



**HAL**  
open science

**Formes normales de champs de vecteurs : restes exponentiellement petits dans le cas non autonome périodique et orbites homoclines à plusieurs boucles au voisinage de la résonance  $0^2iw$  hamiltonienne.**

Tiphaine Jézéquel

► **To cite this version:**

Tiphaine Jézéquel. Formes normales de champs de vecteurs : restes exponentiellement petits dans le cas non autonome périodique et orbites homoclines à plusieurs boucles au voisinage de la résonance  $0^2iw$  hamiltonienne.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2011. Français. NNT: . tel-00649382

**HAL Id: tel-00649382**

**<https://theses.hal.science/tel-00649382>**

Submitted on 7 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par l'Université Toulouse 3 - Paul Sabatier  
Discipline ou spécialité : *Mathématiques*

---

Présentée et soutenue par *Tiphaine Jézéquel*  
Le 11 juillet 2011

**Titre :** *Formes normales de champs de vecteurs : restes exponentiellement petits dans le cas non autonome périodique et orbites homoclines à plusieurs boucles au voisinage de la résonance  $0^2$  iw Hamiltonienne.*

---

### JURY

*Mariana HARAGUS, Université de Franche-Comté (Rapporteuse)*  
*Gérard IOOSS, Université de Nice (Examineur)*  
*Eric LOMBARDI, Université Toulouse 3 (Directeur de thèse)*  
*Gueorgui POPOV, Université de Nantes (Rapporteur)*  
*Jean-Michel ROQUEJOFFRE, Université Toulouse 3 (Examineur)*  
*Violaine ROUSSIER-MICHON, INSA Toulouse (Examinatrice)*

---

**Ecole doctorale :** *Mathématiques Informatique et Télécommunications de Toulouse*

**Unité de recherche :** *Institut de Mathématiques de Toulouse*

**Directeur(s) de Thèse :** *Eric LOMBARDI*

**Rapporteurs :** *Mariana HARAGUS, Gueorgui POPOV*



# Remerciements

Je tiens tout d'abord bien sûr à remercier vivement Éric, qui a su rester présent sans baisser les bras malgré un emploi du temps surchargé, malgré les déceptions rencontrées aux débuts de ma thèse, et sans jugement malgré nos grandes différences humaines face à l'adversité. Merci aussi d'avoir su me proposer des thèmes de travail aussi jolis tout en étant adaptés au timing serré de ma thèse. Je crois que la clarté et la largeur de vue de tes explications mathématiques et ton souci du détail dans le travail des démonstrations me manqueront !

Merci beaucoup à Georgi Popov et Mariana Haragus qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse, dans un délai pourtant court, merci pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail. Je remercie aussi Jean-Michel d'accepter d'être membre du jury, et aussi pour l'aiguillage en stage de Master, le travail qu'on a fait en commun avec Éric m'avait beaucoup plu. Merci aussi à Gérard de faire le déplacement pour faire partie de mon jury, ainsi que pour les quelques coups de pouce mathématiques par mail, et pour ta bonne humeur mathématique communicative.

Merci beaucoup à Patrick Bernard, d'avoir accepté que je prenne la suite de ce très joli travail qu'il avait commencé avec Éric, et surtout pour les coups de main essentiels donnés par mail... et ton stoïcisme face à la naïveté de mes questions.

Un grand merci à Violaine, pour la participation au jury, mais surtout pour la présence inébranlable dans les coups durs. Tu as été mon "joker" mathématique des moments difficiles, et travailler avec toi est un plaisir. Patrick, aussi, pour les conseils en Master et le soutien compréhensif et amical dans mes doutes de première année, et quelques encouragements bien sentis qui ont touché juste. Merci aussi à Aude, toi aussi tu as été un "joker coup dur" pour moi pendant ces quelques années, et ce autant sur le plan professionnel que amical.

J'ai aussi une pensée particulière pour toutes les mathématiciennes, rencontrées notamment dans le cadre du projet Femmes Scientifiques ou au Forum des Jeunes Mathématiciennes, avec lesquelles j'ai eu des échanges riches ou parfois simplement dont le plaisir communicatif dans le travail m'ont encouragée à m'accrocher. J'ai puisé énormément d'énergie et de confiance auprès de vous, sans compter les nombreuses pistes de réflexion.

Je remercie aussi particulièrement tous mes cobureaux successifs : Michael le "grand frère" toujours enthousiaste de la première année ; Julien et Benjamin pour leur constance encourageante dans le travail, et pour avoir supporté mes humeurs en dents de scie de 4e année ; et aussi Marion (Gabarro) et Salvador pour le joyeux accueil dans leur bureau. J'ai une pensée pour les bons moments avec l'ensemble des thésards toulousains, la bonne

ambiance motivante des séminaires étudiants, et l'échange entre moniteurs.

Quelques pensées particulières dans le désordre pour les bons moments à l'IMT avec Stefan Possanner et son enthousiasme permanent, Marie-Laure et sa bonne humeur, Stefan Le Coz pour les discussions d'avenir.

Je tiens à remercier plus particulièrement Jérémie, Jorge, Mélanie et Marion. Jérémie, pour ta belle amitié, pour les clés que m'ont apporté nos discussions sur nos difficultés mathématiques (le guide du doctorant!), tout en partageant des moments inoubliables aussi bien amicaux que musicaux. Jorge pour le plaisir que ça a été de travailler à tes côtés, le réconfort dans quelques moments importants pour moi, et le plaisir de partager autant de valeurs et de bons moments d'amitié, de danse et de musique tout en étant collègues. Mélanie pour ta gentillesse et nos échanges enrichissants sur nos points communs de thésardes tout en s'étonnant mutuellement de nos grandes différences. Et Marion la "soeur de thèse" pour les midis de printemps et le soutien mutuel, pour les piscine-séminaires D.E.L. et pour la sympathique perspective de travailler ensemble à l'avenir.

J'ai aussi une pensée pour tous les "vieux potes" matheux de l'ENS à Rennes. On ne s'est parfois vus que de loin en loin, parfois plus, mais l'idée d'être collègues ou futurs collègues avec vous est toujours une perspective réjouissante et motivante. Je pense par exemple à Alain, Benjamin (Audoux), Julien à nouveau, Michel, Vincent, Adrien, Matthieu, Fanny.

Quatre ans de thèse, c'est aussi une grande tranche de vie, et j'y ai appris que ma créativité dans le travail est exactement proportionnelle à mon bien-être en dehors du travail. Il est donc naturel de remercier aussi tous les amis (géniaux) qui ont été et sont à mes côtés.

Par ordre inversement chronologique : merci à toi Zoé, je ne sais pas comment je serais arrivée au bout de ces derniers mois sans notre soutien mutuel, et à Pierre pour le chouette week-end dans le coeur de la période la plus dure. Merci à Adeline, Loïc, Lucie, Laurent, Erwan et Flo pour les petits moments de détente amicale et musicale qui ont compté dans mon sprint final, et plus largement pour tous les supers moments partagés avec vous ces dernières années. Merci aussi à Sidonie, avec laquelle il y a eu de si nombreux bons moments. A la grande amie Cécile, avec laquelle l'amitié continue de tenir la longueur malgré les bifurcations successives de nos vies, et c'est un sacré plaisir ! Merci aussi à Erwan, dont le soutien en début de thèse a été important, et pour le respect et la compréhension dont il a fait preuve, sans animosité.

Je garde aussi une place vraiment particulière pour Vincent surtout, et pour Simon, Michael (et encore Jérémie) : notre groupe a vraiment été un point de repère essentiel, nos répétitions hebdomadaires à chaque fois une bouffée d'air frais sur laquelle je savais que je pouvais compter contre vents et marées. Bien sûr, je pense aussi à tous les musiciens/danseurs toulousains avec lesquels j'ai partagé plein de moments d'exception et auprès desquels j'ai puisé l'énergie qui me manquait quand les maths ne marchaient pas.

En dernier mais pas les moindres, ma super-famille ! Je suis fière des valeurs que vous m'avez transmises, et votre soutien indéfectible me surprend et m'impressionne toujours autant. Mes grands-parents qui sont fiers quoi que je fasse et ne se privent pas de me le dire. Mes parents et mon frère préféré, toujours un peu étonnés de ce que je fais de ma vie, mais surtout toujours prêts à arriver à la rescousse à la moindre alerte, et toujours-toujours au bout du fil.





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1 Théorie des formes normales au voisinage d'un point d'équilibre . . . . .	9
1.1 Aspects élémentaires, motivations . . . . .	9
1.2 Normalisation jusqu'à un degré $n$ . . . . .	10
1.3 Des cas de formes normales convergentes . . . . .	11
2 Orbites homoclines . . . . .	11
2.1 Motivations physiques . . . . .	11
2.2 Construction d'orbites homoclines par perturbation . . . . .	12
3 Phénomènes exponentiellement petits . . . . .	14
3.1 Problèmes à échelles multiples et distance exponentiellement petite entre les deux branches d'une orbite homocline perturbée . . . . .	15
3.2 Forme normale avec reste exponentiellement petit . . . . .	16
4 Travail réalisé dans cette thèse . . . . .	16
<b>1 Normalisations avec restes exponentiellement petits pour des champs de vecteurs analytiques non autonomes périodiques</b>	<b>19</b>
1 Introduction . . . . .	19
2 Notations and main results . . . . .	22
2.1 A few notations . . . . .	22
2.2 Uncoupling subsets of coordinates . . . . .	23
2.3 Normal form . . . . .	25
3 Proof of theorem 2.7 . . . . .	27
3.1 Strategy of proof . . . . .	27
3.2 Norms on $\mathcal{P}_p(E_0, H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ . . . . .	28
3.3 Step A : construction of $\Phi$ . . . . .	29
3.4 A few properties of norms . . . . .	34
3.5 Step B : Choice of $p = p_{opt}$ , upper bound for the remainder . . . . .	40
3.6 Step C : Upper bound for $V^1$ . . . . .	44
4 Proof of theorem 2.14 . . . . .	46
4.1 Notations, strategy of construction for $\Phi$ and $\mathcal{N}$ . . . . .	46
4.2 Affine equation on $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ . . . . .	47
4.3 End of the proof (sketch) . . . . .	52



<b>2</b>	<b>Orbites homoclines à plusieurs boucles près d'un point d'équilibre à résonance <math>0^2i\omega</math> pour des systèmes Hamiltoniens</b>	<b>55</b>
1	Introduction . . . . .	55
1.1	Résonance $0^2i\omega$ pour les champs de vecteurs Hamiltoniens . . . . .	55
1.2	Résonance $0^2i\omega$ et hydrodynamique. . . . .	56
1.3	Résonance $0^2i\omega$ dans le cadre réversible . . . . .	57
1.4	Orbites homoclines à un point centre-selle dans le cadre Hamiltonien	58
1.5	Orbites homoclines à plusieurs boucles dans le cadre Hamiltonien. .	60
2	Énoncé des principaux résultats . . . . .	62
3	Structure de la démonstration du Théorème 2.2 . . . . .	65
3.1	Normalisation et changement d'échelle, étude des formes normales de degré 3 et $n$ . . . . .	65
3.2	Construction de l'application de premier retour à la section . . . . .	69
3.3	Construction d'une courbe invariante pour l'application de premier retour par un théorème KAM . . . . .	73
3.4	Démonstration du Théorème 2.2 . . . . .	78
4	Forme normale et changement d'échelle : démonstration de la Proposition 3.1	82
5	Existence de l'application de premier retour à $\Sigma_1$ : démonstration des Propositions 3.3 et 3.4 . . . . .	85
5.1	Écriture de $\Sigma_1$ sous forme de graphe dans les coordonnées locales $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . . . . .	85
5.2	Régularité du flot à la rotation près . . . . .	87
5.3	Démonstration de la proposition 3.3 : existence de l'application globale de $\Sigma_2$ à $\Sigma_1$ . . . . .	89
5.4	Démonstration de la proposition 3.4 : existence et régularité de l'application complète de retour à $\Sigma_1$ . . . . .	95
6	Écriture des restrictions de l'application de premier retour comme des difféomorphismes d'un anneau de $\mathbb{R}^2$ : démonstration de la Proposition 3.5	98
6.1	Démonstration du (i) de la proposition 3.5 : dans $\Sigma_1$ , écriture de la variété centre-stable $W^{cs}(0)$ comme un graphe . . . . .	98
6.2	Deux lemmes pour la démonstration du (ii) de la proposition 3.5 : géométrie des $W^s(P^a)$ sur le graphe de $W^{cs}(0)$ . . . . .	100
6.3	Démonstration du (ii) de la Proposition 3.5 : dans la section $\Sigma_1$ , écriture du niveau d'énergie de $P^a$ sous forme de graphe ; positions relatives de ce graphe et de celui de $W^{cs}(0)$ . . . . .	104
6.4	Démonstration du (iii) de la Proposition 3.5 : existence d'une restriction de $\Psi$ dans le domaine où le niveau d'énergie de $P^a$ s'écrit comme un graphe . . . . .	110
7	Construction d'une courbe invariante pour les restrictions de l'application de premier retour par un théorème KAM : démonstration de la Proposition 3.8 . . . . .	112
7.1	Estimations pour l'application de premier retour pour la forme normale du système, $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$ . . . . .	112
7.2	Majoration $\mathcal{C}^k$ de $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$ . . . . .	121

7.3	Changement de coordonnées, démonstration de (ii),(iii) et (iv) de la Proposition 3.8 . . . . .	125
7.4	Les applications $\hat{\Psi}^a$ sont exactes . . . . .	127
A	Annexe. Démonstration du Théorème 2.3 . . . . .	131
B	Annexe. Lemmes techniques en lien avec la relation d'ordre $\prec$ . . . . .	136
C	Annexe. Construction d'un changement de coordonnées local canonique : démonstration de la Proposition 3.2 . . . . .	142
C.1	Diagonalisation / passage en complexes . . . . .	143
C.2	Première famille de changements de coordonnées, $F_{\underline{\varepsilon}}$ , pas encore canoniques . . . . .	144
C.3	Construction de la famille de changements de coordonnées canoniques $F_{\underline{\varepsilon}}^*$ . . . . .	155
C.4	Majoration de $F_{\underline{\varepsilon}}^* - F_0^*$ . . . . .	161
C.5	Retour dans $\mathbb{R}^4$ , démonstration de la Proposition C.1 . . . . .	172
	<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>181</b>
	<b>Table des symboles</b>	<b>183</b>
	<b>Résumé / Abstract</b>	<b>185</b>



# Introduction

## 1 Théorie des formes normales au voisinage d'un point d'équilibre

### 1.1 Aspects élémentaires, motivations

On s'intéresse à la dynamique de champs de vecteurs admettant un point d'équilibre que l'on place à l'origine. Soit

$$\frac{du}{dt} = Lu + V(u), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

où  $L$  est linéaire et

$$V(0) = 0, \quad D_u V(0) = 0. \quad (1.2)$$

Il est usuel de chercher de toutes premières informations par l'étude du système linéarisé : on voit le système complet comme une perturbation du linéarisé, et dans certains cas la dynamique linéaire persiste. Bien sûr, cette première approche ne permet pas de travailler sur les éventuels comportements non linéaires du système (les orbites homoclines par exemple, voir partie 2 de cette introduction).

Une deuxième idée est alors d'écrire le développement de Taylor de  $V$  jusqu'à un degré  $n$

$$\frac{du}{dt} = Lu + T_n(u) + R_n(u), \quad R_n(u) = \mathcal{O}(|u|^{n+1}), \quad (1.3)$$

avec l'intention de faire une étude du système en deux étapes :

**Étape 1** on étudie le système tronqué

$$\frac{du}{dt} = Lu + T_n(u) ;$$

**Étape 2** on étend le comportement du système tronqué au système complet par une méthode de perturbations.

Se pose alors le problème de la résolution d'un système différentiel polynomial : à la différence des systèmes linéaires, on ne sait pas en général résoudre de tels systèmes.

Poincaré dans ses travaux autour de la mécanique céleste [59] a proposé de chercher alors un changement de coordonnées polynomial qui "simplifie le plus possible" la partie polynomiale du système ; son but initial était même de fabriquer un changement de coordonnées polynomial qui annule le polynôme de Taylor, par élimination successive des monômes

par degré croissant. Annuler le polynôme de Taylor n'est en général pas possible : des monômes persistent, qu'on appelle les *monômes résonants*. On obtient alors à l'ordre  $n$  quelconque un nouveau système de la forme

$$\frac{dy}{dt} = Ly + \mathcal{N}_n(y) + \mathcal{R}_n(y), \quad \mathcal{R}_n(y) = \mathcal{O}(|y|^{n+1}). \quad (1.4)$$

On appellera *forme normale* du système (1.1) le système (1.4) pour  $\mathcal{R}_n \equiv 0$ .

La théorie des formes normales est l'étude de ces changements de coordonnées qui permettent de simplifier le plus possible la partie polynomiale d'un champ de vecteurs.

## 1.2 Normalisation jusqu'à un degré $n$

Plusieurs théories des formes normales existent, selon l'espace dans lequel on choisit les monômes résonants. En effet, lors du processus d'élimination successive des monômes, on trouve comme condition sur les monômes résonants l'appartenance à un espace supplémentaire (dans un espace de polynômes) à un espace dont l'expression dépend de la partie linéaire  $L$  du système. On a donc une marge de liberté sur le choix de l'espace supplémentaire, dont le choix peut être fait au cas par cas selon la partie linéaire  $L$ .

### 1.2.a Forme normale de Elphick-Tirapegui-Brachet-Coulet-Iooss

Elphick, Tirapegui, Brachet, Coulet et Iooss [18] ont proposé un choix systématique de cet espace supplémentaire, basé sur la construction d'un produit scalaire dans l'espace des polynômes : le choix du supplémentaire se porte alors naturellement sur l'orthogonal, et ce choix est intrinsèque. Une des propriétés intéressantes de cette forme normale est que les symétries du système initial sont transmises au système mis sous forme normale. Elle a ainsi notamment été utilisée depuis pour les travaux sur les systèmes réversibles ([33, 38, 47] ainsi que des exemples dans [32] et [29]).

### 1.2.b Systèmes Hamiltoniens et formes normales de Birkhoff

Dans le cadre des systèmes Hamiltoniens, une théorie des formes normales à part a été développée, pour plusieurs raisons. La première raison est que la construction d'un changement de coordonnées canonique (*i.e.* conservant la structure Hamiltonienne) se fait en général par une méthode différente de la construction d'un changement de coordonnées quelconque : la méthode des fonctions génératrices. Et ainsi le problème du choix de l'espace supplémentaire ne se pose pas de la même manière. La deuxième raison est le type de problèmes étudiés dans le cadre Hamiltonien : le problème de l'existence de tores invariant a mené à de nombreux travaux très poussés dans la lignée des résultats de Birkhoff [10] et de Gustavson [25] (voir par exemple Arnold *et al.* [6]).

Ces théorèmes ne traitent que le cas où la partie quadratique du Hamiltonien est elliptique, ce qui correspond à un champ de vecteurs dont la partie linéaire a un spectre composé exclusivement de valeurs propres imaginaires pures. Et la forme normale de Birkhoff consiste à choisir des monômes résonants dans l'ensemble des monômes ne dépendant que des variables actions, de manière à avoir pour le système polynomial des tores invariants. Ce qui est possible sous certaines hypothèses, et conduit ici aussi à une normalisation qui

conserve les symétries existantes (voir Churchill *et al.* [11]). Avec ce choix de normalisation, la méthode de perturbation pour l'étape 2 décrite dans la partie 1.1 pourra ensuite être basée sur l'utilisation d'un théorème KAM.

### 1.3 Des cas de formes normales convergentes

Il est naturel ensuite de se poser la question de la convergence de la forme normale quand le degré  $n$  auquel on normalise tend vers l'infini, dans le cas d'un champ de vecteurs analytique. Si la forme normale converge on a une simplification complète du système, dont on connaît alors toute la dynamique, à la seule condition de comprendre celle de la forme normale. Il existe quelques résultats dans ce sens, obtenus plutôt comme des généralisations des résultats de linéarisation locale de Liapounoff [48]. C'est le cas des théorèmes de Siegel et Moser [52, 53]. Souvent, la convergence n'a lieu que sur un sous-espace : par exemple le résultat de Moser [52] peut être vu comme une normalisation du type des formes normales de Birkhoff (généralisé à un cas non elliptique), convergente sur un sous-espace de dimension 4.

La question de la convergence est aussi à rapprocher des méthodes utilisées dans le cadre Hamiltonien pour démontrer les théorèmes KAM (Kolmogorov [41], Arnold [5], Moser [51]). Ces méthodes consistent à prouver, en un certain sens, la convergence de la forme normale sur un tore.

## 2 Orbites homoclines

### 2.1 Motivations physiques

La question de l'existence d'orbites homoclines pour des systèmes dynamiques est liée à la question, en physique, de l'existence d'ondes solitaires. Les ondes solitaires, et notamment les solitons (qui sont des ondes solitaires ayant des propriétés particulières), sont des objets très étudiés dans de nombreux domaines de la physique (voir par exemple Dauxois et Peyrard [16] pour un point de vue global sur les aspects physiques du sujet). Leurs propriétés physiques et mathématiques telles que la stabilité et l'apparition de comportements chaotiques en font des objets suscitant la curiosité, et sont actuellement une clé pour étudier la dynamique d'un système à l'écart des méthodes linéaires. En particulier, on retrouve parmi les propriétés des solitons beaucoup d'aspects de la dualité onde-particule des systèmes quantiques.

Dans le cadre hydrodynamique par exemple, la recherche d'ondes solitaires peut-être formulée en utilisant une approche de type dynamique spatiale comme la recherche d'orbites homoclines d'un système dynamique de dimension infinie. Dans un certain nombre de cas, cette étude peut se réduire à l'étude de systèmes dynamiques de dimension finie. Détaillons cette approche, qui a été introduite par Kirchgässner [40] (voir aussi [29]).

On s'intéresse au flot en dimension 3 d'un fluide parfait de densité constante soumis à la gravité et à des forces de tension de surface, régi par les équations d'Euler. On procède en deux étapes :

**Étape 1** on cherche des solutions particulières sous la forme d'ondes progressives à 2

dimensions se déplaçant à une vitesse  $c$ , c'est-à-dire de la forme

$$u(x, y, t) = v(x - ct, y).$$

On peut alors écrire le système comme une équation d'évolution en dimension infinie (dépendant d'un paramètre  $c$ )

$$\frac{dw}{dt} = \mathcal{A}w + \mathcal{N}(w)$$

en posant

$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\rightarrow \text{espace de fonctions} \\ \xi &\mapsto (y \mapsto v(\xi, y)). \end{aligned}$$

**Étape 2** quand le spectre de la partie linéaire se présente bien, on peut ensuite se ramener en dimension finie par un théorème de variété centrale.

Plus largement, quand on n'obtient pas l'existence d'ondes solitaires, on s'intéresse aussi à l'existence d'ondes solitaires généralisées, ce qui correspond dans le système en dimension finie à des orbites homoclines à des orbites périodiques (voir Figure 1) .

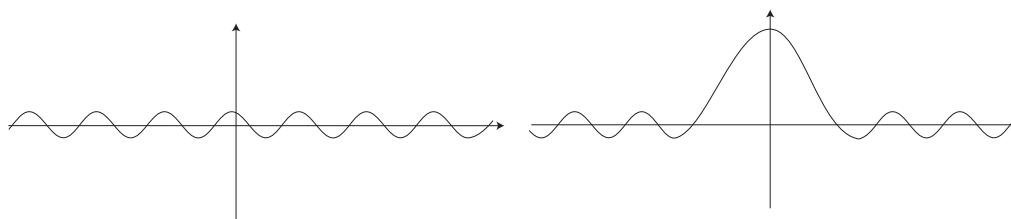


FIGURE 1 – Orbite périodique et orbite homocline à une orbite périodique ou onde solitaire généralisée.

## 2.2 Construction d'orbites homoclines par perturbation

La question de l'existence d'orbites homoclines de petites amplitudes est naturellement reliée à la théorie des formes normales car c'est un cas de phénomène non linéaire (voir ci-dessus partie 1.1).

Étudier l'existence d'une orbite homocline à un point d'équilibre (resp. à une orbite périodique) revient à étudier l'intersection de la variété stable à ce point d'équilibre (resp. à cette orbite périodique) avec sa variété instable . Pour démontrer que les variétés stable et instable s'intersectent, des méthodes différentes existent, utilisant la structure particulière des problèmes abordés. Observons déjà que par des considérations de dimension, pour un même nombre de valeurs propres hyperboliques, il est plus probable de réussir à construire une orbite homocline à une orbite périodique qu'une orbite homocline à un point fixe. Par exemple, dans le cas considéré au chapitre 2 on a deux valeurs propres hyperboliques (une stable et une instable) pour un point fixe ainsi que pour des orbites périodiques ; les variétés stable et instable sont alors deux courbes pour le point fixe, et deux variétés de dimension 2 pour les orbites périodiques.

On s'intéresse ici aux méthodes de construction par perturbation : on considère le cas d'une famille de champs de vecteurs voisins d'un champ de vecteurs admettant une orbite homocline. Cette situation apparaît notamment dans le cas où on a pu montrer qu'une forme normale du champ de vecteurs admet une orbite homocline, on cherche alors à montrer que le système complet en admet aussi (c'est l'étape 2 décrite dans la partie 1.1).

### 2.2.a Méthode de Melnikov

Cette méthode a été proposée par Melnikov [49] puis développée par Arnold [4]. L'idée est de calculer d'abord une paramétrisation analytique des variétés stable et instable pour le champ de vecteurs non perturbé. On se place ensuite sur une normale à l'orbite homocline et on évalue la distance entre les variétés stable et instable le long de cette normale (voir Figure 2). Apparaît alors naturellement une fonction dite de Melnikov ; si cette fonction s'annule, on en déduit par fonctions implicites l'existence d'orbites homoclines pour une sous-famille de la famille de champs de vecteurs étudiée.

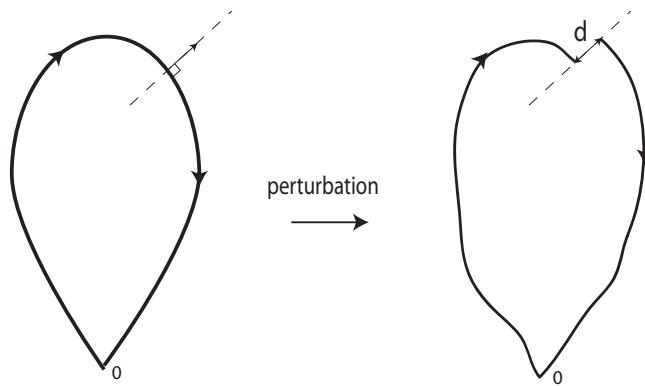


FIGURE 2 – Perturbation d'une orbite homocline à 0.  $d$  est la distance mesurée dans la méthode de Melnikov.

### 2.2.b Cadre réversible

Dans le cas des champs de vecteurs réversibles étudiés par exemple par Iooss et Pérouème [38] et par Lombardi [47], on s'intéresse à la perturbation d'une orbite réversible homocline à un point fixe. Les variétés stable et instable sont alors symétriques l'une de l'autre, et on sait donc que si la variété stable intersecte l'espace vectoriel des points invariants par la symétrie de réversibilité, alors la variété instable l'intersecte aussi au même endroit et on obtient ainsi une orbite homocline réversible. L'étude des orbites homoclines réversibles consiste donc à rechercher l'intersection de la variété stable avec l'espace de symétrie (voir Figure 3), ce qui simplifie grandement l'étude.

### 2.2.c Cadre Hamiltonien, méthode de Conley

Les méthodes précédentes permettent difficilement de tenir compte de la possibilité d'orbites homoclines à plusieurs boucles. La méthode suggérée par Conley [12, 13] puis



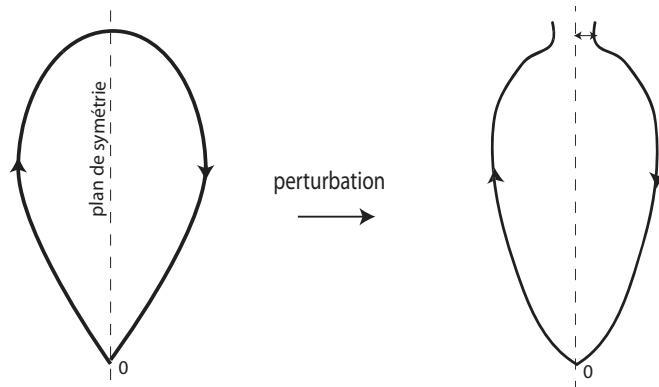


FIGURE 3 – Perturbation d’une orbite homocline à 0 réversible.

développée par Mielke *et al.* [50] appréhende mieux ce cas de figure. Elle consiste à introduire deux sections transverses à l’orbite homocline existante au voisinage du point fixe, et d’étudier les itérations de l’application de premier retour (voir Figure 4). La construction de l’application de premier retour passe alors par l’utilisation d’une normalisation locale au voisinage du point fixe dont l’existence n’est démontrée que pour les champs de vecteurs Hamiltoniens (la normalisation démontrée par Moser [52] déjà évoquée ci-dessus).

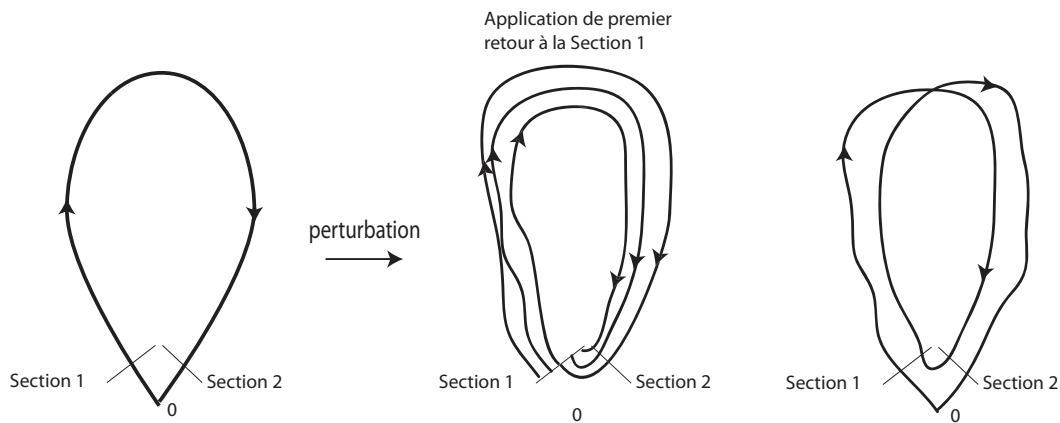


FIGURE 4 – Méthode de Conley.

### 3 Phénomènes exponentiellement petits

On va s’intéresser plus particulièrement dans cette thèse à des situations où des phénomènes exponentiellement petits apparaissent. Pour une famille de champs de vecteurs paramétrée par  $\lambda$ , au voisinage d’une singularité en  $\lambda = 0$ , il s’agira d’un phénomène exponentiellement petit en  $\lambda$ , *i.e.* de taille  $\mathcal{O}(e^{-\frac{Cte}{\lambda^\alpha}})$  avec  $\alpha > 0$ .

### 3.1 Problèmes à échelles multiples et distance exponentiellement petite entre les deux branches d’une orbite homocline perturbée

Dans certains problèmes où des échelles multiples en le paramètre  $\varepsilon$  coexistent (par exemple une orbite homocline de taille 1 couplée avec une rotation à vitesse  $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ , ou encore un forçage périodique de fréquence  $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ ), la fonction de Melnikov ou/et la distance entre la variété stable et le plan de symétrie sont des quantités exponentiellement petites en le paramètre  $\varepsilon$ , données par des intégrales oscillantes. Dans un tel cas, l’existence ou la non existence de l’intersection entre les variétés stable et instable qui correspond à l’annulation ou non de la fonction de Melnikov est difficile à établir.

#### 3.1.a Cadre Hamiltonien

Sanders [61] a le premier souligné l’apparition de ce genre de problèmes dans le cadre Hamiltonien : quand on applique la méthode de Melnikov à un système après l’avoir mis sous forme normale de Birkhoff, on obtient une fonction de Melnikov qui dépend de la taille  $\varepsilon$  de la perturbation (entre la forme normale et le système complet), mais qui dépend aussi de la vitesse à laquelle varie la variable angle (la fréquence) le long de l’orbite homocline de la forme normale. Cette fonction de Melnikov prend alors la forme d’une intégrale oscillante, de taille exponentiellement petite en  $\varepsilon$  si la fréquence est en  $\mathcal{O}(\frac{1}{\varepsilon})$ .

Lazutkin [43] a eu l’idée de chercher des estimations plus précises des intégrales oscillantes dans le cadre analytique en prolongeant le problème dans le plan complexe et en utilisant des résultats du type du théorème des résidus. De nombreux résultats de majorations de la fonction de Melnikov ont été obtenus ensuite sur des problèmes modèles à un ou deux degrés de liberté avec forçage périodique rapide [56, 19, 30, 20], puis sur des cas plus généraux de forçage quasipériodique, faisant intervenir des problèmes fins de petits diviseurs [63, 62].

#### 3.1.b Méthode formelle ”asymptotics beyond all orders” et méthode rigoureuse dans le cadre réversible

Un problème similaire apparaît dans un modèle physique de croissance de cristaux étudié par Dashen et al. [15] : l’existence d’une orbite hétérocline est soumise au calcul d’une intégrale oscillante. Ce problème a été étudié tout d’abord de manière rigoureuse par Hammersley et Mazzarino [28], Amick et McLeod [1], mais avec des arguments spécifiques à ce modèle. De même, l’étude de l’existence d’ondes solitaires hydrodynamiques pour l’équation de KdV mène au calcul d’une intégrale oscillante ; ce problème a été résolu par Amick et McLeod [2], mais en utilisant fortement la spécificité de l’équation.

Kruskal et Segur [42] ont proposé une approche formelle (non rigoureuse) pour le modèle de croissance des cristaux basée sur des développements asymptotiques ; cette approche est souvent appelée ”asymptotics beyond all orders”, et s’adapte à de nombreux autres problèmes faisant intervenir des termes exponentiellement petits. Elle a par exemple été utilisée par Hakim [26] pour le modèle de digitation visqueuse de Saffman-Taylor ainsi que pour le problème des orbites homoclines pour un système Hamiltonien avec forçage rapide [27]. Cette méthode a aussi inspiré des travaux en hydrodynamique [21, 65].

S’inspirant des ces approches formelles, une série de travaux rigoureux, initiée par Hunter et Scheurle [31], a ensuite porté sur l’existence d’ondes solitaires généralisées (*i.e.* d’orbites

homoclines à des petites orbites périodiques voisines du point d'équilibre); l'estimation des intégrales oscillantes permet dans ce cas de connaître la taille minimale à partir de laquelle les orbites périodiques admettent une orbite homocline. Des raffinements successifs permettant de montrer l'existence d'orbites homoclines à des orbites périodiques de plus en plus petites ont ensuite été calculés : Amick et Toland [3] pour KdV ; Sun et Shen [64] puis Lombardi [46] pour l'équation d'Euler. Lombardi [47] a ensuite généralisé et formalisé ces travaux en terme général de bifurcations de systèmes réversibles. Ses résultats ont permis ensuite entre autres de mener des travaux similaires dans le cas d'une chaîne d'oscillateurs couplés [7, 34].

### 3.2 Forme normale avec reste exponentiellement petit

Pour traiter des problèmes tels que ceux décrits ci-dessus en 3.1, il était alors naturel de chercher à améliorer les résultats de formes normales jusqu'à un degré  $n$ , pour lesquels le reste (et donc la perturbation à rajouter à l'étape 2 décrite dans la partie 1.1) est de taille  $\mathcal{O}(|x|^n)$ . En s'autorisant à choisir le degré  $n$  auquel on applique le théorème de forme normale, Iooss et Lombardi [37] ont obtenu, sous certaines hypothèses dont l'analyticité du champ de vecteur, que par un choix optimal  $n_{opt}$  du degré on obtient un reste  $\mathcal{R}_{n_{opt}}$  de taille exponentiellement petite ([35] explique comment ces résultats s'appliquent dans le cadre de la partie 3.1). Les mêmes auteurs [36] ont ensuite transposé leur méthode de démonstration qui s'adapte à la construction de quasi-variétés invariantes à un exponentiellement petit près.

La question de la taille du reste dans la forme normale peut aussi apparaître naturellement en reformulant la question de la convergence posée dans la partie 1.3 : dans les cas où on n'arrive pas à montrer que la série des formes normales converge (et donc que cette série est une fonction analytique), on peut affaiblir le résultat en cherchant si la série vérifie des estimations Gevrey. C'est en effet en démontrant que la série des formes normales successives vérifie des estimations Gevrey que le résultat de reste exponentiellement petit est démontré dans [37].

## 4 Travail réalisé dans cette thèse

L'objet de cette thèse est de creuser certains aspects des problèmes liés aux phénomènes exponentiellement petits.

### Chapitre 1

Dans le premier chapitre, on démontre un théorème de forme normale avec reste exponentiellement petit, dans la lignée de celui démontré par Iooss et Lombardi [37].

On s'intéresse dans ce premier chapitre à un champ de vecteurs analytique non autonome périodique en temps. Elphick *et al.* [17] ont démontré un résultat de forme normale non autonome au degré  $n$  pour les champs de vecteurs non autonomes périodiques.

Il était donc naturel de chercher à savoir si, comme dans le cadre autonome traité par Iooss et Lombardi [37], on pouvait obtenir une estimation Gevrey de la série des formes normales, ainsi qu'une majoration exponentiellement petite du reste pour un choix optimal du degré  $n$ . On obtient bien un tel résultat. La principale difficulté étant que le

raisonnement amenant à la démonstration des estimations Gevrey passe d'un problème en dimension finie (pour le cas autonome) à un problème en dimension infinie dénombrable : on travaille ici dans l'espace des fonctions périodiques. De plus, le produit scalaire utilisé par Elphick *et al.* [17] pour le choix de l'espace supplémentaire auquel appartiennent les monômes résonants (voir partie 1.2) est sensiblement modifié pour bien arriver au résultat escompté.

## Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'existence d'orbites homoclines au voisinage d'un point d'équilibre d'une famille de champs de vecteurs Hamiltoniens passant par une résonance  $0^2i\omega$ .

La même question a été étudiée par Lombardi [47] pour des champs de vecteurs réversibles et non Hamiltoniens. Dans les deux cas, on montre tout d'abord qu'il existe au voisinage de l'équilibre une famille d'orbites périodiques (théorème de Lyapunov-Moser pour le cadre Hamiltonien, théorème de Lyapunov-Devaney pour le cadre réversible). Dans son cas, une normalisation par le théorème de forme normale de Elphick *et al.* [18] fait apparaître une forme normale admettant des orbites homoclines à chacune des orbites périodiques. Il utilise ensuite la méthode de perturbation décrite dans la partie 2.2.b pour étudier la persistance de ces orbites homoclines pour le système complet. Or, la bifurcation  $0^2i\omega$  est un cas de figure tel que décrit dans la partie 3.1, et la distance entre l'espace de symétrie et la variété stable à l'équilibre ou à une orbite périodique s'exprime comme une intégrale oscillante, exponentiellement petite, au voisinage de la résonance  $0^2i\omega$ . Il obtient alors l'existence d'orbites homoclines aux orbites périodiques de taille supérieure à une fonction exponentiellement petite  $\kappa_1$  en le paramètre de bifurcation ; il montre même de plus qu'il existe une deuxième fonction exponentiellement petite  $\kappa_2 < \kappa_1$  telle que les orbites périodiques de taille inférieure à  $\kappa_2$  n'admettent pas d'orbites homoclines à une boucle.

Dans le cas Hamiltonien étudié dans ce deuxième chapitre, on obtient l'existence d'orbites homoclines à toutes les orbites périodiques aussi proches de l'équilibre que l'on veut. Cependant, la question de l'existence d'une orbite homocline à l'équilibre reste ouverte.

On démontre tout d'abord un théorème de forme normale canonique (*i.e.* préservant la structure Hamiltonienne). On s'inspire pour cela de la méthode basée sur la construction d'un produit scalaire de Elphick *et al.* [18], en l'adaptant au cadre Hamiltonien. L'esprit de ce théorème est donc différent de celui formes normales de Birkhoff. Le système Hamiltonien sous forme normale admet des orbites homoclines à l'équilibre et aux orbites périodiques voisines. On utilise ensuite la méthode de perturbation de Conley décrite dans la partie 2.2.c. Pour cela, on utilise le résultat de normalisation locale de Moser [52], qu'on affine avec des estimations en fonction du paramètre de bifurcation. Ensuite, en construisant une courbe invariante pour l'application de Poincaré avec un théorème KAM, on obtient un confinement des itérations de l'application de premier retour. On conclut alors par un argument de conservation de l'aire par le flot Hamiltonien.

Les travaux sur les orbites homoclines au voisinage d'une résonance  $0^2i\omega$  sont motivés par l'apparition d'une telle résonance en hydrodynamique, pour des équations à la fois réversibles et Hamiltoniennes. Avec ce point de vue, le résultat obtenu dans ce chapitre

est une manière de contourner, par des méthodes particulières aux systèmes Hamiltoniens, le problème lié à la distance exponentiellement petite entre les branches des orbites homoclines rencontré dans le cadre réversible. Malheureusement, pour obtenir ce résultat on fait une hypothèse supplémentaire sur la partie quadratique du Hamiltonien qui n'est pas vérifiée dans les équations hydrodynamiques, et est essentielle pour l'obtention du résultat. On s'attend à obtenir un comportement chaotique au voisinage de l'origine dans le cas où cette hypothèse n'est pas vérifiée, mais cette question reste ouverte, tout comme la question de la dynamique obtenue dans le cas où le champ de vecteur est seulement  $\mathcal{C}^k$  et pas analytique.

# Chapitre 1

## Normalisations avec restes exponentiellement petits pour des champs de vecteurs analytiques non autonomes périodiques

### 1 Introduction

Let us consider an analytic differential system, near an equilibrium point that we take at the origin. To study the behaviour of solutions in this neighborhood, one can try to simplify the system by using a change of variables. "Simplify" can have several meanings : in fact what is expected is to obtain a system that we understand better than the initial system. Here we consider two different points of view. Precisely, let us consider an initial nonautonomous system of the form

$$\frac{du}{dt} = Lu + V(u, t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}^m, \quad (1.1)$$

where  $L$  is linear, and  $V$  is analytic, quadratic in  $u$  and  $T$ -periodic, namely

$$V(0, \cdot) = 0, \quad D_u V(0, \cdot) = 0, \quad (1.2)$$

$$V(\cdot, t + T) = V(\cdot, t) \text{ for all } t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

This means that we consider a nonautonomous system, but with an autonomous linear part. We will develop in this chapter the two following ideas to simplify a such system.

**Simplification 1 : Uncoupling subsets of coordinates ; link with invariant manifolds.** If we assume that our initial system can be split into

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + V_0(u_0, u_1, t), \\ \frac{du_1}{dt} = L_1 u_1 + V_1(u_0, u_1, t), \end{cases} \quad (1.4)$$

where  $u = (u_0, u_1)$ , then one could want to find a change of variables of the form

$$u_1 = v_1 + \Phi(u_0, t),$$

for which the system (1.4) is transformed into a new system

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + V^0(u_0, v_1, t), \\ \frac{dv_1}{dt} = L_1 v_1 + v_1 V^1(u_0, v_1, t). \end{array} \right. \quad (1.5)$$

$$(1.6)$$

This idea of simplification is very close to the one used in KAM theory, for Hamiltonian systems (see Kolmogorov (1954), Arnold (1978)). Here, when such a change of variables exists, the main consequence is that  $v_1(t) = 0$  is a solution for equation (1.6), and hence one can consider the reduced system defined by equation (1.5). In particular, the set  $\{v_1 = 0\}$  is an invariant manifold for our differential system. In the case of an autonomous system, this invariant manifold  $\{v_1 = 0\}$  reads in the initial coordinates  $\{u_1 = \Phi(u_0)\}$ . Here, working with periodic in time functions, this manifold will be a periodic manifold  $\{u_1 = \Phi(u_0, t)\}$ . The search of invariant manifolds and reduced systems is a key tool (Kelley (1967), for instance, develops this subject), widely used in the study of physical systems. For example, Haragus and Iooss (2010) provide lots of applications of the center manifold theorem.

**Simplification 2 : Normal forms.** The normal form theories usually concern autonomous vector fields. In the case of nonautonomous analytic systems the same philosophy apply, if we consider the expansion of  $V$  in power series with time-dependant coefficients; the aim is then to find a change of variables of the form

$$u = y + \Phi(y, t),$$

such that our system (1.4) is transformed into a new system

$$\frac{dy}{dt} = Ly + \mathcal{N}(y, t),$$

in which  $\mathcal{N}$  is "as simple as possible". The original purpose of Poincaré in normal form theory was to obtain  $\mathcal{N} = 0$ , but in general, when trying to eliminate monomials in the expansion of  $V$ , one can see that some resonant monomials remain whatever you do. So  $\mathcal{N}$  will be an analytic function whose expansion in power series is only made of the resonant monomials, which happen to be those satisfying a "normal form criteria". There exist several normal form theories, leading to different normal form criterias. Here we work with the characterization introduced by Elphick *et al.* (1987), i.e. we get power series made of monomials commuting with the  $e^{tL^*}$  for all  $t$  in  $\mathbb{R}$ . Precisely, we want  $\mathcal{N}$  to satisfy

$$e^{-tL^*} \mathcal{N}(e^{tL^*} y, t) = \mathcal{N}(y, 0), \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}^m \text{ and all } t \in \mathbb{R}. \quad (1.7)$$

Applying a normal form theorem, one expect that a system with less numerous monomials will be easier to study than the initial system which happens to be often the case (see for instance Iooss and Adelmeyer (1992), Iooss and Peroueme (1993) and Lombardi (2000)).

**In fact, for both simplifications 1 and 2, it is very rarely possible to find exactly such changes of variables, but it is possible up to finite order.** Precisely, for a fixed integer  $p$ , after changes of variables  $\Phi_p$  of degree  $p$ , it was proved (see Haragus and Iooss (2010) for simplification 1, Iooss and Adelmeyer (1992) for simplification 2 in the autonomous case) that one can obtain transformed systems of the form

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + V^0(u_0, v_1, t), \\ \frac{dv_1}{dt} = L_1 v_1 + v_1 V_p^1(u_0, v_1, t) + R_p(u_0, t), \end{cases}$$

for simplification 1, and

$$\frac{dy}{dt} = Ly + \mathcal{N}_p(y, t) + R_p(y, t),$$

for simplification 2; where  $V_p^1$  and  $\mathcal{N}_p$  are polynomials of degree  $p$ , and  $R_p$  is analytic of order larger than  $p$ . It is an interesting result since a usual way to study the dynamics of a vector field is to study the system truncated at a fixed order in the expansion in power series, and then to consider the complete vector field as a perturbation of this truncated system (see Guckenheimer and Holmes (1983), Iooss and Peroueme (1993), Lombardi (2000), Chossat and Iooss (1994)).

But to apply perturbation theory, those results are particularly interesting if the remaining part  $R_p$  happens to be small. So the next key idea is to optimize the degree  $p$  of the truncation, to minimize the size of the remaining part  $R_p$ . For autonomous systems, Iooss and Lombardi (2010, for transformation 1 and 2005, for transformation 2) followed an idea developed before for Hamiltonian systems (developped by Nekoroshev (1977, 1979); see also Pöschel (1993)) to prove that when some light hypothesis hold, the remaining part  $R_{p_{opt}}$  can be found exponentially small.

**In this chapter, we generalize those theorems with exponentially small remainders to nonautonomous systems with a periodic time dependency and an autonomous linear part.** We prove here in our theorem 2.7 (for simplification 1) and our theorem 2.14 (for simplification 2) that, with light hypothesis of non-resonance on the non-linear part, we have the same kind of results that for autonomous systems; in particular, notice that we obtain time-independant exponentially small bounds for the remainder.

**This situation arises quite often in applications**, when a system is periodically forced. Our theorem 2.7 and its corollary 2.10 might be used for instance in the case considered by Touzé and Amabili (2006) in which they build reduced-order models for nonlinear vibrations of structures. In their section 3.2, they consider a two-dof system with damping terms ( $\xi_1$  and  $\xi_2$ ) and with a periodic forcing ( $F_1$ ), of the form

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_1}{dt^2} + 2\xi_1 \omega_1 \frac{dX_1}{dt} + \omega_1^2 X_1 = V_1(X_1, X_2) + F_1 \cos(\Omega t), \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 X_2}{dt^2} + 2\xi_2 \omega_2 \frac{dX_2}{dt} + \omega_2^2 X_2 = V_2(X_1, X_2) \end{cases} \quad (1.9)$$

where  $V_1, V_2$  are quadratic in  $(X_1, X_2)$ . In their analysis, they consider that  $\xi_1$  is small and



then that the first oscillator  $X_1$  plays the role of a central manifold : namely they use the central manifold theorem to state that the mode  $X_2$  does not awake as  $t$  goes to infinity, thus they make the approximation  $X_2 = 0$  to solve the first equation (1.8) and then solve the second equation (1.9) with the value  $X_1(t)$  computed. They observe that this process gives good qualitative results for small values of  $F_1$ . In fact, the center manifold theorem does not apply here because this system is not autonomous when  $F_1$  is nonzero. Here we show in our corollary 2.10 that if this forcing term  $F_1$  is small, then the invariant manifold nearly remains time-independent. Precisely, if one take  $F_1 = \varepsilon^2$ , then the corollary 2.10 ensures that the equation leading to the invariant manifold reads

$$X_2 = \Phi_A(X_1) + \varepsilon\Phi_B(X_1, \varepsilon, t)$$

where  $\Phi_A$  does not depend on  $t$ .

In section 2 we gather the main results of the chapter. We need for that purpose to introduce, in subsection 2.1, a few notations. We then state in subsection 2.2 our first main theorem (theorem 2.7), which deals with the "Simplification 1" described above, and we state in subsection 2.3 the second main theorem (theorem 2.14) which is a normal form theorem ("Simplification 2" above). Then the rest of the chapter is devoted to the proofs of these two theorems : we detail the proof of theorem 2.7 in section 3 (the strategy of proof is introduced in the first subsection (3.1)), and in section 4, we give the main ideas of proof of theorem 2.14 (here also the strategy is given in the first subsection 4.1).

## 2 Notations and main results

We gather in this section the main theorems proved in this chapter. In the whole chapter, we consider a differential system of the form (1.1), assuming that (1.2) holds. We also assume that the map  $V$  is analytic in  $u$ , and that its time-dependancy is  $T$ -periodic with regularity  $H^\ell$ . For that purpose we need to define precisely a space  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  of such functions. So, in the following subsection, we begin by defining this set of functions and other usefull sets.

### 2.1 A few notations

We first recall what we denote by  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ .

**Définition 2.1**  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$  stands for the Sobolev space of functions  $f$  from  $\mathbb{R}/T\mathbb{Z}$  to  $\mathbb{R}^m$  whose Fourier coefficients  $f^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  satisfy

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^\ell \left| f^{(k)} \right|_{\mathbb{R}^m}^2 < +\infty.$$

We can then define the space we wanted for  $V$ .

**Définition 2.2** For any neighborhood  $\Omega$  of the origin in  $\mathbb{R}^m$  let  $\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  be the space of maps  $V$  for which there exists a family of  $q$ -linear symmetric maps  $(V_q(t))_{q \geq 0}$

on  $(\mathbb{R}^m)^q$ , with a radius of convergence  $\rho$  and a positive constant  $c$  such that

$$V(u, t) = \sum_{q=0}^{+\infty} V_q(t)[u^{(q)}],$$

(here  $[u^{(q)}]$  stands for the  $q$ -uple of vectors  $[u, u, \dots, u]$ ) and

$$|V_q(\cdot)[u_1, \dots, u_q]|_{H^\ell} \leq \frac{c}{\rho^q} |u_1| |u_2| \cdots |u_q| \quad \text{for all } u_1, \dots, u_q \in \mathbb{R}^m.$$

We also need, to state our main theorems, the following spaces.

**Définition 2.3** Let  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^{m_0}, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1}))$  be the space of polynomials  $P$  of degree less than  $p$ , namely which read

$$P(x_1, \dots, x_{m_0}, t) = \sum_{|\alpha| \leq p} P_\alpha(t) x_1^{\alpha_1} \cdots x_{m_0}^{\alpha_{m_0}}$$

where  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m_0})$  belongs to  $\mathbb{N}^{m_0}$ ,  $P_\alpha$  to  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1})$ , and

$$|\alpha| = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_{m_0}|.$$

And let  $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^{m_0}, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1}))$  be the space of homogeneous polynomials  $P$  of degree  $n$ , namely of the form

$$P(x_1, \dots, x_{m_0}, t) = \sum_{|\alpha|=n} P_\alpha(t) x_1^{\alpha_1} \cdots x_{m_0}^{\alpha_{m_0}}$$

where the  $P_\alpha$  are in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1})$ .

## 2.2 Uncoupling subsets of coordinates

In this first subsection, we state a theorem where a change of variables uncouple a subset of variables from another one (it is the "Simplification 1" of the introduction). We suppose here that the linear operator  $L$  is the direct sum of two linear operators. Precisely, we assume

**Hypothèse 2.4** Assume that

- (a) there exist a neighborhood  $\Omega$  of the origin in  $\mathbb{R}^m$  and an integer  $\ell \geq 1$  such that  $V$  belongs to  $\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ ;
- (b)  $L$  is the direct sum of the linear operators  $L_0$  on  $E_0$  (dimension  $m_0$ ) and  $L_1$  on  $E_1$  (dimension  $m_1$ ), with  $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^m$  and  $L_0$  diagonalizable. Hence, splitting  $u$  in  $u = u_0 + u_1$  and  $V = V_0 + V_1$  on  $E_0 \oplus E_1$ , the system (1.1) reads

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + V_0(u_0, u_1, t), \\ \frac{du_1}{dt} = L_1 u_1 + V_1(u_0, u_1, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

(c) there exist two positive constants  $\gamma$  and  $\tau$  such that, denoting the eigenvalues of  $L_0$  by  $\lambda_1^{(0)}, \dots, \lambda_{m_0}^{(0)}$  and by  $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_1}^{(1)}$  the eigenvalues of  $L_1$ , then for all  $a$  in  $\mathbb{N}^{m_0}$ , all  $k$  in  $\mathbb{Z}$  and all  $j$ ,  $1 \leq j \leq m_1$ ,

$$|\langle a, \lambda^{(0)} \rangle + ik \frac{2\pi}{T} - \lambda_j^{(1)}| \geq \frac{\gamma}{(|a| + |k|)^\tau} \quad (2.2)$$

holds.

(d) let  $\nu$  be the maximal size of the Jordan blocks of  $L_1$ , then

$$\tau\nu \leq \ell. \quad (2.3)$$

**Remarque 2.5** We need to take  $\ell \geq 1$  to insure that  $H^\ell$  is an algebra.

**Remarque 2.6** The hypothesis (2.2) is called a "non-resonance" hypothesis : without taking  $k$  into account, this hypothesis means that the eigenvalues of  $L_1$  cannot happen to be a sum of eigenvalues of  $L_0$ , and that moreover we have an estimate of how different they are. Taking  $k$  into account, it expresses that, even after periodic translations of time, non-resonance remains.

We can now state

**Théorème 2.7** Consider the system (2.1), and suppose that hypothesis 2.4 holds. Then there exists  $\delta_0 > 0$  such that, for all  $\delta$  in  $]0, \delta_0[$  there exist an integer  $p_\delta$  with

$$p_\delta = \mathcal{O}_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{-b}),$$

and a function  $\Phi_\delta$  in  $\mathcal{P}_{p_\delta}(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  (where  $\mathcal{P}_p$  was defined in section 2.1) with

$$\Phi_\delta(0, \cdot) = 0, \quad D_{u_0} \Phi_\delta(0, \cdot) = 0;$$

such that the change of variables

$$u_1 = v_1 + \Phi_\delta(u_0, t) \quad (2.4)$$

transforms the system (2.1) into

$$\begin{cases} \frac{du_0}{dt} = L_0 u_0 + V^0(u_0, v_1, t), \\ \frac{dv_1}{dt} = L_1 v_1 + V^1(u_0, v_1, t) + R(u_0, t); \end{cases} \quad (2.5)$$

in which  $V^0, V^1$  and  $R$  are analytic, and satisfy

$$|V^1(u_0, v_1, \cdot)|_{H^\ell} \leq M_0 |v_1| (|u_0| + |v_1|) \quad \text{for } |u_0|, |v_1| \leq \delta_0, \quad (2.6)$$

and

$$\sup_{|u_0| \leq \delta} |R(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq M e^{-\frac{\omega}{\delta^b}}, \quad (2.7)$$

where  $M, M_0, \omega$  depend only on  $T, m_0, m, c, \rho, L, \ell, \delta_0$  and  $\tau$ , and where

$$b = \frac{1}{\ell + \tau\nu + 1}.$$

Moreover,  $V^0$  reads  $V^0(u_0, v_1, t) = V_0(u_0 + v_1 + \Phi_\delta(u_0, t), t)$ .

**Remarque 2.8** Observe that with the system in the new form (2.5)  $v_1 = 0$  is "very close" to solve the second equation, since (2.6) guarantees that for  $v_1 = 0$  we have  $V^1(u_0, 0, \cdot) = 0$ , and since (2.7) ensures that  $R(u_0, \cdot)$  remains exponentially small. Then this theorem expresses that the manifold  $\{u_1 = \Phi_\delta(u_0, t)\}$  is "exponentially close" to be an invariant manifold for our system (1.1).

**Remarque 2.9** This theorem is the generalization to periodic time-dependant vector fields of the Theorem 1 of Iooss and Lombardi (2010). Notice that, unlike the latter, here  $M$  and  $\omega$  also depend on the dimension  $m$ , and not only on the dimension  $m_0$  of  $E_0$ , so that we cannot consider systems of infinite dimension.

Moreover, we have the following proposition, which gives more precision about what happens if the time-dependancy appear as a small perturbation of an autonomous system.

**Corollaire 2.10** Consider the system (2.1) and suppose that hypothesis 2.4 holds. Assume that  $V$  also depends analytically on a parameter  $\varepsilon$  in the following way :

$$V_\varepsilon(u, t) = A(u) + \varepsilon B(u, \varepsilon, t) + \varepsilon^2 C(\varepsilon, t) \quad (2.8)$$

with  $B(0, \cdot, \cdot) = 0$ .

Setting  $U := (u, \varepsilon)$ , if  $A, B$  and  $C$  belong to  $\mathcal{A}(\mathbb{R}^{m+1}, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  then the theorem 2.7 apply and moreover

$$\Phi(u_0, \varepsilon, t) = \Phi_A(u_0) + \varepsilon \Phi_{B,C}(u_0, \varepsilon, t)$$

where  $\Phi_A$  is the change of variables computed applying theorem 2.7 to our system (2.1) at  $\varepsilon = 0$ .

**Remarque 2.11** Remark that (2.8) prevents us to take a periodic forcing of the form  $A(u) + \varepsilon F(t)$ . We need hypothesis (2.8), to apply theorem 2.7 because we want hypothesis  $D_U V(U = 0, \cdot) = 0$  to hold (see (1.2)).

But we can take a periodic forcing  $A(u) + \varepsilon^2 F(t)$ , and then obtain that the periodic invariant manifold  $\{u_1 = \Phi_A(u_0) + \varepsilon \Phi_{B,C}(u_0, \varepsilon, t)\}$  is  $\varepsilon$ -close to the autonomous invariant manifold  $\{u_1 = \Phi_A(u_0)\}$ .

**Remarque 2.12** The proof of this corollary directly follows from the proof of theorem 2.7, the details are left to the reader.

### 2.3 Normal form

In this second subsection, we state a normal form theorem (it is the "Simplification 2" in the introduction). We only assume that the following "non-resonance" hypothesis holds :

**Hypothèse 2.13** Assume that

- (a) there exist a neighborhood  $\Omega$  of the origin in  $\mathbb{R}^m$  and an integer  $\ell \geq 1$  such that  $V$  belongs to  $\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ ;
- (b)  $L$  is diagonalizable;

(c) there exist two positive constants  $\gamma$  and  $\tau$  such that, denoting the eigenvalues of  $L$  by  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  in  $\mathbb{C}^m$ , then for all  $a$  in  $\mathbb{N}^{m_0}$ , all  $k$  in  $\mathbb{Z}$  and all  $j$ ,  $1 \leq j \leq m$

$$|\langle a, \lambda \rangle + ik \frac{2\pi}{T} - \lambda_j| \geq \frac{\gamma}{(|a| + |k|)^\tau}; \quad (2.9)$$

(d)  $\tau \leq \ell$ .

We then have the following normal form theorem.

**Théorème 2.14** *Consider the system (1.1), and suppose that hypothesis 2.13 holds. Then for all  $\delta > 0$  there exist an integer  $p_\delta$  with*

$$p_\delta = \mathcal{O}_{\delta \rightarrow 0}(\delta^{-b}),$$

and a function  $\Phi_\delta$  in  $\mathcal{P}_{p_\delta}(\mathbb{R}^m, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  (where  $\mathcal{P}_p$  is defined in section 2.1) with

$$\Phi_\delta(0, \cdot) = 0, \quad D_u \Phi_\delta(0, \cdot) = 0,$$

such that the change of variables

$$u = y + \Phi_\delta(y, t) \quad (2.10)$$

transforms the system (1.1) into the normal form

$$\frac{dy}{dt} = Ly + \mathcal{N}(y, t) + R(y, t) \quad (2.11)$$

where  $\mathcal{N}$  belongs to  $\mathcal{P}_{p_\delta}(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and satisfy

$$\mathcal{N}(0, \cdot) = 0, \quad D_u \mathcal{N}(0, \cdot) = 0,$$

and the normal form criteria

$$e^{-tL^*} \mathcal{N}(e^{tL^*} y, t) = \mathcal{N}(y, 0), \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}^m \text{ and all } t \in \mathbb{R}; \quad (2.12)$$

and where the remainder  $R$  is analytic and satisfies

$$\sup_{|y| \leq \delta} |R(y, \cdot)|_{H^\ell} \leq M' \delta^2 e^{-\frac{\omega}{\delta^b}}, \quad (2.13)$$

with  $M'$  and  $\omega$  depending only on  $T, m, c, \rho, L, \ell, \delta_0$  and  $\tau$ , and

$$b = \frac{1}{\ell + \tau + 1}.$$

**Remarque 2.15** *This theorem is a typical normal form theorem : its aim is to simplify the initial system with the aid of a change of variables. Indeed, the polynomial change of variables (2.10) transforms the system (1.1) into a new system (2.11) in which the polynomial part  $\mathcal{N}$  is simpler : the normal form criteria (2.12) means that in  $\mathcal{N}$ , all the monomials which does not commute with all the  $e^{sL^*}$  have been eliminated by the change of variable.*

*Moreover, while for some given  $p$  the remainder is polynomially small, this theorem optimizes the degree  $p = p_{\text{opt}}(\delta)$  of the polynomial part  $\mathcal{N}$ , so that the system is nearly reduced to a polynomial system, since (2.13) ensures that the remainder  $R$  is exponentially small.*

**Remarque 2.16** *This theorem is the generalization to periodic time-dependant vector fields of the Theorem 1.4 of Iooss and Lombardi (2005).*

### 3 Proof of theorem 2.7

This section is entirely devoted to the proof of theorem 2.7.

#### 3.1 Strategy of proof

First, fix  $\delta > 0$  and  $p$  in  $\mathbb{N}$ , and see later what conditions on  $\delta$  and  $p$  need to be satisfied. One can check that, for any function  $\Phi$ , the change of variables (2.4)

$$u_1 = v_1 + \Phi(u_0, t)$$

transforms the system (2.1) into the new system (2.5) with

$$V^0(u_0 + v_1, t) = V_0(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t), \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} V^1(u_0 + v_1, t) + R(u_0, t) &= V_1(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - (D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot L_0 u_0 - L_1 \Phi(u_0, t)) \\ &\quad - \partial_t \Phi(u_0, t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Thus, for a fixed  $\Phi$ , equation (3.1) provides the value of  $V^0$ . Then, we look for a function  $\Phi$  such that  $V^1$  and  $R$ , whose sum is computed in (3.2), satisfy

$$|V^1(u_0 + v_1, \cdot)|_{H^\ell} \leq M_0 |v_1| (|u_0| + |v_1|), \quad \text{when } |u_0| \leq \delta_0, \quad (3.3)$$

$$|R(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq M e^{-\frac{\omega}{\delta^b}}, \quad \text{when } |u_0| \leq \delta. \quad (3.4)$$

Necessarily, if (3.3) holds, then for  $v_1 = 0$  equation (3.2) becomes

$$\begin{aligned} R(u_0, t) &= V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - (D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot L_0 u_0 - L_1 \Phi(u_0, t)) - \partial_t \Phi(u_0, t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Define

$$(\mathcal{A}_L \Phi)(u_0, t) := D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot L_0 u_0 - L_1 \Phi(u_0, t).$$

Then (3.5) reads

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_L + \partial_t) \Phi(u_0, t) + R(u_0, t) &= V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t). \end{aligned}$$

Let us denote by  $\Pi_p$  the projection of  $\mathcal{A}(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  on  $\mathcal{P}_p(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ .

**Here is the strategy of proof, in three steps, that we will follow in the next subsections :**

**Step A :** In section 3.3, for any fixed  $p$ , we prove the existence of some  $\Phi$  in  $\mathcal{P}_p(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  such that

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_L + \partial_t) \Phi(u_0, t) &= \Pi_p(V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Step B** : In section 3.5, using the  $\Phi$  computed in Step A, we set

$$\begin{aligned} R(u_0, t) &= (\text{Id} - \Pi_p)(V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0}\Phi(u_0, t).V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Thus,  $R(u_0, t) = \mathcal{O}(|u_0|^{p+1})$ . We then compute upper bounds of  $R$  of the form

$$|R(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq M_p |u_0|^{p+1},$$

with Gevrey estimates for  $M_p$ . And then, for a given  $\delta$ , we chose an integer  $p = p_{opt}$  minimizing  $M_p \delta^{p+1}$ . We will see that if  $\delta$  is sufficiently small, for our choice  $p_{opt}(\delta)$ , the estimate (3.4) holds.

**Step C** : From (3.2), we get the value of  $V^1$  :

$$\begin{aligned} V^1(u_0, v_1, t) &:= -R(u_0, t) + V_1(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0}\Phi(u_0, t).V_0(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - (\mathcal{A}_L + \partial_t)\Phi(u_0, t). \end{aligned}$$

And it remains to show, in section 3.6, that there exists  $M_0$  such that (3.3) holds.

But first, to facilitate the estimates in Step B, we introduce appropriate norms on  $\mathcal{P}_p(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ .

### 3.2 Norms on $\mathcal{P}_p(E_0, \mathbf{H}^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$

In fact, we define norms on the spaces of homogeneous polynomials of degree  $n$   $\mathcal{H}^n(E_0, \mathbf{H}^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  (defined in section 2.1). Let  $(e_1, \dots, e_{m_0})$  be a basis of  $E_0$  and  $(e_{m_0+1}, \dots, e_m)$  a basis of  $E_1$ . Then, if  $f$  belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, \mathbf{H}^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , it reads

$$f(u_0, t) = \sum_{\substack{|\alpha|=n \\ i=1, \dots, m}} f_{\alpha, i}(t) x_1^{\alpha_1} \dots x_{m_0}^{\alpha_{m_0}} e_i := \sum_{|\alpha|=n} f_\alpha(t) x_1^{\alpha_1} \dots x_{m_0}^{\alpha_{m_0}},$$

where

$$u_0 := x_1 e_1 + \dots + x_{m_0} e_{m_0};$$

and  $f_{\alpha, i} \in H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R})$ ,  $f_\alpha \in H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ .

**Définition 3.1** *If  $f$  belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, \mathbf{H}^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and reads*

$$f(X, t) = \sum_{|\alpha|=n} f_\alpha(t) X^\alpha,$$

where

$$X := (X_1, \dots, X_{m_0}), \quad X^\alpha := X_1^{\alpha_1} \dots X_{m_0}^{\alpha_{m_0}};$$

then define

$$\|f\|_{n, H^j}^2 := \left| \sum_{|\alpha|=n} |f_\alpha|_{H^j} X^\alpha \right|_{2, n}^2 = \sum_{|\alpha|=n} \frac{\alpha!}{n!} |f_\alpha|_{H^j}^2 = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^j \left| \sum_{|\alpha|=n} f_\alpha^{(k)} X^\alpha \right|_{2, n}^2;$$

where  $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_{m_0}!$ , and

–  $|\cdot|_{2,n}$  is the norm on  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^{m_0}, \mathbb{R}^{m_1})$ , introduced by Iooss and Lombardi (2005), defined by

$$|P(X)|_{2,n}^2 = \left| \sum_{|\alpha|=n} P_\alpha X^\alpha \right|_{2,n}^2 := \sum_{|\alpha|=n} \frac{\alpha!}{n!} |P_\alpha|_{\mathbb{R}^{m_1}}^2 ;$$

–  $f_\alpha^{(k)} \in \mathbb{R}^m$  stands for the  $k^{\text{th}}$  Fourier coefficient of  $f_\alpha$  ;  
–  $|\cdot|_{H^j}$  is the canonical norm on  $H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$

$$|f|_{H^j}^2 := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^j |f_\alpha^{(k)}|_{\mathbb{R}^m}^2 .$$

In particular, to simplify notations, we denote

$$\|f\|_n := \|f\|_{n, H^\ell} .$$

### 3.3 Step A : construction of $\Phi$

In this subsection we fix an integer  $p$ , and our aim is to construct  $\Phi$  in  $\mathcal{P}_p(E_0, H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  such that (3.6) is satisfied. Denote

$$\Phi(X, t) := \sum_{n=2}^p \Phi_n(X, t)$$

where  $\Phi_n$  belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ . We project (3.6) on the  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ , for  $n \leq p$ . Denoting by  $\pi_n$  the projection on  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ , we obtain :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_L + \partial_t)\Phi_n(u_0, t) &= \pi_n(V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0}\Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Expanding the right hand side of (3.8) in power series, one can observe that, since

$$V(0, \cdot) = 0 = D_{u_0}V(0, \cdot),$$

(because of (1.2)), this right hand side of (3.8) only depends on  $\Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$  and  $u_0, t$ . So, if  $(\mathcal{A}_L + \partial_t)$  is invertible, then (3.8) enables us to construct the  $\Phi_n$  for  $2 \leq n \leq p$  by induction. The rest of this subsection is devoted to the proof of the invertibility of  $\mathbb{A}_L := (\mathcal{A}_L + \partial_t)$ . Precisely, we prove the following

**Lemme 3.2** *If hypothesis 2.4 holds, then the linear operator*

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_L|_{\mathcal{H}^n} : \mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1)) &\longrightarrow \mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1)) \\ \Phi &\longmapsto (\mathcal{A}_L + \partial_t)\Phi \end{aligned}$$

*is invertible.*



Moreover, for all  $j$ ,  $0 \leq j \leq \ell + 1$  and all  $F$  in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  we have

$$\left\| \mathbb{A}_L |_{\mathcal{H}^n}^{-1}(F) \right\|_{n, H^j} \leq C_j n^{j+\tau\nu} \|F\|_n \quad (3.9)$$

where  $\nu$  is defined in hypothesis 2.4 and

$$\begin{aligned} \Lambda &:= \max\{|\lambda_i^{(0)}|, |\lambda_j^{(1)}|, 1 \leq i \leq m_0, 1 \leq j \leq m_1\}, \\ C_j &:= \max(1, \frac{\nu}{\gamma^\nu}) \left(1 + \frac{T^2}{2\pi^2} (4\Lambda^2 + 1)\right)^{\frac{j}{2}}. \end{aligned}$$

**Proof.** To prove this lemma, we use Fourier coefficients, so that instead of one operator in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ , we deal with an infinity of linear operators in  $\mathcal{H}^n(E_0, E_1)$ . Then, for these linear operators we can use the results of invertibility stated by Iooss and Lombardi (2010).

Indeed, any function  $\Phi$  in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  reads

$$\Phi(X, t) := \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) X^\alpha$$

with  $\phi_\alpha$  in  $H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1)$ . Since  $\ell + 1 \geq 1$ , we have the Fourier expansions

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_\alpha^{(k)} e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \\ \partial_t \phi_\alpha(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik \frac{2\pi}{T} \phi_\alpha^{(k)} e^{ik\frac{2\pi}{T}t}, \\ \mathcal{A}_L \phi_\alpha(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{A}_L \phi_\alpha^{(k)} e^{ik\frac{2\pi}{T}t}. \end{aligned}$$

Thus, we obtain, introducing the notation  $\Phi^{(k)}(X)$

$$\begin{aligned} \Phi(X, t) &= \sum_{|\alpha|=n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_\alpha^{(k)} e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \right) X^\alpha = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha^{(k)} X^\alpha \right) e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \\ &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi^{(k)}(X) e^{ik\frac{2\pi}{T}t}; \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_L \Phi(X, t) &= (\mathcal{A}_L + \partial_t) \left( \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) X^\alpha \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \phi_\alpha^{(k)} e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \right) X^\alpha \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{|\alpha|=n} (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \phi_\alpha^{(k)} X^\alpha \right) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha^{(k)} X^\alpha \right) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \Phi^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}.
\end{aligned}$$

We then proceed in several steps.

**Step 1 : We first show that the operator  $\mathbb{A}_L|_{\mathcal{H}^n}$  is injective.**

We fix  $F$  in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ . Denote

$$\begin{aligned}
F(X, t) &:= \sum_{|\alpha|=n} F_\alpha(t) X^\alpha = \sum_{|\alpha|=n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_\alpha^{(k)} e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \right) X^\alpha \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{|\alpha|=n} F_\alpha^{(k)} X^\alpha \right) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}.
\end{aligned}$$

In this first step, we prove that if there exists  $\Phi$  in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$  such that  $\mathbb{A}_L \Phi = F$ , then necessarily  $\Phi$  is unique. Indeed, for any  $\Phi$  in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ , we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_L \Phi = F &\iff \|\mathbb{A}_L \Phi - F\|_{n, H^0}^2 = 0, \\
&\iff \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \Phi^{(k)}(X) - F^{(k)}(X) \right|_{2, n}^2 = 0, \\
&\iff \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) \Phi^{(k)}(X) - F^{(k)}(X) = 0.
\end{aligned}$$

We will then use Lemma 21 b) in Iooss and Lombardi (2010), which will enable us to state that all the linear operators  $(\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T})$ , for  $k$  in  $\mathbb{Z}$ , are invertible in  $\mathcal{H}^n(E_0, E_1)$ . Indeed, for any polynomial  $P$ ,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T}) P(X) &= D_X P(X) L_0 X - L_1 P(X) + ik \frac{2\pi}{T} P(X) \\
&= D_X P(X) L_0 X - (L_1 - ik \frac{2\pi}{T}) P(X) \\
&= \mathcal{A}_{L^{(k)}} P(X),
\end{aligned}$$

where

$$L^{(k)} := \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_1 - ik\frac{2\pi}{T}\text{Id} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Moreover, (2.2) in hypothesis 2.4 ensures that, for all  $k$ ,  $L^{(k)}$  satisfies the hypothesis of Lemma 21 in Iooss and Lombardi (2010). Hence, for all  $k$ ,  $\mathcal{A}_{L^{(k)}}$  is invertible, and thus

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_L \Phi = F &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{A}_{L^{(k)}} \Phi^{(k)}(X) - F^{(k)}(X) = 0, \\ &\iff \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \Phi^{(k)}(X) = \mathcal{A}_{L^{(k)}}^{-1} F^{(k)}(X). \end{aligned}$$

Then, necessarily, if  $\Phi$  exists, then

$$\Phi(X, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\mathcal{A}_L + ik\frac{2\pi}{T})^{-1} F^{(k)}(X) e^{ik\frac{2\pi}{T}t}. \quad (3.11)$$

**Step 2 : Now, we prove that  $\mathbb{A}_L|_{\mathcal{H}^n}$  is also surjective.**

Our aim is now to prove that the  $\Phi$  defined by (3.11) is well-defined and belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ .

**Step 2.1 :  $\Phi$  is well-defined.**

To show that  $\Phi$  is well-defined, we prove that  $\Phi$  is in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ , proving that

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (\mathcal{A}_L + ik\frac{2\pi}{T})^{-1} F^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 < +\infty.$$

We use, here again, inequality (2.2) and Lemma 21 in Iooss and Lombardi (2010), with  $L^{(k)}$  defined in (3.10), to check :

$$\left| (\mathcal{A}_L + ik\frac{2\pi}{T})^{-1} F^{(k)}(X) \right|_{2,n} = \left| \mathcal{A}_{L^{(k)}}^{-1} F^{(k)}(X) \right|_{2,n} \leq \frac{\nu}{\gamma^\nu} (n + |k|)^{\tau\nu} \left| F^{(k)}(X) \right|_{2,n}.$$

Then, since by hypothesis 2.4  $\tau\nu \leq \ell$  holds, we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| (\mathcal{A}_L + ik\frac{2\pi}{T})^{-1} F^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\nu^2}{\gamma^{2\nu}} (n + |k|)^{2\tau\nu} \left| F^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \frac{\nu^2 n^{2\tau\nu}}{\gamma^{2\nu}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^{\tau\nu} \left| F^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \frac{\nu^2 n^{2\tau\nu}}{\gamma^{2\nu}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^\ell \left| F^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ \|\Phi\|_{n, H^0}^2 &\leq \frac{\nu^2 n^{2\tau\nu}}{\gamma^{2\nu}} \|F\|_n^2. \end{aligned}$$

Thus  $\Phi$  is well-defined and

$$\|\Phi\|_{n, H^0} \leq \frac{\nu n^{\tau\nu}}{\gamma^\nu} \|F\|_n. \quad (3.12)$$

**Step 2.2 :**  $\Phi$  belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, \mathbf{H}^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1))$ .

We show, by induction, that if  $j \leq \ell + 1$ , then

$$\Phi \in \mathcal{H}^n(E_0, H^j(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_1)) \text{ and } \|\Phi\|_{n, H^j} \leq C_j n^{j+\tau\nu} \|F\|_n. \quad (3.13)$$

First, observe that (3.12) ensures that (3.13) holds for  $j = 0$ . Then, we assume that (3.13) holds for one  $j \leq \ell$ . We know that, for all  $k$  in  $\mathbb{Z}$ ,

$$(\mathcal{A}_L + ik \frac{2\pi}{T})\Phi^{(k)}(X) = F^{(k)}(X).$$

Hence,

$$ik \frac{2\pi}{T} \Phi^{(k)}(X) = F^{(k)}(X) - \mathcal{A}_L \Phi^{(k)}(X).$$

So

$$(1 + k^2) \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 = \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \frac{T^2}{4\pi^2} \left| F^{(k)} - \mathcal{A}_L \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2,$$

and

$$(1 + k^2) \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 \leq \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \frac{T^2}{2\pi^2} \left( \left| F^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \left| \mathcal{A}_L \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 \right). \quad (3.14)$$

The proof of lemma 21 in Iooss and Lombardi (2010) ensures that the eigenvalues of  $\mathcal{A}_L$  on  $\mathcal{H}^n(E_0, E_1)$  are the

$$|\langle a, \lambda^{(0)} \rangle - \lambda_j^{(1)}|, \quad \text{for } |a| = n, 1 \leq j \leq m_1.$$

Then

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{A}_L \Phi^{(k)}(X) \right|_{2,n} &\leq \max_{|a|=n, 1 \leq j \leq m_1} |\langle a, \lambda^{(0)} \rangle - \lambda_j^{(1)}| \left| \Phi^{(k)}(X) \right|_{2,n} \\ &\leq (n+1) \max_{\substack{1 \leq i \leq m_0 \\ 1 \leq j \leq m_1}} \{|\lambda_i^{(0)}|, |\lambda_j^{(1)}|\} \left| \Phi^{(k)}(X) \right|_{2,n} \\ &= (n+1)\Lambda \left| \Phi^{(k)}(X) \right|_{2,n}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

with the  $\Lambda$  defined in the stating of the lemma. Then, combining (3.14) and (3.15), we obtain that, for all  $k$  in  $\mathbb{Z}$ ,

$$(1 + k^2) \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 \leq \left( 1 + \frac{T^2}{2\pi^2} \Lambda^2 (n+1)^2 \right) \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \frac{T^2}{2\pi^2} \left| F^{(k)} \right|_{2,n}^2.$$

Hence, since we assume that (3.13) holds for  $j$ ,

$$\begin{aligned}
\|\Phi\|_{n, H^{j+1}}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^{j+1} \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^j \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T\Lambda(n+1)}{\pi} \right)^2 \right) \left| \Phi^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \frac{T^2}{2\pi^2} \left| F^{(k)} \right|_{2,n}^2 \right) \\
&\leq \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T\Lambda(n+1)}{\pi} \right)^2 \right) \|\Phi\|_{n, H^j}^2 + \frac{T^2}{2\pi^2} \|F\|_{n, H^j}^2 \\
&\leq \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{T\Lambda(n+1)}{\pi} \right)^2 \right) C_j^2 n^{2j+2\tau\nu} + \frac{T^2}{2\pi^2} \right) \|F\|_{n, H^\ell}^2 \\
&\leq C_{j+1}^2 n^{2(j+1+\tau\nu)} \|F\|_n^2,
\end{aligned}$$

which means that

$$\|\Phi\|_{n, H^{j+1}} \leq C_{j+1} n^{j+1+\tau\nu} \|F\|_n.$$

□

### 3.4 A few properties of norms

We will need, in what follows, a few properties of multiplicativity for the new norms introduced in section 3.2. They will be useful to compute upper bounds for the remainder, whose expression is given with symmetric  $q$ -linear applications. We gather these properties and their proofs in this section.

**Lemma 3.3** *If  $\Phi$  belongs to  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , then*

$$|\Phi(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq \|\Phi\|_n |u_0|^n.$$

**Proof.** If  $\Phi$  is in  $\mathcal{H}^n(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , it reads

$$\Phi(X, t) = \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) X^\alpha,$$

with  $\phi_\alpha$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ . Then, with  $u_0 = x_1 e_1 + \dots + x_{m_0} e_{m_0}$  (notations of section 3.2),

$$\begin{aligned}
|\Phi(u_0, \cdot)|_{H^\ell} &= \left| \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) u_0^\alpha \right|_{H^\ell} \leq \sum_{|\alpha|=n} |\phi_\alpha|_{H^\ell} |x_1|^{\alpha_1} \dots |x_{m_0}|^{\alpha_{m_0}} \\
&= \left( \sum_{|\alpha|=n} |\phi_\alpha|_{H^\ell} X^\alpha \right) \Big|_{X=(|x_1|, \dots, |x_{m_0}|)} \leq \left| \sum_{|\alpha|=n} |\phi_\alpha|_{H^\ell} X^\alpha \right|_{0,n} |u_0|^n,
\end{aligned}$$

where  $|\cdot|_{0,n}$  is the norm defined on  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  by

$$|P(X)|_{0,n} := \sup_{u \in \mathbb{R}^m} \frac{|P(u)|}{|u|^m}.$$

Lemma 2.10 of Iooss and Lombardi (2005) ensures that, for all  $P$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , we have

$$|P(X)|_{0,n} \leq |P(X)|_{2,n}.$$

So,

$$|\Phi(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq \left| \sum_{|\alpha|=n} |\phi_\alpha|_{H^\ell} X^\alpha \right|_{2,n} |u_0|^n = \|\Phi\|_n |u_0|^n.$$

□

We then admit the following

**Lemma 3.4** *There exists a constant  $\mathcal{C}$  such that for all functions  $f, g$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ ,*

$$|fg|_{H^\ell} \leq \mathcal{C} |f|_{H^\ell} |g|_{H^\ell}.$$

And we use it to prove the following

**Lemma 3.5** *Let  $R_q(t)[X_1, \dots, X_q]$  be a symmetric  $q$ -linear application from  $(\mathbb{R}^m)^q$  to  $E_0$  or  $E_1$ . Then, we have*

$$(A_1) \implies (A_2) \implies (A_3) \implies (B) \implies (A'_1),$$

where

(A<sub>1</sub>) for all  $x_1, \dots, x_q$  in  $\mathbb{R}^m$ ,  $|R_q(t)[x_1, \dots, x_q]|_{H^\ell} \leq c \left(\frac{1}{\rho}\right)^q |x_1| \cdots |x_q|$ ;

(A<sub>2</sub>) denoting

$$R_q(t)[X_1, \dots, X_q] := \sum_{1 \leq i_j \leq m} a_{(i_1, \dots, i_q)}(t) X_{1, i_1} \cdots X_{q, i_q},$$

then, for all  $x_1, \dots, x_q$  in  $\mathbb{R}^m$

$$\left| \sum_{1 \leq i_j \leq m} |a_{(i_1, \dots, i_q)}|_{H^\ell} x_{1, i_1} \cdots x_{q, i_q} \right| \leq c \left(\frac{\sqrt{m}}{\rho}\right)^q |x_1| \cdots |x_q|;$$

(A<sub>3</sub>) for all  $f_1, \dots, f_q$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ ,

$$|R_q(t)[f_1, \dots, f_q]|_{H^\ell} \leq c \left(\frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho}\right)^q |f_1|_{H^\ell} \cdots |f_q|_{H^\ell};$$

(B) if  $k_1 + \dots + k_q = n$ , then for all  $\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}$  in  $\mathcal{H}^{k_i}(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$

$$\|R_q(t)[\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}]\|_n \leq c \left(\frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho}\right)^q \|\Phi_{k_1}\|_{k_1} \cdots \|\Phi_{k_q}\|_{k_q};$$

(A'<sub>1</sub>) for all  $x_1, \dots, x_q$  in  $\mathbb{R}^m$ ,  $|R_q(t)[x_1, \dots, x_q]|_{H^\ell} \leq c \left(\frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho}\right)^q |x_1| \cdots |x_q|$ .

**Remarque 3.6**  $(A_1)$  and  $(A'_1)$  are nearly the same property : the only difference between them is that in  $(A'_1)$  the constant in the upper bound is bigger than in  $(A_1)$ . This is due to the fact that in each implication we lose precision in the upper bounds.

**Remarque 3.7** For the following, the most usefull results in this lemma are  $(A_1) \Rightarrow (A_3)$  and  $(A_1) \Rightarrow (B)$ .

**Proof of  $(A_1) \Rightarrow (A_2)$ .**

Assume that  $(A_1)$  holds. Let  $(e_1, \dots, e_m)$  be the basis of  $\mathbb{R}^m$  introduced in section 3.2. Take  $x_1 = e_{i_1}, \dots, x_q = e_{i_q}$ , then

$$|R_q(t)[e_{i_1}, \dots, e_{i_q}]|_{H^\ell} = |a_{(i_1, \dots, i_q)}(t)|_{H^\ell} \leq c \left(\frac{1}{\rho}\right)^q |e_1| \cdots |e_{i_q}| = \frac{c}{\rho^q}.$$

Hence, by Cauchy-Schwarz inequality,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq m} |a_{(i_1, \dots, i_q)}|_{H^\ell} x_{1, i_1} \cdots x_{q, i_q} \right| &\leq \frac{c}{\rho^q} \left| \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq m} |x_{1, i_1} \cdots x_{q, i_q}| \right| \\ &= \frac{c}{\rho^q} \left( \sum_{i_1=1}^m |x_{1, i_1}| \right) \times \cdots \times \left( \sum_{i_q=1}^m |x_{q, i_q}| \right) \\ &\leq \frac{c}{\rho^q} \left( \sqrt{m} \sqrt{\sum_{i_1=1}^m |x_{1, i_1}|^2} \right) \times \cdots \times \left( \sqrt{m} \sqrt{\sum_{i_q=1}^m |x_{q, i_q}|^2} \right) \\ &= c \left( \frac{\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |x_1| \cdots |x_q|. \end{aligned}$$

**Proof of  $(A_2) \Rightarrow (A_3)$ .**

Assume that  $(A_2)$  holds. Let  $f_1, \dots, f_q$  be functions of  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ . Then, using lemma 3.4,

$$\begin{aligned} |R_q(t)[f_1, \dots, f_q]|_{H^\ell} &= \left| \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq m} a_{(i_1, \dots, i_q)}(t) f_{1, i_1}(t) \cdots f_{q, i_q}(t) \right|_{H^\ell} \\ &\leq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_q \leq m} C^q |a_{(i_1, \dots, i_q)}|_{H^\ell} |f_{1, i_1}|_{H^\ell} \cdots |f_{q, i_q}(t)|_{H^\ell} \\ &\leq C^q c \left( \frac{\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |f_1|_{H^\ell} \cdots |f_q|_{H^\ell} \\ &= c \left( \frac{C\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |f_1|_{H^\ell} \cdots |f_q|_{H^\ell}. \end{aligned}$$

**Proof of  $(A_3) \Rightarrow (B)$ .**

We follow the same strategy of proof as that of lemma A8 of Iooss and Lombardi (2005). Assume that  $(A_3)$  is satisfied. Take  $k_1, \dots, k_q$  such that

$$k_1 + \cdots + k_q = n,$$

and take  $\Phi_{k_i}$  in  $\mathcal{H}^{k_i}(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , for  $1 \leq i \leq q$ . Denote

$$\Phi_{k_i}(X, t) := \sum_{|\alpha|=k_i} \phi_{\alpha, k_i}(t) X^\alpha.$$

Then,

$$\begin{aligned} R_q(t) [\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}] &= \sum_{\substack{\alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0} \\ |\alpha^{(i)}|=k_i}} X^{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)}} R_q(t) [\phi_{\alpha^{(1)}, k_1}, \dots, \phi_{\alpha^{(q)}, k_q}] \\ &= \sum_{|\beta|=n} X^\beta \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=k_i \\ \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta}} R_q(t) [\phi_{\alpha^{(1)}, k_1}, \dots, \phi_{\alpha^{(q)}, k_q}]. \end{aligned}$$

Hence, using Cauchy-Schwarz inequality again,

$$\begin{aligned} \|R_q(t) [\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}]\|_n^2 &= \sum_{|\beta|=n} \frac{\beta!}{n!} \left| \sum_{\substack{|\alpha^{(i)}|=k_i \\ \alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta}} R_q(t) [\phi_{\alpha^{(1)}, k_1}, \dots, \phi_{\alpha^{(q)}, k_q}] \right|_{H^\ell}^2 \\ &\leq \sum_{|\beta|=n} \frac{\beta!}{n!} \left( c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta \\ \alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0}, |\alpha^{(i)}|=k_i}} \left| \phi_{\alpha^{(1)}, k_1} \right|_{H^\ell} \cdots \left| \phi_{\alpha^{(q)}, k_q} \right|_{H^\ell} \right)^2 \\ &\leq \sum_{|\beta|=n} \frac{\beta!}{n!} c^2 \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^{2q} \left( \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta \\ \alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0}, |\alpha^{(i)}|=k_i}} \frac{1}{\alpha^{(1)}!} \cdots \frac{1}{\alpha^{(q)}!} \right) \\ &\quad \times \left( \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta \\ \alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0}, |\alpha^{(i)}|=k_i}} \left( \alpha^{(1)}! \left| \phi_{\alpha^{(1)}, k_1} \right|_{H^\ell}^2 \right) \cdots \left( \alpha^{(q)}! \left| \phi_{\alpha^{(q)}, k_q} \right|_{H^\ell}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

And lemma A6 of Iooss and Lombardi (2005) ensures that

$$\sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta \\ \alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0}, |\alpha^{(i)}|=k_i}} \frac{1}{\alpha^{(1)}!} \cdots \frac{1}{\alpha^{(q)}!} = \frac{n!}{\beta!} \frac{1}{k_1! \cdots k_q!}.$$



Then

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{c^2} \left( \frac{\rho}{\mathcal{C}\sqrt{m}} \right)^{2q} \|R_q(t) [\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}]\|_n^2 \\
& \leq \sum_{|\beta|=n} \frac{1}{k_1! \cdots k_q!} \sum_{\substack{\alpha^{(1)} + \dots + \alpha^{(q)} = \beta \\ |\alpha^{(i)}| = k_i}} \left( \alpha^{(1)!} \left| \phi_{\alpha^{(1)}, k_1} \right|_{H^\ell}^2 \right) \cdots \left( \alpha^{(q)!} \left| \phi_{\alpha^{(q)}, k_q} \right|_{H^\ell}^2 \right) \\
& = \sum_{\substack{\alpha^{(i)} \in \mathbb{N}^{m_0} \\ |\alpha^{(i)}| = k_i}} \left( \frac{\alpha^{(1)!}}{k_1!} \left| \phi_{\alpha^{(1)}, k_1} \right|_{H^\ell}^2 \right) \cdots \left( \frac{\alpha^{(q)!}}{k_q!} \left| \phi_{\alpha^{(q)}, k_q} \right|_{H^\ell}^2 \right) \\
& = \left( \sum_{|\alpha^{(1)}|=k_1} \left( \frac{\alpha^{(1)!}}{k_1!} \left| \phi_{\alpha^{(1)}, k_1} \right|_{H^\ell}^2 \right) \right) \cdots \left( \sum_{|\alpha^{(q)}|=k_q} \left( \frac{\alpha^{(q)!}}{k_q!} \left| \phi_{\alpha^{(q)}, k_q} \right|_{H^\ell}^2 \right) \right) \\
& = \|\Phi_{k_1}\|_{k_1}^2 \cdots \|\Phi_{k_q}\|_{k_q}^2.
\end{aligned}$$

Finally, we have

$$\|R_q(t) [\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}]\|_n \leq c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \|\Phi_{k_1}\|_{k_1} \cdots \|\Phi_{k_q}\|_{k_q}.$$

**Proof of (B)  $\Rightarrow$  (A<sub>1</sub>).**

For given  $x_1, \dots, x_q$  in  $\mathbb{R}^m$ , take

$$k_1 = \dots = k_q = n = 0, \quad \Phi_{k_1}(X, t) = x_1, \dots, \Phi_{k_q}(X, t) = x_q.$$

Then, (B) ensures that

$$\begin{aligned}
\|R_q(t) [x_1, \dots, x_q]\|_{H^\ell} &= \|R_q(t) [x_1, \dots, x_q]\|_0 \leq c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \|x_1\|_0 \cdots \|x_q\|_0 \\
&= c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |x_1|_{H^\ell} \cdots |x_q|_{H^\ell} = c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |x_1| \cdots |x_q|.
\end{aligned}$$

□

**Lemme 3.8** *If  $\Phi_k$  is in  $\mathcal{H}^k(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and  $\mathcal{N}_p$  in  $\mathcal{H}^p(E_0, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_0))$ , then*

$$\|D_X \Phi_k(X, t) \mathcal{N}_p(X, t)\|_{k-1+p} \leq \mathcal{C}k\sqrt{m_0} \|\Phi_k\|_k \|\mathcal{N}_p\|_p.$$

**Proof.** Denote

$$\Phi_k(X, t) = \sum_{|\alpha|=k} \phi_\alpha(t) X^\alpha, \quad \mathcal{N}_p(X, t) = \sum_{|\beta|=p} N_\beta(t) X^\beta,$$

where the  $\phi_\alpha$  are in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$  and  $N_\beta$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_0)$ . Moreover, we denote

$$N_\beta(t) := (N_{\beta,1}(t), \dots, N_{\beta,m_0}(t)).$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
D_X \Phi_k(X, t) \cdot \mathcal{N}_p(X, t) &= \sum_{j=1}^{m_0} \left( \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=p}} \phi_\alpha(t) \alpha_j X^{\alpha - \sigma_j} N_{\beta, j}(t) X^\beta \right) \\
&= \sum_{|\gamma|=k-1+p} X^\gamma \left( \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} \alpha_j \phi_\alpha(t) N_{\beta, j}(t) \right),
\end{aligned}$$

where  $\sigma_j$  stands for  $(0, \dots, 0, \overbrace{1}^{j^{\text{th}}}, 0, \dots, 0)$  in  $\mathbb{N}^{m_0}$ . Thus, using Cauchy-Schwarz inequality, we get

$$\begin{aligned}
&\|D_X \Phi_k(X, t) \cdot \mathcal{N}_p(X, t)\|_{k-1+p}^2 \\
&= \sum_{|\gamma|=k-1+p} \frac{\gamma!}{(k-1+p)!} \left| \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} \alpha_j \phi_\alpha(t) N_{\beta, j}(t) \right|_{H^\ell}^2 \\
&\leq \sum_{|\gamma|=k-1+p} \frac{\gamma!}{(k-1+p)!} \left( \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} |\alpha_j| \mathcal{C} |\phi_\alpha|_{H^\ell} |N_{\beta, j}|_{H^\ell} \right)^2 \\
&\leq \mathcal{C}^2 \sum_{|\gamma|=k-1+p} \frac{\gamma!}{(k-1+p)!} \left( \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} \frac{\alpha_j^2}{\alpha! \beta!} \right) \\
&\quad \times \left( \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} \alpha! \beta! |\phi_\alpha|_{H^\ell}^2 |N_{\beta, j}|_{H^\ell}^2 \right).
\end{aligned}$$

Since lemma A7 of Iooss and Lombardi (2005) ensures that

$$\sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha + \beta - \sigma_j = \gamma}} \frac{\alpha_j^2}{\alpha! \beta!} = \frac{1}{k! p!} (k^2 + (m_0 - 1)k) \frac{(k-1+p)!}{\gamma!},$$

we get

$$\begin{aligned}
& \|D_X \Phi_k(X, t) \cdot \mathcal{N}_p(X, t)\|_{k-1+p}^2 \\
& \leq \mathcal{C}^2(k^2 + (m_0 - 1)k) \sum_{|\gamma|=k-1+p} \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{\substack{|\alpha|=k, |\beta|=p \\ \alpha+\beta-\sigma_j=\gamma}} \frac{\alpha! \beta!}{k! p!} |\phi_\alpha|_{H^\ell}^2 |N_{\beta, j}|_{H^\ell}^2 \\
& = \mathcal{C}^2(k^2 + (m_0 - 1)k) \sum_{|\alpha|=k, |\beta|=p} \left( \frac{\alpha!}{k!} |\phi_\alpha|_{H^\ell}^2 \left( \sum_{j=1}^{m_0} \frac{\beta!}{p!} |N_{\beta, j}|_{H^\ell}^2 \right) \right) \\
& = \mathcal{C}^2(k^2 + (m_0 - 1)k) \left( \sum_{|\alpha|=k} \frac{\alpha!}{k!} |\phi_\alpha|_{H^\ell}^2 \right) \left( \sum_{|\beta|=p} \frac{\beta!}{p!} |N_\beta|_{H^\ell}^2 \right) \\
& = \mathcal{C}^2(k^2 + (m_0 - 1)k) \|\Phi_k\|_k^2 \|\mathcal{N}_p\|_p^2 \\
& \leq \mathcal{C}^2 k^2 m_0 \|\Phi_k\|_k^2 \|\mathcal{N}_p\|_p^2.
\end{aligned}$$

Then, we finally have

$$\|D_X \Phi_k(X, t) \cdot \mathcal{N}_p(X, t)\|_{k-1+p} \leq \mathcal{C} k \sqrt{m_0} \|\Phi_k\|_k \|\mathcal{N}_p\|_p.$$

□

### 3.5 Step B : Choice of $p = p_{opt}$ , upper bound for the remainder

As described in part 3.1, for a fixed integer  $p$ , with the  $\Phi$  constructed in section 3.3, we set

$$\begin{aligned}
R(u_0, t) & := (\text{Id} - \Pi_p)(V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t)) \\
& \quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

and we compute an upper bound for  $|R(u_0, \cdot)|_{H^\ell}$ . To simplify notations, let us denote

$$\Phi_1(u_0, t) := u_0, \quad \underline{\Phi}(u_0, t) := \sum_{n=1}^p \Phi_n(u_0, t). \tag{3.17}$$

Then, (3.16) reads

$$\begin{aligned}
R(u_0, t) & = \sum_{q=2}^p \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq p \\ k_1 + \dots + k_q \geq p+1}} V_{1,q}(t) [\Phi_{k_1}(u_0, t), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, t)] \\
& \quad - \sum_{2 \leq j, q \leq p} \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq p \\ k_1 + \dots + k_q \geq p-j+2}} D_{u_0} \Phi_j(u_0, t) \cdot V_{0,q}(t) [\Phi_{k_1}(u_0, t), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, t)] \\
& \quad + \sum_{q \geq p+1} V_{1,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}] \\
& \quad - \sum_{j=2}^p \sum_{q \geq p+1} D_{u_0} \Phi_j(u_0, t) \cdot V_{0,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}].
\end{aligned}$$

So, to evaluate  $|R(u_0, \cdot)|_{H^\ell}$ , the first step is to compute upper bounds for the  $|\Phi_n(u_0, \cdot)|_{H^\ell}$  constructed in Step A. And in fact, using lemma 3.3, it will be sufficient to compute upper bounds for the  $\|\Phi_n\|_n$ . Denote them by

$$\varphi_n := \|\Phi_n\|_n, \quad 1 \leq n \leq p.$$

### 3.5.a Upper bounds for the $\varphi_n$

To compute upper bounds for the  $\varphi_n$ , we have to get back to the construction of the  $\Phi_n$  : they were constructed by induction with the equation (3.8). This equation reads, explicitly

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_L + \partial_t)\Phi_n &= \sum_{q=2}^n \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n}} V_{1,q}[\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}] \\ &\quad - \sum_{j=2}^{n-1} \sum_{q=2}^{n-j+1} \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n-j+1}} D_X \Phi_j \cdot V_{0,q}[\Phi_{k_1}, \dots, \Phi_{k_q}]. \end{aligned}$$

With this last equation, using inequality (3.9) of lemma 3.2,  $(A_1) \Rightarrow (B)$  of lemma 3.5 (since  $V$  is in  $\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and thus satisfies  $(A_1)$ ), and using lemma 3.8, we obtain

$$\begin{aligned} \varphi_n &\leq C_\ell n^{\ell+\tau\nu} \left( \sum_{q=2}^n \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n}} c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_q} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \sum_{q=2}^{n-j+1} \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n-j+1}} C j \sqrt{m_0} \varphi_j c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_q} \right). \end{aligned}$$

Thus,

$$\begin{aligned} \varphi_n &\leq \max(1, \mathcal{C}) C_\ell n^{\ell+\tau\nu} c \left( \sum_{q=2}^n \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n}} \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_q} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^n \sum_{q=2}^{n-j+1} \sum_{\substack{1 \leq k_i \\ k_1 + \dots + k_q = n-j+1}} j \sqrt{m_0} \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q \varphi_j \varphi_{k_1} \dots \varphi_{k_q} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

**Lemma 3.9** For all  $n$  with  $1 \leq n \leq p$ ,

$$\varphi_n \leq \sqrt{m_0} K^{n-1} (n!)^{\ell+1+\tau\nu},$$

where

$$K := \max\left(\frac{9\mathcal{C}\sqrt{m_0}\sqrt{m}}{\rho}, \frac{8C_\ell c(\mathcal{C}\sqrt{m_0})^3 \sqrt{m}}{\rho^2}\right).$$

**Proof.** The same strategy of proof as that of lemma 14 in Iooss and Lombardi (2010) works : indeed, with our norm we also have

$$\varphi_1 = \sqrt{m_0};$$

and our inequality (3.18) is the same as inequality (19) in the proof of lemma 14, if one equates their  $\rho$  with, in our notations,  $\frac{\rho}{c\sqrt{m}}$ , and equates  $a := \mathcal{C}C_\ell$  and  $\tau' := \ell + \tau\nu$ . Then, all the following computations of Iooss and Lombardi (2010) work similarly.  $\square$

### 3.5.b Choice of $p_{opt}$ , upper bounds for $\underline{\Phi}$

Since now, we fix  $\delta > 0$  and choose a value  $p_{opt}(\delta)$  for  $p$ , and in this subsection we find an upper bound for  $\underline{\Phi}$  (defined in (3.17)) with this value of  $p$ .

**Lemme 3.10** Fix  $\delta > 0$ . Denote

$$b := \frac{1}{1+\ell+\tau\nu}, \quad p_{opt} := \left\lceil \frac{1}{(2\delta K)^b} \right\rceil$$

Let us choose  $p = p_{opt}$ . Then, we have, for  $|u_0| \leq \delta$ ,

$$|\underline{\Phi}(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq 2|u_0|\sqrt{m_0} \leq 2\delta\sqrt{m_0}.$$

**Proof.** Take  $p = p_{opt}$  and  $|u_0| \leq \delta$ . Then, using lemmas 3.3 and 3.9 :

$$\begin{aligned} |\underline{\Phi}(u_0, \cdot)|_{H^\ell} &= \left| \sum_{n=1}^p \Phi_n(u_0, \cdot) \right|_{H^\ell} \leq \sum_{n=1}^p |\Phi_n(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq \sum_{n=1}^p \|\Phi_n\|_n |u_0|^n \\ &\leq |u_0| \sum_{n=1}^p \varphi_n \delta^{n-1} \leq |u_0| \sqrt{m_0} \sum_{n=1}^p K^{n-1} \delta^{n-1} (n!)^b \\ &\leq |u_0| \sqrt{m_0} \sum_{n=1}^p (K\delta)^{n-1} (p^{n-1})^b = |u_0| \sqrt{m_0} \sum_{n=1}^p (K\delta p^b)^{n-1} \\ &\leq |u_0| \sqrt{m_0} \sum_{n=1}^p \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq 2|u_0| \sqrt{m_0}. \end{aligned}$$

$\square$

### 3.5.c Upper bound for the remainder

**Lemme 3.11** There exists  $\delta_0$  such that, if  $\delta < \delta_0$ , then, with the choice  $p = p_{opt}$  of lemma 3.10, the remainder  $R$  satisfies

$$\sup_{|u_0| \leq \delta} |R(u_0, \cdot)|_{H^\ell} \leq M e^{-\frac{\omega}{\delta^b}},$$

with

$$\begin{aligned} M &:= c \left( \frac{73}{72} + \mathcal{C}\sqrt{m_0}(2\sqrt{m} + \frac{\sqrt{m_0}}{72}) \right), \quad \omega := \frac{\ln(2)}{2(2K)^b}, \\ \delta_0 &:= \min \left( \frac{1}{2K(2e)^b}, \frac{\rho}{4\mathcal{C}\sqrt{m}\sqrt{m_0}} \right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

**Proof.** Fix  $u_0$  such that

$$|u_0| \leq \delta.$$

We have

$$\begin{aligned} R(u_0, t) &= \sum_{q=2}^p \sum_{\substack{1 \leq k_j \leq p \\ k_1 + \dots + k_q \geq p+1}} V_{1,q}(t) [\Phi_{k_1}(u_0, t), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, t)] \\ &+ \sum_{q \geq p+1} V_{1,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}] \\ &- \sum_{\substack{2 \leq j, q \leq p \\ 1 \leq k_j \leq p \\ k_1 + \dots + k_q \geq p-j+2}} D_{u_0} \Phi_j(u_0, t) \cdot V_{0,q}(t) [\Phi_{k_1}(u_0, t), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, t)] \\ &- \sum_{j=2}^p \sum_{q \geq p+1} D_{u_0} \Phi_j(u_0, t) \cdot V_{0,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}]. \end{aligned}$$

One can check, with the same computations as those of Iooss and Lombardi (2010) in their proof of their lemma 16, that combining our lemma 3.3 with  $(A_1) \Rightarrow (A_3)$  of lemma 3.5 and lemma 3.9, we get

$$\left| \sum_{q=2}^p \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_q \geq p+1 \\ 1 \leq k_j \leq p}} V_{1,q}(\cdot) [\Phi_{k_1}(u_0, \cdot), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, \cdot)] \right|_{H^\ell} \leq \frac{c}{72} e^{-\frac{\ln 2}{(2\delta K)^b}};$$

and that, if  $\delta \leq \frac{1}{2K(2e)^b}$ , then, by lemmas 3.3, 3.5 (with  $(A_1) \Rightarrow (B)$ ) and 3.9, we obtain

$$\left| \sum_{\substack{2 \leq j, q \leq p \\ 1 \leq k_j \leq p \\ k_1 + \dots + k_q \geq p-j+2}} D_{u_0} \Phi_j(u_0, \cdot) \cdot V_{0,q}(\cdot) [\Phi_{k_1}(u_0, \cdot), \dots, \Phi_{k_q}(u_0, \cdot)] \right|_{H^\ell} \leq \frac{c\mathcal{C}m_0}{72} e^{-\frac{\ln 2}{2(2\delta K)^b}},$$

$$\left| \sum_{j=2}^p \sum_{q \geq p+1} D_{u_0} \Phi_j(u_0, t) \cdot V_{0,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}] \right|_{H^\ell} \leq 2\mathcal{C}c\sqrt{m}\sqrt{m_0} e^{-\frac{\ln 2}{2(2\delta K)^b}};$$

and that, if  $\delta \leq \frac{\rho}{4\mathcal{C}\sqrt{m}\sqrt{m_0}}$ , then, using  $(A_1) \Rightarrow (A_3)$  of lemma 3.5, we get

$$\left| \sum_{q \geq p+1} V_{1,q}(t) [\underline{\Phi}(u_0, t)^{(q)}] \right|_{H^\ell} \leq ce^{-\frac{\ln 2}{(2\delta K)^b}}.$$

□

### 3.6 Step C : Upper bound for $V^1$

To complete the proof of the theorem 2.7, it remains to show that (3.3) holds for the choices we have done for  $p$  and  $\Phi$ . As said in part 3.1, we set

$$\begin{aligned} V^1(u_0, v_1, t) &:= -R(u_0, t) + V_1(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot V_0(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - (\mathcal{A}_L + \partial_t) \Phi(u_0, t). \end{aligned}$$

Combining it with (3.6) and (3.7), we get

$$\begin{aligned} V^1(u_0, v_1, t) &= V_1(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) - V_1(u_0 + \Phi(u_0, t), t) \\ &\quad - D_{u_0} \Phi(u_0, t) (V_0(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) - V_0(u_0 + \Phi(u_0, t), t)) \\ &= ((\text{Id} - P_0) - D_{u_0} \Phi(u_0, t) \cdot P_0) (V(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, t), t) - V(u_0 + \Phi(u_0, t), t)) \end{aligned}$$

where  $P_0$  stands for the projection of  $\mathbb{R}^m$  on  $E_0$ . We begin by showing an upper bound for  $D_{u_0} \Phi$ .

**Lemma 3.12** *If  $0 < \delta < \delta_0$ , and  $p = p_{opt}$ , then, for all  $F$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_0)$ , and all  $|u_0| \leq \delta$ , we have*

$$|D_{u_0} \Phi(u_0, \cdot) \cdot F(\cdot)|_{H^\ell} \leq 2^{\ell+\tau\nu} m_0 \mathcal{C} |F|_{H^\ell}.$$

**Proof.** Let  $F$  be a function of  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, E_0)$ . Then, with the aid of lemmas 3.3 and 3.8, we get

$$\begin{aligned} |D_{u_0} \Phi(u_0, \cdot) \cdot F(\cdot)|_{H^\ell} &\leq \sum_{j=2}^p |D_{u_0} \Phi_j(u_0, \cdot) \cdot F(\cdot)|_{H^\ell} \\ &\leq \sum_{j=2}^p \|D_X \Phi_j(X, \cdot) \cdot F(\cdot)\|_{j-1} |u_0|^{j-1} \\ &\leq \sum_{j=2}^p \mathcal{C} \sqrt{m_0} j \|\Phi_j(X, \cdot)\|_j \|F(\cdot)\|_0 |u_0|^{j-1} \\ &= \sum_{j=2}^p \mathcal{C} \sqrt{m_0} j \varphi_j \delta^{j-1} |F|_{H^\ell} \end{aligned}$$

where, by lemma 3.9, we have

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^p j \varphi_j \delta^{j-1} &\leq \sum_{j=2}^p j \sqrt{m_0} (j!)^{\ell+1+\tau\nu} K^{j-1} \delta^{j-1} \\ &\leq \sqrt{m_0} \sum_{j=2}^p p (2p^{j-2})^{\ell+1+\tau\nu} (K\delta)^{j-1} \\ &\leq \sqrt{m_0} p \left(\frac{2}{p}\right)^{\ell+1+\tau\nu} \sum_{j=2}^p (p^{\ell+1+\tau\nu} K\delta)^{j-1}. \end{aligned}$$

Then, since  $p = p_{opt}$  and  $\delta < \delta_0$ , we have

$$1 \leq p \quad \text{and} \quad p^{\ell+1+\tau\nu} K \delta \leq \frac{1}{2}.$$

Hence,

$$\sum_{j=2}^p j \varphi_j \delta^{j-1} \leq \sqrt{m_0} 2^{\ell+\tau\nu};$$

and finally,

$$|D_{u_0} \Phi(u_0, \cdot).F(\cdot)|_{H^\ell} \leq 2^{\ell+\tau\nu} m_0 \mathcal{C} |F|_{H^\ell}.$$

□

Then, to compute an estimate for  $V^1$ , it remains to find an upper bound for

$$|V(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot) - V(u_0 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot)|_{H^\ell}.$$

We show the following

**Lemma 3.13** *There exists  $M_1$  such that for all  $|u_0|, |v_1| \leq \delta_0$ ,*

$$|V(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot) - V(u_0 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot)|_{H^\ell} \leq M_1 |v_1| \left( |u_0| + |v_1| \right).$$

**Proof.** Since  $V$  belongs to  $\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , and since  $(A_1) \Rightarrow (A_3)$  holds in lemma 3.5, then for all  $f, g$  in  $H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$

$$\begin{aligned} & |V_q(\cdot)[f + g, \dots, f + g] - V_q(\cdot)[f, \dots, f]|_{H^\ell} \\ & \leq |V_q(\cdot)[f + g, f + g, \dots, f + g] - V_q(\cdot)[f, f + g, \dots, f + g]|_{H^\ell} \\ & \quad + \dots + |V_q(\cdot)[f, \dots, f, f + g] - V_q(\cdot)[f, \dots, f, f]|_{H^\ell} \\ & = |V_q(\cdot)[g, f + g, \dots, f + g]|_{H^\ell} + |V_q(\cdot)[f, g, f + g, \dots, f + g]|_{H^\ell} \\ & \quad + \dots + |V_q(\cdot)[f, \dots, f, g, f + g]|_{H^\ell} + |V_q(\cdot)[f, f, \dots, f, g]|_{H^\ell} \\ & \leq qc \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |g|_{H^\ell} \left( |f|_{H^\ell} + |g|_{H^\ell} \right)^{q-1}. \end{aligned}$$

Hence, with  $f(t) = u_0 + \Phi(u_0, t) = \underline{\Phi}(u_0, t)$  and  $g(t) = v_1$ , we get, using lemma 3.10,

$$\begin{aligned} & |V(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot) - V(u_0 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot)|_{H^\ell} \\ & \leq \sum_{q=2}^{+\infty} qc \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^q |v_1|_{H^\ell} \left( |u_0 + \Phi(u_0, \cdot)|_{H^\ell} + |v_1|_{H^\ell} \right)^{q-1} \\ & \leq |v_1| c \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^2 \left( 2|u_0| \sqrt{m_0} + |v_1| \right) \sum_{q=2}^{+\infty} q \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} (2\delta\sqrt{m_0} + |v_1|) \right)^{q-2}. \end{aligned}$$

So, setting

$$M_1 := 2c\sqrt{m_0} \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} \right)^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2) \left( \frac{\mathcal{C}\sqrt{m}}{\rho} (3\delta_0\sqrt{m_0}) \right)^k,$$



in which the sum converges because of the value of  $\delta_0$  chosen in (3.19), we get that for  $|v_1| \leq \delta_0 \sqrt{m_0}$ ,

$$|V(u_0 + v_1 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot) - V(u_0 + \Phi(u_0, \cdot), \cdot)|_{H^\ell} \leq M_1 |v_1| (|u_0| + |v_1|)$$

holds. □

Thus finally, combining lemmas 3.12 and 3.13, and setting

$$M_0 := (1 + \|P_0\| + 2^{\ell+\tau\nu} m_0 \|P_0\|) M_1,$$

we obtain that the inequality (3.3) holds. □

## 4 Proof of theorem 2.14

This part is entirely devoted to the proof of theorem 2.14. This proof begins by showing technical lemmas, and then we follow the same strategy of proof as that of Iooss and Lombardi (2005). Moreover, we use the same norms as those defined in part 3.2.

### 4.1 Notations, strategy of construction for $\Phi$ and $\mathcal{N}$

First, here also, we fix  $\delta$  and  $p$  and look for  $\Phi$  and  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  of the form

$$\Phi(X, t) := \sum_{n=2}^p \Phi_n(X, t), \quad \mathcal{N}(X, t) := \sum_{n=2}^p \mathcal{N}_n(X, t),$$

with  $\Phi_n, \mathcal{N}_n$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  (space of homogeneous polynomials of degree  $p$ ). Then, one can check that the change of variables

$$u = y + \Phi(y, t)$$

transforms our system (1.1) into (2.11) if and only if

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L)\Phi(X, t) + (\text{Id} + D_X \Phi(X, t))(\mathcal{N}(X, t) + R(X, t)) = V(X + \Phi(X, t)) \quad (4.1)$$

holds, where we have set :

$$\mathcal{B}_L \Phi(X, t) := D_X \Phi(X, t).LX - L\Phi(X, t).$$

Since we look for  $\Phi$  and  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , and  $R$  of order more than  $p$  in  $u$ , then equation (4.1) is equivalent to the following system

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L)\Phi(X, t) + \mathcal{N}(X, t) = \Pi_p(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t).\mathcal{N}(X, t)), \quad (4.2)$$

$$(\text{Id} + D_X \Phi(X, t))R(X, t) = (\text{Id} - \Pi_p)(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t).\mathcal{N}(X, t)) \quad (4.3)$$

where  $\Pi_p$  stands for the projection on  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ . We begin by solving (4.2). Then, (4.3) will be the definition of  $R$  if one shows that  $(\text{Id} + D_X \Phi(X, t))$  is invertible (and it is; see section 4.3). Here again, we project equation (4.2) on the spaces  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ . Denoting by  $\pi_n$  this projection, we obtain

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L)\Phi_n(X, t) + \mathcal{N}_n(X, t) = \pi_n(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t).\mathcal{N}(X, t)). \quad (4.4)$$

Expanding the right hand side of (4.4) in power series, one can observe that, since

$$V(0, \cdot) = 0 = D_u V(0, \cdot),$$

(because of (1.2)), this right hand side of (4.4) only depends on  $\Phi_2, \dots, \Phi_{n-1}$ ,  $\mathcal{N}_2, \dots, \mathcal{N}_{n-1}$  and  $X, t$ . Hence, (4.4) should enables us to construct the  $\Phi_n$  and  $\mathcal{N}_n$  by induction. We only miss the lemma proved in the following subsection to be completely convinced.

## 4.2 Affine equation on $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$

**Lemme 4.1** *Let  $F_n$  be a polynomial in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ . There exist  $\Phi_n$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and  $\mathcal{N}_n$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  such that*

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L)\Phi_n + \mathcal{N}_n = F_n,$$

with  $\mathcal{N}_n$  in  $\text{Ker}(-\partial_t + \mathcal{B}_L^*)$ , and satisfying the estimates

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_n\|_n &\leq \|F_n\|_n, \\ \|\Phi_n\|_n &\leq C_\ell n^{\ell+\tau} \|F_n\|_n \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} C_\ell &:= \max\left\{1, \frac{1}{\gamma}\right\} \left(1 + \frac{T^2}{2\pi^2}(1 + 4\Lambda^2)\right)^{\frac{\ell}{2}} \\ \Lambda &:= \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j|. \end{aligned}$$

**Proof.** Here again, the key idea is that, using Fourier theory, the affine equation

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L)\Phi_n + \mathcal{N}_n = F_n \tag{4.5}$$

in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  is transformed into an infinity of affine equations in the spaces  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , so that we can use results of Iooss and Lombardi (2005) for each of these equations.

### Step 1 : Splitting our problem in an infinity of subproblems.

Denote

$$\begin{aligned} \Phi_n(X, t) &:= \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) X^\alpha, \quad \mathcal{N}_n(X, t) := \sum_{|\alpha|=n} N_\alpha(t) X^\alpha, \\ F_n(X, t) &:= \sum_{|\alpha|=n} f_\alpha(t) X^\alpha. \end{aligned}$$

We want all that functions to belong to  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , with  $\ell \geq 1$ , then necessarily we can expand it in Fourier series

$$\begin{aligned} \Phi_n(X, t) &= \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha(t) X^\alpha = \sum_{|\alpha|=n} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_\alpha^{(k)} e^{ik\frac{2\pi}{T}t} \right) X^\alpha \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \sum_{|\alpha|=n} \phi_\alpha^{(k)} X^\alpha \right) e^{ik\frac{2\pi}{T}t} := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(k)}(X) e^{ik\frac{2\pi}{T}t}, \end{aligned}$$

and, with the same notations

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_n(X, t) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}_n^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \\ F_n(X, t) &:= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_n^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}.\end{aligned}$$

Then, (4.5) holds if and only if

$$\text{for all } k \in \mathbb{Z}, \quad \left( ik \frac{2\pi}{T} + \mathcal{B}_L \right) \Phi_n^{(k)}(X) + \mathcal{N}_n^{(k)} = F_n^{(k)}(X) \quad (4.6)$$

hold.

Now we first solve, in "Step 2", the subproblem given by (4.6) when we fix one  $k$ , and then we show in Steps 3 to 6 that we can sum on  $k$  the Fourier series obtained.

### Step 2 : Subproblems in $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , construction of a solution

Fix any  $k$  in  $\mathbb{Z}$ . Define

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} : \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \\ \Phi(X) &\longmapsto \left( ik \frac{2\pi}{T} + \mathcal{B}_L \right) \Phi(X).\end{aligned} \quad (4.7)$$

For a given  $F_n^{(k)}(X)$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , our aim is to find  $\mathcal{N}_n^{(k)}(X)$  and  $\Phi_n^{(k)}(X)$  such that

$$\mathbf{B}_L^k \Phi_n^{(k)}(X) + \mathcal{N}_n^{(k)} = F_n^{(k)}(X). \quad (4.8)$$

Here unfortunately,  $\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$  is not necessarily invertible. Hence, our strategy is to chose  $\mathcal{N}_n^{(k)}(X)$  such that  $F_n^{(k)}(X) - \mathcal{N}_n^{(k)}(X)$  belongs to  $\text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$ , and then to take  $\Phi_n^{(k)}(X)$  such that  $\mathbf{B}_L^k \Phi_n^{(k)}(X) = F_n^{(k)}(X) - \mathcal{N}_n^{(k)}(X)$ . So it is sufficient to chose a supplementary space of  $\text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  : indeed, then (4.8) would simply be the splitting of  $F_n^{(k)}(X)$  on our decomposition of  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$  in supplementary spaces. Making a choice of supplementary space determines in fact the normal form characterization. Here, to obtain the criteria (2.12) and the estimates given in the theorem, we make the following choice. As done in Iooss and Lombardi (2005), we introduce a scalar product in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , and then write

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) &= \text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} (\text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^\perp = \text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker } (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*, \\ \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) &= \text{Ker } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} (\text{Ker } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^\perp = \text{Ker } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} \text{Im } (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*.\end{aligned}$$

Thus, the map  $\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$  reads

$$\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} : \text{Ker } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} \text{Im } (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^* \longrightarrow \text{Im } \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n} \overset{\perp}{\oplus} \text{Ker } (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*,$$

and we can define an invertible map  $\widetilde{\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}}$ , whose inverse is called the pseudo-inverse of  $\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$

$$\widetilde{\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}} : \text{Im} (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^* \longrightarrow \text{Im} \mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}.$$

We denote by  $\pi_n^k$  the orthogonal projection on  $\text{Ker} (\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*$ , and chose

$$\mathcal{N}_n^{(k)}(X) := \pi_n^k(F_n^{(k)}(X)), \quad (4.9)$$

$$\Phi_n^{(k)}(X) := (\widetilde{\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}})^{-1} \left( (\text{Id} - \pi_n^k)(F_n^{(k)}) \right). \quad (4.10)$$

So, let us chose an appropriate scalar product. We chose the same scalar product as that introduced in 2.1 of Iooss and Lombardi (2005). Namely, for any pair of polynomials  $P$  and  $P'$ , define

$$\langle P, P' \rangle = \overline{P}(\partial_X)P'(X)|_{X=0}. \quad (4.11)$$

Moreover, the norm associated with this scalar product is  $|\cdot|_{2,n}$ , introduced in section 3.2.

### Step 3 : Subproblems in $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ , upper bounds

To sum the  $\mathcal{N}_n^{(k)}(X)$  and  $\Phi_n^{(k)}(X)$  defined in (4.9), (4.10) , we need to compute upper bounds. Since  $\pi_n^k$  is an orthogonal projection, we have :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{N}_n^{(k)}(X) \right|_{2,n} &\leq \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}, \\ \left| \Phi_n^{(k)}(X) \right|_{2,n} &\leq \left\| (\widetilde{\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}})^{-1} \right\|_{2,n} \left| F_n^{(k)} \right|_{2,n}. \end{aligned}$$

Moreover, lemma 2.5 of Iooss and Lombardi (2005) ensures that, since by hypothesis 2.13  $L$  is diagonalizable, then  $\mathcal{B}_L|_{\mathcal{H}^n}$  is so (our  $\mathcal{B}_L$  is their  $\mathcal{A}_L$ ), with eigenvalues :

$$\{ \langle a, \lambda \rangle - \lambda_j, 1 \leq j \leq m, a \in \mathbb{N}^m, |a| = n \}. \quad (4.12)$$

Hence, the operator  $\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}$  defined in (4.7) is diagonalizable, with eigenvalues

$$\{ \langle a, \lambda \rangle + ik \frac{2\pi}{T} - \lambda_j, 1 \leq j \leq m, a \in \mathbb{N}^m, |a| = n \}.$$

Then, using (2.9) of hypothesis 2.13, we get

$$\left\| (\widetilde{\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n}})^{-1} \right\|_{2,n} \leq \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ a \in \mathbb{N}^m, |a|=n}} \frac{1}{|\langle a, \lambda \rangle + ik \frac{2\pi}{T} - \lambda_j|} \leq \frac{(n + |k|)^\tau}{\gamma}.$$

So we finally have the upper bounds :

$$\left| \mathcal{N}_n^{(k)}(X) \right|_{2,n} \leq \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}, \quad (4.13)$$

$$\left| \Phi_n^{(k)}(X) \right|_{2,n} \leq \frac{(n + |k|)^\tau}{\gamma} \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}. \quad (4.14)$$

**Step 4 :**  $\mathcal{N}_n$  and  $\Phi_n$  are well-defined,  $\mathcal{N}_n \in \mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$

We now set

$$\mathcal{N}_n(X, t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathcal{N}_n^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi_n^k(F_n^{(k)}(X)) e^{ik \frac{2\pi}{T} t}, \quad (4.15)$$

$$\Phi_n(X, t) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^{(k)}(X) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widetilde{\mathbf{B}}_L^k{}^{-1} \left( (\text{Id} - \pi_n^k)(F_n^{(k)}(X)) \right) e^{ik \frac{2\pi}{T} t} \quad (4.16)$$

and we want to prove that they satisfy all the properties required in lemma 4.1. We begin by showing that they are well-defined, verifying that  $\mathcal{N}_n$  is in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and  $\Phi_n$  in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^0(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , with the norms defined in section 3.2.

Using the upper bounds (4.13) and (4.14) computed in step 3, and the inequality  $\tau \leq \ell$  assumed by hypothesis 2.13, we get :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_n(X, t)\|_n^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^\ell \left| \mathcal{N}_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^\ell \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 = \|F_n(X, t)\|_n^2 < +\infty; \\ \|\Phi_n(X, t)\|_{n, H^0}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| \Phi_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(n+|k|)^{2\tau}}{\gamma^2} \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \frac{n^{2\tau}}{\gamma^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^\tau \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \frac{n^{2\tau}}{\gamma^2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1+k^2)^\ell \left| F_n^{(k)}(X) \right|_{2,n}^2 \\ \|\Phi_n(X, t)\|_{n, H^0}^2 &\leq \frac{n^{2\tau}}{\gamma^2} \|F_n(X, t)\|_n^2 < +\infty. \end{aligned} \quad (4.17)$$

**Step 5 :**  $\Phi_n$  belongs to  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, \mathbf{H}^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$

Let us prove by induction that if  $0 \leq j \leq \ell + 1$  then

$$\|\Phi_n(X, t)\|_{n, H^j} \leq C_j n^{j+\tau} \|F_n(X, t)\|_n, \quad (4.18)$$

where

$$C_j := \max\left\{1, \frac{1}{\gamma}\right\} \left(1 + \frac{T^2}{2\pi^2} (1 + 4\Lambda^2)\right)^{\frac{j}{2}}.$$

Inequality (4.17) ensures that (4.18) holds for  $j = 0$ . Assume that (4.18) holds for one  $j$ ,  $0 \leq j \leq \ell$ .

For all  $k$  in  $\mathbb{Z}$ , since  $\Phi_n$  is defined by (4.16), we have

$$\mathbf{B}_L^k \Phi_n^{(k)} = (\text{Id} - \pi_n^k) F_n^{(k)};$$

and hence

$$ik \frac{2\pi}{T} \Phi_n^{(k)} = (\text{Id} - \pi_n^k) F_n^{(k)} - \mathcal{B}_L \Phi_n^{(k)}.$$

Thus

$$(1 + k^2) \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 = \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \left| (\text{Id} - \pi_n^k) F_n^{(k)} - \mathcal{B}_L \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2;$$

where the eigenvalues of  $\mathcal{B}_L|_{\mathcal{H}^n}$  are given in (4.12). Then we get :

$$\begin{aligned} \left| \mathcal{B}_L \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n} &\leq \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ a \in \mathbb{N}^m, |a|=n}} \{ |\langle a, \lambda \rangle - \lambda_j| \} \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n} \\ &\leq (n+1) \max_{1 \leq j \leq m} |\lambda_j| \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n} = (n+1) \Lambda \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}. \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} (1 + k^2) \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 &\leq \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \left( \left| F_n^{(k)} \right|_{2,n} + (n+1) \Lambda \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n} \right)^2 + \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 \\ &\leq 2 \left( \frac{T}{2\pi} \right)^2 \left( \left| F_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 + (n+1)^2 \Lambda^2 \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 \right) + \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \frac{T^2}{2\pi^2} \left| F_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda^2 T^2 (n+1)^2}{2\pi^2} \right) \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2; \end{aligned}$$

and then

$$\begin{aligned} \|\Phi_n\|_{n, H^{j+1}}^2 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^{j+1} \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (1 + k^2)^j \left( \frac{T^2}{2\pi^2} \left| F_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda^2 T^2 (n+1)^2}{2\pi^2} \right) \left| \Phi_n^{(k)} \right|_{2,n}^2 \right) \\ &\leq \frac{T^2}{2\pi^2} \|F_n\|_n^2 + \left( 1 + \frac{\Lambda^2 T^2 (n+1)^2}{2\pi^2} \right) \|\Phi_n\|_{n, H^j}^2 \\ &\leq \left( \frac{T^2}{2\pi^2} + \left( 1 + \frac{\Lambda^2 T^2 (n+1)^2}{2\pi^2} \right) C_j^2 n^{2(j+\tau)} \right) \|F_n\|_n^2 \\ &\leq C_{j+1}^2 n^{2(j+1+\tau)} \|F_n\|_n^2. \end{aligned}$$

Finally, we have proved that

$$\|\Phi_n\|_{n, H^{\ell+1}} \leq C_\ell n^{\ell+\tau} \|F_n\|_n$$

holds. This shows in particular that  $\Phi_n$  is in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ .

**Step 6 :  $\mathcal{N}_n$  is in  $\text{Ker}(-\partial_t + \mathcal{B}_L^*)$**

Since  $\pi_n^k$  is the projection on  $\text{Ker}(\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*$ , then for all  $k$  in  $\mathbb{Z}$ ,

$$\mathcal{N}_n^{(k)}(X) = \pi_n^k \left( F_n^{(k)}(X) \right) \in \text{Ker}(\mathbf{B}_L^k|_{\mathcal{H}^n})^*; \quad (4.19)$$

where

$$(\mathbf{B}_L^k)^* = -ik \frac{2\pi}{T} + (\mathcal{B}_L)^*.$$

And the choice of scalar product (4.11) guarantees that

$$(\mathcal{B}_L)^* = \mathcal{B}_{L^*}$$

holds (see proof by Iooss and Adelmeyer (1992)). Then, for all  $k$  in  $\mathbb{Z}$ , (4.19) ensures that

$$\mathcal{B}_{L^*} \mathcal{N}_n^{(k)}(X) = ik \frac{2\pi}{T} \mathcal{N}_n^{(k)}(X).$$

Finally, since  $\mathcal{N}_n$  is in  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  with  $\ell \geq 1$ , we can sum on  $k$ , and we obtain

$$\mathcal{B}_{L^*} \mathcal{N}_n(X, t) = \partial_t \mathcal{N}_n(X, t).$$

□

### 4.3 End of the proof (sketch)

Now, combining parts 4.1 and 4.2, we get that we constructed  $\Phi$  in  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^m, H^{\ell+1}(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$  and  $\mathcal{N}$  in  $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^m, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ , with  $\mathcal{N}$  also in  $\text{Ker}(-\partial_t + \mathcal{B}_{L^*})$ , such that if one writes

$$\Phi(X, t) := \sum_{n=2}^p \Phi_n(X, t), \quad \mathcal{N}(X, t) := \sum_{n=2}^p \mathcal{N}_n(X, t),$$

then the  $\Phi_n$  and  $\mathcal{N}_n$  satisfy

$$(\partial_t + \mathcal{B}_L) \Phi_n(X, t) + \mathcal{N}_n(X, t) = \pi_n(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t) \cdot \mathcal{N}(X, t));$$

and the estimates

$$\begin{aligned} \|\mathcal{N}_n(X, t)\|_n &\leq \|\pi_n(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t) \cdot \mathcal{N}(X, t))\|_n, \\ \|\Phi_n(X, t)\|_n &\leq C_\ell n^{\ell+\tau} \|\pi_n(V(X + \Phi(X, t)) - D_X \Phi(X, t) \cdot \mathcal{N}(X, t))\|_n. \end{aligned}$$

First, one can check that the fact that  $\mathcal{N}$  belongs to  $\text{Ker}(-\partial_t + \mathcal{B}_{L^*})$  guarantees that the normal form criteria (2.12) holds.

Then it remains to show that the remainder  $R$  is well-defined by (4.3) and that the estimate (2.13) holds. We follow the same strategy as in part 2.3 of Iooss and Lombardi (2005) : our lemmas 3.5 and 3.8 replace their lemma 2.11, we then compute estimates for the  $\nu_n := \|\mathcal{N}_n\|_n$  and  $\varphi_n := \|\Phi_n\|_n$ , and we finally obtain a similar proof of well-definition and upper bound for  $R$  with slightly different constants. Namely, one can check that this way we get the following lemma instead of their last lemma 2.21.

**Lemme 4.2** *For all  $\delta > 0$ , for  $p = p_{opt}(\delta)$ , with  $\Phi$  and  $\mathcal{N}$  constructed above, the remainder  $R$  is well-defined by (4.3) and satisfies*

$$\sup_{|y| \leq \delta} |R(y, \cdot)|_{H^\ell} \leq M' \delta^2 e^{-\frac{\omega}{\delta^b}}.$$

where

$$b = \frac{1}{1 + \tau'} = \frac{1}{1 + \ell + \tau}, \quad p_{opt}(\delta) = \left\lceil \frac{1}{e(\mathbf{C}\delta)^b} \right\rceil, \quad \omega = \frac{1}{e\mathbf{C}^b},$$

$$\mathbf{C} = \frac{(\mathbf{C}\sqrt{m})^3}{\rho^2} \left[ \left( \frac{5}{2} \mathbf{C}^2 m + 2 \right) C_{\ell} c + 3 \frac{\rho}{\mathbf{C}\sqrt{m}} \right],$$

$$M' = \frac{10}{9} c \mathbf{C}^2 \left( \left( \mathcal{M} \sqrt{\frac{27}{8e}} \right)^{1+\ell+\tau} + (2e)^{2(1+\ell+\tau)} \right), \quad \mathcal{M} = \sup_{p \in \mathbb{N}} \frac{e^2 p!}{p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p}}.$$





## Chapitre 2

# Orbites homoclines à plusieurs boucles près d'un point d'équilibre à résonance $0^2i\omega$ pour des systèmes Hamiltoniens

### 1 Introduction

#### 1.1 Résonance $0^2i\omega$ pour les champs de vecteurs Hamiltoniens

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des familles à un paramètre de champs de vecteurs Hamiltoniens analytiques réels à 2 degrés de liberté. Soit  $H_\varepsilon$  une famille de Hamiltoniens analytiques, et  $\Omega$  une forme symplectique sur  $\mathbb{R}^4$ ; on étudie alors la famille de champs de vecteurs

$$V_{H_\varepsilon} := \Omega \nabla H_\varepsilon.$$

On suppose que ces champs de vecteurs admettent un point d'équilibre placé à l'origine. On étudie la dynamique du champs de vecteurs au voisinage de ce point d'équilibre.

On dit que le point d'équilibre 0 est non dégénéré si la partie linéaire en 0 du champ de vecteur est inversible, ou encore de manière équivalente si la partie quadratique du Hamiltonien est non dégénérée. **Pour les champs de vecteurs Hamiltoniens de  $\mathbb{R}^4$ , on distingue trois types de points d'équilibre non dégénérés**, selon le nombre de valeurs propres imaginaires pures de la partie linéaire. On rappelle que comme le champ de vecteurs est réel, les valeurs propres complexes de la partie linéaire sont nécessairement conjuguées deux à deux, et que comme on est dans un cadre Hamiltonien, les valeurs propres sont nécessairement des paires d'opposés. Il y a donc trois cas de figure possibles :

- si la partie linéaire a 4 valeurs propres imaginaires pures (deux paires de valeurs propres conjuguées), on dit que le point d'équilibre est Elliptique ;
- s'il y a 2 valeurs propres imaginaires pures (conjuguées entre elles) et 2 valeurs propres réelles opposées, on dit qu'on a un point d'équilibre de type Centre-Selle ;
- s'il n'y a pas de valeurs propres imaginaires pures, le spectre du linéarisé est constitué de deux paires de réels opposés, et on parle de point d'équilibre Hyperbolique.

On va s'intéresser dans ce chapitre à une famille de Hamiltoniens  $H_\varepsilon$  pour laquelle le point d'équilibre  $0$  passe pour  $\varepsilon = 0$  du type Elliptique (quand  $\varepsilon < 0$ , pour fixer les idées) au type Centre-Selle (pour  $\varepsilon > 0$ ). En  $\varepsilon = 0$ ,  $H_\varepsilon$  traverse donc l'ensemble des singularités dégénérées pour lesquelles le spectre de la partie linéaire est constitué d'une paire de valeurs propres imaginaires pures conjuguées et de  $0$  comme valeur propre double (voir Figure 2.1). La situation générique dans cet ensemble est celle où la valeur propre double  $0$  n'est pas semi-simple, *i.e.* le cas où le noyau du linéarisé en  $0$  est de dimension exactement un (et pas deux). Dans ce cas, **on dit que la famille de champs de vecteurs  $V_{H_\varepsilon}$  a une singularité  $0^2i\omega$  en  $0$ .**

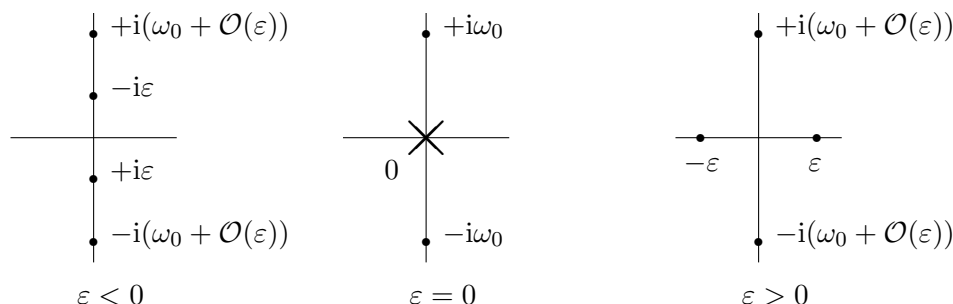


FIGURE 2.1 – Valeurs propres de  $D_x V_{H_\varepsilon}(0)$  selon les valeurs de  $\varepsilon$  pour la résonance  $0^2i\omega$ .

Dans ce chapitre, on n'étudie la dynamique que pour la "demi-bifurcation"  $\varepsilon > 0$ , *i.e.* on étudie la dynamique au voisinage (en espace) d'un point fixe Centre-Selle au voisinage (en le paramètre  $\varepsilon$ ) d'une singularité  $0^2i\omega$ . Notre cadre de travail se situe alors à la confluence entre deux séries de travaux antérieurs :

- des travaux concernant la dynamique des champs de vecteurs Hamiltoniens au voisinage d'un point d'équilibre de type Centre-Selle (famille sans singularité), voir la partie 1.4 de cette introduction ;
- les travaux sur la dynamique d'une famille de champs de vecteurs réversibles (c'est-à-dire des champs  $V$  pour lesquels il existe une symétrie  $S$  telle que  $V \circ S = -S \circ V$ ) admettant un point fixe avec une singularité  $0^2i\omega$ , voir ci-dessous la partie 1.3.

## 1.2 Résonance $0^2i\omega$ et hydrodynamique.

La résonance  $0^2i\omega$  apparaît en mécanique des fluides, dans la théorie des vagues : on s'intéresse au flot en dimension 3 d'un fluide parfait de densité constante soumis à la gravité et à des forces de tension de surface, régi par les équations d'Euler. On cherche ensuite des solutions particulières sous la forme d'ondes progressives à 2 dimensions de vitesse  $c$ .

Iooss et Kirchgässner [33] (repris notamment dans [47] et [29]) ont montré que les équations obtenues alors peuvent être écrites sous la forme d'un système d'équations d'évolution ayant une structure réversible et Hamiltonienne, et faisant intervenir deux paramètres, dépendant de  $c$  et des propriétés physiques du fluide : le nombre de Bond  $b$  et le nombre de Froude  $F$ . L'étude du spectre central de l'équilibre  $0$  de ces équations d'évolution en fonction des valeurs des paramètres  $b$  et  $F$  fait apparaître plusieurs bifurcations (voir

Figure 2.2), dont la résonance  $0^2i\omega$  quand  $b < \frac{1}{3}$  et  $F$  traverse l'axe  $F = 1$ .

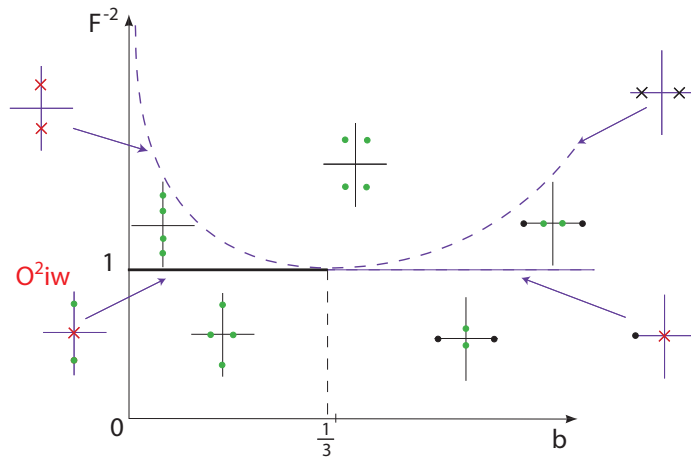


FIGURE 2.2 – Pour les ondes progressives de dimension 2 : valeurs propres du spectre central selon les valeurs du nombre de Froude  $F$  et du nombre de Bond  $b$ . Les points et les croix représentent respectivement des valeurs propres simples et doubles.

Il est donc naturel de s'intéresser à la dynamique au voisinage d'une résonance  $0^2i\omega$  dans un cadre réversible et/ou Hamiltonien. Et en particulier, on se pose la question de l'existence d'ondes solitaires : pour le système dynamique, cela revient à se **demander s'il existe une orbite homocline à 0**. Dans la suite, on se posera la question de l'existence d'orbites homoclines à 0, et à défaut, on élargira nos recherches aux orbites homoclines à de petites solutions périodiques (voir Figure 2.3).

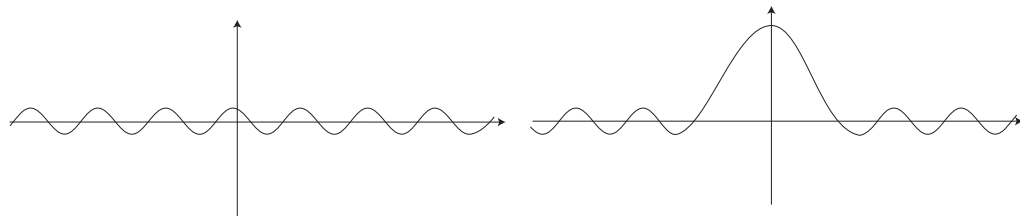


FIGURE 2.3 – Orbite périodique et orbite homocline à une orbite périodique.

### 1.3 Résonance $0^2i\omega$ dans le cadre réversible

Des résultats ont été établis surtout pour la résonance réversible  $0^{2+i\omega}$  : c'est la résonance  $0^2i\omega$  réversible avec une hypothèse supplémentaire sur l'action de la symétrie de réversibilité sur les vecteurs propres du linéarisé du champ de vecteurs. Le cas des équations de la mécanique des fluides ci-dessus est un cas de résonances  $0^{2+i\omega}$ .

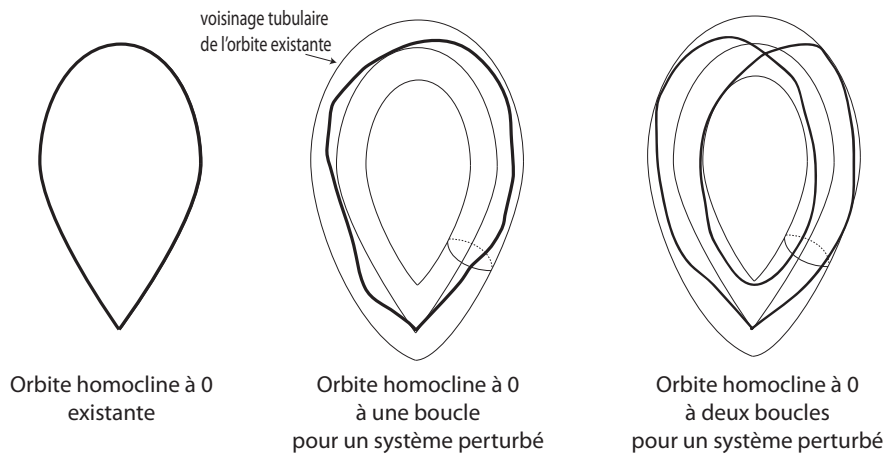
Cette résonance a été étudiée par Iooss et Kirchgässner [33], puis en détails par Lombardi [47] ainsi que par Iooss et Lombardi [35]. Les résultats obtenus concernent toujours la "demi-bifurcation" pour laquelle le point d'équilibre est de type Centre-Selle ( $\varepsilon > 0$  sur la Figure 2.1). Pour  $\varepsilon$  suffisamment proche de 0, le point d'équilibre Centre-Selle 0

est entouré d'une famille d'orbites périodiques, et Lombardi [47] a démontré qu'il existe des orbites homoclines à certaines des orbites périodiques proches de l'origine, mais pas d'orbite homocline à 0. Plus précisément, il existe deux fonctions positives  $\kappa_1(\varepsilon) > \kappa_2(\varepsilon)$  exponentiellement petites, *i.e.* de la forme

$$\kappa_i(\varepsilon) = \mathcal{O}(e^{-\frac{c_i}{\varepsilon}}),$$

telles que

- les orbites périodiques de taille supérieure à  $\kappa_1(\varepsilon)$  admettent une orbite homocline à une boucle ;
- les orbites périodiques de taille inférieure à  $\kappa_2(\varepsilon)$  et l'origine n'admettent pas d'orbite homocline à *une seule boucle*.



Pour ces résultats, la clé de l'approche est de mettre le système sous **forme normale** jusqu'à un ordre fini  $n$ . Au voisinage de la résonance, la forme normale tronquée au degré  $n$  admet une famille d'orbites périodiques, une orbite homocline à 0 et des orbites homoclines à chacune des orbites périodiques. Il ne reste plus ensuite qu'à rajouter le reste et étudier le système complet comme une perturbation de la forme normale tronquée. **On s'inspire de cette approche dans ce chapitre.**

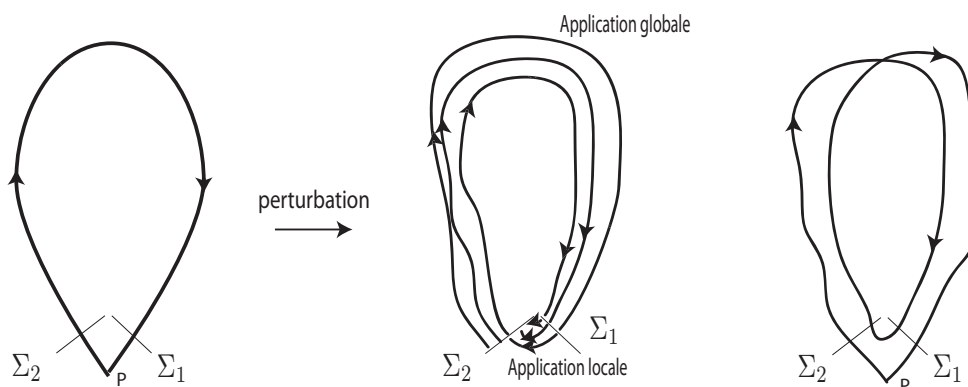
#### 1.4 Orbites homoclines à un point centre-selle dans le cadre Hamiltonien

Dans le cadre Hamiltonien, des travaux ont été faits au voisinage d'un point d'équilibre Centre-Selle et sans se placer au voisinage d'une singularité  $0^2i\omega$ . Le théorème de Lyapunov-Moser assure que dans ce cadre, comme dans le cadre réversible, le point d'équilibre est entouré d'une famille d'orbites périodiques. Et ici aussi seule l'existence d'orbites homoclines à des orbites périodiques est démontrée dans la majorité des résultats. Beaucoup de résultats dans ce cadre concernent les **conséquences de l'existence d'une orbite homocline à 0**. Dans [22] et [23] par exemple, Grotta-Ragazzo étudie la stabilité et le comportement au voisinage d'une orbite homocline à 0. Dans [9], les auteurs partent de l'existence d'une orbite homocline à 0 pour un Hamiltonien, et en déduisent des résultats pour une famille de Hamiltoniens voisins : ils n'en déduisent pas l'existence d'orbites homoclines à 0, mais montrent l'existence d'orbites homoclines à toutes les or-

bites périodiques voisines de 0 ; et obtiennent aussi des conséquences sur le comportement chaotique des systèmes Hamiltoniens près de l'orbite homocline à 0.

Malheureusement, l'existence d'orbites homoclines à 0 reste assez rare. Des résultats d'**existence d'orbites homoclines aux orbites périodiques voisines de 0** ont été démontrés sans présumer l'existence d'une orbite homocline à 0, souvent sous des hypothèses permettant de ramener le Hamiltonien étudié à une perturbation d'un cas plus simple pour lequel une orbite homocline à 0 explicite est connue (ce qui revient implicitement à faire le même raisonnement que dans [9]). C'est le cas par exemple de [50], où les auteurs étudient un système Hamiltonien réversible polynomial de degré 3 en fonction des coefficients du polynôme, et montrent l'existence d'orbites homoclines aux orbites périodiques aussi proches de 0 que l'on veut (mais pas à 0) ainsi qu'un comportement chaotique au voisinage des orbites homoclines. De manière très différente et dans un cadre plus général que le nôtre (en dimension plus grande notamment), Bernard [8] montre que sous ses hypothèses il peut se ramener au cas d'un système découplé, et montre l'existence d'orbites homoclines à de petites orbites périodiques, mais à une distance de sécurité de 0 dont il calcule une estimation.

Les travaux utilisant l'existence d'une orbite homocline à 0 (par hypothèse ou en se ramenant à une perturbation d'un système qui en admet une) utilisent pour la plupart une **méthode de perturbation introduite par Conley [13], méthode dont on s'inspire dans ce chapitre**. Il s'agit d'une méthode semi-globale, dont une caractéristique notable est de permettre la construction d'orbites homoclines "à plusieurs boucles", alors que dans les travaux sur les systèmes réversibles, l'approche ne tient compte que des orbites homoclines à une boucle.



Pour une orbite périodique fixée  $P$ , on démontre l'existence d'une orbite homocline à  $P$  en prouvant l'intersection entre les variétés stable et instable à l'orbite périodique. L'idée de Conley est d'introduire une première section de Poincaré  $\Sigma_1$  proche de 0 transverse à l'orbite homocline à 0, et d'étudier l'application de premier retour à la section. Le but est alors de montrer que les variétés stable et instable à l'orbite périodique atteignent cette section, puis qu'elles s'y intersectent soit lors de leur première intersection avec  $\Sigma_1$ , soit après *plusieurs tours* par l'application de premier retour. Pour cela, on construit l'application de premier retour à  $\Sigma_1$  comme la composition d'une application locale entre  $\Sigma_1$  et une section  $\Sigma_2$  voisine de 0 transverse à l'orbite homocline, et une application globale entre  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_1$ . Grâce à une transformation canonique locale, on obtient localement un

flot dont le comportement est celui du linéarisé, qui permet de définir l'application locale. L'application globale se construit par perturbation de l'orbite homocline à 0 existante. Pour conclure par cette stratégie, Bernard, Grotta Ragazzo et Salomao [9] ont eu l'idée de rajouter un argument de confinement des itérations : ils ont montré dans leur cas par un théorème KAM l'existence d'un tore invariant qui confine les itérations de l'application de premier retour dans un domaine borné. La conclusion vient naturellement ensuite par la conservation de l'aire pour le flot Hamiltonien.

Ce raisonnement est détaillé, dans notre cadre, dans la partie 3.4.

## 1.5 Orbites homoclines à plusieurs boucles dans le cadre Hamiltonien.

Dans ce chapitre on s'intéresse à la dynamique d'une famille de systèmes Hamiltoniens au voisinage d'un point d'équilibre Centre-Selle, près d'une singularité de type  $0^2i\omega$ . Sous certaines hypothèses, on va démontrer qu'ici aussi il existe une famille d'orbites périodiques entourant le point d'équilibre, puis que les orbites périodiques aussi proches de l'équilibre que l'on veut (à l'exclusion du point fixe lui-même) admettent chacune une orbite homocline, éventuellement à plusieurs boucles.

Ce résultat améliore celui trouvé dans le cadre réversible, puisqu'on ne trouve pas de taille critique pour les orbites périodiques admettant des orbites homoclines. Dans le cadre des résultats pour les systèmes Hamiltoniens, il est à noter qu'on prouve l'existence d'orbites homoclines pour ce cas de résonance  $0^2i\omega$  sans faire d'hypothèse préalable d'existence d'orbite homocline à 0.

Malheureusement, dans la démonstration on utilise une hypothèse (l'hypothèse (H6) dans la partie 2 de ce chapitre) qui assure que la partie quadratique du Hamiltonien soit définie positive pour l'équilibre Elliptique au voisinage de la résonance  $0^2i\omega$ . Or cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cadre hydrodynamique (décrit ci-dessus dans la partie 1.2 de cette introduction) qui avait motivé les travaux sur la résonance  $0^2i\omega$ .

La démonstration s'inspire d'une part de la méthode basée sur les formes normales utilisées dans les précédents travaux sur la résonance  $0^{2+}i\omega$ , et d'autre part de la méthode décrite ci-dessus initiée par Conley dans [13] utilisée dans les précédents travaux sur les équilibres centre-selle Hamiltoniens. En effet, on commence par démontrer un théorème de forme normale (Théorème 2.3 ci-dessous) qui préserve la structure Hamiltonienne. Lorsqu'on tronque le reste de la forme normale dans le nouveau système Hamiltonien, on obtient un système pour lequel il existe une orbite homocline à 0 explicite. On peut ensuite utiliser une méthode du type de celle de Conley ([13], description ci-dessus) en voyant le système Hamiltonien comme une perturbation de la forme normale.

L'équilibre centre-selle au voisinage de la résonance  $0^2i\omega$  admet une paire de valeurs propres hyperboliques dont la partie réelle tend vers 0, et une paire de valeurs propres imaginaires pures de taille 1 (voir Figure 2.1). Il y a donc coexistence de deux échelles, qui correspondent pour la forme normale à des orbites homoclines de taille  $\varepsilon$  couplées avec une rotation à une fréquence d'ordre 1. C'est la compétition entre ces deux échelles qui fait apparaître les phénomènes exponentiellement petits étudiés dans le cas réversible par Lombardi [47].

Le fait que l'orbite homocline varie complique l'approche perturbative : c'est pourquoi on fait ensuite un changement d'échelle, en espace et en temps, qui permet de fixer la taille

de l'orbite homocline du système tronqué à l'ordre 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0. Le problème est alors déplacé : on doit maintenant tenir compte du couplage de l'orbite homocline avec une rotation rapide (en pratique : des termes en  $\frac{1}{\varepsilon}$ ). Ce qui impose des estimations très précises sur la taille des voisinages de validité des objets construits, et notamment de rentrer dans les détails du changement de coordonnées local utilisé par Conley, démontré par Moser [52], pour vérifier le rôle joué par les paramètres (voir Annexe C).

La coexistence de ces deux échelles est donc à la fois ce qui fait marcher le raisonnement : la théorie des formes normales étant une théorie locale, elle n'est applicable que parce que les orbites homoclines sont de petite taille ; mais c'est aussi ce qui pose ensuite toutes les difficultés techniques pour adapter les raisonnements utilisés dans les travaux précédents sur les équilibres centre-selle Hamiltoniens.

### **Plan du chapitre.**

Dans la partie 2 ci-dessous, on donne un énoncé précis des résultats démontrés dans ce chapitre : le résultat d'existence d'orbites homoclines (Théorème 2.2), ainsi que le théorème de forme normale (Théorème 2.3) utilisé dans la démonstration. Dans la partie 3 se trouve la démonstration du Théorème 2.2, dont les parties plus techniques sont énoncées sous forme de propositions démontrées dans les parties suivantes 4, 5, 6 et 7. La démonstration du Théorème 2.3 se trouve en Annexe A, les raffinements du résultat de Moser [52] en Annexe C, avec en Annexe B des résultats techniques concernant la relation d'ordre  $\prec$  utilisée dans l'Annexe C.



## 2 Énoncé des principaux résultats

On se place dans  $\mathbb{R}^4$ , muni d'une forme symplectique  $\Omega$ . On s'intéresse à une famille à un paramètre de Hamiltoniens  $\mathbf{H}_\lambda$  définie pour  $\lambda$  dans un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , et telle que pour tout  $\lambda$ ,  $\mathbf{H}_\lambda$  est analytique.

On introduit l'espace normé de fonctions analytiques  $(\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \rho), \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$  :

**Définition 2.1** *On définit l'ensemble  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \rho), \mathbb{R}^n)$  des fonctions analytiques  $f$  de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \rho)$  dans  $\mathbb{R}^n$  telles que  $f$  est prolongeable analytiquement de  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}(0, \rho)$  dans  $\mathbb{C}^n$ , et ce prolongement est borné dans  $\mathbb{C}^n$ .*

On définit alors la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  sur  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \rho), \mathbb{R}^n)$  par

$$\|f\|_{\mathcal{A}} = \sup_{z \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^m}(0, \rho)} \|f(z)\|_{\mathbb{C}^n}.$$

On demande ici qu'il existe  $\rho_0$  tel que  $\mathbf{H}$  soit une application  $\mathbf{H} : I \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho_0), \mathbb{R})$   $\mathcal{C}^1$  pour la norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ . C'est-à-dire

$$\mathbf{H} \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho_0), \mathbb{R})). \quad (\text{H0})$$

On s'intéresse au champ de vecteurs Hamiltonien associé  $\mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda} := \Omega \nabla \mathbf{H}_\lambda$ . On suppose que pour tout  $\lambda$ , ce champ de vecteurs admet le **point fixe** 0, i.e.

$$\mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0) = 0 \quad \text{pour tout } \lambda \in I. \quad (\text{H1})$$

On suppose qu'en  $\lambda = 0$ , le point fixe passe par une **résonance**  $0^2 i\omega$ . C'est-à-dire qu'il existe une base  $(u_0, u_1, u_+, u_-)$  de  $\mathbb{R}^4$  dans laquelle

$$D_x \mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\omega_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\omega_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{H2})$$

On fait de plus une **hypothèse sur**  $D_\lambda(D_x \mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0))$ , qui caractérise le comportement du spectre de  $D_x \mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0)$  au voisinage de  $\lambda = 0$ . Notons  $(u_0^*, u_1^*, u_+^*, u_-^*)$  la base duale de  $(u_0, u_1, u_+, u_-)$ . On suppose alors que

$$c_{10} := \langle u_1^*, D_{x,\lambda}^2 \mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0).u_0 \rangle \neq 0. \quad (\text{H3})$$

Cette hypothèse nous assure que le spectre de  $D_x \mathbf{V}_{\mathbf{H}_\lambda}(0)$  est bien tel que dessiné sur la Figure 2.4 : on n'est pas dans le cas dégénéré où la valeur propre double 0 reste à 0 pour  $\lambda \neq 0$ . On a ainsi pour  $c_{10}\lambda \leq 0$  un point fixe Elliptique et pour  $c_{10}\lambda \geq 0$  un point fixe de type Centre-Selle.

On fait par ailleurs une **hypothèse sur la partie quadratique**  $D_{x,x}^2 \mathbf{V}_{\mathbf{H}_0}(0).[x, x]$  **du champ de vecteurs en**  $\lambda = 0$ . On suppose que

$$c_{20} := -\frac{1}{3} \langle u_1^*, D_{x,x}^2 \mathbf{V}_{\mathbf{H}_0}(0).[u_0, u_0] \rangle \neq 0. \quad (\text{H4})$$

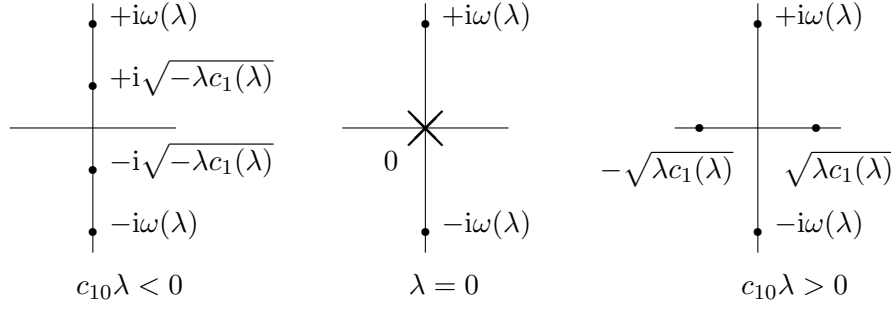


FIGURE 2.4 – Valeurs propres de  $D_x \mathbf{V}_{H_\lambda}(0)$  selon les valeurs de  $\lambda$

Cette hypothèse permet de s'assurer que en un certain sens la partie quadratique du champ de vecteurs est non dégénérée :  $c_{20}$  apparaîtra dans la forme normale, où il sera le coefficient de l'unique terme quadratique non éliminé. Grâce à ce terme on pourra montrer l'existence d'orbites homoclines pour la forme normale, le champ de vecteurs linéarisé n'admettant pas d'orbite homocline.

Ensuite, comme on s'intéresse à l'existence d'orbites homoclines, on ne va étudier que la "demi-bifurcation" correspondant à

$$c_{10}\lambda \geq 0, \quad (\text{H5})$$

car alors on travaille au voisinage d'un **point fixe de type Centre-Selle**.

Enfin, on suppose que

$$\omega_0 > 0, \quad (\text{H6})$$

ce qui revient à considérer que pour  $\lambda < 0$  petit, la partie quadratique du Hamiltonien est une forme quadratique définie.

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses (H1), ..., (H6), il existe  $\lambda_0 \geq 0$ ,  $C_0 \geq 0$  et  $\ell_0 \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $\lambda \leq \lambda_0$ ,*

- (i) *l'origine est entouré par une famille d'orbites périodiques  $P_\lambda^a$ , paramétrées par leur aire symplectique  $a \in [0, a_0]$ .*
- (ii) *pour  $a \in ]0, C_0\lambda^{\ell_0}[$ , l'orbite périodique  $P_\lambda^a$  admet une orbite homocline.*

La démonstration de ce théorème est en partie basée sur l'étude de la dynamique des formes normales associées à ces champs de vecteurs. Pour cela nous établissons dans ce chapitre le théorème général de forme normale suivant, dont la démonstration est dans l'Annexe A.

**Théorème 2.3 (Théorème de forme normale)** *On considère  $\mathbb{R}^{2m}$  muni de la forme symplectique  $\Omega_m$  donnée par*

$$\Omega_m(x, y) = \langle J_m x, y \rangle \quad \text{où} \quad J_m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

*Soit  $\mathcal{U}_\Lambda$  un ouvert d'un espace de Banach  $\Lambda$ , tel que  $0 \in \mathcal{U}_\Lambda$  et soit  $\mathcal{H}_\lambda$  une  $C^1$ -famille à 1 paramètre  $\lambda \in \mathcal{U}_\Lambda$  de Hamiltoniens  $\mathcal{C}^k$  (resp. analytiques et dans  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho), \mathbb{R})$ )*

tels que  $D_x \mathcal{H}_\lambda(0) = 0$ . On note  $\mathcal{H}_{2,\lambda}(x) = \frac{1}{2} D_{x,x}^2 \mathcal{H}_\lambda(0) \cdot [x, x]$  la partie quadratique de  $\mathcal{H}_\lambda$  et  $L_0$  la partie linéaire à l'origine du champ de vecteurs Hamiltonien associé, i.e.  $L_0 x = J_m \nabla_x \mathcal{H}_{2,0}(x)$ .

Alors, pour tous  $n$  et  $k$  tels que  $k - 1 \geq n \geq 3$  (resp. pour tout  $n \geq 3$ ), il existe une  $C^1$ -famille à 1 paramètre  $\phi_{n,\lambda}$  de transformations canoniques analytiques dans un  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho'), \mathbb{R})$ , proches de l'identité, définie dans un voisinage de 0 dans  $\Lambda$ , telle que près de l'origine dans  $\mathbb{R}^{2m}$  on ait

$$\tilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{x}) = \mathcal{H}_\lambda(\phi_{n,\lambda}(\tilde{x})) = \mathcal{H}_{2,0}(\tilde{x}) + \tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) + \tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) ,$$

où  $\tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}$  est un polynôme réel de degré  $\leq n$ , et  $\tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}$  est de régularité  $C^k$  (resp. analytique dans un  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho'), \mathbb{R})$ ) par rapport à  $\tilde{x}$ , et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) &= \mathcal{O}(\lambda|\tilde{x}|^2 + |\tilde{x}|^3), & \tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}(e^{tL_0^*} \tilde{x}) &= \tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \\ \tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) &= \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{n+1}). \end{aligned}$$

De plus, les coefficients de  $\tilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}$  sont des fonctions  $C^1$  de  $\lambda$ .

### 3 Structure de la démonstration du Théorème 2.2

#### 3.1 Normalisation et changement d'échelle, étude des formes normales de degré 3 et $n$

On commence par opérer une normalisation du Hamiltonien, suivie d'un changement d'échelle. Puis on tronque le système normalisé obtenu, et on trace le portrait de phase du système tronqué, pour se faire une première idée.

##### 3.1.a Normalisation et changement d'échelle

On commence par appliquer à notre cas un théorème général de forme normale (le théorème 2.3). Il permet, par un changement de coordonnées ((i) dans la Proposition 3.1 ci-dessous) préservant la structure symplectique, de simplifier la partie polynomiale du Hamiltonien jusqu'à un degré fixé arbitraire. La nouvelle forme obtenue pour le Hamiltonien nous incite ensuite à faire un changement d'échelle ((iii) dans la proposition 3.1 ci-dessous), qui permet de ramener les orbites homoclines du système tronqué à des orbites dont la taille est d'ordre 1 en le paramètre : cela permettra dans la suite de faciliter une approche par perturbations au voisinage de l'orbite homocline du système tronqué.

**Proposition 3.1** *Sous les hypothèses (H0), ..., (H6), pour tout  $n \geq 3$ , il existe  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\rho_1 > 0$  et*

(i) *une  $\mathcal{C}^1$  famille à 1 paramètre de transformations canoniques analytiques sur  $\mathcal{B}(0, \rho_1)$ ,*

$$\mathbf{x} = \phi_{n,\lambda}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}} + \mathcal{O}(|\tilde{\mathbf{x}}|^2), \quad \phi_{n,\lambda} \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho_1), \mathbb{R}^4);$$

(ii) *un changement de paramètre  $\mathcal{C}^1$ ,  $\lambda = \theta(\varepsilon^4)$  d'inverse  $\varepsilon^4 = c_{10}\lambda + o(\lambda)$  défini pour  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_1, \varepsilon_1[$ ,*

(iii) *un changement d'échelle en temps et en espace  $\tilde{\mathbf{x}} = \sigma_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}})$ ,  $t = \varepsilon^2 \tilde{t}$ ;*

*tels que au voisinage de l'origine, pour tout  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, 0[ \cup ]0, \varepsilon_0[$ , on ait un nouveau Hamiltonien  $\underline{H}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) := \frac{8c_2(\varepsilon)^2}{\varepsilon^{12}} \mathbf{H}_{\theta(\varepsilon^4)}(\phi_{n,\theta(\varepsilon^4)}(\sigma_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}})))$  de la forme*

$$\underline{H}_\varepsilon(\underline{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \left( \underline{p}_1^2 - \underline{q}_1^2 \right) + 2\sqrt{2}(\underline{q}_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \underline{I}_2 + \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2) + \varepsilon^{4n-8} \underline{R}_{n,\varepsilon}(\underline{\mathbf{x}});$$

où

$$\underline{\mathbf{x}} = (\underline{q}_1, \underline{p}_1, \underline{q}_2, \underline{p}_2), \quad \underline{I}_2 = \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2,$$

et

- $\omega$  et  $c_2$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  telles que  $\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$  et  $c_2(\varepsilon) = c_{20} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$  avec  $c_{20} \neq 0$ ;
- la forme normale  $\underline{N}_{n,\varepsilon}$  est un polynôme réel de degré inférieur à  $n$  par rapport à  $(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{p}_2)$  tel que

$$\underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2) = \mathcal{O} \left( |\underline{q}_1| |\underline{I}_2| + \varepsilon^2 (|\underline{q}_1|^2 + |\underline{I}_2|)^2 \right),$$

et les coefficients de ce polynôme sont  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ ;

– le reste  $\underline{R}_n$  :] –  $\varepsilon_0, \varepsilon_0[ \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho_1); \mathbb{R}) : \varepsilon \mapsto \underline{R}_{n,\varepsilon}$  est une famille à 1 paramètre  $\mathcal{C}^1$  de Hamiltoniens analytiques tels que  $\underline{R}_{n,\varepsilon}(\underline{x}) = \mathcal{O}(|\underline{x}|^{n+1})$ .

La démonstration de cette proposition est donnée dans la partie 4. Dans la suite, on travaille alors sur le système Hamiltonien associé à  $\underline{H}_\varepsilon$ .

### 3.1.b Portrait de phase pour la forme normale de degré 3

Étudions tout d'abord le système associé au Hamiltonien tronqué au degré 3,

$$\underline{H}_{3,\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2} (p_1^2 - q_1^2) + 2\sqrt{2} q_1^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} I_2,$$

où  $I_2 = q_2^2 + p_2^2$ . Le système différentiel associé s'écrit

$$\begin{cases} q_1'(t) &= p_1 \\ p_1'(t) &= q_1 - 6\sqrt{2} q_1^2 \\ q_2'(t) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} p_2 \\ p_2'(t) &= -\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} q_2. \end{cases}$$

Pour ce système, on observe que les variables  $(q_1, p_1)$  d'une part et  $(q_2, p_2)$  d'autre part sont découplées. Pour le système vérifié par  $(q_2, p_2)$ , les solutions s'écrivent explicitement

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \begin{pmatrix} q_2(0) \\ p_2(0) \end{pmatrix}, \quad \text{où } \mathbf{R}_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Donc en particulier  $I_2$  est constant, et on a les **orbites périodiques**  $P_0^a$  pour  $I_2 = a$  et  $(q_1, p_1) = (0, 0)$ .

On peut ensuite tracer le portrait de phase pour les variables  $(q_1, p_1)$  en étudiant les niveaux d'énergie constante, qui s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (p_1^2 - q_1^2) + 2\sqrt{2} q_1^3 &= \alpha \\ \Leftrightarrow p_1 &= \pm \sqrt{q_1^2 - 4\sqrt{2} q_1^3 + \alpha}. \end{aligned}$$

Si on trace ces niveaux pour les différentes valeurs de  $\alpha$ , on obtient le portrait de phase dessiné dans la Figure 2.5 avec en particulier une **orbite homocline** à  $P_0^a$  quand  $\alpha = 0$ , dont l'expression explicite est

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ p_1(t) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \cosh(t)}{-\sinh(t)} \\ \frac{1}{(1 + \cosh(t))^2} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } c = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

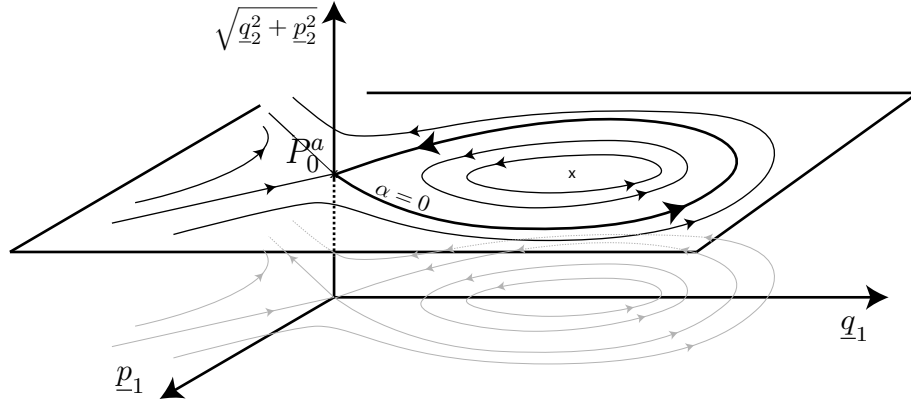


FIGURE 2.5 – Portrait de phase pour forme normale tronquée de degré 3.

### 3.1.c Portrait de phase pour la forme normale de degré $n$

Étudions ensuite le système associé au Hamiltonien tronqué au degré  $n$ ,

$$\underline{H}_{n,\varepsilon}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \left( \underline{p}_1^2 - \underline{q}_1^2 \right) + 2\sqrt{2}(\underline{q}_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \underline{I}_2 + \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2),$$

dont le système différentiel associé est

$$\begin{cases} \underline{q}'_1(t) &= \underline{p}_1 + \varepsilon^2 \partial_1 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1 + \underline{p}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) \\ \underline{p}'_1(t) &= \underline{q}_1 - 6\sqrt{2} \underline{q}_1^2 - \varepsilon^2 \partial_1 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1 + \underline{p}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) \\ \underline{q}'_2(t) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \underline{p}_2 + \varepsilon^2 \partial_2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1 + \underline{p}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) \underline{p}_2 \\ \underline{p}'_2(t) &= -\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \underline{q}_2 - \varepsilon^2 \partial_2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1 + \underline{p}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) \underline{q}_2. \end{cases}$$

On obtient à nouveau un système partiellement découplé : le long des trajectoires, on a

$$\frac{d\underline{I}_2}{dt} = 0.$$

Et le sous-système vérifié par les variables  $(\underline{q}_1, \underline{p}_1)$  n'est relié à  $(\underline{q}_2, \underline{p}_2)$  que par la dépendance en  $\underline{I}_2$ . On peut alors résoudre ce système, qui est Hamiltonien (à 1 degré de liberté) avec le paramètre spectateur  $\underline{I}_2$ . On trace le portrait de phase à  $\underline{I}_2 = \underline{I}_{20}$  fixé, grâce aux niveaux d'énergie constante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \underline{p}_1^2 - \underline{q}_1^2 \right) + 2\sqrt{2} \underline{q}_1^3 + \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2) = \alpha \\ \Leftrightarrow & \underline{p}_1 = \pm \sqrt{\underline{q}_1^2 - 4\sqrt{2} \underline{q}_1^3 - \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2) + \alpha}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Par l'étude des fonctions  $\underline{q}_1 \mapsto \underline{q}_1^2 - 4\sqrt{2} \underline{q}_1^3 - \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{I}_2) + \alpha$ , on peut montrer que le portrait de phase dans ce cas est une déformation du précédent : la déformation étant différente selon la valeur de  $\underline{I}_2$ . On ne le fait pas ici, car cela ne sert pas expressément dans la démonstration, à part à donner l'intuition de ce qu'il se passe.

### 3.1.d Heuristique de la stratégie qu'on va suivre

On voit donc que à tout ordre  $n$ , lorsqu'on tronque la forme normale, on a une orbite homocline à 0 et à chacune des orbites périodiques de la famille entourant 0. On voit de plus que lorsqu'on dévie un peu de ces orbites homoclines vers l'"intérieur", on tombe sur des trajectoires périodiques en  $(\underline{q}_1, \underline{p}_1)$ . Notre idée est alors de montrer que lorsqu'on considère le système complet, la seule chose qui puisse arriver pour une connection homocline à une orbite périodique  $P^a$  est de dévier un peu vers l'intérieur, de "suivre" une orbite périodique en  $(\underline{q}_1, \underline{p}_1)$ , éventuellement de faire plusieurs tours puis de rejoindre  $P^a$ . Ce sera ainsi une orbite homocline à  $P^a$  qui fera plusieurs boucles.

Pour capter cette idée de "faire plusieurs tours", il est alors naturel d'introduire une section de Poincaré appropriée coupant les connections homoclines et de s'intéresser aux itérations successives de l'application de premier retour à cette section. C'est l'objet de la suite de la démonstration.

### 3.1.e Dernier changement de coordonnées, troncature, nouvelle notation

A partir de maintenant il va être plus agréable de travailler dans les **nouvelles coordonnées**  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$ , qu'on obtient par le changement de coordonnées linéaire canonique suivant, qui a l'avantage de mettre la partie linéaire en 0 du système Hamiltonien sous forme de Jordan :

$$\begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \underline{p}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix} := L \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \underline{q}_2 \\ \underline{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le Hamiltonien s'écrit

$$-q_1 p_1 + (q_1 + p_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} I_2 + \varepsilon^2 N_n(q_1 + p_1, I_2, \varepsilon) + \varepsilon^{4n-8} \mathcal{R}_n(x, \varepsilon),$$

où on a

- $I_2 = q_2^2 + p_2^2$  ;
- $\omega$  fonctions  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  telle que  $\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$  ;
- la forme normale  $N_n$  est un polynôme réel de degré inférieur à  $n$  par rapport à  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  tel que

$$N_n(q_1 + p_1, I_2, \varepsilon) = \mathcal{O}(|q_1 + p_1| |I_2| + \varepsilon^2(|q_1 + p_1|^2 + |I_2|)^2),$$

- et les coefficients de ce polynôme sont  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$  ;
- le reste  $\mathcal{R}_n : ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[ \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho_1); \mathbb{R}) : \varepsilon \mapsto \mathcal{R}_n$  est une famille à 1 paramètre  $\mathcal{C}^1$  de Hamiltoniens analytiques tels que  $\mathcal{R}_n(x, \varepsilon) = \mathcal{O}(|x|^{n+1})$ .

**On tronque ensuite ce Hamiltonien** pour se ramener à l'étude d'un flot borné. Soit  $\mathcal{T}_{\rho_0}$  une application  $\mathcal{C}^\infty$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\mathcal{T}_{\rho_0}(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r \in [-\frac{1}{4}\rho_0^2, \frac{1}{4}\rho_0^2] \\ 0 & \text{pour } |r| \geq \rho_0^2. \end{cases}$$

On choisit  $\rho_0$  tel que l'orbite homocline obtenue ci-dessus pour le système tronqué soit strictement incluse dans  $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2}\rho_0)$ . Puis on s'intéresse au Hamiltonien suivant :

$$H(x, \varepsilon) := \mathcal{T}_{\rho_0}(q_1^2)\mathcal{T}_{\rho_0}(p_1^2)\mathcal{T}_{\rho_0}(q_2^2 + p_2^2)(-q_1p_1 + (q_1 + p_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}I_2 + \varepsilon^2 N_n(q_1 + p_1, I_2, \varepsilon) + \varepsilon^{4n-8}\mathcal{R}_n(x, \varepsilon)),$$

qui dans la boule  $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2}\rho_0)$  est bien le Hamiltonien obtenu ci-dessus

$$H(x, \varepsilon) = -q_1p_1 + (q_1 + p_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}I_2 + \varepsilon^2 N_n(q_1 + p_1, I_2, \varepsilon) + \varepsilon^{4n-8}\mathcal{R}_n(x, \varepsilon).$$

L'utilité de cette troncature est

- de travailler sur un flot borné, qui ne sort pas de la boule  $\mathcal{B}(0, \rho_0)$  : utile pour obtenir des majorations uniformes,
- à l'aide de ces majorations on trouvera en fait que pour  $\varepsilon$  assez petit les solutions restent dans la boule  $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2}\rho_0)$  : ce seront donc aussi des solutions du système Hamiltonien non tronqué qu'on étudie.

*Dans la suite, on écrira toujours le Hamiltonien sans la fonction de troncature car on travaillera en pratique dans  $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2}\rho_0)$ .*

**On introduit de plus la nouvelle paramétrisation du Hamiltonien,  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \nu, \mu)$**  de telle manière qu'on ait

$$H(x, \underline{\varepsilon}) = -q_1p_1 + (q_1 + p_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}I_2 + \nu N_n(q_1 + p_1, I_2, \varepsilon) + \mu\nu\varepsilon^{N_0}\mathcal{R}_n(x, \varepsilon). \quad (3.2)$$

Cette paramétrisation a l'avantage de faire apparaître

- pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, 0, 0)$  la forme normale de degré 3 étudiée ci-dessus dans la partie 3.1.b ;
- pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)$  la forme normale de degré  $n$  étudiée ci-dessus dans la partie 3.1.c ;
- pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^{4n-8-(N_0+2)})$  le système complet.

L'éloignement entre le système complet et les formes tronquées des parties 3.1.b et 3.1.c sera alors mesuré par la régularité des objets qu'on étudiera par rapport aux paramètres  $(\nu, \mu)$ . On choisira  $N_0$ , ainsi que  $n$  (qui sera fixé, donc), plus loin dans la démonstration.

### 3.2 Construction de l'application de premier retour à la section

*On introduit la section*

$$\Sigma_1 := \{(q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 / q_1 = \delta_1\},$$

où  $\delta_1$  est fixé "petit" : on aura plusieurs conditions de petitesse de  $\delta_1$  dans la suite, mais aucune n'est liée à la taille de  $\underline{\varepsilon}$ .

Pour la construction du premier retour  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}$  à la section  $\Sigma_1$ , on va s'y prendre en deux étapes :

- **Application globale.** On utilise l'existence de l'orbite homocline à 0 pour la forme normale de degré 3 et, par déformation, on essaye de montrer qu'on a un retour à la section pour  $a$  et  $\nu$  petits. Il faut pour cela s'assurer que le  $\varepsilon$  du terme en  $\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}$  ne vient pas décompenser la petite taille de  $\nu$ . On va voir que ce raisonnement n'est malheureusement possible que lorsqu'on travaille au voisinage d'un morceau de l'orbite homocline qui est parcouru en un temps fini : on va donc faire ce raisonnement, dans la partie 3.2.b, pour **un trajet allant d'une deuxième section  $\Sigma_2$  à la section  $\Sigma_1$**  (voir Figure 2.7).



- **Application locale.** On va choisir  $\Sigma_2$  et  $\Sigma_1$  proches de l'origine, car c'est près de 0 que le temps de parcours de l'orbite homocline par le flot est infini. On complétera le retour à la section  $\Sigma_1$  en construisant **une application locale de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$** . Pour cela, on fabrique dans la partie 3.2.a un changement de coordonnées local  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  au voisinage de 0 qui linéarise le flot pour tout  $\underline{\varepsilon}$ , et permet donc de montrer que les solutions issues de  $\Sigma_1$  vont bien taper dans  $\Sigma_2$  (voir Figure 2.8).

On commence par construire le changement de coordonnées local  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  dans la partie 3.2.a, puis on définira  $\Sigma_2$  en fonction du domaine de définition de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$ . On construira l'application globale dans la partie 3.2.b, puis l'application de premier retour complète dans la partie 3.2.c.

### 3.2.a Construction d'un changement de coordonnées local $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$

Le changement de coordonnées canonique local  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  construit dans la Proposition 3.2 ci-dessous transforme au voisinage de 0 le système Hamiltonien en un système intégrable, dont on va montrer que le comportement est celui d'un système linéaire. Dans les nouvelles coordonnées, les orbites périodiques et leurs variétés stable et instable auront de plus une expression simple indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ , ce qui permettra dans les coordonnées originales de donner une expression explicite de ces objets à l'aide de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$ . On montre dans la Proposition 3.2 ci-dessous une estimation de la variation de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  en fonction de  $\underline{\varepsilon}$ , ce qui nous donnera des indications sur les positions des orbites périodiques et de leurs variétés stable et instable en fonction de la valeur de  $\underline{\varepsilon}$ .

**Proposition 3.2** *Il existe  $\varepsilon_0$ ,  $\rho'_0 < \frac{1}{2}\rho_0$  et une famille de changements de coordonnées canoniques*

$$\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) := (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),$$

*définie pour  $|\underline{\varepsilon}| \leq \varepsilon_0$  telle que le Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  s'écrive*

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2) = -\xi_1 \eta_1 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \mathcal{O}(|(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2)|^2), \quad (3.3)$$

*et vérifiant de plus*

- pour tout  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}, \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho'_0), \mathbb{R}^4)$  ;
- pour tout  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \mathcal{O}(|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2)$  ;
- $\mathcal{F}_{(\varepsilon,0,0)} := \mathcal{F}_0$  est une fonction indépendante de  $\varepsilon$ , et est de la forme

$$\mathcal{F}_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\varphi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2) ;$$

- il existe  $\mathcal{M}_0$  tel que

$$\|\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} - \mathcal{F}_0\|_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{M}_0 \nu, \quad \|\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1} - \mathcal{F}_0^{-1}\|_{\mathcal{A}} \leq \mathcal{M}_0 \nu.$$

*Tous les  $\mathcal{O}$  correspondant à des majorations indépendantes de  $\underline{\varepsilon}$ .*

Cette proposition est énoncée plus en détail et démontrée dans l'Annexe C (Proposition C.1). L'expression du Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées,  $K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2)$ , permet alors de dessiner entièrement le portrait de phase. En effet, on vérifie qu'on a alors le

long des trajectoires des solutions du système Hamiltonien associé

$$\begin{aligned}\frac{d(\xi_1 \eta_1)}{dt} &= 0, \\ \frac{d(\xi_2^2 + \eta_2^2)}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

Les solutions sont donc dans les niveaux  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \eta_1 = C_1, \xi_2^2 + \eta_2^2 = C_2\}$ . De plus on a

$$\frac{d\xi_1}{dt} = (\partial_1 K_\varepsilon)(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2) \cdot \xi_1.$$

Or, comme le  $\mathcal{O}$  dans (3.3) est indépendant de  $\varepsilon$ ,

$$\left| K_\varepsilon(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2) - \left( -\xi_1 \eta_1 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} (\xi_2^2 + \eta_2^2) \right) \right| \leq \mathcal{M}_0 |(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2)|^2. \quad (3.4)$$

Donc, quitte à réduire le diamètre  $\rho'_0$  de la boule (de manière indépendante de  $\varepsilon$ ),

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_1}{dt} &< 0 \quad \text{si } \xi_1 > 0, \\ \frac{d\xi_1}{dt} &> 0 \quad \text{si } \xi_1 < 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la dynamique dans les coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  est telle que représentée dans le portrait de phase de la Figure 2.6.

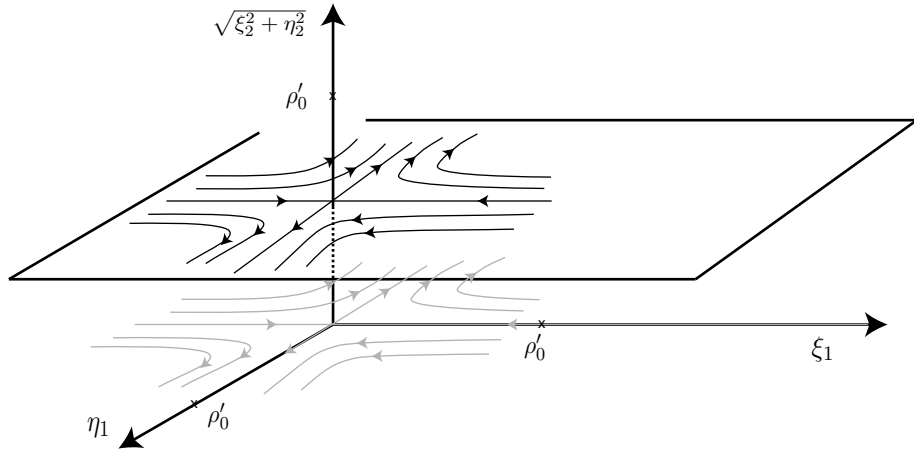


FIGURE 2.6 – Portrait de phase dans les coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ .

### 3.2.b Définition d'une deuxième section $\Sigma_2$ et application globale de $\Sigma_2$ dans $\Sigma_1$

On définit  $\Sigma_2$  par son image dans les coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ ,

$$\Sigma_2 := \mathcal{F}_\varepsilon \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho'_0) / \eta_1 = \delta_1\} \right).$$

On montre alors par une méthode de perturbation au voisinage de l'orbite homocline à 0 pour la forme normale de degré 3 l'existence d'une application de Poincaré  $\Psi_2$  suivant le flot de  $\Sigma_2$  à  $\Sigma_1$ . En notant  $\phi(t, x, \underline{\varepsilon})$  le flot associé au Hamiltonien  $H(\cdot, \underline{\varepsilon})$ , on démontre précisément la proposition suivante, qui contient de plus l'estimation (3.5) sur  $\Psi_2$  qui sera utile plus loin :

**Proposition 3.3** *Pour  $\delta_1$  assez petit, il existe  $T^-(\delta_1) < T^+(\delta_1)$  et  $\xi_0(\delta_1)$  tels que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  dans*

$$\Sigma_2 \cap \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1 \right\},$$

*il existe un unique  $T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$  vérifiant*

$$\phi(T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}), \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \underline{\varepsilon}) \in \Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1).$$

*De plus, en notant*

$$\begin{aligned} \Psi_2((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) &:= \phi(T_L(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}((q_1, p_1, q_2, p_2)), \underline{\varepsilon}), (q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) \\ &= (\Psi_{2,q_1}, \dots, \Psi_{2,p_2})((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}), \end{aligned}$$

*il existe  $M$  tel que*

$$|\Psi_{2,q_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 + \Psi_{2,p_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 - (q_2^2 + p_2^2)| \leq \mu\nu\varepsilon^{N_0} M_2 T^+(\delta_1, \delta_1). \quad (3.5)$$

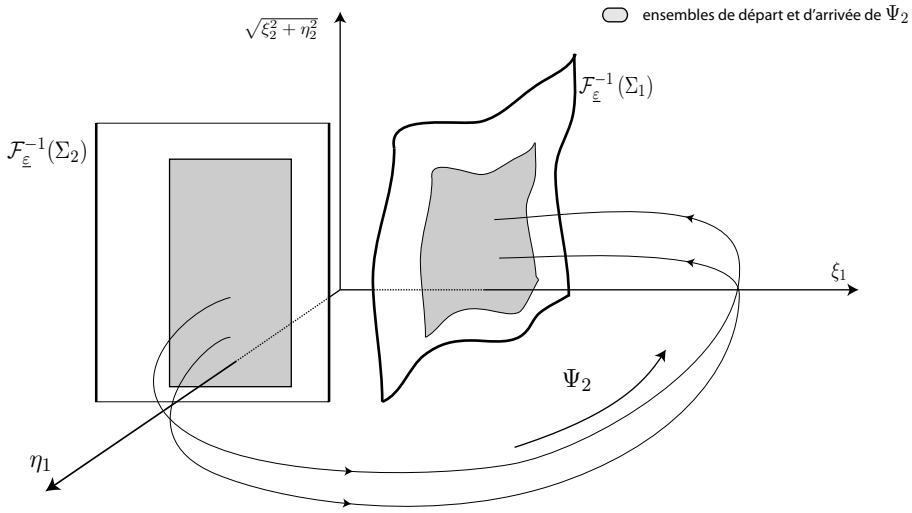


FIGURE 2.7 – Application de retour globale  $\Psi_2$ .

La démonstration complète de cette proposition se trouve dans la partie 5.4.

### 3.2.c Existence du premier retour à $\Sigma_1$

Connaissant la dynamique au voisinage de 0 grâce au portrait de phase en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  de la Figure 2.6, on voit que l'existence d'une application de Poincaré de  $\Sigma_1$  dans  $\Sigma_2$  ne dépend que du signe de  $\eta_1$  en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . Ce qui correspond en coordonnées  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  à être "du bon côté" de la variété centre-stable à 0, qui en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  est l'hyperplan  $\{\eta_1 = 0\}$  (voir Figure 2.8).

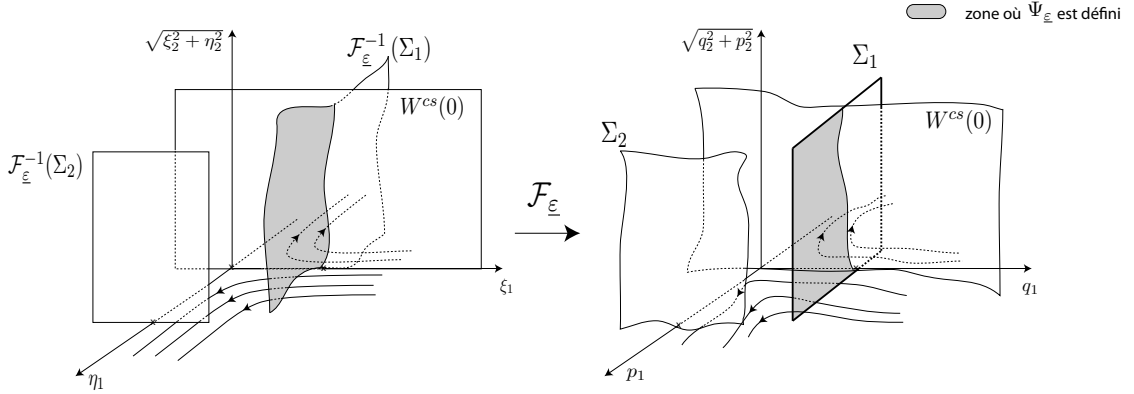


FIGURE 2.8 – Position du domaine de définition du premier retour par rapport à  $W^{cs}(0)$ .

On démontre alors précisément la proposition

**Proposition 3.4** *On peut définir un premier retour*

$$\Psi : \Sigma_1 \cap \mathcal{F}_\varepsilon \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / 0 < \eta_1 \leq \xi_0'(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1\} \times ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[ \right) \rightarrow \Sigma_1.$$

Un énoncé plus détaillé de cette proposition est donné par la Proposition 5.3 qui est énoncée et démontrée dans la partie 5.4.

### 3.3 Construction d'une courbe invariante pour l'application de premier retour par un théorème KAM

A partir d'ici, on n'a plus besoin de distinguer  $\nu$  de  $\varepsilon$ , on travaille donc avec

$$\varepsilon = (\varepsilon, \nu, \mu) = (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu).$$

Dans cette partie, on va fixer une orbite périodique  $P$  au voisinage de 0, et travailler entièrement dans le niveau d'énergie de  $P$ . Le but étant de construire une connection homocline à  $P$ , on étudie la variété instable  $W^i(P)$  avec pour objectif de montrer qu'elle intersecte la variété stable  $W^s(P)$ . Comme annoncé dans la stratégie décrite en 3.1.d, on va montrer que  $W^i(P)$  intersecte une première fois  $\Sigma_1$ , puis revient à  $\Sigma_1$  par l'application  $\Psi$ . Dans cette partie, on va montrer que la restriction de  $\Psi$  au niveau d'énergie de  $P$  peut être vue comme un difféomorphisme d'un anneau de  $\mathbb{R}^2$ . On va ensuite construire une courbe invariante par ce difféomorphisme grâce à un théorème KAM. Dans la partie 3.4, on montrera alors que les itérations successives de  $\Psi$  appliquées à  $W^i(P)$  restent toutes bornées à l'intérieur de cette courbe invariante, ce qui nous permettra d'en déduire que  $W^i(P)$  intersecte nécessairement  $W^s(P)$ .

### 3.3.a Introduction de $\Psi^a$ , écriture comme difféomorphisme d'un anneau de $\mathbb{R}^2$

Grâce au changement de coordonnées canonique  $\mathcal{F}_\varepsilon$  de la Proposition 3.2, on a l'existence et la paramétrisation précise des orbites périodiques au voisinage de 0. En effet, dans les coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  on a la famille d'orbites périodiques

$$\{(0, 0, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 = a\},$$

paramétrées par leur aire symplectique  $a$ . On définit alors

$$P_\varepsilon^a := \mathcal{F}_\varepsilon(\{(0, 0, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 = a\}). \quad (3.6)$$

En particulier, comme  $\mathcal{F}_\varepsilon$  est canonique,  $P_\varepsilon^a$  est aussi d'aire symplectique  $a$ . On s'intéresse alors au niveau d'énergie

$$\{H = H(P^a)\} = \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / H((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon) = H(P_\varepsilon^a, \varepsilon)\}$$

et à son intersection avec  $\Sigma_1$ . Dans la Proposition 3.5 énoncée ci-dessous, on montre tout d'abord que cette intersection est localement difféomorphe à un disque de  $\mathbb{R}^2$  dans un voisinage de  $(\delta_1, 0, 0, 0)$  sur  $\Sigma_1$  (c'est le (ii) de la proposition). Comme  $\Psi$  n'est défini que si on est "du bon côté" (cf Figure 2.8) de la variété centre-stable  $W^{cs}(0)$ , on étudie de plus à quoi correspond "être du bon côté", une fois identifié le niveau d'énergie à un disque de  $\mathbb{R}^2$  : on montre que cela correspond à être à l'extérieur de la courbe définie par l'intersection de  $W^{cs}(0)$  avec le niveau d'énergie (c'est (3.7) du (ii) dans la proposition). Enfin, on montre qu'en restreignant suffisamment l'ensemble de départ de  $\Psi$ , l'ensemble d'arrivée se trouve dans la zone où le niveau d'énergie est difféomorphe à un disque (c'est le (iii) dans la Proposition 3.5) : ainsi on pourra bien considérer  $\Psi^a$  comme un difféomorphisme d'un disque de  $\mathbb{R}^2$  ((iv) dans la proposition).

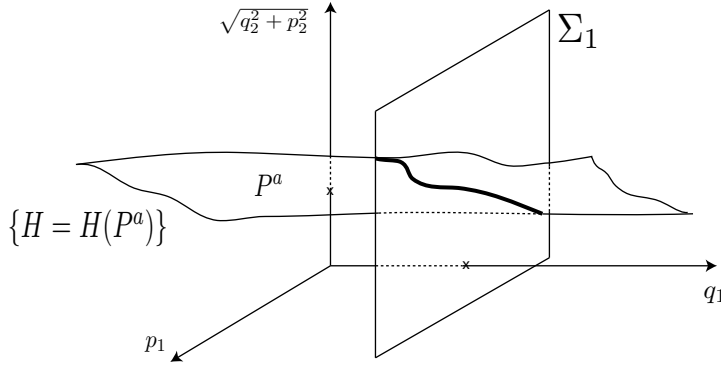


FIGURE 2.9 – Intersection du niveaux d'énergie  $\{H = H(P^a)\}$  avec la section  $\Sigma_1$ .

**Proposition 3.5** (i) Pour  $\delta_1$  assez petit, il existe une application  $p_{1,\varepsilon}^{cs}$  telle que

$$W_\varepsilon^{cs}(0) \cap \Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) = \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / q_1 = \delta_1, p_1 = p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)\}.$$

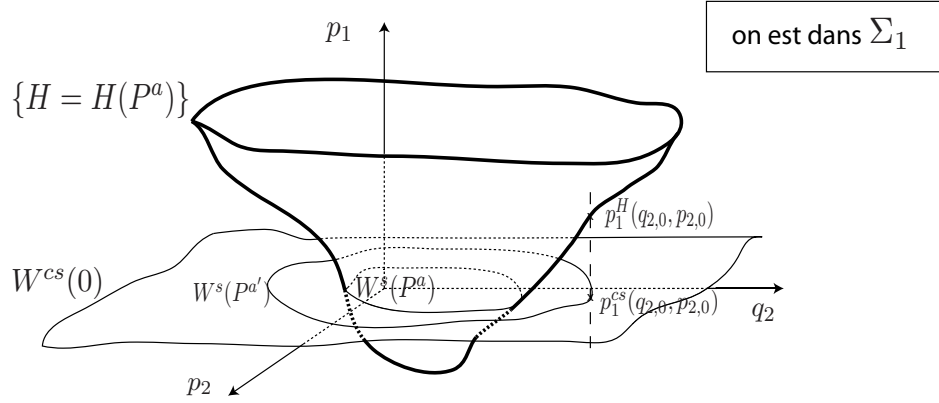


FIGURE 2.10 – Dans  $\Sigma_1$ , positions relatives du niveau  $\{H = H(P^a)\}$  et de la variété centre-stable  $W^{cs}(0)$ .

De plus,  $p_{1,\varepsilon}^{cs}$  vérifie dans  $\mathcal{B}(0, \delta_1)$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon}^{-1}(\delta_1, p_1, q_2, p_2) \in \{\eta_1 > 0\} \Leftrightarrow p_1 > p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2).$$

(ii) Il existe  $c_0$  tel que pour  $\delta_1$  assez petit et  $a \leq c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$ , il existe une application  $p_1^H$  telle que

$$\begin{aligned} \{H=H(P^a)\} \cap \Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) \cap \{(q_1, p_1, q_2, p_2)/I_2 \leq \frac{1}{2} \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2\} \\ = \left\{ (q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 = \delta_1, p_1 = p_1^H(q_2, p_2, a), I_2 \leq \frac{1}{2} \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

(voir Figure 2.9). De plus,

$$p_1^H(q_2, p_2, a) > p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) \Leftrightarrow (q_2, p_2) \text{ à l'extérieur de } \mathcal{C}_s^a := \{(q_2, p_2)/p_1^H(q_2, p_2, a) = p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)\} \quad (3.7)$$

(voir Figure 2.10).

(iii) Pour  $c$  assez petit, l'ensemble

$$\Sigma_1 \cap \{(q_1, p_1, q_2, p_2)/0 < p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) \leq p'_0(\delta_1), q_2^2 + p_2^2 \leq c \delta_1^2 \varepsilon^2\}$$

est inclus dans l'ensemble de définition de  $\Psi$  et son image par  $\Psi$  est incluse dans l'ensemble

$$\Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) \cap \{(q_1, p_1, q_2, p_2)/I_2 \leq \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2\}.$$

(iv) Pour  $a \leq \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$ , la restriction  $\Psi^a$  de  $\Psi$  au niveau d'énergie  $\{H = H(P^a)\}$  peut être vue comme un difféomorphisme

$$\Psi_{\varepsilon}^a : \{(q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \leq c \delta_1^2 \varepsilon^2, (q_2, p_2) \text{ à l'extérieur de } \mathcal{C}_s^a\} \rightarrow \{(q_2, p_2), q_2^2 + p_2^2 \leq \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2\}$$

(voir Figure 2.11).

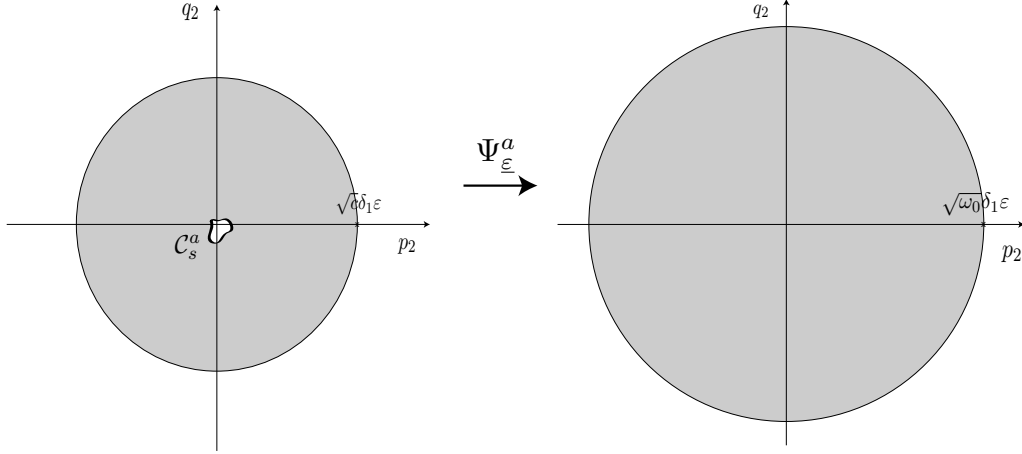


FIGURE 2.11 – Domaines de départ et d’arrivée de  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a$ .

### 3.3.b Existence d’une courbe invariante par vérification des hypothèses d’un théorème KAM

On démontre maintenant l’existence de courbes invariantes pour les difféomorphismes  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a$ . Cela est possible pour un bon choix des paramètres laissés libres ci-dessus. On choisit dans cette partie l’ordre  $n$  auquel on applique le théorème de forme normale, ainsi que la puissance  $N_0$  de  $\varepsilon$  dans le Hamiltonien exprimé dans les 3 paramètres  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \nu, \mu)$  (voir (3.2) ci-dessus), et on va aussi choisir une valeur de  $\mu$  en fonction de  $\varepsilon$ . C’est donc ici que l’écriture sous forme normale joue pleinement son rôle. On montre précisément :

**Proposition 3.6** *Il existe  $\ell_0$  et il existe  $\varepsilon_0, c_1$  et  $c_2$  tels que pour*

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \varepsilon_0, & a &\leq \varepsilon^{3\ell_0+1}, \\ n &\geq 2(\ell_0 + 2), & N_0 &\geq 4\ell_0 + 5, & \mu &\leq \varepsilon^{4\ell_0+1}, \end{aligned}$$

l’application  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a := \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^{4\ell_0+1})}^a$  admet une courbe invariante  $\Gamma_{\underline{\varepsilon}}^a$  dans l’anneau de  $\mathbb{R}^2$

$$\{(q_2, p_2)/I_2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\}.$$

**Démonstration :** le reste de cette partie est consacré à la démonstration de cette proposition. Pour cela on utilise le théorème KAM suivant, démontré dans l’article de Moser [51].

**Théorème 3.7 (Théorème KAM)** *Soit*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \\ (q, \rho) &\mapsto (q + \alpha(\rho) + F(q, \rho), \rho + G(q, \rho)). \end{aligned}$$

*On suppose que*

–  $\Phi$  est une application exacte,

– il existe  $m_0 > 0$  tel que pour tout  $\rho$ ,

$$\frac{1}{m_0} \leq \frac{d\alpha}{d\rho}(\rho) \leq m_0. \quad (3.8)$$

Alors il existe  $\ell_0 \in \mathbb{N}$  et  $\delta_0(m_0) > 0$  tels que si on a

- $|F|_{\mathcal{C}^0} + |G|_{\mathcal{C}^0} \leq \delta_0(m_0)$ ,
- $|\alpha|_{\mathcal{C}^{\ell_0}} + |F|_{\mathcal{C}^{\ell_0}} + |G|_{\mathcal{C}^{\ell_0}} \leq m_0$ ,

alors  $\Phi$  admet une courbe invariante

$$\{(q, \rho) = (q' + f(q'), \rho_0 + g(q')), q' \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}, \quad (3.9)$$

où  $f, g$  sont  $\mathcal{C}^1$ .

On peut s'apercevoir que, dans la démonstration de ce théorème dans [51], l'hypothèse (3.8) peut être remplacée par l'hypothèse suivante, qu'on va utiliser ici :

$$-m_0 \leq \frac{d\alpha}{d\rho}(\rho) \leq -\frac{1}{m_0}. \quad (3.10)$$

L'idée est d'appliquer ce théorème avec

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a &: (q, \rho) \mapsto (q + \alpha_\varepsilon^a(\rho), \rho), \\ \hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a &: (q, \rho) \mapsto (q + \alpha_\varepsilon^a(\rho) + F_\varepsilon^a(q, \rho), \rho + G_\varepsilon^a(q, \rho)). \end{aligned}$$

Les  $\Psi_\varepsilon^a$  sont définis sur des disques, sur lesquels on ne peut donc pas passer en coordonnées polaires, et si on se contente d'enlever l'origine, les hypothèses du théorème ne sont pas vérifiées, car dans la composante angulaire apparaissent des divisions par la norme de  $\Psi^a(\theta, r)$ . Il faut donc choisir un anneau approprié, pas trop petit pour que les divisions dans la composante angulaire ne soient pas trop grandes, et pas trop grand non plus pour que les majorations obtenues par accroissements finis restent petites. Même avec un bon choix, le théorème ne s'applique pas encore directement tel quel, il nous faut d'abord faire un changement de coordonnées dans les  $\Psi_\varepsilon^a$ . On démontrera dans la partie 7 qu'avec un changement de coordonnées approprié, l'application dans les nouvelles coordonnées notée  $\hat{\Psi}_\varepsilon^a$  satisfait les hypothèses du théorème, précisément (voir Figure 2.12) :

**Proposition 3.8** *Il existe  $c_0, c_1, c_2$  et  $m_0 > 0$  tels que pour  $\varepsilon$  assez petit, pour tout  $a \in [0, c_0\delta_1^2\varepsilon^2]$  et pour tout  $k \leq E(\frac{N_0-1}{4}) - 1$  on ait dans l'anneau*

$$\{(q_2, p_2)/I_2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\},$$

- (i)  $\hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a$  application exacte ;
- (ii)  $-m_0 \leq \frac{\partial \alpha_\varepsilon^a}{\partial \rho} \leq -\frac{1}{m_0}$  ;
- (iii)  $|\alpha_\varepsilon^a|_{\mathcal{C}^k} \leq m_k$  ;
- (iv)  $|F_\varepsilon^a|_{\mathcal{C}^k} + |G_\varepsilon^a|_{\mathcal{C}^k} \leq m_0 \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon 6k} + \frac{\mu}{\varepsilon 4k} \right)$ .



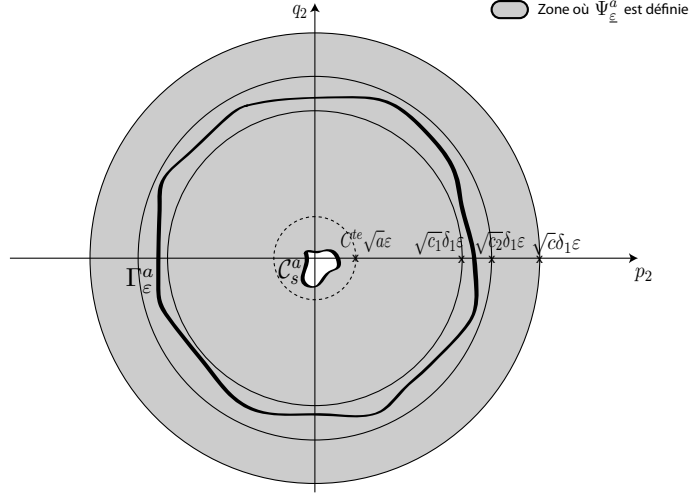


FIGURE 2.12 – Courbe invariante et taille des couronnes de travail dans la démonstration.

**Démonstration :** se trouve dans la partie 7.

Rappelons que dans le reste obtenu dans  $H$  après application du théorème de forme normale au degré  $n$ , on avait un terme en  $\varepsilon^{4n-8}$ , qu'on avait réécrit  $\varepsilon^{4n-8} = \mu\nu\varepsilon^{N_0}$ . On rappelle aussi qu'on a déjà choisi la valeur  $\nu = \varepsilon^2$  depuis le début de la partie 3.3. On choisit maintenant les valeurs de  $n$  et  $N_0$  :

- le degré  $n$  auquel on applique le théorème de forme normale  $n := 2\ell_0 + 3$ ,
- on choisit  $N_0 := 4\ell_0 + 1$ .

Comme on a déjà pris  $\nu = \varepsilon^2$ , on a  $\mu := \varepsilon^{4\ell_0+1}$ . Avec  $N_0 = 4\ell_0 + 1$ , et pour  $a \leq \varepsilon^{3\ell_0}$ , la Proposition 3.8 implique bien que les hypothèses du théorème KAM sont vérifiées dans l'anneau  $I_2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]$  pour toutes les applications  $\hat{\Psi}_\varepsilon^a$ . Donc il existe une courbe  $\Gamma_\varepsilon^a$  du type (3.9) incluse dans l'anneau  $I_2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]$ , invariante par l'application  $\Psi_\varepsilon^a = \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^{4\ell_0+1})}^a$ .  $\square$

### 3.4 Démonstration du Théorème 2.2

Nous avons maintenant tous les éléments pour passer à la démonstration proprement dite du Théorème 2.2. Soit  $a, \varepsilon$  fixés. On s'intéresse à la variété instable  $W^i(P^a)$  à l'orbite périodique  $P^a$ .

On commence par s'assurer que  $W^i(P^a)$  atteint une première fois  $\Sigma_1$ , dans le voisinage de  $(\delta_1, 0, 0, 0)$  pour lequel l'intersection de  $\Sigma_1$  avec le niveau d'énergie  $\{H = H(P^a)\}$  s'écrit comme un graphe, et à l'intérieur de la courbe invariante  $\Gamma_\varepsilon^a$ . On va même prendre une distance de sécurité avec la courbe invariante, en montrant que pour  $a, \varepsilon$  assez petits  $W^i(P^a)$  atteint une première fois l'ensemble

$$\Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) \cap \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 \leq \frac{1}{4}c_1\delta_1^2\varepsilon^2\}. \quad (3.11)$$

Or dans les coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , la variété instable à  $P^a$  est le tube

$$\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathbb{R}^4 / \xi_1 = 0, \xi_2^2 + \eta_2^2 = a\},$$

qui intersecte l'hyperplan  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = \delta_1\} = \mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_2)$  en le cercle

$$\{(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_2^2 + \eta_2^2 = a\}.$$

Pour  $a \leq \delta_1^2$ , on peut alors utiliser le retour partiel  $\Psi_2$  construit dans la Proposition 3.3, qui relie  $\Sigma_2$  à  $\Sigma_1$  : on obtient ainsi l'existence de l'intersection de  $W^i(P^a)$  avec  $\Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1)$  (voir Figure 2.13). En utilisant de plus l'estimation (3.5) donnée dans cette Proposition 3.3, on obtient alors que pour  $a < c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2$ , pour  $\varepsilon$  assez petit, l'intersection de  $W^i(P^a)$  avec  $\Sigma_1$  a bien lieu dans l'ensemble (3.11).

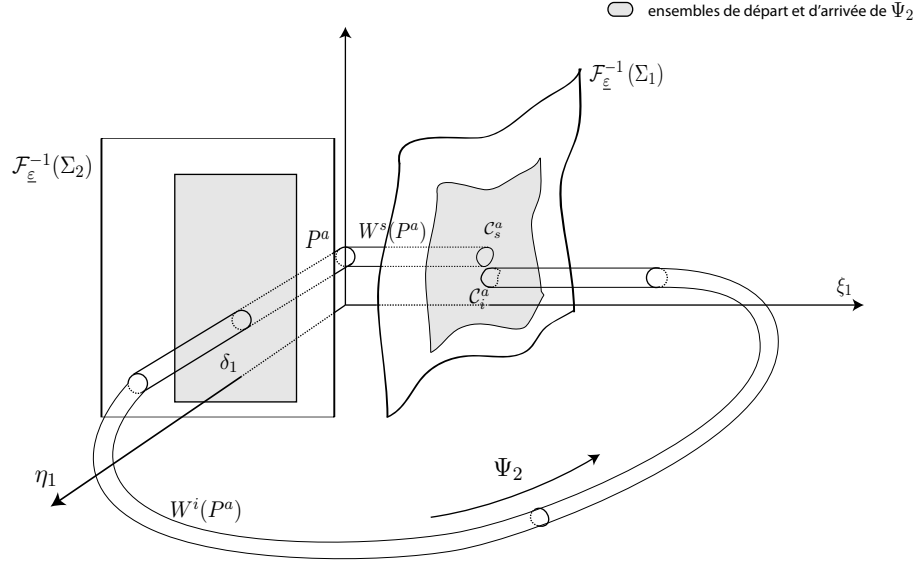


FIGURE 2.13 –  $W^i(P^a)$  intersecte  $\Sigma_1$  une première fois.

On a alors l'alternative suivante pour la courbe  $C_i^a$  représentant en coordonnées  $(q_2, p_2)$  l'intersection de  $W^i(P^a)$  avec  $\Sigma_1$  :

- ou bien  $C_i^a$  intersecte la courbe de la variété stable,  $C_s^a$ , **auquel cas on a démontré l'existence d'une connection homocline à  $P^a$ ,**
- ou bien  $C_i^a$  n'intersecte pas  $C_s^a$ .

Considérons alors le cas où on n'a pas intersection. Comme ces deux courbes sont de même aire symplectique  $a$ ,  $C_i^a$  ne peut être entièrement à l'intérieur de  $C_s^a$ . Nécessairement,  $C_i^a$  est donc à l'extérieur de  $C_s^a$  (voir Figure 2.14).

Or, à l'extérieur de  $C_s^a$  et dans l'ensemble (3.11), on sait que l'application  $\Psi_\varepsilon^a$  est définie, on peut donc s'intéresser à  $\Psi_\varepsilon^a(C_i^a)$ . Pour  $a, \varepsilon$  assez petits, l'intérieur de la courbe  $\Gamma_\varepsilon^a$  construite dans la Proposition 3.6 ci-dessus est envoyé par l'application  $\Psi_\varepsilon^a$  à l'intérieur de  $\Gamma_\varepsilon^a$ . Donc  $\Psi_\varepsilon^a(C_i^a)$  est elle aussi une courbe d'aire symplectique  $a$  et située à l'intérieur de la courbe  $\Gamma_\varepsilon^a$ . On a à nouveau l'alternative :

- ou bien  $\Psi_\varepsilon^a(C_i^a)$  intersecte la courbe de la variété stable,  $C_s^a$ , **auquel cas on a démontré l'existence d'une connection homocline à 1 boucle à  $P^a$ ,**
- ou bien  $\Psi_\varepsilon^a(C_i^a)$  est à l'extérieur de  $C_s^a$ , et donc dans le domaine de définition de  $\Psi_\varepsilon^a$ .

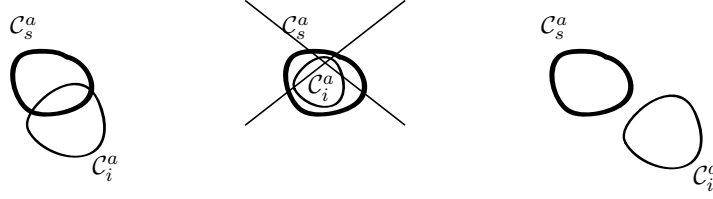


FIGURE 2.14 – Alternatives possibles pour les positions relatives de  $\mathcal{C}_s^a$  et  $\mathcal{C}_i^a$ .

On itère alors ce processus. Comme  $\mathcal{C}_i^a$  est définie comme étant la première intersection de  $W^i(P^a)$  avec  $\Sigma_1$ , pour tout  $N$ ,  $(\Psi_\varepsilon^a)^N(\mathcal{C}_i^a)$  et  $\mathcal{C}_i^a$  sont disjointes. Comme  $\Psi_\varepsilon^a$  est un difféomorphisme (on peut donc l'inverser), on obtient pour tous  $N_1, N_2$ ,  $(\Psi_\varepsilon^a)^{N_1}(\mathcal{C}_i^a)$  et  $(\Psi_\varepsilon^a)^{N_2}(\mathcal{C}_i^a)$  sont disjointes. Quand on itère  $N_0$  fois ce processus, l'ensemble des  $(\Psi_\varepsilon^a)^N(\mathcal{C}_i^a)$  pour  $N \leq N_0$  recouvre alors une surface d'aire égale à  $N_0 \cdot a$ . Or cette surface est à l'intérieur de la courbe  $\Gamma_\varepsilon^a$ , qui est d'aire finie fixe. Donc nécessairement le processus s'arrête pour un  $N_\varepsilon^a$ , *i.e.* nécessairement il existe un  $N = N_\varepsilon^a \in \mathbb{N}$  pour lequel  $(\Psi_\varepsilon^a)^N(\mathcal{C}_i^a)$  intersecte  $\mathcal{C}_s^a$  (voir Figure 2.15). C'est-à-dire qu'on a une **connection homocline** à  $N_\varepsilon^a$  boucles pour l'orbite périodique  $P_\varepsilon^a$ .

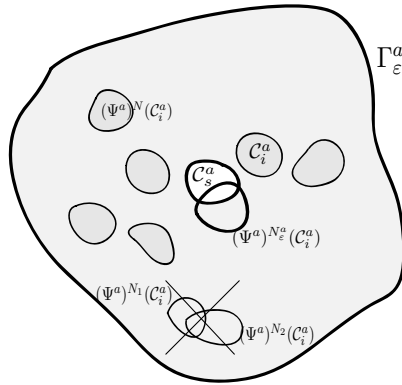


FIGURE 2.15 – Itérations successives de  $\Psi^a$  sur  $\mathcal{C}_i^a$ .

□

**Remarque 3.9 (sur l'utilité de l'hypothèse (H6).)** *L'hypothèse (H6) apparaît explicitement plus loin dans la démonstration du Lemme 6.1, qui sert à démontrer le résultat (3.7) de la Proposition 3.5 ci-dessus, qui lui-même entraîne le fait que l'application  $\Psi_\varepsilon^a$  soit définie à l'extérieur de la courbe  $\mathcal{C}_s^a$ . Et c'est ensuite le fait de savoir que le premier retour est bien défini à l'extérieur de  $\mathcal{C}_s^a$  qui permet dans la démonstration du théorème (voir Partie 3.4) d'itérer l'application de premier retour quand l'intersection n'a pas lieu.*

*Dans la description heuristique de la stratégie, donnée ci-dessus dans la Partie 3.1.d, l'hypothèse (H6) est ce qui permet d'affirmer que lorsqu'on dévie de l'orbite homocline,*

*c'est bien vers l'intérieur de l'orbite (notion d'"intérieur" dans les coordonnées  $(q_1, p_1)$ ).*

**Remarque 3.10 (sur le choix des sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ )** *On a choisi en coordonnées  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$ ,  $\Sigma_1$  plan et  $\Sigma_2$  variété (de dimension 2) non plane. Le choix de  $\Sigma_1$  plan est crucial pour la régularité de l'application de premier retour à  $\Sigma_1$ . Tandis que  $\Sigma_2$  est plan en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , ce qui rend immédiate la définition de l'application de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma_2$ , qui se fait en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . On peut résumer ces choix par l'idée que lorsqu'on définit une application suivant le flot entre 2 variétés, c'est la régularité de la variété d'arrivée qui est importante.*

## 4 Forme normale et changement d'échelle : démonstration de la Proposition 3.1

Cette partie est consacrée à la démonstration de la proposition 3.1. On procède en trois étapes qui correspondent aux trois points (i), (ii) et (iii) de la proposition.

**Étape 1 : application du théorème de forme normale 2.3, conséquences.** Sous les hypothèses (H1),  $\dots$ , (H6), il existe des coordonnées de  $\mathbb{R}^4$  telles que  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{H}_\lambda$  et  $\Omega$  dans ces coordonnées s'écrivent

$$\mathbf{x} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2), \quad \mathbf{H}_\lambda(\mathbf{x}) := \frac{1}{2}\mathbf{p}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_0(\mathbf{q}_2^2 + \mathbf{p}_2^2) + \mathcal{O}(\lambda|\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{x}|^3),$$

et  $\Omega(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle J\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ , où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice  $J$  n'est pas sous la forme habituelle  $J_2$  (cf énoncé du théorème 2.3), mais on peut obtenir cette forme par un changement de coordonnées linéaire isométrique

$$X = TX', \quad T^* = T^{-1}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Et donc le Théorème 2.3 est toujours vrai dans ce cas. Alors, en l'appliquant à la famille de Hamiltoniens  $\mathbf{H}_\lambda(\mathbf{x})$  on obtient l'existence d'une famille de transformations canoniques  $\mathbf{x} = \phi_{n,\lambda}(\tilde{x})$  telle que

$$\tilde{H}_\lambda(\tilde{x}) = \mathbf{H}_\lambda(\phi_{n,\lambda}(\tilde{x})) = \frac{1}{2}\tilde{p}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_0(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) + \tilde{N}_{n,\lambda}(\tilde{x}) + \tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}),$$

où le reste  $\tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x})$  est une  $\mathcal{C}^1$ -famille à 1 paramètre de Hamiltoniens analytiques tels que  $\tilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{n+1})$  et où  $\tilde{N}_{n,\lambda}$  est un polynôme réel de degré  $\leq n$  tel que  $\tilde{N}_{n,\lambda}(\tilde{x}) = \mathcal{O}(\lambda|\tilde{x}|^2 + |\tilde{x}|^3)$  et

$$\tilde{N}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1 + t\tilde{q}_1, \mathbf{R}_{\omega_0 t}(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2)) = \tilde{N}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

avec

$$\mathbf{R}_{\omega_0 t} = \begin{pmatrix} \cos \omega_0 t & -\sin \omega_0 t \\ \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{pmatrix}.$$

En appliquant (4.1) avec  $t = \frac{2\pi}{\omega_0}\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$  et en faisant tendre  $\ell$  vers l'infini, on obtient que nécessairement  $\tilde{N}_{n,\lambda}$  ne dépend pas de  $\tilde{p}_1$ , i.e.

$$\tilde{N}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2) = \tilde{N}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2).$$

Puis en identifiant  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$  par l'application

$$(\tilde{q}_2, \tilde{p}_2) \mapsto (z_2 = \tilde{q}_2 + i\tilde{p}_2, \bar{z}_2 = \tilde{q}_2 - i\tilde{p}_2),$$

et en définissant  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, z_2, \bar{z}_2) := \widetilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$ , l'égalité (4.1) devient

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, e^{i\omega_0 t} z_2, e^{-i\omega_0 t} \bar{z}_2) = \widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, z_2, \bar{z}_2) \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors pour  $t = -\frac{\arg z_2}{\omega_0}$  et  $t = -\frac{\arg z_2}{\omega_0} + \pi$ , on obtient

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, z_2, \bar{z}_2) = \widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, |z_2|, |z_2|) = \widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, -|z_2|, -|z_2|).$$

Ce qui signifie que  $\widetilde{\mathcal{M}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, z_2, \bar{z}_2) = \widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, |z_2|^2)$  où  $(\tilde{q}_1, I_2) \mapsto \widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, I_2)$  est un polynôme réel. Donc

$$\widetilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2) = \widetilde{\mathcal{N}}_{n,\lambda}^o(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2) = \widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2).$$

On a donc démontré l'existence d'une  $\mathcal{C}^1$ -famille à 1 paramètre de transformations canoniques analytiques  $\mathbf{x} = \phi_{n,\lambda}(\tilde{x})$  telles que, au voisinage de l'origine, le Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées  $\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{x}) = \mathbf{H}_\lambda(\phi_{n,\lambda}(\tilde{x}))$  soit de la forme

$$\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{x}) = \frac{1}{2}\tilde{p}_1^2 + \frac{1}{2}\omega_0(\tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + \widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}),$$

où le reste  $\widetilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x})$  est une  $\mathcal{C}^1$ -famille à 1 paramètre de fonctions analytiques telles que  $\widetilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}) = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{n+1})$  et  $\widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}$  est un polynôme réel en  $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2)$  de degré  $\leq n$  en  $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_2)$  et dont les coefficients sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  de  $\lambda$ . De plus, on a

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) = \mathcal{O}\left(\lambda(\tilde{q}_1^2 + \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + (|\tilde{q}_1| + |\tilde{q}_2| + |\tilde{p}_2|)^3\right).$$

**Étape 2 : changement de paramètre  $\lambda$ .** En écrivant le début du développement de Taylor de  $\widetilde{\mathcal{H}}_{n,\lambda}$  on obtient pour  $\widetilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{x})$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{x}) = & \frac{1}{2}\tilde{p}_1^2 + \frac{1}{2}\widetilde{\omega}(\lambda)(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) - \frac{1}{2}\widetilde{c}_1(\lambda)\tilde{q}_1^2 + \widetilde{c}_2(\lambda)\tilde{q}_1^3 + \widetilde{c}_3(\lambda)\tilde{q}_1(\tilde{q}_2^2 + \tilde{p}_2^2) \\ & + \widetilde{\mathcal{Q}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) + \widetilde{\mathcal{R}}_{n,\lambda}(\tilde{x}), \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{n,\lambda}(\tilde{q}_1, \tilde{p}_2^2 + \tilde{q}_2^2) = \mathcal{O}\left((|\tilde{q}_1| + |\tilde{q}_2| + |\tilde{p}_2|)^4\right),$$

et où  $\widetilde{c}_1, \widetilde{c}_2, \widetilde{c}_3$  et  $\widetilde{\omega}$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  de  $\lambda$  avec  $\widetilde{\omega}(0) = \omega_0$ ,  $\widetilde{c}_1(\lambda) = c_{10}\lambda + o(\lambda)$ ,  $\widetilde{c}_2(0) = c_{20}$ . De plus, **grâce aux hypothèses (H2), (H3) et (H4)**,  $\omega_0$ ,  $c_{10}$  et  $c_{20}$  sont non nuls.

Enfin, comme on ne s'intéresse ici qu'à la "demi-bifurcation" correspondant à  $c_{10}\lambda > 0$  (cf hypothèses (H3) et (H5)), on peut inverser l'égalité

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \widetilde{c}_1(\lambda) = c_{10}\lambda + o(\lambda)$$

par le théorème des fonctions implicites, *i.e.* il existe une fonction  $\mathcal{C}^1$   $\tilde{\theta}$  telle que  $\lambda = \tilde{\theta}(\tilde{\varepsilon}^2)$ .

**Étape 3 : changement d'échelle.** On fait maintenant un changement d'échelle à la fois en espace et en temps, suggéré par l'observation de la forme normale de degré 3. En fait

pour tout  $n$  la forme normale du Hamiltonien (*i.e.* après application du théorème de forme normale et en tronquant le reste) admet une orbite homocline à 0 qui dépend de  $\tilde{\varepsilon}$ . De plus pour  $n = 3$  cette orbite homocline  $\tilde{h}_{\tilde{\varepsilon}}$  a une écriture explicite de la forme

$$\tilde{h}_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{t}) = (\tilde{\varepsilon}^2 q_1^h(\tilde{\varepsilon} \tilde{t}), \tilde{\varepsilon}^3 p_1^h(\tilde{\varepsilon} \tilde{t}), 0, 0).$$

Pour étudier la dynamique du système complet au voisinage de cette orbite homocline, il est plus pratique de changer d'échelle le système de manière à ce que dans les nouvelles variables l'orbite homocline de la forme normale de degré 3 du système ne dépende pas de  $\tilde{\varepsilon}$ . On fait alors le changement d'échelle en espace  $\tilde{x} = \sigma_{\tilde{\varepsilon}}(\underline{x})$ , et en temps suivant

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^2 \underline{q}_1, & \tilde{q}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^{\frac{5}{2}} \underline{q}_2, & t &= \tilde{\varepsilon} \tilde{t}, \\ \tilde{p}_1 &= \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^3 \underline{p}_1, & \tilde{p}_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^{\frac{5}{2}} \underline{p}_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ce changement d'échelle est une application conforme qui est bien définie pour  $\tilde{\varepsilon}$  petit car  $\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon}) = c_{20} + \mathcal{O}(\tilde{\varepsilon}^2)$  où par l'hypothèse (H4) on a  $c_{20} \neq 0$ . On remarque que l'application sur les coordonnées  $(\tilde{q}_1, \tilde{p}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_2)$  seule n'est pas un changement de variable canonique, mais que avec de plus le changement d'échelle en temps, le système différentiel dans les nouvelles coordonnées est quand même bien pour  $\tilde{\varepsilon} \neq 0$  un système Hamiltonien, de Hamiltonien

$$\frac{8\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}{\tilde{\varepsilon}^6} \tilde{H}_{\tilde{\varepsilon}}\left(\frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^2 \underline{q}_1, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^3 \underline{p}_1, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^{\frac{5}{2}} \underline{q}_2, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}} \tilde{\varepsilon}^{\frac{5}{2}} \underline{p}_2\right).$$

Pour travailler avec des fonctions régulières en le paramètre, comme on a une racine dans le changement d'échelle on fait aussi un dernier changement de paramètre

$$\varepsilon^2 = \tilde{\varepsilon}.$$

Pour  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, 0[ \cup ]0, \varepsilon_0[$  avec  $\varepsilon_0 = \sqrt{\tilde{\varepsilon}_0}$ , on obtient alors le nouveau Hamiltonien pour  $\underline{x} = (\underline{q}_1, \underline{p}_2, \underline{q}_2, \underline{p}_2)$  :

$$\begin{aligned} \underline{H}_{\varepsilon}(\underline{x}) &= \frac{8\tilde{c}_2(\tilde{\varepsilon})}{\tilde{\varepsilon}^{12}} \tilde{H}_{\varepsilon^2}(\sigma_{\varepsilon}(\underline{x})) \\ &= \frac{1}{2} \underline{p}_1^2 - \frac{1}{2} \underline{q}_1^2 + 2\sqrt{2} \underline{q}_1^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} (\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) + \varepsilon^2 \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) + \varepsilon^{4n-8} \underline{R}_{n,\varepsilon}(\underline{x}), \end{aligned}$$

où  $\underline{N}_{n,\varepsilon}$  est un polynôme de degré inférieur à  $n$  en  $(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{p}_2)$  dont les coefficients sont  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon$ , et vérifie

$$\begin{aligned} \underline{N}_{n,\varepsilon}(\underline{q}_1, \underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) &:= \frac{1}{\varepsilon^2 \varepsilon^{12}} \left[ \tilde{c}_3(\varepsilon^2) \varepsilon^{14} \underline{q}_1 (\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2) + \tilde{Q}_{n,\varepsilon^2}(\varepsilon^4 \underline{q}_1, \varepsilon^{10} (\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2)) \right], \\ &= \mathcal{O}\left(|\underline{q}_1| |\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2| + \varepsilon^2 (|\underline{q}_1|^2 + |\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2|)^2\right). \end{aligned}$$

Enfin, comme  $\tilde{R}_{n,\tilde{\varepsilon}}$  est analytique à coefficients  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon$  et comme

$$\forall \tilde{\varepsilon} \in ]-\tilde{\varepsilon}_0, \tilde{\varepsilon}_0[, \tilde{R}_{n,\tilde{\varepsilon}}(\tilde{x}) = \mathcal{O}(|\tilde{x}|^{n+1}),$$

alors la formule explicite

$$\underline{R}_{n,\varepsilon}(x) := \frac{1}{\varepsilon^{12} \varepsilon^{4n-8}} \tilde{R}_{n,\varepsilon^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\varepsilon^2)}} \varepsilon^4 \underline{q}_1, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\varepsilon^2)}} \varepsilon^6 \underline{p}_1, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\varepsilon^2)}} \varepsilon^5 \underline{q}_2, \frac{1}{2\sqrt{2\tilde{c}_2(\varepsilon^2)}} \varepsilon^5 \underline{p}_2\right)$$

permet bien de s'assurer que  $\underline{R}_{n,\varepsilon}(x)$  est  $\mathcal{C}^1$  en  $\varepsilon$ .  $\square$

## 5 Existence de l'application de premier retour à $\Sigma_1$ : démonstration des Propositions 3.3 et 3.4

Cette partie est consacrée à la démonstration des deux propositions 3.3 et 3.4 qui assurent l'existence de l'application de premier retour à la section  $\Sigma_1$ . On démontre tout d'abord deux lemmes préliminaires dans les parties 5.1 et 5.2. La démonstration de la proposition 3.3 se trouve dans la partie 5.3, puis la démonstration de la proposition 3.4 dans la partie 5.4.

### 5.1 Écriture de $\Sigma_1$ sous forme de graphe dans les coordonnées locales $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$

Le lemme suivant précise la position de l'image de la section  $\Sigma_1$  par l'application  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}$ , en particulier on montre que si  $\delta_1$  est assez petit  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\Sigma_1)$  s'écrit comme un graphe dans les coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . Ce résultat sera utile pour montrer l'existence du retour à la section  $\Sigma_1$ .

**Lemme 5.1** *Pour  $\varepsilon, \nu, \mu < \varepsilon_0$  et  $\delta_1$  suffisamment petit, il existe  $\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^\Sigma$  application analytique définie sur  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1) := \{(\eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\eta_1| \leq 2\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq 2\delta_1\}$  telle que*

$$\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\Sigma_1) \cap \mathcal{B}(0, 2\delta_1) = \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 = \xi_{1,\underline{\varepsilon}}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2), |\eta_1| < 2\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq 2\delta_1 \right\},$$

et telle que pour tout  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1)$  on ait

$$\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \left] \frac{1}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_1 \right[. \quad (5.1)$$

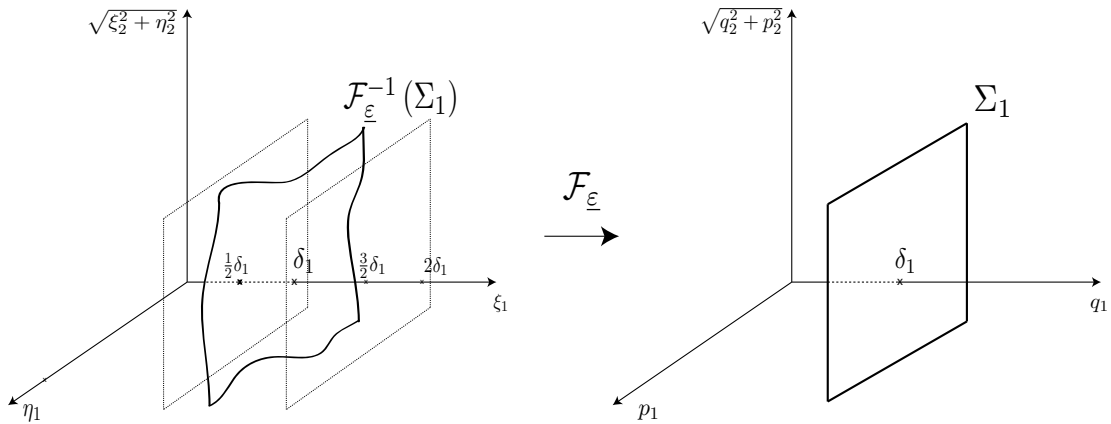


FIGURE 2.16 –  $\Sigma_1$  vu comme un graphe en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ .

#### Démonstration

On procède en deux étapes, dont voici le résumé :

**Étape 1** : on démontre tout d'abord que pour  $\delta_1$  assez petit, pour tout  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1)$  fixé on a l'existence par théorème des valeurs intermédiaires d'un  $\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2)$  dans l'intervalle donné par (5.1) ;



**Étape 2 :** puis on montre l'unicité et la régularité, pour  $\delta_1$  assez petit, en montrant qu'une dérivée est strictement positive pour  $\delta_1$  assez petit : cette dérivée positive permet de montrer à la fois l'unicité par croissance stricte de l'application et la régularité car dérivée non nulle dans l'équation implicite.

Entrons maintenant dans les détails.

**Étape 1.** Soit  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1)$  fixé. On a

$$\begin{aligned} (\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_1) &\iff \mathcal{F}_\varepsilon(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \Sigma_1, \\ &\iff \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \delta_1, \\ &\iff \xi_{1,\varepsilon}^\Sigma + (\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_{1,\varepsilon}^\Sigma) - \delta_1 = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

où on rappelle qu'on note

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) := (\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2).$$

On va montrer que pour  $\delta_1$  assez petit, la quantité dans l'assertion (5.3) est positive pour  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma = \frac{3}{2}\delta_1$  et négative pour  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma = \frac{1}{2}\delta_1$ . Pour cela, on utilise le résultat (vi) de la Proposition C.1, et on obtient

$$|\varphi_{1,\varepsilon}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)) - \xi_1| \leq \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2 \quad \text{pour tout } (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0).$$

On a alors, dans  $\mathcal{B}(0, 2\delta_1)$ , en prenant les valeurs de  $\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \delta_1$  pour  $\xi_1 = \frac{1}{2}\delta_1$  et pour  $\xi_1 = \frac{3}{2}\delta_1$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \delta_1 &= \left(\varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \frac{1}{2}\delta_1\right) - \frac{1}{2}\delta_1 \leq -\frac{1}{2}\delta_1 + \mathcal{M}_0\delta_1^2, \\ \varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{3}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \delta_1 &= \left(\varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{3}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \frac{3}{2}\delta_1\right) + \frac{1}{2}\delta_1 \geq +\frac{1}{2}\delta_1 - \mathcal{M}_0\delta_1^2. \end{aligned}$$

Si on choisit  $2\delta_1 < \frac{1}{2\mathcal{M}_0}$ , alors pour tout  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1)$ ,

$$\varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{1}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \delta_1 < 0 < \varphi_{1,\varepsilon}\left(\frac{3}{2}\delta_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2\right) - \delta_1.$$

Par valeurs intermédiaires, il existe donc un  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in ]\frac{1}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_1[$  tel que

$$\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2), \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \delta_1 = 0.$$

Ce qui conclut l'étape 1.

**Étape 2.** On réutilise l'équation implicite (5.2) trouvée ci-dessus. On va montrer que pour  $\delta_1$  assez petit, pour tout  $\xi_1 \in ]\frac{1}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_1[$  et tout  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}(0, 2\delta_1)$  on a

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) > 0.$$

Pour cela, on utilise la majoration (ii) de la Proposition C.1 : il existe une série entière  $\mathcal{M}$  convergente sur  $\mathcal{B}(0, 4\rho'_0)$  telle que

$$\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_1 \prec (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

En dérivant cette expression par rapport à  $\xi_1$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_1) &< 2(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)\mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2) \\ &+ (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}'(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2). \end{aligned}$$

En prenant  $2\delta_1 \leq \rho'_0$ , on obtient alors que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, 2\delta_1)$ ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_1) \right| \leq 16\delta_1 \mathcal{M}(8\delta_1) + 64\delta_1^2 \mathcal{M}'(8\delta_1).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= 1 + \frac{\partial}{\partial \xi_1}(\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_1), \\ &\geq 1 - (16\delta_1 \mathcal{M}(8\delta_1) + 64\delta_1^2 \mathcal{M}'(8\delta_1)). \end{aligned}$$

Prenons déjà  $2\delta_1 \leq \rho'_0$ . Comme on sait que  $\mathcal{M}(4\rho'_0)$  converge, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \geq 1 - (16\delta_1 \mathcal{M}(4\rho'_0) + 32\delta_1 \rho'_0 \mathcal{M}'(4\rho'_0)).$$

Et donc  $\frac{\partial}{\partial \xi_1} \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \geq \frac{1}{2} > 0$  dès que

$$2\delta_1 \leq \min\left(\rho'_0, \frac{1}{32\mathcal{M}(4\rho'_0) + 64\rho'_0 \mathcal{M}'(4\rho'_0)}\right).$$

Ainsi, sur  $\mathcal{B}(0, 2\delta_1)$ , pour  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2)$  fixé,  $\xi_1 \mapsto \varphi_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  est strictement croissante, d'où l'unicité du  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma$  tel que (5.2) soit vérifié. De plus, au voisinage de chaque point  $(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2), \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , l'équation (5.2) vérifie alors les hypothèses du théorème des fonctions implicites analytiques en  $(\eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . Par l'unicité on obtient donc l'analyticité de  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma$ . Ce qui clot l'étape 2, et la démonstration du lemme 5.1.  $\square$

## 5.2 Régularité du flot à la rotation près

Le lemme suivant donne la régularité du flot à la rotation en  $\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}$  (qui elle présente une irrégularité en  $\varepsilon = 0$ ) factorisée près. *Ce résultat est la clé de la régularité de l'application de premier retour, et est la conséquence directe de l'écriture du Hamiltonien sous forme normale jusqu'à l'ordre  $n$ .* Il nous est tout d'abord utile de manière plus faible (pour la régularité  $\mathcal{C}^1$ ) dans la démonstration de l'existence du retour global  $\Psi_2$  dans la démonstration de la Proposition 3.3 ci-dessous.

**Lemme 5.2** *Soit*

$$R_\theta := \begin{pmatrix} I & O \\ O & R_\theta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

et soit  $\phi(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu)$  le flot associé au Hamiltonien

$$\begin{aligned} H((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu) &= -q_1 p_1 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1 + p_1)^3 \\ &\quad + \nu N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon) + \nu \mu \varepsilon^{N_0} \mathcal{R}_n((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon). \end{aligned}$$

Alors  $\phi$  s'écrit

$$\phi(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu) = R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \tilde{\phi}(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu),$$

où  $\tilde{\phi}$  est une application  $\mathcal{C}^k$  par rapport à toutes ses variables pour tout  $k$  tel que  $4k + 1 \leq N_0$ , c'est-à-dire si

$$k \leq k_0 := E\left(\frac{N_0 - 1}{4}\right).$$

### Démonstration

On va montrer que  $\tilde{\phi}$  est en fait le flot d'un système non autonome  $\mathcal{C}^k$ . On aura besoin du fait que la forme symplectique  $\Omega$  commute avec les  $R_\theta$  pour tout  $\theta$  : il suffit de vérifier que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule la dérivée de  $\tilde{\phi}$  par rapport à  $t$ , dans le but de montrer que  $\tilde{\phi}$  vérifie un système différentiel hamiltonien avec un hamiltonien dépendant du temps. On a

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt} = \frac{dR_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}}{dt} \phi + R_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \frac{d\phi}{dt}.$$

Où, en notant  $X := (q_1, p_1, q_2, p_2)$

$$\begin{aligned} R_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \frac{d\phi}{dt} &= R_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \Omega \nabla_X H(\phi, \varepsilon, \nu, \mu), \\ &= \Omega R_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \nabla_X H(R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \tilde{\phi}, \varepsilon, \nu, \mu), \\ &= \Omega \nabla_X (H \circ R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t})(\tilde{\phi}, \varepsilon, \nu, \mu); \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dR_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}}{dt} X &= -\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \Omega \begin{pmatrix} O & O \\ O & R_{-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \end{pmatrix} X, \\ &= \Omega \nabla_X \left(-\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(q_2^2 + p_2^2)\right). \end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dt} = \Omega \nabla_X \left(H \circ R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} - \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(q_2^2 + p_2^2)\right)(\tilde{\phi}, \varepsilon, \nu, \mu).$$

C'est-à-dire que  $\tilde{\phi}$  est solution du système hamiltonien non autonome associé au Hamiltonien

$$\begin{aligned}\tilde{H}(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu) &= -q_1 p_1 + \frac{1}{2}(q_1 + p_1)^3 + \nu N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon) \\ &\quad + \nu \mu \varepsilon^{N_0} \mathcal{R}_n((q_1, p_1, \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2), \varepsilon),\end{aligned}$$

où la rotation  $\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}$  n'intervient que dans le reste  $\mathcal{R}_n$  car  $q_1, p_1$  et  $(q_2^2 + p_2^2)$  sont invariants par  $\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}$ .

Comme le système est non autonome, pour parler de flot associé, on rajoute l'équation  $\frac{dt}{d\tau} = 0$ , et on obtient un flot  $\tilde{\phi}$  avec une composante temporelle et dépendant de la condition initiale en temps  $t_0$

$$\hat{\phi}(\tau, t_0, X_0, \varepsilon, \nu, \mu) := (\hat{\phi}_X, \hat{\phi}_t)(\tau, t_0, X_0, \varepsilon, \nu, \mu).$$

On a alors par unicité du flot

$$\tilde{\phi}(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu) = \hat{\phi}_X(t, 0, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu),$$

où  $\hat{\phi}_X$  a la régularité de  $\nabla_X \tilde{H}$  par rapport à ses coefficients. Or dans l'expression de  $\tilde{H}$  tout est analytique en  $(t, (q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon, \nu, \mu)$  sauf  $\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2)$  (en  $\varepsilon = 0$ ). Et on a

$$\begin{aligned}D(q_2, p_2)(\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2)) &= \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2), \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2)) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \Omega \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2), \\ \frac{\partial}{\partial \varepsilon}(\mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2)) &= \frac{2\varepsilon^2 \omega'(\varepsilon) + 4\varepsilon \omega(\varepsilon)}{4\varepsilon^4} \Omega \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2).\end{aligned}$$

En itérant, on trouve alors

$$\left| \nabla_X \mathcal{R}_n(q_1, p_1, \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2), \varepsilon) \right|_{\mathcal{C}^k} = \mathcal{O}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon^{4k}} \right).$$

Et donc  $\nabla_X (\nu \mu \varepsilon^{N_0} \mathcal{R}_n((q_1, p_1, \mathbf{R}_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t}(q_2, p_2), \varepsilon))$  est  $\mathcal{C}^k$  au voisinage de  $\varepsilon = 0$  dès que  $N_0 \geq 4k + 1$ .  $\square$

### 5.3 Démonstration de la proposition 3.3 : existence de l'application globale de $\Sigma_2$ à $\Sigma_1$

Cette partie est entièrement consacrée à la démonstration de la Proposition 3.3, dont on rappelle l'énoncé :

Pour  $\delta_1$  assez petit, il existe  $T^-(\delta_1) < T^+(\delta_1)$  et  $\xi_0(\delta_1)$  tels que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  dans

$$\Sigma_2 \cap \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1 \right\},$$

il existe un unique  $T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$  vérifiant

$$\phi(T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}), \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \underline{\varepsilon}) \in \Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1).$$

De plus, en notant

$$\begin{aligned}\Psi_2((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) &:= \phi(T_L(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}((q_1, p_1, q_2, p_2)), \underline{\varepsilon}), (q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) \\ &= (\Psi_{2,q_1}, \dots, \Psi_{2,p_2})((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}),\end{aligned}$$

alors il existe  $M$  tel que

$$|\Psi_{2,q_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 + \Psi_{2,p_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 - (q_2^2 + p_2^2)| \leq \mu\nu\varepsilon^{N_0} M_2 T^+(\delta_1, \delta_1). \quad (5.4)$$

### Démonstration.

On va travailler en coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  et plus précisément montrer l'existence de  $T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$  vérifiant

$$\begin{aligned}\phi(T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}), \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \underline{\varepsilon}) \\ \in \Sigma_1 \cap \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1\} \right).\end{aligned}$$

Cela sera suffisant pour conclure pour  $\delta_1$  assez petit car d'après le (vi) de la Proposition C.1, on a pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ ,

$$|\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)| \leq \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2.$$

On sait que  $\mathcal{F}_0(\xi_1 = 0, \eta_1 = \delta_1, \xi_2 = 0, \eta_2 = 0)$ ,  $\mathcal{F}_0(\frac{1}{2}\delta_1, 0, 0, 0)$  et  $\mathcal{F}_0(\frac{3}{2}\delta_1, 0, 0, 0)$  sont 3 points de l'orbite homocline à 0 du système tronqué vu qu'ils sont sur la variété stable à 0, et donc qu'il existe  $T^-(\delta_1)$  et  $T^+(\delta_1)$  tels que

$$\begin{aligned}\phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0) &= \mathcal{F}_0(\frac{7}{4}\delta_1, 0, 0, 0), \\ \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0) &= \mathcal{F}_0(\frac{1}{4}\delta_1, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Voici le plan de la démonstration, en 5 étapes :

**Étape 1 :** on travaille d'abord sur le flot du système tronqué. On montre qu'avec ces choix de  $T^-$  et  $T^+$ , il existe un  $\xi_0(\delta_1)$  tel que pour tout

$$X := (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \Sigma_2 \cap \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4}\delta_1 \right\},$$

on ait

$$\begin{aligned}\phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0) \\ \in \mathcal{F}_0 \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [\frac{13}{8}\delta_1, \frac{15}{8}\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{8}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4}\delta_1\} \right), \quad (5.5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0) \\ \in \mathcal{F}_0 \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [\frac{1}{8}\delta_1, \frac{3}{8}\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{8}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4}\delta_1\} \right). \quad (5.6)\end{aligned}$$

**Étape 2 :** on montre ensuite qu'il existe  $M(\delta_1)$  tel que pour tout  $T$  dans l'intervalle  $[T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$ , tous  $\varepsilon, \nu, \mu \leq \varepsilon_0$  et tout

$$X := (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \Sigma_2 \cap \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4}\delta_1 \right\},$$

on ait

$$|\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(X), \underline{\varepsilon}) - \mathcal{F}_0^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)| \leq M(\delta_1)(\nu + \mu).$$

**Étapes 3 et 4 :** on en déduit l'existence (étape 3) et l'unicité (étape 4) par théorème des valeurs intermédiaires grâce aux propriétés de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\Sigma_1)$  démontrées dans le Lemme 5.1.

**Étape 5 :** on démontre enfin la majoration (5.4).

On suit maintenant ce plan en rentrant dans les détails.

**Étape 1.** Montrons qu'en notant  $\mathcal{F}_0^{-1} := (\varphi_{1,0}^-, \psi_{1,0}^-, \varphi_{2,0}^-, \psi_{2,0}^-)$  on a pour tous  $t, (\xi_2, \eta_2)$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) &= \varphi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(0, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0)); \\ \psi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) &= \psi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(0, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0)). \end{aligned}$$

En effet, on sait que  $(\varphi_{1,0}^-, \psi_{1,0}^-)(q_1, p_1, q_2, p_2)$  ainsi que  $(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  ne dépendent en fait respectivement que de  $(q_1, p_1)$  et  $(\xi_1, \eta_1)$ , et que le flot du système tronqué découple  $(q_1, p_1)$  de  $(q_2, p_2)$ , donc

$$\begin{aligned} &\varphi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) \\ &= \varphi_{1,0}^-(\phi_{p_1}(t, \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0), \phi_{q_1}(t, \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) \\ &= \varphi_{1,0}^-(\phi_{p_1}(t, (\varphi_{1,0}, \psi_{1,0})(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0), \phi_{q_1}(t, (\varphi_{1,0}, \psi_{1,0})(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) \\ &= \varphi_{1,0}^-(\phi_{p_1}(t, (\varphi_{1,0}, \psi_{1,0})(\xi_1, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0), \phi_{q_1}(t, (\varphi_{1,0}, \psi_{1,0})(\xi_1, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0)) \quad (5.7) \\ &= \varphi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, 0, 0), \varepsilon, 0, 0)); \end{aligned}$$

et de même pour  $\psi_{1,0}^-$ . On en déduit alors que pour tout  $(\xi_2, \eta_2)$  on a

$$\begin{aligned} \phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 = \frac{7}{4}\delta_1, \eta_1 = 0 \right\} \right), \\ \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 = \frac{1}{4}\delta_1, \eta_1 = 0 \right\} \right). \end{aligned}$$

L'égalité (5.7), en utilisant le fait que le flot du système tronqué pour les variables  $(q_1, p_1)$  est indépendant d' $\varepsilon$ , permet aussi de montrer que  $\varphi_{1,0}^-(\phi(t, \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0))$  est alors  $\mathcal{C}^1$  par rapport à toutes ses variables. Et de même avec  $\psi_{1,0}^-$ . On en déduit alors que pour  $\xi_1$  assez petit on a

$$|\varphi_{1,0}^-(\phi(T^\pm(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)) - \varphi_{1,0}^-(\phi(T^\pm(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0))| \leq \frac{1}{8}\delta_1,$$

$$|\psi_{1,0}^- \phi(T^\pm(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) - \psi_{1,0}^- \phi(T^\pm(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0)| \leq \frac{1}{8} \delta_1;$$

et donc il existe  $\xi_0(\delta_1)$  tel que pour tout  $\xi_1 \leq \xi_0(\delta_1)$  et tout  $(\xi_2, \eta_2)$  on ait

$$\begin{aligned} \phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in \left[ \frac{18}{8} \delta_1, \frac{15}{8} \delta_1 \right], |\eta_1| \leq \frac{1}{8} \delta_1 \right\} \right), \\ \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(0, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in \left[ \frac{1}{8} \delta_1, \frac{3}{8} \delta_1 \right], |\eta_1| \leq \frac{1}{8} \delta_1 \right\} \right). \end{aligned}$$

On sait aussi que

$$(\varphi_{2,0}^-, \psi_{2,0}^-)(q_1, p_1, q_2, p_2) = (q_2, p_2), \quad (\varphi_{2,0}, \psi_{2,0})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_2, \eta_2),$$

et que la quantité  $q_2^2 + p_2^2$  est conservée par le flot du système tronqué, donc on obtient de plus que

$$\begin{aligned} \phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_{2,0}, \eta_{2,0}), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 = \xi_{2,0}^2 + \eta_{2,0}^2 \right\} \right), \\ \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_{2,0}, \eta_{2,0}), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 = \xi_{2,0}^2 + \eta_{2,0}^2 \right\} \right). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour le système tronqué que pour tout  $\xi_1 \leq \xi_0(\delta_1)$  et tout  $(\xi_2, \eta_2)$  tel que  $\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4} \delta_1$ , on a

$$\begin{aligned} \phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in \left[ \frac{7}{4} \delta_1, 2\delta_1 \right], |\eta_1| \leq \frac{1}{8} \delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1 \right\} \right), \\ \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_0(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon, 0, 0) &\in \mathcal{F}_0 \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in \left[ 0, \frac{1}{4} \delta_1 \right], |\eta_1| \leq \frac{1}{8} \delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1 \right\} \right). \end{aligned}$$

**Étape 2.** On va montrer la majoration annoncée ci-dessus, et en même temps on montrera que la quantité  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon})$  est bien définie, *i.e.* que  $\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon})$  est bien dans  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$ . On a

$$\begin{aligned} &|\mathcal{F}_\varepsilon^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \mathcal{F}_0^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)| \\ &\leq |(\mathcal{F}_\varepsilon^{-1} - \mathcal{F}_0^{-1}) \circ \phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon})| \\ &\quad + |\mathcal{F}_0^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \mathcal{F}_0^{-1} \circ \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)| \\ &:= \Delta_1 + \Delta_2. \end{aligned}$$

Pour majorer  $\Delta_2$ , on commence par majorer

$$|\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)|.$$

Pour cela on utilise la régularité du flot  $\tilde{\phi}$  démontrée dans le lemme 5.2 :

$$\begin{aligned} &|\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)| \\ &= \left| R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \tilde{\phi}(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}t} \tilde{\phi}(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0) \right| \\ &= \left| \tilde{\phi}(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \tilde{\phi}(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0) \right|. \end{aligned}$$

D'après le Lemme 5.2,  $\tilde{\phi}$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à toutes ses variables dès que  $N_0 \geq 3$ . Or on a montré dans la Proposition C.1 (iv) que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ ,

$$|\mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \mathcal{F}_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)| \leq \nu \mathcal{M}_0.$$

Donc on trouve qu'il existe  $M_1(\delta_1)$  tel que pour tout  $T$  dans l'intervalle  $[T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$ , tous  $\varepsilon, \nu, \mu \leq \varepsilon_0$  et tout

$$X := (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \Sigma_2 \cap \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{4}\delta_1 \right\},$$

on ait

$$|\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon}) - \phi(T, \mathcal{F}_0(X), \varepsilon, 0, 0)| \leq M_1(\delta_1)(\mathcal{M}_0\nu + \nu + \mu). \quad (5.8)$$

Pour majorer  $\Delta_2$ , il ne reste alors qu'à montrer que  $\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon})$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$ . On n'aura plus alors qu'à utiliser la régularité (analytique, donc  $\mathcal{C}^1$ ) de  $\mathcal{F}_0^{-1}$ . Et c'est immédiat pour  $\nu, \mu$  assez petits en utilisant la majoration (5.8) et les ensembles d'arrivée (5.5) et (5.6) trouvés à l'étape 1. On obtient donc

$$\Delta_2 \leq M'_1(\delta_1)(\nu + \mu).$$

Pour majorer  $\Delta_1$ , comme on vient de montrer que  $\phi(T, \mathcal{F}_\varepsilon(X), \underline{\varepsilon})$  est bien à valeurs dans  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$ , il suffit d'utiliser la majoration de  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1} - \mathcal{F}_0^{-1}$  obtenue dans le (iv) de la Proposition C.1, on obtient

$$\Delta_1 \leq \mathcal{M}_0\nu.$$

Ce qui conclut l'étape 2.

**Étape 3.** Avec les résultats des étapes 1 et 2, on obtient que pour  $\nu, \mu$  assez petits,

$$\begin{aligned} & \phi(T^-(\delta_1), \mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \\ & \in \mathcal{F}_\varepsilon \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [\frac{3}{2}\delta_1, 2\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1 \right\} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \phi(T^+(\delta_1), \mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \\ & \in \mathcal{F}_\varepsilon \left( \left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [\frac{1}{16}, 2\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1 \right\} \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Comme le graphe  $\xi_1^\Sigma$  de  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_1)$  est continu, il sépare l'ensemble

$$\left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [0, 2\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1 \right\}$$

en 2 composantes connexes. Et comme dans cet ensemble on a  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \in ]\frac{1}{2}\delta_1, \frac{3}{2}\delta_1[$  (cf Lemme 5.1, assertion (5.1)), les résultats (5.9) et (5.10) signifient que le flot est en  $T^+$  dans l'une des composantes connexes et en  $T^-$  dans l'autre. Or le flot entre  $T^-$  et  $T^+$  est continu et reste dans l'ensemble

$$\left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_1 \in [0, 2\delta_1], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1 \right\},$$

car le flot suit les niveaux  $\xi_1\eta_1 = C^{te}$  et  $\xi_2^2 + \eta_2^2 = C^{te}$ . Donc nécessairement le flot intersecte  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_1)$  à un temps  $T_L$  compris entre  $T^-$  et  $T^+$ . Ceci achève de prouver l'existence.



**Étape 4.** Pour démontrer l'unicité du  $T_L$ , on repasse en coordonnées  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$ . On montre pour cela que pour tout  $t \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$ , les  $\phi(t, \mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon)$  sont dans un ensemble où  $\frac{dq_1}{dt} < 0$ . Pour cela, on utilise le résultat ci-dessus, qui implique que pour tout  $t \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$ ,

$$\phi(t, \mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \delta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon) \in \mathcal{F}_\varepsilon\left(\left\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 \in \left[\frac{1}{16}\delta_1, 2\delta_1\right], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1\right\}\right).$$

On va commencer par montrer qu'alors pour  $\delta_1$  et  $\varepsilon$  assez petits, on a

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\varepsilon\left(\left\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 \in \left[\frac{1}{16}\delta_1, 2\delta_1\right], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1\right\}\right) \\ & \subseteq \left\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 \in \left[\frac{1}{32}\delta_1, 3\delta_1\right], |p_1| \leq \delta_1, \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1\right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En effet, d'après le résultat (vi) de la Proposition C.1, on a

$$|\mathcal{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)| \leq \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2.$$

Or pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \left\{\xi_1 \in \left[\frac{1}{16}\delta_1, 2\delta_1\right], |\eta_1| \leq \frac{1}{2}\delta_1, \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \frac{1}{2}\delta_1\right\}$ , on a

$$\mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2 \leq \mathcal{M}'_0 \delta_1^2.$$

Alors pour  $\delta_1 \leq \frac{1}{32\mathcal{M}'_0}$  on trouve bien l'inclusion (5.11). Montrons maintenant que pour  $\delta_1$  assez petit, on a  $\frac{dq_1}{dt} < 0$  dans l'ensemble

$$\left\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 \in \left[\frac{1}{32}\delta_1, 3\delta_1\right], |p_1| \leq 2\delta_1, \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1\right\}.$$

En effet, on a sur cet ensemble

$$\begin{aligned} \frac{dq_1}{dt} &= -q_1 + \frac{3}{2}(q_1 + p_1)^2 + \nu \partial_{p_1}(N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon) + \mu \varepsilon^{N_0} \mathcal{R}_n((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon)) \\ &\leq -\frac{1}{32}\delta_1 + \frac{3}{2}9\delta_1^2 + M\nu. \end{aligned}$$

Donc, pour  $\nu$  et  $\delta_1$  assez petits, on a bien

$$\frac{dq_1}{dt} < 0$$

pour tout  $t \in [T^-(\delta_1), T^+(\delta_1)]$ . Ce qui permet de s'assurer l'unicité du  $T_L$  trouvé ci-dessus tel que

$$\phi_{q_1}(T_L((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon), \mathcal{F}_\varepsilon((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon)) = \delta_1.$$

**Étape 5.** Pour démontrer l'existence de la majoration (5.4), on utilise le fait que le flot vérifie, le long des trajectoires,

$$\begin{aligned} \left|\frac{d(q_2^2 + p_2^2)}{dt}\right| &= |\mu \nu \varepsilon^{N_0} (p_2 \partial_{p_2} - q_2 \partial_{q_2}) \mathcal{R}_n((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon)| \\ &\leq M \mu \nu \varepsilon^{N_0} \quad \text{pour } (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \rho_0). \end{aligned}$$

Comme  $T_L(\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}((q_1, p_1, q_2, p_2)) \leq T^+(\delta_1)$  sur le domaine de définition, on obtient immédiatement la majoration (5.4) annoncée.  $\square$

## 5.4 Démonstration de la proposition 3.4 : existence et régularité de l'application complète de retour à $\Sigma_1$

On commence par donner ci-dessous un énoncé plus détaillé de la proposition 3.4, dans laquelle on ajoute notamment l'estimation (5.12) qui sera utile plus loin pour restreindre  $\Psi$  au départ et à l'arrivée.

**Proposition 5.3** *On peut définir un premier retour*

$$\Psi : \Sigma_1 \cap \mathcal{F}_\varepsilon \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/0 < \eta_1 \leq \xi'_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1\} \times ] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[{}^3 \rightarrow \Sigma_1 \right. \\ \left. (p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) \mapsto R_{\frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\varepsilon^2}} T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) \tilde{\phi}(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}), \right.$$

où  $T$  est  $C^{k_0}$  pour le  $k_0$  défini dans le Lemme 5.2.

De plus, en notant  $\Psi = (\Psi_{q_1}, \dots, \Psi_{p_2})$ , pour  $\underline{\varepsilon}$  et  $\delta_1$  assez petits, il existe  $M$  tel que sur l'ensemble de définition de  $\Psi$  on ait la majoration

$$|\Psi_{q_2}((p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 + \Psi_{p_2}((p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 - (q_2^2 + p_2^2)| \leq \nu M \delta_1^3. \quad (5.12)$$

### Démonstration de l'existence.

On a démontré dans la Proposition 3.3 qu'on a une application de Poincaré  $\Psi_2$  définie

$$\Sigma_2 \cap \mathcal{F}_\varepsilon \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/|\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1\} \right) \rightarrow \Sigma_1.$$

Or en coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  dans la boule  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$ , le flot suit les lignes de niveau

$$\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 \eta_1 = C^{te}, \xi_2^2 + \eta_2^2 = C^{te}\}.$$

Donc tout point de  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/0 < \eta_1 \leq \delta_1\}$  est sur une trajectoire qui traverse  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = \delta_1\} = \mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_2)$ , en particulier tout point de  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_1) \cap \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/0 < \eta_1 \leq \delta_1\}$ . Mais pour pouvoir composer ensuite avec l'application  $\Psi_2$ , il faut s'assurer qu'on est sur une trajectoire qui arrive sur  $\Sigma_2$  dans la zone de définition de  $\Psi_2$

$$\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/|\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1\}.$$

Comme  $\xi_2^2 + \eta_2^2$  est constant le long des trajectoires, on prend un point de départ avec  $\xi_2^2 + \eta_2^2 \leq \delta_1$ . Pour avoir  $|\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1)$  au moment de l'intersection avec  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = \delta_1\}$ , il suffit d'être sur une trajectoire pour laquelle la constante  $\xi_1 \eta_1$  est dans l'intervalle  $[-\delta_1 \xi_0(\delta_1), \delta_1 \xi_0(\delta_1)]$ . Or on sait (cf Lemme 5.1) que si  $|\eta_1|$  et  $\sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq 2\delta_1$  alors sur  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_1)$  on a

$$\xi_1 = \xi_1^\Sigma(\eta_1, \xi_2, \eta_2) \leq \frac{3}{2} \delta_1.$$

Donc, si on choisit un point de départ vérifiant

$$0 < \eta_1 \leq \delta_1 \text{ et } |\eta_1| \leq \delta_1, \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1 \text{ et } \eta_1 \leq \frac{2}{3} \xi_0(\delta_1),$$

on est bien alors sur une trajectoire qui traverse  $\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\Sigma_2)$  à un endroit où l'application de Poincaré vers  $\Sigma_1$  est bien définie.

**Démonstration de la régularité  $\mathcal{C}^{k_0}$ .**

On a démontré ci-dessus l'existence de  $T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$ , il ne reste donc qu'à montrer sa régularité. Or localement,  $T$  est caractérisé par l'équation implicite d'intersection du flot avec  $\Sigma_1$  :

$$\phi_{q_1}(T, (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) = \delta_1.$$

Et comme  $\phi_{q_1} = \tilde{\phi}_{q_1}$ , vu que la rotation  $R$  n'a d'action que sur les variables  $(q_2, p_2)$ , cette équation est équivalente à

$$\tilde{\phi}_{q_1}(T, (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) = \delta_1. \quad (5.13)$$

Et cette équation est  $\mathcal{C}^{k_0}$  en ses variables d'après le lemme 5.2. Pour montrer que la fonction  $T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  on va montrer que l'équation (5.13) vérifie les hypothèses du théorème des fonctions implicites au voisinage de tout point

$$(T(p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0), p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0),$$

et donc qu'on peut fabriquer une application  $\mathcal{C}^{k_0}$ ,  $T^*(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$ . Par l'unicité du  $T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$  construit, on en déduira alors que  $T = T^*$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$ .

Il ne reste donc qu'à vérifier que sur le domaine de définition de l'application  $T$ , on a

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial T} \neq 0.$$

Soit donc  $((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})$  dans l'ensemble

$$\Sigma_1 \cap \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} \left( \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / 0 < \eta_1 \leq \xi'_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1\} \times ] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[{}^3, \right.$$

on a alors

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial T}(T, (q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) = \partial_{p_1} H(\tilde{\phi}(T, (q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}), \underline{\varepsilon}).$$

Or

$$\begin{aligned} \partial_{p_1} H((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) &= -q_1 + \frac{3}{2}(q_1 + p_1)^2 + \nu \partial_{p_1} N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \underline{\varepsilon}) \\ &\quad + \mu \nu \varepsilon^{N_0} \partial_{p_1} \mathcal{R}_n((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}), \end{aligned}$$

où  $\partial_{p_1} N_n$  et  $\partial_{p_1} \mathcal{R}_n$  sont uniformément bornés sur  $\mathcal{B}(0, \rho_0)$  et où en  $T = T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$ , on a

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{q_1}(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) &= \delta_1 \\ \left| \tilde{\phi}_{p_1}(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) \right| &\leq \delta_1, \end{aligned}$$

où la deuxième majoration vient du domaine d'arrivée de  $\Psi_2$  dans la Proposition 3.3. On a donc en  $(T(p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0), p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial T}(T(p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0), p_{10}, q_{20}, p_{20}, \underline{\varepsilon}_0) &\leq -\delta_1 + \frac{3}{2}(\delta_1 + \delta_1)^2 + M\nu \\ &\leq -\delta_1(1 - 6\delta_1) + M\nu. \end{aligned}$$

Donc pour  $\delta_1 < \frac{1}{6}$  et  $\nu$  suffisamment petit, on trouve

$$\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial T}(T(p_{10}, q_{20}, p_{20}, \varepsilon_0), p_{10}, q_{20}, p_{20}, \varepsilon_0) < 0.$$

Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont donc bien vérifiées. Ce qui permet de conclure à la régularité  $\mathcal{C}^{k_0}$  de  $T$ .

**Démonstration de l'estimation (5.12).**

On utilise pour démontrer cette estimation 3 résultats :

- en coordonnées locales, la quantité  $\xi_2^2 + \eta_2^2$  est constante le long des trajectoires,
- la variation de la quantité  $q_2^2 + p_2^2$  par l'application  $\Psi_2$  est majorée par (5.4),
- on peut calculer des majorations de la différence entre  $\xi_2^2 + \eta_2^2$  et  $q_2^2 + p_2^2$  lors des 2 changements de coordonnées  $\mathcal{F}_{\varepsilon}$  et  $\mathcal{F}_{\varepsilon}^{-1}$ .

Il ne reste donc que le dernier point à détailler maintenant, détaillons-le pour le changement de coordonnées  $\mathcal{F}_{\varepsilon}$ . On rappelle qu'on note  $\mathcal{F}_{\varepsilon} := (\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})$ , et que d'après les (viii) et (ix) de la Proposition C.1 on a alors pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ ,

$$\begin{aligned} |\varphi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_2| &\leq \mathcal{M}_0 \nu |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2, \\ |\psi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \eta_2| &\leq \mathcal{M}_0 \nu |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2. \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} &|\varphi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^2 + \psi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^2 - (\xi_2^2 + \eta_2^2)| \\ &\leq |(\varphi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \xi_2)(\varphi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_2)| \\ &\quad + |(\psi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \eta_2)(\psi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \eta_2)|, \\ &\leq \mathcal{M}_0 \nu |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2 (2\mathcal{M}_0 \nu |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2 + |\xi_2| + |\eta_2|). \end{aligned}$$

Or ce changement de coordonnées a lieu lorsqu'on est sur  $\Sigma_2$ , dans le voisinage

$$\left\{ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / |\xi_1| \leq \xi_0(\delta_1), \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1 \right\}$$

défini dans la Proposition 3.3, on a donc

$$|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|, |\xi_2|, |\eta_2| \leq \delta_1.$$

On obtient donc

$$|\varphi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^2 + \psi_{2,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)^2 - (\xi_2^2 + \eta_2^2)| \leq \nu \mathcal{M}'_0 \delta_1^3. \quad (5.14)$$

En faisant le même raisonnement sur  $\Sigma_1$  avec le changement de coordonnées  $\mathcal{F}_{\varepsilon}^{-1}$ , on a bien alors tous les éléments pour vérifier la majoration (5.12).  $\square$

## 6 Écriture des restrictions de l'application de premier retour comme des difféomorphismes d'un anneau de $\mathbb{R}^2$ : démonstration de la Proposition 3.5

Cette partie est consacrée à la démonstration de la Proposition 3.5, qui permet d'affirmer qu'on peut restreindre l'application de premier retour  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}$  aux niveaux d'énergie des orbites périodiques  $P^a$  et obtenir ainsi une famille d'applications  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a$  qu'on va ensuite pouvoir voir comme des difféomorphismes d'un anneau de  $\mathbb{R}^2$ .

Au lieu d'avoir les trois paramètres  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \nu, \mu)$ , on ne va maintenant en utiliser plus que deux, on introduit la notation

$$\underline{\varepsilon}' := (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu).$$

Remarquons déjà que le résultat (iv) de la Proposition 3.5 est une conséquence directe des points (i),(ii) et (iii), en posant

$$\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a : \{(q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \leq c\delta_1^2\varepsilon^2, (q_2, p_2) \text{ à l'extérieur de } C_s^a\} \rightarrow \{(q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \leq \omega_0\delta_1^2\varepsilon^2\}$$

$$(q_2, p_2) \mapsto \Psi_{\underline{\varepsilon}}(p_1^H(q_2, p_2, a), q_2, p_2).$$

On démontre tout d'abord le résultat (i) dans la partie 6.1, puis dans la partie 6.2 on démontre deux lemmes concernant la géométrie des variétés aux orbites périodiques sur la variété centre-stable, qui sont utiles pour démontrer le (ii) de la Proposition 3.5 dans la partie 6.3. Enfin, on démontre le résultat (iii) dans la partie 6.4.

### 6.1 Démonstration du (i) de la proposition 3.5 : dans $\Sigma_1$ , écriture de la variété centre-stable $W^{cs}(0)$ comme un graphe

Dans cette partie, on démontre le (i) de la Proposition 3.5, *i.e.* pour rappel, on montre que

Pour  $\varepsilon, \nu, \mu \leq \varepsilon_0$  et  $\delta_1$  assez petit, il existe une application  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}$  analytique définie sur l'ensemble

$$\left\{ (q_2, p_2) / \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1 \right\},$$

telle que

$$W_{\underline{\varepsilon}}^{cs}(0) \cap \Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) = \left\{ (q_1, p_1, q_2, p_2) / q_1 = \delta_1, p_1 = p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2), \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1 \right\}.$$

De plus, dans  $\Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1)$ , on a

$$p_1 > p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2) \iff \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\delta_1, p_1, q_2, p_2) \in \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \eta_1 > 0\}. \quad (6.1)$$

(voir Figure 2.18)

#### Démonstration

Voici le plan de la démonstration, en 2 étapes :

**Étape 1** : on montre d'abord que pour  $(q_2, p_2)$  fixé assez petit, on a par valeurs intermédiaires l'existence d'un  $p_1$  tel que  $(\delta_1, p_1, q_2, p_2)$  soit sur  $W^{cs}(0)$  ;

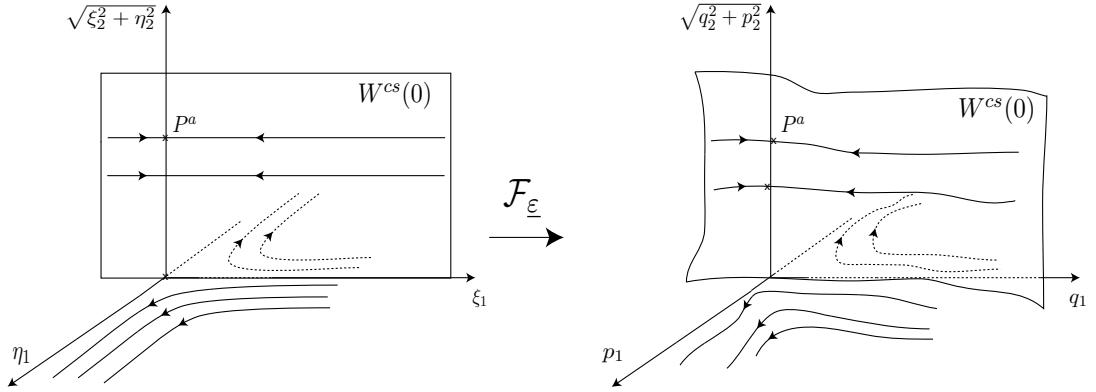


FIGURE 2.17 – Variété centre-stable à 0,  $W^{cs}(0)$ .

**Étape 2 :** puis, grâce à une dérivée strictement positive, on montre l'unicité de ce  $p_1$  par croissance, et la régularité par fonctions implicites.

Le raisonnement fait intervenir  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , c'est pourquoi on a besoin de l'hypothèse  $\varepsilon, \nu, \mu \leq \varepsilon_0$ . Passons au détail de ces étapes.

**Étape 1.** En prenant  $\delta_1 \leq \rho'_0$ , on a pour tout  $(\delta_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \delta_1)$ ,

$$\begin{aligned}
 (\delta_1, p_1, q_2, p_2) \in W_\varepsilon^{cs}(0) &\iff (\delta_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{F}_\varepsilon(\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = 0\}), \\
 &\iff \psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, p_1, q_2, p_2) = 0, \\
 &\iff p_1 + (\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, p_1, q_2, p_2) - p_1) = 0, \tag{6.2}
 \end{aligned}$$

où on a noté

$$\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2) := (\varphi_{1,\varepsilon}^-, \psi_{1,\varepsilon}^-, \varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)(q_1, p_1, q_2, p_2).$$

Or d'après le (vii) de la Proposition C.1,  $\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, p_1, q_2, p_2) - p_1$  est d'ordre 2 et il existe une constante  $\mathcal{M}_0$  telle que

$$|\psi_{1,\varepsilon}^-(q_1, p_1, q_2, p_2) - p_1| \leq \mathcal{M}_0 |(q_1, p_1, q_2, p_2)|^2 \quad \text{pour tout } (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0),$$

où  $\mathcal{M}_0$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ . On a alors dans  $\mathcal{B}(0, \delta_1)$ , en prenant les valeurs de  $\psi_{1,\varepsilon}^-$  pour  $p_1 = \delta_1$  et pour  $p_1 = -\delta_1$  :

$$\begin{aligned}
 \psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, \delta_1, q_2, p_2) &= \delta_1 + (\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, \delta_1, q_2, p_2) - \delta_1) \geq \delta_1 - \mathcal{M}_0 \delta_1^2, \\
 \psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, -\delta_1, q_2, p_2) &= -\delta_1 + (\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, -\delta_1, q_2, p_2) + \delta_1) \leq -\delta_1 + \mathcal{M}_0 \delta_1^2.
 \end{aligned}$$

Si on choisit  $\delta_1 < \frac{1}{\mathcal{M}_0}$ , alors pour tout  $(q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \delta_1)$ ,

$$\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, -\delta_1, q_2, p_2) < 0 < \psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, \delta_1, q_2, p_2).$$

Par valeurs intermédiaires, il existe donc un  $p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) \in [-\delta_1, \delta_1]$  tel que

$$\psi_{1,\varepsilon}^-(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) = 0.$$

Ce qui conclut l'étape 1.

**Étape 2.** On utilise toujours l'équation implicite (6.2). Or d'après le (iii) de la Proposition C.1,

$$(\psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2) - p_1) \prec (q_1 + p_1 + q_2 + p_2)^2 \mathcal{M}(q_1 + p_1 + q_2 + p_2),$$

avec  $\mathcal{M}$  série entière indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ , convergente sur  $\mathcal{B}(0, 4\rho'_0)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1}(\psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2) - p_1) \prec & 2(q_1 + p_1 + q_2 + p_2) \mathcal{M}(q_1 + p_1 + q_2 + p_2) \\ & + (q_1 + p_1 + q_2 + p_2)^2 \mathcal{M}'(q_1 + p_1 + q_2 + p_2). \end{aligned}$$

Or  $\mathcal{B}(0, \delta_1) \subset \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ , et  $\mathcal{M}$  convergente sur  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$  implique  $\mathcal{M}'$  convergente sur  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$ . Donc pour tout  $(q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \delta_1)$ ,

$$\left| \frac{\partial}{\partial p_1}(\psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2) - p_1) \right| \leq 8\delta_1 \mathcal{M}(4\delta_1) + 16\delta_1^2 \mathcal{M}'(4\delta_1).$$

Donc, pour

$$\delta_1 < \frac{1}{8\mathcal{M}(4\rho'_0) + 16\rho'_0 \mathcal{M}'(4\rho'_0)},$$

on a

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2) > 0 \quad \text{pour tout } (q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \delta_1). \quad (6.3)$$

Avec ce choix de  $\delta_1$ , on a donc, pour  $(q_2, p_2)$  fixé, l'application  $p_1 \mapsto \psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(\delta_1, p_1, q_2, p_2)$  strictement croissante. Ce qui signifie qu'on a unicité du  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2)$  trouvé à l'étape 1. De plus, grâce à (6.3), on sait de plus qu'on peut appliquer le théorème des fonctions implicites analytique sur l'équation (6.2) au voisinage de tout  $(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2)$ . Par l'unicité, on en déduit que  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}$  est analytique.

De plus, on obtient (6.1) par la croissance de  $p_1 \mapsto \psi_{1,\underline{\varepsilon}}^-(\delta_1, p_1, q_1, p_1)$ .  $\square$

## 6.2 Deux lemmes pour la démonstration du (ii) de la proposition 3.5 : géométrie des $W^s(P^a)$ sur le graphe de $W^{cs}(0)$

On démontre d'abord un lemme qui nous assure que pour  $a$  suffisamment petit, l'énergie de l'orbite périodique  $P^a$  croît avec  $a$ .

**Lemme 6.1** *Il existe  $a_0, \varepsilon_1 > 0$  et une série entière  $\mathcal{M}_1$  tels que pour tous  $\varepsilon, \nu, \mu < \varepsilon_1$  et tous  $a, a' < a_0$  on ait*

$$(i) \quad \left| H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) - \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2} a \right| \leq \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2} a^2 \mathcal{M}_1(a),$$

$$(ii) \quad \text{si } a < a' \text{ alors } H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) < H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(0, a').$$

### Démonstration

On rappelle qu'on a

$$P_{\underline{\varepsilon}}^a = \{ \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \xi_{2,a}^2 + \eta_{2,a}^2 = a \}, \quad (6.4)$$

et donc pour tout  $(\xi_{2,a}, \eta_{2,a})$  tel que  $\xi_{2,a}^2 + \eta_{2,a}^2 = a$ ,

$$H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) = H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \underline{\varepsilon}).$$

Or, grâce à la forme de  $\mathcal{F}_0$  démontrée dans la Proposition C.1,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) &= (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}})(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) \\ &= (\varphi_{1,0}(0, 0) + \nu\varphi'_{1,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \psi_{1,0}(0, 0) + \nu\psi'_{1,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \\ &\quad \xi_{2,a} + \nu\varphi'_{2,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \eta_{2,a} + \nu\psi'_{2,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a})) \\ &= (0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) + \nu(\varphi'_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi'_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi'_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi'_{2,\underline{\varepsilon}})(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}).\end{aligned}$$

En écrivant

$$H(q_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) = -q_1p_1 + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) + H_3(q_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}),$$

où  $H_3$  d'ordre 3 en  $q_1$  et  $\mathcal{C}^1$  en  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \nu, \mu)$ , on obtient alors

$$\begin{aligned}H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) &= -\nu^2\varphi'_{1,\underline{\varepsilon}}\psi'_{1,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(\xi_{2,a}^2 + \eta_{2,a}^2) + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}\nu\xi_{2,a}\varphi'_{2,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) \\ &\quad + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(\nu\eta_{2,a}\psi'_{2,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}) + \nu^2\varphi'_{2,\underline{\varepsilon}}\psi'_{1,\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a})) \\ &\quad + H_3(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_{2,a}, \eta_{2,a}), \underline{\varepsilon}).\end{aligned}$$

Et parmi les termes de cette égalité, grâce au (i) de la Proposition C.1, on sait que  $\varphi'_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi'_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi'_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi'_{2,\underline{\varepsilon}}$  sont uniformément majorés au sens de  $\prec$  par une série entière convergente d'ordre 2, et que  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  est majorée aussi uniformément en  $\underline{\varepsilon}$ . Et  $H_3$  de même car  $\mathcal{C}^1$  en  $\underline{\varepsilon}$ . Donc on en déduit qu'il existe une série entière  $\mathcal{M}_1$  d'ordre 3 convergente indépendante de  $\underline{\varepsilon}$  telle que

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) - \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) \prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}\mathcal{M}_3(\xi_2, \eta_2). \quad (6.5)$$

Et en écrivant cette inégalité pour  $\xi_2 = \eta_2 = x$ , on trouve alors l'inégalité au sens des séries entières à une seule variable

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(0, 0, x, x), \underline{\varepsilon}) - 2\frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}x^2 \prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}\mathcal{M}_3(x, x).$$

Avec  $\mathcal{M}_3(x, x) = x^3\mathcal{M}'_3(x)$  vu que  $\mathcal{M}_3$  est d'ordre 3, et

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1\eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2), \quad (6.6)$$

où  $K$  est le hamiltonien en coordonnées locales obtenu dans la Proposition C.1, d'où

$$K_{\underline{\varepsilon}}(0, 2x^2) - 2\frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}x^2 \prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}x^3\mathcal{M}'_3(x).$$

La série entière de gauche a donc ses coefficient impairs tous nuls, et comme  $\prec$  est une majoration coefficient à coefficient, on peut ne garder dans  $x^3\mathcal{M}'_3(x)$  que les termes de degré pair. On obtient alors l'existence d'une majoration uniforme de la forme

$$K_{\underline{\varepsilon}}(0, 2x^2) - 2\frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}x^2 \prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}x^4\mathcal{M}_1(x^2).$$



On peut alors écrire cette majoration au sens des séries entières en  $a = 2x^2$  :

$$K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) - \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}a \prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}a^2\mathcal{M}_1(a), \quad (6.7)$$

ce qui, par les définitions (6.6) de  $K$  et (6.4) de  $P_{\underline{\varepsilon}}^a$ , est le résultat (i) du lemme. En dérivant (6.7) par rapport à  $a$  puis en appliquant le Lemme B.4 démontré en Annexe B, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a}K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) - \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2} &\prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}a\tilde{\mathcal{M}}_1(a), \\ K_{\underline{\varepsilon}}(0, a') - K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(a' - a) &\prec \frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}((a + a')\mathcal{M}_1(a + a'))(a' - a). \end{aligned}$$

Soit alors  $a_0$  tel que  $\mathcal{M}_1(2a_0)$  converge. On obtient alors pour  $0 \leq a, a' \leq a_0$ ,

$$\begin{aligned} K_{\underline{\varepsilon}}(0, a') - K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(a' - a) &\geq -2\frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}a_0\mathcal{M}_1(2a_0)(a' - a) \\ \Rightarrow K_{\underline{\varepsilon}}(0, a') - K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) &\geq \left( \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2} - 2\frac{\nu}{\underline{\varepsilon}^2}a_0\mathcal{M}_1(2a_0) \right) (a' - a). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Donc, comme  $\omega(0) > 0$ , pour  $\varepsilon$  assez petit et

$$\nu < \frac{\omega_0}{4a_0\mathcal{M}_1(a_0)}, \quad (6.9)$$

on trouve bien alors le (ii),

$$H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon}) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(0, a') - K_{\underline{\varepsilon}}(0, a) > 0.$$

□

**Remarque 6.2** *C'est dans ce lemme qu'intervient l'hypothèse (H6) : les étapes (6.8) et (6.9) nécessitent de savoir que  $\omega_0 > 0$ , ce qui revient à supposer, dans les notations de départ, que pour  $c_{10}\lambda < 0$ , la partie quadratique du hamiltonien  $\mathbf{H}_\lambda$  est elliptique définie.*

Pour étudier la forme des  $W^s(P^a)$  sur  $\Sigma_1 \cap W^{cs}(0)$ , on commence par identifier  $\Sigma_1 \cap W^{cs}(0)$  à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  grâce à l'écriture sous forme de graphe démontrée dans le (i) de la proposition 3.5. Puis on utilise la forme des  $W^s(P^a)$  en coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , qui est connue : en identifiant  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\Sigma_1) \cap W^{cs}(0)$  à un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  grâce au lemme 5.1, les  $W^s(P^a)$  en coordonnées  $(\xi_2, \eta_2)$  sont alors les cercles d'aire  $a$  (voir Figure 2.18).

On introduit dans le lemme qui suit le difféomorphisme  $g_{\underline{\varepsilon}}$  qui est la restriction de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  à  $\Sigma_1 \cap W^{cs}(0)$  vue comme une application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  grâce aux écritures sous forme de graphes. Les  $W^s(P^a)$  en coordonnées  $(q_2, p_2)$  sont alors les images des cercles d'aire  $a$  par  $g_{\underline{\varepsilon}}$ . Le lemme qui suit décrit les propriétés dont on aura besoin dans la suite vérifiées par les images des cercles par  $g_{\underline{\varepsilon}}$ .

**Lemme 6.3** *Soit  $\mathcal{C}_a := \{(\xi_2, \eta_2)/\xi_2^2 + \eta_2^2 = a\}$  le cercle d'aire  $a$  de  $\mathbb{R}^2$ . Et soit*

$$\begin{aligned} g_{\underline{\varepsilon}} : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\xi_2, \eta_2) &\mapsto (\varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}})(\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2), \end{aligned}$$

où on rappelle que  $(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}) = \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$ . Alors, pour  $\delta_1$  assez petit et pour  $\nu$  assez petit par rapport à  $\delta_1$  :

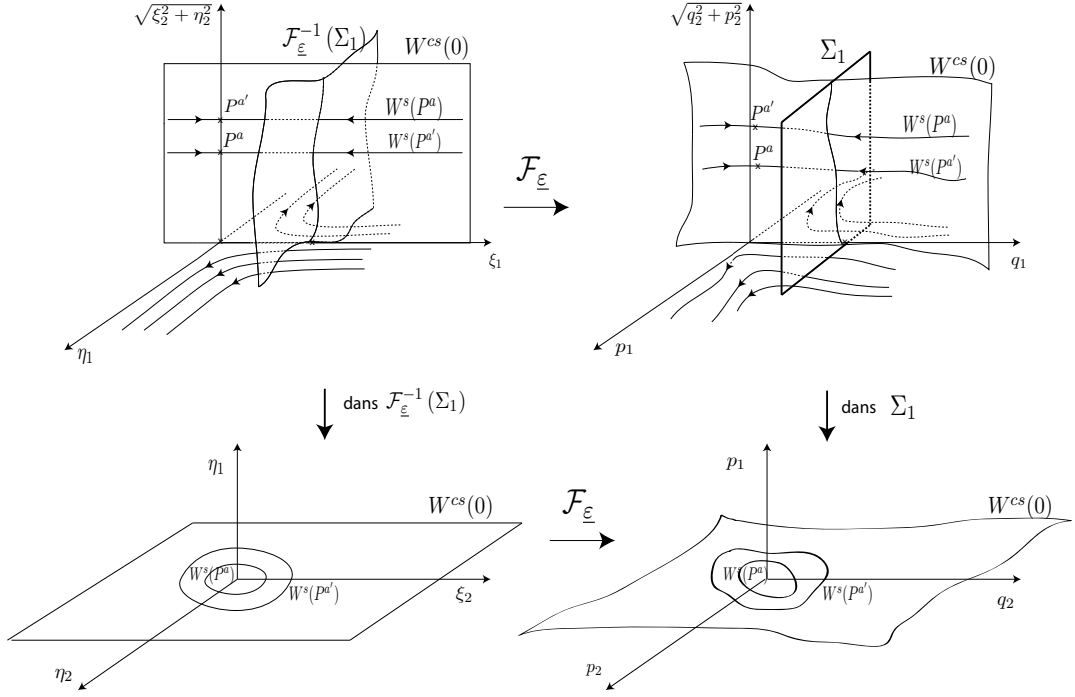


FIGURE 2.18 – Les  $W^s(P^a)$  sur  $W^{cs}(0)$ .

- (a)  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_a)$  est une courbe de Jordan,  
(b) si  $a < a'$  alors  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_a)$  est à l'intérieur de  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{a'})$ .

**Démonstration de (a).** Pour démontrer (a), comme  $\mathcal{C}_a$  est une courbe de Jordan il est suffisant de montrer que  $g_\varepsilon$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1)$  dans  $g_\varepsilon(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1))$ . La description de  $g_\varepsilon$  donnée avant l'énoncé du lemme fait paraître ce fait évident, mais démontrons-le. Pour cela, on montre que l'application  $g_\varepsilon^-$  suivante est l'inverse de  $g_\varepsilon$  :

$$g_\varepsilon^- : (q_2, p_2) \mapsto (\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2),$$

où  $(\varphi_{1,\varepsilon}^-, \psi_{1,\varepsilon}^-, \varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-) = \mathcal{F}_\varepsilon^{-1}$ .

La première chose à vérifier est que  $g_\varepsilon^-$  est bien définie sur  $g_\varepsilon(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1))$ . Or  $g_\varepsilon^-$  est définie si  $\sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1$  (d'après le (i) de la Proposition 3.5) et  $(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ . D'après le (i) de la Proposition 3.5,  $|p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)| \leq \delta_1$ , donc pour que  $g_\varepsilon^-$  soit défini, il suffit d'avoir  $\sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \delta_1$  et  $\delta_1 \leq \rho'_0$ . Or d'après le (vii) de la Proposition C.1,

$$|(\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)) - (\xi_2, \eta_2)| \leq \nu \mathcal{M}_0 \quad \text{pour tout } (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0).$$

Donc en supposant que  $\nu$  vérifie  $\nu \mathcal{M}_0 \leq \delta_1$ , on obtient que  $g_\varepsilon(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1)) \subset \mathcal{B}(0, \delta_1)$ , et donc  $g_\varepsilon^- \circ g_\varepsilon$  est définie dès que  $2\delta_1 \leq \rho'_0$ .

Ensuite, vérifions que  $g_\varepsilon^- \circ g_\varepsilon$  est l'identité. On a

$$g_\varepsilon(\xi_2, \eta_2) = (\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2).$$

Or  $\varphi_{1,\varepsilon}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2) = \delta_1$  par définition de  $\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma$ . Et comme

$$\mathcal{F}_\varepsilon(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2) \in W^{cs}(0)$$

vu que  $\eta_1 = 0$ , on a alors

$$\psi_{1,\varepsilon}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2) = p_{1,\varepsilon}^{cs}((\varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2)).$$

Donc

$$\begin{aligned} g_\varepsilon^- \circ g_\varepsilon(\xi_2, \eta_2) &= (\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(g_\varepsilon(\xi_2, \eta_2)), g_\varepsilon(\xi_2, \eta_2)) \\ &= (\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)((\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2)) \\ &= (\varphi_{2,\varepsilon}^-, \psi_{2,\varepsilon}^-)(\mathcal{F}_\varepsilon^{-1}(\xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, \xi_2, \eta_2), 0, \xi_2, \eta_2)) \\ &= (\xi_2, \eta_2). \end{aligned}$$

Donc  $g_\varepsilon$  est bien un homéomorphisme, donc (a) est vérifié.

**Démonstration de (b).** Pour démontrer (b), on montre d'abord que  $g_\varepsilon$  conserve l'aire. Cela vient du fait que  $\mathcal{F}_\varepsilon$ , qui est symplectique, conserve l'aire.

En effet, soit  $\mathcal{C}$  une courbe incluse dans  $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1)$ . Notons  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$  l'aire symplectique de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathbb{R}^2$  muni de la restriction de  $\Omega$  à  $\mathbb{R}^2$ . Comme la courbe de  $\mathbb{R}^4$

$$\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 = \xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, q_2, p_2), \eta_1 = 0, (q_2, p_2) \in \mathcal{C}\}$$

est incluse dans  $\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = 0\}$ , son aire est aussi  $\mathcal{A}(\mathcal{C})$ . De même pour la courbe de  $\mathbb{R}^4$

$$\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 = \delta_1, p_1 = p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), (q_2, p_2) \in \mathcal{C}\},$$

qui est incluse dans  $\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 = \delta_1\}$ . On a donc, en utilisant de plus  $\mathcal{F}_\varepsilon$  symplectique

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathcal{C}) &= \mathcal{A}(\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 = \xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, q_2, p_2), \eta_1 = 0, (q_2, p_2) \in \mathcal{C}\}) \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{F}_\varepsilon(\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\xi_1 = \xi_{1,\varepsilon}^\Sigma(0, q_2, p_2), \eta_1 = 0, (q_2, p_2) \in \mathcal{C}\})) \\ &= \mathcal{A}(\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_1 = \delta_1, p_1 = p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), (q_2, p_2) \in \mathcal{C}\}) = \mathcal{A}(g_\varepsilon(\mathcal{C})). \end{aligned}$$

Donc  $g_\varepsilon$  conserve bien l'aire.

Soit alors  $a < a'$ . D'après (a),  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{a'})$  sépare  $g_\varepsilon(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \frac{1}{2}\delta_1))$  en 2 composantes connexes. Or, comme dans  $\mathcal{B}(0, \frac{1}{2}\delta_1)$ , on a  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}\delta_1})$  dans l'une des composantes connexes et  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_a)$  dans l'autre. Et comme  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{\delta_1})$  d'aire supérieure à celle de  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{a'})$  par conservation de l'aire,  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}\delta_1})$  ne peut être dans la composante connexe à l'intérieur de  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{a'})$ . Donc nécessairement,  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_a)$  est à l'intérieur de  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{a'})$  et  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}\delta_1})$  à l'extérieur.  $\square$

### 6.3 Démonstration du (ii) de la Proposition 3.5 : dans la section $\Sigma_1$ , écriture du niveau d'énergie de $P^a$ sous forme de graphe ; positions relatives de ce graphe et de celui de $W^{cs}(0)$

Cette partie est consacrée à la démonstration du (ii) de la proposition 3.5. On est toujours dans la section  $\Sigma_1$  au voisinage de  $(p_1, q_2, p_2) = 0$ . On cherche, pour  $a$  fixé, à montrer que

le niveau d'énergie  $H = H(P^a)$  peut s'écrire comme un graphe  $p_1 = p_1^H(q_2, p_2, a)$  (voir Figure 2.19). On aura besoin de plus par la suite de connaître les positions relatives de ce niveau d'énergie et de  $W^{cs}(0)$ , car le premier retour ne sera défini que du "bon côté" de  $W^{cs}(0)$ . On montre dans le lemme qui suit que dans un voisinage adapté, le niveau d'énergie est au-dessus de  $W^{cs}(0)$  exactement pour les  $(q_2, p_2)$  qui sont à l'extérieur de la courbe  $g_\varepsilon(\mathcal{C}_a)$  (qui est aussi l'intersection de  $W^s(P^a)$  avec  $\Sigma_1$ , ou encore l'intersection du niveau d'énergie avec  $W^{cs}(0)$ ).

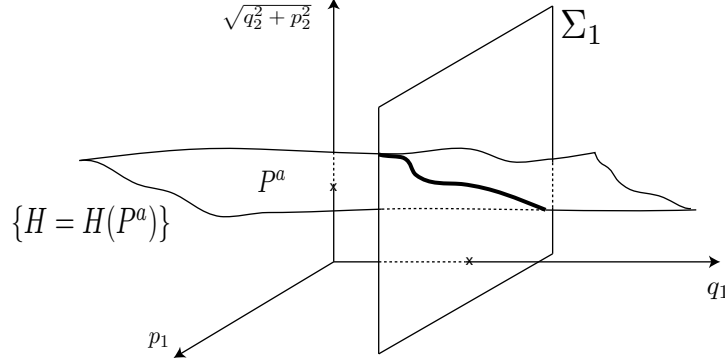


FIGURE 2.19 – Intersection du niveaux d'énergie  $\{H = H(P^a)\}$  avec la section  $\Sigma_1$ .

On démontre tout d'abord le lemme suivant, très proche du (ii) de la proposition 3.5, avec des conditions plus faibles sur  $a$ , et de plus un résultat de régularité sur  $p_{1,\varepsilon}^H$  qui sera utile pour la vérification des hypothèses du théorème KAM. Puis on démontrera que ce lemme implique le (ii) de la proposition 3.5.

**Lemme 6.4** *Soit*

$$\tilde{h}_\varepsilon(q_2^2 + p_2^2, a) := \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(q_2^2 + p_2^2) - H(P_\varepsilon^a, \varepsilon).$$

Pour  $\delta_1$  assez petit et  $a \leq \min(a_0, \frac{1}{2}\delta_1^2)$ , pour  $\nu$  assez petit, il existe  $p_{1,\varepsilon}^H$  telle que

$$\begin{aligned} & \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / H((q_1, p_1, q_2, p_2), \varepsilon) = H(P_\varepsilon^a, \varepsilon)\} \cap \Sigma_1 \\ & \cap \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / |p_1| \leq \delta_1, \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \leq \rho'_0, |\tilde{h}_\varepsilon| \leq \delta_1^2\} \\ & = \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / q_1 = \delta_1, p_1 = p_{1,\varepsilon}^H(q_2, p_2, a), (q_2, p_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \rho'_0), |\tilde{h}_\varepsilon| \leq \delta_1^2\} \end{aligned}$$

De plus

$$p_{1,\varepsilon}^H(q_2, p_2, a) := \tilde{p}_1^H(q_2, p_2, \tilde{h}_\varepsilon(q_2^2 + p_2^2, a), \varepsilon),$$

avec  $\tilde{p}_1^H$  analytique en ses variables  $(q_2, p_2, h, \varepsilon)$ . Et pour tout  $(q_2, p_2) \in g_\varepsilon(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \delta_1))$ , on a

$$p_{1,\varepsilon}^H(q_2, p_2, a) > p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) \iff (q_2, p_2) \text{ est à l'extérieur de } g_\varepsilon(\mathcal{C}_a). \quad (6.10)$$

**Démonstration**

On procède en 3 étapes, dont voici tout d'abord un résumé.

**Étape 1 :** on montre d'abord par valeurs intermédiaires l'existence d'un  $|p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_2, p_2, a)| \leq \delta_0$  tel que

$$H(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_2, p_2, a), q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon});$$

**Étape 2 :** grâce à une dérivée strictement positive, on montre à la fois l'unicité grâce à une fonction strictement croissante et la régularité par théorème des fonctions implicites car la dérivée est non nulle ;

**Étape 3 :** on utilise les lemmes de la partie 6.2 afin de montrer (6.10).

Détaillons maintenant ces 3 étapes.

**Étape 1.** On a

$$\begin{aligned} & H(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) \\ \iff & -\delta_1 p_1 + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) + H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}), \\ \iff & \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) = \delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}), \\ \iff & \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}(q_2^2 + p_2^2, a) = \delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}); \end{aligned} \quad (6.11)$$

où on a noté  $H_3 := H - H_2$  où  $H_2$  est la partie quadratique en  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  de  $H$ . On s'intéresse alors à l'équation implicite

$$h = \delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}), \quad (6.12)$$

où pour l'instant  $h$  est quelconque. On fait des estimations sur les valeurs de

$$\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}),$$

pour  $p_1 = \delta_1$  puis  $p_1 = -\delta_1$ , afin de savoir dans quel intervalle on peut prendre  $h$  en étant sûr que l'équation (6.12) ait une solution  $\tilde{p}_1^H(q_2, p_2, \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}(q_2^2 + p_2^2, a), \underline{\varepsilon})$ . On fait d'abord ces estimations pour  $\nu = 0$ ; comme il n'y a plus d'irrégularité en  $\frac{1}{\underline{\varepsilon}}$  dans  $H_3$ , on pourra facilement étendre ces estimations à  $\nu$  petit par régularité. En  $p_1 = 2\delta_1$ , on trouve

$$2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, 2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu) = 2\delta_1^2 - \frac{1}{2}(\delta_1 + 2\delta_1)^3 = \delta_1^2(2 - \frac{27}{2}\delta_1).$$

Et en  $p_1 = -2\delta_1$  :

$$-2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, -2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu) = -2\delta_1^2 - \frac{1}{2}(\delta_1 - 2\delta_1)^3 = -\delta_1^2(2 - \frac{1}{2}\delta_1).$$

Donc pour  $\delta_1 \leq \frac{1}{27}$ , on a

$$2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, 2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu) \geq \frac{3}{2}\delta_1^2, \quad -2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, -2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu) \leq -\frac{3}{2}\delta_1^2.$$

Comme  $H_3$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à toutes ses variables sur  $\mathcal{B}(0, \rho'_0)$  et pour  $\varepsilon, \nu, \mu \leq \varepsilon_0$ , il existe une constante  $M$  telle que

$$|H_3(\delta_1, 2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu, \mu) - H_3(\delta_1, 2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu)| \leq M\nu.$$

Et donc, pour  $\nu \leq \frac{\delta_1^2}{2M}$ , on trouve que

$$2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, 2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu, \mu) \geq \delta_1^2, \quad -2\delta_1^2 - H_3(\delta_1, -2\delta_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu) \leq -\delta_1^2.$$

Donc, par valeurs intermédiaires, l'équation (6.12) a une solution  $\tilde{p}_1^H(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon}) \in [-\delta_1, \delta_1]$  dès que  $|h| \leq \delta_1^2$ . Ce qui conclut l'existence.

**Étape 2.** Dans l'équation implicite (6.12) ci-dessus, étudions  $\frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}))$ . On va montrer que cette dérivée est strictement positive pour  $\delta_1$  assez petit et  $\nu$  assez petit par rapport à  $\delta_1$ . Pour cela, on commence par montrer que c'est vrai en  $\nu = 0$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu = 0, \mu)) &= \frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - \frac{1}{2}(\delta_1 + p_1)^3) \\ &= \delta_1 - \frac{3}{2}(\delta_1 + p_1)^2. \end{aligned}$$

Or on a montré l'existence d'une solution  $|p_1| \leq \delta_1$ , on étudie alors l'unicité et la régularité sur cet intervalle. On a sur cet intervalle

$$\frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu = 0, \mu)) \geq \delta_1 - \frac{3}{2}(\delta_1 + \delta_1)^2 = \delta_1(1 - 6\delta_1).$$

Donc pour  $\delta_1 \leq \frac{1}{12}$ , on a

$$\frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \varepsilon, 0, \mu)) \leq \frac{1}{2}\delta_1.$$

Comme  $\frac{\partial H_3}{\partial p_1}$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $\nu$  sur le compact  $\mathcal{B}(0, \rho'_0) \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]^3$ , pour  $\nu$  assez petit par rapport à  $\delta_1$  on a

$$\frac{\partial}{\partial p_1}(\delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu, \mu)) \leq \frac{1}{4}\delta_1 > 0.$$

Comme cette dérivée est positive, pour tout  $(q_2, p_2, \varepsilon, \nu, \mu)$  fixé l'application

$$p_1 \mapsto \delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \varepsilon, \nu, \mu)$$

est strictement croissante sur  $[-\delta_1, \delta_1]$ . On a donc unicité du  $\tilde{p}_1^H(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon})$  construit à l'étape 1. De plus, comme la dérivée est non nulle dans l'équation implicite (6.12), on peut appliquer le théorème des fonctions implicites analytique au voisinage de tout  $(p_1 = \tilde{p}_1^H(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon}), q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon})$ , et par unicité on a donc  $\tilde{p}_1^H(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon})$  analytique.

**Étape 3.** Pour montrer (6.10), on utilise le Lemme 6.3, qui décrit la répartition des  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$  sur  $W^{cs}(0) \cap \Sigma_1$ . Cela va nous être utile car  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$  est en fait l'intersection du niveau d'énergie  $\{H = H(P^a)\}$  avec  $W^{cs}(0)$  : ce lemme décrit donc les positions relatives des niveaux d'énergie au moment de leur intersection avec  $W^{cs}(0)$ . Cela va nous permettre de positionner les niveaux d'énergie à la fois entre eux et par rapport à la variété  $W^{cs}(0)$  (cf Figure 2.20).

On commence par se placer dans un voisinage de 0 en  $(q_2, p_2)$  tel que les  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$  soient effectivement des courbes concentriques : on peut donc se placer dans  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \delta_1))$ . Vérifions déjà que l'affirmation ci-dessus,

$$g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a) = \{H = H(P^a)\} \cap W^{cs}(0),$$

est vraie. Pour cela, on se place sur  $W_{\underline{\varepsilon}}^{cs}(0)$ , et de plus dans un voisinage de 0 tel que  $W_{\underline{\varepsilon}}^{cs}(0) \cap \Sigma_1$  s'écrive effectivement sous forme de graphe  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}$ , donc, d'après le (i) de la Proposition 3.5, on peut se placer dans  $\mathcal{B}(0, \delta_0)$ . On a alors

$$\begin{aligned}
& (\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) \in \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / H((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon})\}, \\
& \iff H(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}), \\
& \iff H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^{\Sigma}(0, g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2)), 0, g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2)), \underline{\varepsilon}) = H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) / \xi_2^2 + \eta_2^2 = a\}), \underline{\varepsilon}), \\
& \iff K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_{1,\underline{\varepsilon}}^{\Sigma}(0, g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2)), 0, g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2)) = K_{\underline{\varepsilon}}(0, a), \\
& \iff K_{\underline{\varepsilon}}(0, (g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2))_{q_2}^2 + (g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2))_{p_2}^2) = K_{\underline{\varepsilon}}(0, a).
\end{aligned}$$

Grâce au Lemme 6.1, on en déduit que si  $a \leq a_0$  et  $g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \sqrt{a_0})$ , alors on a l'équivalence

$$\begin{aligned}
& (\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) \in \{(q_1, p_1, q_2, p_2) / H((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon})\} \\
& \iff g_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_2, p_2) \in \mathcal{C}_a, \\
& \iff (q_2, p_2) \in g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a).
\end{aligned} \tag{6.13}$$

On se place ensuite dans un voisinage de 0 en  $(q_2, p_2)$  tel que les  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$  soient effectivement des courbes concentriques. D'après le Lemme 6.3, c'est le cas dans  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \delta_1))$ . Pour démontrer (6.10), prenons alors  $(q_{20}, p_{20})$  à l'extérieur de  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$ . Par le Lemme 6.3, nécessairement il existe  $a' > a$  tel que  $(q_{20}, p_{20}) \in g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_{a'})$ . D'après (6.13), on a alors  $(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_{20}, p_{20}), q_{20}, p_{20})$  dans le niveau d'énergie  $\{H = H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon})\}$ .

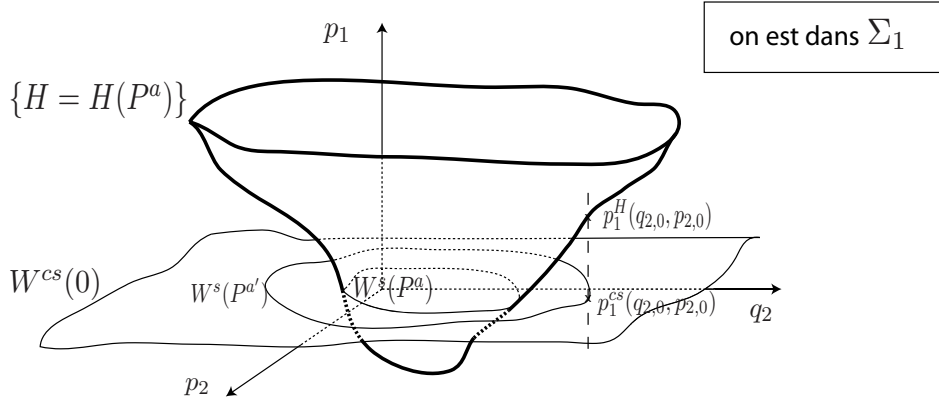


FIGURE 2.20 – Dans  $\Sigma_1$ , positions relatives du niveau  $\{H = H(P^a)\}$  et de la variété centre-stable  $W^{cs}(0)$ .

En utilisant l'application croissante de l'étape 2 et le fait que  $H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) < H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon})$  d'après le lemme 6.1, on va en déduire que  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_{20}, p_{20}, a) > p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_{20}, p_{20})$ .

En effet,  $p_{1,\underline{\varepsilon}}^H$  est défini (cf (6.11)) par

$$\frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) = \delta_1 p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_2, p_2, a) - H_3(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_2, p_2, a), q_2, p_2, \underline{\varepsilon}).$$

Or

$$H(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_{20}, p_{20}), q_{20}, p_{20}) = H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon}),$$

ce qui, comme  $H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) < H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon})$ , s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \delta_1 p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2, a) - H_3(\delta_1, p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_2, p_2, a), q_2, p_2, \underline{\varepsilon}) &= \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_{20}^2 + p_{20}^2) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^{a'}, \underline{\varepsilon}), \\ &< \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_{20}^2 + p_{20}^2) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Et on a démontré à l'étape 2 que pour tout  $(q_2, p_2) \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, \rho'_0)$ , l'application

$$p_1 \mapsto \delta_1 p_1 - H_3(\delta_1, p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon})$$

est strictement croissante sur  $[-\delta_1, \delta_1]$ . Donc nécessairement, on a

$$p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_{20}, p_{20}, a) > p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_{20}, p_{20}).$$

Et de même, si on prend  $(q_{20}, p_{20})$  à l'intérieur de  $g_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}_a)$ , avec cette fois  $a' < a$ , on obtient

$$p_{1,\underline{\varepsilon}}^H(q_{20}, p_{20}, a) < p_{1,\underline{\varepsilon}}^{cs}(q_{20}, p_{20}).$$

Ce qui complète la démonstration de (6.10).  $\square$

Le Lemme 6.4 étant démontré, on montre maintenant qu'on peut en déduire la démonstration du (ii) de la Proposition 3.5.

**Démonstration du (ii) de la Proposition 3.5**

Il ne reste donc qu'à montrer qu'il existe  $c_0$  tel que pour  $a \leq c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$  et  $I_2 \leq \frac{1}{2} \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$  on ait

$$|\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}(q_2^2 + p_2^2, a)| \leq \delta_1^2.$$

Or on a

$$|\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}(q_2^2 + p_2^2, a)| = \left| \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) - H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) \right|.$$

On va montrer qu'avec un bon choix des paramètres on a

$$\left| \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2}(q_2^2 + p_2^2) \right| \leq \frac{1}{2} \delta_1^2$$

et

$$|H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon})| \leq \frac{1}{2} \delta_1^2.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, comme  $\omega$  est continue, la condition  $I_2 \leq \frac{1}{2} \omega_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$  est suffisante. On utilise ensuite le Lemme 6.1 pour écrire

$$\begin{aligned} |H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon})| &\leq \left| H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon}) - \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2} a \right| + \left| \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2} a \right|, \\ &\leq a^2 \mathcal{M}_1(a) + \left| \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\underline{\varepsilon}^2} a \right|, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{M}_1$  analytique en  $a$ . Ainsi, il existe bien un  $c_0$  tel que si  $a \leq c_0 \varepsilon^2 \delta_1^2$ , alors

$$|H(P_{\underline{\varepsilon}}^a, \underline{\varepsilon})| \leq \frac{1}{2} \delta_1^2.$$

Ce qui conclut la démonstration du (ii) grâce au Lemme 6.4.  $\square$



#### 6.4 Démonstration du (iii) de la Proposition 3.5 : existence d'une restriction de $\Psi$ dans le domaine où le niveau d'énergie de $P^a$ s'écrit comme un graphe

Cette partie est consacrée à la démonstration du (iii) de la Proposition 3.5. Pour mémoire, il s'agit de démontrer que

Pour  $c$  assez petit, l'ensemble

$$\{(q_1, p_1, q_2, p_2)/0 < p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) \leq p'_0(\delta_1), q_2^2 + p_2^2 \leq c\delta_1^2\varepsilon^2\}$$

est inclus dans l'ensemble de définition de  $\Psi$  et son image par  $\Psi$  est incluse dans l'ensemble

$$\Sigma_1 \cap \mathcal{B}(0, \delta_1) \cap \{(q_1, p_1, q_2, p_2)/I_2 \leq \omega_0\delta_1^2\varepsilon^2\}.$$

#### Démonstration de l'inclusion dans l'ensemble de définition de $\Psi$ .

Par le résultat (6.1) du (i) de la proposition 3.5, on a tout de suite

$$p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2) < p_1 \Rightarrow \eta_1 > 0.$$

Ensuite, construisons  $p'_0(\delta_1)$  tel que

$$|p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)| \leq p'_0(\delta_1) \Rightarrow |\eta_1| \leq \xi'_0(\delta_1).$$

Pour  $(q_1, p_1, q_2, p_2) = (\delta_1, p_1, q_2, p_2)$  on a

$$\begin{aligned} |\eta_1| &\leq \xi'_0(\delta_1) \\ \Leftrightarrow |\psi_{1,\varepsilon}(q_1, p_1, q_2, p_2)| &\leq \xi'_0(\delta_1), \\ \Leftrightarrow |\psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_1, q_2, p_2) - \psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2)| &\leq \xi'_0(\delta_1), \end{aligned}$$

car par définition de  $p_{1,\varepsilon}^{cs}$ ,  $\psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) = 0$ . Or, d'après le Lemme B.4 démontré en Annexe B, on a dans l'ensemble des séries formelles à trois variables  $(p_1, q_2, p_2)$ ,

$$\begin{aligned} &\psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_1, q_2, p_2) - \psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2) \\ < &|\partial_{p_1} \psi_{1,\varepsilon}|(\delta_1, |p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)| + |p_1|, |q_2|, |p_2|)|p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)|. \end{aligned}$$

Et donc (cf Lemme B.3),

$$\begin{aligned} &|\psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_1, q_2, p_2) - \psi_{1,\varepsilon}(\delta_1, p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2), q_2, p_2)| \\ &\leq \mathcal{M}_0 |p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)|. \end{aligned}$$

Donc si on choisit  $p'_0(\delta_1) := \frac{1}{\mathcal{M}_0} \xi'_0(\delta_1)$ , on a bien

$$|p_1 - p_{1,\varepsilon}^{cs}(q_2, p_2)| \leq p'_0(\delta_1) \Rightarrow |\eta_1| \leq \xi'_0(\delta_1).$$

Enfin, pour montrer que pour  $c$  et  $\delta_1$  assez petits on a

$$q_2^2 + p_2^2 \leq c\delta_1^2\nu \Rightarrow \sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1,$$

on utilise la même méthode que pour la majoration (5.14) de la démonstration de la Proposition 5.3, mais avec  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}$  au lieu de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$ . Ainsi, si  $q_2^2 + p_2^2 \leq c\delta_1\nu$ , on a

$$\begin{aligned}\xi_2^2 + \eta_2^2 &= \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2)^2 + \psi_{2,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2)^2 \\ &\leq q_2^2 + p_2^2 + \left| \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2)^2 + \psi_{2,\underline{\varepsilon}}^-(q_1, p_1, q_2, p_2)^2 - (q_2^2 + p_2^2) \right|, \\ &\leq c\delta_1^2\nu + \nu\mathcal{M}'_0\delta_1^3.\end{aligned}$$

On a donc bien  $\sqrt{\xi_2^2 + \eta_2^2} \leq \delta_1$  dès que  $\sqrt{c\nu + \nu\mathcal{M}'_0\delta_1} \leq 1$ .

**Démonstration de l'inclusion de l'image dans l'ensemble où le niveau d'énergie s'écrit comme un graphe.**

Dans la construction de l'application intermédiaire  $\Psi_2$  (cf Proposition 3.3), on a déjà le domaine d'arrivée pour l'ensemble de définition complet inclus dans  $\mathcal{B}(0, \delta_1)$ . Il ne reste donc qu'à montrer qu'on a aussi à l'arrivée

$$I_2 \leq \frac{1}{2}\omega_0\delta_1^2\varepsilon^2.$$

Pour cela on utilise la majoration (5.12) démontrée dans la Proposition 5.3. On trouve que si  $I_2 \leq c\delta_1^2\varepsilon^2$ , alors

$$\begin{aligned}& \left| \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} (\Psi_{q_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 + \Psi_{p_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2) \right| \\ & \leq \left| \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right| \left( (q_2^2 + p_2^2) + \left| \Psi_{q_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 + \Psi_{p_2}((q_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon})^2 - (q_2^2 + p_2^2) \right| \right), \\ & \leq \left| \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right| (c\delta_1^2\varepsilon^2 + \varepsilon^2 M\delta_1^3), \\ & \leq M(c + \delta_1)\delta_1^2.\end{aligned}$$

On obtient donc bien la majoration attendue pour  $c$  et  $\delta_1$  assez petits. □

## 7 Construction d'une courbe invariante pour les restrictions de l'application de premier retour par un théorème KAM : démonstration de la Proposition 3.8

Cette partie est consacrée à la démonstration de la Proposition 3.8. On travaille pour  $a \leq c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$ , dans une couronne de la forme

$$\{(q_2, p_2)/I_2 = q_2^2 + p_2^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]\},$$

où  $c_1, c_2$  sont inférieurs au  $c$  du domaine de définition de  $\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a$  (voir la Proposition 3.5(iv)). Les  $c_0, c_1, c_2$  sont fixés à la fin de la partie 7.1.

Voici le **plan de la démonstration de la proposition 3.8** :

- **dans la partie 7.1**, on travaille sur l'application  $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$ . On montre d'abord dans le Lemme 7.1 qu'on peut l'écrire en coordonnées polaires sous la forme

$$(\Psi_{\theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, \Psi_{r, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a)(\theta, r) = (\theta + \Theta(r, a, \varepsilon), r).$$

Puis, dans l'optique de montrer le (iii) de la Proposition 3.8, on calcule dans le Lemme 7.2 une majoration de  $\left| \frac{\partial^k \Theta}{\partial r^k}(r, a, \varepsilon) \right|$ . Enfin, à l'aide des deux Lemmes suivants 7.3 et 7.4, on démontre dans le Lemme 7.5 l'existence d'un encadrement proche de celui du (ii) de la Proposition 3.8. C'est dans ce dernier lemme que sont fixés  $c_0, c_1$  et  $c_2$ .

- **dans la partie 7.2**, dans l'optique de la démonstration du (iv) de la Proposition 3.8, on démontre dans le Lemme 7.7 une majoration  $\mathcal{C}^k$  de  $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$ . Le Lemme 7.6 assure la transition en coordonnées polaires pour la norme  $\mathcal{C}^k$  dans l'anneau

$$I_2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2].$$

- **dans la partie 7.3**, on introduit deux changements de coordonnées successifs, puis on montre que l'application  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a$  dans ces nouvelles coordonnées vérifie (ii), (iii) et (iv) de la Proposition 3.8.
- **dans la partie 7.4**, on démontre tout d'abord que  $\hat{\Psi}^a$  est toujours une application symplectique dans le Lemme 7.8, puis le Lemme 7.9 implique directement le (i) de la Proposition 3.8.

### 7.1 Estimations pour l'application de premier retour pour la forme normale du système, $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$

Dans cette partie on étudie plus précisément le cas de l'application de premier retour  $\Psi^a$  dans le cas où  $\underline{\varepsilon}' = (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu = 0)$ , qui est le cas du système sous forme normale en tronquant le reste. On verra ensuite l'application de premier retour pour le système complet comme une perturbation de cette application.

**Lemme 7.1** *L'application  $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$  s'écrit en coordonnées polaires*

$$(\Psi_{\theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, \Psi_{r, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a)(\theta, r) = (\theta + \Theta(r, a, \varepsilon), r),$$

avec

$$\begin{aligned}\Theta(r, a, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &+ \varepsilon \int_0^{T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))} \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (\delta_1, p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0), \varepsilon), r, \varepsilon) ds,\end{aligned}$$

où  $p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r \cos \theta, r \sin \theta, a)$  et  $T(p_1, r \cos \theta, r \sin \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))$  ne dépendent pas de  $\theta$ .

### Démonstration

On utilise la forme particulière de la forme normale du système : pour  $\mu = 0$ , on étudie le système hamiltonien

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= -p_1 + \frac{3}{2}(q_1 + p_1)^2 + \varepsilon^2 \partial_1 N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon), \\ \frac{dp_1}{dt} &= q_1 - \frac{3}{2}(q_1 + p_1)^2 - \varepsilon^2 \partial_1 N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon), \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} p_2 + \varepsilon^2 \partial_2 N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon), p_2 \\ \frac{dp_2}{dt} &= -\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} q_2 - \varepsilon^2 \partial_2 N_n(q_1 + p_1, q_2^2 + p_2^2, \varepsilon) q_2.\end{aligned}$$

On a alors

$$\frac{d}{dt}(q_2^2 + p_2^2) = \frac{d}{dt} I_2 = 0,$$

et donc à  $I_2 = I_{20}$  fixé, on peut résoudre le sous-système constitué des 2 premières équations et obtenir  $\phi_{q_1}$  et  $\phi_{p_1}(t, (q_1, p_1, I_{20}), \varepsilon)$ . En injectant ces solutions dans le sous-système constitué des 2 dernières équations, on a alors un système en  $(q_2, p_2)$  linéaire à coefficients non constants. Ses solutions s'écrivent

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} (t) = \mathbf{R}_{\theta(t, I_{20}, \varepsilon)} \begin{pmatrix} q_{20} \\ p_{20} \end{pmatrix},$$

où

$$\theta(t, I_{20}, \varepsilon) := \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} t + \int_0^t \varepsilon^2 \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (q_1, p_1, I_{20}), \varepsilon), I_2, \varepsilon) ds.$$

Et on a donc

$$\begin{aligned}\Psi_{\theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a(\theta, r) &= \theta + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(q_2, p_2, a), q_2, p_2, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^{T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(q_2, p_2, a), q_2, p_2, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))} \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (\delta_1, p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(q_2, p_2, a), r), \varepsilon), r, \varepsilon) ds.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Vérifions maintenant que  $p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r \cos \theta, r \sin \theta, a)$  et  $T(p_1, r \cos \theta, r \sin \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))$  ne dépendent pas de  $\theta$ . Pour cela, on revient aux définitions respectives de  $p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H$  et de  $T$ , et on vérifie que quand  $\mu = 0$ ,  $\theta$  n'intervient pas dans les définitions. En effet,  $p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H$  est l'unique  $p_1^H$  tel que

$$\begin{aligned}H((\delta_1, p_1^H, q_2, p_2), (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) &= H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ \Leftrightarrow \delta_1 p_1^H - \frac{1}{2}(\delta_1 + p_1^H)^2 - \varepsilon^2 N_n(\delta_1 + p_1^H, r^2, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r^2 - H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)).\end{aligned}$$

Et dans cette dernière forme, on voit qu'il n'y a pas de dépendance en  $\theta$ . Donc  $p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r \cos \theta, r \sin \theta, a)$  indépendante de  $\theta$ .

De même,  $T$  est défini par l'équation implicite de premier retour

$$\tilde{\phi}_{q_1}(T, (\delta_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) = \delta_1,$$

et on a vu au début de la démonstration de ce lemme que dans  $\tilde{\phi}_{q_1}(t, (\delta_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))$  la dépendance en  $(q_2, p_2)$  n'intervient qu'avec la quantité conservée  $I_2 = r^2$ . Donc l'équation qui définit  $T$  ne dépend pas non plus de  $\theta$ .

Donc l'expression (7.1), écrite en  $(q_2, p_2) = (r, 0)$  (i.e. pour  $\theta = 0$ ), permet bien d'écrire que

$$\Psi_{\theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a(\theta, r) = \theta + \Theta(r, a, \varepsilon),$$

avec

$$\begin{aligned} \Theta(r, a, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &+ \int_0^{T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))} \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (\delta_1, p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0), \varepsilon), r, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

□

**Lemme 7.2** Pour  $0 \leq a \leq c_0$  et  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon, c_2 \delta_1^2 \varepsilon]$ , on a pour tout  $k \leq E(\frac{N_0-1}{4})$ ,

$$\left| \frac{\partial^k \Theta}{\partial r^k}(r, a, \varepsilon) \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{k+2}}.$$

### Démonstration

D'après le lemme 7.1, on a

$$\begin{aligned} \Theta(r, a, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^{T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))} \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (\delta_1, p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0), \varepsilon), r, \varepsilon) ds. \end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} \Theta(r, a, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &+ \varepsilon^2 \mathcal{F} \left( T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)), p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, \varepsilon \right), \end{aligned}$$

avec  $\mathcal{F}$  et  $T$  applications  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à leurs coefficients, et

$$p_{1_{\underline{\varepsilon}'}}^H(q_2, p_2, a) = \tilde{p}_1^H(q_2, p_2, \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(q_2^2 + p_2^2, a), \underline{\varepsilon}'),$$

avec  $\tilde{p}_1^H$  analytique en ses variables  $(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon}')$ . Donc la seule irrégularité est celle en  $\varepsilon = 0$  dans

$$\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a) = \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r^2 - H(P_{\underline{\varepsilon}'}^a, \underline{\varepsilon}').$$

En fait  $\Theta$  est de la forme

$$\Theta(r, a, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \tilde{\Theta}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon),$$

avec  $\tilde{\Theta} \in \mathcal{C}^{k_0}$  en ses variables  $(h, r, \varepsilon)$ . Et on a

$$\frac{\partial \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r} = 2 \frac{\omega(\nu)}{\nu} r, \quad \frac{\partial^2 \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r^2} = 2 \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}, \quad \forall k \geq 3, \frac{\partial^k \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r^k} = 0.$$

Donc pour  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]$ , on a pour tout  $k \geq 0$ ,

$$\left| \frac{\partial^k \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r^k} \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^k}.$$

Or on peut montrer par récurrence sur  $k \geq 0$  que

$$\frac{\partial^k \tilde{\Theta}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon)}{\partial r^k}$$

est une somme finie de termes de la forme

$$\alpha \frac{\partial^{i+j} \tilde{\Theta}}{\partial r^i \partial h^j}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon) \left( \frac{\partial \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r} \right)^{n_1} \cdots \left( \frac{\partial^k \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a)}{\partial r^k} \right)^{n_k},$$

où  $i + j \leq k, n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k \leq k$ . Et comme  $\tilde{\Theta}$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  et qu'on travaille sur un borné, on trouve donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \tilde{\Theta}}{\partial r^k}(r, a, \varepsilon) \right| &\leq \sum_{n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k \leq k} M \left( \frac{M}{\varepsilon} \right)^{n_1} \cdots \left( \frac{M}{\varepsilon^k} \right)^{n_k} \\ &\leq \sum_{n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k \leq k} \frac{M}{\varepsilon^{n_1 + 2n_2 + \cdots + kn_k}} \leq \frac{M}{\varepsilon^k}. \end{aligned}$$

Et donc on a bien, avec  $\Theta(r, a, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \tilde{\Theta}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon)$ ,

$$\left| \frac{\partial^k \Theta}{\partial r^k}(r, a, \varepsilon) \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^{k+2}}.$$

□

Pour vérifier les hypothèses du théorème KAM, on a besoin ensuite d'un encadrement précis de  $\partial_r \Theta$ . Et pour cela, vue l'expression trouvée pour  $\Theta$  dans le lemme 7.1, il nous faut aussi un encadrement de  $T$ . Dans ce but, on démontre d'abord le lemme suivant qui donne une propriété de  $T$  pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, 0, 0)$ , qui va nous être utile ensuite pour le cas  $(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)$  par perturbation.

**Lemme 7.3** *Pour le système tronqué, i.e. associé au hamiltonien*

$$H((q_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, 0, 0)) = -q_1 p_1 + \frac{1}{2}(q_1 + p_1)^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(q_2^2 + p_2^2),$$

le temps de retour à la section vérifie

$$T((q_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, 0, 0)) = T^0(p_1) \xrightarrow{p_1 \rightarrow p_1(\delta_1)} +\infty,$$

où  $p_1(\delta_1)$  est l'unique  $p_1$  tel que  $(\delta_1, p_1(\delta_1), 0, 0)$  est sur l'orbite homocline à 0.

### Démonstration

Remarquons d'abord que  $p_1(\delta_1)$  est bien défini, grâce à l'écriture de  $\Sigma_1$  sous forme de graphe en coordonnées locales  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ , et au fait que la variété stable à 0 en coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  est l'ensemble

$$\{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)/\eta_1 = 0 = \xi_2 = \eta_2\}.$$

Dans les coordonnées  $(\underline{q}_1, \underline{p}_1)$  (coordonnées utilisées dans la partie 3.1), le Hamiltonien se réécrit

$$\frac{1}{2}(\underline{p}_1^2 - \underline{q}_1^2) + \frac{1}{2}\underline{q}_1^3 + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}(\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2).$$

Et à  $\underline{q}_2^2 + \underline{p}_2^2$  constant, les lignes de niveau du Hamiltonien sont les

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\underline{p}_1^2 - \underline{q}_1^2) + \frac{1}{2}\underline{q}_1^3 &= -\alpha, \\ \Leftrightarrow \underline{p}_1 &= \pm\sqrt{\underline{q}_1^2 - \underline{q}_1^3 - \alpha}, \end{aligned}$$

où on obtient des orbites périodiques pour  $0 < \alpha < \frac{4}{27}$  et l'orbite homocline pour  $\alpha = 0$ . On va calculer le temps de parcours  $\tau(\alpha)$  de ces orbites, puis montrer que

$$\tau(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty.$$

Pour cela, on calcule le temps de parcours de la demi-orbite  $\underline{p}_1 = \sqrt{\underline{q}_1^2 - \underline{q}_1^3 + \alpha}$ . Soit  $(\underline{q}_1(t), \underline{p}_1(t), \underline{q}_2(t), \underline{p}_2(t))$  la solution ayant cette trajectoire. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{\underline{p}_1(t)}{\sqrt{\underline{q}_1(t)^2 - \underline{q}_1(t)^3 + \alpha}} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\tau(\alpha) &= \int_0^{\frac{1}{2}\tau(\alpha)} \frac{\underline{p}_1(t)}{\sqrt{\underline{q}_1(t)^2 - \underline{q}_1(t)^3 - \alpha}} dt. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variables  $z := \underline{q}_1(t)$  dans cette dernière intégrale, comme

$$\frac{d\underline{q}_1}{dt} = \partial_{p_1} H((\underline{q}_1(t), \underline{p}_1(t), \underline{q}_2(t), \underline{p}_2(t)), \varepsilon, 0, 0) = \underline{p}_1(t),$$

on obtient

$$\frac{1}{2}\tau(\alpha) = \int_{z_1(\alpha)}^{z_2(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{z^2 - z^3 + \alpha}} dz$$

où  $z_1(\alpha) < z_2(\alpha)$  sont les 2 racines positives de  $z^2 - z^3 - \alpha = 0$ . Notons  $z_0(\alpha)$  la troisième racine, négative, de  $z^2 - z^3 - \alpha = 0$ . En faisant dans l'intégrale ci-dessus le changement de variables

$$\sin x = \sqrt{\frac{z - z_1}{z_2 - z_1}},$$

on trouve

$$\int_{z_1(\alpha)}^{z_2(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{z^2 - z^3 + \alpha}} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{z_1(\alpha) - z_0(\alpha) + (z_2(\alpha) - z_1(\alpha)) \sin^2 x}}.$$

Or, quand  $\alpha \rightarrow 0$ , on a

$$z_2(\alpha) - z_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1 \text{ et } z_1(\alpha) - z_0(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

Comme pour tout  $x \geq 0$  on a  $x \geq \sin x$ , on a donc

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{z_1(\alpha) - z_0(\alpha) + (z_2(\alpha) - z_1(\alpha)) \sin^2 x}} \\ & \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{z_1(\alpha) - z_0(\alpha) + (z_2(\alpha) - z_1(\alpha)) x^2}} \\ & = \frac{2}{\sqrt{z_2(\alpha) - z_1(\alpha)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{z_1(\alpha) - z_0(\alpha)}{z_2(\alpha) - z_1(\alpha)} + x^2}} \\ & = \frac{2}{\sqrt{z_2(\alpha) - z_1(\alpha)}} \left( \ln \left| \frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \sqrt{\frac{z_1(\alpha) - z_0(\alpha)}{z_2(\alpha) - z_1(\alpha)}}} \right| - \ln \left| \sqrt{\frac{z_1(\alpha) - z_0(\alpha)}{z_2(\alpha) - z_1(\alpha)}} \right| \right). \end{aligned}$$

Or, quand  $\alpha \rightarrow 0$ , on a

$$z_2(\alpha) - z_1(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 1 \text{ et } z_1(\alpha) - z_0(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0.$$

On a bien alors

$$\tau(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} +\infty.$$

Au passage, on a aussi montré que  $T(p_1, q_1, p_1, \varepsilon, \nu = 0, \mu = 0)$  ne dépend ni de  $(q_2, p_2)$  ni de  $\varepsilon$ .

□

On voudra ensuite utiliser ce dernier résultat pour avoir une estimation de

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}(p_1^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)),$$

et pour cela on aura besoin de savoir dans quel intervalle  $p_1^H(r, 0, a)$  se déplace avec  $r$ . Pour cela, on montre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 7.4** *Soit  $\underline{c}_1, \underline{c}_2$  deux constantes positives. Alors il existe  $\underline{c}_0, \underline{c}'_1, \underline{c}'_2$  tels que pour  $\nu$  assez petit,*

$$p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1] \quad \text{pour tous } a \in [0, \underline{c}_0 \delta_1^2 \varepsilon^2], r^2 \in [\underline{c}'_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, \underline{c}'_2 \delta_1^2 \varepsilon^2].$$

De plus, on a aussi sur cet intervalle

$$\frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h} \geq \frac{1}{2} \delta_1 > 0.$$

et il existe  $\underline{c}''_1, \underline{c}''_2$  tels que

$$\tilde{h}_{\varepsilon'}(r^2, a) \in [\underline{c}''_1 \delta_1^2, \underline{c}''_2 \delta_1^2].$$



### Démonstration

On rappelle qu'on a montré lors de la construction de  $p_1^H$  que

$$p_{1\ \underline{\varepsilon}}^H(q_2, p_2, a) = \tilde{p}_1^H(q_2, p_2, \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}(q_2^2 + p_2^2, a), \underline{\varepsilon}),$$

avec  $\tilde{p}_1^H$  analytique en ses variables  $(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon})$ . Et pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, \nu = 0, \mu = 0)$ ,  $p_1^H$  est défini par

$$\begin{aligned} \delta_1 \tilde{p}_1^H - \frac{1}{2}(\delta_1 + \tilde{p}_1^H)^3 &= h \\ \Rightarrow \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h} \left( \delta_1 - \frac{3}{2}(\delta_1 + \tilde{p}_1^H)^2 \right) &= h. \end{aligned}$$

En sachant que par construction,  $|\tilde{p}_1^H| \leq \delta_1$  sur son ensemble de définition, on obtient alors que sur son ensemble de définition,  $\tilde{p}_1^H$  vérifie

$$\frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, h, (\varepsilon, 0, 0)) \geq \frac{1}{\delta_1} > 0.$$

Soit alors un sous-intervalle strict  $[\underline{c}_1'' \delta_1, \underline{c}_2'' \delta_1]$  de  $[\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1]$ . Il existe donc  $\underline{c}_1'', \underline{c}_2''$  tels que pour  $h \in [\underline{c}_1'' \delta_1^2, \underline{c}_2'' \delta_1^2]$ , on ait

$$\tilde{p}_1^H(r, 0, h, a, \nu = 0) \in [\underline{c}_1'' \delta_1, \underline{c}_2'' \delta_1].$$

Comme  $\tilde{p}_1^H$  est continue par rapport à  $\nu$  et  $\varepsilon$ , on obtient que pour  $\varepsilon$  assez petit

$$\forall h \in [\underline{c}_1'' \delta_1^2, \underline{c}_2'' \delta_1^2] \quad \tilde{p}_1^H(r, 0, h, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1];$$

ainsi que, comme  $\tilde{p}_1^H$  est  $\mathcal{C}^1$ ,

$$\frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, h, (\varepsilon, 0, 0)) \geq \frac{1}{2\delta_1} > 0.$$

Or

$$\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a) = \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r^2 - H(P_{\underline{\varepsilon}'}^a, \underline{\varepsilon}').$$

Soit maintenant un sous-intervalle strict  $[\underline{c}_1^{(4)} \delta_1^2, \underline{c}_2^{(4)} \delta_1^2]$  de  $[\underline{c}_1''' \delta_1^2, \underline{c}_2''' \delta_1^2]$ , on peut alors choisir  $\underline{c}_1', \underline{c}_2'$  tels que

$$r^2 \in [\underline{c}_1' \delta_1^2 \varepsilon^2, \underline{c}_2' \delta_1^2 \varepsilon^2] \Rightarrow \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r^2 \in [\underline{c}_1^{(4)} \delta_1^2, \underline{c}_2^{(4)} \delta_1^2].$$

Et il ne reste plus alors qu'à choisir  $a$  tel que

$$\left| H(P_{\underline{\varepsilon}'}^a, \underline{\varepsilon}') \right| \leq \min(\underline{c}_1^{(4)} - \underline{c}_1''', \underline{c}_2''' - \underline{c}_2^{(4)}) \delta_1^2.$$

Or d'après le Lemme 6.1, car ici on a pris  $\nu = \varepsilon^2$ , on a

$$\left| H(P_{\underline{\varepsilon}'}^a, \underline{\varepsilon}') \right| \leq \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} a + \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathcal{M}_0 a^2.$$

On peut donc choisir  $\underline{c}_0$  tel que pour  $\varepsilon$  assez petit on ait

$$a \leq \underline{c}_0 \delta_1^2 \varepsilon^2 \Rightarrow \left| H(P_{\underline{\varepsilon}'}^a, \underline{\varepsilon}') \right| \leq \min(\underline{c}_1^{(4)} - \underline{c}_1''', \underline{c}_2''' - \underline{c}_2^{(4)}) \delta_1^2.$$

Avec ces choix de  $\underline{c}_0, \underline{c}_1$  et  $\underline{c}_2$  on trouve bien alors que

$$p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1] \quad \text{pour tous } a \in [0, \underline{c}_0 \delta_1^2 \varepsilon^2], r^2 \in [\underline{c}_1' \delta_1^2 \varepsilon^2, \underline{c}_2' \delta_1^2 \varepsilon^2].$$

□

**Lemme 7.5** *Il existe  $c_0, c_1, c_2$  avec  $c_1, c_2 \leq c$  et  $m, M > 0$  tels que pour tout  $a \in [0, c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2]$  et tout  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]$  et pour  $\varepsilon$  suffisamment petit on ait*

$$-\frac{M}{\varepsilon^3} \leq \frac{\partial \Theta}{\partial r}(r, a, \nu) \leq -\frac{m}{\varepsilon^3}.$$

De plus, il existe alors  $\underline{c}_1, \underline{c}_2$  tels que sur cet ensemble on ait

$$p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, \theta, a) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1]. \quad (7.2)$$

### Démonstration

La première inégalité de l'encadrement se déduit en fait du lemme 7.2 pour  $k = 1$ .

Pour la 2e inégalité, on commence comme dans la démonstration du lemme 7.2 par écrire

$$\begin{aligned} \Theta(r, a, \varepsilon) &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_0^{T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))} \partial_2 N_n((\phi_{q_1} + \phi_{p_1})(s, (\delta_1, p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0), \varepsilon), r, \varepsilon) ds, \\ &:= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathcal{F} \left( T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)), p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, \varepsilon \right), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{F}$  et  $T$  applications  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à leurs coefficients, et

$$p_{1 \underline{\varepsilon}'}^H(q_2, p_2, a) = \tilde{p}_1^H(q_2, p_2, \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(q_2^2 + p_2^2, a), \underline{\varepsilon}')$$

avec  $\tilde{p}_1^H$  analytique en ses variables  $(q_2, p_2, h, \underline{\varepsilon}')$ . On réécrit alors cette égalité

$$\Theta(r, a, \varepsilon) = \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) + \varepsilon^2 \tilde{\mathcal{F}} \left( \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon \right).$$

En dérivant par rapport à  $r$  on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Theta}{\partial r}(r, a, \varepsilon) \\ &= \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial p_1} (p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \left( \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}}{\partial r}(r^2, a) + \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial r}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \right) \\ &\quad + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial r} (p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial h}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon) \left( \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r \right) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial r}(\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}(r^2, a), r, \varepsilon) \right), \end{aligned}$$

où on va montrer que avec un bon choix de paramètres on a

$$\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial p_1}(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{h}_{\varepsilon'}}{\partial r}(r^2, a) \leq -\frac{m}{\varepsilon^3}, \quad (7.3)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial p_1}(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial r}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ & + \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial r}(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \\ & + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial h}(\tilde{h}_{\varepsilon'}(r^2, a), r, \varepsilon) \left( \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r \right) + \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial r}(\tilde{h}_{\varepsilon'}(r^2, a), r, \varepsilon) \right) \\ & = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Ce qui sera suffisant pour conclure pour  $\varepsilon$  suffisamment petit.

Pour montrer (7.3), on utilise les résultats des Lemmes 7.3 et 7.4. On a

$$T((q_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, 0, 0)) = T^0(p_1) \xrightarrow{p_1 \rightarrow p_1(\delta_1)} +\infty,$$

et  $T$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à  $p_1$ . Nécessairement, pour  $p_1 > p_1(\delta_1)$  aussi proche de  $p_1(\delta_1)$  qu'on le veut, on trouvera toujours un petit intervalle tel que  $\frac{\partial T}{\partial p_1} < 0$  sur cet intervalle. On peut donc trouver un intervalle de la forme  $[\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1]$  tel que sur cet intervalle,

$$\frac{\partial T^0}{\partial p_1} \leq -2m < 0.$$

Comme  $T$  est  $\mathcal{C}^1$  par rapport à toutes ses variables on a pour  $\varepsilon, \mu$  assez petits

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}(p_1, q_2, p_2, \varepsilon) \leq -m < 0 \text{ pour tout } p_1 \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1].$$

On pourra donc appliquer cette inégalité pour montrer (7.3) si on s'assure que

$$p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1].$$

Or d'après le lemme 7.4, on peut trouver  $c_0, c_1$  et  $c_2$  tels que

$$p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a) \in [\underline{c}_1 \delta_1, \underline{c}_2 \delta_1] \text{ pour tous } a \in [0, c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2], r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2].$$

On obtient alors que pour  $a \in [0, c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2]$  et  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]$ , on a

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}(p_{1(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \leq -m < 0.$$

Or, d'après le "de plus" du Lemme 7.4, on a

$$\frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \geq \frac{1}{2\delta_1} > 0.$$

Et on sait aussi que pour  $r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]$ ,

$$\frac{\partial \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}}{\partial r}(r^2, a) = 2 \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} r \geq \sqrt{c_1} \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} \delta_1 > 0.$$

On en déduit alors que pour  $a \in [0, c_0\delta_1^2\varepsilon^2]$  et  $r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]$ , on a

$$\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \frac{\partial T}{\partial p_1}(p_1^H(r, 0, a), r, 0, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial h}(r, 0, a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) \frac{\partial \tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}}{\partial r}(r^2, a) \leq -\frac{m\omega(\varepsilon)^2 \sqrt{c_1}}{\sqrt{\nu^3}}.$$

Ce qui permet de conclure la preuve de la majoration (7.3).

Il ne reste plus qu'à montrer (7.4). Or les applications

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial \tilde{p}_1^H}{\partial r}, \frac{\partial T}{\partial r}, \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial h}, \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial r},$$

sont continues par rapport à leurs variables. Et par le Lemme 7.4, on sait que pour le choix ci-dessus de  $c_0, c_1$  et  $c_2$  on a  $p_1^H$  et  $\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}'}$  bornées pour

$$a \leq c_0\delta_1^2\varepsilon^2 \quad \text{et} \quad r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2].$$

Donc tout est borné dans la somme de termes considérée dans (7.4), sauf la fraction  $\frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}$ . Cette somme est donc bien un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ , *i.e.* (7.4) est vérifié, ce qui permet de conclure la démonstration.  $\square$

## 7.2 Majoration $\mathcal{C}^k$ de $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a$

Le théorème KAM de [51] est énoncé en coordonnées polaires, et parmi ses hypothèses on a des majorations des dérivées multiples de  $\Psi^a$ . Le lemme suivant donne une majoration des dérivées de l'écriture en polaires  $(\Psi_\theta^a(\theta, r), \Psi_r^a(\theta, r))$  de  $\Psi^a$ , en fonction des dérivées de

$$\Psi^a = (\Psi_{q_2}^a(q_2, p_2), \Psi_{p_2}^a(q_2, p_2)).$$

Cela est possible grâce au fait qu'on travaille sur l'anneau

$$\{(q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\},$$

et donc à distance connue de 0.

**Lemme 7.6** *Si  $(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')$  est dans l'ensemble de définition de  $\Psi$  et  $c_1\delta_1^2\varepsilon^2 \leq q_2^2 + p_2^2 \leq c_2\delta_1^2\varepsilon^2$ , alors*

$$\Psi_{(q_2, p_2)}(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') = \Psi_r(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') R_{\Psi_\theta(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')},$$

où  $\Psi_r$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes ses variables. Et sur le tore  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  on a

$$\Psi_\theta(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') \equiv \frac{\omega(\nu)}{\nu} T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') + \tilde{\phi}_\theta(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}'), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}'),$$

avec  $T$  et  $\tilde{\phi}_\theta$   $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes leurs variables pour  $\varepsilon > 0$ . Et il existe  $M$  tel que pour toute variable générique  $x$  de  $\tilde{\phi}$ ,

$$\left| \partial_x^j \tilde{\phi}_\theta \right| \leq \frac{M}{\varepsilon^j} \left( \sum_{k=0}^j |\partial_x^k \tilde{\phi}_{q_2}| + |\partial_x^k \tilde{\phi}_{p_2}| \right).$$

### Démonstration

Grâce à la majoration (5.12) de la Proposition 5.3, on sait qu'il existe  $M$  tel que si  $(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')$  est dans l'ensemble de définition de  $\Psi$  et si  $(q_2, p_2)$  est dans l'anneau  $\{(q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\}$  alors

$$\Psi(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') \in \{(q_1, p_1, q_2, p_2)/q_2^2 + p_2^2 \in [(c_1\delta_1^2 - M\delta_1^3)\varepsilon^2, (c_2\delta_1^2 + M\delta_1^3)\varepsilon^2]\}. \quad (7.5)$$

Ce qui signifie qu'en choisissant  $\varepsilon$  assez petit par rapport à  $c_1$ ,  $\Psi$  est à image à distance de sécurité de 0, ce qui va permettre l'écriture en coordonnées polaires. Plus précisément on pose

$$\Psi_r(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') := \sqrt{\Psi_{q_2}(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')^2 + \Psi_{p_2}(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')^2}.$$

Comme  $\Psi$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  et  $\Psi$  ne s'annule pas pour  $c_1\delta_1^2\varepsilon^2 \leq q_2^2 + p_2^2 \leq c_2\delta_1^2\varepsilon^2$ , sur cet anneau  $\Psi_r$  est donc aussi  $\mathcal{C}^{k_0}$ .

Ensuite, comme

$$\Psi(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') = R_{\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon^2}T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}')} \tilde{\phi}(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}'), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}'),$$

on écrit dans le tore

$$\Psi_\theta \equiv \frac{\omega(\nu)}{\nu} T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}') + \tilde{\phi}_\theta(T(p_1, q_2, p_2, \underline{\varepsilon}'), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), \underline{\varepsilon}'),$$

où  $\tilde{\phi}_\theta$  est défini par

$$\frac{\tilde{\phi}_{q_2} + i\tilde{\phi}_{p_2}}{\tilde{\phi}_r} = e^{i\tilde{\phi}_\theta}.$$

On déduit de cette formule que si  $x$  est une variable de  $\tilde{\phi}$ , alors

$$\partial_x \tilde{\phi}_\theta = (-i) \left( \frac{\partial_x(\tilde{\phi}_{q_2} + i\tilde{\phi}_{p_2})}{\tilde{\phi}_{q_2} + i\tilde{\phi}_{p_2}} - \frac{\partial_x \tilde{\phi}_r}{\tilde{\phi}_r} \right). \quad (7.6)$$

Or, d'après (7.5), on a sur l'ensemble de définition de  $\Psi$  pour  $q_2^2 + p_2^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]$ ,

$$|\tilde{\phi}_{q_2} + i\tilde{\phi}_{p_2}|^2 = |\tilde{\phi}_r|^2 = \tilde{\phi}_{q_2}^2 + \tilde{\phi}_{p_2}^2 \geq (c_1 - M\delta_1)\delta_1^2\varepsilon^2,$$

et donc

$$\left| \partial_x \tilde{\phi}_\theta \right| \leq \frac{1}{\sqrt{(c_1 - M\delta_1)\delta_1^2\varepsilon^2}} \left( |\partial_x \tilde{\phi}_{q_2}| + |\partial_x \tilde{\phi}_{p_2}| \right).$$

En dérivant l'égalité (7.6), on obtient ensuite les majorations annoncées pour les dérivées successives de  $\tilde{\phi}_\theta$ . □

Pour majorer  $\left| \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a \right|_{\mathcal{C}^k}$ , on aurait aimé utiliser une majoration de  $\frac{\partial \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a}{\partial \mu}$  et un théorème des accroissements finis. Seulement, dans l'expression de  $\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a$ , on a la régularité en  $\mu$  sauf dans

$$\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) = \frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon} r^2 - H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)).$$

En effet, par définition  $P_{\underline{\varepsilon}}^a := \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\mathcal{C}^a)$  et la régularité de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} = \mathcal{F}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}$  par rapport à  $\mu$  est inconnue. On va utiliser alors à la place le fait que, comme on va le montrer plus loin,

$$|\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) - \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a)| = |H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) - H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))| \leq Ma^2.$$

C'est pourquoi on va devoir faire une hypothèse sur la taille de  $a$  par rapport à  $\varepsilon$ .

**Lemme 7.7** *Pour  $a, \varepsilon, \mu$  assez petits, pour  $0 \leq k \leq k_0$ ,*

$$\begin{aligned} |\Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) - \Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))|_{\mathcal{C}^k} &\leq \left(a^2 + \frac{\mu}{\varepsilon^k}\right) M, \\ |\Psi_\theta^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) - \Psi_\theta^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))|_{\mathcal{C}^k} &\leq \left(\frac{a^2}{\varepsilon^{k+2}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{k+1}}\right) M. \end{aligned}$$

### Démonstration

On va utiliser  $\frac{\partial}{\partial \mu}$  avec le théorème des accroissements finis là où ce sera possible. Et aux endroits où on ne pourra pas, on utilisera à la place  $\frac{\partial}{\partial h}$ , avec le théorème des accroissements finis et une majoration de  $|\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) - \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a)|$ .

Majorons donc tout d'abord  $|\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) - \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a)|$ . On utilise pour cela le Lemme 6.1 (vrai pour  $a < a_0$  et  $\varepsilon, \mu$  assez petits) :

$$\begin{aligned} &|\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) - \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a)| = \left|H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) - H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))\right| \\ &= \left|H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0)) - \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}a - (H(P_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) - \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2}a)\right| \leq \mathcal{M}_0 a^2. \end{aligned}$$

On a

$$\Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) = \Psi_r \left( \tilde{p}_1^H(r \cos \theta, r \sin \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)), r \cos \theta, r \sin \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu) \right)$$

avec  $\Psi_r$  et  $\tilde{p}_1^H \mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes leurs variables. On note alors

$$\Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) := \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)),$$

où  $\tilde{\Psi}_r^a$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes ses variables pour  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]$  et  $a \leq c_0 \delta_1^2 \varepsilon^2$  (ce qui implique aussi  $\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}$  bornée,  $\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) \in [\underline{c}_1'' \delta_1^2, \underline{c}_2'' \delta_1^2]$ , cf lemme 7.4). On peut alors montrer par récurrence sur  $\ell$  que

$$\frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j}$$

est une somme finie de termes de la forme

$$\frac{\partial^{i+j+k} \tilde{\Psi}_r^a}{\partial r^i \partial \theta^j \partial \theta^k}(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) \left( \frac{\partial \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a)}{\partial r} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial^\ell \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a)}{\partial r^\ell} \right)^{n_\ell}$$

où  $i + j \leq \ell$  et  $n_1 + 2n_2 + \dots + \ell n_\ell \leq \ell$ . Et on cherche à majorer

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} - \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right| \\
& \leq \left| \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} - \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right| \\
& \quad + \left| \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} - \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right| \\
& \leq \sup_{\substack{r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2] \\ h \in [\underline{c}'_1 \delta_1^2, \underline{c}'_2 \delta_1^2]}} \left| \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, h, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right) \right| |\tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a) - \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}(r^2, a)| \\
& \quad + \sup_{\substack{r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2] \\ h \in [\underline{c}'_1 \delta_1^2, \underline{c}'_2 \delta_1^2]}} \left| \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\nu, \nu, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right) \right| \cdot \mu.
\end{aligned}$$

Et on a

$$\sup_{\substack{r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2] \\ h \in [\underline{c}'_1 \delta_1^2, \underline{c}'_2 \delta_1^2]}} \left| \frac{\partial}{\partial h} \left( \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, h, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right) \right| \leq M,$$

pour  $\ell + j + 1 \leq k_0$  car  $\tilde{\Psi}^a$  est  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à ses variables. Et

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial^{\ell+k} \tilde{\Psi}_r^a(r, \theta, \tilde{h}_{(\nu, \nu, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))}{\partial r^\ell \partial \theta^j} \right) \right| \\
& \leq M \left| \frac{\partial}{\partial \mu} \sum_{\substack{i+j \leq \ell \\ n_1 + \dots + \ell n_\ell \leq \ell}} \frac{\partial^{i+j+k} \tilde{\Psi}_r^a}{\partial r^i \partial h^j \partial \theta^k}(r, \theta, \tilde{h}_{(\nu, \nu, 0)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) \left( \frac{\partial \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a)}{\partial r} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{\partial^\ell \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a)}{\partial r^\ell} \right)^{n_\ell} \right| \\
& \leq M \sum_{n_1 + \dots + \ell n_\ell \leq \ell} \left( \frac{M}{\varepsilon} \right)^{n_1} \dots \left( \frac{M}{\varepsilon^\ell} \right)^{n_\ell} \leq \frac{M'}{\varepsilon^\ell}.
\end{aligned}$$

On trouve donc bien finalement

$$|\Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) - \Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))|_{\mathcal{C}^\ell} \leq \left( a^2 + \frac{\mu}{\varepsilon^\ell} \right) M.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned}
& \Psi_\theta^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) \\
& = \Psi_\theta \left( \tilde{p}_1^H(r \cos \theta, r \sin \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)), r \cos \theta, r \sin \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu) \right) \\
& = \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} T(\tilde{p}_1^H(r \cos \theta, r \sin \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)), q_2, p_2, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) \\
& + \tilde{\varphi}_\theta(T(\tilde{p}_1^H(r \cos \theta, r \sin \theta, \tilde{h}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}(r^2, a), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)), q_2, p_2, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)), (\delta_1, p_1, q_2, p_2), (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))
\end{aligned}$$

où on a  $T$  et  $\tilde{p}_1^H \mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes leurs variables et les dérivées de  $\tilde{\phi}_\theta$  sont contrôlées par celles de  $\tilde{\phi}_{q_2}$  et  $\tilde{\phi}_{p_2}$  (cf lemme 7.6) qui sont  $\mathcal{C}^{k_0}$  par rapport à toutes leurs variables. En faisant le même raisonnement que pour  $\Psi_r^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))$ , on trouve cette fois

$$\begin{aligned} & |\Psi_\theta^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)) - \Psi_\theta^a(r, \theta, (\varepsilon, \varepsilon^2, 0))|_{\mathcal{C}^\ell} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} M \cdot \left( a^2 + \frac{\mu}{\varepsilon^\ell} \right) + \frac{1}{\sqrt{D}^\ell} M \cdot \left( a^2 + \frac{\mu}{\varepsilon^\ell} \right), \\ & \leq M' \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon^{\ell+2}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{2\ell+2}} \right). \end{aligned}$$

□

### 7.3 Changement de coordonnées, démonstration de (ii), (iii) et (iv) de la Proposition 3.8

#### Changement de coordonnées

Soit

$$\bar{\varepsilon} := \frac{1}{\left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil}, \quad (7.7)$$

où  $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} \right\rceil$  désigne la partie entière de  $\frac{1}{\varepsilon^2}$ . On fait le changement de coordonnées :

$$(\theta, r) := \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q, \sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho \right), \quad q \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \rho^2 \in \frac{\varepsilon^2}{\bar{\varepsilon}} [c_1 \delta_1^2, c_1 \delta_1^2].$$

On vérifie qu'on a

$$1 - \varepsilon^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{\bar{\varepsilon}} \leq 1.$$

Appelons  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  l'application  $\Psi_{\bar{\varepsilon}}^a$  dans les nouvelles coordonnées.  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  est alors bien définie pour  $\rho^2 \in [c_1 \delta_1^2, (1 - \varepsilon^2) c_2 \delta_1^2]$ , *i.e.* pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  est définie sur un segment

$$\rho^2 \in [c_1 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2],$$

indépendant de  $\varepsilon$ .

On a

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a(q, \rho) &= \left( (\hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a)_q(q, \rho), (\hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a)_r(q, \rho) \right) \\ &= \left( q + \bar{\varepsilon} \Theta(\sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho, a, \varepsilon) + \bar{\varepsilon} (\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a) \theta \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q, \sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho \right), \right. \\ & \quad \left. \rho + \frac{1}{\sqrt{\bar{\varepsilon}}} (\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a) \theta \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q, \sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho \right) \right), \end{aligned}$$

qu'on note

$$\hat{\Psi}_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a(q, \rho) := \left( q + \alpha_\varepsilon^a(q, \rho) + F_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a(q, \rho), r + G_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a(q, \rho) \right).$$



**Démonstration du (ii) de la Proposition 3.8**

On a

$$\frac{\partial \alpha_\varepsilon^a}{\partial \rho} = \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \Theta}{\partial r}(\sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho, a, \varepsilon).$$

Rappelons que  $d_1$  a été défini tel que pour  $\varepsilon$  assez petit on ait

$$\rho^2 \in [c_1 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2] \Rightarrow r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2].$$

Ainsi, l'encadrement du lemme 7.5 s'applique ici, et on obtient que pour  $\rho^2 \in [c_1 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2]$ ,

$$-\frac{M}{\varepsilon^3} \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\varepsilon}} \leq \frac{\partial \alpha_\varepsilon^a}{\partial \rho} \leq -\frac{m}{\varepsilon^3} \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\varepsilon}}.$$

Or, avec la définition (7.7) de  $\bar{\varepsilon}$ , on a

$$1 \leq \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon^2} \leq 2 \quad \text{dès que } \varepsilon^2 \leq \frac{1}{2}.$$

On trouve donc

$$-2\sqrt{2}M \leq \frac{\partial \alpha_\varepsilon^a}{\partial \rho} \leq -m.$$

On obtient donc le résultat (ii) en choisissant

$$m_0 \geq \max(2\sqrt{2}M, \frac{1}{m}).$$

**Démonstration du (iii) de la Proposition 3.8**

On utilise d'abord le lemme 7.2 pour majorer  $|\alpha_\varepsilon^a|_{C^k}$ . Il s'applique bien car si  $\rho^2 \in [c_1 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2]$ , alors  $r^2 \in [c_1 \delta_1^2 \varepsilon^2, c_2 \delta_1^2 \varepsilon^2]$ . On a alors pour tout  $k \leq k_0$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^k \alpha_\varepsilon^a}{\partial \rho^k}(q, \rho) \right| &= \left| \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\varepsilon}}^k \frac{\partial \Theta}{\partial r}(\sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho, a, \varepsilon) \right| \\ &\leq \bar{\varepsilon} \sqrt{\bar{\varepsilon}}^k \frac{M}{\varepsilon^{k+2}} \leq \sqrt{2}^k M \quad \text{pour } \varepsilon \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Démonstration du (iv) de la Proposition 3.8**

On utilise ensuite le Lemme 7.7 pour majorer  $\left| F_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a \right|_{C^k}$  et  $\left| G_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a \right|_{C^k}$ . On a pour tous  $i, j$  tels que  $i + j \leq k$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{i+j} F_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a}{\partial q^i \partial \rho^j}(q, \rho) \right| &= \bar{\varepsilon} \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}}^j}{\bar{\varepsilon}^i} \left| \frac{\partial^{i+j} (\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a) \theta}{\partial \theta^i \partial r^j} \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q, \sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho \right) \right|, \\ &\leq \bar{\varepsilon} \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}}^j}{\bar{\varepsilon}^i} M \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon^{i+j+2}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{2(i+j+1)}} \right), \\ &\leq M \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon^{3k}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{6k}} \right); \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^{i+j} G_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a}{\partial q^i \partial \rho^j}(q, \rho) \right| &= \bar{\varepsilon} \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}}^j}{\bar{\varepsilon}^i} \left| \frac{\partial^{i+j} (\Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a - \Psi_{(\varepsilon, \varepsilon^2, 0)}^a)_r}{\partial \theta^i \partial r^j} \left( \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q, \sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho \right) \right|, \\
&\leq \bar{\varepsilon} \frac{\sqrt{\bar{\varepsilon}}^j}{\bar{\varepsilon}^i} M \cdot \left( a^2 + \frac{\mu}{\varepsilon^{i+j}} \right), \\
&\leq M \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon^{2k-2}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{6k-4}} \right).
\end{aligned}$$

On obtient bien alors que pour tout  $0 \leq k \leq k_0 - 1$ ,

$$\left| F_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a \right|_{\mathcal{C}^k} + \left| G_{(\varepsilon, \varepsilon^2, \mu)}^a \right|_{\mathcal{C}^k} \leq M \cdot \left( \frac{a^2}{\varepsilon^{3k}} + \frac{\mu}{\varepsilon^{6k}} \right).$$

□

#### 7.4 Les applications $\hat{\Psi}^a$ sont exactes

Pour appliquer le théorème KAM, on a besoin aussi de savoir que les  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  sont des applications exactes. Pour cela, on commence par montrer que ces applications conservent les aires ; une fois qu'on le sait, le résultat du lemme 7.9 suivant suffit pour conclure que l'application est exacte.

**Lemme 7.8** *L'application  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  conserve l'aire.*

##### Démonstration

$\Psi_{\bar{\varepsilon}}^a$  est symplectique car c'est une application de premier retour associée au flot d'un système Hamiltonien. Pour vérifier que  $\hat{\Psi}_{\bar{\varepsilon}}^a$  est aussi symplectique, il suffit de s'assurer que le changement de coordonnées

$$\varphi : (\rho, q) \mapsto (\sqrt{\bar{\varepsilon}} \rho, \frac{1}{\bar{\varepsilon}} q)$$

est une transformation canonique. On connaît la définition de la forme symplectique  $\Omega$  en coordonnées  $(q_2, p_2)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit alors

$$P : (\rho, q) \mapsto (\rho \cos q, \rho \sin q).$$

Pour montrer que  $\varphi$  est canonique, il suffit de montrer que pour tout  $(q_2, p_2)$  on a

$${}^t D(P \circ \varphi \circ P^{-1})(q_2, p_2) \Omega D(P \circ \varphi \circ P^{-1})(q_2, p_2) = \Omega, \tag{7.8}$$

où

$$D(P \circ \varphi \circ P^{-1})(q_2, p_2) = DP(\varphi(P^{-1}(q_2, p_2))) D\varphi(P^{-1}(q_2, p_2)) DP^{-1}(q_2, p_2).$$

Et on a

$${}^t DP(q_2, p_2) \Omega DP(q_2, p_2) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

On a donc (7.8) si et seulement si

$$\begin{aligned}
{}^t D\varphi(P^{-1}(q_2, p_2)) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix} D\varphi(P^{-1}(q_2, p_2)) &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix}, \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\frac{\sqrt{\varepsilon^2}}{\varepsilon} \sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{q_2^2 + p_2^2} \\ -\sqrt{q_2^2 + p_2^2} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Donc  $\varphi$  est bien un changement de coordonnées canonique, et donc  $\hat{\Psi}_{\varepsilon}^a$  conserve l'aire.  $\square$

**Lemme 7.9** Soit  $\Delta > 0$  fixé.

Pour  $\varepsilon$  assez petit par rapport à  $\Delta$ , toute courbe de Jordan  $\mathcal{C}$  incluse dans l'anneau

$$\{(q, \rho)/\rho^2 \in [c_1^2 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2]\}$$

et de la forme

$$\mathcal{C} = \{(q, \rho), \rho = f(q)\} \quad \text{avec pour tout } q \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, |f'(q)| \leq \Delta,$$

intersecte son image  $\hat{\Psi}_{\varepsilon}^a(\mathcal{C})$  (voir Figure 2.21).

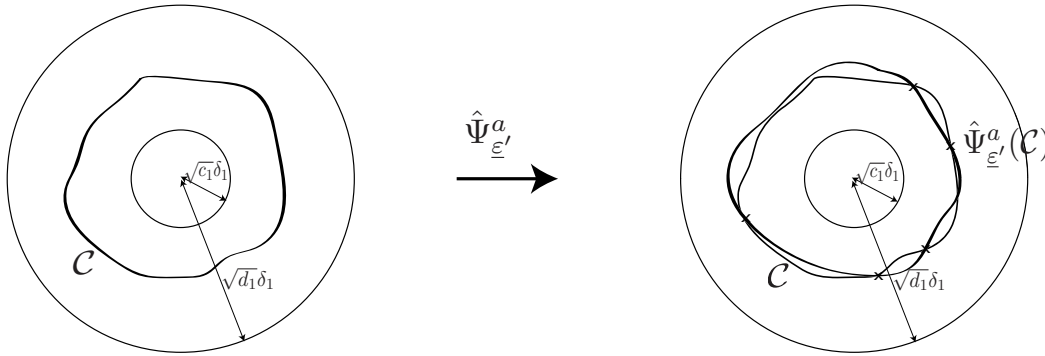


FIGURE 2.21 – Image d'une courbe  $\mathcal{C}$  par  $\hat{\Psi}_{\varepsilon}^a$ .

**Démonstration d'une majoration préliminaire pour l'application  $\Psi_{\varepsilon}^a$**

On commence par montrer que dans l'anneau  $\{(q, \rho)/\rho^2 \in [c_1^2 \delta_1^2, d_1 \delta_1^2]\}$ , la différence entre  $r$  et  $\Psi_{\varepsilon}^a(\cdot, r)$  est très petite. Cela permettra de situer l'image de  $\mathcal{C}$  dans un tube très fin autour de  $\mathcal{C}$ , ce qui sera un premier pas. Pour le montrer, on revient à la définition de  $\Psi$  et on utilise 2 résultats :

- (i) dans les variables  $(q_2, p_2)$ , on sait que dans  $\mathcal{B}(0, \rho_0)$  on a le long du flot de  $H(\cdot, (\varepsilon, \varepsilon^2, \mu))$ ,

$$\left| \frac{d(q_2^2 + p_2^2)}{dt} \right| \leq M \mu \varepsilon^{N_0+2}$$

(ii) on va montrer que sur l'anneau  $\{(\theta, r)/r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\}$ , le temps de premier retour  $T$  est borné.

Avec ces 2 résultats, on obtiendra que

$$|(\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_{q_2}(q_2, p_2, a)^2 + (\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_{p_2}(q_2, p_2, a)^2 - (q_2^2 + p_2^2)| \leq M\mu\varepsilon^{N_0+2}(\text{Sup}|T|) \leq M'\mu\varepsilon^{N_0+1}.$$

Et donc, en coordonnées polaires

$$\begin{aligned} & |(\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_r(r, \theta, a)^2 - r^2| \leq M'\mu\varepsilon^{N_0+2}. \\ \Leftrightarrow & |(\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_r(r, \theta, a) - r| |(\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_r(r, \theta, a) + r| \leq M'\mu\varepsilon^{N_0+2}. \end{aligned}$$

Et donc, comme  $r \geq \sqrt{c_1}\delta_1\varepsilon$ ,

$$|(\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_r(r, \theta, a) - r| \leq M''\mu\varepsilon^{N_0+1}.$$

Enfin, dans les coordonnées  $(q, \rho)$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left| (\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a)_\rho\left(\frac{1}{\underline{\varepsilon}}q, \sqrt{\underline{\varepsilon}}\rho\right) - \sqrt{\underline{\varepsilon}}\rho \right| \leq M''\mu\varepsilon^{N_0+1} \\ \Leftrightarrow & \left| \sqrt{\underline{\varepsilon}}(\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a)_r(q, \rho) - \sqrt{\underline{\varepsilon}}\rho \right| \leq M''\mu\varepsilon^{N_0+1}, \\ \Leftrightarrow & \left| (\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a)_\rho(q, \rho) - \rho \right| \leq M''\mu\varepsilon^{N_0}, \end{aligned} \tag{7.9}$$

et ce pour tout  $(q, \rho)$  dans  $\{(q, \rho)/\rho^2 \in [c_1\delta_1^2, d_1\delta_1^2]\}$  par définition de  $d_1$ .

Pour obtenir cette estimation, il ne reste donc plus qu'à montrer que  $T$  est borné sur l'anneau  $\{(\theta, r)/r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\}$ . Et ce résultat vient de la régularité de  $T(p_1, q_1, p_2, \underline{\varepsilon})$ , continu sur son ensemble de définition, et du fait qu'on a choisi  $c_1$  et  $c_2$  dans le lemme 7.5 de manière à avoir  $p_1$  borné (intuitivement, cela signifie que  $T$  reste borné car on s'est placés avec  $c_1, c_2$  à distance de sécurité de la variété stable). Donc  $T(p_1, q_1, p_2, \underline{\varepsilon})$  reste borné dans l'anneau  $\{(\theta, r)/r^2 \in [c_1\delta_1^2\varepsilon^2, c_2\delta_1^2\varepsilon^2]\}$ . Ce qui clot la démonstration de la majoration (7.9).

### Démonstration du Lemme 7.9

Soit donc  $\mathcal{C}$  une courbe telle que donnée dans l'énoncé. D'après (7.9),  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$  est alors dans le tube de largeur  $2M''\mu\varepsilon^{N_0}$  autour de  $\mathcal{C}$  (voir Figure 2.22)

$$\{(q, \rho), \rho \in [f(q) - M''\mu\varepsilon^{N_0}, f(q) + M''\mu\varepsilon^{N_0}]\}.$$

L'aire de ce tube est majorée par  $2M''\mu\varepsilon^{N_0}$ .(longueur de la courbe  $\mathcal{C}$ ). Or la longueur de  $\mathcal{C}$  est

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{f'(q)^2 + f(q)^2} dq \leq 2\pi(\Delta + \sqrt{d_1}).$$

On utilise maintenant le fait que  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a$  conserve l'aire (cf Lemme 7.8). Par l'absurde : supposons que  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} = \emptyset$ . Comme  $\mathcal{C}$  est une courbe de Jordan,  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$  l'est aussi, et donc ces 2 courbes ont un intérieur et un extérieur. Comme  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$  et  $\mathcal{C}$  ont la même aire, l'une ne peut être strictement à l'intérieur de l'autre. La seule possibilité est alors que  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$

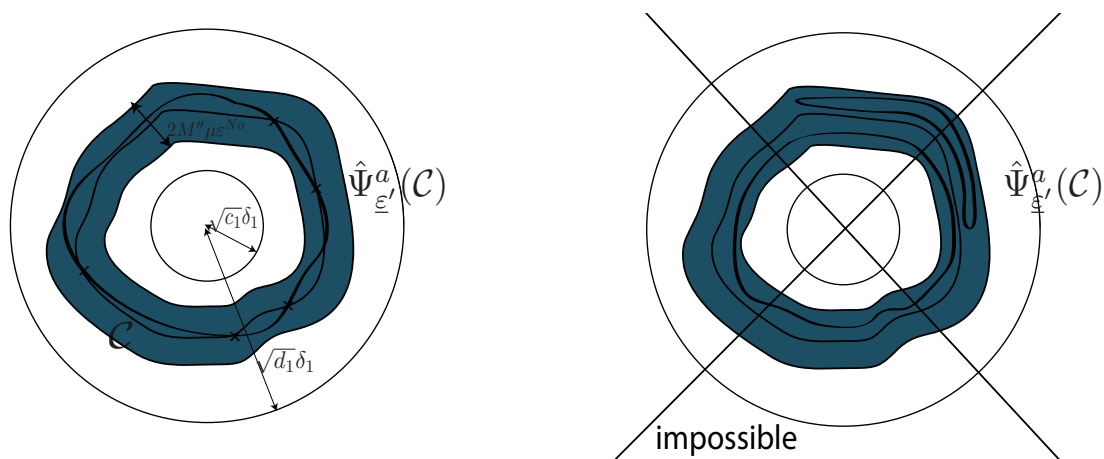


FIGURE 2.22 – Image d’une courbe  $\mathcal{C}$  par  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a$ .

ainsi que son intérieur soit entièrement à l’extérieur de  $\mathcal{C}$ . Ainsi l’intérieur de  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$  est inclus dans le tube

$$\{(q, \rho), \rho \in [f(q), f(q) + M'' \mu \varepsilon^{N\sigma}]\}.$$

Or l’aire de  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$ , qui est la même que celle de  $\mathcal{C}$ , est supérieure à  $\pi c_1$ . Pour  $\mu, \varepsilon$  assez petits par rapport à  $c_1, d_1$  et  $\Delta$ , l’aire du tube est inférieure à celle de  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C})$ , et on a donc une absurdité. D’où finalement  $\hat{\Psi}_{\underline{\varepsilon}}^a(\mathcal{C}) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ .  $\square$

## A Annexe. Démonstration du Théorème 2.3

Cette annexe est consacrée à la démonstration du théorème 2.3. On procède en plusieurs étapes.

### Étape 0 : changement de coordonnées.

Soit  $\mathcal{U}_\Lambda$  un ouvert d'un espace de Banach  $\Lambda$ , avec  $0 \in \mathcal{U}_\Lambda$ . Soit  $\mathcal{H}_\lambda$  une  $C^1$ -famille à 1 paramètre  $\lambda \in \mathcal{U}_\Lambda$  de Hamiltoniens  $C^k$  (resp. analytiques et dans  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho), \mathbb{R})$ ) vérifiant  $D_x \mathcal{H}_\lambda(0) = 0$ . Pour  $n \leq k - 1$  (resp. pour  $n \in \mathbb{N}$ ) on écrit le développement de Taylor de degré  $n$  de  $\mathcal{H}_\lambda$ ,

$$\mathcal{H}_\lambda(x) := \sum_{\ell=2}^n \mathcal{H}_{\ell,\lambda}(x) + \mathcal{R}_{\ell,\lambda}(x),$$

où  $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$  est un polynôme homogène de degré  $\ell$ ,  $\mathcal{R}_{\ell,\lambda}$  est un  $\mathcal{O}(|x|^{n+1})$  et a la régularité de  $\mathcal{H}$  par rapport à  $x$ , et  $\mathcal{H}_{\ell,\lambda}$ ,  $\mathcal{R}_{\ell,\lambda}$  sont de régularité  $C^1$  par rapport à  $\lambda$ . On note de plus

$$\mathcal{H}_{2,\lambda}^1(x) := \mathcal{H}_{2,\lambda}(x) - \mathcal{H}_{2,0}(x).$$

On cherche un changement de coordonnées canonique  $x = \phi_{n,\lambda}(\tilde{x})$  tel que le développement de Taylor pour le nouveau Hamiltonien soit le plus simple possible, *i.e.* avec le moins de monômes possible. On cherche une telle transformation canonique en utilisant une fonction génératrice de la forme

$$S_\lambda(q, \tilde{p}) = \langle q, \tilde{p} \rangle + S_{2,\lambda}^1(q, \tilde{p}) + \sum_{\ell=3}^n S_{\ell,\lambda}(q, \tilde{p}), \quad (\text{A.1})$$

où  $x = (q, p)$  et  $\tilde{x} = (\tilde{q}, \tilde{p})$  et  $S_{2,\lambda}^1, S_{\ell,\lambda}$  sont respectivement des polynômes homogènes de degré 2 et  $\ell$  tels que  $S_{2,0}^1 \equiv 0$ . Alors (A.1) génère une transformations canonique analytique  $x = \phi_{n,\lambda}(\tilde{x})$  proche de l'identité telle que

$$p = \nabla_q S_\lambda(q, \tilde{p}), \quad \tilde{q} = \nabla_{\tilde{p}} S_\lambda(q, \tilde{p}). \quad (\text{A.2})$$

Et après ce changement de coordonnées, le nouveau Hamiltonien devient

$$\tilde{\mathcal{H}}_\lambda(\tilde{q}, \tilde{p}) = \mathcal{H}_\lambda(\phi_{n,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p})) = \sum_{\ell=2}^n \tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p}) + \tilde{\mathcal{R}}_{\ell,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p}),$$

où  $\tilde{\mathcal{R}}_{\ell,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p})$  est un  $\mathcal{O}((|\tilde{q}| + |\tilde{p}|)^{n+1})$  et a la régularité de  $\mathcal{H}_\lambda$ . De plus, on a l'égalité

$$\tilde{\mathcal{H}}_\lambda(\nabla_{\tilde{p}} S_\lambda(q, \tilde{p}), \tilde{p}) = \mathcal{H}_\lambda(q, \nabla_q S_\lambda(q, \tilde{p})). \quad (\text{A.3})$$

### Étape 1 : régularité en $\lambda$ de la famille $\phi_{n,\lambda}$ si existence de la famille de fonctions génératrice.

Pour  $n$  fixé,  $\phi_{n,\lambda}$  est une famille de fonctions analytiques. Montrons que si  $S_\lambda$  est une famille de polynômes à coefficients  $C^1$ , alors pour  $\rho$  assez petit, cette famille est  $C^1$  en  $\lambda$  sur le Banach des fonctions analytiques bornées sur  $\mathcal{B}(0, \rho)$  pour la norme  $\|f\|_{\mathcal{A}} := \text{Sup}\{f(x), x \in \mathcal{B}(0, \rho)\}$ .

Pour cela, on construit la famille  $\phi_{n,\lambda} := (\varphi_{n,\lambda}, \psi_{n,\lambda})$  en utilisant (A.2). On obtient le système :

$$\psi_{n,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p}) = \nabla_q S_\lambda(\varphi_{n,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p}), \tilde{p}) \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{q} = \nabla_{\tilde{p}} S_\lambda(\varphi_{n,\lambda}(\tilde{q}, \tilde{p}), \tilde{p}), \quad (\text{A.5})$$

où (A.5) va nous permettre de construire  $\varphi_{n,\lambda}$  par théorème des fonctions implicites et ensuite il suffira d'utiliser (A.4) pour avoir la valeur de  $\psi_{n,\lambda}$ . Montrons donc qu'avec l'équation (A.5) on peut bien obtenir la régularité annoncée. Pour cela on procède en 2 temps :

- on applique d'abord le théorème des fonctions implicites sur l'équation (A.5) prise en  $\lambda = 0$  (qu'on ne fait pas varier), au voisinage du point  $(\varphi, \tilde{q}, \tilde{p}) = (0, 0, 0)$ . On utilise successivement le théorème des fonctions implicites holomorphe en voyant cette équation dans  $\mathcal{C}^{2m}$  puis le théorème des fonctions implicites analytique dans  $\mathbb{R}^{2m}$ . Ainsi, la fonction construite sera d'une part holomorphe sur un voisinage de 0 et donc bornée sur une boule de  $CC^{2m}$ , et d'autre part réelle quand elle est à valeurs réelles. Les hypothèses du théorème des fonctions implicites sont bien satisfaites car

$$D_\varphi (\nabla_{\tilde{p}} S_0(\varphi, \tilde{p}))|_{(\varphi, \tilde{p})=(0,0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

qui est inversible. On obtient alors qu'il existe  $\rho_1$  et  $\varphi_{n,0} \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{2m}}(0, \rho_1), \mathbb{R}^{2m})$  vérifiant  $\varphi_{n,0}(0, 0) = 0$  et

$$\tilde{q} = \nabla_{\tilde{p}} S_0(\varphi_{n,0}(\tilde{q}, \tilde{p}), \tilde{p}) \quad \text{pour tout } (\tilde{q}, \tilde{p}) \in \mathcal{B}(0, \rho_1).$$

- on applique ensuite le théorème des fonctions implicites à l'équation (A.5) vue comme équation dans le Banach des fonctions analytiques de  $\mathbb{R}^{2m}$  dans  $\mathbb{R}^{2m}$  bornées sur  $\mathcal{B}(0, \rho_1)$ , au voisinage du point  $(\varphi, \lambda) = (\varphi_{n,0}, 0)$ . C'est possible, éventuellement à condition de réduire  $\rho_1$  en  $\rho'_1$  car on trouve :

$$D_\varphi (\nabla_{\tilde{p}} S_\lambda(\varphi, \tilde{p}))|_{(\varphi, \tilde{p})=(\varphi_{n,0}, 0)} \cdot h(\tilde{q}, \tilde{p}) = (D_{\tilde{q}} \nabla_{\tilde{p}} S_\lambda)(\varphi_{n,0}(\tilde{q}, \tilde{p}), \tilde{p}) \cdot h(\tilde{q}, \tilde{p}).$$

Cette application linéaire est bien inversible dans  $\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{2m}}(0, \rho'_1), \mathbb{R}^{2m})$  pour  $\rho'_1$  assez petit, car comme  $\varphi_{n,0}(0, 0) = 0$ ,

$$D_\varphi (\nabla_{\tilde{p}} S_\lambda(\varphi, \tilde{p}))|_{(\varphi, \tilde{p})=(\varphi_{n,0}, 0)} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \mathcal{O}((\tilde{q}, \tilde{p})),$$

qui est une matrice inversible, avec pour inverse une matrice de fonctions analytiques, pour  $(\tilde{q}, \tilde{p})$  assez petits, et donc pour  $\rho'_1$  assez petit.

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites, et obtenir ainsi  $\varphi_{n,\lambda}$  famille  $\mathcal{C}^1$  dans le Banach des fonctions analytiques bornées de  $\mathcal{B}(0, \rho'_1)$ .

### Étape 2.1 : équation à l'ordre 2

Tout d'abord, en notant

$$\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1(x) = \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(x) - \tilde{\mathcal{H}}_{2,0}(x),$$

le choix (A.1) qu'on a fait pour la forme de la fonction génératrice fait qu'on a  $\mathcal{H}_{2,0} = \tilde{\mathcal{H}}_{2,0}$ . Ensuite, en identifiant dans (A.3) les monômes de degré 2 en  $z = (q, \tilde{p})$ , on obtient la condition

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1(z) + \left\langle \nabla_q \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(z), \nabla_{\tilde{p}} S_{2,\lambda}^1(z) \right\rangle + D_{qq}^2 \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(z) \cdot [\nabla_{\tilde{p}} S_{2,\lambda}^1(z), \nabla_{\tilde{p}} S_{2,\lambda}^1(z)] \\ &= \mathcal{H}_{2,\lambda}^1(z) + \left\langle \nabla_{\tilde{p}} \mathcal{H}_{2,\lambda}(z), \nabla_q S_{2,\lambda}^1(z) \right\rangle + D_{\tilde{p}\tilde{p}}^2 \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(z) \cdot [\nabla_q S_{2,\lambda}^1(z), \nabla_q S_{2,\lambda}^1(z)]. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1, S_{2,\lambda}^1$  et  $\mathcal{H}_{2,\lambda}^1$  sont solutions de l'équation fonctionnelle

$$\tilde{\mathcal{H}}_2^1(z) - D_z S_2^1(z) \cdot L_0 z = \mathcal{G}_2(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1, \mathcal{H}_2^1)(z) \quad (\text{A.6})$$

où

$$L_0 x = J_m \nabla_x \mathcal{H}_{2,0}(x) = (\nabla_p \mathcal{H}_{2,0}(x), -\nabla_q \mathcal{H}_{2,0}(x))$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_2(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1, \mathcal{H}_2^1)(z) &= \mathcal{H}_2^1(z) - \left\langle \nabla_q \tilde{\mathcal{H}}_2^1(z), \nabla_{\tilde{p}} S_2^1(z) \right\rangle + \left\langle \nabla_{\tilde{p}} \mathcal{H}_2^1(z), \nabla_q S_2^1(z) \right\rangle \\ &- D_{qq}^2 (\mathcal{H}_{2,0} + \mathcal{H}_2^1)(z) \cdot [\nabla_{\tilde{p}} S_2^1(z), \nabla_{\tilde{p}} S_2^1(z)] + D_{\tilde{p}\tilde{p}}^2 (\tilde{\mathcal{H}}_{2,0} + \tilde{\mathcal{H}}_2^1)(z) \cdot [\nabla_q S_2^1(z), \nabla_q S_2^1(z)]. \end{aligned}$$

**Étape 2.2 : équation à l'ordre  $\ell$  pour  $3 \leq \ell \leq n$ .**

En identifiant les monômes de degré 3 en  $z = (q, \tilde{p})$  dans (A.3), on obtient

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{H}}_{3,\lambda}(q + \nabla_{\tilde{p}} S_{2,\lambda}^1(z), \tilde{p}) + \left\langle \nabla_q \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(q + \nabla_{\tilde{p}} S_{2,\lambda}^1(z), \tilde{p}), \nabla_{\tilde{p}} S_{3,\lambda}(z) \right\rangle = \\ & \mathcal{H}_{3,\lambda}(q, \tilde{p} + \nabla_q S_{2,\lambda}^1(z)) + \left\langle \nabla_q \tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}(q, \tilde{p} + \nabla_q S_{2,\lambda}^1(z)), \nabla_q S_{3,\lambda}(z) \right\rangle, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$\mathcal{F}_3(\tilde{\mathcal{H}}_{3,\lambda}, S_{3,\lambda}, \lambda) = 0, \quad (\text{A.7})$$

où  $\mathcal{F}_3(\tilde{\mathcal{H}}_3, S_3, 0) = \tilde{\mathcal{H}}_3(z) - D_z S_3(z) \cdot L_0 z - \mathcal{H}_{3,0}$ . De même, pour  $3 \leq \ell \leq n$  on obtient

$$\mathcal{F}_\ell(\tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}, S_{\ell,\lambda}, \lambda) = 0, \quad (\text{A.8})$$

avec

$$\mathcal{F}_\ell(\tilde{\mathcal{H}}_\ell, S_\ell, 0) = \tilde{\mathcal{H}}_\ell(z) - D_z S_\ell(z) \cdot L_0 z - \mathcal{H}_{\ell,0} + R_\ell(z),$$

et où  $\mathcal{F}_\ell$  ne dépend que de  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1, S_{2,\lambda}^1, \mathcal{H}_{2,\lambda}^1$  et des  $\tilde{\mathcal{H}}_{j,\lambda}, S_{j,\lambda}, \mathcal{H}_{j,\lambda}$  pour  $3 \leq j \leq \ell$  et où  $R_\ell$  ne dépend que des  $\tilde{\mathcal{H}}_{j,0}, S_{j,0}, \mathcal{H}_{j,0}$  pour  $3 \leq j \leq \ell - 1$ , ( $R_3 = 0$ ).

Donc (A.6), (A.8) $_\ell$ ,  $3 \leq \ell \leq n$ , forment une hiérarchie d'équations d'inconnues  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1, S_{2,\lambda}^1, \tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}$  et  $S_{\ell,\lambda}$  pour  $3 \leq \ell \leq n$ . Le but des étapes suivantes est de montrer qu'on peut les résoudre par récurrence avec le théorème des fonctions implicites.

**Étape 3 : étude de l'opérateur homologique.**

Pour toutes ces équations, la partie linéaire de l'équation non perturbée est

$$\mathcal{L} : E_\ell \times E_\ell \rightarrow E_\ell : (\tilde{\mathcal{H}}, S) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{A}S$$

où  $E_\ell$  est l'espace des polynômes homogènes réels de degré  $\ell$  et  $\mathcal{A}$  est l'opérateur homologique suivant :

$$(\mathcal{A}S)(z) = D_z S(z) \cdot L_0 z.$$



On va alors chercher 2 sous-espaces  $F_\ell$  et  $G_\ell$  de  $E_\ell$  tels que  $\mathcal{L} : F_\ell \times G_\ell \rightarrow E_\ell$  soit inversible.  $F_\ell$  sera alors l'espace dans lequel se trouveront les monômes de degré  $n$  de la forme normale. Notre but est donc de choisir  $F_\ell$  le plus "petit" possible et en particulier on aimerait avoir  $F_\ell = \{0\}$  à chaque fois que c'est possible.

Premier cas : **si  $\mathcal{A}$  est inversible** de  $E_\ell$  dans  $E_\ell$ . Alors  $\mathcal{L}$  est inversible de  $\{0\} \times E_\ell \rightarrow E_\ell$ . Dans ce cas, on peut alors choisir  $F_\ell = \{0\}$  et  $G_\ell = E_\ell$ , ce qui signifie qu'on choisit  $\tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda} = 0$  et qu'on résout ensuite  $(A.8)_\ell$  par le théorème des fonctions implicites pour obtenir la fonction  $S_{\ell,\lambda} \in C^1$  en  $\lambda$ . Donc quand  $\mathcal{A}$  est inversible de  $E_\ell$  dans  $E_\ell$ , toutes les termes de degré  $\ell$  du Hamiltonien sont éliminés par ce procédé de normalisation.

Deuxième cas : **si  $\mathcal{A}$  n'est pas inversible**. Pour que  $\mathcal{L} : F_\ell \times G_\ell \rightarrow E_\ell$  soit inversible, on doit alors choisir pour  $F_\ell$  un espace supplémentaire de l'image  $\text{Im } \mathcal{A}$  de  $\mathcal{A}$  et pour  $G_\ell$  un supplémentaire de l'espace  $\text{Ker } \mathcal{A}$ , i.e.

$$E_\ell = F_\ell \oplus \text{Im}_{E_\ell} \mathcal{A}, \quad E_\ell = G_\ell \oplus \text{Ker}_{E_\ell} \mathcal{A}.$$

Dans ce cas, on n'a donc pas l'unicité ni de  $\tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}$  ni de  $S_{\ell,\lambda}$  par ce procédé de construction : ils dépendent l'un et l'autre du choix de  $F_\ell$  et de  $G_\ell$ . Une manière naturelle de choisir ces sous-espaces est de munir  $E_\ell$  d'un produit scalaire et de choisir

$$F_\ell = (\text{Im}_{E_\ell} \mathcal{A})^\perp, \quad G_\ell = (\text{Ker}_{E_\ell} \mathcal{A})^\perp.$$

Dans la suite de cette étape 2, on construit un produit scalaire tel que  $F_\ell := (\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Ker } \mathcal{A}^*$  soit l'espace

$$F_\ell = \{S \in E_\ell / S(e^{tL_0^*} z) = S(z) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^m\}.$$

Pour tout couple de polynômes  $S, S' : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $E_\ell$  on définit le produit scalaire par

$$\langle S, S' \rangle_\ell = S(\partial_z) S'(z)|_{z=0}.$$

Muni de ce produit,  $E_\ell$  est un espace de Hilbert de dimension finie. Ce produit satisfait de plus : pour tous entiers  $\alpha_1, \dots, \alpha_{2m}$  et  $\beta_1, \dots, \beta_{2m}$ , on a

$$\left\langle z_1^{\alpha_1} \dots z_{2m}^{\alpha_{2m}}, z_1^{\beta_1} \dots z_{2m}^{\beta_{2m}} \right\rangle_\ell = \alpha_1! \dots \alpha_{2m}! \delta_{\alpha_1, \beta_1} \dots \delta_{\alpha_{2m}, \beta_{2m}}$$

où  $\delta_{\alpha_j, \beta_j} = 1$  si  $\alpha_j = \beta_j$  et 0 sinon. De plus, pour tout opérateur linéaire inversible  $T$  sur  $\mathbb{R}^{2m}$ , en considérant le changement de coordonnées  $x = T^* y$  on a

$$\langle S \circ T, S' \rangle_\ell = \langle S, S' \circ T^* \rangle_\ell.$$

Et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\langle S \circ e^{tL_0}, S' \rangle_\ell = \langle S, S' \circ e^{tL_0^*} \rangle_\ell$ , ce qui donne en différentiant par rapport à  $t$  :

$$\langle \mathcal{A} S, S' \rangle = \langle D_z S(z).L_0 z, S' \rangle = \langle S, D_z S(z).L_0^* z \rangle = \langle S, \mathcal{A}^* S' \rangle.$$

Cela signifie que l'adjoint  $\mathcal{A}^* : E_\ell \rightarrow E_\ell$  de l'opérateur homologique  $\mathcal{A}$  est

$$(\mathcal{A}^* S)(z) = D_z S(z).L_0^* z$$

et donc que

$$\text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A}^* = \{S \in E_\ell / S(e^{tL_0^*} z) = S(z) \text{ for all } t \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^m\}. \quad (\text{A.9})$$

Choisissons donc comme annoncé

$$F_\ell := \text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A}^* = (\text{Im}_{E_\ell} \mathcal{A})^\perp, \quad G_\ell = (\text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A})^\perp.$$

Soit  $\pi_\ell$  la projection orthogonale  $\text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A}^*$ . Alors  $\mathcal{L} : (\tilde{\mathcal{H}}, S) \mapsto \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{A}S$  est bien un isomorphisme de  $F_\ell \times G_\ell$  dans  $E_\ell$  : en effet, pour tout  $\mathcal{G} \in E_\ell$

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}, S) = \mathcal{G} \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{H}} - \mathcal{A}S = \mathcal{G} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{\mathcal{H}} &= \pi_\ell \mathcal{G} \\ -\mathcal{A}S &= (Id - \pi_\ell) \mathcal{G}. \end{cases}$$

Et ce système admet bien une solution unique car  $\mathcal{A}$  est un isomorphisme de  $G_\ell = (\text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A})^\perp$  dans  $(Id - \pi_\ell)E_\ell = \text{Im}_{E_\ell} \mathcal{A}$ .

#### Étape 4.1 : étude de l'équation d'ordre 3

On peut réécrire l'équation fonctionnelle (A.6) sous la forme

$$\mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1) = \mathcal{G}_2(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1, \mathcal{H}_2^1) \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathcal{G}_2$  est une fonction analytique de  $F_2 \times G_2 \times E_2$  dans  $E_2$  et

$$\mathcal{G}_2(0, 0, 0) = 0, \quad \|E_2\|_{\mathcal{G}_2(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1, 0)} \leq c \left( \|F_2\|_{\tilde{\mathcal{H}}_2^1} + \|G_2\|_{S_2^1} \right)^2,$$

où  $F_2 := \text{Ker } {}_{E_2} \mathcal{A}^*$  et  $G_2 := (\text{Ker } {}_{E_2} \mathcal{A})^\perp$ . Alors le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer que pour  $\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1, \mathcal{H}_2^1$  assez petits, (A.10) admet une unique solution de la forme

$$(\tilde{\mathcal{H}}_2^1, S_2^1) = \psi_2(\mathcal{H}_2^1)$$

avec  $\psi_2 : E_2 \rightarrow F_2 \times G_2$  analytique et vérifiant  $\psi_2(0) = 0$ . Finalement, comme  $\mathcal{H}_{2,\lambda}^1$  est  $C^1$  en  $\lambda$  et s'annule en  $\lambda = 0$ , on obtient que pour  $|\Lambda|_\lambda < \delta_2$  avec  $\delta_2 > 0$  assez petit,  $(\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1, S_{2,\lambda}^1) = \psi_2(\mathcal{H}_{2,\lambda}^1)$  sont  $C^1$  par rapport à  $\lambda$  et que  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1$  est dans  $F_2 = \text{Ker } {}_{E_2} \mathcal{A}^*$ , donné par (A.9).

#### Étape 4.2 : étude de l'équation d'ordre $n \geq 3$ .

Commençons par l'équation de degré 3 donnée par (A.8)<sub>3</sub>. On note  $F_3 := \text{Ker } {}_{E_3} \mathcal{A}^*$  et  $G_3 = (\text{Ker } {}_{E_3} \mathcal{A})^\perp$ . Comme  $\tilde{\mathcal{H}}_{2,\lambda}^1, S_{2,\lambda}^1$  et  $\mathcal{H}_{3,\lambda}$  sont  $C^1$  en  $\lambda$ , la fonction

$$\mathcal{F}_3 : F_3 \times G_3 \times D_\Lambda(0, \delta_2) \rightarrow E_3$$

est aussi  $C^1$  sur  $D_\Lambda(0, \delta) = \{\lambda \in \Lambda, |\Lambda|_\lambda < \delta\}$  et on a

$$\mathcal{F}_3(\tilde{\mathcal{H}}_3, S_3, 0) = \mathcal{L}(\tilde{\mathcal{H}}_3, S_3) - \mathcal{H}_{3,0}.$$

Ensuite, le théorème des fonctions implicites appliqué au point  $(\tilde{\mathcal{H}}_{3,0}, S_{3,0}, 0)$  où  $(\tilde{\mathcal{H}}_{3,0}, S_{3,0}) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{H}_{3,0})$ , nous assure que pour  $|\Lambda|_\lambda < \delta_3$  avec  $\delta_3 > 0$  assez petit,  $\tilde{\mathcal{H}}_{3,\lambda}$  et  $S_{3,\lambda}$  des fonctions  $C^1$  en  $\lambda$  et que  $\tilde{\mathcal{H}}_{3,\lambda}$  est dans  $F_3 = \text{Ker } {}_{E_3} \mathcal{A}^*$  donné par (A.9).

Ensuite, en procédant par récurrence en résolvant à chaque étape l'équation (A.8)<sub>ℓ</sub> par le théorème des fonctions implicites, on obtient que pour  $3 \leq \ell \leq n$ , et pour  $|\Lambda|_\lambda < \delta_\ell$  avec  $\delta_\ell > 0$  assez petit,  $\tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}, S_{\ell,\lambda}$  sont des fonctions  $C^1$  de  $\lambda$  et que  $\tilde{\mathcal{H}}_{\ell,\lambda}$  appartient à l'espace  $F_\ell = \text{Ker } {}_{E_\ell} \mathcal{A}^*$  donné par (A.9).  $\square$

## B Annexe. Lemmes techniques en lien avec la relation d'ordre $\prec$

On définit tout d'abord une relation d'ordre, notée  $\prec$ , sur les ensembles de séries formelles scalaires à  $d$  variables, de la manière suivante.

**Définition B.1** Soit  $f$  et  $g$  deux séries formelles sur  $\mathbb{C}$ , à  $d$  variables, que l'on note

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} a_n x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}, \quad g(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} b_n x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}.$$

On notera

$$f(x_1, \dots, x_d) \prec g(x_1, \dots, x_d)$$

si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^d, \quad b_n \in \mathbb{R}^+ \quad \text{et} \quad |a_n| \leq b_n.$$

On définit de plus un maximum et une valeur absolue liés à cette relation d'ordre :

**Définition B.2** Si  $f$  et  $g$  sont deux séries formelles de  $\mathbb{C}^d$  dans  $\mathbb{C}$

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}^d} a_n x^n, \quad g(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}^d} b_n x^n,$$

alors on définit

$$\begin{aligned} |f|(x) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}^d} |a_n| x^n, \\ \max\{f, g\}(x) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \max\{|a_n|, |b_n|\} x^n. \end{aligned}$$

Dans le lemme suivant on rassemble les premières propriétés découlant de ces définitions.

**Lemme B.3** Soit  $f$  et  $g$  deux séries formelles de  $\mathbb{C}^d$  dans  $\mathbb{C}$ .

(i) Si  $f \prec g$  alors  $|f| \prec g$ .

(ii) Si  $f \prec g$  alors

$$\forall i \leq d, \quad \partial_{x_i} f \prec \partial_{x_i} g.$$

(iii) Soit  $d' < d$  et  $y = (y_1, \dots, y_{d'})$ . On s'intéresse à  $f$  et  $g$  pris en

$$x = (x_1, \dots, x_d) = (y_1, y_1, \dots, y_1, \dots, y_{d'}, \dots, y_{d'}),$$

qu'on note  $\tilde{f}(y)$  et  $\tilde{g}(y)$ . On a alors

$$f(x) \prec g(x) \Rightarrow \tilde{f}(y) \prec \tilde{g}(y).$$

(iv) Dans le cas où  $d = 1$ . Si  $f$  série convergente d'ordre  $n_0$ , alors il existe deux constantes positives  $c$  et  $\gamma$  telles que

$$f(x) \prec c \frac{x^{n_0}}{1 - \gamma x};$$

et plus précisément, si  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(0, \rho), \mathbb{C})$  (voir Définition 2.1) on a les valeurs de  $c$  et  $\gamma$

$$f(x) \prec \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}}{\rho^{n_0}} \frac{x^{n_0}}{1 - \frac{1}{\rho}x}.$$

(v) Si  $0 \prec f(x) \prec g(x)$ , alors

$$\frac{1}{1 - f(x)} \prec \frac{1}{1 - g(x)}.$$

(vi) Si  $f \prec g$  et  $g \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}^d}(0, \rho), \mathbb{C})$ , alors  $f \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}^d}(0, \rho), \mathbb{C})$  et

$$\|f\|_{\mathcal{A}} \leq \|g\|_{\mathcal{A}}.$$

### Démonstration

(i), (ii) et (iii) se déduisent directement de la définition.

On note

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} a_n x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}, \quad g(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} b_n x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}.$$

Démontrons (iv). Comme  $f$  est d'ordre  $n_0$ , on peut l'écrire

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n.$$

Comme  $f$  est analytique bornée par  $\|f\|_{\mathcal{A}}$  sur la boule  $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}(0, \rho)$ , par les formules de Cauchy on a les majorations

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}}{\rho^n}.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}}{\rho^{n_0}} \frac{x^{n_0}}{1 - \frac{1}{\rho}x} &= \|f\|_{\mathcal{A}} \frac{x^{n_0}}{\rho^{n_0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\rho^n} \\ &= \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\|f\|_{\mathcal{A}}}{\rho^n} x^n. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du (iv).

Le (v) est immédiat avec l'écriture

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Pour démontrer (vi), on utilise le fait que nécessairement si  $f \prec g$ , alors les coefficients de  $g$  sont réels positifs (cf Définition B.1). On en déduit que pour tout  $x \in \mathcal{B}_{\mathbb{C}^d}(0, \rho)$ ,

$$|f(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n \leq \sum b_n |x|^n \leq \|g\|_{\mathcal{A}}.$$

Ce qui permet de conclure la démonstration de (vi). □

Le lemme suivant donne une expression d'un théorème des accroissements finis dans l'ensemble des séries formelles, pour la relation d'ordre  $\prec$ .

**Lemme B.4** *Soient  $F$  une série formelle scalaire à plusieurs variables  $(x_1, \dots, x_d)$ , à coefficients positifs. Et soit les séries formelles vectorielles*

$$\Phi(x_1, \dots, x_d) = (\phi_1, \dots, \phi_d)(x_1, \dots, x_d), \quad \Psi(x_1, \dots, x_d) = (\psi_1, \dots, \psi_d)(x_1, \dots, x_d).$$

Alors on a la relation d'ordre

$$F(\Phi + \Psi) - F(\Phi) \prec |DF|(|\Phi| + |\Psi|) \cdot |\Psi|,$$

où on a noté

$$|DF|(|\Phi| + |\Psi|) \cdot |\Psi| := \sum_{i=1}^d |\Psi_i| \partial_{x_i} F(|\Phi_1| + |\Psi_1|, \dots, |\Phi_d| + |\Psi_d|).$$

### Démonstration

Soit une série formelle scalaire réelle

$$F(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} a_n x_1^{n_1} \cdots x_d^{n_d}, \quad a_n \geq 0.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
& F \circ (\Phi + \Psi) - F \circ \Phi \\
&= \sum_{i=1}^d F(\Phi_1 + \Psi_1, \dots, \Phi_i + \Psi_i, \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_d) - F(\Phi_1 + \Psi_1, \dots, \Phi_{i-1} + \Psi_{i-1}, \Phi_i, \dots, \Phi_d) \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^d \\ n_i \geq 1}} a_n (\Phi_1 + \Psi_1)^{n_1} \dots (\Phi_{i-1} + \Psi_{i-1})^{n_{i-1}} \left( (\Phi_i + \Psi_i)^{n_i} - \Phi_i^{n_i} \right) \Phi_{i+1}^{n_{i+1}} \dots \Phi_d^{n_d} \\
&= \sum_{i=1}^d \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^d \\ n_i \geq 1}} a_n (\Phi_1 + \Psi_1)^{n_1} \dots (\Phi_{i-1} + \Psi_{i-1})^{n_{i-1}} \left( \Psi_i \sum_{k=0}^{n_i-1} \binom{n_i-1}{k} \Phi_i^k (\Phi_i + \Psi_i)^{n_i-1-k} \right) \Phi_{i+1}^{n_{i+1}} \dots \Phi_d^{n_d} \\
&\prec \sum_{i=1}^d \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^d \\ n_i \geq 1}} a_n (|\Phi_1| + |\Psi_1|)^{n_1} \dots (|\Phi_{i-1}| + |\Psi_{i-1}|)^{n_{i-1}} \left( |\Psi_i| \sum_{k=0}^{n_i-1} |\Phi_i|^k (|\Phi_i| + |\Psi_i|)^{n_i-1-k} \right) \\
&\quad \cdot (|\Phi_{i+1}| + |\Psi_{i+1}|)^{n_{i+1}} \dots (|\Phi_d| + |\Psi_d|)^{n_d} \\
&= \sum_{i=1}^d \left( |\Psi_i| \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}^d} n_i a_n (|\Phi_1| + |\Psi_1|)^{n_1} \dots (|\Phi_d| + |\Psi_d|)^{n_d} \right) \\
&= \sum_{i=1}^d |\Psi_i| \partial_{x_i} F(|\Phi_1| + |\Psi_1|, \dots, |\Phi_d| + |\Psi_d|) \\
&:= |DF|(|\Phi| + |\Psi|) \cdot |\Psi|.
\end{aligned}$$

□

Le lemme suivant montre que la propriété

$$F_\nu - F_0 \prec \nu \mathcal{M}$$

passse à l'inverse.

**Lemme B.5** *Soit la famille de séries formelles vectorielles à plusieurs variables*

$$F_\nu(Y) := (F_{\nu,1}(y_1, \dots, y_d), \dots, F_{\nu,d}(y_1, \dots, y_d)) = (y_1, \dots, y_d) + \mathcal{O}(|Y|^2)$$

telle que

– il existe  $N \in \mathbb{N}$ , et une série entière convergente  $\mathcal{M}$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, d$  on ait

$$F_{\nu,j} - F_{0,j} \prec \nu(y_1 + \dots + y_d)^N \mathcal{M}(y_1 + \dots + y_d);$$

–  $F_0$  série convergente ;

–  $F_\nu$  admet un inverse, noté

$$F_\nu^{-1}(Y) := \left( F_{\nu,1}^-, \dots, F_{\nu,d}^- \right)(Y).$$

Alors il existe une série entière convergente  $\mathcal{M}_1$  telle que pour tout  $j = 1, \dots, d$  on ait

$$F_{\nu,j}^- - F_{0,j}^- \prec \nu(y_1 + \dots + y_d)^N \mathcal{M}_1(y_1 + \dots + y_d).$$

### Démonstration

Commençons par montrer que si les hypothèses du lemme sont vérifiées avec  $N = 1$  alors elles le sont aussi avec  $N = 2$ ; on utilise pour cela le fait que

$$F_\nu(Y) = Y + \mathcal{O}(|Y|^2) := Y + F_\nu^1(Y),$$

où  $F_\nu^1$  est d'ordre 2. Si les hypothèses du lemme sont vérifiées pour  $N = 1$ , on a donc pour  $j = 1, \dots, d$ ,

$$\begin{aligned} F_{\nu,j}(Y) - F_{0,j}(Y) &\prec \nu(y_1 + \dots + y_d) \mathcal{M}(y_1 + \dots + y_d) \\ \Leftrightarrow F_{\nu,j}^1(Y) - F_{0,j}^1(Y) &\prec \nu(y_1 + \dots + y_d) \mathcal{M}(0) + \nu(y_1 + \dots + y_d) (\mathcal{M}(y_1 + \dots + y_d) - \mathcal{M}(0)) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(termes de degré 1 de } (F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1)) &\prec \nu(y_1 + \dots + y_d) \mathcal{M}(0) \\ \text{(termes de degré } \geq 2 \text{ de } (F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1)) &\prec \nu(y_1 + \dots + y_d) (\mathcal{M}(y_1 + \dots + y_d) - \mathcal{M}(0)). \end{cases} \end{aligned}$$

Or les  $F_{\nu,j}^1$  sont d'ordre 2 donc

$$\begin{aligned} \text{(termes de degré 1 de } (F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1)) &= 0 \\ \text{(termes de degré } \geq 2 \text{ de } (F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1)) &= F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$F_{\nu,j}^1 - F_{0,j}^1 \prec \nu(y_1 + \dots + y_d) (\mathcal{M}(y_1 + \dots + y_d) - \mathcal{M}(0)).$$

Et on peut réécrire

$$\mathcal{M}(x) - \mathcal{M}(0) := x \mathcal{M}_1(x);$$

on trouve alors

$$F_{\nu,j}(Y) - F_{0,j}(Y) = F_{\nu,j}^1(Y) - F_{0,j}^1(Y) \prec \nu(y_1 + \dots + y_d)^2 \mathcal{M}_1(y_1 + \dots + y_d).$$

On peut faire le même raisonnement si dans les hypothèses du lemme on a  $N = 0$ .

*Dans la suite de la démonstration, on peut donc supposer que  $N \geq 2$ .*

On a

$$F_0^{-1}(Y) - F_\nu^{-1}(Y) = F_0^{-1} \circ F_\nu \circ F_\nu^{-1}(Y) - F_0^{-1} \circ F_0 \circ F_\nu^{-1}(Y).$$

On utilise alors le Lemme B.4, on obtient que pour tout  $j = 1, \dots, d$ ,

$$F_{0,j}^-(Y) - F_{\nu,j}^-(Y) \prec |DF_{0,j}^-| (|F_\nu \circ F_\nu^{-1}| + |F_0 \circ F_\nu^{-1}|(Y)) \cdot |F_\nu \circ F_\nu^{-1} - F_0 \circ F_\nu^{-1}|(Y).$$

Comme  $F_0$  est d'ordre 1 et convergente, il existe  $\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1$  séries convergentes telles que pour tous  $i, j = 1, \dots, d$ ,

$$F_{0,j}(Y) \prec \mathcal{M}_0(y_1 + \dots + y_d), \text{ avec } \mathcal{M}_0(0) = 0, \quad |\partial_{y_i} F_j|(Y) \prec \mathcal{M}_1(y_1 + \dots + y_d).$$

On a alors

$$\begin{aligned} F_{0,j}^-(Y) - F_{\nu,j}^-(Y) &\prec \mathcal{M}_1 \left( \sum_{j=1}^d |F_{\nu,j} \circ F_\nu^{-1}| + |F_{0,j} \circ F_\nu^{-1}|(Y) \right) \\ &\quad \cdot \max_{j=1, \dots, d} |F_{\nu,j} \circ F_\nu^{-1} - F_{0,j} \circ F_\nu^{-1}(Y)|. \end{aligned}$$

Posons

$$f_\nu^-(Y) := \sum_{j=1}^d \left| F_{\nu,j}^- \right| (Y).$$

En écrivant  $F_\nu = F_0 + (F_\nu - F_0)$  et en utilisant le  $\mathcal{M}$  de l'énoncé du lemme, on obtient

$$F_{0,j}^-(Y) - F_{\nu,j}^-(Y) \prec \mathcal{M}_1 \left( 2\mathcal{M}_0(f_\nu^{-1}(Y)) + \nu(f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}(f_\nu^-(Y)) \right) \cdot \nu(f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}(f_\nu^-(Y)).$$

En posant  $\mathcal{M}_2$  série convergente à une seule variable égale à

$$\mathcal{M}_2(y) := \mathcal{M}_1(2\mathcal{M}_0(y) + y^N \mathcal{M}(y)) \cdot \mathcal{M}(y);$$

pour  $\nu \leq 1$  on a alors

$$F_{0,j}^-(Y) - F_{\nu,j}^-(Y) \prec \nu(f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(Y)). \quad (\text{B.1})$$

Pour majorer  $|F_\nu^{-1} - F_0^{-1}|$  il nous suffit maintenant de majorer  $f_\nu^-$ . Or, de (B.1) on déduit

$$\begin{aligned} |F_{\nu,j}^-|(Y) &\prec |F_{0,j}^-|(Y) + |F_{\nu,j}^- - F_{0,j}^-|(Y) \\ &\prec \mathcal{M}_0(Y) + (f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(Y)) \end{aligned}$$

Et donc

$$f_\nu^-(Y) \prec \mathcal{M}_0(Y) + (f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(Y)).$$

Soit alors

$$V_\nu(\omega) := f_\nu^-(\omega, \dots, \omega).$$

On va chercher une majoration des  $V_\nu$  uniforme en  $\nu$ , puis on en déduira une majoration des  $f_\nu^-$ . Comme  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_0$  séries convergentes et  $\mathcal{M}(0) = 0$ , d'après le (iv) du Lemme B.3, il existe des constantes  $c$  et  $\gamma$  telles que

$$\mathcal{M}_0(\omega) \prec c \frac{\omega}{1 - \gamma\omega}, \quad \mathcal{M}_2(\omega) \prec c \frac{1}{1 - \gamma\omega}.$$

On obtient donc

$$V_\nu(\omega) \prec (V_\nu(\omega))^N c \frac{1}{1 - \gamma\omega} + c \frac{\omega}{1 - \gamma\omega}. \quad (\text{B.2})$$

Si on arrive à construire une série  $Z$  convergente telle que

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= c_1\omega + \dots \quad \text{avec } c_1 \geq d \\ \text{et } Z(\omega) &= Z(\omega)^N c \frac{1}{1 - \gamma\omega} + c \frac{\omega}{1 - \gamma\omega} \end{aligned}$$

alors comme  $V_\nu(\omega) = d\omega + \dots$  puis par récurrence sur les coefficients de  $V_\nu$  et  $Z$  grâce à l'équation (B.2) et grâce au fait qu'on a supposé  $N \geq 2$ , on aura alors

$$V_\nu(\omega) \prec Z(\omega).$$



On cherche  $Z(\omega)$  de la forme  $c_1\omega + \dots$ , ce qui revient à chercher  $Z(\omega) = \omega Z_1(\omega)$  avec  $Z_1(0) = c_1$ . Alors on cherche  $Z_1$  vérifiant l'équation

$$\begin{aligned}\omega Z_1 &= \omega^N Z_1^N \frac{c}{1 - \gamma\omega Z_1} + \frac{c\omega}{1 - \gamma\omega} \\ \Leftrightarrow 0 &= Z_1(1 - \gamma\omega Z_1)(1 - \gamma\omega) - (1 - \gamma\omega)c\omega^{N-1}Z_1^N - c(1 - \gamma\omega Z_1) \\ \Leftrightarrow 0 &= \mathcal{F}(Z_1, \omega).\end{aligned}\tag{B.3}$$

Or, avec  $Z_1(0) = d$ , on a

$$\mathcal{F}(d, 0) = 0, \quad \partial_{Z_1}\mathcal{F}(c, 0) = 1.$$

Donc par théorème des fonctions implicites analytique, on construit  $Z_1$  indépendant de  $\nu$  tel que

$$V_\nu(\omega) \prec \omega Z_1(\omega).$$

On trouve alors finalement

$$\begin{aligned}&(F_{0,j}^- - F_{\nu,j}^-)(Y) \\ &\prec \nu(f_\nu^-(Y))^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(Y)) \\ &\prec \nu(f_\nu^-(y_1 + \dots + y_d, \dots, y_1 + \dots + y_d))^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(y_1 + \dots + y_d, \dots, y_1 + \dots + y_d)) \\ &\prec \nu V_\nu(y_1 + \dots + y_d)^N \mathcal{M}_2(f_\nu^-(y_1 + \dots + y_d)) \\ &\prec \nu(y_1 + \dots + y_d)^N \underbrace{(Z_1(y_1 + \dots + y_d))^N \mathcal{M}_2((y_1 + \dots + y_d)Z_1(y_1 + \dots + y_d))}_{:= \mathcal{M}_1(y_1 + \dots + y_d)}.\end{aligned}$$

□

## C Annexe. Construction d'un changement de coordonnées local canonique : démonstration de la Proposition 3.2

Cette annexe est consacrée à la démonstration de la proposition suivante, qui implique la Proposition 3.2. L'énoncé ci-dessous fait intervenir la relation d'ordre  $\prec$  dont la définition se trouve dans l'Annexe B.

**Proposition C.1** *Il existe  $\varepsilon_0, \rho'_0 < \frac{1}{2}\rho_0$  et une famille de changements de coordonnées canoniques*

$$\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} = (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}}),$$

définie pour  $|\underline{\varepsilon}| \leq \varepsilon_0$  telle que le Hamiltonien dans les nouvelles coordonnées  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  s'écrive

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1\eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2) = -\xi_1\eta_1 + \frac{\omega(\underline{\varepsilon})}{2\varepsilon^2}(\xi_2^2 + \eta_2^2) + \mathcal{O}(|(\xi_1\eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2)|^2),\tag{C.1}$$

et vérifiant

- pour tout  $\underline{\varepsilon}$ ,  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}, \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1} \in \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^4}(0, \rho'_0), \mathbb{R}^4)$ ,
- pour  $\underline{\varepsilon} := (\varepsilon, 0, 0)$ ,  $\mathcal{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}$  est indépendante de  $\varepsilon$  et est de la forme

$$\mathcal{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) := \mathcal{F}_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\varphi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2).\tag{C.2}$$

De plus on a les estimations suivantes : il existe une série entière à une seule variable  $\mathcal{M}$ , convergente sur  $\mathcal{B}(0, 4\rho'_0)$

$$(i) \quad (\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} - \mathcal{F}_0)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2),$$

$$(ii) \quad \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2),$$

$$(iii) \quad \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2) - (q_1, p_1, q_2, p_2) \prec (q_1 + p_1 + q_2 + p_2)^2 \mathcal{M}(q_1 + p_1 + q_2 + p_2);$$

et il existe une constante réelle  $\mathcal{M}_0$  telle que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$  et tout  $(q_1, p_1, q_2, p_2) \in \mathcal{B}(0, \rho'_0)$ , on ait

$$(iv) \quad |\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \mathcal{F}_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)| \leq \nu \mathcal{M}_0,$$

$$(v) \quad |\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2) - \mathcal{F}_0^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2)| \leq \nu \mathcal{M}_0,$$

$$(vi) \quad |\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)| \leq \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2,$$

$$(vii) \quad |\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2) - (q_1, p_1, q_2, p_2)| \leq \mathcal{M}_0 |(q_1, p_1, q_2, p_2)|^2,$$

$$(viii) \quad |\varphi_{2, \underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \xi_2| \leq \nu \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2,$$

$$(ix) \quad |\psi_{2, \underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) - \eta_2| \leq \nu \mathcal{M}_0 |(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2.$$

### C.1 Diagonalisation / passage en complexes

On commence par faire un premier changement de coordonnées linéaire canonique qui diagonalise la partie linéaire à l'origine (et pour  $\varepsilon = 0$ ) du système. L'inconvénient est qu'on se retrouve alors dans  $\mathbb{C}^4$  au lieu de  $\mathbb{R}^4$ . Dans les parties suivantes on va fabriquer alors un changement de coordonnées dans  $\mathbb{C}^4$ , et il nous faudra ensuite vérifier qu'on peut bien finalement revenir dans  $\mathbb{R}^4$ ; pour cela il est utile de détailler explicitement le changement de coordonnées choisi. On choisit de travailler avec les nouvelles variables  $(q'_1, p'_1, q'_2, p'_2)$ , où

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ p'_1 \\ q'_2 \\ p'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix} := \mathcal{P} \begin{pmatrix} q_1 \\ p_1 \\ q_2 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \text{où } P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'on a bien alors  ${}^t \mathcal{P} J \mathcal{P} = J$ , i.e. que ce changement de coordonnées est canonique. Et si on note  $L_0$  la partie linéaire en  $x = 0$  et  $\varepsilon = 0$  du système Hamiltonien, on a

$$\mathcal{P} L_0 \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \\ 0 & 0 & \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \frac{\omega(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \end{pmatrix}.$$

Comme le changement de coordonnées est canonique, le nouveau système est toujours Hamiltonien, et le nouveau Hamiltonien est

$$\begin{aligned} \underline{H}((q'_1, p'_1, q'_2, p'_2), \underline{\varepsilon}) &= -q'_1 p'_1 - i q'_2 p'_2 + (q'_1 + p'_1)^3 + \nu N_n(q'_1 + p'_1, 2i q'_2 p'_2) \\ &\quad + \mu \nu \varepsilon^{N_0} \mathcal{R}'_n(q'_1, p'_1, q'_2, p'_2, \varepsilon). \end{aligned}$$

On va alors fabriquer un changement de coordonnées dans  $\mathbb{C}^4$ ,  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$ , et on posera à la fin  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} := \mathcal{P}^{-1} F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P}$ .

Dans la suite de la construction du changement de coordonnées, on va travailler avec un Hamiltonien de forme un peu plus générale

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(x, \underline{\varepsilon}) &= \mathbf{H}((x_1, y_1, x_2, y_2), (\varepsilon, \nu, \mu)) \\ \mathbf{H}(x, \underline{\varepsilon}) &= -\alpha_1 x_1 y_1 - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + h(x_1, y_1) + \nu \mathcal{R}((x_1, y_1, x_2, y_2), \varepsilon, \nu, \mu),\end{aligned}\quad (\text{C.3})$$

avec

$$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha_2 \text{ continue en } \varepsilon, \quad \alpha_2(0) \neq 0. \quad (\text{C.4})$$

Le système différentiel associé s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + \partial_{y_1} h(x_1, y_1) + \nu \partial_{y_1} \mathcal{R}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{y}_1 &= -\alpha_1 y_1 - \partial_{x_1} h(x_1, y_1) - \nu \partial_{x_1} \mathcal{R}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{x}_2 &= i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \nu \partial_{y_2} \mathcal{R}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{y}_2 &= -i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \nu \partial_{x_2} \mathcal{R}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}). \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

On le notera aussi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \alpha_1 x_1 + f_{1,0}(x_1, y_1) + \nu f_{1,\underline{\varepsilon}}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{y}_1 &= -\alpha_1 y_1 + g_{1,0}(x_1, y_1) + \nu g_{1,\underline{\varepsilon}}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{x}_2 &= i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \nu f_{2,\underline{\varepsilon}}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}) \\ \dot{y}_2 &= -i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \nu g_{2,\underline{\varepsilon}}((x_1, y_1, x_2, y_2), \underline{\varepsilon}). \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

On utilisera la régularité  $\mathcal{C}^0$  des applications

$$\begin{aligned} ] - \varepsilon_0, \varepsilon_0[{}^3 &\longrightarrow \left( \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}(0, \rho_1), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty \right) \\ \underline{\varepsilon} &\mapsto f_{1,\underline{\varepsilon}}(\cdot, \underline{\varepsilon}) \\ (\dots) & \\ \underline{\varepsilon} &\mapsto g_{2,\underline{\varepsilon}}(\cdot, \underline{\varepsilon}), \end{aligned}$$

qu'on obtient directement grâce à la régularité  $\mathcal{C}^0$  de  $\underline{\varepsilon} \mapsto \mathcal{R}(\cdot, \underline{\varepsilon})$ .

On va utiliser pendant toute la construction la relation d'équivalence  $\prec$  définie sur l'ensemble des séries formelles, dont la définition et quelques propriétés sont données dans la partie B.

## C.2 Première famille de changements de coordonnées, $F_{\underline{\varepsilon}}$ , pas encore canoniques

On commence dans cette partie par construire une première famille de changements de coordonnées  $F_{\underline{\varepsilon}}$  (dans  $\mathbb{C}^4$ ), dont on ne saura pas montrer s'ils sont canoniques ou non. Ils nous serviront ensuite de base pour construire un changement de coordonnées canonique. Pour le construire, on utilise la méthode de Moser [52] : on a alors besoin d'étudier les propriétés particulières obtenues pour  $F_{(\varepsilon,0,0)}$ , et ensuite de vérifier qu'on obtient une estimation du type  $|F_{\underline{\varepsilon}} - F_{(\varepsilon,0,0)}| \leq \nu \mathcal{M}_0$ . On donne tout d'abord une définition, qui est un outil utile pour la suite.

**Définition C.2** Soit  $\phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$  une série formelle de  $\mathbb{C}^4$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$ , de la forme

$$\phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum_{m, n \in \mathbb{N}^2} c_{m, n} x_1^{m_1} y_1^{n_1} x_2^{m_2} y_2^{n_2}.$$

On définit alors la série formelle "extraite", de  $\mathbb{C}^2$  dans  $\mathbb{C}$ , constituée de la somme de tous les monômes de  $\phi$  pour lesquels les puissances des  $x_i$  sont égales à celles des  $y_i$ ,

$$[\phi](\omega_1, \omega_2) := \sum_{n \in \mathbb{N}^2} c_{n, n} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}.$$

On énonce un premier lemme, à  $\varepsilon$  fixé.

**Lemme C.3** On considère un Hamiltonien de la forme (C.3), avec les hypothèses (C.4).

(i) Pour tout  $\varepsilon$  il existe un changement de coordonnées sous forme de série formelle

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) = \tilde{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\tilde{\varphi}_{1, \varepsilon}, \tilde{\psi}_{1, \varepsilon}, \tilde{\varphi}_{2, \varepsilon}, \tilde{\psi}_{2, \varepsilon})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),$$

et des séries formelles de 2 variables,  $\tilde{a}_{i, \varepsilon}$  et  $\tilde{b}_{i, \varepsilon}$  pour  $i = 1, 2$  avec

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, \varepsilon) = x + \mathcal{O}(|x|^2)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{1, \varepsilon}(\omega_1, \omega_2) &= \alpha_1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), & \tilde{a}_{2, \varepsilon}(\omega_1, \omega_2) &= i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), \\ \tilde{b}_{1, \varepsilon}(\omega_1, \omega_2) &= -\alpha_1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), & \tilde{b}_{2, \varepsilon}(\omega_1, \omega_2) &= -i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), \end{aligned}$$

tels que le système associé au Hamiltonien s'écrive dans les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \tilde{a}_{1, \varepsilon}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_1 \\ \dot{\eta}_1 &= \tilde{b}_{1, \varepsilon}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_1 \\ \dot{\xi}_2 &= \tilde{a}_{2, \varepsilon}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_2 \\ \dot{\eta}_2 &= \tilde{b}_{2, \varepsilon}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_2. \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

(ii) Pour tout  $\varepsilon$ , on a existence et unicité de  $\tilde{F}_\varepsilon$ ,  $\tilde{a}_{i, \varepsilon}$  et  $\tilde{b}_{i, \varepsilon}$  dès qu'on a la donnée des 4 séries formelles

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{1, \varepsilon} \\ \xi_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{1, \varepsilon} \\ \eta_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\varphi}_{2, \varepsilon} \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_{2, \varepsilon} \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

quelconques de la forme  $1 + \mathcal{O}(\omega_1, \omega_2)$ .

(iii) Si  $\tilde{F}_\varepsilon$  est une série formelle vérifiant (i), alors  $\tilde{F}_\varepsilon'$  vérifie aussi (i) si et seulement si il existe des séries formelles  $\Phi_i, \Psi_i$  telles que

$$\begin{aligned} \Phi_i(\omega_1, \omega_2) &= 1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), & \Psi_i(\omega_1, \omega_2) &= 1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), \\ \tilde{F}_\varepsilon'(\xi, \eta) &= \tilde{F}_\varepsilon(\Phi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_1, \Psi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_1, \Phi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_2, \Psi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_2). \end{aligned}$$

(iv) Nécessairement, on trouve  $a_{1, \varepsilon} = -b_{1, \varepsilon}$  et  $a_{2, \varepsilon} = -b_{2, \varepsilon}$ .

(v) De plus, si les 4 séries (C.8) sont des séries convergentes, alors  $\tilde{F}_\varepsilon$ ,  $\tilde{a}_{i, \varepsilon}$  et  $\tilde{b}_{i, \varepsilon}$  sont elles aussi convergentes, i.e. sont analytiques sur un disque.

**”Démonstration”** : dans ce lemme, le (v) est en fait l’énoncé du résultat obtenu si on applique à notre cas le théorème démontré par Moser dans [52]. Et (i) – (iv) sont les différentes étapes de la démonstration de son théorème (toujours énoncées dans notre cas) : (i) et (ii) sont ce qu’il démontre dans sa partie 2, (iv) est le lemme énoncé dans sa partie 3, et (iii) est son étape I de démonstration de ce lemme. Le (v) est ce qu’il démontre dans sa partie 4. On énonce ici explicitement ces résultats partiels car ils vont nous être utiles.

La démonstration s’appuie sur le fait que le changement de coordonnées  $F_{\underline{\varepsilon}}$  met le système initial (C.6) sous la forme voulue (C.7) si et seulement si le système suivant est vérifié

$$\begin{cases} \alpha_1 \tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}} + f_{1,0}(\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}) + \nu f_{1,\underline{\varepsilon}}(\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}) = (\tilde{a}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + \tilde{a}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}} \\ -\alpha_1 \tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}} + g_{1,0}(\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}) + \nu g_{1,\underline{\varepsilon}}(\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}) = (\tilde{a}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + \tilde{a}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}} \\ i \frac{\alpha_2(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2} \tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}} + \nu f_{1,\underline{\varepsilon}}(\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}) = (\tilde{a}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + \tilde{a}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}} \\ -i \frac{\alpha_2(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2} \tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}} + \nu g_{1,\underline{\varepsilon}}(\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}) = (\tilde{a}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + \tilde{a}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

où on a noté

$$D_1 := \xi_1 \partial_{\xi_1} - \eta_1 \partial_{\eta_1}, \quad D_2 := \xi_2 \partial_{\xi_2} - \eta_2 \partial_{\eta_2}. \quad (\text{C.10})$$

**Lemme C.4** *En notant  $F_{\underline{\varepsilon}} = (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}})$ ,  $a_{i,\underline{\varepsilon}}$  les fonctions dont l’existence est montrée dans le lemme C.3 pour le choix*

$$\begin{bmatrix} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} \\ \xi_1 \end{bmatrix} = 1 = \begin{bmatrix} \psi_{1,\underline{\varepsilon}} \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} \\ \eta_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

on a

(i)  $F_{(\underline{\varepsilon},0,0)}$  et  $a_{1,(\underline{\varepsilon},0,0)}$  sont indépendants de  $\underline{\varepsilon}$ . On les note alors  $a_{1,0}$  et

$$F_{(\underline{\varepsilon},0,0)} := F_0 = (\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \psi_{2,0}),$$

et on a

$$\begin{aligned} F_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= (\varphi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2) \\ a_{1,(\underline{\varepsilon},0,0)}(\omega_1, \omega_2) &= a_{1,0}(\omega_1), \quad a_{2,(\underline{\varepsilon},0,0)}(\omega_1, \omega_2) = i \frac{\alpha_2(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2}. \end{aligned}$$

(ii) Il existe une série entière convergente  $\mathcal{M}$  de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$\forall \underline{\varepsilon} \leq \varepsilon_0, \quad (F_{\underline{\varepsilon}} - F_0)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec \nu (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

**Démonstration de (i)**

$F_{\underline{\varepsilon}} = F_{(\underline{\varepsilon},0,0)}$  vérifie le système (C.9) qui devient, pour  $\nu = \mu = 0$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} + f_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}) &= (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + a_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} \\ -\alpha_1 \psi_{1,\underline{\varepsilon}} + g_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}) &= (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + a_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \psi_{1,\underline{\varepsilon}} \\ i \frac{\alpha_2(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} &= (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + a_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} \\ -i \frac{\alpha_2(\underline{\varepsilon})}{\underline{\varepsilon}^2} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} &= (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_1 + a_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) D_2) \psi_{2,\underline{\varepsilon}}. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

Montrons qu'on peut bien construire des solutions pour ce système vérifiant (C.11), indépendantes de  $\varepsilon$  et telles que

$$\begin{aligned} F_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2), \\ a_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) &= a_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1), \quad a_{2,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) = i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Pour cela, on remplace dans (C.12) par des fonctions de cette forme. On va montrer qu'on a bien existence, et que les conditions imposées ne font pas intervenir  $\varepsilon$ . (C.12) devient alors, en utilisant aussi la forme de  $D_1$  et  $D_2$ , définis par (C.10) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) + f_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1)) = a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) D_1 \varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) \\ -\alpha_1 \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) + g_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1)) = a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) D_1 \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) \\ i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \xi_2 = i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \xi_2 \\ -i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \eta_2 = i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (-\eta_2). \end{array} \right. \quad (C.13)$$

Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'on peut construire  $\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, a_{1,\underline{\varepsilon}}$  solutions des 2 premières équations du système. Pour cela on utilise la (iv) du lemme : on va montrer qu'il existe  $a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1)$  et  $b_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1)$  solutions, et grâce au (iv) on en déduira que  $-b_{1,\underline{\varepsilon}} = a_{1,\underline{\varepsilon}}$  est bien solution. Or le sous système constitué des 2 premières équation de (C.12) est dans ce cas

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 \varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) + f_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}) = (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) \xi_1 \partial_{\xi_1} + b_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) \eta_1 \partial_{\eta_1}) \varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) \\ -\alpha_1 \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) + g_{1,0}(\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}) = (a_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) \xi_1 \partial_{\xi_1} + b_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1) \eta_1 \partial_{\eta_1}) \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1). \end{array} \right. \quad (C.14)$$

On montre que ce système a des solutions exactement de la même manière que Moser a montré l'existence de solutions pour un système de dimension plus grande : on développe  $\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, a_{1,\underline{\varepsilon}}$  et  $b_{1,\underline{\varepsilon}}$  en séries formelles

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) &:= \xi_1 + \sum_{N=2}^{+\infty} \varphi_1^N(\xi_1, \eta_1), & \psi_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1) &:= \xi_1 + \sum_{N=2}^{+\infty} \psi_1^N(\xi_1, \eta_1), \\ a_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1) &:= \alpha_1 + \sum_{N=1}^{+\infty} a_1^N(\omega_1), & b_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1) &:= -\alpha_1 + \sum_{N=1}^{+\infty} b_1^N(\omega_1). \end{aligned}$$

où les  $\varphi_1^N, \psi_1^N, a_1^N$  et  $b_1^N$  sont des polynômes homogènes de degré  $N$ . En écrivant le système réduit (C.14) au degré  $N \geq 2$ , on trouve alors un système de la forme

$$\alpha_1 \varphi_1^N - \alpha_1 D_1 \varphi_1^N - \xi_1 a_1^{N-1} = \mathcal{F}_N(\varphi_1^M, \psi_1^M, a_1^{M-1}, M < N), \quad (C.15)$$

$$-\alpha_1 \psi_1^N - \alpha_1 D_1 \psi_1^N - \eta_1 b_1^{N-1} = \mathcal{G}_N(\varphi_1^M, \psi_1^M, a_1^{M-1}, M < N). \quad (C.16)$$

Pour résoudre l'équation (C.15), on étudie l'opérateur  $(Id - D_1)$  sur les polynômes, son action sur les monômes est

$$(Id - D_1) \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} = (1 - (m_1 - n_1)) \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1}. \quad (C.17)$$

Cet opérateur a donc pour noyau l'espace vectoriel engendré par les monômes de la forme  $\xi_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$ , et est bijectif sur l'espace vectoriel engendré par les autres monômes. On peut alors construire les  $\varphi_1^N, \psi_1^N, a_1^N$  et  $b_1^N$  par récurrence sur  $N$  :

- pour  $N = 1$ , on initialise par les termes de degré respectivement 1 ou 0, déjà choisis
- pour  $\xi_1 a_1^{N-1}(\xi_1 \eta_1)$  on choisit la somme des monômes de la forme  $\xi_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$  du polynôme  $-\mathcal{F}_N(\varphi_1^M, \psi_1^M, a_1^{M-1}, M < N)$ , et idem pour  $b_1^{N-1}$ ,
- pour  $\varphi_1^N(\xi_1, \eta_1)$  on choisit l'inverse par  $(Id - D_1)$  de

$$\mathcal{F}_N(\varphi_1^M, \psi_1^M, a_1^{M-1}, M < N) - \xi_1 a_1^{N-1}(\xi_1 \eta_1)$$

dans l'espace engendré par les monômes différents de  $\xi_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$ , bien défini ici car on a éliminé les monômes de la forme  $\xi_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$  dans  $\mathcal{F}_N$ . Et de même avec  $\psi_1^N$ , sans monômes de la forme  $\eta_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$ .

Cette construction convient bien, car :

- on a bien alors  $\left[ \frac{\varphi_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] = 1 = \left[ \frac{\psi_{1,\varepsilon}}{\eta_1} \right]$  car cela revient pour  $\varphi_{1,\varepsilon}$  à dire que le seul monôme de la forme  $\xi_1(\xi_1 \eta_1)^{n_1}$  est  $\xi_1$ , ce qui correspond au choix qu'on a fait ci-dessus,
  - le système (C.14) dont  $(\varphi_{1,(\varepsilon,0,0)}, \psi_{1,(\varepsilon,0,0)})$  est solution ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et on avait unicité des solutions  $(\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})$  par le (ii) du lemme C.3, donc  $(\varphi_{1,(\varepsilon,0,0)}, \psi_{1,(\varepsilon,0,0)})$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ .
- Ceci conclut la démonstration de (i).  $\square$

**Démonstration de (ii)** On pose

$$F'_\varepsilon = (\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}, \psi'_{2,\varepsilon}) := \frac{1}{\nu}(F_\varepsilon - F_0), \quad a'_{i,\varepsilon} := \frac{1}{\nu}(a_{i,\varepsilon} - a_{i,0}).$$

Voici le plan de la démonstration

**Étape 1** On écrit d'abord le système vérifié par les  $(\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}, \psi'_{2,\varepsilon})$ , en se servant du système (C.9) vérifié par les  $(\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon}, \varphi_{2,\varepsilon}, \psi_{2,\varepsilon})$ . On en déduit un système (C.19) d'inégalités au sens  $\prec$  ( $\prec$  est définie dans la partie B).

**Étape 2** On introduit deux familles de séries formelles  $M_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$ , et on montre que  $M_\varepsilon$  majore les  $\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}$  et  $\psi'_{2,\varepsilon}$  (au sens  $\prec$ ).

**Étape 3** Dans le système d'inégalités (C.19), on minore les membres de gauche en fonction de  $M_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$ .

**Étape 4** On majore les membres de droite de (C.19) en fonction de  $M_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$ .

**Étape 5** On en déduit que  $N_\varepsilon := M_\varepsilon + \omega A_\varepsilon$  vérifie une inégalité fonctionnelle indépendante de  $\varepsilon$ .

**Étape 6** On construit alors une série majorante  $Z$  (indépendante de  $\varepsilon$ ) de  $N_\varepsilon$ , et qui majore donc aussi les  $\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}$  et  $\psi'_{2,\varepsilon}$ .

On utilise dans cette démonstration les notions de valeur absolue et de max associées à la relation d'ordre  $\prec$  (voir Définition B.2).

**Étape 1.** En écrivant le système (C.9) avec

$$F_\varepsilon = F_0 + \nu F'_\varepsilon = (\varphi_{1,0} + \nu \varphi'_{1,\varepsilon}, \cdot, \psi_{2,0} + \nu \psi'_{2,\varepsilon}),$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}) + f_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) + \nu f_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) \\ \quad = \left( (a_{1,0} + \nu a'_{1,\varepsilon})D_1 + (a_{2,0} + \nu a'_{2,\varepsilon})D_2 \right) (\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}) \\ -\alpha_1(\psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) + g_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) + \nu g_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) \\ \quad = \left( (a_{1,0} + \nu a'_{1,\varepsilon})D_1 + (a_{2,0} + \nu a'_{2,\varepsilon})D_2 \right) (\psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) \\ i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}(\varphi_{2,0} + \nu\varphi'_{2,\varepsilon}) + \nu f_{2,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) = \left( (a_{1,0} + \nu a'_{1,\varepsilon})D_1 + (a_{2,0} + \nu a'_{2,\varepsilon})D_2 \right) (\varphi_{2,0} + \nu\varphi'_{2,\varepsilon}) \\ -i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}(\psi_{2,0} + \nu\psi'_{2,\varepsilon}) + \nu g_{2,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) = \left( (a_{1,0} + \nu a'_{1,\varepsilon})D_1 + (a_{2,0} + \nu a'_{2,\varepsilon})D_2 \right) (\psi_{2,0} + \nu\psi'_{2,\varepsilon}). \end{array} \right.$$

En soustrayant à ce système le système pris pour  $\nu = 0$ , vérifié par  $F_0$ , puis en divisant par  $\nu$ , on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1\varphi'_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\nu} \left( f_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) - f_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) \right) + f_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) \\ \quad = (a_{1,0}D_1 + a_{2,0}D_2)\varphi'_{1,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}) \\ -\alpha_1\psi'_{1,\varepsilon} + \frac{1}{\nu} \left( g_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) - g_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) \right) + g_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) \\ \quad = (a_{1,0}D_1 + a_{2,0}D_2)\psi'_{1,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) \\ i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\varphi'_{2,\varepsilon} + f_{2,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) = (a_{1,0}D_1 + a_{2,0}D_2)\varphi'_{2,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\varphi_{2,0} + \nu\varphi'_{2,\varepsilon}) \\ -i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\psi'_{2,\varepsilon} + g_{2,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) = (a_{1,0}D_1 + a_{2,0}D_2)\psi'_{2,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\psi_{2,0} + \nu\psi'_{2,\varepsilon}). \end{array} \right.$$

On remplace  $a_{2,0}$ ,  $\varphi_{2,0}$ ,  $\psi_{2,0}$  par leur expression explicite trouvée au (i), et on utilise le fait que

$$D_2\varphi_{1,0} = 0 = D_2\psi_{1,0} = D_1\varphi_{2,0} = D_1\psi_{2,0},$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \alpha_1 - \alpha_1 D_1 - i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2 \right) \varphi'_{1,\varepsilon} - \xi_1 a'_{1,\varepsilon} \\ \quad = (a_{1,0} - \alpha_1)D_1\varphi'_{1,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\varphi_{1,0} - \xi_1 + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}) \\ \quad \quad - f_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) + \frac{1}{\nu} \left( f_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) - f_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu\psi'_{1,\varepsilon}) \right) \\ (idem \text{ avec } \psi) \\ \left( i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} - \alpha_1 D_1 - i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2 \right) \varphi'_{2,\varepsilon} - \xi_2 a'_{2,\varepsilon} \\ \quad = (a_{1,0} - \alpha_1)D_1\varphi'_{2,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)\nu\varphi'_{2,\varepsilon} - f_{2,\varepsilon}(F_0 + \nu F'_\varepsilon) \\ (idem \text{ avec } \psi). \end{array} \right. \tag{C.18}$$

On peut voir ce système comme des égalités sur les coefficients des séries entières en  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  puis comme des égalités sur les valeurs absolues des coefficients. Par définition des  $\varphi_{i,\varepsilon}$ ,  $\psi_{i,\varepsilon}$  et des  $a_{i,\varepsilon}$ , dans les membres de gauche des équations, il n'y a pas de monômes communs entre

$$\left( \alpha_1(I - D_1) - i\frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2 \right) \varphi'_{1,\varepsilon} \quad \text{et} \quad \xi_1 a'_{1,\varepsilon}.$$

En effet, dans le premier terme il n'y a pas de monômes de la forme  $\xi_1(\xi_1\eta_1)^{n_1}(\xi_2\eta_2)^{n_2}$  (cf l'action de l'opérateur sur les monômes comme dans (C.17)), donc avec chaque équation



du système (C.18), on obtient en fait deux inégalités au sens  $\prec$  ( $|\cdot|$  dans le système suivant est défini dans la définition B.2),

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \left( \alpha_1(I-D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2 \right) \varphi'_{1,\varepsilon} \right| \prec \left| (a_{1,0} - \alpha_1) D_1 \varphi'_{1,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon} D_1 + a'_{2,\varepsilon} D_2) (\varphi_{1,0} - \xi_1 + \nu \varphi'_{1,\varepsilon}) \right. \\ \quad \left. - f_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F_\varepsilon) + \frac{1}{\nu} \left( f_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) - f_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu \varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu \psi'_{1,\varepsilon}) \right) \right|, \\ \left| \xi_1 a'_{1,\varepsilon} \right| \prec \left| (a_{1,0} - \alpha_1) D_1 \varphi'_{1,\varepsilon} + (a'_{1,\varepsilon} D_1 + a'_{2,\varepsilon} D_2) (\varphi_{1,0} - \xi_1 + \nu \varphi'_{1,\varepsilon}) \right. \\ \quad \left. - f_{1,\varepsilon}(F_0 + \nu F_\varepsilon) + \frac{1}{\nu} \left( f_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) - f_{1,0}(\varphi_{1,0} + \nu \varphi'_{1,\varepsilon}, \psi_{1,0} + \nu \psi'_{1,\varepsilon}) \right) \right|, \\ \text{idem avec les 3 autres équations du système (C.18)} \end{array} \right. \quad (\text{C.19})$$

**Étape 2.** On va alors introduire 2 familles de séries formelles  $M_\varepsilon$  et  $A_\varepsilon$ , puis montrer que  $M_\varepsilon$  est un majorant des  $\varphi'_{1,\varepsilon}, \psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}$  et  $\psi'_{2,\varepsilon}$  pour la relation  $\prec$ . On introduit

$$\begin{aligned} M_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &:= \max_{\prec} \left\{ \max_{\prec} (D_1 \varphi'_{1,\varepsilon}, D_2 \psi'_{1,\varepsilon}) + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]|, \max_{\prec} (D_1 \psi'_{1,\varepsilon}, D_2 \varphi'_{1,\varepsilon}) + |[\psi'_{1,\varepsilon}]| \right. \\ &\quad \left. \max_{\prec} (D_1 \varphi'_{2,\varepsilon}, D_2 \psi'_{2,\varepsilon}) + |[\varphi'_{2,\varepsilon}]|, \max_{\prec} (D_1 \psi'_{2,\varepsilon}, D_2 \varphi'_{2,\varepsilon}) + |[\psi'_{2,\varepsilon}]| \right\} \\ A_\varepsilon(\omega_1, \omega_2) &:= \max_{\prec} \{ a'_{1,\varepsilon}, a'_{2,\varepsilon} \}. \end{aligned}$$

– **Montrons qu'on a alors**

$$|\varphi'_{1,\varepsilon}|, |\psi'_{1,\varepsilon}|, |\varphi'_{2,\varepsilon}| \text{ et } |\psi'_{2,\varepsilon}| \prec M_\varepsilon. \quad (\text{C.20})$$

On va seulement montrer que

$$|\varphi'_{1,\varepsilon}|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec M_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2),$$

la méthode est la même ensuite pour  $|\psi_{1,\varepsilon}|, |\varphi_{2,\varepsilon}|$  et  $|\psi_{2,\varepsilon}|$ . Notons

$$\varphi'_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) := \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} c_{(m,n)} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \max_{\prec} (D_1 \varphi'_{1,\varepsilon}, D_2 \psi'_{1,\varepsilon}) + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]| &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} |c_{(m,n)}| \max \{ |m_1 - n_1|, |m_2 - n_2| \} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2} \\ &\quad + \sum_{n \in \mathbb{N}^2} |c_{(n,n)}| (\xi_1 \eta_1)^{n_1} (\xi_2 \eta_2)^{n_2}, \\ \max_{\prec} (D_1 \varphi'_{1,\varepsilon}, D_2 \psi'_{1,\varepsilon}) + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]| &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} |c_{(m,n)}| \max \{ |m_1 - n_1|, |m_2 - n_2|, 1 \} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2} \quad (\text{C.21}) \end{aligned}$$

Et on a

$$|c_{(m,n)}| \max \{ |m_1 - n_1|, |m_2 - n_2|, 1 \} \geq |c_{(m,n)}|,$$

donc

$$|\varphi'_{1,\varepsilon}| \prec M_\varepsilon.$$

Ainsi, on a bien démontré (C.20).

**Étape 3.** Montrons qu'on a la minoration suivante pour le membre de gauche dans (C.19)

$$\min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{4}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\} \cdot \left( \max_{\prec} (D_1 \varphi'_{1,\varepsilon}, D_2 \varphi'_{2,\varepsilon}) + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]| \right) \prec \left| \left( \alpha_1 (I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi'_{1,\varepsilon} \right|. \quad (\text{C.22})$$

En effet, en notant

$$\varphi'_{1,\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} c_{(m,n)} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2},$$

le membre de droite de (C.22) vérifie

$$\begin{aligned} & \left| \left( \alpha_1 (I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi'_{1,\varepsilon} \right|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} |c_{(m,n)}| \left| \alpha_1 (1 - (m_1 - n_1)) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (m_2 - n_2) \right| \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2} \\ &\succ \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \frac{|c_{(m,n)}|}{2} \left( |\alpha_1 (1 - (m_1 - n_1))| + \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (m_2 - n_2) \right| \right) \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2} \end{aligned}$$

car  $\alpha_1, \alpha_2$  réels. Or, on a déjà explicité le membre de gauche de (C.22) dans l'égalité (C.21). On voit alors que pour démontrer (C.22), il ne reste plus qu'à montrer que pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^2$  on a

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{4}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\} |c_{(m,n)}| \max \{ |m_1 - n_1|, |m_2 - n_2|, 1 \} \\ & \leq \frac{|c_{(m,n)}|}{2} \left( |\alpha_1 (1 - (m_1 - n_1))| + \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (m_2 - n_2) \right| \right). \end{aligned}$$

On distingue selon les valeurs de  $(m, n)$ .

– Si  $m_1 = n_1 + 1$  et  $m_2 = n_2$ , alors on a  $c_{(m,n)} = 0$ . Cela vient du fait que  $\varphi'_{1,\varepsilon}$  n'a pas de monômes de la forme  $\xi_1 (\xi_1 \eta_1)^{n_1} (\xi_2 \eta_2)^{n_2}$ , car, par la définition de  $F_{\varepsilon}$ ,

$$\left[ \frac{\varphi'_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] = \frac{1}{\nu} \left( \left[ \frac{\varphi_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] - \left[ \frac{\varphi_{1,0}}{\xi_1} \right] \right) = 1 - 1 = 0.$$

– Si  $m_1 \neq n_1 + 1$  ou  $m_2 \neq n_2$ , majorons chacun des termes du max dans le membre de gauche. On a  $|1 - (m_1 - n_1)|$  ou  $|m_2 - n_2|$  est  $\geq 1$ . Donc

$$|\alpha_1| |1 - (m_1 - n_1)| + \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right| |m_2 - n_2| \geq \min \left\{ |\alpha_1|, \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right| \right\} \cdot 1.$$

On a par ailleurs

$$\left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right| |m_2 - n_2| \geq \min(|\alpha_1|, \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right|) |m_2 - n_2|.$$

Et comme  $m_1 \neq n_1 + 1$  ou  $m_2 \neq n_2$ ,

$$|m_1 - n_1| \leq |1 - (m_1 - n_1)| + 1 \leq 2|1 - (m_1 - n_1)| + |m_2 - n_2|,$$

d'où

$$\min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{2}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right\} |m_1 - n_1| \leq |\alpha_1| |1 - (m_1 - n_1)| + \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right| |m_2 - n_2|.$$

On a donc bien pour tous  $m, n \in \mathbb{N}^2$ ,

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{4}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\} |c_{(m,n)}| \max \{ |m_1 - n_1|, |m_2 - n_2|, 1 \} \\ & \leq \frac{|c_{(m,n)}|}{2} \left( |\alpha_1(1 - (m_1 - n_1))| + \left| \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} (m_2 - n_2) \right| \right). \end{aligned}$$

**Et donc on a démontré (C.22).**

On a ensuite le même type d'inégalités pour  $\psi'_{1,\varepsilon}, \varphi'_{2,\varepsilon}, \psi'_{2,\varepsilon}$ , on obtient donc

$$\min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{4}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\} M_{\underline{\varepsilon}} \prec \max \left( \left| \left( \alpha_1(I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi'_{1,\varepsilon} \right|, \left| \left( \alpha_1(I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \psi'_{1,\varepsilon} \right|, \left| \left( \alpha_1(I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \varphi'_{2,\varepsilon} \right|, \left| \left( \alpha_1(I - D_1) - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right) \psi'_{2,\varepsilon} \right| \right).$$

**Étape 4 :** A partir de maintenant on travaille en voyant toutes les séries entières en  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  comme des séries à une seule variable  $\omega$ , en prenant leurs valeurs en  $(\omega, \omega, \omega, \omega)$ . Les inégalités  $\prec$  sont conservées par ce changement de variables.

Comme on sait que  $\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \psi_{2,0}$  et  $a_{1,0} - \alpha_1$  sont des séries convergentes (par Lemme C.3) sans terme de degré 0, on sait (cf Lemme B.3) qu'il existe  $c$  et  $\gamma$  tels que

$$\varphi_{i,0}(\omega, \omega, \omega, \omega), \psi_{i,0}(\omega, \omega, \omega, \omega) \prec c \frac{\omega}{1 - \gamma\omega}, \quad a_{1,0}(\omega^2) - \alpha_1 \prec c \frac{\omega^2}{1 - \gamma\omega}. \quad (\text{C.23})$$

De même pour  $f_{1,0}, g_{1,0}$ , qui sont sans termes de degré 0 ou 1

$$f_{1,0}, g_{1,0}(\omega, \omega) \prec c \frac{\omega^2}{1 - \gamma\omega}. \quad (\text{C.24})$$

On a aussi une telle majoration, uniforme en  $\underline{\varepsilon}$ , pour les  $f_{1,\underline{\varepsilon}}, g_{1,\underline{\varepsilon}}, f_{2,\underline{\varepsilon}}$  et  $g_{2,\underline{\varepsilon}}$ , car on a une régularité  $\mathcal{C}^0$  en  $\underline{\varepsilon}$  des ces fonctions dans  $\left( \mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{C}^4}(0, \rho_1), \mathbb{C}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}} \right)$ , et donc une majoration en norme  $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$  uniforme en  $\underline{\varepsilon}$ . De plus, les  $f_{1,\underline{\varepsilon}}, g_{1,\underline{\varepsilon}}, f_{2,\underline{\varepsilon}}$  et  $g_{2,\underline{\varepsilon}}$  sont aussi sans monômes de degré 0 ou 1. On obtient donc aussi

$$f_{1,\underline{\varepsilon}}, g_{1,\underline{\varepsilon}}, f_{2,\underline{\varepsilon}}, g_{2,\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega) \prec c \frac{\omega^2}{1 - \gamma\omega}. \quad (\text{C.25})$$

En voyant les inégalités du système (C.19) comme des inégalités  $\prec$  dans l'ensemble des séries formelles à une seule variable  $\omega$  (cf Lemme B.3). Cherchons à majorer les différents termes des membres de droite de (C.19) en fonction de  $M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega)$  et de  $A_{\underline{\varepsilon}}(\omega^2, \omega^2)$ .

$$\begin{aligned}
|(a_{1,0} - \alpha_1)D_1\varphi'_{1,\varepsilon}|(\omega, \omega, \omega, \omega) &< c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} (|D_1\varphi'_{1,\varepsilon}| + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]|) (\omega, \omega, \omega, \omega) \\
&< c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega); \\
|(a'_{1,\varepsilon}D_1 + a'_{2,\varepsilon}D_2)(\varphi_{1,0} - \xi_1 + \nu\varphi'_{1,\varepsilon})| &< A_{\underline{\varepsilon}}(\omega^2, \omega^2) \left( 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega) + c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} \right); \\
|f_{1,\varepsilon}(F_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega))| &< |f_{1,\varepsilon}|(|\varphi_{1,0}| + \dots + |\psi_{2,0}| + \nu(|\varphi'_{1,\varepsilon}| + \dots + |\psi'_{2,\varepsilon}|), \dots, \\
&\quad \dots, |\varphi_{1,0}| + \dots + |\psi_{2,0}| + \nu(|\varphi'_{1,\varepsilon}| + \dots + |\psi'_{2,\varepsilon}|)) \\
&< c \frac{\left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega)\right)^2}{1-\gamma \left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega)\right)}; \\
\frac{1}{\nu} (f_{1,0}(\varphi_{1,0}, \psi_{1,0}) - f_{1,0}(\varphi_{1,\varepsilon}, \psi_{1,\varepsilon})) &< \frac{1}{\nu} |Df_{1,0}| (|\varphi_{1,0}| + |\psi_{1,0}| + \nu(|\varphi'_{1,\varepsilon}| + |\psi'_{1,\varepsilon}|)) \cdot \nu(|\varphi'_{1,\varepsilon}| + |\psi'_{1,\varepsilon}|) \\
&< c \frac{2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega)}{1-\gamma \left(2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega)\right)} 2M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega).
\end{aligned}$$

**Étape 5 :** En partant du système (C.19), dans lequel on majore les membres de droites par ces dernières inégalités, et on minore les membres de gauche grâce à l'utilisation de l'étape 3, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\min \left\{ \frac{|\alpha_1|}{4}, \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{2\varepsilon^2} \right\} \cdot \left( \max(D_1\varphi'_{1,\varepsilon}, D_2\varphi'_{2,\varepsilon}) + |[\varphi'_{1,\varepsilon}]| \right) \\
< c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} M_{\underline{\varepsilon}} + A_{\underline{\varepsilon}} \left( 2\nu M_{\underline{\varepsilon}} + c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} \right) + c \frac{\left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{1-\gamma \left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} + c \frac{2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}}{1-\gamma \left(2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} 2M_{\underline{\varepsilon}} \\
\omega |a'_{1,\varepsilon}| < c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} M_{\underline{\varepsilon}} + A_{\underline{\varepsilon}} \left( 2\nu M_{\underline{\varepsilon}} + c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} \right) + c \frac{\left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{1-\gamma \left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} + c \frac{2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}}{1-\gamma \left(2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} 2M_{\underline{\varepsilon}} \\
\text{idem avec les 3 autres équations du système (C.18).}
\end{array} \right.$$

Alors, en prenant le max à gauche sur les 4 équations du système (C.18), pour lesquelles on a la même majoration à droite, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
M_{\underline{\varepsilon}} < c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} M_{\underline{\varepsilon}} + A_{\underline{\varepsilon}} \left( 2\nu M_{\underline{\varepsilon}} + c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} \right) + c \frac{\left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{1-\gamma \left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} + c \frac{2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}}{1-\gamma \left(2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} 2M_{\underline{\varepsilon}} \\
\omega A_{\underline{\varepsilon}} < c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} M_{\underline{\varepsilon}} + A_{\underline{\varepsilon}} \left( 2\nu M_{\underline{\varepsilon}} + c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} \right) + c \frac{\left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{1-\gamma \left(4c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 4\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} + c \frac{2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}}{1-\gamma \left(2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} + 2\nu M_{\underline{\varepsilon}}\right)} 2M_{\underline{\varepsilon}}.
\end{array} \right.$$

Soit alors

$$N_{\underline{\varepsilon}}(\omega) := M_{\underline{\varepsilon}}(\omega, \omega, \omega, \omega) + \omega A_{\underline{\varepsilon}}(\omega^2, \omega^2).$$

On s'est maintenant ramené à chercher un majorant de  $N_{\underline{\varepsilon}}$  uniforme en  $\underline{\varepsilon}$ . Où  $N_{\underline{\varepsilon}}$  vérifie l'inégalité

$$\begin{aligned}
N_{\underline{\varepsilon}}(\omega) &< 2c \frac{\omega^2}{1-\gamma\omega} N_{\underline{\varepsilon}}(\omega) + 2\nu \frac{N_{\underline{\varepsilon}}(\omega)^2}{\omega} + 2c \frac{\omega}{1-\gamma\omega} N_{\underline{\varepsilon}}(\omega) \\
&\quad + 2c4^2 \frac{\left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}\right)^2}{1-4\gamma\left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}\right)} + 8cN_{\underline{\varepsilon}} \frac{\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}}{1-2\gamma\left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}\right)} \\
&< c' \frac{\omega}{1-\gamma\omega} N_{\underline{\varepsilon}} + 2\nu \frac{N_{\underline{\varepsilon}}^2}{\omega} + c' \frac{\left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}\right) \left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + (1+\nu)N_{\underline{\varepsilon}}\right)}{1-\gamma' \left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu N_{\underline{\varepsilon}}\right)}. \quad (\text{C.26})
\end{aligned}$$

Or, par la définition de  $N_{\underline{\varepsilon}}$ , comme les  $\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}$  et  $\psi_{2,\underline{\varepsilon}}$  n'ont pas de monômes de degré 0 ou 1 et les  $a_{i,\underline{\varepsilon}}$  n'ont pas de monômes de degré 0, nécessairement,  $N_{\underline{\varepsilon}}$  s'écrit

$$N_{\underline{\varepsilon}} = \omega^2 N'_{\underline{\varepsilon}}(\omega),$$

où  $N'_{\underline{\varepsilon}}$  est aussi une série formelle. Et l'inégalité (C.26) se réécrit alors

$$N'_{\underline{\varepsilon}} < c' \frac{c'\omega}{1-\gamma\omega} N'_{\underline{\varepsilon}} + 2\nu\omega N'^2_{\underline{\varepsilon}} + c' \frac{\left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + \nu\omega N'_{\underline{\varepsilon}}\right) \left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + (1+\nu)\omega N'_{\underline{\varepsilon}}\right)}{1-\gamma' \left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \nu\omega^2 N'_{\underline{\varepsilon}}\right)}.$$

On a alors pour  $\nu \leq 1$ ,

$$N'_{\underline{\varepsilon}} < c' \frac{c'\omega}{1-\gamma\omega} N'_{\underline{\varepsilon}} + 2\omega N'^2_{\underline{\varepsilon}} + c' \frac{\left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + \omega N'_{\underline{\varepsilon}}\right) \left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + 2\omega N'_{\underline{\varepsilon}}\right)}{1-\gamma' \left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \omega^2 N'_{\underline{\varepsilon}}\right)}, \quad (\text{C.27})$$

qui est une inégalité fonctionnelle en  $N'_{\underline{\varepsilon}}$  indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ .

**Étape 6 :** Si on arrive à construire  $Z$  série entière convergente telle que

$$Z(\omega) = c' \frac{c'\omega}{1-\gamma\omega} Z(\omega) + 2\omega Z^2 + c' \frac{\left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + \omega Z\right) \left(\frac{c}{1-\gamma\omega} + 2\omega Z\right)}{1-\gamma' \left(\frac{c\omega}{1-\gamma\omega} + \omega^2 Z\right)}, \quad (\text{C.28})$$

et telle que  $Z(0) \geq N'_{\underline{\varepsilon}}(0)$ , on pourra alors en déduire que

$$N'_{\underline{\varepsilon}}(\omega) < Z(\omega)$$

par récurrence sur les coefficients de  $N_{\underline{\varepsilon}}$  et  $Z$  grâce à l'inégalité (C.27). On aura alors une majoration telle qu'on cherchait, par une série convergente indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ .

Or, on peut bien construire une telle série entière  $Z$ , en résolvant l'équation (C.28) par le théorème des fonctions implicites analytique au voisinage de  $\omega = 0$ . En effet, pour  $\omega = 0$ , l'équation (C.28) devient

$$Z - cc' = 0.$$

Et on a

$$\partial_Z(Z - cc') = 1 \neq 0, \quad \text{pour tout } Z.$$

Et, quitte à choisir  $c$  et  $c'$  plus grands dans l'inégalité (C.27), on aura bien  $cc' \geq N'_\varepsilon(0)$ , car  $N'_\varepsilon(0)$  est uniformément bornée en  $\varepsilon$  pour  $\varepsilon \leq \varepsilon_0$  par continuité en  $\varepsilon$  de toutes les fonctions analytiques intervenant dans sa définition. On a donc finalement montré qu'il existe une série entière convergente  $Z$  telle que

$$N'_\varepsilon(\omega) \prec Z(\omega).$$

D'où

$$M_\varepsilon(\omega, \omega, \omega, \omega) \prec \omega^2 Z(\omega),$$

et donc

$$M_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec M_\varepsilon(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2, \dots, \xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2) \prec (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 Z(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

Enfin, grâce à (C.20), on en déduit que

$$|\varphi'_{1,\varepsilon}|, |\psi'_{1,\varepsilon}|, |\varphi'_{2,\varepsilon}| \text{ et } |\psi'_{2,\varepsilon}|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 Z(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

Et de même on obtient

$$|a'_{i,\varepsilon}|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec (\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2) Z(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

□

### C.3 Construction de la famille de changements de coordonnées canoniques $F_\varepsilon^*$

Dans cette partie, on construit d'abord, à  $\varepsilon$  fixé, le changement de coordonnées canonique  $F_\varepsilon^*$ . On montre ensuite des propriétés particulières de  $F_{(\varepsilon,0,0)}^*$  puis on majore la différence  $F_\varepsilon^* - F_{(\varepsilon,0,0)}^*$ .

Pour construire  $F_\varepsilon^*$ , on construit, de manière non unique, un premier changement de coordonnées canonique sous forme de série formelle, qu'on appelle  $\tilde{F}_\varepsilon$ . On définira  $F_\varepsilon^*$  en rajoutant un critère, qui permet d'avoir l'unicité, et qui permettra ainsi de trouver  $\mathcal{F}_\varepsilon$  réelle. On s'est inspiré pour cela de l'article de Rüssmann [60], qui dans un cas plus général que le nôtre montre qu'en connaissant un premier changement de coordonnées non canonique sous forme de série convergente, alors le changement de coordonnées canonique sous forme de série formelle vérifiant un critère bien choisi est lui aussi convergent. On a modifié ici légèrement le critère : on l'a choisi de manière à ce que la preuve de convergence marche encore, mais que de plus le changement de coordonnées final  $\mathcal{F}_\varepsilon$  soit bien réel. De plus, on rajoute ici la démonstration de l'existence d'un changement de coordonnées canonique vérifiant ce critère.

**Lemme C.5** *Pour tout  $\varepsilon$ ,*

(i) *Il existe un changement de coordonnées série formelle canonique*

$$\tilde{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \mathcal{O}(|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2),$$

*et un Hamiltonien série formelle à 2 variables  $K_\varepsilon$  tels que*

$$\mathbf{H}(\tilde{F}_\varepsilon((\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)), \varepsilon) = K_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = -\alpha_1 \xi_1 \eta_1 - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \xi_2 \eta_2 + \dots \quad (\text{C.29})$$

(ii) Si  $\tilde{F}_\varepsilon$  est solution de (i), alors  $\tilde{F}_\varepsilon'$  est aussi solution de (i) si et seulement si il existe une série formelle  $S(\omega_1, \omega_2)$  telle que si on note

$$\Phi_i(\omega_1, \omega_2) := e^{\partial_{\omega_i} S(\omega_1, \omega_2)}, \quad \Psi_i(\omega_1, \omega_2) := e^{-\partial_{\omega_i} S(\omega_1, \omega_2)},$$

on ait

$$\tilde{F}_\varepsilon'(\xi, \eta) = \tilde{F}_\varepsilon(\Phi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1, \Psi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_1, \Phi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2, \Psi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_2).$$

(iii) Il existe un unique changement de coordonnées série formelle canonique  $F_\varepsilon^* = (\varphi_{1,\varepsilon}^*, \psi_{1,\varepsilon}^*, \varphi_{2,\varepsilon}^*, \psi_{2,\varepsilon}^*)$  solution de (i) et tel que

$$\omega_1 \left( \left[ \frac{\varphi_{1,\varepsilon}^*}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \frac{\psi_{1,\varepsilon}^*}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) + i\omega_2 \left( \left[ \frac{\varphi_{2,\varepsilon}^*}{\xi_2} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \frac{\psi_{2,\varepsilon}^*}{\eta_2} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) = 0. \quad (\text{C.30})$$

**Remarque C.6** Le lien avec le lemme C.3 se fait en posant

$$a_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = \partial_{\omega_1} K_\varepsilon(\omega_1, \omega_2), \quad a_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = \partial_{\omega_2} K_\varepsilon(\omega_1, \omega_2).$$

**Démonstration (i)**

On construit  $\tilde{F}_\varepsilon$  par la méthode des séries génératrices. C'est-à-dire qu'on va fabriquer une série formelle  $W_\varepsilon$ , et  $\tilde{F}_\varepsilon$  sera ensuite déterminée par l'équation implicite

$$\tilde{F}_\varepsilon(\partial_{\eta_1} W_\varepsilon(x, \eta), \eta_1, \partial_{\eta_2} W_\varepsilon(x, \eta), \eta_2) = (x_1, \partial_{x_1} W_\varepsilon(x, \eta), x_2, \partial_{x_2} W_\varepsilon(x, \eta)).$$

On va chercher  $W_\varepsilon$  sous la forme

$$W_\varepsilon(x, \eta) = W_\varepsilon(x_1, \eta_1, x_2, \eta_2) = x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + \mathcal{O}(|(x, \eta)|^3),$$

car ainsi on aura

$$\tilde{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \mathcal{O}(|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2).$$

Alors (C.29) est vérifiée si et seulement si  $W_\varepsilon$  et  $K_\varepsilon$  sont des séries formelles telles que

$$\mathbf{H}((x_1, \partial_{x_1} W_\varepsilon(x, \eta), x_2, \partial_{x_2} W_\varepsilon(x, \eta)), \varepsilon) = K_\varepsilon(\partial_{\eta_1} W_\varepsilon(x, \eta), \eta_1, \partial_{\eta_2} W_\varepsilon(x, \eta), \eta_2), \quad (\text{C.31})$$

avec

$$K_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = K_\varepsilon(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2) = -\alpha_1\xi_1\eta_1 - i\frac{\omega(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + \mathcal{O}(|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^3).$$

On développe ces séries formelles en notant

$$\begin{aligned} W_\varepsilon(x, \eta) &:= \sum_{N \geq 2} W_\varepsilon^N(x, \eta), \\ \mathbf{H}(x, y, \varepsilon) &:= \sum_{N \geq 2} \mathbf{H}_\varepsilon^N(x, y), \\ K_\varepsilon(\xi, \eta) &:= \sum_{N \geq 2} K_\varepsilon^N(\xi, \eta); \end{aligned}$$

où les  $W_{\varepsilon}^N, \mathbf{H}_{\varepsilon}^N, K_{\varepsilon}^N$  sont des polynômes homogènes de degré  $N$ . On trouve alors que (C.31) est vérifiée si et seulement pour tout  $N \geq 2$ ,

$$\alpha_1 D_1 W_{\varepsilon}^N(x, \eta) + i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2 W_{\varepsilon}^N(x, \eta) - K_{\varepsilon}^N(x, \eta) = \mathcal{F}_N(W_{\varepsilon}^M, K_{\varepsilon}^M, M < N),$$

où  $\mathcal{F}_N$  ne dépend que des  $W_{\varepsilon}, K_{\varepsilon}$  pour  $M < N$  et

$$D_1 = x_1 \partial_{x_1} - \eta_1 \partial_{\eta_1}, \quad D_2 = x_2 \partial_{x_2} - \eta_2 \partial_{\eta_2}.$$

Comme  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont réels,  $\alpha_1$  et  $i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$  sont non commensurables, et on déduit de l'observation de son action sur les monômes que l'opérateur  $(\alpha_1 D_1 + i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2)$  est bijectif sur l'ensemble des séries formelles sans monômes de la forme  $(x_1 \eta_1)^m (x_2 \eta_2)^n$ . On peut donc construire les  $W_{\varepsilon}^N$  et  $K_{\varepsilon}^N$  simultanément par récurrence sur  $N$ , en choisissant à chaque étape :

- pour  $K_{\varepsilon}^N(x_1 \eta_1, x_2 \eta_2)$  on prend la somme des monômes de la forme  $(x_1 \eta_1)^m (x_2 \eta_2)^n$  de  $\mathcal{F}_N(W_{\varepsilon}^M, K_{\varepsilon}^M, M < N)$ ,
- puis pour  $W_{\varepsilon}^N$  on prend ensuite

$$W_{\varepsilon}^N(x, \eta) = (\alpha_1 D_1 + i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} D_2)^{-1} (\mathcal{F}_N(W_{\varepsilon}^M, K_{\varepsilon}^M, M < N) - K_{\varepsilon}^N(x_1 \eta_1, x_2 \eta_2)).$$

□

### ”Démonstration” de (ii)

Ce résultat est en fait démontré par Rüssmann dans [60], dans sa partie 3. Il le démontre en partant directement du résultat de Moser [52] qui est énoncé ci-dessus en (iii) du lemme C.3 : sachant déjà l'existence de séries formelles  $\Phi_i$  et  $\Psi_i$ , il cherche dans sa partie 3 à quelles conditions le changement de coordonnées

$$(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto (\Phi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_1, \Psi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_1, \Phi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_2, \Psi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_2)$$

est canonique. Ce qui est bien la question qu'on se pose pour montrer (ii). Il arrive ainsi au résultat énoncé ci-dessus. □

### Démonstration de (iii)

On a construit au (i) ci-dessus un changement de variable canonique  $\tilde{F}_{\varepsilon}$  ; il n'y avait pas unicité de la construction, ici on en choisit un fixé. En utilisant (ii), on voit que  $F_{\varepsilon}^*$  sera solution de (iii) si et seulement si

- il existe une série formelle  $S(\omega_1, \omega_2)$  telle que

$$F_{\varepsilon}^* = \tilde{F}_{\varepsilon} \left( e^{\partial_{\omega_1} S(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_1, e^{\partial_{\omega_2} S(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_2, e^{-\partial_{\omega_2} S(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_2 \right), \quad (\text{C.32})$$

- et en notant  $F_{\varepsilon}^* = (\varphi_{1,\varepsilon}^*, \psi_{1,\varepsilon}^*, \varphi_{2,\varepsilon}^*, \psi_{2,\varepsilon}^*)$ , le critère (C.30) est vérifié :

$$\omega_1 \left( \left[ \frac{\varphi_{1,\varepsilon}^*}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \frac{\psi_{1,\varepsilon}^*}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) + i \omega_2 \left( \left[ \frac{\varphi_{2,\varepsilon}^*}{\xi_2} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \frac{\psi_{2,\varepsilon}^*}{\eta_2} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) = 0.$$



En regroupant ces 2 conditions sur  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$ , cherchons les conditions que (C.30) impose sur  $S$ . En notant  $\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}} := (\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}})$ , si  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  vérifie (C.32), on a

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}^*}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2) &= e^{\partial_{\omega_1} S(\omega_1, \omega_2)} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2), & \left[ \frac{\psi_{1,\underline{\varepsilon}}^*}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2) &= e^{-\partial_{\omega_1} S(\omega_1, \omega_2)} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2), \\ \left[ \frac{\varphi_{2,\underline{\varepsilon}}^*}{\xi_2} \right] (\omega_1, \omega_2) &= e^{\partial_{\omega_2} S(\omega_1, \omega_2)} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\xi_2} \right] (\omega_1, \omega_2), & \left[ \frac{\psi_{2,\underline{\varepsilon}}^*}{\eta_2} \right] (\omega_1, \omega_2) &= e^{-\partial_{\omega_2} S(\omega_1, \omega_2)} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\eta_2} \right] (\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

On obtient alors (C.30) si et seulement si

$$\omega_1 \left( e^{\partial_{\omega_1} S} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] - e^{-\partial_{\omega_1} S} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\eta_1} \right] \right) + i\omega_2 \left( e^{\partial_{\omega_2} S} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\xi_2} \right] - e^{-\partial_{\omega_2} S} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\eta_2} \right] \right) = 0.$$

Comme  $\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \mathcal{O}(|(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)|^2)$ , on a

$$\left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] = 1 + \dots, \quad \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\eta_1} \right] = 1 + \dots, \quad \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\xi_2} \right] = 1 + \dots, \quad \left[ \frac{\tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\eta_2} \right] = 1 + \dots.$$

On écrit alors

$$\begin{aligned} e^{\partial_{\omega_1} S} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] &= e^{\partial_{\omega_1} S} + \left( \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_1} S} \\ &= 1 + \partial_{\omega_1} S + \left( e^{\partial_{\omega_1} S} - (1 + \partial_{\omega_1} S) \right) + \left( \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_1} S}. \end{aligned}$$

En injectant dans (C.30) on trouve

$$\begin{aligned} &-2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})S \\ &= \omega_1 \left[ (e^{\partial_{\omega_1} S} - (1 + \partial_{\omega_1} S)) + \left( \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_1} S} - (e^{-\partial_{\omega_1} S} - (1 - \partial_{\omega_1} S)) - \left( \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}}{\eta_1} \right] - 1 \right) e^{-\partial_{\omega_1} S} \right] \\ &+ i\omega_2 \left[ (e^{\partial_{\omega_2} S} - (1 + \partial_{\omega_2} S)) + \left( \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\xi_2} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_2} S} - (e^{-\partial_{\omega_2} S} - (1 - \partial_{\omega_2} S)) - \left( \left[ \frac{\tilde{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}}{\eta_2} \right] - 1 \right) e^{-\partial_{\omega_2} S} \right]. \end{aligned} \tag{C.33}$$

Or on déterminera  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  de manière unique si et seulement si on détermine  $S$  de manière unique à  $S(0, 0)$  près. Soit alors

$$S(\omega_1, \omega_2) := \sum_{N \geq 1} S^N(\omega_1, \omega_2),$$

où les  $S^N$  sont des polynômes homogènes de degré  $N$ . L'équation (C.33) s'écrit alors sous la forme

$$\begin{cases} -2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})S^1 &= 0, \\ -2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})S^N &= \mathcal{F}_N(S^M, 1 \leq M < N) \quad \text{pour } N \geq 2. \end{cases}$$

Étudions l'opérateur  $(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})$ . Si on écrit

$$S(\omega_1, \omega_2) := \sum_{|n| \geq 1} c_n \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2},$$

alors

$$(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})S(\omega_1, \omega_2) = \sum_{|n| \geq 1} c_n (n_1 + in_2) \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}.$$

Comme  $(n_1 + in_2) \neq 0$  pour tout  $n \neq (0, 0)$ , on voit ainsi que l'opérateur  $(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})$  est bijectif sur l'ensemble des séries formelles sans coefficient de degré 0. Ainsi on détermine les  $S^N$  de manière unique par récurrence sur  $N$  en initialisant par  $S^1(\omega_1, \omega_2) = 0$ .  $\square$

On va maintenant énoncer un lemme qui explicite la forme de  $F_{(\varepsilon, 0, 0)}^*$ .

**Lemme C.7**  $F_{(\varepsilon, 0, 0)}^*$  est indépendant de  $\varepsilon$ . On le note alors

$$F_{(\varepsilon, 0, 0)}^* = F_0^* = (\varphi_{1,0}^*, \psi_{1,0}^*, \varphi_{2,0}^*, \psi_{2,0}^*).$$

De plus,  $\varphi_{1,0}^*$  et  $\psi_{1,0}^*$  ne dépendent que des variables  $\xi_1, \eta_1$  et on a

$$\varphi_{2,0}^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \xi_2, \quad \psi_{2,0}^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \eta_2.$$

### Démonstration

On démontre ce lemme en 2 étapes :

**Étape 1 :** en procédant comme dans la démonstration du (i) du lemme C.5 on démontre qu'il existe un  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)} = \tilde{F}_0$  indépendant de  $\varepsilon$  et s'écrivant

$$\tilde{F}_0(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\tilde{\varphi}_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \tilde{\psi}_{1,0}(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2).$$

**Étape 2 :** en construisant  $F_{(\varepsilon, 0, 0)}^*$  à partir de ce  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}$  de la même manière que dans la démonstration du (iii) du lemme C.5, on montre que le  $S_{(\varepsilon, 0, 0)}$  de transition s'écrit en fait  $S(\omega_1)$  indépendamment de  $\varepsilon$ , et on en déduit le résultat.

**Étape 1** On construit  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}$  par la méthode des séries génératrices, *i.e.* en fabriquant une série formelle  $W_{(\varepsilon, 0, 0)}$  puis en déterminant  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}$  par l'équation implicite

$$\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}(\partial_{\eta_1} W_{(\varepsilon, 0, 0)}(x, \eta), \eta_1, \partial_{\eta_2} W_{(\varepsilon, 0, 0)}(x, \eta), \eta_2) = (x_1, \partial_{x_1} W_{(\varepsilon, 0, 0)}(x, \eta), x_2, \partial_{x_2} W_{(\varepsilon, 0, 0)}(x, \eta)).$$

On va montrer qu'on peut construire  $W_{(\varepsilon, 0, 0)}$  indépendant de  $\varepsilon$  et de la forme

$$W_{(\varepsilon, 0, 0)}(x, \eta) = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + W'(x_1, \eta_1).$$

On aura alors  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)} = (\tilde{\varphi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\psi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\varphi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\psi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)})$  défini par

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1, x_2, \eta_2) = x_1, \\ \tilde{\psi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1, x_2, \eta_2) = \eta_1 + \partial_{x_1} W'(x_1, \eta_1), \\ \tilde{\varphi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1, x_2, \eta_2) = x_2, \\ \tilde{\psi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1, x_2, \eta_2) = \eta_2. \end{cases}$$

De ce système d'équations dans lequel  $\varepsilon$  n'intervient pas on déduit que  $\tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)}$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et on a comme solution

$$(\tilde{\varphi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\psi}_{1,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\varphi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)}, \tilde{\psi}_{2,(\varepsilon, 0, 0)})(x, \eta) = (\tilde{\varphi}_{1,0}(x_1, \eta_1), \tilde{\psi}_{1,0}(x_1, \eta_1), x_2, \eta_2)$$

où  $\tilde{\varphi}_{1,0}, \tilde{\psi}_{1,0}$  sont les séries formelles déterminées implicitement par le système

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{1,0}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1) = x_1, \\ \tilde{\psi}_{1,0}(x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1), \eta_1) = \eta_1 + \partial_{x_1} W'(x_1, \eta_1). \end{cases}$$

Montrons alors qu'on peut construire  $W'$  et  $K'$  tels que

$$W(x, \eta) = x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 + W'(x_1, \eta_1), \quad K_{(\varepsilon, 0, 0)}(\omega_1, \omega_2) = -\alpha_1 \omega_1 - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + K'(\omega_1),$$

soient solution de

$$\mathbf{H}((x, \partial_x W(x, \eta)), (\varepsilon, 0, 0)) = K_{(\varepsilon, 0, 0)}(\partial_{\eta_1} W(x, \eta) \eta_1, \partial_{\eta_2} W(x, \eta) \eta_2).$$

En utilisant la forme particulière du Hamiltonien  $H$  pour  $\nu = 0$  (cf la forme de  $\mathbf{H}$  (C.3)),  $W$  et  $K_{(\varepsilon, 0, 0)}$  sont bien solutions si et seulement si

$$\begin{aligned} -\alpha_1 x_1 \partial_{x_1} W - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} + h(x_1, \partial_{x_1} W) &= -\alpha_1 \eta_1 \partial_{\eta_1} W - i \frac{\alpha_2(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \eta_2 \partial_{\eta_2} W + K'(\eta_1 \partial_{\eta_1} W) \\ \Leftrightarrow -\alpha_1 D_1 W'(x_1, \eta_1) &= K'((x_1 + \partial_{\eta_1} W'(x_1, \eta_1)) \eta_1) - h(x_1, \eta_1 + \partial_{x_1} W'(x_1, \eta_1)), \end{aligned}$$

où

$$D_1 = x_1 \partial_{x_1} - \eta_1 \partial_{\eta_1}.$$

Cette dernière équation est indépendante de  $\varepsilon$  et en notant

$$W'(x_1, \eta_1) = \sum_{N \geq 3} W'^N(x_1, \eta_1), \quad K'(\omega_1) = \sum_{N \geq 2} K'^N(\omega_1),$$

où les  $W'^N, K'^N$  sont des polynômes homogènes de degré  $N$ , elle s'écrit au degré  $N$  sous la forme

$$-\alpha_1 D_1 W'^N(x_1, \eta_1) - K'^N(x_1 \eta_1) = \mathcal{F}_N(W'^M, K'^M, M < N).$$

Comme  $\alpha_1 \neq 0$ , on déduit de l'observation de son action sur les monômes que l'opérateur  $\alpha_1 D_1$  est bijectif sur l'ensemble des séries formelles sans monômes de la forme  $(x_1 \eta_1)^m$ . On peut donc construire les  $W'^N$  et  $K'^N$  simultanément par récurrence sur  $N$ , en choisissant à chaque étape :

– pour  $K'^N(x_1 \eta_1)$  on prend la somme des monômes de la forme  $(x_1 \eta_1)^m$  de

$$\mathcal{F}_N(W'^M, K'^M, M < N),$$

– puis pour  $W'^N$  on prend ensuite

$$W'^N(x, \eta) = (\alpha_1 D_1)^{-1} (\mathcal{F}_N(W'^M, K'^M, M < N) - K'^N(x_1 \eta_1)).$$

Comme de plus les équations sont indépendantes de  $\varepsilon$  à chaque étape, on a bien  $W', K'$  indépendants de  $\varepsilon$ . Ce qui conclut la première étape.

**Étape 2** On a

$$\begin{aligned} F_{(\varepsilon, 0, 0)}^* &= \tilde{F}_{(\varepsilon, 0, 0)} \left( e^{\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon, 0, 0)}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon, 0, 0)}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_1, \right. \\ &\quad \left. e^{\partial_{\omega_2} S_{(\varepsilon, 0, 0)}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_2, e^{-\partial_{\omega_2} S_{(\varepsilon, 0, 0)}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_2 \right), \end{aligned}$$

où  $\tilde{F}_{(\varepsilon,0,0)} = \tilde{F}_0$  indépendant de  $\varepsilon$  et  $S_{(\varepsilon,0,0)}$  est l'unique série formelle telle que

$$\begin{aligned} & \omega_1 \left( e^{\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,(\varepsilon,0,0)}}{\xi_1} \right] - e^{-\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,(\varepsilon,0,0)}}{\eta_1} \right] \right) \\ & + i\omega_2 \left( e^{\partial_{\omega_2} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{2,(\varepsilon,0,0)}}{\xi_2} \right] - e^{-\partial_{\omega_2} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\tilde{\psi}_{2,(\varepsilon,0,0)}}{\eta_2} \right] \right) = 0. \end{aligned}$$

En se servant de la forme de  $\tilde{F}_{(\varepsilon,0,0)}$  trouvée à l'étape 1, ce critère devient

$$\omega_1 \left( e^{\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\phi_{1,0}}{\xi_1} \right] (\omega_1) - e^{-\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \left[ \frac{\psi_{1,0}}{\eta_1} \right] (\omega_1) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2\omega_1 \partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)} = & \omega_1 \left[ (e^{\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} - (1 + \partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)})) + \left( \left[ \frac{\tilde{\varphi}_{1,(\varepsilon,0,0)}}{\xi_1} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \right. \\ & \left. - (e^{-\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} - (1 - \partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)})) - \left( \left[ \frac{\tilde{\psi}_{1,(\varepsilon,0,0)}}{\eta_1} \right] - 1 \right) e^{-\partial_{\omega_1} S_{(\varepsilon,0,0)}} \right]. \end{aligned}$$

Et cette équation où  $\varepsilon$  n'intervient pas permet pour les mêmes raisons que dans la démonstration du (iii) du lemme C.5 de construire par récurrence sur les coefficients de  $S$  une série formelle  $S_0(\omega_1)$  indépendante de  $\varepsilon$  et telle que

$$\tilde{F}_0 \left( e^{\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \eta_1, \xi_2, \eta_2 \right)$$

vérifie le critère (C.30). Par unicité, on a donc

$$\begin{aligned} F_0^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= \tilde{F}_0 \left( e^{\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \eta_1, \xi_2, \eta_2 \right) \\ &= \left( (\tilde{\varphi}_{1,0}, \tilde{\psi}_{1,0}) (e^{\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S_0(\xi_1 \eta_1)} \eta_1), \tilde{\varphi}_{2,0}(\xi_2, \eta_2), \tilde{\psi}_{2,0}(\xi_2, \eta_2) \right) \\ &= (\varphi_{1,0}^*(\xi_1, \eta_1), \psi_{1,0}^*(\xi_1, \eta_1), \xi_2, \eta_2). \end{aligned}$$

□

#### C.4 Majoration de $F_{\underline{\varepsilon}}^* - F_0^*$

Maintenant qu'on a construit  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  et  $F_0^*$ , il reste à vérifier qu'on peut bien calculer des estimations sur  $F_{\underline{\varepsilon}}^* - F_0^*$ . Pour cela on va notamment utiliser l'estimation sur  $F_{\underline{\varepsilon}} - F_0$  calculée dans le Lemme C.4. On reliera cette estimation celle sur  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  grâce au résultat (iii) du Lemme C.3 : on obtient en effet qu'il existe des séries formelles  $\Phi_i, \Psi_i$  telles que

$$\begin{aligned} \Phi_i(\omega_1, \omega_2) &= 1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), \quad \Psi_i(\omega_1, \omega_2) = 1 + \mathcal{O}((\omega_1, \omega_2)), \\ F_{\underline{\varepsilon}}^*(\xi, \eta) &= F_{\underline{\varepsilon}}(\Phi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_1, \Psi_1(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_1, \Phi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_2, \Psi_2(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_2). \end{aligned}$$

Le lemme suivant est un résultat sur l'inversion des applications de la forme de  $\Psi_i, \Phi_i$ , qui sera utile ensuite pour calculer les estimations du Lemme C.9.

**Lemme C.8** Soit une série formelle vectorielle  $\Phi$  de la forme

$$\Phi : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto (\Phi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1, \Psi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_1, \Phi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2, \Psi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_2),$$

où  $\Phi_1, \Psi_1, \Phi_2, \Psi_2$  sont des séries formelles à deux variables vérifiant

$$\Phi_1(0, 0) = 1 = \Psi_1(0, 0) = \Phi_2(0, 0) = \Psi_2(0, 0).$$

Alors il existe des séries formelles à deux variables  $\Phi_1^-, \Psi_1^-, \Phi_2^-, \Psi_2^-$  telles que

$$\Phi^{-1} : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto (\Phi_1^-(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1, \Psi_1^-(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_1, \Phi_2^-(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2, \Psi_2^-(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_2).$$

### Démonstration

Soit donc

$$\Phi : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto (\Phi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1, \Psi_1(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_1, \Phi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2, \Psi_2(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_2),$$

comme dans l'énoncé du lemme, et notons son inverse

$$\Phi^{-1} : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \left( \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \tilde{\Psi}_1(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \tilde{\Psi}_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \right).$$

On écrit le raisonnement pour la forme de  $\tilde{\Phi}_1$ , ce sera le même ensuite pour  $\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Phi}_2$  et  $\tilde{\Psi}_2$ . Le but est de montrer que dans la série formelle  $\tilde{\Phi}_1$  il n'y a que des monômes de la forme

$$(\xi_1\eta_1)^{n_1}(\xi_2\eta_2)^{n_2}\xi_1.$$

Ce sera le cas si et seulement si

$$\underbrace{(\xi_1\partial_{\xi_1} - \eta_1\partial_{\eta_1})}_{:=D_1}\tilde{\Phi}_1 = \tilde{\Phi}_1, \quad \text{et} \quad \underbrace{(\xi_2\partial_{\xi_2} - \eta_2\partial_{\eta_2})}_{:=D_2}\tilde{\Phi}_1 = 0.$$

En écrivant des conditions de ce type pour  $\tilde{\Psi}_1, \tilde{\Phi}_2$  et  $\tilde{\Psi}_2$ , on trouve les conditions suivantes sur  $\Phi^{-1}$

$$D_1\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^{-1}, \quad \text{et} \quad D_2\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi^{-1}.$$

Or on peut écrire aussi

$$D_1\Phi^{-1} = D\Phi^{-1} \cdot (\xi_1, -\eta_1, 0, 0) \quad \text{et} \quad D_2\Phi^{-1} = D\Phi^{-1} \cdot (0, 0, \xi_2, -\eta_2).$$

On trouve donc que  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Psi}_1, \tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2$  seront bien de la forme annoncée dans le lemme si et seulement si

$$D\Phi^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^{-1},$$

et

$$D\Phi^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Phi^{-1}.$$

Or on sait par hypothèse que ce critère est vérifié par  $\Phi$ . Montrons pour la première de ces deux égalités que si elle est vérifiée pour  $\Phi$ , alors elle l'est pour  $\Phi^{-1}$ . En effet, on sait que pour tout  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  on a

$$D\Phi(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi.$$

En utilisant cette égalité en  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \Phi^{-1}(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2)$  et le fait que

$$D\Phi^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (D\Phi(\Phi^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)))^{-1},$$

on obtient

$$\begin{aligned} D\Phi \circ \Phi^{-1}(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^{-1}(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi \circ \Phi^{-1}(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2) \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi^{-1} &= D\Phi^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \xi_2 \\ \eta_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ce qui clot la démonstration du lemme.  $\square$

**Lemme C.9** *Pour tout  $\varepsilon \in ]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$ , la série formelle  $F_\varepsilon^*$  est en fait une série convergente. Et de plus il existe une série convergente  $\mathcal{M}$  telle qu'on ait*

$$F_\varepsilon^* - F_0^* \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2). \quad (\text{C.34})$$

### Démonstration

La démonstration de la convergence des  $F_\varepsilon^*$  est similaire à la preuve donnée par Rüssmann [60], même si notre critère (C.30) n'est pas le même que le sien. Ici on ne va donc démontrer que la majoration (C.34).

Le point de départ pour démontrer cette estimation est la majoration similaire démontrée pour  $F_\varepsilon$  dans le lemme C.4 (ii); et on peut relier  $F_\varepsilon^*$  à  $F_\varepsilon$  grâce au (iii) du lemme C.3 : il existe

$$\Phi_\varepsilon : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto (\Phi_{1,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1, \Psi_{1,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_1, \Phi_{2,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2, \Psi_{2,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_2)$$

avec  $\Phi_{i,\varepsilon}, \Psi_{i,\varepsilon}$  séries formelles vérifiant

$$\Phi_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots, \quad \Psi_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots,$$

telles que

$$F_{\underline{\varepsilon}} = F_{\underline{\varepsilon}}^* \circ \Phi_{\underline{\varepsilon}}.$$

On va dans la suite de cette démonstration décomposer  $\Phi_{\underline{\varepsilon}}$  en un produit d'applications, en utilisant le fait que  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  est canonique. On va écrire une décomposition de la forme

$$\begin{aligned} F_{\underline{\varepsilon}} &= F_{\underline{\varepsilon}}^* \circ \overbrace{\left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (\tilde{\Phi}_{i,\underline{\varepsilon}} \xi_i, \tilde{\Psi}_{i,\underline{\varepsilon}} \eta_i) \right)}^{:= \tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}}} \circ \overbrace{\left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (\Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} \xi_i, \eta_i) \right)}^{:= h_{\underline{\varepsilon}}} \\ &= \underbrace{F_{\underline{\varepsilon}}^* \circ \left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (e^{\partial_{\omega_i} S} \xi_i, e^{-\partial_{\omega_i} S} \eta_i) \right)}_{:= (\check{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}})} \circ \underbrace{\left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (e^{\hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}} \xi_i, e^{-\hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}} \eta_i) \right)}_{:= f_{\underline{\varepsilon}}} \circ \left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (\Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} \xi_i, \eta_i) \right), \end{aligned}$$

où  $S_{\underline{\varepsilon}}, \hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\Phi}_{i,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\Psi}_{i,\underline{\varepsilon}}, \Phi_{i,\underline{\varepsilon}}, \Psi_{i,\underline{\varepsilon}}$  sont des séries de 2 variables  $(\omega_1, \omega_2)$  qui sont prises ci-dessus en  $(\omega_1, \omega_2) = (\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)$ .

**Remarque C.10** Cette décomposition de  $F_{\underline{\varepsilon}}$  et  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  est la même que celle faite dans la démonstration de Rüssman [60] : sa preuve de la convergence de la série formelle  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  se fait en montrant que chacune des applications de la décomposition ci-dessus est une série convergente. Dans la démonstration ci-dessous on rappellera comment sont construites ces applications (cela sera nécessaire pour estimer leur dépendance en  $\underline{\varepsilon}$ ) mais on admettra que ces applications sont, pour  $\underline{\varepsilon}$  fixé, des séries convergentes.

Voici le plan de la démonstration :

**Étape 1.** introduction de l'application  $h_{\underline{\varepsilon}}$  et estimation de la différence  $h_{\underline{\varepsilon}} - h_0$  ;

**Étape 2.** introduction de  $\tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}}$  et écriture sous la forme

$$\tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}} : (\xi_i, \eta_i) \mapsto (e^{S_{i,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_i, e^{-S_{i,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_i);$$

**Étape 3.** décomposition des  $S_{i,\underline{\varepsilon}}$  en

$$S_{i,\underline{\varepsilon}} = \hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}} + \partial_{\omega_i} S_{\underline{\varepsilon}},$$

et estimation de  $f_{\underline{\varepsilon}} - f_0$  ;

**Étape 4.** introduction de  $(\check{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}})$  et estimation de  $S_{\underline{\varepsilon}} - S_0$ .

Les étapes 1, 2 et 3 utilisent comme argument principal le fait que  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  est symplectique, tandis que l'étape 4 est basé sur le fait que  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  vérifie le critère (C.30). Revenons maintenant dans les détails.

**Étape 1.** Soit

$$h_{\underline{\varepsilon}} : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto \left( (\Phi_{1,\underline{\varepsilon}} \cdot \Psi_{1,\underline{\varepsilon}})(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_1, \eta_1, (\Phi_{2,\underline{\varepsilon}} \cdot \Psi_{2,\underline{\varepsilon}})(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_2, \eta_2 \right).$$

Comme le changement de coordonnées  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  est canonique, il vérifie

$${}^t DF_{\underline{\varepsilon}}^* \Omega DF_{\underline{\varepsilon}}^* = \Omega.$$

Et donc

$${}^t DF_{\underline{\varepsilon}} \Omega DF_{\underline{\varepsilon}} = {}^t D\Phi_{\underline{\varepsilon}}^t DF_{\underline{\varepsilon}}^* \Omega DF_{\underline{\varepsilon}}^* D\Phi_{\underline{\varepsilon}} = {}^t D\Phi_{\underline{\varepsilon}} \Omega D\Phi_{\underline{\varepsilon}}.$$

On a donc une égalité matricielle, qui implique pour 2 des ses coefficients les 2 égalités suivantes, où on a noté  $F_{\underline{\varepsilon}} := (\varphi_{1,\underline{\varepsilon}}, \psi_{1,\underline{\varepsilon}}, \varphi_{2,\underline{\varepsilon}}, \psi_{2,\underline{\varepsilon}})$  :

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_1} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_1} \psi_{1,\underline{\varepsilon}} - \partial_{\eta_1} \psi_{1,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_1} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} + \partial_{\eta_1} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_1} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} - \partial_{\eta_1} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_1} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} &= -\partial_{\omega_1} (\Phi_{1,\underline{\varepsilon}} \Psi_{1,\underline{\varepsilon}} \omega_1) \\ \partial_{\eta_2} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_2} \psi_{1,\underline{\varepsilon}} - \partial_{\eta_2} \psi_{1,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_2} \varphi_{1,\underline{\varepsilon}} + \partial_{\eta_2} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_2} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} - \partial_{\eta_2} \psi_{2,\underline{\varepsilon}} \partial_{\xi_2} \varphi_{2,\underline{\varepsilon}} &= -\partial_{\omega_2} (\Phi_{2,\underline{\varepsilon}} \Psi_{2,\underline{\varepsilon}} \omega_2), \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

où les séries formelles  $\Phi_{i,\underline{\varepsilon}}, \Psi_{i,\underline{\varepsilon}}$  à 2 variables  $(\omega_1, \omega_2)$  sont prises en  $(\omega_1, \omega_2) = (\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)$ . On a ces équations pour tout  $\underline{\varepsilon}$ , donc en particulier pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, 0, 0)$ . En utilisant les résultats des lemmes C.3(v) et C.4(ii) on sait que  $F_0$  converge et qu'il existe une série convergente  $\mathcal{M}$  telle que

$$(F_{\underline{\varepsilon}} - F_0)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

On en déduit qu'il existe une série convergente  $\mathcal{M}_1$  telle que

$$\partial_{\xi_1} (F_{\underline{\varepsilon}} - F_0)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2) \mathcal{M}_1(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

Et de même pour  $\partial_{\xi_2} (F_{\underline{\varepsilon}} - F_0)$  et les  $\partial_{\eta_i} (F_{\underline{\varepsilon}} - F_0)$ . En soustrayant les équations (C.35) pour  $\underline{\varepsilon}$  quelconque et pour  $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon, 0, 0)$ , on trouve alors qu'il existe  $\mathcal{M}_2$  telle que

$$\partial_{\omega_i} (\Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} \omega_i) - \partial_{\omega_i} (\Phi_{i,0} \Psi_{i,0} \omega_i) \prec \nu \mathcal{M}_2(\omega_1 + \omega_2).$$

Et donc en notant  $\omega \mathcal{M}_h(\omega)$  primitive de  $\mathcal{M}_2(\omega)$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} - \Phi_{i,0} \Psi_{i,0}) \omega_i &\prec ((\Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} - \Phi_{i,0} \Psi_{i,0}) \omega_i) |_{\omega_i=0} + \nu(\omega_1 + \omega_2) \mathcal{M}'(\omega_1 + \omega_2) \\ \Leftrightarrow \Phi_{i,\underline{\varepsilon}} \Psi_{i,\underline{\varepsilon}} - \Phi_{i,0} \Psi_{i,0} &\prec \nu(\omega_1 + \omega_2) \mathcal{M}_h(\omega_1 + \omega_2), \end{aligned}$$

et en particulier

$$h_{\underline{\varepsilon}} - h_0 \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2) \mathcal{M}_h(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2),$$

avec  $\mathcal{M}_h$  série entière convergente. Ce qui conclut la première étape.

**Étape 2.** On pose ensuite

$$\tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}} := \Phi_{\underline{\varepsilon}} \circ h_{\underline{\varepsilon}}^{-1}.$$

Comme  $\Phi_{\underline{\varepsilon}}$  et  $h_{\underline{\varepsilon}}$  sont des applications de la forme

$$(\xi_i, \eta_i) \mapsto (f_i(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_i, g_i(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_i)$$

avec

$$f_i(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots, \quad g_i(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots;$$

par inversion et composition de séries formelles de cette forme (cf Lemme C.8), on en déduit que  $\tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}}$  est aussi une application de cette forme. Donc il existe  $\tilde{\Phi}_{i,\underline{\varepsilon}}, \tilde{\Psi}_{i,\underline{\varepsilon}}$  de la forme

$$\tilde{\Phi}_{i,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots, \quad \tilde{\Psi}_{i,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots,$$

telles que

$$\tilde{\Phi}_{\underline{\varepsilon}} : (\xi_i, \eta_i) \mapsto \left( \tilde{\Phi}_{i,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \xi_i, \tilde{\Psi}_{i,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) \eta_i \right).$$



– Montrons que pour  $i = 1, 2$  on a

$$\tilde{\Phi}_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\Psi}_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = 1. \quad (\text{C.36})$$

Comme  $\tilde{\Phi}_{\varepsilon} \circ h_{\varepsilon} = \tilde{\Phi}_{\varepsilon}$ , on a pour  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} & \left( \tilde{\Phi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1\eta_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2\eta_2) \Phi_{i,\varepsilon}\Psi_{i,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_i, \right. \\ & \quad \left. \tilde{\Psi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_1\eta_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_2\eta_2) \eta_i \right) \\ & = (\Phi_{i,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\xi_i, \Psi_{i,\varepsilon}(\xi_1\eta_1, \xi_2\eta_2)\eta_i) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \tilde{\Phi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)\omega_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)\omega_2) \Phi_{i,\varepsilon}\Psi_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \\ \tilde{\Psi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)\omega_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)\omega_2) = \Psi_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui implique pour  $i = 1, 2$

$$\tilde{\Phi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}\omega_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}\omega_2) \tilde{\Psi}_{i,\varepsilon}(\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}\omega_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}\omega_2) \Phi_{i,\varepsilon}\Psi_{i,\varepsilon}\omega_i = \Phi_{i,\varepsilon}\Psi_{i,\varepsilon}\omega_i.$$

Or

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto (\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}\omega_1, \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}\omega_2)$$

est une application inversible car

$$\Phi_{1,\varepsilon}\Psi_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots, \quad \Phi_{2,\varepsilon}\Psi_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots,$$

et par le Lemme C.8. On en déduit que

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\Psi}_{1,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \omega_1 & = \omega_1 \\ \tilde{\Phi}_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \tilde{\Psi}_{2,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) \omega_2 & = \omega_2. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration de (C.36).

En posant  $S_{i,\varepsilon} := \ln(\tilde{\Phi}_{i,\varepsilon})$ , on a alors

$$\tilde{\Phi}_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = e^{S_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)}, \quad \tilde{\Psi}_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) = e^{-S_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2)}.$$

**Étape 3.** En utilisant à nouveau le fait que  $F_{\varepsilon}^*$  est canonique, et que  $F_{\varepsilon} \circ h_{\varepsilon}^{-1} = F_{\varepsilon}^* \circ \tilde{\Phi}_{\varepsilon}$ , on obtient

$${}^t D(F_{\varepsilon} \circ h_{\varepsilon}^{-1}) \Omega D(F_{\varepsilon} \circ h_{\varepsilon}^{-1}) = {}^t D\tilde{\Phi}_{\varepsilon} \Omega D\tilde{\Phi}_{\varepsilon}. \quad (\text{C.37})$$

Cette égalité matricielle implique, en notant

$$\tilde{F}_{\varepsilon} = \left( \tilde{\varphi}_{1,\varepsilon}, \tilde{\psi}_{1,\varepsilon}, \tilde{\varphi}_{2,\varepsilon}, \tilde{\psi}_{2,\varepsilon} \right) = F_{\varepsilon} \circ h_{\varepsilon}^{-1}$$

l'égalité scalaire

$$\partial_{\xi_2} \tilde{\varphi}_{1,\varepsilon} \partial_{\xi_1} \tilde{\psi}_{1,\varepsilon} - \partial_{\xi_2} \tilde{\psi}_{1,\varepsilon} \partial_{\xi_1} \tilde{\varphi}_{1,\varepsilon} + \partial_{\xi_2} \tilde{\varphi}_{2,\varepsilon} \partial_{\xi_1} \tilde{\psi}_{2,\varepsilon} - \partial_{\xi_2} \tilde{\psi}_{2,\varepsilon} \partial_{\xi_1} \tilde{\varphi}_{2,\varepsilon} = \eta_1 \eta_2 (\partial_{\omega_2} S_{1,\varepsilon} - \partial_{\omega_1} S_{2,\varepsilon}). \quad (\text{C.38})$$

Or on sait que  $F_{\varepsilon}$  et  $h_{\varepsilon}$  sont des séries entières convergentes de la forme

$$F_{\varepsilon} = F_0 + \nu F'_{\varepsilon}, \quad h_{\varepsilon} = h_0 + \nu h'_{\varepsilon},$$

où les familles  $F'_{\underline{\varepsilon}}, h'_{\underline{\varepsilon}}$  sont uniformément majorées au sens  $\prec$ . Donc par le Lemme B.5,  $\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}}$  est aussi une série entière convergente de la forme

$$\tilde{F}_{\underline{\varepsilon}} = \tilde{F}_0 + \nu \tilde{F}'_{\underline{\varepsilon}},$$

avec  $\tilde{F}'_{\underline{\varepsilon}}$  uniformément bornée en  $\underline{\varepsilon}$  pour  $\prec$ . L'équation (C.38) est donc de la forme

$$R_0(\omega_1, \omega_2) + \nu R_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) = \partial_{\omega_2} S_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) - \partial_{\omega_1} S_{2,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2),$$

où  $R_0$  est une série convergente et  $R_{\underline{\varepsilon}}$  est une famille uniformément majorée au sens  $\prec$ . Posons alors

$$\hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) := \int_0^{\omega_2} (R_0 + \nu R_{\underline{\varepsilon}})(\omega_1, t) dt, \quad \hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) \equiv 0,$$

et

$$f_{\underline{\varepsilon}} : (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \mapsto \left( e^{\hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_1, e^{-\hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_1, e^{\hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \xi_2, e^{-\hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2)} \eta_2 \right).$$

On obtient bien alors que les  $\hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}$  et  $f_{\underline{\varepsilon}}$  sont de la forme

$$\hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}} := \hat{S}_{i,0} + \nu \hat{S}'_{i,\underline{\varepsilon}}, \quad f_{\underline{\varepsilon}} = f_0 + \nu f'_{\underline{\varepsilon}}$$

avec les  $\hat{S}'_{i,\underline{\varepsilon}}$  et  $f'_{\underline{\varepsilon}}$  majorés uniformément par rapport à  $\underline{\varepsilon}$  au sens de  $\prec$  par une série convergente.

De plus, les  $S_{i,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}$  satisfont alors

$$\partial_{\omega_2} (S_{1,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}}) - \partial_{\omega_1} (S_{2,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}}) = 0. \quad (\text{C.39})$$

Soit

$$S_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) := \int_0^{\omega_1} (S_{1,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}})(t, \omega_2) dt + \int_0^{\omega_2} (S_{2,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}})(0, t) dt;$$

on vérifie que grâce à (C.39), on obtient

$$\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}} = S_{1,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{1,\underline{\varepsilon}}, \quad \partial_{\omega_2} S_{\underline{\varepsilon}} = S_{2,\underline{\varepsilon}} - \hat{S}_{2,\underline{\varepsilon}}.$$

**Étape 4.** D'après les étapes précédentes, on a

$$\begin{aligned} & F_{\underline{\varepsilon}}^* \left( e^{\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} \xi_1, e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} \eta_1, e^{\partial_{\omega_2} S_{\underline{\varepsilon}}} \xi_2, e^{-\partial_{\omega_2} S_{\underline{\varepsilon}}} \eta_2 \right) \\ &= F_{\underline{\varepsilon}} \circ h_{ep}^{-1} \circ f_{\underline{\varepsilon}}^{-1}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) := (\check{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}})(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2). \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Où on sait, avec les résultats obtenus sur  $F_{\underline{\varepsilon}}$  dans le Lemme C.4 et les résultats obtenus sur  $f_{\underline{\varepsilon}}$  à l'étape 3, sur  $h_{ep}$  à l'étape 1, puis par composition et l'inversion démontrée dans le Lemme B.5, que

$$(\check{\varphi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}_{2,\underline{\varepsilon}}) = (\check{\varphi}_{1,0}, \check{\psi}_{1,0}, \check{\varphi}_{2,0}, \check{\psi}_{2,0}) + \nu (\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}'_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}'_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}'_{2,\underline{\varepsilon}}), \quad (\text{C.41})$$

avec  $(\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}'_{1,\underline{\varepsilon}}, \check{\varphi}'_{2,\underline{\varepsilon}}, \check{\psi}'_{2,\underline{\varepsilon}})$  majorés uniformément en  $\underline{\varepsilon}$  pour  $\prec$  par une série convergente.

On procède en deux sous-étapes.

**Étape 4.1. Conséquence du critère (C.30) : équation vérifiée par  $S'_\varepsilon := \frac{1}{\nu}(S_\varepsilon - S_0)$ .**  
L'égalité (C.40) se réécrit

$$F_\varepsilon^* = (\check{\varphi}_{1,\varepsilon}, \check{\psi}_{1,\varepsilon}, \check{\varphi}_{2,\varepsilon}, \check{\psi}_{2,\varepsilon}) \left( e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} \xi_1, e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} \eta_1, e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} \xi_2, e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} \eta_2 \right).$$

Écrivons alors le fait que  $F_\varepsilon^*$  vérifie le critère (C.30) :

$$\begin{aligned} & \omega_1 \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,\varepsilon}(e^{-\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \xi_i, e^{\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \eta_i)}{\xi_1} \right] - \left[ \frac{\check{\psi}_{1,\varepsilon}(e^{-\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \xi_i, e^{\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \eta_i)}{\eta_1} \right] \right) \\ & + i\omega_2 \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{2,\varepsilon}(e^{-\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \xi_i, e^{\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \eta_i)}{\xi_2} \right] - \left[ \frac{\check{\psi}_{2,\varepsilon}(e^{-\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \xi_i, e^{\partial_{\omega_i} S_\varepsilon} \eta_i)}{\eta_2} \right] \right) = 0. \\ \iff & \omega_1 \left( e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2) - e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} \left[ \frac{\check{\psi}_{1,\varepsilon}}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) \\ & i\omega_2 \left( e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] (\omega_1, \omega_2) - e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} \left[ \frac{\check{\psi}_{1,\varepsilon}}{\eta_1} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) = 0 \end{aligned}$$

On a déjà rencontré (presque) cette équation dans la démonstration du (iii) du Lemme C.5, le but était alors de prouver l'existence d'un tel  $S$ . On avait alors montré que cette équation était équivalente à l'équation (C.33) ; avec les mêmes calculs, on obtient ici

$$\begin{aligned} & -2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2}) S_\varepsilon \\ & = \omega_1 \left[ (e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - (1 - \partial_{\omega_1} S_\varepsilon)) + \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] - 1 \right) e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - (e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - (1 + \partial_{\omega_1} S_\varepsilon)) - \left( \left[ \frac{\check{\psi}_{1,\varepsilon}}{\eta_1} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} \right] \\ & + i\omega_2 \left[ (e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - (1 - \partial_{\omega_2} S_\varepsilon)) + \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{2,\varepsilon}}{\xi_2} \right] - 1 \right) e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - (e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - (1 + \partial_{\omega_2} S_\varepsilon)) - \left( \left[ \frac{\check{\psi}_{2,\varepsilon}}{\eta_2} \right] - 1 \right) e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

A partir de cette dernière équation écrite pour  $\varepsilon$  à laquelle on soustrait cette même équation pris pour  $\varepsilon = (\varepsilon, 0, 0)$ , puis en divisant le tout par  $\nu$ , on écrit une équation vérifiée par  $S'_\varepsilon := \frac{1}{\nu}(S_\varepsilon - S_0)$  :

$$\begin{aligned} & -2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2}) S'_\varepsilon \\ & = \omega_1 \left[ \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - e^{-\partial_{\omega_1} S_0}) + \partial_{\omega_1} S'_\varepsilon + \left[ \frac{\check{\varphi}'_{1,\varepsilon}}{\xi_1} \right] e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} + \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,0}}{\xi_1} \right] - 1 \right) \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - e^{-\partial_{\omega_1} S_0}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\nu} (e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - e^{\partial_{\omega_1} S_0}) + \partial_{\omega_1} S'_\varepsilon - \left[ \frac{\check{\psi}'_{1,\varepsilon}}{\eta_1} \right] e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - \left( \left[ \frac{\check{\psi}_{1,0}}{\eta_1} \right] - 1 \right) \frac{1}{\nu} (e^{\partial_{\omega_1} S_\varepsilon} - e^{\partial_{\omega_1} S_0}) \right] \\ & i\omega_2 \left[ \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - e^{-\partial_{\omega_2} S_0}) + \partial_{\omega_2} S'_\varepsilon + \left[ \frac{\check{\varphi}'_{2,\varepsilon}}{\xi_2} \right] e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} + \left( \left[ \frac{\check{\varphi}_{2,0}}{\xi_2} \right] - 1 \right) \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - e^{-\partial_{\omega_2} S_0}) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{\nu} (e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - e^{\partial_{\omega_2} S_0}) + \partial_{\omega_2} S'_\varepsilon - \left[ \frac{\check{\psi}'_{2,\varepsilon}}{\eta_2} \right] e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - \left( \left[ \frac{\check{\psi}_{2,0}}{\eta_2} \right] - 1 \right) \frac{1}{\nu} (e^{\partial_{\omega_2} S_\varepsilon} - e^{\partial_{\omega_2} S_0}) \right] \end{aligned} \tag{C.42}$$

**Étape 4.2. Construction d'une série majorante pour les  $S'_\varepsilon$  à l'aide de (C.42).**  
Soit

$$V_{i,\varepsilon}(\omega_1, \omega_2) := |\partial_{\omega_i} S_\varepsilon|(\omega_1, \omega_2), \quad V_\varepsilon(\omega) := V_{1,\varepsilon}(\omega, \omega) + V_{2,\varepsilon}(\omega, \omega).$$

On va montrer que la famille des  $V_\varepsilon$  admet une série majorante convergente (indépendante de  $\varepsilon$ ) pour la relation d'ordre  $\prec$ . Commençons par utiliser (C.42) pour obtenir des inéquations en  $\prec$  vérifiées par les  $V_{i,\varepsilon}$ .

Montrons tout d'abord qu'on a

$$\omega_i V_{i,\underline{\varepsilon}} \prec |\omega_1 \partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}} + i \omega_2 \partial_{\omega_2} S_{\underline{\varepsilon}}|(\omega_1, \omega_2). \quad (\text{C.43})$$

En effet, si on note

$$S_{\underline{\varepsilon}} := \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} a_{n_1, n_2} \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2},$$

alors

$$\begin{aligned} \omega_i V_{i,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} n_i |a_{n_1, n_2}| \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}, \\ |\omega_1 \partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}} + i \omega_2 \partial_{\omega_2} S_{\underline{\varepsilon}}| &= \sum_{n_1, n_2 \in \mathbb{N}} |n_1 + i n_2| |a_{n_1, n_2}| \omega_1^{n_1} \omega_2^{n_2}. \end{aligned}$$

Et pour tous  $n_1, n_2$ , on a bien  $n_i \leq |n_1 + i n_2|$ . Donc (C.43) est bien vérifiée, *i.e.* on a une minoration du membre de gauche de (C.42) en fonction des  $V_{i,\underline{\varepsilon}}$ .

Montrons maintenant qu'on peut majorer le membre de droite de (C.42) par un terme de la forme

$$\sum_{i=1}^2 \omega_i (G_i^1(\omega_1, \omega_2) + G_i^2(\omega_1, \omega_2, V_{1,\underline{\varepsilon}}, V_{2,\underline{\varepsilon}})), \quad (\text{C.44})$$

avec  $G_i^1, G_i^2$  séries entières en leurs variables, convergentes et indépendantes de  $\underline{\varepsilon}$ , et avec  $G_i^1$  polynôme homogène de degré 1 et  $G_i^2$  d'ordre 2. Pour cela, on majore successivement (au sens  $\prec$ ) les différents termes dans le membre de droite par des quantités de la forme (C.44). On ne fait ces calculs que pour la quantité entre crochets en facteur de  $\omega_1$ , ils sont les mêmes pour celle entre crochets en facteur de  $\omega_2$ .

On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} - e^{-\partial_{\omega_1} S_0}) - \frac{1}{\nu} (e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} - e^{-\partial_{\omega_1} S_0}) + 2 \partial_{\omega_1} S'_{\underline{\varepsilon}} \\ &= -\frac{2}{\nu} (\sinh(\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}) - \sinh(\partial_{\omega_1} S_0)) + 2 \partial_{\omega_1} S'_{\underline{\varepsilon}} \\ &= -2 \partial_{\omega_1} S'_{\underline{\varepsilon}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{2p} (\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}})^k (\partial_{\omega_1} S_0)^{2p-k}}{(2p+1)!} \\ &\prec 2 V_{1,\underline{\varepsilon}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(2p+1) (|\partial_{\omega_1} S_0| + \nu V_{1,\underline{\varepsilon}})^{2p}}{(2p+1)!} \\ &\prec 2 V_{1,\underline{\varepsilon}} (|\partial_{\omega_1} S_0| + V_{1,\underline{\varepsilon}}) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(|\partial_{\omega_1} S_0| + V_{1,\underline{\varepsilon}})^{2p}}{(2p+2)!}; \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est vraie pour  $\nu \leq 1$ . Et ce dernier majorant est bien de la forme  $G_1^2$  car  $S_0$  est une série convergente (cf Remarque C.10) indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ .

On a

$$\left[ \frac{\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} = \left[ \frac{\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] + \left[ \frac{\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] (e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} - 1),$$

où  $\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}$  est, on l'a vu ci-dessus en (C.41), majoré uniformément en  $\underline{\varepsilon}$  par une série convergente  $\mathcal{M}(\omega_1, \omega_2)$ , et  $\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}$  est sans monômes de degré 1. D'où

$$\begin{aligned} & \left| \left[ \frac{\check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}}}{\xi_1} \right] e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} \right| (\omega_1, \omega_2) \prec (\omega_1 + \omega_2) \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) (1 + (e^{|\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}|(\omega_1, \omega_2)} - 1)) \\ & \prec (\omega_1 + \omega_2) \mathcal{M}(0, 0) + (\omega_1 + \omega_2) (\mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) - \mathcal{M}(0, 0) + \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) (\exp - 1) \circ (|\partial_{\omega_1} S_0| + V_{1,\underline{\varepsilon}})) \end{aligned}$$

Or pour tout  $\underline{\varepsilon}$ , on a  $|\partial_{\omega_i} S_{\underline{\varepsilon}}|(0, 0) = 0$  car par définition

$$\partial_{\omega_i} S_{\underline{\varepsilon}}(0, 0) = S_{i,\underline{\varepsilon}}(0, 0) - \hat{S}_{i,\underline{\varepsilon}}(0, 0) = S_{i,\underline{\varepsilon}}(0, 0),$$

avec  $S_{i,\underline{\varepsilon}}$  défini par

$$e^{S_{i,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2)} = \Phi_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) = 1 + \dots$$

Donc le terme

$$(\omega_1 + \omega_2) (\mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) - \mathcal{M}(0, 0) + \mathcal{M}(\omega_1, \omega_2) (\exp - 1) \circ (|\partial_{\omega_1} S_0| + V_{1,\underline{\varepsilon}}))$$

est de la forme du  $G_1^2$  de (C.44), et on avait déjà  $(\omega_1 + \omega_2) \mathcal{M}(0, 0)$  de la forme de  $G_1^2$ . On obtient de la même manière une majoration de la forme (C.44) pour le terme

$$\left[ \frac{\check{\psi}'_{1,\underline{\varepsilon}}}{\eta_1} \right] e^{\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} & \left| \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,0}}{\xi_1} \right] - 1 \right| \frac{1}{\nu} \left| e^{-\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} - e^{-\partial_{\omega_1} S_0} \right| \\ & \prec \left| \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,0}}{\xi_1} \right] - 1 \right| \frac{1}{\nu} \left| -\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}} - (-\partial_{\omega_1} S_0) \right| e^{|\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}| + |\partial_{\omega_1} S_0|} \quad \text{par Lemme B.4} \\ & \prec \left| \left[ \frac{\check{\varphi}_{1,0}}{\xi_1} \right] - 1 \right| V_{1,\underline{\varepsilon}} e^{2|\partial_{\omega_1} S_0| + V_{1,\underline{\varepsilon}}} \quad \text{pour } \nu \leq 1, \end{aligned}$$

et ce dernier majorant est bien de la forme de  $G_1^2$ . On trouve un majorant de ce type avec les mêmes calculs pour

$$\left( \left[ \frac{\check{\psi}_{1,0}}{\eta_1} \right] - 1 \right) \frac{1}{\nu} (e^{\partial_{\omega_1} S_{\underline{\varepsilon}}} - e^{\partial_{\omega_1} S_0}).$$

Finalement avec la minoration du membre de gauche et la majoration du membre de droite de (C.42), on obtient pour  $i = 1, 2$ ,

$$\omega_i V_{i,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) \prec \sum_{k=1}^2 \omega_k (G_k^1(\omega_1, \omega_2) + G_k^2(\omega_1, \omega_1, V_{1,\underline{\varepsilon}}, V_{2,\underline{\varepsilon}})). \quad (\text{C.45})$$

avec  $G_k^1$  polynômes homogènes de degré 1 et  $G_k^2$  série entière convergente d'ordre 2, indépendantes de  $\underline{\varepsilon}$ .

Soit alors

$$V_{\underline{\varepsilon}}(\omega) := V_{1,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) + V_{2,\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2).$$

Grâce à (C.45), on obtient

$$\begin{aligned} \omega V_{\underline{\varepsilon}}(\omega) &\prec \omega (G_1^1(\omega, \omega) + G_2^1(\omega, \omega) + G_1^2(\omega, \omega, V_{\underline{\varepsilon}}(\omega), V_{\underline{\varepsilon}}(\omega)) + G_2^2(\omega, \omega, V_{\underline{\varepsilon}}(\omega), V_{\underline{\varepsilon}}(\omega))) \\ \Rightarrow V_{\underline{\varepsilon}}(\omega) &\prec c\omega + c \frac{(\omega + V_{\underline{\varepsilon}}(\omega))^2}{1 - \gamma(\omega + V_{\underline{\varepsilon}}(\omega))} \quad \text{par le (iv) du Lemme B.3.} \end{aligned} \quad (\text{C.46})$$

L'objectif est maintenant de construire une série entière convergente  $Z(\omega)$  telle que

$$Z(\omega) \prec c\omega + c \frac{(\omega + Z(\omega))^2}{1 - \gamma(\omega + Z(\omega))};$$

(C.46) permettra alors de montrer par récurrence sur les coefficients des séries  $V_{\underline{\varepsilon}}$  et  $Z$  que  $V_{\underline{\varepsilon}}(\omega) \prec Z(\omega)$ , à condition toutefois qu'on puisse initialiser cette récurrence. Commençons donc par étudier les valeurs des premiers coefficients des séries formelles  $V_{\underline{\varepsilon}}$ , en calculant les équations impliquées par (C.42) pour les degrés 0, 1 et 2 en  $(\omega_1, \omega_2)$  :

- (C.42) au degré 0 en  $(\omega_1, \omega_2)$  donne  $0 = 0$ ;
- (C.42) au degré 1 en  $(\omega_1, \omega_2)$  donne

$$2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})(S'_{\underline{\varepsilon}})_1 = 0,$$

car on a vu ci-dessus que le second membre de (C.42) est de la forme (C.44). Donc le terme de degré 1 de  $S'_{\underline{\varepsilon}}$ ,  $(S'_{\underline{\varepsilon}})_1$ , est nul ;

- (C.42) au degré 2 en  $(\omega_1, \omega_2)$  donne

$$2(\omega_1 \partial_{\omega_1} + i\omega_2 \partial_{\omega_2})(S'_{\underline{\varepsilon}})_2 = \sum_{i=1}^2 \omega_i \left( \left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}'_{1,\underline{\varepsilon}} \\ \xi_1 \end{array} \right]_1 - \left[ \begin{array}{c} \check{\psi}'_{1,\underline{\varepsilon}} \\ \eta_1 \end{array} \right]_1 \right);$$

or on sait déjà que le membre de droite est uniformément borné au sens  $\prec$  quand  $\underline{\varepsilon}$  varie. Donc cette dernière égalité implique qu'il existe  $\alpha$  indépendant de  $\underline{\varepsilon}$  tel que

$$\omega(V_{\underline{\varepsilon}})_1(\omega) \prec \alpha\omega^2.$$

On cherche alors  $Z$  tel que

- $Z(\omega) = \omega Z_1(\omega)$ , avec  $Z_1(0) \geq C$ ;
- $Z(\omega) = c\omega + c \frac{(\omega + Z(\omega))^2}{1 - \gamma(\omega + Z(\omega))}$ .

Ce qui se réécrit comme une équation en  $Z_1$  :

$$\begin{aligned} Z_1 \cdot (1 - \gamma\omega(1 + Z_1)) - c(1 - \gamma\omega(1 + Z_1)) - c\omega(1 + Z_1)^2 &= 0 \\ \iff \mathcal{F}(Z_1, \omega) &= 0 \end{aligned}$$

Or en  $\omega = 0$  et  $Z_1 = \alpha$ , on a

$$\mathcal{F}(\alpha, 0) = 0, \quad \partial_{Z_1} \mathcal{F}(\alpha, 0) = 1 \neq 0.$$

On a donc par le théorème des fonctions implicites analytique l'existence d'une telle série convergente  $Z_1$  indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ , qui vérifie

$$V_{\underline{\varepsilon}}(\omega) \prec \omega Z_1(\omega).$$

On trouve donc finalement

$$S'_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) \prec S'_{\underline{\varepsilon}}(0, 0) + \omega_1 V_{1, \underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) + \omega_2 V_{2, \underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2),$$

où on choisit  $S'_{\underline{\varepsilon}}(0, 0) = 0$  car seules les dérivées de  $S'_{\underline{\varepsilon}}$  interviennent dans la décomposition de  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$ , et donc

$$S'_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1, \omega_2) \prec (\omega_1 + \omega_2) V_{\underline{\varepsilon}}(\omega_1 + \omega_2) \prec (\omega_1 + \omega_2) Z_1(\omega_1 + \omega_2),$$

où  $Z_1$  série convergente indépendante de  $\underline{\varepsilon}$ .

On peut maintenant conclure, car on a

$$F_{\underline{\varepsilon}}^* = F_{\underline{\varepsilon}} \circ h_{\underline{\varepsilon}}^{-1} \circ f_{\underline{\varepsilon}}^{-1} \circ \left( (\xi_i, \eta_i) \mapsto (e^{-\partial_{\omega_i} S_{\underline{\varepsilon}}} \xi_i, e^{\partial_{\omega_i} S_{\underline{\varepsilon}}} \eta_i) \right).$$

Grâce au Lemme B.5, on sait que c'est une composée de séries formelles de la forme

$$R_{\underline{\varepsilon}} = R_0 + \nu R'_{\underline{\varepsilon}}$$

avec  $R_0, R_{\underline{\varepsilon}}$  convergentes et uniformément bornées pour  $\prec$  par une série convergente  $\mathcal{M}$ , donc  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  est aussi de cette forme. De plus, par définition

$$F_{\underline{\varepsilon}}^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \dots, \quad F_0^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) + \dots,$$

on peut donc choisir le majorant uniforme de  $F_{\underline{\varepsilon}}^* - F_0^*$  sans monômes de degré 0 et 1. C'est-à-dire qu'il existe  $\mathcal{M}$  série convergente telle que

$$(F_{\underline{\varepsilon}}^* - F_0^*)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \prec \nu(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2)^2 \mathcal{M}(\xi_1 + \eta_1 + \xi_2 + \eta_2).$$

□

## C.5 Retour dans $\mathbb{R}^4$ , démonstration de la Proposition C.1

**Lemme C.11** (i) Soit  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}} := \mathcal{P}^{-1} F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P}$ , avec  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  défini dans le Lemme C.5. On a

$$\overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, \overline{\xi_2}, \overline{\eta_2})} = \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2);$$

i.e. les coefficients du développement en série entière de  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  sont réels.

(ii) Il existe  $K_{\underline{\varepsilon}}$  dépendant de deux variables telle que

$$H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2).$$

**Démonstration de (i)**

Dans la démonstration on utilise la notation suivante : si

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}^d} a_n x^n,$$

on note

$$\bar{f}(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}^d} \overline{a_n} x^n.$$

Soit

$$J_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^4 & \rightarrow & \mathbb{C}^4 \\ (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) & \mapsto & (\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2) \end{array}$$

et soit  $J_2 := \mathcal{P}J_1\mathcal{P}^{-1}$ . Alors on trouve que

$$J_2(\xi'_1, \eta'_1, \xi'_2, \eta'_2) = (\bar{\xi}'_1, \bar{\eta}'_1, i \bar{\eta}'_2, i \bar{\xi}'_2).$$

Et on a

$$\begin{aligned} & \overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\bar{\xi}_1, \bar{\eta}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\eta}_2)} = \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \\ \iff & J_1(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(J_1(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2))) = \mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \\ \iff & J_1\mathcal{P}^{-1}F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P}J_1 = \mathcal{P}^{-1}F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P} \\ \iff & \mathcal{P}J_1\mathcal{P}^{-1}F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P}J_1\mathcal{P}^{-1} = F_{\underline{\varepsilon}}^* \\ \iff & J_2F_{\underline{\varepsilon}}^*J_2 = F_{\underline{\varepsilon}}^*. \end{aligned} \tag{C.47}$$

On cherche donc maintenant à démontrer (C.47). Pour cela, on utilise l'unicité dans la construction des  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  trouvée au (iii) du Lemme C.5 : il nous suffit de montrer que

$$\check{F}_{\underline{\varepsilon}} := J_2F_{\underline{\varepsilon}}^*J_2$$

satisfait aussi les hypothèses du (iii) du Lemme C.5 pour conclure que (C.47) est vérifiée. Il y a pour cela trois étapes :

**Étape 1** montrer que  $\check{F}_{\underline{\varepsilon}}$  est une application symplectique ;

**Étape 2** montrer que  $\underline{H}(\check{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon})$  peut s'écrire en fonction des variables  $\xi_1\eta_1$ ,  $\xi_2\eta_2$  et  $\underline{\varepsilon}$ .

**Étape 3** montrer que  $\check{F}_{\underline{\varepsilon}}$  vérifie l'hypothèse (C.30).

**Étape 1.** On a vérifié dans la partie C.1 que le changement de coordonnées linéaire  $\mathcal{P}$  est symplectique. Donc

$$\begin{aligned} & \check{F}_{\underline{\varepsilon}} \text{ est symplectique} \\ \iff & \mathcal{P}^{-1}\check{F}_{\underline{\varepsilon}}\mathcal{P} \text{ est symplectique} \\ \iff & J_1\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}J_1 \text{ est symplectique} \\ \iff & {}^tD\overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)\Omega D\overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \Omega \\ \iff & {}^tD\overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}}\Omega D\overline{\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \Omega. \end{aligned}$$



Or, comme  $\mathcal{F}_\varepsilon$  est canonique, on sait que

$$\forall(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \quad ({}^t D\mathcal{F}_\varepsilon \Omega D\mathcal{F}_\varepsilon)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \Omega.$$

Et comme  $\Omega$  est réelle on a donc bien

$$\forall(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \quad \overline{{}^t D\mathcal{F}_\varepsilon \Omega D\mathcal{F}_\varepsilon}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \overline{\Omega} = \Omega.$$

Donc  $\check{F}_\varepsilon$  est bien symplectique.

**Étape 2.** Rappelons que les lemmes C.3, C.4, C.5, C.7 et C.9 ont été démontrés avec le Hamiltonien  $\mathbf{H}$  général introduit en (C.3) et que le Hamiltonien

$$\underline{H}((q'_1, p'_1, q'_2, p'_2), \varepsilon) := H(\mathcal{P}^{-1}(q'_1, p'_1, q'_2, p'_2), \varepsilon)$$

rentre dans ce cadre général.

On sait de plus que  $H$  est une série entière en  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  à coefficients réels et que, d'après le Lemme C.5,

$$\underline{H}(F_\varepsilon^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon) = K_\varepsilon(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2).$$

Alors

$$\begin{aligned} \underline{H}(\check{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon) &= H(\mathcal{P}^{-1} J_2 F_\varepsilon^* J_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \varepsilon) = H(J_1 \mathcal{P}^{-1} F_\varepsilon^*(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, i \overline{\eta_2}, i \overline{\xi_2}), \varepsilon) \\ &= \overline{H}(J_1 \mathcal{P}^{-1} F_\varepsilon^*(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, i \overline{\eta_2}, i \overline{\xi_2}), \varepsilon) = \overline{H}(\mathcal{P}^{-1} F_\varepsilon^*(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, i \overline{\eta_2}, i \overline{\xi_2}), \varepsilon) \\ &= \overline{\underline{H}(F_\varepsilon^*(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, i \overline{\eta_2}, i \overline{\xi_2}), \varepsilon)} = \overline{K_\varepsilon(\overline{\xi_1} \overline{\eta_1}, \overline{\xi_2} \overline{\eta_2})} = \overline{K_\varepsilon}(\xi_1 \eta_1, -\xi_2 \eta_2). \end{aligned}$$

**Étape 3.** Fixons  $\varepsilon$ , et notons

$$\begin{aligned} \check{F}_\varepsilon(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &:= (\check{\varphi}_1, \check{\psi}_1, \check{\varphi}_2, \check{\psi}_2)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2); \\ F_\varepsilon^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &:= (\varphi_1^*, \psi_1^*, \varphi_2^*, \psi_2^*)(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2). \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \check{\varphi}_1(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= \overline{\varphi_1^*(\overline{\xi_1}, \overline{\eta_1}, i \overline{\eta_2}, i \overline{\xi_2})} = \overline{\varphi_1^*}(\xi_1, \eta_1, -i \eta_2, -i \xi_2) \\ \check{\psi}_1(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= \overline{\psi_1^*(\xi_1, \eta_1, -i \eta_2, -i \xi_2)} \\ \check{\varphi}_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= i \overline{\psi_2^*(\xi_1, \eta_1, -i \eta_2, -i \xi_2)} \\ \check{\psi}_2(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= i \overline{\varphi_2^*(\xi_1, \eta_1, -i \eta_2, -i \xi_2)}. \end{aligned}$$

On sait que  $F_\varepsilon^*$  vérifie (C.30), *i.e.*

$$\omega_1 \left( \left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \eta_1 \end{array} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) + i \omega_2 \left( \left[ \begin{array}{c} \varphi_2^* \\ \xi_2 \end{array} \right] (\omega_1, \omega_2) - \left[ \begin{array}{c} \psi_2^* \\ \eta_2 \end{array} \right] (\omega_1, \omega_2) \right) = 0.$$

Exprimons tout d'abord  $\left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}_1 \\ \xi_1 \end{array} \right]$  en fonction de  $\left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right]$ . Si on note

$$\varphi_1^* := \sum_{m, n \in \mathbb{N}^2} \alpha_{m, n} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \xi_2^{m_2} \eta_2^{n_2},$$

alors

$$\left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right] = \sum_{\substack{m_2=n_2 \\ m_1=n_1+1}} \alpha_{m,n} (\xi_1 \eta_1)^{n_1} (\xi_2 \eta_2)^{n_2},$$

et

$$\overline{\varphi_1^*}(\xi_1, \eta_1, -i\eta_2, -i\xi_2) = \sum_{m,n \in \mathbb{N}^2} \overline{\alpha_{m,n}} (-i)^{m_2+n_2} \xi_1^{m_1} \eta_1^{n_1} \eta_2^{m_2} \xi_2^{n_2}.$$

Donc

$$\left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}_1 \\ \xi_1 \end{array} \right] (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \sum_{\substack{m_2=n_2 \\ m_1=n_1+1}} \overline{\alpha_{m,n}} (-i)^{2n_2} (\xi_1 \eta_1)^{n_1} (\xi_2 \eta_2)^{n_2} = \overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right]} (\xi_1 \eta_1, -\xi_2 \eta_2).$$

On trouve ensuite par les mêmes raisonnements

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} \check{\psi}_1 \\ \eta_1 \end{array} \right] (\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) &= \overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \eta_1 \end{array} \right]} (\xi_1 \eta_1, -\xi_2 \eta_2); \\ \left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}_2 \\ \xi_2 \end{array} \right] (\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) &= -\overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_2^* \\ \eta_2 \end{array} \right]} (\xi_1 \eta_1, -\xi_2 \eta_2); \\ \left[ \begin{array}{c} \check{\psi}_2 \\ \eta_2 \end{array} \right] (\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2) &= \overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_2^* \\ \xi_2 \end{array} \right]} (\xi_1 \eta_1, -\xi_2 \eta_2). \end{aligned}$$

On obtient alors, en utilisant le fait que  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  vérifie (C.30),

$$\begin{aligned} &\omega_1 \left( \left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}_1 \\ \xi_1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \check{\psi}_1 \\ \eta_1 \end{array} \right] \right) (\omega_1, \omega_2) + i\omega_2 \left( \left[ \begin{array}{c} \check{\varphi}_2 \\ \xi_2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \check{\psi}_2 \\ \eta_2 \end{array} \right] \right) (\omega_1, \omega_2) \\ &= \omega_1 \left( \overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right]} - \overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \eta_1 \end{array} \right]} \right) (\omega_1, -\omega_2) + i\omega_2 \left( -\overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_2^* \\ \xi_2 \end{array} \right]} + \overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_2^* \\ \eta_2 \end{array} \right]} \right) (\omega_1, -\omega_2) \\ &= \omega_1 \left( \overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right]} - \overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \eta_1 \end{array} \right]} \right) (\omega_1, -\omega_2) + i(-\omega_2) \left( \overline{\left[ \begin{array}{c} \psi_2^* \\ \eta_2 \end{array} \right]} - \overline{\left[ \begin{array}{c} \varphi_2^* \\ \xi_2 \end{array} \right]} \right) (\omega_1, -\omega_2) \\ &= \overline{\omega_1 \left( \left[ \begin{array}{c} \varphi_1^* \\ \xi_1 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \psi_1^* \\ \eta_1 \end{array} \right] \right) + i\omega_2 \left( \left[ \begin{array}{c} \varphi_2^* \\ \xi_2 \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \psi_2^* \\ \eta_2 \end{array} \right] \right)} (\omega_1, -\omega_2) = 0. \end{aligned}$$

**Démonstration de (ii).**

On utilise le fait que d'après le Lemme C.5, il existe  $K_{\underline{\varepsilon}^*}$  tel que  $F_{\underline{\varepsilon}}^*$  vérifie

$$\underline{H}(F_{\underline{\varepsilon}}^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}^*}(\xi_1 \eta_1, \xi_2 \eta_2).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &H(\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) = H(\mathcal{P}^{-1} F_{\underline{\varepsilon}}^* \mathcal{P}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2), \underline{\varepsilon}) \\ &= \underline{H}(F_{\underline{\varepsilon}}^*(\xi_1, \eta_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2 + i\eta_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_2 + i\xi_2)), \underline{\varepsilon}) = K_{\underline{\varepsilon}^*}(\xi_1 \eta_1, \frac{i}{2}(\xi_2^2 + \eta_2^2)) := K_{\underline{\varepsilon}}(\xi_1 \eta_1, \xi_2^2 + \eta_2^2). \end{aligned}$$

On a maintenant tous les éléments pour démontrer la C.1.

**Démonstration de la Proposition C.1**

Montrons que  $\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}$  définie dans le Lemme C.11 vérifie les résultats annoncés dans la Proposition C.1. Soit  $\rho'_0 < \rho_0$  tel que  $4\rho'_0$  soit un rayon de convergence de la série entière  $\mathcal{M}$  du Lemme C.9 et tel que  $\rho'_0$  soit un rayon de convergence de  $F_0^*$  (ce qui est bien possible car  $F_0^*$  est convergente d'après le Lemme C.9). Et soit  $\mathcal{M}_0 := \|\mathcal{M}\|_{\mathcal{A}(\mathcal{B}(0,4\rho'_0))}$ .

- (C.1) est bien vérifiée grâce au (ii) du Lemme C.11 ;
- (C.2) est une conséquence du Lemme C.7 ;
- (i) découle directement du Lemme C.9 ;
- (ii) et (iii) viennent du Lemme C.9 et du fait que le monôme de degré 1 de  $F_0^*(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  est  $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$  et le monôme de degré 1 de  $(F_0^*)^{-1}(q_1, p_1, q_2, p_2)$  est  $(q_1, p_1, q_2, p_2)$  ;
- (iv) se déduit de (i) par le (vi) du Lemme B.3 ;
- (v) se déduit de (i) par le Lemme B.5 suivi du (vi) du Lemme B.3 ;
- (vi) et (vii) se déduisent de (i) et (ii) puis du Lemme B.3-(vi) ;
- (viii) et (ix) s'obtiennent grâce à (vi) et au Lemme C.7.

□

# Bibliographie

- [1] Amick C.J., McLeod J.B. (1990). A singular perturbation problem in needle crystals. Arch. Rationnal Mech. Anal. 109, No 2, p. 139-171.
- [2] Amick C.J., McLeod J.B. (1992). A singular perturbation problem in water waves. Stab. Appl. Anal. of Cont. Media, p. 127-148.
- [3] Amick C.J., Toland J.F. (1992). Solitary waves with surface tension. I. Trajectories homoclinic to periodic orbits in four dimensions. Arch. Rationnal Mech. Anal. 118, No 1, 37-69.
- [4] Arnold V.I. (1964). Instability of dynamical systems with several degrees of freedom. Doklady Akad Nauk SSSR 156, P. 581-585.
- [5] Arnold, V. (1978). Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, New-York.
- [6] Arnold, V., Kozlov, V.V., Neishtadt, A.I. (1988). Mathematical aspects of classical and celestial mechanics. Dynamical Systems III. Springer-Verlag : New York, Heidelberg, Berlin.
- [7] Aubry S. (1997). Breathers in nonlinear lattices : existence, linear stability and quantization. Physica D 103, p. 201-250.
- [8] Bernard P. (2003). Homoclinic orbit to a center manifold. Calc. Var. 17, 121-157.
- [9] Bernard P., Grotta Ragazzo C., Salomao P.A.S. (2003). Homoclinic orbits near saddle-center fixed points of Hamiltonian systems with two degrees of freedom. Astérisque, 286 (2003), 151-165. Geometric Methods in Dynamics (I) - Volume in honor of Jacob Palis.
- [10] Birkhoff, G.D. (1927). Dynamical systems. A.M.S. Coll. Publications, vol. 9, reprinted 1966.
- [11] Churchill R., Kummer M., Rod D. (1983). On averaging, reduction, and symmetry in Hamiltonian systems. J. Diff. Eq., 49, 359-414.
- [12] Conley C. (1968). Twist mappings, linking, analyticity, and periodic solutions which pass close to an unstable periodic solution. Topological dynamics (Sympos, Colorado State Univ., Ft. Collins, Colo., 1967), pp. 129-153. Benjamin, New York.
- [13] Conley C. (1969). On the ultimate behavior of orbits with respect to an unstable critical point. I Oscillating, asymptotic and capture orbits. Journ. Diff Eqns 5, pp 136-158.
- [14] Chossat, P., and Iooss, G. (1994). The Couette-Taylor problem. Appl. Math. Sci. 102.

- [15] Dashen R.F., Kessler H., Levine H., Savit R. (1986). The geometrical model of dendritic growth : the small velocity limit. *Phys.* 21D, p. 371-380.
- [16] Dauxois T. , Peyrard M. (2006). *Physics of solitons*. Cambridge University press.
- [17] Elphick C. , Iooss G. , Tirapegui E. (1987). Normal form reduction for time-periodically driven differential equations. *Phys. Lett. A*, 120, No. 9, 459-463.
- [18] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M.E., Couillet, P., and G.Iooss. (1987). A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D* 29, 95-127.
- [19] Fontich E. (1993). Exponentially small upper bounds for the splitting of separatrices for high frequency periodic perturbations. *Nonlinear Anal.* 20, No 6, p. 733-744.
- [20] Gelfreich V.G. (1997). Reference system for splitting of separatrix. *Non-linearity* 10, p. 175-193.
- [21] -wave solutions Grimshaw R. (1992). The use of Borel-summation in the establishment of nonexistence of certain travelling-wave solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation. *Wave Motion* 15, No 4, p. 393-395.
- [22] Grotta Ragazzo C. (1997). Irregular dynamics and homoclinic orbits to Hamiltonian Saddle-Centers. *Comm. Pure App. Math. L*, pp 105-147.
- [23] Grotta Ragazzo C. (1997). On the stability of double homoclinic loops. *Comm. Math. Phys.* 184, pp 251-272.
- [24] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983). *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*. Applied Mathematical Science, vol.42, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- [25] Gustavson F.G. (1966). On constructing formal integrals of an hamiltonian system near an equilibrium point. *Astronomical Journal*, 71, 670-686.
- [26] Hakim V. (1991). Computation of transcendental effects in growth problems : linear solvability conditions and nonlinear methods - the example of the geometric model. *Asymptotics beyond all orders* (La Jolla, CA, 1991), 15-28, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 284, Plenum, New York.
- [27] Hakim V., Mallick K. (1993). Exponentially small splitting of separatrices, matching in the complex plane and Borel summation. *Nonlinearity* 6, No 1, p. 57-70.
- [28] Hammersley J.M., Mazzarino G. (1989). A differential equation connected with the gendritic growth of crystals. *IMA J. Appl. Math.* 42, p. 43-75.
- [29] Haragus, M., Iooss, G. (2010). *Local bifurcations, center manifolds, and normal forms in infinite dimensional dynamical systems*. Springer Verlag, to appear.
- [30] Holmes P., Marsden J., Scheurle J. (1988). Exponentially small splitting of separatrices with applications to KAM theory and degenerate bifurcations. *Contemporary Mathematics*, Vol. 81, p. 213-244.
- [31] Hunter J.K., Scheurle J. (1988). Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves. *Phys. D* 32, No 2, p.2253-268.
- [32] Iooss, G., Adelmeyer, M. (1992). *Topics in Bifurcation Theory and Applications*. Advanced Series in Nonlinear Dynamics, vol. 3, World Scientific, Singapore.

- [33] Iooss G., Kirchgässner K. (1992). Water waves for small surface tension : An approach via normal form. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh 122A, p. 267-299.
- [34] Iooss G., Kirchgässner K. (2000). Travelling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators. Comm. Math. Phys. 211, No 2, 439-464.
- [35] Iooss G., Lombardi E. (2004). Normal forms with exponentially small remainder : application to homoclinic connections for the reversible  $0^{2+i\omega}$  resonance. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 339, no. 12, 831-838.
- [36] Iooss, G., Lombardi, E. (2010). Approximate invariant manifolds up to exponentially small terms. J. Differential Equations 248, 1410-1431.
- [37] Iooss, G., Lombardi, E. (2005). Polynomial normal forms with exponentially small remainder for analytic vector fields. J. Differential Equations 212, 1-61.
- [38] Iooss, G., and Pérouéme, M.C. (1993). Perturbed homoclinic solutions in 1 :1 resonance vector fields. J. Differential Equations 102(1).
- [39] Kelley, A. (1967). The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds. J. Differential Equations 3, 546-570.
- [40] Kirchgässner K. (1982). Wave solutions of reversible systems and applications. J. Diff. Equa 45, p. 113-127.
- [41] Kolmogorov, A.N. (1954). On conservation of conditionally periodic motions under small perturbation of the hamiltonian. Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 98 :527-530.
- [42] Kruskal M.D., Segur H. (1991). Asymptotics beyond all orders in a model of crystal growth. Studies in Applied Mathematics 85, p. 129-181.
- [43] Lazutkin V.F. (1984). Splitting of separatrices for the Chirikov standard map. VINITI No 6372/84.
- [44] Lerman L.M. (1991). Hamiltonian systems with loops of a separatrix of a Saddle-Center. Selecta Math. Sov. 10, pp 297-306.
- [45] Llibre J., Martinez R. Simo C. (1985). Transversality of the invariant manifolds associated to the Lyapunov family of periodic orbits near  $L_2$  in the restricted three body problem. Jour. Diff. Eq. 58, pp 104-156.
- [46] Lombardi E. (1997). Orbits homoclinic to exponentially small periodic orbits for a class of reversible systems. Application to water waves. Arch. Rationnal Mech. Anal. 137, p. 227-304.
- [47] Lombardi, E. (2000). Oscillatory Integrals and Phenomena Beyond all Algebraic Orders. Lecture Notes in Mathematics vol.1741. Springer.
- [48] Liapounoff A. (1949). Problème général de la stabilité du mouvement. Ann. Math. Studies, No. 17, Princeton Univ. Press.
- [49] Melnikov V.K. (1963). On the stability of the center for time periodic perturbations. Trans. Moscow Math. soc. 12, p. 1-57.
- [50] Mielke A., Holmes P., O'Reilly O. (1992). Cascades of homoclinic orbits to, and chaos near, a Hamiltonian saddle center. J. Dyn. Diff. Eqns. 4, pp. 95-126.
- [51] Moser, J. , On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus.
- [52] Moser, J. , On the Generalization of a theorem of A.Liapounoff

- [53] Moser J. , Siegel C.L. (1971). Lectures on celestial mechanics. Springer-Verlag : New York, Heidelberg, Berlin.
- [54] Nekoroshev, N.N. (1977). An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, I. *Usp. Mat. Nauk* 32 (1977) 5-66 *Russ. Math. Surv.* 32 (1977) 1-65.
- [55] Nekoroshev, N.N. (1979). An exponential estimate of the time of stability of nearly integrable Hamiltonian systems, II. *Tr. Semin. Petrovsk.* 5 (1979) 5-50 in : O.A. Oleineik (Ed.), *Topics in Modern Mathematics, Petrovskii Semin.*, no.5. Consultant Bureau, New York, 1985.
- [56] Neishtadt A.I. (1984). The separation of motions in systems with rapidly rotating phase. *J. Appl. Math. Mech.* 48 No 2, p. 133-139 (1985); traduction du russe *Prikl. Mat. Mekh.* 48 (1984), No 2, p. 197-204.
- [57] Poschel, J. (1993). Nekoroshev Estimates for Quasi-convex Hamiltonian Systems. *Math. Z.* 213 187-216.
- [58] Touzé, C., and Amabili, M. (2006). Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems : Application to reduced-order modelling of harmonically forced structures. *Journal of Sound and Vibration* 298, 958-981.
- [59] Poincaré, H. (1893). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (vol. 2). Paris : Gauthier-Villars.
- [60] Rüssmann, H. (1964). Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. *Math. Annalen* 154, 285-300.
- [61] Sanders J. (1982). Melnikov's method and averaging. *Cel. Mech.* 28, p. 171-181.
- [62] Sauzin D. (1999). A new method for measuring the splitting of invariant manifolds. *International Conference on Differential Equations*, Vol. 1, 2 (Berlin, 1999), 961-966. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2000.
- [63] Simo C. (1994). Averaging under fast quasiperiodic forcing. *Hamiltonian Mechanics* (Torun, 1993), p. 13-34, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B Phys., 331, Plenum, New York.
- [64] Sun S.M., Shen M.C. (1993). Exponentially small estimate for the amplitude of capillary ripples of generalized solitary waves. *J. Math. Anal. Appl.* 172, p. 533-566.
- [65] Yang T.S., Akylas T.R. (1996). Weakly nonlocal gravity-capillary solitary waves. *Phys. Fluids.* 8(6), p-1506-14.

# Table des figures

1	Orbite périodique et orbite homocline à une orbite périodique ou onde solitaire généralisée. . . . .	12
2	Perturbation d'une orbite homocline à 0. $d$ est la distance mesurée dans la méthode de Melnikov. . . . .	13
3	Perturbation d'une orbite homocline à 0 réversible. . . . .	14
4	Méthode de Conley. . . . .	14
2.1	Valeurs propres de $D_x V_{H_\varepsilon}(0)$ selon les valeurs de $\varepsilon$ pour la résonance $0^2 i \omega$ . . . . .	56
2.2	Pour les ondes progressives de dimension 2 : valeurs propres du spectre central selon les valeurs du nombre de Froude $F$ et du nombre de Bond $b$ . Les points et les croix représentent respectivement des valeurs propres simples et doubles. . . . .	57
2.3	Orbite périodique et orbite homocline à une orbite périodique. . . . .	57
2.4	Valeurs propres de $D_x \mathbf{V}_{H_\lambda}(0)$ selon les valeurs de $\lambda$ . . . . .	63
2.5	Portrait de phase pour forme normale tronquée de degré 3. . . . .	67
2.6	Portrait de phase dans les coordonnées locales $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . . . . .	71
2.7	Application de retour globale $\Psi_2$ . . . . .	72
2.8	Position du domaine de définition du premier retour par rapport à $W^{cs}(0)$ . . . . .	73
2.9	Intersection du niveaux d'énergie $\{H = H(P^a)\}$ avec la section $\Sigma_1$ . . . . .	74
2.10	Dans $\Sigma_1$ , positions relatives du niveau $\{H = H(P^a)\}$ et de la variété centre-stable $W^{cs}(0)$ . . . . .	75
2.11	Domaines de départ et d'arrivée de $\Psi_\varepsilon^a$ . . . . .	76
2.12	Courbe invariante et taille des couronnes de travail dans la démonstration. . . . .	78
2.13	$W^i(P^a)$ intersecte $\Sigma_1$ une première fois. . . . .	79
2.14	Alternatives possibles pour les positions relatives de $\mathcal{C}_s^a$ et $\mathcal{C}_i^a$ . . . . .	80
2.15	Itérations successives de $\Psi^a$ sur $\mathcal{C}_i^a$ . . . . .	80
2.16	$\Sigma_1$ vu comme un graphe en coordonnées $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ . . . . .	85
2.17	Variété centre-stable à 0, $W^{cs}(0)$ . . . . .	99
2.18	Les $W^s(P^a)$ sur $W^{cs}(0)$ . . . . .	103
2.19	Intersection du niveaux d'énergie $\{H = H(P^a)\}$ avec la section $\Sigma_1$ . . . . .	105
2.20	Dans $\Sigma_1$ , positions relatives du niveau $\{H = H(P^a)\}$ et de la variété centre-stable $W^{cs}(0)$ . . . . .	108
2.21	Image d'une courbe $\mathcal{C}$ par $\hat{\Psi}_\varepsilon^a$ . . . . .	128
2.22	Image d'une courbe $\mathcal{C}$ par $\hat{\Psi}_\varepsilon^a$ . . . . .	130





# Table des notations

## Chapitre 1

$H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m)$ .....	22	$\mathcal{A}(\Omega, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^m))$ .....	22
$\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^{m_0}, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1}))$ .....	23	$\mathcal{H}_n(\mathbb{R}^{m_0}, H^\ell(\mathbb{R}/T\mathbb{Z}, \mathbb{R}^{m_1}))$ .....	23
$\mathcal{A}_L$ .....	27	$\ \cdot\ _{n, H^j}$ .....	28
$ \cdot _{2, n}$ .....	29	$ \cdot _{H^j}$ .....	29
$f^k$ .....	29	$\ \cdot\ _n$ .....	29
$\mathcal{B}_L$ .....	46		

## Chapitre 2

$\mathcal{A}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}(0, \rho), \mathbb{R}^n)$ .....	62	$\ \cdot\ _{\mathcal{A}}$ .....	62
$\rho_0$ .....	69	$I_2$ .....	68
$\underline{\varepsilon}, \nu, \mu$ .....	69	$\Sigma_1, \delta_1$ .....	69
$\rho'_0$ .....	70	$\mathcal{F}_{\underline{\varepsilon}}, \mathcal{M}_0$ .....	70
$K_{\underline{\varepsilon}}$ .....	70	$\Sigma_2$ .....	71
$\Psi$ .....	73	$P_{\underline{\varepsilon}}^a$ .....	74
$p_{1, \underline{\varepsilon}}^{cs}, p_1^H$ .....	74	$\mathcal{C}_s^a$ .....	74
$\Psi_{\underline{\varepsilon}}^a$ .....	74	$\Gamma_{\underline{\varepsilon}}^a$ .....	76
$\mathcal{C}_i^a$ .....	79	$\xi_{1, \underline{\varepsilon}}^\Sigma$ .....	85
$R_\theta, \mathbb{R}_\theta$ .....	87	$k_0$ .....	87
$\underline{\nu}$ .....	98	$\tilde{h}_{\underline{\varepsilon}}$ .....	105
$\prec$ .....	136	$[\cdot]$ .....	145



# Résumé / Abstract

## Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à deux problèmes faisant intervenir des formes normales de champs de vecteurs et des phénomènes exponentiellement petits.

Dans le premier chapitre on démontre tout d'abord deux théorèmes de normalisation avec restes exponentiellement petits pour des champs de vecteurs analytiques au voisinage d'un point d'équilibre, dans le cas non autonome périodique. Le premier théorème de normalisation permet de construire une quasi-variété invariante à un exponentiellement petit près, tandis que le deuxième met le champ de vecteur sous la forme normale de Elphick-Tirapegui-Brachet-Coullet-Iooss à un exponentiellement petit près.

Dans le deuxième chapitre on travaille près d'un point d'équilibre d'une famille de systèmes hamiltoniens au voisinage d'une résonance  $0^2i\omega$ . On démontre l'existence d'une famille d'orbites périodiques entourant l'équilibre puis l'existence d'orbites homoclines à plusieurs boucles à chacune de ces orbites périodiques, aussi proche de cet équilibre que l'on veut à l'exception de l'équilibre lui-même. La démonstration est basée sur la preuve d'un théorème de forme normale hamiltonien inspiré des formes normales de Elphick-Tirapegui-Brachet-Coullet-Iooss ainsi que sur une normalisation locale hamiltonienne s'appuyant sur un résultat de Moser. On obtient ensuite le résultat grâce à des arguments géométriques liés à la petite dimension et à un théorème KAM qui permet de confiner les boucles. Pour le même problème dans le cadre d'un champ de vecteurs réversible non hamiltonien, l'apparition d'exponentiellement petits lors de la perturbation de l'orbite homocline de la forme normale empêche la démonstration de l'existence d'orbites homoclines à des orbites périodiques de taille exponentiellement petite. Le même phénomène apparaît ici mais l'obstacle est contourné grâce à des arguments géométriques spécifiques aux systèmes hamiltoniens.

**Mots clés :** Formes normales, phénomènes exponentiellement petits, variétés invariantes, Gevrey, résonance  $0^2i\omega$ , systèmes hamiltoniens, orbites homoclines à plusieurs boucles, ondes solitaires généralisées, KAM, théorème de Liapunoff.

## Abstract

In this thesis we consider two problems dealing with normal forms of vector fields and exponentially small phenomena.

In the first chapter, we prove two results of normalization with exponentially small remainders for analytic vectorfields in the neighborhood of a fixed point, in a periodic nonautonomous case. The first normalization theorem allows to construct a quasi-invariant manifold with an exponentially small remainder while the second one is a normal form result of the Elphick-Tirapegui-Brachet-Coullet-Iooss type with an exponentially small remainder.

In the second chapter, we study the dynamic near the equilibrium point of a family of hamiltonian systems in the neighborhood of a  $0^2i\omega$  resonance. We first show the existence of a family of periodic orbits surrounding the equilibrium and then the existence of homoclinic orbits with several loops for every periodic orbit close to the origin, except the origin itself. The proof is based on a hamiltonian normal form theorem proved in this chapter, inspired by the Elphick-Tirapegui-Brachet-Coullet-Iooss normal form and on a local hamiltonian normalization relying on a result of Moser. We obtain the result of existence of homoclinic orbits by geometrical arguments based on the low dimension and with the aid of a KAM theorem which allows to confine the loops. The same problem was studied before for reversible non hamiltonian vectorfields, and the splitting of the homoclinic orbits lead to exponentially small terms which prevent the existence of homoclinic connections to exponentially small periodic orbits. The same phenomenon occurs here but we get round this difficulty thanks to geometric arguments specific to hamiltonian systems.

**Key words :** Normal forms, exponentially small phenomena, invariant manifolds, Gevrey,  $0^2i\omega$ , hamiltonian systems, homoclinic orbits with several loops, generalized solitary waves, KAM, Liapunoff theorem.