



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation numérique d'écoulements multi-composants en milieu poreux

Bilal Saad

► **To cite this version:**

Bilal Saad. Modélisation et simulation numérique d'écoulements multi-composants en milieu poreux. Analyse numérique [math.NA]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2011. Français. NNT: . tel-00649033v1

**HAL Id: tel-00649033**

**<https://theses.hal.science/tel-00649033v1>**

Submitted on 7 Dec 2011 (v1), last revised 9 Dec 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

présentée pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

Spécialité : **Mathématiques appliquées**

par

**Bilal SAAD**

Sujet :

### **Modélisation et simulation numérique d'écoulements multi-composants en milieu poreux**

Organisme d'accueil :

COMMISSARIAT À L'ÉNERGIE ATOMIQUE  
Centre de Saclay

Soutenue le 02 décembre 2011 devant le jury composé de :

PRÉSIDENT :	M. Cédric Galusinski	Professeur, Université du Sud-Toulon-Var
RAPPORTEURS :	Mme. Catherine Choquet M. Rachid Touzani	Professeur, Université de La Rochelle Professeur, Université Blaise Pascal
EXAMINATEURS :	M. François Jauberteau M. Pascal Omnès	Professeur, Université de Nantes Professeur, Université Paris 13, CEA
ENCADRANT CEA :	M. Florian Caro	Ingénieur Chercheur CEA
DIRECTEUR DE THÈSE :	M. Mazen Saad	Professeur, Ecole Centrale de Nantes



## *Remerciements*

Je tiens tout d'abord à remercier Mazen Saad, ma directeur de thèse. Je lui exprime ma profonde gratitude pour son soutien scientifique, ses encouragements, ses précieux conseils et la confiance qu'il m'a accordée. Je n'oublie pas aussi sa chaleur humaine qui m'a beaucoup touché. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec lui.

Mon deuxième remerciement n'en est pas moins grand puisqu'il revient à Florian Caro qui a encadré ma thèse au CEA. Je le remercie plus particulièrement pour sa patience, la qualité de son encadrement et ses précieux conseils, aussi bien scientifiques que personnels, qu'il a pu me prodiguer durant les années que j'ai passées au CEA. Merci beaucoup, pour tout.

Je tiens maintenant à adresser mes remerciements aux personnes ayant fait partie de mon jury de thèse; merci à M. Cédric Galusinski d'avoir présider ce jury, merci à Mme. Catherine Choquet et M. Rachid Touzani d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je les remercie pour leurs remarques et questions très constructives. Je remercie également M. François Jauberteau et M. Pascal Omnès d'avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Durant ses trois années, j'ai eu le plaisir de travailler avec de nombreux collègues, thésards et stagiaires, surtout les membres du LSET au CEA et je les remercie pour tous les échanges que nous avons pu avoir ainsi que les bons moments passés au CEA.

Je remercie du fond du cœur mes parents, Mouhammad et Amina, mes frères (Khalid, Ahmad, Ali, Omar, Mahmoud) et ma soeur Samah et toute ma famille au liban et un peu partout dans le monde, sans qui je n'aurai pas eu ce diplôme. Je tiens à vous dire que je vous aime et que je vous suis très reconnaissante pour tout ce que vous m'avez apporté.

Et enfin je remercie, mais le terme n'est pas assez fort, ma femme, Boushra pour sa soutien. Elle m'a toujours encouragé surtout dans les moments le plus difficiles. Je finis par lui dire tout simplement B7EBEKKK Bachoura.



# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction et contexte physique</b>	<b>1</b>
A Motivations . . . . .	1
B Contexte physique . . . . .	1
B.1 Description des deux phases et de leurs propriétés . . . . .	2
B.2 Loi de Darcy . . . . .	3
B.3 Flux diffusifs . . . . .	5
B.4 Propriétés et lois de comportement des différents constituants . . . . .	5
B.5 Équations physiques . . . . .	6
B.6 Hypothèses physiques et relations de fermeture . . . . .	7
B.6.1 Transfert de masse statique (loi de Henry) . . . . .	8
B.6.2 Transfert de masse dynamique . . . . .	8
C Plan du manuscrit . . . . .	9
<b>I Étude théorique de deux modèles d'écoulement diphasique bicomposant en milieu poreux</b>	<b>15</b>
<b>1 Écoulements miscibles compressibles en milieu poreux</b>	<b>17</b>
1.1 Introduction . . . . .	17
1.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal . . . . .	18
1.3 Estimations d'énergie . . . . .	21
1.4 Régularisation du système . . . . .	22
1.4.1 Étude du système elliptique non linéaire . . . . .	24
1.4.2 Passage d'un système elliptique à un système parabolique . . . . .	38
1.5 Existence de solutions de système dégénéré . . . . .	46
<b>2 Étude mathématique du modèle DYNMOD</b>	<b>55</b>
2.1 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal . . . . .	55
2.2 Estimations d'énergie . . . . .	59

2.3	Régularisation du système . . . . .	60
2.3.1	Étude du système elliptique non linéaire . . . . .	62
2.3.2	Étude du système régularisé ( $\mathfrak{M}_\eta$ ) . . . . .	77
2.4	Existence de solutions du système dégénéré . . . . .	86
2.4.1	Estimations uniformes par rapport à $\eta$ . . . . .	87
2.4.2	Preuve du résultat principal . . . . .	94
 <b>II Simulation numérique d'écoulement diphasique bicomposant en milieu poreux et étude de la convergence d'un schéma de type volumes finis</b>		<b>97</b>
<b>3</b>	<b>Schémas numériques pour les modèles HELMOD et DYNMOD</b>	<b>99</b>
3.1	Formalisme . . . . .	100
3.1.1	Modèle mathématique pour HELMOD . . . . .	100
3.1.2	Modèle mathématique pour DYNMOD . . . . .	100
3.2	Schémas numériques . . . . .	101
3.2.1	Discrétisation en espace et en temps . . . . .	101
3.2.2	Étape de projection pour le modèle DYNMOD . . . . .	103
3.3	Résultats numériques . . . . .	103
3.3.1	Comparaison des solutions numériques obtenues à l'aide des deux schémas numériques . . . . .	104
3.3.2	Écoulement diphasique avec conditions initiales hors équilibre . . . . .	105
3.4	Conclusion . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Study of an implicit upwind finite volume scheme for water-gas flow in porous media</b>	<b>113</b>
4.1	Introduction . . . . .	113
4.2	Mathematical formulation of the continuous problem . . . . .	115
4.2.1	Assumptions and main result . . . . .	116
4.3	The finite volume scheme . . . . .	118
4.3.1	Finite volume definitions and notations . . . . .	118
4.3.2	The coupled finite volume scheme . . . . .	122
4.4	Preliminary fundamental lemmas . . . . .	125
4.5	A priori estimates and existence of the approximate solution . . . . .	131
4.5.1	The maximum principle . . . . .	132
4.5.2	Estimations on the pressures . . . . .	133
4.6	Existence of the finite volume scheme . . . . .	139
4.7	Compactness properties . . . . .	141
4.8	Study of the limit . . . . .	145
4.9	Numerical results . . . . .	156
 <b>Conclusion</b>		<b>161</b>

**Bibliographie**

**163**





# Résumé

Cette thèse concerne la modélisation, l'étude mathématique et la simulation numérique des problèmes d'écoulements diphasique (liquide et gaz) multi-composant (principalement eau et hydrogène) en milieu poreux. Le domaine d'application typique concerne le stockage des déchets radioactifs de moyenne et haute activité à vie longue. Ce type d'étude est motivé, entre autre, par une augmentation de la pression au sein du stockage due à un dégagement d'hydrogène au niveau des colis, pouvant ainsi fracturer la roche environnante et donc faciliter la migration des radionucléides. En supposant que le transfert de masse entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous est donné par la loi de Henry un premier modèle est étudié. Une preuve d'existence de solutions faibles pour ce modèle a été réalisée sans hypothèse de petites données et en traitant le modèle complet en considérant que la densité de chaque composant dépend de sa propre pression. Ensuite, nous avons fait évoluer le modèle vers un modèle à transfert de masse dynamique. On établit l'existence de solutions faibles pour ce deuxième modèle avec un principe du maximum sur la saturation liquide et sur la fraction massique d'hydrogène dissous. Parallèlement, un code numérique en 1D a été développé afin de comparer les solutions numériques obtenues entre le premier modèle et le second modèle lorsque la cinétique de changement de phase devient instantanée. Des accords probant ont été obtenus sur différents cas tests dont un issu des cas tests du GNR MOMAS diphasique. Enfin, un schéma numérique de type volumes finis avec un décentrage phase par phase pour la simulation des écoulements diphasiques eau-gaz sous l'hypothèse que la densité de chaque phase dépend de sa propre pression a été proposé. On établit la convergence de ce schéma numérique. Ce schéma a été validé sur un maillage 2D non structuré.

## Mots clés

---

Écoulement en milieu poreux, compressible, immiscible, partiellement miscible, multi-composants, biphasique, volumes finis, systèmes paraboliques dégénérés.



# Abstract

This work deals with the modelization and numerical simulation of two phase multi-component flow in porous media. The study is divided into two parts.

First we study and prove the mathematical existence in a weak sense of two degenerate parabolic systems modeling two phase (liquid and gaz) two component (water and hydrogen) flow in porous media. In the first model, we assume that there is a local thermodynamic equilibrium between both phases of hydrogen by using the Henry's law. The second model consists of a relaxation of the previous model : the kinetic of the mass exchange between dissolved hydrogen and hydrogen in the gaz phase is no longer instantaneous.

The second part is devoted to the numerical analysis of those models. Firstly, we propose a numerical scheme to compare numerical solutions obtained with the first model and numerical solutions obtained with the second model where the characteristic time to recover the thermodynamic equilibrium goes to zero. Secondly, we present a finite volume scheme with a phase-by-phase upstream weighting scheme without simplified assumptions on the state law of gas densities. We also validate this scheme on a 2D test cases.

## Key words

---

Porous medium, compressible, immiscible, partially miscible, multicomponent, finite volume scheme, parabolic degenerate systems, nonlinear coupled systems.



# Introduction et contexte physique

## A Motivations

La gestion des déchets radioactifs est l'une des difficultés liée à la filière nucléaire. Une solution intéressante consiste à enfouir les déchets les plus nocifs dans un sous-sol stable et peu perméable afin de garantir le confinement des éléments radioactifs pour des temps longs. Mais, l'eau contenu dans le sous-sol peut corroder l'acier contenu dans les colis de déchets et les structures du stockage provoquant un dégagement d'hydrogène non négligeable. Cette production d'hydrogène peut engendrer de fortes pressions au niveau du stockage et provoquer des fracturations de la roche environnante et donc faciliter la migration des radionucléides. Afin de mieux prévoir l'évolution de ces stockages à long terme (plusieurs dizaines de milliers d'années), il est donc important de bien comprendre la problématique des écoulements diphasiques en milieu poreux et d'effectuer des simulations numériques fiables pour prévoir correctement comment l'hydrogène migre dans le site de stockage de déchets radioactifs. On peut également citer le piégeage du  $CO_2$  comme un important domaine d'application pour ce type d'étude.

Les modèles utilisés pour cette problématique sont usuellement des modèles d'écoulement diphasique en milieu poreux. Les modèles les plus simples sont du type liquide-gaz (sans distinction des composants dans leur phase). Pour simuler les déplacements d'hydrogène dans un site de stockage, il est nécessaire d'utiliser des modèles tenant compte du transfert d'hydrogène entre les phases. Cette dernière classe de modèles sera appelée modèles diphasiques bicomposant dans la suite.

Dans la suite de cette section, nous allons dans un premier temps détailler les modèles physiques qui seront étudiés mathématiquement et numériquement dans ce mémoire. Ensuite, nous donnerons un plan détaillé avec les principaux résultats obtenus.

## B Contexte physique

Dans cette section nous fournissons le cadre physique général pour d'écrire l'écoulement d'un mélange eau/hydrogène dans un milieu poreux en présence de deux phases. Nous établissons les équations aux dérivées partielles (EDPs) régissant ces écoulements. L'objectif est de rappeler l'origine physique des coefficients qui apparaissent dans les EDPs et les diverses lois de fermeture permettant de bien poser le problème.

## B.1 Description des deux phases et de leurs propriétés

Le mélange fluide est supposé composé de deux phases : une phase liquide constituée d'un composant eau liquide et d'un composant hydrogène dissous et une phase gazeuse constituée d'hydrogène et de vapeur d'eau. Chaque phase  $\alpha \in \{l, g\}$ , liquide ou gaz, est constituée de deux composants  $w$  et  $h$ . On note  $w$  le composant eau (constituant essentiel de la phase liquide) et  $h$  le composant d'hydrogène (constituant essentiel de la phase gazeuse).

L'écoulement est supposé diphasique (liquide et gaz). Pour chaque phase  $\alpha \in \{l, g\}$ , on note  $\rho_\alpha$  sa densité massique et  $p_\alpha$  sa pression. On définit la porosité  $\Phi$  comme le rapport entre le volume poreux où le fluide est libre de circuler et le volume total du milieu poreux. On suppose que la porosité ne dépend que de l'espace (milieu poreux indéformable). Enfin, on définit la saturation de la phase  $\alpha \in \{l, g\}$  comme le rapport entre le volume de la phase  $\alpha$  et le volume poreux où le fluide est libre de circuler. Puisque le volume poreux est entièrement occupé par le fluide, nous avons la relation suivante

$$s_l + s_g = 1. \quad (\text{B.1.1})$$

La composition de chaque phase  $\alpha$  peut être caractérisée par les densités des composants eau et hydrogène au sein de cette phase. On notera  $\rho_\alpha^\beta$  la densité du composant  $\beta \in \{w, h\}$  dans la phase  $\alpha \in \{l, g\}$ . La densité du mélange pour chaque phase est définie comme la somme des densités de chacun de ses constituants

$$\rho_l = \rho_l^w + \rho_l^h \text{ et } \rho_g = \rho_g^w + \rho_g^h. \quad (\text{B.1.2})$$

Nous définissons  $X_\alpha^\beta$  la fraction massique du constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$  telle que

$$X_\alpha^\beta = \frac{\rho_\alpha^\beta}{\rho_\alpha}, \quad \beta \in \{w, h\}, \quad \alpha \in \{l, g\}; \quad \sum_{\beta \in \{w, h\}} X_\alpha^\beta = 1, \quad \alpha \in \{l, g\}. \quad (\text{B.1.3})$$

Cette fraction est appelé également *concentration* du constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$ .

En présence de deux fluides immiscibles en milieu poreux, la pression capillaire  $p_c$  relie les pressions de ces deux fluides de part et d'autre de l'interface les séparant. Elle correspond à la différence entre la pression du fluide non mouillant (ici le gaz) au fluide mouillant (ici le liquide). Cette différence est due à la courbure de l'interface, la pression du fluide du côté concave de l'interface étant supérieure à celle du côté convexe. Dans un pore, le sens de la courbure de l'interface entre les deux fluides provient de la capacité plus ou moins grande de chaque fluide à mouiller la paroi solide. Donc dans le cas liquide/gaz, le liquide est le fluide le plus mouillant et par conséquent la pression du gaz est supérieur à celle du liquide.

Dans un milieu poreux isotherme et en l'absence d'hystérésis, on exprimera la pression capillaire comme une fonction ne dépendant que de la saturation en eau liquide. Pour une configuration liquide/gaz, on définit donc

$$p_c(s_l) = p_g - p_l. \quad (\text{B.1.4})$$

Vu les remarques faites ci-dessus, la fonction de pression capillaire  $p_c(s_l)$  vérifie

$$p_c \geq 0 \quad \text{et} \quad p'_c \leq 0. \quad (\text{B.1.5})$$

Dans le cas liquide/gaz, on observe l'existence d'une saturation résiduelle en liquide  $s_{l,\text{res}}$  pour laquelle la phase liquide ne peut plus s'écouler. A la limite  $s_l \rightarrow s_{l,\text{res}}$ , la phase liquide ne forme alors plus une phase continue dans les pores. Cette perte de continuité hydraulique se traduit par une asymptote verticale de la pression capillaire lorsque la saturation liquide tend vers la saturation résiduelle  $s_{l,\text{res}}$ . Autrement dit, nous avons

$$\lim_{\substack{s_l \rightarrow s_{l,\text{res}} \\ s_l > s_{l,\text{res}}}} p_c(s_l) = +\infty. \quad (\text{B.1.6})$$

La mouillabilité du gaz étant nettement moindre que celle du liquide, la saturation résiduelle du gaz peut être considérée nulle ( $s_{g,\text{res}} = 0$ ) et donc nous aurons une pression capillaire finie lorsque la saturation du gaz est nulle. Dans la suite, on considère que  $p_c(s_l = 1) = 0$ . La figure B.1 représente un exemple d'évolution de la pression capillaire utilisée en fonction de la saturation liquide

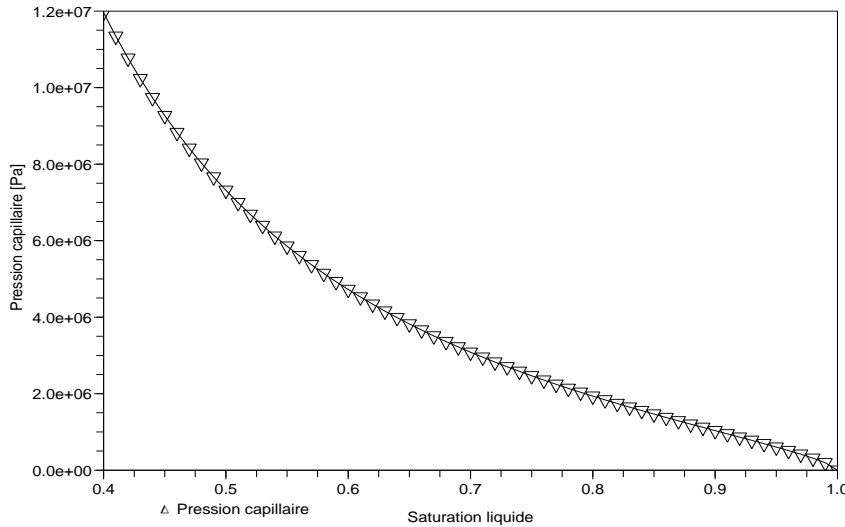


FIG. 1: Exemple d'évolution de la pression capillaire [Pa] utilisée en fonction de la saturation liquide.

## B.2 Loi de Darcy

La loi expérimentale de Darcy ou loi de Darcy a été établie en 1856 par Henry Darcy [35]. Elle est notamment utile pour calculer le débit d'eau  $Q$  ou d'un liquide s'écoulant à



travers le sol vers la nappe par exemple ou à travers un milieu poreux. Ce débit peut se calculer de la manière suivante

$$Q = KA \frac{\Delta H}{L},$$

où  $K$  est une constante appelée conductivité hydraulique ou coefficient de perméabilité du milieu poreux,  $A$  est la surface de la section étudiée et  $\frac{\Delta H}{L}$  est le gradient de charge hydraulique. La charge hydraulique s'exprime de manière générale par

$$H = \frac{p}{\rho \mathbf{g}} + z,$$

où  $p$ ,  $\mathbf{g}$ ,  $\rho$  et  $z$  représentent respectivement la pression, l'accélération de pesanteur, la masse volumique et la hauteur. Si on divise le débit  $Q$  par la section  $A$ , on obtient une vitesse  $\mathbf{V}$ , dite vitesse de Darcy correspondant à une vitesse fictive puisqu'elle suppose que toute la surface, y compris la matrice, participe à l'écoulement.

La loi de Darcy a été établie à l'origine pour un milieu poreux saturé, c'est-à-dire où tous les pores du milieu sont remplis d'eau. Cette loi peut être généralisée à des milieux non saturés et en 3 dimensions sous la forme

$$\mathbf{V} = -\mathbf{k} \nabla H = -\mathbf{k} \nabla \left( \frac{p}{\rho \mathbf{g}} + z \right),$$

où  $\mathbf{V}$  représente la vitesse de Darcy vectorielle et  $\mathbf{k}$  le tenseur de perméabilité qui dépend des caractéristiques du milieu et des caractéristiques du fluide. Nous pouvons définir une perméabilité intrinsèque absolue fonction de l'espace  $\mathbf{K}(x)$  déterminé à l'échelle macroscopique qui ne dépend que de la structure et de la connectivité des pores à travers la relation

$$\mathbf{k} = \frac{\rho \mathbf{g}}{\mu} \mathbf{K}(x),$$

où  $\mu$  représente la viscosité dynamique du fluide. La loi de Darcy peut donc s'écrire pour un écoulement monophasique dans un milieu poreux par

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{K}(x)}{\mu} (\nabla p - \rho \mathbf{g}).$$

La loi de Darcy-Muskat généralise la loi de Darcy aux cas multiphasiques en introduisant la notion de perméabilité relative de la façon suivante

$$\mathbf{V}_\alpha = -\mathbf{K}(x) \frac{k_{r_\alpha}(s_\alpha)}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{g}), \quad \alpha \in \{l, g\}, \quad (\text{B.2.7})$$

où  $k_{r_\alpha}$  représente la perméabilité relative de la phase  $\alpha$  : c'est une fonction à valeur dans  $[0, 1]$ , croissante vérifiant

$$k_{r_\alpha}(s_\alpha = 0) = 0 \text{ et } k_{r_\alpha}(s_\alpha = 1) = 1. \quad (\text{B.2.8})$$

La figure B.2 représente un exemple de profils de perméabilités relatives.

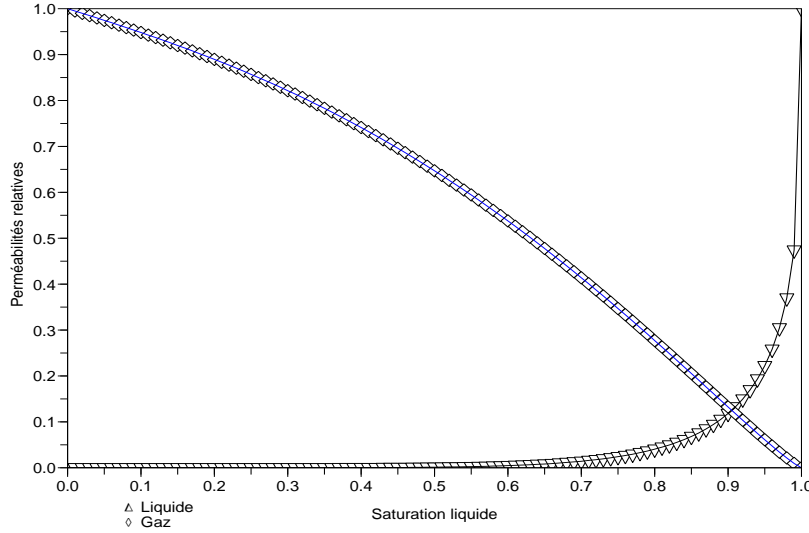


FIG. 2: Exemple de profils de perméabilités relatives.

### B.3 Flux diffusifs

Nous proposons de définir les flux diffusifs  $J_\alpha^\beta$  de la façon suivante

$$J_\alpha^\beta = -\rho_\alpha D_\alpha^\beta \nabla X_\alpha^\beta, \quad (\text{B.3.9})$$

où  $D_\alpha^\beta$  est le coefficient de diffusion du composant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$ .

Afin de garantir la conservation de la masse pour chaque constituant, nous devons avoir la contrainte suivante sur les flux de diffusion  $J_\alpha^\beta$

$$\sum_\beta J_\alpha^\beta = 0, \quad \forall \alpha. \quad (\text{B.3.10})$$

*Remarque B.1.* Ici nous avons fait le choix d'utiliser la fraction massique comme *moteur* dans la loi de Fick mais il est également possible de prendre la concentration. A notre connaissance, il n'y a pas de raison de préférer une formulation par rapport à une autre.

Les flux massiques de chaque composant ( $\beta = w, h$ ) dans chaque phase ( $\alpha = l, g$ ) s'écrivent donc

$$\mathbf{F}_\alpha^\beta = \rho_\alpha^\beta \mathbf{V}_\alpha + J_\alpha^\beta. \quad (\text{B.3.11})$$

### B.4 Propriétés et lois de comportement des différents constituants

Dans cette section, nous écrivons les propriétés ainsi que les lois de comportement qui régissent les constituants des différentes phases.

Nous supposons que la relation entre les pressions partielles de chaque espèce dans la phase gazeuse et la pression de la phase gazeuse est donnée via la loi de Dalton

$$p_g = \sum_{\beta} p_g^{\beta}, \quad \beta \in \{w, h\}, \quad (\text{B.4.12})$$

où les  $p_g^{\beta}$  représentent les pressions partielles du constituant  $\beta$  dans la phase gazeuse. Nous supposons également que les lois d'états pour les pressions partielles de chaque espèce dans la phase gazeuse sont de type gaz parfait

$$p_g^{\beta} = \frac{\rho_g^{\beta}}{M^{\beta}} RT, \quad \beta \in \{w, h\}, \quad (\text{B.4.13})$$

où  $M^{\beta}$  est la masse molaire du composant  $\beta$ ,  $T$  est la température du gaz et  $R$  la constante universelle des gaz parfaits.

En supposant que le mélange eau liquide/vapeur d'eau est idéal, nous pouvons écrire la loi de Raoult suivante

$$p_g^w = \tilde{p}_g^w X_l^w, \quad (\text{B.4.14})$$

où  $\tilde{p}_g^w$  est la pression de vapeur saturante de l'eau pure dépendant de la température. Pour plus de détails, nous renvoyons à [57] ou [33].

## B.5 Équations physiques

La conservation de la masse de chaque constituant  $\beta \in \{w, h\}$  dans un volume élémentaire  $\mathcal{V}$  peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{d\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta}}{dt} + \mathcal{F}_{\alpha}^{\beta} = \overline{\mathcal{T}}_{\alpha}^{\beta} \text{ avec } \overline{\mathcal{T}}_{\alpha}^{\beta} = \int_{\mathcal{V}} \overline{\Omega}_{\alpha}^{\beta} dx, \quad (\text{B.5.15})$$

où  $\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta}$ ,  $\mathcal{F}_{\alpha}^{\beta}$  et  $\overline{\Omega}_{\alpha}^{\beta}$  représentent respectivement la masse du constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$ , le débit du constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$  sortant à travers la frontière d'un volume arbitraire fixe  $\mathcal{V}$  et le transfert de masse entre les constituants  $\beta$  de chaque phase  $\alpha$  due à des réactions chimiques et/ou des changements de phase. Comme la production de chaque constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$  doit être accompagnée par la destruction de cette espèce dans l'autre phase, nous avons

$$\sum_{\alpha} \overline{\Omega}_{\alpha}^h = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha} \overline{\Omega}_{\alpha}^w = 0. \quad (\text{B.5.16})$$

La masse totale du constituant  $\beta$  présent dans la phase  $\alpha$  dans le volume  $\mathcal{V}$  est donnée par

$$\mathcal{M}_{\alpha}^{\beta} = \int_{\mathcal{V}} \Phi s_{\alpha} \rho_{\alpha}^{\beta} dx, \quad \alpha \in \{l, g\}, \quad \beta \in \{w, h\}. \quad (\text{B.5.17})$$

Le débit du constituant  $\beta$  présent dans la phase  $\alpha$  est du à la migration de ce dernier et a pour origine son transport et sa diffusion moléculaire, donc  $\mathcal{F}_\alpha^\beta$  est donné par

$$\mathcal{F}_\alpha^\beta = \int_{\partial\mathcal{V}} (\rho_\alpha^\beta \mathbf{V}_\alpha + J_\alpha^\beta) \cdot \mathbf{n} dx, \quad \alpha \in \{l, g\}, \quad \beta \in \{w, h\}, \quad (\text{B.5.18})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire sortante de  $\partial\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{V}_\alpha$  est la vitesse d'écoulement de la phase  $\alpha$  et  $J_\alpha^\beta$  est le flux diffusif du constituant  $\beta$  dans la phase  $\alpha$ .

Par conséquent, nous pouvons écrire l'équation (B.5.15) sous la forme d'équations aux dérivées partielles

$$(\mathfrak{P}) \begin{cases} \partial_t(\Phi \rho_l^w s_l) + \text{div}(\rho_l^w \mathbf{V}_l + J_l^w) = \overline{\Omega}_l^w, \\ \partial_t(\Phi \rho_l^h s_l) + \text{div}(\rho_l^h \mathbf{V}_l + J_l^h) = \overline{\Omega}_l^h, \\ \partial_t(\Phi \rho_g^h s_g) + \text{div}(\rho_g^h \mathbf{V}_g + J_g^h) = \overline{\Omega}_g^h, \\ \partial_t(\Phi \rho_g^w s_g) + \text{div}(\rho_g^w \mathbf{V}_g + J_g^w) = \overline{\Omega}_g^w. \end{cases}$$

## B.6 Hypothèses physiques et relations de fermeture

Dans la suite, on suppose que le milieu poreux est indéformable (porosité constante), l'écoulement du mélange fluide est isotherme, c'est-à-dire la température  $T$  est constante en tout point et en tout temps et que l'eau pure est incompressible, c'est-à-dire  $\rho_l^w$  est constante.

Dans le cadre des études sur le stockage géologique des déchets radioactifs de longue activité, il est important de prendre en compte le dégagement d'hydrogène provenant de la corrosion des colis. La phase gazeuse est majoritairement composée d'hydrogène, c'est pourquoi on négligera dans la suite la vapeur d'eau. Ceci revient à supposer que la pression de vapeur d'eau saturante est nulle

$$p_g^w = 0. \quad (\text{B.6.19})$$

Les conséquences directes de cette hypothèse sont que  $\rho_g^w = 0$  et  $p_g^w = 0$ . On en déduit alors que

$$p_g = p_g^h, \quad \rho_g = \rho_g^h, \quad J_g^h = J_g^w = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\Omega}_l^w = \overline{\Omega}_g^w = 0. \quad (\text{B.6.20})$$

Ces hypothèses élimine la quatrième équation du système  $(\mathfrak{P})$  qui devient

$$(\mathfrak{P}) \begin{cases} \partial_t(\Phi \rho_l^w s_l) + \text{div}(\rho_l^w \mathbf{V}_l + J_l^w) = 0, \\ \partial_t(\Phi \rho_g^h s_g) + \text{div}(\rho_g^h \mathbf{V}_g) = \overline{\Omega}_g^h, \\ \partial_t(\Phi \rho_l^h s_l) + \text{div}(\rho_l^h \mathbf{V}_l + J_l^h) = \overline{\Omega}_l^h. \end{cases}$$

Dans la plupart des études, l'équilibre thermodynamique local entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux est supposé (voir [20], [46] ou encore [13]). Cette hypothèse revient à considérer que les transferts d'espèces chimiques se font à vitesse infinie entre

les deux phases. Ceci se traduit par une relation entre la densité d'hydrogène dissous et la densité d'hydrogène gazeux  $\rho_l^h = f(\rho_g^h)$ . Cela permet de simplifier le système  $(\mathfrak{P})$  et de faire disparaître les termes de transfert de masse comme on le décrit dans la suite. Il est également possible de ne pas supposer avoir équilibre thermodynamique local. Dans ce cas, il est nécessaire de prescrire un transfert de masse entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux. Pour résumer nous proposons alors deux choix pour ce transfert de masse :

- transfert de masse statique (équilibre local),
- transfert de masse dynamique (sans équilibre local),

ce qui fait l'objet des sections qui suivent. x

### B.6.1 Transfert de masse statique (loi de Henry)

À température constante et à saturation liquide donnée, la loi de Henry relie la quantité de gaz dissous dans un liquide avec la pression partielle qu'exerce ce gaz sur le liquide. Elle peut être généralisée sous forme de l'inégalité suivante (voir [46])

$$\begin{cases} \rho_l^h \leq M^h H(T)(p_l + p_c(s_l)), \\ s_l \leq 1, \end{cases} \quad (\text{B.6.21})$$

où  $H(T)$  représente le coefficient de Henry qui dépend de la température.

L'inégalité (B.6.21) peut alors s'exprimer sous la forme suivante

$$(\rho_l^h = M^h H(T)p_g \text{ et } s_l < 1) \text{ ou } (\rho_l^h \leq M^h H(T)p_l \text{ et } s_l = 1), \quad (\text{B.6.22})$$

que nous pouvons finalement écrire comme

$$(1 - s_l)(M^h H(T)(p_l + p_c(s_l)) - \rho_l^h) = 0. \quad (\text{B.6.23})$$

Dans le cas de transfert de masse statique, on impose la loi de Henry dans les équations du système  $(\mathfrak{P})$  pour clore le système en utilisant les lois données dans la section B.4 (lois de perméabilités relatives, loi de pression capillaire, loi de gaz parfait, ...) et on élimine le terme d'échange  $\bar{\Omega}_\alpha^h$ , en sommant les deux dernières équations données par le système  $(\mathfrak{P})$ . Nous obtenons donc le modèle diphasique classique

$$(\text{HELMOD}) \begin{cases} \partial_t(\Phi \rho_l^w s_l) + \text{div}(\rho_l^w \mathbf{V}_l + J_l^w) = 0, \\ \partial_t(\Phi \rho_g^h s_g + \Phi \rho_l^h s_l) + \text{div}(\rho_g^h \mathbf{V}_g + \rho_l^h \mathbf{V}_l + J_l^h + J_g^h) = 0. \end{cases}$$

Ce modèle sera désormais appelé "HENry's Law MODel" (HELMOD).

### B.6.2 Transfert de masse dynamique

Le transfert de masse dynamique revient à supposer que l'équilibre entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous n'est pas instantané. Cela revient à ne pas imposer la loi de

Henry dans le système de conservation de la masse de chaque composant ( $\mathfrak{P}$ ) et donc de spécifier un transfert de masse entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous

$$\overline{\Omega}_l^h = -\Gamma\rho_l(X_l^h - X_{\text{eq}}), \quad (\overline{\Omega}_g^h = -\overline{\Omega}_l^h), \quad (\text{B.6.24})$$

où  $\Gamma$  est l'inverse d'un temps caractéristique de retour à l'équilibre et  $X_{\text{eq}}$  est une fraction massique équilibre. Le système ( $\mathfrak{P}$ ) devient alors

$$(\text{DYNMOD}) \begin{cases} \partial_t(\Phi\rho_l^w s_l) + \text{div}(\rho_l^w \mathbf{V}_l + J_l^w) = 0, \\ \partial_t(\Phi\rho_g^h s_g) + \text{div}(\rho_g^h \mathbf{V}_g) = \Gamma\rho_l(X_l^h - X_{\text{eq}}), \\ \partial_t(\Phi\rho_l^h s_l) + \text{div}(\rho_l^h \mathbf{V}_l + J_l^h) = -\Gamma\rho_l(X_l^h - X_{\text{eq}}). \end{cases}$$

Nous appellerons ce deuxième modèle, “DYNAmical Mass transfert mODEl” (DYNMOD).

## C Plan du manuscrit

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres. Ces chapitres sont répartis dans deux parties. La première partie qui regroupe les chapitres un et deux concerne l'analyse mathématique de deux modèles d'écoulement diphasique bicomposant en milieu poreux. Le premier modèle utilise un transfert de masse statique comme le modèle HELMOD mais dans lequel nous avons supposé que le flux diffusif  $J_l^w$  négligeable. L'autre modèle étudié dans le deuxième chapitre repose sur une relaxation du modèle HELMOD dans lequel on utilise un transfert de masse dynamique (modèle DYNMOD). La deuxième partie regroupe les chapitres trois et quatre et concerne l'analyse numérique de modèles d'écoulements diphasiques en milieu poreux. Dans le troisième chapitre, nous construisons deux schémas numériques afin de discrétiser le modèle HELMOD. Le premier schéma est une discrétisation directe du modèle HELMOD tandis que le deuxième schéma utilise le modèle DYNMOD où nous faisons tendre (formellement) le temps caractéristique de retour à l'équilibre thermodynamique. Dans le dernier chapitre, nous décrivons et étudions la convergence d'un schéma de type volumes finis pour un modèle d'écoulements diphasiques en milieu poreux sans distinction des composants dans leur phase.

### Partie I

#### Chapitre 1

L'existence de solution pour des problèmes d'écoulements diphasiques *incompressibles* et *immiscibles* en milieu poreux est bien connue via une formulation “pression globale” introduite par C. Chavent et J. Jaffré (voir par exemple les ouvrages Chavent et Jaffré [25] ou encore Gagneux et Maudane-Tort [41] et les articles [14], [2], [15], [34], [26] et [27]) selon diverses hypothèses sur les données physiques et dans [50], [52] sous l'hypothèse de non dégénérescence de la mobilité de chaque phase.

Par contre, les techniques utilisées dans le cas incompressible ne sont pas adaptées dans le cas compressible, hypothèse importante dans le cadre du stockage géologique des déchets

radioactifs. Peu de travaux sur l'existence de solution dans le cas compressible ont été réalisés. On peut cependant citer Galusinski et Saad dans la série d'articles intitulée "Système non linéaire dégénéré modélisant les écoulements diphasiques compressibles immiscibles" ([42], [43] et [44]) mais sans échange de matière entre les phases sous une formulation saturation liquide et pression globale ou encore Khalil et Saad ([48], [49]) où les densités de chaque composant dépendent de leur propre pression. Cette approche est également utilisée dans [4] et [5].

L'étude mathématiques des modèles de fluides miscibles a été étudiée dans [9], [10], [38], [28] et [40] et récemment dans [29], [30], [31] et [32], mais sans problème de dégénérescence du terme dissipatif.

Ce chapitre s'intéresse à l'analyse mathématique d'un système d'équations décrivant un écoulement diphasique (liquide et gaz) bicomposant (eau et hydrogène) en milieu poreux. L'eau est supposée incompressible et l'hydrogène compressible avec dissolution dans l'eau. Nous supposons qu'il existe un équilibre thermodynamique local entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux. L'écoulement est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles traduisant la conservation de la masse de l'hydrogène et de l'eau dans lequel le flux de diffusion  $J_l^w$  est négligé

$$\begin{cases} \partial_t(\Phi_{s_l}\rho_l^h + \Phi_{s_g}\rho_g^h) + \operatorname{div}(\rho_l^h\mathbf{V}_l + \rho_g^h\mathbf{V}_g + J_l^h + J_g^h) = r_g, \\ \partial_t(\Phi_{s_l}\rho_l^w) + \operatorname{div}(\rho_l^w\mathbf{V}_l) = r_l, \end{cases}$$

Pour une présentation détaillée du modèle, nous référons à la présentation de benchmark Couplex-Gaz par J. Talandier [70].

La difficulté de ce problème réside dans la dégénérescence du terme dissipatif lorsque le milieu devient saturé. La compressibilité de chaque phase gazeuse ajoute également des difficultés à l'analyse d'un tel système.

Sous des conditions de non-dégénérescence des termes dissipatifs et avec des hypothèses de petites données initiales pour l'hydrogène, A. Mikelić [59] a établi l'existence d'une solution faible pour ce modèle.

On s'intéresse à l'étude de l'existence de solutions faibles pour ce modèle mais sans hypothèse de non-dégénérescence des termes dissipatifs et en supposant que la densité de chaque composant dans sa phase gazeuse dépend de sa propre pression.

De nouvelles estimations d'énergies sont obtenues pour contrôler les vitesses de chaque phase. Par contre, la dégénérescence de la mobilité dans la région où la phase est absente (B.2.8), ne permet pas de contrôler la pression de chaque phase. Pour cela, nous allons utiliser une fonction pression globale comme définie dans [25] par

$$\begin{aligned} M(s_l)\nabla p &= M_l(s_l)\nabla p_l + M_g(s_g)\nabla p_g, \text{ où} \\ M_\alpha(s_\alpha) &= k_{r_\alpha}(s_\alpha)/\mu_\alpha \text{ et } M(s_l) = M_l(s_l) + M_g(s_g), \end{aligned}$$

qui peut se contrôler indépendamment de la présence ou non de l'une des phases. Cette nouvelle approche ne nécessite pas la formulation du problème diphasique en fonction de la pression globale. La relation entre la pression globale et la pression de chaque phase nous

permet d'obtenir l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} M(s_l) |\nabla p|^2 dxdt + \int_{Q_T} \frac{M_l(s_l) M_g(s_g)}{M(s_l)} |\nabla p_c(s_l)|^2 dxdt \\ = \int_{Q_T} M_l(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dxdt + \int_{Q_T} M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dxdt, \end{aligned} \quad (\text{C.0.25})$$

qui montre que le contrôle des vitesses de chaque phase assure le contrôle de la pression globale et d'un terme dissipatif dans tout le domaine indépendamment de la présence ou non d'une des phases. Ces estimations sont le point clé de l'étude de ce chapitre.

## Chapitre 2

Le deuxième chapitre propose l'étude de l'existence de solutions faibles du modèle DYNMOD dans lequel l'équilibre thermodynamique local entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux n'est plus supposée. Cette hypothèse est assurée dans certaines circonstances et en particulier pour la description précise des problèmes de pollution (voir [55], [60] et [64]). De même, Geller et Hunt [45] ont étudié la dissolution d'un liquide organique dans l'eau en milieu poreux homogène dans des conditions où l'équilibre entre la phase organique et la phase aqueuse n'est pas atteint. D'un point de vue mathématique, P. Fabrie et al [39] ont étudié l'existence et la stabilité de solutions d'un modèle diphasique incompressible eau-huile avec une cinétique de transfert de masse non instantanée.

Le système DYNMOD étudié dans ce chapitre peut s'écrire de la façon suivante

$$(\mathfrak{M}) \begin{cases} \partial_t(\Phi \rho_l(p_l) s_l) + \operatorname{div}(\rho_l(p_l) \mathbf{V}_l) = -\dot{m}, \\ \partial_t(\Phi \rho_g(p_g) s_g) + \operatorname{div}(\rho_g(p_g) \mathbf{V}_g) = \dot{m}, \\ \partial_t(\Phi \rho_l(p_l) s_l X) + \operatorname{div}(\rho_l(p_l) \mathbf{V}_l X) - \operatorname{div}(\rho_l(p_l) D_l^h(s_l) \nabla X) = -\dot{m}, \end{cases}$$

où

$$\dot{m} = \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}),$$

représente le transfert de masse entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous.

De nouvelles estimations d'énergies sont obtenues pour contrôler les vitesses de chaque phase et les termes capillaires. Par contre, la dégénérescence de la mobilité dans la région où une phase est absente (B.2.8) ne permet pas de contrôler la pression de chaque phase. En utilisant les mêmes techniques que celles développées dans le chapitre 1 nous allons utiliser la fonction pression globale définie dans [25] pour traiter la dégénérescence du terme de diffusion. Le terme d'évolution en temps présente également un problème de dégénérescence. Celui-ci est traité par une méthode de semi-discrétisation en temps [3]. Nous prouvons également un principe du maximum sur la saturation liquide ainsi que sur la concentration d'hydrogène dissous.



## Partie II

### Chapitre 3

Le troisième chapitre est dédié à l'écriture de deux schémas numériques pour discrétiser le modèle HELMOD et à comparer numériquement ensuite ces deux schémas. Le premier schéma numérique consiste en une discrétisation directe des termes différentiels du modèle HELMOD tandis que le deuxième schéma numérique est basé sur le modèle DYNMOD où on fera tendre (formellement) le temps de retour à l'équilibre thermodynamique entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux vers zéro.

Plus précisément, nous présentons tout d'abord le formalisme mathématique pour les deux modèles, formalisme qui nous sera ensuite utile pour décrire les schémas numériques. Le premier schéma numérique consiste à discrétiser directement les termes différentiels du modèle HELMOD. Le deuxième schéma utilise le modèle DYNMOD et est basé sur une méthode de splitting en temps. Nous utilisons alors dans un premier temps le même schéma que celui utilisé pour discrétiser le modèle HELMOD mais sans transfert de masse. Ceci nous donne un état intermédiaire  $(s_i^*, p_i^*, (\rho_i^h)^*)$ . Ensuite, nous prenons en compte les termes de transfert de masse mais comme le temps caractéristique de retour à l'équilibre thermodynamique dans le modèle est voué à tendre vers zéro, plutôt que d'intégrer une EDO raide, nous projetons cet état intermédiaire sur la variété dite équilibre définie par la loi de Henry.

Des validations numériques sont ensuite présentées. Nous comparons dans un premier temps les solutions obtenus à l'aide de ces deux schémas. Nous testons également le deuxième schéma sur un cas test issu des cas tests MOMAS diphasique proposés par F. Smaï [67] lors du benchmark "Écoulement diphasique", dans le cadre du GNR MOMAS [61].

### Chapitre 4

Le quatrième chapitre est consacré au développement et à l'analyse de convergence d'un schéma numérique de type volume finis avec un décentrage phase par phase pour un système d'équations décrivant l'injection d'un fluide incompressible, typiquement de l'eau, dans un réservoir d'hydrocarbure compressible, typiquement du gaz. La différence avec les précédents modèles vient du fait que l'on ne fait pas distinction des différents composants dans leur phase. Le modèle qui décrit ces écoulements s'obtient en écrivant la conservation de la masse du gaz et la conservation de la masse du fluide incompressible (eau en général).

En supposant que la densité de la phase gazeux dépend de sa propre pression, on obtient alors le modèle suivant

$$\begin{cases} \Phi(x)\partial_t(\rho_g(p_g)s_g)(t, x) + \text{div}(\rho_g(p_g)\mathbf{V}_g)(t, x) + \rho_g(p_g)s_g f_P(t, x) = 0, \\ \Phi(x)\partial_t s_w(t, x) + \text{div}(\mathbf{V}_w)(t, x) + s_w f_P(t, x) = f_I(t, x). \end{cases}$$

où  $f_I$  et  $f_P$  sont respectivement les termes injections et productions.

Ce schéma est une méthode numérique utilisée en pratique dans l'industrie pétrolière. L'idée est de faire un décentrage des équations phase par phase. L'étude de ce schéma

est basée sur des estimations a priori dont l'adaptation au cas discret pose de nombreuses difficultés. Ces nouvelles estimations d'énergies discrètes sont obtenues pour contrôler les vitesses de chaque phase. Par contre, la dégénérescence de la mobilité dans la région où la phase est absente (B.2.8), ne permet pas de contrôler la pression de chaque phase. Nous allons alors utiliser la fonction de la pression globale définie dans [25] pour traiter ce problème de dégénérescence.

Dans le cas continue, la relation (C.0.25) entre la pression de chaque phase, la pression globale et un terme dissipatif montre que le contrôle des vitesses de chaque phase assure le contrôle de la pression globale et du terme capillaire. Par contre, dans le cas discret, cette relation n'est plus valide. Elle est remplacée par quatre inégalités discrètes. Celles-ci permettent de contrôler les vitesses de chaque phase, la pression globale et les termes dissipatifs dans tout le domaine indépendamment de la présence ou non d'une des phases. Ces estimations sont importantes pour obtenir un résultat de compacité et sont ensuite utilisés pour montrer le résultat de convergence lorsque le pas de temps et le pas d'espace tendent vers zéro.

Nous avons également testé ce schéma sur un problème  $2D$  sur un maillage triangulaire non structuré.



## Première partie

# Étude théorique de deux modèles d'écoulement diphasique bicomposant en milieu poreux



# Chapitre 1

## Écoulements miscibles compressibles en milieu poreux

Comme indiqué dans l'introduction, la modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux est importante en ingénierie pétrolière et pour les problèmes de stockage de déchets radioactifs. L'existence de solution pour les problèmes d'écoulements diphasiques *incompressibles* et *immiscibles* en milieu poreux est bien connue via une formulation "pression globale" introduite par C. Chavent et J. Jaffré [25]. Cependant, les techniques utilisées dans le cas incompressible ne sont pas adaptées dans le cas compressible, hypothèse importante dans le cadre du stockage géologique des déchets radioactifs. Peu de travaux sur l'existence de solution dans le cas compressible ont été réalisés. On peut cependant citer par exemple Galusinski et Saad [44] pour une étude sans échange de matière entre les phases sous une formulation saturation liquide et pression globale ou encore Khalil et Saad [48] où les densités de chaque composant dans la phase gazeuse sont supposées dépendre de leur propre pression.

Dans ce chapitre, nous établissons l'existence de solutions faibles pour un système d'équations décrivant un écoulement diphasique liquide/gaz avec échange entre les phases comme celui proposé par J. Talandier [70] lors de la présentation de benchmark Couplex-Gaz, sans hypothèse de non-dégénérescence et de petites données initiales pour l'hydrogène comme Mikelic [59]. Nous supposons également que la densité de chaque composant dans la phase gazeuse dépend de sa propre pression.

### 1.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles traduisant la conservation de la masse pour l'hydrogène et l'eau s'écrivent

$$\begin{cases} \partial_t(\Phi_{S_l}\rho_l^h + \Phi_{S_g}\rho_g^h) + \operatorname{div}(\rho_l^h\mathbf{V}_l + \rho_g^h\mathbf{V}_g + J_l^h + J_g^h) = r_g, & (1.1.1) \\ \partial_t(\Phi_{S_l}\rho_l^w) + \operatorname{div}(\rho_l^w\mathbf{V}_l) = r_w. & (1.1.2) \end{cases}$$

En utilisant la loi des gaz parfaits (B.4.13) et la loi de Henry (B.6.23), la densité de

l'hydrogène gazeux est proportionnelle à la densité d'hydrogène dissous de la façon suivante

$$\rho_g^h = \mathcal{C}_1 \rho_l^h \text{ où } \mathcal{C}_1 = \frac{1}{HRT}$$

Par ailleurs, en utilisant la définition de la fraction massique (B.1.3) et l'hypothèse d'une masse volumique d'eau liquide  $\rho_l^w$  constante, nous avons l'égalité suivante

$$\rho_l \nabla X_l^h = X_l^w (\rho_l^h)' \nabla p_g.$$

D'autre part, en utilisant la loi de Henry (B.6.23) et la définition de la fraction massique (B.1.3), on a également l'égalité suivante

$$\rho_l \nabla X_l^h = \mathcal{C}_2 X_l^w \nabla p_g.$$

où  $\mathcal{C}_2$  est une constante égale à  $HM^h$ .

En intégrant les hypothèses ci-dessus dans les équations de conservations de la masse (1.1.2)–(1.1.1), on obtient alors les équations simplifiées suivantes

$$\begin{cases} \partial_t (\Phi m(s_l) \rho_l^h) + \operatorname{div} (\rho_l^h \mathbf{V}_l + \mathcal{C}_1 \rho_l^h \mathbf{V}_g) - \operatorname{div} (\mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g) = r_g, & (1.1.3) \\ \partial_t (\Phi s_l) + \operatorname{div} (\mathbf{V}_l) = \frac{r_w}{\rho_l^w}, & (1.1.4) \end{cases}$$

où  $m(s_l) = s_l + \mathcal{C}_1 s_g$ .

## 1.2 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

Dans ce paragraphe nous allons définir quelques notations utiles dans la suite, donner les hypothèses sur les paramètres physiques intervenant dans le système (1.1.3)–(1.1.4) et le résultat principal de ce chapitre.

Nous définissons la pression globale  $p$  comme dans [25]

$$M(s_l) \nabla p = M_l(s_l) \nabla p_l + M_g(s_g) \nabla p_g,$$

où la mobilité  $M_\alpha$  de chaque phase  $\alpha$  et la mobilité totale  $M$  sont définies par

$$M_\alpha(s_\alpha) = k_{r_\alpha}(s_\alpha) / \mu_\alpha \text{ et } M(s_l) = M_l(s_l) + M_g(s_g).$$

Comme dans [25], [44] et [48], on définit des fonctions  $\tilde{p}$ ,  $\bar{p}$  par

$$\frac{d\tilde{p}(s_l)}{ds_l} = -\frac{M_l(s_l)}{M(s_l)} \frac{dp_c(s_l)}{ds_l} \text{ et } \frac{d\bar{p}(s_l)}{ds_l} = \frac{M_g(s_g)}{M(s_l)} \frac{dp_c(s_l)}{ds_l}.$$

La pression globale  $p$  peut alors s'écrire comme

$$p = p_g + \tilde{p}(s_l) = p_l + \bar{p}(s_l). \quad (1.2.1)$$

Nous définissons aussi le terme capillaire  $\xi$  par

$$\xi(s_l) = -\frac{M_l(s_l)M_g(s_g)}{M(s_l)} \frac{dp_c(s_l)}{ds_l} \geq 0.$$

Pour compléter la description du modèle, nous définissons les conditions aux limites et les conditions initiales. Soit  $T > 0$  le temps final et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ). Soit  $\Gamma_l$  la partie saturée sur le bord de  $\Omega$  et  $\Gamma_n = \partial\Omega \setminus \Gamma_l$ . Les conditions aux limites sur les pressions sont données par

$$\begin{cases} p_g(t, x) = p_l(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_l, \\ \mathbf{V}_l \cdot \mathbf{n} = \mathbf{V}_g \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n, \\ \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal sortant à  $\Gamma_n$ . Les conditions initiales sont définies sur les pressions par

$$\begin{cases} p_g(0, x) = p_g^0(x) \text{ dans } \Omega, \\ p_l(0, x) = p_l^0(x) \text{ dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Notant  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  et  $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ , on introduit maintenant les hypothèses sur les coefficients physiques intervenant dans le système (1.1.3)–(1.1.4).

- (H1) La porosité  $\Phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et il existe deux constantes positives  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  telles que  $\Phi_0 \leq \Phi(x) \leq \Phi_1$  presque pour tout  $x \in \Omega$ .
- (H2) Il existe deux constantes positives  $k_0$  et  $k_\infty$  telles que pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et pour presque tout  $x \in \Omega$

$$\|\mathbf{K}\|_{(L^\infty(\Omega))^{d \times d}} \leq k_\infty \text{ et } (\mathbf{K}(x)\xi, \xi) \geq k_0|\xi|^2.$$

- (H3) Les mobilités  $M_l, M_g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$  vérifient  $M_\alpha(s_\alpha = 0) = 0$ . De plus, il existe une constante positive  $m_0$  telles que pour tout  $s_l \in [0, 1]$

$$M_l(s_l) + M_g(s_g) \geq m_0 > 0.$$

- (H4) La densité  $\rho_l \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  est croissante et il existe deux constantes positives  $\rho_m$  et  $\rho_M$  telles que  $0 < \rho_m \leq \rho_l \leq \rho_M$ .
- (H5) Les fonctions  $r_\omega, r_g \in L^2(Q_T)$  et sont positives pour presque tout  $(t, x) \in Q_T$ .
- (H6) Le tenseur de diffusion  $D_l^h$  est une fonction non linéaire et continue de la saturation liquide  $s_l$ . De plus, il existe deux constantes positives  $d_1$  et  $d_2$  telles que pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$

$$\|D_l^h(x, s_l)\| \leq d_1 \text{ et } \langle D_l^h(x, s_l)v, v \rangle \geq d_2\|v\|^2.$$



(H7) La pression capillaire  $p_c \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$  est décroissante et vérifie

$$0 < \underline{p}_c \leq \left| \frac{dp_c}{ds_l} \right|.$$

(H8) Le terme capillaire  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$  vérifie  $\xi(s_l) > 0$  pour  $0 < s_l < 1$  et  $\xi(0) = \xi(1) = 0$ . Nous supposons également que  $\mathcal{B}^{-1}$  (l'inverse de  $\mathcal{B}(s_l) = \int_0^{s_l} \xi(z) dz$ ) est une fonction höldérienne <sup>1</sup> d'ordre  $\theta$ , avec  $0 < \theta \leq 1$  sur  $[0, \mathcal{B}(1)]$ .

Nous définissons également l'espace de Sobolev  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  par

$$H_{\Gamma_l}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_l\},$$

qui est un espace de Hilbert avec la norme  $\|u\|_{H_{\Gamma_l}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}$ .

Nous énonçons le théorème d'existence de solutions faibles du système (1.1.3)–(1.1.4) suivant

**Théorème 1.2.1.** *Sous les hypothèses (H1)–(H8), en supposant que les données initiales  $p_g^0$  et  $p_l^0$  données dans (1.2.3) sont définies p.p. dans  $\Omega$  avec  $0 \leq s_l^0 \leq 1$  et  $s_l \leq 1$ . Alors il existe  $(p_g, p_l)$  solution faible du système (1.1.3)–(1.1.4) dans le sens où pour tout  $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$  avec  $\varphi(T, \cdot) = \psi(T, \cdot) = 0$ ,*

$$\left\{ \begin{array}{l} - \int_{Q_T} \Phi m(s_l) \rho_l^h(p_g) \partial_t \varphi dx dt - \int_{\Omega} \Phi m(s_l^0) \rho_l^h(p_g^0) \varphi(0, x) dx \\ \quad + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_l(s_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ \quad + \mathcal{C}_1 \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_g(s_l) (\nabla p_g - \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ \quad + \int_{Q_T} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{Q_T} r_g \varphi dx dt, \\ - \int_{Q_T} \Phi s_l \partial_t \psi dx dt - \int_{\Omega} \Phi s_l^0 \psi(0, x) dx \\ \quad + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} \frac{r_w}{\rho_l^w} \psi dx dt. \end{array} \right. \quad (1.2.4)$$

De plus, nous avons les estimations suivantes

$$p_g \text{ et } \sqrt{M_\alpha(s_\alpha)} p_\alpha \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t (\rho_l^h(p_g) m(s_l)) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (1.2.6)$$

$$s_l \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T, \quad \mathcal{B}(s_l) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t s_l \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \quad (1.2.7)$$

Les conditions initiales sont quant à elles satisfaites dans le sens où pour tout  $\xi \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ , les fonctions

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \Phi \rho_l^h(p_g) m(s_l) \xi dx \text{ et } t \rightarrow \int_{\Omega} \Phi s_l \xi dx,$$

<sup>1</sup>i.e il existe une constante  $c$  positive telle que pour tout  $a, b \in [0, \mathcal{B}(1)]$ , on a  $|\mathcal{B}^{-1}(a) - \mathcal{B}^{-1}(b)| \leq c|a - b|^\theta$ .

sont dans  $\mathcal{C}^0([0, T])$  et vérifient

$$\begin{aligned} \left( \int_{\Omega} \Phi \rho_l^h(p_g) m(s_l) \xi dx \right) (0) &= \int_{\Omega} \phi \rho_l^h(p_g^0) m(s_l^0) \xi dx, \\ \left( \int_{\Omega} \Phi s_l \xi dx \right) (0) &= \int_{\Omega} \Phi s_l^0 \xi dx. \end{aligned}$$

Le système d'équation (1.1.3)–(1.1.4) possède deux types de dégénérescence : la dégénérescence du terme d'évolution  $\partial_t(s_l)$  quand la saturation vaut zéro et dégénérescence des termes dissipatifs  $\operatorname{div}(M_\alpha \nabla p_\alpha)$  quand la mobilité vaut zéro. Comme la mobilité de chaque phase dégénère dans la région où la phase est absente, l'estimation d'énergie de  $M_\alpha \nabla p_\alpha$  en norme  $L^2$  ne suffit pas à contrôler le gradient de pression de chaque phase. Notre stratégie consiste à contrôler la vitesse de la phase  $\alpha$ . Cela va permettre d'obtenir des estimations sur la pression globale dans tout le domaine indépendamment de la dégénérescence de la phase ainsi que sur le terme capillaire  $\mathcal{B}$  pour traiter la dégénérescence du système. La section suivante nous donne certaines estimations d'énergie nécessaires pour prouver le théorème 1.2.1.

### 1.3 Estimations d'énergie

Dans cette section, nous obtenons des estimations sur le gradient de la pression globale  $p$  et sur le gradient du terme capillaire  $\mathcal{B}$ . Pour cela, on définit

$$g_g(p_g) = \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_l^h(q)} dq \text{ et } \mathcal{H}_g(p_g) = \rho_l^h(p_g) g_g(p_g) - p_g.$$

En multipliant (1.1.3) par  $g_g(p_g)$  et (1.1.4) par  $\mathcal{C}_1 p_l - p_g$ , après l'intégration sur  $\Omega$  et sommation des deux équations, on en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \left[ \partial_t \left( m(s_l) \rho_l^h(p_g) \right) g_g(p_g) + \partial_t s_l \left( \mathcal{C}_1 p_l - p_g \right) \right] dx \\ & + \mathcal{C}_1 \sum_{\alpha} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{K} M_{\alpha}(s_{\alpha}) (\nabla p_{\alpha} - \rho_{\alpha}(p_{\alpha}) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_{\alpha} dx \right] \\ & + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx = \int_{\Omega} \left( r_g g_g(p_g) + \frac{r_w}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) dx. \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

Ensuite, formellement, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \partial_t \left( m(s_l) \rho_l^h(p_g) \right) g_g(p_g) + \partial_t s_l \left( \mathcal{C}_1 p_l - p_g \right) \\ &= \partial_t \left( m(s_l) \rho_l^h(p_g) g_g(p_g) \right) + \partial_t \left( s_l (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) + \mathcal{C}_1 s_l \partial_t (p_g - p_l) - \mathcal{C}_1 \partial_t p_g \\ &= \partial_t \left( m(s_l) \rho_l^h(p_g) g_g(p_g) \right) + \partial_t \left( s_l (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) + \mathcal{C}_1 s_l \partial_t (p_c) - \mathcal{C}_1 \partial_t p_g. \end{aligned}$$

Considérons  $\mathcal{N}$  la primitive de  $s_l dp_c/ds_l(s_l)$ . On peut alors écrire  $\mathcal{M}$  comme  $\mathcal{M} = \partial_t \mathcal{E}$  où  $\mathcal{E}$  est défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= m(s_l) \rho_l^h(p_g) g_g(p_g) + s_l (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) + \mathcal{C}_1 \mathcal{N}(s_l) - \mathcal{C}_1 p_g \\ &= m(s_l) \left( \rho_l^h(p_g) g_g(p_g) - p_g \right) - \mathcal{C}_1 s_l p_c(s_l) + \mathcal{C}_1 \mathcal{N}(s_l). \end{aligned}$$

D'après la définition de la fonction  $\mathcal{H}_g$  et de la fonction  $\mathcal{N}$ , la fonction  $\mathcal{E}$  devient simplement

$$\mathcal{E} = m(s_l) \mathcal{H}_g(p_g) - \mathcal{C}_1 \int_0^{s_l} p_c(z) dz.$$

En utilisant cette égalité, l'égalité (1.3.1) devient alors

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \left[ m(s_l) \mathcal{H}_g(p_g) - \mathcal{C}_1 \int_0^{s_l} p_c(z) dz \right] dx + \\ & \mathcal{C}_1 \sum_{\alpha} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{K} M_{\alpha}(s_{\alpha}) (\nabla p_{\alpha} - \rho_{\alpha}(p_{\alpha}) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_{\alpha} dx \right] + \\ & \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx = \int_{\Omega} (r_g g_g(p_g) + \frac{r_w}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l - p_g)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (H1)–(H5), la positivité de  $\mathcal{H}_g$  et la sublinéarité de la fonction  $g_g(p_g)$ , on en déduit que

$$\int_{Q_T} M_l(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dx dt + \int_{Q_T} M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx dt < C,$$

où  $C$  est une constante. En terme de pression globale, on a alors l'égalité suivant

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} M |\nabla p|^2 dx dt + \int_{Q_T} \frac{M_l M_g}{M} |\nabla p_c(s_l)|^2 dx dt \\ & = \int_{Q_T} M_l(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dx dt + \int_{Q_T} M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx dt \leq C, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

ce qui implique que  $p \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ ,  $p_g \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$  et  $\mathcal{B}(s_l) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

## 1.4 Régularisation du système

Afin de prouver le théorème 1.2.1 et pour traiter le problème de dégénérescence dues aux mobilités, nous régularisons le système (1.1.4)–(1.1.3) en ajoutant un terme dissipatif capillaire dans chaque équation. Le système non-dégénéré que l'on appellera  $\mathfrak{P}_{\eta}$  s'écrit alors

$$\mathfrak{P}_{\eta} \begin{cases} \partial_t (\Phi m(s_l^{\eta}) \rho_l^h(p_g^{\eta})) - \operatorname{div}(\mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\eta}) M_l(s_l^{\eta}) (\nabla p_l^{\eta} - \rho_l(p_l^{\eta}) \mathbf{g})) - \\ \quad \mathcal{C}_1 \operatorname{div}(\mathbf{K} \rho_l^h M_g(s_g^{\eta}) (\nabla p_g^{\eta} - \rho_g(p_g^{\eta}) \mathbf{g})) - \operatorname{div}(\mathcal{C}_2 (X_l^w)^{\eta} (D_l^h)^{\eta} \nabla p_g) + \\ \quad (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \operatorname{div}(\rho_l^h(p_g) \nabla (p_g^{\eta} - p_l^{\eta})) = r_g, \\ \partial_t (\Phi s_l^{\eta}) - \operatorname{div}(\mathbf{K} M_l(s_l^{\eta}) \nabla p_l^{\eta}) - \eta \operatorname{div}(\nabla (p_g^{\eta} - p_l^{\eta})) = \frac{r_w}{\rho_l^w}, \end{cases} \quad (1.4.1)$$

$$(1.4.2)$$

avec les condition initiales (1.2.3) et les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} p_g^\eta(t, x) = p_l^\eta(t, x) = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \\ (\mathbf{V}_l^\eta + \mathcal{C}_1 \mathbf{V}_g^\eta + \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_l, \\ (\mathbf{V}_l^\eta - \eta \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_l, \end{cases} \quad (1.4.3)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normale sortant à  $\Gamma_n$ .

Il s'agit maintenant de montrer l'existence de solutions pour le système  $\mathfrak{P}_\eta$ . Pour cela, nous avons le théorème suivant

**Théorème 1.4.1.** *Sous les hypothèses (H1)–(H8), en supposant que  $p_g^0$  et  $p_l^0$  sont dans  $L^2(\Omega)$  avec  $0 \leq s_l^0 \leq 1$  et  $s_l \leq 1$ . Alors pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $(p_g^\eta, p_l^\eta)$  solution faible de  $\mathfrak{P}_\eta$  dans le sens où pour tout  $\varphi, \psi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$*

$$\begin{aligned} & \langle \Phi \partial_t (m(s_l^\eta) \rho_l^h(p_g^\eta)), \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dxdt + \\ & \mathcal{C}_1 \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) M_g(s_l^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dxdt + \\ & \int_{Q_T} \mathcal{C}_2 (X_l^w)^\eta D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi \, dxdt + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi \, dxdt = \\ & \int_{Q_T} r_g \varphi \, dxdt, \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

et

$$\begin{aligned} & \langle \Phi \partial_t s_l^\eta, \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi \, dxdt \\ & - \eta \int_{Q_T} \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \psi \, dxdt = \int_{Q_T} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi \, dxdt, \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit de dualité entre  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$  et  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ .

De plus  $p_g$  et  $p_l$  vérifient les estimations

$$\begin{aligned} & p_\alpha^\eta \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t (\rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta)) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \\ & s_l^\eta \geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T, \quad s_l^\eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t s_l^\eta \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \\ & \rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta) \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)), \quad s_l^\eta \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 1.4.1. Cette preuve est basée sur une méthode de semi-discrétisation en temps (voir [3]) afin de traiter le problème de dégénérescence du terme d'évolution et de montrer la positivité de la saturation liquide.

Pour cela, on considère un temps final  $T > 0$ ,  $M \in \mathbb{N}^*$  le nombre de pas temps,  $\delta t = T/M$  le pas de temps et  $p_\alpha^0$  la pression initiale. Soit  $(p_g^{n,\eta}, p_l^{n,\eta}) \in (L^2(\Omega))^2$  avec

$\rho_l^h(p_g^{n,\eta})m(s_l^{n,\eta}) \geq 0$  au temps  $t_n = n\delta t$  et nous cherchons une solution  $(p_g^{n+1,\eta}, p_l^{n+1,\eta})$  du système suivant

$$\mathfrak{P}_{\eta,\delta t} \left\{ \begin{array}{l} \Phi \frac{m(s_l^{n+1,\eta})\rho_l^h(p_g^{n+1,\eta}) - m(s_l^{n,\eta})\rho_l^h(p_g^{n,\eta})}{\delta t} - \\ \quad \text{div}(\mathbf{K}\rho_l^h(p_g^{n+1,\eta})M_l(s_l^{n+1,\eta})(\nabla p_l^{n+1,\eta} - \rho_l(p_l^{n+1,\eta})\mathbf{g})) - \\ \quad \mathcal{C}_1 \text{div}(\mathbf{K}\rho_l^h(p_g^{n+1,\eta})M_g(s_g^{n+1,\eta})(\nabla p_g^{n+1,\eta} - \rho_g(p_g^{n+1,\eta})\mathbf{g})) + \\ \quad (\mathcal{C}_1 - 1)\eta \text{div}(\rho_l^h(p_g^{n+1,\eta})\nabla(p_g^{n+1,\eta} - p_l^{n+1,\eta})) - \\ \quad \text{div}(\mathcal{C}_2(X_l^w)^{n+1,\eta}D_l^h\nabla p_g^{n+1,\eta}) = r_g^{n+1}, \\ \Phi \frac{s_l^{n+1,\eta} - s_l^{n,\eta}}{\delta t} - \text{div}(\mathbf{K}M_l(s_l^{n+1,\eta})(\nabla p_l^{n+1,\eta} - \rho_l(p_l^{n+1,\eta})\mathbf{g})) \\ \quad - \eta \text{div}(\nabla(p_g^{n+1,\eta} - p_l^{n+1,\eta})) = \frac{r_w^{n+1}}{\rho_l^w}, \end{array} \right. \quad (1.4.6)$$

avec les conditions aux limites (1.4.3).

*Remarque 1.4.1.* Remarquons que cette technique de semi-discrétisation en temps a déjà été utilisée par Alt et Luckhaus [3] pour un système parabolique dégénéré, dans [44] et [48] pour un écoulement diphasique compressible immiscible en milieux poreux et dans [24] pour un écoulement diphasique compressible miscible en milieux poreux.

Dans la section suivante, nous étudions l'existence de solution du système elliptique  $\mathfrak{P}_{\eta,\delta t}$  à  $\eta$  et  $\delta t$  fixés.

### 1.4.1 Étude du système elliptique non linéaire

L'objet de cette section est l'étude du système discrétisé en temps  $\mathfrak{P}_{\eta,\delta t}$ . Par souci de clarté, dans cette section, nous omettons les indices  $\eta$  et  $n$  dans le système  $\mathfrak{P}_{\eta,\delta t}$ . Les pressions et la saturation liquide à l'instant  $n$  seront notées par un exposant étoile.

On ajoute maintenant deux nouvelles régularisations. La première consiste à remplacer les mobilités  $M_\alpha$  par des fonctions positives non-dégénérées

$$M_\alpha^\epsilon = M_\alpha + \epsilon, \quad \epsilon > 0.$$

La deuxième consiste à régulariser les termes de pression. Pour cela, soit  $\mathcal{P}_N$  la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur les  $N$  premiers vecteurs propres  $\{p_1, \dots, p_N\}$  du Laplacien avec condition aux limites de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_l$  et de Neumann homogène sur  $\Gamma_n$ . Les  $p_i$  sont donc solutions du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta p_i = \lambda_i p_i & \text{dans } \Omega, \\ p_i = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \nabla p_i \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_n. \end{array} \right. \quad (1.4.8)$$

Cette dernière régularisation est nécessaire afin de pouvoir définir un opérateur continu relativement compact et pour utiliser le théorème de point fixe de Leray-Schauder dans la

prochaine proposition.

La régularisation des mobilités conduit à la perte de la positivité sur la saturation liquide. Nous prolongeons alors les fonctions  $M_l$  et  $M_g$  sur  $\mathbb{R}$  par continuité en dehors de  $[0, 1]$  et on note

$$Z(s_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_\alpha \leq 0 \\ s_\alpha & \text{si } s_\alpha \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } s_\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Les saturations  $s_\alpha$  étant considérées comme des fonctions des inconnues  $p_l$  et  $p_g$ , on prolonge la pression capillaire  $p_c$  en dehors de  $[0, 1]$  par une fonction  $\overline{p_c}$  continue, bornée et strictement décroissante en dehors de  $[0, 1]$ . Ceci est possible puisque la pression capillaire est supposée bornée ( $|p_c(0)| < +\infty$ ). On note alors  $s_l = \overline{p_c}^{-1}(p_g - p_l)$  et  $s_g = 1 - \overline{p_c}^{-1}(p_g - p_l)$ .

Notons que ainsi définies, les fonctions prolongées peuvent s'écrire

$$M_\alpha(s_\alpha) := M_\alpha(Z(s_\alpha)), \quad \xi(s_\alpha) := \xi(Z(s_\alpha))$$

$$\mathcal{B}(s_l) = \int_0^{s_l} \xi(Z(s)) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } s_\alpha \leq 0 \\ \int_0^{s_l} \xi(s) ds & \text{si } s_\alpha \in [0, 1] \\ \mathcal{B}(1) + \xi(1)(s_l - 1) & \text{si } s_\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Maintenant, la preuve d'existence de solutions de (1.4.6)-(1.4.7) s'effectue en trois étapes.

La première étape consiste à étudier le système suivant pour des paramètres  $\epsilon > 0$  et  $N > 0$  fixés

$$\mathfrak{P}_{\eta, \delta t}^{\epsilon, N} \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{m(Z(s_l^{\epsilon, N})) \rho_l^h(p_g^{\epsilon, N}) - (\rho_l^h)^* m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 (X_l^w)^{\epsilon, N} D_l^h \nabla p_g^{\epsilon, N} \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\epsilon, N}) \left( M_l^\epsilon(s_l^{\epsilon, N}) \nabla \mathcal{P}_N p_l^{\epsilon, N} - M_l(s_l^{\epsilon, N}) \rho_l(p_l^{\epsilon, N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\epsilon, N}) \left( M_g^\epsilon(s_g^{\epsilon, N}) \nabla p_g^{\epsilon, N} - M_g(s_l^{\epsilon, N}) \rho_g(p_g^{\epsilon, N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \varphi dx dt \quad (1.4.9) \\ + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^{\epsilon, N}) \nabla (\mathcal{P}_N p_g^{\epsilon, N} - \mathcal{P}_N p_l^{\epsilon, N}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ = \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt \\ \int_{\Omega} \frac{Z(s_l^{\epsilon, N}) - s_l^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} \left( M_l^\epsilon(s_l^{\epsilon, N}) \nabla p_l^{\epsilon, N} - M_l(s_l^{\epsilon, N}) \rho_l(p_l^{\epsilon, N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \psi dx dt \\ - \eta \int_{\Omega} \nabla (p_g^{\epsilon, N} - p_l^{\epsilon, N}) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt \quad (1.4.10) \end{array} \right.$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$ .

La deuxième étape consiste à passer à la limite quand  $N$  tend vers l'infini. La troisième et dernière étape consiste à passer à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro et montrer la positivité de la saturation liquide.

**Première étape.** La première étape consiste à étudier le système  $\mathfrak{P}_{\eta, \delta t}^{\epsilon, N}$  pour des paramètres fixés  $N > 0$  et  $\epsilon > 0$ . Dans cette étape, on va appliquer le théorème de point fixe de Leray-Schauder pour obtenir une solution faible  $(p_g^{\epsilon, N}, p_l^{\epsilon, N})$  de (1.4.9)-(1.4.10). Pour plus de clarté, on omet désormais les indices  $\epsilon$  et  $N$  dans la suite.

**Proposition 1.4.1.** *Pour des paramètres  $N > 0$  et  $\epsilon > 0$  fixés, si  $s_l^*$  et  $(\rho_l^h)^* m(s_l^*)$  appartiennent à  $L^2(\Omega)$  et si  $s_l^* \geq 0$  et  $(\rho_l^h)^* m(s_l^*) \geq 0$  alors il existe  $(p_g^{\epsilon, N}, p_l^{\epsilon, N})$  dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  solution du système (1.4.9) – (1.4.10).*

*Démonstration.* La démonstration est basée sur le théorème de point fixe de Leray-Schauder [71]. Soit  $T$  une application de  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$  définie par

$$T(\bar{p}_g, \bar{p}_l) = (p_g, p_l),$$

où  $(p_g, p_l)$  est l'unique solution du système suivant (1.4.11)-(1.4.12)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho_l^h(\bar{p}_g) m(Z(\bar{s}_l)) - \rho^* m(S_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_g) (M_l^\epsilon(\bar{s}_l) \nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_l - M_l(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_g) (M_g^\epsilon(\bar{s}_g) \nabla p_g - M_g(\bar{s}_g) \rho_g(\bar{p}_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(\bar{p}_g) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_g - \mathcal{P}_N \bar{p}_l) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Z(\bar{s}_l) - s_l^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(\bar{s}_l) \nabla p_l - M_l(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ & - \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_g - \mathcal{P}_N \bar{p}_l) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ ,  $\bar{s}_l = \bar{p}_c^{-1}(\bar{p}_g - \bar{p}_l)$  et  $\bar{s}_g = 1 - \bar{p}_c^{-1}(\bar{p}_g - \bar{p}_l)$ .

Le système (1.4.11) – (1.4.12) peut alors s'écrire sous la forme

$$B_g(p_g, \psi) = f_g(\psi) \text{ et } B_l(p_l, \varphi) = f_l(\varphi),$$

avec

$$\begin{aligned}
B_g(p_g, \psi) &= \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_g) M_g^\epsilon(\bar{s}_g) \nabla p_g \cdot \nabla \varphi \, dxdt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi \, dxdt, \\
f_g(\psi) &= - \int_{\Omega} \frac{\rho_l^h(\bar{p}_g) m(Z(\bar{s}_l)) - \rho^* m(s^*)}{\delta t} \varphi \, dxdt - (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(\bar{p}_g) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_g - \mathcal{P}_N \bar{p}_l) \\
&\quad - \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_g) (M_l^\epsilon(\bar{s}_l) \nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_l - M_l(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dxdt \\
&\quad + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(\bar{s}_g) \rho_g(\bar{p}_g) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, dxdt + \int_{\Omega} r_g \varphi \, dxdt, \\
B_l(p_l, \varphi) &= \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(\bar{s}_l) \nabla p_l \cdot \nabla \psi \, dxdt, \\
f_l(\varphi) &= - \int_{\Omega} \frac{Z(\bar{s}_l) - s_l^*}{\delta t} \psi \, dxdt + \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_g - \mathcal{P}_N \bar{p}_l) \cdot \nabla \psi \, dxdt \\
&\quad + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g} \cdot \nabla \psi \, dxdt + \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi \, dxdt,
\end{aligned}$$

Les applications  $B_l(p_l, \varphi)$  et  $B_g(p_g, \psi)$  sont bilinéaires, continues, coercives et définies dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$ . La bilinéarité de ces applications provient de la linéarité des opérateurs intégrales et gradient. La continuité vient directement des hypothèses (H1) – (H5) et de l'inégalité de Hölder. Enfin, la coercivité est obtenue grâce aux hypothèses (H1) – (H5) et des termes en  $\epsilon$ .

Les applications  $f_l(\varphi)$  et  $f_g(\psi)$  sont linéaires continues définies sur  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ . La linéarité est une conséquence immédiate des opérateurs intégrales et gradient tandis que la continuité est due aux hypothèses (H1) – (H5).

Le théorème de Lax-Milgram appliqué aux formulations variationnelles (1.4.11) et (1.4.12) nous donne deux uniques solutions  $p_g \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  et  $p_l \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  de ces formulations variationnelles.

Nous avons donc prouvé l'existence d'une unique solution  $(p_g, p_l) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  pour tout  $(\bar{p}_g, \bar{p}_l) \in (L^2(\Omega))^2$  ce qui montre que l'application  $T$  est bien défini dans  $(L^2(\Omega))^2$ .

**Lemme 1.4.1.** *L'application  $T$  est continue et relativement compact.*

*Démonstration.* On considère une suite  $(\bar{p}_{g,k}, \bar{p}_{l,k})$  d'un ensemble borné de  $(L^2(\Omega))^2$  qui converge vers  $(\bar{p}_g, \bar{p}_l) \in (L^2(\Omega))^2$ . L'objectif est de montrer que  $(p_{g,k}, p_{l,k}) = T(\bar{p}_{g,k}, \bar{p}_{l,k})$  est bornée dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  et converge vers  $(p_g, p_l) = T(\bar{p}_g, \bar{p}_l)$ .



Les suites  $p_{g,k}, p_{l,k}$  vérifient respectivement

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})m(Z(\bar{s}_{l,k})) - (\rho_l^h)^*m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dxdt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_{g,k} \cdot \nabla \varphi dxdt \\
& + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) (M_l^\epsilon(\bar{s}_{l,k}) \nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k} - M_l(\bar{s}_{l,k}) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dxdt \\
& + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) (M_g^\epsilon(\bar{s}_{g,k}) \nabla p_{g,k} - M_g(\bar{s}_{g,k}) \rho_g(\bar{p}_{g,k}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dxdt \\
& + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}) \cdot \nabla \varphi dxdt = \int_{\Omega} r_g \varphi dxdt,
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{Z(\bar{s}_{l,k}) - s_l^*}{\delta t} \psi dxdt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(\bar{s}_{l,k}) \nabla p_{l,k} - M_l(\bar{s}_{l,k}) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dxdt \\
& - \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}) \cdot \nabla \psi dxdt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dxdt,
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

En prenant  $\psi = p_{l,k}$  dans (1.4.14), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(\bar{s}_{l,k}) \nabla p_{l,k} \cdot \nabla p_{l,k} dxdt = - \int_{\Omega} \frac{Z(\bar{s}_{l,k}) - s_l^*}{\delta t} p_{l,k} dxdt + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(\bar{s}_{l,k}) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g} \cdot \nabla \psi dxdt \\
& + \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}) \cdot \nabla p_{l,k} dxdt + \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} p_{l,k} dxdt,
\end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\begin{aligned}
\epsilon k_0 \int_{\Omega} |\nabla p_{l,k}|^2 dx & \leq C + C \|p_{l,k}\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla p_{l,k}\|_{L^2(\Omega)} \\
& + C \|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k}\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $\Omega$ ,  $\eta$ ,  $\delta t$ ,  $\rho_M$ ,  $\Phi_1$ ,  $k_\infty$  et  $\|s_l^*\|_{L^2(\Omega)}$ . Or

$$\|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{\alpha,k}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_N \|\bar{p}_{\alpha,k}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (\alpha = l, g),$$

où  $c_N$  est la racine carrée de la  $n$ -ième valeur propre de l'opérateur Laplacien (en considérant l'ensemble des valeurs propres comme une suite croissante). L'inégalité de Poincaré et de Young montrent ainsi que la suite  $(p_{l,k})_k$  est uniformément bornée dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

Pour la pression de gaz, on considère  $\varphi = p_{g,k}$  dans (1.4.13) pour en déduire que

$$\begin{aligned}
\epsilon k_0 \rho_m \int_{\Omega} |\nabla p_{g,k}|^2 dx & \leq C + C \|p_{g,k}\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla p_{g,k}\|_{L^2(\Omega)} \\
& + C \|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}\|_{L^2(\Omega)} + C \|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k}\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $\Omega$ ,  $\eta$ ,  $\delta t$ ,  $\rho_M$ ,  $\Phi_1$ ,  $k_\infty$  et  $\|(\rho_l^h)^* m(s_l)^*\|_{L^2(\Omega)}$ . La suite  $(p_{g,n})$  est donc uniformément bornée dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ . Ceci prouve que l'application  $T$  est relativement compact.

De plus, pour des sous suites, nous avons les convergences

$$p_{l,k} \rightharpoonup p_l \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (1.4.15)$$

$$p_{g,k} \rightharpoonup p_g \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (1.4.16)$$

$$p_{l,k} \rightarrow p_l \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega, \quad (1.4.17)$$

$$p_{g,k} \rightarrow p_g \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \quad (1.4.18)$$

Il reste à montrer la continuité de l'application  $T$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $(p_g, p_l)$  est l'unique solution de (1.4.11) – (1.4.12) en passant à la limite dans (1.4.13) – (1.4.14) quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

On étudie le passage à la limite dans (1.4.13)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) m(Z(\bar{s}_{l,k})) - (\rho_l^h)^* m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_{g,k} \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) (M_l^c(\bar{s}_{l,k}) \nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k} - M_l(\bar{s}_{l,k}) \rho_l(\bar{p}_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) (M_g^c(\bar{s}_{g,k}) \nabla p_{g,k} - M_g(\bar{s}_{g,k}) \rho_g(\bar{p}_{g,k}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g,k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k}) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt, \end{aligned}$$

où  $\bar{s}_{l,k} = p_c^{-1}(\bar{p}_{g,k} - \bar{p}_{l,k})$ .

Le passage à la limite dans le premier terme est du à la continuité de  $Z$ ,  $p_c^{-1}$  et  $\rho_l^h$  et au fait que  $\rho_l^h(\bar{p}_{g,k}) m(Z(\bar{s}_{l,k})) \varphi$  soit dominé par  $\mathcal{C}_1 \rho_M |\varphi|$ , ce qui nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Pour le second terme, la suite  $(\mathcal{C}_2 X_{l,k}^w D_l^h \nabla \varphi)_k$  est dominée et converge presque partout quand  $k$  tend vers l'infini. Donc par application du théorème de convergence dominé de Lebesgue on en déduit la convergence forte dans  $L^2(\Omega)$  de

$$\mathcal{C}_2 X_{l,k}^w D_l^h \nabla \varphi \longrightarrow \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla \varphi.$$

De plus, en utilisant la convergence (1.4.16), on en déduit que

$$\nabla p_{g,k} \rightharpoonup \nabla p_g \quad \text{faiblement dans } (L^2(\Omega))^d,$$

ce qui permet de passer à la limite pour le second terme.

Pour le troisième terme,  $\bar{p}_{l,k}$  converge dans  $L^2(\Omega)$  donc

$$\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{l,k} \longrightarrow \nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_l \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d.$$

De plus la suite  $(\mathbf{K}M_l(\bar{s}_{l,k})\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla\varphi)$  est dominée et converge presque partout quand  $k$  tend vers l'infini donc par application du théorème de Lebesgue, nous avons la convergence forte dans  $L^2(\Omega)$  de

$$\mathbf{K}M_l(\bar{s}_{l,k})\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla\varphi \longrightarrow \mathbf{K}M_l(\bar{s}_l)\rho_l^h(\bar{p}_g)\nabla\varphi, \quad (1.4.19)$$

ce qui nous permet de passer à la limite dans le troisième terme.

Pour le quatrième terme, la suite  $(\mathbf{K}M_g^\epsilon(\bar{s}_{l,k})\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla\varphi)$  est dominée et converge presque partout quand  $k$  tend vers l'infini donc par application du théorème de Lebesgue, nous avons la convergence forte dans  $L^2(\Omega)$  de

$$\mathbf{K}M_g^\epsilon(\bar{s}_{l,k})\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla\varphi \longrightarrow \mathbf{K}M_g^\epsilon(\bar{s}_l)\rho_l^h(\bar{p}_g)\nabla\varphi. \quad (1.4.20)$$

De plus, à l'aide de (1.4.16), on en déduit que

$$\nabla p_{g,k} \longrightarrow \nabla p_g \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega), \quad (1.4.21)$$

ce qui nous permet de passer à la limite dans le quatrième terme.

La cinquième terme

$$(\mathcal{C}_1 - 1)\eta \int_{\Omega} \rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_{g,k} - \mathcal{P}_N\bar{p}_{l,k}) \cdot \nabla\varphi dxdt$$

est traité comme suit : d'une part

$$\rho_l^h(\bar{p}_{g,k})\nabla\varphi \longrightarrow \rho_l^h(\bar{p}_g)\nabla\varphi \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d, \quad (1.4.22)$$

et d'autre part, comme  $\bar{p}_{g,k}$  converge dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\nabla\mathcal{P}_N\bar{p}_{g,k} \longrightarrow \nabla\mathcal{P}_N\bar{p}_g \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d.$$

Ceci nous permet de passer à la limite dans le cinquième terme.

Les convergences des autres termes sont obtenues à l'aide du théorème de convergence de Lebesgue. Le passage à la limite dans (1.4.14) est obtenu de la même manière. Par conséquent,  $(p_g, p_l)$  est une solution de (1.4.11) – (1.4.12), ce qui permet d'établir la continuité de l'application  $T$ .  $\square$

**Lemme 1.4.2.** (*Estimation a priori*). *Il existe  $r > 0$  tel que, si  $(p_g, p_l) = \lambda T(p_g, p_l)$  avec  $\lambda \in (0, 1)$ , alors*

$$\|(p_g, p_l)\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq r.$$

*Démonstration.* Considérons  $(p_g, p_l)$  vérifiant  $(p_g, p_l) = \lambda T(p_g, p_l)$ . Le couple  $(p_g, p_l)$  vérifie alors

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega} \Phi \frac{m(Z(s_l))\rho_l^h(p_g) - (\rho_l^h)^* m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) (M_l^\epsilon(s_l) \nabla \mathcal{P}_N p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) (M_g^\epsilon(s_g) \nabla p_g - M_g(s_g) \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + (\mathcal{C}_1 - 1) \lambda \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g) \nabla (\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla \varphi dx dt = \lambda \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

et

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega} \Phi \frac{Z(s_l) - s_l^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ & - \lambda \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla \psi dx dt = \lambda \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

En prenant  $\varphi = g_g(p_g) := \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_l^h(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (1.4.23) et  $\psi = \mathcal{C}_1 p_l - p_g \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (1.4.24) et par sommation des deux égalités, on en déduit l'égalité suivante

$$\begin{aligned} & \lambda \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} \left( (m(Z(s_l))\rho_l^h(p_g) - \rho^* m(s^*)) g_g(p_g) + (Z(s_l) - s_l^*) (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) dx \\ & + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla \mathcal{P}_N p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_g^\epsilon(s_g) \nabla p_g - M_g(s_g) \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g)} X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_l dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g dx \\ & + \mathcal{C}_1 \lambda \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla (p_g - p_l) dx \\ & = \lambda \int_{\Omega} r_g g_g(p_g) dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) dx \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient

$$\begin{aligned}
& \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g^\epsilon(s_l) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g)} X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \lambda \eta \int_{\Omega} \nabla (\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla (p_g - p_l) dx \\
& = -\lambda \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} \left( (m(Z(s_l)) \rho_l^h(p_g) - \rho^* m(s^*)) g_g(p_g) + (Z(s_l) - s_l^*) (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) dx \\
& - \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla \mathcal{P}_N p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g dx \\
& + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l) \nabla p_l - M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g dx \\
& + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(s_g) \rho_g(p_g) \mathbf{g} \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l) \rho_l(p_l) \mathbf{g} \cdot \nabla p_l dx \\
& + \lambda \int_{\Omega} r_g g_g(p_g) dx + \lambda \int_{\Omega} \frac{r_w}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) dx.
\end{aligned}$$

Comme la fonction  $p_g \mapsto g_g(p_g)$  est sublinéaire, on déduit à l'aide l'inégalité de Poincaré et de Cauchy-Schwarz l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_l|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_g|^2 dx + \mathcal{C}_1 \lambda \eta \int_{\Omega} |\nabla (\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l)|^2 dx \\
\leq C (1 + \|(\rho_l^h)^* m(s_l^*)\|_{L^2(\Omega)} + \|s_l^*\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{1.4.25}$$

où  $C$  ne dépend pas de  $\lambda$ . □

Grâce aux deux lemmes 1.4.1 et 1.4.2, on peut alors appliquer le théorème du point fixe de Leray-Schauder [71] prouvant la proposition 1.4.1. □

**Deuxième étape.** Cette étape concerne le passage à la limite quand  $N$  tend vers l'infini. Pour tout  $N > 0$ , nous avons établi l'existence d'une solution  $(p_g^N, p_l^N) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$ , vérifiant

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{m(Z(s_l^N)) \rho_l^h(p_g^N) - (\rho_l^h)^* m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^N \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^N) (M_l^N(s_l^N) \nabla p_l^N - M_l(s_l^N) \rho_l(p_l^N) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^N) (M_g^N(s_g^N) \nabla p_g^N - M_g(s_g^N) \rho_g(p_g^N) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^N) \nabla (p_g^N - p_l^N) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g \varphi dx, dt
\end{aligned} \tag{1.4.26}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{Z(s_i^N) - s_i^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_i^N(s_i^N) \nabla p_i^N - M_l(s_l^N) \rho_l(p_i^N) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ - \eta \int_{\Omega} \nabla(p_g^N - p_i^N) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_{\omega}}{\rho_l^w} \psi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.27)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

L'estimation (1.4.25) est uniforme et indépendante de  $N$  et de  $\lambda$ . On peut alors reprendre les estimations (1.4.25) avec  $\lambda = 1$  obtenant l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_l|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_g|^2 dx + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla(\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l)|^2 dx \\ \leq C (1 + \|(\rho_l^h)^* m(s_i^*)\|_{L^2(\Omega)} + \|s_i^*\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

où  $C$  dépend de  $\epsilon$  mais ne dépend pas de  $N$ .

Pour des sous suites, nous avons alors les convergences suivantes

$$\begin{aligned} p_{l,k}^N &\rightharpoonup p_l^N && \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega, \\ p_{g,k}^N &\rightharpoonup p_g^N && \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $N$  tend vers l'infini dans (1.4.26)- (1.4.27) (passage à la limite identique à celle pour  $k \rightarrow +\infty$  dans (1.4.13)-(1.4.14)), on obtient pour tout  $\epsilon > 0$  l'existence d'une solution  $(p_g^\epsilon, p_l^\epsilon) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  vérifiant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{m(Z(s_l^\epsilon)) \rho_l^h(p_g^\epsilon) - (\rho_l^h)^* m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) (M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) (M_g^\epsilon(s_g^\epsilon) \nabla p_g^\epsilon - M_g(s_g^\epsilon) \rho_g(p_g^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{Z(s_l^\epsilon) - s_l^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ - \eta \int_{\Omega} \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_{\omega}}{\rho_l^w} \psi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

**Troisième étape.** Cette étape concerne le passage à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro. Ici on va utiliser la pression globale  $p$  afin d'obtenir des estimations indépendantes de  $\epsilon$ .

On montre ensuite la positivité de la saturation liquide après passage à la limite sur  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Nous énonçons les deux lemmes suivants nécessaires au passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 1.4.3.** (*Estimations uniformes indépendantes de  $\epsilon$* ). Les suites  $(s_\alpha^\epsilon)^\epsilon$ ,  $(p^\epsilon := p_l^\epsilon + \bar{p}(s_l^\epsilon))^\epsilon$  et  $(p_\alpha^\epsilon)^\epsilon$  définies par (1.4.28)-(1.4.29) vérifient

$$(p^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (1.4.30)$$

$$(\mathcal{B}(s_l^\epsilon))_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H^1(\Omega) \quad (1.4.31)$$

$$(\nabla p_c(s_l^\epsilon))_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(\Omega) \quad (1.4.32)$$

$$(p_\alpha^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (1.4.33)$$

$$(\sqrt{\epsilon} \nabla p_\alpha^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(\Omega) \quad (1.4.34)$$

*Démonstration.* On prend  $\varphi = g_g(p_g) := \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_l^h(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (1.4.28) et  $\psi = \mathcal{C}_1 p_l - p_g \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (1.4.29) et après sommation on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} \left( (m(Z(s_l^\epsilon)) \rho_l^h(p_g^\epsilon) - \rho^* m(s^*)) g_g(p_g^\epsilon) + (Z(s_l^\epsilon) - s_l^*) (\mathcal{C}_1 p_l^\epsilon - p_g^\epsilon) \right) dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_g^\epsilon(s_g^\epsilon) \nabla p_g^\epsilon - M_g(s_g^\epsilon) \rho_g(p_g^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_l^\epsilon dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\epsilon)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) dx \\ & = \int_{\Omega} r_g g_g(p_g^\epsilon) dx + \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l^\epsilon - p_g^\epsilon) dx. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la relation (1.2.1) qui relie le gradient de la pression de chaque phase avec celui de la pression globale, les hypothèses (H1) – (H8) et les inégalités de cauchy-Schwarz et de Young, on en déduit l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla p_l^\epsilon dx + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g^\epsilon(s_g^\epsilon) \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \\ & + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} \nabla p_c(s_l^\epsilon) \cdot \nabla p_c(s_l^\epsilon) dx + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\epsilon)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \\ & \leq C \left( 1 + \|p_l^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p_g^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C \left( 1 + \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C \left( 1 + \|\nabla p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

où  $C = C(\rho_M, \delta t, M_\alpha, \Phi, k_\infty, \rho_l^* s_l^*, \rho_g^* s_g^*, g)$  est indépendant de  $\epsilon$ .

En utilisant l'égalité (1.3.2) qui relie la pression globale et la pression de chaque phase, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M(s_l^\epsilon) |\nabla p^\epsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{M_l(s_l^\epsilon) M_g(s_g^\epsilon)}{M(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx \\ + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} \nabla p_c(s_l^\epsilon) \cdot \nabla p_c(s_l^\epsilon) dx + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\epsilon)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \quad (1.4.35) \\ + \epsilon \int_{\Omega} \mathbf{K} \nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla p_l^\epsilon dx + \epsilon \int_{\Omega} \mathbf{K} \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \leq C_1, \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ .

L'estimation (1.4.30) est une conséquence directe de l'estimation (1.4.35) et de l'hypothèse (H3). Pour l'estimation (1.4.31), à l'aide de l'estimation (H3), nous avons

$$\int_{\Omega} \frac{M_l(s_l^\epsilon) M_g(s_g^\epsilon)}{M(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx < C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ . On en déduit donc l'inégalité

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathcal{B}(s_l^\epsilon)|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{M_l^2(s_l^\epsilon) M_g^2(s_g^\epsilon)}{M^2(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx \leq \frac{1}{4} \int_{\Omega} M_l(s_l^\epsilon) M_g(s_g^\epsilon) |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx < C,$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\epsilon$  ce qui permet d'établir (1.4.31). L'estimation (1.4.32) et (1.4.34) est alors une conséquence de (1.4.35).

De plus, à l'aide de (1.4.30), (1.4.32) et (1.2.1), nous avons l'estimation (1.4.33), ce qui permet d'avoir l'inégalité suivante

$$\|\nabla p_{l,g}^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p_c(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Le lemme précédent va nous permettre de prouver les convergences suivantes

**Lemme 1.4.4.** *Pour des sous suites  $(s_\alpha^\epsilon)_\epsilon, (p^\epsilon)_\epsilon, (p_\alpha^\epsilon)_\epsilon$ , nous avons les convergences suivantes*

$$p^\epsilon \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (1.4.36)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\epsilon) \rightharpoonup \mathcal{B}(s_l) \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega) \quad (1.4.37)$$

$$p^\epsilon \rightarrow p \quad \text{presque partout dans } \Omega \quad (1.4.38)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\epsilon) \rightharpoonup \mathcal{B}(s_l) \quad \text{presque partout dans } \Omega \quad (1.4.39)$$

$$Z(s_l^\epsilon) \rightarrow Z(s_l) \quad \text{presque partout dans } \Omega \quad (1.4.40)$$

$$Z(s_l^\epsilon) \rightarrow Z(s_l) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \quad (1.4.41)$$

$$p_\alpha^\epsilon \rightharpoonup p_\alpha \quad \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (1.4.42)$$

$$p_\alpha^\epsilon \rightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } \Omega \quad (1.4.43)$$



*Démonstration.* Les convergences faibles (1.4.36) et (1.4.37) sont des conséquences des estimations (1.4.30) et (1.4.31) du lemme 1.4.3. Les convergences (1.4.38) et (1.4.39) sont quant à elles des conséquences de l'injection compacte de  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Comme  $\mathcal{B}(s_l) := \mathcal{B}(Z(s_l))$  et  $\mathcal{B}^{-1}$  est continu

$$Z(s_l^\epsilon) \longrightarrow Z(s_l) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et le théorème de Lebesgue assure la convergence forte (1.4.41).

La convergence faible (1.4.42) est une conséquence de l'estimation (1.4.33). La convergence presque partout (1.4.43) provient de (1.4.38), (1.4.40) et du fait que  $\tilde{p}(s_l) = \tilde{p}(Z(s_l))$  pour  $s_l \in [0, 1]$  ce qui prouve le lemme.  $\square$

Pour montrer l'existence d'une solution du problème  $\mathfrak{P}_{\eta, \delta t}$ , il suffit de passer à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro dans les formulations (1.4.28)-(1.4.29),

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{m(Z(s_l^\epsilon))\rho_l^h(p_g^\epsilon) - (\rho_l^h)^*m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dx dt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) (M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) (M_g^\epsilon(s_g^\epsilon) \nabla p_g^\epsilon - M_g(s_g^\epsilon) \rho_g(p_g^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla (p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.44)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Z(s_l^\epsilon) - s_l^*}{\delta t} \psi dx dt + \int_{\Omega} \mathbf{K} (M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ & - \eta \int_{\Omega} \nabla (p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt, \end{aligned} \quad (1.4.45)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .

En effet, les deux premiers termes des équations ci-dessus convergent d'après la convergence forte de  $\rho_l^h(p_g^\epsilon)m(Z(s_l^\epsilon))$  vers  $\rho_l^h(p_g)m(Z(s_l))$  et de  $Z(s_l^\epsilon)$  vers  $Z(s_l)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Le troisième et quatrième termes de l'égalité (1.4.44) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{K} M_\alpha^\epsilon(s_\alpha^\epsilon) \rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla p_\alpha^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\epsilon) \rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla p^\epsilon \cdot \nabla \varphi dx \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla \mathcal{B}(s_\alpha^\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx + \sqrt{\epsilon} \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\epsilon) (\sqrt{\epsilon} \nabla p_\alpha^\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx. \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

La preuve de la convergence des deux premiers termes du membre de droite de l'équation précédente s'effectue en deux étapes. Premièrement, le théorème de Lebesgue et les convergences (1.4.40)-(1.4.43) montrent que

$$\rho_l^h(p_g^\epsilon) M_\alpha(s_\alpha^\epsilon) \nabla \varphi \longrightarrow \rho_l^h(p_g) M_\alpha(s_\alpha) \nabla \varphi \quad \text{fortement dans } (L^2(Q_T))^d,$$

$$\rho_l^h(p_g^\epsilon) \nabla \varphi \longrightarrow \rho_l^h(p_g) \nabla \varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

Deuxièmement, la convergence faible sur la pression (1.4.36) avec la convergence forte obtenue ci-dessus montre la convergence pour le premier terme du membre de droite dans (1.4.46). La convergence donnée par (1.4.37) avec la convergence forte obtenue ci-dessus montre la convergence du deuxième terme du membre droite de (1.4.46).

Le troisième terme converge vers zéro d'après l'estimation uniforme (1.4.34). Ceci termine le passage à la limite pour le deuxième et troisième terme de (1.4.44). On utilise ensuite la même technique pour le deuxième terme de l'égalité (1.4.45).

Les convergences sur les termes capillaires de (1.4.44)–(1.4.45) (cinquième terme de (1.4.45) et troisième terme de (1.4.44)) se déduisent de l'estimation uniforme (1.4.32). Les autres termes convergent en utilisant (1.4.40), (1.4.43) et le théorème de convergence de Lebesgue.

Nous avons donc montré qu'il existe  $(p_g, p_l) \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{m(Z(s_l))\rho_l^h(p_g) - \rho^*m(s_l^*)}{\delta t} \varphi dxdt + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dxdt \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_l(s_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dxdt \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_g(s_g) (\nabla p_g - \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dxdt \\ & + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g) \nabla(p_g - p_l) \cdot \nabla \varphi dxdt = \int_{\Omega} r_g \varphi dxdt, \end{aligned} \quad (1.4.47)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{Z(s_l) - s_l^*}{\delta t} \psi dxdt + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dxdt \\ & - \eta \int_{\Omega} \nabla(p_g - p_l) \cdot \nabla \psi dxdt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dxdt, \end{aligned} \quad (1.4.48)$$

pour tout  $(\varphi, \psi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$ .

**Lemme 1.4.5.** *Supposons que  $s_l^* \geq 0$ ,  $(\rho_l^h)^* m(s_l^*)$  et  $s_l^*$  soient dans  $L^2(\Omega)$ . Alors, pour tout  $\delta t > 0$ , les solutions  $(p_g, p_l)$  de (1.4.47)–(1.4.48) vérifient*

$$s_l \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega.$$

*Démonstration.* En prenant  $\psi = (s_l)^-$  dans (1.4.48), on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{s_l^*}{\delta t} (s_l)^- dxdt - \eta \int_{\Omega} p_c'(s_l) \nabla (s_l)^- \cdot \nabla (s_l)^- dxdt = - \int_{\Omega} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} (s_l)^- dxdt$$

puisque  $M_l(s_l)(s_l)^- = 0$  et puisque par définition  $Z(s_l)(s_l)^- = 0$ .

En prolongeant  $p_c$  en dehors de  $[0, 1]$  par une fonction  $\overline{p_c}$  vérifiant  $\overline{p_c}(s_l) \neq 0$  en dehors de  $[0, 1]$ , on en déduit que

$$\eta \int_{\Omega} |\nabla(s_l)^-|^2 dx \leq 0,$$

prouvant que la saturation liquide est positive car  $s_l^-$  s'annule sur  $\Gamma_l$ .  $\square$

## 1.4.2 Passage d'un système elliptique à un système parabolique

Dans la section 1.4.1, nous avons montré l'existence d'une solution  $(p_g^{n+1,\eta}, p_l^{n+1,\eta}) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  de (1.4.47)-(1.4.48). Par conséquent, les suites  $(p_g^{n+1,\eta}, p_l^{n+1,\eta})$  (provenant du système (1.4.6)-(1.4.7)) sont bien définies. De plus, pour  $\rho_l^h(p_g^{n,\eta})m(s_l^{n,\eta}) \geq 0$ ,  $s_l^{n,\eta} \geq 0$  et  $\rho_l^h(p_g^{n,\eta})m(s_l^{n,\eta}) \in L^2(\Omega)$ ,  $s_l^{n,\eta} \in L^2(\Omega)$ , on construit  $(p_l^{n+1,\eta}, p_g^{n+1,\eta}) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^2$  de tel sorte que  $s_l^{n+1,\eta} \geq 0$ .

Pour souci de clarté, nous omettons désormais l'indice  $\eta$ , celui-ci étant fixe dans cette section. En effet, cette section concerne le passage à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro pour montrer l'existence d'une solution du problème  $\mathfrak{P}_\eta$ . Pour cela, nous allons montrer des estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$  sur les pressions. Ces estimations uniformes vont alors nous permettre de passer à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro dans le problème (1.4.6)-(1.4.7).

Le lemme suivant nous donne des estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$ .

**Lemme 1.4.6.** *(Estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$ ) Les solutions de (1.4.6) – (1.4.7) vérifient*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi \left( m(s_l^{n+1})\mathcal{H}_g(p_g^{n+1}) - m(s_l^n)\mathcal{H}_g(p_g^n) \right) dx - \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi \left( \mathcal{P}_c(s_l^{n+1}) - \mathcal{P}_c(s_l^n) \right) dx \\ & + C_1 k_0 \int_{\Omega} M_l(s_l^{n+1}) \nabla p_l^{n+1} \cdot \nabla p_l^{n+1} dx + C_1 k_0 \int_{\Omega} M_g(s_g^{n+1}) \nabla p_g^{n+1} \cdot \nabla p_g^{n+1} dx \\ & + C_1 \int_{\Omega} \nabla p_g^{n+1} \cdot \nabla p_g^{n+1} dx + C_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla(p_g^{n+1} - p_l^{n+1})|^2 dx \\ & \leq C_2 \left( \|r_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_\omega^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned} \tag{1.4.49}$$

où les  $C_i$  dépendent de  $\Omega, \eta, \rho_M, \Phi_1$  et  $k_\infty$  mais ne dépendent pas de  $\delta t$ . Les fonctions  $\mathcal{H}_g$  et  $\mathcal{P}_c$  sont quant à elles définies par

$$\mathcal{H}_g(p_g) := \rho_l^h(p_g)g_g(p_g) - p_g, \quad \mathcal{P}_c(s_l) := \int_0^{s_l} p_c(z)dz \quad \text{et} \quad g_g(p_g) = \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_l^h(z)} dz.$$

*Démonstration.* Afin d'alléger les notations, nous omettons l'indice  $n + 1$  dans la suite et on indicera par  $*$  les quantités physiques prises à l'instant  $t_n$ .

Dans un premier temps, nous allons montrer que pour tout  $s_l \geq 0$  et  $s_l^* \geq 0$  vérifiant  $s_l + s_g = s_l^* + s_g^* = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} & (\rho_l^h(p_g)m(s_l) - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*))g_g(p_g) + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \\ & \geq \mathcal{H}_g(p_g)m(s_l) - \mathcal{H}_g(p_g^*)m(s_l^*) - \mathcal{C}_1 \mathcal{P}_c(s_l) + \mathcal{C}_1 \mathcal{P}_c(s_l^*). \end{aligned} \quad (1.4.50)$$

En effet en notant  $\mathfrak{J}$  le membre gauche de l'inégalité (1.4.50), nous avons

$$\mathfrak{J} = (\rho_l^h(p_g)m(s_l) - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*))g_g(p_g) + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g).$$

Par ailleurs, comme  $g_g$  est concave ( $g''(p) \leq 0$ ), nous avons

$$g_g(p_g) \leq g_g(p_g^*) + g'_g(p_g^*)(p_g - p_g^*),$$

et en utilisant la définition de  $\mathcal{H}_g$  et la concavité de  $g_g$ , on obtient alors l'inégalité

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \rho_l^h(p_g)m(s_l)g_g(p_g) - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*)g_g(p_g) + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \\ &= [(\rho_l^h(p_g)m(s_l)g_g(p_g) - m(s_l)p_g) + m(s_l)p_g - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*)g_g(p_g)] \\ &\quad + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \\ &\geq \mathcal{H}_g(p_g)m(s_l) + m(s_l)p_g - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*)(g_g(p_g^*) + \frac{1}{\rho_l^h(p_g^*)}(p_g - p_g^*)) \\ &\quad + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \\ &\geq \mathcal{H}_g(p_g)m(s_l) - \mathcal{H}_g(p_g^*)m(s_l^*) + m(s_l)p_g - m(s_l^*)p_g^* - m(s_l^*)(p_g - p_g^*) \\ &\quad + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \\ &\geq \mathcal{H}_g(p_g)m(s_l) - \mathcal{H}_g(p_g^*)m(s_l^*) - \mathcal{C}_1(s_l - s_l^*)p_c(s_l), \end{aligned} \quad (1.4.51)$$

et comme la fonction  $\mathcal{P}_c$  est concave

$$(s_l - s_l^*)p_c(s_l) \leq \mathcal{P}_c(s_l) - \mathcal{P}_c(s_l^*), \quad (1.4.52)$$

les deux inégalités (1.4.51) et (1.4.52) montrent l'inégalité (1.4.50).

Pour montrer l'estimation (1.4.49), on multiplie (1.4.6) par  $g_g(p_g)$  et (1.4.7) par  $(\mathcal{C}_1 p_l - p_g)$  puis après sommation de ces quantités, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} \left( (m(s_l)\rho_l^h(p_g) - \rho_l^h(p_g^*)m(s_l^*))g_g(p_g) + (s_l - s_l^*)(\mathcal{C}_1 p_l - p_g) \right) dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g)} X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla(p_g - p_l)| dx \\ & = \sum_{\alpha} \int_{\Omega} \mathbf{K} M_{\alpha}(s_{\alpha}) \rho_{\alpha}(p_{\alpha}) \mathbf{g} \cdot \nabla p_g + \int_{\Omega} r_g g_g(p_g) dx + \int_{\Omega} \frac{r_{\omega}}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l - p_g) dx. \end{aligned} \quad (1.4.53)$$

A l'aide de la même technique que celle utilisée dans le lemme 1.4.3 et en utilisant l'inégalité (1.4.50), on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi \left( m(s_l) \mathcal{H}_g(p_g) - m(s_l^*) \mathcal{H}_g(p_g^*) \right) dx - \frac{1}{\delta t} \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{P}_c(s_l) - \mathcal{P}_c(s_l^*)) dx \\
& + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l) \nabla p_l \cdot \nabla p_l dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx \\
& + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g)} X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla p_g dx + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla(p_g - p_l)|^2 dx \\
& \leq C_3 \left( \|r_g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_\omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \right),
\end{aligned} \tag{1.4.54}$$

prouvant le lemme 1.4.6.  $\square$

Maintenant, notre objectif est d'obtenir des estimations uniformes sur ces solutions discrétisées en temps. Pour cela, nous allons introduire quelques notations. Pour une suite  $(w_h^n)_{n=0, M}$ , on définit les fonctions constantes par morceaux comme

$$w^{\delta t}(0) = w^0, \quad w^{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} w^{n+1} \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t[}(t), \quad \forall t \in ]0, T], \tag{1.4.55}$$

où  $\chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t[}(t) = 1$  pour  $t \in ]n\delta t, (n+1)\delta t[$  et zéro sinon.

On définit également  $\tilde{w}^{\delta t}$  par

$$\tilde{w}^{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} \left( \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) w^n + \left(\frac{t}{\delta t} - n\right) w^{n+1} \right) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t[}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{1.4.56}$$

Nous pouvons alors calculer la dérivée de  $\tilde{w}^{\delta t}$

$$\partial_t \tilde{w}^{\delta t}(t) = \frac{1}{\delta t} \sum_{n=0}^{M-1} (w^{n+1} - w^n) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t[}(t) \quad \forall t \in [0, T] \setminus \left\{ \bigcup_{n=0}^M n\delta t \right\}.$$

On note par  $u_g$  la fonction définie par (1.4.55) correspondante à  $u_g^n = \rho_l^h(p_g^n) m(s_l^n)$  et on considère  $\tilde{u}_g^{\delta t}$  la fonction définie par (1.4.56) correspondante à  $u_g^n$ . De la même façon, on note par  $r_g, r_\omega$  les fonctions correspondantes à  $r_g^{n+1}$  et  $r_\omega^{n+1}$  respectivement.

**Proposition 1.4.2.** *Si les conditions initiales  $p_g^0, p_l^0$  sont dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ , nous avons alors les estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$  suivantes*

$$(s_g^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)) \tag{1.4.57}$$

$$(p_\alpha^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \alpha = l, g \tag{1.4.58}$$

$$(u_g^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{1.4.59}$$

$$(\Phi \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))') \tag{1.4.60}$$

$$(\Phi \partial_t \tilde{s}_l^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))') \tag{1.4.61}$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que nous avons les égalités et inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^{\delta t}) |\nabla p_\alpha^{\delta t}|^2 dx dt &= \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \int_{\Omega} M_\alpha(s_\alpha^{n+1}) |\nabla p_\alpha^{n+1}|^2 dx, \quad \alpha = l, g, \\ \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 dx dt &= \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \int_{\Omega} |\nabla p_c(s_l^{n+1})|^2 dx, \\ \int_{Q_T} |r_g(t, x)|^2 dx dt &\geq \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|r_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \int_{Q_T} |r_\omega(t, x)|^2 dx dt &\geq \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \|r_\omega^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En multipliant (1.4.49) par  $\delta t$  et en sommant de  $n = 0$  à  $n = M - 1$ , on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Phi \mathcal{H}_g(p_g^{\delta t}(T)) m(s_l^{\delta t})(T) dx + k_0 \int_{Q_T} \left[ M_l(s_l^{\delta t}) |\nabla p_l^{\delta t}|^2 + M_g(s_g^{\delta t}) |\nabla p_g^{\delta t}|^2 \right] dx dt \\ &\quad + c \int_{\Omega} \nabla p_g^{\delta t} \cdot \nabla p_g^{\delta t} dx + C_1 \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 dx dt \\ &\leq \int_{\Omega} \Phi \mathcal{H}_g(p_g^{\delta t}(0)) s_l^{\delta t}(0) dx + \mathcal{P}_c(s_l^{\delta t}(T)) - \mathcal{P}_c(s_l^{\delta t}(0)) \\ &\quad + C \left( \|r_g\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|r_\omega\|_{L^2(Q_T)}^2 \right), \end{aligned} \tag{1.4.62}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta t$ .

A l'aide de la sublinéarité de  $\mathcal{H}_g$ , de la positivité du premier terme du membre de gauche de l'inégalité (1.4.62) et de l'appartenance de  $p_\alpha^{\delta t}(0)$  à  $L^2(\Omega)$ , on en déduit l'estimation suivante

$$k_0 \sum_{\alpha=l,g} \left( \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^{\delta t}) |\nabla p_\alpha^{\delta t}|^2 dx dt \right) + \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 dx dt \leq C_2.$$

On en déduit ensuite à l'aide de la relation entre la pression globale et les pressions de chaque phases (1.3.2) que

$$\int_{Q_T} M(s_l^{\delta t}) |\nabla p^{\delta t}|^2 dx dt + \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 dx dt \leq C_3, \tag{1.4.63}$$

où  $C_1, C_2, C_3$  sont des constantes indépendantes de  $\delta t$ .

L'hypothèse (H7) sur la pression capillaire  $p_c$  avec l'estimation (1.4.63) montre alors l'estimation (1.4.57).

D'après la relation entre la pression globale et les pressions de chaque phase (1.2.1), l'estimation (1.4.58) est une conséquence de (1.4.63).

L'estimation uniforme (1.4.59) est une conséquence des deux estimations (1.4.57) et (1.4.58) et du fait que les densités  $\rho_l^h$  soient des fonctions bornées et de classe  $\mathcal{C}^1$  et de l'équation suivante

$$\nabla u_g^{\delta t} = \sum_{n=0}^{M-1} \left( (\rho_l^h(p_g^n))' m(s_l^{n+1}) \nabla p_g^{n+1} + \rho_l^h(p_g^{n+1}) \nabla m(s_l^{n+1}) \right) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t[}(t).$$

Des équations (1.4.6), on a pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t}, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ &\quad - \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_g(s_l^{\delta t}) (\nabla p_g^{\delta t} - \rho_g(p_g^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^{\delta t} \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ &\quad - (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt + \int_{\Omega} r_g^{\delta t} \varphi \, dx dt. \end{aligned} \tag{1.4.64}$$

Les estimations (1.4.57) – (1.4.58) avec (1.4.63) assurent que  $(\Phi \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t})$  est uniformément borné dans  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$ .

Finalement pour (1.4.61), on a pour tout  $\psi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{s}_l^{\delta t}, \varphi \rangle &= - \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi \, dx dt \\ &\quad + \eta \int_{\Omega} \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \psi \, dx dt \int_{\Omega} \frac{r_{\omega}^{\delta t}}{\rho_l^w} \psi \, dx. \end{aligned}$$

L'estimation (1.4.61) est établie à l'aide des estimations (1.4.57), (1.4.58) et (1.4.63).  $\square$

L'étape suivante concerne le passage à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro dans le but de passer d'un problème elliptique à un problème parabolique ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 1.4.3.** (*Convergence lorsque  $\delta t \rightarrow 0$ ). Nous avons les convergences suivantes lorsque  $\delta t$  tend vers zéro*)

$$\|u_g^{\delta t} - \tilde{u}_g^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0, \tag{1.4.65}$$

$$\|s_l^{\delta t} - \tilde{s}_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0, \tag{1.4.66}$$

$$s_g^{\delta t} \longrightarrow s_g \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \tag{1.4.67}$$

$$p_{\alpha}^{\delta t} \longrightarrow p_{\alpha} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \tag{1.4.68}$$

$$u_g^{\delta t} \longrightarrow u_g \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T), \tag{1.4.69}$$

$$s_l^{\delta t} \longrightarrow s_l \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T). \tag{1.4.70}$$

De plus,

$$s_\alpha^{\delta t} \longrightarrow s_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.4.71)$$

$$s_l^{\delta t} \geq 0 \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.4.72)$$

$$p_\alpha^{\delta t} \longrightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.4.73)$$

et

$$u_g = \rho_l^h(p_g)m(s_l) \text{ presque partout dans } Q_T, \quad (1.4.74)$$

Finalement, nous avons

$$\Phi \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t} \longrightarrow \Phi \partial_t (\rho_l^h(p_g)s_l) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (1.4.75)$$

$$\Phi \partial_t \tilde{s}_l^{\delta t} \longrightarrow \Phi \partial_t s_l^{\delta t} \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (1.4.76)$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \|u_g^{\delta t} - \tilde{u}_g^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \left\| \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) (u_g^{n+1} - u_g^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \frac{\delta t}{3} \sum_{n=0}^{M-1} \|u_g^{n+1} - u_g^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

On multiplie ensuite (1.4.6) par  $u_g^{n+1} - u_g^n$  et on somme de  $n = 0$  jusqu'à  $M - 1$  obtenant l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_0}{\delta t} \sum_{n=0}^{M-1} \|u_g^{n+1} - u_g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{n=0}^{M-1} (\|\nabla u_g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla s_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \|\nabla p_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|r_g^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned} \quad (1.4.77)$$

Ceci implique

$$\sum_{n=0}^{M-1} \|u_g^{n+1} - u_g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(1 + \|\nabla u_g\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla s_g\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla p_g\|_{L^2(Q_T)}^2).$$

Ensuite, en utilisant (1.4.57), (1.4.58) et (1.4.59), on en déduit que

$$\|u_g^{\delta t} - \tilde{u}_g^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \delta t \rightarrow 0.$$

De même, on a

$$\begin{aligned} \|s_l^{\delta t} - \tilde{s}_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{nh}^{(n+1)h} \left\| \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) (s_l^{n+1} - s_l^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \frac{\delta t}{3} \sum_{n=0}^{M-1} \|s_l^{n+1} - s_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$



et en multipliant l'équation (1.4.7) par  $s_l^{n+1} - s_l^n$  puis en sommant de  $n = 0$  à  $M - 1$ , on obtient

$$\frac{\Phi_0}{\delta t} \sum_{n=0}^{M-1} \|s_l^{n+1} - s_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=0}^{M-1} \left( \|\nabla s_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla s_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{r_w^{n+1}}{\rho_w} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right).$$

Ceci implique

$$\sum_{n=0}^{M-1} \|s_l^{n+1} - s_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|\nabla s_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla p_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 \right).$$

Et d'après l'estimation (1.4.57) et (1.4.58), on en déduit que

$$\|s_l^{\delta t} - \tilde{s}_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0.$$

A l'aide de (1.4.57) et (1.4.58), les suites  $(s_g^{\delta t})_{\delta t}$  et  $(p_\alpha^{\delta t})_{\delta t}$  sont uniformément bornées dans  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ , donc pour des sous suites, on obtient les convergences (1.4.67) et (1.4.68).

Les suites  $(\tilde{u}_g^{\delta t})$  et  $(\tilde{s}_g^{\delta t})$  sont uniformément bornées dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  d'après (1.4.57) et (1.4.59) respectivement. Grâce aux estimations (1.4.60) et (1.4.61), on en déduit les convergences fortes suivantes

$$\tilde{u}_g^{\delta t} \longrightarrow u_g \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T), \quad (1.4.78)$$

$$\tilde{s}_g^{\delta t} \longrightarrow s_g \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T). \quad (1.4.79)$$

Ce résultat de compacité peut se trouver dans [25], [66] où la porosité est constante et sous l'hypothèse (H1) (*i. e.* la porosité appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)$ ) avec des petites modifications. Les convergences (1.4.78) et (1.4.79) avec (1.4.65), (1.4.66) assurent alors les convergences

$$\rho_l^h(p_g)m(s_l) \longrightarrow u_g \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (1.4.80)$$

$$s_l \longrightarrow s_l \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (1.4.81)$$

prouvant les convergences (1.4.69) et (1.4.70).

En ce qui concerne la convergence presque partout dans  $\Omega$  de la pression  $p_g^{\delta t}$  et la saturation  $s_l^{\delta t}$ . On a

$$\rho_l^h(p_g^{\delta t}) = \frac{u_g^{\delta t}}{m(s_l^{\delta t})},$$

et d'après les convergences fortes (1.4.69) et (1.4.70), on en déduit que

$$\rho_l^h(p_g^{\delta t}) = \frac{u_g^{\delta t}}{m(s_l^{\delta t})} \longrightarrow \frac{u_g}{m(s_l)} := \rho^*.$$

Or  $\rho_l^h(p_g^{\delta t})$  est strictement croissant donc

$$p_g^{\delta t} \longrightarrow (\rho_l^h)^{-1}(\rho^*) \text{ p.p dans } Q_T,$$

et on a d'après la convergence (1.4.68), l'unicité de solution

$$p_g^{\delta t} \longrightarrow (\rho_l^h)^{-1}(\rho^*) = p_g \text{ p.p dans } Q_T.$$

Finalement, on obtient

$$m(s_l^{\delta t}) = \frac{u_g^{\delta t}}{\rho_l^h(p_g^{\delta t})} \longrightarrow \frac{u_g}{\rho_l^h(p_g)} = m(s_l)$$

Les convergences faibles (1.4.75) – (1.4.76) sont des conséquences de (1.4.60), (1.4.61) et l'identification de la limite est due à (1.4.74).  $\square$

Pour obtenir les solutions du système non dégénéré  $\mathfrak{P}_\eta$ , on passe à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro dans le système suivant

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t} - \operatorname{div}(\mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^{\delta t}) - \operatorname{div} \left[ \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \right] \\ - \mathcal{C}_1 \operatorname{div} \left[ \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_g(s_g^{\delta t}) (\nabla p_g - \rho_g(p_g^{\delta t}) \mathbf{g}) \right] + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \operatorname{div} \left[ \rho_l^h(p_g^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \right] = r_g^{\delta t}, \\ \partial_t (\Phi s_l^{\delta t}) - \operatorname{div} \left( \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t})) \right) - \eta \operatorname{div} (\nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t})) = \frac{r_\omega^{\delta t}}{\rho_l^w} \end{cases}$$

Remarquons que ce système n'est autre que le système (1.4.1) – (1.4.2) écrit de  $n = 0$  jusqu'à  $M - 1$  en utilisant les définitions (1.4.55) et (1.4.56).

Considérons maintenant la formulation faible associée à ce système dans lequel on va passer à la limite  $\delta t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{u}_g^{\delta t}, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g^{\delta t} \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) M_g(s_g^{\delta t}) (\nabla p_g^{\delta t} - \rho_g(p_g^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{\Omega} \rho_l^h(p_g^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{\Omega} r_g^{\delta t} \varphi dx dt \end{aligned} \quad (1.4.82)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{s}_l^{\delta t}, \varphi \rangle + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t})) \cdot \nabla \psi dx dt \\ - \eta \int_{\Omega} \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{\Omega} \frac{r_\omega^{\delta t}}{\rho_l^w} \psi dx \end{aligned} \quad (1.4.83)$$

Pour les termes temporels de (1.4.82) et de (1.4.83), le passage à la limite provient de (1.4.75) et (1.4.76) respectivement. Pour le troisième et le quatrième terme de (1.4.82),

$M_\alpha(s_\alpha)\rho_l^h(p_g)\nabla\varphi$  converge presque partout dans  $Q_T$  et est majoré donc on peut appliquer le théorème de Lebesgue pour obtenir la convergence forte dans  $L^2(\Omega)$  et à l'aide de la convergence faible de (1.4.68), on établit la convergence du troisième et du quatrième termes de (1.4.82). Le principe reste le même pour le deuxième terme de (1.4.83). Les autres termes de (1.4.82) – (1.4.83) convergent en utilisant la proposition précédente et on appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

La formulation faible (1.4.4) – (1.4.5) du théorème 1.4.1 est donc établie. De plus, nous avons obtenu à l'aide de la proposition 1.4.3 les estimations

$$\begin{aligned} s_l(t, x) &\geq 0 \text{ p.p. dans } Q_T, \quad s_g \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi\partial_t(s_l) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \\ p_\alpha &\in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi\partial_t(\rho_l^h(p_g)m(s_l)) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \end{aligned}$$

prouvant le théorème 1.4.1.

## 1.5 Existence de solutions de système dégénéré

Nous avons montré dans la section 1.4.2 l'existence d'une solution  $(p_g^\eta, p_l^\eta)$  du problème  $\mathfrak{P}_\eta$  donné dans la section 1.4. Ici, l'objectif est de passer à la limite quand  $\eta$  tend vers zéro pour montrer le résultat principal de ce chapitre : l'existence d'une solution du système (1.1.2)-(1.1.1) ainsi que les estimations données dans le théorème 1.2.1.

Le point important est l'obtention d'estimations uniformes indépendantes de  $\eta$  afin de pouvoir passer à la limite  $\eta \rightarrow 0$  ce qui fait l'objet du lemme suivant.

**Lemme 1.5.1.** *Les suites  $(s_\alpha^\eta)_\eta$  et  $(p^\eta := p_l^\eta + \bar{p}(s_l^\eta))_\eta$  définies dans le théorème 1.4.1 vérifient*

$$s_l^\eta \geq 0 \quad \text{presque partout dans } Q_T \quad (1.5.1)$$

$$(p^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)) \quad (1.5.2)$$

$$(p_g^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)) \quad (1.5.3)$$

$$(\sqrt{\eta} \nabla p_c(s_l^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(Q_T) \quad (1.5.4)$$

$$(\sqrt{M_\alpha(s_\alpha^\eta)} \nabla p_\alpha^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(Q_T), \quad \alpha = l, g \quad (1.5.5)$$

$$(\mathcal{B}(s_l^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (1.5.6)$$

$$(\Phi\partial_t(\rho_l^h(p_g^\eta)m(s_l^\eta)))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (1.5.7)$$

$$(\Phi\partial_t(s_l^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))') \quad (1.5.8)$$

*Démonstration.* La positivité de la saturation donnée dans (1.5.1) est obtenue par passage à la limite. Pour les trois estimations suivantes, on multiplie (1.4.4) par  $g_g(p_g^\eta) = \int_0^{p_g^\eta} \frac{1}{\rho_l^h(z)} dz$

et (1.4.5) par  $\mathcal{C}_1 p_l^\eta - p_g^\eta$ . Après sommation de ces deux quantités, on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \left( m(s_l^\eta) \mathcal{H}_g(p_g^\eta) - \mathcal{C}_1 \int_{\frac{1}{2}}^{s_l^\eta} p_c(z) dz \right) dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_l^\eta dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(s_g^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_g^\eta dx + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\eta)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\eta \cdot \nabla p_g^\eta dx \\ & + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla f(s_l^\eta)|^2 dx = \int_{\Omega} (r_g g_g(p_g^\eta) + \frac{r_\omega}{\rho_l^w} (\mathcal{C}_1 p_l^\eta - p_g^\eta)) dx. \end{aligned} \quad (1.5.9)$$

En utilisant les hypothèses (H1) – (H8), l'inégalité de Cauchy et la sublinéarité de la fonction  $g_g$ , on en déduit l'inégalité

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \Phi \left( m(s_l^\eta) \mathcal{H}_g(p_g^\eta) - \mathcal{C}_1 \int_{\frac{1}{2}}^{s_l^\eta} p_c(z) dz \right) dx \\ & + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \nabla p_l^\eta \cdot \nabla p_l^\eta dx + \mathcal{C}_1 \int_{\Omega} \mathbf{K} M_g(s_g^\eta) \nabla p_g^\eta \cdot \nabla p_g^\eta dx \\ & + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\eta)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\eta \cdot \nabla p_g^\eta dx + \mathcal{C}_1 \eta \int_{\Omega} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx \\ & \leq \frac{1}{\rho_m} (\|p_l^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|p_g^\eta\|_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq \frac{2}{\rho_m} (\|p^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)}) \\ & \leq C (\|\nabla p^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Ensuite, après intégration de l'inégalité précédente sur  $(0, T)$ , à l'aide de la relation (1.3.2) entre la pression globale et la pression de chaque phase, les hypothèses (H1) – (H8), l'inégalité de Cauchy, l'inégalité de Young et la positivité des fonctions  $\mathcal{H}_\alpha$  pour  $\alpha = l, g$ , on en déduit

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} M(s_l^\eta) |\nabla p^\eta|^2 dx dt + \int_{Q_T} \frac{M_l(s_l^\eta) M_g(s_g^\eta)}{M(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt + \int_{\Omega} \frac{\mathcal{C}_2}{\rho_l^h(p_g^\eta)} X_l^w D_l^h \nabla p_g^\eta \cdot \nabla p_g^\eta dx \\ & + \mathcal{C}_1 \eta \int_{Q_T} \nabla p_c(s_l^\eta) \cdot \nabla p_c(s_l^\eta) dx dt + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \nabla p_\alpha^\eta \cdot \nabla p_\alpha^\eta dx dt \leq C_1, \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $\eta$ .

En utilisant l'hypothèse (H3), l'estimation (1.5.2) est alors une conséquence de l'inégalité précédente.

Les estimations (1.5.3), (1.5.4) et (1.5.5) sont des conséquences de l'estimation (1.5.11).

Pour l'estimation (1.5.6), nous avons

$$\int_{Q_T} \frac{M_l(s_l^\eta) M_g(s_g^\eta)}{M(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt < C$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$ . Ceci implique

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{B}(s_l^\eta)|^2 dx dt &= \int_{Q_T} \frac{M_l^2(s_l^\eta) M_g^2(s_g^\eta)}{M^2(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt \\ &\leq \frac{1}{4} \int_{Q_T} M_l(s_l^\eta) M_g(s_g^\eta) |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt \\ &\leq C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$  prouvant ainsi l'estimation (1.5.6).

Pour tout  $\varphi, \psi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ , nous avons donc

$$\begin{aligned} &\langle \Phi \partial_t(m(s_l^\eta) \rho_l^h(p_g^\eta)), \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \\ &+ \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ &+ \mathcal{C}_1 \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_g(s_l^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ &+ (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{Q_T} r_g \varphi dx dt, \end{aligned} \tag{1.5.12}$$

et

$$\begin{aligned} &\langle \Phi \partial_t s^\eta, \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \nabla p_l^\eta \cdot \nabla \psi dx dt \\ &- \eta \int_{Q_T} \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt, \end{aligned} \tag{1.5.13}$$

où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit de dualité entre  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$  et  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ .

En utilisant (1.5.12), on obtient

$$\begin{aligned} &\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta)), \varphi \rangle \right| \leq \left| (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) \nabla p_c(s_l^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &+ \left| \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) (M_l(s_l^\eta) \nabla p^\eta + \nabla \mathcal{B}(s_l^\eta)) \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &+ \left| \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g) M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &+ \mathcal{C}_1 \left| \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) M_g(s_l^\eta) \rho_g(p_g^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\ &+ \mathcal{C}_2 \left| \int_{Q_T} X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \right| + \left| \int_{Q_T} r_g \varphi dx dt \right|. \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

D'autre part, de (1.5.13), on en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \langle \Phi \partial_t(s_l^\eta, \psi) \rangle \right| &\leq \left| \eta \int_{Q_T} \nabla p_c(s_l^\eta) \cdot \nabla \psi dxdt \right| \\ &+ \left| \int_{Q_T} \mathbf{K}(M_l(s_l^\eta) \nabla p^\eta + \nabla \mathcal{B}(s_l^\eta)) \cdot \nabla \psi dxdt \right| \\ &+ \left| \int_{Q_T} \frac{r_w}{\rho_w} \psi dxdt \right|. \end{aligned} \quad (1.5.15)$$

En utilisant les estimations (1.5.2), (1.5.3) et (1.5.6), on déduit que

$$\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta)), \varphi \rangle \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma_l}^1(\Omega))},$$

et

$$\left| \langle \Phi \partial_t(s_l^\eta), \varphi \rangle \right| \leq C \|\psi\|_{L^2(0,T;H_{\Gamma_l}^1(\Omega))},$$

ce qui prouve le lemme 1.5.1.  $\square$

L'objectif des lemmes qui suivent est de montrer la convergence presque partout des pressions et de la saturation de chaque phase.

**Lemme 1.5.2.** (*Résultat de compacité dans le cas dégénéré*) Pour tout  $M$ , l'ensemble

$$\begin{aligned} E_M = \{ &(\rho_l^h(p_g) m(s_l), s_l) \in L^2(Q_T) \times L^2(Q_T) \text{ tel que} \\ &\|\mathcal{B}(s_l)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M, \quad \|\sqrt{M_l(s_l)} \nabla p_l\|_{L^2(Q_T)} + \|\sqrt{M_g(s_g)} \nabla p_g\|_{L^2(Q_T)} \leq M, \\ &\|\Phi \partial_t(\rho_l^h(p_g) m(s_l))\|_{L^2(0,T;(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')} \leq M, \quad \|\Phi \partial_t(s_l)\|_{L^2(0,T;(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')} \leq M \} \end{aligned} \quad (1.5.16)$$

est relativement compact dans  $L^2(Q_T) \times L^2(Q_T)$  et  $\gamma(E_M)$  est relativement compact dans  $L^2(\Sigma_T) \times L^2(\Sigma_T)$  ( $\gamma$  étant la trace sur  $\Sigma_T$ ).

*Démonstration.* La preuve est inspirée du lemme de compacité donné dans [44]-[48] et introduite pour un modèle compressible dégénéré. On généralise ce résultat pour notre modèle compressible dégénéré. Notant

$$u = \rho_l^h(p_g) m(s_l) \text{ et } v = s_l,$$

on définit l'application  $H: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \times [0, \mathcal{B}(1)]$  par

$$H(u, v) = (p_g, \mathcal{B}(s_l)) \quad (1.5.17)$$

où  $u$  et  $v$  sont des solutions du système

$$\begin{aligned} u(p_g, \mathcal{B}(s_l)) &= \rho_l^h(p_g) m(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))), \\ v(p_g, \mathcal{B}(s_l)) &= \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)). \end{aligned}$$

L'application  $H$  est bien définie comme difféomorphisme. En effet, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial p_g} &= (\rho_l^h)'(p_g)m(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))) > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathcal{B}} &= (1-a)\rho_l^h(p_g)(\mathcal{B}^{-1})'(\mathcal{B}(s_l)) < 0, \\ \frac{\partial v}{\partial p_g} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathcal{B}} &= (\mathcal{B}^{-1})'(\mathcal{B}(s_l)) > 0.\end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant du Jacobien de l'application  $H^{-1}$  est strictement positif. D'autre part,  $H^{-1}$  est une fonction Höldérienne dans le sens où  $u$  et  $v$  sont des fonctions Höldériennes d'ordre  $\theta$  avec  $0 < \theta \leq 1$ . Pour cela, soient  $(q_1, \sigma_1)$  et  $(q_2, \sigma_2)$  définis dans  $\mathbb{R}^+ \times [0, \mathcal{B}(1)]$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned}|u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| &= |\rho_l^h(q_1)\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \rho_l^h(q_2)\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq |\rho_l^h(q_1) - \rho_l^h(q_2)| + \rho_M|\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)|.\end{aligned}$$

Comme  $\mathcal{B}^{-1}$  est une fonction Höldérienne d'ordre  $\theta$  avec  $0 < \theta \leq 1$  et que l'application  $\rho_l^h$  est bornée et de classe  $\mathcal{C}^1$ , on déduit selon les deux cas suivants :

Premier cas  $|q_1 - q_2| \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}|u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| &= |\rho_l^h(q_1) - \rho_l^h(q_2)| + \rho_M|\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq \rho_M + \rho_M|\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq \rho_M|q_1 - q_2|^\theta + \rho_M C_{\mathcal{B}}|\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.\end{aligned}$$

Pour l'autre cas où  $|q_1 - q_2| \leq 1$ , nous avons

$$\begin{aligned}|u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| &= |\rho_l^h(q_1) - \rho_l^h(q_2)| + \rho_M|\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq C|q_1 - q_2| + \rho_M C_{\mathcal{B}}|\sigma_1 - \sigma_2|^\theta \\ &\leq C(|q_1 - q_2|^\theta + \rho_M C_{\mathcal{B}}|\sigma_1 - \sigma_2|^\theta).\end{aligned}$$

De la même façon, nous avons

$$|v(q_1, \sigma_1) - v(q_2, \sigma_2)| \leq C_1|q_1 - q_2|^\theta + C_1|\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

Pour  $0 < \tau < 1$  et  $1 < r < \infty$ , notons

$$W^{\tau, r} = \left\{ w \in L^r(\Omega); \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|w\|_{W^{\tau,r}(\Omega)} = \left( \|w\|_{L^r(\Omega)}^r + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy \right)^{\frac{1}{r}},$$

où  $d$  est la dimension de l'espace. Soient  $q$  et  $\sigma$  dans  $W^{\tau,r}(\Omega) \times W^{\tau,r}(\Omega)$ , alors les fonctions höldériennes  $u$  et  $v$  appartiennent à  $W^{\theta\tau,r/\theta}(\Omega)$ . En effet

$$|u(q, \sigma)| \leq c_1 |q|^\theta + c_2 |\sigma|^\theta,$$

donc  $u$  appartient à  $L^{r/\theta}(\Omega)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(q(x), \sigma(x)) - u(q(y), \sigma(y))|^{r/\theta}}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy &\leq c_1^{r/\theta} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|q(x) - q(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy \\ &\quad + c_2^{r/\theta} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\sigma(x) - \sigma(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\|u(q, \sigma)\|_{W^{\theta\tau,r/\theta}(\Omega)} \leq c \left( \|q\|_{W^{\tau,r}(\Omega)}^\theta + \|\sigma\|_{W^{\tau,r}(\Omega)}^\theta \right).$$

En utilisant l'injection continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $W^{\tau,2}(\Omega)$  avec  $\tau < 1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|u(p_g, \mathcal{B}(s_l))\|_{W^{\theta\tau,2/\theta}(\Omega)} &\leq c \left( \|p_g\|_{W^{\tau,2}(\Omega)}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{W^{\tau,2}(\Omega)}^\theta \right) \\ &\leq c \left( \|p_g\|_{H^1(\Omega)}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{H^1(\Omega)}^\theta \right). \end{aligned}$$

On intègre ensuite l'inégalité ci-dessus sur  $(0, T)$  pour obtenir l'inégalité

$$\|u(p_g, \mathcal{B}(s_l))\|_{L^{2/\theta}(0,T;W^{\theta\tau,2/\theta}(\Omega))} \leq c \left( \|p_g\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^\theta \right).$$

Comme la porosité  $\Phi$  appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)$ , en utilisant les estimations (1.5.3) et (1.5.6), on en déduit que

$$\|\Phi u(p_g, \mathcal{B}(s_l))\|_{L^{2/\theta}(0,T;W^{\theta\tau,2/\theta}(\Omega))} \leq C.$$

Comme  $\Omega$  est borné et régulier, pour  $\tau' < \theta\tau$ , nous avons  $W^{\theta\tau,2/\theta}(\Omega) \subset W^{\tau',2/\theta}(\Omega) \subset (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'$  avec injection compact de  $W^{\theta\tau,2/\theta}(\Omega)$  dans  $W^{\tau',2/\theta}(\Omega)$ . Finalement, on en déduit que  $E_M$  est relativement compact dans  $L^{2/\theta}(0, T; W^{\tau',2/\theta}(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

D'autre part, le trace  $\gamma$  est une application continue de  $W^{\tau',2/\theta}(\Omega)$  dans  $W^{\tau' - \theta/2, 2/\theta}(\partial\Omega)$  dès que  $\tau' > \theta/2$  (prendre par exemple  $\tau' = \frac{3\theta}{4}$ ), on en déduit que  $\gamma(E_M)$  est relativement compact dans  $L^2(\Sigma_T) \times L^2(\Sigma_T)$  prouvant ainsi le lemme de compacité 1.5.2.  $\square$

Des deux lemmes précédents, nous en déduisons les convergences suivantes.



**Lemme 1.5.3.** *Pour des sous-suites, les suites  $(s_\alpha^\eta)_\eta$ ,  $(p^\eta := p_l^\eta + \bar{p}(s_l^\eta))_\eta$  et  $(p_\alpha^\eta)_\eta$  vérifient les convergences suivantes*

$$p^\eta \longrightarrow p \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (1.5.18)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\eta) \longrightarrow \mathcal{B}(s_l) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (1.5.19)$$

$$p_g^\eta \longrightarrow p_g \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (1.5.20)$$

$$p^\eta \longrightarrow p \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.5.21)$$

$$s_l^\eta \longrightarrow s_l \quad \text{presque partout dans } Q_T \text{ et } \Sigma_T, \quad (1.5.22)$$

$$s_l^\eta \longrightarrow s_l \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et } L^2(\Sigma_T), \quad (1.5.23)$$

$$s_l \geq 0 \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.5.24)$$

$$p_\alpha^\eta \longrightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (1.5.25)$$

$$\Phi \partial(\rho_l^h(p_g^\eta)m(s_l^\eta)) \longrightarrow \Phi \partial(\rho_l^h(p_g)m(s_l)) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (1.5.26)$$

$$\Phi \partial s_l^\eta \longrightarrow \Phi \partial s_l \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \quad (1.5.27)$$

*Démonstration.* Les convergences faibles (1.5.18) et (1.5.20) résultent des estimations uniformes (1.5.2), (1.5.4), (1.5.6) et du lemme 1.5.1.

Le lemme 1.5.2 assure les convergences fortes suivantes

$$\begin{aligned} \rho_l^h(p_g^\eta)m(s_l^\eta) &\longrightarrow l && \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et presque partout dans } Q_T, \\ \rho_l^h(p_g^\eta)m(s_l^\eta) &\longrightarrow l && \text{fortement dans } L^2(\Sigma_T) \text{ et presque partout dans } \Sigma_T. \end{aligned}$$

Nous avons également les convergences fortes suivantes

$$\begin{aligned} s_l^\eta &\longrightarrow s_l && \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et presque partout dans } Q_T, \\ s_l^\eta &\longrightarrow s_l && \text{fortement dans } L^2(\Sigma_T) \text{ et presque partout dans } \Sigma_T. \end{aligned}$$

Ceci prouve les convergences (1.5.22) et (1.5.23). Et d'après (1.5.1), on en déduit l'estimation (1.5.24).

Comme l'application  $H$  définie dans (1.5.17) est continue, on en déduit que

$$p_g^\eta \longrightarrow p_g \quad \text{presque partout dans } Q_T \text{ et presque partout dans } \Sigma_T,$$

prouvant la convergence (1.5.25) pour  $\alpha = g$ . Et comme la pression capillaire est continue et bornée, on en déduit la convergence (1.5.25) pour  $\alpha = l$ .

La convergence (1.5.21) résulte de la relation (1.2.1) entre la pression globale et les pressions de chaque phase et de la convergence presque partout sur la saturation liquide donnée par (1.5.22).

Enfin, les convergences faibles (1.5.26) et (1.5.27) sont des conséquences des estimations (1.5.7) et (1.5.8).  $\square$

Pour prouver le théorème 1.2.1, il reste le passage à la limite quand  $\eta$  tend vers zéro dans les formulations (1.4.4)–(1.4.5) pour toute fonction  $\varphi$  et  $\psi$  appartenant à  $\mathcal{C}^1([0, T]; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  et vérifiant  $\varphi(T) = \psi(T) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_T} \Phi \rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta) \partial_t \varphi dx dt + \int_{Q_T} \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + \mathcal{C}_1 \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_l^h(p_g^\eta) M_g(s_l^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + (\mathcal{C}_1 - 1) \eta \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& = \int_{Q_T} r_g \varphi dx dt + \int_{Q_T} \Phi \rho_l^h(p_g^0) m(s_l^0) \varphi(0, x) dx dt
\end{aligned} \tag{1.5.28}$$

et

$$\begin{aligned}
& - \int_{Q_T} \Phi s_l^\eta \partial_t \psi dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\
& - \eta \int_{Q_T} \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} \frac{r_\omega}{\rho_l^w} \psi dx dt + \int_{Q_T} \Phi s_l^0 \psi(0, x) dx dt
\end{aligned} \tag{1.5.29}$$

Les premiers termes des équations (1.5.28) et (1.5.29) convergent en utilisant la convergence forte de  $\rho_l^h(p_g^\eta) m(s_l^\eta)$  vers  $\rho_l^h(p_g) m(s_l)$  dans  $L^2(Q_T)$  et la convergence forte de  $s_l^\eta$  vers  $s_l$  dans  $L^2(Q_T)$ .

Le troisième et quatrième terme de (1.5.28) peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\int_{Q_T} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla p_\alpha^\eta \cdot \nabla \varphi dx dt & = \int_{Q_T} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla p^\eta \cdot \nabla \varphi dx dt \\
& + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla \mathcal{B}(s_\alpha^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt.
\end{aligned} \tag{1.5.30}$$

On montre alors la convergence des deux termes de droite dans (1.5.30) en deux étapes. Premièrement, en utilisant le théorème de convergence de Lebesgue ainsi que les convergences (1.5.22) et (1.5.25), on obtient

$$\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) M_\alpha(s_\alpha^\eta) \nabla \varphi \longrightarrow \rho_\alpha(p_\alpha) M_\alpha(s_\alpha) \nabla \varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d,$$

et

$$\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla \varphi \longrightarrow \rho_\alpha(p_\alpha) \nabla \varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

Deuxièmement, en utilisant la convergence faible de la pression globale donnée dans (1.5.18) avec les convergences fortes ci-dessus, on obtient la convergence du premier terme du membre de droite de (1.5.30). Ensuite, à l'aide de la convergence faible donnée dans

(1.5.19) avec la convergence forte ci-dessus, on obtient la convergence du deuxième terme du membre à droite de (1.5.30). Ceci prouve le passage à la limite sur le deuxième et troisième terme de (1.5.28). Nous procédons de la même manière pour le deuxième terme de l'équation (1.5.29).

Le terme capillaire de (1.5.28) peut s'écrire

$$\eta \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \nabla \varphi dx dt = \sqrt{\eta} \int_{Q_T} \rho_l^h(p_g^\eta) (\sqrt{\eta} \nabla p_c(s_l^\eta)) \nabla \varphi dx dt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation uniforme (1.5.4) assure la convergence de ce terme vers zéro. Nous procédons de la même manière pour le terme capillaire de l'équation (1.5.29).

Pour le quatrième terme de (1.5.28), on utilise le théorème de convergence de Lebesgue et les convergences (1.5.22)–(1.5.25) pour montrer la convergence forte suivante

$$\mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h(s_l^\eta) \nabla \varphi \longrightarrow \mathcal{C}_2 X_l^w D_l^h(s_l) \nabla \varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

La convergence faible (1.5.20) combinée avec la convergence forte ci-dessus prouve la convergence du quatrième terme de (1.5.28).

Les autres termes convergent en utilisant le théorème de convergence de Lebesgue et les convergences du lemme précédent.

Les formulations faibles (1.2.4)–(1.2.5) sont alors établies et le théorème 1.2.1 est ainsi prouvé.

# Chapitre 2

## Étude mathématique du modèle DYNMOD

L'hypothèse de non équilibre local entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux dans le modèle DYNMOD a fait l'objet de nombreuses études comme dans, par exemple, [64], [55] ou [63]). Ceux-ci ont proposé un modèle pour des problèmes de transport de contaminants volatiles avec un processus de dispersion décrit à l'aide d'un terme prenant en compte le taux de transfert de masse entre les deux phases. De même, Geller et Hunt [45] ont étudié la dissolution d'un liquide organique dans l'eau en milieux poreux homogène sous des conditions où l'équilibre entre la phase organique et la phase aqueuse n'est pas atteint. On peut également citer P. Fabrie et al [39] qui ont étudié d'un point de vue mathématique l'existence et la stabilité de solutions d'un modèle diphasique incompressible eau-huile avec une cinétique de transfert de masse non instantanée.

Dans ce chapitre, nous prouvons l'existence de solutions faibles du système DYNMOD avec transfert de masse d'hydrogène dynamique sans hypothèse de non dégénérescence des lois de fermeture et en supposant que la densité de l'hydrogène sous sa forme gazeuse dépend de sa propre pression et non pas d'une pression globale. Des estimations d'énergies sont obtenues pour contrôler les vitesses de chaque phase ainsi que les termes capillaires.

Ce chapitre a fait l'objet d'un article accepté dans *Acta Applicandae Mathematicae* : Two-component two-compressible flow in a porous medium [24].

### 2.1 Hypothèses sur les paramètres physiques et résultat principal

Nous rappelons le système DYNMOD étudié dans ce chapitre

$$\begin{cases} \partial_t(\Phi\rho_l(p_l)s_l) + \operatorname{div}(\rho_l(p_l)\mathbf{V}_l) = -\dot{m}, & (2.1.1) \\ \partial_t(\Phi\rho_g(p_g)s_g) + \operatorname{div}(\rho_g(p_g)\mathbf{V}_g) = \dot{m}, & (2.1.2) \\ \partial_t(\Phi\rho_l(p_l)s_lX) + \operatorname{div}(\rho_l(p_l)\mathbf{V}_lX) - \operatorname{div}(\rho_l(p_l)D_l^h(s_l)\nabla X) = -\dot{m}, & (2.1.3) \end{cases}$$

où

$$\dot{m} = \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(X - X_{\text{eq}}),$$

représente le transfert de masse entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous. Dans ce système, la concentration d'hydrogène dissous est notée  $X$  au lieu de  $X_l^h$ .

Nous rappelons la définition de la pression globale comme dans [25]

$$M(s_l)\nabla p = M_l(s_l)\nabla p_l + M_g(s_g)\nabla p_g,$$

où les mobilités  $M_\alpha$  de chaque phase  $\alpha$  et la mobilité totale  $M$  sont définies par

$$M_\alpha(s_\alpha) = k_{r_\alpha}(s_\alpha)/\mu_\alpha, \quad M(s_l) = M_l(s_l) + M_g(s_g).$$

Comme dans [25], [44] et [48], on définit les fonctions  $\tilde{p}$ ,  $\bar{p}$  par

$$\frac{d\tilde{p}(s_l)}{ds_l} = -\frac{M_l(s_l)}{M(s_l)}\frac{dp_c(s_l)}{ds_l}, \quad \frac{d\bar{p}(s_l)}{ds_l} = \frac{M_g(s_g)}{M(s_l)}\frac{dp_c(s_l)}{ds_l}.$$

La pression globale  $p$  peut alors s'écrire à l'aide de  $\tilde{p}$  et  $\bar{p}$

$$p = p_g + \tilde{p}(s_l) = p_l + \bar{p}(s_l). \quad (2.1.4)$$

On note  $\xi$  le terme capillaire défini par

$$\xi(s_l) = -\frac{M_l(s_l)M_g(s_g)}{M(s_l)}\frac{dp_c(s_l)}{ds_l} \geq 0.$$

Nous introduisons maintenant les conditions aux limites, les conditions initiales et certaines hypothèses sur les données du problème.

Soit  $T > 0$  fixé et soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d \geq 1$ ). On définit  $Q_T = (0, T) \times \Omega$  et  $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ ,  $\partial\Omega$  représentant le bord de  $\Omega$ . On note  $\Gamma_l$  la partie de  $\partial\Omega$  correspondante à des conditions aux limites de type Dirichlet et  $\Gamma_n$  la partie de  $\partial\Omega$  correspondante à des conditions aux limites de type Neumann. Les conditions aux limites imposées sont du type

$$\left\{ \begin{array}{l} X = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_l, \\ p_g(t, x) = p_l(t, x) = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_l, \\ \rho_l \mathbf{V}_l \cdot \mathbf{n} = \rho_g \mathbf{V}_g \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n, \\ (\rho_l \mathbf{V}_l X - \rho_l D_l^h \nabla X) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n, \end{array} \right.$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normale sortant  $\Gamma_n$ .

Les conditions initiales s'écrivent quant à elles

$$p_\alpha(t = 0) = p_\alpha^0 \text{ pour } \alpha = l, g \text{ et } X(t = 0) = X^0 \text{ dans } \Omega, \quad (2.1.5)$$

pour des fonctions  $p_\alpha^0$  et  $X^0$ .

Nous effectuons également les hypothèses suivantes sur les paramètres physiques du milieu ainsi que sur les lois de fermetures.

(H1) La porosité  $\Phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et il existe deux constantes positives  $\Phi_0$  et  $\Phi_1$  telles que  $\Phi_0 \leq \Phi(x) \leq \Phi_1$  p.p.  $x \in \Omega$ .

(H2) Le tenseur  $\mathbf{K} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^{d \times d}$ . De plus, il existe deux constantes positives  $k_0$  et  $k_\infty$  telles que

$$\|\mathbf{K}\|_{(L^\infty(\Omega))^{d \times d}} \leq k_\infty \text{ et } (\mathbf{K}(x)\xi, \xi) \geq k_0|\xi|^2 \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

(H3) Les Mobilités  $M_l, M_g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ ,  $M_\alpha(s_\alpha=0)=0$ . De plus, il existe une constante positive  $m_0$  telle que pour tout  $s_l \in [0, 1]$ ,

$$M_l(s_l) + M_g(s_g) \geq m_0 > 0.$$

(H4) Les densités  $\rho_\alpha$  pour  $(\alpha=l, g)$  sont  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , croissante et il existe deux constantes positives  $\rho_m$  et  $\rho_M$  telles que

$$0 < \rho_m \leq \rho_\alpha(p_\alpha) \leq \rho_M.$$

(H5) Le tenseur de diffusion  $D_l^h$  est une fonction non linéaire continue de la saturation  $s_l$ . De plus, il existe deux constantes positives  $d_1$  et  $d_2$  telles que pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $v \in \mathbb{R}^d$

$$\|D_l^h(x, s_l)\| \leq d_1 \text{ et } \langle D_l^h(x, s_l)v, v \rangle \geq d_2\|v\|^2.$$

(H6) La pression capillaire  $p_c \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ , décroissante, et

$$0 < \underline{p}_c \leq \left| \frac{dp_c}{ds_l} \right|.$$

(H7) Le terme capillaire  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ , vérifie  $\xi(s_l) > 0$  pour  $0 < s_l \leq 1$  et  $\xi(0) = \xi(1) = 0$ . Nous supposons également que  $\mathcal{B}^{-1}$  (l'inverse de  $\mathcal{B}(s_l) = \int_0^{s_l} \xi(z) dz$ ) est une fonction Höldérienne <sup>1</sup> d'ordre  $\theta$ , avec  $0 < \theta \leq 1$ , sur  $[0, \mathcal{B}(1)]$ .

(H8) La concentration d'équilibre  $X_{\text{eq}}$  est une constante positive.

(H9) La fonction  $\Gamma$  dépend seulement de  $s_l$  et  $\forall x \in \Omega$ ,  $\Gamma(x, \cdot) \in \mathcal{C}^0([0, 1])$  et  $\Gamma(x, 1) = 0$ .

Le résultat d'existence principale de ce chapitre est donnée ci-dessous. Pour cela nous définissons l'espace de Sobolev suivant

$$H_{\Gamma_l}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_l\},$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme  $\|u\|_{H_{\Gamma_l}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}$ .

---

<sup>1</sup>i.e il existe une constante  $c$  positive telle que pour tout  $s_l, s_g \in [0, \mathcal{B}(1)]$ , on a  $|\mathcal{B}^{-1}(s_l) - \mathcal{B}^{-1}(s_g)| \leq c|s_l - s_g|^\theta$ .

**Théorème 2.1.1.** *Sous les hypothèses (H1)-(H9), en supposant que les données initiales  $p_g^0, p_l^0$  et  $X^0$  données dans (2.1.5) sont définies p.p. dans  $\Omega$  avec  $0 \leq s_l^0 \leq 1$  et  $0 \leq X^0(x) \leq X_{\text{eq}}$  alors il existe  $(p_g, p_l, X)$  solution faible du système DYNMOD dans le sens où pour tout  $\varphi, \psi$  et  $\chi \in \mathcal{C}^1([0, T]; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$  avec  $\varphi(T, \cdot) = \psi(T, \cdot) = \chi(T, \cdot) = 0$  nous avons les formulations variationnelles*

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l) s_l \partial_t \varphi dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l) \rho_l(p_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ & - \int_{\Omega} \Phi \rho_l(p_l^0(x)) s_l^0(x) \varphi(0, x) dx = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_g(p_g) s_g \partial_t \psi dx dt + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_g) \rho_g(p_g) (\nabla p_g - \rho_g(p_g) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ & - \int_{\Omega} \Phi \rho_g(p_g^0(x)) s_g^0(x) \psi(0, x) dx = \int_{Q_T} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) \psi dx dt, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

et

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l) s_l X \partial_t \chi dx dt + \int_{Q_T} X \mathbf{K} M_l(s_l) \rho_l(p_l) (\nabla p_l - \rho_l(p_l) \mathbf{g}) \cdot \nabla \chi dx dt \\ & + \int_{Q_T} \rho_l(p_l) D_l^h \nabla X \cdot \nabla \chi dx dt - \int_{\Omega} \Phi \rho_l(p_l^0(x)) s_l^0(x) X^0(x) \chi(0, x) dx = \\ & - \int_{Q_T} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) \chi dx dt. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

De plus, nous avons les estimations suivantes

$$\sqrt{M_\alpha(s_\alpha)} \nabla p_\alpha \in L^2(Q_T), \quad \Phi \partial_t (\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad \alpha = l, g, \quad (2.1.9)$$

$$0 \leq s_l \leq 1, \quad 0 \leq X \leq X_{\text{eq}} \quad \text{p.p. dans } Q_T, \quad \text{et } \mathcal{B}(s_l) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.1.10)$$

$$X \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t (\rho_l(p_l) s_l X) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.1.11)$$

Les conditions initiales sont quant à elles satisfaites dans le sens où pour tout  $\xi \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ , les fonctions

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \Phi \rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha \xi dx \quad \text{pour } \alpha = l, g \quad \text{et } t \rightarrow \int_{\Omega} \Phi \rho_l(p_l) s_l X \xi dx,$$

sont dans  $\mathcal{C}^0([0, T])$  et vérifient

$$\left( \int_{\Omega} \Phi \rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha \xi dx \right) (0) = \int_{\Omega} \Phi \rho_\alpha(p_\alpha^0) s_\alpha^0 \xi dx, \quad \text{for } \alpha = l, g, \quad (2.1.12)$$

$$\left( \int_{\Omega} \Phi \rho_l(p_l) s_l X \xi dx \right) (0) = \int_{\Omega} \Phi \rho_l(p_l^0) s_l^0 X^0 \xi dx. \quad (2.1.13)$$

Comme dans le chapitre 1 le système d'équation (2.1.1)–(2.1.3) possède deux types de dégénérescence : la dégénérescence du terme d'évolution  $\partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha)$  et  $\partial_t(\rho_l(p_l)s_lX)$  quand la saturation et la concentration d'hydrogène dissous vaut zéro et dégénérescence des termes dissipatifs  $\text{div}(M_\alpha \nabla p_\alpha)$  quand la mobilité vaut zéro. Comme la mobilité de chaque phase dégénère dans la région où la phase est absente, l'estimation d'énergie de  $M_\alpha \nabla p_\alpha$  en norme  $L^2$  ne suffit pas à contrôler le gradient de pression de chaque phase. Notre stratégie consiste à contrôler la vitesse de la phase  $\alpha$ . Cela va permettre d'obtenir des estimations sur la pression globale dans tout le domaine indépendamment de la dégénérescence de la phase ainsi que sur le terme capillaire  $\mathcal{B}$  pour traiter la dégénérescence du système. La section suivante nous donne certaines estimations d'énergie nécessaires pour prouver le théorème 2.1.1.

## 2.2 Estimations d'énergie

Dans cette section, nous obtenons des estimations sur le gradient de la pression globale  $p$  et sur le gradient du terme capillaire  $\mathcal{B}$ . Pour cela on définit  $g_\alpha$  et  $\mathcal{H}_\alpha$  par

$$g_\alpha(p_\alpha) := \int_0^{p_\alpha} \frac{1}{\rho_\alpha(z)} dz \text{ et } \mathcal{H}_\alpha(p_\alpha) := \rho_\alpha(p_\alpha)g_\alpha(p_\alpha) - p_\alpha \text{ pour } \alpha = l, g.$$

Les fonctions  $\mathcal{H}_\alpha$  vérifient  $\mathcal{H}'_\alpha(p_\alpha) = \rho'_\alpha(p_\alpha)g_\alpha(p_\alpha)$ ,  $\mathcal{H}_\alpha(0) = 0$ ,  $\mathcal{H}_\alpha(p_\alpha) \geq 0$  pour tout  $p_\alpha$ . De plus  $\mathcal{H}_\alpha$  est sublinéaire par rapport à  $p_\alpha$ .

En multipliant (2.1.1) par  $g_l(p_l)$  et (2.1.2) par  $g_g(p_g)$ , après intégration sur  $\Omega$  et sommation de ces deux équations, on en déduit l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi \left[ \sum_\alpha s_\alpha \mathcal{H}_\alpha(p_\alpha) - \int_0^{s_l} p_c(z) dz \right] dx + \sum_\alpha \left[ \int_\Omega \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha) (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha(p_\alpha) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_\alpha dx \right] = \\ - \int_\Omega \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) (g_l(p_l) - g_g(p_g)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (H1)–(H9), la positivité de  $\mathcal{H}_\alpha$  et la sublinéarité de la fonction  $g_\alpha(p_\alpha)$ , on en déduit, après intégration sur  $(0, T)$ , l'inégalité

$$\int_{Q_T} M_l |\nabla p_l|^2 dx dt + \int_{Q_T} M_g |\nabla p_g|^2 dx dt \leq C (1 + \|p_l\|_{L^2(Q_T)} + \|p_g\|_{L^2(Q_T)}).$$

où  $C > 0$  est une constante. En utilisant la relation entre la pression globale et les pressions de chaque phases (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned} \|p_l\|_{L^2(Q_T)} + \|p_g\|_{L^2(Q_T)} &\leq \|p\|_{L^2(Q_T)} + \|\bar{p}\|_{L^2(Q_T)} + \|\tilde{p}\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C \|\nabla p\|_{L^2(Q_T)} + \|\bar{p}\|_{L^2(Q_T)} + \|\tilde{p}\|_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C (1 + \|\nabla p\|_{L^2(Q_T)}). \end{aligned}$$



En terme de pression globale et par définition de la pression capillaire, on a l'égalité suivante

$$M|\nabla p|^2 + \frac{M_l M_g}{M} |\nabla p_c|^2 = M_l |\nabla p_l|^2 + M_g |\nabla p_g|^2, \quad (2.2.1)$$

ce qui implique que  $p \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$  et  $\mathcal{B}(s_l) \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ .

En ce qui concerne l'estimation sur la concentration, d'une part, on remarque que

$$\frac{1}{2} \partial_t (\rho_l(p_l) s_l X^2) = \partial_t (\rho_l(p_l) s_l X) X - \frac{1}{2} \partial_t (\rho_l(p_l) s_l) X^2.$$

D'autre part, on multiplie l'équation (2.1.3) par  $X$  et l'équation (2.1.1) par  $-\frac{1}{2} X^2$ , après intégration sur  $\Omega$  et sommation de ces deux équations, on déduit l'égalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_l(p_l) s_l X^2 dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l) D_l^h \nabla X \cdot \nabla X dx = \\ \int_{\Omega} \Gamma(s_l) \rho_l \mathbf{V}_l X \cdot \nabla X dx - \int_{\Omega} \Gamma(s_l) \rho_l \mathbf{V}_l \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} X^2 \right) dx \\ - \int_{\Omega} \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) X dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) X^2 dx, \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\rho_l(p_l) s_l X^2| dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l) D_l^h \nabla X \cdot \nabla X dx = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) (X - X_{\text{eq}}) X \left(1 - \frac{1}{2} X\right) dx.$$

En intégrant sur  $(0, T)$  et en utilisant les hypothèses (H4) et (H8), on en déduit que  $X \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ .

## 2.3 Régularisation du système

Avant de prouver le théorème 2.1.1 et pour traiter le problème de dégénérescence du aux mobilités, nous régularisons le système  $(\mathfrak{M})$  en ajoutant un terme dissipatif capillaire dans chaque équation. Le système non-dégénéré que l'on appellera  $\mathfrak{M}_\eta$  s'écrit alors

$$\left( \mathfrak{M}_\eta \right) \begin{cases} \Phi \partial_t (\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta) - \text{div}(\mathbf{K} \rho_l(p_l^\eta) M_l(s_l^\eta) \nabla p_l^\eta) + \text{div}(\mathbf{K} \rho_l^2(p_l^\eta) M_l(s_l^\eta) \mathbf{g}) \\ \quad + \eta \text{div}(\rho_l(p_l^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta)) = -\Gamma(s_l) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}), & (2.3.1) \\ \Phi \partial_t (\rho_g(p_g^\eta) s_g^\eta) - \text{div}(\mathbf{K} \rho_g(p_g^\eta) M_g(s_g^\eta) \nabla p_g^\eta) + \text{div}(\mathbf{K} \rho_g^2(p_g^\eta) M_g(s_g^\eta) \mathbf{g}) \\ \quad + \eta \text{div}(\rho_g(p_g^\eta) \nabla (p_l^\eta - p_g^\eta)) = \Gamma(s_l) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}), & (2.3.2) \\ \Phi \partial_t (\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta) - \text{div}(\rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta) - \text{div}(X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) \nabla p_l^\eta) \\ \quad + \text{div}(X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l^2(p_l^\eta) \mathbf{g}) + \eta \text{div}(X^\eta \rho_l(p_l^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta)) \\ \quad = -\Gamma(s_l) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}), & (2.3.3) \end{cases}$$

avec les condition initiales (2.1.5) et les conditions aux limites suivantes,

$$\left\{ \begin{array}{l} X^\eta(t, x) = p_g^\eta(t, x) = p_l^\eta(t, x) = 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma_l \\ \rho_l(p_l^\eta) (\mathbf{V}_l^\eta + \eta \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n \\ \rho_g(p_g^\eta) (\mathbf{V}_g^\eta - \eta \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n \\ \rho_l(p_l^\eta) (\mathbf{V}_l^\eta X^\eta - D_l^h \nabla X^\eta + \eta X^\eta \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta)) \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } (0, T) \times \Gamma_n \end{array} \right. \quad (2.3.4)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normale sortant à  $\Gamma_n$

Il s'agit maintenant de montrer l'existence de solutions pour le système  $\mathfrak{M}_\eta$ . Pour cela, nous avons le théorème suivant

**Théorème 2.3.1.** *Sous les hypothèses (H1)–(H9) en supposant que  $p_g^0, p_l^0$  et  $X^0$  sont dans  $L^2(\Omega)$  avec  $0 \leq s_l^0(x) \leq 1$  et  $0 \leq X^0(x) \leq X_{\text{eq}}$  p.p. dans  $\Omega$ . Alors pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $(p_g^\eta, p_l^\eta, X^\eta)$  solution faible de  $\mathfrak{M}_\eta$  dans le sens où pour tout  $\varphi, \psi$  et  $\chi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$*

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta), \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ - \eta \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi \, dx dt = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \varphi \, dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t(\rho_g(p_g^\eta) s_g^\eta), \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_g^\eta) \rho_g(p_g^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi \, dx dt \\ - \eta \int_{Q_T} \rho_g(p_g^\eta) \nabla(p_l^\eta - p_g^\eta) \cdot \nabla \psi \, dx dt = \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \psi \, dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) X^\eta), \chi \rangle + \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \chi \, dx dt \\ + \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta \cdot \nabla \chi \, dx dt = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \chi \, dx dt \\ + \eta \int_{Q_T} X^\eta \rho_l(p_l^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \chi \, dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit de dualité entre  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$  et  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ .

De plus  $(p_g^\eta, p_l^\eta, X^\eta)$  vérifie les estimations

$$\begin{aligned} p_\alpha^\eta \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad s_l^\eta \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad X^\eta \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \\ \Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \\ \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta \in C^0(0, T; L^2(\Omega)), \quad \rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta \in C^0(0, T; L^2(\Omega)), \\ 0 \leq s_l^\eta \leq 1 \text{ p.p. dans } Q_T \text{ et } 0 \leq X^\eta \leq X_{\text{eq}} \text{ p.p. dans } Q_T, \end{aligned}$$

La suite de cette section est consacrée à la preuve du théorème 2.3.1. Cette preuve est basée sur une méthode de discrétisation en temps afin de traiter le problème de dégénérescence du terme d'évolution et de montrer le principe du maximum sur la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous.

Pour cela, on considère un temps final  $T > 0$ ,  $M \in \mathbb{N}^*$  le nombre de pas temps,  $\delta t = T/M$  le pas de temps et  $p_\alpha^0, X^0$  les conditions initiales.

Soit  $(p_l^{\eta,n}, p_g^{\eta,n}, X^{\eta,n}) \in (L^2(\Omega))^3$  avec  $\rho_\alpha(p_\alpha^{\eta,n})s_\alpha^{\eta,n} \geq 0$  et  $\rho_l(p_l^{\eta,n})s_l^{\eta,n}X^{\eta,n} \geq 0$  au temps  $t_n = n\delta t$ , nous cherchons une solution  $(p_l^{\eta,n+1}, p_g^{\eta,n+1}, X^{\eta,n+1})$  du système suivant

$$\left( \mathfrak{M}_{\eta,\delta t} \right) \left\{ \begin{array}{l} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\eta,n+1})s_l^{\eta,n+1} - \rho_l(p_l^{\eta,n})s_l^{\eta,n}}{\delta t} \\ \quad - \operatorname{div}(\mathbf{K}\rho_l(p_l^{\eta,n+1})M_l(s_l^{\eta,n+1})(\nabla p_l^{\eta,n+1} - \rho_l(p_l^{\eta,n+1})\mathbf{g})) \\ \quad + \eta \operatorname{div}(\rho_l(p_l^{\eta,n+1})\nabla(p_g^{\eta,n+1} - p_l^{\eta,n+1})) = -\Gamma(s_g^{\eta,n+1})\rho_l(p_l^{\eta,n+1})(X^{\eta,n+1} - X_{\text{eq}}) \\ \Phi \frac{\rho_g(p_g^{\eta,n+1})s_g^{\eta,n+1} - \rho_g(p_g^{\eta,n})s_g^{\eta,n}}{\delta t} \\ \quad - \operatorname{div}(\mathbf{K}\rho_g(p_g^{\eta,n+1})M_g(s_g^{\eta,n+1})(\nabla p_g^{\eta,n+1} - \rho_g(p_g^{\eta,n+1})\mathbf{g})) \\ \quad + \eta \operatorname{div}(\rho_g(p_g^{\eta,n+1})\nabla(p_l^{\eta,n+1} - p_g^{\eta,n+1})) = \Gamma(s_g^{\eta,n+1})\rho_l(p_l^{\eta,n+1})(X^{\eta,n+1} - X_{\text{eq}}) \\ \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\eta,n+1})s_l^{\eta,n+1}X^{\eta,n+1} - \rho_l(p_l^{\eta,n})s_l^{\eta,n}X^{\eta,n}}{\delta t} - \operatorname{div}(\rho_l(p_l^{\eta,n+1})D_l^h\nabla X^{\eta,n+1}) \\ \quad - \operatorname{div}(X^{\eta,n+1}\mathbf{K}M_l(s_l^{\eta,n+1})\rho_l(p_l^{\eta,n+1})(\nabla p_l^{\eta,n+1} - \rho_l(p_l^{\eta,n+1})\mathbf{g})) \\ \quad + \eta \operatorname{div}(X^{\eta,n+1}\rho_l(p_l^{\eta,n+1})\nabla(p_g^{\eta,n+1} - p_l^{\eta,n+1})) = \\ \quad - \Gamma(s_g^{\eta,n+1})\rho_l(p_l^{\eta,n+1})(X^{\eta,n+1} - X_{\text{eq}}), \end{array} \right. \quad (2.3.8)$$

avec les conditions aux bords (2.3.4).

Dans la section suivante, on étudions l'existence d'une solution du système elliptique  $\mathfrak{M}_{\eta,\delta t}$  pour  $\eta$  et  $\delta t$  fixés.

### 2.3.1 Étude du système elliptique non linéaire

L'objet de cette section est l'étude du système discrétisé en temps  $\mathfrak{M}_{\eta,\delta t}$ . Par souci de clarté, dans cette section, nous omettons les indices  $\eta$  et  $n$  dans le système  $\mathfrak{M}_{\eta,\delta t}$ . Les pressions, la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous à l'instant  $n$  seront notées par un exposant étoile.

On ajoute maintenant deux nouvelles régularisations. La première consiste à remplacer les mobilités  $M_\alpha$  par des fonctions positives non-dégénérées

$$M_\alpha^\epsilon = M_\alpha + \epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

afin d'assurer l'ellipticité du système.

La deuxième consiste à régulariser les termes de pression. Pour cela, soit  $\mathcal{P}_N$  la projection orthogonale de  $L^2(\Omega)$  sur les  $N$  premiers vecteurs propres  $\{p_1, \dots, p_N\}$  du Laplacien

avec condition aux limites de Dirichlet homogène sur  $\Gamma_l$  et de Neumann homogène sur  $\Omega \setminus \Gamma_l$ . Les  $p_i$  sont donc solutions du problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta p_i = \lambda_i p_i & \text{dans } \Omega, \\ p_i = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \nabla p_i \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Omega \setminus \Gamma_l. \end{cases} \quad (2.3.11)$$

Cette dernière régularisation est nécessaire afin de pouvoir définir un opérateur continu relativement compact et pour utiliser le théorème de point fixe de Leray-Schauder dans la prochaine proposition.

La régularisation des mobilités conduit à la perte du principe du maximum sur la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous. Nous prolongeons alors les fonctions  $M_l, M_g, \Gamma$  sur  $\mathbb{R}$  par continuité en dehors de  $[0, 1]$  et on note

$$Z(s_\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{si } s_\alpha \leq 0 \\ s_\alpha & \text{si } s_\alpha \in [0, 1] \\ 1 & \text{si } s_\alpha \geq 1. \end{cases} \quad \text{et } Y(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \leq 0 \\ X & \text{si } X \in [0, X_{\text{eq}}] \\ X_{\text{eq}} & \text{si } X \geq X_{\text{eq}}. \end{cases}$$

Les saturations  $s_\alpha$  étant considérées comme des fonctions des inconnues  $p_l$  et  $p_g$ , on prolonge la pression capillaire  $p_c$  en dehors de  $[0, 1]$  par une fonction  $\overline{p_c}$  continue, bornée et strictement décroissante en dehors de  $[0, 1]$ . Ceci est possible puisque la pression capillaire est supposée bornée i.e  $|p_c(0)| < \infty$ . On note alors  $s_l = \overline{p_c}^{-1}(p_g - p_l)$  et  $s_g = 1 - \overline{p_c}^{-1}(p_g - p_l)$ .

Notons que ainsi définies, les fonctions prolongées peuvent s'écrire

$$M_\alpha(s_\alpha) := M_\alpha(Z(s_\alpha)), \quad \xi(s_\alpha) := \xi(Z(s_\alpha))$$

$$\mathcal{B}(s_l) = \int_0^{s_l} \xi(Z(s)) ds = \begin{cases} 0 & \text{si } s_\alpha \leq 0 \\ \int_0^{s_l} \xi(s) ds & \text{si } s_\alpha \in [0, 1] \\ \mathcal{B}(1) + \xi(1)(s_l - 1) & \text{si } s_\alpha \geq 1. \end{cases}$$

Maintenant, la preuve d'existence de solutions de (2.3.8)–(2.3.10) s'effectue en trois étapes.

La première étape consiste à étudier le système suivant pour des paramètres  $\epsilon > 0$  et

$N > 0$  fixés

$$\left. \begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\epsilon,N})Z(s_l^{\epsilon,N}) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) \nabla (\mathcal{P}_N p_g^{\epsilon,N} - \mathcal{P}_N p_l^{\epsilon,N}) \cdot \nabla \varphi dx \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) \left( M_l^{\epsilon}(s_l^{\epsilon,N}) \nabla p_l^{\epsilon,N} - \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) M_l(s_l^{\epsilon,N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \varphi dx = \quad (2.3.12) \\
 & \quad - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\epsilon,N}) \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) (Y(X^{\epsilon,N}) - X_{\text{eq}}) \varphi dx, \\
 & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g^{\epsilon,N})Z(s_g^{\epsilon,N}) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^{\epsilon,N}) \nabla (\mathcal{P}_N p_g^{\epsilon,N} - \mathcal{P}_N p_l^{\epsilon,N}) \cdot \nabla \psi dx \\
 & + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_g(p_g^{\epsilon,N}) \left( M_g^{\epsilon}(s_g^{\epsilon,N}) \nabla p_g^{\epsilon,N} - \rho_g(p_g^{\epsilon,N}) M_g(s_g^{\epsilon,N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \psi dx \quad (2.3.13) \\
 & = \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\epsilon,N}) \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) (Y(X^{\epsilon,N}) - X_{\text{eq}}) \psi dx, \\
 & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\epsilon,N})Z(s_l^{\epsilon,N})Y(X^{\epsilon,N}) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) D_l^h \nabla X^{\epsilon,N} \cdot \nabla \chi dx = \\
 & - \int_{\Omega} Y(X^{\epsilon,N}) \mathbf{K} M_l(s_l^{\epsilon,N}) \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) \left( \nabla p_l^{\epsilon,N} - \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \chi dx \quad (2.3.14) \\
 & + \eta \int_{\Omega} Y(X^{\epsilon,N}) \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) \nabla (p_g^{\epsilon,N} - p_l^{\epsilon,N}) \cdot \nabla \chi dx \\
 & \quad - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\epsilon,N}) \rho_l(p_l^{\epsilon,N}) (Y(X^{\epsilon,N}) - X_{\text{eq}}) \chi dx
 \end{aligned} \right\} \mathfrak{M}_{\eta, \delta t}^{\epsilon, N}$$

pour toutes  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ .

La deuxième étape consiste à passer à la limite quand  $N$  tend vers l'infini. La troisième et dernière étape consiste à passer à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro et montrer le principe du maximum sur la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous.

**Première étape.** La première étape consiste à étudier le système  $\mathfrak{M}_{\eta, \delta t}^{\epsilon, N}$  pour des paramètres fixés  $N > 0$  et  $\epsilon > 0$ . Dans cette étape, on va appliquer le théorème de point fixe de Leray-Schauder pour obtenir une solution faible  $(p_l^{\epsilon, N}, p_g^{\epsilon, N}, X^{\epsilon, N})$  de (2.3.12)-(2.3.14). Pour plus de clarté, on omet désormais les indices  $\epsilon$  et  $N$  dans la suite.

**Proposition 2.3.1.** *Pour des paramètres  $N > 0$  et  $\epsilon > 0$  fixés, si  $\rho_{\alpha}^* s_{\alpha}^*$  et  $\rho_l^* s_l^* X^*$  sont dans  $L^2(\Omega)$ ,  $\rho_{\alpha}^* s_{\alpha}^* \geq 0$  et  $\rho_l^* s_l^* X^* \geq 0$ , alors il existe  $(p_l^{\epsilon, N}, p_g^{\epsilon, N}, X^{\epsilon, N})$  dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ , solution du système (2.3.12)-(2.3.14).*

*Démonstration.* La preuve est basée sur le théorème du point fixe de Leray-Schauder [71]. Soit  $\mathcal{T}$  une application de  $(L^2(\Omega))^3$  dans  $(L^2(\Omega))^3$  définie par

$$\mathcal{T}(\bar{p}_l, \bar{p}_g, \bar{X}) = (p_l, p_g, X),$$

où  $(p_l, p_g, X)$  est l'unique solution du système (2.3.15) – (2.3.17)

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_l)Z(\bar{s}_l) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)\nabla p_l \cdot \nabla \varphi dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(\bar{s}_l)\rho_l^2(\bar{p}_l)\mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_l)\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_g - \mathcal{P}_N\bar{p}_l) \cdot \nabla \varphi dx = \\ & - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)(Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}})\varphi dx, \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(\bar{p}_g)Z(\bar{s}_g) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(\bar{s}_g)\rho_g(\bar{p}_g)\nabla p_g \cdot \nabla \psi dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(\bar{s}_l)\rho_g^2(\bar{p}_g)\mathbf{g} \cdot \nabla \psi dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(\bar{p}_g)\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_g - \mathcal{P}_N\bar{p}_l) \cdot \nabla \psi dx = \\ & \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)(Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}})\psi dx, \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_l)Z(\bar{s}_l)Y(\bar{X}) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \chi dx + \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_l)D_l^h \nabla X \cdot \nabla \chi dx = \\ & - \int_{\Omega} Y(\bar{X})\mathbf{K}M_l(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)\nabla p_l \cdot \nabla \chi dx + \int_{\Omega} Y(\bar{X})\mathbf{K}M_l(\bar{s}_l)\rho_l^2(\bar{p}_l)\mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx \\ & - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)(Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}})\chi dx + \eta \int_{\Omega} Y(\bar{X})\rho_l(\bar{p}_l)\nabla(p_g - p_l) \cdot \nabla \chi dx. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

pour tout  $\varphi, \psi$  et  $\chi$  dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ ,  $\bar{s}_l = \bar{p}_c^{-1}(\bar{p}_g - \bar{p}_l)$  et  $\bar{s}_g = 1 - \bar{p}_c^{-1}(\bar{p}_g - \bar{p}_l)$ .

Le système (2.3.15) – (2.3.17) peut s'écrire sous la forme

$$B_l(p_l, \varphi) = f_l(\varphi), \quad B_g(p_g, \psi) = f_g(\psi) \text{ et } B_X(X, \chi) = f_X(\chi),$$

avec

$$\begin{aligned} B_l(p_l, \varphi) &= \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)\nabla p_l \cdot \nabla \varphi dx, \\ f_l(\varphi) &= - \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_l)Z(\bar{s}_l) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(\bar{s}_l)\rho_l^2(\bar{p}_l)\mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx \\ &+ \eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_l)\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_g - \mathcal{P}_N\bar{p}_l) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)(Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}})\varphi dx, \\ B_g(p_g, \psi) &= \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(\bar{s}_g)\rho_g(\bar{p}_g)\nabla p_g \cdot \nabla \psi dx, \\ f_g(\psi) &= - \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(\bar{p}_g)Z(\bar{s}_g) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(\bar{s}_l)\rho_g^2(\bar{p}_g)\mathbf{g} \cdot \nabla \psi dx \\ &- \eta \int_{\Omega} \rho_g(\bar{p}_g)\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_g - \mathcal{P}_N\bar{p}_l) \cdot \nabla \psi dx + \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)(Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}})\psi dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_X(X, \chi) &= \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_l) D_l^h Z(\bar{s}_l) \nabla X \cdot \nabla \chi dx, \\
f_X(\chi) &= - \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_l) Z(\bar{s}_l) Y(\bar{X}) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \varphi dx - \int_{\Omega} Y(\bar{X}) \mathbf{K} M_l(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) \nabla p_l \cdot \nabla \chi dx \\
&\quad + \int_{\Omega} Y(\bar{X}) \mathbf{K} M_l(\bar{s}_l) \rho_l^2(\bar{p}_l) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_l) \rho_l(\bar{p}_l) (Y(\bar{X}) - X_{\text{eq}}) \chi dx \\
&\quad + \eta \int_{\Omega} Y(\bar{X}) \rho_l(\bar{p}_l) \nabla (p_g - p_l) \cdot \nabla \chi dx.
\end{aligned}$$

Les applications  $B_l(p_l, \varphi)$ ,  $B_g(p_g, \psi)$  et  $B_X(X, \chi)$  sont bilinéaires, continues, coercives et définies dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ . La bilinéarité de ces applications provient de la linéarité des opérateurs intégrales et gradient. La continuité vient directement des hypothèses (H2), (H3) et (H5) et de l'inégalité de Hölder. Enfin, la coercivité est obtenue grâce aux hypothèses (H2), (H3) et (H5) et des termes en  $\epsilon$ .

Les applications  $f_l(\varphi)$ ,  $f_g(\psi)$  et  $f_X(\chi)$  sont linéaires continues définies sur  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ . La linéarité est une conséquence immédiate des opérateurs intégrales et gradient tandis que la continuité est due aux hypothèses (H2), (H3) et (H5).

Le théorème de Lax-Milgram appliqué aux formulations variationnelles (2.3.15) et (2.3.16) nous donne deux uniques solutions  $p_l \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  et  $p_g \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  de ces formulations variationnelles. Une nouvelle application du théorème de Lax-Milgram à la formulation variationnelle (2.3.17) nous donne alors une unique solution  $X \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  de cette formulation variationnelle.

Nous avons donc prouvé l'existence d'une unique solution  $(p_l, p_g, X) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  pour tout  $(\bar{p}_l, \bar{p}_g, \bar{X}) \in (L^2(\Omega))^3$ , ce qui montre que l'application  $\mathcal{T}$  est bien définie dans  $(L^2(\Omega))^3$ .

**Lemme 2.3.1.** *L'application  $\mathcal{T}$  est continue et relativement compact.*

*Démonstration.* On considère une suite  $(\bar{p}_{l_k}, \bar{p}_{g_k}, \bar{X}_k)$  d'un ensemble borné de  $(L^2(\Omega))^3$  qui converge vers  $(\bar{p}_l, \bar{p}_g, \bar{X}) \in (L^2(\Omega))^3$ . L'objectif est de montrer que  $(p_{l_k}, p_{g_k}, X_k) = \mathcal{T}(\bar{p}_{l_k}, \bar{p}_{g_k}, \bar{X}_k)$  est bornée dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  et converge vers  $(p_l, p_g, X) = \mathcal{T}(\bar{p}_l, \bar{p}_g, \bar{X})$ .

Les suites  $p_{l_k}, p_{g_k}, X_k$  vérifient respectivement

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_{l_k}) Z(\bar{s}_{l_k}) - \rho_l^* s_{l_k}^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla p_{l_k} \cdot \nabla \varphi dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l^2(\bar{p}_{l_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g_k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l_k}) \cdot \nabla \varphi dx \quad (2.3.18) \\
&\quad = - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) \varphi dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(\bar{p}_{g_k})Z(\bar{s}_{g_k}) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi dx + \int_{\Omega} \mathbf{KM}_g^e(\bar{s}_{g_k}) \rho_g(\bar{p}_{g_k}) \nabla p_{g_k} \cdot \nabla \psi dx \\
& - \int_{\Omega} \mathbf{KM}_g(\bar{s}_{l_k}) \rho_g^2(\bar{p}_{g_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla \psi dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(\bar{p}_{g_k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g_k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l_k}) \cdot \nabla \psi dx \quad (2.3.19) \\
& = \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) \psi dx,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_{l_k})Z(\bar{s}_{l_k})Y(\bar{X}_k) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \chi dx + \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k}) D_l^h \nabla X_k \cdot \nabla \chi dx \\
& = - \int_{\Omega} Y(\bar{X}_k) \mathbf{KM}_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla p_l \cdot \nabla \chi dx + \int_{\Omega} Y(\bar{X}_k) \mathbf{KM}_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l^2(\bar{p}_{l_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx \\
& - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) \chi dx + \eta \int_{\Omega} Y(\bar{X}_k) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla (p_{g_k} - p_{l_k}) \cdot \nabla \chi dx. \quad (2.3.20)
\end{aligned}$$

pour tout  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ .

En prenant  $\varphi = p_{l_k}$  dans (2.3.18), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \mathbf{KM}_l^e(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla p_{l_k} \cdot \nabla p_{l_k} dx = \int_{\Omega} \mathbf{KM}_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l^2(\bar{p}_{l_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla p_{l_k} dx \\
& + \eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g_k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l_k}) \cdot \nabla p_{l_k} dx - \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_{l_k})Z(\bar{s}_{l_k}) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} p_{l_k} dx \\
& - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) p_{l_k} dx,
\end{aligned}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\epsilon k_0 \rho_m \int_{\Omega} |\nabla p_{l_k}|^2 dx \leq C \left( 1 + \|p_{l_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p_{l_k}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{\alpha=l,g} \|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{\alpha_k}\|_{L^2(\Omega)} \right) \quad (2.3.21)$$

où  $C$  dépend de  $\Omega$ ,  $\eta$ ,  $\delta t$ ,  $\rho_M$ ,  $\Phi_1$ ,  $k_{\infty}$  et  $\|\rho_l^* s_l^*\|_{L^2(\Omega)}$ . Or,

$$\|\nabla \mathcal{P}_N \bar{p}_{\alpha_k}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_N \|\bar{p}_{\alpha_k}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (\alpha = l, g),$$

où  $C_N$  est la racine carrée de la nième valeur propre de l'opérateur Laplacien (en considérant l'ensemble des valeurs propres comme une suite croissante). L'inégalité de Poincaré et de Young ainsi que l'estimation (2.3.21) montrent que la suite  $(p_{l_k})_k$  est uniformément bornée dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ . De manière analogue, on montre que la suite  $(p_{g_k})$  est uniformément bornée dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ .



Pour la concentration, on prend  $\chi = X_k$  dans (2.3.20) obtenant

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k}) D_l^h \nabla X_k \cdot \nabla X_k dx &= - \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_{l_k}) Z(\bar{s}_{l_k}) Y(\bar{X}_k) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} X_k dx \\
&- \int_{\Omega} Y(\bar{X}_k) \mathbf{K} M_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla p_{l_k} \cdot \nabla X_k dx \\
&+ \int_{\Omega} Y(\bar{X}_k) \mathbf{K} M_l(\bar{s}_{l_k}) \rho_l^2(\bar{p}_{l_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla X_k dx \\
&- \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) Y(Y_k) dx \\
&+ \eta \int_{\Omega} Y(\bar{Y}_k) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla (p_{g_k} - p_{l_k}) \cdot \nabla X_k dx,
\end{aligned} \tag{2.3.22}$$

ce qui donne grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz l'estimation

$$\rho_m d_1 \int_{\Omega} |\nabla X_k|^2 dx \leq C(1 + \|\nabla p_{l_k}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p_{g_k}\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.3.23}$$

où  $C$  dépend de  $\Omega$ ,  $\delta t$ ,  $\rho_M$ ,  $\Phi_1$ ,  $k_\infty$  et  $\|\rho_l^* s_l^* X^*\|_{L^2(\Omega)}$ . La suite  $X_k$  est donc uniformément borné dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ . Ceci prouve que l'application  $\mathcal{T}$  est relativement compact dans  $(L^2(\Omega))^3$ .

De plus, pour des sous suite, nous avons les convergences

$$p_{\alpha_k} \rightharpoonup p_\alpha \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \alpha = l, g \tag{2.3.24}$$

$$X_k \rightharpoonup X \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \tag{2.3.25}$$

$$p_{\alpha_k} \longrightarrow p_\alpha \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega, \tag{2.3.26}$$

$$X_k \longrightarrow X \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \tag{2.3.27}$$

Il reste à montrer la continuité de l'application  $\mathcal{T}$ . Pour cela, il suffit de montrer que  $(p_l, p_g, X)$  est l'unique valeur d'adhérence de la suite  $(p_{l_k}, p_{g_k}, X_k)$ , ce qui revient à montrer que  $(p_l, p_g, X)$  est l'unique solution de (2.3.15) – (2.3.17) en passant à la limite dans (2.3.18)-(2.3.20) quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

On étudie le passage à la limite dans (2.3.18)

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(\bar{p}_{l_k}) Z(\bar{s}_{l_k}) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla p_{l_k} \cdot \nabla \varphi dx \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{K} M_l^\epsilon(\bar{s}_{l_k}) \rho_l^2(\bar{p}_{l_k}) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k}) \nabla (\mathcal{P}_N \bar{p}_{g_k} - \mathcal{P}_N \bar{p}_{l_k}) \cdot \nabla \varphi dx \\
&= - \int_{\Omega} \Gamma(\bar{s}_{l_k}) \rho_l(\bar{p}_{l_k}) (Y(\bar{X}_k) - X_{\text{eq}}) \varphi dx,
\end{aligned}$$

où  $\bar{s}_{l_k} = p_c^{-1}(\bar{p}_{g_k} - \bar{p}_{l_k})$ .

Le passage à la limite dans le premier terme est due à la continuité de  $Z$ ,  $p_c^{-1}$ ,  $\rho_l$  et au fait que  $\rho_l(\bar{p}_{l_k})Z(\bar{s}_{l_k})\varphi$  soit dominé par  $\rho_M|\varphi|$ , ce qui nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Pour le second terme, la suite  $(\mathbf{K}M_l^\epsilon(\bar{s}_{l_k})\rho_l(\bar{p}_{l_k})\nabla\varphi)$  est dominé et converge presque partout quand  $k$  tend vers l'infini. Donc par application du théorème de convergence dominé de Lebesgue on en déduit la convergence forte dans  $L^2(\Omega)$  de

$$\mathbf{K}M_l^\epsilon(\bar{s}_{l_k})\rho_l(\bar{p}_{l_k})\nabla\varphi \longrightarrow \mathbf{K}M_l^\epsilon(\bar{s}_l)\rho_l(\bar{p}_l)\nabla\varphi. \quad (2.3.28)$$

De plus, en utilisant la convergence (2.3.26), on en déduit que

$$\nabla p_{l_k} \longrightarrow \nabla p_l \quad \text{faiblement dans } L^2(\Omega). \quad (2.3.29)$$

Les convergences (2.3.28) et (2.3.29) permettent alors d'établir le passage à la limite dans le second terme. Le troisième terme se traite de manière analogue.

En ce qui concerne le quatrième terme,

$$\eta \int_{\Omega} \rho_l(\bar{p}_{l_k})\nabla(\mathcal{P}_N\bar{p}_{g_k} - \mathcal{P}_N\bar{p}_{l_k}) \cdot \nabla\varphi \, dx,$$

nous avons

$$\rho_\alpha(\bar{p}_{\alpha_k})\nabla\varphi \longrightarrow \rho_\alpha(\bar{p}_\alpha)\nabla\varphi \quad \text{fortement dans } (L^2(\Omega))^d \quad (\alpha = l, g). \quad (2.3.30)$$

De plus comme  $\bar{p}_{\alpha_k}$  converges dans  $L^2(\Omega)$ , on en déduit

$$\nabla\mathcal{P}_N\bar{p}_{\alpha_k} \longrightarrow \nabla\mathcal{P}_N\bar{p}_\alpha \quad \text{fortement dans } ((L^2(\Omega))^d) \quad (\alpha = l, g). \quad (2.3.31)$$

Alors, les convergences (2.3.30) et (2.3.31) permettent de passer à la limite dans le quatrième terme. Les convergences dans les autres termes sont des applications directes du théorème de convergence dominé de Lebesgue.

Les passages à la limite dans (2.3.19) et (2.3.20) sont obtenus de la même manière. Ainsi  $(p_l, p_g, X)$  est une solution de (2.3.15) – (2.3.17) établissant la continuité de l'application  $\mathcal{T}$  et par suite la preuve du lemme.  $\square$

**Lemme 2.3.2.** (*Estimation a priori*). *Il existe  $r > 0$  tel que, si  $(p_l, p_g, X) = \lambda\mathcal{T}(p_l, p_g, X)$  avec  $\lambda \in (0, 1)$ , alors*

$$\|(p_l, p_g, X)\|_{(L^2(\Omega))^3} \leq r.$$

*Démonstration.* Considérons  $(p_l, p_g, X)$  vérifiant  $(p_l, p_g, X) = \lambda\mathcal{T}(p_l, p_g, X)$ . Le triplet  $(p_l, p_g, X)$  vérifie alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_l)\rho_l(p_l)\nabla p_l \cdot \nabla\varphi \, dx &= -\lambda \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l)Z(s_l) - \rho_l^*s_l^*}{\delta t} \varphi \, dx \\ &+ \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l)\rho_l^2(p_l)\mathbf{g} \cdot \nabla\varphi \, dx + \lambda\eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l)\nabla(\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla\varphi \, dx \\ &- \lambda \int_{\Omega} \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(Y(X) - X_{\text{eq}})\varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g)\rho_g(p_g)\nabla p_g \cdot \nabla \psi dx &= -\lambda \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g)Z(s_g) - \rho_g^*s_g^*}{\delta t} \psi dx \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_l)\rho_g^2(p_g)\mathbf{g} \cdot \nabla \psi dx - \lambda\eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g)\nabla(\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla \psi dx \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(Y(X) - X_{\text{eq}})\psi dx,
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \rho_l(p_l)D_l^h \nabla X \cdot \nabla \chi dx &= -\lambda \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l)Z(s_l)Y(X) - \rho_l^*s_l^*X^*}{\delta t} \varphi dx \\
&- \int_{\Omega} Y(X)\mathbf{K}M_l(s_l)\rho_l(p_l)\nabla p_l \cdot \nabla \chi dx + \lambda \int_{\Omega} Y(X)\mathbf{K}M_l(s_l)\rho_l^2(p_l)\mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx \\
&- \lambda \int_{\Omega} \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(Y(X) - X_{\text{eq}})\chi dx + \lambda\eta \int_{\Omega} Y(X)\rho_l(p_l)\nabla(p_g - p_l) \cdot \nabla \varphi dx,
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

pour tout  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ .

En prenant  $\varphi = g_l(p_l) := \int_0^{p_l} \frac{1}{\rho_l(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (2.3.32) et  $\psi = g_g(p_g) := \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_g(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (2.3.33), par sommation des deux égalités, on en déduit l'égalité suivante

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_l)\nabla p_l \cdot \nabla p_l dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g)\nabla p_g \cdot \nabla p_g dx \\
&+ \lambda\eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l)\nabla(\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l) \cdot \nabla(p_g - p_l) dx \\
&= -\lambda \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} ((\rho_l(p_l)Z(s_l) - \rho_l^*s_l^*)g_l(p_l) + (\rho_g(p_g)Z(s_g) - \rho_g^*s_g^*)g_g(p_g)) dx \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l)\rho_l(p_l)\mathbf{g} \cdot \nabla p_l dx + \lambda \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_g)\rho_l(p_g)\mathbf{g} \cdot \nabla p_g dx \\
&- \lambda \int_{\Omega} \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(Y(X) - X_{\text{eq}})g_l(p_l) dx \\
&+ \lambda \int_{\Omega} \Gamma(s_l)\rho_l(p_l)(Y(X) - X_{\text{eq}})g_g(p_g) dx
\end{aligned} \tag{2.3.35}$$

Or la fonction  $p_\alpha \mapsto g_\alpha(p_\alpha)$  est sublinéaire, à l'aide des inégalités de Poincaré et de Cauchy-Schwarz ainsi que de l'égalité (2.3.35), on en déduit donc l'inégalité

$$\begin{aligned}
\epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_l|^2 dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_g|^2 dx + \lambda\eta \int_{\Omega} |\nabla(\mathcal{P}_N p_g - \mathcal{P}_N p_l)|^2 dx \\
\leq C (1 + \|\rho_l^*s_l^*\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho_g^*s_g^*\|_{L^2(\Omega)}),
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

où  $C$  dépend de  $\epsilon$  mais pas de  $\lambda$ .

De la même manière, en prenant  $\chi = X$  dans (2.3.34), on obtient l'estimation

$$\rho_m d_1 \int_{\Omega} |\nabla X|^2 dx \leq C(1 + \|\nabla p_l\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p_g\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla X\|_{L^2(\Omega)} + \|\rho_l^*s_l^*X^*\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.3.37}$$

où  $C$  dépend de  $\epsilon$  mais pas de  $\lambda$ .  $\square$

Grâce aux deux lemmes 2.3.1 et 2.3.2, on peut appliquer le théorème du point fixe de Leray-Schauder [71] prouvant la proposition 2.3.1.  $\square$

**Deuxième étape.** Cette étape concerne le passage à la limite quand  $N$  tend vers l'infini. Comme dans cette étape  $\epsilon$  est fixé, nous ne notons pas la dépendance en  $\epsilon$ . Pour tout  $N > 0$ , nous avons établi l'existence de solution  $(p_i^N, p_g^N, X^N) \in (H_{\Gamma_i}^1(\Omega))^3$  de (2.3.12) – (2.3.14) vérifiant

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_i^N)Z(s_i^N) - \rho_l^* s_i^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_i^N) \rho_l(p_i^N) \nabla p_i^N \cdot \nabla \varphi \, dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_i^N) \rho_l^2(p_i^N) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_i^N) \nabla (\mathcal{P}_N p_g^N - \mathcal{P}_N p_i^N) \cdot \nabla \varphi \, dx \quad (2.3.38) \\ & = - \int_{\Omega} \Gamma(s_i^N) \rho_l(p_i^N) (Y(X^N) - X_{\text{eq}}) \varphi \, dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g^N)Z(s_g^N) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g^N) \rho_g(p_g^N) \nabla p_g^N \cdot \nabla \psi \, dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_i^N) \rho_g^2(p_g^N) \mathbf{g} \cdot \nabla \psi \, dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^N) \nabla (\mathcal{P}_N p_g^N - \mathcal{P}_N p_i^N) \cdot \nabla \psi \, dx \quad (2.3.39) \\ & = \int_{\Omega} \Gamma(s_i^N) \rho_l(p_i^N) (Y(X^N) - X_{\text{eq}}) \psi \, dx, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_i^N)Z(s_i^N)Z(X^N) - \rho_l^* s_i^* X^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_i^N) D_l^h \nabla X^N \cdot \nabla \chi \, dx \\ & = - \int_{\Omega} Y(X^N) \mathbf{K}M_l(s_i^N) \rho_l(p_i^N) \nabla p_i^N \cdot \nabla \chi \, dx + \int_{\Omega} Y(X^N) \mathbf{K}M_l(s_i^N) \rho_l^2(p_i^N) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi \, dx \\ & - \int_{\Omega} \Gamma(s_i^N) \rho_l(p_i^N) (Y(X^N) - X_{\text{eq}}) \chi \, dx + \eta \int_{\Omega} Y(X^N) \rho_l(p_i^N) \nabla (p_g^N - p_i^N) \cdot \nabla \chi \, dx, \quad (2.3.40) \end{aligned}$$

pour tout  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_i}^1(\Omega))^3$ .

Les estimations (2.3.36) et (2.3.37) sont uniformes et indépendantes de  $N$  et de  $\lambda$ . On peut alors reprendre ces estimations avec  $\lambda = 1$  obtenant

$$\epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_i^N|^2 \, dx + \epsilon \int_{\Omega} |\nabla p_g^N|^2 \, dx + \eta \int_{\Omega} |\nabla (\mathcal{P}_N p_g^N - \mathcal{P}_N p_i^N)|^2 \, dx \leq C, \quad (2.3.41)$$

et

$$\rho_m d_1 \int_{\Omega} |\nabla X^N|^2 \, dx \leq C, \quad (2.3.42)$$

où  $C$  dépend de  $\epsilon$  mais pas de  $N$ .

Alors pour des sous suites, quand  $N \rightarrow \infty$ , à  $\epsilon > 0$  fixé, nous avons les convergences suivantes

$$\begin{aligned} p_\alpha^{\epsilon, N} &\longrightarrow p_\alpha^\epsilon && \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega, \alpha = l, g \\ X^{\epsilon, N} &\longrightarrow X^\epsilon && \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \text{ et p.p. dans } \Omega. \end{aligned}$$

En passant à la limite quand  $N$  tend vers l'infini dans (2.3.38)–(2.3.40) (passage à la limite identique à celle pour  $k \rightarrow +\infty$  pour (2.3.18)–(2.3.20)), on obtient pour tout  $\epsilon > 0$  l'existence d'une solution  $(p_l^\epsilon, p_g^\epsilon, X^\epsilon) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  vérifiant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^\epsilon) Z(s_l^\epsilon) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_l(p_l^\epsilon) \left( M_l^\epsilon(s_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon - \rho_l(p_l^\epsilon) M_l(s_l^\epsilon) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \varphi dx \\ - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^\epsilon) \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) (Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}}) \varphi dx, \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g^\epsilon) Z(s_g^\epsilon) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi dx + \int_{\Omega} \mathbf{K} \rho_g(p_g^\epsilon) \left( M_g^\epsilon(s_g^\epsilon) \nabla p_g^\epsilon - \rho_g(p_g^\epsilon) M_g(s_g^\epsilon) \mathbf{g} \right) \cdot \nabla \psi dx \\ + \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^\epsilon) \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \psi dx = \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) (Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}}) \psi dx, \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^\epsilon) Z(s_l^\epsilon) Y(X^\epsilon) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \chi dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^\epsilon) D_l^h \nabla X^\epsilon \cdot \nabla \chi dx = \\ - \int_{\Omega} Y(X^\epsilon) \mathbf{K} M_l(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla \chi dx + \int_{\Omega} Y(X^\epsilon) \mathbf{K} M_l(s_l^\epsilon) \rho_l^2(p_l^\epsilon) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx \\ - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) (Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}}) \chi dx + \eta \int_{\Omega} Y(X^\epsilon) \rho_l(p_l^\epsilon) \nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \chi dx, \end{aligned} \quad (2.3.45)$$

pour tout  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ .

**Troisième étape.** Cette étape concerne le passage à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro. Ici on va utiliser la pression globale  $p$  afin d'obtenir des estimations indépendantes de  $\epsilon$ . On montre ensuite le principe du maximum sur la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous après passage à la limite sur  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Nous énonçons les deux lemmes suivants nécessaires au passage à la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Lemme 2.3.3.** (*Estimations uniformes indépendantes de  $\epsilon$* ). Les suites  $(s_l^\epsilon)_\epsilon$ ,  $(p^\epsilon := p_l^\epsilon +$

$\bar{p}(s_l^\epsilon)_\epsilon$  et  $(X^\epsilon)_\epsilon$  définies dans (2.3.43)–(2.3.45) vérifient

$$(p^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (2.3.46)$$

$$(\mathcal{B}(s_l^\epsilon))_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H^1(\Omega) \quad (2.3.47)$$

$$(\nabla p_c(s_l^\epsilon))_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(\Omega) \quad (2.3.48)$$

$$(\nabla p_\alpha^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(\Omega), \quad \alpha = l, g \quad (2.3.49)$$

$$(X^\epsilon)_\epsilon \quad \text{est uniformément bornée dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega) \quad (2.3.50)$$

*Démonstration.* On considère  $\varphi = g_l(p_l^\epsilon) := \int_0^{p_l^\epsilon} \frac{1}{\rho_l(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (2.3.43) et  $\psi = g_g(p_g^\epsilon) := \int_0^{p_g^\epsilon} \frac{1}{\rho_g(z)} dz \in H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans (2.3.44) et après sommation on obtient l'égalité

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\Phi}{\delta t} ((\rho_l(p_l^\epsilon)Z(s_l^\epsilon) - \rho_l^* s_l^*)g_l(p_l^\epsilon) + (\rho_g(p_g^\epsilon)Z(s_g^\epsilon) - \rho_g^* s_g^*)g_g(p_g^\epsilon)) dx \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_l^\epsilon)\nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla p_l^\epsilon dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g^\epsilon)\nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)\mathbf{g} \cdot \nabla p_l^\epsilon dx - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_g^\epsilon)\rho_l(p_g^\epsilon)\mathbf{g} \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \\ & + \eta \int_{\Omega} \nabla p_c(s_l^\epsilon) \cdot \nabla p_c(s_l^\epsilon) dx = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)(Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}})g_l(p_l^\epsilon) dx \\ & + \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)(Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}})g_g(p_g^\epsilon) dx, \end{aligned} \quad (2.3.51)$$

Maintenant, en utilisant la relation (2.1.4) qui relie le gradient de la pression de chaque phase avec celui de la pression globale, les hypothèses (H1) – (H9) et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young, on en déduit l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_l^\epsilon)\nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla p_l^\epsilon dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g^\epsilon)\nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx + \eta \int_{\Omega} \nabla p_c(s_l^\epsilon) \cdot \nabla p_c(s_l^\epsilon) dx \\ & \leq C \left( 1 + \|p_l^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|p_g^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C \left( 1 + \|p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq C \left( 1 + \|\nabla p^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\tilde{p}(s_l^\epsilon)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

où  $C = C(\rho_M, \delta t, M_\alpha, \Phi, k_\infty, \rho_l^* s_l^*, \rho_g^* s_g^*, \mathbf{g})$  est indépendant de  $\epsilon$ .

En utilisant l'égalité (2.2.1) qui relie la pression globale et la pression de chaque phase, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} M(s_l^\epsilon)|\nabla p^\epsilon|^2 dx + \int_{\Omega} \frac{M_l(s_l^\epsilon)M_g(s_g^\epsilon)}{M(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx + \eta \int_{\Omega} \nabla p_c(s_l^\epsilon) \cdot \nabla p_c(s_l^\epsilon) dx \\ & + \epsilon \int_{\Omega} \nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla p_l^\epsilon dx + \epsilon \int_{\Omega} \nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla p_g^\epsilon dx \leq C_1, \end{aligned} \quad (2.3.52)$$

où  $C_1$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ . L'hypothèse (H3) assure alors l'estimation (2.3.46).

Pour l'estimation (2.3.47), nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{B}(s_l^\epsilon)|^2 dx &= \int_{\Omega} \frac{M_l^2(s_l^\epsilon) M_g^2(s_g^\epsilon)}{M^2(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx \\ &\leq \sup_{s \in \mathbb{R}} |M(s)| \int_{\Omega} \frac{M_l(s_l^\epsilon) M_g(s_g^\epsilon)}{M(s_l^\epsilon)} |\nabla p_c(s_l^\epsilon)|^2 dx \leq C_2, \end{aligned}$$

où  $C_2$  est une constante indépendante de  $\epsilon$ .

L'estimation (2.3.48) est une conséquence de (2.3.52). L'estimation (2.3.49) est une conséquence directe de (2.1.4) et des estimations (2.3.46) et (2.3.48).

La dernière estimation (2.3.50) est obtenue en prenant  $\chi = X^\epsilon$  dans (2.3.45), puis à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\int_{\Omega} \rho_l(p_l^\epsilon) D_l^h \nabla X^\epsilon \cdot \nabla X^\epsilon dx \leq C(\|X^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla p_l^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_g^\epsilon\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

Enfin, on utilise l'inégalité de Poincaré et l'estimation (2.3.49) pour obtenir (2.3.50).  $\square$

**Lemme 2.3.4.** *Pour des sous suites, les suites  $(s_\alpha^\epsilon)_\epsilon$ ,  $(p^\epsilon)_\epsilon$ ,  $(p_\alpha^\epsilon)_\epsilon$ , vérifient les convergences suivantes*

$$p^\epsilon \rightharpoonup p \quad \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \quad (2.3.53)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\epsilon) \rightharpoonup \mathcal{B}(s_l) \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega), \quad (2.3.54)$$

$$p^\epsilon \longrightarrow p \quad \text{presque partout dans } \Omega, \quad (2.3.55)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\epsilon) \longrightarrow \mathcal{B}(s_l) \quad \text{presque partout dans } \Omega, \quad (2.3.56)$$

$$Z(s_l^\epsilon) \longrightarrow Z(s_l) \quad \text{presque partout dans } \Omega, \quad (2.3.57)$$

$$Z(s_l^\epsilon) \longrightarrow Z(s_l) \quad \text{fortement dans } L^2(\Omega), \quad (2.3.58)$$

$$p_\alpha^\epsilon \rightharpoonup p_\alpha \quad \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \quad (2.3.59)$$

$$p_\alpha^\epsilon \longrightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } \Omega, \quad (2.3.60)$$

$$X^\epsilon \rightharpoonup X \quad \text{faiblement dans } H_{\Gamma_l}^1(\Omega), \quad (2.3.61)$$

$$X^\epsilon \longrightarrow X \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (2.3.62)$$

*Démonstration.* Les convergences faibles (2.3.53) et (2.3.54) sont des conséquences des estimations (2.3.46) et (2.3.47) du lemme 2.3.3. Les convergences (2.3.55) et (2.3.56) sont quant à elles des conséquences de l'injection compacte de  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Comme  $\mathcal{B}(s_l) := \mathcal{B}(Z(s_l))$  et  $\mathcal{B}^{-1}$  sont continus, nous avons

$$Z(s_l^\epsilon) \longrightarrow Z(s_l) \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

et le théorème de Lebesgue assure la convergence forte (2.3.58).

La convergence faible (2.3.59) est une conséquence de l'estimation (2.3.49). La convergence presque partout (2.3.60) est une conséquence de l'injection compacte de  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

De même, la convergence faible (2.3.61) est une conséquence de l'estimation (2.3.50) et la convergence presque partout (2.3.62) provient de l'injection compacte de  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

Pour montrer l'existence d'une solution du problème  $\mathfrak{M}_{\eta,\delta t}$ , il suffit de passer à la limite quand  $\epsilon$  tend vers zéro dans les formulations (2.3.43)-(2.3.45) pour  $(\varphi, \psi, \chi) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^\epsilon)Z(s_l^\epsilon) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l^\epsilon(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)\nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla \varphi \, dx \\ - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l^\epsilon)\rho_l^2(p_l^\epsilon)g \cdot \nabla \varphi \, dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^\epsilon)\nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)(Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}})\varphi \, dx, \end{aligned} \quad (2.3.63)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g^\epsilon)Z(s_g^\epsilon) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g^\epsilon(s_g^\epsilon)\rho_g(p_g^\epsilon)\nabla p_g^\epsilon \cdot \nabla \psi \, dx \\ - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_g^\epsilon)\rho_g^2(p_g^\epsilon)g \cdot \nabla \psi \, dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^\epsilon)\nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \psi \, dx \\ = \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)(Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}})\psi \, dx, \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^\epsilon)Z(s_l^\epsilon)Y(X^\epsilon) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^\epsilon)D_l^h \nabla X^\epsilon \cdot \nabla \chi \, dx \\ = - \int_{\Omega} Y(X^\epsilon)\mathbf{K}M_l(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)\nabla p_l^\epsilon \cdot \nabla \chi \, dx + \int_{\Omega} Y(X^\epsilon)\mathbf{K}M_l(s_l^\epsilon)\rho_l^2(p_l^\epsilon)g \cdot \nabla \chi \, dx \\ - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)(Y(X^\epsilon) - X_{\text{eq}})\chi \, dx + \eta \int_{\Omega} Y(X^\epsilon)\rho_l(p_l^\epsilon)\nabla(p_g^\epsilon - p_l^\epsilon) \cdot \nabla \chi \, dx \end{aligned} \quad (2.3.65)$$

Les premiers termes des égalités (2.3.63)–(2.3.65) convergent d'après la convergence forte de  $\rho_\alpha(p_\alpha^\epsilon)Z(s_\alpha^\epsilon)$  vers  $\rho_\alpha(p_\alpha)Z(s_\alpha)$  et de  $\rho_l(p_l^\epsilon)Z(s_l^\epsilon)Y(X^\epsilon)$  vers  $\rho_l(p_l)Z(s_l)Y(X)$  dans  $L^2(\Omega)$ .

Les deuxièmes termes des égalités (2.3.63)–(2.3.64) convergent d'après le théorème de Lebesgue et des convergences (2.3.57)–(2.3.60)

$$M_\alpha^\epsilon(s_\alpha^\epsilon)\rho_\alpha(p_\alpha^\epsilon)\nabla \varphi \longrightarrow M_\alpha(s_\alpha)\rho_\alpha(p_\alpha)\nabla \varphi \text{ fortement dans } L^2(\Omega),$$

et

$$\nabla p_\alpha^\epsilon \longrightarrow \nabla p_\alpha \text{ faiblement dans } L^2(\Omega).$$



Les convergences des autres termes sont des conséquences des convergences obtenues dans le lemme 2.3.4 et du théorème de convergence dominé.

Résumons, si on note  $u^{\delta t} := u^{\eta, \eta}$  les inconnues pour noter la dépendance en  $\delta t$  (ici  $\eta$  est fixe), nous avons montré qu'il existe  $(p_l^{\delta t}, p_g^{\delta t}, X^{\delta t}) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  solution de

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\delta t})Z(s_l^{\delta t}) - \rho_l^* s_l^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})\nabla p_l^{\delta t} \cdot \nabla \varphi \, dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_l(s_l^{\delta t})\rho_l^2(p_l^{\delta t})\mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\delta t})\nabla(p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi \, dx \\ & \quad = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})(Y(X^{\delta t}) - X_{\text{eq}})\varphi \, dx, \quad (2.3.66) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g(p_g^{\delta t})Z(s_g^{\delta t}) - \rho_g^* s_g^*}{\delta t} \psi \, dx + \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_g^{\delta t})\rho_g(p_g^{\delta t})\nabla p_g^{\delta t} \cdot \nabla \psi \, dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \mathbf{K}M_g(s_l^{\delta t})\rho_g^2(p_g^{\delta t})\mathbf{g} \cdot \nabla \psi \, dx + \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^{\delta t})\nabla(p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \psi \, dx \\ & \quad = \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})(Y(X^{\delta t}) - X_{\text{eq}})\psi \, dx, \quad (2.3.67) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{\delta t})Z(s_l^{\delta t})Y(X^{\delta t}) - \rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} \varphi \, dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\delta t})D_l^h \nabla X^{\delta t} \cdot \nabla \chi \, dx \\ & \quad = - \int_{\Omega} Y(X^{\delta t})\mathbf{K}M_l(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})\nabla p_l^{\delta t} \cdot \nabla \chi \, dx + \int_{\Omega} Y(X^{\delta t})\mathbf{K}M_l(s_l^{\delta t})\rho_l^2(p_l^{\delta t})\mathbf{g} \cdot \nabla \chi \, dx \\ & \quad - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})(Y(X^{\delta t}) - X_{\text{eq}})\chi \, dx + \eta \int_{\Omega} Y(X^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})\nabla(p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \chi \, dx \quad (2.3.68) \end{aligned}$$

**Proposition 2.3.2.** (*Principe du maximum*) Supposons que  $s_{\alpha}^* \geq 0$ ,  $X^* \geq 0$ ,  $\rho_{\alpha}^* s_{\alpha}^*$  et  $\rho_l^* s_l^* X^*$  sont dans  $L^2(\Omega)$ . Alors, la saturation liquide  $s_{\alpha}^{\delta t}$  et la concentration  $X^{\delta t}$  vérifient

$$0 \leq s_{\alpha}^{\delta t} \leq 1 \text{ et } 0 \leq X^{\delta t} \leq X_{\text{eq}} \text{ p.p. dans } \Omega.$$

*Démonstration.* Pour les saturations, il suffit de démontrer que  $s_{\alpha}^{\delta t} \geq 0$  p.p. dans  $\Omega$ . Pour cela, on considère  $\varphi = -(s_l^{\delta t})^-$  et  $\psi = -(s_g^{\delta t})^-$  respectivement dans (2.3.66) et (2.3.67). Notons pour une fonction  $u$ ,  $u = u^+ - u^-$ ,  $u^+ = \max(0, u)$  et  $u^- = -\min(0, u)$ . D'après la définition de l'application  $Z$  et le fait que  $M_{\alpha}(s_{\alpha}^{\delta t})(s_{\alpha}^{\delta t})^- = 0$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l^* s_l^*}{\delta t} (s_l^{\delta t})^- \, dx - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\delta t})\overline{p_c}(s_l)\nabla(s_l^{\delta t})^- \cdot \nabla(s_l^{\delta t})^- \, dx \\ & \quad = \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\delta t})\rho_l(p_l^{\delta t})(Y(X^{\delta t}) - X_{\text{eq}})(s_l^{\delta t})^- \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_g^* s_g^*}{\delta t} s_g^- dx - \eta \int_{\Omega} \rho_g(p_g^{\delta t}) \overline{p_c}(s_l) \nabla(s_g^{\delta t})^- \cdot \nabla(s_g^{\delta t})^- dx \\ = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (Y(X^{\delta t}) - X_{\text{eq}}) (s_g^{\delta t})^- dx = 0. \end{aligned}$$

Comme il est possible de choisir l'extension  $\overline{p_c}$  de  $p_c$  en dehors de  $[0, 1]$  d'une manière qui assure que  $p_c'(s_l)$  est différent de zéro en dehors de  $[0, 1]$ , on obtient

$$\eta \int_{\Omega} |\nabla(s_g^{\delta t})^-|^2 dx \leq 0.$$

Ceci prouve le principe de maximum sur les saturations car  $s_g^-$  s'annule sur  $\Gamma_l$ .

En ce qui concerne le principe du maximum sur la concentration, considérons  $\chi = -(X^{\delta t})^-$  dans (2.3.68). Comme  $Y(X^{\delta t})(X^{\delta t})^- = 0$ , on obtient

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l^* s_l^* X^*}{\delta t} X^- dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l) D_l^h \nabla X^- \cdot \nabla X^- dx \leq - \int_{\Omega} \Gamma(s_l) \rho_l(p_l) X_{\text{eq}} X^- dx \leq 0,$$

prouvant  $X^- = 0$  presque partout dans  $\Omega$  car  $X^-$  s'annule sur  $\Gamma_l$ .

Il reste à montrer que  $X^{\delta t} \leq X_{\text{eq}}$ . On considère  $\varphi = \chi = (X^{\delta t} - X_{\text{eq}})^+$  et on multiplie (2.3.66) par  $X_{\text{eq}}$  et on le soustrait de (2.3.68) obtenant

$$\int_{\Omega} \Phi \frac{-\rho_l^* s_l^* (X^* - X_{\text{eq}})}{\delta t} (X - X_{\text{eq}})^+ dx + \int_{\Omega} \nabla(X - X_{\text{eq}})^+ \cdot \nabla(X - X_{\text{eq}})^+ dx \leq 0.$$

ce qui prouve que  $(X - X_{\text{eq}})^+ = 0$  presque partout dans  $\Omega$  car  $(X - X_{\text{eq}})^+$  s'annule sur  $\Gamma_l$ .  $\square$

### 2.3.2 Étude du système régularisé ( $\mathfrak{M}_\eta$ )

Dans la section (2.3.1), nous avons montré l'existence d'une solution  $p_l^{\eta, n+1}$ ,  $p_g^{\eta, n+1}$ ,  $X^{\eta, n+1}$  dans  $(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  de  $\mathfrak{M}_{\eta, \delta t}$ . Par conséquent, les suites  $(p_l^{\eta, n+1}, p_g^{\eta, n+1}, X^{\eta, n+1})$  sont bien définies. De plus, pour  $\rho_\alpha(p_\alpha^{\eta, n}) s_\alpha^{\eta, n} \geq 0$ ,  $\rho_l(p_l^{\eta, n}) s_l^{\eta, n} X^{\eta, n} \geq 0$  et  $\rho_\alpha(p_\alpha^{\eta, n}) s_\alpha^{\eta, n} \in L^2(\Omega)$ ,  $\rho_l(p_l^{\eta, n}) s_l^{\eta, n} X^{\eta, n} \in L^2(\Omega)$ , ( $\alpha = l, g$ ), nous construisons donc  $(p_l^{\eta, n+1}, p_g^{\eta, n+1}, X^{\eta, n+1}) \in (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))^3$  de tel sorte que  $s_\alpha^{\eta, n+1} \in [0, 1]$  et  $X^{\eta, n+1} \in [0, X_{\text{eq}}]$ .

Par souci de clarté, nous omettons désormais l'indice  $\eta$ , celui-ci étant fixe dans cette section. En effet, cette section concerne le passage à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro pour montrer l'existence d'une solution du problème  $\mathfrak{M}_\eta$ . Pour cela, nous allons montrer des estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$ . Celles-ci vont alors nous permettre de passer à la limite  $\delta t \rightarrow 0$  dans (2.3.8)–(2.3.10).

Le lemme suivant nous donne des estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$ .

**Lemme 2.3.5.** (*Estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$* ). Les solutions de (2.3.8) – (2.3.10) vérifient

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{H}_l(p_l^{n+1})s_l^{n+1} - \mathcal{H}_l(p_l^n)s_l^n) dx + \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{H}_g(p_g^{n+1})s_g^{n+1} - \mathcal{H}_g(p_g^n)s_g^n) dx \\ & - \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{F}(s_l^{n+1}) - \mathcal{F}(s_l^n)) dx + \eta \int_{\Omega} |\nabla(p_g^{n+1} - p_l^{n+1})|^2 dx \\ & + k_0 \int_{\Omega} M_l(s_l^{n+1}) \nabla p_l^{n+1} \cdot \nabla p_l^{n+1} dx \\ & + k_0 \int_{\Omega} M_g(s_g^{n+1}) \nabla p_g^{n+1} \cdot \nabla p_g^{n+1} dx \leq C, \end{aligned} \quad (2.3.69)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi (\rho_l(p_l^{n+1})s_l^{n+1}(X^{n+1})^2 - \rho_l(p_l^n)s_l^n(X^n)^2) dx + \rho_m \int_{\Omega} \nabla X^{n+1} \cdot \nabla X^{n+1} dx \\ & \leq C(\|\sqrt{M_l(s_l^{n+1})} \nabla p_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|\nabla(p_g^{n+1} - p_l^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2), \end{aligned} \quad (2.3.70)$$

où  $C$  ne dépend pas de  $\delta t$ . Les fonctions  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}_c$  sont quant à elles définies par

$$\mathcal{H}_\alpha(p_\alpha) := \rho_\alpha(p_\alpha)g_\alpha(p_\alpha) - p_\alpha, \quad \mathcal{P}_c(s_l) := \int_0^{s_l} p_c(z) dz \quad \text{et} \quad g_\alpha(p_\alpha) = \int_0^{p_\alpha} \frac{1}{\rho_\alpha(z)} dz \quad \alpha = l, g.$$

*Démonstration.* Par souci de clarté, nous omettons l'indice  $n + 1$  et on notera par  $*$  les quantités physiques à l'instant  $t_n$ .

Dans un premier temps, nous allons montrer que pour tout  $s_l \geq 0$  et  $s_l^* \geq 0$  vérifiant  $s_l + s_g = s_l^* + s_g^* = 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} & (\rho_l(p_l)s_l - \rho_l(p_l^*)s_l^*)g_l(p_l) + (\rho_g(p_g)s_g - \rho_g(p_g^*)s_g^*)g_g(p_g) \\ & \geq \mathcal{H}_l(p_l)s_l - \mathcal{H}_l(p_l^*)s_l^* + \mathcal{H}_g(p_g)s_g - \mathcal{H}_g(p_g^*)s_g^* - \mathcal{P}_c(s_l) + \mathcal{P}_c(s_l^*). \end{aligned} \quad (2.3.71)$$

En effet, notant par  $\mathfrak{J}$  le membre gauche de l'inégalité (2.3.71), nous avons

$$\mathfrak{J} = (\rho_l(p_l)s_l - \rho_l(p_l^*)s_l^*)g_l(p_l) + (\rho_g(p_g)s_g - \rho_g(p_g^*)s_g^*)g_g(p_g).$$

Comme la fonction  $g_\alpha$  est concave ( $g_\alpha''(p) \leq 0$ ), nous avons

$$g_\alpha(p_\alpha) \leq g_\alpha(p_\alpha^*) + g_\alpha'(p_\alpha^*)(p_\alpha - p_\alpha^*).$$

De la définition de  $\mathcal{H}_\alpha$ , on déduit

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &= \rho_l(p_l)s_l g_l(p_l) - \rho_l(p_l^*)s_l^* g_l(p_l) + \rho_g(p_g)s_g g_g(p_g) - \rho_g(p_g^*)s_g^* g_g(p_g) \\ &= [(\rho_l(p_l)s_l g_l(p_l) - s_l p_l) + s_l p_l - \rho_l(p_l^*)s_l^* g_l(p_l)] \\ &\quad + [(\rho_g(p_g)s_g g_g(p_g) - s_g p_g) + s_g p_g - \rho_g(p_g^*)s_g^* g_g(p_g)], \end{aligned}$$

et comme la fonction  $g_\alpha$  est concave, nous avons

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} &\geq \mathcal{H}_l(p_l)s_l - \mathcal{H}_l(p_l^*)s_l^* + \mathcal{H}_g(p_g)s_g - \mathcal{H}_g(p_g^*)s_g^* + s_l p_l - s_l^* p_l + s_g p_g - s_g^* p_g \\ &\geq \mathcal{H}_l(p_l)s_l - \mathcal{H}_l(p_l^*)s_l^* + \mathcal{H}_g(p_g)s_g - \mathcal{H}_g(p_g^*)s_g^* - s_l(p_g - p_l) + s_l^*(p_g - p_l) \\ &\geq \mathcal{H}_l(p_l)s_l - \mathcal{H}_l(p_l^*)s_l^* + \mathcal{H}_g(p_g)s_g - \mathcal{H}_g(p_g^*)s_g^* - (s_l - s_l^*)p_c(s_l). \end{aligned} \quad (2.3.72)$$

Or la fonction  $\mathcal{P}_c$  est concave

$$(s_l - s_l^*)p_c(s_l) \leq \mathcal{P}_c(s_l) - \mathcal{P}_c(s_l^*), \quad (2.3.73)$$

donc les deux inégalités (2.3.72) et (2.3.73) prouvent (2.3.71).

Pour montrer l'estimation (2.3.69), on multiplie (2.3.8) par  $g_l(p_l^{n+1})$  et (2.3.9) par  $g_g(p_g^{n+1})$  et on somme ces deux quantités, obtenant

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi((\rho_l(p_l^{n+1})s_l^{n+1} - \rho_l(p_l^n)s_l^n)g_l(p_l^{n+1}) + (\rho_g(p_g^{n+1})s_g^{n+1} - \rho_g(p_g^n)s_g^n)g_g(p_g^{n+1})) dx \\ &\quad + \sum_{\alpha} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{K}M_{\alpha}(s_{\alpha}^{n+1})\nabla p_{\alpha}^{n+1} \cdot \nabla p_{\alpha}^{n+1} dx \right] + \eta \int_{\Omega} |\nabla p_c(s_l^{n+1})|^2 dx \\ &\quad = \sum_{\alpha} \left[ \int_{\Omega} \mathbf{K}M_{\alpha}(s_{\alpha}^{n+1})\rho_{\alpha}(p_{\alpha}^{n+1})\mathbf{g} \cdot \nabla p_{\alpha}^{n+1} dx \right] \\ &\quad \quad - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{n+1})\rho_l(p_l^{n+1})(X^{n+1} - X_{\text{eq}})(g_l(p_l^{n+1}) - g_g(p_g^{n+1})) dx. \end{aligned}$$

Enfin, de l'inégalité (2.3.71), on déduit (2.3.69).

Pour l'estimation (2.3.70), on multiplie (2.3.9) par  $X^{n+1}$  ce qui nous donne

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Phi \frac{\rho_l(p_l^{n+1})s_l^{n+1}(X^{n+1})^2 - \rho_l(p_l^n)s_l^n(X^n)^2}{\delta t} dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{n+1})D_l^h \nabla X^{n+1} \cdot \nabla X^{n+1} dx \\ &\quad = - \int_{\Omega} X^{n+1} \mathbf{K}M_l(s_l^{n+1})\rho_l(p_l^{n+1})\nabla(p_l^{n+1} - \rho_l(p_l^{n+1})\mathbf{g}) \cdot \nabla X^{n+1} dx \\ &\quad \quad - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^{n+1})\rho_l(p_l^{n+1})(X^{n+1} - X_{\text{eq}})X^{n+1} dx \\ &\quad \quad + \eta \int_{\Omega} X^{n+1} \rho_l(p_l^{n+1})\nabla(p_g^{n+1} - p_l^{n+1}) \cdot \nabla X^{n+1} dx, \end{aligned}$$

et à l'aide des inégalités de Young et Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\delta t} \int_{\Omega} \Phi(\rho_l(p_l^{n+1})s_l^{n+1}(X^{n+1})^2 - \rho_l(p_l^n)s_l^n(X^n)^2) dx + \rho_m \int_{\Omega} \nabla X^{n+1} \cdot \nabla X^{n+1} dx \\ &\quad \leq C(\|\sqrt{M_l(s_l^{n+1})} \cdot \nabla p_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \eta \|\nabla(p_g^{n+1} - p_l^{n+1})\|_{L^2(\Omega)}^2) \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 2.3.5. □

Maintenant, notre objectif est d'obtenir des estimations uniformes sur ces solutions reconstruites constantes par morceaux. Pour cela, nous introduisons les mêmes notations que dans le chapitre 1, à savoir pour une suite  $(u^n)_{n=0,M}$ , on définit les fonctions constantes par morceaux comme

$$u^{\delta t}(0) = u^0 \text{ and } u^{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} u^{n+1} \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t), \quad \forall t \in ]0, T], \quad (2.3.74)$$

où  $\chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t) = 1$  pour  $t \in ]n\delta t, (n+1)\delta t]$  et zéro ailleurs. Nous définissons également  $\tilde{u}^{\delta t}$  par

$$\tilde{u}^{\delta t}(t) = \sum_{n=0}^{M-1} \left[ \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) u^n + \left(\frac{t}{\delta t} - n\right) u^{n+1} \right] \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t), \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.3.75)$$

Nous pouvons alors calculer la dérivée de  $\tilde{u}^{\delta t}$

$$\partial_t \tilde{u}^{\delta t}(t) = \frac{1}{\delta t} \sum_{n=0}^{M-1} (u^{n+1} - u^n) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t) \quad \forall t \in [0, T] \setminus \{\cup_{n=0}^M n\delta t\}$$

Soient les fonctions  $p_\alpha^{\delta t}$ ,  $s_\alpha^{\delta t}$  et  $X^{\delta t}$  définies comme dans (2.3.74). Pour  $\alpha = l, g$ , on note  $r_\alpha^{\delta t}$  la fonction définie par (2.3.74) correspondante à  $r_\alpha^n = \rho_\alpha(p_\alpha^n) s_\alpha^n$  et on note par  $v^{\delta t}$  la fonction définie par (2.3.74) correspondante à  $v^n = \rho_l(p_l^n) s_l^n X^n$ . On note  $\tilde{r}_\alpha^{\delta t}$  et  $\tilde{v}^{\delta t}$  les fonctions définies par (2.3.75) correspondantes à  $r_\alpha^n$  et  $v^n$  respectivement.

**Proposition 2.3.3.** *Si les conditions initiales  $p_g^0$ ,  $p_l^0$  et  $X^0$  sont dans  $H_{\Gamma_l}^1(\Omega)$ , nous avons alors les estimations uniformes indépendantes de  $\delta t$  suivantes*

$$(s_g^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.76)$$

$$(p_\alpha^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.77)$$

$$(X^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.78)$$

$$(r_\alpha^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.3.79)$$

$$(\tilde{r}_\alpha^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.3.80)$$

$$(v^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.3.81)$$

$$(\tilde{v}^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.3.82)$$

$$(\Phi \partial_t \tilde{r}_\alpha^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.3.83)$$

$$(\Phi \partial_t \tilde{v}^{\delta t}) \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \quad (2.3.84)$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que nous avons les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^{\delta t}) |\nabla p_\alpha^{\delta t}|^2 dx dt &= \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \int_{\Omega} M_\alpha(s_\alpha^{n+1}) |\nabla p_\alpha^{n+1}|^2 dx, \quad \alpha = l, g, \\ \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 dx dt &= \delta t \sum_{n=0}^{M-1} \int_{\Omega} |\nabla p_c(s_l^{n+1})|^2 dx. \end{aligned}$$

En multipliant (2.3.69) par  $\delta t$  et en sommant de  $n = 0$  à  $M - 1$ , on obtient l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{H}_l(p_l^{\delta t}(T))s_l^{\delta t}(T) - \mathcal{H}_l(p_l^{\delta t}(0))s_l^{\delta t}(0)) \, dx \\ & + \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{H}_g(p_g^{\delta t}(T))s_g^{\delta t}(T) - \mathcal{H}_g(p_g^{\delta t}(0))s_g^{\delta t}(0)) \, dx \\ & - \int_{\Omega} \Phi (\mathcal{P}_c(s_l^{\delta t}(T)) - \mathcal{P}_c(s_l^{\delta t}(0))) \, dx + \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 \, dx dt \\ & + k_0 \int_{Q_T} M_l(s_l^{\delta t}) |\nabla p_l^{\delta t}|^2 \, dx dt + k_0 \int_{Q_T} M_g(s_g^{\delta t}) |\nabla p_g^{\delta t}|^2 \, dx dt \leq C_1. \end{aligned}$$

A l'aide de la sublinéarité de  $\mathcal{H}_\alpha$  pour  $\alpha = l, g$  et comme  $p_\alpha^{\delta t}(0) \in L^2(\Omega)$ , on en déduit l'estimation suivant

$$k_0 \sum_{\alpha=l,g} \left( \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^{\delta t}) |\nabla p_\alpha^{\delta t}|^2 \, dx dt \right) + \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 \, dx dt \leq C_2.$$

Par suite, en utilisant la relation entre la pression globale et les pressions de chaque phases (2.2.1), on obtient

$$\int_{Q_T} M(s_l^{\delta t}) |\nabla p_{\delta t}|^2 \, dx dt + \eta \int_{Q_T} |\nabla p_c(s_l^{\delta t})|^2 \, dx dt \leq C_3, \quad (2.3.85)$$

où  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont des constantes indépendantes de  $\delta t$ .

L'hypothèse (H6) sur la pression capillaire  $p_c$  avec le second terme de l'estimation (2.3.85) prouve l'estimation (2.3.76). En utilisant la relation (2.1.4) entre la pression de chaque phase, la pression globale et la pression capillaire, l'estimation (2.3.77) devient une conséquence de (2.3.85). L'estimation (2.3.78) est une conséquence de (2.3.70) et de (2.3.76)-(2.3.77). Pour obtenir l'estimation uniforme (2.3.79), nous calculons le gradient de  $r_\alpha^{\delta t}$

$$\nabla r_\alpha^{\delta t} = \sum_{n=0}^{M-1} \left( \frac{d\rho_\alpha}{dp_\alpha}(p_\alpha^{n+1}) s_\alpha^{n+1} \nabla p_\alpha^{n+1} + \rho_\alpha(p_\alpha^{n+1}) \nabla s_\alpha^{n+1} \right) \chi_{[n\delta t, (n+1)\delta t]}(t).$$

Ainsi, comme la densité  $\rho_\alpha$  est une fonction borné et de classe  $\mathcal{C}^1$  et que la saturation vérifie  $0 \leq s_\alpha^{n+1} \leq 1$ , (2.3.79) est une conséquence des deux estimations (2.3.76) et (2.3.77).

Pour l'estimation (2.3.80), remarquons que

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{r}_\alpha^{\delta t} &= \sum_{n=0}^{M-1} \left( \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) [\rho'_\alpha(p_\alpha^n) s_\alpha^n \nabla p_\alpha^n + \rho_\alpha(p_\alpha^n) \nabla s_\alpha^n] \right. \\ & \left. + \left(\frac{t}{\delta t} - n\right) [\rho'_\alpha(p_\alpha^{n+1}) s_\alpha^{n+1} \nabla p_\alpha^{n+1} + \rho_\alpha(p_\alpha^{n+1}) \nabla s_\alpha^{n+1}] \right) \chi_{[n\delta t, (n+1)\delta t]}(t). \end{aligned} \quad (2.3.86)$$

Maintenant, comme les densités  $\rho_\alpha$  sont des fonctions bornées de classe  $\mathcal{C}^1$  et comme  $0 \leq s_\alpha^{n+1} \leq 1$ , on obtient

$$|\nabla \tilde{r}_\alpha^{\delta t}|^2 \leq C \sum_{n=0}^{M-1} (|\nabla p_\alpha^n|^2 + |\nabla s_\alpha^n|^2 + |\nabla p_\alpha^{n+1}|^2 + |\nabla s_\alpha^{n+1}|^2) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t),$$

ce qui implique l'inégalité

$$\|\nabla \tilde{r}_\alpha^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C(\|\nabla p_\alpha^{\delta t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla s_\alpha^{\delta t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_\alpha^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla s_\alpha^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta t$ , ce qui prouve (2.3.80).

Ensuite, pour l'estimation (2.3.81), on utilise les estimations (2.3.77), (2.3.78), la bornétude et la régularité des densités  $\rho_\alpha$ , le principe du maximum sur  $X^n$  ( $0 \leq X^n \leq X_{\text{eq}}$ ) et l'égalité

$$\nabla v^{\delta t} = \sum_{n=0}^{M-1} (X^{n+1} \nabla r_l^{n+1} + r_l^{n+1} \nabla X^{n+1}) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t).$$

Pour l'estimation (2.3.82), remarquons que

$$\begin{aligned} \nabla \tilde{v}^{\delta t} &= \sum_{n=0}^{M-1} \left( \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) [X^n \nabla r_l^n + r_l^n \nabla X^n] \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{t}{\delta t} - n\right) [X^{n+1} \nabla r_l^{n+1} + r_l^{n+1} \nabla X^{n+1}] \right) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t). \end{aligned}$$

Comme la densité  $\rho_l$  est une fonction bornée et de classe  $\mathcal{C}^1$  et comme  $0 \leq X^n \leq X_{\text{eq}}$ , on en déduit

$$|\nabla \tilde{v}^{\delta t}|^2 \leq C \sum_{n=0}^{M-1} (|\nabla r_l^n|^2 + |\nabla X^n|^2 + |\nabla r_l^{n+1}|^2 + |\nabla X^{n+1}|^2) \chi_{]n\delta t, (n+1)\delta t]}(t),$$

ce qui implique l'inégalité

$$\|\nabla \tilde{v}^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 \leq C(\|\nabla r_l^{\delta t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla X^{\delta t}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla r_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla X^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2),$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta t$ . Par conséquent (2.3.82) est prouvée.

De l'équation (2.3.8), on a pour tout  $\varphi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{r}_l^{\delta t}, \varphi \rangle &= - \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ &\quad - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (X^{\delta t} - X_{\text{eq}}) \varphi \, dx dt - \eta \int_{\Omega} \rho_l(p_l^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi \, dx dt. \end{aligned}$$

Les estimations (2.3.76)-(2.3.77) avec (2.3.85) assurent que  $(\Phi \partial_t \tilde{r}_l^{\delta t})_{\delta t}$  est uniformément bornée dans  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$ . De la même manière, on montre (2.3.83) pour  $\alpha = g$  et (2.3.84).  $\square$

L'étape suivante concerne le passage à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro afin de passer d'un problème elliptique à un problème parabolique ce qui fait l'objet de la proposition suivante.

**Proposition 2.3.4.** *(Convergence quand  $\delta t$  tend vers zéro). Nous avons les convergences suivantes lorsque  $\delta t$  tend vers zéro*

$$\|r_\alpha^{\delta t} - \tilde{r}_\alpha^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0, \quad (2.3.87)$$

$$\|v^{\delta t} - \tilde{v}^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0, \quad (2.3.88)$$

$$s_g^{\delta t} \longrightarrow s_g \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.89)$$

$$p_\alpha^{\delta t} \longrightarrow p_\alpha \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.90)$$

$$X^{\delta t} \longrightarrow X \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.3.91)$$

$$r_\alpha^{\delta t} \longrightarrow r_\alpha \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T), \quad (2.3.92)$$

$$v^{\delta t} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T). \quad (2.3.93)$$

De plus,

$$s_\alpha^{\delta t} \longrightarrow s_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.94)$$

$$0 \leq s_\alpha \leq 1 \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.95)$$

$$p_\alpha^{\delta t} \longrightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.96)$$

$$X^{\delta t} \longrightarrow X \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.97)$$

$$0 \leq c \leq X_{\text{eq}} \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.98)$$

et

$$r_\alpha = \rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.99)$$

$$v = \rho_l(p_l)s_l X \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.3.100)$$

Finalement, nous avons

$$\Phi \partial_t \tilde{r}_\alpha^{\delta t} \longrightarrow \Phi \partial_t (\rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.3.101)$$

$$\Phi \partial_t \tilde{v}^{\delta t} \longrightarrow \Phi \partial_t (\rho_l(p_l)s_l X) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.3.102)$$

*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que

$$\begin{aligned} \|r_\alpha^{\delta t} - \tilde{r}_\alpha^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 &= \sum_{n=0}^{M-1} \int_{n\delta t}^{(n+1)\delta t} \left\| \left(1 + n - \frac{t}{\delta t}\right) (r_\alpha^{n+1} - r_\alpha^n) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \\ &= \frac{\delta t}{3} \sum_{n=0}^{M-1} \|r_\alpha^{n+1} - r_\alpha^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$



On multiplie (2.3.8) par  $r_l^{n+1} - r_l^n$  et on somme de  $n = 0$  jusqu'à  $M - 1$  obtenant l'estimation suivant

$$\frac{\Phi_0}{\delta t} \sum_{n=0}^{M-1} \|r_l^{n+1} - r_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=0}^{M-1} \left[ \|\nabla r_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla r_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla s_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla p_l^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right].$$

Ceci implique

$$\sum_{n=0}^{M-1} \|r_l^{n+1} - r_l^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( 1 + \|\nabla r_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla s_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 + \|\nabla p_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)}^2 \right).$$

Ensuite, en utilisant (2.3.76), (2.3.77) et (2.3.79), on en déduit que

$$\|r_l^{\delta t} - \tilde{r}_l^{\delta t}\|_{L^2(Q_T)} \longrightarrow 0.$$

De manière analogue, on multiplie (2.3.9) avec  $r_g^{n+1} - r_g^n$  ce qui nous donne (2.3.87).

Pour (2.3.88), on multiplie (2.3.10) par  $v^{n+1} - v^n$  et de (2.3.77), (2.3.78) et (2.3.81) on en déduit (2.3.88). De (2.3.76), (2.3.77) et (2.3.78), les suites  $(s_g^{\delta t})$ ,  $(p_\alpha^{\delta t})$  et  $(X^{\delta t})$  sont uniformément bornées dans  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ , donc, pour des sous suites, nous obtenons les convergences (2.3.89), (2.3.90) et (2.3.91).

Les suites  $(\tilde{r}_\alpha^{\delta t})$  et  $(\tilde{v}^{\delta t})$  sont uniformément bornées dans  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ . Et grâce aux estimations (2.3.83) et (2.3.84), nous obtenons les convergences fortes suivantes

$$\tilde{r}_\alpha^{\delta t} \longrightarrow r_\alpha \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T), \quad (2.3.103)$$

$$\tilde{v}^{\delta t} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T). \quad (2.3.104)$$

Ce résultat de compacité peut se trouver dans [25] quand la porosité est constante et sous l'hypothèse (H1) (la porosité appartient à  $W^{1,\infty}(\Omega)$ ) avec quelques modifications.

Les convergences (2.3.103) et (2.3.104) avec (2.3.87) et (2.3.88) assurent les convergences fortes suivantes

$$\rho_l(p_l^{\delta t}) s_l^{\delta t} \longrightarrow r_l \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (2.3.105)$$

$$\rho_g(p_g^{\delta t}) s_g^{\delta t} \longrightarrow r_g \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (2.3.106)$$

$$\rho_l(p_l^{\delta t}) s_l^{\delta t} X^{\delta t} \longrightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et p.p. dans } Q_T, \quad (2.3.107)$$

prouvant (2.3.92) et (2.3.93).

En ce qui concerne la convergence presque partout dans  $\Omega$  pour la pression  $p_\alpha^{\delta t}$ , la saturation  $s_\alpha^{\delta t}$  et la concentration  $X^{\delta t}$ , on définit l'application  $\mathcal{G} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longmapsto \mathbb{R} \times [0, 1]$ ,  $\mathcal{G}(\xi, \zeta) = (p_l^{\delta t}, s_l^{\delta t})$ , où  $\xi$  et  $\zeta$  sont les solutions du système

$$\begin{cases} \xi(p_l^{\delta t}, s_l^{\delta t}) = \rho_l(p_l^{\delta t}) s_l^{\delta t} \\ \zeta(p_l^{\delta t}, s_l^{\delta t}) = \rho_g(p_l^{\delta t} + p_c(s_l^{\delta t}))(1 - s_l^{\delta t}) \end{cases} \quad (2.3.108)$$

Notons que  $\mathcal{G}$  est bien définie comme difféomorphisme puisque

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_l^{\delta t}} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s_l^{\delta t}} \\ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p_l^{\delta t}} & \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial s_l^{\delta t}} \end{vmatrix} &= -\rho_l'(p_l^{\delta t})\rho_g(p_l^{\delta t} + p_c(s_l^{\delta t}))s_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t})\rho_g'(p_l^{\delta t} + p_c(s_l^{\delta t}))(1 - s_l^{\delta t}) \\ &+ \rho_l'(p_l^{\delta t})s_l^{\delta t}(1 - s_l^{\delta t})\rho_g'(p_l^{\delta t} + p_c(s_l^{\delta t}))p_c'(s_l^{\delta t}) < 0. \end{aligned}$$

D'après les convergences presque partout (2.3.105)-(2.3.106) et le fait que l'application  $\mathcal{G}$  définie dans (2.3.108) soit continue, on en déduit que

$$\begin{aligned} p_l^{\delta t} &\longrightarrow p_l \text{ presque partout dans } Q_T, \\ s_l^{\delta t} &\longrightarrow s_l \text{ presque partout dans } Q_T. \end{aligned}$$

L'identification de la limite est due à (2.3.76) et (2.3.77). La continuité de la pression capillaire assure que

$$p_g^{\delta t} \longrightarrow p_g \text{ presque partout dans } Q_T,$$

et l'équation sur les saturations  $s_l + s_g = 1$  montre que

$$s_g^{\delta t} \longrightarrow s_g \text{ presque partout dans } Q_T,$$

prouvant (2.3.94) – (2.3.96).

Le principe du maximum (2.3.95) et l'identification (2.3.99) sont conservés par le processus de passage à la limite. De (2.3.96), nous avons

$$\rho_l(p_l^{\delta t}) \longrightarrow \rho_l(p_l) \text{ presque partout dans } Q_T,$$

et d'après le théorème de Lebesgue, on en déduit

$$\rho_l(p_l^{\delta t}) \longrightarrow \rho_l(p_l) \text{ fortement dans } L^2(Q_T),$$

et avec (2.3.91), nous obtenons

$$\rho_l(p_l^{\delta t})X^{\delta t} \longrightarrow \rho_l(p_l)X \text{ fortement dans } L^1(Q_T).$$

Remarquons que

$$X^{\delta t} = \frac{\rho_l(p_l^{\delta t})X^{\delta t}}{\rho_l(p_l^{\delta t})},$$

donc nous avons la convergence suivante

$$X^{\delta t} \longrightarrow X \text{ fortement dans } L^1(Q_T),$$

ce qui montre (2.3.97).

Finalement, les convergences faibles (2.3.101)-(2.3.102) sont des conséquence de (2.3.83) et (2.3.84) et l'identification de la limite est due à (2.3.99) et (2.3.100).  $\square$

Pour obtenir les solutions du système non dégénéré  $\mathfrak{M}_\eta$ , on passe à la limite quand  $\delta t$  tend vers zéro sur les solutions du système (2.3.8)–(2.3.10) après sommation de  $n = 0$  à  $M - 1$ ,

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{r}_l^{\delta t}, \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ - \eta \int_{Q_T} \rho_l(p_l^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi dx dt = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (X^{\delta t} - X_{\text{eq}}) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.109)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{r}_g^{\delta t}, \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_g^{\delta t}) \rho_g(p_g^{\delta t}) (\nabla p_g^{\delta t} - \rho_g(p_g^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ + \eta \int_{Q_T} \rho_g(p_g^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \varphi dx dt = \int_{Q_T} \Gamma(s_l^{\delta t}) \rho_g(p_g^{\delta t}) (X^{\delta t} - X_{\text{eq}}) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.110)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t \tilde{v}^{\delta t}, \chi \rangle + \int_{Q_T} X^{\delta t} \mathbf{K} M_l(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (\nabla p_l^{\delta t} - \rho_l(p_l^{\delta t}) \mathbf{g}) \cdot \nabla \chi dx dt \\ + \int_{Q_T} \rho_l(p_l^{\delta t}) D_l^h \nabla X^{\delta t} \cdot \nabla \chi dx dt - \eta \int_{Q_T} X^{\delta t} \rho_l(p_l^{\delta t}) \nabla (p_g^{\delta t} - p_l^{\delta t}) \cdot \nabla \chi dx dt = \\ - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^{\delta t}) \rho_l(p_l^{\delta t}) (X^{\delta t} - X_{\text{eq}}) \chi dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.111)$$

où  $\varphi, \psi, \chi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ .

Les convergences obtenues dans la proposition 2.3.4 nous permettent de passer à la limite sur chaque terme de (2.3.109), (2.3.111). Nous avons donc établi la formulation faible (2.3.5) – (2.3.7) du théorème 2.3.1. De plus, nous avons obtenu à l'aide de la proposition 2.3.4 les propriétés suivantes

$$\begin{aligned} 0 \leq s_\alpha(t, x) \leq 1 \text{ a.e. in } Q_T, \quad s_g \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \\ p_\alpha \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t (\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad \alpha = l, g \\ 0 \leq X \leq X_{\text{eq}}, \quad X \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \Phi \partial_t (\rho_l(p_l) s_l X) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \end{aligned}$$

La propriété de compacité sur  $\rho_\alpha(p_\alpha^{\delta t}) s_\alpha^{\delta t}$  implique que  $\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha \in \mathcal{C}^0(0, T; L^2(\Omega))$ . De la même manière, la compacité sur  $\rho_l(p_l^{\delta t}) s_l^{\delta t} X^{\delta t}$  implique que  $\rho_l(p_l) s_l X \in \mathcal{C}^0([0, T]; L^2(\Omega))$  prouvant le théorème 2.3.1.

## 2.4 Existence de solutions du système dégénéré

Nous avons montré dans la section 2.3.2 l'existence d'une solution  $(p_l^\eta, p_g^\eta, X^\eta)$  du problème  $\mathfrak{M}_\eta$  donné dans la section 2.3. Ici, l'objectif est de passer à la limite quand  $\eta$  tend

vers zéro pour montrer le résultat principal de ce chapitre : l'existence d'une solution du système (2.1.1)-(2.1.3) avec les estimations du théorème 2.1.1.

Le point important est l'obtention d'estimations uniformes indépendantes de  $\eta$  afin de pouvoir passer à la limite  $\eta \rightarrow 0$  ce qui fait l'objet de la section qui suit.

### 2.4.1 Estimations uniformes par rapport à $\eta$

Nous énonçons les deux lemmes suivants afin de passer à la limite quand  $\eta$  tend vers zéro et prouver l'existence d'une solution du système dégénéré  $\mathfrak{M}$ .

**Lemme 2.4.1.** *Les suites  $(s_\alpha^\eta)_\eta$ ,  $(p^\eta := p_l^\eta + \bar{p}(s_l^\eta))_\eta$  et  $X^\eta$  définies par le théorème 2.3.1 vérifient*

$$0 \leq s_\alpha^\eta \leq 1 \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.4.1)$$

$$0 \leq X^\eta \leq X_{\text{eq}} \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.4.2)$$

$$(p^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.4.3)$$

$$(\sqrt{\eta} \nabla p_c(s_l^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(Q_T), \quad (2.4.4)$$

$$(\sqrt{M_\alpha(s_\alpha^\eta)} \nabla p_\alpha^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(Q_T), \quad (2.4.5)$$

$$(X^\eta)_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.4.6)$$

$$(\mathcal{B}(s_l^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.4.7)$$

$$(\Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.4.8)$$

$$(\Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X))_\eta \quad \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \quad (2.4.9)$$

*Démonstration.* Le principe de maximum (2.4.1)-(2.4.2) est conservée par passage à la limite. Pour l'estimation (2.4.3), on multiplie (2.3.1) par  $g_l(p_l^\eta) = \int_0^{p_l^\eta} \frac{1}{\rho_l(z)} dz$  et (2.3.2) par  $g_g(p_g^\eta) = \int_0^{p_g^\eta} \frac{1}{\rho_g(z)} dz$  et on somme ces deux équations. D'après les hypothèses (H1)-(H9), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.2.1), on en déduit les estimations suivantes (nous rappelons que la fonction  $\mathcal{H}_\alpha$  est définie par  $\mathcal{H}_\alpha(p_\alpha) = \rho_\alpha(p_\alpha)g_\alpha(p_\alpha) - p_\alpha$ )

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_\Omega \Phi \left[ \sum_\alpha s_\alpha^\eta \mathcal{H}_\alpha(p_\alpha^\eta) - \int_0^{s_l^\eta} p_c(z) dz \right] dx \\ & + \sum_\alpha \left[ \int_\Omega \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) (\nabla p_\alpha^\eta - \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla p_\alpha^\eta \right] dx + \eta \int_\Omega |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx \\ & = - \int_\Omega \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) g_l(p_l^\eta) dx + \int_\Omega \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) g_g(p_g^\eta) dx \\ & \leq \frac{\rho_M}{\rho_m} \left( \|p_l^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|p_g^\eta\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \leq \frac{2\rho_M}{\rho_m} \left( \|p^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \leq C \left( \|\nabla p^\eta\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p}(s_l^\eta)\|_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

De nouveau, on utilise (2.2.1) et les hypothèses (H1)-(H9), l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Young, le fait que la fonction  $\mathcal{H}_\alpha$  est non négative pour obtenir après intégration sur  $(0, T)$  de l'inégalité ci-dessus, l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} M(s_l^\eta) |\nabla p^\eta|^2 dx dt + \int_{Q_T} \frac{M_l(s_l^\eta) M_g(s_g^\eta)}{M(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt \\ + \eta \int_{Q_T} \nabla |p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=l,g} \left[ \int_{Q_T} M_\alpha(s_\alpha^\eta) |\nabla p_\alpha^\eta|^2 dx dt \right] \leq C_1. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Les estimations précédentes (2.4.10) et l'hypothèse (H3) assurent l'estimation (2.4.3). Les estimations (2.4.4) – (2.4.5) sont des conséquences directes de l'estimation (2.4.10). Pour l'estimation (2.4.6), on multiplie (2.3.3) par  $X^\eta$  et (2.3.1) par  $-\frac{1}{2}(X^\eta)^2$ . En sommant, nous en déduisons l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta (X^\eta)^2| dx + \int_{\Omega} \rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta \cdot \nabla X^\eta dx \\ = - \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) X^\eta dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) (X^\eta)^2 dx. \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Ainsi, après intégration en temps de cette équation, en utilisant l'hypothèse (H8) et le fait que  $X^\eta$  soit borné, on obtient l'estimation (2.4.6).

L'estimation (2.4.7) est une conséquence de l'hypothèse (H3) et de l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |\nabla \mathcal{B}(s_l^\eta)|^2 dx dt &= \int_{Q_T} \frac{M_l^2(s_l^\eta) M_g^2(s_g^\eta)}{M^2(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt \\ &\leq \sup_{s \in [0,1]} |M(s)| \int_{Q_T} \frac{M_l(s_l^\eta) M_g(s_g^\eta)}{M(s_l^\eta)} |\nabla p_c(s_l^\eta)|^2 dx dt \\ &\leq C, \end{aligned}$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\eta$ .

Pour tout  $\varphi, \psi, \chi \in L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t (\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta), \varphi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \varphi dx dt \\ - \eta \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) \nabla (p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \varphi dx dt, \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \Phi \partial_t (\rho_g(p_g^\eta) s_g^\eta), \psi \rangle + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_g^\eta) \rho_g(p_g^\eta) (\nabla p_g^\eta - \rho_g(p_g^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \psi dx dt \\ - \eta \int_{Q_T} \rho_g(p_g^\eta) \nabla (p_l^\eta - p_g^\eta) \cdot \nabla \psi dx dt = \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \psi dx dt, \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

et

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta), \chi \rangle + \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (\nabla p_l^\eta - \rho_l(p_l^\eta) \mathbf{g}) \cdot \nabla \chi dx dt \\
& - \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta \cdot \nabla \chi dx dt - \eta \int_{Q_T} X^\eta \rho_l(p_l^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \chi dx dt = \\
& - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \chi dx dt,
\end{aligned} \tag{2.4.14}$$

où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit de dualité entre  $L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')$  et  $L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))$ . D'après (2.1.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta), \varphi \rangle \right| & \leq \eta \left| \int_{Q_T} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla p_c(s_\alpha^\eta) \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \rho_\alpha^2(p_\alpha^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) (M_\alpha(s_\alpha^\eta) \nabla p^\eta + \nabla \mathcal{B}(s_l^\eta)) \cdot \nabla \varphi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \varphi dx dt \right|,
\end{aligned} \tag{2.4.15}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta), \chi \rangle \right| & \leq \left| \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta \cdot \nabla \chi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) \nabla p_l^\eta \cdot \nabla \chi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l^2(p_l^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi dx dt \right| \\
& + \left| \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \chi dx dt \right| \\
& + \eta \left| \int_{Q_T} X^\eta \rho_l(p_l^\eta) \nabla p_c(s_l^\eta) \cdot \nabla \chi dx dt \right|.
\end{aligned} \tag{2.4.16}$$

Des estimations (2.4.2)–(2.4.7), on en déduit les inégalités

$$\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta), \varphi \rangle \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))}, \text{ pour } \alpha = l, g$$

et

$$\left| \langle \Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta), \chi \rangle \right| \leq C \|\chi\|_{L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega))}.$$

Ceci établit (2.4.8)–(2.4.9) et prouve le lemme.  $\square$

**Lemme 2.4.2.** (Résultat de compacité pour le cas dégénéré [44],[48]). Pour tout  $M$ , l'ensemble

$$E_M = \{(\rho_l(p_l)s_l, \rho_g(p_g)s_g) \in L^2(Q_T) \times L^2(Q_T), \text{ tel que}$$

$$\|\mathcal{B}(s_l)\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} \leq M, \quad \|\sqrt{M_l(s_l)}\nabla p_l\|_{L^2(Q_T)} + \|\sqrt{M_g(s_g)}\nabla p_g\|_{L^2(Q_T)} \leq M,$$

$$\|\Phi\partial_t(\rho_l(p_l)s_l)\|_{L^2(0,T;(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')} \leq M, \quad \|\Phi\partial_t(\rho_g(p_g)s_g)\|_{L^2(0,T;(H_{\Gamma_l}^1(\Omega))')} \leq M\} \quad (2.4.17)$$

est relativement compact dans  $L^2(Q_T) \times L^2(Q_T)$  et  $\xi(E_M)$  est relativement compact dans  $L^2(\Sigma_T) \times L^2(\Sigma_T)$  ( $\xi$  désignant l'opérateur de trace sur  $\Sigma_T$ ).

*Démonstration.* La preuve est inspirée du lemme de compacité 4.3 (voir [44], p. 37) et [48] utilisé pour un modèle diphasique compressible dégénéré. En notant

$$u = \rho_l(p_l)s_l \text{ et } v = \rho_g(p_g)(1 - s_l),$$

on définit l'application  $H: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R} \times [0, \mathcal{B}(1)]$  par

$$H(u, v) = (p, \mathcal{B}(s_l)) \quad (2.4.18)$$

où  $u$  et  $v$  sont des solutions du système

$$u(p, \mathcal{B}(s_l)) = \rho_l[p - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))]\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))$$

$$v(p, \mathcal{B}(s_l)) = \rho_g[p - \tilde{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))](1 - \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))).$$

L'application  $H$  est bien définie comme difféomorphisme. En effet, nous pouvons calculer

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \rho'_l(p - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))))\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)) \geq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \mathcal{B}} = \rho'_l(p - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))) \left( -\bar{p}'(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))(\mathcal{B}^{-1}'(\mathcal{B}(s_l))) \right) \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))$$

$$+ \rho_l(p - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))))\mathcal{B}^{-1}'(\mathcal{B}(s_l)) \geq 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = \rho'_g(p - \tilde{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))))(1 - \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))) \geq 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \mathcal{B}} = \rho'_g(p - \tilde{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))) \left( -\tilde{p}'(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))(\mathcal{B}^{-1}'(\mathcal{B}(s_l))) \right) (1 - \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l)))$$

$$- \rho_g(p - \tilde{p}(\mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}(s_l))))\mathcal{B}^{-1}'(\mathcal{B}(s_l)) \leq 0.$$

Si l'une des saturations est nulle, l'autre est égale à un, ce qui prouve que le déterminant du Jacobien de l'application  $H^{-1}$  est strictement négatif.

De plus,  $H^{-1}$  est fonction Höldérienne, dans le sens où  $u$  et  $v$  sont des fonctions Höldériennes d'ordre  $\theta$  avec  $0 < \theta \leq 1$ . Pour cela, soient  $(q_1, \sigma_1)$  et  $(q_2, \sigma_2)$  définis dans  $\mathbb{R}^+ \times [0, \mathcal{B}(1)]$ . Nous avons

$$|u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| = |\rho_l(q_1 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1)))\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \rho_l(q_2 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)))\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)|$$

$$\leq |\rho_l(q_1 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1))) - \rho_l(q_2 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)))|$$

$$+ \rho_M|\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)|.$$

Rappelons que  $\mathcal{B}^{-1}$  est une fonction Höldérienne d'ordre  $\theta$  avec  $0 < \theta \leq 1$  et que l'application  $\rho_l$  est borné et de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous allons distinguer plusieurs cas.

Premier cas  $|q_1 - q_2| \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} |u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| &= |\rho_l(q_1 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1))) - \rho_l(q_2 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)))| \\ &\quad + \rho_M |\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq \rho_M + \rho_M |\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq \rho_M |q_1 - q_2|^\theta + \rho_M C_B |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta. \end{aligned}$$

Dans l'autre cas,  $|q_1 - q_2| \leq 1$ , nous avons

$$\begin{aligned} |u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| &= |\rho_l(q_1 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1))) - \rho_l(q_2 - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)))| \\ &\quad + \rho_M |\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1) - \mathcal{B}^{-1}(\sigma_2)| \\ &\leq C (|q_1 - q_2| + |\bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1)) - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2))|) + \rho_M C_B |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta \\ &\leq C (|q_1 - q_2|^\theta + C |\bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_1)) - \bar{p}(\mathcal{B}^{-1}(\sigma_2))|) + \rho_M C_B |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta. \end{aligned}$$

Comme  $\bar{p}$  est de classe  $\mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , on en déduit que

$$|u(q_1, \sigma_1) - u(q_2, \sigma_2)| \leq C |q_1 - q_2|^\theta + C |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

De manière analogue, on obtient

$$|v(q_1, \sigma_1) - v(q_2, \sigma_2)| \leq C_1 |q_1 - q_2|^\theta + C_1 |\sigma_1 - \sigma_2|^\theta.$$

Pour  $0 < \tau < 1$  et  $1 < r < +\infty$ , notons

$$W^{\tau, r} = \left\{ w \in L^r(\Omega); \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|w\|_{W^{\tau, r}(\Omega)} = \left( \|w\|_{L^r(\Omega)}^r + \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|w(x) - w(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy \right)^{\frac{1}{r}},$$

où  $d$  est la dimension de l'espace. Soient  $q, \sigma$  dans  $W^{\tau, r}(\Omega) \times W^{\tau, r}(\Omega)$ , alors les fonctions höldériennes  $u$  et  $v$  appartiennent à  $W^{\theta\tau, r/\theta}(\Omega)$ . En effet

$$|u(q, \sigma)| \leq c_1 |q|^\theta + c_2 |\sigma|^\theta,$$

donc  $u$  appartient à  $L^{r/\theta}(\Omega)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(q(x), \sigma(x)) - u(q(y), \sigma(y))|^{r/\theta}}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy &\leq c_1^{r/\theta} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|q(x) - q(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy \\ &\quad + c_2^{r/\theta} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\sigma(x) - \sigma(y)|^r}{|x - y|^{d+\tau r}} dx dy \end{aligned}$$



ce qui implique,

$$\|u(q, \sigma)\|_{W^{\theta\tau, r/\theta}(\Omega)} \leq c \left( \|q\|_{W^{\tau, r}(\Omega)}^\theta + \|\sigma\|_{W^{\tau, r}(\Omega)}^\theta \right).$$

En utilisant l'injection compacte de  $H^1(\Omega)$  dans  $W^{\tau, 2}(\Omega)$  avec  $\tau < 1$ , nous avons

$$\|u(p, \mathcal{B}(s_l))\|_{W^{\theta\tau, 2/\theta}(\Omega)} \leq c \left( \|p\|_{W^{\tau, 2}(\Omega)}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{W^{\tau, 2}(\Omega)}^\theta \right) \leq c \left( \|p\|_{H^1(\Omega)}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{H^1(\Omega)}^\theta \right),$$

puis en intégrant cette inégalité sur  $(0, T)$ , nous obtenons

$$\|u(p, \mathcal{B}(s_l))\|_{L^{2/\theta}(0, T; W^{\theta\tau, 2/\theta}(\Omega))} \leq c \left( \|p\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^\theta + \|\mathcal{B}(s_l)\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^\theta \right).$$

Par ailleurs, la porosité  $\Phi$  appartient dans  $W^{1, \infty}(\Omega)$  donc

$$\|\Phi u(p, \mathcal{B}(s_l))\|_{L^{2/\theta}(0, T; W^{\theta\tau, 2/\theta}(\Omega))} \leq C.$$

Comme  $\Omega$  est borné et régulier, pour  $\tau' < \theta\tau$ , nous avons  $W^{\theta\tau, 2/\theta}(\Omega) \subset W^{\tau', 2/\theta}(\Omega) \subset (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'$  avec injection compacte de  $W^{\theta\tau, 2/\theta}(\Omega)$  dans  $W^{\tau', 2/\theta}(\Omega)$ .

Finalement, on obtient que  $E_M$  est relativement compact dans  $L^{2/\theta}(0, T; W^{\tau', 2/\theta}(\Omega)) \subset L^2(0, T; L^2(\Omega))$ .

D'autre part, la trace  $\xi$  est une application continue de  $W^{\tau', 2/\theta}(\Omega)$  dans  $W^{\tau' - \theta/2, 2/\theta}(\Gamma_l)$  dès que  $\tau' > \theta/2$  (prendre par exemple  $\tau' = \frac{3\theta}{4}$ ), on en déduit que  $\xi(E_M)$  est relativement compact dans  $L^2(\Sigma_T) \times L^2(\Sigma_T)$  prouvant ainsi le lemme de compacité 2.4.2.  $\square$

Des deux lemmes précédents, on en déduit les convergences énoncées dans le lemme qui suit.

**Lemme 2.4.3.** *Pour des sous suites, les suites  $(s_\alpha^\eta)_\eta$ ,  $(p^\eta)_\eta$  et  $(p_\alpha^\eta)_\eta$  vérifient les convergences suivantes*

$$p^\eta \longrightarrow p \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.4.19)$$

$$\mathcal{B}(s_l^\eta) \longrightarrow \mathcal{B}(s_l) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad (2.4.20)$$

$$X^\eta \longrightarrow X \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)), \quad (2.4.21)$$

$$p^\eta \longrightarrow p \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.4.22)$$

$$s_l^\eta \longrightarrow s_l \quad \text{presque partout dans } Q_T \text{ et } \Sigma_T, \quad (2.4.23)$$

$$s_l^\eta \longrightarrow s_l \quad \text{fortement dans } L^2(Q_T) \text{ et } L^2(\Sigma), \quad (2.4.24)$$

$$0 \leq s_\alpha(t, x) \leq 1 \quad \text{presque partout dans } (t, x) \in Q_T, \quad (2.4.25)$$

$$0 \leq X \leq X_{\text{eq}} \quad \text{presque partout dans } (t, x) \in Q_T, \quad (2.4.26)$$

$$p_\alpha^\eta \longrightarrow p_\alpha \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.4.27)$$

$$X^\eta \longrightarrow X \quad \text{presque partout dans } Q_T, \quad (2.4.28)$$

$$\Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta) \longrightarrow \Phi \partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'), \quad (2.4.29)$$

$$\Phi \partial_t(\rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X) \longrightarrow \Phi \partial_t(\rho_l(p_l) s_l X) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; (H_{\Gamma_l}^1(\Omega))'). \quad (2.4.30)$$

*Démonstration.* Les convergences faibles (2.4.19)-(2.4.21) résultent des estimations uniformes (2.4.3), (2.4.6) et (2.4.7) du lemme 2.4.1.

Le lemme 2.4.2 assure les convergences fortes suivantes

$$\begin{aligned}\rho_\alpha(p_\alpha^\eta)s_\alpha^\eta &\longrightarrow l_\alpha && \text{dans } L^2(Q_T) \text{ and p.p. dans } Q_T, \\ \rho_\alpha(p_\alpha^\eta)s_\alpha^\eta &\longrightarrow l_\alpha && \text{dans } L^2(\Sigma_T) \text{ et p.p. dans } \Sigma_T.\end{aligned}$$

Comme l'application  $H$  définie dans (2.4.18) est continue, on en déduit que

$$\begin{aligned}p^\eta &\longrightarrow p && \text{p.p. dans } Q_T \text{ et p.p. dans } \Sigma_T, \\ \mathcal{B}(s_l^\eta) &\longrightarrow \mathcal{B}^* && \text{p.p. dans } Q_T \text{ et p.p. dans } \Sigma_T.\end{aligned}$$

Donc l'estimation (2.4.22) est établie et comme  $\mathcal{B}^{-1}$  est continue

$$s_l^\eta \longrightarrow s_l = \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}^*) \quad \text{p.p. dans } Q_T \text{ et p.p. dans } \Sigma_T.$$

Et par conséquent, on obtient les convergences presque partout suivantes

$$p_\alpha^\eta \longrightarrow p_\alpha \quad \text{p.p. dans } Q_T \text{ et p.p. dans } \Sigma_T.$$

L'estimation (2.4.25) est une conséquence de (2.4.1).

De (2.4.27), on a

$$\rho_l(p_l^\eta) \longrightarrow \rho_l(p_l) \text{ presque partout dans } Q_T$$

et d'après le théorème de Lebesgue, on en déduit que

$$\rho_l(p_l^\eta) \longrightarrow \rho_l(p_l) \text{ fortement dans } L^2(Q_T)$$

et de (2.4.21), on obtient

$$\rho_l(p_l^\eta)X^\eta \longrightarrow \rho_l(p_l)X \text{ fortement dans } L^1(Q_T).$$

Remarquons également que  $X^\eta = \frac{\rho_l(p_l^\eta)X^\eta}{\rho_l(p_l^\eta)}$  donc nous avons

$$X^\eta \longrightarrow X \text{ fortement dans } L^1(0, T; L^1(\Omega)),$$

prouvant la convergence (2.4.28). L'identification de la limite est due à (2.4.21) et le principe du maximum (2.4.26) est alors prouvé.

Enfin, les convergences faibles (2.4.29) et (2.4.30) sont des conséquence de l'estimation (2.4.8) et (2.4.9) et l'identification de la limite est due aux convergences précédentes.  $\square$

## 2.4.2 Preuve du résultat principal

Afin de finir la preuve du théorème 2.1.1, il reste à passer à la limite quand  $\eta$  tend vers zéro dans les formulations (2.3.5)–(2.3.7) pour tout  $\varphi, \psi$  et  $\chi$  appartenant à  $\mathcal{C}^1([0, T]; H_{\Gamma_l}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$  avec  $\varphi(T, \cdot) = \psi(T, \cdot) = \chi(T, \cdot) = 0$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta \partial_t \varphi \, dxdt + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) \nabla p_l^\eta \cdot \nabla \varphi \, dxdt \\ & - \int_{Q_T} \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l^2(p_l^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, dxdt - \eta \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \varphi \, dxdt \quad (2.4.31) \\ & = - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \varphi \, dxdt + \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l^0) s_l^0 \varphi(0, x) \, dxdt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_g(p_g^\eta) s_g^\eta \partial_t \psi \, dxdt + \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_g^\eta) \rho_g(p_g^\eta) \nabla p_g^\eta \cdot \nabla \psi \, dxdt \\ & - \int_{Q_T} \mathbf{K} M_g(s_l^\eta) \rho_g^2(p_g^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \psi \, dxdt - \eta \int_{Q_T} \rho_g(p_g^\eta) \nabla(p_l^\eta - p_g^\eta) \cdot \nabla \psi \, dxdt \quad (2.4.32) \\ & = \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \psi \, dxdt + \int_{Q_T} \Phi \rho_g(p_g^0) s_g^0 \psi(0, x) \, dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l^\eta) s_l^\eta X^\eta \partial_t \varphi \, dxdt + \int_{Q_T} \rho_l(p_l^\eta) D_l^h \nabla X^\eta \cdot \nabla \chi \, dxdt \\ & = - \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) \nabla p_l^\eta \cdot \nabla \chi \, dxdt + \int_{Q_T} X^\eta \mathbf{K} M_l(s_l^\eta) \rho_l^2(p_l^\eta) \mathbf{g} \cdot \nabla \chi \, dxdt \quad (2.4.33) \\ & - \int_{Q_T} \Gamma(s_l^\eta) \rho_l(p_l^\eta) (X^\eta - X_{\text{eq}}) \chi \, dxdt + \eta \int_{Q_T} X^\eta \rho_l(p_l^\eta) \nabla(p_g^\eta - p_l^\eta) \cdot \nabla \chi \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} \Phi \rho_l(p_l^0) s_l^0 X^0 \varphi(0, x) \, dxdt. \end{aligned}$$

Les premiers termes convergent d'après la convergence de  $\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta$  vers  $\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha$  dans  $L^2(Q_T)$  et la convergence forte de  $\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) s_\alpha^\eta X^\eta$  vers  $\rho_\alpha(p_\alpha) s_\alpha X$  dans  $L^2(Q_T)$ .

Les deuxièmes termes de (2.4.31) et (2.4.32) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla p_\alpha^\eta \cdot \nabla \varphi \, dxdt & = \int_{Q_T} \mathbf{K} M_\alpha(s_\alpha^\eta) \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla p^\eta \cdot \nabla \varphi \, dxdt \\ & + \int_{Q_T} \mathbf{K} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta) \nabla \mathcal{B}(s_\alpha^\eta) \cdot \nabla \varphi \, dxdt. \quad (2.4.34) \end{aligned}$$

Les deux termes du membre droite de l'équation (2.4.34) convergent en deux étapes. Premièrement, la théorie de convergence dominée de Lebesgue et les convergences (2.4.23), (2.4.27) prouvent que

$$\rho_\alpha(p_\alpha^\eta) M_\alpha(s_\alpha^\eta) \nabla \varphi \longrightarrow \rho_\alpha(p_\alpha) M_\alpha(s_\alpha) \nabla \varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d,$$

et

$$\rho_\alpha(p_\alpha^\eta)\nabla\varphi \longrightarrow \rho_\alpha(p_\alpha)\nabla\varphi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

Deuxièmement, la convergence faible sur la pression globale (2.4.19) combinée avec la convergence forte précédente montre la convergence pour le premier terme du membre de droite de (2.4.34) et la convergence faible (2.4.20) combiné avec la convergence forte précédente montre la convergence pour le second terme du membre de droite (2.4.34) ce qui prouve le passage à la limite sur les seconds termes de (2.4.31) et (2.4.32).

Pour le deuxième terme de (2.4.33), on déduit du théorème de Lebesgue et des convergences (2.4.23), (2.4.27), que

$$\rho_l(p_l^\eta)D_l^h(s_l^\eta)\nabla\chi \longrightarrow \rho_l(p_l)D_l^h(s_l)\nabla\chi \text{ fortement dans } (L^2(Q_T))^d.$$

La convergence faible sur la concentration (2.4.21) combinée avec la convergence forte précédente prouve la convergence du deuxième terme de (2.4.33).

Le quatrième terme de (2.4.31) et (2.4.32) peut s'écrire comme

$$\eta \int_{Q_T} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta)\nabla(p_g^\eta - p_l^\eta)\nabla\varphi \, dxdt = \sqrt{\eta} \int_{Q_T} \rho_\alpha(p_\alpha^\eta)(\sqrt{\eta}\nabla p_c(s_l^\eta))\nabla\varphi \, dxdt.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation uniforme (2.4.4) assurent la convergence de ce terme vers zéro.

Les autres termes convergent en utilisant le théorème de convergence dominé de Lebesgue et les convergences (2.4.23), (2.4.27) et (2.4.28).

Les formulations faibles (2.1.6)-(2.1.8) sont alors établies et le théorème principale 2.1.1 est alors prouvé.



## Deuxième partie

Simulation numérique d'écoulement  
diphase bicomposant en milieu  
poreux et étude de la convergence  
d'un schéma de type volumes finis



# Chapitre 3

## Schémas numériques pour les modèles HELMOD et DYNMOD

Nous avons proposé et décrit dans la section B deux modèles physiques (appelés modèle HELMOD et modèle DYNMOD) pour traiter les problèmes d'écoulement diphasiques liquide/gaz en milieu poreux. L'objectif de ce chapitre est de proposer deux schémas numériques pour le modèle HELMOD et de comparer numériquement ces deux schémas. Le premier schéma numérique sera basé sur une discrétisation directe des termes différentiels du modèle HELMOD tandis que le deuxième schéma numérique sera basé sur le modèle DYNMOD où on fera tendre (formellement) le temps de retour à l'équilibre thermodynamique entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux.

Les schémas numériques décrits dans la suite restent des schémas simplifiés pour traiter les problèmes d'écoulement diphasiques en milieu poreux. En particulier, ils ne prennent pas en compte les effets convectifs et sont donc limités à des problèmes à diffusion dominante. Néanmoins, ils permettent de voir si ces deux schémas *recupèrent* les mêmes solutions numériques.

Puisque le temps caractéristique de retour à l'équilibre thermodynamique est voué à tendre vers zéro dans le modèle DYNMOD, nous supposons que que  $X_{\text{eq}}$  est une fonction d'inconnues de telle sorte que

$$X_l^h = X_{\text{eq}} \Leftrightarrow (1 - s_l)(M^h H(T)(p_l + p_c(s_l)) - \rho_l^h) = 0 \quad (\text{loi de Henry (B.6.23)})$$

Dans la suite, nous présentons tout d'abord le formalisme mathématique pour les deux modèles, formalisme qui nous sera ensuite utile pour décrire le schéma numérique. Pour le modèle HELMOD, nous choisissons une discrétisation en temps de type Euler implicite et une discrétisation de type différences finis pour les termes différentiels d'espace. Nous choisissons alors le même schéma numérique pour les termes différentiels du modèle DYNMOD. Comme le temps caractéristique de retour à l'équilibre thermodynamique dans le modèle DYNMOD est voué à tendre vers zéro, plutôt que d'intégrer une EDO raide, nous optons pour une méthode de splitting en temps consistant à intégrer d'abord le système sans transfert de masse puis à projeter la solution ainsi obtenue sur la variété dite équilibre définie par la loi de Henry.



Des résultats numériques dont un issu des cas tests MOMAS diphasiques sont ensuite présentés dans une seconde partie avec comparaison des solutions obtenus à l'aide des deux schémas numériques.

### 3.1 Formalisme

Le but de cette section est d'écrire les modèles HELMOD et DYNMOD sous forme matricielle en fonction des inconnues choisies.

#### 3.1.1 Modèle mathématique pour HELMOD

Le modèle HELMOD est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui peut s'écrire, en choisissant la saturation liquide et la pression liquide comme inconnues, sous la forme matricielle suivante

$$M(s_l, p_l) \partial_t \begin{bmatrix} s_l \\ p_l \end{bmatrix} - \operatorname{div} \left( A(s_l, p_l) \begin{bmatrix} \nabla s_l \\ \nabla p_l \end{bmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1.1)$$

où la matrice  $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est définie par

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \Phi \rho_l^w, & M_{1,2} &= 0, \\ M_{2,1} &= \Phi(1-a)M^h H(T)(p_l + p_c) + m(s_l)M^h H(T)p_c', & M_{2,2} &= \Phi m(s_l)M^h H(T), \end{aligned}$$

et la matrice  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est définie par

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= -X_l^w M^h H(T) D_l^h p_c', & A_{1,2} &= K M_l \rho_l^w - X_l^w M^h H(T) D_l^h, \\ A_{2,1} &= K M_g \frac{M^h}{RT} (p_l + p_c) p_c' + M^h H(T) X_l^w D_l^h p_c', & A_{2,2} &= K M^h (p_l + p_c) \left( M_l H(T) + \frac{K M_g}{RT} \right) \\ & & &+ M^h H(T) X_l^w D_l^h. \end{aligned}$$

avec  $a = 1/(H(T)RT)$ ,  $m = s_l + a(1 - s_l)$ .

#### 3.1.2 Modèle mathématique pour DYNMOD

Comme dans 3.1.1, le modèle DYNMOD est un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires qui peut s'écrire, en choisissant la saturation liquide, la pression de liquide et la densité d'hydrogène dissous comme inconnues, sous la forme matricielle suivante

$$M(s_l, p_l, \rho_l^h) \partial_t \begin{pmatrix} s_l \\ p_l \\ \rho_l^h \end{pmatrix} - \operatorname{div} \left( A(s_l, p_l, \rho_l^h) \begin{pmatrix} \nabla s_l \\ \nabla p_l \\ \nabla \rho_l^h \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \rho_l (X_l^h - X_{\text{eq}}) \\ -\Gamma \rho_l (X_l^h - X_{\text{eq}}) \end{pmatrix} \quad (3.1.2)$$

où la matrice  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est définie par

$$\begin{aligned} M_{1,1} &= \Phi \rho_l^w, & M_{1,2} &= 0, & M_{1,3} &= 0, \\ M_{2,1} &= \Phi \frac{M^h}{RT} \left( -(p_c + p_l) + (1 - s_l) p_c' \right), & M_{2,2} &= \Phi \frac{M^h}{RT} (1 - s_l), & M_{2,3} &= 0, \\ M_{3,1} &= \Phi \rho_l^h, & M_{3,2} &= 0, & M_{3,3} &= \Phi s_l. \end{aligned}$$

et la matrice  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est définie par

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= 0, & A_{1,2} &= K M_l \rho_l^w, & A_{1,3} &= -X_l^w D_l^h \\ A_{2,1} &= K M_g \frac{M^h}{RT} (p_c + p_l) p_c', & A_{2,2} &= K M_g \frac{M^h}{RT} (p_c + p_l), & A_{2,3} &= 0, \\ A_{3,1} &= 0, & A_{3,2} &= K M_l \rho_l^h, & A_{3,3} &= X_l^w D_l^h. \end{aligned}$$

## 3.2 Schémas numériques

De manière générale, les deux systèmes s'écrivent sous la forme

$$M(U) \partial_t U - \operatorname{div}(A(U) \nabla U) = F(U), \quad (3.2.1)$$

où  $U$  a deux composantes dans le cas du modèle HELMOD et trois composantes dans le cas du modèle DYNMOD. Ainsi, la structure informatique reste la même pour les deux modèles, seul change les coefficients des matrices  $M$  et  $A$ . Un autre intérêt est aussi de pouvoir passer d'un jeu de variable à un autre très facilement.

Soient  $T > 0$  un temps final et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N$ , notre problème revient à décrire un schéma numérique pour le problème suivant

$$\begin{cases} M(U) \partial_t U - \operatorname{div}(A(U) \nabla U) = F(U) & \text{sur } ]0, T] \times \Omega, \\ U(0, x) = U^0 & \text{sur } \Omega, \\ U = U^D & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma^D, \\ \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n} = \Phi_k & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma^N. \end{cases} \quad (3.2.2)$$

où  $k \in \mathcal{K} = \{1, 2\}$  pour le modèle HELMOD et  $k \in \mathcal{K} = \{1, 2, 3\}$  pour le modèle DYNMOD avec

$$\mathbf{F}_k = \sum_{m \in \mathcal{K}} A_{k,m}(U) \nabla U_m. \quad (3.2.3)$$

### 3.2.1 Discrétisation en espace et en temps

Nous décrivons dans cette section la discrétisation en espace et en temps du problème (3.2.2) à l'aide d'un schéma aux différences finies. Ce schéma servira pour la discrétisation 1D des termes différentiels des deux modèles.

Considérons un pas d'espace  $\Delta x > 0$  et un pas de temps  $\Delta t > 0$ . Le maillage en espace et en temps est alors donné par

$$(t^n, x_i) = (n\Delta t, i\Delta x) \text{ pour } n \geq 0, i \in \mathbb{Z}.$$

On note  $U_i^n$  la valeur de la solution discrète approchée au point  $(t^n, x_i)$ . On approche le terme de diffusion  $\text{div}(A(U)\nabla U) (= \partial_x(A(U)\partial_x U))$  en dimension un par

$$-\text{div}(A(U)\nabla U) \sim \frac{A_{i+\frac{1}{2}}^n (\partial_x U)_{i+\frac{1}{2}}^n - A_{i-\frac{1}{2}}^n (\partial_x U)_{i-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x},$$

où  $A_{i+\frac{1}{2}}^n$ ,  $A_{i-\frac{1}{2}}^n$ ,  $(\partial_x U)_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $(\partial_x U)_{i-\frac{1}{2}}^n$  sont approchées par

$$\begin{aligned} A_{i+\frac{1}{2}}^n &\sim \frac{A_{i+1}^n + A_i^n}{2}, & A_{i-\frac{1}{2}}^n &\sim \frac{A_i^n + A_{i-1}^n}{2}, \\ (\partial_x U)_{i+\frac{1}{2}}^n &\sim \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{\Delta x}, & (\partial_x U)_{i-\frac{1}{2}}^n &\sim \frac{U_i^n - U_{i-1}^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

En notant  $\mathcal{U}$  le vecteur inconnu discret ( $2 \times$  nombre d'éléments du maillage pour le modèle HELMOD et  $3 \times$  nombre d'éléments du maillage pour le modèle DYNMOD, le système (3.2.2) sans terme source, s'écrit après discrétisation en espace

$$\mathcal{M}(\mathcal{U})\partial_t \mathcal{U} - \mathcal{A}(\mathcal{U})\mathcal{U} = 0. \quad (3.2.4)$$

Nous choisissons ensuite un schéma d'Euler implicite pour la discrétisation temporelle

$$\mathcal{M}(\mathcal{U}^{n+1}) \frac{\mathcal{U}^{n+1} - \mathcal{U}^n}{\Delta t} - \mathcal{A}(\mathcal{U}^{n+1})\mathcal{U}^{n+1} = 0. \quad (3.2.5)$$

Pour résoudre le système non linéaire (3.2.5) d'inconnue  $\mathcal{U}^{n+1}$ , nous utilisons une méthode de point fixe avec une résolution globale du système linéaire. L'algorithme revient donc à chercher  $\mathcal{U}_{k+1}^{n+1}$  solution du système linéaire

$$\mathcal{M}(\mathcal{U}_k^{n+1}) \frac{\mathcal{U}_{k+1}^{n+1} - \mathcal{U}_k^{n+1}}{\Delta t} - \mathcal{A}(\mathcal{U}_k^{n+1})\mathcal{U}_{k+1}^{n+1} = 0 \quad (3.2.6)$$

En ce qui concerne le critère d'arrêt, nous décidons d'avoir convergence lorsque, pour deux itérés successifs dans le point fixe, nous avons

$$\frac{\|\mathcal{U}_{k+1}^{n+1} - \mathcal{U}_k^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|\mathcal{U}_k^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}} < \epsilon,$$

pour  $\epsilon > 0$  suffisamment petit et où  $\Omega$  représente le domaine de l'étude.

### 3.2.2 Étape de projection pour le modèle DYNMOD

Cette section décrit l'étape de projection (étape suivante à l'intégration des termes différentielles) du modèle DYNMOD.

L'intégration de (3.1.2) sans termes de transfert de masse via la méthode décrite dans la section (3.2.1) donne à partir d'un état  $U_i^n = ((s_l)_i^n, (p_l)_i^n, (\rho_l^h)_i^n)$  un état intermédiaire  $U_i^* = ((s_l)_i^*, (p_l)_i^*, (\rho_l^h)_i^*)$ . Formellement, nous faisons tendre  $\Gamma$  vers  $+\infty$ , ce qui revient à chercher  $U_i^{n+1}$  solution de  $\{X^h = X_{\text{eq}}\}$ . Remarquons que si  $\Gamma$  est fini, nous avons les conservations de la masse

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_l^w s_l) = 0 \\ \partial_t(\rho_g^h s_g + \rho_l^h s_l) = \partial_t \rho^h = 0 \end{cases}$$

quantités que l'on veut garder au niveau discret. Puisque  $\rho_l^w$  est constante, la première équation nous donne immédiatement que  $(s_l)_i^{n+1} = s_l^*$ . La deuxième impose

$$(\rho_g^h s_g)_i^{n+1} + (\rho_l^h s_l)_i^{n+1} = (\rho_g^h s_g)_i^* + (\rho_l^h s_l)_i^* = (\rho^h)_i^*, \quad (3.2.7)$$

où  $(\rho_g^h s_g)_i^*$  et  $(\rho_l^h s_l)_i^*$  sont calculés à partir de  $(s_l)_i^*$ ,  $(p_l)_i^*$  et  $(\rho_l^h)_i^*$  grâce aux relations de fermeture.

Maintenant de la loi Henry qui relie  $s_l$ ,  $p_l$  et  $\rho_l^h$

$$(1 - s_l) (M^h H(T)(p_l + p_c(s_l)) - \rho_l^h) = 0, \quad (3.2.8)$$

on en déduit donc la relation

$$(s_g)_i^* (\rho_l^h s_l)_i^* = (s_l)_i^* RTH(T) (\rho_g^h s_g)_i^*,$$

ce qui nous donne en utilisant (3.2.7), l'égalité

$$(\rho_g^h s_g)_i^{n+1} = \frac{(s_g)_i^* (\rho^h)_i^*}{(s_g)_i^* + (s_l)_i^* RTH(T)}.$$

Ensuite, à partir de  $(\rho_g^h s_g)_i^{n+1}$  on en déduit toutes les autres quantités à l'instant  $n + 1$  à l'aide des relations de fermeture et de (3.2.7).

## 3.3 Résultats numériques

On présente dans cette section les résultats numériques obtenus à l'aide des deux schémas numériques par comparaison des solutions numériques obtenues dans un premier cas test et par résolution d'un cas test proposé par F. Smaï [68] lors du benchmark "Ecoulement diphasique" dans le cadre du GNR MOMAS [61].

La géométrie, commune pour tous les tests numériques, consiste en un domaine  $\Omega = [0, 1]$  scindé en deux sous domaines  $\Omega_1 = [0, \frac{1}{2}]$  et  $\Omega_2 = [\frac{1}{2}, 1]$ . La frontière du domaine  $\Omega$  est composée de deux parties :  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Enfin, nous choisissons les lois de Van Genuchten-Mualem pour les perméabilités relatives et la pression capillaire dans tous les cas tests qui suivent

$$\left\{ \begin{array}{l} p_c = P_r (s_{l_e}^{-1/m} - 1)^{1/n}, \\ k_{r_l} = \sqrt{s_{l_e}} \left( 1 - (1 - s_{l_e}^{1/m})^m \right)^2, \\ k_{r_g} = \sqrt{1 - s_{l_e}} \left( 1 - s_{l_e}^{1/m} \right)^{2m}, \\ \text{où } s_{l_e} = \frac{s_l - s_{l_r}}{1 - s_{l_r} - s_{g_r}} \text{ et } m = 1 - \frac{1}{n}, \end{array} \right. \quad (3.3.1)$$

où  $P_r$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $s_{l_r}$  et  $s_{g_r}$  sont des paramètres du milieu. On considère de plus que le milieu poreux est isotrope, de sorte que le tenseur de perméabilité absolue est de la forme  $\mathbf{K} = k\mathbb{I}_d$ , avec  $k$  scalaire et que le milieu poreux est homogène sur chaque sous domaine  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

### 3.3.1 Comparaison des solutions numériques obtenues à l'aide des deux schémas numériques

L'objectif de cette section est de comparer les solutions numériques obtenues des deux schémas numériques proposés dans la section 3.2.

On considère pour cela un milieu poreux homogène dont les paramètres physiques sont donnés dans le tableau 3.1.

Caractéristiques du milieu poreux		Caractéristiques des fluides	
Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$k$ [m <sup>2</sup> ]	$10^{-16}$	$D_l^h$ [m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ]	$1.57 \times 10^{-14}$
$\Phi$ [-]	0.3	$\mu_l$ [Pa · s]	$10^{-3}$
$p_r$ [Pa]	$2 \times 10^6$	$\mu_g$ [Pa · s]	$9 \times 10^{-6}$
$n$ [-]	1.54	$H$ [mol · Pa <sup>-1</sup> · m <sup>-3</sup> ]	$7.65 \times 10^{-6}$
$s_{l_r}$ [-]	0.01	$M^h$ [kg · mol <sup>-1</sup> ]	$2 \times 10^{-3}$
$s_{g_r}$ [-]	0	$\rho_l^w$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	$10^3$

TAB. 3.1: Valeurs des différents paramètres physiques utilisés.

Les conditions aux limites sont définies par des conditions du type Dirichlet sur la frontière du domaine

$$\begin{aligned} p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 150 \times 10^6 \text{ Pa sur } \Gamma_1, \\ p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 250 \times 10^6 \text{ Pa sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Les conditions initiales sur la pression liquide et la pression de gaz sont données par

$$\begin{aligned} p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 150 \times 10^6 \text{ Pa dans } \Omega_1, \\ p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 250 \times 10^6 \text{ Pa dans } \Omega_2. \end{aligned}$$

Pour le modèle DYNMOD, la concentration d'hydrogène dissous initiale (comme sur les bords  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ ) est calculée à l'aide des pressions à l'instant initial et sur les bords  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  et la loi de Henry.

## Résultats

La simulation a été effectuée sur une durée allant de  $t = 0$  an à  $t = T_{\text{final}} = 1$  an. Le pas de temps a quant à lui été fixé à  $10^{-2}$  an. Nous avons fixé le pas d'espace à  $10^{-2}$  m. La figure 3.1 représente respectivement la pression de liquide (à gauche) et la densité d'hydrogène dissous (à droite) obtenues à l'aide des deux modèles HELMOD et DYNMOD.

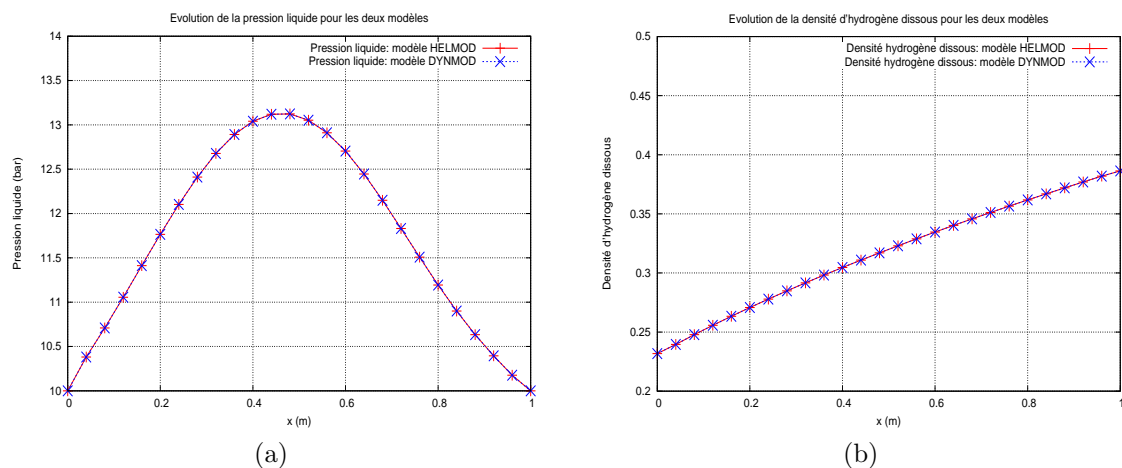


FIG. 3.1: Représentations de la pression liquide (a) et de la densité d'hydrogène dissous (b) obtenues pour les deux modèles HELMOD et DYNMOD

Au vu de la figure 3.1, la pression liquide et la densité d'hydrogène dissous obtenues à l'aide du schéma numérique basé sur le modèle DYNMOD lorsque le temps de retour à l'équilibre thermodynamique tend vers zéro est analogue à la solution numérique obtenue à l'aide du schéma numérique basé sur le modèle HELMOD.

### 3.3.2 Écoulement diphasique avec conditions initiales hors équilibre

On présente dans cette section un cas test proposé par F. Smaï [67] lors du benchmark "Écoulement diphasique", dans le cadre du GNR MOMAS [61]. Celui-ci a pour objectif de simuler un écoulement diphasique en milieu poreux avec des conditions initiales hors équilibre.

On considère un milieu poreux homogène “isolé”, c’est à dire avec des conditions de flux nul sur toute la frontière du domaine. Ensuite en partant des conditions initiales hors équilibre, on laisse évoluer le système. Du fait de l’équilibre mécanique local du milieu poreux, les pressions du liquide et du gaz doivent être continues. Pour un système partant de conditions initiales hors équilibre (ne respectant pas la continuité des pressions), le système doit évoluer vers un équilibre des pressions et on s’intéresse ici au retour vers cet équilibre mécanique.

Nous imposons initialement une pression liquide constante dans tout le domaine tandis que la pression de gaz est supposée discontinue entre les deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . Le tableau 3.2 décrit les données physiques utilisées pour ce cas test.

Caractéristiques du milieux poreux		Caractéristiques des fluides	
Paramètre	Valeur	Paramètre	Valeur
$k$ [m <sup>2</sup> ]	$10^{-18}$	$D_l^h$ [m <sup>2</sup> · s <sup>-1</sup> ]	$3 \times 10^{-9}$
$\Phi$ [-]	0.15	$\mu_l$ [Pa · s]	$10^{-3}$
$p_r$ [Pa]	$2 \times 10^6$	$\mu_g$ [Pa · s]	$9 \times 10^{-6}$
$n$ [-]	1.49	$H$ [mol · Pa <sup>-1</sup> · m <sup>-3</sup> ]	$7.65 \times 10^{-6}$
$s_{l_r}$ [-]	0.4	$M^h$ [kg · mol <sup>-1</sup> ]	$2 \times 10^{-3}$
$s_{g_r}$ [-]	0	$\rho_l^w$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	$10^3$

TAB. 3.2: Données physiques du cas test MOMAS conditions initiales hors équilibre.

Les conditions aux limites sont de type flux nul sur la frontière  $\partial\Omega$

$$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \Gamma_2,$$

et les conditions initiales sont données par

$$\begin{aligned} p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 1.5 \times 10^6 \text{ Pa dans } \Omega_1, \\ p_l &= 10^6 \text{ Pa et } p_g = 2.5 \times 10^6 \text{ Pa dans } \Omega_2. \end{aligned}$$

## Résultats

La simulation a été effectuée sur une durée allant de  $t = 0$  s à  $T_{final} = 10^6$  ss. Le pas d’espace a été pris constant égal à  $2 \times 10^{-3}$  m. Le pas de temps varie de 0.17 s à 833 s en fin de simulation. Les figures 3.2, 3.3 et 3.4 représentent à différents instants la pression liquide, la densité d’hydrogène dissous et la saturation liquide.

De 0 s à  $10^5$  s, la pression pression liquide croît très rapidement jusqu’à  $1.7 \times 10^5$  Pa et la densité d’hydrogène dissous tend vers un état stationnaire.

De  $10^5$  s à  $10^6$  s, on observe que la densité d’hydrogène dissous reste constante et que la pression liquide évolue vers un état stationnaire.

Par conséquent, on observe une évolution d’un système initialement en déséquilibre (ne respectant pas la continuité de la pression de gaz) vers un état stationnaire.

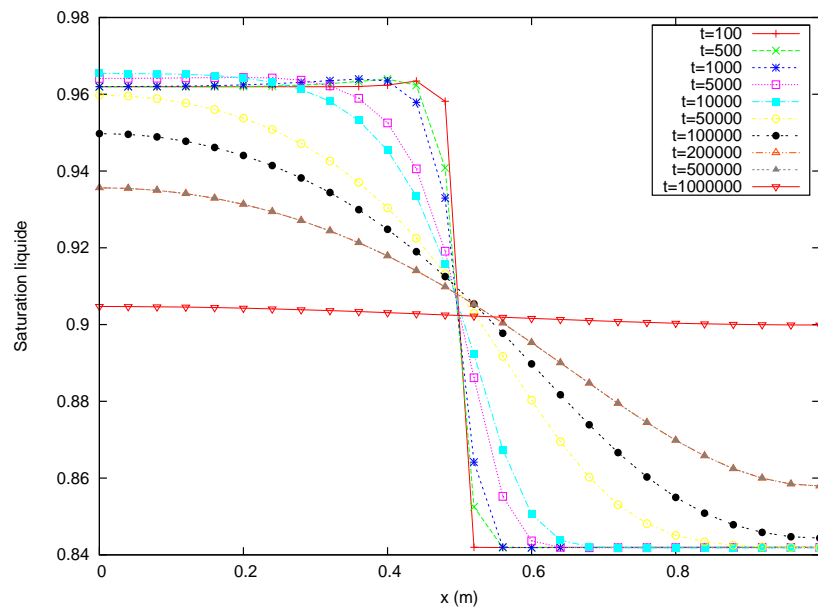


FIG. 3.2: Profils de la saturation liquide pour le cas test MOMAS condition initiale hors équilibre

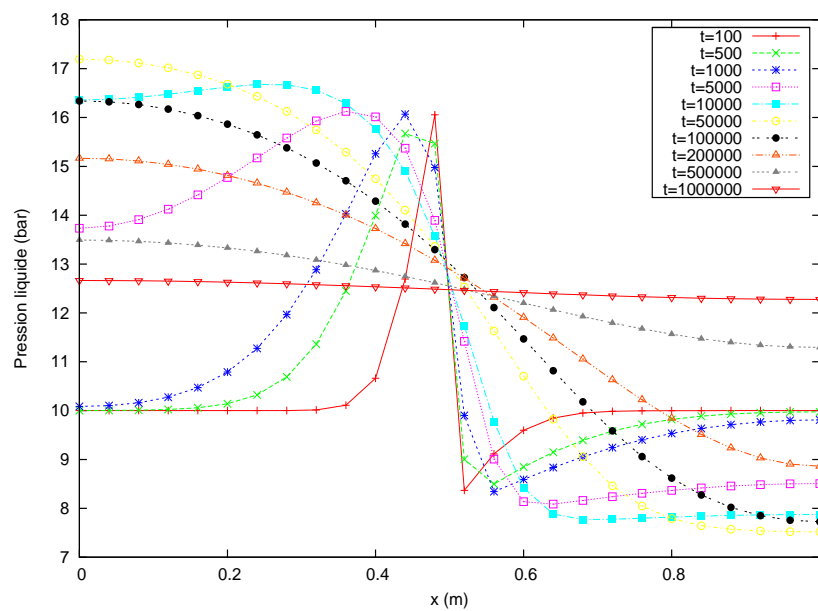


FIG. 3.3: Profils de la pression liquide pour le cas test MOMAS condition initiale hors équilibre



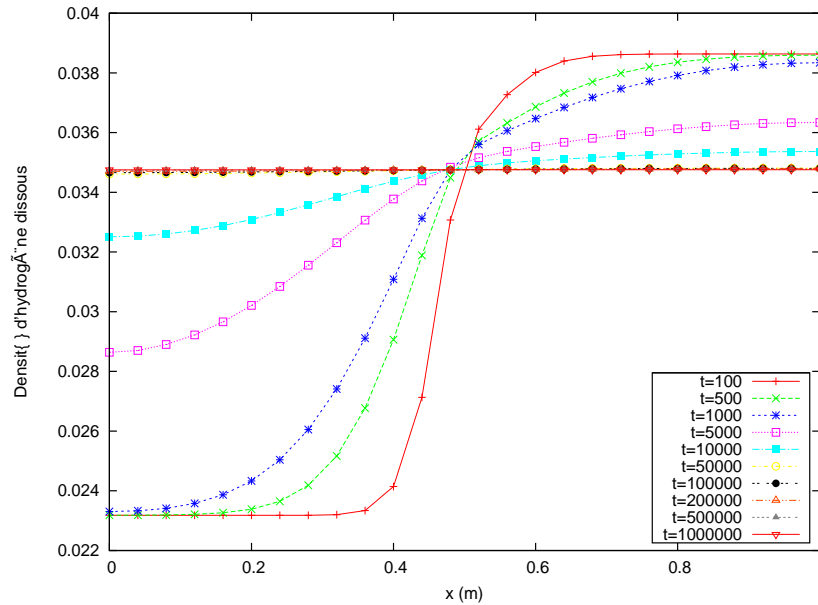


FIG. 3.4: Profils de la densité d'hydrogène dissous pour le cas test MOMAS condition initiale hors équilibre

## Comparaisons des résultats

Cette étude est proposée dans le cadre du benchmark "Ecoulement diphasique" dans le cadre du GNR MOMAS [61]. Cette étude a été réalisée par 7 autres équipes utilisant différents codes

1. MPCube au CEA par F. Caro (CEA1)
2. Code IRSN en développement par F. Smaï (IRSN1)
3. Migastra à l'IRSN par M. Dymitrowska (IRSN2)
4. Aster à EDF par S. Granet (EDF)
5. M++ (Meshes, Multigrid) par T. Müller et E. Marchand de l'université d'Erlangen-Nuremberg (Erlangen)
6. DUNE avec le module de discrétisation dune-pdelab par R. Neumann de l'université d'Heidelberg (Heidelberg)
7. Code en MATLAB par I. Mozolevski (UFSC)

Les schémas numériques utilisés sont de type volumes finis et éléments finis, pour plus d'informations voir les différentes présentations dans [61]. Cependant, nous ne possédons pas d'information sur les pas de temps utilisés pour réaliser cette étude.

Les figures 3.5, 3.6 et 3.7 représentent respectivement la pression de liquide, la pression de gaz et la saturation de gaz à différents instants obtenus à l'aide du modèle DYNMOD et celles obtenues par les sept autres équipes utilisant le modèle HELMOD.

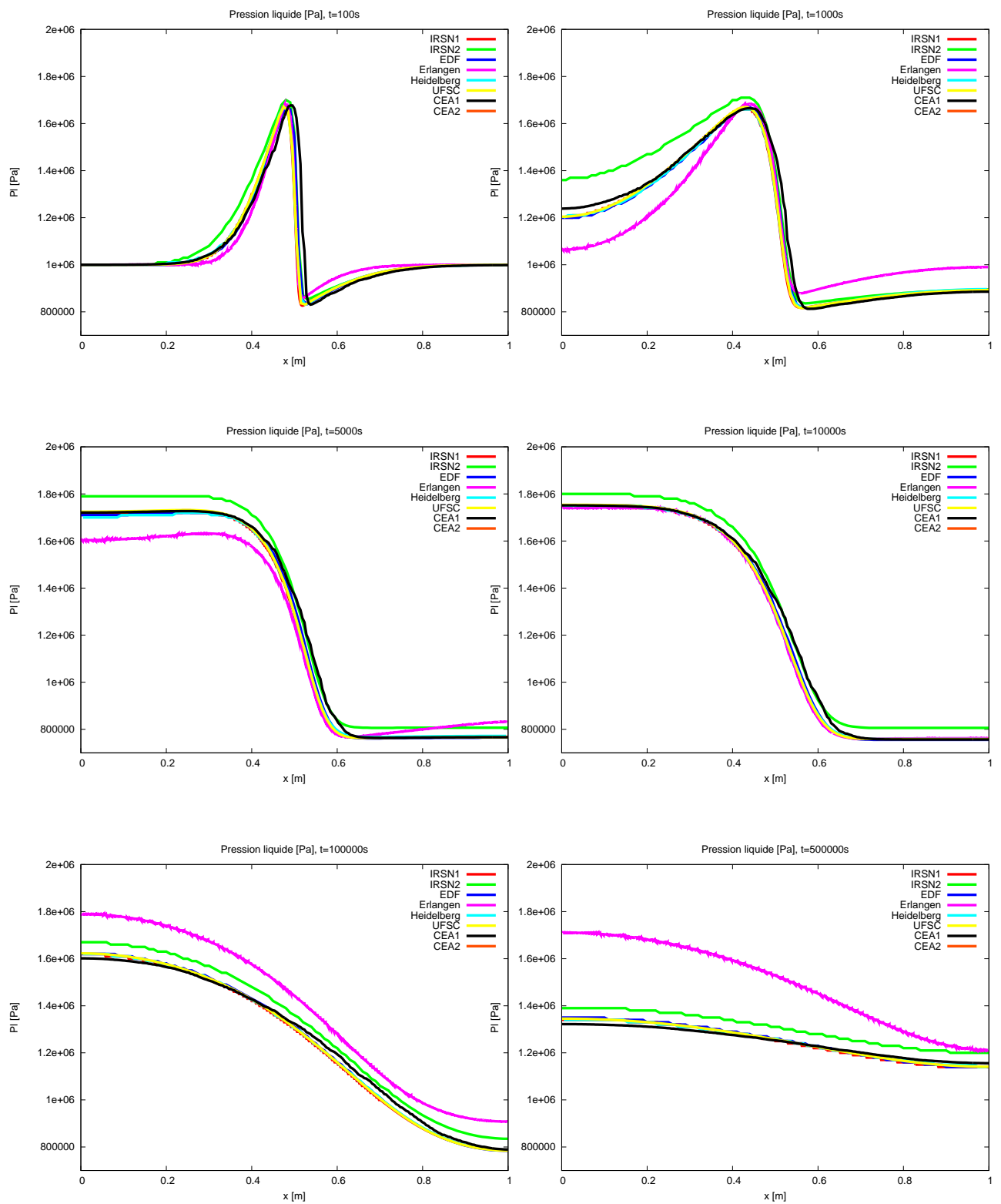


FIG. 3.5: Comparaison de la pression liquide à différents instants

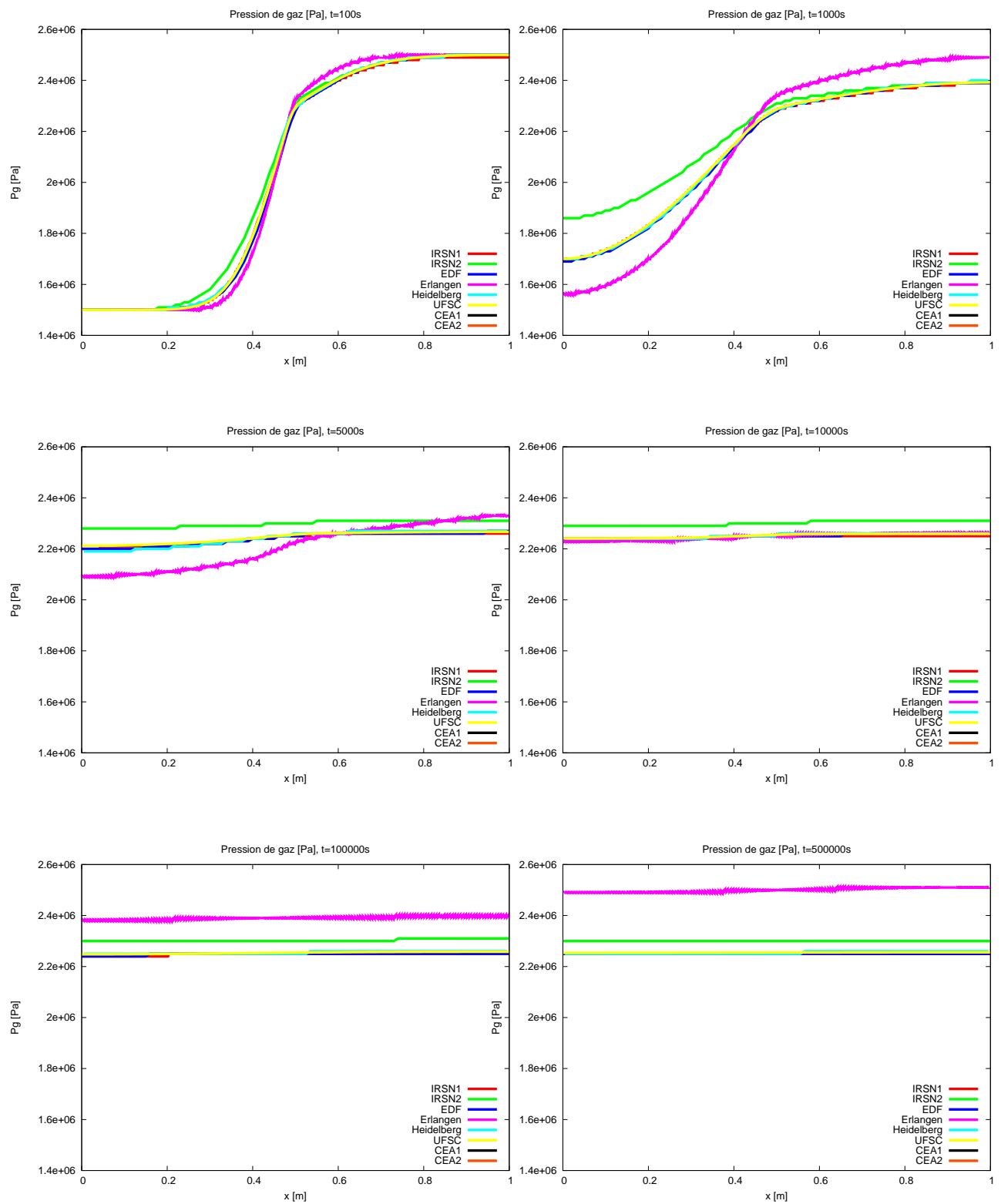


FIG. 3.6: Comparaison de la pression de gaz en différents instants

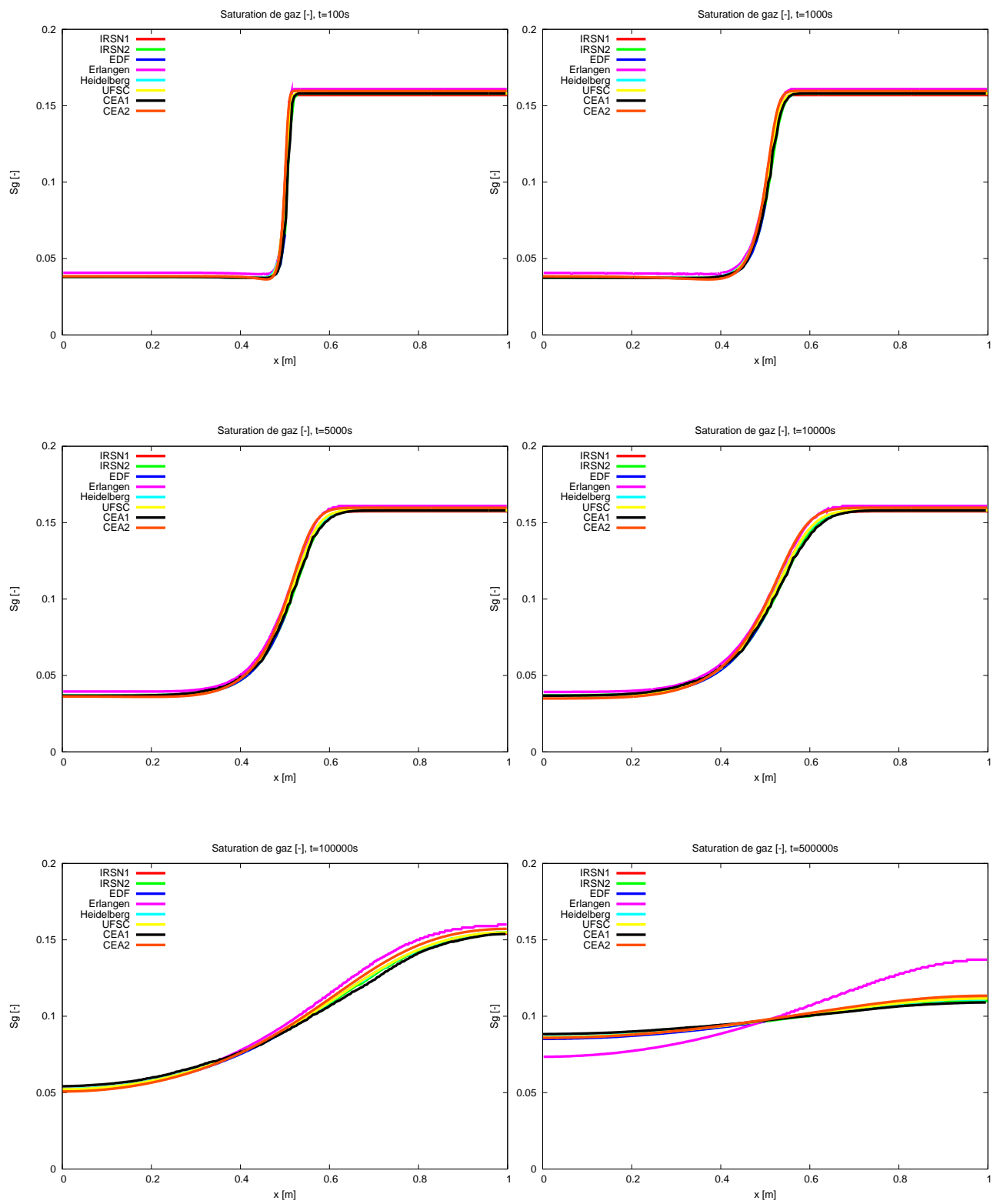


FIG. 3.7: Comparaison de la saturation de gaz en différents instants

On note que les résultats obtenus à l'aide du modèle DYNMOD sont très semblables à ceux obtenus avec le modèle HELMOD.

### 3.4 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre deux schémas numériques pour le modèle HELMOD. Le premier est basé sur une discrétisation directe des termes différentiels du modèle HELMOD. Le second repose sur le modèle DYNMOD et une méthode de splitting en temps. Ce deuxième schéma consiste à obtenir un état intermédiaire  $U^*$  après intégration numérique des termes différentiels puis à projeter cet état sur une variété dite équilibre définie par la loi de Henry.

Deux cas tests ont été réalisés. Le premier a permis de comparer les solutions numériques obtenues à l'aide de ces deux schémas. Le deuxième a permis de valider le schéma numérique issu du modèle DYNMOD sur un cas test issu du GNR MOMAS.

L'intérêt du deuxième schéma numérique provient du caractère mieux posé mathématiquement du modèle continu (en particulier le principe du maximum sur la saturation liquide). L'autre intérêt est de s'accorder des degrés de liberté supplémentaires. Il est en effet possible d'adapter le schéma numérique pour traiter des problèmes physiques qui ont un transfert de masse entre les phases non instantané. Il est aussi possible d'envisager des lois d'équilibre entre l'hydrogène gazeux et l'hydrogène dissous moins simple (par exemple non linéaire). L'étape de projection reviendra alors à trouver le zéro d'une fonction non linéaire scalaire dans chaque maille (donc effectué le nombre d'éléments du maillage) alors que dans le cas du schéma issu du problème HELMOD, il faudra le faire à chaque calcul de  $\rho_l^h$  fois le nombre d'éléments du maillage ce qui peut être intéressant en terme de temps de calcul. Il est également envisageable d'optimiser la méthode de résolution du système non linéaire localement (dans chaque maille) et non de manière globale ce qui peut aussi avoir un coût en temps CPU.

# Chapitre 4

## Study of an implicit upwind finite volume scheme for water-gas flow in porous media

**Abstract.** An industrial scheme, to simulate the water-gas flow in porous media, consists in a finite volume method together with a phase-by-phase upstream scheme. The implicit finite volume scheme satisfies industrial constraints of robustness. We show that the proposed scheme satisfy the maximum principle for the saturation, a discrete energy estimate on the pressures and a function of the saturation that denote capillary terms. These stabilities results allow us to derive the convergence of a subsequence to a weak solution of the continuous equations as the size of the discretization tends to zero. The proof is given for the complete system when the density of the gas depends on the own pressure.

### 4.1 Introduction

A rigorous mathematical study of a petroleum engineering schemes takes an important place in oil recovery engineering for production of hydrocarbons from petroleum reservoirs. This important problem renews the mathematical interest in the equations describing the multi-phase flows through porous media. The derivation of the mathematical equations describing this phenomenon may be found in [25], [17]. The differential equations describing the flow of two incompressible, immiscible fluids in porous media have been studied in the past decades. Existence of weak solutions to these equations has been shown under various assumptions on physical data [15, 25, 41, 28, 26, 27, 40, 52, 50].

The numerical discretization of the two-phase incompressible immiscible flows has been the object of several studies, the description of the numerical treatment by finite difference scheme may be found in the books [16], [62].

The finite volume methods have been proved to be well adapted to discretize conservative equations and have been used in industry because they are cheap, simple to code

and robust. The porous media problems are one of the privileged field of applications. This success induced us to study and prove the mathematical convergence of a classical finite volume method for a model of two-phase flow in porous media.

For the two-phase incompressible immiscible flows, the convergence of a cell-centered finite volume scheme to a weak solution is studied in [58], and for a cell-centered finite volume scheme, using a “phase by phase” upstream choice for computations of the fluxes have been treated in [37] and in [21]. The authors give an iterative method to calculate explicitly the phase by phase upwind scheme in the case where the flow is driven by gravitational forces and the capillary pressure is neglected. An introduction of the cell-centered finite volume can be found in [36].

For the convergence analysis of an approximation to miscible fluid flows in porous media by combining mixed finite element and finite volume methods, we refer to [7], [8].

Pioneers works have been done recently by C. Galusinski and M. Saad in a serie of articles about “Degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two-phase flows in porous media” ([42], [43], [44]) when the densities depend on the global pressure , and by Z. Khalil and M. Saad in ([48], [49]) for the general case where the density of each phase depends on its own pressure. For the convergence analysis of a finite volume scheme for a degenerate compressible and immiscible flow in porous media with the feature of global pressure, we refer to [19] and [47].

In this paper, we consider a two-phase flow model where the fluids are immiscible. The medium is saturated by a compressible (gas phase) and incompressible (water phase) phase flows. The model is treated without simplified assumptions on the gas density, we consider that the gas density depends on its corresponding pressure. It is well known that equations arising from multiphase flow in porous media are degenerated. The first type of degeneracy derives from the behavior of relative permeability of each phase which vanishes when his saturation goes to zero. The second type of degeneracy is due to the time derivative term when the gas saturation vanishes.

This paper deals with construction and convergence analysis of a finite volume scheme for compressible and immiscible flow in porous media without simplified assumptions on the state law of gas density.

The goal of this paper is to show that the approximate solution obtained with the proposed upwind finite volume scheme (4.3.10)–(4.3.11) converges as the mesh size tends to zero, to a solution of system (4.2.2)–(4.2.3) in an appropriate sense defined in section 4.2. In section 4.3, we introduce some notations for the finite volume method and we present our numerical scheme and the main theorem of convergence.

In section 4.4, we derive three preliminary fundamental lemmas. In fact, we will see that we can’t control the discrete gradient of pressure since the mobility of each phase vanishes in the region where the phase is missing. So we are going to use the feature of global pressure. We show that the control of velocities ensures the control of the global pressure and a dissipative term on saturation in the whole domain regardless of the presence or the disappearance of the phases.

Section 4.5 is devoted to a maximum principle on saturation and a well posedness of the scheme which inspired from H.W. Alt, S. Luckhaus [3]. Section 4.7 is devoted to a space-

time  $L^1$  compactness of sequences of approximate solutions.

Finally, the passage to the limit on the scheme and convergence analysis are performed in section 4.8. Some numerical results are stated in the last section 4.9.

## 4.2 Mathematical formulation of the continuous problem

Let us state the physical model describing the immiscible displacement of two compressible fluids in porous media. The mass conservation of each phase is

$$\phi(x)\partial_t(\rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha)(t, x) + \operatorname{div}(\rho_\alpha(p_\alpha)\mathbf{V}_\alpha)(t, x) + \rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha f_P(t, x) = \rho_\alpha(p_\alpha)s_\alpha^I f_I(t, x), \quad (4.2.1)$$

where  $\phi$ ,  $\rho_\alpha$  and  $s_\alpha$  are respectively the porosity of the medium, the density of the  $\alpha$  phase and the saturation of the  $\alpha$  phase. Here the functions  $f_I$  and  $f_P$  are respectively the injection and production terms. Note that in equation (4.2.1) the injection term is multiplied by a known saturation  $s_\alpha^I$  corresponding to the known injected fluid, whereas the production term is multiplied by the unknown saturation  $s_\alpha$  corresponding to the produced fluid.

We are concerned with the study of (4.2.1). Considering one injected fluid (i.e.  $s_g^I = 0$ ,  $s_w^I = 1$ ), and one incompressible fluid (i.e.  $\rho_w(p_w) = \rho_w \in \mathbb{R}^+$ ),

$$\phi(x)\partial_t(\rho_g(p_g)s_g)(t, x) + \operatorname{div}(\rho_g(p_g)\mathbf{V}_g)(t, x) + \rho_g(p_g)s_g f_P(t, x) = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\phi(x)\partial_t s_w(t, x) + \operatorname{div}(\mathbf{V}_w)(t, x) + s_w f_P(t, x) = f_I(t, x). \quad (4.2.3)$$

The velocity of each fluid  $\mathbf{V}_\alpha$  is given by the Darcy law :

$$\mathbf{V}_\alpha(t, x) = -\mathbf{K}(x) \frac{k_\alpha(s_\alpha(t, x))}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha(t, x) - \rho_\alpha(p_\alpha)\mathbf{g}), \quad \alpha = g, w. \quad (4.2.4)$$

where  $\mathbf{K}(x)$  is the permeability tensor of the porous medium at point  $x$  to the fluid under consideration,  $k_\alpha$  the relative permeability of the  $\alpha$  phase,  $\mu_\alpha$  the constant  $\alpha$ -phase's viscosity,  $p_\alpha$  the  $\alpha$ -phase's pressure and  $\mathbf{g}$  is the gravity term. By definition of saturations, one has

$$s_g(t, x) + s_w(t, x) = 1. \quad (4.2.5)$$

The curvature of the contact surface between the two fluids links the jump of pressure of the two phases to the saturation by the capillary pressure law in order to close the system (4.2.2)-(4.2.5)

$$p_c(s_w(t, x)) = p_g(t, x) - p_w(t, x). \quad (4.2.6)$$

With the arbitrary choice of (4.2.6) (the jump of pressure is a function of  $s_w$ ), the application  $s_w \mapsto p_c(s_w)$  is non-increasing, ( $\frac{dp_c}{ds_w}(s_w) < 0$ , for all  $s_w \in [0, 1]$ ), and usually  $p_c(s_w = 1) = 0$ , in the case of two phases, when the wetting fluid is at its maximum saturation.



### 4.2.1 Assumptions and main result

The model is treated without simplified assumptions on the gas density, we consider that the gas density depends on its corresponding pressure. The main point is to handle a priori estimates on the approximate solution. The studied system represents two kinds of degeneracy : the degeneracy for evolution terms  $\partial_t(\rho_g s_g)$  and the degeneracy for dissipative terms  $\operatorname{div}(\rho_\alpha M_\alpha \nabla p_\alpha)$ . We will see in the section 4.5 that we can't control the discrete gradient of pressure since the mobility of each phase vanishes in the region where the phase is missing. So, we are going to use the feature of global pressure to obtain uniform estimates on the discrete gradient of the global pressure and the discrete gradient of the capillary term  $\mathcal{B}$  (defined on (4.2.9)) to treat the degeneracy of this system.

Let us summarize some useful notations in the sequel. We recall the conception of the global pressure as describe in [25]

$$M(s_g)\nabla p = M_g(s_g)\nabla p_g + M_w(s_w)\nabla p_w,$$

with the  $\alpha$ -phase's mobility  $M_\alpha$  and the total mobility are defined by

$$M_\alpha(s_\alpha) = k_{r_\alpha}(s_\alpha)/\mu_\alpha, \quad M(s_g) = M_g(s_g) + M_w(s_w).$$

This global pressure  $p$  can be written as

$$p = p_g + \tilde{p}(s_w) = p_w + \bar{p}(s_w), \quad (4.2.7)$$

or the artificial pressures are denoted by  $\bar{p}$  and  $\tilde{p}$  defined by :

$$\tilde{p}(s_w) = - \int_0^{s_w} \frac{M_w(z)}{M(z)} p'_c(z) dz \quad \text{and} \quad \bar{p}(s_w) = \int_0^{s_w} \frac{M_g(z)}{M(z)} p'_c(z) dz \quad (4.2.8)$$

We also define the capillary terms by

$$\xi(s_w) = - \frac{M_g(s_g)M_w(s_w)}{M(s_w)} \frac{dp_c}{ds_w}(s_w) \geq 0,$$

and let us finally define the function  $\mathcal{B}$  from  $[0, 1]$  to  $\mathbb{R}$  by :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(s_w) &= \int_0^{s_w} \xi(z) dz = - \int_0^{s_w} \frac{M_g(z)M_w(z)}{M(z)} \frac{dp_c}{ds_w}(z) dz \\ &= - \int_0^{s_g} M_w(z) \frac{d\bar{p}}{ds_w}(z) dz = \int_0^{s_w} M_g(z) \frac{d\tilde{p}}{ds_w}(z) dz. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

We complete the description of the model (4.2.2)–(4.2.3) by introducing boundary conditions and initial conditions. Let  $T > 0$  be the final time fixed, and let be  $\Omega$  a bounded open subset of  $\mathbb{R}^l$  ( $l \geq 1$ ). We set  $Q_T = (0, T) \times \Omega$ ,  $\Sigma_T = (0, T) \times \partial\Omega$ . To the system (4.2.3)–(4.2.6) we add the following mixed boundary conditions. We consider the boundary

$\partial\Omega = \Gamma_w \cup \Gamma_{imp}$ , where  $\Gamma_w$  denotes the water injection boundary and  $\Gamma_{imp}$  the impervious one.

$$\begin{cases} p_g(t, x) = p_w(t, x) = 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma_w, \\ \rho_g \mathbf{v}_g \cdot \mathbf{n} = \rho_w \mathbf{v}_w \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ on } (0, T) \times \Gamma_{imp}, \end{cases} \quad (4.2.10)$$

where  $\mathbf{n}$  is the outward normal to  $\Gamma_{imp}$ .

The initial conditions are defined on pressures

$$p_\alpha(t = 0) = p_\alpha^0 \text{ for } \alpha = g, w \text{ in } \Omega \quad (4.2.11)$$

We are going to construct a finite volume scheme on orthogonal admissible mesh, we treat here the case where

$$K = k\mathcal{I}_d$$

where  $k$  is a constant positive. For clarity, we take  $k = 1$  which equivalent to change the scale in time.

Next we introduce some physically relevant assumptions on the coefficients of the system.

(H1) There is two positive constants  $\phi_0$  and  $\phi_1$  such that  $\phi_0 \leq \phi(x) \leq \phi_1$  almost everywhere  $x \in \Omega$ .

(H2) The functions  $M_g$  and  $M_w$  belongs to  $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+)$ ,  $M_\alpha(s_\alpha = 0) = 0$ . In addition, there is a positive constant  $m_0 > 0$  such that for all  $s_w \in [0, 1]$ ,

$$M_g(s_g) + M_w(s_w) \geq m_0.$$

(H3)  $(f_P, f_I) \in (L^2(Q_T))^2$ ,  $f_P(t, x), f_I(t, x) \geq 0$  almost everywhere  $(t, x) \in Q_T$ .

(H4) The density  $\rho_g$  is  $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , increasing and there exist two positive constants  $\rho_m > 0$  and  $\rho_M > 0$  such that  $0 < \rho_m \leq \rho_g(p_g) \leq \rho_M$ .

(H5) The capillary pressure fonction  $p_c \in \mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R}^+)$ , increasing, differentiable on  $]0, 1[$  and there exists  $\underline{p}_c > 0$  such that  $0 < \underline{p}_c \leq \left| \frac{dp_c}{ds_w} \right|$ .

(H6) The function  $\xi \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}^+)$  satisfies  $\xi(s_w) > 0$  for  $0 < s_w < 1$  and  $\xi(s_w = 1) = \xi(s_w = 0) = 0$ . We assume that  $\mathcal{B}^{-1}$  (the inverse of  $\mathcal{B}(s_w) = \int_0^{s_w} \xi(z) dz$ ) is an Hölder<sup>1</sup> function of order  $\theta$ , with  $0 < \theta \leq 1$ , on  $[0, \mathcal{B}(1)]$ .

The assumptions (H1)–(H6) are classical for porous media. Note that, due to the boundedness of the capillary pressure function, the functions  $\tilde{p}$  and  $\bar{p}$  defined in (4.2.8) are bounded on  $[0, 1]$ .

Let us define the following Sobolev space

$$H_{\Gamma_w}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_w\}$$

this is an Hilbert space with the norm  $\|u\|_{H_{\Gamma_w}^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^d}$ .

---

<sup>1</sup>This means that there exists a positive constant  $c$  such that for all  $a, b \in [0, \mathcal{B}(1)]$ , one has  $|\mathcal{B}^{-1}(a) - \mathcal{B}^{-1}(b)| \leq c|a - b|^\theta$ .

**Definition 4.2.1.** (Weak solutions). Under assumptions (H1)-(H6) and definitions (4.2.7)-(4.2.11) with the fact that  $p_g^0, p_w^0$  belongs to  $L^2(\Omega)$  and  $s_w^0$  satisfies  $0 \leq s_w^0 \leq 1$  almost everywhere in  $\Omega$ , then the pair  $(p_g, p_w)$  is a weak solution of problem (4.2.2)-(4.2.3) satisfying :

$$p_\alpha \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \sqrt{M_\alpha(s_\alpha)} \nabla p_\alpha \in (L^2(0, T; L^2(\Omega)))^l \quad (4.2.12)$$

$$\phi \partial_t (\rho_g(p_g) s_g) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \phi \partial_t s_g \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \quad (4.2.13)$$

$$0 \leq s_\alpha(t, x) \leq 1 \text{ a.e in } Q_T, \alpha = g, w, \mathcal{B}(s_w) \in L^2(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega)) \quad (4.2.14)$$

such that for all  $\varphi, \xi \in \mathbb{C}^1(0, T; H_{\Gamma_w}^1(\Omega))$  with  $\varphi(T) = \xi(T) = 0$ ,

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \phi \rho_g(p_g) s_g \partial_t \varphi \, dx dt - \int_{\Omega} \phi(x) \rho_g(p_g^0(x)) s_g^0(x) \varphi(0, x) \, dx \\ & + \int_{Q_T} M_g(s_g) \rho_g(p_g) \nabla p_g \cdot \nabla \varphi \, dx dt - \int_{Q_T} M_g(s_g) \rho_g^2(p_g) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi \, dx dt \\ & + \int_{Q_T} \rho_g(p_g) s_g f_P \varphi \, dx dt = 0, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_T} \phi s_w \partial_t \xi \, dx dt - \int_{\Omega} \phi(x) s_w^0(x) \xi(0, x) \, dx \\ & + \int_{Q_T} M_w(s_w) \nabla p_w \cdot \nabla \xi \, dx dt - \int_{Q_T} M_w(s_w) \rho_w \mathbf{g} \cdot \nabla \xi \, dx dt \\ & + \int_{Q_T} s_w f_P \xi \, dx dt = \int_{Q_T} f_I \xi \, dx dt. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

## 4.3 The finite volume scheme

### 4.3.1 Finite volume definitions and notations

Following [36], let us define a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$ .

**Definition 4.3.1.** (Admissible mesh of  $\Omega$ ). An admissible mesh  $\mathcal{T}$  of  $\Omega$  is given by a set of open bounded polygonal convex subsets of  $\Omega$  called control volumes and a family of points (the ‘‘centers’’ of control volumes) satisfying the following properties :

1. The closure of the union of all control volumes is  $\overline{\Omega}$ . We denote by  $|K|$  the measure of  $K$ , and define

$$h = \text{size}(\mathcal{T}) = \max\{\text{diam}(K), K \in \mathcal{T}\}.$$

2. For any  $(K, L) \in \mathcal{T}^2$  with  $K \neq L$ , then  $K \cap L = \emptyset$ . One denotes by  $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}^2$  the set of  $(K, L)$  such that the  $d - 1$ -Lebesgue measure of  $\overline{K} \cap \overline{L}$  is positive. For  $(K, L) \in \mathcal{E}$ , one denotes  $\sigma_{K|L} = \overline{K} \cap \overline{L}$  and  $|\sigma_{K|L}|$  the  $d - 1$ -Lebesgue measure of  $\sigma_{K|L}$ . And one denotes  $\eta_{K|L}$  the unit normal vector to  $\sigma_{K|L}$  outward to  $K$

3. For any  $K \in \mathcal{T}$ , one defines  $N(K) = \{L \in \mathcal{T}, (K, L) \in \mathcal{E}\}$  and one assumes that  $\partial K = \overline{K} \setminus K = (\overline{K} \cap \partial\Omega) \cup (\cup_{L \in N(K)} \sigma_{K|L})$ .
4. The family of points  $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  is such that  $x_K \in K$  (for all  $K \in \mathcal{T}$ ) and, if  $L \in N(K)$ , it is assumed that the straight line  $(x_K, x_L)$  is orthogonal to  $\sigma_{K|L}$ . We set  $d_{K|L} = d(x_K, x_L)$  and  $\tau_{K|L} = \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}}$ , that is sometimes called the “transmissivity” through  $\sigma_{K|L}$  (see Figure 4.1).

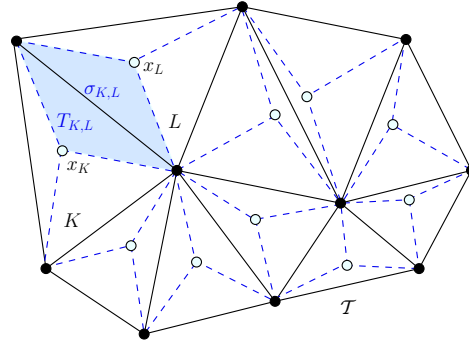


FIG. 4.1: Control volumes, centers and diamonds

We denote by  $H_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  the space of functions which are piecewise constant on each control volume  $K \in \mathcal{T}$ . For all  $u_h \in H_h(\Omega)$  and for all  $K \in \mathcal{T}$ , we denote by  $u_K$  the constant value of  $u_h$  in  $K$ . For  $(u_h, v_h) \in (H_h(\Omega))^2$ , we define the following inner product :

$$\langle u_h, v_h \rangle_{H_h} = l \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} (u_L - u_K)(v_L - v_K),$$

and the norm in  $H_h(\Omega)$  by

$$\|u_h\|_{H_h(\Omega)} = (\langle u_h, u_h \rangle_{H_h})^{1/2}.$$

Finally, we define  $L_h(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  the space of functions which are piecewise constant on each control volume  $K \in \mathcal{T}$  with the associated norm

$$(u_h, v_h)_{L_h(\Omega)} = \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| u_K v_K, \quad \|u_h\|_{L_h(\Omega)}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| |u_K|^2,$$

for  $(u_h, v_h) \in (L_h(\Omega))^2$ . Further, a diamond  $T_{K|L}$  is constructed upon the interface  $\sigma_{K|L}$ , having  $x_K, x_L$  for vertices (see Figure 4.1) and the  $l$ -dimensional measure  $|T_{K|L}|$  of  $T_{K|L}$  equals to  $\frac{1}{l} |\sigma_{K|L}| d_{K|L}$ .

The discrete gradient  $\nabla_h u_h$  of a constant per control volume function  $u_h$  is defined as the constant per diamond  $T_{K|L}$   $\mathbb{R}^l$ -valued function with values

$$\nabla_h u_h(x) = \begin{cases} l \frac{u_L - u_K}{d_{K|L}} \eta_{K|L} & \text{if } x \in T_{K|L}, \\ l \frac{u_\sigma - u_K}{d_{K,\sigma}} \eta_{K|\sigma} & \text{if } x \in T_{K|\sigma}^{\text{ext}}. \end{cases}$$

And the semi-norm  $\|u_h\|_{H_h}$  coincides with the  $L^2(\Omega)$  norm of  $\nabla_h u_h$ , in fact

$$\begin{aligned} \|\nabla_h u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \int_{T_{K|L}} |\nabla_h u_h|^2 dx = l^2 \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| \frac{|u_L - u_K|^2}{|d_{K|L}|^2} \\ &= l \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} |u_L - u_K|^2 := \|u_h\|_{H_h(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

We assimilate a discrete field  $(\vec{F}_{K|L})$  on  $\Omega$  to the piecewise constant vector-function

$$\vec{F}_h = \sum_{\sigma_{K|L} \in \mathcal{E}} \vec{F}_{K|L} \mathbb{1}_{T_{K|L}}.$$

The discrete divergence of the field  $\vec{F}_h$  is defined as the discrete function  $w_h = \text{div}_h \vec{F}_h$  with the entires

$$\text{div}_K \vec{F}_h := \frac{1}{|K|} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \vec{F}_{K|L} \cdot \eta_{K|L}. \quad (4.3.1)$$

A key point of the analysis of the two-point finite volume schemes on admissible meshes is the following kind of discrete duality property :

$$\left| \begin{array}{l} \text{For all discrete function } w_h \text{ on } \Omega \text{ which is null on } \partial\Omega, \text{ for all discrete field } \vec{F}_h \text{ on } \Omega, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| w_K \text{div}_K \vec{F}_h = - \sum_{\sigma_{K|L} \in \mathcal{E}_h} |T_{K|L}| \nabla_{K|L} w_h \cdot \vec{F}_{K|L} \end{array} \right. \quad (4.3.2)$$

This formula stems from the definitions of the discrete operators  $\nabla_h$ ,  $\text{div}_h$  and the summation by parts procedure. And from this formula, we deduce the following importante estimate :

$$\left| \begin{array}{l} \text{For all discrete function } w_h \text{ on } \Omega \text{ which is null on } \partial\Omega, \text{ for all discrete field } \vec{F}_h \text{ on } \Omega, \\ \left| \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| w_K \text{div}_K \vec{F}_h \right| \leq C \max_{\sigma_{K|L} \in \mathcal{E}} |\nabla_{K|L} w_h| \times \|\vec{F}_h\|_{L^1(\Omega')} \end{array} \right. \quad (4.3.3)$$

where  $\|\vec{F}_h\|_{L^1(\Omega')} := \sum_{\sigma_{K,L} \in \mathcal{E}; \sigma_{K,L} \cap \overline{\Omega'} \neq \emptyset} |T_{K|L}| |\vec{F}_{K|L}|$  and  $\Omega' \subset \Omega$  is the support of  $w_h$ .

The problem under consideration is time-dependent, hence we also need to discretize the time interval  $(0, T)$ .

**Definition 4.3.2.** (Time discretization). A time discretization of  $(0, T)$  is given by an integer value  $N$  and by a strictly increasing sequence of real values  $(t^n)_{n \in [0, N+1]}$  with  $t^0 = 0$  and  $t^{N+1} = T$ . The times steps are then defined by  $\delta t^n = t^{n+1} - t^n$ , for  $n \in [0, N]$ .

We may then define a discretization of the whole domain  $\Omega \times (0, T)$  in the following way :

**Definition 4.3.3.** (Discretization of  $\Omega \times (0, T)$ ). A finite volume discretization  $\mathcal{D}$  of  $\Omega \times (0, T)$  is defined by

$$\mathcal{D} = \left( \mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}}, N, (t^n)_{n \in [0, N]} \right),$$

where  $\mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  is an admissible mesh of  $\Omega$  in the sense of Definition 4.3.1 and  $N, (t^n)_{n \in [0, N]}$  is a time discretization of  $(0, T)$  in the sense of Definition 4.3.2. One then sets

$$\text{size}(\mathcal{D}) = \max(\text{size}(\mathcal{T}), (\delta t^n)_{n \in [0, N]}).$$

By saying that  $\mathcal{T}$  is **admissible**, we mean that there exists a family  $(x_K)_{K \in \mathcal{T}}$  such that the straight line  $\overline{x_K x_L}$  is orthogonal to the interface  $\sigma_{K|L}$ . Let us now give the regularity property of discretization mesh we need to prove the principale Theorem 4.3.1.

**Definition 4.3.4.** (Regularity of the mesh). Let  $\xi > 0$ . A discretization  $\mathcal{D}$  of  $Q_T$  is  $\xi$ -regular if

$$\forall K \in \mathcal{T}, \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| d_{K|L} \leq \xi |K| \quad (4.3.4)$$

**Definition 4.3.5.** (Discrete functions and notations). Let  $\mathcal{D}$  be a discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3. We denote any function from  $\mathcal{T} \times [0, N+1]$  to  $\mathbb{R}$  by using the subscript  $\mathcal{D}$ ,  $(s_{\alpha, \mathcal{D}}$  and  $p_{\alpha, \mathcal{D}}$  for instance) and we denote its value at the point  $(x_K, t^n)$  using the subscript  $K$  and the superscript  $n$  ( $s_{\alpha, K}^n$  for instance, we then denote  $s_{\alpha, \mathcal{D}} = (s_{\alpha, K}^n)_{K \in \mathcal{T}, n \in [0, N+1]}$ ). To any discrete function  $u_{\mathcal{D}}$  corresponds an approximate function defined almost everywhere on  $\Omega \times (0, T)$  by :

$$u_{\mathcal{D}}(t, x) = u_K^{n+1}, \text{ for a.e. } (t, x) \in (t^n, t^{n+1}) \times K, \forall K \in \mathcal{T}, \forall n \in [0, N].$$

For any continuous function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(u_{\mathcal{D}})$  denotes the discrete function  $(K, n) \rightarrow f(u_K^{n+1})$ . if  $L \in N(K)$ , and  $u_{\mathcal{D}}$  is a discrete function, we denote by  $\delta_{K|L}^{n+1}(u) = u_L^{n+1} - u_K^{n+1}$ . For example,  $\delta_{K|L}^{n+1}(f(u)) = f(u_L^{n+1}) - f(u_K^{n+1})$ .

Let us recall the following two lemmas :

**Lemma 4.3.1.** (*Discrete Poincaré inequality*) [36]. Let  $\Omega$  be an open bounded polygonal subset of  $\mathbb{R}^l$ ,  $l = 2$  or  $3$ . Let  $\mathcal{T}$  be a finite volume discretization of  $\Omega$  in the sense of Definition 4.3.1, and let  $u$  be a function which is constant on each cell  $K \in \mathcal{T}$ , that is,  $u(x) = u_K$  if  $x \in K$ , then

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{diam}(\Omega) \|u\|_{H_h(\Omega)},$$

where  $\|\cdot\|_{H_h(\Omega)}$  is the discrete  $H_0^1$  norm.

*Remark 4.3.1.* (Dirichlet condition on part of the boundary). The lemma 4.3.1 gives a discrete Poincaré inequality for Dirichlet boundary conditions on the boundary  $\partial\Omega$ . In the case of Dirichlet condition on part of the boundary only, it is still possible to prove a discrete Poincaré inequality provided that the polygonal bounded open set  $\Omega$  is connected.

**Lemma 4.3.2.** (*Discrete integration by parts formula*). Let  $\Omega$  be an open bounded polygonal subset of  $\mathbb{R}^l$ ,  $\mathcal{T}$  be a finite volume discretization of  $\Omega$  in the sense of Definition 4.3.1. Let  $F_{K/L}$ ,  $K \in \mathcal{T}$  and  $L \in N(K)$  be a value in  $\mathbb{R}$  depends on  $K$  and  $L$  such that  $F_{K/L} = -F_{L/K}$  and let  $\varphi$  be a function which is constant on each cell  $K \in \mathcal{T}$ , that is,  $\varphi(x) = \varphi_K$  if  $x \in K$ , then

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} F_{K/L} \varphi_K = -\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} F_{K/L} (\varphi_L - \varphi_K) \quad (4.3.5)$$

Consequently, if  $F_{K/L} = a_{K/L}(b_L - b_K)$ , with  $a_{K/L} = a_{L/K}$ , then

$$\sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} a_{K/L}(b_L - b_K) \varphi_K = -\frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} a_{K/L}(b_L - b_K) (\varphi_L - \varphi_K) \quad (4.3.6)$$

### 4.3.2 The coupled finite volume scheme

The finite volume scheme is obtained by writing the balance equations of the fluxes on each control volume. Let  $\mathcal{D}$  be a discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3. Let us integrate equations (4.2.1) over each control volume  $K$ . By using the Green formula, if  $\Phi$  is a vector field, the integral of  $\text{div}(\Phi)$  on a control volume  $K$  is equal to the sum of the normal fluxes of  $\Phi$  on the edges (4.3.1). Here we apply this formula to approximate  $M_\alpha(s_\alpha) \nabla p_\alpha \cdot \eta_{K|L}$ , ( $\alpha = g, w$ .) by means of the values  $s_{\alpha,K}, s_{\alpha,L}$  and  $p_{\alpha,K}, p_{\alpha,L}$  that are available in the neighborhood of the interface  $\sigma_{K|L}$ . To do this, let us use some function  $G_\alpha$  of  $(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) \in \mathbb{R}^3$ . The numerical convection flux functions  $G_\alpha \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ , are required to satisfy the properties :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(a) } G_\alpha(\cdot, b_\alpha, c_\alpha) \text{ is non-decreasing for all } b_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}, \\ \quad \text{and } G_\alpha(a_\alpha, \cdot, c_\alpha) \text{ is non-increasing for all } a_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R}; \\ \text{(b) } G_g(a_g, a_g, c_g) = -M_g(a_g) c_g \text{ and } G_w(a_w, a_w, c_w) = -M_w(a_w) c_w \text{ for all } a_w, c_w \in \mathbb{R}; \\ \text{(c) } G_\alpha(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) = -G_\alpha(b_\alpha, a_\alpha, -c_\alpha) \text{ and there exists } C > 0 \text{ such that} \\ \quad |G_\alpha(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha)| \leq C (|a_\alpha| + |b_\alpha|) |c_\alpha| \text{ for all } a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad (4.3.7)$$

Note that the assumptions (a), (b) and (c) are standard and they respectively ensure the maximum principle on saturation, the consistency of the numerical flux, and the conservation of the numerical flux on each interface. Practical examples of numerical convective flux functions can be found in [36].

In our context, we consider an upwind scheme, the numerical flux  $G_\alpha$  satisfying (4.3.7) defined by

$$G_\alpha(a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha) = -M_g(b_\alpha) c_\alpha^+ - (-M_\alpha(a_\alpha)) c_\alpha^- \quad (4.3.8)$$

where  $c_\alpha^+ = \max(c_\alpha, 0)$  and  $c_\alpha^- = \max(-c_\alpha, 0)$ . Note that the function  $s_\alpha \mapsto M_\alpha(s_\alpha)$  is non-decreasing, which lead to the monotony property of the function  $G_\alpha$ .

The resulting equation is discretized with a implicit Euler scheme in time; the normal gradients are discretized with a centered finite difference scheme.

Denote by  $p_{\alpha, \mathcal{D}} = (p_{\alpha, K}^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, n \in [0, N]}$  and  $s_{\alpha, \mathcal{D}} = (s_{\alpha, K}^{n+1})_{K \in \mathcal{T}, n \in [0, N]}$  the discrete unknowns corresponding to  $p_\alpha$  and  $s_\alpha$ . The finite volume scheme is the following set of equations :

$$p_{\alpha, K}^0 = \frac{1}{|K|} \int_K p_\alpha^0(x) dx, \quad s_{\alpha, K}^0 = \frac{1}{|K|} \int_K s_\alpha^0(x) dx, \quad \text{for all } K \in \mathcal{T}, \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} |K| \phi_K \frac{\rho_g(p_{g, K}^{n+1}) s_{g, K}^{n+1} - \rho_g(p_{g, K}^n) s_{g, K}^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g, K|L}^{n+1} G_g(s_{g, K}^{n+1}, s_{g, L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) \\ + F_{g, K}^{(n+1)} + |K| \rho_g(p_{g, K}^{n+1}) s_{g, K}^{n+1} f_{P, K}^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

$$\begin{aligned} |K| \phi_K \frac{s_{w, K}^{n+1} - s_{w, K}^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} G_w(s_{w, K}^{n+1}, s_{w, L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) \\ + F_{w, K}^{(n+1)} + |K| s_{w, K}^{n+1} f_{P, K}^{n+1} = |K| f_{I, K}^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

$$p_c(s_{g, k}) = p_{w, k}^{n+1} - p_{g, k}^{n+1}, \quad (4.3.12)$$

where  $F_{g, K}^{n+1}$  the approximation of  $\int_{\partial K} \rho_g^2(p_g^{n+1}) M_g(s_g^{n+1}) \mathbf{g} \cdot \eta_{K|L} d\Gamma(x)$  by an upwind scheme :

$$\begin{aligned} F_{g, K}^{n+1} = \sum_{L \in N(K)} F_{g, K|L}^{n+1} = \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \left( (\rho_{g, K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g, K}^{n+1}) (\mathbf{g}_{K|L})^+ \right. \\ \left. - (\rho_{g, K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g, L}^{n+1}) (\mathbf{g}_{K|L})^- \right), \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

and similarly  $F_{w, K}^{n+1}$  the approximation of  $\int_{\partial K} \rho_w(p_w^{n+1}) M_w(s_w^{n+1}) \mathbf{g} \cdot \eta_{K|L} d\Gamma(x)$  by an upwind scheme :

$$\begin{aligned} F_{w, K}^{n+1} = \sum_{L \in N(K)} F_{w, K|L}^{n+1} = \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \left( \rho_w M_w(s_{w, K}^{n+1}) (\mathbf{g}_{K|L})^+ \right. \\ \left. - \rho_w M_w(s_{w, L}^{n+1}) (\mathbf{g}_{K|L})^- \right). \end{aligned} \quad (4.3.14)$$



Notice that :

- \*  $f_{P,K}^{n+1} := \frac{1}{\delta t|K|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K f_p(x) dx dt$  for  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ ,
- \*  $f_{I,K}^{n+1} := \frac{1}{\delta t|K|} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K f_I(x) dx dt$  for  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ ,
- \*  $\mathbf{g}_{K|L}^+ := (\mathbf{g} \cdot \eta_{K|L})^+$  and  $\mathbf{g}_{K|L}^- := (\mathbf{g} \cdot \eta_{K|L})^-$ .

And, the mean value of the gas density on interfaces is not classical since it is given as

$$\frac{1}{\rho_{g,K|L}^{n+1}} = \begin{cases} \frac{1}{p_{g,L}^{n+1} - p_{g,K}^{n+1}} \int_{p_{g,K}^{n+1}}^{p_{g,L}^{n+1}} \frac{1}{\rho_g(\zeta)} d\zeta & \text{if } p_{g,K}^{n+1} \neq p_{g,L}^{n+1} \\ \frac{1}{\rho_{g,K}^{n+1}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4.3.15)$$

This choice is crucial to obtain estimates on discrete pressures.

Note that the numerical fluxes to approach the gravity terms  $F_\alpha$  are nondecreasing with respect to  $s_{\alpha,K}$  and nonincreasing with respect to  $s_{\alpha,L}$ .

The upwind fluxes (4.3.8) can be rewritten in the equivalent form

$$G_\alpha(s_{\alpha,K}^{n+1}, s_{\alpha,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)) = -M_\alpha(s_{\alpha,K|L}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha) \quad (4.3.16)$$

where  $M_\alpha(s_{\alpha,K|L}^{n+1})$  denote the upwind discretization of  $M_\alpha(s_\alpha)$  on the interface  $\sigma_{K|L}$ , and

$$s_{\alpha,K|L}^{n+1} = \begin{cases} s_{\alpha,K}^{n+1} & \text{if } (K, L) \in \mathcal{E}_\alpha^{n+1}, \\ s_{\alpha,L}^{n+1} & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (4.3.17)$$

with the set  $\mathcal{E}_\alpha^{n+1}$  is subset of  $\mathcal{E}$  such that

$$\mathcal{E}_\alpha^{n+1} = \{(K, L) \in \mathcal{E}, \delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha) = p_{\alpha,L}^{n+1} - p_{\alpha,K}^{n+1} \leq 0\} \quad (4.3.18)$$

We extend the mobility functions  $s_\alpha \mapsto M_\alpha(s_\alpha)$  outside  $[0, 1]$  by continuous constant functions. We show below (see Prop. 4.6.1) that there exists at least one solution to this scheme. From this discrete solution, we build an approximation solution  $p_{\alpha,\mathcal{D}}$  defined almost everywhere on  $Q_T$  by (see Definition 4.3.5) :

$$p_{\alpha,\mathcal{D}}(t, x) = p_{\alpha,K}^{n+1}, \quad \forall x \in K, \forall t \in (t^n, t^{n+1}) \quad (4.3.19)$$

The main result of this paper is the following theorem.

**Theorem 4.3.1.** *Assume hypothesis (H1)-(H6) hold. Let  $\{\mathcal{D}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  be a sequence of discretizations of  $Q_T$  in the sense of definition 4.3.3 such that  $\lim_{m \rightarrow \infty} \text{size}(\mathcal{D}_m) = 0$ . Let  $(p_\alpha^0, s_\alpha^0) \in L^2(\Omega, \mathbb{R}) \times L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ . Then there exists an approximate solutions  $(p_{\alpha,\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  corresponding to the system (4.3.10)-(4.3.11), which converges (up to a subsequence) to a weak solution  $p_\alpha$  of (4.2.2)-(4.2.3) in the sense of the Definition 4.2.1.*

## 4.4 Preliminary fundamental lemmas

The mobility of each phase vanishes in the region where the phase is missing. Therefore, if we control the quantities  $M_\alpha \nabla p_\alpha$  in the  $L^2$ -norm, this does not permit the control of the gradient of pressure of each phase. In the continuous case, we have the following relationship between the global pressure, capillary pressure and the pressure of each phase

$$\int_{Q_T} M |\nabla p|^2 dxdt + \int_{Q_T} \frac{M_l M_g}{M} |\nabla p_c|^2 dxdt = \int_{Q_T} M_l |\nabla p_l|^2 dxdt + \int_{Q_T} M_g |\nabla p_g|^2 dxdt. \quad (4.4.1)$$

This relationship, means that, the control of the velocities ensures the control of the global pressure and the capillary terms  $\mathcal{B}$  in the whole domain regardless of the presence or the disappearance of the phases. This estimates (of the global pressure and the capillary terms  $\mathcal{B}$ ) has a major role in the analysis, to treat the degeneracy of the dissipative terms  $\operatorname{div}(\rho_\alpha M_\alpha \nabla p_\alpha)$ .

In the discrete case, these relationship, are not obtained in a straightforward way. This equality is replaced by three discrete inequalities which we state in the following three lemmas.

We derive in the next lemma the preliminary step to proof the estimates of the global pressure and the capillary terms given in Proposition 4.5.1 and Corollary 4.5.1. These lemmas are first used to prove a compactness lemma and then used for the convergence result.

**Lemma 4.4.1.** (*Total mobility and global pressure*). *Under the assumptions (H1) – (H6) and the notations (4.2.7). Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3. Then the following inequalities hold :*

$$M_{g,K|L}^{n+1} + M_{w,K|L}^{n+1} \geq m_0, \quad \forall (K, L) \in \mathcal{E}, \quad \forall n \in [0, N] \quad (4.4.2)$$

and

$$m_0 \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p) \right)^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1} \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) \right)^2 + M_{g,K|L}^{n+1} \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_g) \right)^2, \quad \forall (K, L) \in \mathcal{E}, \quad \forall n \in [0, N] \quad (4.4.3)$$

*Démonstration.* In order to prove (4.4.2), we take the same decomposition of the interface as that proposed by R. Eymard and al. in [37], namely the different possible cases  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1} \cap \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1} \cup \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$ , and the last case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$ ; where the sets  $\mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $\mathcal{E}_w^{n+1}$  are defined in (4.3.18). We follow the same steps as in [37]. For the sake of clarity, we reproduce the proof of the lemma.

If  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1} \cap \mathcal{E}_w^{n+1}$  or  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1} \cup \mathcal{E}_w^{n+1}$ , then the liquid saturation and the gas saturation are in the same control volume, so (4.4.2) is an immediate consequence of

hypothesis  $H2$ .

If  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$ , then the liquid saturation and the gas saturation are not in the same control volume and  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_g)) = \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) - \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)$ , which yields  $s_{g,K}^{n+1} \geq s_{g,L}^{n+1}$ . Therefore

$$M_{g,K|L}^{n+1} + M_{w,K|L}^{n+1} \geq M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \geq m_0$$

The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$  is similar.

Remark that, if the upwind choice is different for the two equations, then

$$M_{\alpha,K|L}^{n+1} = \max_{[s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}]} M_{\alpha}. \quad (4.4.4)$$

Let us now turn to the proof of (4.4.3).

Let us first study the case  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$ . By definition of  $\bar{p}$  there exists some  $a \in [s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) = \frac{M_g(a)}{M(a)} \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))$ , so by using  $\sum_{\alpha=g,w} f_{\alpha}(a) = \sum_{\alpha=g,w} \frac{M_{\alpha}(a)}{M(a)} = 1$  and  $f_{\alpha}(a) \leq 1$  we get

$$\begin{aligned} \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \right)^2 &= \left( f_w(a) \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + f_g(a) \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \right)^2 \\ &\leq f_w(a) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + f_g(a) \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)) \right)^2, \end{aligned}$$

now, using the equality (4.4.4), we have  $M_g(a) \leq M_{g,K|L}^{n+1}$  and  $M_w(a) \leq M_{w,K|L}^{n+1}$ , so that we may write

$$\left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \right)^2 \leq \frac{M_{w,K|L}^{n+1}}{M(a)} (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + \frac{M_{g,K|L}^{n+1}}{M(a)} (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2,$$

which gives a fortiori (4.4.3). The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$  is similar.

Let us now deal with the other cases. If  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$ , then  $M_{g,K|L}^{n+1} = M_g(s_{g,K}^{n+1})$  and  $M_{w,K|L}^{n+1} = M_w(s_{w,K}^{n+1})$ . We then remark that, since the function  $f_g = \frac{M_g}{M}$  is nonincreasing and  $p_c$  is nonincreasing, the following inequality holds :

$$\begin{aligned} &M_g(s_{g,K}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)) - (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1})) \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) = \\ &(M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1})) \int_{s_{w,K}^{n+1}}^{s_{w,L}^{n+1}} (f_g(s_{w,K}^{n+1}) - f_g(a)) p_c'(a) da \leq 0, \end{aligned}$$

one then gets

$$\begin{aligned} &(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))) \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)) - (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1})) \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \right) \geq 0 \\ &\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)) - (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1})) \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \right) \geq 0, \end{aligned}$$

this leads by adding the two inequalities to

$$\begin{aligned} & 2M_g(s_{g,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p_w)\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)) + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2 \geq \\ & (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}))\left(2\delta_{K|L}^{n+1}(p_w)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) + \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w))\right) \geq \\ & (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}))\left(2\delta_{K|L}^{n+1}(p_w)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) + (\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2\right). \end{aligned}$$

The previous inequality gives

$$\begin{aligned} & M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2 \\ & \geq (M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}))(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2, \end{aligned}$$

which gives the estimate (4.4.3) in that case. The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$  is similar.  $\square$

**Lemma 4.4.2.** (*Capillary term  $\mathcal{B}$* ). *Under the assumptions (H1) – (H6) and the notations (4.2.7). Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3. Then there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $(K, L) \in \mathcal{E}$  and  $n \in [0, N]$  :*

$$(\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)))^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1} \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) \right)^2 + M_{g,K|L}^{n+1} \left( \delta_{K|L}^{n+1}(p_g) \right)^2. \quad (4.4.5)$$

In the incompressible case (see [37]) this kind of estimate is obtained by using the mass conservation equation, whereas our approach use only the definition of the function  $\mathcal{B}$  and consequently this lemma can be used for compressible and incompressible degenerate flows.

*Démonstration.* In order to prove (4.4.5), we consider the exclusive cases  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1} \cap \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1} \cup \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$  and the last case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$ .

• **First case :** If  $(K, L) \in \mathcal{E}_g$  et  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w$ . We may notice that if the upwind choice is different for the two equations, we have

$$M_{\alpha,K|L}^{n+1} = \max_{[s_{g,K}, s_{g,L}]} M_{\alpha}.$$

By definition of  $\mathcal{B}$  in (4.2.9), there exists some  $a \in [s_{w,K}, s_{w,L}]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)) = -\frac{M_g(a)M_w(a)}{M_g(a)+M_w(a)}\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))$ , we then get

$$\begin{aligned} & (\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)))^2 \leq M_{g,K|L}^{n+1} M_{w,K|L}^{n+1} (\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2 \\ & \leq C_1 M_{g,K|L}^{n+1} M_{w,K|L}^{n+1} \left( (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \right) \\ & \leq C_2 \left( M_{g,K|L}^{n+1} (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_{w,K|L}^{n+1} (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \right). \end{aligned}$$

•**Second case** : The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w$  is similar.

•**Third case** : The case  $(K, L) \in \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w$ . We have

$$\begin{aligned}
& M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\
&= M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\
&= \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \right) (\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 \\
&+ M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\
&- 2M_g(s_{g,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) - 2M_w(s_{w,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)).
\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

We will distinguish the case  $s_{w,K}^{n+1} \leq s_{w,L}^{n+1}$  and the case  $s_{w,K}^{n+1} \geq s_{w,L}^{n+1}$ .

1. If we assume that  $s_{w,K}^{n+1} \leq s_{w,L}^{n+1}$ , we deduce that

- (a)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \leq 0$  since  $\bar{p}(s_w)$  is nonincreasing,
- (b)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \geq 0$  since  $\tilde{p}(s_w)$  is nondecreasing,
- (c)  $\delta_{K|L}^{n+1}(p) = \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \leq 0$ .

One then gets from (4.4.6) that :

$$\begin{aligned}
& M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\
&\geq \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \right) (\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 \\
&+ M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\
&- 2M_w(s_{w,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)).
\end{aligned}$$

The previous inequality gives :

$$\begin{aligned}
& \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \right) (\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 \\
&+ M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\
&\leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + 2M_w(s_{w,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \\
&\leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\
&+ M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2
\end{aligned}$$

which implies the inequality :

$$\begin{aligned}
& M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \\
&\leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Or, by definition of  $\mathcal{B}$  (4.2.9), there exists some  $a \in [s_{w,K}, s_{w,L}]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)) = M_g(a)\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))$ , we get then :

$$\begin{aligned}
& (\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)))^2 \leq M_g(s_{g,K})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \\
&\leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2.
\end{aligned}$$

which is (4.4.5) in that case.

2. If we assume that  $s_{w,L}^{n+1} \leq s_{w,K}^{n+1}$ , we get that :

- (a)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \geq 0$  since  $\bar{p}(s_w)$  is nonincreasing
- (b)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \leq 0$  since  $\tilde{p}(s_w)$  is nondecreasing
- (c)  $\delta_{K|L}^{n+1}(p) = \delta_{K|L}^{n+1}(p_g) + \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \leq 0$

One then gets from (4.4.6) that :

$$\begin{aligned} & M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\ & \geq \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \right) (\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 \\ & + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\ & - 2M_g(s_{g,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)). \end{aligned}$$

The previous inequality gives :

$$\begin{aligned} & \left( M_g(s_{g,K}^{n+1}) + M_w(s_{w,K}^{n+1}) \right) (\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 \\ & + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\ & \leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + 2M_g(s_{g,K}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \\ & \leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\ & + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \end{aligned}$$

which implies the inequality :

$$\begin{aligned} & M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\ & \leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

Or, by definition of  $\mathcal{B}$  (4.2.9) there exists some  $a \in [s_{w,K}, s_{w,L}]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)) = -M_w(a)\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w))$ , we get then :

$$\begin{aligned} & (\delta_{K|L}^{n+1}(\mathcal{B}(s_w)))^2 \leq M_w(s_{w,K})(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \\ & \leq M_g(s_{g,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_w(s_{w,K}^{n+1})(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2, \end{aligned}$$

which is (4.4.5) in that case.

•**Fourth case** : The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w$  is similar of the third case.  $\square$

**Lemma 4.4.3.** (*Dissipative terms*). *Under the assumptions (H1) – (H6) and the notations (4.2.7). Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3. Then there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $(K, L) \in \mathcal{E}$  and  $n \in [0, N]$*

$$M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2, \quad (4.4.9)$$

and

$$M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2. \quad (4.4.10)$$

*Démonstration.* In order to prove (4.4.9) and (4.4.10), we consider the exclusive cases  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1} \cap \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1} \cup \mathcal{E}_w^{n+1}$ ,  $(K, L) \in \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w^{n+1}$  and the last case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g^{n+1}$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w^{n+1}$ .

•**First case :** If  $(K, L) \in \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w$ . We have

$$M_{\alpha,K|L}^{n+1} = \max_{[s_w,K, s_w,L]} M_\alpha$$

and by definition of  $\bar{p}$  there exists some  $a \in [s_w,K, s_w,L]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) = \frac{M_g(a)}{M_g(a)+M_w(a)}\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))$ , we get then :

$$\begin{aligned} M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 &\leq M_{w,K|L}^{n+1}M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2 \\ &\leq C_1M_{w,K|L}^{n+1}M_{g,K|L}^{n+1}\left((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2\right) \\ &\leq C_2\left(M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2\right) \end{aligned}$$

which gives (4.4.9). For the discrete estimate (4.4.10) and by definition of  $\tilde{p}$  there exists some  $b \in [s_w,K, s_w,L]$  such that  $\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) = -\frac{M_w(b)}{M_g(b)+M_w(b)}\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w))$ , we get then :

$$\begin{aligned} M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 &\leq M_{g,K|L}^{n+1}M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_c(s_w)))^2 \\ &\leq C_1M_{g,K|L}^{n+1}M_{w,K|L}^{n+1}\left((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2\right) \\ &\leq C_2\left(M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2\right) \end{aligned}$$

which gives (4.4.10).

•**Second case :** The case  $(K, L) \notin E_g$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w$  is similar.

•**Third case :** The case  $(K, L) \in \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \in \mathcal{E}_w$ . From the notations (4.2.7), we can write :

$$\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) = \delta_{K|L}^{n+1}(p) - \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) \text{ and } \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) = \delta_{K|L}^{n+1}(p) - \delta_{K|L}^{n+1}(p_g).$$

Multiply the first equality by  $\sqrt{M_{w,K|L}^{n+1}} = \sqrt{M_w(s_w^{n+1})}$  and the second equality by  $\sqrt{M_{g,K|L}^{n+1}} = \sqrt{M_g(s_g^{n+1})}$ , thus we obtain :

$$\begin{aligned} M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 &= M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \\ &\quad - 2M_{w,K|L}^{n+1}\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

and

$$\begin{aligned} M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 &= M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 \\ &\quad - 2M_{g,K|L}^{n+1}\delta_{K|L}^{n+1}(p)\delta_{K|L}^{n+1}(p_g) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

We consider the following two cases.

1. If we assume that  $s_{w,K}^{n+1} \leq s_{w,L}^{n+1}$ , we get that :

(a)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \leq 0$  since  $\bar{p}(s_w)$  is nonincreasing,

(b)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \geq 0$  since  $\tilde{p}(s_w)$  is nondecreasing,

(c)  $\delta_{K|L}^{n+1}(p) = \delta_{K|L}^{n+1}(p_w) + \delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \leq 0$ .

One then gets from (4.4.11) that :

$$M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2$$

and One gets from (4.4.12) that :

$$M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \leq M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2$$

which is (4.4.9) and (4.4.10) in that case.

2. If we assume that  $s_{w,L}^{n+1} \leq s_{w,K}^{n+1}$ , we get that :

(a)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)) \geq 0$  since  $\bar{p}(s_w)$  is nonincreasing

(b)  $\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \leq 0$  since  $\tilde{p}(s_w)$  is nondecreasing

(c)  $\delta_{K|L}^{n+1}(p) = \delta_{K|L}^{n+1}(p_g) + \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) \leq 0$

One then gets from (4.4.11) and (4.4.12) that :

$$M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\bar{p}(s_w)))^2 \leq M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{w,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2$$

$$M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)))^2 \leq M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p))^2 + M_{g,K|L}^{n+1}(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2$$

which is (4.4.9) and (4.4.10) in that case.

•**Fourth case** : The case  $(K, L) \notin \mathcal{E}_g$  and  $(K, L) \notin \mathcal{E}_w$  is similar of the third case □

## 4.5 A priori estimates and existence of the approximate solution

We derive new energy estimates on the discrete velocities  $M_\alpha(s_{\alpha,K|L}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$ . Nevertheless, these estimates are degenerate in the sense that they do not permit the control of  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$ , especially when a phase is missing. So, the global pressure has a major role in the analysis, we will show that the control of the discrete velocities  $M_\alpha(s_{\alpha,K|L}^{n+1})\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$  ensures the control of the discrete gradient of the global pressure and the discrete gradient of the capillary term ( $\mathcal{B}$ ) in the whole domain regardless of the presence or the disappearance of the phases.

The following section gives us some necessary energy estimates to prove the theorem 4.3.1.



### 4.5.1 The maximum principle

Let us show in the following Lemma that the phase by phase upstream choice yields the  $L^\infty$  stability of the scheme which is a basis to the analysis that we are going to perform.

**Lemma 4.5.1.** (*Maximum principe*). *Under assumptions (H1)-(H6). Let  $(s_{\alpha,K}^0)_{K \in \mathcal{T}} \in [0, 1]$  and let  $\mathcal{D} = (\mathcal{T}, \mathcal{E}, (x_K)_{K \in \mathcal{T}}, N, (t^n)_{n \in [0, N]})$  be a discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 and assume that  $(p_{\alpha, \mathcal{D}})$  is a solution of the finite volume (4.3.9)-(4.3.12). Then, the saturation  $(s_{\alpha, K}^n)_{K \in \mathcal{T}, n \in \{0, \dots, N\}}$  remains in  $[0, 1]$ .*

*Démonstration.* Let us show by induction in  $n$  that for all  $K \in \mathcal{T}$ ,  $s_{\alpha, K}^n \geq 0$  where  $\alpha = g, w$ . For  $\alpha = g$ , the claim is true for  $n = 0$  and for all  $K \in \mathcal{T}$ . We argue by induction that for all  $K \in \mathcal{T}$ , the claim is true up to order  $n$ . We consider the control volume  $K$  such that  $s_{g, K}^{n+1} = \min \{s_{g, L}^{n+1}\}_{L \in \mathcal{T}}$ , and we seek that  $s_{g, K}^{n+1} \geq 0$ .

For the above mentioned purpose, multiply the equation in (4.3.10) by  $-(s_{g, K}^{n+1})^-$ , we obtain

$$\begin{aligned} & -|K| \phi_K \frac{\rho_g(p_{g, K}^{n+1}) s_{g, K}^{n+1} - \rho_g(p_{g, K}^n) s_{g, K}^n}{\delta t} (s_{g, K}^{n+1})^- \\ & \quad - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g, K|L}^{n+1} G_g(s_{g, K}^{n+1}, s_{g, L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (s_{g, K}^{n+1})^- \\ & \quad - F_{g, K}^{(n+1)} (s_{g, K}^{n+1})^- - |K| \rho_g(p_{g, K}^{n+1}) s_{g, K}^{n+1} f_{P, K}^{n+1} (s_{g, K}^{n+1})^- = 0, \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

The numerical flux  $G_g$  is nonincreasing with respect to  $s_{g, L}^{n+1}$  (see (a) in (4.3.7)), and consistency (see (c) in (4.3.7)), we get

$$\begin{aligned} G_g(s_{g, K}^{n+1}, s_{g, L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (s_{g, K}^{n+1})^- & \leq G_g(s_{g, K}^{n+1}, s_{g, K}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (s_{g, K}^{n+1})^- \\ & = -\delta_{K|L}^{n+1}(p_g) M_g(s_{g, K}^{n+1}) (s_{g, K}^{n+1})^- = 0. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Using the identity  $s_{g, K}^{n+1} = (s_{g, K}^{n+1})^+ - (s_{g, K}^{n+1})^-$ , and the mobility  $M_g$  extended by zero on  $]-\infty, 0]$ , then  $M_g(s_{g, K}^{n+1}) (s_{g, K}^{n+1})^- = 0$  and

$$\begin{aligned} & -F_{g, K}^{(n+1)} (s_{g, K}^{n+1})^- - |K| \rho_g(p_{g, K}^{n+1}) s_{g, K}^{n+1} f_{P, K}^{n+1} (s_{g, K}^{n+1})^- \\ & = \sum_{L \in N(K)} (\rho_{g, K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g, L}^{n+1}) \mathbf{g}_{L, K} (s_{g, K}^{n+1})^- + |K| \rho_g(p_{g, K}^{n+1}) f_{P, K}^{n+1} ((s_{g, K}^{n+1})^-)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Then, we deduce from (4.5.1) that

$$|K| \phi_K \frac{\rho_g(p_{g, K}^{n+1}) |(s_{g, K}^{n+1})^-|^2 + \rho_g(p_{g, K}^n) s_{g, K}^n (s_{g, K}^{n+1})^-}{\delta t} \leq 0,$$

and from the nonnegativity of  $s_{g, K}^n$ , we obtain  $(s_{g, K}^{n+1})^- = 0$ . This implies that  $s_{g, K}^{n+1} \geq 0$  and

$$0 \leq s_{g, K}^{n+1} \leq s_{g, L}^{n+1} \text{ for all } n \in [0, N-1] \text{ and } L \in \mathcal{T}.$$

To prove that  $s_{w,K}^{n+1} \geq 0$  for all  $n \in [0, N-1]$  and  $K \in \mathcal{T}$ . We argue by induction that for all  $K \in \mathcal{T}$ , the claim is true up to order  $n$ . We consider the control volume  $K$  such that  $s_{w,K}^{n+1} = \min \{s_{w,L}^{n+1}\}_{L \in \mathcal{T}}$ , and we seek that  $s_{w,K}^{n+1} \geq 0$ .

For the above mentioned purpose, multiply the equation in (4.3.11) by  $-(s_{w,K}^{n+1})^-$ , we obtain

$$\begin{aligned} -|K| \phi_K \frac{s_{w,K}^{n+1} - s_{w,K}^n}{\delta t} (s_{w,K}^{n+1})^- - \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (s_{w,K}^{n+1})^- \\ - F_{w,K}^{(n+1)} (s_{w,K}^{n+1})^- - |K| s_{w,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} (s_{w,K}^{n+1})^- = -|K| f_{I,K}^{n+1} (s_{w,K}^{n+1})^-, \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

The numerical flux  $G_w$  is nonincreasing with respect to  $s_{w,L}^{n+1}$  (see (a) in (4.3.7)), and consistence (see (c) in (4.3.7)), we get

$$\begin{aligned} G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (s_{w,K}^{n+1})^- &\leq G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,K}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (s_{w,K}^{n+1})^- \\ &= -\delta_{K|L}^{n+1}(p_w) M_w(s_{w,K}^{n+1}) (s_{w,K}^{n+1})^- = 0. \end{aligned}$$

Using the identity  $s_{w,K}^{n+1} = (s_{w,K}^{n+1})^+ - (s_{w,K}^{n+1})^-$ , and the mobility  $M_w$  extended by zero on  $] -\infty, 0]$ , then  $M_w(s_{w,K}^{n+1}) (s_{w,K}^{n+1})^- = 0$  and

$$\begin{aligned} -F_{w,K}^{(n+1)} (s_{w,K}^{n+1})^- - |K| s_{w,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} (s_{w,K}^{n+1})^- \\ = \sum_{L \in N(K)} \rho_w M_w(s_{w,L}^{n+1}) (\mathbf{g}_{K|L})^- (s_{w,K}^{n+1})^- + |K| f_{P,K}^{n+1} ((s_{w,K}^{n+1})^-)^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Then, we deduce from (4.5.4) that

$$|K| \phi_K \frac{|(s_{w,K}^{n+1})^-|^2 + s_{w,K}^n (s_{w,K}^{n+1})^-}{\delta t} \leq 0,$$

and from the nonnegativity of  $s_{w,K}^n$ , we obtain  $(s_{w,K}^{n+1})^- = 0$ . This implies that  $s_{w,K}^{n+1} \geq 0$  and

$$0 \leq s_{w,K}^{n+1} \leq s_{w,L}^{n+1} \text{ for all } n \in [0, N-1] \text{ and } L \in \mathcal{T}.$$

□

## 4.5.2 Estimations on the pressures

**Proposition 4.5.1.** *Under the assumptions (H1) – (H6) and the notations (4.2.7). Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 and let  $p_{\alpha, \mathcal{D}}$  be a solution of (4.3.9)-(4.3.12). Then, there exists a constant  $C > 0$ , which only depends on  $M_\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $T$ ,  $p_\alpha^0$ ,  $s_\alpha^0$ ,  $s_\alpha^I$ ,  $f_P$ ,  $f_I$  and not on  $\mathcal{D}$ , such that the following discrete  $L^2(0, T; H^1(\Omega))$  estimates hold :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} M_\alpha(s_{\alpha, K|L}^{n+1}) |p_{\alpha, L}^{n+1} - p_{\alpha, K}^{n+1}|^2 \leq C, \quad (4.5.6)$$

and

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} |p_L^{n+1} - p_K^{n+1}|^2 \leq C. \quad (4.5.7)$$

*Démonstration.* We define the function  $\mathcal{H}_g(p_g) := \rho_g(p_g)g_g(p_g) - p_g$ ,  $\mathcal{P}_c(s_w) := \int_0^{s_w} p_c(z)dz$  and  $g_g(p_g) = \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho_g(z)} dz$ . In the following proof, we denote by  $C_i$  various real values which only depend on  $M_\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $T$ ,  $p_\alpha^0$ ,  $s_\alpha^0$ ,  $s_\alpha^I$ ,  $f_P$ ,  $f_I$  and not on  $\mathcal{D}$ . To prove the estimate (4.5.6), we multiply (4.3.10) and (4.3.11) respectively by  $g_g(p_{g,K})$ ,  $p_{w,K}$  and adding them, then summing the resulting equation over  $K$  and  $n$ . We thus get :

$$E_1 + E_2 + E_3 + E_4 = 0, \quad (4.5.8)$$

where

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \phi_K \left( (\rho_g(p_{g,K}^{n+1})s_{g,K}^{n+1} - \rho_g(p_{g,K}^n)s_{g,K}^n) g_g(p_{g,K}^{n+1}) + (s_{w,K}^{n+1} - s_{w,K}^n) p_{w,K}^{n+1} \right), \\ E_2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( \rho_{g,K|L}^{n+1} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) g_g(p_{g,K}^{n+1}) \right. \\ &\quad \left. + G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) p_{w,K}^{n+1} \right), \\ E_3 &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \left( F_{g,K|L}^{(n+1)} g_g(p_{g,K}^{n+1}) + F_{w,K|L}^{(n+1)} p_{w,K}^{n+1} \right), \\ E_4 &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \left( \rho_g(p_{g,K}^{n+1})s_{g,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} g_g(p_{g,K}^{n+1}) + (s_{w,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} - f_{I,K}^{n+1}) p_{w,K}^{n+1} \right). \end{aligned}$$

To handle the first term of the equality (4.5.8). Let us forget the exponent  $n + 1$  and let note with the exponent  $*$  the physical quantities at time  $t_n$ . First of all, let us prove that : for all  $s_\alpha \geq 0$  and  $s_\alpha^* \geq 0$  such that  $s_g + s_w = s_g^* + s_w^* = 1$ ,

$$(\rho_g(p_g)s_g - \rho_g(p_g^*)s_g^*)g_g(p_g) + (s_w - s_w^*)p_w \geq \mathcal{H}_g(p_g)s_g - \mathcal{H}_g(p_g^*)s_g^* - \mathcal{P}_c(s_w) + \mathcal{P}_c(s_w^*). \quad (4.5.9)$$

Let us denote by  $\mathcal{J}$  the left hand side of (4.5.9),

$$\mathcal{J} = (\rho_g(p_g)s_g - \rho_g(p_g^*)s_g^*)g_g(p_g) + (s_w - s_w^*)p_w.$$

Since the function  $g_g$  is concave, we have

$$g_g(p_g) \leq g_g(p_g^*) + g_g'(p_g^*)(p_g - p_g^*).$$

From the definition of  $\mathcal{H}_g$  and the concavity property of  $g_g$ , one gets

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} &= \rho_g(p_g) s_g g_g(p_g) - \rho_g(p_g^*) s_g^* g_g(p_g) + s_w p_w - s_w^* p_w \\
&\geq s_g \mathcal{H}_g(p_g) - s_g^* \mathcal{H}_g(p_g^*) + s_g p_g - s_g^* p_g + s_w p_w - s_w^* p_w \\
&\geq s_g \mathcal{H}_g(p_g) - s_g^* \mathcal{H}_g(p_g^*) - s_w (p_g - p_w) + s_w^* (p_g - p_w) \\
&\geq s_g \mathcal{H}_g(p_g) - s_g^* \mathcal{H}_g(p_g^*) - (s_w - s_w^*) p_c(s_w).
\end{aligned} \tag{4.5.10}$$

Since the function  $\mathcal{P}_c$  is concave, then

$$(s_w - s_w^*) p_c(s_w) \leq \mathcal{P}_c(s_w) - \mathcal{P}_c(s_w^*). \tag{4.5.11}$$

The above inequalities (4.5.10) and (4.5.11) verify that the assertion (4.5.9) is satisfied. So, this yields to

$$\begin{aligned}
&\sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K (|K| s_{g,K}^N \mathcal{H}(p_{g,K}^N) - |K| s_{g,K}^0 \mathcal{H}(p_{g,K}^0)) \\
&\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K |K| \mathcal{P}_c(s_{w,K}^N) + \sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K |K| \mathcal{P}_c(s_{w,K}^0) \leq E_1
\end{aligned} \tag{4.5.12}$$

Using the fact that the numerical fluxes  $G_g$  and  $G_w$  are conservative in the sense of (c) in (4.3.7), we obtain by discrete integration by parts (see Lemma 4.3.2)

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( \rho_{g,K|L}^{n+1} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (g_g(p_{g,K}^{n+1}) - g_g(p_{g,L}^{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (p_{w,K}^{n+1} - p_{w,L}^{n+1}) \right),
\end{aligned}$$

and due to the correct choice of the density of the phase  $g$  on each interface,

$$\rho_{g,K|L}^{n+1} = \frac{p_{g,K}^{n+1} - p_{g,L}^{n+1}}{g_g(p_{g,K}^{n+1}) - g_g(p_{g,L}^{n+1})}, \tag{4.5.13}$$

we obtain

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (p_{g,K}^{n+1} - p_{g,L}^{n+1}) \right. \\
&\quad \left. + G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (p_{w,K}^{n+1} - p_{w,L}^{n+1}) \right).
\end{aligned}$$

We have

$$\begin{aligned}
&G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (p_{g,K}^{n+1} - p_{g,L}^{n+1}) + G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) (p_{w,K}^{n+1} - p_{w,L}^{n+1}) \\
&= M_l(s_{g,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_g(s_{w,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2.
\end{aligned}$$

Then, we obtain the following equality

$$E_2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \left( M_l(s_{g,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 + M_g(s_{w,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \right). \quad (4.5.14)$$

To handle the other terms of the equality (4.5.8), firstly let us remark that the numerical flux satisfies  $F_{g,K|L}^{n+1} = -F_{g,L,K}^{n+1}$  and  $F_{w,K|L}^{n+1} = -F_{w,L,K}^{n+1}$ , so we integrate by parts and we obtain

$$E_3 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \left( F_{g,K|L}^{(n+1)} (g_g(p_{g,K}^{n+1}) - g_g(p_{g,L}^{n+1})) + F_{w,K|L}^{(n+1)} (p_{w,K}^{n+1} - p_{w,L}^{n+1}) \right).$$

According to the choice of the density of the phase  $\alpha$  on each interface (4.5.13), we obtain

$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} [M_g(s_{g,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+ - M_g(s_{g,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-] (p_{g,K} - p_{g,L}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w [M_w(s_{w,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+ - M_w(s_{w,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-] (p_{w,K} - p_{w,L}), \end{aligned}$$

which implies by using the definition of  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$

$$\begin{aligned} E_3 &= - \left( \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} [M_g(s_{g,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+ - M_g(s_{g,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-] (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w [M_w(s_{w,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+ - M_w(s_{w,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-] (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) \right). \end{aligned}$$

Recall the truncations of  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$

$$(\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha))^+ = \max\{\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha), 0\} \quad , \quad (\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha))^- = \max\{-\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha), 0\},$$

with  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha) = (\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha))^+ - (\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha))^-$ . So  $E_3$  can be written as

$$\begin{aligned}
E_3 = & -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^+ \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^- \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^+ \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^- \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^+ \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^- \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^+ \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^- .
\end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
E_3 \leq & \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^- \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^+ \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,K}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^+(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^- \\
& + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \rho_w M_w(s_{w,L}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L}^-(\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^+ .
\end{aligned}$$

From the following equality  $|\sigma_{K|L}| = (d_{K|L} |\sigma_{K|L}|)^{\frac{1}{2}} \frac{|\sigma_{K|L}|^{\frac{1}{2}}}{d_{K|L}^{\frac{1}{2}}}$  and apply the Cauchy-Schwarz

inequality to obtain

$$\begin{aligned}
E_3 &\leq 2C \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} d_{K|L} |\sigma_{K|L}| \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} \left( M_l(s_{g,L}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^+)^2 + M_l(s_{g,K}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^-)^2 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + M_g(s_{w,L}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^+)^2 + M_g(s_{w,K}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^-)^2 \right) \\
&\leq 2CT|\Omega| \\
&\quad + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} \left( M_l(s_{g,L}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^+)^2 + M_l(s_{g,K}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^-)^2 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + M_g(s_{w,L}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^+)^2 + M_g(s_{w,K}^{n+1}) ((\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^-)^2 \right).
\end{aligned}$$

From the definition of the truncations of  $\delta_{K|L}^{n+1}(p_\alpha)$ , we obtain

$$\begin{aligned}
E_3 &\leq 2CT|\Omega| + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} \left( M_l(s_{g,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_g))^2 \right. \\
&\quad \quad \quad \left. + M_g(s_{w,K|L}^{n+1}) (\delta_{K|L}^{n+1}(p_w))^2 \right). \quad (4.5.15)
\end{aligned}$$

The last term will be absorbed by the terms on pressures from the estimate (4.5.14).

In order to estimate  $E_4$ , using the fact that the densities are bounded and the map  $g_g$  is sublinear (a.e.  $|g(p_g)| \leq C|p_g|$ ), we have

$$|E_4| \leq C_1 \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| (f_{P,K}^{n+1} + f_{I,K}^{n+1}) (|p_{g,K}^{n+1}| + |p_{w,K}^{n+1}|),$$

then

$$|E_4| \leq C_1 \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| (f_{P,K}^{n+1} + f_{I,K}^{n+1}) (2|p_K^{n+1}| + |\bar{p}_K^{n+1}| + |\tilde{p}_K^{n+1}|).$$

Hence, by the Hölder inequality, we get that :

$$|E_4| \leq C_2 \|f_P + f_I\|_{L^2(Q_T)} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

and, from the discrete Poincaré inequality lemma 4.3.1, we get

$$|E_4| \leq C_3 \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \|p_h^{n+1}\|_{H_h}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C_4. \quad (4.5.16)$$

The equality (4.5.8) with the inequalities (4.5.12), (4.5.14), (4.5.15), (4.5.16) give (4.5.6). Then we deduce (4.5.7) from (4.4.3).  $\square$

We now state the following corollary, which is essential for the compactness and limit study.

**Corollary 4.5.1.** *From the previous Proposition, we deduce the following estimation :*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\delta_{K|L}^{n+1} (\mathcal{B}(s_w)))^2 \leq C, \quad (4.5.17)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} M_{w,K|L}^{n+1} (\delta_{K|L}^{n+1} (\bar{p}(s_w)))^2 \leq C, \quad (4.5.18)$$

and

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} M_{g,K|L}^{n+1} (\delta_{K|L}^{n+1} (\tilde{p}(s_w)))^2 \leq C. \quad (4.5.19)$$

*Démonstration.* The prove of the estimates (4.5.17), (4.5.18) and (4.5.19) are a direct consequence of the inequality (4.4.5), (4.4.9), (4.4.10) and the Proposition 4.5.1.  $\square$

## 4.6 Existence of the finite volume scheme

The existence of a solution for the finite volume scheme is given in the following proposition.

**Lemma 4.6.1.** *Let  $\mathcal{A}$  be a finite dimensional Hilbert space with scalar product  $[\cdot, \cdot]$  and norm  $\|\cdot\|$ , and let  $\mathcal{P}$  be a continuous mapping from  $\mathcal{A}$  into itself such that*

$$[\mathcal{P}(\xi), \xi] > 0 \text{ for } \|\xi\| = r > 0.$$

*Then there exists  $\xi \in \mathcal{A}$  with  $\|\xi\| \leq r$  such that*

$$\mathcal{P}(\xi) = 0.$$

**Proposition 4.6.1.** *Let  $\mathcal{D}$  be an admissible discretization of  $Q_T$ . Then the problem (4.3.10)-(4.3.11) admits at least one solution  $(p_{g,K}^n, p_{w,K}^n)_{(K,n) \in \mathcal{D}}$ .*

*Démonstration.* At the beginning of the proof, we set the following notations ;

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &:= \text{Card}(\mathcal{T}), \\ p_{g,\mathcal{M}} &:= \{p_{g,K}^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}, \\ p_{w,\mathcal{M}} &:= \{p_{w,K}^{n+1}\}_{K \in \mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$



We define the map  $\mathcal{T}_h : \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ ,

$$\mathcal{T}_h(p_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}) = (\{\mathcal{T}_{g,K}\}_{K \in \mathcal{T}}, \{\mathcal{T}_{w,K}\}_{K \in \mathcal{T}}) \text{ where,}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{g,K} = |K| \phi_K \frac{\rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} - \rho_g(p_{g,K}^n) s_{g,K}^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} \rho_{g,K|L}^{n+1} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; dp_{g,K|L}^{n+1}) \\ + F_{g,K}^{(n+1)} + |K| \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{w,K} = |K| \phi_K \frac{s_{w,K}^{n+1} - s_{w,K}^n}{\delta t} + \sum_{L \in N(K)} G_w(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; dp_{w,K|L}^{n+1}) + F_{w,K}^{(n+1)} \\ + |K| s_{w,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} - |K| f_{I,K}^{n+1}, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Note that  $\mathcal{T}_h$  is well defined as a continuous function. Also we define the following homeomorphism  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \mapsto \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$  such that,

$$\mathcal{F}(p_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}) = (v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}})$$

where  $v_{g,\mathcal{M}} = \{g_g(p_{g,K}^{n+1})\}_{K \in \mathcal{T}}$ .

Now let us consider the following continuous mapping  $\mathcal{P}_h$  defined as

$$\mathcal{P}_h(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}) = \mathcal{T}_h \circ \mathcal{F}^{-1}(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}) = \mathcal{T}_h(p_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}).$$

Our goal now is to show that,

$$[\mathcal{P}_h(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}), (v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}})] > 0, \quad \text{for } \|(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}})\|_{\mathbb{R}^{2\mathcal{M}}} = r > 0, \quad (4.6.3)$$

and for a sufficiently large  $r$ .

We observe that

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_h(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}), (v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}})] &\geq \frac{1}{\delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K (|K| s_{g,K}^{n+1} \mathcal{H}(p_{g,K}^{n+1}) - |K| s_{g,K}^n \mathcal{H}(p_{g,K}^n)) \\ &- \frac{1}{\delta t} \mathcal{P}_c(s_{w,K}^{n+1}) + \frac{1}{\delta t} \mathcal{P}_c(s_{w,K}^n) + C \|p_h^{n+1}\|_{H_h(\Omega)}^2 - C, \end{aligned}$$

for some constants  $C > 0$ . This implies that

$$\begin{aligned} [\mathcal{P}_h(v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}}), (v_{g,\mathcal{M}}, p_{w,\mathcal{M}})] &\geq -\frac{1}{\delta t} \sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K |K| s_{g,K}^n \mathcal{H}(p_{g,K}^n) \\ &- \frac{1}{\delta t} \mathcal{P}_c(s_{w,K}^{n+1}) + C \|p_h^{n+1}\|_{H_h(\Omega)}^2 - C', \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

for some constants  $C, C' > 0$ . Finally using the fact that  $g_\alpha$  is a Lipschitz function, then there exists a constant  $C > 0$  such that

$$\begin{aligned} \|(\{g_g(p_{g,K}^{n+1})\}_{K \in \mathcal{T}}, \{g_w(p_{w,K}^{n+1})\}_{K \in \mathcal{T}})\|_{\mathbb{R}^{2\mathcal{M}}} &\leq C(\|p_{g,h}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|p_{w,h}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq 2C(\|p_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{p}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{p}_h^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}) \\ &\leq 2C(\|p_h^{n+1}\|_{H_h(\Omega)} + C_1). \end{aligned}$$

Using this to deduce from (4.6.4) that (4.6.3) holds for  $r$  large enough. Hence, we obtain the existence of at least one solution to the scheme (4.3.10)-(4.3.11).  $\square$

## 4.7 Compactness properties

In this section we derive estimates on differences of space and time translates of the function  $\phi_{\mathcal{D}}\rho_g(p_{g,\mathcal{D}})s_{g,\mathcal{D}}$  which imply that the sequence  $\phi_{\mathcal{D}}\rho_g(p_{g,\mathcal{D}})s_{g,\mathcal{D}}$  is relatively compact in  $L^1(Q_T)$ .

We replace the study of discrete functions  $U_{\mathcal{D}} = \phi_{\mathcal{D}}\rho_g(p_{g,\mathcal{D}})s_{g,\mathcal{D}}$  (constant per cylinder  $Q_K^n := (t^n, t^{n+1}) \times K$ ) by the study of functions  $\bar{U}_{\mathcal{D}} = \phi_{\mathcal{D}}\rho_g(\bar{p}_{g,\mathcal{D}})\bar{s}_{g,\mathcal{D}}$  piecewise continuous in  $t$  for all  $x$ , constant in  $x$  for all volume  $K$ , defined as

$$\bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{1}{\delta t} \left( (t - n\delta t)U_K^{n+1} + ((n+1)\delta t - t)U_K^n \right) \mathbb{1}_{Q_K^n}(t, x).$$

For a given discrete field  $\vec{\mathcal{F}}_h := \sum_{\sigma_{K|L}} \vec{\mathcal{F}}_{K|L} \mathbb{1}_{T_{K|L}}$ , its discrete divergence is defined as a discrete function with entries on each control volume  $K$ ;

$$\operatorname{div}_K \vec{\mathcal{F}}_h := \frac{1}{|K|} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \vec{\mathcal{F}}_{K|L} \cdot \eta_{K|L}$$

Observe that we can write the discrete scheme (4.3.10)-(4.3.11) in the following from :

$$\begin{aligned} \phi_h \frac{\rho_g(p_{g,h}^{n+1})s_{g,h}^{n+1} - \rho_g(p_{g,h}^n)s_{g,h}^n}{\delta t} &= \operatorname{div}_h \vec{\mathcal{F}}_{g,h}^{n+1} + f_{g,h}^{n+1} \\ \phi_h \frac{s_{w,h}^{n+1} - s_{w,h}^n}{\delta t} &= \operatorname{div}_h \vec{\mathcal{F}}_{w,h}^{n+1} + f_{w,h}^{n+1} \end{aligned}$$

where,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{F}}_{g,h}^{n+1} &:= \sum_{\sigma_{K|L}} \left( -\frac{\rho_{g,K|L}^{n+1}}{d_{K|L}} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) \right. \\ &\quad \left. - \left( (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,K}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^+ - (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,L}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^- \right) \cdot \eta_{K|L} \mathbb{1}_{T_{K|L}} \right) \\ \vec{\mathcal{F}}_{w,h}^{n+1} &:= \sum_{\sigma_{K|L}} \left( -\frac{1}{d_{K|L}} G_\alpha(s_{w,K}^{n+1}, s_{w,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_w)) \right. \\ &\quad \left. - \left( \rho_w M_w(s_{w,K}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^+ - \rho_w M_w(s_{w,L}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^- \right) \cdot \eta_{K|L} \mathbb{1}_{T_{K|L}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{g,h}^{n+1} &:= -|K| \rho_g(p_{g,K}^{n+1})s_{g,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} \\ f_{w,h}^{n+1} &:= -|K| s_{w,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} + |K| f_{I,K}^{n+1} \end{aligned}$$

We also extend  $\bar{U}_{\mathcal{D}}$  by the constant in time value  $U_h^{N+1}$  on  $[\delta t(N+1), +\infty)$ ; as to  $\vec{\mathcal{F}}_{\alpha,h}$  and  $f_{\alpha,h}$ , they are extended by zero values for  $t > \delta t(N+1)$ . The above definitions permit us to rewrite the equations (4.3.10)-(4.3.11) under the form

$$\begin{aligned}\partial_t(\phi_h \rho_g(\bar{p}_{g,h}) \bar{s}_{g,h}) &= \operatorname{div}_h \vec{\mathcal{F}}_{g,h} + f_{g,h} \\ \partial_t(\phi_h \bar{s}_{w,h}) &= \operatorname{div}_h \vec{\mathcal{F}}_{w,h} + f_{w,h}\end{aligned}\quad (4.7.1)$$

where  $\vec{\mathcal{F}}_{\alpha,h}$ , and  $f_{\alpha,h}$  are respectively the discrete functions of values  $\vec{\mathcal{F}}_{\alpha,h}^{n+1}$ , and  $f_{\alpha,h}^{n+1}$  on each interval  $]t^n, t^{n+1}]$ .

One may deduce from (4.5.7) and (4.5.17) the following property.

**Lemma 4.7.1.** (*Space translate of  $\bar{U}_{\mathcal{D}}$* ). *Under the assumptions (H1) – (H6) . Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 and let  $p_{\alpha,\mathcal{D}}$  be a solution of (4.3.9)-(4.3.12). Then, the following inequality hold :*

$$\int_{\Omega' \times (0, T)} |\bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x+y) - \bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x)| \, dx dt \leq \omega(|y|), \quad (4.7.2)$$

for all  $y \in \mathbb{R}^3$  with  $\Omega' = \{x \in \Omega, [x, x+y] \subset \Omega\}$  and  $\omega(|y|) \rightarrow 0$  when  $|y| \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* First to simplify the notation, we write

$$\sum_{\sigma_{K|L}} \quad \text{instead of} \quad \sum_{\{(K,L) \in \mathcal{T}^2, K \neq L, |\sigma_{K|L}| \neq 0\}}.$$

Let  $y \in \mathbb{R}^3$ ,  $x \in \Omega'$ , and  $L \in N(K)$ . We set

$$\beta_{\sigma_{K|L}} = \begin{cases} 1, & \text{if the line segment } [x, x+y] \text{ intersects } \sigma_{K|L}, K \text{ and } L, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

We observe that (see for more details [36])

$$\int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K|L}}(x) \, dx \leq |\sigma_{K|L}| |y|. \quad (4.7.3)$$

From the definition of  $U_{\mathcal{D}}$ , one gets

$$\begin{aligned}& \int_{(0, T) \times \Omega'} |U_{\mathcal{D}}(t, x+y) - U_{\mathcal{D}}(t, x)| \, dx dt \\ &= \int_{(0, T) \times \Omega'} \left| \left( \rho_g(p_{g,\mathcal{D}}) s_{g,\mathcal{D}} \right)(t, x+y) - \left( \rho_g(p_{g,\mathcal{D}}) s_{g,\mathcal{D}} \right)(t, x) \right| \, dx dt \\ &\leq \int_{(0, T) \times \Omega'} |s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y) (\rho_g(p_{g,\mathcal{D}}(t, x+y)) - \rho_g(p_{g,\mathcal{D}}(t, x)))| \, dx dt \\ &\quad + \int_{(0, T) \times \Omega'} |\rho_g(p_{g,\mathcal{D}}(t, x)) (s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y) - s_{g,\mathcal{D}}(t, x))| \, dx dt \\ &\leq E_1 + E_2\end{aligned}$$

where  $E_1$  and  $E_2$  defined as follows

$$E_1 = \rho_M \int_{(0,T) \times \Omega'} |s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y) - s_{g,\mathcal{D}}(t, x)| \, dxdt, \quad (4.7.4)$$

$$E_2 = \int_{(0,T) \times \Omega'} |\rho_g(p_{g,\mathcal{D}}(t, x+y)) - \rho_g(p_{g,\mathcal{D}}(t, x))| \, dxdt. \quad (4.7.5)$$

To handle with the space translation on saturation, we use the fact that  $\mathcal{B}^{-1}$  is an hölder function, then

$$E_1 \leq \rho_M C \int_{(0,T) \times \Omega'} |\mathcal{B}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y)) - \mathcal{B}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x))|^\theta \, dxdt$$

and by application of the Cauchy-Schwarz inequality, we deduce

$$E_1 \leq C \left( \int_{(0,T) \times \Omega'} |\mathcal{B}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y)) - \mathcal{B}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x))| \, dxdt \right)^\theta.$$

Now, denote that

$$\begin{aligned} E_1 &\leq C \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma_{K,L}} |\mathcal{B}(s_{g,L}) - \mathcal{B}(s_{g,K})| \int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K|L}}(x) \, dx \right)^\theta \\ &\leq C \left( |y| \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma_{K,L}} |\sigma_{K|L}| |\mathcal{B}(s_{g,L}) - \mathcal{B}(s_{g,K})| \right)^\theta. \end{aligned}$$

Let us write  $|\sigma_{K,L}| = (d_{K,L} |\sigma_{K,L}|)^{\frac{1}{2}} \frac{|\sigma_{K,L}|^{\frac{1}{2}}}{d_{K,L}^{\frac{1}{2}}}$ , applying again the Cauchy-Schwarz inequality and using the fact that the discrete gradient of the function  $\mathcal{B}$  is bounded (4.5.17) to obtain

$$E_1 \leq C |y|^\theta. \quad (4.7.6)$$

To treat the space translate of  $E_2$ , we use the fact that the map  $\rho'_g$  is bounded and the relationship between the gas pressure and the global pressure, namely :  $p_g = p - \tilde{p}$  defined in (4.2.7), then we have

$$\begin{aligned} E_2 &\leq \max_{\mathbb{R}} |\rho'_g| \int_{(0,T) \times \Omega'} |p_{g,\mathcal{D}}(t, x+y) - p_{g,\mathcal{D}}(t, x)| \, dxdt \\ &\leq \max_{\mathbb{R}} |\rho'_g| \int_{(0,T) \times \Omega'} |p_{\mathcal{D}}(t, x+y) - p_{\mathcal{D}}(t, x)| \, dxdt \\ &\quad + \max_{\mathbb{R}} |\rho'_g| \int_{(0,T) \times \Omega'} |\tilde{p}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y)) - \tilde{p}(s_{g,\mathcal{D}}(t, x))| \, dxdt, \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

furthermore one can easily show that  $\tilde{p}$  is a  $C^1([0, 1]; \mathbb{R})$ , it follows, there exists a positive constant  $C > 0$  such that

$$E_2 \leq C \int_{(0,T) \times \Omega'} |p_{\mathcal{D}}(t, x+y) - p_{\mathcal{D}}(t, x)| dx dt \\ + C \int_{(0,T) \times \Omega'} |s_{g,\mathcal{D}}(t, x+y) - s_{g,\mathcal{D}}(t, x)| dx dt,$$

the last term in the previous inequality is proportional to  $E_1$ , and consequently it remains to show that the space translate on the global pressure is small with  $y$ . In fact

$$\int_{(0,T) \times \Omega'} |p_{\mathcal{D}}(t, x+y) - p_{\mathcal{D}}(t, x)| dx dt \leq \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma_{K,L}} |p_L^{n+1} - p_K^{n+1}| \int_{\Omega'} \beta_{\sigma_{K|L}}(x) dx \\ \leq |y| \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{\sigma_{K,L}} |\sigma_{K|L}| |p_L^{n+1} - p_K^{n+1}|.$$

Finally, using the fact that the discrete gradient of global pressure is bounded (4.5.7), we deduce that

$$\int_{(0,T) \times \Omega'} |U_{\mathcal{D}}(t, x+y) - U_{\mathcal{D}}(t, x)| dx \leq C(|y| + |y|^\theta), \quad (4.7.8)$$

for some constant  $C > 0$ .

In addition, we have

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Omega'} |\bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x+dx) - \bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x)| dx dt \leq 2 \int_0^T \int_{\Omega'} |U_{\mathcal{D}}(t, x+dx) - U_{\mathcal{D}}(t, x)| dx dt \\ + 2\delta t \int_{\Omega'_\delta} |U_{\mathcal{D}}^0(x)| dx$$

where  $U^0 = \rho_g(p_g^0)s_g^0$  and  $\Omega'_\delta = \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \Omega') < |\delta|\}$ . By (4.7.8), the assumption  $\delta t \rightarrow 0$  as  $\text{size}(\mathcal{D}) \rightarrow 0$  and the boundedness of  $(u_h^0)_h$  in  $L^1(\Omega'_\delta)$ , then the space translates of  $\bar{U}_{\mathcal{D}}$  on  $\Omega'$  are estimated uniformly for all sequence  $\text{size}(\mathcal{D}_m)_m$  tend to zero.  $\square$

We state without proof the following lemma on time translate of  $\bar{U}_{\mathcal{D}}$ . The proof can be found in [36] and recently in [12, 11].

**Lemma 4.7.2.** (*Time translate of  $\bar{U}_{\mathcal{D}}$* ). Under the assumptions (H1) – (H6). Let  $\mathcal{D}$  be a finite volume discretization of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 and let  $p_{\alpha,\mathcal{D}}$  be a solution of (4.3.9)-(4.3.12). Then, there exists a positive constant  $C > 0$  depending on  $\Omega$ ,  $T$  such that the following inequality hold :

$$\int_{\Omega \times (0, T-\tau)} |\bar{U}_{\mathcal{D}}(t+\tau, x) - \bar{U}_{\mathcal{D}}(t, x)|^2 dx dt \leq \tilde{\omega}(\tau), \quad (4.7.9)$$

for all  $\tau \in (0, T)$ . Here  $\tilde{\omega} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  is a modulus of continuity, i.e.  $\lim_{\tau \rightarrow 0} \tilde{\omega}(\tau) = 0$ .

## 4.8 Study of the limit

**Proposition 4.8.1.** *Let  $\Omega$  be a polygonal connected subset of  $\mathbb{R}^d$ , with  $d = 2$  or  $3$  and let  $T > 0$  be given. Let  $(\mathcal{D}_m)_m$  be a sequence of finite volume discretizations of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 such that  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{size}(\mathcal{D}_m) = 0$ . Then there exists a subsequence, still denoted  $(s_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$ ,  $(p_{\alpha, \mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  verify the following convergence*

$$\|U_{\mathcal{D}_m} - \bar{U}_{\mathcal{D}_m}\|_{L^1(\Omega')} \longrightarrow 0, \quad (4.8.1)$$

$$U_{\mathcal{D}_m} \longrightarrow U \quad \text{strongly in } L^p(Q_T) \text{ and a.e. in } Q_T \text{ for all } p \geq 1, \quad (4.8.2)$$

$$s_{g, \mathcal{D}_m} \longrightarrow s_g \quad \text{strongly in } L^p(Q_T) \text{ for all } p > 1, \quad (4.8.3)$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_m} \mathcal{B}(s_{w, \mathcal{D}_m}) \longrightarrow \nabla \mathcal{B}(s_w) \quad \text{weakly in } (L^2(Q_T))^3, \quad (4.8.4)$$

$$\nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \longrightarrow \nabla p \quad \text{weakly in } (L^2(Q_T))^3, \quad (4.8.5)$$

$$p_{\mathcal{D}_m} \longrightarrow p \quad \text{weakly in } L^2(Q_T). \quad (4.8.6)$$

Furthermore,

$$s_{\alpha, \mathcal{D}_m} \longrightarrow s_\alpha \text{ a.e. in } Q_T, \text{ and } 0 \leq s_\alpha \leq 1 \text{ a.e. in } Q_T, \quad (4.8.7)$$

$$U = \phi \rho(p_g) s_g \text{ a.e. in } Q_T \quad (4.8.8)$$

Finally, we have,

$$f_1(p_{g, \mathcal{D}_m}) f_2(s_{g, \mathcal{D}_m}) \longrightarrow f_1(p_g) f_2(s_g) \text{ a.e. in } Q_T, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R}) \text{ such that } f_2(0) = 0. \quad (4.8.9)$$

*Démonstration.* For the first convergence (4.8.1) it is useful to introduce the following inequality, for all  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_0^1 |\theta a + (1 - \theta)b| d\theta \geq \frac{1}{2}(|a| + |b|)$$

Applying this inequality to  $a = U_h^{n+1} - U_h^n$ ,  $b = U_h^n - U_h^{n-1}$ , from the definition of  $\bar{U}_{\mathcal{D}_m}$  we deduce

$$\int_0^T \int_{\Omega'} |U_{\mathcal{D}_m}(t, x) - \bar{U}_{\mathcal{D}_m}(t, x)| dx dt \leq 2 \int_0^{T+\delta t^n} \int_{\Omega'} |\bar{U}_{\mathcal{D}_m}(t+\delta t, x) - \bar{U}_{\mathcal{D}_m}(t, x)| dx dt.$$

Since  $\delta t^n$  tends to zero as  $\text{size}(\mathcal{D}_m) \rightarrow 0$ , estimate (4.7.9) in Lemma 4.7.2 implies that the right-hand side of the above inequality converges to zero as  $\text{size}(\mathcal{D}_m)$  tends to zero, and this established (4.8.1).

By the Riesz-Frechet-Kolmogorov compactness criterion, the relative compactness of  $(\bar{U}_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(Q_T)$  is a consequence of the Lemmas 4.7.1 and 4.7.2. Now, the convergence (4.8.2) in  $L^1(Q_T)$  and a.e. in  $Q_T$  becomes a consequence of (4.8.1). Due to the fact that  $U_{\mathcal{D}_m}$  is bounded, we establish the convergence in  $L^1(Q_T)$ .

In order to prove the third convergence (4.8.3), we reproduce the two previous lemmas

4.7.1 and 4.7.2 for  $U_{\mathcal{D}_m} = s_{g, \mathcal{D}_m}$  and as an application of the Riesz-Frechet-Kolmogorov compactness criterion we establish (4.8.3).

It follows from Lemma 4.4.1 that, the sequence  $(\nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $(L^2(Q_T))^3$ , and as a consequence of the discrete Poincaré inequality, the sequence  $(p_{\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $L^2(Q_T)$ . Therefore there exist two functions  $p \in L^2(Q_T)$  and  $\psi \in (L^2(Q_T))^3$  such that (4.8.5) holds and

$$\nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \longrightarrow \psi \text{ weakly in } (L^2(Q_T))^3.$$

It remains to identify  $\nabla p$  by  $\psi$  in the sense of distributions. For that, it is enough to show as  $m \rightarrow +\infty$  :

$$E_m := \int \int_{Q_T} \nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \cdot \varphi \, dx dt + \int \int_{Q_T} p_{\mathcal{D}_m} \operatorname{div} \varphi \, dx dt \longrightarrow 0, \quad \forall \varphi \in D(Q_T).$$

Let  $\mathcal{D}_m$  be small enough such that  $\varphi$  vanishes in  $T_{K, \sigma}^{\text{ext}}$  for all  $K \in \mathcal{T}$ . In view of  $\eta_{K|L} = -\eta_{L,K}$  we obtain for all  $t \in (t^n, t^{n+1})$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} p_{\mathcal{D}_m} \operatorname{div} \varphi(t, x) \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K p_{\mathcal{D}_m} \operatorname{div} \varphi(t, x) \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} p_K^n \int_{\sigma_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} (p_K^n - p_L^n) \int_{\sigma_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Now, from the definition of the discrete gradient,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \varphi(t, x) \, dx &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \int_{T_{K|L}} \nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \varphi(t, x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{l}{d_{K|L}} (p_L^n - p_K^n) \int_{T_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, dx \end{aligned}$$

Then,

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \sigma_{K|L} (p_L^n - p_K^n) \left( \frac{1}{|\sigma_{K|L}|} \int_{\sigma_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|T_{K|L}|} \int_{T_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, dx \right) \end{aligned}$$

Due to the smoothness of  $\varphi$ , one gets

$$\left| \frac{1}{|\sigma_{K|L}|} \int_{\sigma_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, d\Gamma - \frac{1}{|T_{K|L}|} \int_{T_{K|L}} \varphi(t, x) \cdot \eta_{K|L} \, dx \right| \leq C h,$$

and the Cauchy-Scharwz inequality with Lemma 4.4.1

$$\begin{aligned} |E_m| &\leq Ch \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| |p_K^n - p_L^n| \\ &\leq Ch \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| d_{K|L} \\ &\leq Ch |\Omega| T. \end{aligned}$$

Now, for the identification of the limit (4.8.8). Due to the monotonicity of the function  $\rho_g$ , we have

$$\int_{Q_T} (\rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) s_{g,\mathcal{D}_m} - \rho_g(v) s_{g,\mathcal{D}_m}) (p_{g,\mathcal{D}_m} - v) dx dt \geq 0, \quad \forall v \in L^2(Q_T),$$

Note that, from the relation between  $p_{\mathcal{D}_m}$  and  $p_{g,\mathcal{D}_m}$  and by the help of (4.8.3) and (4.8.5) with the relation (4.2.7), we obtain

$$p_{g,\mathcal{D}_m} \rightarrow p_g \text{ weakly in } L^2(Q_T) \quad (4.8.10)$$

this with the convergence results (4.8.2) and (4.8.3) leads to,

$$\int_{Q_T} (U - \rho_g(v) s_g) (p_g - v) dx dt \geq 0, \quad \forall v \in L^2(Q_T).$$

Finally, choose  $v = p_g - \delta w$  with  $\delta \in ]0, 1]$ ,  $w \in L^2(Q_T)$ , then

$$\int_{Q_T} (U - \rho_g(p_g - \delta w) s_g) w dx dt \geq 0, \quad \forall w \in L^2(Q_T),$$

letting  $\delta$  go to zero, we establish (4.8.8).

To conclude the almost everywhere convergence (4.8.9), consider  $s_{g,\mathcal{D}_m} \rightarrow s_g = 0$  almost everywhere then  $f_1(p_{g,\mathcal{D}_m}) f_2(s_{g,\mathcal{D}_m}) \rightarrow 0 = f_1(p_g) f_2(s_g)$  almost everywhere, since  $f_2(0) = 0$  and  $f_1$  is bounded. Next, when  $s_{g,\mathcal{D}_m} \rightarrow s_g \neq 0$ , in light of (4.8.2), we have  $f_1(p_{g,\mathcal{D}_m}) \rightarrow f_1(p_g)$  almost everywhere, and  $f_1(p_{g,\mathcal{D}_m}) f_2(s_{g,\mathcal{D}_m}) \rightarrow f_1(p_g) f_2(s_g)$  by the continuity of the functions  $f_1$  and  $f_2$ .  $\square$

**Theorem 4.8.1.** *Under assumptions (H1)–(H6), let  $(\mathcal{D}_m)_m$  be a sequence of finite volume discretizations of  $\Omega \times (0, T)$  in the sense of Definition 4.3.3 such that  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \text{size}(\mathcal{D}_m) = 0$ . Let us again denote by  $(\mathcal{D}_m)_m$  some subsequence of  $(\mathcal{D}_m)_m$  such that the sequence of corresponding approximate solutions  $(p_{g,\mathcal{D}_m}, p_{w,\mathcal{D}_m})_{m \in \mathbb{N}}$  is such that  $p_{\alpha,\mathcal{D}_m}$  tends to  $p_\alpha$  weakly in  $L^2(\Omega \times (0, T))$ , as  $m$  tends to infinity, where the functions  $p_\alpha$  satisfy :*

$$p_\alpha \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad \sqrt{(M_\alpha(s_\alpha))} \nabla p_\alpha \in (L^2(0, T; L^2(\Omega)))^l \quad (4.8.11)$$

$$\phi \partial_t (\rho_g(p_g) s_g) \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \quad \phi \partial_t s_w \in L^2(0, T; (H_{\Gamma_w}^1(\Omega))'), \quad (4.8.12)$$

$$0 \leq s_\alpha(t, x) \leq 1 \text{ a.e in } Q_T, \quad \mathcal{B}(s_w) \in L^2(0, T; H^1(\Omega)), \quad \alpha = g, w. \quad (4.8.13)$$

Then  $(p_g, p_w)$  is a weak solution of (4.3.10)-(4.3.11) in the sense of Definition 4.2.1.



*Démonstration.* Let  $T$  be a fixed positive constant and  $\varphi \in D([0, T] \times \bar{\Omega})$ . Set  $\varphi_K^n := \varphi(t^n, x_K)$  for all  $K \in \mathcal{T}$  and  $n \in [0, N]$ .

For the discrete gas equation, we multiply the equation (4.3.10) by  $\delta t \varphi_K^{n+1}$  and sum over  $K \in \mathcal{T}$  and  $n \in \{0, \dots, N\}$ . This yields

$$S_1^m + S_2^m + S_3^m + S_4^m = 0,$$

where

$$\begin{aligned} S_1^m &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \phi_K (\rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} - \rho_g(p_{g,K}^n) s_{g,K}^n) \varphi_K^{n+1}, \\ S_2^m &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) \varphi_K^{n+1}, \\ S_3^m &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| \left( (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,K}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^+ - (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,L}^{n+1})(\mathbf{g}_{K|L})^- \right) \varphi_K^{n+1}, \\ S_4^m &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |K| \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} f_{P,K}^{n+1} \varphi_K^{n+1}. \end{aligned}$$

Making summation by parts in time and keeping in mind that  $\varphi(T, x_K) = \varphi_K^{N+1} = 0$  for all  $K \in \mathcal{T}$ , we get

$$\begin{aligned} S_1^m &= - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} |K| \phi_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} (\varphi_K^{n+1} - \varphi_K^n) \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| \phi_K \rho_g(p_{g,K}^0) s_{g,K}^0 \varphi_K^0 \\ &= - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \phi_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} \partial_t \varphi(t, x_k) dx dt \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi_K \rho_g(p_{g,K}^0) s_{g,K}^0 \varphi(0, x_K) dx \\ &=: -S_{1,1}^m - S_{1,2}^m. \end{aligned}$$

Let us introduce

$$\begin{aligned} S_1^{m,*} &= - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \phi_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} \partial_t \varphi(t, x) dx dt \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \phi_K \rho_g(p_{g,K}^0) s_{g,K}^0 \varphi(0, x) dx \\ &=: -S_{1,1}^{m,*} - S_{1,2}^{m,*}. \end{aligned}$$

Then

$$S_{1,2}^m - S_{1,2}^{m,*} = \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_K \phi_K \rho_g(p_{g,K}^0) s_{g,K}^0 (\varphi(0, x_K) - \varphi(0, x)) dx$$

By the regularity of  $\varphi$ , there exists a positive constant  $C$  such that  $|\varphi(0, x_K) - \varphi(0, x)| \leq Ch$ . This implies

$$|S_{1,2}^m - S_{1,2}^{m,*}| \leq Ch |\Omega|.$$

And, we get

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_{1,2}^m - S_{1,2}^{m,*}| = 0. \quad (4.8.14)$$

Due to the fact that the saturation function is bounded and the assumptions (H1),(H4) on the porosity and the density, we have

$$\begin{aligned} |S_{1,1}^m - S_{1,1}^{m,*}| &= \left| \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \phi_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K (\partial_t \varphi(t, x_K) - \partial_t \varphi(t, x)) dx dt \right| \\ &\leq \phi_1 \rho_M \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K |\partial_t \varphi(t, x_K) - \partial_t \varphi(t, x)| dx dt \end{aligned}$$

Using again the regularity of  $\varphi$ , we obtain

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_{1,1}^m - S_{1,1}^{m,*}| = 0. \quad (4.8.15)$$

Combining (4.8.14) with (4.8.15), we obtain

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_1^m - S_1^{m,*}| = 0. \quad (4.8.16)$$

Remark that,  $S_1^{m,*}$  can be written us,

$$S_1^{m,*} = \int_{Q_T} \phi_{\mathcal{D}_m} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) s_{g,\mathcal{D}_m} \partial_t \varphi(t, x) dx dt - \int_{\Omega} \phi_{\mathcal{D}_m} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}^0) s_{g,\mathcal{D}_m}^0 \varphi(0, x) dx.$$

Since  $\phi_{\mathcal{D}_m} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) s_{g,\mathcal{D}_m}$  and  $\phi_{\mathcal{D}_m} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}^0) s_{g,\mathcal{D}_m}^0$  converge almost everywhere respectively to  $\phi \rho_g(p_g) s_g$  and  $\phi \rho_g(p_g^0) s_g^0$ , and as a consequence of Lebesgue dominated convergence theorem, we get

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_1^m = \lim_{m \rightarrow +\infty} S_1^{m,*} = \int_{Q_T} \phi \rho_g(p_g) s_g \partial_t \varphi(t, x) dx dt - \int_{\Omega} \phi \rho_g(p_g^0) s_g^0 \varphi(0, x) dx.$$

Now, let us prove the convergence of the flux,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_2^m = - \int_{Q_T} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \nabla p_g \cdot \nabla \varphi dx dt \quad (4.8.17)$$

Gathering by edges, the term  $S_2^m$  can be rewritten as :

$$\begin{aligned}
S_2^m &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} G_g(s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}; \delta_{K|L}^{n+1}(p_g)) (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K|L}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p_g) (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)) \\
&= A_1^m + A_2^m
\end{aligned} \tag{4.8.18}$$

with

$$\begin{aligned}
A_1^m &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K|L}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p) (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)) \\
A_2^m &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K|L}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K))
\end{aligned} \tag{4.8.19}$$

Let us show that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_1^m = \int_{Q_T} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt. \tag{4.8.20}$$

For each couple of neighbours  $K, L$  we denote  $s_{g, \min}^{n+1}$  the minimum of  $s_{g,K}^{n+1}$  and  $s_{g,L}^{n+1}$  and we introduce

$$A_1^{m,*} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g, \min}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p) (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K))$$

Remark that

$$\begin{aligned}
A_1^{m,*} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g, \min}^{n+1}) \frac{p_L - p_K}{d_{K|L}} \frac{\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)}{d_{K|L}} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g, \min}^{n+1}) \nabla_{K|L} p_{\mathcal{D}_m} \cdot \eta_{K|L} \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L}) \cdot \eta_{K|L},
\end{aligned}$$

where  $x_{K|L} = \theta x_K + (1 - \theta)x_L$ ,  $0 < \theta < 1$ , is some point on the segment  $]x_K, x_L[$ . Recall that the value of  $\nabla_{K|L}$  is directed by  $\eta_{K|L}$ , so

$$\nabla_{K|L} p_{\mathcal{D}_m} \cdot \eta_{K|L} \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L}) \cdot \eta_{K|L} = \nabla_{K|L} p_{\mathcal{D}_m} \cdot \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L})$$

Define  $\bar{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}$  and  $\underline{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}$  by

$$\bar{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}|_{(t^n, t^{n+1}] \times T_{K|L}} := \max\{s_{\alpha, K}, s_{\alpha, L}\}, \quad \underline{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}|_{(t^n, t^{n+1}] \times T_{K|L}} := \min\{s_{\alpha, K}, s_{\alpha, L}\}$$

Now,  $A_1^{m,*}$  can be written under the following continues form

$$A_1^{m,*} = \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_{g, \mathcal{D}_m}) M_g(\underline{s}_{g, \mathcal{D}_m}) \nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \cdot (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} dx dt.$$

By the monotonicity of  $\mathcal{B}$  and thanks to the estimate (4.5.17), we have

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\mathcal{B}(\bar{s}_{w, \mathcal{D}_m}) - \mathcal{B}(\underline{s}_{w, \mathcal{D}_m})|^2 dx dt &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| (\mathcal{B}(s_{w, L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w, K}^{n+1}))^2 \\ &\leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K|L}|}{d_{K|L}} |\mathcal{B}(s_{w, L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w, K}^{n+1})|^2 \\ &\leq C \text{size}(\mathcal{T})^2. \end{aligned}$$

Since  $\mathcal{B}^{-1}$  is continuous, we deduce up to a subsequence

$$|\underline{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m} - \bar{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}| \rightarrow 0 \text{ a.e. on } Q_T. \quad (4.8.21)$$

Moreover, we have  $\underline{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m} \leq s_{\alpha, \mathcal{D}_m} \leq \bar{s}_{\alpha, \mathcal{D}_m}$  and  $s_{\alpha, \mathcal{D}_m} \rightarrow s_{\alpha}$  a.e. on  $Q_T$ . Consequently, and due to the continuity of the mobility function  $M_g$  we have  $M_g(\underline{s}_{g, \mathcal{D}_m}) \rightarrow M_g(s_g)$  a.e on  $Q_T$  and in  $L^p(Q_T)$  for  $p < +\infty$ .

Let the functions  $f_1, f_2$  in (4.8.9) play respectively the role of  $\rho_g$ ,  $M_g$  and by Lebesgue theorem we get,

$$\rho_g(p_{g, \mathcal{D}_m}) M_g(\underline{s}_{g, \mathcal{D}_m}) (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} \rightarrow \rho_g(p_g) M_g(s_g) \nabla \varphi \text{ strongly in } (L^2(Q_T))^3.$$

And as consequence of (4.8.5), we obtain that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_1^{m,*} = \int_{Q_T} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \nabla p \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

It remains to show that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |A_1^m - A_1^{m,*}| = 0 \quad (4.8.22)$$

Remark that

$$\left| M_g(s_{g, K|L}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p) - M_g(s_{g, \min}^{n+1}) \delta_{K|L}^{n+1}(p) \right| \leq C |s_{g, L}^{n+1} - s_{g, K}^{n+1}| \left| \delta_{K|L}^{n+1}(p) \right|.$$

Consequently

$$|A_1^m - A_1^{m,*}| \leq \int_{Q_T} C |s_{g, L}^{n+1} - s_{g, K}^{n+1}| \nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m} \cdot (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} dx dt.$$

Applying the cauchy-Schwarz inequality, and thanks to the uniform bound on  $\nabla_{\mathcal{D}_m} p_{\mathcal{D}_m}$  and the convergence (4.8.21), we establish (4.8.22).

To prove the pass to limit of  $A_2^m$ , we need to prove firstly that

$$\|\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_w)) - \sqrt{M_g(s_{g,K|L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))\|_{L^2(Q_T)}^2 \rightarrow 0 \text{ as } \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0.$$

where  $\Gamma(s_w) = \int_0^{s_w} \sqrt{M_g(z)} \frac{d\tilde{p}}{ds_w}(z) dz$ .

In fact. Remark that there exist  $a \in [s_{w,K}, s_{w,L}]$  such as :

$$\begin{aligned} |\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_w)) - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))| &= |\sqrt{M_g(a)} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w)) - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))| \\ &= |\sqrt{M_g(a)} - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})}| |\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))| \\ &\leq |\sqrt{M_g(s_{g,L}^{n+1})} - \sqrt{M_g(s_{g,K}^{n+1})}| |\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))| \\ &\leq C |\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))| \\ &\leq C |s_{w,L}^{n+1} - s_{w,K}^{n+1}| \\ &\leq C |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^\theta, \quad \mathcal{B}^{-1} \text{ is an Hölder function.} \end{aligned}$$

Thus we get,

$$\begin{aligned} &\|\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_g)) - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))\|_{L^2(Q_T)}^2 \\ &= \int_0^T \int_\Omega |\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_g)) - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))|^2 dx dt \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| |\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_g)) - \sqrt{M_g(s_{g,K,L}^{n+1})} \delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))|^2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}|^{1-\theta} |T_{K,L}|^\theta |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^{2\theta} \\ &\leq \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| \right)^{1-\theta} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^2 \right)^\theta \\ &\leq C \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K,L}| |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^2 \right)^\theta \\ &\leq C (\text{size}(\mathcal{T}))^{2\theta} \left( \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \frac{|\sigma_{K,L}|}{d_{K|L}} |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})| \right)^\theta \end{aligned} \tag{4.8.23}$$

which shows that  $\|\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_g)) - \sqrt{M_g(s_{g,K|L}^{n+1})}\delta_{K|L}^{n+1}(\tilde{p}(s_w))\|_{L^2(Q_T)}^2 \rightarrow 0$  as  $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ . And from (4.5.19), we deduce that there exists a constant  $C > 0$  where the following inequalities hold :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \tau_{K|L} (\delta_{K|L}^{n+1}(\Gamma(s_w)))^2 \leq C. \quad (4.8.24)$$

That prove

$$\nabla_{\mathcal{D}_m} \Gamma(s_{w,\mathcal{D}_m}) \rightarrow \nabla \Gamma(s_w) \text{ weakly in } (L^2(Q_T))^3. \quad (4.8.25)$$

As consequence

$$\sqrt{M_g(s_{g,\mathcal{D}_m})} \nabla_{\mathcal{D}_m} \tilde{p}(s_{w,\mathcal{D}_m}) \rightarrow \nabla \Gamma(s_w) \text{ weakly in } (L^2(Q_T))^3. \quad (4.8.26)$$

Integrations by parts

$$\begin{aligned} A_2^m &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K|L}^{n+1}) \frac{\tilde{p}(s_{w,L}) - \tilde{p}(s_{w,K})}{d_{K|L}} \frac{\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)}{d_{K|L}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |T_{K|L}| \rho_{g,K|L}^{n+1} M_g(s_{g,K|L}^{n+1}) \nabla_{K|L} \tilde{p}(s_{w,\mathcal{D}_m}) \cdot \eta_{K|L} \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L}) \cdot \eta_{K|L}, \end{aligned} \quad (4.8.27)$$

where  $x_{K|L} = \theta x_K + (1 - \theta)x_L$ ,  $0 < \theta < 1$ , is some point on the segment  $]x_K, x_L[$ . Recall that the value of  $\nabla_{K|L}$  is directed by  $\eta_{K|L}$ , so

$$\nabla_{K|L} \tilde{p}(s_{w,\mathcal{D}_m}) \cdot \eta_{K|L} \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L}) \cdot \eta_{K|L} = \nabla_{K|L} \tilde{p}(s_{w,\mathcal{D}_m}) \cdot \nabla \varphi(t^{n+1}, x_{K|L})$$

since each term corresponding to the diamond  $T_{K|L}$  appears twice,

$$A_2^m = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) M_g(s_{g,\mathcal{D}_m}) \nabla_{\mathcal{D}_m} \tilde{p}(s_{w,\mathcal{D}_m}) \cdot (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} dx dt$$

Let the functions  $f_1, f_2$  in (4.8.9) play respectively the role of  $\rho_g$ ,  $\sqrt{M_g}$  and by Lebesgue theorem we get,

$$\rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) \sqrt{M_g(s_{g,\mathcal{D}_m})} (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} \rightarrow \rho_g(p_g) \sqrt{M_g(s_g)} \nabla \varphi \text{ strongly in } (L^2(Q_T))^3$$

And as consequence of (4.8.26),

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} A_2^m = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_g) \sqrt{M_g(s_g)} \nabla \Gamma(s_w) \cdot \nabla \varphi dx dt \quad (4.8.28)$$

$$= - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \nabla \tilde{p}(s_w) \cdot \nabla \varphi dx dt \quad (4.8.29)$$

Now, we treat the convergence of the gravity term

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_3^m = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx dt. \quad (4.8.30)$$

Perform integration by parts (4.3.5)

$$\begin{aligned} S_3^m &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} F_{g,K|L}^{n+1} \varphi(t^{n+1}, x_K) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} F_{g,K|L}^{n+1} (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)) \end{aligned}$$

We introduce

$$S_3^{m,*} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,min}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L} (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K))$$

where  $s_{g,min}^{n+1} := \min\{s_{g,K}^{n+1}, s_{g,L}^{n+1}\}$ . Remark that,  $S_3^{m,*}$  can be written under the following continues form,

$$S_3^{m,*} = - \int_{Q_T} (\rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}))^2 M_g(s_{g,\mathcal{D}_m}) \mathbf{g} \cdot (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m} dx dt.$$

Let the functions  $f_1, f_2$  in (4.8.9) play respectively the role of  $\rho_g, M_g$  and by Lebesgue dominated convergence theorem, we get

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_3^{m,*} = - \int_0^T \int_{\Omega} \rho_g(p_g) M_g(s_g) \mathbf{g} \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

It remains to show that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_3^m - S_3^{m,*}| = 0$$

Remark that

$$\begin{aligned} S_3^m - S_3^{m,*} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} \left( F_{g,K|L}^{n+1} - |\sigma_{K|L}| (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,min}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L} \right) \\ &\quad (\varphi(t^{n+1}, x_L) - \varphi(t^{n+1}, x_K)) \quad (4.8.31) \end{aligned}$$

relying on the assumption (H2), that the mobility functions are lipschitz and  $\mathcal{B}^{-1}$  is a Hôlder function function, we deduce that

$$\begin{aligned} \left| F_{g,K|L}^{n+1} - |\sigma_{K|L}| (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 M_g(s_{g,min}^{n+1}) \mathbf{g}_{K|L} \right| &= \left| (M_g(s_{g,K}^{n+1}) - M_g(s_{g,min}^{n+1})) |\sigma_{K|L}| (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 (\mathbf{g}_{K|L})^+ \right. \\ &\quad \left. - (M_g(s_{g,L}^{n+1}) - M_g(s_{g,min}^{n+1})) |\sigma_{K|L}| (\rho_{g,K|L}^{n+1})^2 (\mathbf{g}_{K|L})^- \right| \\ &\leq C |\sigma_{K|L}| |s_{w,L}^{n+1} - s_{w,K}^{n+1}| \\ &\leq C |\sigma_{K|L}| |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^\theta, \end{aligned}$$

this yields to

$$|S_3^m - S_3^{m,*}| \leq C \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{L \in N(K)} |\sigma_{K|L}| d_{K|L} |\mathcal{B}(s_{w,L}^{n+1}) - \mathcal{B}(s_{w,K}^{n+1})|^\theta (\nabla \varphi)_{\mathcal{D}_m}.$$

Using estimate (4.5.17) and Cauchy-Schwarz inequality, then

$$|S_3^m - S_3^{m,*}| \rightarrow 0 \text{ when } m \rightarrow +\infty.$$

For the convergence of  $S_4^m$ .  $S_4^m$  can be written equivalently

$$S_4^m = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} f_P(t, x) \varphi(t^{n+1}, x_K) dx dt.$$

We introduce

$$S_4^{m,*} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{K \in \mathcal{T}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \rho_g(p_{g,K}^{n+1}) s_{g,K}^{n+1} f_P(t, x) \varphi(t, x) dx dt.$$

We can write equivalently

$$S_4^{m,*} = \int_{Q_T} \rho_g(p_{g,\mathcal{D}_m}) s_{g,\mathcal{D}_m} f_P(t, x) \varphi(t, x) dx dt.$$

Let the functions  $f_1, f_2$  in (4.8.9) play respectively the role of  $\rho_g$ ,  $s_g$  and by Lebesgue dominated convergence theorem, we get

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} S_4^{m,*} = \int_{Q_T} \rho_g(p_g) s_g f_P(t, x) \varphi(t, x) dx dt.$$

It remains to show that

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_4^m - S_4^{m,*}| = 0.$$

Due to regularity of  $\varphi$ , we obtain

$$|S_4^m - S_4^{m,*}| \leq Ch \|f_P\|_{L^1(Q_T)}$$

this ensures

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} |S_4^m - S_4^{m,*}| = 0.$$

□



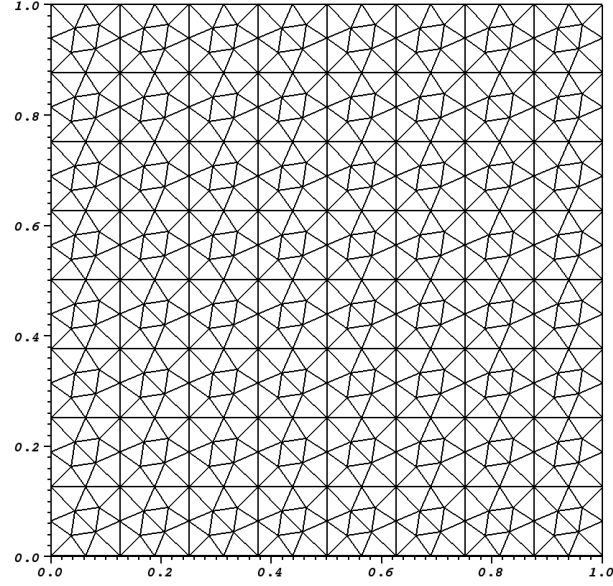


FIG. 4.2: Mesh with 896 triangles

## 4.9 Numerical results

In this section we show some numerical experiments with the proposed numerical scheme. A Newton algorithm is implemented to approach the solution of nonlinear system (4.3.10)-(4.3.11) coupled with a bigradient method to solve linear system arising from the Newton algorithm process.

We will provide two tests made on a nonuniform admissible grid.

Datas used for the numerical tests are the following :

$$\begin{aligned}
 k_w(s_w) &= s_w^2, \quad k_g(s_g) = s_g^2 \\
 \mathbf{K} &= 0.1510^{-10} \text{m}^2, \quad \phi = 0.206, \\
 \mu_w &= 10^{-3} \text{ Pa.s (water viscosity)}, \quad \mu_g = 9. \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s (gas viscosity)}, \\
 \rho_g(p_g) &= \rho_{ref}(1 + c_{ref}(p_g - p_{ref})), \quad \text{with } \rho_{ref} = 400 \text{ Kg m}^{-3}, \quad c_{ref} = 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}, \quad p_{ref} = 1.013 \cdot 10^5 \text{ Pa}, \\
 L_x &= 1\text{m}, \quad L_y = 1\text{m} \quad (\text{the length and the width of the domain}) \\
 P_c(s_w) &= P_{max}(1 - s_w), \quad \text{with } P_{max} = 10^5 \text{ Pa}.
 \end{aligned}$$

**Initial conditions.** Initially the saturation of gas is considered to be equal to 0.9 in the whole domain and the gas pressure is considered to be  $1.013 \cdot 10^5$  Pa.

**Boundary conditions.** The wetting fluid (water) is injected in the left boundary in the region  $(0.8 \leq y \leq 1)$  with a constant pressure equal to  $4.026 \cdot 10^5$  Pa. The right boundary where  $(0 \leq y \leq 0.2)$  keeps fluids flow freely at atmospheric pressure where as the rest of the boundary is assumed to be impervious (zero fluxes are imposed). The influence of boundary conditions can be seen in all figures.

**Meshes.** The domain is recovered by 896 admissible triangles see figure 4.2.

Figures 4.4 - 4.6 show the diffusive effects of the capillary terms, notably the dissipation of chocs due to the hyperbolic operator Fig. 4.6. In fact, during the stage of the displacement saturation shock propagate through rock for flows where capillarity terms are neglected, see figure 4.6. This shock, where capillarity effects are signifiant, it is diffused. However, a part of the the shock wave maintains its sharp front.

We plot in Figures 4.7, 4.8, 4.9 the evolution of the water saturation at several points on the domain, we remark notably that the water breakthrough time is shorter when capillarity terms are included.

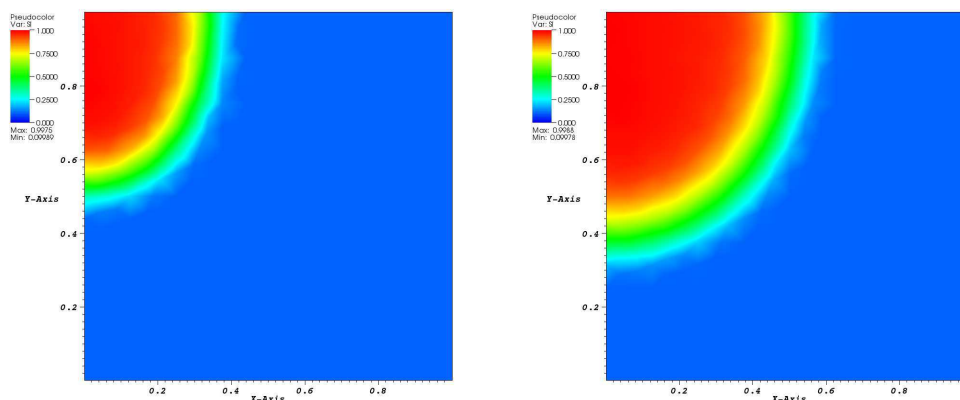


FIG. 4.3: Water field including capillary effect at time  $T = 2.4s$  (left) and at time  $T = 8s$  with  $0.1 \leq s \leq 1$ .

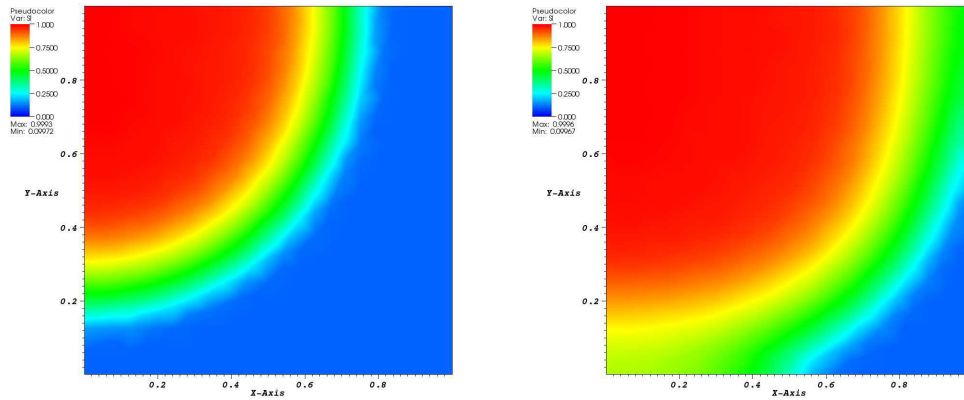


FIG. 4.4: Water field including capillary effect at time  $T = 16$ s (left) and at time  $T = 32$ s with  $0.1 \leq s \leq 1$ .

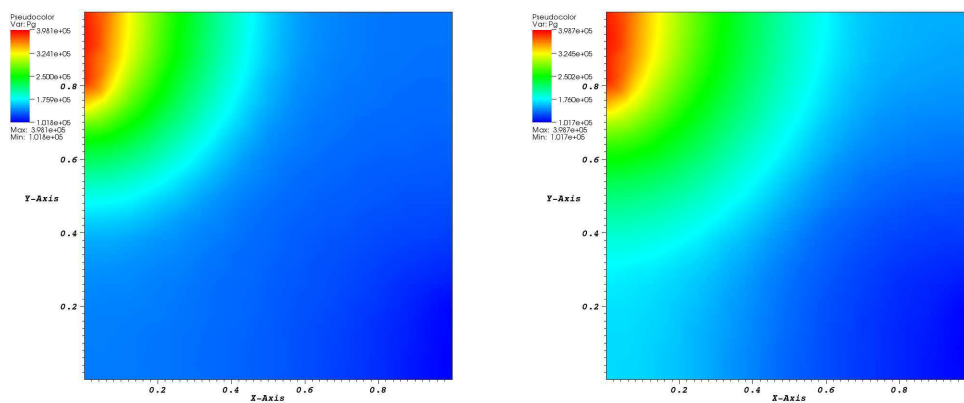


FIG. 4.5: Gas pressure field including capillary effect at time  $T = 16$  (left) and at time  $T = 32$  with  $1.013 \times 10^5 \leq P \leq 4 \times 10^5$  Pa

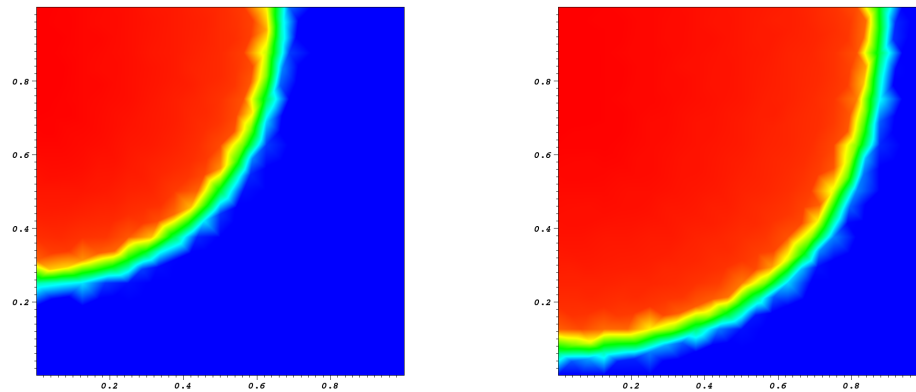


FIG. 4.6: Water field without capillary terms at time  $T = 16$  (left) and at time  $T = 32$  with  $0.1 \leq s \leq 1$

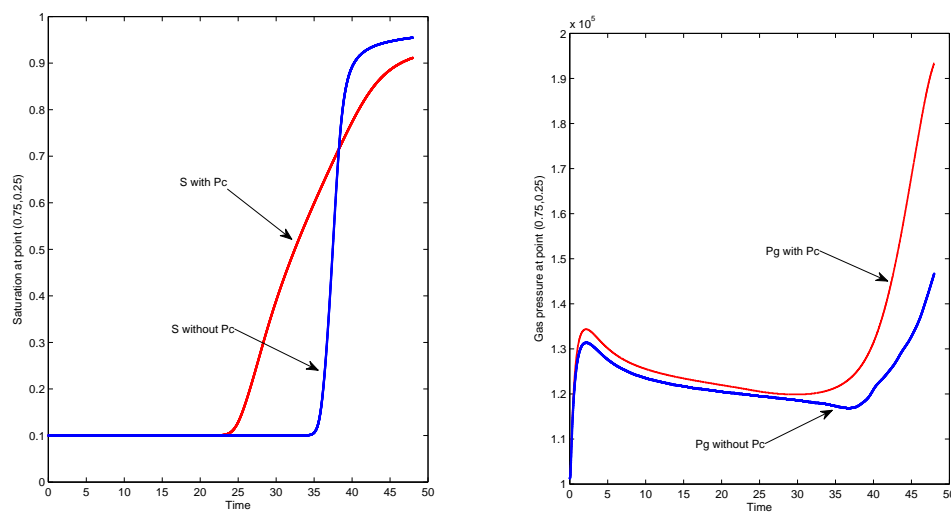


FIG. 4.7: Evolution of the water saturation (left) and gas pressure (right) with respect to time at point  $(0.75, 0.25)$ . Comparison between flow including capillary effect or not.

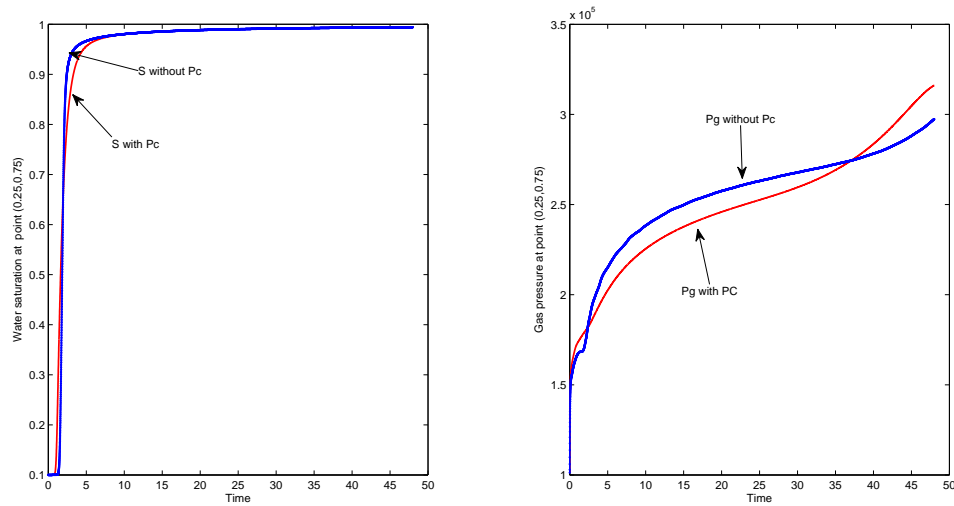


FIG. 4.8: Evolution of the water saturation (left) and gas pressure (right) with respect to time at point (0.25,0.25). Comparison between flow including capillary effect or not.

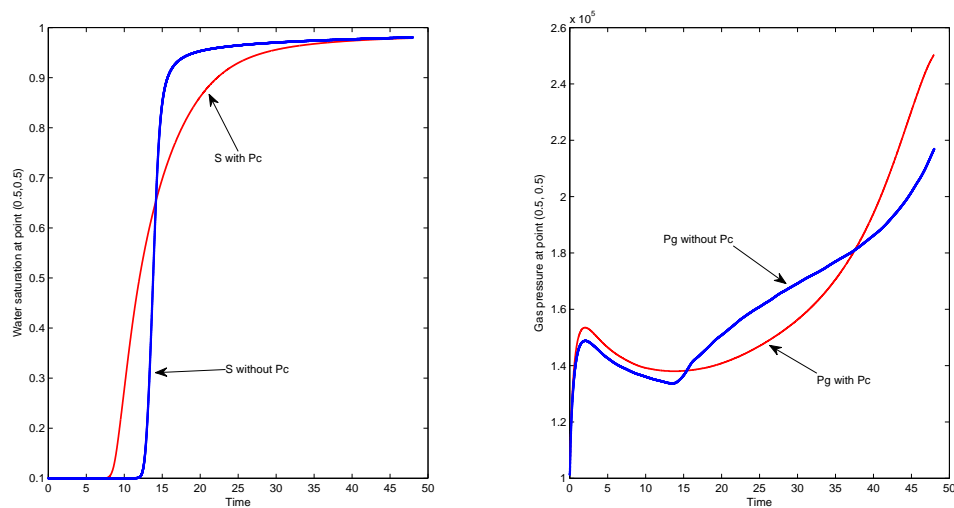


FIG. 4.9: Evolution of the water saturation (left) and gas pressure (right) with respect to time at point (0.5,0.5). Comparison between flow including capillary effect or not.

# Conclusion

Le travail proposé ici concerne la modélisation, l'étude mathématique et la simulation numérique de problèmes d'écoulements diphasiques (liquide et gaz) multi-composant (principalement eau et hydrogène) en milieu poreux. Le domaine d'application typique concerne le stockage des déchets radioactifs de moyenne et haute activité à vie longue. Ce type d'étude est motivé, entre autre, par une augmentation de la pression au sein du stockage due à un dégagement d'hydrogène au niveau des colis, pouvant ainsi fracturer la roche environnante et donc faciliter la migration des radionucléides.

Dans un premier temps des travaux ont été réalisés sur l'analyse mathématique de système d'EDPs modélisant les écoulements diphasiques bicomposant en milieu poreux (résultat d'existence de solutions faibles pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires dégénérées et fortement couplées). Dans cette partie, nous considérons deux modèles : le premier est basé sur un transfert de masse statique où on impose la loi de Henry dans le système, le second est basé sur un transfert de masse dynamique où on prescrit une cinétique de changement de phase entre l'hydrogène dissous et l'hydrogène gazeux. Ce dernier modèle est noté modèle DYNMOD.

Les difficultés liées à l'analyse de ce type de problème réside dans la compressibilité de chaque phase (i.e. la densité de chaque phase dépend de sa propre pression) et des problèmes de dégénérescence des termes d'évolution sur la saturation liquide et sur la concentration d'hydrogène dissous et des termes dissipatifs sur la saturation liquide. Notre approche consiste à contrôler la vitesse de chaque phase afin de surmonter la difficulté liée à la disparition des phases. Ces estimations sont essentielles pour montrer l'existence de solutions pour les deux modèles. Un principe du maximum sur la saturation liquide et la concentration d'hydrogène dissous a également été prouvé pour le modèle DYNMOD.

Nous avons ensuite construit deux schémas numériques pour les modèles HELMOD et DYNMOD. Le premier est basé sur une discrétisation directe des termes différentiels du modèle HELMOD. Le second repose sur le modèle DYNMOD et est basé sur une méthode de splitting en temps où on résout dans un premier temps le système DYNMOD sans terme source puis on projette la solution obtenue sur la variété équilibre définie par  $\{X_l^h = X_{eq}\}$ .

Deux cas tests ont été réalisés. Le premier a permis de comparer les solutions numériques obtenues à l'aide de ces deux modèles. Le deuxième a permis de valider le schéma numérique issu du modèle DYNMOD sur un cas test issu du GNR MOMAS. Nous avons comparé les

résultats numériques obtenus à l'aide de ce modèle avec les résultats obtenus par différentes équipes utilisant le modèle HELMOD. Les résultats obtenus avec notre modèle sont très semblables à ceux obtenus par les différents groupes utilisant le modèle HELMOD.

Enfin, nous avons construit un schéma de type volumes finis avec un décentrage phase par phase pour un écoulement diphasique de type eau–gaz. La phase gazeuse est supposée compressible et celle de l'eau est supposée incompressible. Ce schéma vérifie le principe du maximum sur la saturation.

La compressibilité de chaque phase, la dégénérescence des termes d'évolutions et des termes dissipatifs en saturation imposent plus de difficulté dans le cas discret que dans le cas continu. Pour surmonter la difficulté liée à la disparition des phases, nous avons montré plusieurs estimations qui permettent de contrôler les pressions et des fonctions dépendant de la saturation indépendamment de la disparition des phases. Cela nous permet de contrôler la vitesse discrète de chaque phase. Ces estimations suffisent pour montrer la convergence du schéma. On termine ce chapitre, par quelques tests numériques en 2D sur un maillage non structuré.

# Bibliographie

- [1] M. Afif and B. Amaziane. Convergence of finite volume schemes for a degenerate convection-diffusion equation arising in flows in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191 :5265–5286, 2002.
- [2] H. W. Alt and E. di Benedetto. Nonsteady flow of water and oil through inhomogeneous porous media. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, 12 :335–392, 1985.
- [3] H.W. Alt and S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. *Math. Z.*, 3, pages 311–341, 1983.
- [4] B. Amaziane, S. Antontsev, L. Pankratov, and A. Piatnitski. Homogenization of immiscible compressible two-phase flow in porous media : application to gas migration in a nuclear waste repository. *Multiscale Modeling and Simulation*, 8 :2023–2047, 2010.
- [5] B. Amaziane and M. Jurak. Formulation of immiscible compressible two-phase flow in porous media. *Comptes Rendus Mécanique*, 7(336) :600–605, 2008.
- [6] B. Amaziane, M. Jurak, and Ana Zgaljić-Keko. Modelling and numerical simulations of immiscible compressible two-phase flow in porous media by the concept of globale pressure. *Transp Porous Med*, 84(1) :133–152, 2010.
- [7] B. Amaziane and M. El Ossmani. Convergence analysis of an approximation to miscible fluid flows in porous media by combining mixed finite element and finite volume methods. *Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com)*. DOI 10.1002/num.2029, 2007.
- [8] Y. Amirat, D. Bates, and A. Ziani. Convergence of a mixed finite element-finite volume scheme for a parabolic-hyperbolic system modeling a compressible miscible flow in porous media. *Numer. Math.*, 2005.
- [9] Y. Amirat, K. Hamdache, and A. Ziani. Mathematical analysis for compressible miscible displacement models in porous media. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 6(6) :729–747, 1996.
- [10] Y. Amirat and A. Ziani. Global weak solutions for a parabolic system modeling a one-dimensional miscible flow in porous media. *J. Math. Anal. Appl.*, 220(2) :697–718, 1998.
- [11] B. Andreianov, M. Bendahmane, and Ricardo Ruiz-Baier. Analysis of a finite volume method for a cross-diffusion model in population dynamics. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 21(21) :307–344, 2011.



- 
- [12] B. Andreianov, M. Bendahmane, and M. Saad. Finite volume methods for degenerate chemotaxis model. *Journal of computational and applied mathematics*, 235 :4015–4031, 2011.
- [13] O. Angelini, C. Chavant, E. Chénier, and R. Eymard. A finite volume scheme for diffusion problems on general meshes applying monotony constraints. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47 :4193–4213, 2010.
- [14] S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, and V. N. Monakhov. Boundary-value problems in the mechanics of nonuniform fluids. *Mathematics and Its Applications, North-Holland, Amsterdam*, 1990.
- [15] T. Arbogast. Two-phase incompressible flow in a porous medium with various non homogeneous boundary conditions. *IMA Preprint series 606*, 1990.
- [16] K. Aziz and A. Settari. *Petroleum reservoir simulation*. Applied Science Publishers LTD, London, 1979.
- [17] J. Bear. *Dynamic of flow in porous media*. Dover, 1986.
- [18] M. Bendahmane and K. H. Karlsen. Convergence of a finite volume scheme for the bidomain model of cardiac tissue. *Applied numerical mathematics*, 59(9) :2266–2284, 2009.
- [19] M. Bendahmane, Z. Khalil, and M. Saad. Convergence of a finite volume scheme for gaz water flow in a multi-dimensional porous media. *submitted*, 2010.
- [20] A. Bourgeat, M. Jurak, and F. Smai. Two-phase, partially miscible flow and transport modeling in porous media ; application to gaz migration in a nuclear waste repository. *Computational Geosciences*, 4(6) :309–325, 2009.
- [21] Y. Brenier and J. Jaffré. Upstream differencing for multiphase flow in reservoir simulation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28 :685–696, 1991.
- [22] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1983.
- [23] F. Caro, B. Saad, A. Genty, and E. Laucoin. Numerical simulation of two phase flow in porous media in a context of high performance computing. *MAMERN*, 2009.
- [24] F. Caro, B. Saad, and M. Saad. Two-component two-compressible flow in a porous medium. *Acta Applicandae Mathematicae (accepted)*, DOI : 10.1007/s10440-011-9648-0 (2011).
- [25] G. Chavent and J. Jaffré. *Mathematical models and finite elements for reservoir simulation : single phase, multiphase, and multicomponent flows through porous media*. North Holland, 1986.
- [26] Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow. existence, uniqueness and regularity of a weak solution. *Journal of Differential Equations*, 171 :203–232, 2001.
- [27] Z. Chen. Degenerate two-phase incompressible flow. regularity, stability and stabilization. *Journal of Differential Equations*, 186 :345–376, 2002.
- [28] Z. Chen and R. E. Ewing. Mathematical analysis for reservoirs models. *SIAM J. math. Anal.*, 30 :431–452, 1999.

- 
- [29] C. Choquet. On a nonlinear parabolic system modelling miscible compressible displacement in porous media. *Nonlinear Anal. T.M.A.*, 6(1-2) :237–260, 2005.
- [30] C. Choquet. Asymptotic analysis of a nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media. *Nonlinear Differential Equations and Appl.*, 15(6) :757–782, 2008.
- [31] C. Choquet. Nuclear contamination in a naturally fractured porous medium. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 42(2) :281–288, 2008.
- [32] C. Choquet. On a fully nonlinear parabolic problem modelling miscible compressible displacement in porous media. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008(339) :1112–1133, 2008.
- [33] O. Coussy. *Poromechanics*. John Wiley and Sons, 2004.
- [34] F.Z. Dai, R. Eymard, and D. Hilhorst. Existence of a solution for two phase flow in porous media : The case that the porosity depends on pressure. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1(326) :332–351, 2007.
- [35] H. Darcy. *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. 647. Dalmont, Paris, 1856.
- [36] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *Finite Volume Methods*, volume 7. Handbook of Numerical Analysis, P. Ciarlet, J. L. Lions, eds, North-Holland, Amsterdam, 2000.
- [37] R. Eymard, R. Herbin, and A. Michel. Mathematical study of a petroleum-engineering scheme. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(6) :937–972, 2003.
- [38] P. Fabrie and M. Langlais. Mathematical analysis of miscible displacement in porous media. *SIAM J. Math Anal.*, 23(6) :1375–1392, 1992.
- [39] P. Fabrie, P. Le Thiez, and P. Tardy. On a system of nonlinear elliptic and degenerate parabolic equations describing compositional water-oil flows in porous media. *Nonlinear Anal.*, 28(9) :1565–1600, 1997.
- [40] X. Feng. On existence and uniqueness results for a coupled systems modelling miscible displacement in porous media. *J. Math. Anal. Appl.*, 194(3) :883–910, 1995.
- [41] G. Gagneux and M. Madaune-Tort. *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, volume 22. Springer-Verlag, 1996.
- [42] C. Galusinski and M. Saad. On a degenerate parabolic system for compressible, immiscible, two-phase flows in porous media. *Advances in Diff. Eq.*, 9(11-12) :1235–1278, 2004.
- [43] C. Galusinski and M. Saad. A nonlinear degenerate system modeling water-gas in reservoir flows. *Discrete and Continuous Dynamical System*, 9(2) :281–308, 2008.
- [44] C. Galusinski and M. Saad. Two compressible immiscible fluids in porous media. *J. Differential Equations*, 244 :1741–1783, 2008.
- [45] J.T. Geller and J.R. Hunt. Mass transfer from nonaqueous phase organic liquids in water-saturated porous media. *Water Resources Research*, 29(4) :833–845, 1993.
- [46] J. Jaffré and A. Sboui. Henry's law and gas phase disappearance. *Transport in Porous Media*, 12 :521–526, 2010.

- [47] Z. Khalil. *Écoulement diphasique compressible et immiscible en milieu poreux : analyse mathématique et numérique*. Thèse de doctorat de l'École Centrale de Nantes, 2010.
- [48] Z. Khalil and M. Saad. Solutions to a model for compressible immiscible two phase flow in porous media. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2010(122) :1–33, 2010.
- [49] Z. Khalil and M. Saad. On a fully nonlinear degenerate parabolic system modeling immiscible gas-water displacement in porous media. *Nonlinear Analysis*, 12 :1591–1615, 2011.
- [50] D. Kroener and S. Luckhaus. Flow of oil and water in a porous medium. *J. Differential Equations*, 55 :276–288, 1984.
- [51] S.N. Kruzhkov. Results concerning the nature of the continuity of solutions of parabolic equations and some their applications. *Mat. Zametki*, 6(1) :517–523, 1969.
- [52] S. N. Kruzhkov and S. M. Sukorjanskii. Boundary problems for systems of equations of two-phase porous flow type ; statement of the problems, questions of solvability, justification of approximate methods. *Math. USSR Sb.*, 33 :62–80, 1977.
- [53] N. V. Krylov. *Nonlinear elliptic and parabolic equations of the second order*. D. Reidel Publishing Company, 1987.
- [54] O. A. Ladyzenskaja. *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, volume 23. American mathematical society providence, rhode island, 1968.
- [55] A. C. Lam, R. S. Schechter, and W. H. Wade. Mobilization of residual oil under equilibrium and nonequilibrium conditions. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 23 :781–790, 1983.
- [56] J. L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.
- [57] G. De Marsily. *Quantitative hydrogeology*. Masson, 1981.
- [58] A. Michel. A finite volume scheme for the simulation of two-phase incompressible flow in porous media. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41 :1301–1317, 2003.
- [59] A. Mikelić. An existence result for the equations describing a gas-liquid two-phase flow. *Comptes rendus Mécanique*, 337(4) :226–232, 2009.
- [60] C. T. Miller, M. M. Poirier-Mac Neill, and A. S. Mayer. Dissolution of trapped nonaqueous phase liquids :mass transfer characteristics. *Water Resources Research*, 26(11) :2783–2796, 1990.
- [61] MoMaS. Modélisation mathématiques et simulation numériques liées aux problèmes de gestion des déchets nucléaires. <http://www.gdrmomas.org>.
- [62] D.W. Peaceman. *Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation*. Elsevier Scientific Publishing, 1977.
- [63] S. E. Powers, C. O. Loureiro, L. M. Abriola, and W.J. Weber. Theoretical study of the significance of nonequilibrium dissolution of nonaqueous phase liquids in subsurface systems. *Water Resources Research*, 27 :463–477, 1991.

- 
- [64] M. Quintard and S. Whitaker. Convection, dispersion, and interfacial transport of contaminants : Homogeneous porous media. *Advances in Water Resources*, 17(4) :221–239, 1994.
- [65] Y. Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing Company, 1996.
- [66] J. Simon. Compact sets in  $L^p(0, t; b)$ . *Ann. Mat. Pura Appl.*, 4(146) :65–96, 1987.
- [67] F. Smaï. Apparition-disparition de phase dans un écoulement diphasique eau/hydrogène en milieu poreux : Ecoulement diphasique avec des conditions initiales hors équilibre. [http://sources.univ-lyon1.fr/cas\\_test/sature\\_3.pdf](http://sources.univ-lyon1.fr/cas_test/sature_3.pdf).
- [68] F. Smaï. Développement d’outils mathématiques et numériques pour l’évaluation du concept de stockage géologique. Technical report, Thèse de Doctorat, Université de Lyon, 2009.
- [69] F. Smaï. A model of multiphase flow and transport in porous media applied to gas migration in underground nuclear waste repository. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 347 :527–532, 2009.
- [70] J. Talandier. Présentation d’un benchmark sur la simulation des écoulements biphasiques en milieux poreux : application au transfert des gaz autour du stockage de déchets radioactifs, benchmark presented on the web page comptes rendus mécanique, [http://www.andra.fr/interne.php3?id\\_article=913id\\_rubrique=76](http://www.andra.fr/interne.php3?id_article=913id_rubrique=76).
- [71] E. Zeidler. *Nonlinear Analysis and Fixed-Point Theorems*. Berlin, Springer-Verlag, 1993.