [27]

$$G_{\text{RAP}}(x_2, v_2, T | x_1, v_1, 0) = \frac{\sqrt{3}}{\pi T^2} \times \exp\left(-\frac{6}{T^3}(x_2 - x_1 - v_1 T)(x_2 - x_1 - v_2 T) - \frac{2}{T}(v_2 - v_1)^2\right). \quad (\text{B.4})$$

Hence

$$p(v) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} du \{G_{\text{free}}(u, L | v, \kappa L) \times G_{\text{RAP}}(0, v, \kappa L | 0, u, 0)\}. \quad (\text{B.5})$$

Using formula (B.4), one is reduced to compute a Gaussian integral, and one finds

$$p(v) = \frac{1}{\tilde{Z}_\kappa} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3}{\kappa^3 L^4 (4 - 3\kappa)}} e^{-(6/\kappa L(4-3\kappa))v^2}. \quad (\text{B.6})$$

We can finally identify the second moment of the marginal distribution:

$$\sigma^2 = \langle (h^\kappa(\kappa L))^2 \rangle = \frac{L(4 - 3\kappa)}{12}, \quad (\text{B.7})$$

and the normalization constant

$$\tilde{Z}_\kappa = \frac{1}{\kappa L \sqrt{2\pi L}}, \quad (\text{B.8})$$

which is what we found in the main text using a different method (cf equation (26)).

## References

- [1] Gumbel E J, 1958 *Statistics of Extremes* (New York: Dover)
- [2] Embrecht P, Klüppelberg C and Mikosh T, 1997 *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance* (Berlin: Springer)
- [3] Katz R W, Parlange M P and Naveau P, *Statistics of extremes in hydrology*, 2002 *Adv. Water Resources* **25** 1287
- [4] Bouchaud J P and Mézard M, *Universality classes for extreme value statistics*, 1997 *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** 7997
- [5] Györgyi G, Holdsworth P C W, Portelli B and Rácz Z, *Statistics of extremal intensities for Gaussian interfaces*, 2003 *Phys. Rev. E* **68** 056116
- [6] Raychaudhuri S, Cranston M, Przybyla C and Shapir Y, *Maximal height scaling of kinetically growing surfaces*, 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 136101
- [7] Majumdar S N and Comtet A, *Exact maximal height distribution of fluctuating interfaces*, 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 225501
- [8] Majumdar S N and Comtet A, *Airy distribution function: from the area under a Brownian excursion to the maximal height of fluctuating interfaces*, 2005 *J. Stat. Phys.* **119** 777
- [9] Guclu H and Korniss G, *Extreme fluctuations in small-world networks with relaxational dynamics*, 2004 *Phys. Rev. E* **69** 065104(R)
- [10] Guclu H and Korniss G, *Extreme fluctuations in small-world-coupled autonomous systems with relaxational dynamics*, 2005 *Fluct. Noise Lett.* **5** L43
- [11] Lee D S, *Distribution of extremes in the fluctuations of two-dimensional equilibrium interfaces*, 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 150601
- [12] Schehr G and Majumdar S N, *Universal asymptotic statistics of maximal relative height in one-dimensional solid-on-solid models*, 2006 *Phys. Rev. E* **73** 056103
- [13] Györgyi G, Moloney N R, Ozogány K and Rácz Z, *Maximal height statistics for  $1/f^\alpha$  signals*, 2007 *Phys. Rev. E* **75** 021123
- [14] Burkhardt T W, Györgyi G, Moloney N R and Rácz Z, *Extreme statistics for time series: distribution of the maximum relative to the initial value*, 2007 *Phys. Rev. E* **76** 041119
- [15] Moloney N R and Davidsen J, *Extreme value statistics and return intervals in long-range correlated uniform deviates*, 2009 *Phys. Rev. E* **79** 041131
- [16] Bartelt N C, Golding J L, Einstein T L and Williams E D, *The equilibration of terrace width distributions on stepped surfaces*, 1992 *Surf. Sci.* **273** 252
- [17] Abramowitz M and Stegun I A, 1973 *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover)
- [18] Takacs L, *Limit distributions for the Bernoulli meander*, 1995 *J. Appl. Probab.* **32** 375
- [19] Janson S and Louchard G, *Tail estimates for the Brownian excursion area and other Brownian areas*, 2007 *Electron. J. Probab.* **12** 1600
- [20] For a review on Brownian area problems see Janson S, *Brownian excursion area, Wright's constants in graph enumeration, and other Brownian areas*, 2007 *Probab. Surv.* **4** 80
- [21] Majumdar S N, *Persistence in nonequilibrium systems*, 2005 *Curr. Sci. (India)* **89** 2076
- [22] Sabhapandit S and Majumdar S N, *Density of near-extreme events*, 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 140201

- [23] Kearney M J, Majumdar S N and Martin R J, *The first-passage area for drifted Brownian motion and the moments of the Airy distribution*, 2007 *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** F863
- [24] Majumdar S N and Dasgupta C, *Spatial survival probability for one-dimensional fluctuating interfaces in the steady state*, 2006 *Phys. Rev. E* **73** 011602
- [25] Györgyi G, Moloney N R, Ozogány K and Rácz Z, *Finite-size scaling in extreme statistics*, 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 210601
- [26] Feynman R P and Hibbs A R, 1965 *Quantum Mechanics and Path Integrals* (New York: McGraw-Hill)
- [27] Burkhardt T W, *The random acceleration process in bounded geometries*, 2007 *J. Stat. Mech.* P07004

## B.2 Publication 2

[149] J. Rambeau and G. Schehr. Extremal statistics of curved growing interfaces. *Euro. Phys. Lett.*, 91:60006, 2010

*Nota Bene* : Un facteur 2 manque dans l'équation (1) de cet article. La relation correcte est donnée en formule (4.108) dans le texte, ou en formule (5) de la référence [150], reproduit dans l'annexe B.3.

# Extremal statistics of curved growing interfaces in $1+1$ dimensions

J. RAMBEAU<sup>(a)</sup> and G. SCHEHR<sup>(b)</sup>

*Laboratoire de Physique Théorique (UMR du CNRS 8627), Université de Paris-Sud 11  
91405 Orsay Cedex, France, EU*

received 8 July 2010; accepted in final form 15 September 2010  
published online 15 October 2010

PACS 05.40.-a – Fluctuation phenomena, random processes, noise, and Brownian motion

PACS 02.50.-r – Probability theory, stochastic processes, and statistics

PACS 75.10.Nr – Spin-glass and other random models

**Abstract** – We study the joint probability distribution function (pdf)  $P_t(M, X_M)$  of the maximum  $M$  of the height and its position  $X_M$  of a curved growing interface belonging to the universality class described by the Kardar-Parisi-Zhang equation in  $1+1$  dimensions, in the long time  $t$  limit. We obtain exact results for the related problem of  $p$  non-intersecting Brownian bridges where we compute the joint pdf  $P_p(M, \tau_M)$ , for any finite  $p$ , where  $\tau_M$  is the time at which the maximal height  $M$  is reached. This yields an approximation of  $P_t(M, X_M)$  for the interface problem, whose accuracy is systematically improved as  $p$  is increased, becoming exact for  $p \rightarrow \infty$ . We show that our results, for moderate values of  $p \sim 10$ , describe accurately our numerical data of a prototype of these systems, the polynuclear growth model in droplet geometry. We also discuss applications of our results to the ground state configuration of the directed polymer in a random medium with one fixed endpoint.

Copyright © EPLA, 2010

**Introduction.** – The study of fluctuations in stochastic growth processes has attracted much attention during the last two decades [1,2]. Such processes are ubiquitous in nature as they appear in various physical situations ranging from paper wetting to burning fronts or growing bacterial colonies. In many experimental settings the growth starts from a point-like region (a seed) with a strong tendency to evolve towards the approximate spherical symmetry. Such examples include fluid flow in porous media, adatoms and vacancy islands on surfaces [3] but also biological systems such as tumors [4].

To describe such phenomena driven by a growing interface, several models have been studied, like the Eden model, polynuclear growth models (PNG) or ballistic deposition models, among others [2]. In  $1+1$  dimensions, it is widely believed that all these models belong to the same universality class as that of the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) equation [5,6]. At time  $t$ , the width of the interface  $W_L(t)$ , for such a system of size  $L$ , behaves like  $W_L(t) \sim L^\zeta \mathcal{W}(t/L^z)$  with universal exponents  $\zeta = \frac{1}{2}$  and  $z = \frac{3}{2}$  [7]. In the growth regime  $t_0 \ll t \ll L^z$  (where  $t_0$  is a microscopic time scale) exact results for different lattice models have shown that the notion of universality extends

far beyond the exponents and also applies to full distribution functions of physical observables [8–10]. In particular, the scaled cumulative distribution of the height field coincides with the Tracy-Widom (TW) distribution  $\mathcal{F}_\beta(\xi)$  with  $\beta = 2$  (respectively,  $\beta = 1$ ) for the curved geometry (respectively, for the flat one), which describes the edge of the spectrum of random matrices in the Gaussian Unitary Ensemble (respectively of the Gaussian Orthogonal Ensemble) [11]. Height fluctuations were measured in experiments, both in planar [12] and more recently in curved geometry in the electroconvection of nematic liquid crystals [13] and a very good agreement with TW distributions was found.

Here we focus on a prototype of these models, the PNG model [14], but our results hold more generally for curved growing interfaces in the KPZ universality class (see below). It is defined as follows. At time  $t = 0$  a single island starts spreading on a flat substrate at the origin  $x = 0$  with unit velocity. Seeds of negligible size then nucleate randomly at a constant rate  $\rho = 2$  per unit length and unit time and then grow laterally also at unit velocity. When two islands on the same layer meet they coalesce. Meanwhile, nucleation continuously generates additional layers and in the droplet geometry, nucleations only occur above previously formed layers. Denoting by  $h(x, t)$  the height of the interface at point  $x$  and time  $t$ , one thus

<sup>(a)</sup>E-mail: rambeau@th.u-psud.fr

<sup>(b)</sup>E-mail: schehr@th.u-psud.fr

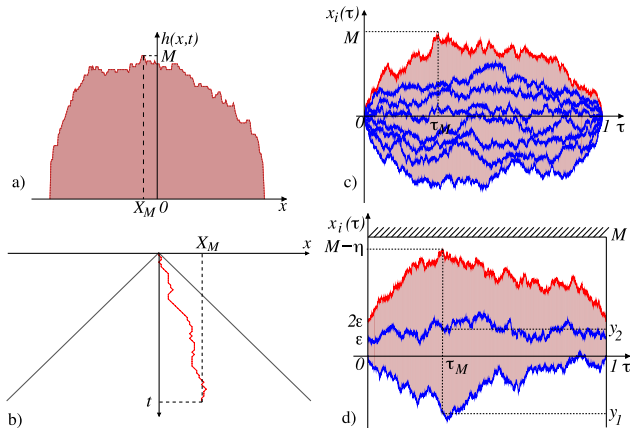


Fig. 1: (Colour on-line) a) Height profile  $h(x,t)$  for fixed time  $t$  for the PNG model. b) An optimal path of the DPRM of length  $t$ . c) A  $p$ -watermelon configuration ( $p=8$ ). d) Sketch of the method to compute the joint pdf  $P_p(M, \tau_M)$ .

has  $h(x,t) = 0$  for  $|x| > t$ . On the other hand, in the long time limit, the profile for  $|x| \leq t$  becomes circular  $h(x,t) \sim 2t\sqrt{1 - (x/t)^2}$  [15], but there remain height fluctuations around this semi-circle. A natural way to characterize these fluctuations is to consider the maximal height  $M$  and its position  $X_M$  (see fig. 1(a)). According to KPZ scaling, one expects  $M - 2t \sim t^{\frac{1}{3}}$ , while  $X_M \sim t^{\frac{2}{3}}$  [16]. The purpose of this letter is to provide an analytic approach to the joint pdf  $P_t(M, X_M)$  for large  $t$ .

The PNG model can be mapped onto the directed polymer in a random medium (DPRM) on the square lattice with one fixed end [2,10]. In this language  $M$  is the ground state energy while  $X_M$  is the transverse coordinate of the free end of the optimal polymer of length  $t$  (see fig. 1(b)). Related questions for the continuum DPRM are currently under active investigations [17]. The marginal distributions of  $M$  and  $X_M$  are already interesting and related extreme value quantities, like the maximal relative height, have been extensively studied in the stationary regime  $t \gg L^z$  [18–20]. Much less is known in the growth regime which we focus on. From the mapping onto the DPRM, one identifies the pdf of the maximal height  $M$  in the droplet geometry with the pdf of the height  $h_{\text{flat}}(x,t)$  at a given point  $x$  and time  $t$  in the planar geometry [21]. Therefore we conclude that the pdf of  $M$ , suitably rescaled and shifted, is given by  $\mathcal{F}'_1(\xi)$  [16,22], the TW distribution for  $\beta=1$ . On the other hand, the computation of the (marginal) distribution of  $X_M$  is a challenging open problem [16].

To compute  $P_t(M, X_M)$ , we exploit the exact mapping between the height field in the PNG model and the top path of  $p$  non-intersecting random walkers, so called vicious walkers [23], in the limit  $p \rightarrow \infty$  [8,24]. Here we consider “watermelons” (fig. 1(c)) where  $p$  non-colliding Brownian motions  $x_1(\tau) < \dots < x_p(\tau)$  on the unit time interval are constrained to start and end at 0 (*i.e.* Brownian bridges). In the large  $p$  limit, one can show,

using the connection between this vicious walkers problem and random matrix theory, that  $x_p(\tau)$  also reaches a circular shape of amplitude  $\sqrt{p}$ ,  $x_p(\tau) \sim 2\sqrt{p}\sqrt{\tau(1-\tau)}$  while the fluctuations are in that case of order  $p^{-\frac{1}{6}}$  [25]. Hence  $x_p$  and  $\tau$  map onto  $h$  and  $x$  in the growth model while  $p$  plays the role of  $t$ . This mapping, for  $p, t \gg 1$  reads [8,24]

$$\frac{h(ut^{\frac{2}{3}}, t) - 2t}{t^{\frac{1}{3}}} \equiv \frac{x_p(\frac{1}{2} + \frac{u}{2}p^{-\frac{1}{3}}) - \sqrt{p}}{p^{-\frac{1}{6}}} \equiv \mathcal{A}_2(u) - u^2, \quad (1)$$

where  $\mathcal{A}_2(u)$  is the Airy<sub>2</sub> process [8] which is a stationary, and non-Markovian, process. In particular,  $\text{Proba}[\mathcal{A}_2(0) \leq \xi] = \mathcal{F}_2(\xi)$ . In this letter, we compute exactly the joint distribution  $P_p(M, \tau_M)$  of the maximal height  $M$  and its position  $\tau_M$  for the vicious walker problem (fig. 1(c)). While the maximal height  $M$  has been recently studied [25,26], nothing is known about the distribution of  $\tau_M$ , which has by the way recently attracted much interest in various other one-dimensional stochastic processes [27–30]. Our results are not only relevant, for finite  $p$ , for the vicious walkers problem, but, thanks to the above relation (1), become exact for  $p \rightarrow \infty$ , for curved growing interface, as well as for the DPRM. We actually show that for moderate values of  $p \sim 10$ , our analytical formula describes quite accurately our numerical data for the PNG model.

**Method.** – The basic idea of the method to compute  $P_p(M, \tau_M)$  is to divide the “watermelons” configuration in two time intervals,  $\tau \in [0, \tau_M]$  and  $\tau \in [\tau_M, 1]$  and use the Markov property of the whole process to treat these two intervals independently (fig. 1(d)). In both intervals, the  $p$  vicious walkers are constrained to stay below  $M$ , while we impose  $x_p(\tau_M) = M$ . To compute the propagator of these constrained vicious walkers in each sub-interval, we use a path-integral approach. Let us denote  $p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a)$  the propagator of  $p$  non-intersecting Brownian motions, starting in  $\mathbf{a} \equiv (a_1, \dots, a_p)$  at time  $t_a$  and ending in  $\mathbf{b} \equiv (b_1, \dots, b_p)$  at time  $t_b$  and constrained to stay below  $M$  in the time interval  $[t_a, t_b]$ .  $p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a)$  is given by the sum of the weights  $\exp[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \int_{t_a}^{t_b} (\frac{dx_i}{d\tau})^2 d\tau]$  over all trajectories satisfying  $x_1(\tau) < x_2(\tau) < \dots < x_p(\tau) < M$ , for  $\tau \in [t_a, t_b]$ . In the language of path integrals, this corresponds to the propagator (in imaginary time) of  $p$  quantum free fermions with an infinite wall in  $x=M$ , the associated Schrödinger Hamiltonian being  $H_M = \sum_{i=1}^p [-\frac{1}{2} \partial_{x_i}^2 + V_M(x_i)]$ . The hard-wall potential is given by  $V_M(x) = 0$  if  $x < M$  and  $V_M(x) = +\infty$  if  $x > M$  [25]. The use of fermions incorporates naturally the non-colliding condition [25,31,32]. This allows to write this propagator as

$$p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \langle \mathbf{b} | e^{-(t_b - t_a) H_M} | \mathbf{a} \rangle, \quad (2)$$

which we can compute using a spectral decomposition over the fermionic eigenfunctions of  $H_M$ . Before doing this,

we notice that the “watermelons” configurations that we study here are actually ill-defined for Brownian motions which are continuous both in space and time. It is indeed well known that if two walkers cross each other they will recross each infinitely many times immediately after the first crossing. This means in particular that it is impossible to impose  $x_i(0) = x_{i+1}(0)$  and simultaneously  $x_i(0^+) < x_{i+1}(0^+)$ . Here, following refs. [19,25,27], we adopt a regularization scheme where we impose that the  $p$  walkers start and end at  $0 < \epsilon < \dots < (p-1)\epsilon$  and take eventually the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . We use an additional cut-off procedure by imposing that  $x_p(\tau_M) = M - \eta$  and then take the limit  $\eta \rightarrow 0$ .

**Results for  $p$  vicious walkers.** – The calculation of  $P_p(M, \tau_M)$  requires the computation of  $p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a)$ . Expanding eq. (2) over the fermionic eigenvectors of  $H_M$  yields

$$p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \langle \mathbf{b} | e^{-(t_b - t_a)H_M} | \mathbf{a} \rangle = \int_0^\infty d\mathbf{k} e^{-\frac{\mathbf{k}^2}{2}(t_b - t_a)} \det_{1 \leq i, j \leq p} \phi_{k_i}(b_j) \det_{1 \leq i, j \leq p} \phi_{k_i}^*(a_j), \quad (3)$$

where  $\phi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[k(M-x)]$  naturally appear as the eigenvectors of  $H_M$  and where we use the notations  $\int_0^\infty d\mathbf{k} \equiv \int_0^\infty dk_1 \dots \int_0^\infty dk_p$  and  $\mathbf{k}^2 = k_1^2 + \dots + k_p^2$ . In eq. (3), the determinants appear as Slater determinants in the associated fermions problem. From this propagator (3) we compute  $P_p(M, \tau_M)$  by dividing the configuration in two time-independent intervals,  $\tau \in [0, \tau_M]$  and  $\tau \in [\tau_M, 1]$  as explained above (see also fig. 1(d)) to obtain

$$P_p(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon, \eta \rightarrow 0} \frac{1}{Z_p} \int_{-\infty}^{M-\eta} d\mathbf{y} p_{<M}(\epsilon, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) \times p_{<M}(\mathbf{y}, \tau_M | \epsilon, 0) \delta(y_p - (M - \eta)), \quad (4)$$

where the delta function enforces  $x_p(\tau_M) = M - \eta$  and where the amplitude  $Z_p$ , which depends explicitly on  $\epsilon$  and  $\eta$  is determined by the normalization condition  $\int_0^{+\infty} dM \int_0^1 d\tau_M P_p(M, \tau_M) = 1$ . Using the above formula for the constrained propagator (3) in eq. (4), and taking the limits  $\epsilon, \eta \rightarrow 0$ , one obtains

$$P_p(M, \tau_M) = z_p^{-1} M^{-(p^2+3)} \int_0^\infty d\mathbf{q} \int_0^\infty dq'_p e^{-\frac{\sum_{i=1}^{p-1} q_i^2}{2M^2}} \times e^{-\frac{\tau q_p^2 + (1-\tau)q'_p{}^2}{2M^2}} q_p q'_p \Theta_p(q_1, \dots, q_p) \Theta_p(q_1, \dots, q'_p), \quad (5)$$

where  $\Theta_p(\mathbf{q})$  is the following determinant:

$$\Theta_p(\mathbf{q}) = \det_{1 \leq i, j \leq p} q_i^{j-1} \cos(q_i - j\pi/2). \quad (6)$$

To compute  $z_p$ , we use that  $\int_0^1 P_p(M, \tau_M) d\tau_M$  must yield back the expression for the distribution of the maximum as computed in ref. [25]. This allows to obtain

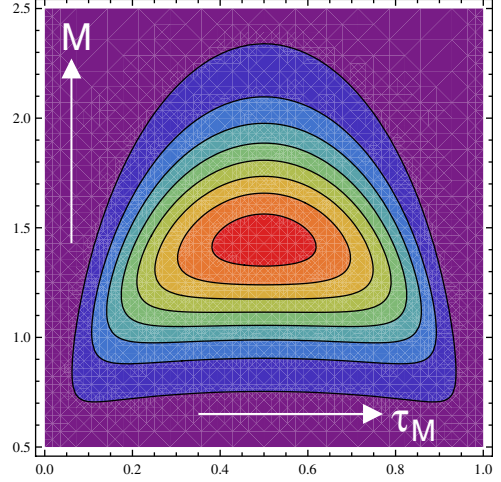


Fig. 2: (Colour on-line) Contour plot of  $P_p(M, \tau_M)$  for  $p=3$ . The contour lines correspond to 0.1, 0.4, ..., 2.2.

$z_p = \pi^{1+\frac{p}{2}} 2^{-\frac{3p}{2}} \prod_{j=0}^{p-1} j!$ . In eq. (5), one can expand the determinant by minors and then perform the integrals over  $q_i$  using the Cauchy-Binet identity which reads

$$\int d\mathbf{x} \det_{1 \leq i, j \leq p} f_i(x_j) \det_{1 \leq i, j \leq p} g_i(x_j) = p! \det_{1 \leq i, j \leq p} \int dx f_i(x) g_j(x), \quad (7)$$

for any suitable functions  $f_i(x)$  and  $g_i(x)$ . These integrals can be expressed in terms of Hermite polynomials  $H_n(x)$  and we obtain finally

$$P_p(M, \tau_M) = B_p[\det D]^t U(\tau_M) D^{-1} U(1 - \tau_M), \quad (8)$$

with  $B_p^{-1} = (2\pi)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{p-1} (j! 2^j)$  and where  $D \equiv D(M)$  is a  $p \times p$  matrix

$$D_{i,j} = (-1)^{i-1} H_{i+j-2}(0) - e^{-2M^2} H_{i+j-2}(\sqrt{2}M), \quad (9)$$

while  $U(\tau) \equiv U(M, \tau)$  is a column vector given by

$$U_i(\tau) = \tau^{-\frac{i+1}{2}} H_i(M/\sqrt{2\tau}) e^{-\frac{M^2}{2\tau}}. \quad (10)$$

In fig. 2, we show a contour plot of  $P_p(M, \tau_M)$  for  $p=3$ . For fixed  $\tau_M \in [0, 1]$ ,  $P_p(M, \tau_M)$ , as a function of  $M$  has a simple bell shape. Its behavior for fixed value of  $M$  as a function of  $\tau_M$  is more interesting. For sufficiently large  $M > M_p^*$ , it has a bell shape, with a maximum in  $\tau_M = \frac{1}{2}$ , while for  $M < M_p^*$ , it has an “M-shape” with two distinct maxima,  $\tau_M = \frac{1}{2}$  being a local minimum. One observes that  $M_p^*$  is a slowly increasing function of  $p$ .

By integrating our expression in eq. (8) over  $\tau_M$ , one checks that we recover the formula for the pdf of  $M$ , as obtained in ref. [26]. Indeed, one finds  $\text{Proba}[\max_\tau x_p(\tau) \leq M] = \det D / \prod_{j=0}^{p-1} (j! 2^j)$ , where the matrix  $D$  is defined in

eq. (9). On the other hand, by integrating eq. (8) over  $M$ , one obtains an expression for  $P_p(\tau_M)$ . While for  $p=1$ ,  $P_1(\tau_M)=1$ , one obtains, for instance, for  $p=2$

$$P_2(\tau_M) = 4 \left( 1 - \frac{1 + 10\tau_M(1 - \tau_M)}{(1 + 4\tau_M(1 - \tau_M))^{5/2}} \right). \quad (11)$$

For generic  $p$ ,  $P_p(\tau_M)$  is a function of  $\tau_M(1 - \tau_M)$  with the asymptotic behavior, for small  $\tau_M$

$$P_p(\tau_M) \sim \tau_M^{\nu(p)}, \quad \text{with } \nu(p) = (p^2 + p - 2)/2. \quad (12)$$

Note that for  $p$  independent Brownian motions (without the non-crossing condition) one has  $P_{p,\text{free}}(\tau_M) \sim \tau_M^{p-1}$  [29] so that the exponent  $\nu(p)$  bears the signature of the non-colliding condition.

The above approach can be extended to study the extreme statistics of  $p$  non-intersecting excursions, *i.e.* vicious walkers starting and terminating at the origin but with the additional constraint that they all stay positive in between [25,33,34]. The slight modification in our computation is to replace the Hamiltonian  $H_M$  (with a wall in  $x=M$ ) with the box Hamiltonian  $H_{\text{Box}}$  (with two walls: in  $x=0$  and in  $x=M$ ). Hence the energy levels are discrete, and consequently one has to treat discrete sums instead of integrals as before. Using the appropriate propagator in eq. (4), one finds, taking the limits  $\epsilon, \eta \rightarrow 0$ , the joint pdf for the non-intersecting excursions

$$\begin{aligned} P_{p,E}(M, \tau_M) &= z_{p,E}^{-1} M^{-(2p^2+p+3)} \\ &\times \sum_{n_1, \dots, n_p, n'_p > 0} (-1)^{n_p+n'_p} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [\sum_{i=1}^{p-1} n_i^2 + \tau_M n_p^2 + (1-\tau_M) n'_p{}^2]} \\ &\times \prod_{i=1}^{p-1} n_i^2 n_p^2 n'_p{}^2 \Delta_p(n_1^2, \dots, n_p^2) \Delta_p(n_1^2, \dots, n'_p{}^2), \end{aligned} \quad (13)$$

where we use the notation  $\Delta_p(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \prod_{1 \leq i < j \leq p} (\lambda_j - \lambda_i)$  for the Vandermonde determinant, and with the normalization  $z_{p,E} = 2^{\frac{p^2}{2}} \Gamma(p) \prod_{j=0}^{p-1} \times (2^j j! \Gamma(\frac{3}{2} + j)) \pi^{-(2p^2+p+2)}$ . Performing similar manipulations as before, one finds the joint pdf of the couple  $(M, \tau_M)$  for the excursions configuration in a determinantal form, reminiscent of the watermelons case (8)

$$P_{p,E}(M, \tau_M) = C_p [\det D_E]^t U_E(\tau_M) D_E^{-1} U_E(1 - \tau_M), \quad (14)$$

with  $C_p^{-1} = (-1)^{p+1} 2^{2p^2 - \frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{p-1} (j! \Gamma(\frac{3}{2} + j)) \pi^{-1}$ . The  $p \times p$  matrix  $D_E \equiv D_E(M)$  is (for  $1 \leq i, j \leq p$ )

$$D_{Ei,j} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{2(i+j-1)}(\sqrt{2}Mn) e^{-2M^2 n^2}, \quad (15)$$

and appears in the expression of the cumulative distribution of the maximum [33],  $\text{Proba}[\max_{\tau} x_p(\tau) \leq M] = (-1)^p \det D_E / (2^{p^2} \prod_{j=1}^p (2j-1)!)$ . The vector elements are (for  $i=1, \dots, p$ )

$$U_{Ei}(\tau) = \frac{1}{M} \left( -\frac{2\pi^2}{M^2} \right)^i \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2i} e^{-\frac{2\pi^2}{M^2} n^2 \tau}. \quad (16)$$

The integration of formula (13) with respect to  $M$  gives the pdf of the time to reach the maximum in this excursion process. For  $p=1$ , the formula in eq. (13) yields back the result obtained in ref. [27]. For  $p=2$ , we give the expression of  $P_{2,E}(\tau_M)$

$$P_{2,E}(\tau_M) = a \sum_{n_i > 0} \frac{(-1)^{n_2+n_3} n_1^2 n_2^2 n_3^2 (n_1^2 - n_2^2)(n_1^2 - n_3^2)}{(n_1^2 + \tau_M n_2^2 + (1 - \tau_M) n_3^2)^6}, \quad (17)$$

with  $a = 1280/\pi$ .

**Application to stochastic growth processes.** – We now come back to the joint pdf  $P_t(M, X_M)$  for curved growing interfaces (fig. 1(a)). From eq. (1) one obtains

$$P_t(M, X_M) \sim t^{-1} \mathcal{P}_{\text{Airy}}((M-2t)t^{-\frac{1}{3}}, X_M t^{-\frac{2}{3}}), \quad (18)$$

where  $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$  is the joint distribution of the maximum  $y$  and its position  $x$  for the process  $\mathcal{A}_2(u) - u^2$ ,  $u \in \mathbb{R}$ . From refs. [16,21,22] one obtains that the (marginal) pdf of  $y$ ,  $\mathcal{P}_{\text{Airy},M}(y)$ , is given by TW,  $\mathcal{P}_{\text{Airy},M}(y) = \mathcal{F}'_1(y)$ , and hence  $P_t(M) \sim t^{-\frac{1}{3}} \mathcal{F}'_1((M-2t)/t^{\frac{1}{3}})$ . On the other hand, from eq. (1),  $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$  can be obtained from our results for  $P_p(M, \tau_M)$  in eq. (8): in the scaling limit  $y = (M - \sqrt{p})p^{\frac{1}{6}}$  as well as  $x = 2(\tau_M - \frac{1}{2})p^{\frac{1}{3}}$  fixed one has indeed  $P_p(M, \tau_M) \sim 2p^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$ . While our expression (8) should be amenable to an asymptotic analysis for large  $p$ , yielding an explicit exact expression for  $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$ , such an analysis deserves further investigations. Here we show instead that, for finite values of  $p$ , this expression (8) describes quite accurately our numerical data for the extreme statistics of the PNG model in the droplet geometry. To illustrate this, we have computed numerically the (marginal) distribution of the position of the maximum  $X_M$ . We recall that, for the DPRM as in fig. 1(b)),  $X_M$  is the position of the free end of the optimal polymer.

In fig. 3, we show a plot of the rescaled distribution  $t^{\frac{2}{3}} P_t(X_M/t^{\frac{2}{3}})$  as a function of the rescaled variable  $X_M/t^{\frac{2}{3}}$  for  $t=768$  in solid line. We also plot our exact analytical results for watermelons, *i.e.*  $P_p(\tau_M)/(2p^{\frac{1}{3}})$  as a function of  $(2p^{\frac{1}{3}}(\tau_M - \frac{1}{2}))$  for  $p=10, 12, 14$  and 16 which is computed from eq. (8) as  $P_p(\tau_M) = \int_0^{\infty} dM P_p(M, \tau_M)$ . We emphasize that the good collapse of the different curves is obtained without any fitting parameter.

In fig. 4, we show a plot of the same quantities as in fig. 3 in log-linear plot. As expected, one observes some deviations between the result for the PNG and our computation for finite  $p=16$  in the tail of the



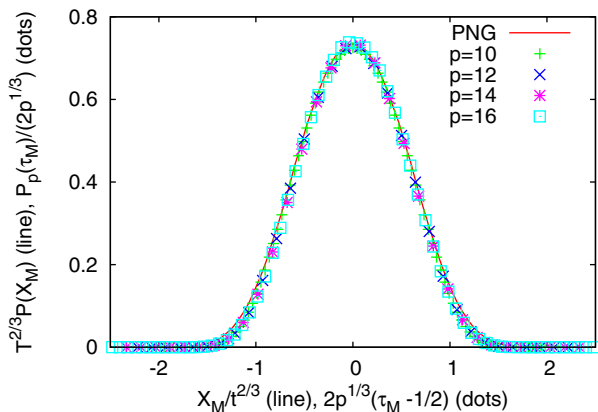


Fig. 3: (Colour on-line) On linear scales, the solid line is a plot of  $t^{2/3} P_t(X_M)$  as a function of  $X_M/t^{2/3}$ , for  $t=768$ , computed numerically for the PNG, while the dots correspond to our analytical results  $P_p(\tau_M)/(2p^{1/3})$  (8) as a function of  $2p^{1/3}(\tau_M - \frac{1}{2})$  for  $p=10, 12, 14$  and  $p=16$ .

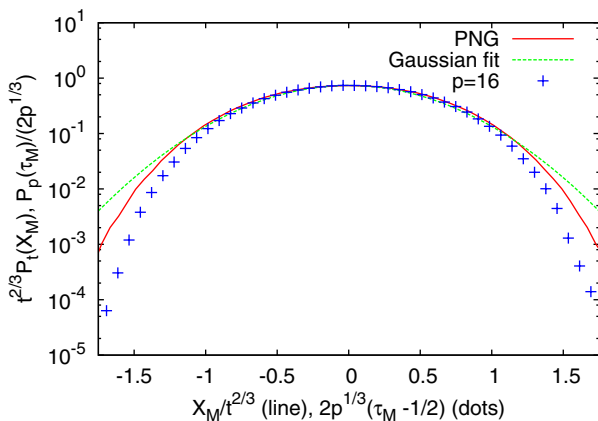


Fig. 4: (Colour on-line) Log-linear plot of: the rescaled distribution of the position of the maximum for PNG (solid line), the rescaled distribution of the time to reach the maximum for the  $p=16$  watermelons configuration (dots), and the closest Gaussian curve (dashed line), that do not match the PNG curve. The scaled quantities appear in the  $x, y$  labels (and are detailed in the caption of fig. 3).

distribution. Besides, our numerical data suggest that the marginal distribution of  $X_M$  is *non-Gaussian* (the best Gaussian approximation being shown as a dotted line). Instead, for  $X_M \gg t^{2/3}$ , our data are compatible with a stretched exponential behavior  $P_t(X_M) \sim t^{-\frac{2}{3}} e^{-\gamma(\frac{X_M}{t^{2/3}})^\delta}$ , with  $\delta \simeq 2.5$ , while its precise determination requires more numerical efforts. Interestingly, for  $p$  free Brownian bridges, one can show [29] that the distribution of  $\tau_M$  converges to a Gaussian distribution centered in  $\frac{1}{2}$  of width  $(8 \log n)^{-\frac{1}{2}}$ . Therefore, the non-Gaussianity of  $P_t(X_M)$  is a clear signature of the correlations in the associated vicious walkers problem.

The results obtained in the present letter extend far beyond the PNG model. Indeed our results hold more

generally for stochastic growth models, and physical situations, where the interface  $h(x, t)$  at point  $x$  and time  $t$  evolves according to the one-dimensional KPZ equation [5]

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x, t) = \nu \nabla^2 h(x, t) + \frac{\lambda}{2} (\nabla h(x, t))^2 + \zeta(x, t), \quad (19)$$

in a curved geometry. In eq. (19),  $\zeta(x, t)$  is a Gaussian white noise of zero mean and correlations  $\langle \zeta(x, t) \zeta(x', t') \rangle = D \delta(x - x') \delta(t - t')$ . In ref. [8], it was shown that the fluctuations of physical observables of the height field, evolving according to eq. (19), are universal, up to two non-universal parameters  $\lambda$  and  $A = D/2\nu$ . Once  $\lambda$  and  $A$  are fixed, these fluctuations are characterized by universal distribution functions. In the curved geometry,  $\lambda$  can be simply measured as the radial growth rate,  $\langle h(x=0, t) \rangle \sim \lambda t$  while  $A$  can be extracted from the width of the interface  $\langle (h(0, t) - \langle h(0, t) \rangle)^2 \rangle^{1/2} \sim AL/6$  for a system of finite size  $L$  [21]. For instance, the fluctuations of the height field are given by  $h(0, t) \simeq \lambda t + (A^2 \lambda t/2)^{1/3} \chi_{\text{GUE}}$  where  $\chi_{\text{GUE}}$  is a random variable distributed according to the TW distribution  $\mathcal{F}_2$  [8]. This universality was convincingly demonstrated in recent experiments [13]. Therefore, for an interface described by the KPZ equation (19) in a droplet geometry, one expects that the distribution of the position of the maximum  $X_M$  will have the scaling form  $P_t(X_M) \sim \xi(t)^{-1} \mathcal{P}_{\text{Airy}, X_M}(X_M/\xi(t))$  with  $\xi(t) = (2/A)(A^2 \lambda t/2)^{2/3}$  is the correlation length. The scaling function  $\mathcal{P}_{\text{Airy}, X_M}(x)$  is universal and can be computed from our formulas in eqs. (8), (18), see also fig. 3.

**Conclusion.** – To conclude, we have obtained an exact expression for the joint distribution of the maximum  $M$  and the time  $\tau_M$  at which this maximum is reached for  $p$  non-intersecting Brownian bridges (8) and excursions (14). We have shown that our analytic expression for moderate values of  $p$  Brownian bridges describe very accurately the extreme statistics of curved growing interfaces, becoming eventually exact in the limit  $p \rightarrow \infty$ . In addition to their relevance to the DPRM, our results may have applications to various other situations like step fluctuations in faceted crystals [35] or dimer-covering problems [36], where it was shown that the fluctuations are governed by the very same process  $\mathcal{A}_2(u) - u^2$  that we have studied here. Finally, in view of recent progresses [12,13], it seems possible to observe these extremal statistics for curved growing interfaces in experimental situations like nematic liquid crystals [13].

\*\*\*

We thank T. SASAMOTO for useful correspondence.

## REFERENCES

- [1] KRUG J. and SPOHN H., in *Solids far from Equilibrium*, edited by GODRÈCHE C. (Cambridge University Press, New York) 1991.

- [2] HALPIN-HEALY T. and ZHANG Y. C., *Phys. Rep.*, **254** (1995) 215.
- [3] KHARE S. V. and EINSTEIN T. L., *Phys. Rev. B*, **54** (1996) 11752.
- [4] BRÚ A., PASTOR J. M., FERNAUD I., BRÚ I., MELLE S. and BERENQUER C., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 4008.
- [5] KARDAR M., PARISI G. and ZHANG Y.-C., *Phys. Rev. Lett.*, **56** (1986) 889.
- [6] SASAMOTO T. and SPOHN H., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 230602.
- [7] DHAR D., *Phase Trans.*, **9** (1987) 51; GWA L.-H. and SPOHN H., *Phys. Rev. Lett.*, **68** (1992) 725.
- [8] PRÄHOFFER M. and SPOHN H., *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000) 4882; *J. Stat. Phys.*, **108** (2002) 1071.
- [9] JOHANSSON K., *Commun. Math. Phys.*, **209** (2000) 437; GRAVNER J., TRACY C. A. and WIDOM H., *J. Stat. Phys.*, **102** (2001) 1085; MAJUMDAR S. N. and NECHAEV S., *Phys. Rev. E*, **69** (2004) 011103.
- [10] MAJUMDAR S. N., *Les Houches Lecture Notes on "Complex Systems"*, edited by BOUCHAUD J. P., MÉZARD M. and DALIBARD J. (Elsevier, Amsterdam) 2007.
- [11] TRACY C. A. and WIDOM H., *Commun. Math. Phys.*, **159** (1994) 151; **177** (1996) 727.
- [12] MIETTINEN L., MYLLYS M., MERIKOSKI J. and TIMONEN J., *Eur. Phys. J. B*, **46** (2005) 55.
- [13] TAKEUCHI K. A. and SANO M., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 230601.
- [14] FRANCK F.C., *J. Cryst. Growth*, **22** (1974) 233; KRUG J. and SPOHN H., *Europhys. Lett.*, **8** (1989) 219.
- [15] PRÄHOFFER M., PhD Thesis, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2003.
- [16] JOHANSSON K., *Commun. Math. Phys.*, **242** (2003) 277.
- [17] DOTSENKO V. and KLUMOV B., *J. Stat. Mech.* (2010) P03022; CALABRESE P., LE DOUSSAL P. and ROSSO A., *EPL*, **90** (2010) 20002; AMIR G., CORWIN I. and QUASTEL J., arXiv:1003.0443.
- [18] RAYCHAUDHURI S., CRANSTON M., PRZYBYLA C. and SHAPIR Y., *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001) 136101.
- [19] MAJUMDAR S. N. and COMTET A., *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 225501; *J. Stat. Phys.*, **119** (2005) 777.
- [20] SCHEHR G. and MAJUMDAR S. N., *Phys. Rev. E*, **73** (2006) 056103; GYÖRGYI G., MOLONEY N. R., OZOGÁNY K. and RÁCZ Z., *Phys. Rev. E*, **75** (2007) 021123; BURKHARDT T. W., GYÖRGYI G., MOLONEY N. R. and RÁCZ Z., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 041119; RAMBEAU J. and SCHEHR G., *J. Stat. Mech.* (2009) P09004.
- [21] KRUG J., MEAKIN P. and HALPIN-HEALY T., *Phys. Rev. A*, **45** (1992) 638.
- [22] BAIK J. and RAINS E. M., in *Random Matrix Models and Their Applications*, MSRI Series, Vol. **40** (Cambridge University Press) 2001.
- [23] FISHER M. E., *J. Stat. Phys.*, **34** (1984) 667.
- [24] FERRARI P., *Lecture Notes of Beg-Rohu Summer School*, available at <http://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008/>.
- [25] SCHEHR G., MAJUMDAR S., COMTET A. and RANDON-FURLING J., *Phys. Rev. Lett.*, **101** (2008) 150601.
- [26] FEIERL T., *Proceedings of IWOCA 2009, Lect. Notes Comput. Sci.*, **5874** (2009) 242.
- [27] MAJUMDAR S., RANDON-FURLING J., KEARNEY M. and YOR M., *J. Phys. A: Math. Theor.*, **41** (2008) 365005.
- [28] SCHEHR G. and LE DOUSSAL P., *J. Stat. Mech.* (2010) P01009; MAJUMDAR S. N., ROSSO A. and ZOIA A., *J. Phys. A: Math. Theor.*, **43** (2010) 115001.
- [29] RANDON-FURLING J., MAJUMDAR S. N. and COMTET A., *Phys. Rev. Lett.*, **103** (2009) 140602; MAJUMDAR S. N., COMTET A. and RANDON-FURLING J., *J. Stat. Phys.*, **138** (2010) 955.
- [30] MAJUMDAR S. N., ROSSO A. and ZOIA A., *Phys. Rev. Lett.*, **104** (2010) 020602.
- [31] NADAL C. and MAJUMDAR S. N., *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 061117.
- [32] DE GENNES P. G., *J. Chem. Phys.*, **48** (1968) 2257.
- [33] KATORI M., IZUMI M. and KOBAYASHI N., *J. Stat. Phys.*, **131** (2008) 1067; KOBAYASHI N., IZUMI M. and KATORI M., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 051102.
- [34] FEIERL T., *Proceedings of the 2007 Conference on Analysis of Algorithms (AofA2007)*, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc.* (2007) p. 427.
- [35] FERRARI P.L. and SPOHN H., *J. Stat. Phys.*, **113** (2003) 1.
- [36] JOHANSSON K., *Probab. Theory Relat. Fields*, **123** (2002) 225.



## B.3 Publication 3

[150] J. Rambeau and G. Schehr. Distribution of the time at which  $N$  vicious walkers reach their maximal height. *Phys. Rev. E*, 83:061146, 2011

*Nota Bene* : Une erreur s'est glissée dans l'annexe A. La formule (A5) devrait être en réalité

$$\int_{ord} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{N!} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}),$$

et la démonstration associée est fausse. Cela ne se répercute en aucun cas sur le corps du texte, nous n'utilisons dans nos calculs que le fait que l'intégrale sur le domaine ordonné est proportionnelle à l'intégrale sur tout le domaine.

**Distribution of the time at which  $N$  vicious walkers reach their maximal height**

Joachim Rambeau\* and Grégory Schehr†

*Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay, Université Paris Sud 11 and CNRS, Orsay, France*

(Received 10 February 2011; published 24 June 2011)

We study the extreme statistics of  $N$  nonintersecting Brownian motions (vicious walkers) over a unit time interval in one dimension. Using path-integral techniques we compute exactly the joint distribution of the maximum  $M$  and of the time  $\tau_M$  at which this maximum is reached. We focus in particular on nonintersecting Brownian bridges (“watermelons without wall”) and nonintersecting Brownian excursions (“watermelons with a wall”). We discuss in detail the relationships between such vicious walkers models in watermelon configurations and stochastic growth models in curved geometry on the one hand and the directed polymer in a disordered medium (DPRM) with one free end point on the other hand. We also check our results using numerical simulations of Dyson’s Brownian motion and confront them with numerical simulations of the polynuclear growth model (PNG) and of a model of DPRM on a discrete lattice. Some of the results presented here were announced in a recent letter [J. Rambeau and G. Schehr, *Europhys. Lett.* **91**, 60006 (2010)].

DOI: [10.1103/PhysRevE.83.061146](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.83.061146)

PACS number(s): 05.40.–a, 02.50.–r, 75.10.Nr

**I. INTRODUCTION AND MOTIVATIONS**

Extreme value statistics (EVS) is at the heart of optimization problems and, as such, it plays a crucial role in the theory of complex and disordered systems [1,2]. For instance, to characterize the thermodynamical properties of a disordered or glassy system at low temperature, one is often interested in computing its ground state, that is, the configuration with *lowest* energy. Similarly, the low temperature dynamics of such systems is determined, at large times, by the largest energy barriers of the underlying free energy landscape. Thus the distribution of relaxation times is directly related to the statistics of the *largest* barriers in the systems. Hence, EVS has been widely studied in various models of statistical physics during the last few years [3–8]. This renewal of interest for EVS is certainly not restricted to physics but extends far beyond to biology [9], finance [10,11] or environmental sciences [12] where extreme events may have drastic consequences.

EVS of a collection of  $\mathcal{N}$  random variables  $X_1, \dots, X_{\mathcal{N}}$ , which are identical and independent or weakly correlated, is very well understood, thanks to the identification of three different universality classes in the large  $\mathcal{N}$  (thermodynamical) limit [13]. In that case, the distribution of the maximum  $X_{\max}$  (or the minimum  $X_{\min}$ ), properly shifted and scaled, converges to either (i) the Gumbel, (ii) the Fréchet, or (iii) the Weibull distribution, depending on the large argument behavior of the parent distribution of the  $X_i$ ’s. By contrast, much less is known about the EVS of *strongly* correlated variables. In this context, recent progress has been done in the study of EVS of one-dimensional stochastic processes which provide instances of sets of strongly correlated variables whose extreme statistics can be studied analytically. These include Brownian motion (BM) and its variants—which can be often mapped onto elastic lines in  $1 + 1$  dimensions— [14–23], continuous time random walks and Bessel processes [24], or the random acceleration process (RAP) [25,26]. Incidentally, it was shown that extreme value questions for such one-dimensional processes have

nice applications in the study of random convex geometry in two dimensions. For instance, the extreme statistics of one-dimensional BM enters into the study of the convex hull of planar BM [22,23] while extreme statistics of the RAP appears in the Sylvester’s problem where one studies the probability  $p_n$  that  $n$  points randomly chosen in the unit disk are the vertices of a convex  $n$ -sided polygon [27]. These stochastic processes involve a single degree of freedom, or several noninteracting degrees of freedom as in Refs. [20,22,23], where  $N$  independent BMs are considered. A natural way to include the effects of interactions in a “minimal,” albeit nontrivial, model is to constrain these  $N$  BMs not to cross: This yields a model of  $N$  nonintersecting BMs, which we will focus on in this paper.

Here we thus consider  $N$  noncolliding BMs,

$$x_1(\tau) < \dots < x_N(\tau), \quad \forall \tau \in [0,1], \quad (1)$$

on the unit time interval,  $\tau \in [0,1]$ . We consider different types of configurations of such vicious walkers, which are conveniently represented in the  $(x,t)$  plane. In the first case, called “watermelons,” all the walkers start, at time  $\tau = 0$ , and end, at time  $\tau = 1$ , at the origin (see Sec. II E). They thus correspond to  $N$  nonintersecting Brownian *bridges*. In the second case, we consider such watermelons with the additional constraint that the positions of the walkers have to stay positive (see Sec. II G): We call these configurations “watermelons with a wall” and they thus correspond to nonintersecting Brownian excursions. Finally, we also consider “stars” configuration, where the end points of the BMs in  $\tau = 1$  are free. They correspond to nonintersecting free BMs (see Sec. II F).

Motivated by extreme value questions, we compute here the joint distribution  $P_N(M, \tau_M)$  of the maximal height and the time at which this maximum is reached (see Fig. 4):

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau), \quad x_N(\tau_M) = M. \quad (2)$$

The (marginal) distribution of  $M$  has recently been studied by several authors [28–34], while we have announced exact results for this joint distribution in the two first cases (for bridges and excursions) in a recent letter [35]. The goal of this paper is to give a detailed account of the method and the

\*joachim.rambeau@th.u-psud.fr

†gregory.schehr@th.u-psud.fr

computations leading to these results. On this route we also provide several new results, including, for instance, results for the star configuration.

In the physics literature, such nonintersecting BMs were first introduced by de Gennes in the context of fibrous polymers [36]. They were then widely studied after the seminal work of Fisher [37], who named them “vicious walkers,” as the process is killed if two paths cross each other. These models have indeed found many applications in statistical physics, ranging from wetting and melting transitions [37], commensurate-incommensurate transitions [38], and networks of polymers [39] to persistence properties in nonequilibrium systems [40].

Vicious walkers have also very interesting connections with random matrix theory (RMT), in particular through Dyson’s BM [41]. For example, for watermelon configurations, it can be shown that the positions of the  $N$  random walkers at a fixed time  $\tau$ , correctly scaled by a  $\tau$ -dependent factor, are distributed like the  $N$  eigenvalues of the random  $N \times N$  Hermitian matrices of the Gaussian unitary ensemble of RMT corresponding to  $\beta = 2$  [42]. If one denotes by  $P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, \tau) \equiv P_{\text{joint}}(x_1, \dots, x_N, \tau)$  the joint distribution of the positions of the walkers at a given time  $\tau$ , in the watermelon configuration, one has indeed (see, for instance, Ref. [30] for a rather straightforward derivation of this result)

$$P_{\text{joint}}(\mathbf{x}, \tau) = Z_N^{-1} \sigma(\tau)^{-N^2} \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(\tau)}}, \quad (3)$$

where  $Z_N$  is a normalization constant and  $\sigma(\tau) = \sqrt{\tau(1-\tau)}$  and where we use the notation  $x^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$ . This means in particular for the top path that  $x_N(\tau)/\sqrt{\tau(1-\tau)}$  is, at fixed  $\tau$ , distributed like the largest eigenvalue of Gaussian unitary ensemble (GUE) random matrices, which means that in the large  $N$  limit one has [43]

$$\frac{x_N(\tau)}{\sqrt{2}\sigma(\tau)} = \sqrt{2N} + \frac{1}{\sqrt{2}} N^{-1/6} \chi_2, \quad (4)$$

where  $\chi_2$  is distributed according to the Tracy-Widom (TW) distribution for  $\beta = 2$ ,  $\mathcal{F}_2$ , namely,  $\Pr[\chi_2 \leq x] = \mathcal{F}_2(x)$ . In the case of watermelons with a wall, the positions of the random walkers are instead related to the eigenvalues of Wishart matrices [30,44] and the fluctuations of the top path  $x_N(\tau)$  are again described by  $\mathcal{F}_2(x)$ .

Yet another reason why there is currently a rekindled interest in vicious walkers problems is because of their connection with stochastic growth processes in the Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) universality class [45,46] in  $1+1$  dimensions. This connection is believed to hold for any systems belonging to the KPZ universality class [47], and it can be rigorously shown on one particular model of stochastic growth, the so-called polynuclear growth model (PNG) [48,49]. It is defined as follows (see Fig. 1). At time  $t = 0$  a single island starts spreading on a flat substrate at the origin  $x = 0$  with unit velocity. Seeds of negligible size then nucleate randomly at a constant rate  $\rho = 2$  per unit length and unit time and then grow laterally also at unit velocity. When two islands on the same layer meet they coalesce. Meanwhile, nucleations continuously generate additional layers. In the *flat geometry* nucleations can occur at any point  $x$ , while in the *droplet*

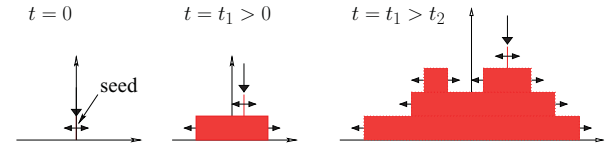


FIG. 1. (Color online) Dynamical rules of the PNG model (in continuous time), as described in the text.

*geometry*, which we focus on, nucleations only occur above previously formed layers. Therefore, for the droplet geometry, denoting by  $h_{\text{drop}}(x, t)$  the height of the interface at point  $x$  and time  $t$ , one has  $h_{\text{drop}}(x, t) = 0$  for  $|x| > t$ . On the other hand, in the long time limit, the profile for  $|x| \leq t$  becomes dropletlike  $\langle h_{\text{drop}}(x, t) \rangle \sim 2t\sqrt{1 - (x/t)^2}$  [50], but there remain height fluctuations around this mean value [see Fig. 2(a)]. The standard way to characterize these fluctuations is to look at the width of the interface  $W_L(t) = \langle (h_{\text{drop}}(x, t) - \langle h_{\text{drop}}(x, t) \rangle)^2 \rangle^{1/2} \sim L^\zeta \mathcal{W}(t/L^z)$  with universal exponents  $\zeta = \frac{1}{2}$  and  $z = \frac{3}{2}$  [51,52], in agreement with the fact that this model belongs to the KPZ universality class. More recently, it was shown for several models belonging to the KPZ universality class [53–58] that, in the growth regime  $t_0 \ll t \ll L^z$  (where  $t_0$  is a microscopic time scale) universality extends far beyond the exponents  $\zeta$  and  $z$  but also applies to full distribution functions of physical observables. In particular, the scaled cumulative distribution of the height field at a given point coincides with the TW distribution  $\mathcal{F}_\beta$  with  $\beta = 2$  ( $\beta = 1$ ) for the curved geometry (the flat geometry), which describes the edge of the spectrum of random matrices in the Gaussian unitary ensemble (the Gaussian orthogonal ensemble) [43]. Height fluctuations were measured in experiments, both in planar [59] and more recently in curved geometry in the electroconvection of nematic liquid crystals [60] and a good quantitative agreement with TW distributions was found.

Although the relation with random matrices was initially achieved [53] through the longest increasing subsequence of random permutations [58,61], using in particular the results of the seminal paper by Baik, Deift, and Johansson [62], it was then realized that the PNG model in the droplet geometry is actually directly related to the vicious walkers problem in the watermelon configuration [54]. This was shown through an extension of the PNG model to the so-called multilayer PNG model, where nonintersecting paths naturally appear. Indeed, one can show that the fluctuations of the height field of the PNG model in the droplet geometry  $h_{\text{drop}}(x, t)$  are related, in the large time limit, to the fluctuations of the top path  $x_N(\tau)$  for the vicious walkers problem in the watermelon geometry in the large  $N$  limit. This mapping, for  $N, t \gg 1$ , reads [54,63]

$$\begin{aligned} \frac{h_{\text{drop}}(ut^{\frac{2}{3}}, t) - 2t}{t^{\frac{1}{3}}} &\equiv \frac{2(x_N(\frac{1}{2} + \frac{u}{2N^{\frac{1}{3}}}) - N^{\frac{1}{2}})}{N^{-\frac{1}{6}}} \\ &\equiv \mathcal{A}_2(u) - u^2, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\mathcal{A}_2(u)$  is the Airy<sub>2</sub> process [54] which is a stationary and non-Markovian process.<sup>1</sup> In particular,  $\Pr[\mathcal{A}_2(0) \leq x] =$

<sup>1</sup>Note that in Eq. (5) we have corrected a missing factor of 2 in formula (1) of Ref. [35]

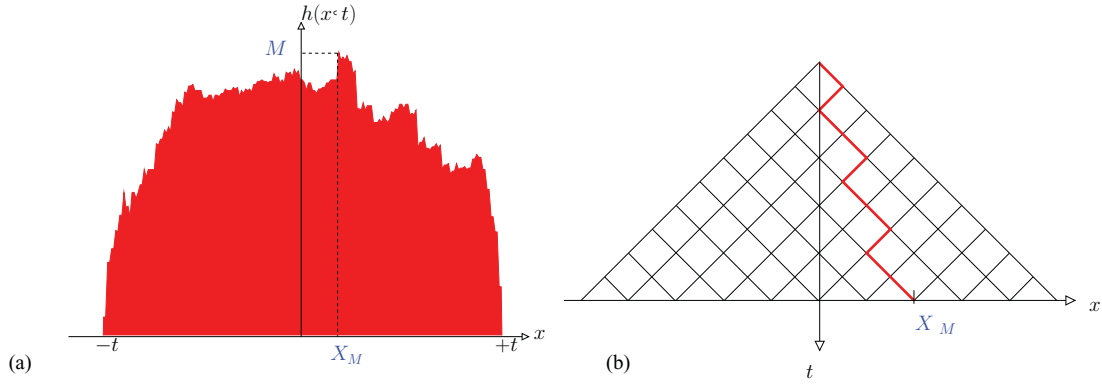


FIG. 2. (Color online) (a) Height profile  $h_{\text{drop}}(x,t)$  at fixed time  $t$ , as a function of  $x$  for the PNG model in the droplet geometry.  $X_M$  is the position at which the maximal height  $M$  is reached. (b) Directed polymer with one free end. Here  $M$  corresponds to the energy of the optimal polymer, and  $M - 2t \sim \mathcal{O}(t^{1/3})$  while  $X_M \sim \mathcal{O}(t^{1/3})$  corresponds to the transverse coordinate of the end point of this optimal polymer.

$\mathcal{F}_2(x)$ , which is consistent with Eq. (4). Hence, from Eq. (5)  $x_N$  and  $\tau$  map onto  $h$  and  $x$  in the growth model while  $N$  plays essentially the role of  $t$  (to make the correspondence between  $N$  and  $t$  exact one has to consider a watermelon configuration in the interval  $\tau \in [0, N]$ ). To characterize the fluctuations of the height profile in the droplet geometry beyond the standard roughness  $W_L(t)$  it is natural to consider the maximal height  $M$  and its position  $X_M$  [35] [see Fig. 2(a)]. According to KPZ scaling, one expects  $M - 2t \sim t^{1/3}$  while  $X_M \sim t^{2/3}$ . On the other hand, from Eq. (5), the joint distribution  $P_t(M, X_M)$  of  $M$  and  $X_M$  can be written as

$$P_t(M, X_M) \sim t^{-1} \mathcal{P}_{\text{Airy}}((M - 2t)t^{-\frac{1}{3}}, X_M t^{-\frac{2}{3}}), \quad (6)$$

where  $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$  is the joint distribution of the maximum  $y$  and its position  $x$  for the process  $\mathcal{A}_2(u) - u^2$ . Finally, the relation (5) also gives us some interesting information for the vicious walkers problem. In the large  $N$  limit, one has indeed from Eq. (5) that the joint distribution  $P_N(M, \tau_M)$  for the watermelon configuration is also given by  $\mathcal{P}_{\text{Airy}}(y, x)$ . One has indeed, for  $N \gg 1$ ,

$$P_N(M, \tau_M) \sim 4N^{\frac{1}{2}} \mathcal{P}_{\text{Airy}} \left[ 2(M - \sqrt{N})N^{\frac{1}{6}}, 2 \left( \tau_M - \frac{1}{2} \right) N^{\frac{1}{3}} \right], \quad (7)$$

and therefore Eqs. (6) and (7) show that one can obtain the distribution of  $P_t(M, X_M)$  for the growth model from the large  $N$  limit of the joint distribution  $P_N(M, \tau_M)$ , which we compute here for any finite  $N$ .

It is also well known that stochastic growth models in the KPZ universality class can be mapped onto the model of the directed polymer in a disordered medium (DPRM) [46,64]. This is also the case of the PNG model and to make this connection as clear as possible, we consider a discrete version of the PNG model introduced by Johansson [65]. It is a growth model with discrete space *and* discrete time. The height function  $h(x,t)$  is now an integer value  $h(x,t) \in \mathbb{N}$ , while  $x \in \mathbb{Z}$  and  $t \in \mathbb{N}$ . The dynamics is defined as follows:

$$h(x,t+1) = \max[h(x-1,t), h(x,t), h(x+1,t)] + \omega(x,t+1), \quad (8)$$

where the first term reproduces the lateral expansion of the islands (and also their coalescence when two of them meet) in the continuous PNG model, while  $\omega(x,t) \in \mathbb{N}$  is a random variable, distributed independently from site to site, which corresponds to the random nucleations (see Fig. 1).

In the droplet geometry, one has  $\omega(x,t) = 0$  if  $|x| > t$ , while this constraint is removed in the flat geometry. To understand better the connection between this model (8) and a model of directed polymer, we perform a rotation of the axis  $(x,t)$  (Fig. 3) and define

$$\omega(i-j, i+j-1) \equiv w(i,j). \quad (9)$$

One can then simply check (for instance, by induction on  $t$ ) that the height field  $h_{\text{drop}}(x,t)$  evolving with Eq. (8) in the droplet geometry is given by

$$h_{\text{drop}}(X,t) = \max_{\mathcal{C} \in \mathfrak{P}_t(0,X)} \left[ \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} w(i,j) \right], \quad (10)$$

where  $\mathfrak{P}_t(0,X)$  is the ensemble of directed paths of length  $t$ , starting in  $x=0$  and terminating in  $X$  (Fig. 3). This formula (10) establishes a direct link between the PNG model and a

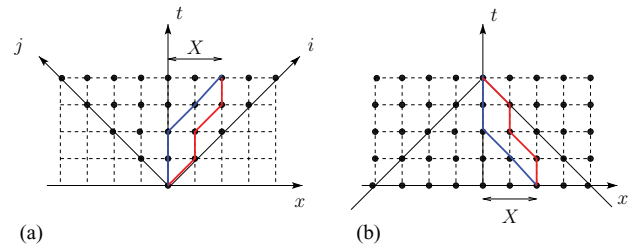


FIG. 3. (Color online) (a) Model of a directed polymer in a random medium corresponding to the PNG in the droplet geometry (10). On each site  $\bullet$  there is a random energy variable  $w(i,j)$  which corresponds to a nucleation in the growth model. We have drawn two configurations of the polymer which belong to the ensemble  $\mathfrak{P}_t(0,X)$ . (b) Model of a directed polymer in a random medium corresponding to the PNG in the flat geometry (11). We have drawn two configurations of the polymer which belong to the ensemble  $\mathfrak{P}_t(X,0)$  which is equivalent to  $\mathfrak{P}_t(0,X)$  shown on the left panel.

model of directed polymer. Indeed, the height field  $h_{\text{drop}}(X, t)$  corresponds to the energy of the optimal polymer (which is here the polymer with the highest energy) with both fixed ends in 0 and  $X$  and where the random energies, on each site, are given by  $w(i, j)$ . The aforementioned result for the distribution of  $h_{\text{drop}}(X, t)$  shows that the fluctuations of the energy of the optimal polymer are described in this case by  $\mathcal{F}_2$ , the TW distribution for  $\beta = 2$ . The study of this distribution, for the DPRM in continuum space, has recently been the subject of several works, both in physics [66] and in mathematics [67].

Similarly, one can also write the height field  $h_{\text{flat}}(0, t)$  in the flat geometry (here, of course, the fluctuations of the height field are invariant by a translation along the  $x$  axis). One has indeed

$$h_{\text{flat}}(0, t) = \max_{-t \leq X \leq t} \left\{ \max_{\mathcal{C} \in \mathfrak{P}_t(X, 0)} \left[ \sum_{(i, j) \in \mathcal{C}} w(i, j) \right] \right\}, \quad (11)$$

where  $\mathfrak{P}_t(X, 0)$  is the ensemble of directed paths of length  $t$ , starting in  $X$  and ending in 0 (see Fig. 3). Given that these two ensembles  $\mathfrak{P}_t(X, 0)$  and  $\mathfrak{P}_t(0, X)$  are obviously similar (Fig. 3), these two equations (10) and (11) make it possible to write [68]

$$h_{\text{flat}}(0, t) = \max_{-t \leq X \leq t} h_{\text{drop}}(X, t). \quad (12)$$

For the directed polymer,  $h_{\text{flat}}(0, t)$  corresponds to the energy of the optimal polymer, of length  $t$  and with one free end. From that Eq. (12), one sees that the joint distribution of  $M$  and  $\tau_M$  in the vicious walkers problem corresponds to the joint distribution of the energy  $M$  and the transverse coordinate  $X_M$  of the free end of the optimal polymer. From the aforementioned results for the distribution of  $h_{\text{flat}}(0, t)$ , we also conclude that the cumulative distribution of  $M$  is given by  $\mathcal{F}_1$ , the TW distribution for  $\beta = 1$ . Although this result was obtained rather indirectly using this relation (12), it was recently shown directly by computing the cumulative distribution of the maximal height of  $N$  nonintersecting excursions in the limit  $N \rightarrow \infty$ , in Ref. [34]. We conclude this paragraph about the DPRM by noticing that this model, with one free end, has been widely studied in the context of disordered elastic systems [69], in particular, using the approximation of the so-called ‘‘toy model’’ where the Airy<sub>2</sub> process  $\mathcal{A}_2(u)$  in (5) is replaced with a BM [2,69]. A recent discussion of the toy model and its applications to the DPRM can be found in Ref. [70]. We also mention that physical observables related to  $X_M$  have been studied for the DPRM in different geometry, such as the winding number of the optimal polymer on a cylinder [71].

The paper is organized as follows. In Sec. II we present in detail the method to compute the joint distribution of  $M$  and  $\tau_M$  for  $N = 2$  nonintersecting BMs. We show results for bridges, excursions, and stars. In Sec. III we extend this approach for any number  $N$  of vicious walkers both for bridges and excursions. We then confront, in Sec. IV, our analytical results to numerical simulations, which were obtained by simulating Dyson’s BM, before we conclude in Sec. V. Some technical details have been left in the appendices.

## II. DISTRIBUTION OF THE POSITION OF THE MAXIMUM FOR TWO VICIOUS BROWNIAN PATHS

### A. Introduction

Our purpose is to study  $N$  simultaneous BMs  $x_1(\tau), x_2(\tau), \dots, x_N(\tau)$ , subjected to the condition that they do not cross each other. In the literature, such a system has been studied first in the continuous case by de Gennes [36], and in the discrete case by Fisher [37]. He named this kind of system vicious walkers, as the process is killed if two paths cross each others. The name ‘‘vicious Brownian paths’’ refers in the following to Brownian paths under the condition that they do not cross each other.

In this section, we focus on the case  $N = 2$ . The two vicious Brownian paths start at  $x_1(0) = x_2(0) = 0$  and obey the noncrossing condition  $x_1(\tau) < x_2(\tau)$  for  $0 < \tau < 1$ . We examine three different geometries:

- (i) periodic boundary conditions where we consider nonintersecting bridges, also called ‘‘watermelon’’ configurations (see Fig. 4), treated in Sec. II E;
- (ii) free boundary conditions where we consider nonintersecting free BMs, also called ‘‘stars’’ configurations (see Fig. 6), treated in Sec. II F;
- (iii) periodic boundary conditions, plus a positivity constraint where we consider nonintersecting excursions, also called ‘‘watermelons with a wall’’ configurations (see Fig. 8), treated in Sec. II G.

We compute, for each case, the joint distribution of the couple  $(M, \tau_M)$  which are respectively the maximum  $M$  of the uppermost vicious Brownian path, and its position  $\tau_M$ :  $M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_2(\tau) = x_2(\tau_M)$ . Integrating over  $M$ , we find the probability distribution function (PDF) of the time to reach the maximum  $\tau_M$ .

This computation is based on a path integral approach, using the link between the problem of vicious Brownian paths and the quantum mechanics of fermions. This is described in Sec. II B. Then we present, in Sec. II C, the method to compute the joint probability distribution function of the maximum and the time to reach it for vicious Brownian paths, with general boundary conditions. An emphasis is put on the regularization scheme, essential to circumvent the basic problem of BM, which is continuous both in space and in time: You cannot force it to be in a point without revisiting it infinitely many times immediately after. At this stage, general formulas are obtained, which are used directly in Secs. II E, II F, and II G. The extension to a general  $N$  number of paths will be treated straightforwardly in Sec. III.

### B. Path integral approach: Treating the vicious Brownian paths as fermions

Let us consider two BMs, obeying the Langevin equations

$$\frac{dx_j(\tau)}{d\tau} = \xi_j(\tau), \quad (j = 1, 2), \quad (13)$$

where  $\xi_j(\tau)$ ’s are independent and identical Gaussian white noises of zero mean, that is,  $\langle \xi_j(\tau) \rangle = 0$  and  $\langle \xi_i(\tau) \xi_j(\tau') \rangle = \delta_{i,j} \delta(\tau - \tau')$ . Taking into account the noncrossing condition, the probability that the two paths end at  $[x_1(t_b)$



$= b_1, x_2(t_b) = b_2$  at time  $t_b$ , given that they started at  $[x_1(t_a) = a_1, x_2(t_a) = a_2]$  at time  $t_a$ , is

$$p_2(b_1, b_2, t_b | a_1, a_2, t_a) = \frac{1}{z} \int_{x_1(t_a)=a_1}^{x_1(t_b)=b_1} \mathcal{D}x_1(\tau) \int_{x_2(t_a)=a_2}^{x_2(t_b)=b_2} \mathcal{D}x_2(\tau) \times \left\{ e^{-\int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \left( \frac{dx_1(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} e^{-\int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{2} \left( \frac{dx_2(\tau)}{d\tau} \right)^2 d\tau} \prod_{t_a < \tau < t_b} \theta [x_2(\tau) - x_1(\tau)] \right\}, \quad (14)$$

where the subscript “2” in the notation  $p_2$  means that we treat the case of  $N = 2$  Brownian paths. The exponential terms are the weight of each Brownian path, and the Heaviside  $\theta$  function ensures that the paths do not cross. In this section, bold letters denote vectors with two components, such as, for example, the positions at a given time of the two Brownian paths  $\mathbf{x}(\tau) = [x_1(\tau), x_2(\tau)]$  or the starting points  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ . In the previous formula (14),  $z$  is a normalization constant, such that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} db_2 \int_{-\infty}^{b_2} db_1 p_2(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = 1. \quad (15)$$

Notice that the integration is ordered, and we write it shortly  $\int_{\text{ord}} d\mathbf{b} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} db_2 \int_{-\infty}^{b_2} db_1$ .

We recognize in formula (14) the path integral representation of the quantum propagator of two identical free particles, subjected not to cross each other. In one dimension, this can be implemented by requiring that the two particles are fermions [30,36]. Therefore the probability  $p_2(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a)$  reduces to the quantum propagator of two identical fermions in one dimension,

$$p_2(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \langle \mathbf{b} | e^{-(t_b - t_a) H_{\text{free}}} | \mathbf{a} \rangle, \quad (16)$$

with  $H_{\text{free}}$  the total Hamiltonian of the two-particle system  $H_{\text{free}} = H_{\text{free}}^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes H_{\text{free}}^{(2)}$ ,  $\mathbb{I}^j$  being the identity operator acting in the Hilbert space of the  $j$ th particle. The one-particle Hamiltonians are  $H_{\text{free}}^{(j)} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_j^2}$  (for  $j = 1, 2$ ) in a position representation. The states  $|a_1, a_2\rangle$  (and  $|b_1, b_2\rangle$ ) are the tensorial product of the one-particle eigenstates of position  $|a_1, a_2\rangle = |a_1\rangle \otimes |a_2\rangle$ , where each state  $|a_j\rangle$  obeys the eigenvalue equation  $X^{(j)} |a_j\rangle = a_j |a_j\rangle$ , with  $X^{(j)}$  the position operator acting in the Hilbert space of the  $j$ th particle and  $a_j$  the position of this particle.

In our calculations we deal with more general Hamiltonians, but they are written in the same way as the sum of individual one-particle Hamiltonians  $H = H^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes H^{(2)}$  (no interaction between the two particles) and with  $H^{(1)}(x, p) = H^{(2)}(x, p)$  (identical particles). Thus we treat systems of two identical indistinguishable particles, so that one can write a two-particle eigenstate of the total Hamiltonian  $H$  as an antisymmetric product of the one-particle eigenstates of  $H^{(j)}$ . Explicitly, if  $|E_1\rangle$  and  $|E_2\rangle$  are two eigenstates of the one-particle Hamiltonian  $H^{(j)}$ , with energies  $E_1$  and  $E_2$ , then the eigenstate of the two-particle problem with energy  $E = E_1 + E_2$  is

$$|E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}} (|E_1\rangle \otimes |E_2\rangle - |E_2\rangle \otimes |E_1\rangle). \quad (17)$$

Projecting onto the position basis  $|\mathbf{x}\rangle = |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle$ , and using the general notation  $\phi_{E_i}(x_j) = \langle x_j | E_i \rangle$  (lower-case letter  $\phi$

for one-particle wave function), with  $\Phi_E(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x} | E \rangle$  (capital letter  $\Phi$  for the two-particle wave function), the usual Slater determinant is as follows:

$$\begin{aligned} \Phi_E(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2!}} [\phi_{E_1}(x_1)\phi_{E_2}(x_2) - \phi_{E_2}(x_1)\phi_{E_1}(x_2)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2!}} \det_{1 \leq i, j \leq 2} \phi_{E_i}(x_j). \end{aligned} \quad (18)$$

Hence, inserting the closure relation  $\mathbb{I} = \sum_E |E\rangle \langle E|$  into (16), one obtains the spectral decomposition of the propagator (with  $E = E_1 + E_2$ ):

$$p_2(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \sum_{E_1, E_2} \Phi_E(\mathbf{b}) \Phi_E^*(\mathbf{a}) e^{-(E_1 + E_2)(t_b - t_a)}. \quad (19)$$

This result can also be found *via* the Karlin-McGregor formula [72]. It states that the probability of propagating without crossings is nothing but the determinant formed from one-particle propagators (named  $p_1$ ):

$$p_2(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \det_{1 \leq i, j \leq 2} p_1(b_i, t_b | a_j, t_a). \quad (20)$$

The discrete version of this formula (20) is given by the Lindström-Gessel-Viennot (LGV) theorem [73]. The basic idea behind this formula is nothing but the method of images. To recover our quantum mechanical expression obtained by considering fermions (19), one has to express the one-particle propagator as

$$p_1(b_i, t_b | a_j, t_a) = \sum_E \phi_E(b_i) \phi_E^*(a_j) e^{-E(t_b - t_a)} \quad (21)$$

and use the Cauchy-Binet identity (B7).

### C. Joint probability distribution of position and time

The method to compute the distribution of the maximum and the time at which it is reached can be described as follows. Let us consider the process  $[x_1(\tau), x_2(\tau)]$  of such Brownian paths with the nonintersecting condition with  $t_a = 0$  and  $t_b = T$ . Keeping the same notations, the starting points are  $x_1(0) = a_1$  and  $x_2(0) = a_2$ , or  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$ , and the end points are  $x_1(T) = b_1$  and  $x_2(T) = b_2$ , or  $\mathbf{x}(T) = \mathbf{b}$ . First we consider  $\mathbf{a}$  and  $\mathbf{b}$  as fixed. Given a set of points  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ , and an intermediate time  $\tau_{\text{cut}}$ , such as  $0 \leq \tau_{\text{cut}} \leq T$ , we ask what is the probability that  $x_1(\tau_{\text{cut}}) \in [y_1, y_1 + dy_1]$  and  $x_2(\tau_{\text{cut}}) \in [y_2, y_2 + dy_2]$ ? In other terms, we seek  $Q_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{b}, \mathbf{a}, T)$ , the joint probability density of the positions reached at time  $\tau_{\text{cut}}$ , given that the paths start in  $\mathbf{a}$  at  $\tau = 0$  and end in  $\mathbf{b}$  at  $\tau = T$ . The answer to this question is well known from quantum mechanics: Cut the process in two time intervals, one from  $\tau = 0$  to  $\tau = \tau_{\text{cut}}$  and the second piece from  $\tau = \tau_{\text{cut}}$  to  $\tau = T$ . Because of the Markov property, these two parts are statistically independent, and one should take the product of propagators to obtain the joint PDF of the positions  $x_1(\tau_{\text{cut}})$  and  $x_2(\tau_{\text{cut}})$  at time  $\tau_{\text{cut}}$ , given that the initial and final conditions are, respectively,  $(\mathbf{a}, 0)$  and  $(\mathbf{b}, T)$ :

$$Q_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{b}, \mathbf{a}, T) = \frac{p_2(\mathbf{b}, T | \mathbf{y}, \tau_{\text{cut}}) p_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{a}, 0)}{Z_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}, T)}, \quad (22)$$

where  $Z_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}, T)$  is the normalization constant, obtained by integrating over all intermediate points,

$$Z_2 = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} p_2(\mathbf{b}, T | \mathbf{y}, \tau_{\text{cut}}) p_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{a}, 0), \quad (23)$$

where we remember that the integration over  $\mathbf{y}$  is ordered:  $\int_{\text{ord}} d\mathbf{y} = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{y_2} dy_1$ . Using the closure relation of the states  $|\mathbf{y}\rangle$ , one finds that

$$Z_2(\mathbf{b}, \mathbf{a}, T) = p_2(\mathbf{b}, T | \mathbf{a}, 0). \quad (24)$$

Because we do not care about the lowest path  $x_1(\tau)$  and its intermediate position  $y_1$  in the following, we compute the marginal by integrating over all possible values of  $y_1 = x_1(\tau_{\text{cut}})$ , obtaining  $P_2(y_2, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{b}, \mathbf{a}, T)$ , the probability density that the upper path is in  $y_2$  at time  $\tau_{\text{cut}}$  given that the paths start in  $\mathbf{a}$  at time  $\tau = 0$  and end in  $\mathbf{b}$  at time  $\tau = T$ :

$$\begin{aligned} P_2(y_2, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{b}, \mathbf{a}, T) &= \int_{-\infty}^{y_2} dy_1 Q_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{b}, \mathbf{a}, T) \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{y_2} dy_1 p_2(\mathbf{b}, T | \mathbf{y}, \tau_{\text{cut}}) p_2(\mathbf{y}, \tau_{\text{cut}} | \mathbf{a}, 0)}{p_2(\mathbf{b}, T | \mathbf{a}, 0)}. \end{aligned} \quad (25)$$

From now on we set, for simplicity,  $T = 1$ . This can be done without loss of generality because the Brownian scaling implies  $M \propto T^{1/2}$  and  $\tau_M \propto T$ . A simple dimensional analysis makes it possible to reinsert the time  $T$  in our calculations.

#### D. Maximum and the regularization procedure

The maximum  $M$  and the time to reach it  $\tau_M$  are defined by

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_2(\tau) = x_2(\tau_M). \quad (26)$$

Hence, to compute the joint probability of the couple  $(M, \tau_M)$ , we want to impose  $y_2 = M$  and  $\tau_{\text{cut}} = \tau_M$ , knowing that the upper path does not cross the line  $x = M$ . This condition is implemented by inserting the product of Heaviside step functions

$$\prod_{0 \leq \tau \leq 1} \theta[M - x_2(\tau)], \quad (27)$$

in the path integral formula (14). The propagator of two vicious Brownian paths, with the constraint that they do not cross  $x = M$ , reads

$$\begin{aligned} p_{<M,2}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) &= \frac{1}{z_{<M}} \int_{x_1(t_a)=a_1}^{x_1(t_b)=b_1} \mathcal{D}x_1(\tau) \int_{x_2(t_a)=a_2}^{x_2(t_b)=b_2} \mathcal{D}x_2(\tau) \\ &\times \left\{ \prod_{t_a < \tau < t_b} \theta[M - x_2(\tau)] \theta[M - x_1(\tau)] \theta[x_2(\tau) - x_1(\tau)] e^{-\int_a^{t_b} \frac{1}{2} \left(\frac{dx_1(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau} e^{-\int_a^{t_b} \frac{1}{2} \left(\frac{dx_2(\tau)}{d\tau}\right)^2 d\tau} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

for all  $0 \leq t_a < t_b \leq 1$ ,  $a_1 < a_2 < M$  and  $b_1 < b_2 < M$ . The second Heaviside step function does not change the value of the path integral (it does not select a smaller class of paths) because for all  $t_a < \tau < t_b$ , if  $x_1(\tau) < x_2(\tau)$  and  $x_2(\tau) < M$ , then  $x_1(\tau) < M$  automatically. According to our first analysis, this propagator (28) reduces to the propagator of two identical fermions without interaction between them, but with a hard wall in  $x = M$ . Hence, the associated Hamiltonian is

$$H_{<M} = H_{<M}^{(1)} \otimes \mathbb{I}^{(2)} + \mathbb{I}^{(1)} \otimes H_{<M}^{(2)}, \quad (29a)$$

with the one-particle Hamiltonian

$$H_{<M}^{(j)} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_j^2} + V_{<M}(x_j), \quad (29b)$$

for  $j = 1, 2$ , where  $V_{<M}(x)$  is the hard wall potential in  $x = M$ :

$$V_{<M}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } -\infty < x < M, \\ +\infty & \text{if } x > M. \end{cases} \quad (29c)$$

This one-particle Hamiltonian has eigenfunctions

$$\phi_{k_j}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin[k_j(M - x)], \quad (29d)$$

with the associated energies

$$E_{k_j} = \frac{k_j^2}{2}, \quad k_j > 0. \quad (29e)$$

Hence, with this information, one is able to compute the propagator  $p_{<M}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a)$  using the spectral decomposition, as in Eq. (19):

$$\begin{aligned} p_{<M,2}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) &= \langle \mathbf{b} | e^{-(t_b - t_a) H_{<M}} | \mathbf{a} \rangle \\ &= \int_0^\infty dk_1 \int_0^\infty dk_2 \Phi_{\mathbf{b}}(k) \Phi_{\mathbf{a}}^*(k) e^{-(t_b - t_a) \frac{k^2}{2}}, \end{aligned} \quad (29f)$$

with  $\Phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  the Slater determinant built with the one-particle eigenfunctions (29d).

To obtain the joint PDF of  $M$  and  $\tau_M$ , one would insert this propagator in formulas (22)–(25), with  $y_2 = M$  and  $\tau_{\text{cut}} = \tau_M$ . With this procedure one naively finds zero, because we impose the intermediate point  $y_2$  to be on the edge of the hard wall potential. This problem originates in the continuous nature of the BM: Once in a point, the BM explores its vicinity immediately before and after [74]. This implies that we cannot prescribe the upper path to be in  $x_2(\tau_M) = M$  without being in  $x_2(\tau) > M$  for  $\tau$  close to  $\tau_M$ . Another problem is that the normalization constant cannot be written as a single propagator. Indeed, one cannot insert the closure relation as we

did from Eq. (23) to Eq. (24), because the potential depends actually on the position  $y_2 \equiv M$ .

Hence, one should prescribe a regularization scheme to avoid this phenomenon. A common way to deal with it is to take  $y_2 = x_2(\tau_M) = M - \eta$ , with  $\eta > 0$  a small regularization parameter, compute all quantities as functions of  $\eta$ , and at the end take the limit  $\eta \rightarrow 0$ . This regularization scheme is similar to that introduced in Ref. [19]. Following the same ideas, one obtains the joint PDF as

$$P_2(M, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_2(M - \eta, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a})}{Z_2(\eta | \mathbf{b}, \mathbf{a})}, \quad (30a)$$

where  $W_2(M - \eta, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a})$  is the probability weight of all paths starting in  $\mathbf{a}$  and ending in  $\mathbf{b}$  in the unit time interval and such that  $x_2(\tau_M) = M - \eta$ , and  $Z_2(\eta | \mathbf{b}, \mathbf{a})$  is the normalization constant. Explicitly, one has

$$W_2(M - \eta, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} dy_2 \int_{-\infty}^{y_2} dy_1 \{ \delta[y_2 - (M - \eta)] \times p_{<M,2}(\mathbf{b}, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) p_{<M,2}(\mathbf{y}, \tau_M | \mathbf{a}, 0) \} \quad (30b)$$

for all  $M > \max\{a_2, b_2\}$  and where we write a dummy integration over  $y_2$  with the  $\delta$  function forcing  $y_2$  to be  $M - \eta$ . The normalization depends on the regularization parameter  $\eta$ :

$$Z_2(\eta | \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \int_0^1 d\tau_M \int_{\max\{a_2, b_2\}}^{\infty} dM W_2(M - \eta, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a}). \quad (30c)$$

In the following paragraphs, all three configurations have their paths beginning at the origin. The problem of the continuous Brownian paths forbids to take directly  $\mathbf{a} = (0, 0)$ . Instead of that, we separate artificially the paths by an amount  $\epsilon > 0$ . Details of this regularization are left in the concerned paragraphs.

### E. Periodic boundary condition: $N = 2$ vicious Brownian bridges

In this case, the two paths start from the origin at  $\tau = 0$  and arrive also at the origin at final time  $\tau = 1$ :  $x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = x_2(1) = 0$ . Without extra condition, this defines two Brownian bridges. Here we compute the joint probability density function for two Brownian bridges, under the condition that they do not cross each other (see Fig. 4).

As discussed before, there is again a regularization scheme to adopt in both starting and ending points. We separate by an amount  $\epsilon$  the two paths at the starting and ending points, taking  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (0, \epsilon) = \epsilon$ . At the end of the computation, we take the limit  $\epsilon \rightarrow 0$ . Then the joint probability density function for two vicious Brownian bridges is

$$P_{2,B}(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_2(M, \tau_M | \epsilon, \epsilon), \quad (31a)$$

where  $P_2(M, \tau_M | \mathbf{b}, \mathbf{a})$  is defined in Eq. (30a). The numerator of Eq. (30a), the probability weight, reads

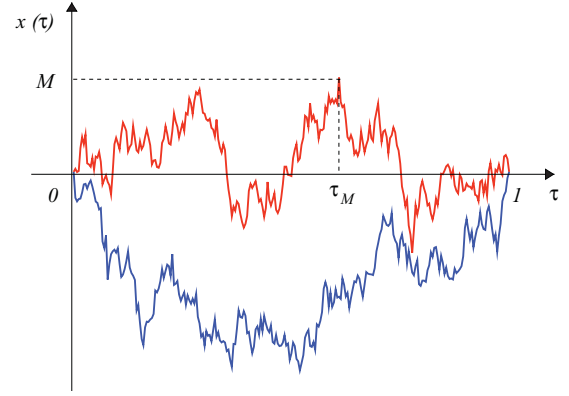


FIG. 4. (Color online) One realization of  $N = 2$  nonintersecting bridges, that is a watermelon configuration, with the maximum  $M$  and the time  $\tau_M$  at which this maximum is reached.

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = W_2(M - \eta, \tau_M | \epsilon, \epsilon), \quad (31b)$$

and the denominator of Eq. (30a), that is, the normalization, is given by

$$Z_{2,B}(\eta, \epsilon) = Z_2(\eta | \epsilon, \epsilon), \quad (31c)$$

where the subscript “ $B$ ” refers to “Bridges,” and with the relation deduced from Eq. (30a)

$$P_{2,B}(M, \tau_M) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{2,B}(\eta, \epsilon)}. \quad (31d)$$

We obtain this limit by expanding the numerator and the denominator in power series of  $\eta$  and  $\epsilon$ , keeping only the dominant term in each case.

To compute the probability weight  $W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)$ , we start with Eq. (30b), in which we put  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \epsilon$ :

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \{ \delta[y_2 - (M - \eta)] \times p_{<M,2}(\epsilon, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) p_{<M,2}(\mathbf{y}, \tau_M | \epsilon, 0) \}. \quad (32)$$

Using the spectral decomposition (29f), one has

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \left\{ \delta[y_2 - (M - \eta)] \times \int_0^{\infty} dk' \Phi_{k'}(\epsilon) \Phi_{k'}^*(\mathbf{y}) e^{-(1-\tau_M)\frac{k'^2}{2}} \times \int_0^{\infty} dk \Phi_k(\mathbf{y}) \Phi_k^*(\epsilon) e^{-\tau_M\frac{k^2}{2}} \right\}. \quad (33)$$

The integral over  $y_2$  is easy due to the  $\delta$  function. By antisymmetry of Slater determinants in the exchange of  $k_1$  and  $k_2$ , the product  $\Phi_k(\mathbf{y}) \Phi_k^*(\epsilon) e^{-\tau_M\frac{k^2}{2}}$  is symmetric in the exchange of  $k_1$  and  $k_2$ . Then one can replace  $\Phi_k(\mathbf{y})$  by twice the product of its diagonal terms, which is

$$2 \frac{\phi_{k_1}(y_1) \phi_{k_2}(M - \eta)}{\sqrt{2!}} = \eta \frac{2k_2}{\sqrt{\pi}} \phi_{k_1}(y_1) + \mathcal{O}(\eta^3). \quad (34)$$

The same operations apply to  $\Phi_{k'}(\mathbf{y})$ :

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) &= \eta^2 \frac{4}{\pi} \int_{-\infty}^{M-\eta} dy_1 \int_0^\infty d\mathbf{k}' k'_2 \phi_{k'_1}^*(y_1) \Phi_{k'}(\epsilon) e^{-(1-\tau_M)\frac{k'^2}{2}} \\ &\times \int_0^\infty d\mathbf{k} k_2 \phi_{k_1}(y_1) \Phi_k^*(\epsilon) e^{-\tau_M \frac{k^2}{2}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Permuting the order of integrations, one can compute the integration with respect to  $y_1$  as

$$\int_{-\infty}^{M-\eta} dy_1 \phi_{k'_1}^*(y_1) \phi_{k_1}(y_1) = \delta(k_1 - k'_1) + \mathcal{O}(\eta), \quad (36)$$

due to the orthonormalization of the eigenfunctions  $\phi_k(x)$ . Performing the integration over  $k'_1$  leads to, at lowest order in  $\eta$ ,

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) &= \frac{4}{\pi} \eta^2 \int_0^\infty dk_1 e^{-\frac{k_1^2}{2}} \int_0^\infty dk_2 \int_0^\infty dk'_2 \\ &\times \left\{ k'_2 k_2 \Phi_{k_1, k'_2}(\epsilon) \Phi_{k_1, k_2}(\epsilon) e^{-(1-\tau_M)\frac{k_1^2}{2}} e^{-\tau_M \frac{k_2^2}{2}} \right\} + \mathcal{O}(\eta^3). \end{aligned} \quad (37)$$

The next step is to expand in powers of  $\epsilon$  inside the Slater determinants: The first column does not depend on  $\epsilon$ , and in the second column, we expand at order  $\epsilon$ , each of the two elements, sweeping the constant term by linear combination with the first column. This yields

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1, k_2}(\epsilon) &= \sqrt{\frac{1}{2!}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(0) \phi_{k_1}(\epsilon) \\ \phi_{k_2}(0) \phi_{k_2}(\epsilon) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(0) \phi'_{k_1}(0) \\ \phi_{k_2}(0) \phi'_{k_2}(0) \end{vmatrix} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \epsilon \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{M} \Theta_2(q_1, q_2) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (38)$$

where we use the scaled variables  $q_i = k_i M$  and the determinant

$$\Theta_2(q_1, q_2) = \det_{1 \leq i, j \leq 2} \left[ q_i^{j-1} \cos\left(q_i - j \frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (39)$$

Performing the same expansion in powers of  $\epsilon$  in  $\Phi_{k_1, k'_2}(\epsilon)$ , with  $q'_2 = k'_2 M$ , one can identify the dominant term as a factor of the product of powers  $\eta^2 \epsilon^2$ , so that

$$W_{2,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^2 W_{2,B}(M, \tau_M) + \mathcal{O}(\eta^3 \epsilon^2, \eta^2 \epsilon^3). \quad (40)$$

Inserting the expansion (38) in (37), and identifying the the leading term, one obtains

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M, \tau_M) &= \frac{8}{\pi^3 M^7} \int_0^\infty dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2M^2}} \\ &\times \left\{ \int_0^\infty dq'_2 q'_2 \Theta_2(q_1, q'_2) e^{-(1-\tau_M)\frac{q_1^2}{2M^2}} \right. \\ &\times \left. \int_0^\infty dq_2 q_2 \Theta_2(q_1, q_2) e^{-\tau_M \frac{q_2^2}{2M^2}} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

It can be written in the more compact form

$$\begin{aligned} W_{2,B}(M, \tau_M) &= \frac{8}{\pi^3 M^7} \int_0^\infty dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2M^2}} \\ &\times \Upsilon_2(q_1|M, 1 - \tau_M) \Upsilon_2(q_1|M, \tau_M), \end{aligned} \quad (42)$$

with the help of the function  $\Upsilon_2$ ,

$$\Upsilon_2(q_1|M, \tau_M) = \int_0^\infty dq_2 q_2 e^{-\tau_M \frac{q_2^2}{2M^2}} \Theta_2(q_1, q_2), \quad (43)$$

which can also be written as a determinant:

$$\begin{aligned} \Upsilon_2(q_1|M, \tau_M) &= \sqrt{\pi} \left( \frac{M}{\sqrt{2\tau_M}} \right)^2 e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}} \\ &\times \begin{vmatrix} \cos\left(q_1 - \frac{\pi}{2}\right) & q_1 \cos(q_1 - \pi) \\ H_1\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) & \left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

$H_1(x)$  and  $H_2(x)$  are the first and second Hermite polynomials. This expression is obtained by factorizing all the  $q_2$  dependence in the last line of the determinant and performing the integration directly in this last line. The Hermite polynomials then appear naturally (see Appendix E). Then one proceeds to the expansion of the determinants  $\Upsilon_2$  with respect to their last lines, which permits the integration over  $q_1$  (four terms, because there are two determinants  $2 \times 2$ ), and one obtains a simple, though long, expression (apart from the exponentials, only algebraic terms appear).

The limit in Eq. (31d) exists provided the normalization constant admits the following expansion:

$$Z_{2,B}(\eta, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^2 K_{2,B} + o(\eta^2 \epsilon^2), \quad (45)$$

where  $K_{2,B}$  is a number (independent of  $M$  and  $\tau_M$ ). It can be computed using the normalization of the joint PDF:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M P_{2,B}(M, \tau_M) \\ &= \frac{1}{K_{2,B}} \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M W_{2,B}(M, \tau_M). \end{aligned} \quad (46)$$

One finds  $K_{2,B} = 1/\pi$ . The joint PDF reads

$$\begin{aligned} P_{2,B}(M, \tau_M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{[\tau_M(1 - \tau_M)]^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M(1-\tau_M)}} \\ &\times \left\{ \frac{1}{4} H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2(1-\tau_M)}}\right) \right. \\ &\times (1 - e^{-2M^2}) + M^2 e^{-2M^2} \\ &\times \left[ H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2\tau_M}}\right) + H_2\left(\frac{M}{\sqrt{2(1-\tau_M)}}\right) \right] \\ &\left. + M^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-2M^2} H_2(\sqrt{2}M) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

where for compactness we use the Hermite polynomial  $H_2(x) = 4x^2 - 2$ . A direct integration over  $M$  gives the

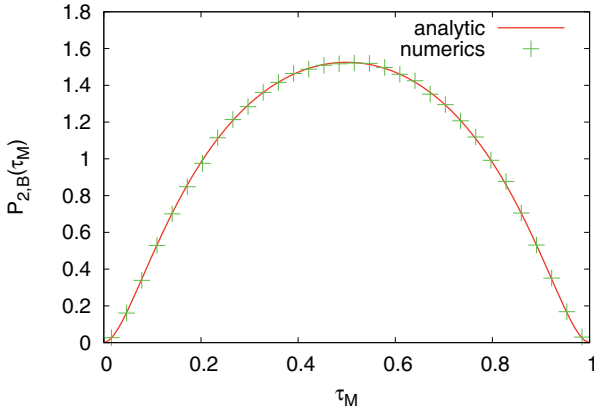


FIG. 5. (Color online) Distribution of the time at which the maximum is reached for  $N = 2$  nonintersecting bridges. The solid line corresponds to our analytical formula in Eq. (48), while the symbols correspond to the results of our numerical simulations.

probability distribution function of  $\tau_M$ , the time at which the maximum is reached, regardless to the value of the maximum (see Fig. 5):

$$P_{2,B}(\tau_M) = 4 \left( 1 - \frac{1 + 10\tau_M(1 - \tau_M)}{[1 + 4\tau_M(1 - \tau_M)]^{5/2}} \right). \quad (48)$$

The fact that  $\tau_M$  enters in this expression only through the product  $\tau_M(1 - \tau_M)$  reflects the symmetry of the distribution around  $\tau_M = 1/2$ , which of course is expected for periodic boundary conditions. To center the distribution, over a unit length interval, one can use  $\tau_M = 1/2 + u_M/2$ , and the distribution of  $u_M$  is then

$$P_{2,B}^{\text{centered}}(u_M) = 2 - \frac{5}{(2 - u_M^2)^{3/2}} + \frac{3}{(2 - u_M^2)^{5/2}}. \quad (49)$$

Two asymptotic analysis can be made:

(i) for  $\tau_M \simeq 0$  (or equivalently  $\tau_M \simeq 1$ ), one has

$$P_{2,B}(\tau_M) \sim 120\tau_M^2 + \mathcal{O}(\tau_M^3);$$

(ii) for  $\tau_M$  in the vicinity of  $1/2$ , better written in terms of the behavior in  $u_M = 0$  of the centered distribution,

$$P_{2,B}^{\text{centered}}(u_M) \sim \left( 4 - \frac{7}{2\sqrt{2}} \right) - \frac{15u_M^2}{8\sqrt{2}} + \mathcal{O}(u_M^3). \quad (50)$$

Furthermore, an integration of  $P_{2,B}(M, \tau_M)$  with respect to  $\tau_M$  gives the PDF of the maximum  $F'_{2,B}(M)$  (the derivative of the cumulative distribution). Using the change of variables  $\tau_M = [1 + \sin(\varphi)]/2$ , the integral gives

$$\begin{aligned} F'_{2,B}(M) &= \int_0^1 d\tau_M P_{2,B}(M, \tau_M) \\ &= 8M e^{-4M^2} - 8M e^{-2M^2} + 16M^3 e^{-2M^2}, \end{aligned}$$

which coincides with the result computed in Ref. [30],  $F_{2,B}(x) = 1 - 4x^2 e^{-2x^2} - e^{-4x^2}$ .

### F. Free boundary conditions: $N = 2$ stars configuration

In this section, we consider two vicious Brownian paths starting from the origin with free end points: This is the star

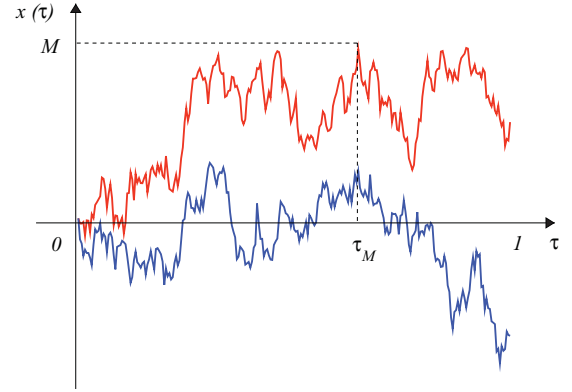


FIG. 6. (Color online) One realization of  $N = 2$  nonintersecting free BMs, that is, in “star” configuration, with the maximum  $M$  and the time  $\tau_M$  at which this maximum is reached.

configuration (a subscript “S” is used; see Fig. 6). The starting points are the same as before  $\mathbf{a} = \boldsymbol{\epsilon} = (0, \epsilon)$ , but the end points are free, so that for  $M > 0$  fixed, we sum over all end points  $\mathbf{b}$  such that  $b_1 < b_2 < M$ . Hence, one has

$$P_{2,S}(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_{2,S}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{2,S}(\epsilon, \eta)}, \quad (51)$$

where the probability weight is given by

$$\begin{aligned} W_{2,S}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) &= \int_{\text{ord}} d\mathbf{b} W_2(M - \eta, \tau_M | \mathbf{b}, \epsilon) \\ &= \int_{\text{ord}} d\mathbf{b} \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \{ \delta[y_2 - (M - \eta)] \\ &\quad \times p_{<M,2}(\mathbf{b}, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) p_{<M,2}(\mathbf{y}, \tau_M | \boldsymbol{\epsilon}, 0) \}, \end{aligned} \quad (52)$$

where the integrations satisfy  $-\infty < b_1 < b_2 < M$  and  $-\infty < y_1 < y_2 \leq M - \eta$ , respectively. The normalization is such that

$$Z_{2,S}(\eta, \epsilon) = \int_0^1 d\tau_M \int_0^\infty dM W_{2,S}(M - \eta, \tau_M, \epsilon). \quad (53)$$

As in the previous section, we use only the leading order term of the expansion of  $W_{2,S}$  and  $Z_{2,S}$  in powers of  $\eta$  and  $\epsilon$ . The computation of the probability weight can be done along the same lines as before (33)–(37), keeping in mind that only the final points change. At lowest order in  $\eta$ , one has

$$\begin{aligned} W_{2,S}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) &= \int_{-\infty}^M db_2 \int_{-\infty}^{b_2} db_1 \frac{4}{\pi} \eta^2 \int_0^\infty dk \int_0^\infty dk' \\ &\quad \times e^{-\frac{k^2}{2}} k_2' k_2 \Phi_{k_1, k_2'}(\mathbf{b}) \Phi_{k_1, k_2}(\boldsymbol{\epsilon}) e^{-(1-\tau_M)\frac{k^2}{2}} e^{-\tau_M \frac{k_2'^2}{2}}, \end{aligned} \quad (54)$$

where we have integrated over  $y_1$  first, and then over  $k_1'$ , with the  $\delta$  function coming from the closure relation of eigenfunctions. For the eigenfunctions evaluated in the final points one obtains

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1, k_2'}(\mathbf{b}) &= \sqrt{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} \phi_{k_1}(b_1) & \phi_{k_1}(b_2) \\ \phi_{k_2'}(b_1) & \phi_{k_2'}(b_2) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi} [\sin(q_1 \zeta_1) \sin(q_2' \zeta_2) - \sin(q_2' \zeta_1) \sin(q_1 \zeta_2)], \end{aligned}$$

in terms of the previous  $q_j = k_j M$ , and with the variables  $\zeta_j = \frac{M-b_j}{M}$  (for  $j = 1, 2$ ). Using the expansion in  $\epsilon$  written in Eq. (38), one finds the leading order to be  $\mathcal{O}(\eta^2\epsilon)$  so that the expansion is

$$W_{2,S}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon W_{2,S}(M, \tau_M) + \mathcal{O}(\eta^3 \epsilon, \eta^2 \epsilon^2), \quad (55)$$

with

$$\begin{aligned} W_{2,S}(M, \tau_M) &= \frac{8}{\pi^3 M^4} \int_0^\infty d\zeta_2 \int_{\zeta_2}^\infty d\zeta_1 \\ &\times \int_0^\infty dq_2' \int_0^\infty dq_2 q_2' \Theta_2(q_1, q_2) e^{-\frac{q_1^2 + \tau_M q_2^2 + (1-\tau_M) q_2'^2}{2M^2}} \\ &\times [\sin(q_1 \zeta_1) \sin(q_2' \zeta_2) - \sin(q_2' \zeta_1) \sin(q_1 \zeta_2)], \end{aligned} \quad (56)$$

where  $\Theta_2(q_1, q_2)$  is given in Eq. (39). As before, the integration over the moments  $q_2$  and  $q_2'$ , corresponding to the top walker, can be factorized in the determinants. From the part  $[0, \tau_M]$ , one recognizes  $\Upsilon_2(q_1 | M, \tau_M)$ , and for the part  $[\tau_M, 1]$ , we introduce

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_2(q_1, \zeta | M, 1 - \tau_M) &= \int_0^\infty dq_2' q_2' e^{-(1-\tau_M) \frac{q_2'^2}{2M^2}} \\ &\times [\sin(q_1 \zeta_1) \sin(q_2' \zeta_2) - \sin(q_2' \zeta_1) \sin(q_1 \zeta_2)]. \end{aligned} \quad (57)$$

With the help of the two functions  $\Upsilon_2$  and  $\tilde{\Upsilon}_2$ , one obtains

$$\begin{aligned} W_{2,S}(M, \tau_M) &= \frac{8}{\pi^3 M^4} \int_0^\infty d\zeta_2 \int_{\zeta_2}^\infty d\zeta_1 \\ &\times \int_0^\infty dq_1 \Upsilon_2(q_1 | M, \tau_M) \tilde{\Upsilon}_2(q_1, \zeta | M, 1 - \tau_M). \end{aligned} \quad (58)$$

$\Upsilon_2$  and  $\tilde{\Upsilon}_2$  can be written as determinants, as in Eq. (44), and

$$\begin{aligned} \tilde{\Upsilon}_2(q_1, \zeta | M, t) &= \sqrt{\pi} \left( \frac{M}{\sqrt{2t}} \right)^2 \\ &\times \left| \begin{array}{cc} \sin(q_1 \zeta_1) & \sin(q_1 \zeta_2) \\ e^{-\frac{M^2}{2t} \zeta_1^2} H_1 \left( \frac{M}{\sqrt{2t}} \zeta_1 \right) & e^{-\frac{M^2}{2t} \zeta_2^2} H_1 \left( \frac{M}{\sqrt{2t}} \zeta_2 \right) \end{array} \right|, \end{aligned} \quad (59)$$

where we used the relation in Eq. (E3), and where  $t$  stands for  $1 - \tau_M$  (for compactness). The fact that we do not have the periodic boundary conditions introduces an asymmetry; thus, the two determinants  $\Upsilon_2$  and  $\tilde{\Upsilon}_2$  do not have the same form.

As before, we also expand the normalization  $Z_{2,S}(\eta, \epsilon)$  in powers of  $\eta$  and  $\epsilon$ , the leading term being

$$Z_{2,S}(\eta, \epsilon) = \eta^2 \epsilon K_{2,S} + o(\eta^2 \epsilon),$$

with  $K_{2,S}$  a number, independent of  $M$  and  $\tau_M$ , which can be computed by the normalization condition:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M P_{2,S}(M, \tau_M) \\ &= \frac{1}{K_{2,S}} \int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M W_{2,S}(M, \tau_M). \end{aligned} \quad (60)$$

One finds  $K_{2,S} = 2/\sqrt{\pi}$ , and the joint probability distribution function for two stars configuration is

$$\begin{aligned} P_{2,S}(M, \tau_M) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{M^2}{[\tau_M(1-\tau_M)]^{3/2}} e^{-\frac{M^2}{2\tau_M}} \\ &\times \left\{ \frac{1-\tau_M}{2\sqrt{2}M^2} H_2 \left( \frac{M}{\sqrt{2\tau_M}} \right) \operatorname{erf} \left( \frac{M}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{M} \frac{\tau_M(1-\tau_M)}{2-\tau_M} e^{-\frac{M^2}{2}} \\ &+ \sqrt{2} \left( \frac{1-\tau_M}{2-\tau_M} \right)^{3/2} \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{1-\tau_M}{2-\tau_M}} \frac{M}{\sqrt{2}} \right) \\ &\left. \times e^{-\frac{M^2}{2(2-\tau_M)}} \left[ 1 - \frac{2-\tau_M}{M^2} \frac{1}{2} H_2 \left( \frac{M}{\sqrt{2\tau_M}} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (61)$$

Integrating over  $M$  one obtains the marginal, that is, the PDF of the time to reach the maximum,

$$\begin{aligned} P_{2,S}(\tau_M) &= \int_0^\infty dM P_{2,S}(M, \tau_M) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{\tau_M(1-\tau_M)}{2}} \right) + \frac{1}{1+\tau_M} \sqrt{\frac{2\tau_M}{1-\tau_M}} \right], \end{aligned} \quad (62)$$

which is plotted with a comparison with numerical simulation in Fig. 7. One easily obtains the asymptotic behavior of the distribution of the time  $\tau_M$ :

(i) For  $\tau_M \rightarrow 0$ , one has

$$P_{2,S}(\tau_M) \sim \frac{3\sqrt{2}}{\pi} \tau_M^{1/2} + \mathcal{O}(\tau_M^{3/2});$$

(ii) for  $\tau_M \rightarrow 1$  the probability distribution diverges as

$$P_{2,S}(\tau_M) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\pi} (1-\tau_M)^{-1/2},$$

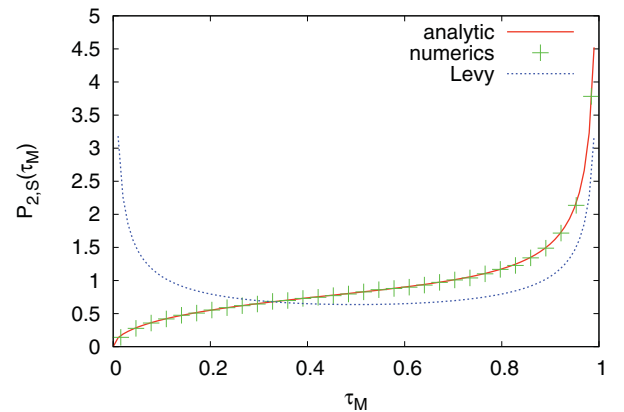


FIG. 7. (Color online) Distribution of the time at which the maximum is reached for  $N = 2$  nonintersecting free Brownian bridges: The solid line is our analytic result given in Eq. (62) while the symbols are the results of our numerical simulation. The dotted line describes the PDF of the time  $\tau_M$  for one Brownian path (whose cumulative distribution is given by Lévy's arcsine law).

which can be compared to the divergence of the distribution of the time  $\tau_M$  for one BM (the Lévy arcsine law, plotted in Fig. 7)  $P_{1,S}(\tau_M) = \frac{1}{\pi} [\tau_M(1 - \tau_M)]^{-1/2}$ . The fact that we have another uncrossing Brownian path below preserves the exponent of the divergence, but changes slightly the prefactor.

Notice finally the mean value is given by  $\langle \tau_M \rangle_{2,S} = 7/2 - 2\sqrt{2} = 0.671\,573\dots$  and that the sign of the derivative of  $P_{2,S}(\tau_M)$  changes in  $\tau_M \simeq 0.451\,175$ .

### G. Periodic boundary condition and positivity constraint: $N = 2$ excursions configuration

Now we come to the computation of the joint probability distribution of the maximum  $M$  and its position  $\tau_M$  for the configuration of two vicious Brownian paths subjected to stay in the half line  $x > 0$ , in addition to the periodic condition: the two paths start in  $x = 0$  and end in  $x = 0$  at  $\tau = 1$  (see Fig. 8). This corresponds to two Brownian excursions, with the noncrossing condition (we use the subscript “E”).

The positivity constraint is easily implemented in the path integral formulation by adding another hard wall in  $x = 0$ . The potential associated with each of the two fermions then reads

$$V_{\text{Box}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < x < M, \\ +\infty & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (63a)$$

The eigenfunctions of the one-particle Hamiltonian

$$H_{\text{Box}}^{(j)}(x_j) = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx_j^2} + V_{\text{Box}}(x_j) \quad (63b)$$

are given by

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin\left(\frac{n\pi}{M}x\right), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (63c)$$

with the associated eigenvalues

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{n^2 \pi^2}{M^2}. \quad (63d)$$

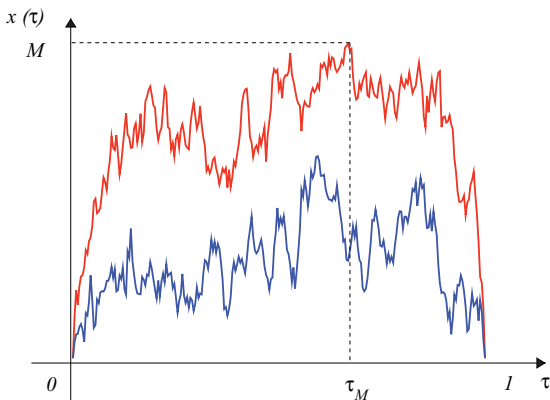


FIG. 8. (Color online) One realization of the  $N = 2$  excursions configuration, with the maximum  $M$  and the time to reach it  $\tau_M$ .

This makes it possible to express the corresponding propagator, for any point  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  and time  $0 \leq t_a < t_b \leq 1$ , as

$$p_{\text{Box}}(\mathbf{b}, t_b | \mathbf{a}, t_a) = \langle \mathbf{b} | e^{-(t_b - t_a) H_{\text{Box}}} | \mathbf{a} \rangle \\ = \sum_{n_1, n_2 > 0} \Psi_{n_1}(\mathbf{b}) \Psi_{n_2}^*(\mathbf{a}) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} (n_1^2 + n_2^2) (t_b - t_a)}, \quad (63e)$$

where  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  is a couple of two positive integers, and in which we use the Slater determinant  $\Psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{a}) = \det_{1 \leq i, j \leq 2} [\psi_{n_i}(a_j)] / \sqrt{2!}$ .

Here the regularization is necessary for the boundary values of both fermions, because the lowest path cannot start and end exactly in  $x = 0$ . Therefore, we put  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a} = (\epsilon, 2\epsilon) = \boldsymbol{\epsilon}$  and  $\mathbf{x}(1) = \mathbf{b} = \boldsymbol{\epsilon}$ , where the notation  $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon, 2\epsilon)$  differs slightly from the previous one  $\epsilon = (0, \epsilon)$ . For this geometry, one uses Eqs. (30a)–(30c) to obtain the probability weight

$$W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) \equiv W_2(M - \eta, \tau_M | \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}) \\ = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \{ \delta[y_2 - (M - \eta)] \\ \times p_{\text{Box}}(\boldsymbol{\epsilon}, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) p_{\text{Box}}(\mathbf{y}, \tau_M | \boldsymbol{\epsilon}, 0) \}, \quad (64a)$$

where the ordered integral covers the domain  $0 < y_1 < y_2 < M$ . The normalization function is

$$Z_{2,E}(\eta, \epsilon) = Z_2(\eta | \boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}), \quad (64b)$$

so that

$$P_{2,E}(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{2,E}(\eta, \epsilon)}. \quad (64c)$$

Inserting the spectral decomposition of the propagator (63e) in Eq. (64a), one has

$$W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \delta[y_2 - (M - \eta)] \\ \times \sum_{n, n' > 0} \left[ \Psi_{n'}(\boldsymbol{\epsilon}) \Psi_{n'}^*(\mathbf{y}) e^{-\frac{\pi^2(1 - \tau_M)n'^2}{2M^2}} \Psi_n(\mathbf{y}) \Psi_n^*(\boldsymbol{\epsilon}) e^{-\frac{\pi^2 \tau_M n^2}{2M^2}} \right]. \quad (65)$$

We follow the same procedure as before in Eqs. (33)–(37): Using the symmetry in the exchange of indices ( $n_1 \leftrightarrow n_2$  and  $n'_1 \leftrightarrow n'_2$ ) we express the two Slater determinants as the product of their diagonal components:

$$W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \sum_{n, n'} \left\{ \Psi_{n'}(\boldsymbol{\epsilon}) \Psi_n^*(\boldsymbol{\epsilon}) e^{-\frac{\pi^2[(1 - \tau_M)n'^2 + \tau_M n^2]}{2M^2}} \right. \\ \left. \times \psi_{n_2}(M - \eta) \psi_{n'_2}(M - \eta) \int_0^{M - \eta} dy_1 \psi_{n'_1}^*(y_1) \psi_{n_1}(y_1) \right\}. \quad (66)$$

An expansion at lowest order in  $\eta$  of this expression, making use of

$$\psi_n(M - \eta) = (-1)^{n+1} \sqrt{\frac{2}{M}} \frac{n\pi}{M} \eta + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (67)$$

together with the closure relation of the eigenfunctions

$$\int_0^M dy_1 \psi_{n_1}(y_1) \psi_{n'_1}^*(y_1) = \delta_{n_1, n'_1}, \quad (68)$$

yields

$$W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \frac{2\pi^2}{M^3} \sum_{n, n'} \left\{ \Psi_n(\epsilon) \Psi_n^*(\epsilon) \times e^{-\frac{\pi^2[(1-\tau_M)n^2 + \tau_M n'^2]}{2M^2}} (-1)^{n_2 + n'_2} n_2 n'_2 \delta_{n_1, n'_1} \right\}. \quad (69)$$

The expansion to the lowest order in  $\epsilon$  of the eigenfunctions reads

$$\Psi_n(\epsilon) = (-1) \frac{4\sqrt{2}\pi^4}{3M^5} n_1 n_2 \Delta_2(n_1^2, n_2^2) \epsilon^4 + \mathcal{O}(\epsilon^6), \quad (70)$$

where  $\Delta_2(\lambda_1, \lambda_2)$  is the  $2 \times 2$  Vandermonde determinant

$$\Delta_2(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1).$$

Hence, to lowest order, one has

$$W_{2,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^8 W_{2,E}(M, \tau_M) + o(\eta^2 \epsilon^8),$$

$$W_{2,E}(M, \tau_M) = \frac{64\pi^{10}}{9M^{13}} \sum_{n_1 > 0} \left\{ n_1^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_1^2} \times \sum_{n_2 > 0} (-1)^{n_2} n_2^2 \Delta_2(n_1^2, n_2^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} \tau_M n_2^2} \times \sum_{n_3 > 0} (-1)^{n_3} n_3^2 \Delta_2(n_1^2, n_3^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} (1-\tau_M) n_3^2} \right\}. \quad (71)$$

To ensure the joint PDF to exist, the normalization must have the same dominant term

$$Z_{2,E}(\eta, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^8 K_{2,E} + o(\eta^2 \epsilon^8).$$

Combining these expansions in Eq. (71) and in Eq. (72) one obtains from Eq. (64c)

$$P_{2,E}(M, \tau_M) = \frac{\pi^{11}}{3M^{13}} \sum_{n_1, n_2, n_3 > 0} (-1)^{n_2 + n_3} n_1^2 n_2^2 n_3^2 \times (n_2^2 - n_1^2)(n_3^2 - n_1^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [n_1^2 + \tau_M n_2^2 + (1-\tau_M) n_3^2]}, \quad (72)$$

where the computation of normalization has been left in Appendix C.

This formula is well suited for an integration over  $M$  to deduce the marginal law of  $\tau_M$ :

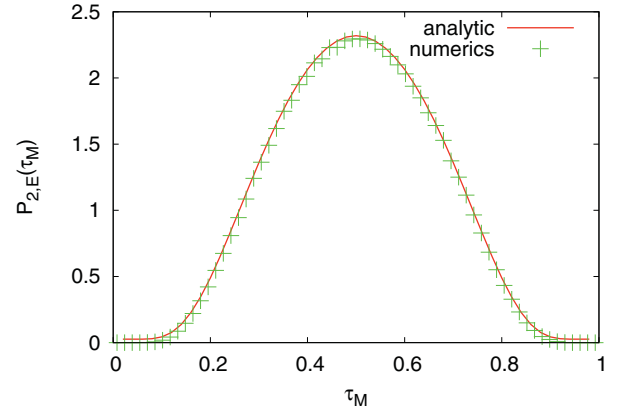


FIG. 9. (Color online) Distribution of the time at which the maximum is reached for  $N = 2$  nonintersecting excursions (watermelon with a wall). The solid line corresponds to our analytic result while the symbols are the results of our numerical simulations.

$$P_{2,E}(\tau_M) = \int_0^\infty dM P_{2,E}(M, \tau_M)$$

$$= \frac{1280}{\pi} \sum_{n_i > 0} (-1)^{n_2 + n_3} \frac{(n_1 n_2 n_3)^2 (n_1^2 - n_2^2) (n_1^2 - n_3^2)}{[n_1^2 + \tau_M n_2^2 + (1 - \tau_M) n_3^2]^6}, \quad (73)$$

which is plotted in Fig. 9.

Following the methods introduced in [19], one is able to compute the asymptotic behavior of  $P_{2,E}(\tau_M)$  when  $\tau_M \rightarrow 0$ . Starting from the expression of the joint distribution of  $(M, \tau_M)$  in Eq. (72), one writes the integral over  $M$  to get the marginal distribution  $P_{2,E}(\tau_M)$  as

$$P_{2,E}(\tau_M) = \int_0^\infty dM P_{2,E}(M, \tau_M)$$

and perform a change of variable

$$x = \sqrt{\tau_M} \frac{\pi^2}{2M^2}. \quad (74)$$

One obtains

$$P_{2,E}(\tau_M) = \frac{2^5}{3\pi} \frac{1}{\tau_M^3} \int_0^\infty dx x^5 \times \sum_{n_1, n_2, n_3} \left\{ (-1)^{n_2 + n_3} n_1^2 n_2^2 n_3^2 (n_2^2 - n_1^2) (n_3^2 - n_1^2) \times e^{-\frac{x}{\sqrt{\tau_M}} (n_1^2 + (1-\tau_M) n_3^2)} e^{-x \sqrt{\tau_M} n_2^2} \right\}. \quad (75)$$

When  $\tau_M \rightarrow 0$ , the argument of the first exponential becomes  $-x(n_1^2 + n_3^2)/\sqrt{\tau_M}$  at leading order, and the dominant term in the sums over  $n_1$  and  $n_3$  is given by  $(n_1 = 1, n_3 = 2)$  and  $(n_1 = 2, n_3 = 1)$  because of the factor  $(n_3^2 - n_1^2)$ , which enforces  $n_1 \neq n_3$ . Hence, to leading order, one has

$$P_{2,E}(\tau_M) \simeq \frac{2^7}{\pi} \frac{1}{\tau_M^3} \int_0^\infty dx x^5 \times \sum_{n_2=1}^\infty (-1)^{n_2} n_2^2 (2n_2^2 - 5) e^{-\frac{5x}{\sqrt{\tau_M}}} e^{-x \sqrt{\tau_M} n_2^2}. \quad (76)$$



By differentiating  $N$  times the Jacobi identity

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n^2 z} = 2 \left( \frac{\pi}{z} \right)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\pi^2 (n + \frac{1}{2})^2 / z} \quad (77)$$

with respect to  $z$ , one has at leading order when  $z \rightarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^{2N} e^{-n^2 z} \simeq \left| \frac{\pi}{z} \right|^{1/2} \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 N \frac{1}{z^{2N}} e^{-\frac{\pi^2}{4z}}. \quad (78)$$

With  $z = x\sqrt{\tau_M}$ , one obtains at leading order

$$P_{2,E}(\tau_M) \simeq 2^4 \pi^{7/2} \tau_M^{-(5+\frac{1}{4})} \int_0^{\infty} dx x^{1/2} e^{-\left(5x + \frac{\pi^2}{4x}\right) \frac{1}{\sqrt{\tau_M}}}, \quad (79)$$

which can be approximated by a saddle point method. At leading order when  $\tau_M \rightarrow 0$ , one obtains

$$P_{2,E}(\tau_M) \simeq \frac{8\pi^5}{5} \frac{1}{\tau_M^5} e^{-\frac{\pi\sqrt{5}}{\sqrt{\tau_M}}}. \quad (80)$$

By symmetry one obtains the same behavior when  $\tau_M \rightarrow 1$  by replacing  $\tau_M$  by  $1 - \tau_M$  in the above formula.

As in the previous paragraphs, it is possible to have a compact formula for the joint PDF, anticipating the general computation for  $N$  vicious Brownian paths. Let us introduce  $\Omega_2$ , the analog of  $\Upsilon_2$  (43) in this discrete case:

$$\Omega_2(n_1 | M, t) = \sum_{k>0} (-1)^k k^{2i} \Delta_2(n_1^2, k^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} t k^2}, \quad (81)$$

with  $k$  a generic index standing for  $n_2$  ( $t = \tau_M$ ) or  $n_3$  ( $t = 1 - \tau_M$ ). Factorizing the sum over  $k$  in the last line of the Vandermonde determinant and using sums defined by

$$\omega_i(M, t) = \sum_{k>0} (-1)^k k^{2i} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} t k^2}, \quad (82)$$

one is able to write

$$\Omega_2(n_1 | M, t) = \begin{vmatrix} 1 & n_1^2 \\ \omega_1(M, t) & \omega_2(M, t) \end{vmatrix}. \quad (83)$$

Hence, the joint PDF can be expressed in a factorized way, reminiscent of the formula for the watermelon case (42)

$$P_{2,E}(M, \tau_M) = \frac{\pi^{11}}{3M^{13}} \sum_{n_1} n_1^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_1^2} \times \Omega_2(n_1 | M, \tau_M) \Omega_2(n_1 | M, 1 - \tau_M). \quad (84)$$

In the following we extend these formulas, for bridges and excursions, to  $N$  particles for generic  $N$ .

### III. DISTRIBUTION OF THE POSITION OF THE MAXIMUM FOR $N$ VICIOUS BROWNIAN PATHS

In this section, we extend the previous method to any number  $N$  of vicious Brownian paths, ordered as  $x_1(\tau) < x_2(\tau) < \dots < x_N(\tau)$  for  $0 < \tau < 1$  (again we take a unit time interval, without loss of generality). We want to compute the joint PDF of  $(M, \tau_M)$ , respectively the maximum and the time to reach it for different configurations, with

$$M = \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) = x_N(\tau_M). \quad (85)$$

In the same way as in the previous section, the noncolliding condition translates into treating indistinguishable fermions. They do not interact between each other but are all subjected to the same potential [which is one or two hard wall(s) potential in our computations]. The Hamiltonian of the system is

$$H = \sum_{i=1}^N \mathbb{I}^{(1)} \otimes \dots \otimes H^{(i)} \otimes \dots \otimes \mathbb{I}^{(N)}, \quad (86)$$

with identical one-particle Hamiltonians  $H^{(i)}$ , for  $1 \leq i \leq N$ . If  $\psi_{E_i}(x_i)$  is the eigenfunction of  $H^{(i)}$  associated with the energy  $E_i$ , one can write the eigenfunction of the  $N$ -particles problem as a Slater determinant,

$$\Psi_E(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det_{1 \leq i, j \leq N} [\psi_{E_i}(x_j)], \quad (87)$$

with  $E = \sum_i E_i$  and where we used the bold type for  $N$  vectors:  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Hence, the propagator reads as in formula (19), but with determinants of  $N \times N$  matrices. The method to compute the joint probability density function is exactly the same as before, replacing 2-vectors with  $N$ -vectors in formulas (30).

#### A. $N$ vicious Brownian bridges

We first consider the watermelon configuration, that is, the case of  $N$  nonintersecting Brownian bridges (see definition in Sec. II E). The periodic boundary conditions impose the starting and ending points to be at the origin. As discussed before, this needs a regularization scheme, and we take  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = [0, \epsilon, 2\epsilon, \dots, (N-1)\epsilon] = \epsilon$ . The joint PDF is

$$P_{N,B}(M, \tau_M) = \lim_{\epsilon, \eta \rightarrow 0} \frac{W_{N,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{N,B}(\eta, \epsilon)}, \quad (88)$$

where  $W_{N,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)$  is the probability weight of all paths starting and ending in  $\epsilon$  with  $x_N(\tau_M) = M - \eta$ , given by

$$W_{N,B}(M - \eta, \tau_M, \eta) = \int_{\text{ord}} d\mathbf{y} \left\{ \delta[y_N - (M - \eta)] \times p_{<M,N}(\epsilon, 1 | \mathbf{y}, \tau_M) p_{<M,N}(\mathbf{y}, \tau_M | \epsilon, 0) \right\}. \quad (89)$$

$p_{<M,N}$  is the propagator of  $N$  indistinguishable fermions, each of them having the one-particle Hamiltonian  $H_{<M}$  (29b), with eigenfunctions  $\phi_k(x)$  and eigenvalues  $E_k$  given by Eqs. (29d) and (29e).

The starting point of our computation is given by Eq. (33) with the upper point now  $y_N$ . All the manipulations done before for 2 paths extend to  $N$  paths. A subtlety is the fact that the ordered integral over the domain  $-\infty < y_1 < y_2 < \dots < y_{N-1} < y_N < M$  is proportional to the same unordered integral over the domain  $-\infty < y_i < M$  for  $1 \leq i \leq N$ , because of the symmetry of the integrand. This is shown in Appendix A. With the same argument of symmetry between the exchange of any  $k_i \leftrightarrow k_j$ , and the same for  $\mathbf{k}'$  one could use only the diagonal terms for the two Slater determinants expressed in  $\mathbf{y}$ . After permuting the  $y$  integrals with the  $k$  integrals, this operation gives  $N - 1$  closure relations, that is, a product of  $N - 1$  Dirac  $\delta$  functions  $\prod_{i=1}^{N-1} \delta(k_i - k'_i)$ , and the product  $\phi_{k_N}(M - \eta) \phi_{k'_N}(M - \eta)$ . The expansion of the Slater

determinants evaluated at the initial and final points involves now the function

$$\Theta_N(\mathbf{q}) = \det_{1 \leq i, j \leq N} \left[ q_i^{j-1} \cos \left( q_i - j \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (90)$$

with the rescaled variables  $q_i = k_i M$ . After the aforementioned manipulations, one finds at lowest order

$$W_{N,B}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^{N(N-1)} W_{N,B}(M, \tau_M) + o(\eta^2 \epsilon^{N(N-1)}), \quad (91)$$

together with

$$Z_{N,B}(\eta, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^{N(N-1)} K_{N,B} + o(\eta^2 \epsilon^{N(N-1)}). \quad (92)$$

Therefore, one obtains from Eqs. (91) and (92), together with Eq. (88),

$$P_{N,B}(M, \tau_M) = \frac{A_{N,B}}{M^{N^2+3}} \int_0^\infty dq_1, \dots, dq_{N-1} e^{-\frac{\sum_{k=1}^{N-1} q_k^2}{2M^2}} \times \Upsilon_N(\{q_i\}|M, \tau_M) \Upsilon_N(\{q_i\}|M, 1 - \tau_M), \quad (93)$$

where

$$\Upsilon_N(\{q_i\}|M, t) = \int_0^\infty dq_N q_N e^{-t \frac{q_N^2}{2M^2}} \Theta_N(\mathbf{q}) \quad (94)$$

depends on  $N - 1$  variables  $\{q_i\} = (q_1, \dots, q_{N-1})$ . In Eq. (93) the amplitude  $A_{N,B}$ , whose computation is left in Appendix C, is given by

$$A_{N,B} = \frac{2^{2N-N/2} N}{\pi^{N/2+1} \prod_{j=1}^N j!}. \quad (95)$$

Moreover, the function  $\Upsilon_N$  defined by Eq. (94) can be written as a determinant:  $\Theta_N$  is a determinant, and the integration over  $q_N$  can be absorbed in its last line. The elements of this last line are indexed by the column index  $j$ ,

$$\int_0^\infty dq_N q_N^j \cos \left( q_N - j \frac{\pi}{2} \right) e^{-t \frac{q_N^2}{2M^2}} = \sqrt{\pi} M^{j+1} U_j(M, t), \quad (96)$$

with the help of the family of functions

$$U_j(t) \equiv U_j(M, t) = t^{-\frac{j+1}{2}} H_j \left( \frac{M}{\sqrt{2t}} \right) e^{-\frac{M^2}{2t}}, \quad (97)$$

where  $H_j$  is the Hermite polynomial of degree  $j$  [see formula (E2)]. Then  $\Upsilon_N(\{q_i\}|M, t)$  is the determinant of a matrix, whose elements indexed by  $(a, b)$  are given by

$$\begin{aligned} q_a^{b-1} \cos \left( q_a - b \frac{\pi}{2} \right) & \quad \text{if } 1 \leq a \leq N-1 \text{ and } 1 \leq b \leq N, \\ \sqrt{\pi} M^{b+1} U_b(M, t) & \quad \text{if } a = N \text{ and } 1 \leq b \leq N. \end{aligned} \quad (98)$$

The next step is to expand the determinant  $\Upsilon_N$  in minors with respect to its last line:

$$\begin{aligned} \Upsilon_N(q_1, \dots, q_{N-1}|M, t) & \\ & = \sum_{j=1}^N (-1)^{N+j} \sqrt{\pi} M^{j+1} U_j(M, t) \det[\mathbf{M}_{N,j}(\Theta_N)], \end{aligned} \quad (99)$$

where  $\det[\mathbf{M}_{N,j}(\Theta_N)]$  denotes the determinant of the minor  $(N, j)$  of the matrix  $\Theta_N$ , obtained by removing its  $N$ th line and its  $j$ th column. These minors only involve the  $q_1, \dots, q_{N-1}$  and  $M$ , not  $\tau_M$ . Expanding the product of the two functions  $\Upsilon_N$  entering into the expression (93) yields

$$\begin{aligned} \Upsilon_N(\{q_i\}|M, \tau_M) \Upsilon_N(\{q_i\}|M, 1 - \tau_M) & \\ & = \sum_{i,j=1}^N (-1)^{i+j} \pi M^{i+j+2} U_i(\tau_M) U_j(1 - \tau_M) \\ & \quad \times \det[\mathbf{M}_{N,i}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{N,j}(\Theta_N)]. \end{aligned} \quad (100)$$

The dependence on the variables  $q_i$ 's appears only in the last line of that expression (100), and the Cauchy-Binet formula (B7) makes it possible to compute the integration with respect to  $q_1, \dots, q_{N-1}$  of the product of determinants of minors:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dq_1, \dots, dq_{N-1} e^{-\frac{\sum_{k=1}^{N-1} q_k^2}{2M^2}} & \\ \times \det[\mathbf{M}_{N,i}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{N,j}(\Theta_N)] & \\ & = (N-1)! \det \left[ \mathbf{M}_{i,j} \left( M^{a+b-1} \sqrt{\frac{\pi}{2^{a+b+1}}} (\mathbf{D}_{N,B})_{a,b} \right) \right], \end{aligned} \quad (101)$$

where  $a, b$  are, respectively, the line and column indices of the matrix of which we take the determinant, and  $\mathbf{D}_{N,B}$  is the  $N \times N$  matrix with elements

$$(\mathbf{D}_{N,B})_{a,b} = (-1)^{a-1} H_{a+b-2}(0) - e^{-2M^2} H_{a+b-2}(\sqrt{2}M). \quad (102)$$

This matrix enters into the expression of the cumulative distribution of the maximal height of  $N$  watermelons [32]:

$$\text{Prob} \left[ \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) \leq M \right] = \frac{1}{\prod_{j=1}^{N-1} (j! 2^j)} \det \mathbf{D}_{N,B}. \quad (103)$$

Putting together (100) and (101) in formula (93) and dividing by  $K_{N,B}$  given in Eq. (92), one finds the joint PDF of  $M$  and  $\tau_M$ ,

$$P_{N,B}(M, \tau_M) = B_{N,B} \sum_{i,j=1}^N (-1)^{i+j} U_i(\tau_M) U_j(1 - \tau_M) \times \det[\mathbf{M}_{i,j}(\mathbf{D}_{N,B})], \quad (104a)$$

or, equivalently,

$$\begin{aligned} P_{N,B}(M, \tau_M) & = -B_{N,B} \det \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{N,B} & \mathbf{U}(\tau_M) \\ {}^t \mathbf{U}(1 - \tau_M) & 0 \end{pmatrix} \\ & = B_{N,B} \det[\mathbf{D}_{N,B}] {}^t \mathbf{U}(1 - \tau_M) \mathbf{D}_{N,B}^{-1} \mathbf{U}(\tau_M), \end{aligned} \quad (104b)$$

with the normalization constant  $B_{N,B}^{-1} = \sqrt{2\pi} \prod_{j=1}^{N-1} j! 2^j$ .

It is also interesting to characterize the small  $\tau_M$  behavior of the distribution of  $P_{N,B}(\tau_M) = \int_0^\infty P_{N,B}(M, \tau_M) dM$ . To study it, it is useful to start from Eq. (93), which, after integration over  $M$ , yields

$$P_{N,B}(\tau_M) = \tilde{A}_N \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^\infty dq_i \int_0^\infty dq_N q_N \int_0^\infty dq'_N q'_N \times \frac{\Theta_N(q_1, \dots, q_N) \Theta(q_1, \dots, q'_N)}{\left[ (1 - \tau_M) q_N'^2 + \tau_M q_N^2 + \sum_{i=1}^{N-1} q_i^2 \right]^{1 + \frac{N^2}{2}}}, \quad (105)$$

with  $\tilde{A}_N = 2^{N^2/2} \Gamma(1 + \frac{N^2}{2}) A_{N,B}$ . To study the behavior of  $P_{N,B}(\tau_M)$  when  $\tau_M \rightarrow 0$ , we perform the changes of variables  $q_i = \sqrt{\tau_M} y_i$ , for  $1 \leq i \leq N$  so that when  $\tau_M \rightarrow 0$ , one has to leading order

$$P_{N,B}(\tau_M) \sim \tau_M^{\frac{-N^2+N-1}{2}} \prod_{i=1}^N \int_0^\infty dy_i y_N \int_0^\infty dq'_N q'_N \times \frac{\Theta_N(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, \sqrt{\tau_M} y_N) \Theta(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, q'_N)}{\left[ q_N'^2 + \sum_{i=1}^N y_i^2 \right]^{1 + \frac{N^2}{2}}}. \quad (106)$$

Besides, one has, also to leading order

$$\Theta_N(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, \sqrt{\tau_M} y_N) \sim \tau_M^{\frac{N^2}{2}} \prod_{i=1}^N y_i \prod_{i < j}^N (y_i^2 - y_j^2) + \mathcal{O}\left(\tau_M^{\frac{N^2}{2}+1}\right), \quad (107)$$

and, similarly,

$$\Theta(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, q'_N) \sim \tau_M^{\frac{(N-1)^2}{2}} \prod_{i=1}^{N-1} y_i \prod_{i < j}^{N-1} (y_i^2 - y_j^2) f(q'_N) + \mathcal{O}\left(\tau_M^{\frac{(N-1)^2}{2}+1}\right), \quad (108)$$

with some regular function  $f(q'_N)$ . However, being antisymmetric under the permutation of the variables  $y_i$ 's it is easy to see that this leading order term [Eqs. (107) and (108)] vanishes after the integration over  $y_1, \dots, y_N$  in Eq. (106). In fact, if one writes the low  $\tau_M$  expansion of the product as

$$\Theta_N(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, \sqrt{\tau_M} y_N) \Theta(\sqrt{\tau_M} y_1, \dots, q'_N) = \tau_M^{\frac{N^2+(N-1)^2}{2}} (v_0 + v_1 \tau_M + v_2 \tau_M^2 + \dots), \quad (109)$$

where  $v_k$ 's are functions of  $y_1, \dots, y_N, q'_N$  one can show that the first nonvanishing term, after integration over these variables, corresponds to  $v_k$  with  $k = 1$  for  $N = 2$ ,  $k = 2$  for  $N = 3$ , and more generally  $k = N - 1$  for generic  $N$ . Therefore, one has, to leading order,

$$P_{N,B}(\tau_M) \sim \tau_M^{\frac{N^2+N-2}{2}}, \quad (110)$$

although the explicit calculation of the amplitude is a very hard task.

### B. $N$ vicious Brownian excursions

We now consider watermelons with a wall, that is,  $N$  excursions under the noncrossing condition (see the definition in Sec. II G). Again the starting and ending points are at

the origin, but with this configuration we must use  $\mathbf{a} = \mathbf{b} = (\epsilon, 2\epsilon, \dots, N\epsilon) = \boldsymbol{\epsilon}$ , which is slightly different from the cases of bridges, because now all paths must be positive. The joint PDF of  $M$  and  $\tau_M$  is

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = \lim_{\eta, \epsilon \rightarrow 0} \frac{W_{N,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon)}{Z_{N,E}(\eta, \epsilon)}, \quad (111)$$

where the probability weight of all paths starting and ending in  $\boldsymbol{\epsilon}$ , verifying for all  $0 \leq \tau \leq 1$  the noncrossing condition  $0 < x_1(\tau) < \dots < x_N(\tau) < M$ , and for which  $x_N(\tau_M) = y_N = M - \eta$ , reads

$$W_{N,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \int_{\text{ord}} dy \left\{ \delta [y_N - (M - \eta)] \times p_{\text{Box}}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{1} | y, \tau_M) p_{\text{Box}}(y, \tau_M | \boldsymbol{\epsilon}, 0) \right\}. \quad (112)$$

Here the integration is over the ordered domain  $0 < y_1 < \dots < y_N < M$ . The boundary conditions of the excursions configuration enforce the use of the propagator  $p_{\text{Box}}$  associated with  $N$  fermions confined in the segment  $[0, M]$  (63e): The Hamiltonian is of the form (86), with the one-particle Hamiltonian (63b).

One can follow the first steps of the Sec. II G, replacing now 2-vectors with  $N$ -vectors. As in the bridge case, the ordered integration can be set unordered (i.e., integrating over  $0 \leq y_i \leq M - \eta$  for all  $1 \leq i \leq N - 1$ ), with a numerical prefactor (see Appendix A). The spectral decomposition is done with sums over  $2N$  indices  $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$  and  $\mathbf{n}' = (n'_1, \dots, n'_N)$ , as in formula (65). Using the symmetry of the integrand under the exchanges of any couple  $n_i \leftrightarrow n_j$  and  $n'_i \leftrightarrow n'_j$  (for  $1 \leq i, j \leq N$ ) one can write the Slater determinants of the intermediate point (at  $\tau = \tau_M$ ) under their diagonal form, with a numerical prefactor, irrelevant in the computation. Hence, one has the formula

$$W_{N,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = N! 2^{-\frac{N(N-1)}{2}} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [(1 - \tau_M) \mathbf{n}^2 + \tau_M \mathbf{n}'^2]} \times \Psi_{\mathbf{n}'}(\boldsymbol{\epsilon}) \Psi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\epsilon}) \psi_{n'_N}(M - \eta) \psi_{n_N}(M - \eta) \times \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \int_0^{M-\eta} dy_i \psi_{n'_i}(y_i) \psi_{n_i}(y_i) \right\}, \quad (113)$$

where  $\psi_n(x)$  is given in Eq. (63c). The expansion to lowest order in  $\eta$  gives  $N - 1$  closure relations (the last line of the preceding expression)

$$\int_0^M dy_i \psi_{n'_i}(y_i) \psi_{n_i}(y_i) = \delta_{n'_i, n_i}, \quad (114)$$

and we use formula (67) to get

$$W_{N,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 2^{-\frac{N(N-1)}{2}} \frac{2\pi^2}{M^3} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'_N} (-1)^{n_N + n'_N} n_N n'_N \times e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} \sum_{i=1}^{N-1} n_i^2} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [(1 - \tau_M) n_N'^2 + \tau_M n_N^2]} \det \psi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\epsilon}) \det \psi_{\mathbf{n}'}(\boldsymbol{\epsilon}), \quad (115)$$

where  $\tilde{\mathbf{n}} \equiv (n_1, n_2, \dots, n'_N)$ . One can then use the expansion to lowest order in  $\epsilon$

$$\det \psi_{\mathbf{n}}(\epsilon) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} \left( \prod_{j=1}^N \frac{j^{2j-1}}{(2j-1)!} \right) 2^{\frac{N}{2}} \pi^{N^2} \left( \frac{1}{M} \right)^{N(N+\frac{1}{2})} \times \prod_{i=1}^N n_i \Delta_N(n_1^2, \dots, n_N^2) \epsilon^{N^2} + o(\epsilon^{N^2}), \quad (116)$$

where  $\Delta_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  is the  $N \times N$  Vandermonde determinant. In this formula the first line contains only numerical constants, irrelevant for the computation (they will be absorbed in the normalization constant), so only the second line is relevant, containing the dependence in  $M$  and in the indices of the sums  $n_i$  and the lowest order in  $\epsilon^{N^2}$ . Hence, one has to lowest order

$$W_{N,E}(M - \eta, \tau_M, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^{2N^2} W_{N,E}(M, \tau_M) + \mathcal{O}(\eta^3 \epsilon^{2N^2}, \eta^2 \epsilon^{2N^2+1}), \quad (117)$$

as well as, for the normalization,

$$Z_{N,E}(\eta, \epsilon) = \eta^2 \epsilon^{2N^2} K_{N,E} + o(\eta^2 \epsilon^{2N^2}), \quad (118)$$

with  $K_{N,E}$  a number. Taking the double limit  $\epsilon, \eta \rightarrow 0$  one obtains the joint probability

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = \frac{W_{N,E}(M, \tau_M)}{K_{N,E}} = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \times \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{n}'_N} \left\{ (-1)^{n_N + n'_N} n_N^2 n'^2_N \prod_{i=1}^{N-1} n_i^2 \Delta_N(n_1^2, \dots, n_{N-1}^2, n_N^2) \times \Delta_N(n_1^2, \dots, n_{N-1}^2, n'^2_N) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} \sum_{i=1}^{N-1} n_i^2} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} [(1-\tau_M)n_N'^2 + \tau_M n_N^2]} \right\}, \quad (119)$$

where the numerical constant is given by (see Appendix C 2)

$$A_{N,E} = \frac{N\pi^{2N^2+N+2}}{2^{N^2-N/2} \prod_{j=0}^{N-1} \Gamma(2+j)\Gamma(\frac{3}{2}+j)}. \quad (120)$$

Following the notations introduced in the  $N=2$  case, we define [writing for compactness the  $N-1$ -uplet  $\{n_i\} = (n_1, \dots, n_{N-1})$ ]

$$\Omega_p(\{n_i\}|M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2 \Delta_N(\{n_i^2\}, k^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} t k^2} = \begin{vmatrix} 1 & n_1^2 & \dots & n_1^{2(N-1)} \\ 1 & n_2^2 & \dots & n_2^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \omega_1(t) & \omega_2(t) & \dots & \omega_N(t) \end{vmatrix}, \quad (121)$$

where we used the property of the Vandermonde determinant to factorize the sum with respect to  $k$  in the last line of the determinant, which plays the role of  $n_N$  associated with  $t = \tau_M$

or the role of  $n'_N$  with  $t = 1 - \tau_M$ , resulting in elements such as  $\omega_i(t) \equiv \omega_i(M, t)$ , for  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\omega_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{2i} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} t k^2}. \quad (122)$$

With this notation, we obtain the compact formula

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_i^2} \right\} \times \Omega_N(\{n_i\}|M, \tau_M) \times \Omega_N(\{n_i\}|M, 1 - \tau_M), \quad (123)$$

which is the ‘‘discrete’’ analog of formula (93) obtained in the case of  $N$  bridges.

The ultimate step is to expand each determinant  $\Omega_N$  with respect to their last line. Then, using the discrete Cauchy-Binet identity with respect to the sums over  $n_i$ , one has

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = \frac{B_{N,E}}{M^2} \sum_{i,j=1}^N \left( \frac{2\pi^2}{M^2} \right)^{i+j} \times \omega_i(\tau_M) \omega_j(1 - \tau_M) \det[\mathbf{M}_{i,j}(\mathbf{D}_{N,E})], \quad (124)$$

with the normalization

$$B_{N,E} = \frac{(-1)^{N+1} \pi^{N/2} \sqrt{2} 2^{-2N^2}}{\prod_{j=1}^{N-1} j! \Gamma(\frac{3}{2} + j)}, \quad (125)$$

and where appear the minors of the matrix  $\mathbf{D}_{N,E} \equiv \mathbf{D}_{N,E}(M)$  whose elements are, for  $1 \leq i, j \leq N$ ,

$$D_{N,E,i,j} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{2(i+j-1)}(\sqrt{2}Mn) e^{-2M^2 n^2}. \quad (126)$$

This matrix enters into the expression of the cumulative probability of the maximum [29]:

$$\text{Prob} \left[ \max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) \leq M \right] = (-1)^N \frac{\det \mathbf{D}_{N,E}}{2^{N^2} \prod_{j=1}^N (2j-1)!}. \quad (127)$$

Defining the vector with elements, for  $1 \leq i \leq N$ ,

$$\mathbf{U}_{E_i}(t) \equiv \mathbf{U}_{E_i}(M, t) = \frac{1}{M} \left( -\frac{2\pi^2}{M^2} \right)^i \omega_i(t), \quad (128)$$

one is able to express the result as the determinant

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = -B_{N,E} \det \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{N,E} & \mathbf{U}_E(\tau_M) \\ {}^t \mathbf{U}_E(1 - \tau_M) & 0 \end{pmatrix}, \quad (129a)$$

or as the matrix product

$$P_{N,E}(M, \tau_M) = B_{N,E} \det[\mathbf{D}_{N,E}] {}^t \mathbf{U}_E(1 - \tau_M) \mathbf{D}_{N,E}^{-1} \mathbf{U}_E(\tau_M). \quad (129b)$$

The behavior of the marginal distribution  $P_{N,E}(\tau_M)$  when  $\tau_M \rightarrow 0$  can be obtained as explained in Sec. II G for  $N=2$

vicious excursions. The leading behavior, when  $\tau_M \rightarrow 0$ , is given by

$$P_{N,E}(\tau_M) \sim e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\tau_M}} \sqrt{\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}}. \quad (130)$$

However, the algebraic correction to this leading behavior is hard to evaluate.

#### IV. NUMERICAL SIMULATIONS

In this section we present the results of our numerical simulations of the distribution  $P_{N,B/E}(\tau_M)$  both for the cases of bridges and excursions. To generate numerically such watermelon configurations we exploit the connection between these vicious walkers problems and Dyson's BM, which we first recall.

##### A. Relationship with Dyson's Brownian motion

To make the connection between the vicious walkers problem and Dyson's BM, we consider the propagator of the  $N$  vicious walkers,

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) \equiv \mathcal{P}_N(v_1, \dots, v_N, t_2 | u_1, \dots, u_N, t_1), \quad (131)$$

which is the probability that the process reaches the configuration  $x_1(t_2) = v_1, \dots, x_N(t_2) = v_N$  at time  $t_2$  given that  $x_1(t_1) = u_1, \dots, x_N(t_1) = u_N$  at time  $t_1$ : This is thus a conditional probability. This propagator satisfies the Fokker-Planck equation,

$$\frac{\partial}{\partial t_2} \mathcal{P}_N(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \mathcal{P}_N(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1), \quad (132)$$

together with the initial condition,

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{v}, t_2 = t_1 | \mathbf{u}, t_1) = \delta^{(N)}(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad (133)$$

and the noncrossing condition, which is specific to this problem,

$$\mathcal{P}_N(\mathbf{v}, t_2 | \mathbf{u}, t_1) = 0, \text{ if } v_i = v_j, \forall (t_1, t_2). \quad (134)$$

On the other hand, let us focus on Dyson's BM. For this purpose we consider random matrices whose elements are time dependent and are themselves BMs. For instance, for random matrices from GUE, that is, with  $\beta = 2$ , we consider random Hermitian matrices  $H \equiv H(t)$ , of size  $N \times N$ , which elements  $H_{mn}(t)$  are given by

$$H_{mn}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{mn}(t) + i \tilde{b}_{mn}(t)), & m < n, \\ b_{mm}(t), & m = n, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{nm}(t) - i \tilde{b}_{nm}(t)), & m > n, \end{cases} \quad (135)$$

where  $b_{mn}(t)$  and  $\tilde{b}_{mn}(t)$  are independent BMs (with a diffusion constant  $D = 1/2$ ). We denote  $\lambda_1(t) < \lambda_2(t) < \dots < \lambda_N(t)$  the  $N$  eigenvalues of  $H(t)$  (135) [or more generally of a matrix belonging to a  $\beta$  ensemble with  $\beta = 1, 2, 4$  which is constructed as in Eq. (135) with the appropriate symmetry]. One can then show that the  $\lambda_i$ 's obey the following equations of motion (which define Dyson's BM) [41,42]:

$$\frac{d\lambda_i(t)}{dt} = \frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{\lambda_i(t) - \lambda_j(t)} + \eta_i(t), \quad (136)$$

where  $\eta_i$ 's are independent Gaussian white noises,  $\langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t - t')$ . Let  $\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) \equiv \mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\lambda_1, \dots, \lambda_N, t | \mu_1, \dots, \mu_N, t = 0)$  be the propagator of this Dyson's BM (136). It satisfies the Fokker-Planck equation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} \\ &- \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left[ \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} \mathcal{P}_{\text{Dyson}} \right]. \end{aligned} \quad (137)$$

Of course, one has also here  $\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) = 0$  if  $\lambda_i = \lambda_j$ , for any time  $t$  and from Eq. (137) one actually obtains

$$\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) \sim (\lambda_j - \lambda_i)^\beta, \lambda_i \rightarrow \lambda_j. \quad (138)$$

This Fokker-Planck equation can be transformed into a Schrödinger equation by applying the standard transformation [75]:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) &= \frac{\exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log(\lambda_j - \lambda_i)\right]}{\exp\left[\frac{\beta}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log(\mu_j - \mu_i)\right]} \\ &\times \mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0), \end{aligned} \quad (139)$$

where  $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0)$  is such that

$$\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t = 0 | \boldsymbol{\mu}, 0) = \delta^{(N)}(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\mu}). \quad (140)$$

On the other hand, given Eqs. (138) and (139), one has

$$\mathcal{W}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) \sim (\lambda_j - \lambda_i)^{\beta/2}, \lambda_i \rightarrow \lambda_j. \quad (141)$$

From Eqs. (137) and (139), one obtains that  $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}$  satisfies the following Schrödinger equation:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_{\text{Dyson}} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} \mathcal{W}_{\text{Dyson}} \\ &- \frac{\beta}{8} (\beta - 2) \sum_{i=1}^N \sum_{1 \leq j \neq i \leq N} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)^2} \mathcal{W}_{\text{Dyson}}. \end{aligned} \quad (142)$$

Hence, for a generic value of  $\beta$ , (142) is the Schrödinger equation associated with a Calogero-Sutherland Hamiltonian (on an infinite line) [76,77]. However, for the special value  $\beta = 2$ , the strength of the interaction vanishes exactly and in that case the equation satisfied by  $\mathcal{W}_{\text{Dyson}}$  [Eqs. (138), (140), and (142)] is identical to the one satisfied by the propagator in the vicious walkers problem [Eqs. (132)–(134)]: In that case, Eq. (142) corresponds to the Schrödinger equation for free fermions. In other words, for the special value  $\beta = 2$  there exists a simple relation between vicious walkers and Dyson BM which can be simply written as

$$\mathcal{P}_{\text{Dyson}}(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0) = \frac{\prod_{i < j} (\lambda_j - \lambda_i)}{\prod_{i < j} (\mu_j - \mu_i)} \mathcal{P}_N(\boldsymbol{\lambda}, t | \boldsymbol{\mu}, 0). \quad (143)$$

In particular, for watermelons without wall on the unit time interval, for which the initial and final positions coincide, this relation (143) tells us that this process is identical to

Dyson's BM where the elements of the matrices are themselves Brownian bridges, that is,  $b_{ij} \rightarrow B_{ij}$ ,  $\tilde{b}_{ij} \rightarrow \tilde{B}_{ij}$  in Eq. (135) such that  $B_{ij}(0) = B_{ij}(1) = 0$  and  $\tilde{B}_{ij}(0) = \tilde{B}_{ij}(1) = 0$ . This then makes it possible to generate easily watermelons because one can generate a Brownian bridge  $B_{ij}(t)$  on the interval  $[0,1]$  from a standard BM  $b_{ij}(t)$  via the relation  $B_{ij}(t) = b_{ij}(t) - t b_{ij}(1)$ .

For nonintersecting excursions, one can show that the dynamics corresponds to Dyson's BM associated with random symplectic and Hermitian matrices, as explained in Ref. [29].

### B. Numerical results

To sample nonintersecting Brownian bridges we use the aforementioned equivalence to Dyson's BM. We consider the discrete-time version of the matrix in Eq. (135) at step  $0 \leq k \leq T$ :

$$H_{i,j}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}[B_{ij}(k) + iB_{ij}(k)] & 1 \leq i < j \leq N, \\ B_{ii}(k) & i = j, 1 \leq i \leq N, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[B_{ij}(k) - iB_{ij}(k)] & 1 \leq i < j \leq N, \end{cases} \quad (144)$$

where  $B_{ij}(k)$  are independent discrete-time Brownian bridges. They are constructed from ordinary discrete-time and continuous space random walks  $b_{ij}(k)$  where each jump is drawn from a Gaussian distribution. The aforementioned relation, to construct Brownian bridges, reads in discrete time  $B_{ij}(k) = b_{ij}(k) - (k/T)b_{ij}(T)$ .

Diagonalizing the matrix  $H_{i,j}(k)$  at each step  $k$  gives the ordered ensemble of  $N$  distinct eigenvalues  $\lambda_1(k) < \lambda_2(k) < \dots < \lambda_N(k)$ , which is equivalent to a sample of nonintersecting Brownian bridges [see Eq. (143)]. For each sample, we keep in memory the maximal value of  $\lambda_N(k)$ , and the step time  $k_M$  at which  $\lambda_N(k_M) = \max_{0 \leq k \leq T} \lambda_N(k)$ . The plots shown here are obtained by making the histogram of the rescaled time  $k_M/T$  (with a bin of size 8 to smoothen the curve), with  $T = 256$  steps averaged over  $10^6$  samples, for  $N = 2, 3, \dots, 16$ . For

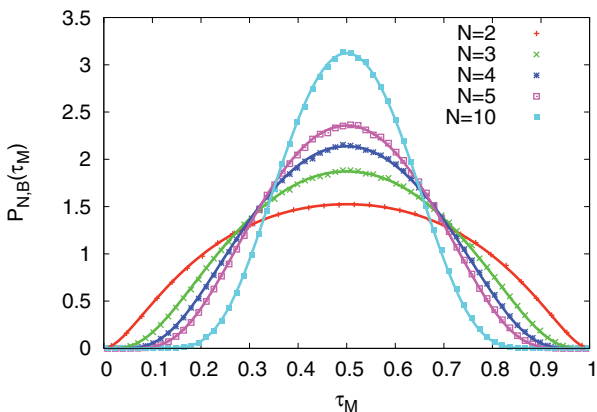


FIG. 10. (Color online) Plots of the distribution  $P_{N,B}(\tau_M)$  of the time  $\tau_M$  to reach the maximum for  $N = 2, 3, 4, 5, 10$  nonintersecting Brownian bridges. The dots correspond to our numerical data while the solid lines correspond to our analytical predictions. There is no fitting parameter.

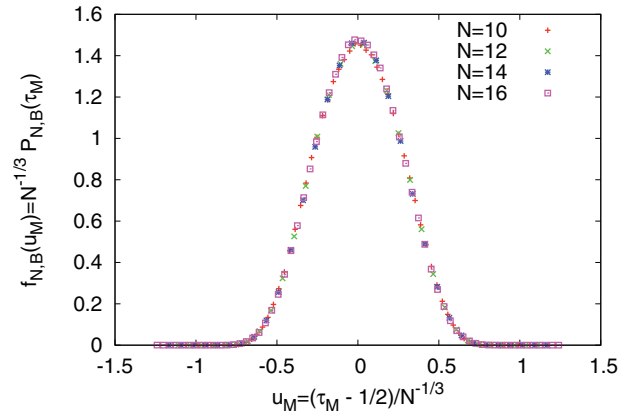


FIG. 11. (Color online) Scaling form  $f_{N,B}(u_M)$  of the distribution  $P_{N,B}(\tau_M)$  with  $N = 10, 12, 14, 16$ . The  $x$  axis is the rescaled time  $u_M = (\tau_M - \frac{1}{2})N^{1/3}$ , and the  $y$  axis is the rescaled distribution  $f_{N,B}(u_M) = N^{-1/3} P_{N,B}(\frac{1}{2} + u_M N^{-1/3})$ .

Brownian excursions, one has to use another symmetry for the matrix, which is explained in Ref. [29].

First we present the comparison between our exact result for Brownian bridges and numerical simulations for  $N = 2, 3, 4, 5, 10$ . The agreement between our numerical results and our exact analytical formula is perfect (see Fig. 10). Then, anticipating the application of our results to growing interfaces, we show a plot of the rescaled distribution as a function of the rescaled time  $u_M = (\tau_M - 1/2)/N^{-1/3}$ . Despite the fact that this scaling requires in principle that  $N \gg 1$ , one sees that the rescaled distributions for moderate values of  $N = 10, 12, 14, 16$  fall on a single master curve (see Fig. 11). However, given the relatively narrow range of  $N$  explored in these simulations, one cannot be sure that the asymptotic, large  $N$ , behavior is reached.

To compare our analytical results for  $N$  watermelons to growing interfaces models and the DPRM, we have simulated both the PNG model and a discrete model of DPRM on a lattice. To sample the PNG model, we have applied the rules that were discussed before (see Fig. 1) where the time interval is discretized. In particular, we use a discretization of the nucleation process: At each time step, a nucleation occurs at site  $x$  such that  $|x| < t$  with a small probability  $p$ , whose value is chosen such that one recovers a uniform density of nucleation events  $\rho = 2$  in the continuum limit. The interface evolves during a time  $T$ . We compute the distribution of the position  $X_M$  of the maximal height of the droplet [see Fig. 2(a)], averaged over  $10^5$  samples. In Fig. 12 we have plotted the distribution of the rescaled position  $u_M = X_M/T^{2/3}$  for  $T = 64$  and  $T = 90$  (both of them being statistically independent): The collapse of these data on a single master curve is consistent with the expected KPZ scaling in  $T^{2/3}$ .

On the other hand, we have simulated a directed polymer model in  $1 + 1$  dimensions as depicted in Fig. 3(a), where on each site, there is a random energy variable, with Gaussian fluctuations. We find the optimal path of length  $L$ , which is the polymer with minimal energy, with one free end point. We compute the distribution of the position  $X_M$  of this end point, averaged over  $10^5$  samples. In Fig. 12 we

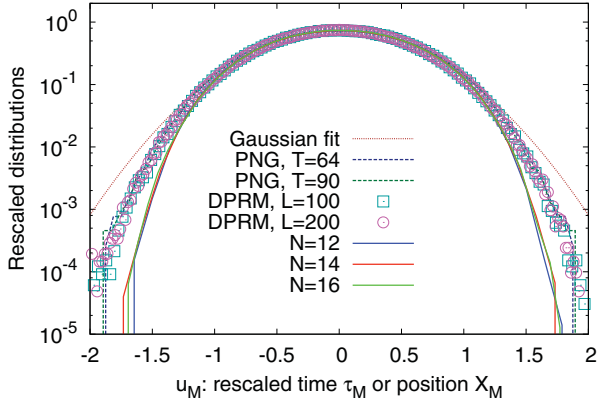


FIG. 12. (Color online) Distribution of the rescaled time (respectively position)  $u_M$  for  $N$  vicious Bridges (respectively for PNG and DPRM models; see Fig. 2) on a log-lin plot. The dashed lines correspond to the PNG model, the symbols to the DPRM, and the solid lines to the watermelons; the dotted line is a Gaussian fit. See the text for more details.

have plotted the distribution of the rescaled position  $u_M = X_M/(aL^{2/3})$  for  $L = 100$  and  $L = 200$  (both of them being statistically independent): The collapse of these data, for different  $L$ , on a single master curve is consistent with the expected KPZ scaling in  $L^{2/3}$ , while the value of  $a \simeq \sqrt{2}$  was adjusted such that these data coincide with the ones for the PNG.

For comparison we have plotted on this same graph, on Fig. 12, the data for the rescaled time  $u_M$  of the maximum for  $N$  nonintersecting Brownian bridges, that is, the same data as in Fig. 11 (except  $N = 10$ ), without any additional fitting parameter.

One sees that the finite  $N$  results describe quite accurately the center of the distribution, whereas there is a systematic deviation in the tails of the distribution (as expected since  $N$  is relatively small). Both data, for watermelons on the one hand and for the PNG on the other hand, suffer respectively from finite  $N$  and finite  $T$  effects. Our data for the PNG seem to indicate that when  $T$  increases, the probability weight is slightly displaced from the tails to the center of the (rescaled) distribution: This suggests that the limiting distribution is not Gaussian (the best Gaussian fit is plotted with a dotted line in Fig. 12). This convergence to the asymptotic distribution is, however, quite slow.

## V. CONCLUSION

In conclusion, we have presented a detailed derivation of the analytic computation of the distribution of the time at which the maximal height of  $N$  vicious walkers is reached. Our analytic approach is based on a path integral approach for free fermions, which incorporates in a rather physical way the noncolliding condition. We have considered three different types of vicious walkers configurations: nonintersecting free BMs, “stars” configuration, for  $N = 2$ ; nonintersecting Brownian bridges, “watermelon” configurations, for any number  $N$  of vicious walkers; and finally nonintersecting Brownian excursions, “watermelons with a wall,” also for any  $N$ . We have also checked our results using numerical simulations of Dyson’s

Brownian motion, which uses the deep connection between vicious walkers and RMT, which we have recalled in detail.

Thanks to the connection between vicious walkers and the Airy process (7), our results yield, in the large  $N$  limit, results for the distribution of  $X_M$ , the position of the maximal height of a curved growing interface in the KPZ universality class [Fig. 2(a)] or the transverse coordinate of the end point of the optimal directed polymer [Fig. 2(b)]. We have shown that our analytical results for finite  $N \sim 15$ , correctly rescaled, are in good agreement with our numerical data for the PNG model and DPRM on the square lattice. Performing the large  $N$  asymptotic analysis of our formula [Eqs. (93) and (123)] remains a formidable challenge, which will hopefully motivate further study of this problem.

## ACKNOWLEDGMENTS

We thank the Centro Atomico in Bariloche, where part of this article was written, for hospitality.

## APPENDIX A: INTEGRATION OVER ORDERED VARIABLES

In the main text, we have to sum over realizations with the constraint  $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N$ . Here we study how integrals may be simplified by the symmetry of the integrand.

### 1. $N = 2$ , two variables

Consider a box  $[a, b]$  in one dimension, and a function of two variables  $f(x_1, x_2)$ . In the main text, we want to compute ordered integrals such as

$$\int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2). \quad (\text{A1})$$

It is usually easier to compute the integral over the whole domain; that is to say

$$\int_a^b dx_2 \int_a^b dx_1 f(x_1, x_2). \quad (\text{A2})$$

Here we make a link between those two quantities, when  $f$  is symmetric in the exchange of  $x_1$  and  $x_2$  ( $f(x_2, x_1) = f(x_1, x_2)$ ). Let us start from Eq. (A2) with a symmetric function  $f$

$$\begin{aligned} & \int_a^b dx_2 \int_a^b dx_1 f(x_1, x_2) \\ &= \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_2 \int_{x_2}^b dx_1 f(x_1, x_2) \\ &= \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_1, x_2) \\ &= \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2) + \int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 f(x_2, x_1) \\ &= 2 \int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

From the second to the third line we use triangular integration  $\{a < x_2 < b, x_2 < x_1 < b\} = \{a < x_1 < b, a < x_2 < x_1\}$  in

the second term. From the third line to the fourth, we relabeled the variables in the second term. In this operation if  $f$  was antisymmetric, we would have a minus sign, and hence a cancellation of the two terms. The conclusion for two variables is that if  $f$  is antisymmetric, the integration over the whole domain is zero, but if  $f$  is symmetric in the exchange of the two variables, we have the useful formula

$$\int_a^b dx_2 \int_a^{x_2} dx_1 f(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_a^b dx_2 \int_a^b dx_1 f(x_1, x_2). \tag{A4}$$

**$N$  variables**

The previous result can be extended for  $N$  variables, and the result is, for  $f(x_1, \dots, x_N)$ , symmetric in the exchange of any of two of its arguments,

$$\int_{\text{ord}} d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) = 2^{-\frac{N(N-1)}{2}} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}), \tag{A5}$$

with  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$  and an integration on the domain  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_N < b$  in the left-hand side, and an integration over the whole domain  $a < x_i < b$  for  $1 \leq i \leq N$  in the right-hand side.

The proof is done by applying iteratively the formula (A4) first to the  $N - 1$  couples  $(x_N, x_{N-1}), (x_N, x_{N-2}), \dots, (x_N, x_1)$  changing the upper limit of integrations from  $b$  to  $x_N$ . This operation gives a factor of 2 for each couple so that

$$\begin{aligned} & \int_a^b dx_N \int_a^b dx_{N-1} \dots \int_a^b dx_2 \int_a^b dx_1 f(\mathbf{x}) \\ &= 2^{N-1} \int_a^b dx_N \int_a^{x_N} dx_{N-1} \dots \int_a^{x_N} dx_2 \int_a^{x_N} dx_1 f(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{A6}$$

Then one repeats this procedure for the  $N - 2$  couples  $(x_{N-1}, x_{N-2})$  to  $(x_{N-1}, x_1)$ , which gives a factor  $2^{N-2}$ , and continues until step  $k$  with the  $N - k$  couples  $(x_{N-k+1}, x_{N-k})$  to  $(x_{N-k+1}, x_1)$  to have

$$\begin{aligned} & \int_a^b dx_N \int_a^b dx_{N-1} \dots \int_a^b dx_2 \int_a^b dx_1 f(\mathbf{x}) \\ &= 2^{N-1} 2^{N-2} \dots 2^{N-k} \\ & \quad \times \underbrace{\int_a^b dx_N \int_a^{x_N} dx_{N-1} \dots \int_a^{x_{N-k+1}} dx_{N-k}}_{\text{ordered}} \\ & \quad \times \underbrace{\int_a^{x_{N-k+1}} dx_{N-k-1} \dots \int_a^{x_{N-k+1}} dx_1 f(\mathbf{x})}_{\text{unordered}}. \end{aligned} \tag{A7}$$

Doing so until  $k = N - 1$  one obtains the result (A5).

**APPENDIX B: CAUCHY-BINET IDENTITY**

**1. Continuous version**

In the main text, we are confronted with integrals of two determinants that take the form

$$I^{(N)} = \int d\mathbf{x} \det_{1 \leq i, j \leq N} [f_i(x_j)] \det_{1 \leq k, l \leq N} [g_k(x_l)], \tag{B1}$$

where  $d\mathbf{x} = \prod_{i=1}^N dx_i$ ,  $f_i, g_i$ ,  $1 \leq i \leq N$  are functions of one variable, and each variable  $x_i$  has the same domain of integration (in the main text we usually integrate over the momenta  $k_i$  from 0 to  $+\infty$ ). We have

$$\begin{aligned} I^{(N)} &= \int \prod_{i=1}^N dx_i \left[ \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N f_i(x_{\sigma(i)}) \right] \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma' \in S_N} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^N g_k(x_{\sigma'(k)}) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N f_i(x_{\sigma(i)}) \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma' \in S_N} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^N g_k(x_{\sigma'(k)}) \right]. \end{aligned} \tag{B2}$$

$S_N$  is the symmetric group,  $\varepsilon(\sigma)$  is the signature of the permutation  $\sigma \in S_N$ . Now we make the change of variables  $x'_i = x_{\sigma(i)}$ . That is,  $x_j = x'_{\sigma^{-1}(j)}$  and the Jacobian is unity. So we have

$$\begin{aligned} I^{(N)} &= \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^N dx'_i \prod_{i=1}^N f_i(x'_i) \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma' \in S_N} \varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^N g_k(x'_{\sigma^{-1}[\sigma'(k)]}) \right]. \end{aligned} \tag{B3}$$

$S_N$  is a group, so it exists  $\sigma'' \in S_N$  so that  $\sigma'' = \sigma^{(-1)} \circ \sigma'$ , and  $\varepsilon(\sigma'') = \varepsilon(\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ . Moreover,  $\sum_{\sigma \in S_N} = \sum_{\sigma^{-1} \circ \sigma \in S_N} = \sum_{\sigma'' \in S_N}$ . Getting back to the  $x_i$  variables we have

$$\begin{aligned} I^{(N)} &= \sum_{\sigma \in S_N} \varepsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N f_i(x_i) \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma' \in S_N} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=k}^N g_k(x_{\sigma^{-1}(\sigma'(k))}) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N f_i(x_i) \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma' \in S_N} \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma') \prod_{k=1}^N g_k(x_{\sigma^{-1}[\sigma'(k)]}) \right] \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N f_i(x_i) \\ & \quad \times \left[ \sum_{\sigma'' \in S_N} \varepsilon(\sigma'') \prod_{k=1}^N g_k(x_{\sigma''(k)}) \right]. \end{aligned} \tag{B4}$$



In the last line, the term in brackets is simply the determinant  $\det_{1 \leq k, l \leq N} [g_k(x_l)]$ . The permutation  $\sigma$  does not appear anymore, so we have  $\sum_{\sigma \in S_N} 1 = \text{Card}(S_N) = N!$ . Hence,

$$I^{(N)} = N! \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{i=1}^N f_i(x_i) \det_{1 \leq k, l \leq N} [g_k(x_l)]. \quad (\text{B5})$$

At this stage, the basic result is that we have expressed the first determinant only as a product of the diagonal terms. This is used in the main text.

To go further we use the fact that the determinant of one matrix is the same as the determinant of its transpose:

$$\begin{aligned} I^{(N)} &= N! \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{k=1}^N f_k(x_k) \\ &\quad \times \left[ \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^N g_{\sigma(k)}(x_k) \right] \\ &= N! \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \int \prod_{i=1}^N dx_i \prod_{k=1}^N [f_k(x_k) g_{\sigma(k)}(x_k)] \\ &= N! \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{k=1}^N \left\{ \int dx f_k(x) g_{\sigma(k)}(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

From the second to the third line, we factorized the integrals, and we wrote  $x = x_k$  for each  $k$ . We recognize the determinant of the matrix whose elements indexed by  $(i, j)$  are given by an integral of the product  $f_i \times g_j$ , yielding the so-called Cauchy-Binet identity:

$$\begin{aligned} &\int dx \det_{1 \leq i, j \leq N} [f_i(x_j)] \det_{1 \leq k, l \leq N} [g_k(x_l)] \\ &= N! \det_{1 \leq i, j \leq N} \left\{ \int dx f_i(x) g_j(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Moreover, one can easily deduce from Eq. (B7) the following relation, valid for any integrable function  $h(x)$ :

$$\begin{aligned} &\int dx \prod_{i=1}^N h(x_i) \left( \det_{1 \leq i, j \leq p} f_i(x_j) \right) \left( \det_{1 \leq i, j \leq p} g_i(x_j) \right) \\ &= N! \det_{1 \leq i, j \leq N} \left\{ \int dx h(x) f_i(x) g_j(x) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

This relation is used in the main text.

## 2. Discrete version

Here we consider the following multiple sum:

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_N} \det_{1 \leq i, j \leq N} [f_i(n_j)] \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_i(n_j)] \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_N} \prod_{i=1}^N f_i(n_{\sigma(i)}) \\ &\quad \times \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_{n_i}(x_j)]. \end{aligned} \quad (\text{B9})$$

Changing the indices of the sums  $m_i = n_{\sigma(i)}$  or  $n_k = m_{\sigma^{-1}(k)}$ , one gets

$$\begin{aligned} I_N &= \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sum_{m_{\sigma^{-1}(1)}} \sum_{m_{\sigma^{-1}(2)}} \dots \sum_{m_{\sigma^{-1}(p)}} \prod_{i=1}^N f_i(m_i) \\ &\quad \times \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_i(m_{\sigma^{-1}(i)})] \\ &= \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_N} \prod_{i=1}^N f_{m_i}(x_i) \\ &\quad \times \left( \epsilon(\sigma) \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_i(m_j)] \right), \end{aligned} \quad (\text{B10})$$

where we rearranged the columns in the remaining determinant in the ‘‘natural’’ order, thus factorizing the signature of the permutation  $\sigma$ . Hence, there is a sum over the permutations  $\sigma \in S_N$  of  $\epsilon^2(\sigma)$ , giving the cardinal  $N!$ . We obtain as in the continuous case that the first determinant is written as the product of its diagonal terms with a factor  $N!$ :

$$\begin{aligned} I_N &= N! \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_N} \prod_{i=1}^N f_i(m_i) \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_i(m_j)] \\ &= N! \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_N} \prod_{i=1}^N f_{m_i}(x_i) \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N g_{\sigma(i)}(m_i) \\ &= N! \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \sum_{m_1} \sum_{m_2} \dots \sum_{m_N} \prod_{i=1}^N [f_i(m_i) g_{\sigma(i)}(m_i)]. \end{aligned} \quad (\text{B11})$$

Factorizing the sums, one gets

$$\begin{aligned} I_N &= N! \sum_{\sigma \in S_N} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^N \left( \sum_m f_i(m) g_{\sigma(i)}(m) \right) \\ &= N! \det_{1 \leq i, j \leq N} \left( \sum_m f_i(m) g_j(m) \right). \end{aligned} \quad (\text{B12})$$

In the same way as in the continuous case, if one considers

$$\begin{aligned} J_N &= \sum_{n_1} \sum_{n_2} \dots \sum_{n_N} \prod_{i=1}^N h(n_i) \\ &\quad \times \det_{1 \leq i, j \leq N} [f_i(n_j)] \det_{1 \leq i, j \leq N} [g_i(n_j)], \end{aligned} \quad (\text{B13})$$

one finally obtains

$$J_N = N! \det_{1 \leq i, j \leq N} \left( \sum_m h(m) f_i(m) g_j(m) \right). \quad (\text{B14})$$

## APPENDIX C: NORMALIZATION CONSTANT

In this section, we compute the normalization constant of the joint distributions  $P_{N,B}(M, \tau_M)$  and  $P_{N,E}(M, \tau_M)$  for nonintersecting bridges and excursions, respectively.

### 1. Nonintersecting Brownian bridges

To compute the amplitude  $A_{N,B}$  in Eq. (95) we use the fact that the integration of  $P_{N,B}(M, \tau_M)$  in Eq. (93), that is,

$\int_0^1 P_{N,B}(M, \tau_M) d\tau_M$ , must yield back the PDF of  $M$ , which was computed in Ref. [30]. Indeed, in Ref. [30] it was shown that

$$F_{N,B}(M) = \text{Prob}\left[\max_{0 \leq \tau \leq 1} x_N(\tau) \leq M\right] \quad (C1)$$

$$= \frac{a_{N,B}}{M^{N^2}} \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} [\Theta_N(\mathbf{q})]^2, \quad (C2)$$

where the amplitude  $a_{N,B}$  can be computed using a Selberg integral [30]

$$a_{N,B} = \frac{2^{2N}}{(2\pi)^{N/2} \prod_{j=1}^N j!}. \quad (C3)$$

The PDF of the maximum,  $F'_{N,B}(M) = \partial_M F_{N,B}(M)$  is thus given by

$$F'_{N,B}(M) = -N^2 \frac{a_{N,B}}{M^{N^2+1}} \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} \Theta_N(\mathbf{q})^2 \quad (C4)$$

$$+ \frac{N a_{N,B}}{M^{N^2+1}} \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} q_N^{j+l} \cos\left(q_N - j\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\times \cos\left(q_N - l\frac{\pi}{2}\right) \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)], \quad (C5)$$

where, in the last two lines, we have expanded both determinants in minors with respect to the last column [we recall that  $\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)$  denotes the minor  $(j, N)$  of the matrix  $\Theta_N$ , obtained by removing its  $j$ th line and its  $N$ th column]. Note that these minors do not depend on  $q_N$ . This suggests to consider, in the last two lines of Eq. (C4), only the integral over the variable  $q_N$ , where we perform an integration by part. This yields

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dq_N \frac{q_N}{M^2} e^{-\frac{q_N^2}{2M^2}} q_N^{j+l-1} \cos\left(q_N - j\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(q_N - l\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (j+l-1) \int_0^\infty dq_N q_N^{j+l-2} \cos\left(q_N - j\frac{\pi}{2}\right) \\ & \times \cos\left(q_N - l\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{q_N^2}{2M^2}} + \int_0^\infty dq_N q_N^{l+j-1} e^{-\frac{q_N^2}{2M^2}} \\ & \times \partial_{q_N} \left[ \cos\left(q_N - j\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(q_N - l\frac{\pi}{2}\right) \right]. \quad (C6) \end{aligned}$$

Inserting this result of the integration by part (C6) in Eq. (C4) and using the identity (which we have explicitly checked for  $N = 2, 3, 4, 5$  but can only conjecture for any integer  $N > 5$ )

$$(N^2 + N) \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} [\Theta_N(\mathbf{q})]^2 = 2N \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} \begin{vmatrix} \sin(q_1) & \cdots & \sin(q_N) \\ q_1 \cos(q_1) & \cdots & q_N \cos(q_N) \\ q_1^2 \sin(q_1) & \cdots & q_N^2 \sin(q_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1^{N-1} \cos\left(q_1 - N\frac{\pi}{2}\right) & \cdots & q_N^{N-1} \cos\left(q_N - N\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix} \\ \times \begin{vmatrix} \sin(q_1) & \cdots & \sin(q_N) \\ q_1 \cos(q_1) & \cdots & 2q_N \cos(q_N) \\ q_1^2 \sin(q_1) & \cdots & 3q_N^2 \cos(q_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_1^{N-1} \cos\left(q_1 - N\frac{\pi}{2}\right) & \cdots & N q_N^{N-1} \cos\left(q_N - N\frac{\pi}{2}\right) \end{vmatrix},$$

one obtains finally

$$\begin{aligned} F'_{N,B}(M) &= \frac{-N a_{N,B}}{M^{N^2+1}} \int_0^\infty d\mathbf{q} e^{-\frac{q^2}{2M^2}} \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} q_N^{j+l-1} \\ & \times \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)] \\ & \times \sin\left(2q_N - (l+j)\frac{\pi}{2}\right). \quad (C7) \end{aligned}$$

On the other hand, from the definition of  $P_{N,B}(M, \tau_M)$  given in Eq. (93) one has

$$\int_0^1 P_{N,B}(M, \tau_M) d\tau_M = F'_{N,B}(M), \quad (C8)$$

with

$$\begin{aligned} P_{N,B}(M, \tau_M) &= \frac{A_{N,B}}{M^{N^2+3}} \int_0^\infty dq_1, \dots, dq_{N-1} e^{-\frac{\sum_{k=1}^{N-1} q_k^2}{2M^2}} \\ & \times \Upsilon_N(\{q_i\} | M, \tau_M) \Upsilon_N(\{q_i\} | M, 1 - \tau_M). \quad (C9) \end{aligned}$$

To compute this integral over  $\tau_M$  (C8) we compute instead

$$\begin{aligned} P(M, T) &= \frac{A_{N,B}}{M^{N^2+3}} \int_0^T d\tau_M \int_0^\infty dq_1, \dots, dq_{N-1} e^{-\frac{\sum_{k=1}^{N-1} q_k^2}{2M^2}} \\ & \times \Upsilon_N(\{q_i\} | M, \tau_M) \Upsilon_N(\{q_i\} | M, T - \tau_M), \quad (C10) \end{aligned}$$

and clearly

$$\int_0^1 P_{N,B}(M, \tau_M) d\tau_M = P(M, T = 1). \quad (C11)$$

The structure of  $P(M, T)$  in Eq. (C10) suggests to compute its Laplace transform with respect to  $T$

$$\begin{aligned} \hat{P}(M, s) &= \int_0^\infty P(M, T) e^{-sT} dT \\ &= \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0, \epsilon_2 \rightarrow 0} \frac{A_{N,B}}{M^{N^2+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^\infty dq_i e^{-\frac{q_i^2}{2M^2}} e^{-\epsilon_1 |q_N| - \epsilon_2 |q'_N|} \\ &\quad \times \int_0^\infty dq_N \int_0^\infty dq'_N q_N q'_N \frac{\Theta_N(q_1, \dots, q_N)}{\frac{q_N^2}{2M^2} + s} \\ &\quad \times \frac{\Theta_N(q_1, \dots, q'_N)}{\frac{q'_N{}^2}{2M^2} + s}, \end{aligned} \quad (\text{C12})$$

where we have regularized the integrals over  $q_N$  and  $q'_N$  with the help of this exponential term  $e^{-\epsilon_1 |q_N| - \epsilon_2 |q'_N|}$ . The next step is to expand the determinants in Eq. (C12) with respect to their last column. This yields

$$\begin{aligned} \hat{P}(M, s) &= \frac{4A_{N,B}}{M^{N^2-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^\infty dq_i e^{-\frac{q_i^2}{2M^2}} \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} \\ &\quad \times \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)] g_j(s) g_l(s), \end{aligned} \quad (\text{C13})$$

where

$$g_j(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty dq \frac{q^j \cos(q - \frac{j\pi}{2})}{q^2 + 2M^2 s} e^{-\epsilon |q|}. \quad (\text{C14})$$

This integral (C14) can be easily evaluated using residues; this yields

$$g_j(s) = \frac{\pi}{2} (M\sqrt{2s})^{j-1} e^{-M\sqrt{2s}}. \quad (\text{C15})$$

Using this result (C15) in the expression above (C13), one obtains

$$\begin{aligned} \hat{P}(M, s) &= \frac{\pi^2 A_{N,B}}{M^{N^2-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^\infty dq_i e^{-\frac{q_i^2}{2M^2}} \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} \\ &\quad \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)] (M\sqrt{2s})^{j+l-2} e^{-2M\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (\text{C16})$$

Using the results shown above [Eqs. (C14) and (C15)] we can write  $\hat{P}(M, s)$  as

$$\begin{aligned} \hat{P}(M, s) &= -\frac{\pi A_{N,B}}{M^{N^2+1}} \prod_{i=1}^{N-1} \int_0^\infty dq_i e^{-\frac{q_i^2}{2M^2}} \\ &\quad \times \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)] \\ &\quad \times \int_0^\infty dq q^{j+l-1} \frac{\sin[2q - (j+l)\frac{\pi}{2}]}{s + \frac{q^2}{2M^2}}. \end{aligned} \quad (\text{C17})$$

Under this form (C17) it is easy to invert the Laplace transform to obtain  $P(M, T)$ , and finally one obtains

$$\begin{aligned} &\int_0^1 P_{N,B}(M, \tau_M) d\tau_M \\ &= -\frac{\pi A_{N,B}}{M^{N^2+1}} \int_0^\infty dq e^{-\frac{q^2}{2M^2}} \sum_{j,l=1}^N (-1)^{j+l} q_N^{j+l-1} \\ &\quad \times \det[\mathbf{M}_{j,N}(\Theta_N)] \det[\mathbf{M}_{l,N}(\Theta_N)] \sin\left(2q_N - (l+j)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{C18})$$

Finally, using the identity (C8) together with the explicit expressions (C7) and (C18), one obtains

$$A_{N,B} = \frac{1}{\pi} N a_{N,B} = \frac{2^{2N-N/2} N}{\pi^{N/2+1} \prod_{j=1}^N j!}, \quad (\text{C19})$$

as given in the text in Eq. (95).

## 2. Nonintersecting Brownian excursions

In this section we compute the constant  $A_{N,E}$  of the formula (123) with the same method. Let us recall the joint distribution of  $M$  and  $\tau_M$  for the  $N$  vicious excursions,

$$\begin{aligned} P_{N,E}(M, \tau_M) &= \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{n_i=1}^\infty n_i^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_i^2} \right\} \\ &\quad \times \Omega_N(\{n_i\} | M, \tau_M) \Omega_N(\{n_i\} | M, 1 - \tau_M), \end{aligned} \quad (\text{C20})$$

and where

$$\Omega_N(\{n_i\} | M, t) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k k^2 \Delta_N(\{n_i^2\}, k^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} t k^2}, \quad (\text{C21})$$

with the same notation as in the main text  $\{n_i\} = (n_1, \dots, n_{N-1})$  and  $\{n_i^2\} = (n_1^2, \dots, n_{N-1}^2)$ . The normalization of this joint PDF is

$$\int_0^\infty dM \int_0^1 d\tau_M P_{N,E}(M, \tau_M) = 1. \quad (\text{C22})$$

As in the case of bridges we can use the result of Ref. [30] of the cumulative distribution of the maximum of  $N$  vicious excursions,

$$\begin{aligned} F_{N,E}(M) &= \frac{a_{N,E}}{M^{2N^2+N}} \\ &\quad \times \sum_{n_1=1}^\infty \dots \sum_{n_N=1}^\infty \left\{ \prod_{i=1}^N n_i^2 \Delta_N^2(n_1^2, \dots, n_N^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C23})$$

where  $\Delta_N^2$  is the square of the Vandermonde determinant,

$$\Delta_N(n_1^2, \dots, n_N^2) = \det_{1 \leq i, j \leq N} n_i^{2(j-1)}, \quad (\text{C24})$$

and  $a_{N,E}$  is a normalization constant obtained by imposing  $\lim_{M \rightarrow \infty} F_{N,E}(M) = 1$ :

$$a_{N,E} = \frac{\pi^{2N^2+N}}{2^{N^2-N/2} \prod_{j=0}^{N-1} \Gamma(2+j) \Gamma(\frac{3}{2}+j)}. \quad (\text{C25})$$

The derivative of the cumulative gives the PDF of the maximum

$$P_{N,E}(M) = \frac{dF_{N,E}(M)}{dM} = \frac{a_{N,E}}{M^{2N^2+N+1}} \times \sum_{n_1} \dots \sum_{n_N} \left\{ \left( -(2N^2 + N) + \frac{N\pi^2}{M^2} n_N^2 \right) \times \prod_{i=1}^N n_i^2 \Delta_N^2(n_1^2, \dots, n_N^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n^2} \right\}. \quad (\text{C26})$$

The term  $\frac{N\pi^2}{M^2} n_N^2$  in the parentheses of the second line comes from the derivative of the exponential, giving a factor  $\frac{\pi^2}{M^2} \sum_i n_i^2$  that can be simplified by the symmetry in the exchange of  $n_i$  and  $n_N$ .

Now we have to compute the marginal  $P_{N,E}(M)$  by integrating the joint PDF given by Eq. (C20) over  $\tau_M$ ,

$$P_{N,E}(M) = \int_0^1 d\tau_M P_{N,E}(M, \tau_M), \quad (\text{C27})$$

to identify our constant  $A_{N,E}$ . As in the Bridges case, we compute instead the function of  $T$ ,

$$P(M, T) = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_i^2} \right\} \times \int_0^T d\tau_M \Omega_N(\{n_i\}|M, \tau_M) \Omega_N(\{n_i\}|M, T - \tau_M), \quad (\text{C28})$$

and at the end we will recover

$$P_{N,E}(M) = P(M, T = 1). \quad (\text{C29})$$

The formula for  $P(M, T)$  is best treated with a Laplace transform, because the convolution in the second line of Eq. (C28) becomes a simple product. Taking the Laplace transform with respect to  $T$ , one has

$$\hat{P}(M, s) = \int_0^{\infty} dT e^{-sT} P(M, T) = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_i^2} \right\} \times (\hat{\Omega}_N(\{n_i\}|M, s))^2, \quad (\text{C30})$$

the Laplace transform of  $\Omega_N$  being

$$\hat{\Omega}_N(\{n_i\}|M, s) = \int_0^{\infty} dT e^{-sT} \Omega_N(\{n_i\}|M, T) = \lim_{\epsilon \rightarrow < 1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 \Delta_N(n_1^2, \dots, n_{N-1}^2, k^2)}{s + \frac{\pi^2}{2M^2} k^2}. \quad (\text{C31})$$

This  $\epsilon < 1$  has been introduced to regularize the integrand so that one can permute the integral from the Laplace transform

and the infinite sum over  $k$ . Writing the Vandermonde determinant as

$$\Delta_N(n_1^2, \dots, n_{N-1}^2, k^2) = \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2) \times \prod_{1 \leq i < j \leq N-1} (n_j^2 - n_i^2), \quad (\text{C32})$$

one can use the identity, shown below in Eq. (D1), with  $p^2 = 2M^2 s / \pi^2$  with  $s > 0$  to get

$$\tilde{\Omega}_N(\{n_i\}|M, s) = (-1)^N \sqrt{2s} \frac{M^3 \prod_{i=1}^{N-1} \left( n_i^2 + \frac{2M^2}{\pi^2} s \right)}{\pi^2 \sinh(M\sqrt{2s})} \times \prod_{1 \leq i < j \leq N-1} (n_j^2 - n_i^2). \quad (\text{C33})$$

Under this form, we are ready to take the inverse Laplace transform of  $\hat{P}(M, s)$  using the Bromwich integral:

$$P(M, T) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} ds e^{sT} \hat{P}(M, s), \quad (\text{C34})$$

where  $\gamma$  is such that the vertical line keeps all the poles of the integrand to its left. The poles in the complex plane are located in  $s = -(k^2 \pi^2) / (2M^2)$ , for  $k = 1, 2, \dots$ , on the negative real axis, so that  $\gamma = 0$  is well suited. We close the contour with a semicircle to the left. By the Jordan lemma, the integral on the semicircle when  $R \rightarrow \infty$  is zero. The residue theorem then gives

$$P(M, T) = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+3}} \prod_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{n_i=1}^{\infty} n_i^2 e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n_i^2} \right\} \times \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 M^2}{\pi^2} e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} k^2 T} \times \prod_{1 \leq i < j \leq N-1} (n_j^2 - n_i^2)^2 \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2)^2 \times \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{2M^2} k^2 T \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2k^2}{k^2 - n_i^2} \right] \right\}. \quad (\text{C35})$$

Taking  $T = 1$  and relabeling  $k = n_N$ , one obtains

$$P_{N,E}(M) = P(M, T = 1) = \frac{A_{N,E}}{M^{N(2N+1)+1}} \left( -\frac{2}{\pi^2} \right) \times \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_{N-1}=1}^{\infty} \prod_{i=1}^N n_i^2 \Delta_N^2(n_1^2, \dots, n_N^2) e^{-\frac{\pi^2}{2M^2} n^2} \times \left[ \left( \frac{3}{2} - \frac{\pi^2}{2M^2} n_N^2 \right) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2n_N^2}{n_N^2 - n_i^2} \right]. \quad (\text{C36})$$

In order to compare this formula with Eq. (C26), we need to simplify the last term in the brackets. To this end, we introduce the function  $g(\mathbf{n}) \equiv g(n_1, \dots, n_N)$ :

$$g(\mathbf{n}) = \prod_{i=1}^N n_i^2 \Delta_N^2(n_1^2, \dots, n_N^2), \quad (\text{C37})$$

which is totally symmetric under the exchange of any couple of its arguments. One has

$$\begin{aligned} & \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2n_N^2}{n_N^2 - n_i^2} \right) g(\mathbf{n}) \\ &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2(n_N^2 - n_i^2) + 2n_i^2}{n_N^2 - n_i^2} \right) g(\mathbf{n}) \\ &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \left( 2(N-1) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2n_i^2}{n_N^2 - n_i^2} \right) g(\mathbf{n}) \\ &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \left( 2(N-1) + \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2n_N^2}{n_i^2 - n_N^2} \right) g(\mathbf{n}), \quad (\text{C38}) \end{aligned}$$

where we change the role of  $n_i$  and  $n_N$  in the last line. Equating the last line with the first, one obtains

$$\sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} \left( \sum_{i=1}^{N-1} \frac{2n_N^2}{n_N^2 - n_i^2} \right) g(\mathbf{n}) = \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_N} (N-1)g(\mathbf{n}). \quad (\text{C39})$$

Inserting this identity in formula (C36), the comparison with Eq. (C26) is straightforward, and one obtains

$$\begin{aligned} A_{N,E} &= N\pi^2 a_{N,E} \\ &= \frac{N\pi^{2N^2+N+2}}{2^{N^2-N/2} \prod_{j=0}^{N-1} \Gamma(2+j)\Gamma\left(\frac{3}{2}+j\right)}, \quad (\text{C40}) \end{aligned}$$

as given in the text in Eq. (120).

#### APPENDIX D: IDENTITY

We want to show the identity

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2)}{p^2 + k^2} \\ &= (-1)^N \frac{\pi}{2} p \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (p^2 + n_i^2)}{\sinh(\pi p)}. \quad (\text{D1}) \end{aligned}$$

This is shown by induction on  $N$ : we thus first analyze the case  $N = 1$  of this identity,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2}{p^2 + k^2} = -\frac{\pi}{2} \frac{p}{\sinh(\pi p)}, \quad (\text{D2})$$

for any real  $p \neq 0$  (indeed, this has a limit for  $p = 0$  and one can extend the result for  $p = 0$ ). The first step is to separate the series in the left-hand side into two parts:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2}{p^2 + k^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 + p^2 - p^2}{p^2 + k^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \\ &\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{p^2}{p^2 + k^2}. \quad (\text{D3}) \end{aligned}$$

The first series is geometric and one has

$$\lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k = \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \left( \frac{1}{1+\epsilon} - 1 \right) = -\frac{1}{2}. \quad (\text{D4})$$

In the second, one can permute the limit with the sum because of the normal convergence

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{p^2}{p^2 + k^2} = p^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + p^2} \\ &= p^2 \frac{1}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + p^2} - \frac{1}{p^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{p^2}{k^2 + p^2} - \frac{1}{2}. \quad (\text{D5}) \end{aligned}$$

To compute the right-hand side, we consider the function on the complex plane

$$f(z) = \frac{p^2 e^{i\pi z}}{z^2 + p^2} \frac{1}{e^{i2\pi z} - 1}. \quad (\text{D6})$$

This function has simple poles in  $z = k$  with  $k \in \mathbb{Z}$  and in  $\pm ip$ . One can verify that with  $z = Re^{i\theta}$ ,

$$|zf(z)| \leq \frac{Rp^2}{2|R^2 - p^2| |\sinh(\pi R \sin \theta)|} \rightarrow_{R \rightarrow \infty} 0. \quad (\text{D7})$$

Then using the Jordan lemma, one has that the contour integral of  $f(z)$  along the infinite circle centered in  $z = 0$  is zero. Using the residue theorem, one finds

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (2i\pi) \left( -\frac{i}{2\pi} \right) \frac{p^2 e^{ik\pi}}{k^2 + p^2} \\ &\quad + (2i\pi) \frac{p^2 e^{-\pi p}}{2ip} \frac{1}{e^{-2\pi p} - 1} \\ &\quad + (2i\pi) \frac{p^2 e^{\pi p}}{-2ip} \frac{1}{e^{2\pi p} - 1} \quad (\text{D8}) \end{aligned}$$

or

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \frac{p^2}{k^2 + p^2} = \frac{\pi p}{\sinh(\pi p)}. \quad (\text{D9})$$

Inserting Eq. (D9) in Eq. (D5) and Eq. (D4) in Eq. (D3), one has

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2}{p^2 + k^2} = -\frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} \frac{\pi p}{\sinh(\pi p)} - \frac{1}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} \frac{p}{\sinh(\pi p)}, \quad (\text{D10}) \end{aligned}$$

which is the announced result for  $N = 1$ .

Let us prove the general result by induction. Consider the quantity

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 \prod_{i=1}^N (k^2 - n_i^2)}{p^2 + k^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 [k^2 + p^2 - (p^2 + n_N^2)] \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2)}{p^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k k^2 \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2) \\
&\quad - \lim_{\epsilon \rightarrow <1} (p^2 + n_N^2) \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k \frac{k^2 \prod_{i=1}^{N-1} (k^2 - n_i^2)}{p^2 + k^2}.
\end{aligned} \tag{D11}$$

With the lemma (which we show below)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow <1} \sum_{k=1}^{\infty} (-\epsilon)^k k^{2q} = 0, \quad \forall q \in \mathbb{N}^*, \tag{D12}$$

and the induction hypothesis at rank  $N$  (D1) that we use in the second term of Eq. (D11), we have proved the formula at rank  $N + 1$  which ends the induction proof of the identity (D1).

In order to prove the lemma (D12), we put  $\epsilon = e^{-x}$  with the real  $x > 0$ , and we shall take the limit  $x \rightarrow >0$ . Denoting for  $q = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$g_q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-kx} k^{2q}, \tag{D13}$$

one sees that

$$\frac{d^2}{dx^2} g_q(x) = g_{q+1}(x). \tag{D14}$$

Using the fact that  $g_0(x)$  is a simple geometric series, we apply this relation to compute  $g_1(x)$ :

$$\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{d^2}{dx^2} g_0(x) \\
&= \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{1 + e^{-x}} - 1 \right) \\
&= \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}.
\end{aligned} \tag{D15}$$

The domain of definition of  $g_1(x)$  is the positive real axis, and in this domain,  $g_1(x)$  coincides with the function defined over all the real line:

$$x \mapsto \hat{g}_1(x) = \frac{e^{-x}(e^{-x} - 1)}{(1 + e^{-x})^3}. \tag{D16}$$

One sees easily that  $\hat{g}_1(x)$  is an odd function  $\hat{g}_1(-x) = -\hat{g}_1(x)$ , which implies that  $\lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = \hat{g}_1(0) = 0$ , which shows the lemma for  $q = 1$ . To go further, the Taylor series of  $\hat{g}_1(x)$

must have only odd powers of  $x$ . Because they coincide on  $x > 0$ , this is true for  $g_1(x)$ :

$$\forall x > 0, \quad g_1(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{1,p} x^{2p+1}. \tag{D17}$$

Indeed, this odd power series expansion extends to all  $g_q(x)$  (with other coefficients) thanks to the relation (D14) because we differentiate twice to obtain  $g_{q+1}$  from  $g_q$

$$\forall x > 0, \quad g_q(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{q,p} x^{2p+1}, \tag{D18}$$

and this proves that

$$\lim_{x \rightarrow >0} g_q(x) = 0, \tag{D19}$$

which, regarding the definition (D13), ends the proof of the lemma (D12).

## APPENDIX E: SOME USEFUL FORMULAS FOR HERMITE POLYNOMIALS

For our purpose, the following integral representation of the Hermite polynomial  $H_n(z)$  is useful:

$$H_n(z) = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}} e^{z^2} \int_0^{\infty} dt e^{-t^2} t^n \cos(2zt - n\pi/2). \tag{E1}$$

The formula used in the text is explicitly

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} dq q^n \cos\left(q - n\frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{2M^2}q^2} \\
&= \sqrt{\pi} \left(\frac{M}{\sqrt{2t}}\right)^{n+1} e^{-\frac{M^2}{2t}} H_n\left(\frac{M}{\sqrt{2t}}\right).
\end{aligned} \tag{E2}$$

For the stars configurations we use the identity

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} dq q^n \cos\left(q\zeta - n\frac{\pi}{2}\right) e^{-t\frac{q^2}{2M^2}} \\
&= \sqrt{\pi} \left(\frac{M}{\sqrt{2t}}\right)^{n+1} e^{-\frac{M^2}{2t}\zeta^2} H_n\left(\frac{M}{\sqrt{2t}}\zeta\right)
\end{aligned} \tag{E3}$$

(in particular with  $t = 1 - \tau_M$  and  $n = 1$ ).

[1] J.-P. Bouchaud and M. Mézard, *J. Phys. A* **30**, 7997 (1997).  
[2] P. Le Doussal and C. Monthus, *Physica A* **317**, 140 (2003).  
[3] D. S. Dean and S. N. Majumdar, *Phys. Rev. E* **64**, 046121 (2001).  
[4] D. Carpentier and P. Le Doussal, *Phys. Rev. E* **63**, 026110(2001); **73**, 019910(E) (2006).  
[5] G. Györfyi, P. C. W. Holdsworth, B. Portelli, and Z. Racz, *Phys. Rev. E* **68**, 056116 (2003).  
[6] E. Bertin and M. Clusel, *J. Phys. A* **39**, 7607 (2006).  
[7] Y. V. Fyodorov and J.-P. Bouchaud, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 372001 (2008).

[8] Y. V. Fyodorov, P. Le Doussal, and A. Rosso, *J. Stat. Mech.* (2009) P10005.  
[9] L. O'Malley, G. Korniss, and T. Caraco, *Bull. Math. Biophys.* **71**, 1160 (2009).  
[10] P. Embrecht, C. Klüppelberg, and T. Mikosh, *Modelling, Extremal Events for Insurance and Finance* (Springer, Berlin, 1997).  
[11] S. N. Majumdar and J.-P. Bouchaud, *Quant. Finance* **8**, 753 (2008).  
[12] R. W. Katz, M. P. Parlange, and P. Naveau, *Adv. Water Resour.* **25**, 1287 (2002).

- [13] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes* (Dover, New York, 1958).
- [14] S. Raychaudhuri, M. Cranston, C. Przybyla, and Y. Shapir, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 136101 (2001).
- [15] S. N. Majumdar and A. Comtet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 225501 (2004).
- [16] S. N. Majumdar and A. Comtet, *J. Stat. Phys.* **119**, 777 (2005).
- [17] G. Schehr and S. N. Majumdar, *Phys. Rev. E* **73**, 056103 (2006).
- [18] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogany, and Z. Racz, *Phys. Rev. E* **75**, 021123 (2007).
- [19] S. N. Majumdar, J. Randon-Furling, M. J. Kearney, and M. Yor, *J. Phys. A Math. Theor.* **41**, 365005 (2008).
- [20] P. L. Krapivsky, S. N. Majumdar, and A. Rosso, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 315001 (2010).
- [21] J. Rambeau and G. Schehr, *J. Stat. Mech.* (2009) P09004.
- [22] J. Randon-Furling, S. N. Majumdar, and A. Comtet, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 140602 (2009).
- [23] S. N. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling, *J. Stat. Phys.* **138**, 955 (2010).
- [24] G. Schehr and P. Le Doussal, *J. Stat. Mech.* (2010) P01009.
- [25] T. W. Burkhardt, G. Györgyi, N. R. Moloney, and Z. Racz, *Phys. Rev. E* **76**, 041119 (2007).
- [26] S. N. Majumdar, A. Rosso, and A. Zoia, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 115001 (2010).
- [27] H. J. Hilhorst, P. Calka, and G. Schehr, *J. Stat. Mech.* (2008) P10010.
- [28] T. Feierl, *Proceedings of the 2007 Conference on Analysis of Algorithms (AofA 2007)*, Disc. Math. Theor. Comput. Sci. Proc. (2007) p. 427.
- [29] M. Katori, M. Izumi, and N. Kobayashi, *J. Stat. Phys.* **131**, 1067 (2008).
- [30] G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 150601 (2008).
- [31] N. Kobayashi, M. Izumi, and M. Katori, *Phys. Rev. E* **78**, 051102 (2008).
- [32] T. Feierl, *Proceedings of IWOCA 2009*, Lect. Notes Comput. Sci. **5874**, 242 (2009).
- [33] M. Izumi and M. Katori, RIMS Kokyuroku Bessatsu B **27**, 45 (2011).
- [34] P. J. Forrester, S. N. Majumdar, and G. Schehr, *Nucl. Phys. B* **844**, 500 (2011).
- [35] J. Rambeau and G. Schehr, *Europhys. Lett.* **91**, 60006 (2010).
- [36] P. G. de Gennes, *J. Chem. Phys.* **48**, 2257 (1968).
- [37] M. E. Fisher, *J. Stat. Phys.* **34**, 667 (1984).
- [38] D. A. Huse and M. E. Fisher, *Phys. Rev. B* **29**, 239 (1984).
- [39] J. W. Essam and A. J. Guttmann, *Phys. Rev. E* **52**, 5849 (1995).
- [40] A. J. Bray and K. Winkler, *J. Phys. A* **37**, 5493 (2004).
- [41] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 1191 (1962); **3**, 1198 (1962).
- [42] M. L. Mehta, *Random Matrices* (Academic Press, New York, 1991).
- [43] C. A. Tracy and H. Widom, *Commun. Math. Phys.* **159**, 151 (1994); **177**, 727 (1996).
- [44] C. Nadal and S. N. Majumdar, *Phys. Rev. E* **79**, 061117 (2009).
- [45] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889 (1986).
- [46] J. Krug and H. Spohn, in *Solids Far From Equilibrium*, edited by C. Godrèche (Cambridge University Press, New York, 1991).
- [47] T. Sasamoto and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230603 (2010).
- [48] F. C. Franck, *J. Cryst. Growth* **22**, 233 (1974).
- [49] J. Krug and H. Spohn, *Europhys. Lett.* **8**, 219 (1989).
- [50] M. Prähofer, Ph.D. thesis, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2003.
- [51] D. Dhar, *Phase Transitions* **9**, 51 (1987).
- [52] L.-H. Gwa and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 725 (1992).
- [53] M. Prähofer and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4882 (2000).
- [54] M. Prähofer and H. Spohn, *J. Stat. Phys.* **108**, 1071 (2002).
- [55] K. Johansson, *Commun. Math. Phys.* **209**, 437 (2000).
- [56] J. Gravner, C. A. Tracy, and H. Widom, *J. Stat. Phys.* **102**, 1085 (2001).
- [57] S. N. Majumdar and S. Nechaev, *Phys. Rev. E* **69**, 011103 (2004).
- [58] S. N. Majumdar, *Les Houches Lecture Notes on "Complex Systems"*, edited by J. P. Bouchaud, M. Mézard, and J. Dalibard (North-Holland, Amsterdam, 2006).
- [59] L. Miettinen, M. Myllyls, J. Merikoski, and J. Timonen, *Eur. Phys. J. B* **46**, 55 (2005).
- [60] K. A. Takeuchi and M. Sano, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230601 (2010).
- [61] D. Aldous and P. Diaconis, *Bull. Am. Math. Soc.* **36**, 413 (1999).
- [62] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, *J. Am. Math. Soc.* **12**, 1189 (1999).
- [63] P. Ferrari, Lecture Notes of Beg Rohu Summer School, available at [<http://ipht.cea.fr/Meetings/BegRohu2008/>].
- [64] T. Halpin-Healy and Y. C. Zhang, *Phys. Rep.* **254**, 215 (1995).
- [65] K. Johansson, *Comm. Math. Phys.* **242**, 277 (2003).
- [66] E. Brunet and B. Derrida, *Phys. Rev. E* **61**, 6789 (2000); *Physica A* **279**, 395 (2000); P. Calabrese, P. Le Doussal, A. Rosso, *Europhys. Lett.* **90**, 20002 (2010); V. Dotsenko, *ibid.* **90**, 20003 (2010).
- [67] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, *Comm. Pure Appl. Math.* **64**, 466 (2011).
- [68] J. Krug, P. Meakin, and T. Halpin-Healy, *Phys. Rev. A* **45**, 638 (1992).
- [69] M. Mézard, *J. Phys.* **51**, 1831 (1990); G. Parisi, *ibid.* **51**, 1595 (1990).
- [70] E. Agoritsas, V. Lecomte, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. B* **82**, 184207 (2010).
- [71] E. Brunet, *Phys. Rev. E* **68**, 041101 (2003).
- [72] S. Karlin and J. McGregor, *Pacific. J. Math.* **9**, 1141 (1959).
- [73] B. Lindström, *Bull. London Math. Soc.* **5**, 85 (1973); I. Gessel and G. Viennot, *Adv. Math.* **58**, 300 (1985).
- [74] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (Wiley, New York, 1971), Vols. 1, 2.
- [75] H. Risken, *The Fokker-Plank Equation* (Springer, Berlin, 1984).
- [76] F. Calogero, *J. Math. Phys.* **10**, 2197 (1969).
- [77] B. Sutherland, *J. Math. Phys.* **12**, 246 (1971).

## B.4 Publication 4

[147] J. Rambeau, A. B. Kolton, S. Bustingorry, and G. Schehr. Maximal relative height of elastic interfaces in random media. *Phys. Rev. E*, 84:041131, 2011



## Maximum relative height of elastic interfaces in random media

Joachim Rambeau,<sup>1,\*</sup> Sebastian Bustingorry,<sup>2,†</sup> Alejandro B. Kolton,<sup>2,‡</sup> and Grégory Schehr<sup>1,§</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique Théorique d'Orsay, Université Paris Sud 11 and CNRS, Orsay, France

<sup>2</sup>CONICET, Centro Atómico Bariloche, 8400 San Carlos de Bariloche, Río Negro, Argentina

(Received 29 July 2011; published 21 October 2011)

The distribution of the maximal relative height (MRH) of self-affine one-dimensional elastic interfaces in a random potential is studied. We analyze the ground-state configuration at zero driving force, and the critical configuration exactly at the depinning threshold, both for the random-manifold and random-periodic universality classes. These configurations are sampled by exact numerical methods, and their MRH distributions are compared with those with the same roughness exponent and boundary conditions, but produced by independent Fourier modes with normally distributed amplitudes. Using Pickands' theorem we derive an exact analytical description for the right tail of the latter. After properly rescaling the MRH distributions we find that corrections from the Gaussian independent modes approximation are, in general, small, as previously found for the average width distribution of depinning configurations. In the large size limit all corrections are finite except for the ground state in the random-periodic class whose MRH distribution becomes, for periodic boundary conditions, indistinguishable from the Airy distribution. We find that the MRH distributions are, in general, sensitive to changes of boundary conditions.

DOI: [10.1103/PhysRevE.84.041131](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.84.041131)

PACS number(s): 05.40.-a, 75.10.Nr, 02.50.-r

### I. INTRODUCTION

Recent theoretical progress have highlighted the importance of extreme value statistics (EVS) in statistical physics [1,2]. This often yields interesting questions of EVS for strongly correlated variables, a field which, to a large extent, remains to be explored. For homogeneous systems, it has been recently shown that EVS is an interesting tool to characterize the statistics of one-dimensional stochastic processes, like Brownian motion and its variants, which can be mapped onto models of elastic interfaces [3–9].

Such elastic interfaces are ubiquitous in nature and in the simplest one-dimensional case they can be parameterized by a scalar displacement field  $u(x)$  for a system of length  $L$ . Here we consider periodic boundary conditions (pbc), that is,  $u(x=0) = u(x=L)$ , and focus on the displacement, or relative height,  $h(x) = u(x) - (1/L) \int_0^L dx' u(x')$ . It can be decomposed into Fourier modes

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right), \quad (1)$$

where  $a_n$ 's and  $b_n$ 's are random variables, whose statistics depend on the precise model under considerations. The geometry of such interfaces (1) is usually characterized by the sample-dependent roughness  $w^2$  and its ensemble average  $w_L^2$  [10],

$$w^2 = (1/L) \int_0^L dx h(x)^2, w_L^2 = \langle w^2 \rangle, \quad (2)$$

where the brackets  $\langle \cdot \cdot \rangle$  denotes an average over  $a_n$ 's and  $b_n$ 's. Of particular interest are self-affine (or critical) interfaces,

characterized by a roughness exponent  $\zeta$ , such that  $w_L \sim L^\zeta$ . Relatively recently, the full distribution of  $w^2$ , and not only the first moment  $w_L^2$ , has been considered [11]. It was indeed computed both for Gaussian interfaces, that is, in the case where  $a_n$ 's and  $b_n$ 's in Eq. (1) are independent Gaussian variables of zero mean and variances  $\langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle \propto n^{-\alpha}$  [as in Eq. (12) below], corresponding to a roughness exponent  $\zeta = (\alpha - 1)/2$ , for  $\alpha > 1$  [11], as well as for pinned interfaces at the depinning threshold [12,13], where it was studied both numerically and analytically using functional renormalization group (FRG) [14]. It was subsequently measured for a contact line in a wetting experiment, on a disordered substrate [15], and also generalized to Gaussian “non-Markovian” ( $\alpha \neq 2$ ) stochastic processes [16]. It is interesting to note that such Gaussian interfaces can be physically regarded as an ensemble of free interfaces with nonlocal harmonic elastic interactions at thermal equilibrium, whose Hamiltonian can be elegantly written in terms of fractional derivatives of order  $\alpha/2$  [16],

$$H[\{h(x)\}] = \frac{1}{2} \int_0^L dx \left[ \frac{d^{\alpha/2} h(x)}{dx^{\alpha/2}} \right]^2. \quad (3)$$

Here we focus on the maximal relative height (MRH)  $h_m$  of such a fluctuating interface (1) defined as

$$h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h(x). \quad (4)$$

This observable was first introduced and studied numerically for Gaussian interfaces with short-range elasticity, such that  $\langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle \propto n^{-2}$  [3], that is,  $\zeta = 1/2$ , and it was found that  $\langle h_m \rangle \sim L^\zeta$ . Then, Majumdar and Comtet obtained an exact analytical expression for the full probability distribution function (pdf)  $P(h_m|L)$  of  $h_m$  and showed that it is given by the so-called Airy distribution  $f_{\text{Airy}}$  [4,5],

$$P(h_m|L) = \frac{1}{L^{1/2}} f_{\text{Airy}}\left(\frac{h_m}{L^{1/2}}\right), \quad (5)$$

\*joachim.rambeau@th.u-psud.fr

†sbusting@cab.cnea.gov.ar

‡koltona@cab.cnea.gov.ar

§gregory.schehr@th.u-psud.fr

where  $f_{\text{Airy}}$  describes the distribution of the area under a Brownian excursion on the unit time interval. We remind the reader that a Brownian excursion is a Brownian motion conditioned to start and end in 0 while staying positive in the time interval  $[0, 1]$ .

Incidentally, the same Airy distribution appears also in various, *a priori* unrelated, problems in graph theory and in computer science [17]. This result (5) was then extended to a wide class of one-dimensional solid-on-solid models [6], showing the universality of the Airy distribution (5) for interface models with short range elasticity (and without disorder). The distribution of  $h_m$  was then investigated for Gaussian interfaces with  $\alpha > 1$  in Ref. [7]. There it was shown that the distribution has a scaling form similar to Eq. (5), the scaling variable being  $h_m/L^\zeta$ , with  $\zeta = (\alpha - 1)/2$ , and where the scaling function depends continuously on the parameter  $\alpha$ .

A natural, and very physical, extension of these works concerns the maximal height of elastic interfaces in *random media*: This is the aim of the present paper. In the continuum limit the simplest elastic interface model is described by the Hamiltonian

$$H[\{u(x)\}] = \int_0^L dx \left\{ \frac{c}{2} [\nabla u(x)]^2 + V[x, u(x)] - fu(x) \right\}, \quad (6)$$

together with an overdamped equation of motion  $\partial_t u(x, t) \propto -\delta H[\{u(y)\}]/\delta u(x)$ . The first term in (6) is the usual harmonic elastic energy, where  $c$  is the elastic constant, and tends to straighten the displacement field. The second term is a random potential  $V(x, u)$  that models randomly distributed defects both in the direction  $x$  along the line and in the direction  $u$  along the displacements (see Fig. 1 for a discretized version of this interface considered below). The third term represents the action of an external uniform field with strength  $f$  that tends to drive the interface in direction  $u$ . Here we consider a random potential which is a Gaussian random variable with zero mean  $\overline{V(x, u)} = 0$  and correlations

$$\overline{V(x, u)V(x', u')} = \delta(x - x')R_0(u - u'), \quad (7)$$

where  $\overline{\dots}$  means an average over realizations of disorder with correlator  $R_0(u)$ . We consider two types of disorder which

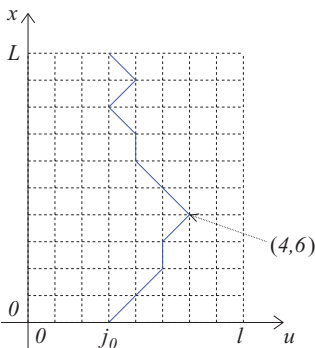


FIG. 1. (Color online) The plain blue line represent a path on the lattice when starting in  $j_0 = 3$ . The pointed maximum is reached at  $i = 4$  and its value is  $j_4 = 6$ . If  $(j_i)_{0 \leq i \leq L}$  is the sequence of heights visited by the path, one must subtract the spatial average  $\langle u \rangle = \sum_i j_i/L$  to obtain the MRH of this sample.

correspond to two distinct universality classes: the so-called random-manifold (RM) class and the random-periodic (RP) class. In the RM class  $R_0(u)$ , the bare disorder correlator, is a rapidly decaying function over distances larger than a short-distance cutoff  $a$ . In the RP class, the disorder has periodic correlations in the  $u$  direction, with a given periodicity  $a_0$ , such that  $R_0(u + pa_0) = R_0(u)$  with  $p$  an integer. For a given realization of the disorder the steady-state statistics of such interfaces is for  $f = 0$  described by a Boltzmann weight  $\propto \exp[-\beta H]$ , with  $\beta = T^{-1}$  the inverse temperature. For  $f \neq 0$  and finite  $T$  the system reaches a nonequilibrium moving steady state at large enough times, while at  $T = 0$  it can reach a moving steady state only if the driving force is large enough to overcome the barriers between the disorder-induced metastable states.

Such disordered elastic systems (6) have been widely studied during the last 20 years, in particular because they have found many experimental realizations, ranging from domain walls in ferromagnets [18], contact lines in wetting [15, 19], and fracture experiments [20]. They are also relevant to describe periodic structures like charge density waves [21] or vortex lattices in type II superconductors [22, 23]. In these systems, the competition between elasticity and disorder leads not only to nontrivial ground-state configurations but also affects in a dramatic way their dynamical properties. In particular, when driven by an external force  $f$  at zero temperature, disorder leads to a depinning transition at a threshold value  $f = f_c$ , below which the interface is immobile, and above which steady state motion sets in. At finite but small  $T$ , an ultraslow steady state creep motion sets in below  $f_c$ , and in particular, at  $f = 0$ , the zero velocity steady state coincides with the equilibrium ground-state configuration when  $T \rightarrow 0$ . Interestingly this model (6) has a universal roughness diagram [24] described by the crossovers between three types of self-affine interfaces, or “reference steady states,” depending on the amplitude of the driving force  $f$ :

(i) at equilibrium ( $f = 0$ ) and  $T = 0$ , which corresponds to the directed polymer in a random medium, where the exponent  $\zeta = 2/3$  for the RM class [25], and  $\zeta = 1/2$  in the RP class [26, 27];

(ii) exactly at the depinning threshold  $f = f_c$  and  $T = 0$ , where  $\zeta \simeq 1.25$  in the RM class [28] and  $\zeta = 3/2$  in the RP class [14, 26, 29];

(iii) in the limit  $f \gg f_c$  where, in the moving frame, disorder-induced fluctuations of the interface become an effective annealed noise (for the RM class this noise is thermal-like [24, 30], yielding the Edwards-Wilkinson roughness  $\zeta = 1/2$  corresponding to the thermal equilibrium of the system described by Eq. (6) with  $V(x, u) = 0$ , while in the RP class it is a “washboard” colored noise yielding a larger exponent  $\zeta = 1.5$ , identical to the one of the RP depinning [26, 29]).

The third case (iii) effectively describes situations with annealed noise rather than quenched noise and, in particular, for the RM class, the MRH distribution is simply given by the Airy distribution (5). In the two first cases (i) and (ii) sample to sample fluctuations are important and one expects different fluctuations of the MRH than those produced by annealed noise. It is the purpose of this paper to study the MRH distributions in the two first cases (i) and (ii) above, which we denote by RMG and RPG for the random-bond (which we also

call RM) and RP ground states, respectively, and RMD and RPD for the random-bond and RP depinning configurations, respectively. These distributions are thus generated by sample to sample fluctuations of the MRH, while the ensemble of Gaussian signals (1) can be physically thought as determined by the Boltzmann weight associated to (3) with  $k_B T = 1$ .

We show that, in all the situations considered here, the distribution of the MRH is very well described by the one corresponding to a Gaussian interface, where  $a_n$ 's and  $b_n$ 's in Eq. (1) are independent Gaussian variables [as in Eq. (12) below] of zero mean and variances  $\langle a_n^2 \rangle = \langle b_n^2 \rangle \propto n^{-(1+2\zeta)}$ . Despite of this, our numerical data show some numerical evidence that these distributions are different for the depinning configurations and also for the ground states in the RM class. Note that similar results were obtained for the width distribution at the depinning threshold [12], which were further justified using FRG calculations [13]. In that case, using FRG close to the upper critical dimension, in dimension  $d = 4 - \epsilon$ , it was shown that the displacement field can be written as  $u = \sqrt{\epsilon}u_0 + \epsilon u_1$ , where  $u_0$  is a Gaussian random variable of order  $\mathcal{O}(1)$ , while  $u_1$  is a random variable with non-Gaussian fluctuations, also of order  $\mathcal{O}(1)$  [13]. Motivated by these similarities with the Gaussian interface, we revisit the analysis of the right tail of the pdf of the MRH for Gaussian interfaces and generic  $\zeta$ , where we obtain exact results, using Pickands' theorem [31]. For the ground states in the RP class with pbc we find that corrections to the Gaussian independent modes approximation vanish at large system sizes and thus the MRH distribution becomes indistinguishable from the universal Airy distribution. Finally, for the equilibrium case we show that the MRH distribution is sensitive to the boundary conditions, highlighting their importance in the study of anomalous, self-affine interfaces.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we review the results that were obtained for Gaussian interfaces and derive the precise asymptotic behavior of the right tail of the distribution of the MRH. In Sec. III, we provide the details of our numerical simulations, the results of which are then presented in Sec. IV. In Sec. V, we discuss these results before we conclude in Sec. VI. Some details relative to the use of Pickand's theorem have been left in the Appendix.

## II. RESULTS FOR GAUSSIAN INTERFACES

We first start to review the known results for Gaussian interfaces without disorder. The distribution of  $h_m$  was first studied for the simplest model of an elastic interface described by Eq. (6) with  $V = 0$ ,  $f = 0$ , and pbc, that is,  $u_L = u_0$ . In that case one has  $w_L^2 = TL/12$ . While a first numerical study indicated that  $h_m \sim L^\zeta$ , with  $\zeta = 1/2$ , Majumdar and Comtet were then able to compute exactly the full distribution of  $h_m$  [4,5],  $P(h_m|L) = \frac{1}{L^{1/2}} f_{\text{Airy}}(\frac{h_m}{L^{1/2}})$ , where  $f_{\text{Airy}}$  is the so-called *Airy distribution*, whose Laplace transform is given by

$$\int_0^\infty f_{\text{Airy}}(x) e^{-sx} dx = s\sqrt{2\pi} \sum_{k=1}^\infty e^{-\alpha_k s^{2/3} 2^{-1/3}}, \quad (8)$$

where  $\alpha_k$ 's are the amplitudes of the zeros of the Airy function on the negative real axis. For instance,  $\alpha_1 = 2.3381 \dots$ ,  $\alpha_2 =$

$4.0879 \dots$ ,  $\alpha_3 = 5.5205 \dots$ , etc. [32]. It is also possible to invert this Laplace transform to obtain [4,5,33]

$$f_{\text{Airy}}(x) = \frac{2\sqrt{6}}{x^{10/3}} \sum_{n=1}^\infty e^{-b_n/x^2} b_n^{2/3} U(-5/6, 4/3, b_n/x^2), \quad (9)$$

where  $b_n = 2\alpha_n^3/27$  and  $U(a, b, z)$  is the confluent hypergeometric (Tricomi's) function [32]. Its asymptotic behavior is given, for small argument, by

$$f_{\text{Airy}}(x) \sim \frac{8}{81} \alpha_1^{9/2} x^{-5} e^{-2\alpha_1^3/27x^2} \quad \text{for } x \rightarrow 0. \quad (10)$$

The large argument behavior was obtained in Refs. [5,34]:

$$f_{\text{Airy}}(x) \sim 72\sqrt{\frac{6}{\pi}} x^2 e^{-6x^2} \quad \text{for } x \rightarrow \infty. \quad (11)$$

In the above expression, the leading Gaussian behavior,  $e^{-6x^2}$ , was obtained in Ref. [5] while the subleading prefactor,  $72\sqrt{\frac{6}{\pi}} x^2$  was obtained in Ref. [34] using rather involved combinatorial techniques [which also allow to obtain the subleading corrections to (11)]. We show below that this result (11) can be straightforwardly obtained using Pickands' theorem [31] concerning the asymptotic properties of the maximum of a stationary Gaussian process (see also the Appendix for more details).

The MRH distribution was then investigated for Gaussian interfaces displaying a  $1/f^\alpha$  power spectrum in Ref. [7]. Considering again pbc,  $h(0) = h(L)$ , the relative height field can be written in a Fourier expansion as in Eq. (1) with a Gaussian probability measure,

$$\mathcal{P}[h] \propto \exp\left[-\frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(2\pi n)^\alpha}{L^{\alpha-1}} (a_n^2 + b_n^2)\right], \quad (12)$$

corresponding to independent Gaussian random variables  $a_n$ 's and  $b_n$ 's of zero mean and variance, for  $n \geq 1$ ,

$$\langle a_n a_{n'} \rangle = \langle b_n b_{n'} \rangle = \delta_{n,n'} \frac{2L^{\alpha-1}}{(2\pi n)^\alpha}, \quad (13)$$

while  $\langle a_n b_{n'} \rangle = 0$ . Note that this is the same convention as the one chosen in Ref. [7], which yields, in particular,

$$w_L^2 = \frac{2L^{\alpha-1}}{(2\pi)^\alpha} \zeta(\alpha), \quad \zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha}, \quad (14)$$

where  $\zeta(\alpha)$  is the Riemann Zeta function. The roughness exponent is thus  $\zeta = (\alpha - 1)/2$ . In Ref. [7] it was shown that the distribution of the MRH takes the scaling form

$$P(h_m|L) = \frac{1}{L^\zeta} \tilde{f}_\alpha\left(\frac{h_m}{L^\zeta}\right), \quad (15)$$

where, from now on, the tilde over any distribution function indicates that it corresponds to Gaussian interfaces described by Eq. (12). The exact expression of the scaling function  $\tilde{f}_\alpha(x)$  is known only for  $\alpha = 2$ , see Eqs. (5) and (9). Nevertheless, for  $\alpha = 2n$  where  $n \in \mathbb{N}$ , the computation of the  $P(h_m|L)$  can be formulated in terms of a path integral [7] from which several properties can be deduced. In particular, the small

argument behavior of the scaling function can be studied in detail, yielding [7]

$$\tilde{f}_\alpha(x) \sim Cx^{-\gamma} \exp(-B/x^\beta), \quad (16)$$

with

$$\beta = \frac{2}{\alpha - 1} = \frac{1}{\zeta}, \quad \gamma = \frac{2\alpha + 1}{\alpha - 1} = \frac{3 + 4\zeta}{2\zeta}, \quad (17)$$

while the amplitudes  $B$  and  $C$  can be expressed in terms of the smallest eigenvalue  $\epsilon_0 \equiv \epsilon_0(\alpha) > 0$  of a linear eigenvalue problem [7]:

$$B = \frac{\alpha - 1}{2} \left( \frac{2\epsilon_0}{\alpha + 1} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha-1}}, \quad \sqrt{\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}} \left( \frac{2\epsilon_0}{\alpha + 1} \right)^{\frac{3}{2} \frac{\alpha+1}{\alpha-1}}. \quad (18)$$

Note that  $\epsilon_0(2) = \alpha_1/2^{1/3}$  so that these formulas (16)–(18) coincide with the small argument behavior of the Airy function for  $\alpha = 2$  (10). While this behavior (16), where the exponents are given by Eq. (17), was shown to hold for  $\alpha = 2n$ , numerical simulations demonstrated its validity for any  $\alpha > 1$  [7]. We also notice that the value of this eigenvalue  $\epsilon_0(\alpha = 4)$ , corresponding to the random acceleration process, was shown to appear in a completely different problem of random convex geometry, called the Sylvester’s question [35].

The large argument behavior of the scaling function  $\tilde{f}_\alpha(x)$  (15) is harder to treat analytically. Numerical simulations performed in Ref. [7] showed evidence for the asymptotic behavior:

$$\tilde{f}_\alpha(x) \sim Dx^\delta e^{-Ex^2}. \quad (19)$$

As explained in the Appendix, we are able to compute this exponent  $\delta$  as well as the amplitudes  $D$  and  $E$  using Pickands’ theorem. One obtains that the exponent  $\delta$  depends on  $\alpha$ , as follows:

$$\delta = \begin{cases} \frac{2}{\alpha-1}, & 1 < \alpha < 3, \\ 1, & \alpha > 3, \end{cases} \quad (20)$$

while one expects logarithmic corrections for  $\alpha = 3$ , which thus appears as a threshold value. This transition at  $\alpha = 3$  was also found in Ref. [36] and described as a “morphological transition.” Indeed, as it can be read off from Eq. (A12), for  $\alpha > 3$  the interface is smooth, with a finite density of zero crossings. On the contrary, for  $\alpha \leq 3$  the density of zero crossings is infinite and the surface is very “irregular”: In particular if it crosses zero once, it crosses zero infinitely many times right after, before making a long excursion [36]. In addition, we notice that these values for the exponent  $\delta$  in Eq. (20) are consistent with the numerical estimations reported in Ref. [7]. They are also consistent with the exact result obtained in the limit  $\alpha \rightarrow \infty$ , for which  $\delta = 1$  [7]. The amplitude  $E$  is given by

$$E = \frac{(2\pi)^\alpha}{4\zeta(\alpha)}, \quad (21)$$

while the amplitude  $D$  can be expressed in terms of a Pickands’ constant (A3) and has, in general, a complicated expression.

However, for  $\alpha = 2$  and  $\alpha > 3$  it can be computed explicitly as

$$D = \begin{cases} 72\sqrt{\frac{6}{\pi}}, & \text{if } \alpha = 2, \\ \sqrt{\frac{\zeta(\alpha-2)}{\zeta(\alpha)} \frac{(2\pi)^\alpha}{2\zeta(\alpha)}}, & \alpha > 3. \end{cases} \quad (22)$$

The expression of  $D$  for generic  $1 < \alpha < 3$  is left in Eq. (A13) in the Appendix. It is straightforward to check that the results in Eqs. (19)–(22) yield back, for  $\alpha = 2$ , the result for the Airy distribution (11).

### III. VARIOUS SITUATIONS FOR ELASTIC INTERFACES IN DISORDERED MEDIA: DETAILS OF SIMULATIONS

We now describe the various models of elastic interfaces that we study using numerical simulations. Numerically, it is very convenient to discretize the internal  $x$  direction of the elastic strings described by Eq. (6). Indeed, once conveniently discretized, the ground states and critical states at depinning can be obtained by exact and fast numerical algorithms. As discussed below, for depinning we can keep  $u(x)$  as a continuous variable. For the ground state it is convenient to also discretize  $u(x)$  and work on a lattice. None of these practical choices change the universality classes we analyze, and at large enough  $L$  the numerical results for the lattice model should be indistinguishable from those of a continuum model.

#### A. The ground state

When the external force is zero and the finite-size pinned interface is allowed to equilibrate at zero temperature it reaches the ground-state configuration, found by minimizing the energy (6) for a given sample of disorder. Finding such a state for each disorder realization poses a global optimization problem which can be solved by an exact transfer-matrix method. This method makes it possible to find the ground state of a line on a lattice where both  $u(x)$  and  $x$  are discrete variables. For simplicity we impose a hard constraint on the local allowed elongations,  $|u(x+1) - u(x)| \leq 1$ . This simplification does not change the equilibrium universality class which is thus only determined by the disorder correlator. This is at variance with depinning configurations, where such constraints, or more general nonlinear corrections to the standard harmonic elasticity, can change the depinning universality classes [24,37]. We thus simulate the directed polymer in a random medium as a simple model for the continuum interfaces described by (6), with the universality classes determined by the nature of the discretized disorder potential correlations.

We work on a finite discrete space: we use a rectangular lattice of size  $L \times \ell$ . Points of the lattice are indexed by the couple of integers  $(i, j)$  in the ranges  $0 \leq i \leq L$  and  $0 \leq j \leq \ell$ . The disordered potential is now a random variable  $V_{ij}$  given at each point  $(i, j)$  of the described lattice, with zero mean,

$$\overline{V_{ij}} = 0, \quad (23a)$$

and correlations

$$\overline{V_{ij}V_{kl}} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \quad (23b)$$

In our simulations, we choose Gaussian random variables, although the precise distribution should not be relevant,

provided that it remains narrow. We work with pbc in *both* the  $u$  and the  $x$  direction: The sites  $(0, j)$  are identified with the sites  $(L, j)$ , for all  $0 \leq j \leq \ell$ , and in the  $u$  direction as well:  $(i, 0) \equiv (i, \ell)$  for all  $0 \leq i \leq L$ . A path  $\mathcal{C}$  of length  $L$  is given by the sequence of visited sites  $(i, j)$ , for  $0 \leq i \leq L - 1$ , and due to pbc, it can be regarded as a close path on a torus. Its energy is the sum of disordered energies at each visited site:

$$E(\mathcal{C}) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{C}} V_{ij}. \quad (24)$$

At each step, the path can go from  $(i, j)$  to one of the three possibilities  $(i + 1, j - 1)$ ,  $(i + 1, j)$ , or  $(i + 1, j + 1)$ : We then select the optimal path amongst the ensemble  $\mathcal{C}_{j_0}$  of paths starting in  $(0, j_0)$  and ending in  $(L, j_0) \equiv (0, j_0)$  by a recursive method [25]. Calling  $\mathcal{C}_{j_0}^*$  this path, one has

$$E_{\text{opt}}(j_0) = E(\mathcal{C}_{j_0}^*) = \min_{\mathcal{C}_{j_0}} E(\mathcal{C}_{j_0}), \quad (25)$$

the energy for the optimum path, minimizing the total energy for a fixed starting point  $j_0$ . However, considering only these paths  $\mathcal{C}_{j_0}^*$ , even averaging over the disorder, yields a nonstationary two-point correlation function of the displacement field. One obtains a stationary correlation function by considering the optimal path  $\mathcal{C}^*$  among all closed paths on the torus. Then

$$E_{\text{GS}} = \min_{\mathcal{C}} E(\mathcal{C}) = E(\mathcal{C}^*). \quad (26)$$

From our ensemble of paths  $\mathcal{C}_{j_0}^*$ , one has to minimize by varying the starting point  $j_0$  on the  $u$  axis:

$$E_{\text{GS}} = \min_{0 \leq j_0 \leq \ell} E_{\text{opt}}(j_0). \quad (27)$$

Recalling that  $L$  and  $\ell$  are the lengths of the disordered substrate in the  $x$  and  $u$  directions, respectively, one has to choose  $\ell \gtrsim L^{\zeta_{\text{GS}}}$  in order to explore a region of correlated paths. In this case,  $\zeta_{\text{GS}}$  stands for the ground-state roughness exponent, which can take the values  $\zeta_{\text{RMG}} = 2/3$  [25] for the RM ground state and  $\zeta_{\text{RPG}} = 1/2$  for the RP ground state, respectively. In our simulations, we have taken  $\ell = L$  to produce ground states in the RM universality class, while we took  $\ell \ll L$  for ground states in the RP universality class. The last choice is equivalent to construct a quenched potential with periodic correlations in the direction of  $u$  with period  $\ell$ . In particular, if we take  $\ell \ll L$  but still large compared to the unity,  $\ell$  controls the crossover between the RM and RP universality classes, from  $\zeta_{\text{RMG}}$  to  $\zeta_{\text{RPG}}$ . For this reason, in most of our simulations for the RP class, we set  $\ell \sim O(1)$ , thus minimizing the crossover or finite-size effect.

We have produced a number of  $10^6$  samples of lengths  $L = 128, 256, 512, 1024, 2048$ , and  $4096$  in order to construct the histograms of the MRH  $h_m$ . The results we obtain for the MRH and discuss in the next section are computed from stationary paths  $\mathcal{C}^*$  and are referred with the index RMG and RPG for the RM and RP universality classes, respectively. We discuss the results for the ensemble given by  $\mathcal{C}_{j_0}^*$  (with the arbitrary choice  $j_0 = 0$ ) having a nonstationary correlation function in Sec. IV D, for the RM case using the index RMG' to distinguish from its stationary counterpart RMG. Both cases, RMG and RMG', have the same roughness exponent  $\zeta_{\text{RMG}} = \zeta_{\text{RMG}'} = 2/3$ .

## B. The depinning transition

The critical configuration  $u_c(x)$  of an elastic interface at the depinning transition is an extreme solution of the overdamped equation of motion,

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = - \frac{\delta H[\{u(x)\}]}{\delta u(x)} = 0, \quad (28)$$

with the Hamiltonian given in Eq. (6), such that  $u = u_c$  for the largest possible force  $f = f_c$  satisfying the above equation, with  $f_c$  the so-called critical force. Above  $f_c$ , the sum of all forces in the second term of Eq. (28) is always positive, and thus a zero velocity steady-state solution cannot exist. Middleton's theorems [28] assure that such a solution exists and it is unique. In order to solve numerically Eq. (28) for a given realization of the random potential we can discretize the string in the direction  $x$  into  $L$  pieces, thus converting Eq. (28) into an inversion problem. Solving the resulting  $L$ -dimensional system of Eq. (28) for large  $L$  by standard general methods is, however, a formidable task, due to the nonlinearity of the pinning force. On the other hand, solving the long-time steady-state dynamics at different driving forces  $f$  both below and above  $f_c$  is very inefficient due to the critical slowing down near  $f_c$ . Fortunately, this problem has a particular analytical structure that makes it possible to devise a precise and very efficient algorithm allowing to obtain iteratively the critical force  $f_c$  and the critical configuration  $u_c(x)$  for each independent disorder realization without solving the actual dynamics nor directly inverting the discretized version of Eq. (28) [28,37]. In this paper we use such a method with pbc in all directions. This guarantees that the critical configurations have spatially stationary correlation functions.

We implement the algorithm to find the critical configuration in  $1 + 1$  dimensions as in Ref. [28]. We discretize the space in the  $x$  direction while keeping  $u$  as a continuous variable. A potential  $V(x, u)$  satisfying (7) is modeled with random cubic splines. We consider pbc in both directions in a system of size  $L \times \ell$ . When  $\ell$  is large enough, the critical configuration sample averaged width is well described by  $w_L \equiv [u_c^2 - \overline{u_c^2}]^{1/2} \sim L^\zeta$ , with  $\zeta \equiv \zeta_{\text{RMD}} \approx 1.25$  [28] the RM depinning roughness exponent. We denote this RM depinning case as RMD. For small  $\ell$  the average width is well described by the RP depinning roughness exponent  $\zeta \equiv \zeta_{\text{RPD}} \approx 1.5$  [14,26,29]. Accordingly, we denote this RM depinning case as RPD. More precisely, for this system it was found that  $w_L \sim G(\ell/L^{\zeta_{\text{RMD}}})L^{\zeta_{\text{RMD}}}$  for all values of  $\ell$  with  $G(x)$  a nonmonotonic function of  $x$ , such that  $G(x) \sim x^{(1-\zeta_{\text{RPD}}/\zeta_{\text{RMD}})}$  for  $x \ll 1$  and with a very slow, approximately logarithmic, growth for  $x \gg 1$  [29]. Changing the transverse periodicity thus makes it possible to cross over from the RM to the RP universality class. By using this method we can sample critical configurations belonging to these two classes, RMD and RPD, respectively, and tune the nonuniversal prefactors  $w_L/L^{\zeta_{\text{RMD}}}$ ,  $w_L/L^{\zeta_{\text{RPD}}}$  to different values. Once the critical configuration  $u_c(x)$  is obtained for each case, we subtract the center of mass position  $h(x) = u_c(x) - (1/L) \int_0^L dx' u_c(x')$  and calculate the MRH from Eq. (4). Repeating this procedure for different disorder realizations gives access to the MRH probability distribution. In our simulations we use between  $10^4$  and  $10^5$  critical samples of sizes  $L = 128, 256, 512$ .

#### IV. NUMERICAL RESULTS

We present numerical results of the pdf  $P_k(h_m|L)$  of the MRH  $h_m$ , where the subindex  $k = \text{RMG, RPG, RMD, RPD}$  denotes the different cases: RM and RP ground states and RM and RP critical configurations, respectively.

##### A. Scaling of $h_m$ with $L$

For all cases, our numerical data are compatible with the scaling law

$$P_k(h_m|L) = \frac{1}{L^{\zeta_k}} f_k\left(\frac{h_m}{L^{\zeta_k}}\right), \quad (29)$$

where  $\zeta_k$  is the roughness exponent of the case  $k$ ,  $\zeta_{\text{RMG}} = 2/3$ ,  $\zeta_{\text{RPG}} = 1/2$ ,  $\zeta_{\text{RMD}} \approx 1.25$ , and  $\zeta_{\text{RPD}} = 3/2$ . In the continuum limit  $L \gg 1$ , the rescaled functions  $f_k$  are expected to depend only on the rescaled MRH  $z = h_m/L^{\zeta_k}$ . In Fig. 2 one observes that the rescaled distributions for different  $L$  of the case  $k$  indeed collapse for different sizes of the same class, strongly supporting this scaling relation (29). The different cases, RPG, RMG, RMD, and RPD in order of roughness exponent, have very different scaling functions  $f_k$  in this  $L^\zeta$  scaling. In particular, it is clearly visible that the most probable value, the mean, and also the standard deviation of each  $f_k$  decreases when the roughness exponent increases. Besides these facts, the curves are somewhat similar, and we are interested in testing other simple scaling forms to compare these distributions  $P_k(h_m|L)$  on the same footing.

##### B. Average and $\sigma$ scaling

Two other scaling forms have been used in the literature [7, 12], namely, the *average scaling* and the  $\sigma$  scaling. The average scaling is defined by

$$P_k(h_m|L) = \frac{1}{\bar{h}_m} \phi_k\left(\frac{h_m}{\bar{h}_m}\right), \quad (30)$$

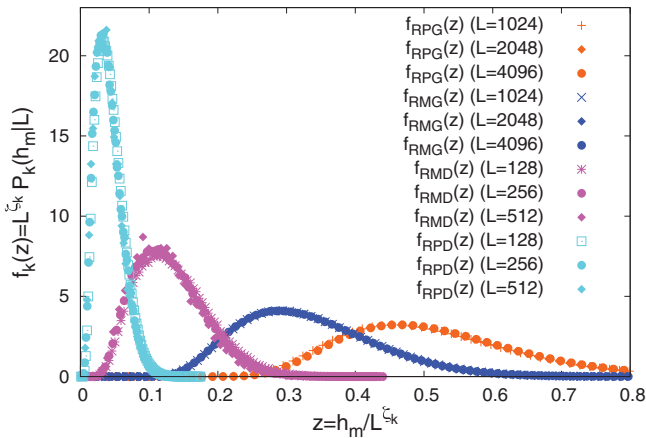


FIG. 2. (Color online) For the RM and RP ground states,  $k = \text{RMG, RPG}$ , and critical configurations  $k = \text{RMD, RPD}$ , we plot the rescaled distributions  $f_k(z) = L^{\zeta_k} P_k(z \times L^{\zeta_k}|L)$ , obtained from the histograms  $P_k(h_m|L)$  computed for different system size  $L$  as indicated in the key.

where the average is computed as

$$\bar{h}_m = \int_0^\infty dh_m h_m P_k(h_m|L). \quad (31)$$

The rescaled variable  $x = h_m/\bar{h}_m$  has by definition a unit mean. It differs from the precedent scaling by the nonuniversal prefactor  $A_k$  in  $\bar{h}_m = A_k L^{\zeta_k}$ . This prefactor can be indeed physically relevant if there exists a crossover to the asymptotic roughness regime which characterizes the universality class. In such cases, if the crossover to the asymptotic regime takes place at a characteristic length  $L_\times$ , we can expect  $\bar{h}_m \approx A_\times (L/L_\times)^{\zeta_k}$ , with  $A_\times \sim \overline{h_m(L_\times)}$  a characteristic maximal height for a system of size  $L_\times$ . We thus obtain  $A_k \approx A_\times/L_\times^{\zeta_k}$ . Such crossovers usually can depend on microscopic details, such as the strength of the disorder and the elasticity (e.g., the Larkin length), temperature, or spatial discretization when the interface is defined on a lattice. In the case of moving interfaces such crossovers can, in addition, depend on the velocity [24]. As a peculiar case, in very elongated samples the prefactor  $A_k$  could also depend on the transverse dimension of the system if the configuration carries with it an extreme value over the sample, such as the depinning threshold for the critical configuration [29]. We present this average scaling in Fig. 3. We see again a very good collapse for the different system sizes within each case  $k$  and also observe that the scaling functions  $\phi_k$  look still very different because the width of the rescaled distributions  $\phi_k$  appreciably increases when the roughness exponent increases.

Yet another way to present the data is the  $\sigma$  scaling defined by

$$P_k(h_m|L) = \frac{1}{\sigma} \psi_k\left(\frac{h_m - \bar{h}_m}{\sigma}\right), \quad (32)$$

where the standard deviation  $\sigma$  is obtained when averaging over the disorder

$$\sigma^2 = \overline{(h_m - \bar{h}_m)^2}. \quad (33)$$

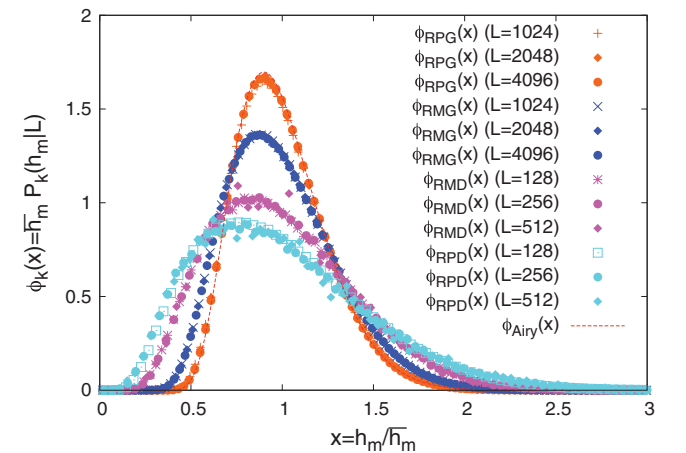


FIG. 3. (Color online) For each case  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$  we show the average-rescaled distributions  $\phi_k(x) = \bar{h}_m P_k(x \bar{h}_m|L)$ . Different system lengths are shown, as quoted in the key, and the rescaled functions collapse onto the same curves, having unit average.

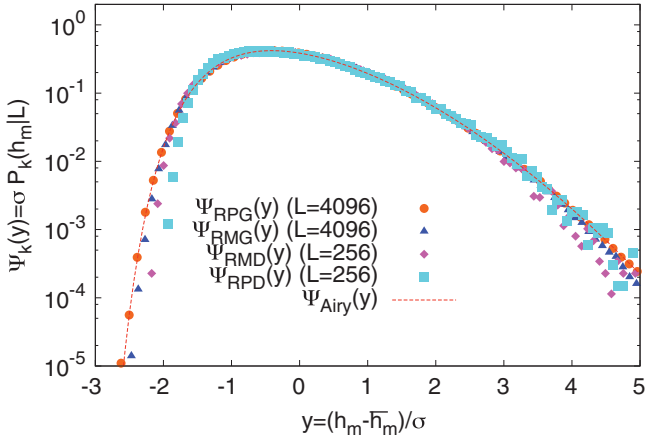


FIG. 4. (Color online) For each case  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$  we show the  $\sigma$  rescaled distributions  $\psi_k(y) = \sigma P_k(\bar{h}_m + \sigma y | L)$ , obtained with  $L = 256$  for the depinning cases and  $L = 4096$  for the ground-state cases. Other curves for different  $L$  collapse on these ones and are not shown for clarity. The Airy distribution is shown also with  $\sigma$  scaling.

The rescaled variable  $y = (h_m - \bar{h}_m)/\sigma$  has zero average and unit standard deviation. This is the most general linear transformation that can get rid of model dependent amplitudes, such as the aforementioned  $A_k$ . It makes it possible then to compare the shape of the distributions on the same footing. Actually, the differences between the distributions  $\psi_k$  are minute and not visible on a plot with linear axis. In Fig. 4 we show the  $\sigma$  rescaled distributions  $\psi_k$  obtained from samples with  $L = 4096$  and  $L = 256$  for ground states and depinning, respectively, using log-linear axis (distributions obtained from other system sizes collapse on the same curves and are not shown for clarity). One can observe that the  $\psi_k$ 's are eventually different: This is especially visible in the left tail. It indicates that the rescaled distributions remain sensitive to the roughness exponent  $\zeta$ . The Airy distribution function (also plotted in  $\sigma$  scaling) seems to collapse very well with the RPG case (see the discussion in Sec. IV C below). Moreover, it gives an approximate description of the remaining cases RMG, RMD, and RPD, furnishing an idea of the small and large argument behaviors. In particular, we have checked that the large argument behavior of  $\psi_k(y)$ , for each case  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$ , is well fitted by a Gaussian tail,  $\psi_k(y) \propto \exp(-d_k y^2)$ , although a precise determination of the coefficients  $d_k$  remains a hard task numerically. Considering this observation together with our exact analytical results for Gaussian interfaces obtained above (19), we conjecture that  $\psi_k(y) \propto \exp(-d_k y^2)$  is the exact leading behavior of  $\psi_k(y)$  for large  $y$ .

### C. Comparison to Gaussian independent modes

A natural question arises when studying disordered systems: Is there a simpler model that can absorb the complexity induced by the spatial randomness? If a satisfying answer comes out, it will make it possible to obtain more information on the disordered system. Indeed, models without disorder are often easier to work on numerically and are also more tractable analytically. For our problem a good candidate is

the Gaussian independent mode interface as it can easily describe the self-affine geometry of the pinned interface. Physically, the sample to sample MRH fluctuations due to different disorder realizations are thus approximated by the “thermal” MRH fluctuations of a free elastic interface with a nonlocal elasticity as described by Eq. (3). Comparing with Gaussian signals hence allows to separate the purely geometrical features of self-affine disordered interfaces, which can be successfully described by independent Fourier modes, from the specific non-Gaussian corrections generally expected from the complex interplay between disorder and elasticity. This analysis is thus experimentally relevant as it can provide very specific information from a purely geometrical analysis of interfaces.

Hence, we compare our results to the distribution of MRH obtained with Gaussian interfaces generated via the Fourier expansion (1) with the probability measure given in (12). We therefore adjust the parameter  $\alpha$  which parameterizes the Gaussian signal to get the corresponding roughness exponent. Since the roughness exponent of the Gaussian interface is  $\zeta = (\alpha - 1)/2$  we use the notation  $\alpha_{\text{RPG}} = 2$ ,  $\alpha_{\text{RMG}} = 7/3$ ,  $\alpha_{\text{RMD}} = 7/2$ , and  $\alpha_{\text{RPD}} = 4$  to characterize the Gaussian cases used to compare with the corresponding disordered interfaces. Average and  $\sigma$  scaling of the MRH distribution is used to adjust the amplitude of the Gaussian interface (or “temperature”) and get the best Gaussian approximation for the ensemble of pinned interfaces.

To start the comparison, we have computed the MRH distribution  $\tilde{\phi}_k$  in average scaling for the Gaussian signals corresponding to the four cases. In Fig. 5 one can see that the distributions for the elastic interfaces in disordered media are well approximated by their pure Gaussian counterpart, especially for  $k = \text{RPG, RMG}$ . In Fig. 6, we zoom on the large  $x$  behavior in a log-linear axis, and plot the exact asymptotics for Gaussian interfaces which we computed above in

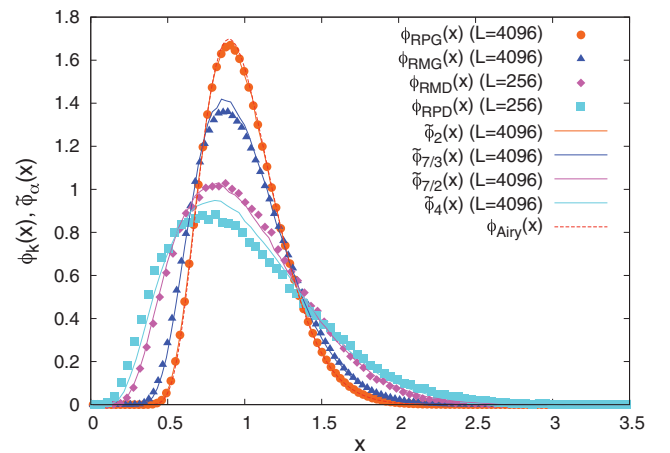


FIG. 5. (Color online) Comparison between the distributions  $\phi_k(x)$  (symbols) of the MRH of the elastic interfaces in random media, for each case  $\zeta_k = 1/2, 2/3, 1.25, 1.5$  for  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$ , obtained from the length  $L = 4096, 4096, 256, 256$ , and the distributions  $\tilde{\phi}_\alpha(x)$  (lines) of the MRH of Gaussian interfaces with  $\alpha = 2, 7/3, 7/2, 4$  and corresponding roughness exponents  $\zeta_k$ . All distributions are shown with average scaling. The Airy distribution, corresponding to  $\zeta = 1/2$ , is plotted as a reference.

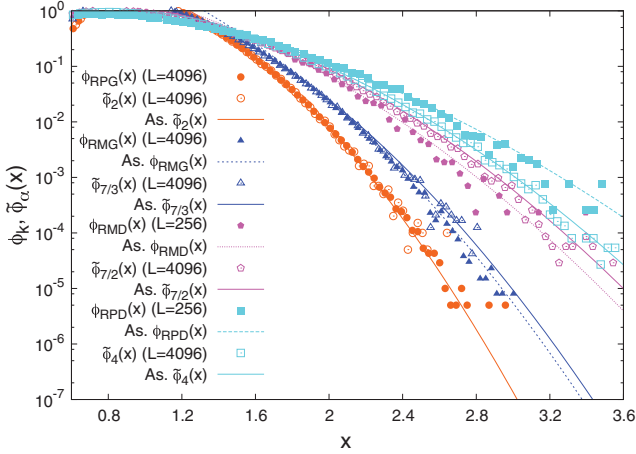


FIG. 6. (Color online) Right tails of the MRH distributions in average scaling. We show the data for Gaussian interfaces (open signs) with corresponding values  $\alpha = 2, 7/3, 7/2, 4$  and their exact asymptotics (continuous lines) computed from Eq. (19). We also show the disordered interfaces (solid signs) with  $\zeta_k$  for the four studied cases with  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$ . For each case the fitted asymptotic tails as  $\exp(-e_k x^2 + c_k)$  are also presented (discontinuous lines).

Eqs. (19)–(22)—up to a rescaling of  $h_m$ —and the fitted asymptotics for the disordered interfaces. As mentioned in the analysis in  $\sigma$  scaling of Fig. 4, the data show a good agreement with a Gaussian tail  $\exp(-e_k x^2)$ , at least at leading order. One sees that the coefficients  $e_k$  are slightly different from those entering the exact asymptotics of Gaussian interfaces. We also observe that the value of  $e_k$  is closer to its Gaussian counterpart for the case of ground states, RPG, RMG.

To go further and characterize better the possible differences with Gaussian signals we proceed as in Ref. [12] for the width distribution and compute (numerically) the cumulative MRH distributions for each  $k = \text{RPG, RMG, RMD, RPD}$  for different sizes  $L$  and their corresponding Gaussian counterparts (denoted with the tilde) as references, computed with the largest size  $L = 4096$  to minimize finite-size effects,

$$F_k(x) = \int_0^x dx' \phi_k(x'), \quad (34)$$

$$\tilde{F}_k(x) = \int_0^x dx' \tilde{\phi}_{\alpha_k}(x'), \quad L = 4096, \quad (35)$$

and analyze the difference  $\Delta F_k(x) = F_k(x) - \tilde{F}_k(x)$  for different values of the length  $L$ . In Fig. 7 we can see that for the depinning cases, RMD and RPD, the differences  $\Delta F_k(x)$  seem to saturate for all values of the rescaled variable  $x = h_m/\bar{h}_m$ . This is consistent with what was found for the same difference regarding the width distribution for critical configurations at depinning [12]. In Fig. 8 we show the ground-states cases. While the RMG case maintains a finite difference as  $L$  increases for the RPG the differences decrease toward zero for all  $x$  with increasing size.

To quantify the difference between the MRH distributions of elastic interfaces in random media and their corresponding Gaussian signal we start with a very simple statistical test. We assume that disordered elastic interfaces can be mapped onto

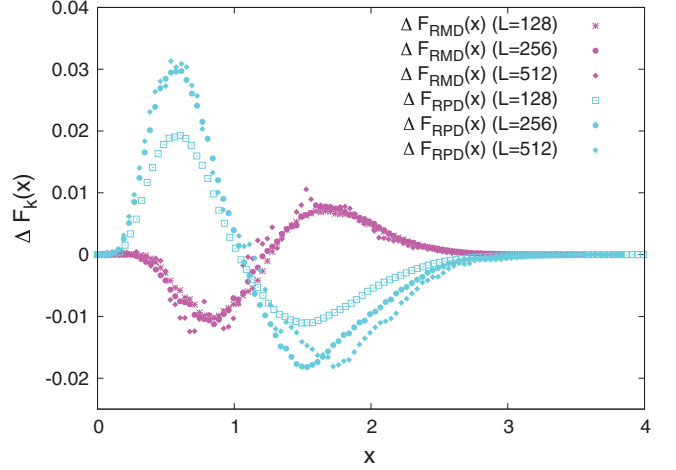


FIG. 7. (Color online) Differences  $\Delta F_k(x)$  of cumulative distributions between disordered interfaces and Gaussian interfaces, for the depinning cases  $k = \text{RMD, RPD}$ , for system lengths  $L = 128, 256, 512$  for the disordered interfaces data, in average scaling.

a Gaussian signal by a simple rescaling of its amplitude by a factor  $\chi$ ,

$$h(x) = \chi \tilde{h}(x), \quad (36)$$

and thus the two ensembles would be equivalent. This is indeed motivated by the analytical predictions for critical interfaces at depinning showing that the displacement field can be written as  $u = \sqrt{\epsilon}u_0 + \epsilon u_1$ , where  $u_0$  is a Gaussian random variable of order  $\mathcal{O}(1)$  while  $u_1$  is a random variable with non-Gaussian fluctuations, also of order  $\mathcal{O}(1)$  [13]. Since  $h(x)$  and  $\tilde{h}(x)$  describe a self-affine interface with the same roughness exponent  $\zeta$  we must have, in particular,

$$\overline{h_m} = aL^\zeta, \quad \langle \tilde{h}_m \rangle = \tilde{a}L^\zeta, \quad (37)$$

$$\sqrt{\overline{(h_m - \overline{h_m})^2}} = bL^\zeta, \quad \sqrt{\langle (\tilde{h}_m - \langle \tilde{h}_m \rangle)^2 \rangle} = \tilde{b}L^\zeta. \quad (38)$$

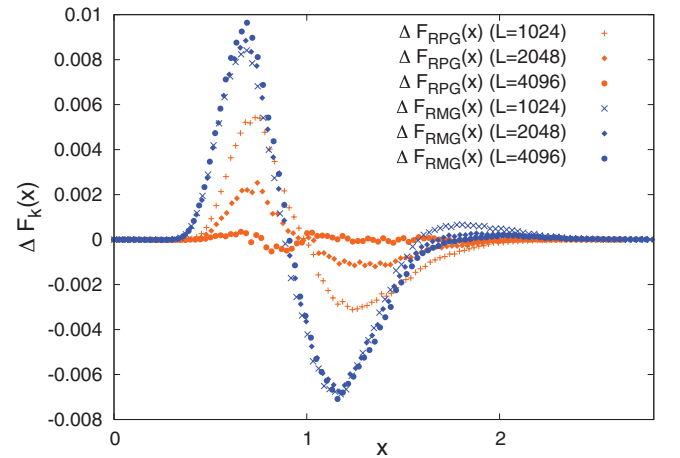


FIG. 8. (Color online) Differences  $\Delta F_k(x)$  of cumulative distributions between disordered interfaces and Gaussian interfaces, for the ground-state cases  $k = \text{RPG, RMG}$ , for system lengths  $L = 1024, 2048, 4096$  for the disordered interface data, in average scaling.



For the particular RPG case the parameters of the Gaussian signal  $\tilde{a}$  and  $\tilde{b}$  corresponding to (1) can be obtained analytically, since in this case the MRH distribution is Airy distributed, since  $\zeta_{\text{RPG}} = 1/2$ . We get  $\tilde{a}_{\text{RPG}} = \sqrt{\pi/8}$  and  $\tilde{b}_{\text{RPG}} = \sqrt{5/12 - \pi/8}$ . For the other cases, the Gaussian parameters can be obtained numerically for a finite number of modes. In order to avoid mixing size effects present in both, the disordered interfaces and Gaussian signals through the number of modes, we have evaluated  $\tilde{a}$  and  $\tilde{b}$  for a very large number of modes. We find indeed that the value  $\tilde{a}/\tilde{b}$  converges faster to its asymptotic value for larger roughness exponents. We have thus fixed  $L = 4096$  modes for the Gaussian signals, assuring that the values  $\tilde{a}$  and  $\tilde{b}$  have almost numerically converged for the  $\zeta = 2/3$  case (and thus for all higher exponents). By making the hypothesis (36) we get

$$\overline{h_m} = \chi \langle \tilde{h}_m \rangle \Rightarrow \chi = \frac{a}{\tilde{a}}, \quad (39)$$

$$\overline{(h_m - \overline{h_m})^2} = \chi^2 \langle (\tilde{h}_m - \langle \tilde{h}_m \rangle)^2 \rangle \Rightarrow \chi = \frac{b}{\tilde{b}}, \quad (40)$$

implying that  $b/\tilde{b} = a/\tilde{a}$  if the hypothesis is true. To quantify the possible differences we can thus define the ratio

$$\Delta = \frac{(a/\tilde{a}) - (b/\tilde{b})}{\min(a/\tilde{a}, b/\tilde{b})} \quad (41)$$

for each case  $k$ . In Fig. 9 we show the evolution of  $\Delta_k$  with the system size  $L$  for all the cases, RMG, RPG, RMD, and RPD. As discussed above, finite-size effects come from  $a$  and  $b$  and not from  $\tilde{a}$  and  $\tilde{b}$ . We can see that  $\Delta_k < 0$  for the RP cases ( $k = \text{RPG, RPD}$ ) and the ground-state of the RM ( $k = \text{RMG}$ ), while  $\Delta_k > 0$  for the RM at depinning ( $k = \text{RMD}$ ). It indicates that the variance of the average-rescaled MRH distribution for the disordered interface data  $k = \text{RPG, RMG, RPD}$  is larger than the variance of the corresponding average-rescaled MRH distribution for the Gaussian data, and the opposite is true for the RMD case. Focusing on the size dependence, we see that  $\Delta_{\text{RMD}}$  quickly saturate to values of order of 0.03–0.04, while

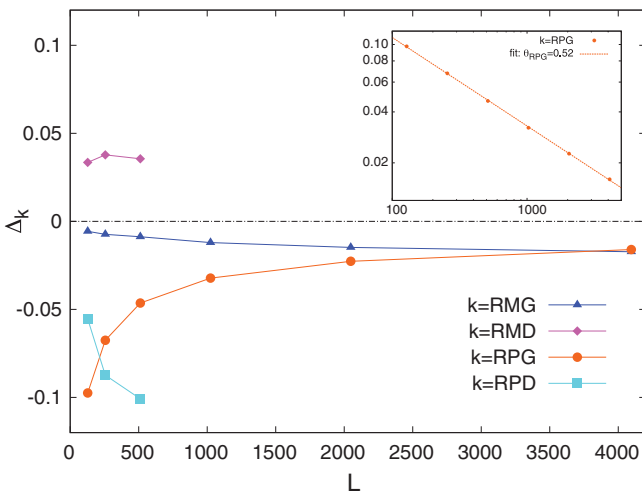


FIG. 9. (Color online) Values of ratios  $\Delta_k$  for each case  $k = \text{RMG, RMD, RPG, RPD}$  plotted with increasing size  $L$  for the disordered interface data. The inset presents the power law behavior of  $|\Delta_{\text{RPG}}|$  toward zero, in log-log scale.

both  $|\Delta_{\text{RMG}}|$  and  $|\Delta_{\text{RPD}}|$  slightly increase and should converge as well to a nonzero value for large systems  $L \rightarrow \infty$ . On the other hand,  $|\Delta_{\text{RPG}}|$  slowly decreases with  $L$  and shows no tendency to saturation toward a finite value. Interestingly, as we show in the inset of Fig. 9 we have that for the RPG case  $|\Delta_{\text{RPG}}| \approx L^{-\theta_{\text{RPG}}}$ , with  $\theta_{\text{RPG}} \approx 0.5$ . We find that this power law behavior is not proper to the disordered interface: The corresponding Gaussian signal also follows a very close power law as a function of the number of modes, as its MRH distribution approaches the asymptotic Airy distribution. To better quantify the non-Gaussian corrections we have performed a two sample Kolmogorov-Smirnov statistical test of equivalence between the MRH of sampled ground states and their Gaussian approximations for the RMG and RPG cases. We have used the data sampled at the largest system sizes  $L = 2048, 4096$  for both the disordered interfaces and Gaussian signals in order to reduce at maximum the possible finite-size effects in both processes. For the RMG we find a statistically significant difference between the distributions, with a probability less than  $p < 10^{-8}$  that the distributions are the same (null hypothesis). For RPG, however, we find a probability or significance of order  $p = 0.5$  for  $L = 2048$  and  $p = 0.8$  for  $L = 4096$ . It is thus very probable that the two distributions are the same one. Since the Gaussian case tends to the Airy distribution as  $L \rightarrow \infty$  we conclude that the MRH statistics in the RP class is in the same class as the one of periodic normal random walks with  $\zeta = 1/2$ . In this respect we note that this extends the study made in [6] made for a family of thermally equilibrated solid-on-solid models without disorder, to a disordered system at  $T = 0$ .

#### D. Boundary conditions

The dependence on boundary conditions is a relevant issue. On the one hand, it is experimentally usually difficult to realize prescribed boundary conditions for self-affine interfaces. In this respect a theory describing “window boundary conditions” has been recently proposed in which the width statistics of segments become universal and independent of boundary conditions [16]. On the other hand, boundary conditions usually add technical difficulties to the analytical approaches. Numerical studies with different boundary conditions are thus interesting, as they allow us to know the sensitivity to boundary conditions of different observables. Here we address their effects on the MRH statistics for particular cases.

So far we have only analyzed self-affine periodic signals  $h(0) = h(L)$  with a given period  $L$ , either originated from independent Fourier modes or from the interplay between local elasticity, disorder, and a driving force, which all have stationary spatial correlation functions. This means, for instance, that for any two observables  $\mathcal{O}_1(x)$  and  $\mathcal{O}_2(x)$  the Gaussian signals considered satisfy  $\langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(x') \rangle \equiv \langle \mathcal{O}_1(0)\mathcal{O}_2(x' - x) \rangle$ , while the considered critical configurations at depinning and ground-state configurations satisfy  $\overline{\mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(x')} \equiv \overline{\mathcal{O}_1(0)\mathcal{O}_2(x' - x)}$ . In particular, this implies that the MRH can occur, with uniform probability, at any position  $x$ .

Nonstationary spatial correlation functions can be easily generated using independent Fourier modes, while keeping the self-affine geometry, by applying different boundary conditions. For a self-affine signal  $h(x)$  with roughness exponent

$\zeta$  we can, for instance, impose fixed ends  $h(0) = h(L) = 0$  by constructing a pure sine series  $\tilde{h}(x) = \sum_{n=1} c_n \sin(n\pi x/L)$  with normally distributed uncorrelated amplitudes  $c_n = N[0, (2/\pi n)(L/\pi n)^\zeta]$  [38]. It is easy to see that these signals have, in general, nonstationary spatial correlation functions. Consider, for instance, the observables  $\mathcal{O}_1(x) = \mathcal{O}_2(x) = h(x) - h(0)$ : The correlation function  $\langle \mathcal{O}_1(x)\mathcal{O}_2(x') \rangle$  vanishes for  $x = 0$  (or  $x' = 0$ ) and  $x = L$  (or  $x' = L$ ). In particular, it is clear that for fixed ends the location of the MRH of each signal is not uniformly distributed along  $L$ : Instead, its pdf is peaked around  $x = L/2$ . The MRH distribution of these kind of nonstationary signals is not known exactly in general.

Ground-state configurations of elastic interfaces in random media can also have nonstationary spatial correlations functions in the presence of certain constraints. Indeed, we have seen that an optimal ground-state path with  $h(0) = h(L)$  [note that we do not consider in this paper “tilted” signals with  $h(0) \neq h(L)$ ] can be generated in two ways. The one we have analyzed so far comes from a minimization over all possible paths in the disordered substrate with  $h(0) = h(L)$  and pbc in the displacements direction. This yields stationary ground-state configurations. On the other hand, if we do not seek the minimum among *all* possible paths such that  $h(0) = h(L)$ , but fix the extremity  $h(0) = h(L)$  to a particular value, we obtain ground-state configurations with nonstationary spatial correlation functions. In the two cases, however, the self-affine structure is preserved, as it only depends on the variance of Fourier modes amplitudes rather than in its phases. Finally, let us note that the critical configurations at depinning we have analyzed have, by construction, stationary spatial correlation functions.

We address here the effects of boundary conditions in the MRH distribution. To this purpose we focus on the well-known directed polymer in a random medium, equivalent to the RMG case for our disordered elastic manifold. To illustrate the effects in this case we generate two particular types of boundary conditions by using the two methods outlined above to obtain both stationary and nonstationary ground states with  $\zeta = 2/3$ . One may write the height field as a fully periodic series, containing both cosines and sines as in Eq. (1) in the stationary case and as a sine series in the nonstationary case. We note that these boundary conditions would give equivalent results for  $\zeta = 1/2$  [38], which is the case of the RPG disordered interface.

In Fig. 10 we plot the difference of the cumulative MRH distributions in average scaling for the two cases,  $\Delta F_{\text{RMG}}(x) = F_{\text{RMG}}(x) - F_{\text{RMG}'}(x)$ , where RMG and RMG' denote the stationary and nonstationary ground states, respectively, of the same size  $L$ , for  $L = 128, 256, 512$ . We observe that for all sizes the difference is appreciable, of the same order than the difference between the RMG case and its Gaussian approximation, and it does not have any appreciable decrease with increasing  $L$ . We thus conclude that the MRH distribution of RM ground states is sensitive to the boundary conditions.

In order to understand the origin of the sensitivity to boundary conditions we have also compared the MRH statistics of Gaussian interfaces described by the sine series (defined above) and by the full periodic series of Eq. (1). A Kolmogorov-Smirnov statistical test over  $10^6$  averaged-scaled numerical Gaussian realizations shows that the MRH

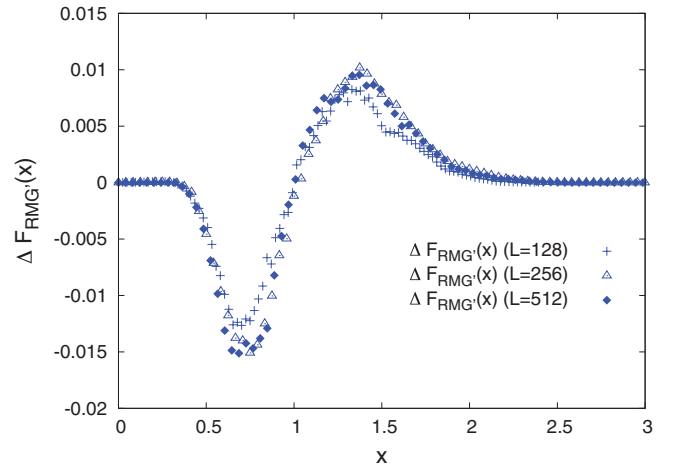


FIG. 10. (Color online) Differences  $\Delta F_{\text{RMG}}(x) = F_{\text{RMG}}(x) - F_{\text{RMG}'}(x)$  of cumulative distributions between the two ways of selecting the optimal path in a disordered medium, for lengths  $L = 128, 256, 512$ . The cumulative distributions are computed with average scaling, that is, with  $x = h_m/\bar{h}_m$ .

distribution for the sine series has, for  $\zeta = 1/2$ , a probability  $p \sim 0.9$  of being the same than the MRH distribution of the full-periodic series, while for  $\zeta = 2/3$  the same probability is  $p \sim 10^{-11}$ . While for  $\zeta = 1/2$  these results can be simply related to the fact that the signals are Markovian (and thus quickly lose “memory” of the border), for  $\zeta = 2/3$  they show that the dependence on boundary conditions is indeed closely related to the anomalous geometry, rather than to its particular microscopic origin or to the presence of non-Gaussian corrections. This extends the results obtained for the width distribution of Gaussian signals [16] to the case of the MRH.

## V. CONCLUSIONS

We have studied the MRH statistics of self-affine one-dimensional elastic interfaces in a random potential. We have analyzed, by exact numerical sampling methods, the ground-state configuration and the critical configuration at depinning, both for the experimentally relevant RM and RP universality classes. We have also analyzed the MRH distribution of self-affine signals generated by independent Gaussian Fourier modes and obtained an exact analytical description for the right tails using Pickands’ theorem. We found that, in general, the independent Gaussian modes model provides a good approximation for predicting the MRH statistics, as it was previously found for the width distribution at depinning. This result is *a priori* not obvious as the MRH is an extreme observable (occurring at a single point in space for each realization), while the width is a spatially averaged one.

The comparison of the different MRH distributions with their approximation using Gaussian independent Fourier modes shows small differences that quickly saturate with system size in the case of depinning, in agreement with the results obtained for the width distribution of these configurations [12,13]: This confirms the predictions of non-Gaussian corrections at depinning. It would be very interesting to characterize more quantitatively these non-Gaussian corrections

that we have observed for the MRH at the depinning threshold using the tools of FRG [14]. A preliminary analysis of this question indicates that this is not a simple extension of the previous works on the distribution of the width [12,13]: Indeed the extension of the perturbation theory proposed in Refs. [12,13] to the computation of the MRH distribution involves, at lowest order, a constrained propagator (with an absorbing boundary at  $h = 0$ ) for which the Wick's theorem does not hold.

On the other hand, for ground-state configurations we also find small differences but they display a slower decrease with system size. For the RM ground-states a finite difference is found in the large size limit, implying non-Gaussian corrections. This is qualitatively consistent with analytical results obtained for other physical observables for the directed polymer in a random medium. For instance, the energy of the optimal polymer which is described by one of the Tracy-Widom distributions (associated to the Gaussian unitary ensemble or to the Gaussian orthogonal ensemble of random matrices depending on the geometry of the problem), which thus shows strong deviations from Gaussian fluctuations [39]. The RP ground states, on the other hand, have a MRH distribution that is indistinguishable from the Airy distribution for the largest system sizes, as follows from studying its moments and by a Kolmogorov-Smirnov statistical test. This further confirms the universality of the Airy distribution for periodic signals with  $\zeta = 1/2$ , as shown for a family of nondisordered thermally equilibrated one-dimensional solid-on-solid models [6]. Our results are also consistent with previous results obtained for the related solid-on-solid model on a disordered substrate in  $1 + 1$  dimensions (which belongs to the same universality class as RPG) [27]. For this model with one free end, the ground-state configuration can be constructed iteratively so that the height field behaves, on large scale, as a random walk with  $\zeta = 1/2$ . Notice, however, that at variance with Ref. [27] we have considered here pbc.

Finally, we have shown that MRH distributions are in general sensitive to boundary conditions. This might be important for experiments, where particular boundary conditions are difficult to realize or are not precisely known. In this respect it would be interesting to perform an analysis of the MRH statistics using the "window boundary conditions" or "segment statistics" proposed and applied to the width statistics in Ref. [16].

Our results show that the MRH statistics provide a valuable tool to study experimental images of self-affine interfaces, such as magnetic domain walls or contact lines in partial wetting. In particular, it makes it possible to infer information about the mechanisms behind the universal self-affine geometry, such as the disorder-induced coupling between Fourier modes, or more generally the one induced by nonlinear interaction terms. It also makes it possible to infer information about boundary conditions. Our results might be used as a guide for analytical approaches predicting the statistics of extreme geometrical observables.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge Satya N. Majumdar and Alberto Rosso for useful discussions. This work was supported by the France-

Argentina MINCYT-ECOS A08E03. A. B. K. acknowledges the hospitality at LPT-Orsay and J. R. and G. S. acknowledge the hospitality at the Centro Atomico in Bariloche. S. B. and A. B. K. acknowledge support from CNEA, CONICET under Grant No. PIP11220090100051, and ANPCYT under Grant No. PICT2007886.

#### APPENDIX A: PICKANDS' THEOREM AND THE RIGHT TAIL OF THE DISTRIBUTION OF THE MRH FOR A GAUSSIAN PATH

Let  $X(t)$ ,  $t \in [0, T]$  be a continuous centered Gaussian process with covariance function  $r(t) = \langle X(s)X(s+t) \rangle$  which satisfies

- (1)  $r(t) \leq 1$ , for  $t \in [0, T]$ ,
- (2)  $r(t) = 1 - C|t|^\mu + o(|t|^\mu)$  as  $t \rightarrow 0$ ,

where  $T > 0$ ,  $\mu \in (0, 2]$  and  $C > 0$  are constants. Let us define

$$X_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} X(t). \quad (\text{A1})$$

Pickands' results concerns the right tail of the distribution of  $X_{\max}$ ,  $\text{Prob}(X_{\max} \leq \xi)$  [31]:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{\text{Prob}(X_{\max} \geq \xi)}{\xi^{2/\mu} \Phi(\xi)} = TC^{1/\mu} H_\mu, \quad (\text{A2})$$

where  $\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\xi^\infty du e^{-u^2/2}$  and  $H_\mu > 0$ , the so-called Pickands' constant, is given by

$$H_\mu = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_0^\infty e^s \text{Prob}\left(\max_{0 \leq t \leq T} Y(t) > s\right) ds, \quad (\text{A3})$$

$$Y(t) = \sqrt{2} B_{\mu/2}(t) - t^\mu,$$

where  $B_{\mu/2}(t)$  is the fractional Brownian motion with Hurst exponent  $\mu/2$ , that is, the Gaussian process characterized by the two-point correlation function:

$$\langle B_{\mu/2}(t) B_{\mu/2}(s) \rangle = \frac{1}{2}(t^\mu + s^\mu - |t - s|^\mu). \quad (\text{A4})$$

No explicit formula exists for  $H_\mu$  except for  $\mu = 1$  and  $\mu = 2$ , for which  $H_1 = 1$  and  $H_2 = 1/\sqrt{\pi}$ . The result above (A2) means that the pdf of  $X_{\max}$  behaves, for large argument, as

$$\frac{d}{d\xi} \text{Prob}(X_{\max} \leq \xi) \sim TC^{1/\mu} \frac{H_\mu}{\sqrt{2\pi}} \xi^{2/\mu} e^{-\xi^2}. \quad (\text{A5})$$

Here we apply this result (A5) to derive the asymptotic behavior of  $h_m = \max_{0 \leq x \leq L} h(x)$ , where  $h(x)$  is given in Eq. (1) and distributed according a Gaussian probability measure as in Eq. (12). We thus first compute the two-point correlation function as

$$\langle h(x)h(x') \rangle = \frac{2L^{\alpha-1}}{(2\pi)^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \cos\left(\frac{2\pi n}{L}(x - x')\right), \quad (\text{A6})$$

which is obviously stationary. One has, in particular,  $w_L^2 = \langle h(x)h(x) \rangle = \frac{2L^{\alpha-1}}{(2\pi)^\alpha} \zeta(\alpha)$ , independently of  $x$ . If one defines

$$\tilde{h}(x) = \frac{h(x)}{w_L}, \quad (\text{A7})$$

then the two-point correlator is also stationary  $r(x/L) = \langle \tilde{h}(y)\tilde{h}(y+x) \rangle$  and periodic  $r(0) = r(1)$ . In addition, one has from Eq. (A6) that it satisfies  $r(x) \leq 1, \forall x \in [0, 1]$ . To apply

Pickands' theorem we need to analyze the small  $x$  behavior of  $r(x)$ . To this purpose, it is useful to write  $r(x)$  as

$$r(x) = \frac{1}{2\zeta(\alpha)} [\text{Li}(\alpha, e^{2i\pi x}) + \text{Li}(\alpha, e^{-2i\pi x})], \quad (\text{A8})$$

where  $\text{Li}(\alpha, x)$  is the polylogarithm function [32]. In particular, for  $\alpha = 2n$  one has [32]

$$r(x) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!\zeta(2n)} B_{2n}(x) = \frac{B_{2n}(x)}{B_{2n}(0)}, \quad (\text{A9})$$

where  $B_{2n}(x)$  is the Bernoulli polynomial of degree  $2n$  and  $B_{2n}(0) = b_{2n}$  is a Bernoulli number, which satisfies  $b_{2n} = 2(-1)^{n-1} \zeta(2n)(2n)!/(2\pi)^{2n}$ . Hence, one has, for instance, for  $\alpha = 2$  [5],

$$r(x) = 1 - 6x + 6x^2, \quad (\text{A10})$$

so that, in that case,  $\mu = 1$  while for  $\alpha = 4$  one has

$$r(x) = 1 - 30x^2 + 60x^3 - 30x^4, \quad (\text{A11})$$

so that  $\mu = 2$  in that case. The small argument behavior of  $r(x)$  can be obtained for any  $\alpha$  from a careful asymptotic analysis of Eq. (A8), which yields (see also Ref. [36])

$$r(x) \sim \begin{cases} 1 - 2\pi \frac{|\Gamma(1-\alpha) \sin \frac{\alpha\pi}{2}|}{\zeta(\alpha)} x^{\alpha-1}, & 1 < \alpha < 3, \\ 1 + \frac{2\pi^2}{\zeta(3)} x^2 \ln x, & \alpha = 3, \\ 1 - 2\pi^2 \frac{\zeta(\alpha-2)}{\zeta(\alpha)} x^2, & \alpha > 3. \end{cases} \quad (\text{A12})$$

It is then straightforward to use Pickands' theorem (A5) to obtain the results given in the text in Eqs. (19)–(22). Note that in the general case where  $1 < \alpha < 3$ , one obtains the amplitude  $D$  as

$$D = \frac{H_{\alpha-1}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{2\pi}{\zeta(\alpha)} \left| \Gamma(1-\alpha) \sin \left( \frac{\alpha\pi}{2} \right) \right| \right)^{1/(\alpha-1)} \times \left( \frac{(2\pi)^\alpha}{2\zeta(\alpha)} \right)^{\frac{\alpha+1}{2(\alpha-1)}}, \quad (\text{A13})$$

where  $H_{\alpha-1}$  is the Pickands' constant given in Eq. (A3).

- 
- [1] J.-P. Bouchaud and M. Mézard, *J. Phys. A* **30**, 7997 (1997).  
[2] G. Biroli, J.-P. Bouchaud, and M. Potters, *J. Stat. Mech.* (2007) P07019.  
[3] S. Raychaudhuri, M. Cranston, C. Przybyla, and Y. Shapir, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 136101 (2001).  
[4] S. N. Majumdar and A. Comtet, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 225501 (2004).  
[5] S. N. Majumdar and A. Comtet, *J. Stat. Phys.* **119**, 777 (2005).  
[6] G. Schehr and S. N. Majumdar, *Phys. Rev. E* **73**, 056103 (2006).  
[7] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, and Z. Rácz, *Phys. Rev. E* **75**, 021123 (2007).  
[8] J. Rambeau and G. Schehr, *J. Stat. Mech.* (2009) P09004.  
[9] J. Rambeau and G. Schehr, *Europhys. Lett.* **91**, 60006 (2010); *Phys. Rev. E* **83**, 061146 (2011).  
[10] A. L. Barabási and H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).  
[11] T. Antal, M. Droz, G. Györgyi, and Z. Rácz, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 240601 (2001); *Phys. Rev. E* **65**, 046140 (2002).  
[12] A. Rosso, W. Krauth, P. Le Doussal, J. Vannimenus, and K. J. Wiese, *Phys. Rev. E* **68**, 036128 (2003).  
[13] P. Le Doussal and K. J. Wiese, *Phys. Rev. E* **68**, 046118 (2003).  
[14] P. Le Doussal, *Ann. Phys.* **325**, 49 (2010); K. J. Wiese and P. Le Doussal, *Markov Processes Relat. Fields* **13**, 777 (2007).  
[15] S. Moulinet, A. Rosso, W. Krauth, and E. Rolley, *Phys. Rev. E* **69**, 035103(R) (2004).  
[16] R. Santachiara, A. Rosso, and W. Krauth, *J. Stat. Mech.* (2007) P02009.  
[17] S. N. Majumdar, *Curr. Sci.* **89**, 2076 (2005).  
[18] S. Lemerle, J. Ferré, C. Chappert, V. Mathet, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 849 (1998); M. Bauer, A. Mougin, J. P. Jamet, V. Repain, J. Ferré, R. L. Stamps, H. Bernas, and C. Chappert, *ibid.* **94**, 207211 (2005); M. Yamanouchi, D. Chiba, F. Matsukura, T. Dietl, and H. Ohno, *ibid.* **96**, 096601 (2006).  
[19] P. Le Doussal, K. J. Wiese, S. Moulinet, and E. Rolley, *Europhys. Lett.* **87**, 56001 (2009).  
[20] M. Alava, P. K. V. V. Nukalaz, and S. Zapperi, *Adv. Phys.* **55**, 349 (2006); L. Ponsou, D. Bonamy, and E. Bouchaud, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 35506 (2006); D. Bonamy, S. Santucci, and L. Ponsou, *ibid.* **101**, 045501 (2008).  
[21] T. Nattermann and S. Brazovskii, *Adv. Phys.* **53**, 177 (2004).  
[22] G. Blatter, M. V. Feigelman, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).  
[23] T. Giamarchi and S. Bhattacharya, in *High Magnetic Fields: Applications in Condensed Matter Physics and Spectroscopy*, edited by C. Berthier *et al.* (Springer-Verlag, Berlin, 2002), p. 314.  
[24] A. B. Kolton, A. Rosso, T. Giamarchi, and W. Krauth, *Phys. Rev. B* **79**, 184207 (2009); *Phys. Rev. Lett.* **97**, 057001 (2006).  
[25] M. Kardar, *Nucl. Phys. B* **290**, 582 (1987); D. A. Huse, C. L. Henley, and D. S. Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2924 (1985); M. Kardar and Y.-C. Zhang, *ibid.* **58**, 2087 (1987); T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang, *Phys. Rep.* **254**, 215 (1995).  
[26] S. Bustingorry, A. B. Kolton, and T. Giamarchi, *Phys. Rev. B* **82**, 094202 (2010).  
[27] H. Rieger and U. Blasum, *Phys. Rev. B* **55**, R7394 (1997).  
[28] A. Rosso, A. K. Hartmann, and W. Krauth, *Phys. Rev. E* **67**, 021602 (2003).  
[29] S. Bustingorry and A. B. Kolton, *Pap. Phys.* **2**, 020008 (2010).  
[30] P. Chauve, T. Giamarchi, and P. Le Doussal, *Phys. Rev. B* **62**, 6241 (2000).  
[31] J. Pickands III, *Trans. Am. Math. Soc.* **145**, 75 (1969).  
[32] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1973).  
[33] L. Takacs, *J. Appl. Prob.* **32**, 375 (1995).  
[34] S. Janson and G. Louchard, *Electron. J. Probab.* **12**, 1600 (2007).  
[35] H. J. Hilhorst, P. Calka, and G. Schehr, *J. Stat. Mech.* (2008) P10010.  
[36] S. N. Majumdar and A. J. Bray, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3700 (2001).

- [37] A. Rosso and W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 187002 (2001); *Phys. Rev. B* **65**, 012202 (2001).
- [38] W. Krauth, *Statistical Mechanics: Algorithms and Computations* (Oxford University Press, Oxford, 2006) (see <http://www.smac.lps.ens.fr>).
- [39] M. Prähofer and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4882 (2000); *J. Stat. Phys.* **108**, 1071 (2002); K. Johansson, *Comm. Math. Phys.* **209**, 437 (2000); T. Sasamoto and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **104**, 230602 (2010); P. Calabrese, P. Le Doussal, and A. Rosso, *Europhys. Lett.* **90**, 20002 (2010); V. Dotsenko, *ibid.* **90**, 20003 (2010); G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel, *Comm. Pure Appl. Math.* **64**, 466 (2011); P. Calabrese and P. Le Doussal, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 250603 (2011); P. J. Forrester, S. N. Majumdar, and G. Schehr, *Nucl. Phys. B* **844**, 500 (2011).

---

## Bibliographie

---

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1973.
- [2] D. Aldous and P. Diaconis. Longest Increasing Subsequences : From Patience Sorting to the Baik-Deift-Johansson Theorem. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36 :413, 1999.
- [3] G. Amir, I. Corwin, and J. Quastel. Probability Distribution of the Free Energy of the Continuum Directed Random Polymer in 1 + 1 Dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 64 :466–537, 2011.
- [4] T. Antal, M. Droz, G. Györgyi, and Z. Rácz.  $1/f$  Noise and Extreme Value Statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 87(24) :240601, 2001.
- [5] T. Antal, M. Droz, G. Györgyi, and Z. Rácz. Roughness distributions for  $1/f^\alpha$  signals. *Phys. Rev. E*, 65 :046140, 2002.
- [6] J. Baik, P. Deift, and K. Johansson. On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4) :1119–1178, 1999.
- [7] J. Baik and E. Rains. Limiting Distributions for a Polynuclear Growth Model with External Sources. *J. Stat. Phys.*, 100(3/4) :523–541, 2000.
- [8] J. Baik and E. M. Rains. Symmetrized Random Permutations. In P. M. Bleher and A. R. Its, editors, *Random Matrix Models and Their Applications*, volume 40 of *MSRI Publications*. Cambridge University Press, 2001.
- [9] R. Baiod, D. Kessler, P. Ramanlal, L. Sander, and R. Savit. Dynamical scaling of the surface of finite-density ballistic aggregation. *Phys. Rev. A*, 38(7) :3672–3678, 1988.

- 
- [10] A.-L. Barabási and H. E. Stanley. *Fractal Concepts in Surface Growth*. Cambridge University Press, 1995.
- [11] R. Bausch, V. Dohm, H. K. Janssen, and R. K. P. Zia. Critical Dynamics of an Interface in  $1 + \epsilon$  Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :1837–1840, 1981.
- [12] H. C. Berg. *Random Walks in Biology*. Princeton University Press, 1983.
- [13] S. M. Berman. The Maximum of a Gaussian Process with Nonconstant Variance. *Ann. Inst. Henri Poincaré, section B*, 21(4) :383–391, 1985.
- [14] E. Bertin and G. Györgyi. Renormalization flow in extreme value statistics. *J. Stat. Mech.*, page P08022, 2010.
- [15] G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, and V. M. Vinokur. Vortices in high-temperature superconductors. *Rev. Mod. Phys.*, 66 :1125, 1994.
- [16] N. Bonichon and M. Mosbah. Watermelon uniform random generation with applications. *Theoret. Comput. Sci.*, 307 :241–256, 2003.
- [17] J.-P. Bouchaud and M. Mézard. Universality Classes for Extreme Value Statistics. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 30(23) :7997, 1997.
- [18] J.-P. Bouchaud and M. Potters. *Theory of Financial Risk and Derivative Pricing*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2003.
- [19] B. G. Brown and R. W. Katz. Regional Analysis of Temperature Extremes : Spatial Analog for Climate Change? *J. Climate*, 8 :108–119, 1995.
- [20] R. Bruinsma and G. Aeppli. Interface Motion and Nonequilibrium Properties of the Random-Field Ising Model. *Phys. Rev. Lett.*, 52(17) :1547–1550, 1984.
- [21] T. W. Burkhardt. Semiflexible Polymer in the Half Plane and Statistics of the Integral of a Brownian Curve. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 26 :L1157, 1993.
- [22] T. W. Burkhardt. The random acceleration process in bounded geometries. *J. Stat. Mech.*, page P07004, 2007.
- [23] T.W. Burkhardt, N.R. Moloney G. Györgyi, and Z. Rácz. Extreme statistics for time series : Distribution of the maximum relative to the initial value. *Phys. Rev. E*, 76 :041119, 2007.

- 
- [24] S. Bustingorry, A.B. Kolton, and T. Giamarchi. Random-manifold to random-periodic depinning of an elastic interface. *Phys. Rev. B*, 82 :094202, 2010.
- [25] P. Calabrese and P. Le Doussal. An exact solution for the KPZ equation with flat initial conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :250603, 2011.
- [26] P. Calabrese, P. Le Doussal, and A. Rosso. Free-energy distribution of the directed polymer at high temperature. *Euro. Phys. Lett.*, 90 :20002, 2010.
- [27] D. E. Cartwright and M. S. Longuet-Higgins. The Statistical Distribution of the Maxima of a Random Function. *Proc. R. Soc. London A*, 237 :212–232, 1956.
- [28] M. Castellana, A. Decelle, and E. Zarinelli. Finite-size fluctuations of the critical temperature in mean-field and short-range spin)glasses : a numerical study. arXiv :1107.1795 [cond-mat.dis.nn], 2011.
- [29] M. Castellana and E. Zarinelli. Role of Tracy-Widom distribution in the finite-size fluctuations of the critical temperature of the Sherrington-Kirkpatrick spin glass. *Phys. Rev. B*, 84 :144417, 2011.
- [30] S. Chandrasekhar. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Rev. Mod. Phys.*, 15(1) :1–89, 1943.
- [31] P. Chauve, P. Le Doussal, and K. J. Wiese. Renormalization of Pinned Elastic Systems :How Does It Work Beyond One Loop? *Phys. Rev. Lett.*, 86 :1785, 2001.
- [32] P. Chauve, T. Giamarchi, and P. Le Doussal. Creep and depinning in disordered media. *Phys. Rev. B*, 62(10) :6241–6247, 2000.
- [33] M. Clusel and E. Bertin. Global Fluctuations in Physical Systems : a Subtle Interplay between Sum and Extreme Value Statistics. *Int. J. Mod. Phys. B*, 22(20) :3311–3368, 2008.
- [34] I. Corwin, J. Quastel, and D. Remenik. Continuum statistics of the Airy<sub>2</sub> process. arXiv : 1106.2717 [math.PR], juin 2011.
- [35] D. A. Darling. On the supremum of certain Gaussian processes. *Ann. Prob.*, 11(3) :803–806, 1983.
- [36] P.-G. de Gennes. Soluble model for fibrous structures with steric constraints. *J. Chem. Phys.*, 48(5) :2257, 1968.
- [37] P. G. de Gennes. Wetting : static and dynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 57 :827–863, 1985.



- 
- [38] L. de Haan and S. Resnick. Second-order Regular Variation and Rates of Convergence in Extreme Value Theory. *Ann. Prob.*, 24 :97, 1996.
- [39] L. de Haan and U. Stadtmüller. Generalized Regular Variation of Second Order. *J. Austral. Math. Soc.*, 61 :381–395, 1996.
- [40] D. S. Dean and S. N. Majumdar. Extreme Value Statistics of Hierarchically Correlated Variables : Deviation from Gumbel Statistics and Anomalous Persistence. *Phys. Rev. E*, 64 :046121, 2001.
- [41] V. Dotsenko. Replica Bethe ansatz derivation of the Tracy-Widom distribution of the free energy fluctuations in one-dimensional directed polymers. *J. Stat. Mech.*, page P07010, 2010.
- [42] P. Le Doussal. Exact results and open questions in first principle functional RG. *Ann. Phys.*, 325 :49, 2010.
- [43] P. Le Doussal, C. Monthus, and D. S. Fisher. Random walkers in one-dimensional random environments : Exact renormalization group analysis. *Phys. Rev. E*, 59(5) :4795–4840, 1999.
- [44] P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve. Two-loop functional renormalization group theory of the depinning transition. *Phys. Rev. B*, 66 :174201, 2002.
- [45] B. Duplantier. Brownian motion, “Diverse and Undulating”. In T. Damour, O. Darrigol, B. Duplantier, and V. Rivasseau, editors, *Einstein, 1905-2005*, volume 47 of *Progress in Math. Phys.*, pages 201–293. Poincaré Seminar 2005, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [46] F. J. Dyson. A Brownian-motion model for the eigenvalues of a random matrix. *J. Math. Phys.*, 3 :1191, 1962.
- [47] M. Eden. A two-dimensional growth process. In F. Neyman, editor, *Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume IV. UC Berkeley, 1961.
- [48] S. F. Edwards and D. R. Wilkinson. The Surface Statistics of a Granular Aggregate. *Proc. R. Soc. London A*, 381 :17–31, 1982.
- [49] K. B. Efetov and A. I. Larkin. Charge density wave in a random potential. *Sov. Phys. JETP*, 45 :1236–1241, 1977.
- [50] A. Einstein. Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annal. der Physik*, 17 :549–560, 1905.

- 
- [51] P. Embrecht, C. Klüppelberg, and T. Mikosch. *Modeling Extremal Events : for Insurance and Finance*. Springer (Berlin), 2005.
- [52] M. R. Evans. Phase Transitions in one-dimensional nonequilibrium systems. *Brazilian J. of Physics*, 30 :42–57, 2000.
- [53] M. R. Evans and T. Hanney. Nonequilibrium statistical mechanics of the zero-range process and related models. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 38 :R195–R240, 2005.
- [54] M. R. Evans and S. N. Majumdar. Condensation and extreme value statistics. *J. Stat. Mech.*, page P05004, 2008.
- [55] F. Family. Scaling of rough surfaces : Effects of surface diffusion. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 19 :L441–L446, 1986.
- [56] F. Family and T. Vicsek. Scaling of the active zone in the eden process on percolation networks and the ballistic deposition model. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 18 :L75–L81, 1985.
- [57] T. Feierl. The height and range of watermelons without wall. In *Combinatorial Algorithms*, volume 5874 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 242–253. Springer Berlin/Heidelberg, 2009.
- [58] M. V. Feigel'man. Propagation of a plane front in an inhomogeneous medium. *Sov. Phys. JETP*, 58 :1076–1077, 1983.
- [59] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 1. Wiley, 1957.
- [60] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. Wiley, 1957.
- [61] P. Ferrari. Random Matrices and Related Problems. Lecture's notes for Beg Rohu Summer School, 2008.
- [62] R. P. Feynman. Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20(2) :367–387, 1948.
- [63] R. P. Feynman and A. R. Hibbs. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. McGraw-Hill, 1965.
- [64] S. Finch. Airy Function Zeros. [algo.inria.fr/csolve/ai.pdf](http://algo.inria.fr/csolve/ai.pdf), 2004.
- [65] S. Finch. Hammersley's Path Process. [algo.inria.fr/csolve/ham.pdf](http://algo.inria.fr/csolve/ham.pdf), 2004.
- [66] S. Finch. Ornstein-uhlenbeck process. [algo.inria.fr/csolve/ou.pdf](http://algo.inria.fr/csolve/ou.pdf), 2004.
- [67] S. Finch. Variants of Brownian Motion. [algo.inria.fr/csolve/br.pdf](http://algo.inria.fr/csolve/br.pdf), 2004.

- [68] S. Finch. Stars and Watermelons. *algo.inria.fr/csolve/wm.pdf*, 2008.
- [69] D. S. Fisher. Collective transport in random media : from superconductors to earthquakes. *Phys. Rep.*, 301 :113–150, 1998.
- [70] M. E. Fisher. Walks, walls, wetting, and melting. *J. Stat. Phys.*, 34(5/6) :667–729, 1984.
- [71] R. A. Fisher and L. H. C. Tippett. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 24 :180, 1928.
- [72] P. Flajolet, P. Poblete, and A. Viola. On the analysis of linear probing hashing. *Algorithmica*, 22 :490–515, 1998.
- [73] G. Moreno Flores, J. Quastel, and D. Remenik. Endpoint distribution of directed polymers in  $1 + 1$  dimensions. arXiv :1106.2716 [math.PR], juin 2011.
- [74] G. Foltin, K. Oerding, Z. Rácz, R. L. Workman, and R. K. P. Zia. Width distribution for random-walk interfaces. *Phys. Rev. E*, 50 :R639–R642, 1989.
- [75] P. J. Forrester, S. N. Majumdar, and G. Schehr. Non-intersecting Brownian walkers and Yang-Mills theory on the sphere. *Nucl. Phys. B*, 844 :500–526, 2011.
- [76] E. C. Franck. Nucleation-controlled growth on a one-dimensional growth of finite length. *J. Cryst. Growth*, 22(3) :223–236, 1974.
- [77] J. Franke, G. Wergen, and J. Krug. Records and sequences of records from random variables with a linear trend. *J. Stat. Mech.*, page P10013, 2010.
- [78] M. Fréchet. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. de la Soc. polonaise de Math. (Cracow)*, 6 :93, 1927.
- [79] E. Frey and K. Kroy. Brownian motion : a paradigm of soft matter and biological physics. *Annal. der Physik*, 14 :20, 2005.
- [80] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Ann. Math.*, 44 :423, 1943.
- [81] C. Godrèche and J. M. Luck. Dynamics of the condensate in zero-range processes. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 38 :7215–7237, 2005.
- [82] N. Goldenfeld. Kinetics of a model for nucleation-controlled polymer crystal growth. *J. Phys. A*, 17 :2807–2821, 1984.

- 
- [83] D. J. Gross and A. Matytsin. Instanton induced large  $n$  phase transitions in two and four dimensional QCD. *Nucl. Phys. B*, 429 :50–74, 1994.
- [84] E. J. Gumbel. *Statistics of Extremes*. Dover, 1958.
- [85] G. Györgyi, P. C. W. Holdsworth, B. Portelli, and Z. Rácz. Statistics of extremal intensities for Gaussian interfaces. *Phys. Rev. E*, 68 :956116, 2003.
- [86] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, and Z. Rácz. Maximal height statistics for  $1/f^\alpha$  signals. *Phys. Rev. E*, 75 :021123, 2007.
- [87] G. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, Z. Rácz, and M. Droz. Renormalization-group theory for finite-size scaling in extreme statistics. *Phys. Rev. E*, 81 :041135, 2010.
- [88] H. Györgyi, N. R. Moloney, K. Ozogány, and Z. Rácz. Finite-Size Scaling in Extreme Statistics. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :210601, 2008.
- [89] P. Hall. On the Rate of Convergence of Normal Extremes. *J. Appl. Prob.*, 16 :433, 1979.
- [90] T. Halpin-Healy and Y.-C. Zhang. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. *Phys. Rep.*, 254 :215–414, 1995.
- [91] J. M. Hammersley. A few seedlings of research. In *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, volume 1, pages 345–394. Univ. of California Press, 1972.
- [92] D. A. Huse, C. L. Henley, and D. S. Fisher. Response to : "Roughening by impurities at finite temperature" by M. Kardar. *Phys. Rev. Lett.*, 55(26) :2924, 1985.
- [93] David A. Huse and Christopher L. Henley. Pinning and Roughening of Domain Walls in Ising Systems Due to Random Impurities. *Phys. Rev. Lett.*, 54(25) :2708–2711, 1985.
- [94] F. Iglói and C. Monthus. Strong disorder RG approach of random systems. *Phys. Rep.*, 412 :277–431, 2005.
- [95] K. Jain. Extreme value distributions for weakly correlated fitnesses in block models. *J. Stat. Mech.*, page P04020, 2011.
- [96] K. Jain and J. Krug. Evolutionary trajectories in rugged fitness landscapes. *J. Stat. Mech.*, page P04008, 2005.
- [97] S. Janson and G. Louchard. Tail estimates for the Brownian excursion area and other Brownian areas. *Electronic J. Prob.*, 12 :1600–1632, 2007.

- [98] H. Jensen. The fate of the elastic string : roughening near the depinning threshold. *J. Phys. A : Math. Gen.*, 28 :1861, 1995.
- [99] J. F. Joanny and P. G. de Gennes. A model for contact angle hysteresis. *J. Chem. Phys.*, 81 :552–562, 1984.
- [100] K. Johansson. Shape Fluctuations and Random Matrices. *Commun. Math. Phys.*, 209 :437–476, 2000.
- [101] K. Johansson. Discrete Polynuclear Growth and Determinantal Processes. *Commun. Math. Phys.*, 242 :277–329, 2003.
- [102] K. Johansson. The arctic circle boundary and the airy process. *The annals of Probability*, 33(1) :1–30, 2005.
- [103] M. Kac. On the average of a certain Wiener functional and a related limit theorem in calculus or probability. *Trans. Am. Math. Soc.*, 59 :401–414, 1946.
- [104] J.-P. Kahane. Le mouvement brownien. Un essai sur les origines de la théorie mathématique. Séminaires et Congrès 3, Société Mathématique de France, 1998.
- [105] M. Kardar. Roughening By Impurities At Finite Temperatures. *Phys. Rev. Lett.*, 55(26) :2923, 1985.
- [106] M. Kardar. Nonequilibrium dynamics of interfaces and lines. *Phys. Rep.*, 301 :85–112, 1998.
- [107] M. Kardar, G. Parisi, and Y.-C. Zhang. Dynamical Scaling of Growing Interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56(9) :889–892, 1986.
- [108] S. Karlin and J. McGregor. Coincidence probabilities. *Pacific. J. Math.*, 9(4) :1141–1164, 1959.
- [109] R. W. Katz. Extreme value theory for precipitation : sensitivity analysis for climate change. *Adv. Wat. Res.*, 23 :133–139, 1999.
- [110] R. W. Katz, M. B. Parlange, and P. Naveau. Statistics of extremes in hydrology. *Adv. Wat. Res.*, 25 :1287–1304, 2002.
- [111] M. J. Kearney, S. N. Majumdar, and R. J. Martin. The first-passage area for drifted Brownian motion and the moments of the Airy distribution. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 40 :F863, 2007.
- [112] N. Kobayashi, M. Izumi, and M. Katori. Maximum distribution of bridges of noncolliding Brownian paths. *Phys. Rev. E*, 78 :051102, 2008.

- 
- [113] J. Krug and H. Spohn. *Solids far from equilibrium : Growth, morphology and defects*, chapter 6 : Kinetic roughening of growing surfaces. ed. C. Godrèche, Cambridge University Press, 1991.
- [114] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris)*, 146 :530–533, 1908.
- [115] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov. Pinning in type II superconductors. *J. Low Temp. Phys.*, 34 :409, 1979.
- [116] D.-S. Lee. Distribution of Extremes in the Fluctuations of Two-Dimensional Equilibrium Interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :150601, 2005.
- [117] H. Leschhorn, T. Nattermann, S. Stepanow, and L. H. Tang. Driven interface depinning in a disordered medium. *Annal. der Physik*, 6 :1, 1997.
- [118] P. Lévy. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Gauthiers-Villars (Paris), 1948.
- [119] G. Louchard. Kac’s formula, Levy’s local time and Brownian excursion. *J. Appl. Prob.*, 21 :479–499, 1984.
- [120] S. N. Majumdar. Brownian Functionals in Physics and Computer Science. *Current Science*, 89(12) :2076–2092, 2005.
- [121] S. N. Majumdar. *Random matrices, the Ulam problem, Directed polymers and Growth models, and Sequence matching*, chapter 4, pages 179–216. Les Houches - Session LXXXV. Elsevier, 2006.
- [122] S. N. Majumdar and J.-P. Bouchaud. Optimal Time to Sell a Stock in Black-Scholes Model : Comment on “Thou shall buy and hold”, by A. Shiryaev, Z. Xu and X. Y. Zhou. *Quant. Fin.*, 8 :753, 2008.
- [123] S. N. Majumdar and A. Comtet. Exact maximal height distribution of fluctuating interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 92(22) :225501, 2004.
- [124] S. N. Majumdar and A. Comtet. Airy distribution function : From the area under a brownian excursion to the maximal height of fluctuating interfaces. *J. Stat. Phys.*, 119(3/4) :777–826, 2005.
- [125] S. N. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling. Random Convex Hulls and Extreme Value Statistics. *J. Stat. Phys.*, 138 :955, 2010.
- [126] S. N. Majumdar and R. M. Ziff. Universal Records Statistics of Random Walks and Lévy Flights. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :050601, 2008.

- [127] S.N. Majumdar, J. Randon-Furling, M.J. Kearney, and M. Yor. On the time to reach maximum for a variety of constrained brownian motions. *J. Phys. A : Math. Theor.*, 41 :365005, 2008.
- [128] J. Maunuksela, M. Myllys, O.-P. Kähkönen, J. Timonen, N. Provatas, M. J. Alava, and T. Ala-Nissila. Kinetic Roughening in Slow Combustion of Paper. *Phys. Rev. Lett.*, 79(8) :1515–1518, 1997.
- [129] P. Meakin and R. Jullien. Simple ballistic deposition models for the formation of thin films. *SPIE*, 821 :45–46, 1987.
- [130] P. Meakin, P. Ramanlal, L. M. Sander, and R. C. Ball. Ballistic deposition on surfaces. *Phys. Rev. A*, 34 :5091–5103, 1986.
- [131] E. Medina, T. Hwa, M. Kardar, and Y.-C. Zhang. Burgers equation with correlated noise : Renormalization-group analysis and applications to directed polymers and interface growth. *Phys. Rev. A*, 39 :3053, 1989.
- [132] M. L. Mehta. *Random matrices*. Academic Press (New York), 1991.
- [133] W. W. Mullins. Theory of Thermal Grooving. *J. Appl. Phys.*, 28 :333, 1957.
- [134] C. Nadal and S. N. Majumdar. Non-intersecting Brownian Interfaces and Wishart Random Matrices. *Phys. Rev. E*, 79 :061117, 2009.
- [135] C. Nadal and S. N. Majumdar. A simple derivation of the Tracy-Widom distribution of the maximal eigenvalue of a Gaussian unitary random matrix. *J. Stat. Mech.*, page P04001, 2011.
- [136] O. Narayan and D. S. Fisher. Threshold critical dynamics of driven interfaces in random media. *Phys. Rev. B*, 48(10) :7030–7042, 1993.
- [137] T. Nattermann and L.-H. Tang. Kinetic surface roughening : I. The Kardar-Parisi-Zhang equation in the weak coupling regime. *Phys. Rev. A*, 45(10) :7156–7161, 1992.
- [138] M. Perman and J. A. Wellner. On the distribution of Brownian areas. *Ann. Appl. Prob.*, 6(4) :1091–1111, 1996.
- [139] James Pickands. Asymptotic properties of the maximum in a stationary gaussian process. *Trans. Am. Math. Soc.*, 145 :75–86, 1969.
- [140] M. Plischke and Z. Rácz. Active Zone of Growing Clusters : Diffusion-Limited Aggregation and the Eden Model. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :415–418, 1984.
- [141] M. Plischke, Z. Rácz, and R. K. P. Zia. Width distribution of curvature-driven interfaces : A study of universality. *Phys. Rev. E*, 50 :3589, 1994.

- 
- [142] M. Prähofer. Tables of “Exact scaling functions for one-dimensional stationary KPZ growth”. <http://www-m5.ma.tum.de/KPZ>.
- [143] M. Prähofer. *Stochastic Surface Growth*. PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität, München, 2003.
- [144] M. Prähofer and H. Spohn. Universal Distributions for Growth Processes in 1+1 Dimensions and Random Matrices. *Phys. Rev. Lett.*, 84(21) :4882–4885, 2000.
- [145] M. Prähofer and H. Spohn. Scale Invariance of the PNG Droplet and the Airy Process. *J. Stat. Phys.*, 108(5/6) :1071–1106, 2002.
- [146] S. Prohac and H. Spohn. The One-dimensional KPZ equation and the airy process. *J. Stat. Mech.*, page P03020, 2011.
- [147] J. Rambeau, A. B. Kolton, S. Bustingorry, and G. Schehr. Maximal relative height of elastic interfaces in random media. *Phys. Rev. E*, 84 :041131, 2011.
- [148] J. Rambeau and G. Schehr. Maximum relative height of one-dimensional interfaces : from Rayleigh to Airy distribution. *J. Stat. Mech.*, page P09004, 2009.
- [149] J. Rambeau and G. Schehr. Extremal statistics of curved growing interfaces. *Euro. Phys. Lett.*, 91 :60006, 2010.
- [150] J. Rambeau and G. Schehr. Distribution of the time at which  $N$  vicious walkers reach their maximal height. *Phys. Rev. E*, 83 :061146, 2011.
- [151] J. Randon-Furling. *Statistiques d’extrêmes du mouvement brownien et applications*. PhD thesis, Université Paris-Sud 11, 2009.
- [152] J. Randon-Furling and S. N. Majumdar. Distribution of the time at which the deviation of a Brownian motion is maximum before its first-passage time. *J. Stat. Mech.*, page P10008, 2007.
- [153] J. Randon-Furling, S. N. Majumdar, and A. Comtet. Convex Hull of  $n$  Planar Brownian Motions : Exact Results and an Application to Ecology. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :140602, 2009.
- [154] S. Raychaudhuri, M. Cranston, C. Przybyla, and Y. Shapir. Maximal Height Scaling of Kinetically Growing Surfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :136101, 2001.
- [155] Lord Rayleigh. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *Phil. Mag.*, 10 :73, 1880.



- [156] S. Redner and M. R. Petersen. Role of global warming on the statistics of record-breaking temperatures. *Phys. Rev. E*, 74 :061114, 2006.
- [157] H. Rieger and U. Blasum. Ground-state properties of solid-on-solid models with disordered substrates. *Phys. Rev. B*, 55 :7394R, 1997.
- [158] A. Rosso, A. K. Hartmann, and W. Krauth. Depinning of elastic manifold. *Phys. Rev. E*, 67 :021602, 2003.
- [159] A. Rosso and W. Krauth. Monte Carlo dynamics of driven elastic strings in disordered media. *Phys. Rev. B*, 65 :012202, 2001.
- [160] A. Rosso, W. Krauth, P. Le Doussal, J. Vannimenus, and K. J. Wiese. Universal interface width distributions at the depinning threshold. *Phys. Rev. E*, 68 :036128, 2003.
- [161] M. A. Rubio, C. A. Edwards, A. Dougherty, and J. P. Gollub. Self-Affine Fractal Interfaces from Immiscible Displacement in Porous Media. *Phys. Rev. Lett.*, 63(16) :1685–1688, 1989.
- [162] T. Sasamoto and H. Spohn. One-Dimensional Kardar-Parisi-Zhang Equation : An Exact Solution and its Universality. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :230602, 2010.
- [163] G. Schehr and P. Le Doussal. Extreme value statistics from the real space renormalization group : Brownian motion, Bessel process and continuous time random walks. *J. Stat. Mech.*, page P01009, 2010.
- [164] G. Schehr and S. N. Majumdar. Universal asymptotic statistics of maximal relative height in one-dimensional solid-on-solid models. *Phys. Rev. E*, 73 :056103, 2006.
- [165] G. Schehr and S. N. Majumdar. Area distribution and the average shape of a Lévy bridge. *J. Stat. Mech.*, page P08005, 2010.
- [166] G. Schehr, S. N. Majumdar, A. Comtet, and J. Randon-Furling. Exact distribution of the maximal height of  $p$  vicious walkers. *Phys. Rev. Lett.*, 101 :150601, 2008.
- [167] J. M. Schwarz and R. Maimon. First-passage-time exponent for higher-order random walks : Using Lévy flights. *Phys. Rev. E*, 64 :016120, 2001.
- [168] S. Shabapandit. Record Statistics of Continuous Time Random Walk. *Euro. Phys. Lett.*, 94 :20003, 2011.
- [169] F. Spitzer. Interaction of Markov processes. *Advances in Math.*, 5 :246, 1970.

- 
- [170] L. Takács. On the distribution of the integral of the absolute value of the Brownian motion. *Ann. Appl. Prob.*, 3(1) :186–197, 1993.
- [171] L. Takács. Limit distributions for the bernoulli meander. *J. Appl. Prob.*, 32 :375, 1995.
- [172] K. A. Takeuchi and M. Sano. Universal Fluctuations of Growing Interfaces : Evidence in Turbulent Liquid Crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :230601, 2010.
- [173] M. Talagrand. Small tails for the supremum of a Gaussian process. *Ann. Inst. Henri Poincaré, section B*, 24(2) :307–315, 1988.
- [174] L.-H. Tang and T. Nattermann. Kinetic Roughening in Molecular-Beam Epitaxy. *Phys. Rev. Lett.*, 66(22) :2899–2902, 1991.
- [175] C. A. Tracy and H. Widom. Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel. *Commun. Math. Phys.*, 159 :151, 1994.
- [176] C. A. Tracy and H. Widom. Level-Spacing Distributions and the Airy Kernel. *Commun. Math. Phys.*, 177 :727, 1996.
- [177] R. S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. Wiley, 3rd edition, 2010.
- [178] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of Brownian motion. *Phys. Rev.*, 36 :823–841, 1930.
- [179] S. M. Ulam. *Modern Mathematics for the Engineer*, volume II, chapter 11, pages 261–277. McGraw-Hill, 1961.
- [180] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland Personal Library. Elsevier, 3rd edition, 2007.
- [181] J. Villain. Continuum models of crystal growth from atomic beams with and without desorption. *J. Physique I*, 1 :19–42, 1991.
- [182] M. J. Vold. Computer simulation of floc formation in a colloidal suspension. *J. Coll. Sci.*, 18 :684–695, 1963.
- [183] R. von Mises. La distribution de la plus grande de  $n$  valeurs. *Revue math. de l'Union Interbalkanique (Athens)*, 1 :1, 1936.
- [184] M. von Smoluchowski. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Annal. der Physik*, 21 :756–780, 2006.
- [185] D. Wallace and R. K. P. Zia. Euclidean Group as a Dynamical Symmetry of Surface Fluctuations : The Planar Interface and Critical Behavior. *Phys. Rev. Lett.*, 43 :808, 1979.

- 
- [186] G. Wergen, M. Borgner, and J. Krug. Records statistics for biased random walks, with an application to financial data. *Phys. Rev. E*, 83 :050601, 2011.
- [187] G. Wergen and J. Krug. Record breaking temperatures reveal a warming climate. *Euro. Phys. Lett.*, 92 :30008, 2010.
- [188] N. Wiener. Differential space. *J. Math. Phys.*, 2 :131, 1923.
- [189] E. P. Wigner. On the statistical distribution of the widths and spacings of nuclear resonance levels. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47 :790, 1951.
- [190] T. A. Witten and L. M. Sander. Diffusion-Limited Aggregation, a Kinetic Critical Phenomenon. *Phys. Rev. Lett.*, 47 :1400–1403, 1981.
- [191] Y. K. Yu, N. N. Pang, and T. Halpin-Healy. Concise calculation of the scaling function, exponents, and probability functional of the Edwards-Wilkinson equation with correlated noise. *Phys. Rev. E*, 50 :5111, 1994.