



HAL
open science

Cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires

Clélia Pech

► **To cite this version:**

Clélia Pech. Cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires. Mathématiques générales [math.GM]. Université de Grenoble, 2011. Français. NNT : 2011GRENM059 . tel-00650211

HAL Id: tel-00650211

<https://theses.hal.science/tel-00650211v1>

Submitted on 9 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques**

Arrêté ministériel : 7 août 2006

Présentée par

Clélia Pech

Thèse dirigée par **Laurent Manivel**

préparée au sein de l'**Institut Fourier**
et de l'**École doctorale MSTII**

Cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires

Thèse soutenue publiquement le **6 décembre 2011**,
devant le jury composé de :

M. Michel Brion

Directeur de recherche, Université Grenoble 1, Examineur

M. Alessandro Chiodo

Maître de conférences, Université Grenoble 1, Examineur

M. Andrew Kresch

Professeur, Université de Zürich, Suisse, Rapporteur

M. Laurent Manivel

Directeur de recherche, Université Grenoble 1, Directeur de thèse

M. Etienne Mann

Maître de conférences, Université Montpellier 2, Examineur

M. Nicolas Perrin

Maître de conférences, Université Paris 6, Rapporteur

M. Nicolas Ressayre

Professeur, Université Lyon 1, Examineur



Remerciements

Ma gratitude va en premier lieu à mon directeur de thèse, Laurent Manivel, pour le soutien qu'il m'a apporté durant la préparation de cette thèse. Il s'est toujours montré à l'écoute et a fait preuve d'une grande patience lors de ses explications et de ses conseils. Je tiens également à lui exprimer mes remerciements pour la relecture minutieuse qu'il a faite de ce travail.

Je remercie vivement Andrew Kresch et Nicolas Perrin pour avoir accepté de rapporter ma thèse. Je leur suis très reconnaissante de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail ainsi que des corrections et idées qu'ils m'ont proposées. Merci également à Michel Brion, Alessandro Chiodo, Etienne Mann et Nicolas Ressayre pour avoir accepté de prendre part au jury.

Je souhaite également exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont invité à parler de mes travaux durant ma thèse : Pierre-Emmanuel Chaput, Etienne Mann et Nicolas Perrin, ainsi qu'aux membres de l'ANR "Des Nouvelles Symétries pour la Théorie de Gromov-Witten" qui m'ont chaleureusement intégrée à leurs activités.

Cette thèse a été préparée au sein de l'Institut Fourier, et je tiens à remercier tout le personnel administratif qui m'a offert un excellent cadre de travail. Je suis également très reconnaissante envers les thésards de l'Institut pour l'ambiance de travail chaleureuse que j'ai rencontrée et pour de nombreuses discussions intéressantes, mathématiques ou autres. Un merci tout particulier à mes cobureaux successifs Claudia, Guenaëlle, Kirill, Mateusz, Michael et Ronan.

Je tiens à remercier ma famille pour le soutien sans faille qu'elle m'a prodigué depuis toujours : mes parents Pascal et Juliana, mon frère Florian, ma grand-mère Paulette, mon oncle Lucien et ma tante Marielle. Enfin, je terminerai par un grand merci à Matthieu qui a été à mes côtés à chaque instant durant ces années.

Table des matières

Introduction	1
Présentation	1
Résultats	3
1 Cohomologie quantique des espaces homogènes	8
1.1 Invariants de Gromov-Witten, produit quantique	9
1.1.1 Notations	9
1.1.2 Invariants de Gromov-Witten	9
1.1.3 Produit quantique	12
1.2 La grassmannienne usuelle	13
1.2.1 Cohomologie classique	14
1.2.2 Cohomologie quantique	19
1.3 La grassmannienne symplectique	21
1.3.1 Formules de Pieri classiques	21
1.3.2 Présentation de $A^*(IG(m, 2n))$	23
1.3.3 Formules de Pieri quantiques	25
1.3.4 Présentation de $QA^*(IG(m, 2n))$	27
1.3.5 Formule de Giambelli	27
1.4 Autres résultats	28
1.4.1 Fonctions I et J	28
1.4.2 Autres espaces homogènes	34
2 Cohomologie classique des grassmanniennes symplectiques impaires	36
2.1 La grassmannienne symplectique impaire	36
2.2 Variétés de Schubert	37
2.2.1 Indexations	38
2.2.2 Diagramme de Hasse	39
2.2.3 Polynôme de Poincaré	43
2.3 Plongements	44
2.3.1 Dans la grassmannienne symplectique paire	45
2.3.2 Dans la grassmannienne usuelle	49
2.4 Dualité de Poincaré	50
2.5 Présentation classique	51
2.5.1 En fonction des classes e_p	52
2.5.2 En fonction des classes σ_{1^r}	53
2.6 Variété des droites	54
2.6.1 Orbites sous l'action de Sp_{2n+1}	54

2.6.2	Description géométrique	56
2.7	Applications stables de degré 1	57
2.7.1	Espaces de modules	57
2.7.2	Enumérativité des invariants en degré 1	63
3	Grassmanniennes de droites symplectiques impaires	67
3.1	Cohomologie classique	67
3.1.1	Formules de Pieri	68
3.1.2	Formules de Giambelli	69
3.2	Cohomologie quantique	70
3.2.1	A l'aide du plongement dans $G(2, 2n + 1)$	70
3.2.2	A l'aide de la fonction J	80
3.2.3	A l'aide de la variété des droites	86
4	Sur une conjecture de Dubrovin	92
4.1	Collections exceptionnelles complètes	92
4.2	Cohomologie quantique et semi-simplicité	95
4.3	Conjecture de Dubrovin	96
4.4	Cas de $IG(2, 2n + 1)$	98
4.4.1	Collection exceptionnelle complète pour $IG(2, 2n)$	99
4.4.2	Collection exceptionnelle complète pour $IG(2, 2n + 1)$	102
5	Cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires	106
5.1	Invariants de Gromov-Witten et variété des courbes de degré d	107
5.2	Principe quantique-classique pour les invariants de degré 1	112
5.3	Quelques exemples	116
5.3.1	Cohomologie quantique de $IG(3, 2n + 1)$	116
5.3.2	Etude complète pour $IG(2, 5)$	120
5.3.3	Etude complète pour $IG(3, 9)$	121
A	Variétés de Schubert dans la grassmannienne symplectique	125
A.1	Quatre indexations des variétés de Schubert	125
A.1.1	Par le groupe de Weyl	125
A.1.2	Par les paires de partitions	126
A.1.3	Par les partitions k -strictes	126
A.1.4	Par les conditions d'incidence	127
A.2	Dualité de Poincaré	127
A.2.1	Pour les éléments du groupe de Weyl	128
A.2.2	Pour les partitions k -strictes	128
A.2.3	Pour les conditions d'incidence	128
A.3	Règle de Pieri	128
A.3.1	En fonction des classes σ_{1r}	128
A.3.2	En fonction des classes σ_p	130
B	Involution quantique et décomposition en P-orbites	132
B.1	Orbites paraboliques	133
B.2	Lien entre P_I -orbites et produit quantique	139
B.3	Décomposition du diagramme de Hasse	140
B.4	Produit quantique par $\sigma_{n+1, n}$ dans $IG(2, 2n + 1)$	151

Introduction

Présentation

L'objet de ce travail est l'étude de la cohomologie quantique d'une famille d'espaces quasi-homogènes, les grassmanniennes symplectiques impaires.

Grassmanniennes symplectiques impaires. Ces variétés sont une généralisation des grassmanniennes symplectiques au cas des espaces vectoriels de dimension impaire.

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme symplectique ω et $1 \leq m \leq n$ un entier. L'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension m isotropes pour ω ne dépend à isomorphisme près ni du choix de l'espace vectoriel V de dimension $2n$, ni de celui de la forme symplectique ω . On le note donc $\text{IG}(m, 2n)$ et on l'appelle *grassmannienne symplectique*. C'est une sous-variété lisse de la grassmannienne usuelle $G(m, 2n)$, et elle possède une action transitive du groupe symplectique Sp_{2n} . Comme tout espace homogène rationnel projectif, la grassmannienne symplectique est munie d'une *décomposition cellulaire*, dont les cellules sont des espaces affines appelés *cellules de Schubert*. Leurs adhérences sont les *variétés de Schubert*, et les classes de cohomologie associées, appelées *classes de Schubert*, forment une décomposition additive de l'anneau de cohomologie de la grassmannienne symplectique. Dans la suite du texte, tous les espaces homogènes considérés seront rationnels et projectifs.

Considérons maintenant un \mathbb{C} -espace vectoriel V de dimension $2n + 1$ et un entier m tel que $2 \leq m \leq n$. L'espace V étant de dimension impaire, toute forme antisymétrique est nécessairement dégénérée. Considérons sur V une forme antisymétrique ω de rang maximal. On peut à nouveau considérer l'ensemble des sous-espaces vectoriels de V de dimension m isotropes pour ω , que l'on note $\text{IG}(m, 2n + 1)$ et que l'on appelle *grassmannienne symplectique impaire*. Cette variété est toujours une sous-variété lisse de la grassmannienne usuelle $G(m, 2n + 1)$, et elle possède une action du *groupe symplectique impair* Sp_{2n+1} , qui est le sous-groupe de GL_{2n+1} constitué des matrices qui préservent la forme antisymétrique ω . A la différence du cas pair, cette action n'est plus transitive, puisque $\text{IG}(m, 2n + 1)$ possède deux orbites pour l'action de Sp_{2n+1} : une orbite ouverte, et son complémentaire l'orbite fermée \mathbb{O} , qui est isomorphe à $\text{IG}(m - 1, 2n)$, et donc de codimension $2(n + 1 - m)$. C'est donc une variété quasi-homogène. Les grassmanniennes symplectiques impaires tout comme le groupe symplectique impair ont été étudiés par Mihai dans [Mih07].

Cohomologie quantique. L'anneau de cohomologie quantique d'une variété projective lisse complexe X est une déformation de son anneau de cohomologie. Tandis que l'anneau de cohomologie de X encode la manière dont s'intersectent ses sous-variétés, son anneau de cohomologie quantique encode la manière dont elles sont reliées par des courbes rationnelles. Plus précisément, l'anneau de cohomologie quantique est construit à l'aide de nombres appelés *invariants de Gromov-Witten*, qui, dans les cas favorables, comptent le nombre de courbes rationnelles rencontrant trois variétés données.

Considérons $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ l'espace de modules des applications stables de Kontsevich, que l'on décrira plus en détail au paragraphe 1.1.2. Les éléments de $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ sont certaines applications de degré $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ d'une courbe rationnelle munie de n points marqués vers la variété X . L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)$ est muni de n *morphismes d'évaluation*

$$ev_i : \overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta) \rightarrow X,$$

qui à un point marqué associent son image par l'application. Si l'on considère n classes de cohomologie $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in H^*(X, \mathbb{C})$, l'invariant de Gromov-Witten associé est par définition :

$$I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}} ev_1^* \gamma_1 \cup \dots \cup ev_n^* \gamma_n.$$

On explicitera les notations ci-dessus au paragraphe 1.1.2. Contentons-nous ici simplement de préciser que dans certains cas comme celui des espaces homogènes, ces invariants sont *énomératifs*, c'est-à-dire qu'ils comptent le nombre de courbes rationnelles passant par des cycles donnés.

On peut maintenant définir l'anneau de cohomologie quantique $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$ de la variété X . Si γ_1 et γ_2 sont deux classes de cohomologie sur X , leur *produit quantique* $\gamma_1 \star \gamma_2$ est donné par

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \sum_{\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})} q^\beta \sum_{\gamma_3} I_\beta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3^\vee) \gamma_3,$$

où γ_3 parcourt une base de $H^*(X, \mathbb{C})$ et γ_3^\vee la base duale de Poincaré.

L'anneau de cohomologie quantique de X est

$$\text{QH}^*(X, \mathbb{C}) := H^*(X, \mathbb{C}) \otimes \bigoplus_{\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})} \mathbb{C}[q^\beta],$$

muni du produit quantique \star . On réfère au paragraphe 1.1.3 pour plus de précisions concernant cette définition. Le coefficient de q^0 dans le produit quantique est simplement le produit classique, et par conséquent $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$ est bien une déformation de l'anneau de cohomologie de X .

La plupart des calculs explicites de la cohomologie quantique ont été effectués dans le cas des variétés toriques ou des espaces homogènes. En effet, on dispose pour les variétés toriques de toute une combinatoire qui permet par exemple de décrire aisément leur anneau de cohomologie, ainsi que leur anneau de cohomologie quantique (cf [Bat93]). Quant aux espaces homogènes, leur étude est facilitée par le fait que leurs espaces de modules d'applications stables sont lisses, et qu'on dispose d'un résultat appelé *lemme de Kleiman*, qui permet

de calculer leurs invariants de Gromov-Witten par des méthodes énumératives. On présentera au chapitre 1 les principaux résultats concernant la cohomologie quantique des espaces homogènes.

Hors de ces situations, on dispose de relativement peu d'exemples. Parmi ceux-là, on peut citer ceux de deux variétés quasi-homogènes : le schéma de Hilbert de deux points dans \mathbb{P}^2 , étudié par Graber dans [Gra01], et le schéma de Hilbert de deux points dans $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, étudié par Pontoni dans [Pon07]. On a vu que les grassmanniennes symplectiques impaires sont également des espaces quasi-homogènes. Par ailleurs, elles sont très proches du cas homogène, puisqu'elles possèdent seulement deux orbites et que l'orbite fermée est de grande codimension. De plus, le groupe symplectique impair est "presque" un groupe symplectique. En effet, on a une inclusion $\mathrm{Sp}_{2n} \subset \mathrm{Sp}_{2n+1}$, et il existe une surjection d'un sous-groupe parabolique de Sp_{2n+2} sur Sp_{2n+1} (cf [Pro86] et [GZ84]). Ces propriétés laissent supposer qu'il devrait y avoir des liens entre les variétés $\mathrm{IG}(m, 2n)$, $\mathrm{IG}(m, 2n+1)$ et $\mathrm{IG}(m, 2n+2)$. Mihai a d'ailleurs remarqué que l'on a une inclusion naturelle $\mathrm{IG}(m, 2n+1) \subset \mathrm{IG}(m, 2n+2)$, qui identifie la grassmannienne symplectique impaire à une variété de Schubert de la grassmannienne symplectique paire. Par ailleurs, l'orbite ouverte de $\mathrm{IG}(m, 2n+1)$ s'identifie à l'espace total du dual du fibré tautologique sur $\mathrm{IG}(m, 2n)$. Un des fils directeurs de cette thèse est l'idée d'établir dans quelle mesure de telles similitudes s'observent en ce qui concerne les cohomologies classique et quantique.

Résultats

Cohomologie classique. L'identification de la grassmannienne symplectique impaire à une variété de Schubert de la grassmannienne symplectique paire la munit d'une décomposition cellulaire induite par celle de $\mathrm{IG}(m, 2n+2)$, et donc de variétés de Schubert. Au paragraphe 2.2.1, on indexera ces variétés de Schubert soit par leurs conditions d'incidence par rapport à un drapeau isotrope fixé, soit par un analogue des partitions k -strictes de [BKT09]. On démontre au chapitre 2 deux résultats reliant la cohomologie classique des grassmanniennes symplectiques paires et impaires.

Le premier est une description de leur *diagramme de Hasse*, qui est un diagramme encodant la multiplication classique par la classe hyperplane. Si on note \mathcal{H}_X le diagramme de Hasse de X , on a la décomposition suivante (cf propositions 2.3 et 2.4) :

Proposition. 1. *Le diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n)}$ de la grassmannienne symplectique est constitué de l'union :*

- *du diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n-1)}$ de la grassmannienne symplectique impaire $\mathrm{IG}(m, 2n-1)$;*
- *du diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m-1, 2n-2)}$ de la grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}(m-1, 2n-2)$.*

2. *Le diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+1)}$ de la grassmannienne symplectique impaire est constitué de l'union :*

- *du diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n)}$ de la grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}(m, 2n)$;*

- du diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\text{IG}(m-1,2n)}$ de l'orbite fermée $\mathbb{O} \cong \text{IG}(m-1, 2n)$.

Les propositions 2.3 et 2.4 décrivent également les arêtes entre les deux parties de chaque décomposition. Ce résultat est une première manifestation du lien entre les cohomologies des grassmanniennes symplectiques paires et impaires, puisqu'il montre que le produit d'intersection par la classe hyperplane dans $\text{IG}(m, 2n+1)$ se déduit de celui dans $\text{IG}(m, 2n+2)$.

Le second résultat consiste en deux présentations de l'anneau de cohomologie $H^*(\text{IG}(m, 2n+1), \mathbb{Z})$ de la grassmannienne symplectique impaire, en fonction de deux systèmes de générateurs. Ces présentations font l'objet des propositions 2.12 et 2.13. Donnons ici la première présentation, en sachant que les $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n+1-m}$ sont les classes de Chern du fibré quotient sur $\text{IG}(m, 2n+1)$:

Proposition. *L'anneau de cohomologie $H^*(\text{IG}(m, 2n+1), \mathbb{Z})$ est engendré par les classes $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n+1-m}$ et les relations sont*

$$\det(e_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ pour } m+1 \leq r \leq 2n+2-m,$$

$$e_r^2 + 2 \sum_{i \geq 1} (-1)^i e_{r+i} e_{r-i} = 0 \text{ pour } n+2-m \leq r \leq n.$$

A titre de comparaison, voici une présentation de la cohomologie de la grassmannienne symplectique ; les $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n-m}$ sont à nouveau les classes de Chern du fibré quotient :

Proposition ([BKT09]). *L'anneau de cohomologie $H^*(\text{IG}(m, 2n), \mathbb{Z})$ est engendré par les classes $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n-m}$, et les relations sont*

$$\det(e_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ pour } m+1 \leq r \leq 2n-m,$$

$$e_r^2 + 2 \sum_{i=1}^{2n-m-r} (-1)^i e_{r+i} e_{r-i} = 0 \text{ pour } n+1-m \leq r \leq n.$$

Si les deux résultats précédents confirment l'existence de similitudes entre les cas pair et impair, l'étude de la dualité de Poincaré montre que cette ressemblance n'est pas parfaite. En effet, tandis que pour la grassmannienne symplectique (comme pour tout espace homogène) la base des classes de Schubert est sa propre duale de Poincaré, ce n'est plus du tout le cas pour $\text{IG}(m, 2n+1)$ (cf proposition 2.11). On verra que le calcul du dual de Poincaré présente déjà de grandes difficultés d'ordre combinatoire. Ceci nous conduit à nous restreindre à l'étude de la grassmannienne symplectique impaire de droites $\text{IG}(2, 2n+1)$ au chapitre 3. Les principaux résultats que nous y obtenons concernant la cohomologie classique sont des règles de Pieri et de Giambelli classiques en fonction des deux systèmes de générateurs de $H^*(\text{IG}(m, 2n+1), \mathbb{Z})$ mentionnés au paragraphe précédent. Une *règle de Pieri* est une formule décrivant la multiplication d'une classe de Schubert arbitraire avec l'un des éléments du système de générateurs considéré, tandis qu'une *règle de Giambelli* permet d'exprimer n'importe quelle classe de Schubert en fonction des générateurs. De tels résultats ont été obtenus dans [PR96], [BKT09] et [BKT08a] pour la grassmannienne symplectique.

Si l'allure générale des formules de Pieri et de Giambelli que nous obtenons dans le cas impair est très proche de celle du cas pair, une différence remarquable

apparaît pour l'une des formules de Pieri (cf proposition 3.4), qui est l'existence de coefficients négatifs pour certains produits d'une classe de Schubert par une classe de Schubert spéciale. Ce phénomène n'apparaît pas dans le cas des espaces homogènes. En effet, le lemme de Kleiman mentionné précédemment permet dans ce cas d'assurer que deux variétés de Schubert peuvent toujours être mises en position transverse, ce qui garantit que les coefficients des classes de Schubert apparaissant dans le produit d'intersection des classes de cohomologie associées sont tous positifs. Le fait qu'il ne soit pas toujours possible de mettre deux sous-variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ en position transverse rajoute une difficulté notable au calcul énumératif des invariants de Gromov-Witten de ces espaces.

Cohomologie quantique. On a déjà mentionné le fait que dans les cas favorables, les invariants de Gromov-Witten peuvent être calculés par des méthodes énumératives. C'est toujours le cas pour les espaces homogènes, mais plusieurs difficultés apparaissent dans les situations plus générales.

Tout d'abord, la définition des invariants de Gromov-Witten fait intervenir un *cycle fondamental virtuel* $[\mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ construit dans [BF97] et [LT98]. En général, ce cycle est différent du cycle fondamental, ce qui traduit le fait que la théorie des déformations de l'espace de modules des applications stables possède des obstructions non triviales. Cependant, ce problème n'apparaît pas dans le cas des espaces homogènes (cf [FP97]). Pour ce qui est des grassmanniennes symplectiques impaires, la situation est plus contrastée : on montre à la proposition 2.15 que les espaces de modules d'applications stables de degré 1 avec deux ou trois points marqués (qui sont ceux qui nous intéressent pour le calcul de la cohomologie quantique) sont non obstrués, donc lisses et de la dimension attendue. Cependant, on voit au chapitre 5 qu'une obstruction apparaît dès le degré 2.

Pour les invariants de Gromov-Witten de degré 1, la lissité des espaces de modules nous permet de démontrer le résultat d'énumérativité suivante (théorème 2.19) :

Théorème. *On se place dans $\text{IG}(m, 2n + 1)$. Soient $r = 2$ ou 3 et $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des classes de cohomologie représentées par des sous-variétés $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ de codimension au moins 2 qui coupent l'orbite fermée de manière génériquement transverse. Alors il existe un ouvert dense $U \subset \text{Sp}_{2n+1}^r$ tel que pour tout $(g_1, \dots, g_r) \in U$, l'invariant de Gromov-Witten $I_1(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ soit égal au nombre de droites de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ coupant les translatés $g_1\Gamma_1, \dots, g_r\Gamma_r$.*

Outre la proposition 2.15, le principal ingrédient de la démonstration est un lemme dû à Graber (cf [Gra01]) qui étend un résultat de De Concini et Procesi [DCP85]. Ce lemme assure que dans un espace quasi-homogène, deux sous-variétés situées en position générale par rapport à la stratification par les orbites peuvent être mises en position génériquement transverse par l'action du groupe.

Il nous permet de ramener la détermination des invariants de Gromov-Witten de degré 1 de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ à un calcul du nombre de droites incidentes à des sous-variétés données. Cependant, en général, les invariants de degré 1 ne suffisent pas à déterminer toute la cohomologie quantique. On doit donc se restreindre au cas des grassmanniennes symplectiques impaires de droites

$IG(2, 2n + 1)$, pour lesquelles ils fournissent suffisamment d'informations pour énoncer notamment une *règle de Pieri quantique* (cf théorème 3.12), c'est-à-dire une formule donnant le produit quantique d'une classe de Schubert quelconque par un générateur. Cette règle nous permet de compléter une des présentations de la cohomologie classique de $IG(2, 2n + 1)$ obtenue au chapitre 2 en une présentation de sa cohomologie quantique (cf proposition 3.13). On en déduit alors le

Théorème (théorème 3.14). *L'anneau de cohomologie quantique de la grassmannienne symplectique impaire de droites $IG(2, 2n + 1)$ localisé en $q \neq 0$ est semi-simple.*

Le lien entre la semi-simplicité de la cohomologie quantique des variétés de Fano et une propriété de leur catégorie dérivée, l'existence d'une collection exceptionnelle, fait l'objet d'une conjecture de Dubrovin (cf [Dub98]). On présente cette conjecture au chapitre 4 et on rappelle les principales situations pour lesquelles elle est vérifiée. Dans le cas des grassmanniennes symplectiques de droites, l'une des parties de cette conjecture, à savoir l'existence d'une collection exceptionnelle complète, a été démontrée par Kuznetsov dans [Kuz08]. Ce résultat s'adapte au cas impair et constitue le théorème 4.12. En y adjoignant le théorème 3.14, on obtient la

Proposition. *La conjecture de Dubrovin est vérifiée dans le cas de la grassmannienne symplectique impaire de droites $IG(2, 2n + 1)$.*

On ne dispose pas pour l'instant d'un résultat analogue dans le cas pair. En effet, la petite cohomologie quantique de la grassmannienne symplectique de droites $IG(2, 2n)$ n'est pas semi-simple (cf [CP09]), et rien n'est connu concernant la semi-simplicité de sa grande cohomologie quantique, sur laquelle porte la conjecture de Dubrovin. Les notions de petite et de grande cohomologie quantique sont exposées à la remarque 1.3.

Pour les grassmanniennes symplectiques impaires $IG(m, 2n + 1)$ avec $m > 2$, connaître les invariants de degré 1 ne suffit a priori pas à calculer une règle de Pieri quantique, et on a vu qu'on ne dispose pas en degré supérieur ou égal à deux de résultat d'énumérativité semblable au théorème 2.19. Néanmoins, étant donné que les obstructions de l'espace de modules sont liées aux applications stables contractant certaines composantes dans l'orbite fermée \mathbb{O} , et que cette orbite est de grande codimension, nous conjecturons qu'un résultat d'énumérativité devrait être valable y compris en degré plus grand que deux. Sous cette hypothèse, on peut alors démontrer la proposition 5.2, adaptée d'un résultat de [BKT09], qui assure que contrairement à ce que l'on attendait, l'étude des invariants de degré 1 suffit au calcul d'une règle de Pieri quantique pour $IG(m, 2n + 1)$. On exploite cette proposition dans la suite du chapitre 5 pour étudier quelques exemples dont celui des grassmanniennes symplectiques impaires $IG(3, 2n + 1)$. L'annexe A est consacrée à la présentation des résultats combinatoires concernant les variétés de Schubert de la grassmannienne symplectique paire utilisés dans ce texte.

Enfin, à l'annexe B, on donne d'autres décompositions du diagramme de Hasse des espaces homogènes et de la grassmannienne symplectique impaire de droites. Ces décompositions sont liées à un résultat de [CMP09] donnant le produit quantique dans un espace homogène par des classes de Schubert

associées aux poids cominuscules. Pour les espaces homogènes minuscules, ces décompositions sont démontrées dans [CMP07]. On décrit à l'annexe B le cas des grassmanniennes classiques, et, en admettant l'énumérativité des invariants de degré deux pour $IG(2, 2n + 1)$, on démontre un résultat analogue pour les grassmanniennes symplectiques impaires de droites (cf théorème B.8).

Chapitre 1

Cohomologie quantique des espaces homogènes

La cohomologie des grassmanniennes est étudiée depuis la fin du 19^{ème} siècle, avec notamment les travaux de Schubert, Pieri ou Giambelli. La question de la fondation rigoureuse des méthodes énumératives développées à cette époque constitue d'ailleurs le quinzième problème de Hilbert, qui a mené à la théorie de l'intersection moderne exposée dans [Ful84]. Parmi les outils théoriques permettant de justifier rigoureusement le calcul de Schubert, on peut citer le lemme de Kleiman (cf [Kle74]), qui jouera un rôle important dans ce travail. L'intérêt pour les autres espaces homogènes est plus tardif; on peut citer les résultats de Borel [Bor53] donnant une présentation de leur anneau de cohomologie, ainsi que ceux de Bernstein, Gel'fand et Gel'fand [BGG73], qui permettent d'exprimer la cohomologie des espaces homogènes à l'aide de la combinatoire de leur groupe de Weyl.

La cohomologie quantique, qui est une déformation de la cohomologie classique, a été introduite par des physiciens dans les années 1980 (cf [Wit91]) puis construite mathématiquement par Ruan-Tian [RT94] dans le cadre symplectique et grâce aux applications stables de Kontsevich [Kon95a] dans le cadre algébrique. Elle permet de résoudre d'autres problèmes énumératifs que ceux traités grâce au calcul de Schubert classique. Nous donnerons au cours de ce chapitre les principales références concernant la cohomologie quantique des grassmanniennes usuelles et symplectiques.

Dans ce chapitre, on commence par définir à la partie 1.1 la cohomologie quantique dans le cas particulier des variétés convexes (dont font partie les espaces homogènes). Ensuite, on expose les résultats connus sur la cohomologie classique et quantique de la grassmannienne usuelle (cf § 1.2) et symplectique (cf § 1.3), en insistant particulièrement sur les outils qui nous seront utiles par la suite. Enfin, on conclut en présentant les fonctions I et J , en explicitant la fonction J des grassmanniennes symplectiques et en donnant un résumé du cas des autres espaces homogènes à la partie 1.4.

1.1 Invariants de Gromov-Witten, produit quantique

Une construction fondamentale en théorie de l'intersection est celle des anneaux de Chow (cf § 1.1.1), qui sont des objets algébriques encodant une partie des propriétés d'intersection des sous-variétés d'une variété lisse. Cette construction a permis en particulier de donner un cadre rigoureux au calcul de Schubert. L'anneau de cohomologie quantique d'une variété algébrique, introduit à la fin du 20ème siècle, est quant à lui construit à partir des invariants de Gromov-Witten, qui sont des nombres reliés à la géométrie des courbes rationnelles sur cette variété. On va donner dans cette partie des définitions de ces notions.

1.1.1 Notations

Dans ce paragraphe, on présente brièvement les notations qui seront utilisées dans le reste du texte pour désigner les anneaux de cohomologie et les anneaux de Chow .

Si X est une variété algébrique complexe, on note $H^i(X, \mathbb{Z})$ le i -ème groupe de cohomologie singulière de X à coefficients dans \mathbb{Z} (cf [Hat02]), et :

$$H^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{i=0}^{2 \dim X} H^i(X, \mathbb{Z}).$$

On définit de manière analogue la cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{C} , et on a alors $H^i(X, \mathbb{C}) = H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. On note \cup le produit correspondant à la structure d'anneau sur $H^*(X, \mathbb{Z})$, que l'on appelle produit d'intersection. Si X est lisse, l'anneau de cohomologie de X est muni de la *dualité de Poincaré*, c'est-à-dire que l'application :

$$H^k(X, \mathbb{Z}) \times H^{2n-k}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},$$

où $n = \dim X$, est une dualité parfaite.

Si X est une variété algébrique complexe lisse, on note $A^*(X)$ l'anneau de Chow de X et \cup le produit d'intersection. Les éléments de $A^*(X)$ sont les combinaisons entières formelles de sous-variétés de X modulo équivalence rationnelle (cf [Ful84]). De plus, si V et W sont deux sous-variétés de X qui se coupent de manière transverse, alors le produit d'intersection des classes $[V]$ et $[W]$ associées est $[V] \cup [W] = [V \cap W]$.

On a un morphisme d'anneaux naturel $A^*(X) \rightarrow H^{2*}(X, \mathbb{Z})$ de l'anneau de Chow dans la cohomologie paire de X , donné par la classe fondamentale (cf [Ful84]). Dans le cas des espaces homogènes, on peut montrer grâce à la décomposition de Bruhat (que l'on présentera au paragraphe 1.2.1) que ce morphisme est un isomorphisme et qu'il n'y a pas de cohomologie en dimension impaire. Plus généralement, ce résultat est valable dès que l'on a une décomposition cellulaire.

1.1.2 Invariants de Gromov-Witten

Les invariants de Gromov-Witten d'une variété projective lisse X sont des nombres d'intersection de cycles sur les espaces de modules des applications

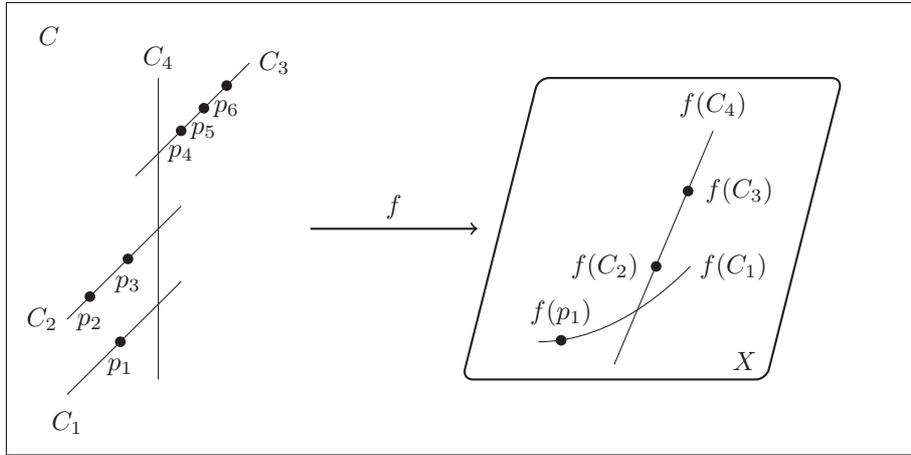


FIGURE 1.1 – Un exemple d'application stable

stables $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$ introduits par Kontsevich. Dans cette partie, nous rappellerons simplement la définition de ces espaces de modules ainsi que les propriétés qui nous seront utiles par la suite; pour la construction et les démonstrations, on renvoie à [FP97].

Au lieu de compter des courbes rationnelles irréductibles, on va en fait compter des applications stables, pour lesquelles on peut construire un espace de modules compact :

Définition 1.1 (Application stable). Une *application stable de genre 0 et de degré β avec r points marqués* est un morphisme $f : (C, p_1, \dots, p_r) \rightarrow X$ d'une courbe nodale connexe de genre 0 munie de r points lisses distincts p_1, \dots, p_r vers X , telle que $f_*[C] = \beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$. Notons que pour qu'une telle application existe, le cycle β doit être effectif. On note $H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ l'ensemble des cycles effectifs de $H_2(X, \mathbb{Z})$. L'application f doit également vérifier la *condition de stabilité* suivante : si $C' \subset C$ est une composante irréductible de C qui est contractée par f , alors C' contient au moins trois points spéciaux (points marqués ou noeuds).

La figure 1.1 représente une application stable f de genre 0 avec six points marqués p_1, \dots, p_6 . Dans cet exemple, il y a deux composantes contractées C_2 et C_3 , qui vérifient bien la condition de stabilité. On peut construire un *espace de modules des applications stables* $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$ qui classe à isomorphisme près les applications stables de genre 0 et de degré β avec r points marqués. On dit que la variété X est *convexe* si pour tout morphisme $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$, on a $H^1(\mathbb{P}^1, f^*TX) = 0$. Sous cette hypothèse, $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$ possède plusieurs propriétés intéressantes :

Théorème 1.1. *Soit X une variété projective lisse convexe. Alors $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$ est un champ de Deligne-Mumford projectif lisse, et le lieu $\mathcal{M}_{0,r}(X, \beta)$ des courbes de source irréductible est un ouvert dense. Lorsque $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$ est non vide, sa dimension est donnée par la formule :*

$$\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta) = \dim X + \int_{\beta} c_1(TX) + r - 3.$$

Remarque 1.1. Notons que l'espace grossier sous-jacent à un champ de Deligne-Mumford lisse n'est pas une variété algébrique lisse; cependant, du point de vue de la théorie de l'intersection, ces espaces se comportent aussi bien que des variétés lisses, avec notamment un produit d'intersection bien défini (cf [Vis89]).

Dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$, il existe des *morphismes d'évaluation* associés aux points marqués

$$\begin{aligned} ev_i : \quad \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta) &\rightarrow X \\ (C; p_1, \dots, p_r; f) &\mapsto f(p_i) \end{aligned}$$

pour $1 \leq i \leq r$. Si X est convexe, on peut définir les invariants de Gromov-Witten de la manière suivante :

Définition 1.2. Soit $r \geq 1$ un entier, $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ une classe effective et $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des classes de cohomologie homogènes sur X telles que

$$\sum_{i=1}^r \deg \gamma_i = 2 \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta).$$

Alors l'invariant de Gromov-Witten de degré β avec r points marqués associé aux classes γ_i est

$$I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]} ev_1^* \gamma_1 \cup \dots \cup ev_r^* \gamma_r.$$

De plus, si $\sum_{i=1}^r \deg \gamma_i \neq 2 \dim \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$, on pose

$$I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = 0.$$

Remarque 1.2. • Cette définition peut laisser penser que les invariants de Gromov-Witten comptent le nombre de courbes rationnelles passant par des cycles donnés. C'est le cas par exemple pour les espaces homogènes, notamment grâce au lemme de Kleiman 2.17. On dit alors que ces invariants sont *énumératifs*. Cependant, cette propriété n'est pas vraie pour toute variété X , et en particulier pas, en général, pour les grassmanniennes symplectiques impaires. On reviendra plus en détail là-dessus au paragraphe 2.7.2.

- Notons que même si la définition ci-dessus a un sens dans le cas où X n'est pas convexe, elle ne vérifie pas les propriétés remarquables présentées ci-dessus, et ne saurait donc être la base d'une théorie de Gromov-Witten convenable. Cependant, si l'on remplace le cycle fondamental $[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]$ par un cycle appelé cycle fondamental virtuel et construit dans [BF97] et [LT98], ces propriétés sont vérifiées. Ceci nous sera utile pour l'étude des grassmanniennes symplectiques impaires. On présentera rapidement ces constructions à la partie 2.7. Notons que les espaces homogènes sont convexes, mais pas les grassmanniennes symplectiques impaires (cf § 2.7.2).

Les invariants de Gromov-Witten vérifient une série de propriétés remarquables démontrées par Kontsevich et Manin dans [KM94]. On énonce ici seulement celles dont on aura besoin par la suite. Tout d'abord, les invariants sont évidemment linéaires en chaque variable et invariants par permutation des classes de cohomologie. On a également les trois propriétés suivantes.

Propriété de la classe fondamentale. $I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r, 1) = 0$ dès que $r \geq 3$ ou $\beta \neq 0$.

Propriété du diviseur. Si $r \geq 3$ ou $\beta \neq 0$ et $\alpha_{r+1} \in H^2(X, \mathbb{C})$, alors

$$I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r, \alpha_{r+1}) = \left(\int_\beta \alpha_{r+1} \right) I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r).$$

Propriété du degré 0 (*point mapping axiom*).

$$I_0(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = \int_X \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_r.$$

1.1.3 Produit quantique

Le produit quantique de deux classes de cohomologie de X est construit à l'aide des invariants de Gromov-Witten à trois points marqués :

Définition 1.3. • Soient $\gamma_1, \gamma_2 \in H^*(X, \mathbb{C})$. Le *produit quantique* de γ_1 et γ_2 , noté $\gamma_1 \star \gamma_2$, est

$$\gamma_1 \star \gamma_2 = \sum_{\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})} q^\beta \sum_{\gamma_3} I_\beta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3^\vee) \gamma_3,$$

où γ_3 parcourt une base de $H^*(X, \mathbb{C})$ et γ_3^\vee la base duale de Poincaré.

• On considère

$$\text{QH}^*(X, \mathbb{C}) := H^*(X, \mathbb{C}) \otimes \bigoplus_{\beta \in H_2^{\text{eff}}(\mathbb{Z})} \mathbb{C}[q^\beta],$$

où les q^β sont des paramètres formels associés à chaque classe effective $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ vérifiant $q^{\beta+\beta'} = q^\beta q^{\beta'}$ et $\deg q^\beta := 2 \int_\beta c_1(X)$. Muni du produit quantique, $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$ est appelé *anneau de cohomologie quantique* de X .

Le produit quantique vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 1.2. 1. *Le produit quantique est distributif, bilinéaire et préserve le degré.*

2. *La classe fondamentale $1 \in H^*(X, \mathbb{C})$ est l'identité de $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$.*

3. *Le produit quantique est associatif.*

On peut trouver une démonstration de ces propriétés au chapitre 8 de [CK99].

Remarque 1.3. • Si X est une variété de Fano, par définition, on peut écrire $-K_X = iH$, où H est un diviseur ample, avec $i > 0$ maximal. L'entier positif i est alors appelé l'*indice* de la variété de Fano X . Si, de plus, le groupe de Picard de X est \mathbb{Z} , le cycle $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ s'écrit simplement dh , où h est le dual de Poincaré de H et d un entier. On note alors q^d à la place de q^β . On peut également montrer que le degré du paramètre quantique q est simplement le double de l'indice de X .

- Le coefficient de q^0 dans la définition du produit quantique est le produit d'intersection classique. Donc le produit quantique est une déformation du produit classique.
- Dans la proposition précédente, le seul résultat difficile est le point 3. C'est une conséquence de l'équation dite WDVV vérifiée par la fonction génératrice des invariants de Gromov-Witten, appelée *potentiel de Gromov-Witten* (cf [CK99], chap. 8).
- Le produit quantique défini ci-dessus est en fait le *petit* produit quantique. C'est également celui que nous utiliserons par la suite. Cependant, notons qu'il existe également un *grand* produit quantique, défini de la manière suivante : il existe un voisinage ouvert U de $0 \in H^*(X, \mathbb{C})$ tel que pour tout $\tau \in U$, le produit $\star_\tau : H^*(X, \mathbb{C}) \times H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow H^*(X, \mathbb{C})$ converge, où

$$\gamma_1 \star_\tau \gamma_2 = \sum_{\gamma_3} \sum_{n \geq 0} \sum_{\beta} q^\beta I_\beta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \underbrace{\tau, \dots, \tau}_{n \text{ fois}}) \gamma_3^\vee.$$

Le petit produit quantique est une spécialisation du grand, obtenu lorsque $\tau = 0$. Connaître le grand produit quantique revient à connaître tous les invariants de Gromov-Witten, tandis que le petit produit quantique ne fait intervenir que les invariants à trois points.

Dans la suite du texte, $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$ désignera comme ici l'anneau de cohomologie quantique de X à coefficients dans \mathbb{C} , muni de la graduation réelle. Lorsque l'on considérera l'anneau $\text{QH}^*(X, \mathbb{Z})$ muni de la graduation complexe, on le notera $\text{QA}^*(X)$ pour éviter toute confusion sur les degrés.

1.2 La grassmannienne usuelle

Dans cette partie, on rappelle les principaux résultats concernant la cohomologie classique (cf § 1.2.1) et quantique (cf § 1.2.2) de la grassmannienne usuelle. Dans la partie sur la cohomologie quantique, on utilise les notions introduites à la partie 1.1. On réfère à [Man98] pour la cohomologie classique et à [Buc03] pour la cohomologie quantique.

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension N et $1 \leq m \leq N - 1$ un entier. La *grassmannienne* $G(m, V)$ des m -plans de V est

$$G(m, V) = \{\Sigma \subset V \mid \dim \Sigma = m\}.$$

Notons que $G(m, V)$ ne dépend que de la dimension N de V ; dans la suite, on utilisera donc la plupart du temps la notation $G(m, N)$. Le *plongement de Plücker*

$$\begin{aligned} \pi : \quad G(m, N) &\rightarrow \mathbb{P}(\wedge^m \mathbb{C}^N) \\ \text{Vect}(w_1, \dots, w_m) &\mapsto [w_1 \wedge \dots \wedge w_m] \end{aligned}$$

munit $G(m, N)$ d'une structure de variété projective lisse. Notons que lorsque $m = 1$, $G(1, N)$ est simplement l'espace projectif \mathbb{P}^{N-1} , et que $G(m, N)$ est isomorphe à $G(N - m, N)$ par l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \quad G(m, V) &\rightarrow G(N - m, V^\vee) \\ \Sigma &\mapsto \Sigma^\perp \end{aligned}$$

$G(m, N)$ possède également une action transitive de $GL(N)$: elle s'identifie à l'espace homogène $GL(N)/P_m$, où

$$P_m = \left[\begin{array}{c|c} GL(m) & M_{m, N-m}(\mathbb{C}) \\ \hline 0_{N-m, m} & GL(N-m) \end{array} \right]$$

est un sous-groupe parabolique maximal.

1.2.1 Cohomologie classique

Pour les résultats de cette partie, on réfère au chapitre 14 de [Ful84]. Comme tous les espaces homogènes, $G(m, N)$ possède une décomposition cellulaire induite par la *décomposition de Bruhat*. On va donc ici présenter la décomposition de Bruhat dans ce cadre plus général.

Soit $X = G/P$ un espace homogène, où G est un groupe algébrique semi-simple et P un sous-groupe parabolique de G . Considérons un sous-groupe de Borel B de G , c'est-à-dire un sous-groupe fermé connexe résoluble maximal de G . La décomposition de Bruhat est alors donnée par

$$G/P = \bigsqcup_{w \in W/W_P} BwP/P,$$

où W est le groupe de Weyl de G et W_P celui de P . On notera également $W^P \subset W$ l'ensemble des représentants de longueur minimale des éléments de W/W_P . Par longueur, on entend la longueur dans W vu comme groupe de Coxeter engendré par les réflexions simples. Pour $G = GL(N)$, le groupe de Weyl est simplement le groupe des permutations \mathfrak{S}_N . La longueur d'une permutation est le nombre d'inversions. De plus, pour $G = Sp_{2n}$ ou SO_{2n+1} , le groupe de Weyl est le groupe $\mathfrak{S}_n \rtimes \mathbb{Z}_2^n$ des *permutations signées de taille n* . Une permutation signée est une permutation munie de signes. Enfin, pour $G = SO_{2n}$, $W = \mathfrak{S}_n \rtimes \mathbb{Z}_2^{n-1}$ est le groupe des permutations signées avec un nombre pair de signes moins.

Les $C_w := BwP/P$ pour $w \in W^P$ sont appelées *cellules de Schubert*. Elles sont isomorphes à des espaces affines de dimension $l(w)$, où $l(w)$ est la longueur de w dans W . Notons X_w l'adhérence de la cellule C_w . La variété X_w est appelée *variété de Schubert*, et la frontière $X_w \setminus C_w$ est une réunion de cellules de Schubert. Une telle décomposition cellulaire complexe induit une décomposition de l'anneau de Chow de X :

$$A^*(X) = H^*(X, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in W/W_P} \mathbb{Z}\sigma_w,$$

où la *classe de Schubert* σ_w est le dual de Poincaré du cycle $[X_w]$. Elle ne dépend pas du choix du groupe de Borel B .

Le groupe de Weyl W possède un élément de longueur maximale w_0 . Si w et w' sont deux éléments de W^P tels que $l(w) + l(w') = \dim X$, alors

$$\sigma_w \cup \sigma_{w'} = \begin{cases} \sigma_{pt} & \text{si } w' \in W^P \text{ représente } [w_0w] \in W/W_P, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où σ_{pt} est la classe du point. Ceci nous donne l'expression de la dualité de Poincaré dans X , et nous permet de constater que la base des classes de Schubert est sa propre duale de Poincaré (à l'ordre près).

Finalement, dans le cas de la grassmannienne, on obtient :

$$G(m, N) = \mathrm{GL}(N)/P_m = \bigsqcup_{w \in W/W_{P_m}} BwP_m/P_m.$$

Les sous-groupes de Borel sont les conjugués du sous-groupe des matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{GL}(N)$. De plus $W = \mathfrak{S}_N$ et $W_{P_m} = \mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_{N-m}$. Par conséquent,

$$W^{P_m} = \{w \in \mathfrak{S}_N \mid w(1) < \dots < w(m) \text{ et } w(m+1) < \dots < w(N)\},$$

et on a

$$A^*(G(m, N)) = H^*(G(m, N), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in W/W_{P_m}} \mathbb{Z}\sigma_w^G,$$

où σ_w^G désigne la classe de Schubert associée à w . Il reste ensuite à comprendre la structure multiplicative de $A^*(G(m, N))$, ce qui sera fait aux paragraphes 1.2.1.3, 1.2.1.4 et 1.2.1.5.

1.2.1.1 Variétés de Schubert

Dans ce paragraphe, nous allons introduire d'autres indexations pour les variétés de Schubert. Dans ce chapitre ainsi que dans le reste de ce texte (sauf indication contraire), on notera σ_λ^G les classes de Schubert des grassmanniennes usuelles.

Indexation par les conditions d'incidence. Soit

$$F_\bullet = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N) = \mathbb{C}^N$$

le drapeau complet de \mathbb{C}^N stabilisé par un sous-groupe de Borel B de $\mathrm{GL}(N)$. Soit $Q = (q_1 < \dots < q_m)$ un m -uplet d'indices tel que $q_1 \geq 1$ et $q_m \leq N$. On note $X_Q(F_\bullet)$ la variété :

$$X_Q(F_\bullet) = \{\Sigma \in G(m, N) \mid \dim(\Sigma \cap F_{q_i}) \geq i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m\}.$$

C'est la variété de Schubert $X_w = \overline{BwP_m/P_m}$, où $w \in W^P$ est défini par $w(i) = N + 1 - q_{m+1-i}$ pour $1 \leq i \leq m$.

Indexation par les partitions. On peut également indexer les variétés de Schubert de $G(m, N)$ par les partitions du rectangle $m \times (N - m)$, c'est-à-dire les m -uplets décroissants d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m)$ avec $\lambda_1 \leq N - m$ et $\lambda_m \geq 0$. La correspondance entre partitions et conditions d'incidence est donnée par :

$$\lambda_j = N - m + j - q_j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m.$$

Enfin, la correspondance entre partitions et éléments de W^P est

$$w(i) = \lambda_{m+1-i} + i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq m.$$

Notons que si l'on pose $|\lambda| = \sum_{j=1}^m \lambda_j$, on a $\mathrm{codim} X_\lambda(F_\bullet) = |\lambda|$.

Classes spéciales. Certaines classes de Schubert jouent un rôle particulier : ce sont les classes “lignes” σ_p^G , correspondant aux partitions $(p, 0, \dots, 0)$ pour tout $1 \leq p \leq N - m$ et les classes “colonnes” $\sigma_{1^r}^G$, correspondant pour tout $1 \leq r \leq m$ aux partitions $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ayant r parts égales à 1.

On peut également définir ces classes comme classes de Chern de certains fibrés homogènes sur la grassmannienne : le fibré tautologique \mathcal{S} et le fibré quotient \mathcal{Q} . Rappelons que le fibré tautologique sur $G(m, N)$ est le fibré dont la fibre au-dessus d’un point $\Sigma \in G(m, N)$ est l’espace vectoriel Σ . Il s’agit donc d’un fibré vectoriel de rang m . Le fibré quotient \mathcal{Q} est défini par la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}_{G(m, N)}^{\oplus N} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

C’est un fibré vectoriel de rang $N - m$. De plus, on a $\sigma_{1^r}^G = c_r(\mathcal{S}^*)$ pour tout $1 \leq r \leq m$ et $\sigma_p^G = c_p(\mathcal{Q})$ pour tout $1 \leq p \leq N - m$. La suite exacte (1.1) et la formule de Whitney donnent

$$c(\mathcal{S})c(\mathcal{Q}) = 1,$$

ce qui implique les deux séries de relations :

$$\det(\sigma_{1+j-i}^G)_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ pour } r > m, \quad (1.2)$$

$$\det(\sigma_{1^i+j-i}^G)_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ pour } r > N - m. \quad (1.3)$$

Ces relations permettent d’obtenir une présentation de l’anneau de cohomologie de $G(m, N)$ (cf § 1.2.1.3).

Chacun de ces ensembles de classes spéciales engendre $A^*(G(m, N))$, comme l’illustrera par exemple la formule de Giambelli 1.6. Par ailleurs, l’isomorphisme $\Phi : G(m, N) \cong G(N - m, N)$ échange classes lignes et classes colonnes, donc celles-ci ont des propriétés similaires. On verra à la partie 1.3 que ce n’est plus le cas pour les grassmanniennes symplectiques. En particulier, les règles de Pieri en fonction des deux types de classes spéciales sont très différentes l’une de l’autre.

1.2.1.2 Dualité de Poincaré

Si λ est une partition du rectangle $m \times (N - m)$, on définit sa *partition duale* λ^\vee comme le complémentaire de λ dans le rectangle $m \times (N - m)$:

$$\lambda_j^\vee = N - m - \lambda_{m+1-j} \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m.$$

La figure 1.2 montre un exemple de partition duale. On y a représenté la partition sous forme d’un diagramme, ce que l’on fera couramment par la suite. Montrons que les $(\sigma_{\lambda^\vee}^G)$ constituent la base duale de celle des (σ_λ^G) :

Lemme 1.3 (Dualité de Poincaré dans $G(m, N)$). *Pour tous $\lambda, \mu \subset m \times (N - m)$ tels que $|\lambda| + |\mu| = \dim G(m, N) = m(N - m)$, on a*

$$\sigma_\lambda^G \cup \sigma_\mu^G = \delta_{\mu, \lambda^\vee} \sigma_{pt}$$

On présente ici une preuve de ce résultat, car la méthode employée est proche de celle utilisée pour démontrer la règle de Pieri 1.5.

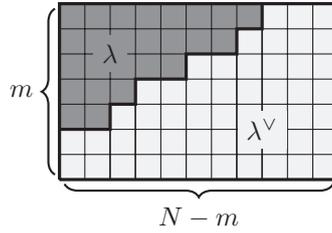


FIGURE 1.2 – Partition duale

Démonstration. Soient F_\bullet un drapeau de \mathbb{C}^N et (f_1, \dots, f_N) une base adaptée à ce drapeau. On définit un nouveau drapeau F_\bullet^- en posant

$$F_j^- = \langle f_N, \dots, f_{N+1-j} \rangle \text{ pour tout } 1 \leq j \leq N.$$

Pour deux drapeaux F_\bullet et G_\bullet en position générale, G_\bullet peut toujours s'écrire sous la forme F_\bullet^- en choisissant judicieusement la base adaptée (f_1, \dots, f_N) . Posons $X_\lambda := X_\lambda(F_\bullet)$ et $X_\mu := X_\mu(F_\bullet^-)$ et montrons que $X_\lambda \cap X_\mu = \emptyset$ si $\mu \neq \lambda^\vee$, et que l'intersection est réduite à un point sinon. Remarquons tout d'abord que le lemme de Kleiman 2.17, que nous énoncerons au chapitre 2, assure que cette intersection est transverse.

Si $\mu \neq \lambda^\vee$, considérons $\Sigma \in X_\lambda \cap X_\mu$. Pour tout $1 \leq i \leq m$, on doit avoir

$$\dim \left(\Sigma \cap F_{N-m+i-\lambda_i} \cap F_{N+1-i-\mu_{m+1-i}}^- \right) \geq 1.$$

Puisque $\mu \neq \lambda^\vee$ et $|\lambda| + |\mu| = \dim G(m, N) = m(N-m)$, il existe $1 \leq i_0 \leq m$ tel que $\mu_{m+1-i_0} > N-m-\lambda_{i_0}$. Mais alors, par définition de F_\bullet^- , on a $F_{N-m+i_0-\lambda_{i_0}} \cap F_{N+1-i_0-\mu_{m+1-i_0}}^- = \{0\}$.

Enfin, si $\mu = \lambda^\vee$, alors $\mu_{m+1-i} = N-m-\lambda_i$ pour tout $1 \leq i \leq m$, d'où

$$X_\lambda \cap X_\mu = \{ \langle f_{N-m+1-\lambda_1}, f_{N-m+2-\lambda_2}, \dots, f_{N-\lambda_m} \rangle \}. \quad \square$$

Remarque 1.4. Une conséquence du résultat ci-dessus est que la base duale de Poincaré de la base des classes de Schubert est encore la base des classes de Schubert. On a vu que c'est également le cas pour les autres espaces homogènes (voir le début du paragraphe 1.2.1), mais on verra que ce n'est plus vrai pour la grassmannienne symplectique impaire (cf § 2.4).

1.2.1.3 Présentation

Rappelons la présentation de $A^*(G(m, N))$ en fonction des classes lignes d'une part, et des classes colonnes d'autre part :

Proposition 1.4. • $A^*(G(m, N))$ est isomorphe au quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[\sigma_1^G, \dots, \sigma_{N-m}^G]$ modulo les relations $\delta_{m+1}, \dots, \delta_N$, où

$$\delta_r := \det(\sigma_{1+j-i}^G)_{1 \leq i, j \leq r}.$$

• $A^*(G(m, N))$ est isomorphe au quotient de l'anneau $\mathbb{Z}[\sigma_1^G, \dots, \sigma_{1^m}^G]$ modulo les relations d_{N-m+1}, \dots, d_N , où $d_r := \det(\sigma_{1^r}^G)_{1 \leq i, j \leq r}$.

Pour démontrer ce résultat, on utilise notamment l'expression des classes spéciales comme classes de Chern des fibrés quotient et tautologique dual et l'égalité de classes de Chern (1.1), qui implique les identités (1.2) et (1.3).

1.2.1.4 Règle de Pieri

La *règle de Pieri* est la formule donnant le produit d'une classe quelconque par une classe spéciale :

Proposition 1.5 (Règle de Pieri).

$$\sigma_p^G \cup \sigma_\lambda^G = \sum_{\mu} \sigma_\mu^G,$$

où la somme porte sur toutes les partitions μ obtenues en ajoutant p cases à λ dans des colonnes distinctes. De même

$$\sigma_{1^r}^G \cup \sigma_\lambda^G = \sum_{\nu} \sigma_\nu^G,$$

où la somme porte sur toutes les partitions ν obtenues en ajoutant r cases à λ dans des lignes distinctes.

La preuve consiste à se ramener à un calcul géométrique en utilisant la dualité de Poincaré 1.3.

1.2.1.5 Règle de Giambelli

La *règle de Giambelli* est la formule exprimant une classe quelconque en fonction des classes spéciales :

Proposition 1.6 (Règle de Giambelli).

$$\sigma_\lambda^G = \det (\sigma_{\lambda_i + j - i}^G)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

La règle de Pieri 1.5 et la règle de Giambelli 1.6 permettent de calculer le produit de deux classes quelconques. En effet, il suffit de décomposer l'une d'entre elles à l'aide de la règle de Giambelli, puis de multiplier le polynôme en les classes spéciales ainsi obtenu avec l'autre classe, à l'aide de la règle de Pieri.

Dans le cas de la grassmannienne usuelle, mentionnons l'existence d'une règle donnant directement les coefficients des termes du produit de deux classes quelconques, appelée *règle de Littlewood-Richardson*. Si on note

$$\sigma_\lambda^G \cup \sigma_\mu^G = \sum_{\nu} c_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu^G,$$

les coefficients $c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{N}$ sont appelés *coefficients de Littlewood-Richardson*. Ils peuvent être calculés de manière combinatoire en comptant certains tableaux de Young de forme et de poids donnés (cf [Ful97]). On l'utilisera à la partie B.4. Outre ses applications à la géométrie énumérative, la règle de Littlewood-Richardson intervient également en théorie des représentations, pour le calcul du produit tensoriel de deux représentations polynomiales de $GL(V)$.

1.2.2 Cohomologie quantique

Dans cette partie, nous utilisons les résultats de la partie 1.1 pour étudier l'anneau de cohomologie quantique de $G(m, N)$, qui est une déformation de l'anneau de Chow $A^*(G(m, n))$ étudié au paragraphe précédent.

Au paragraphe 1.2.2.1, nous exposons un principe appelé principe quantique-classique et utilisé pour la première fois dans [Buc03]. Pour certains espaces homogènes, ce principe permet de calculer le produit quantique à partir du produit classique sur un espace homogène auxiliaire. Avant ces résultats, la cohomologie quantique de la grassmannienne a été étudiée par Witten (cf [Wit95]) et Bertram (cf [Ber97]). Enfin, aux paragraphes 1.2.2.2 et 1.2.2.3, on donne les règles de Pieri et de Giambelli quantiques, ainsi que la présentation de $QA^*(G(m, N))$ qui ont été redémontrées à l'aide du principe quantique-classique dans [Buc03].

Aux chapitres 3 et 5, on utilisera le principe quantique-classique pour calculer certains invariants de Gromov-Witten de degré 1 de la grassmannienne symplectique impaire $IG(m, 2n + 1)$.

1.2.2.1 Principe quantique-classique

Ce paragraphe est consacré à la présentation du principe quantique-classique. Cette technique permet, dans le cas de la grassmannienne usuelle, de démontrer les règles de Pieri et de Giambelli quantique sans utiliser les schémas Quot, comme cela avait été fait à l'origine par Bertram dans [Ber97]. De plus, cette idée a été réutilisée par Buch, Kresch et Tamvakis dans [BKT09] pour traiter le cas des grassmanniennes isotropes, par Chaput, Manivel et Perrin dans [CMP08] pour les variétés minuscules, par Chaput et Perrin dans [CP09] pour les variétés adjointes et par Coskun dans [Cos09] afin de trouver une règle de Littlewood-Richardson quantique pour la grassmannienne usuelle.

L'idée du principe quantique-classique est d'associer à une courbe rationnelle d'un espace homogène deux espaces vectoriels : son *noyau* et son *espace engendré*. Dans le cas de la grassmannienne usuelle, la définition est la suivante :

Définition 1.4. Soit C une courbe rationnelle de degré d dans $G(m, N)$. Les points de C représentent donc des sous-espaces vectoriels de dimension m de \mathbb{C}^N . On appelle *noyau* de C le plus grand espace vectoriel contenu dans tous ces espaces ; on le note $\text{Ker } C$. De même, on appelle *espace engendré* par C le plus petit espace vectoriel contenant tous ces espaces, et on le note $\text{Vect } C$.

On peut montrer que ces espaces ont une dimension bornée en fonction du degré d :

$$\dim \text{Ker } C \geq m - d \text{ et } \dim \text{Vect } C \leq m + d.$$

Les conditions d'incidence sur C ont une traduction en termes de conditions d'incidence sur $\text{Ker } C$ et $\text{Vect } C$. Par exemple, si l'on note $\hat{\lambda}$ la partition obtenue en enlevant les d premières colonnes de λ - c'est-à-dire en posant $\hat{\lambda}_i = \max(\lambda_i - d, 0)$, on a le résultat suivant :

Proposition 1.7 ([Buc03]). Soient $C \subset G(m, N)$ une courbe rationnelle de degré $d \leq N - m$, W un espace vectoriel de dimension $m + d$ contenant $\text{Vect } C$ et F_\bullet un drapeau complet. Si λ est une partition telle que $C \cap X_\lambda(F_\bullet) \neq \emptyset$, alors W appartient à la variété de Schubert $X_{\hat{\lambda}}(F_\bullet)$ de $G(m + d, N)$.

Le principe quantique-classique ramène le calcul des invariants de Gromov-Witten de $G(m, N)$ à un calcul d'intersection de variétés de Schubert sur la variété de drapeaux à deux crans $F(m-d, m+d; N)$ (un point de cette variété correspondant au couple noyau-image associé à une courbe rationnelle), ou même comme pour la proposition ci-dessus, à un calcul dans la grassmannienne $G(m+d, N)$. Ce calcul peut s'effectuer grâce aux règles de Pieri et de Giambelli classiques des paragraphes 1.2.1.4 et 1.2.1.5. Au paragraphe suivant, on énonce les règles quantiques qui peuvent se déduire de cette méthode.

1.2.2.2 Règles de Pieri et de Giambelli quantiques

Voici les règles de Pieri et de Giambelli quantiques pour la grassmannienne usuelle :

Théorème 1.8 (Règle de Pieri quantique, [Ber97]). *Soient λ une partition du rectangle $m \times (N - m)$ et $p \leq N - m$ un entier. Alors*

$$\sigma_p^G \star \sigma_\lambda^G = \sum_{\mu} \sigma_\mu^G + q \sum_{\nu} \sigma_\nu^G,$$

où la première somme porte sur toutes les partitions μ obtenues en ajoutant p cases à λ dans des colonnes distinctes, et la seconde sur toutes les partitions ν obtenues en ajoutant $p - N$ cases à λ , de telle sorte que :

$$\lambda_1 - 1 \geq \nu_1 \geq \lambda_2 - 1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \lambda_m - 1 \geq \nu_m \geq 0.$$

De manière inattendue, la règle de Giambelli quantique est identique à la règle classique :

Théorème 1.9 (Règle de Giambelli quantique, [Ber97]).

$$\sigma_\lambda^G = \det (\sigma_{\lambda_i + j - i}^G)_{1 \leq i, j \leq m},$$

où le produit considéré est le produit quantique.

1.2.2.3 Présentation quantique

Dans cette partie, on énonce un résultat de Siebert et Tian (cf [ST97]) permettant de trouver la présentation de la cohomologie quantique d'une variété de Fano lorsque l'on connaît une présentation de sa cohomologie classique, ainsi que le résultat obtenu par cette méthode pour la grassmannienne usuelle.

Théorème 1.10. *Soit X une variété de Fano. On suppose qu'on a une présentation de son anneau de cohomologie :*

$$H^*(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n] / (f_1, \dots, f_k),$$

où f_i est un polynôme homogène de degré $2d_i$:

$$f_i = \sum_{j_1 + \dots + j_n = 2d_i} a_{i, j_1, \dots, j_n} X_1^{j_1} \cup \dots \cup X_n^{j_n}.$$

Soit $([C_1], \dots, [C_r])$ une base de $H_2(X, \mathbb{Z})$ constituée de cycles effectifs. On note q_i le paramètre quantique associé à $[C_i]$, c'est-à-dire que $q_i = q^{[C_i]}$. Notons

alors \hat{f}_i l'expression obtenue en remplaçant \cup par \star dans celle de f_i . Cette expression est égale à un autre polynôme g_i de degré inférieur en les X_1, \dots, X_n . Si l'on note $\tilde{f}_i = \hat{f}_i - g_i(q_1, \dots, q_r, X_1, \dots, X_n)$, on a la présentation suivante de l'anneau de cohomologie de X :

$$\mathrm{QH}^*(X, \mathbb{C}) = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n, q_1, \dots, q_r] / (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_k).$$

Le théorème précédent permet de déterminer une présentation de l'anneau de cohomologie quantique de la grassmannienne usuelle en fonction des classes spéciales :

Théorème 1.11 ([ST97]).

$\mathrm{QA}^*(G(m, N)) = \mathbb{Z}[\sigma_1^G, \dots, \sigma_m^G, q] / (d_{N+1-m}, \dots, d_{N-1}, d_N + (-1)^m q)$,
où $d_r := \det(\sigma_{1+j-i}^G)_{1 \leq i, j \leq r}$, et l'on pose $\sigma_{1^0}^G = 1$ et $\sigma_{1^p}^G = 0$ pour $p < 0$.

1.3 La grassmannienne symplectique

Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n$ muni d'une forme symplectique ω . La grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}_\omega(m, V)$ est l'ensemble des m -plans de V ($m \leq n$) isotropes pour ω :

$$\mathrm{IG}_\omega(m, V) = \{\Sigma \in G(m, V) \mid \omega|_\Sigma = 0\},$$

où $G(m, V)$ désigne la grassmannienne usuelle. A isomorphisme près, $\mathrm{IG}_\omega(m, V)$ ne dépend pas de ω ni de l'espace V de dimension $2n$. Donc dans la suite on notera simplement $\mathrm{IG}(m, 2n)$.

La grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}(m, 2n)$ est munie d'une action transitive du groupe symplectique (complexe) Sp_{2n} , qui est le sous-groupe de GL_{2n} constitué des matrices qui préservent la forme ω . C'est une variété projective lisse de dimension $m(2n - m) - \frac{m(m-1)}{2}$. Tout comme la grassmannienne usuelle, la grassmannienne symplectique admet une décomposition cellulaire. On réfère à l'appendice A pour la définition des variétés de Schubert, leurs différentes indexations, ainsi que pour l'expression de la dualité de Poincaré. Dans ce chapitre ainsi que dans le reste de ce texte (sauf indication contraire), on notera σ_λ^+ les classes de Schubert des grassmanniennes symplectiques.

Dans cette partie, on va présenter plusieurs versions des règles de Pieri classique (cf § 1.3.1) et quantique (cf § 1.3.3), des présentations de sa cohomologie classique (cf § 1.3.2) et quantique (cf § 1.3.4), ainsi que les formules de Giambelli quantique et classique (cf § 1.3.5).

Notons que le cas particulier des grassmanniennes lagrangiennes $\mathrm{IG}(n, 2n)$ avait été traité avant le cas général présenté dans ce paragraphe par Kresch et Tamvakis dans [KT03].

1.3.1 Formules de Pieri classiques

On a vu au paragraphe 1.2.1.1 que pour la grassmannienne usuelle, les classes spéciales colonnes et les classes spéciales lignes jouent des rôles symétriques. Pour $\mathrm{IG}(m, 2n)$, du fait de la forme antisymétrique, ce n'est plus le cas. Donc il y a par exemple deux règles de Pieri très différentes pour les classes colonnes et les classes lignes, que l'on présente respectivement aux paragraphes 1.3.1.1 et 1.3.1.2.

1.3.1.1 En fonction des classes $\sigma_{1^r}^+$

La règle de Pieri classique pour les classes colonnes a été démontrée par Pragacz et Ratajski dans [PR96]. Pour l'énoncer, on utilise l'indexation des variétés de Schubert par les paires de partitions présentée en annexe au paragraphe A.1.2. Indiquons ici simplement qu'une paire de partitions admissible est un couple $\lambda = (\lambda^t, \lambda^b)$ de partitions strictes telles que

- $\lambda^t \subset (n - m) \times n$;
- $\lambda^b \subset m \times n$;
- $\lambda_{n-m}^t \geq l(\lambda^b) + 1$, où $l(\lambda^b)$ désigne le nombre de parts non nulles de λ^b .

De plus, la codimension de la variété de Schubert X_λ associée à la paire de partitions λ est donnée par la formule suivante

$$\text{codim } X_\lambda = |\lambda| := \sum_{j=1}^{l(\lambda^b)} \lambda_j + \sum_{i=1}^{n-m} (\lambda_i^t - n + m - 1 + i).$$

La règle de Pieri pour les classes $\sigma_{1^r}^+$ est :

Théorème 1.12. *Pour toute paire de partitions admissible λ de $\text{IG}(m, 2n)$, pour tout $1 \leq r \leq m$, on a*

$$\sigma_\lambda^+ \cup \sigma_{1^r}^+ = \sum_{\nu} 2^{e(\lambda, \mu)} \sigma_\mu^+,$$

où la somme porte sur toutes les partitions μ telles que $|\mu| = |\lambda| + r$ et compatibles avec λ (cf A.3.1 pour la définition de paires compatibles). Le coefficient $e(\lambda, \mu)$ est également défini au paragraphe A.3.1.

1.3.1.2 En fonction des classes σ_p^+

Mentionnons maintenant une autre règle de Pieri pour $\text{IG}(m, 2n)$, démontrée dans [BKT09] et permettant de calculer la multiplication par les classes lignes σ_p^+ . Cette règle s'exprime en termes des partitions k -strictes, également introduites dans [BKT09].

Une partition k -stricte de $\text{IG}(m, 2n)$ ($k := n - m$) est une partition $\lambda \subset m \times (2n - m)$ telle que si $\lambda_j > k$ pour $1 \leq j \leq m$, alors $\lambda_j > \lambda_{j+1}$. On définit une relation sur l'ensemble des partitions k -strictes : on note $\lambda \rightarrow \mu$ si μ peut s'obtenir en enlevant une bande verticale parmi les k premières colonnes de λ et en ajoutant une bande horizontale au résultat, avec quelques conditions supplémentaires qui sont explicitées en annexe au paragraphe A.3.2. Lorsque $\lambda \rightarrow \mu$, on peut associer aux deux partitions un entier $N(\lambda, \mu)$ (cf § A.3.2) qui permet de calculer la multiplicité de σ_μ^+ dans le produit $\sigma_p^+ \cup \sigma_\lambda^+$. On a ainsi le résultat suivant :

Théorème 1.13. *Soient λ une partition k -stricte de $\text{IG}(m, 2n)$ ($k = n - m$) et $1 \leq p \leq 2n - m$ un entier. On a alors*

$$\sigma_p^+ \cup \sigma_\lambda^+ = \sum_{\substack{\lambda \rightarrow \mu \\ |\mu| = |\lambda| + p}} 2^{N(\lambda, \mu)} \sigma_\mu^+.$$

1.3.2 Présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n))$

Grâce à la règle de Pieri, il est possible de donner une présentation de l'anneau de cohomologie de $\text{IG}(m, 2n)$ en fonction des deux types de classes spéciales.

1.3.2.1 En fonction des classes σ_p^+

Une présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ en fonction des classes σ_p^+ est donnée dans [BKT09]. La méthode employée pour la démontrer sera réutilisée plusieurs fois dans ce travail ; on la présente donc ici.

Proposition 1.14. *L'anneau de Chow $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ est engendré par les classes $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{2n-m}^+$, et les relations sont*

$$\det(\sigma_{1+j-i}^+)_{1 \leq i, j \leq r} = 0, \quad m+1 \leq r \leq 2n-m, \quad (\text{R1})$$

$$(\sigma_r^+)^2 + 2 \sum_{i=1}^{2n-m-r} (-1)^i \sigma_{r+i}^+ \sigma_{r-i}^+ = 0, \quad n+1-m \leq r \leq n. \quad (\text{R2})$$

Démonstration. On donne ici les principales étapes de la démonstration ; celle-ci utilise les deux lemmes suivants :

Lemme 1.15. *Soit $A = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_d]$ un anneau de polynômes engendré par des éléments homogènes a_i . Soient I un idéal de A engendré par des éléments homogènes c_1, \dots, c_d de A et $\phi : A/I \rightarrow H$ un morphisme d'anneaux surjectif. On suppose que :*

(C1) H est un \mathbb{Z} -module libre de rang $\prod_i \left(\frac{\deg c_i}{\deg a_i} \right)$.

(C2) pour tout corps K , le K -espace vectoriel $(A/I) \otimes_{\mathbb{Z}} K$ est de dimension finie.

Alors ϕ est un isomorphisme.

Lemme 1.16. *Le quotient de l'anneau gradué $Z[a_1, \dots, a_d]$ avec $\deg a_i = i$ modulo les relations*

$$\det(a_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r} = 0, \quad m+1 \leq r \leq m+d$$

est un \mathbb{Z} -module libre de rang $\binom{m+d}{d}$.

Pour démontrer la proposition, on constate tout d'abord que la règle de Pieri implique que les classes $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{2n-m}^+$ engendrent $A^*(\text{IG}(m, 2n))$. On pose ensuite $A = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_{2n-m}]$, où a_i est homogène de degré i , et on note $\phi : A \rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n))$ le morphisme d'anneaux surjectif défini par $\phi(a_i) = \sigma_i^+$. On note également $a_0 = 1$ et $a_i = 0$ pour $i < 0$. Pour $r > 0$, on définit

$$d_r = \det(a_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r} \text{ et } b_r = a_r^2 + 2 \sum_{i=1}^r (-1)^i a_{r+i} a_{r-i}.$$

En développant le déterminant d_r par rapport à la première colonne, on obtient l'identité :

$$d_r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} a_i d_{r-i}.$$

On en déduit l'identité de séries formelles :

$$\left(\sum_{i=0}^{2n-m} a_i t^i \right) \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i d_i t^i \right) = 1.$$

Par définition de b_r , on a

$$\sum_{i=0}^{2n-m} (-1)^i b_i t^{2i} = \left(\sum_{i=0}^{2n-m} a_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^{2n-m} (-1)^i a_i t^i \right).$$

On considère l'idéal $I = (d_{m+1}, \dots, d_{2n-m}, b_{n+1-m}, \dots, b_n) \subset A$. On montre que $\phi(I) = 0$. En effet, les relations $d_{m+1} = 0, \dots, d_{2n-m} = 0$ proviennent du fait que $\phi(d_r) = c_r(\mathcal{S})$, et que \mathcal{S} est de rang m , donc $c_r(\mathcal{S}) = 0$ pour $r > m$. De plus, remarquons que la forme symplectique induit une injection $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{Q}^*$. On a l'égalité :

$$(-1)^r \phi(b_r) = c_{2r}(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*) = c_{2r}(\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}),$$

ce qui implique que $\phi(b_r) = 0$ pour $r > n - m$. Ceci permet de se ramener à vérifier les conditions du lemme 1.15 pour l'application induite $\phi : A/I \rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n))$.

Or la condition (C1) est immédiate puisque $\deg d_r = r$, $\deg b_r = 2r$ et que $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ est de rang $2^m \binom{n}{m}$. Enfin, pour vérifier la condition (C2), on montre que A/I est un quotient de $A/(d_{m+1}, \dots, d_{2n})$, qui est un \mathbb{Z} -module libre de rang fini par le lemme 1.16. \square

1.3.2.2 En fonction des classes $\sigma_{1^r}^+$

Donnons maintenant, à l'aide de la méthode introduite au paragraphe précédent, une présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ en fonction des classes $\sigma_{1^r}^+$:

Proposition 1.17. *L'anneau $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ est engendré par les classes de Schubert $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{1^m}^+$, et les relations sont*

$$d_{2r} = 0 \quad n + 1 - l \leq r \leq n \quad (\text{R1}')$$

$$f_{2r} = 0 \quad n + 1 - m \leq r \leq n - l, \quad (\text{R2}')$$

où $l = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$, $d_r = \det(\sigma_{1+j-i}^+)_{1 \leq i, j \leq r}$ et $f_{2r} = \sum_{i=0}^r (-1)^i \alpha_i d_{2(r-i)}$, avec $\alpha_r = \det(\sigma_{1^{2(1+j-i)}}^+)_{1 \leq i, j \leq r}$.

Démonstration. Soit $A = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_{2n-m}]$, où a_i est homogène de degré i . On définit

$$\begin{aligned} \phi : A &\rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n)) \\ a_i &\mapsto \sigma_i^+ \end{aligned}$$

Le morphisme ϕ est surjectif, car d'après la règle de Pieri 1.12, les classes $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{1^m}^+$ engendrent $A^*(\text{IG}(m, 2n))$. Montrons tout d'abord que les relations (R1') sont vraies dans $A^*(\text{IG}(m, 2n))$. Pour cela, remarquons que d'après la présentation énoncée au paragraphe 1.2.1.3, les relations $d_{2n+1-m} = 0, \dots, d_{2n} = 0$ sont vraies sur la grassmannienne usuelle $G(m, 2n)$. Par conséquent, leurs images inverses dans $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ restent vraies. On a donc en particulier $\phi(d_{2r}) = 0$ pour tout $n + 1 - l \leq r \leq n$.

Posons maintenant $f'_{2r} := c_{2r}(\mathcal{Q}^*/\mathcal{S})$, où \mathcal{S} est le fibré tautologique sur $\text{IG}(m, 2n)$, \mathcal{Q} le fibré quotient, et $\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}$ est le quotient associé à l'injection $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{Q}^*$ donnée par la forme symplectique. Comme $c(\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}) = c(\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^*)$, on a $c_i(\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}) = 0$ pour i impair. De plus $c(\mathcal{S})c(\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}) = c(\mathcal{Q}^*)$, d'où

$$\left(\sum_{i=0}^m (-1)^i \sigma_1^+ t^i \right) \left(\sum_{i \geq 0} f'_{2i} t^{2i} \right) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i d_i t^i.$$

On en déduit

$$d_{2r} = \sum_{i=0}^{\min(l,r)} \sigma_{1^{2i}}^+ f'_{2(r-i)}.$$

d'où finalement $f'_{2r} = f_{2r}$. Or $\mathcal{Q}^*/\mathcal{S}$ est de rang $2(n-m)$, d'où $f_{2r} = 0$ pour tout $r > n-m$. En particulier, $f_{2r} = 0$ pour $n+1-m \leq r \leq n-l$.

Si l'on note $I = (d_{2n+2-2l}, \dots, d_{2n}, f_{2(n+1-m)}, \dots, f_{2(n-l)}) \subset A$, on a donc $\phi(I) = 0$. Appliquons le lemme 1.15 à $\phi : A/I \rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n))$. La condition (C1) est vérifiée car $A^*(\text{IG}(m, 2n))$ est de rang

$$2^m \binom{n}{m} = 2^l \frac{n!}{(n-l)!} 2^{m-l} \frac{(n-l)!}{(n-m)!}$$

Enfin, pour vérifier la condition (C2), il suffit de constater que comme dans la preuve de la proposition 1.14, A/I est un quotient de $A/(d_{m+1}, \dots, d_{2n})$. \square

1.3.3 Formules de Pieri quantiques

Dans cette partie, on explique comment utiliser le principe quantique-classique exposé au paragraphe 1.2.2.1 pour démontrer une version quantique de la formule de Pieri. La méthode exposée est celle de [BKT09]. L'entier $N(\lambda, \mu)$ et la notation $\lambda \rightarrow \nu$ utilisés dans le théorème ci-dessous sont définis au paragraphe A.3.2 de l'annexe :

Théorème 1.18. *Soient σ_λ^+ une classe de Schubert de $\text{IG}(m, 2n)$, avec $1 \leq p \leq 2n-m$ un entier. On note $k := n-m$. On a alors*

$$\sigma_p^+ \cup \sigma_\lambda^+ = \sum_{\substack{\lambda \rightarrow \mu \\ |\mu| = |\lambda| + p}} 2^{N(\lambda, \mu)} \sigma_\mu^+ + q \sum_{\substack{\lambda \rightarrow \nu \\ |\nu| = |\lambda| + p \\ \nu_1 = 2n+1-m}} 2^{N(\lambda, \nu)-1} \sigma_\nu^+,$$

où ν décrit l'ensemble des partitions k -strictes du rectangle $(m+1) \times (2n+1-m)$, et $\nu^* = (\nu_2, \nu_3, \dots, \nu_{m+1})$.

Comme pour la grassmannienne usuelle, on associe à une courbe rationnelle $C \subset \text{IG}(m, 2n)$ son noyau $\text{Ker } C$ et son espace engendré $\text{Vect } C$. On rappelle que si C est de degré d , alors $\dim \text{Ker } C \geq m-d$ et $\dim \text{Vect } C \leq m+d$. De plus, on a $\text{Ker } C \subset \text{Vect } C \subset (\text{Ker } C)^\perp$. On définit donc la variété

$$Y_d = \{(A, B) \mid A \subset B \subset A^\perp, \dim A = m-d, \dim B = m+d\}.$$

Elle est de dimension $\dim \text{IG}(m, 2n) + d(2n+1-m) - 3d \frac{d+1}{2}$ et munie d'une action *non transitive* de Sp_{2n} . Si λ est une partition k -stricte et F_\bullet un drapeau isotrope, on peut définir la sous-variété

$$Y_\lambda(F_\bullet) = \{(A, B) \in Y_d \mid \exists \Sigma \in X_\lambda(F_\bullet), A \subset \Sigma \subset B\}.$$

Compter le nombre de courbes rationnelles de degré d passant par trois variétés de Schubert de dimensions complémentaires X_λ, X_μ, X_ν en position générale équivaut à compter le nombre de points dans l'intersection $Y_\lambda \cap Y_\mu \cap Y_\nu \subset Y_d$:

Proposition 1.19. *Soient $d \geq 0$ et λ, μ, ν des partitions k -strictes de $\text{IG}(m, 2n)$ telles que*

$$|\lambda| + |\mu| + |\nu| = \dim \text{IG}(m, 2n) + d(2n + 1 - m).$$

Soient X_λ, X_μ, X_ν des variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n)$ en position générale, et Y_λ, Y_μ, Y_ν les sous-variétés de Y_d associées.

1. *L'intersection $Y_\lambda \cap Y_\mu \cap Y_\nu$ est transverse dans Y_d et consiste en un nombre fini de points.*
2. *L'application $f \mapsto (\text{Ker } f, \text{Vect } f)$ définit une bijection entre l'ensemble des applications rationnelles $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{IG}(m, 2n)$ de degré d telles que $f(0) \in X_\lambda, f(1) \in X_\mu, f(\infty) \in X_\nu$, et les points de l'intersection $Y_\lambda \cap Y_\mu \cap Y_\nu$.*
3. *$I_d(\sigma_\lambda^+, \sigma_\mu^+, \sigma_\nu^+) = \int_{Y_d} [Y_\lambda] \cdot [Y_\mu] \cdot [Y_\nu]$.*

Cette proposition ramène le problème du calcul des invariants de Gromov-Witten à un problème d'intersection sur la variété Y_d . Cependant, ce dernier problème n'est pas simple, du fait notamment que Y_d n'est pas un espace homogène. Pour pouvoir démontrer le théorème 1.18, Buch, Kresch et Tamvakis procèdent donc en deux étapes :

- (a) Ils montrent que si λ ne contient pas la partition en escalier

$$\rho_d = (d, d - 1, \dots, 2, 1),$$

alors l'invariant $I_d(\sigma_\lambda^+, \sigma_\mu^+, \sigma_\nu^+)$ est nul ; en particulier, si λ est une partition ligne, tous les invariants à trois points marqués en degré supérieur ou égal à 2 faisant intervenir la classe σ_λ^+ sont nuls.

- (b) Pour calculer les invariants de degré 1, ils font appel à une correspondance explicite entre droites de $\text{IG}(m, 2n)$ (c'est-à-dire points de Y_1) et points de $\text{IG}(m + 1, 2n + 2)$ (cf proposition 1.20 ci-dessous).

Proposition 1.20. *Soient λ, μ, ν des partitions k -strictes de $\text{IG}(m, 2n)$ telles que $l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu) \leq 2m + 1$, où $l(\lambda)$ désigne le nombre de parts non nulles de λ , et*

$$|\lambda| + |\mu| + |\nu| = \dim \text{IG}(m, 2n) + d(2n + 1 - m).$$

Alors

$$I_1(\sigma_\lambda^+, \sigma_\mu^+, \sigma_\nu^+) = \frac{1}{2} \int_{\text{IG}(m+1, 2n+2)} [X_\lambda^+] \cdot [X_\mu^+] \cdot [X_\nu^+],$$

où X_λ^+ désigne la variété de Schubert de $\text{IG}(m + 1, 2n + 2)$ associée à λ .

Démonstration. On donne ici simplement une idée de la preuve de cette proposition. Si on note $\mathbb{C}^{2n} = V$ et $\mathbb{C}^{2n+2} = V \oplus H$, où V et H sont des espaces symplectiques, on considère l'application

$$\begin{aligned} \phi : X_\lambda^+ \cap X_\mu^+ \cap X_\nu^+ &\rightarrow Y_\lambda \cap Y_\mu \cap Y_\nu \subset Y_d \\ \Sigma^+ &\mapsto (\Sigma^+ \cap V, (\Sigma^+ + H) \cap V) \end{aligned}$$

et on montre qu'elle est bien définie.

Enfin, on prouve que chaque point de l'image admet deux antécédents, d'où le facteur $\frac{1}{2}$. En effet, étant donné $(A, B) \in Y_\lambda \cap Y_\mu \cap Y_\nu$, on considère l'espace symplectique $W = B/A \oplus H$. L'ensemble des $\Sigma^+ \in \text{IG}(m, 2n+2)$ tels que $A \subset \Sigma^+ \subset B \oplus H$ s'identifie à la quadrique $\text{IG}(2, W) \cong \text{IG}(2, 4)$, et on peut montrer que les points de $\phi^{-1}\{(A, B)\}$ sont en bijection avec les éléments de $\text{IG}(2, W)$ coupant le long d'une droite trois espaces de dimension 2 donnés en position générale. Or le nombre de tels éléments est

$$\int_{\text{IG}(2, W)} \sigma_1^W \cup \sigma_1^W \cup \sigma_1^W = 2,$$

où σ_1^W désigne le diviseur de Schubert de $\text{IG}(2, W)$, correspondant à la condition d'incidence définie ci-dessus. \square

Mentionnons également les travaux de Leung et Li [LL], qui donnent une règle de Pieri quantique pour les grassmanniennes de types B, C et D pour la multiplication par les classes spéciales colonnes $\sigma_{1^r}^+ = c_r(\mathcal{S}^*)$. En types B et D, les termes non classiques de cette multiplication sont exprimés en fonction de nombres d'intersection classiques sur les variétés de drapeaux complètes G/B associées. En type C (cas de $\text{IG}(m, 2n)$), la règle quantique est donnée, comme la règle classique de Pragacz et Ratajski (cf [PR96]), à l'aide de la combinatoire des paires de partitions.

1.3.4 Présentation de $\text{QA}^*(\text{IG}(m, 2n))$

Donnons maintenant une présentation de la cohomologie quantique de la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m, 2n)$:

Proposition 1.21 ([BKT09]). *L'anneau de cohomologie quantique de $\text{IG}(m, 2n)$ $\text{QA}^*(\text{IG}(m, 2n))$ est engendré par les classes $\sigma_1^+, \dots, \sigma_{2n-m}^+$, et les relations sont*

$$\det(\sigma_{1+j-i}^+)_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ si } m+1 \leq r \leq 2n-m, \quad (\text{R1})$$

$$(\sigma_r^+)^2 + 2 \sum_{i=1}^{2n-m-r} (-1)^i \sigma_{r+i}^+ \sigma_{r-i}^+ = (-1)^{2n-m-r} q \sigma_{2r-2n+m-1}^+ \text{ si } n+1-m \leq r \leq n. \quad (\text{R2})$$

Cette présentation se démontre grâce à la méthode du théorème 1.10 en utilisant la règle de Pieri quantique 1.18.

1.3.5 Formule de Giambelli

Pour pouvoir énoncer la formule de Giambelli pour $\text{IG}(m, 2n)$, on introduit tout d'abord des monômes m_α associés à une suite finie d'entiers $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$:

$$m_\alpha = \prod_i \sigma_{\alpha_i}^+,$$

où l'on pose $\sigma_0^+ = 1$ et $\sigma_p^+ = 0$ pour $p < 0$. Si $i < j$, on définit l'opérateur R_{ij} en posant

$$R_{ij}(\alpha) = (\alpha_1, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_j - 1, \dots).$$

Si R est un monôme quelconque en les R_{ij} , on pose $Rm_\alpha = m_{R\alpha}$. On peut maintenant énoncer la formule de Giambelli classique pour $\text{IG}(m, 2n)$, démontrée par Buch, Kresch et Tamvakis (cf [BKT08a]).

Théorème 1.22 (Formule de Giambelli). *Soit λ une partition k -stricte de $\text{IG}(m, 2n)$ ($k := n - m$). Alors*

$$\sigma_\lambda^+ = R^\lambda m_\lambda,$$

où $R^\lambda = \prod (1 - R_{ij}) \prod_{\lambda_i + \lambda_j > 2k + j - i} (1 + R_{ij})^{-1}$.

La formule de Giambelli quantique, démontrée dans [BKT08b], s'exprime en fonction de la formule de Giambelli classique sur la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m + 1, 2n + 2)$:

Théorème 1.23 (Formule de Giambelli quantique). *Soit λ une partition k -stricte de $\text{IG}(m, 2n)$. La formule de Giambelli quantique pour σ_λ^+ s'obtient en fonction de la formule de Giambelli classique $\sigma_\lambda^+ = R^\lambda m_\lambda$ dans $A^*(\text{IG}(m + 1, 2n + 2))$ en remplaçant la classe de Schubert spéciale σ_{2n+1-m}^+ par $\frac{q}{2}$.*

1.4 Autres résultats

Dans cette partie, on définit les fonctions I et J , qui nous seront utiles au paragraphe 3.2.2, et on donne un aperçu des résultats concernant la cohomologie quantique des autres espaces homogènes.

1.4.1 Fonctions I et J

Les fonctions I et J sont des fonctions importantes en théorie de Gromov-Witten. Elles interviennent notamment dans le cadre de la symétrie miroir. La fonction J est directement construite à partir des invariants de Gromov-Witten d'une variété projective lisse complexe X : c'est la fonction génératrice des invariants dits 1-pointés avec descendants (cf équation (1.5)). La fonction I , quant à elle, est la plupart du temps définie dans le cadre des variétés toriques à partir de données combinatoires. Si X est une variété de Calabi-Yau torique, elle possède un miroir \hat{X} . Il s'avère que la fonction I est solution des équations de Picard-Fuchs pour \hat{X} . Un théorème de symétrie miroir de Givental (cf [Giv98]) affirme alors que les fonctions I et J sont identiques à un changement de variables près.

Le premier théorème miroir concerne la quintique de \mathbb{P}^4 (qui est une variété de Calabi-Yau) et a été démontré par Lian, Liu et Yau dans [LLY97]. Par la suite, le résultat a été étendu :

- aux intersections complètes nef dans \mathbb{P}^n (cf [Giv96]) ;
- aux intersections complètes Calabi-Yau dans les variétés toriques Fano (cf [Bat94]) ;
- aux intersections complètes dans les variétés de drapeaux de type A (cf [Kim99], [BCFKvS98] et [BCFKvS00]) ;
- aux intersections complètes dans les variétés toriques lisses (cf [Giv98]).

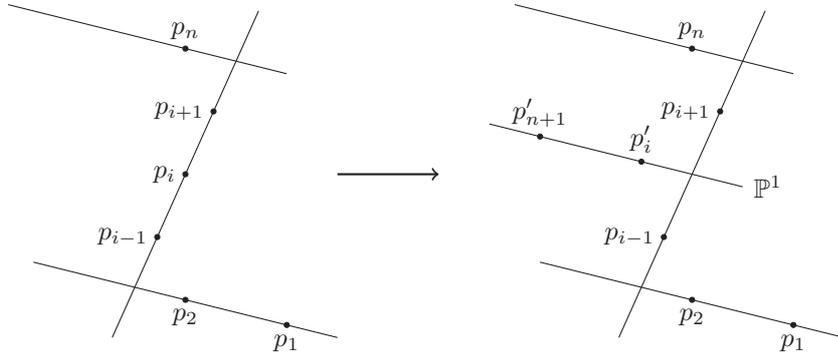


FIGURE 1.3 – Section σ_i

Récemment, des théorèmes miroirs ont pu être obtenus dans le cas des orbifolds toriques (voir par exemple [Iri09]).

Dans ce paragraphe, on commence par définir les invariants de Gromov-Witten avec descendants (cf § 1.4.1.1), puis on définit les fonctions I et J (cf § 1.4.1.2 et 1.4.1.3). Enfin, dans les deux derniers paragraphes 1.4.1.4 et 1.4.1.5, on donne la formule de la fonction J des grassmanniennes usuelle et lagrangienne.

1.4.1.1 Invariants de Gromov-Witten avec descendants

Définissons maintenant les invariants de Gromov-Witten avec descendants, qui nous seront utiles au paragraphe 1.4.1.2. Pour cela, on considère le morphisme $\pi_{n+1} : \mathcal{M}_{0,n+1}(X, \beta) \rightarrow \mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$ consistant à “oublier” le $(n+1)$ -ième point marqué puis à contracter les composantes rendues instables. Ce morphisme possède n sections $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ correspondant aux n points marqués, définies par

$$\sigma_i([f : (C, p_1, \dots, p_n)] \rightarrow X) = [f : (C \cup \mathbb{P}^1, p_1, \dots, p'_i, \dots, p_n, p'_{n+1}) \rightarrow X]$$

comme à la figure 1.3. Soit ω_{n+1} le faisceau dualisant relatif de π_{n+1} . On définit alors n fibrés en droites \mathcal{L}_i sur $\mathcal{M}_{0,n}(X, \beta)$ par

$$\mathcal{L}_i = s_i^* \omega_{n+1}.$$

On note ψ_i leur première classe de Chern.

Définition 1.5. Soient $r \geq 1$ et d_1, \dots, d_r des entiers, $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X, \mathbb{Z})$ et $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des classes de cohomologie sur X telles que

$$\sum_{i=1}^r \deg \gamma_i = 2 \left(\dim \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta) - \sum_{i=1}^r d_i \right).$$

Alors les invariants de la forme

$$I_\beta(\tau_{d_1} \gamma_1, \dots, \tau_{d_r} \gamma_r) := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]} \psi_1^{d_1} ev_1^* \gamma_1 \cup \dots \cup \psi_r^{d_r} ev_r^* \gamma_r.$$

sont appelés *invariants de Gromov-Witten avec descendants*.

1.4.1.2 La fonction J

Pour ce paragraphe, on se réfère à [CK99]. Considérons X une variété projective lisse. La fonction J est une fonction à valeurs dans $H^*(X, \mathbb{C})$ construite à partir des sections plates d'une connexion appelée la connexion de Givental. Pour définir cette connexion, notons T_1, \dots, T_r une base de $H^2(X, \mathbb{C})$, $T_0 = 1 \in H^0(X, \mathbb{C})$. On prolonge cette base en une base T_0, \dots, T_m de $H^*(X, \mathbb{C})$. Soit (g_{kl}) la matrice définie par

$$g_{kl} = \int_X T_k \cup T_l$$

et (g^{kl}) son inverse. A chaque T_i on associe une variable homogène t_i avec $\deg t_i := \deg T_i$. On note enfin (T^j) la base duale des (T_j) , de telle sorte que $T^j = \sum_l g^{jl} T_l$.

Définition 1.6 (Connexion de Givental). Soit $M = H^0(X, \mathbb{C}) \oplus H^2(X, \mathbb{C}) \subset H^*(X, \mathbb{C})$. On définit une connexion sur le fibré trivial $M \times H^*(X, \mathbb{C}) \rightarrow M$ en posant

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t_i}}^{\hbar} \left(\sum_{j=0}^m a_j T_j \right) = \hbar \sum_{j=0}^m \frac{\partial a_j}{\partial t_j} T_j - \sum_{j=0}^m a_j T_i \star T_j$$

où \hbar est un paramètre formel et où l'on identifie T_j avec $\frac{\partial}{\partial t_j}$. Cette connexion est appelée la *connexion de Givental*. On peut montrer qu'elle est plate et sans torsion.

∇^{\hbar} admet une famille de sections plates dont une base est donnée par

$$s_i = e^{\frac{t_0}{\hbar}} \left(e^{\frac{\delta}{\hbar}} \cup T_i + \sum_{\beta \neq 0} \sum_{j=0}^m e^{J_{\beta}} \delta \left(\int_{\mathcal{M}_{0,2}(X, \beta)} ev_1^* \left(\frac{e^{\frac{\delta}{\hbar}} \cup T_i}{\hbar - \psi_1} \right) \cup ev_2^*(T_j) \right) T^j \right)$$

pour tout $0 \leq i \leq m$, où $t_0 \in H^0(X, \mathbb{C})$, $\delta = \sum_{i=1}^r t_i T_i \in H^2(X, \mathbb{C})$ et ψ_1 est la classe psi définie au paragraphe 1.4.1.1. La ∇^{\hbar} -platitude des sections est équivalente à l'équation

$$\hbar \frac{\partial s_i}{\partial t_j} = T_j \star s_i$$

pour tous $0 \leq i, j \leq m$. On peut maintenant définir la fonction J :

Définition 1.7 (Fonction J). La fonction J est définie par

$$J = \sum_j \langle s_j, 1 \rangle T^j,$$

où $\langle \alpha, \beta \rangle := \int_X \alpha \cup \beta$. On peut montrer qu'elle est aussi donnée par la formule :

$$J(t_0, \delta, \hbar) = e^{\frac{(t_0 + \delta)}{\hbar}} \left(1 + \sum_{\beta \neq 0} \sum_{j=0}^m \left(\int_{\mathcal{M}_{0,2}(X, \beta)} ev_1^* \left(\frac{T_j}{\hbar - \psi_1} \right) \cup ev_2^*(1) \right) T^j \right) \quad (1.4)$$

où $t_0 \in H^0(X, \mathbb{C})$ et $\delta := \sum_{i=1}^r t_i T_i$. C'est une série formelle en \hbar^{-1} à coefficients dans $\mathbb{Q}H^*(X, \mathbb{C})$.

Remarque 1.5. On peut encore simplifier la formule (1.4) à l'aide de la propriété de la classe fondamentale pour les invariants avec descendants. On obtient :

$$J(t_0, \delta, \hbar) = e^{\frac{t_0 + \delta}{\hbar}} \left(\sum_{\beta \neq 0} \sum_{j=0}^m \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\hbar^{l+2}} I_{\beta}(\tau_l T_j) T^j \right) \quad (1.5)$$

ce qui montre que la fonction J est la fonction génératrice des invariants à un point marqué avec descendants.

Un des intérêts de la fonction J est qu'elle est souvent assez facile à calculer, puisqu'elle est multiplicative et se comporte bien par rapport aux images directes. Ses propriétés sont exposées dans [Ber00]. Elle est également connue pour de nombreuses variétés, dont l'espace projectif et les grassmanniennes (cf § 1.4.1.4). On verra au paragraphe suivant qu'elle peut parfois être calculée grâce à son lien avec une autre fonction, la fonction I . Enfin, lorsque la cohomologie de la variété X est engendrée par les diviseurs, la fonction J détermine toute la cohomologie quantique.

1.4.1.3 La fonction I

Par définition, la fonction I d'une variété torique lisse est une solution d'un système d'équations différentielles appelé *système GKZ* (cf [CK99], § 5.1). Elle peut également être définie dans un cadre un peu plus général. Par exemple, cette fonction a été calculée par Givental (cf [Giv98]) pour les intersections complètes toriques :

Théorème 1.24. *Soit X une variété torique lisse projective de dimension n . On considère $E = \bigoplus_{i=1}^k L_i$ un fibré vectoriel scindé sur X , où les L_i sont engendrés par des sections globales et $-K_X + \sum_{i=1}^k L_i$ est numériquement effectif. Pour chaque i , on considère Y_i le lieu des zéros d'une section générale de L_i , et on pose $Y = \bigcap_{i=1}^k Y_i$. Alors la fonction I de Y est donnée par*

$$I_Y(t_0, \delta, \hbar) = e(E) e^{\frac{t_0 + \delta}{\hbar}} \times \sum_{\beta} q^{\beta} \left(\prod_{i=1}^k \prod_{m=1}^{c_1(L_i) \cdot \beta} (c_1(L_i) + m\hbar) \right) \prod_{\rho} \frac{\prod_{m=-\infty}^0 (D_{\rho} + m\hbar)}{\prod_{m=-\infty}^{D_{\rho} \cdot \beta} (D_{\rho} + m\hbar)},$$

où $e(E)$ est la classe d'Euler du fibré E , $t_0 \in H^0(X, \mathbb{C})$, $\delta \in H^2(X, \mathbb{C})$, \hbar est un paramètre formel, β parcourt les classes effectives de $H_2(X, \mathbb{Z})$, ρ parcourt les arêtes de l'éventail associé à X et D_{ρ} est la classe du diviseur associé à ρ . C'est une série formelle en \hbar^{-1} à coefficients dans $\text{QH}^*(X, \mathbb{C})$.

Remarque 1.6. 1. Lorsque Y est de Calabi-Yau, la fonction I vérifie également les équations de Picard-Fuchs du miroir de Y (cf [CK99] § 5.5.3, cf [Giv98]).

2. Ce théorème donne en particulier la fonction I de l'espace projectif :

$$I_{\mathbb{P}^{N-1}}(t_0, \delta, \hbar) = e^{\frac{t_0 + \delta}{\hbar}} \sum_{d \geq 0} q^d \frac{1}{\prod_{m=0}^d (H + m\hbar)^N}, \quad (1.6)$$

où H est la classe hyperplane.

3. Dans de nombreuses situations, comme par exemple pour les intersections complètes Fano dans \mathbb{P}^N , les fonctions I et J sont reliées par un changement de variables (cf [Giv96]), ce qui peut permettre de calculer la fonction J , et donc certains invariants de Gromov-Witten. Pour l'espace projectif, on a même $I = J$.

1.4.1.4 Fonction J de la grassmannienne

La fonction J de la grassmannienne usuelle $G(m, N)$ est calculée par Bertram, Ciocan-Fontanine et Kim dans [BCFK05] en la reliant à celle de $(\mathbb{P}^{N-1})^m$, qui se calcule facilement à l'aide de la fonction J de \mathbb{P}^{N-1} (cf équation (1.6)) en utilisant la multiplicativité.

Théorème 1.25 (Fonction J de $G(m, N)$). *La fonction J de la grassmannienne $G(m, N)$ est*

$$J^G(t_0, t, \hbar) = e^{\frac{t_0 + t\sigma_1^G}{\hbar}} \sum_{d \geq 0} e^{dt} J_d(\hbar),$$

où

$$J_d(\hbar) = (-1)^{(m-1)d} \sum_{\substack{(d_1, \dots, d_m) \\ d_1 + \dots + d_m = d}} \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j + (d_i - d_j)\hbar)}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^m \prod_{l=1}^{d_i} (x_i + l\hbar)^N},$$

avec x_1, \dots, x_m les racines de Chern du fibré tautologique dual \mathcal{S}^* .

Remarque 1.7. 1. Par rapport à la définition de la fonction J donnée précédemment (cf définition 1.7), comme $\text{Pic}(G(m, n)) = \mathbb{Z}\sigma_1^G$, on a simplement écrit $\delta = t\sigma_1^G$.

2. Pour comprendre la formule de la fonction J ci-dessus, il faut la voir comme série formelle en \hbar^{-1} . Les coefficients de cette série sont des fonctions symétriques des racines de Chern x_1, \dots, x_m , donc ce sont des classes de cohomologie.

1.4.1.5 Fonction J de la grassmannienne lagrangienne

La fonction J de la grassmannienne lagrangienne a été calculée par Bertram, Ciocan-Fontanine et Kim dans [BCFK08] grâce à la correspondance abélienne / non abélienne. Le principe de cette correspondance est que si X est une variété projective lisse sur \mathbb{C} munie d'une action d'un groupe algébrique réductif complexe G et d'un fibré en droites \mathcal{L} G -linéarisé, et si $T \subset G$ est un tore maximal de G , il existe, sous certaines conditions, une correspondance entre les cohomologies des deux quotients $X_{ab} := X//T$ et $X_{na} := X//G$.

Dans [BCFK08], il est conjecturé que ce résultat peut se généraliser à la cohomologie quantique, et en particulier à la fonction génératrice des invariants 1-pointés, c'est-à-dire la fonction J . Soit $J^{na}(t_0, \delta, \hbar)$ la fonction J de X_{na} , donnée par la formule 1.5 :

$$J^{na}(t_0, \delta, \hbar) = e^{\frac{t_0 + \delta}{\hbar}} \sum_{\beta} e^{J_{\beta} \delta} J_{\beta}^{na}(\hbar),$$

où $t_0 \in H^0(X_{na}, \mathbb{C})$, $\delta \in H^2(X_{na}, \mathbb{C})$, \hbar est un paramètre formel, β parcourt $H_2^{\text{eff}}(X_{na}, \mathbb{Z})$ et $J_\beta^{na}(\hbar)$ est définie par

$$\int_{X_{na}} J_\beta^{na}(\hbar) \cup \gamma = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\hbar^{l+2}} I_\beta(\tau_\alpha \gamma).$$

La conjecture est que la fonction J^{na} peut être reconstruite à l'aide de la fonction J de X_{ab} , notée J^{ab} . Plus précisément, posons

$$I_\beta(\hbar) = \sum_{\tilde{\beta} \rightarrow \beta} \left(\prod_{\alpha} \frac{\prod_{k=-\infty}^{\tilde{\beta} \cdot c_1(L_\alpha)} (c_1(L_\alpha) + k\hbar)}{\prod_{k=-\infty}^0 (c_1(L_\alpha) + k\hbar)} \right) J_{\tilde{\beta}}^{ab}(\hbar),$$

où la somme porte sur les cycles $\tilde{\beta} \in H_2^{\text{eff}}(X_{ab}, \mathbb{Z})$ relevant $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X_{na}, \mathbb{Z})$ et le produit sur les racines positives α , L_α étant le fibré en droites associé. Par définition, on dit que $\tilde{\beta} \in H_2^{\text{eff}}(X_{ab}, \mathbb{Z})$ relève $\beta \in H_2^{\text{eff}}(X_{na}, \mathbb{Z})$ si $\int_{\tilde{\beta}} \tilde{H} = \int_{\beta} H$ pour tout diviseur $H \in H^2(X_{na}, \mathbb{Q})$ ayant pour relèvement $\tilde{H} \in H^2(X_{ab}, \mathbb{Q})^W$, où W est le groupe de Weyl de G . Posons enfin

$$I(t_0, \delta, \hbar) = e^{\frac{t_0 + \delta}{\hbar}} \sum_{\beta} e^{\int_{\beta} \delta} I_\beta(\hbar).$$

La conjecture reliant les fonctions J^{na} et J^{ab} est alors la suivante :

Conjecture 1.26. *J^{na} se déduit de I par un changement de variables explicite (“transformation miroir”). En particulier, si X_{na} est une variété de Fano d’indice supérieur ou égal à 2, ce changement de variables est trivial et on a*

$$J^{na}(t_0, \delta, \hbar) = I(t_0, \delta, \hbar).$$

Ce résultat est notamment vrai lorsque X_{na} est la grassmannienne usuelle $G(n, 2n)$. De plus, si l’on considère le fibré $E_{na} = \bigwedge^2 \mathcal{S}^*$ sur X_{na} , on peut lui associer un fibré E_{ab} sur $X_{ab} = (\mathbb{P}^{2n-1})^n$. Le lieu des zéros d’une section générale de E_{na} est la grassmannienne lagrangienne $\text{IG}(n, 2n)$, et un résultat semblable à la conjecture le relie au lieu des zéros d’une section générale de E_{ab} :

Théorème 1.27 ([BCFK08], théorème 2). *La fonction J de la grassmannienne lagrangienne $\text{LG} := \text{IG}(n, 2n)$ est donnée par*

$$J_d^{\text{LG}} = \sum_{d_1 + \dots + d_n = d} \left(\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \prod_{k=0}^{d_i + d_j} (x_i + x_j + k\hbar)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i + x_j)} \right) \times \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^n \prod_{k=1}^{d_i} (x_i + k\hbar)^{2n}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_i - x_j + (d_i - d_j)\hbar)}{(x_i - x_j)} \right),$$

où les x_i sont les racines de Chern du fibré tautologique \mathcal{S}^* sur LG .

Les auteurs de [BCFK08] indiquent également que la méthode qu’ils utilisent pour démontrer le résultat ci-dessus s’adapte aisément aux autres grassmanniennes isotropes. En particulier, la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m, 2n)$ peut être réalisée comme lieu des zéros d’une section du fibré homogène $\bigwedge^2 \mathcal{S}^*$ sur $G(m, 2n)$, où \mathcal{S} est le fibré tautologique sur $G(m, 2n)$. Par conséquent, en appliquant la méthode de [BCFK08], on obtient

Proposition 1.28. *La fonction J de la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m, 2n)$ est donnée par*

$$J_d^{\text{IG}} = \sum_{d_1 + \dots + d_m = d} \left(\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} \prod_{k=0}^{d_i + d_j} (x_i + x_j + k\hbar)}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i + x_j)} \right) \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^m \prod_{k=1}^{d_i} (x_i + k\hbar)^{2n}} \prod_{1 \leq i < j \leq m} \frac{(x_i - x_j + (d_i - d_j)\hbar)}{(x_i - x_j)} \right),$$

où les x_i sont les racines de Chern du fibré tautologique \mathcal{S}^* sur $\text{IG}(m, 2n)$.

1.4.2 Autres espaces homogènes

Dans ce paragraphe, on passe en revue certains résultats concernant la cohomologie quantique des autres espaces homogènes ; on pourra consulter [Tam07] pour plus de détails.

Grassmanniennes orthogonales. Les classes de Schubert des grassmanniennes orthogonales possèdent une indexation par les partitions k -strictes. Buch, Kresch et Tamvakis ont démontré une règle de Pieri et une présentation quantiques (cf [BKT09]), ainsi qu'une règle de Giambelli (cf [BKT08b]), en fonction des classes spéciales $c_p(\mathcal{Q})$.

Ces grassmanniennes possèdent également une indexation par des paires de partitions ; Pragacz et Ratajski (cf [PR96] et [PR03]) ont démontré en ces termes une règle de Pieri (classique) pour la multiplication par les autres classes spéciales $c_r(\mathcal{S}^*)$. La règle de Pieri quantique correspondante est énoncée dans [LL] en termes d'éléments du groupe de Weyl. Il n'existe en revanche pas à ce jour de règle de Giambelli classique ou quantique en fonction des classes spéciales $c_r(\mathcal{S}^*)$.

Espaces homogènes minuscules et adjoints. Soit G un groupe algébrique simple complexe, P un sous-groupe parabolique maximal de G associé à un poids fondamental ω . Le poids fondamental ω est dit *minuscule* si $|\langle \omega, \check{\alpha} \rangle| \leq 1$ pour toute racine α . Si ω est minuscule, l'espace homogène $X = G/P$ est également dit minuscule. Enfin, la variété homogène $X = G/P$ est dite *adjointe* si P est le parabolique correspondant à la plus grande racine, et elle est dite *co-adjointe* si P correspond à la plus grande racine courte. Un tableau récapitulant ces quatre types de variétés se trouve dans [CP09].

Dans la série d'articles [CMP08], [CMP07] et [CMP10], à l'aide d'un principe quantique-classique, Chaput, Manivel et Perrin étudient l'anneau de cohomologie quantique des variétés minuscules et démontrent sa semi-simplicité, analysant également les symétries de leur diagramme de Hasse. Enfin, dans [CP09], Chaput et Perrin étendent une partie de ces résultats aux variétés adjointes et co-adjointes.

Variétés de drapeaux. Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension N et $0 < r_1 < \dots < r_k < N$ une suite strictement croissante d'entiers. Un *drapeau de V de type (r_1, \dots, r_k)* est une suite strictement croissante $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset V$

de sous-espaces vectoriels de V tels que $\dim V_i = r_i$ pour tout i . Si $k = N - 1$, $0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{N-1} \subset V$ est appelé un *drapeau complet*.

L'ensemble $F(r_1, \dots, r_k; V)$ des drapeaux de V de type (r_1, \dots, r_k) ne dépend que de la dimension de V et est muni d'une structure de variété projective lisse. Il est appelé *variété de drapeaux*. C'est un espace homogène sous l'action du groupe $\mathrm{GL}(N)$. Plus précisément

$$F(r_1, \dots, r_k; N) \cong \mathrm{GL}(N)/P_{r_1, \dots, r_k},$$

où P_{r_1, \dots, r_k} correspond aux sommets r_1, \dots, r_k du diagramme de Dynkin de $\mathrm{GL}(N)$. Dans [GK95], Givental et Kim ont déterminé une présentation de la cohomologie quantique des variétés de drapeaux. Dans [CF99], Ciocan-Fontanine a donné des formules de Pieri et de Giambelli quantiques pour ces variétés; d'autres références peuvent également être trouvées dans [FW04]. Concernant la cohomologie classique, Coskun a démontré une règle de Littlewood-Richardson pour les variétés de drapeaux à deux crans dans [Cos09] et a proposé une version préliminaire d'une telle règle pour le cas général dans [Cos].

Variétés de drapeaux généralisées. Une variété de drapeaux généralisée est une variété du type G/P , où G est un groupe algébrique simple et P un sous-groupe parabolique de G . La cohomologie quantique de ces variétés n'est pas connue en général. Cependant, dans [FW04], Fulton et Woodward ont démontré une formule de Chevalley quantique pour les G/P , c'est-à-dire une formule donnant le produit quantique d'une classe de Schubert et d'un diviseur de Schubert.

Mentionnons enfin un résultat non publié de Peterson [Pet] qui permet de relier la cohomologie quantique d'une variété de drapeaux généralisée G/P et l'homologie de la grassmannienne affine associée à G . Une démonstration est parue dans [LS10]. Ce résultat permet également d'exprimer les invariants de Gromov-Witten de G/P en fonction de ceux de G/B (cf [Woo05]). Cette technique a été exploitée par Leung et Li dans [LL10].

Chapitre 2

Cohomologie classique des grassmanniennes symplectiques impaires

Dans ce chapitre, on étudie la cohomologie classique de la grassmannienne symplectique impaire $IG(m, 2n + 1)$. Pour cela, on utilise les plongements naturels dans la grassmannienne usuelle $G(m, 2n + 1)$ et dans la grassmannienne symplectique paire $IG(m, 2n + 2)$ (cf § 2.3). On en déduit une expression de la dualité de Poincaré (cf § 2.4) ainsi que des présentations classiques en fonction des deux familles de classes spéciales (cf § 2.5). On verra que la dualité de Poincaré est bien plus compliquée que dans le cadre homogène. Par conséquent, même si les deux plongements peuvent théoriquement permettre de calculer n'importe quel produit d'intersection dans $IG(m, 2n + 1)$, on se heurte en pratique à des difficultés d'ordre combinatoire qui nous empêchent de donner des formules fermées valables en toute généralité pour les règles de Pieri et de Giambelli.

On termine le chapitre en étudiant les courbes de degré 1 sur $IG(m, 2n + 1)$. On démontrera dans le cas $m = 2$ que la règle de Pieri quantique ne fait intervenir que les invariants de degré 1, et dans le cas général, on obtiendra le même résultat sous réserve d'une propriété d'énumérativité (cf conjecture 5.1). On étudie donc à la partie 2.6 la variété des droites de $IG(m, 2n + 1)$ et à la partie 2.7 son espace de modules des applications stables de degré 1. On termine en démontrant l'énumérativité des invariants de Gromov-Witten de degré 1 (cf théorème 2.19).

2.1 La grassmannienne symplectique impaire

Soient V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n + 1$ ($n \geq 2$), ω une forme antisymétrique de rang maximal sur V et $1 \leq m \leq n + 1$ un entier. On note K le noyau de ω , qui est donc de dimension 1. La grassmannienne symplectique impaire est

$$IG_\omega(m, V) := \{\Sigma \in G(m, V) \mid \Sigma \text{ est isotrope pour } \omega\}.$$

Elle possède une action du groupe symplectique impair

$$\mathrm{Sp}(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \forall u, v \in V \ \omega(gu, gv) = \omega(u, v)\}.$$

A isomorphisme près, $\mathrm{IG}_\omega(m, V)$ ne dépend pas du choix de l'espace vectoriel V de dimension $2n + 1$ ni de la forme ω , donc on peut la noter $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$. De la même manière, à partir de maintenant, $\mathrm{Sp}(V)$ sera noté Sp_{2n+1} . Notons que Sp_{2n+1} n'est pas un groupe semi-simple (ni même réductif). En revanche, les liens entre Sp_{2n} , Sp_{2n+1} et Sp_{2n+2} mentionnés dans l'introduction peuvent laisser supposer un comportement proche de celui du groupe symplectique.

Rappelons quelques propriétés de base de ces objets, prouvées dans [Mih07] :

Proposition 2.1. 1. *La grassmannienne symplectique impaire $\mathrm{IG}(m, 2n+1)$ est une sous-variété lisse de dimension $m(2n + 1 - m) - \frac{m(m-1)}{2}$ de la grassmannienne usuelle $\mathrm{G}(m, 2n + 1)$.*

2. *Si $2 \leq m \leq n$, alors $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ possède deux orbites sous l'action du groupe symplectique impair Sp_{2n+1} :*

- *l'orbite fermée $\mathbb{O} := \{\Sigma \in \mathrm{IG}(m, 2n + 1) \mid \Sigma \supset K\}$, qui est isomorphe à la grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}(m - 1, 2n)$;*
- *l'orbite ouverte $\{\Sigma \in \mathrm{IG}(m, 2n + 1) \mid \Sigma \not\supset K\}$, qui est isomorphe à l'espace total du dual du fibré tautologique sur la grassmannienne symplectique $\mathrm{IG}(m, 2n)$.*

Dans ce qui suit, on appelle *espace quasi-homogène* une variété algébrique munie d'une action d'un groupe algébrique avec un nombre fini d'orbites. Notons que cette définition est plus restrictive que la définition usuelle, dans laquelle on impose simplement qu'il y ait une orbite ouverte pour l'action. Les grassmanniennes symplectiques impaires avec $2 \leq m \leq n$ sont des exemples de tels espaces. Lorsque $m = 1$ ou $n+1$, $\mathrm{IG}(1, 2n+1) \cong \mathbb{P}^n$ et $\mathrm{IG}(n+1, 2n+1) \cong \mathrm{IG}(n, 2n)$ sont même homogènes. Par la suite, on supposera toujours $2 \leq m \leq n$.

2.2 Variétés de Schubert

Un \mathbb{C} -espace vectoriel V de dimension $2n + 1$ muni d'une forme antisymétrique de rang maximal ω peut être plongé dans un \mathbb{C} -espace vectoriel symplectique $(\bar{V}, \bar{\omega})$ de dimension $2n + 2$ tel que $\bar{\omega}|_V = \omega$. Cette construction définit un plongement naturel $\mathbf{i} : \mathrm{IG}(m, 2n + 1) \hookrightarrow \mathrm{IG}(m, 2n + 2)$. Dans [Mih07], Mihai a remarqué que \mathbf{i} identifie $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ à une sous-variété de Schubert de $\mathrm{IG}(m, 2n + 2)$ associée à un sous-groupe de Borel compatible avec ω . Notons 1^m la partition λ^0 telle que $\lambda_1^0 = \dots = \lambda_m^0 = 1$, qui correspond à l'ensemble d'indices $P^0 = (2n + 2 - m, \dots, 2n + 1)$ (cf § A.1 pour plus de détails concernant ces notations).

Proposition 2.2. *Le plongement $\mathbf{i} : \mathrm{IG}(m, 2n + 1) \rightarrow \mathrm{IG}(m, 2n + 2)$ identifie $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ à la sous-variété de Schubert de $\mathrm{IG}(m, 2n + 2)$ associée à la partition 1^m (ou de manière équivalente à l'ensemble d'indices P^0).*

L'identification présentée ci-dessus de la grassmannienne symplectique impaire à une variété de Schubert de $\mathrm{IG}(m, 2n+2)$ permet d'obtenir sur $\mathrm{IG}(m, 2n+$

1) une décomposition cellulaire induite par celle de $\text{IG}(m, 2n+2)$. On peut donc définir des variétés de Schubert dans $\text{IG}(m, 2n+1)$, qui sont simplement celles de $\text{IG}(m, 2n+2)$ contenues dans $\text{IG}(m, 2n+1)$. Les incidences entre variétés de Schubert sont encodées par le diagramme de Hasse de la variété (cf § 2.2.2). De plus, la décomposition cellulaire permet de connaître les nombres de Betti de $\text{IG}(m, 2n+1)$ et donc de déterminer son polynôme de Poincaré et le rang de son anneau de cohomologie (cf § 2.2.3).

2.2.1 Indexations

Dans ce paragraphe, on présente deux indexations pour les variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$. On réfère à l'appendice A pour plus de détails.

Tout d'abord, on appelle *ensemble d'indices de longueur m* les m -uplets $P = (p_1 < \dots < p_m)$ tels que $1 \leq p_j \leq 2n+1$ pour tout j et $p_i + p_j \neq 2n+3$ pour tous i, j . Les variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$ sont définies par rapport à un drapeau isotrope F_\bullet de \mathbb{C}^{2n+1} , c'est-à-dire un drapeau complet de \mathbb{C}^{2n+1} qui peut se prolonger en un drapeau isotrope F_\bullet^+ de \mathbb{C}^{2n+2} . Cela impose en particulier $F_1 = K$. La proposition 2.2 implique que les variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$ peuvent être indexées par les ensembles d'indices P tels que $P \leq P^0$ (pour l'ordre lexicographique).

Si P est un ensemble d'indices, on peut lui associer un m -uplet décroissant $(n-m)$ -strict d'entiers $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq -1)$ défini par :

$$\lambda_j = 2n + 2 - m - p_j + \#\{i < j \mid p_i + p_j > 2n + 3\}.$$

Réciproquement, si $\lambda = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_m \geq -1)$ est un m -uplet décroissant $(n-m)$ -strict d'entiers tel que

- $\lambda_1 \leq 2n + 1 - m$,
- $\lambda_m = -1$ implique $\lambda_1 = 2n + 1 - m$,

alors les entiers

$$p_j = 2n + 2 - m - \lambda_j + \#\{i < j \mid \lambda_i + \lambda_j \leq 2(n-m) + j - i\}$$

forment un ensemble d'indices de $[1, 2n+1]$.

Soit λ un m -uplet comme ci-dessus. Si l'on note $X_{\lambda+1m}^+(F_\bullet^+)$ la variété de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+2)$ associée à la partition $(\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_m + 1)$ et au drapeau F_\bullet^+ , on remarque qu'elle est contenue dans $\text{IG}(m, 2n+1)$. Par définition, la variété de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$ associée à la partition λ et au drapeau F_\bullet est

$$X_\lambda(F_\bullet) := X_{\lambda+1m}^+(F_\bullet^+) \subset \text{IG}(m, 2n+1).$$

On vérifie facilement qu'avec ces conventions d'indexation, la variété de Schubert $X_\lambda(F_\bullet)$ est de codimension $|\lambda|$ dans $\text{IG}(m, 2n+1)$. Dans ce chapitre ainsi que dans le reste de ce texte (sauf indication contraire), on notera σ_λ les classes de Schubert des grassmanniennes symplectiques impaires.

La définition précédente inclut le cas de "partitions" avec des parts négatives. Ces partitions sont toutes de la forme

$$\lambda = (2n + 1 - m, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \underbrace{-1, \dots, -1}_{m-r \text{ fois}})$$

avec $\lambda_r \geq 0$.

2.2.2 Diagramme de Hasse

Le diagramme de Hasse de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ – respectivement de $\text{IG}(m, 2n)$ – est le diagramme de la multiplication par la classe hyperplane σ_1 – respectivement σ_1^+ . Plus précisément, c'est un graphe orienté tel que :

- les sommets sont indexés par les classes de Schubert ;
- deux sommets indexés par les classes α et α' sont reliés par une arête de multiplicité r si α' apparaît avec multiplicité r dans le produit de α par la classe hyperplane.

Pour un espace homogène G/P tel que P soit un parabolique maximal, à cause de la formule de Chevalley (cf théorème B.6), si l'on ne tient pas compte des multiplicités, le diagramme de Hasse est simplement le diagramme de l'ordre de Bruhat dans W/W_P , où W est le groupe de Weyl de G et W_P celui du parabolique. Les diagrammes de Hasse des grassmanniennes symplectiques paires et impaires sont reliés. Il est déjà clair d'après le début de cette partie que celui de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ est inclus dans celui de $\text{IG}(m, 2n + 2)$. On va maintenant donner deux résultats concernant les inclusions naturelles $\text{IG}(m, 2n) \subset \text{IG}(m, 2n + 1) \subset \text{IG}(m, 2n + 2)$: les propositions 2.3 et 2.4.

Proposition 2.3. *Le diagramme de Hasse de $\text{IG}(m, 2n)$ est formé de l'union :*

1. *du diagramme de Hasse \mathcal{H}_1 de $\text{IG}(m, 2n - 1)$, dont les sommets sont les classes de $\text{IG}(m, 2n)$ associées aux variétés de Schubert contenues dans X_{1^m} ;*
2. *du diagramme de Hasse \mathcal{H}_2 de $\text{IG}(m - 1, 2n - 2)$;*

Les arêtes allant de \mathcal{H}_2 à \mathcal{H}_1 sont de deux types :

- *arêtes simples $\lambda \rightarrow \mu$ pour λ, μ tels que $\lambda_1 \leq 2n - 1 - m$, $\lambda_{m-1} \geq 1$, $\lambda_m = 0$ et $\mu = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}, 1)$;*
- *arêtes doubles $\lambda \rightarrow \mu$ pour λ, μ tels que $\lambda_1 = 2n - 1 - m$, $\lambda_m = 0$ et $\mu = (2n - m, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$.*

Il n'y a pas d'arête allant de \mathcal{H}_1 à \mathcal{H}_2 .

Démonstration. Notons $\mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n)}$ le diagramme de Hasse de $\text{IG}(m, 2n)$. Dans un premier temps, on ne s'occupe pas des arêtes entre les deux parties \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . L'isomorphisme entre \mathcal{H}_1 et $\mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n-1)}$ est simplement une conséquence de l'isomorphisme entre $\text{IG}(m, 2n - 1)$ et la variété de Schubert X_{1^m} de $\text{IG}(m, 2n)$ définie au paragraphe 2.3.1. Il est donné par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n-1)} & \rightarrow & \mathcal{H}_1 \\ \lambda & \mapsto & \bar{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_m + 1). \end{array}$$

Enfin, l'isomorphisme entre \mathcal{H}_2 et $\mathcal{H}_{\text{IG}(m-1, 2n-2)}$ s'obtient en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\phi} & \text{IG}(m - 1, 2n - 2) \\ e \downarrow & & \\ \text{IG}(m, 2n) & & \end{array}$$

dans lequel

- $U = \text{IG}(m, 2n) \setminus X_{1^m}^+$;
- ϕ est l'application $\Sigma^+ \mapsto (\Sigma^+ \cap F_{2n-1})/F_1$;
- e est l'inclusion naturelle.

En effet, on remarque que \mathcal{H}_2 et $\mathcal{H}_{\text{IG}(m-1, 2n-2)}$ possèdent le même ensemble de sommets. Soit σ'_λ une classe de Schubert de $\text{IG}(m-1, 2n-2)$. En observant les conditions d'incidence, on remarque que $\phi^* \sigma'_\lambda = e^* \sigma_\lambda^+$. On obtient alors :

$$\phi^* (\sigma_1^+ \cup \sigma'_\lambda) = e^* (\sigma_1^+ \cup \sigma_\lambda^+),$$

donc \mathcal{H}_2 et $\mathcal{H}_{\text{IG}(m-1, 2n-2)}$ ont les mêmes arêtes.

Décrivons maintenant les arêtes entre les sous-graphes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . On va utiliser la règle de Pieri du paragraphe 1.3.1.1, dont la combinatoire est expliquée au paragraphe A.3.1.

Montrons tout d'abord qu'il n'y a pas d'arête entre un élément de \mathcal{H}_1 et un élément de \mathcal{H}_2 . Pour cela, considérons $\lambda \in \mathcal{H}_1$. Par définition de \mathcal{H}_1 , la cellule de Schubert C_λ est contenue dans $X_{1^m}^+$. Par conséquent, son adhérence est également contenue dans $X_{1^m}^+$. Or cette adhérence contient en particulier toutes les cellules de Schubert C_μ telles que σ_μ^+ apparaisse dans le produit de σ_λ^+ par la classe hyperplane.

Considérons maintenant $\lambda \in \mathcal{H}_2$ et supposons qu'elle soit reliée à $\mu \in \mathcal{H}_1$. Notons α, β les paires correspondantes. On a $\alpha_1^b < n$ et $\alpha_1^t < n$. Montrons tout d'abord qu'on ne peut pas avoir $\alpha_1^b < n-1$ et $\alpha_1^t < n-1$. En effet, si $\alpha_1^t < n-1$, on ne peut pas avoir $\beta_1^t = n$, car cela nécessiterait de rajouter au moins deux cases à la partition du haut, ce qui est impossible étant donné que $|\beta| - |\alpha| = 1$. Comme $\mu \in \mathcal{H}_1$, il s'ensuit que $\beta_1^b = n$, donc il faut rajouter au moins deux cases à α_1^b . La composante correspondante doit être exceptionnelle, donc reliée (d'après la condition de compatibilité **(Cd. 3)**). Mais ce n'est pas possible puisque $\alpha_1^t < n-1$.

Supposons maintenant que $\alpha_1^b = n-1$ et $\alpha_1^t < n-1$. Alors comme auparavant, on ne peut pas avoir $\beta_1^t = n$, donc on a nécessairement $\beta_1^b = n$. On va montrer par un argument de dénombrement qu'on ne peut pas avoir de ligne exceptionnelle. Pour cela, notons $a \geq 0$ le nombre de lignes exceptionnelles, N le nombre de cases exceptionnelles (c'est-à-dire de cases de $\alpha^t \setminus \beta^t$), M le nombre de cases de $D_\beta^b \setminus D_\alpha^b$. Si i est une ligne exceptionnelle, on note n_i le nombre de cases exceptionnelles de cette ligne et m_i le nombre de cases de la composante reliée associée. La condition de compatibilité **(Cd. 3)** implique l'inégalité $m_i \geq n_i + 1$. Globalement, on a donc

$$M \geq 1 + \sum_{i=1}^a (n_i + 1) = 1 + N + a,$$

où le premier 1 correspond à la case ajoutée à la première ligne de α^b , qui n'appartient pas à une composante exceptionnelle. Finalement, on en déduit :

$$1 = |\beta| - |\alpha| \geq M - N = 1 + a,$$

d'où $a = 0$, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de ligne exceptionnelle. Mais alors la seule possibilité est

$$\beta^t = \alpha^t \text{ et } \beta^b = \left(\alpha_1^b + 1, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{l(\alpha_b)}^b \right).$$

On constate alors immédiatement que β est compatible avec λ . De plus l'unique composante n'est pas reliée et elle est sans $(\beta \setminus \alpha)$ -case au-dessus d'elle (car $\alpha_1^t = \beta_1^t < n - 1$). Elle n'est pas non plus extrémale, donc $e(\alpha, \beta) = 1$.

Supposons inversement que $\alpha_1^b < n - 1$ et $\alpha_1^t = n - 1$. On ne peut pas avoir $\beta_1^b = n$. En effet, sinon, il faudrait que la composante associée soit exceptionnelle, ce qui est impossible car $\alpha_1^t = n - 1 < n$. Par conséquent on a $\beta_1^t = n$, d'où

$$\beta^t = (n, \alpha_2^t, \dots, \alpha_{n-m}^t) \text{ et } \beta^b = \alpha^b.$$

β ainsi définie est évidemment compatible avec α , et $e(\alpha, \beta) = 0$ car il n'y a pas de composante.

Finalement, si $\alpha_1^b = n - 1$ et $\alpha_1^t = n - 1$, en reprenant les arguments des cas précédents, on remarque qu'il y a deux possibilités (et deux seulement) pour β :

$$\begin{aligned} \beta^t &= \alpha^t \text{ et } \beta^b = \left(\alpha_1^b + 1, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{l(\alpha_b)}^b \right), \\ \beta^t &= (n, \alpha_2^t, \dots, \alpha_{n-m}^t) \text{ et } \beta^b = \alpha^b. \end{aligned}$$

Ceci termine la description des arêtes entre \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_1 . □

Voici maintenant le résultat pour $\text{IG}(m, 2n + 1)$:

Proposition 2.4. *Le diagramme de Hasse de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ est constitué :*

1. *du diagramme de Hasse \mathcal{H}_1 de $\text{IG}(m, 2n)$, dont les sommets sont les classes de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ associées aux variétés de Schubert non contenues dans l'orbite fermée ;*
2. *du diagramme de Hasse \mathcal{H}_2 de l'orbite fermée $\mathbb{O} \cong \text{IG}(m - 1, 2n)$;*

Les arêtes allant de \mathcal{H}_1 à \mathcal{H}_2 sont de multiplicité 1. Elles sont de deux types :

- $\lambda \rightarrow \mu$ pour λ, μ tels que $\lambda_1 = 2n - m$ et $\mu = (2n + 1 - m, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$;
- $\lambda \rightarrow \mu$ pour λ, μ tels que

$$\begin{aligned} 2(n - m) + \#\{1 \leq i \leq m \mid \lambda_i \geq 1\} &\leq \lambda_1 \leq 2n - 1 - m \\ \text{et } \mu &= (2n + 1 - m, \lambda_2, \dots, \lambda_{\lambda_1 - 2(n - m)}, -1, \dots, -1). \end{aligned}$$

Il n'y a pas d'arêtes allant de \mathcal{H}_2 à \mathcal{H}_1 .

Démonstration. Notons $\mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n+1)}$ le diagramme de Hasse de $\text{IG}(m, 2n + 1)$. Dans un premier temps, on ne s'occupe pas des arêtes entre les deux parties \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . Soit \mathcal{G}_1 le sous-graphe de $\mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n+1)}$ induit par les sommets σ_λ pour λ tel que $\lambda_1 < 2n + 1 - m$. Montrons que $\mathcal{G}_1 = \mathcal{H}_{\text{IG}(m, 2n)}$. Tout d'abord, on remarque que ces deux graphes ont le même ensemble de sommets. On considère alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{IG}(m, 2n+1) \setminus \mathbb{O} & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{IG}(m, 2n) \\ e \downarrow & & \\ \mathrm{IG}(m, 2n+1) & & \end{array}$$

où ϕ est l'application $\Sigma \mapsto (\Sigma + K)/K$ et e l'inclusion naturelle. Soit σ_λ^+ une classe de Schubert de $\mathrm{IG}(m, 2n)$. En observant les conditions d'incidence, on remarque que $\phi^* \sigma_\lambda^+ = e^* \sigma_\lambda$. On obtient alors :

$$\phi^* (\sigma_1^+ \cup \sigma_\lambda^+) = e^* (\sigma_1 \cup \sigma_\lambda),$$

donc \mathcal{G}_1 et $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n)}$ ont les mêmes arêtes. Or les sommets de $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+1)}$ qui ne sont pas des sommets de \mathcal{G}_1 correspondent aux classes σ_λ avec $\lambda_1 = 2n+1-m$, c'est-à-dire aux variétés de Schubert contenues dans l'orbite fermée $\mathbb{O} \cong \mathrm{IG}(m-1, 2n)$. Donc le graphe \mathcal{G}_2 qu'ils induisent est isomorphe à $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m-1, 2n)}$.

Décrivons maintenant les arêtes entre les sous-graphes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 . On a vu d'après la proposition 2.3 que $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+1)}$ est un sous-graphe de $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+2)}$, donc on peut travailler dans la grassmannienne symplectique paire $\mathrm{IG}(m, 2n+2)$ et utiliser la règle de Pieri énoncée au paragraphe 1.3.1.1. Rappelons que l'identification entre $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+1)}$ et le sous-graphe de $\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m, 2n+2)}$ décrit à la proposition 2.3 est donnée par

$$\lambda \mapsto \bar{\lambda} = (\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_m + 1).$$

Si l'on note

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_1 &= \{ \bar{\lambda} \mid \bar{\lambda}_1 \leq 2n+1-m \text{ et } \bar{\lambda}_m \geq 1 \}, \\ \bar{\mathcal{H}}_2 &= \{ \bar{\mu} \mid \bar{\mu}_1 \leq 2n+2-m \}, \end{aligned}$$

on remarque que $\bar{\mathcal{H}}_1 \cong \mathcal{H}_1$ et $\bar{\mathcal{H}}_2 \cong \mathcal{H}_2$.

Par le même argument que dans la preuve de la proposition 2.3, on constate qu'il n'y a pas d'arête allant d'un sommet de $\bar{\mathcal{H}}_2$ à un sommet de $\bar{\mathcal{H}}_1$. Considérons maintenant $\bar{\lambda} \in \bar{\mathcal{H}}_1$, et supposons qu'il soit relié à un sommet $\bar{\mu} \in \bar{\mathcal{H}}_2$. On note toujours α et β les paires associées.

On commence par supposer que $\alpha_1^b = n$. Il s'agit de montrer que β est nécessairement égale à la paire γ définie par

$$\gamma^t = \alpha^t \text{ et } \gamma^b = (\alpha_1^b + 1, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{l(\alpha^b)}^b).$$

Remarquons tout d'abord que cette dernière est compatible avec α . De plus, $e(\alpha, \gamma) = 0$. En effet, $\gamma_1^t = \alpha_1^t = n+1 = \gamma_1^b$, donc l'unique composante est reliée.

Pour montrer l'unicité de γ , supposons par l'absurde $\beta \neq \gamma$. On a $\beta_1^b = n+1$ car $\beta \in \bar{\mathcal{H}}_2$. Comme de plus β est compatible avec α et $|\beta| = |\alpha| + 1$, il doit y avoir au moins une ligne exceptionnelle. Notons $a \geq 1$ le nombre de lignes exceptionnelles, N le nombre de cases exceptionnelles (c'est-à-dire de cases de $\alpha^t \setminus \beta^t$), M le nombre de cases de $D_\beta^b \setminus D_\alpha^b$. Si i est une ligne exceptionnelle, n_i le nombre de cases exceptionnelles de cette ligne et m_i le nombre de cases de la composante reliée associée, alors la condition de compatibilité (**Cd. 3**) implique l'inégalité $m_i \geq n_i + 1$. Globalement, on a donc

$$M \geq 1 + \sum_{i=1}^a (n_i + 1) = 1 + N + a,$$

où le premier 1 correspond à la case ajoutée à la première ligne de α^b , qui n'appartient pas à une composante exceptionnelle. Finalement, on en déduit :

$$|\beta| - |\alpha| \geq M - N = 1 + a > 1,$$

ce qui est absurde.

Traitons maintenant le cas où $\alpha_1^b < n$. Comme $\beta_1^b = n + 1$, il faut ajouter au moins deux cases à la première ligne de α^b , donc il doit nécessairement y avoir au moins une ligne exceptionnelle. Mais d'après les inégalités du cas précédent, il y en a au plus une, et ce doit être la première ligne (car c'est elle qui est reliée à la composante située à la première ligne de α^b). Par conséquent, il n'y a qu'une seule possibilité pour β :

$$\beta^t = (\alpha_1^b + 1, \alpha_2^t, \dots, \alpha_{n+1-m}^t) \text{ et } \beta^b = (n + 1, \alpha_2^b, \dots, \alpha_{l(\alpha^b)}^b).$$

Cette paire est admissible si et seulement si $\alpha_1^b \geq \alpha_2^t$, ce qui, en passant aux partitions k -strictes, est exactement la condition sur λ indiquée dans l'énoncé. Enfin, l'unique composante est reliée à la ligne exceptionnelle, d'où $e(\alpha, \beta) = 0$. \square

Remarquons que dans le cas pair comme dans le cas impair, il y a peu d'arêtes entre les sous-graphes \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 proportionnellement au nombre total d'arêtes.

A titre d'exemple, on peut représenter les diagrammes de Hasse de $IG(2, 6)$ (cf figure 2.1), $IG(2, 7)$ (cf figure 2.2) et $IG(2, 8)$ (cf figure 2.3) et constater les inclusions décrites dans ce paragraphe. Enfin, la figure 2.4 présente un exemple pour $m > 2$. Dans chacune des figures, les arêtes vont de gauche à droite.

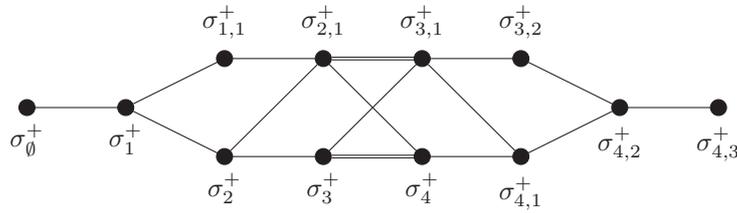


FIGURE 2.1 – Diagramme de Hasse de $IG(2, 6)$

2.2.3 Polynôme de Poincaré

Le polynôme de Poincaré est la série génératrice des nombres de Betti. Comme la grassmannienne symplectique impaire possède une décomposition cellulaire, les nombres de Betti sont les nombres de cellules en chaque dimension. Par conséquent, le polynôme de Poincaré permet de connaître le nombre de variétés de Schubert de dimension donnée. Son calcul a été effectué dans [Mih07].

Proposition 2.5 (Polynôme de Poincaré de $IG(m, 2n + 1)$). *Le polynôme de*

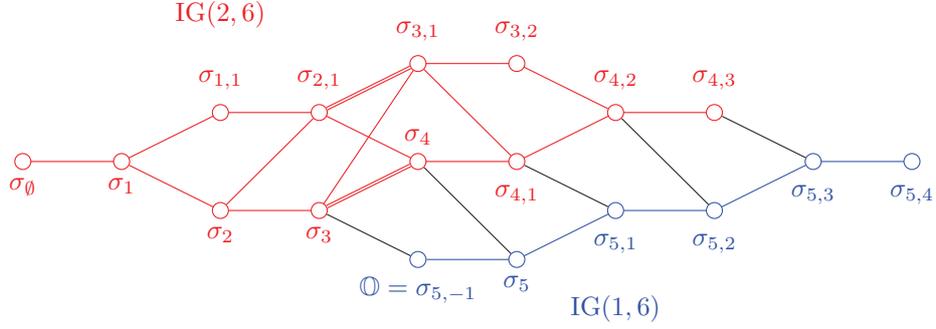


FIGURE 2.2 – Diagramme de Hasse de $IG(2,7)$

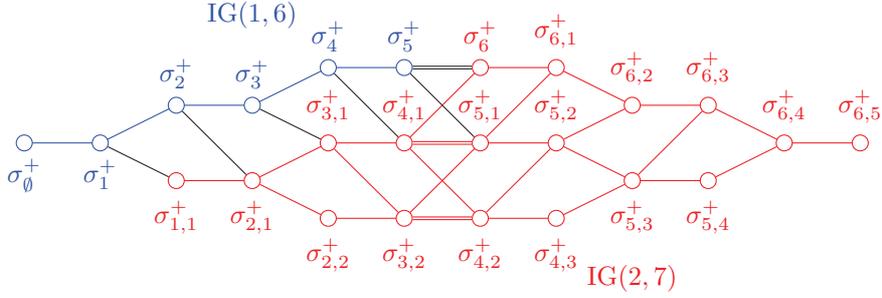


FIGURE 2.3 – Diagramme de Hasse de $IG(2,8)$

Poincaré de $IG := IG(m, 2n + 1)$ est

$$P(IG, q) = \frac{\prod_{i=1}^l (q^{2n+2-2i} - 1) \prod_{i=l+1}^m (q^{2n+4-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^m (q^i - 1)} \quad \text{si } m = 2l, \quad (2.1)$$

$$P(IG, q) = \frac{\prod_{i=1}^l (q^{2n+2-2i} - 1) \prod_{i=l+2}^m (q^{2n+4-2i} - 1)}{\prod_{i=1}^m (q^i - 1)} \quad \text{si } m = 2l + 1. \quad (2.2)$$

En évaluant ces polynômes en $q = 1$, on obtient le

Corollaire 2.6. *Le rang de $A^*(IG(m, 2n + 1))$ est $2^{m-1} \binom{m}{n} \frac{2n+2-m}{n+1-m}$.*

2.3 Plongements

La grassmannienne symplectique impaire $IG(m, 2n + 1)$ se plonge naturellement dans la grassmannienne symplectique paire de dimension supérieure $IG(m, 2n + 2)$ (cf § 2.3.1) et dans la grassmannienne usuelle (cf § 2.3.2). Ces plongements nous seront très utiles pour décrire la cohomologie de $IG(m, 2n + 1)$.

$(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elles. On va utiliser le lemme suivant, qui montre qu'on ne peut pas rajouter plus de m cases à une paire λ si l'on souhaite obtenir une paire compatible :

Lemme 2.7. *Soient λ et μ deux paires de partitions de $\mathcal{P}_{m,n}$ telles que μ soit compatible avec λ . Alors $|\mu| - |\lambda| \leq m$.*

Démonstration. On commence par se ramener au cas où μ vérifie $\mu_1^t = n$ et $\mu_i^t = \lambda_{i-1}^t - 1$ pour tout $2 \leq i \leq k$ ($k := n - m$).

Pour cela, on suppose dans un premier temps que μ ne possède pas de ligne exceptionnelle. Soit i minimal tel que $\mu_i^t < \lambda_{i-1}^t - 1$; montrons qu'on peut rajouter une case à cette ligne sans diminuer $|\mu| - |\lambda|$. Soit $\bar{\mu}$ la paire ainsi obtenue. Si $\bar{\mu}$ est compatible avec λ , elle convient et $|\bar{\mu}| - |\lambda| = |\mu| - |\lambda| + 1$. Sinon, la case ajoutée est nécessairement au-dessus d'une composante de $D_\mu^b \setminus D_\lambda^b$, que l'on note C . Comme $\bar{\mu}$ n'est pas compatible avec λ , on a les trois possibilités exclusives suivantes :

1. C est reliée ;
2. C possède une $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle ;
3. C est extrême.

Si C est reliée (cas 1), on a encore deux sous-cas : soit C est reliée à la ligne $i - 1$ (cas 1.a), soit elle est reliée à la ligne i (cas 1.b). Dans le cas 1.a, considérons la case \mathcal{C} de C qui est le plus en bas parmi celles situées à la colonne λ_{i-1}^t . Comme i est minimal et que μ est une paire admissible, \mathcal{C} est nécessairement la case la plus à droite de la composante C . Enlevons alors \mathcal{C} et notons $\tilde{\mu}$ la paire ainsi obtenue. Dans $\tilde{\mu}$, C est séparée en une composante C_1 qui possède une $(\tilde{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle et une composante reliée C_2 (éventuellement vide). Donc $\tilde{\mu}$ est compatible avec λ et $|\tilde{\mu}| - |\lambda| = |\mu| - |\lambda|$.

Dans le cas 1.b, on a nécessairement $\mu_i^t = \lambda_i^t$. Notons \mathcal{C} la case de C qui est le plus en bas parmi celles situées à la colonne $\bar{\mu}_i^t = \mu_i^t + 1 = \lambda_i^t + 1$. Enlevons alors \mathcal{C} ainsi que les r cases situées plus à droite sur la même ligne (avec éventuellement $r = 0$). Rajoutons également r cases à la ligne i de la partition du haut, et notons $\tilde{\mu}$ la paire ainsi obtenue. Dans $\tilde{\mu}$, C est séparée en une composante reliée C_1 et une composante C_2 (éventuellement vide) qui possède une $(\tilde{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle. Donc $\tilde{\mu}$ est compatible avec λ et $|\tilde{\mu}| - |\lambda| = |\mu| - |\lambda|$.

Dans le cas 2, la $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus de C est nécessairement celle située à la ligne i et à la colonne μ_i^t de la partition du haut. Notons \mathcal{C} la case de C qui est le plus en bas parmi celles situées à la colonne $\mu_i^t + 1 = \bar{\mu}_i^t$. Enlevons alors \mathcal{C} ainsi que les r cases situées plus à droite sur la même ligne (avec éventuellement $r = 0$). Rajoutons également r cases à la ligne i de la partition du haut, et notons $\tilde{\mu}$ la paire ainsi obtenue. Dans $\tilde{\mu}$, C est séparée en deux composantes C_1 et C_2 qui possèdent chacune une $(\tilde{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle (C_2 étant éventuellement vide). Donc $\tilde{\mu}$ est compatible avec λ et $|\tilde{\mu}| - |\lambda| = |\mu| - |\lambda|$.

Enfin, montrons que le cas 3 est impossible. En effet, si C est extrême, alors c'est une bande horizontale à $p \geq 1$ cases, qui vont de la colonne $l(\lambda^b) + 1$ à la colonne $l(\lambda^b) + p$. Comme λ est admissible, on a $\lambda_k^t \geq l(\lambda^b) + 1$. Mais μ est compatible avec λ , donc C doit être non reliée, d'où $\lambda_k^t > l(\lambda^b) + p$. Donc C ne peut pas avoir de $(\bar{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle.

Supposons maintenant que μ vérifie $\mu_1^t = n$ et $\mu_i^t = \lambda_{i-1}^t - 1$ pour tout $2 \leq i \leq k$ ($k := n - m$) et montrons que $|\mu| - |\lambda| \leq m$. En effet, remarquons que toute colonne située entre la colonne λ_k^t et la colonne n est dans l'une des deux situations suivantes :

1. elle contient une $(\mu^t \setminus \lambda^t)$ -case ;
2. il existe une ligne de λ^t qui s'arrête à cette colonne.

On en déduit que toute composante de $D_\mu^b \setminus D_\lambda^b$ est une bande verticale, sauf éventuellement, si elle existe, la composante extrême. Donc $\mu_j^b \in \{\lambda_j^b, \lambda_j^b + 1\}$ pour tout j tel que $\lambda_j^b + j - 1 \geq \lambda_k^t - 2$. Notons j_1 l'indice maximal vérifiant cette propriété. Le nombre de cases total maximal pour les composantes situées entre les colonnes $l(\lambda_b) + 1$ et $\lambda_k^t - 1$ est $\lambda_k^t - 1 - j_1$. Finalement :

$$\begin{aligned} |\mu| - |\lambda| &\geq (n - \lambda_1^t) + \sum_{i=2}^k (\lambda_{i-1}^t - \lambda_i^t - 1) + j_1 + (\lambda_k^t - 1 - j_1) \\ &\geq n - k = m. \end{aligned}$$

Traisons maintenant le cas où μ possède au moins une ligne exceptionnelle i . On va montrer que l'on peut construire $\tilde{\mu}$ compatible avec λ dont la ligne i n'est plus exceptionnelle et telle que $|\tilde{\mu}| - |\lambda| \geq |\mu| - |\lambda|$, ce qui nous permettra de nous ramener inductivement au cas précédent. Soit i tel que $\mu_i^t < \lambda_i^t$ et soit C la composante reliée à la ligne i . On note E l'excroissance de C (éventuellement vide). Notons $p := \lambda_i^t - \mu_i^t$. Soit alors $\tilde{\mu}$ la paire de partitions obtenue en rajoutant p cases à la ligne i de μ^t et en supprimant l'excroissance E de C . On a alors $|\tilde{\mu}| = |\mu| + p - |E| \geq |\mu|$ par la condition 5 de la définition A.2, ce qui est le résultat souhaité. \square

On peut maintenant prouver le

Lemme 2.8. *Soient λ une paire de partitions de $\mathcal{P}_{m,n}$ et μ compatible avec λ telle que $|\mu| - |\lambda| = m$. Alors $e(\lambda, \mu) = 0$.*

Démonstration. Si μ vérifie $\mu_1^t = n$ et $\mu_i^t = \lambda_{i-1}^t - 1$ pour tout $2 \leq i \leq k$ ($k := n - m$), comme $|\mu| - |\lambda| = m$, la preuve du lemme 2.7 montre que toute composante est soit reliée, soit extrême, soit possède une $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle, d'où $e(\lambda, \mu) = 0$.

De plus, cette preuve montre que toute paire μ compatible avec λ telle que $|\mu| - |\lambda| = m$ peut être ramenée à une paire $\bar{\mu}$ compatible avec λ telle que $\bar{\mu}_1^t = n$, $\bar{\mu}_i^t = \lambda_{i-1}^t - 1$ pour tout $2 \leq i \leq k$ ($k := n - m$) et $|\bar{\mu}| - |\lambda| = m$. Il nous suffit donc de montrer qu'à chaque étape de cette transformation, la multiplicité $e(\lambda, \mu)$ est préservée; on en déduira par induction que $e(\lambda, \mu) = 0$.

Regardons tout d'abord ce qui se produit lorsque l'on passe de μ où la ligne i est exceptionnelle à $\bar{\mu}$ où elle ne l'est plus. La seule composante affectée par cette étape est la composante C qui est reliée à la ligne i . Or l'étape consiste simplement à supprimer l'excroissance de C , donc dans $\bar{\mu}$, la composante \bar{C} ainsi obtenue est toujours reliée à la ligne i , d'où $e(\lambda, \mu) = e(\lambda, \bar{\mu})$.

Voyons maintenant l'étape où l'on ajoute une case à une ligne i non exceptionnelle de μ telle que $\mu_i^t < \lambda_{i-1}^t - 1$ et notons $\bar{\mu}$ le résultat de cette étape. La seule composante qui peut être affectée par cette étape est, lorsqu'elle existe, l'unique composante C qui possède une ou plusieurs cases à la colonne $\mu_i^t + 1$. On a les trois cas exclusifs suivants pour C :

1. C n'est ni reliée, ni extrémale, et ne possède pas de $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle ;
2. C est reliée ;
3. C possède une $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle.

En effet, la possibilité que C soit extrémale a été exclue dans la preuve du lemme 2.7.

Supposons que C ne soit ni reliée, ni extrémale, et ne possède pas de $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle. Alors on a vu que $|\bar{\mu}| - |\lambda| = |\mu| - |\lambda| + 1 = m + 1$, ce qui est absurde, donc ce cas est en fait impossible.

Si C est reliée, l'opération la sépare en deux composantes (l'une d'entre elles étant éventuellement vide) : une composante reliée et une composante possédant une $(\bar{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle, donc $e(\lambda, \mu) = e(\lambda, \bar{\mu})$.

Enfin, si C possède une $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elle, l'opération la sépare en deux composantes possédant une $(\bar{\mu} \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elles (l'une d'entre elles étant éventuellement vide), donc $e(\lambda, \mu) = e(\lambda, \bar{\mu})$. \square

Par conséquent, on peut préciser l'équation (2.3) :

Proposition 2.9. *Les coefficients des termes de la restriction à $\text{IG}(m, 2n + 1)$ d'une classe de Schubert de la grassmannienne paire sont tous égaux à 1 :*

$$\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+ = \sum_{\substack{\nu \text{ compatible avec } \lambda \\ |\nu| = |\lambda| + m}} \sigma_{\nu - 1^m}, \quad (2.4)$$

Cependant il semble difficile en général d'expliciter davantage les termes de la somme, et encore plus d'exprimer les classes de Schubert de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ en fonction de ces restrictions. On se contentera de le faire dans le cas $m = 2$ au paragraphe 3.1.

On peut déterminer le noyau de \mathbf{i}^* : c'est l'idéal engendré par la classe σ_{2n+2-m}^+ , comme le montre un calcul simple à l'aide de la règle de Pieri dans la grassmannienne symplectique paire (cf § 1.3.1.1). En particulier, cela implique que $\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+ = 0$ pour toute partition $(n + 1 - m)$ -stricte λ telle que $\lambda_1 = 2n + 2 - m$. Pour terminer, remarquons la surjectivité de \mathbf{i}^* :

Proposition 2.10. *L'application de restriction*

$$\mathbf{i}^* : A^*(\text{IG}(m, 2n + 2)) \rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$$

est surjective.

Démonstration. $A^*(\text{IG}(m, 2n + 2))$ et $A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$ sont de dimensions respectives $2^m \binom{n+1}{m}$ et $2^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2n+2-m}{n+1-m}$ comme espaces vectoriels. De plus, le noyau de \mathbf{i} est l'idéal engendré par la classe σ_{2n+2-m}^+ , c'est-à-dire l'espace vectoriel engendré par les classes de la forme $\sigma_{2n+2-m, \lambda'}^+$, où $\lambda' \subset (m-1) \times (2n+1-m)$ est une partition $(n + 1 - m)$ -stricte. Par conséquent, le noyau de \mathbf{i} est de dimension $2^{m-1} \binom{n}{m-1}$, et on en déduit que \mathbf{i} est surjective. \square

Remarque 2.1. • Une conséquence de cette proposition est que les classes de Chern du fibré tautologique \mathcal{S}_{IG} sur $\text{IG}(m, 2n + 1)$ engendrent son anneau de Chow. En effet, \mathcal{S}_{IG} est la restriction du fibré tautologique $\mathcal{S}_{\text{IG}^+}$ sur $\text{IG}(m, 2n + 2)$, dont les classes de Chern engendrent l'anneau de Chow de $\text{IG}(m, 2n + 2)$, et on a vu que \mathbf{i}^* est surjective.

- La surjectivité de \mathbf{i}^* permet, en théorie, de calculer n'importe quel produit d'intersection $\sigma_\lambda \cup \sigma_\mu$ dans $\text{IG}(m, 2n + 1)$. En effet, pour cela, il suffit de trouver des classes α et β dans $A^*(\text{IG}(m, 2n + 2))$ telles que $\mathbf{i}^*\alpha = \sigma_\lambda$ et $\mathbf{i}^*\beta = \sigma_\mu$. On a alors

$$\sigma_\lambda \cup \sigma_\mu = \mathbf{i}^*(\alpha \cup \beta),$$

ce dernier produit d'intersection pouvant se calculer à l'aide de la règle de Pieri dans $\text{IG}(m, 2n + 2)$. Cette méthode nécessite de savoir “inverser” l'application de restriction, ce qui semble difficilement envisageable en général. Cependant, il est possible, en utilisant par exemple le package Maple QCALC de Buch (disponible à l'adresse <http://www.math.rutgers.edu/~asbuch/qcalc/>), de le faire sur des exemples. On remarque alors un phénomène surprenant, que nous avons pu constater empiriquement pour toutes les grassmanniennes symplectiques impaires jusqu'à $\text{IG}(5, 13)$ (soit 14 exemples) : pour toute classe de Schubert σ_λ de $\text{IG}(m, 2n + 1)$, l'unique classe

$$\alpha := \sum_{\nu | \nu_1 < 2n + 2 - m} c_\nu \sigma_\nu^+$$

telle que $\mathbf{i}^*\alpha = \sigma_\lambda$ vérifie $c_\nu \in \{0, 1, -1\}$. Ce phénomène semble a priori difficile à expliquer algébriquement. Il n'y a en effet aucune raison pour que l'inverse d'une matrice à coefficients 0 ou 1 soit une matrice à coefficients 0, 1 ou -1 . On peut donc supposer qu'il a une origine géométrique, que nous n'avons pas réussi à élucider.

2.3.2 Dans la grassmannienne usuelle

On considère le plongement naturel dans la grassmannienne usuelle :

$$\mathbf{j} : \text{IG}(m, 2n + 1) \hookrightarrow \text{G}(m, 2n + 1).$$

L'application induite en cohomologie

$$\mathbf{j}^* : A^*(\text{G}(m, 2n + 1)) \hookrightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$$

est surjective. En effet, la restriction à $\text{IG}(m, 2n + 1)$ du fibré tautologique \mathcal{S}_G de $\text{G}(m, 2n + 1)$ est le fibré tautologique \mathcal{S}_{IG} de $\text{IG}(m, 2n + 1)$, dont les classes de Chern engendrent la cohomologie de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ (cf remarque 2.1).

Montrons également que le noyau de \mathbf{j}^* est contenu dans le noyau de la multiplication par la classe de Schubert associé à la classe “en escalier” $\rho_{m-1} = (m - 1, m - 2, \dots, 1)$ dans $\text{G}(m, 2n + 1)$. En effet, $\mathbf{j}_*[\text{IG}(m, 2n + 1)] = c_{\text{top}}(\bigwedge^2(\mathcal{S}_G^*))$ car $\text{IG}(m, 2n + 1)$ est le lieu des zéros d'une section du fibré $\bigwedge^2(\mathcal{S}_G^*)$ dans $\text{G}(m, 2n + 1)$. Notons x_1, \dots, x_m les racines de Chern du fibré tautologique dual \mathcal{S}_G^* . On a alors

$$c_{\text{top}}(\bigwedge^2(\mathcal{S}_G^*)) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i + x_j).$$

De plus, d'après la formule de Giambelli 1.6, on a

$$\sigma_{\rho_{m-1}}^G = \det(\sigma_{1^{m+j-2i}}^G)_{1 \leq i, j \leq m}$$

Or la classe de Schubert $\sigma_{1^r}^G$ est la r -ième fonction symétrique élémentaire en les variables x_1, \dots, x_m , notée e_r . L'égalité entre polynômes suivante (cf [Mac79], I.3, exercice 7) :

$$\prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i + x_j) = \det (e_{m+j-2i})_{1 \leq i, j \leq m}$$

permet alors de montrer que $\mathbf{j}_* [\text{IG}(m, 2n+1)] = \sigma_{\rho_{m-1}}^G$. Par la formule de projection, pour toute classe α de $G(m, 2n+1)$, on en déduit :

$$\mathbf{j}_* \mathbf{j}^* \alpha = \mathbf{j}_* [\text{IG}(m, 2n+1)] \cup \alpha = \sigma_{\rho_{m-1}}^G \cup \alpha.$$

Donc $\mathbf{j}^* \alpha = 0$ implique que $\sigma_{\rho_{m-1}}^G \cup \alpha = 0$.

2.4 Dualité de Poincaré

On note (σ_γ) (respectivement (σ_γ^+)) la base des classes de Schubert dans la grassmannienne symplectique impaire $\text{IG}(m, 2n+1)$ (respectivement dans la grassmannienne symplectique paire $\text{IG}(m, 2n+2)$) et (σ_γ^\vee) (respectivement $(\sigma_\gamma^{+\vee})$) la base duale de Poincaré associée. Soit σ_α^+ une classe de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+2)$, où α est une partition $(n+1-m)$ -stricte telle que $\alpha_m \geq 1$ ou $\alpha_1 = 2n+2-m$. Alors du fait de l'identification de $\text{IG}(m, 2n+1)$ avec la variété de Schubert $X_{1^m}^+$ de $\text{IG}(m, 2n+2)$, il existe une unique classe de Schubert σ_β de $\text{IG}(m, 2n+1)$ telle que $\mathbf{i}_*(\sigma_\beta) = \sigma_\alpha^+$. On note alors $\alpha_- := \beta$. La dualité de Poincaré dans $\text{IG}(m, 2n+1)$ est liée à la restriction \mathbf{i}^* , comme l'illustre le résultat suivant :

Proposition 2.11. *Soit σ_α^+ une classe de cohomologie de $\text{IG}(m, 2n+2)$ telle que $\alpha_m \geq 1$ ou $\alpha_1 = 2n+2-m$. Alors $\mathbf{i}^*(\sigma_\alpha^+)^{\vee} = \sigma_{\alpha_-}^{\vee}$.*

Démonstration. Par définition de la dualité de Poincaré, si σ_α^+ et σ_β^+ sont deux classes de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+2)$ de même codimension, alors

$$\int_{\text{IG}(m, 2n+2)} \sigma_\alpha^+ \cup (\sigma_\beta^+)^{\vee} = \delta_{\alpha, \beta}$$

où δ est le symbole de Kronecker. Donc

$$\int_{\text{IG}(m, 2n+2)} (\mathbf{i}_* \sigma_{\alpha_-}) \cup (\sigma_\beta^+)^{\vee} = \int_{\text{IG}(m, 2n+2)} \mathbf{i}_*(\sigma_{\alpha_-} \cup \mathbf{i}^*(\sigma_\beta^+)^{\vee}) = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (2.5)$$

Exprimons maintenant $\mathbf{i}^*(\sigma_\beta^+)^{\vee}$ sur la base duale de la base des classes de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$:

$$\mathbf{i}^*(\sigma_\beta^+)^{\vee} = \sum_{\gamma} x_{\beta, \gamma} \sigma_\gamma^{\vee}.$$

On obtient :

$$\delta_{\alpha, \beta} = \sum_{\gamma} x_{\beta, \gamma} \int_{\text{IG}(m, 2n+2)} \mathbf{i}_*(\sigma_{\alpha_-} \cup \sigma_\gamma^{\vee}) = \sum_{\gamma} x_{\beta, \gamma} \delta_{\alpha_-, \gamma}.$$

Donc $x_{\beta, \alpha_-} = \delta_{\alpha, \beta}$, d'où le résultat. \square

Comme nous l'avons remarqué au paragraphe 2.3.1, il est difficile en général de calculer explicitement la restriction \mathbf{i}^* , donc il est également difficile de calculer explicitement le dual de Poincaré d'une classe de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$. Néanmoins, on peut faire les observations suivantes :

- Comme le produit $\sigma_{1^m}^+ \cup \sigma_\lambda^+$ possède en général plusieurs termes (cf exemple 2.1), la base duale de la base des classes de Schubert n'est pas la base des classes de Schubert, ce qui est très différent du cas des grassmanniennes usuelles, et même de celui des espaces homogènes en général ;
- Si σ_λ est une classe de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$, σ_λ^\vee est une somme de classes de Schubert de $\text{IG}(m, 2n+1)$ à coefficients tous égaux à 1 (c'est une conséquence des propositions 2.8 et 2.11) ;

Exemple 2.1. Calculons le dual de Poincaré de la classe $\sigma_{6,3,1,1}$ de $\text{IG}(4, 11)$. D'après la proposition 2.11, on a $\sigma_{6,3,1,1}^\vee = \mathbf{i}^*(\sigma_{7,4,2,2}^+)^\vee$. Or $(\sigma_{7,4,2,2}^+)^\vee = \sigma_{5,3,2,1}^+$ (cf § A.2) et par la règle de Pieri classique (cf théorème 1.12) :

$$\sigma_{1,1,1,1}^+ \cup \sigma_{5,3,2,1}^+ = \sigma_{7,5,2,1}^+ + \sigma_{7,4,3,1}^+ + \sigma_{6,5,2,2}^+ + \sigma_{6,4,3,2}^+,$$

d'où $\mathbf{i}^* \sigma_{5,3,2,1}^+ = \sigma_{6,4,1} + \sigma_{6,3,2} + \sigma_{5,4,1,1} + \sigma_{5,3,2,1}$ et finalement

$$\sigma_{6,3,1,1}^\vee = \sigma_{6,4,1} + \sigma_{6,3,2} + \sigma_{5,4,1,1} + \sigma_{5,3,2,1}.$$

2.5 Présentation classique

Dans cette partie, on donne une présentation de la cohomologie classique de $\text{IG}(m, 2n+1)$ en fonction des deux familles de classes spéciales. On rappelle que dans $\text{IG}(m, 2n)$, les deux familles de classes spéciales sont :

- les classes "lignes" $\sigma_p^+ = c_p(\mathcal{Q}_{\text{IG}^+})$ pour $1 \leq p \leq 2n - m$, où $\mathcal{Q}_{\text{IG}^+}$ est le fibré quotient sur $\text{IG}(m, 2n)$;
- les classes "colonnes" $\sigma_{1^r}^+ = c_r(\mathcal{S}_{\text{IG}^+}^*)$ pour $1 \leq r \leq m$, où $\mathcal{S}_{\text{IG}^+}^*$ est le fibré tautologique sur $\text{IG}(m, 2n)$.

Dans $\text{IG}(m, 2n+1)$, les classes spéciales sont, de manière analogue :

- les classes "lignes" $e_p := c_p(\mathcal{Q}_{\text{IG}})$ pour $1 \leq p \leq 2n + 1 - m$;
- les classes "colonnes" $c_r(\mathcal{S}_{\text{IG}}^*)$ pour $1 \leq r \leq m$.

Notons que lorsque $m < n$, on a $c_r(\mathcal{S}_{\text{IG}}^*) = \sigma_{1^r}$. De plus, d'après la formule de Pieri 1.12, on a

$$e_p = \begin{cases} \sigma_p & \text{si } p \leq 2(n+1-m) - 1 \text{ ou } p = 2n+1-m, \\ \sigma_p + \sigma_{2n+1-m, 0, \dots, 0, -1, \dots, -1} & \text{si } 2(n+1-m) \leq p \leq 2n-m. \end{cases}$$

2.5.1 En fonction des classes e_p

Proposition 2.12 (Présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$). *L'anneau de Chow $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$ est engendré par les classes $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n+1-m}$ et les relations sont*

$$\det(e_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r} = 0 \text{ pour } m+1 \leq r \leq 2n+2-m, \quad (\text{R1})$$

$$e_r^2 + 2 \sum_{i \geq 1} (-1)^i e_{r+i} e_{r-i} = 0 \text{ pour } n+2-m \leq r \leq n. \quad (\text{R2})$$

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que le fibré tautologique \mathcal{S}_{IG} sur $\text{IG}(m, 2n+1)$ est la restriction du fibré tautologique $\mathcal{S}_{\text{IG}^+}$ sur $\text{IG}(m, 2n+2)$. Par conséquent, la restriction du fibré quotient sur $\text{IG}(m, 2n+2)$ $\mathbf{i}^* \mathcal{Q}_{\text{IG}^+}$ est extension du fibré quotient \mathcal{Q}_{IG} de $\text{IG}(m, 2n+1)$ par le fibré trivial \mathcal{O}_{IG} , et on en déduit que $\mathbf{i}^* \mathcal{Q}_{\text{IG}^+}$ et \mathcal{Q}_{IG} ont les mêmes classes de Chern. Donc les classes $\mathbf{i}^* c_p(\mathcal{Q}_{\text{IG}^+}) = c_p(\mathcal{Q}_{\text{IG}}) = e_p$ pour $1 \leq p \leq 2n+2-m$ engendrent $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$. Mais \mathcal{Q}_{IG} étant de rang $2n+1-m$, $\mathbf{i}^* c_{2n+2-m}(\mathcal{Q}_{\text{IG}^+}) = 0$, donc l'anneau de cohomologie de $\text{IG}(m, 2n+1)$ est engendré par les classes spéciales $(e_p)_{1 \leq p \leq 2n+1-m}$. On suit ensuite la méthode utilisée dans [BKT09] et rappelée au paragraphe 1.3.2.1 pour obtenir des présentations de la cohomologie des grassmanniennes isotropes. Considérons l'anneau gradué $A := \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_{2n+1-m}]$, où $\deg a_i = i$. Soit $a_0 = 1$, et $a_i = 0$ si $i < 0$ ou $i > 2n+1-m$. On définit également $\delta_0 := 1$ et $\delta_r := \det(a_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r}$ pour $r > 0$. Pour tout $r \geq 0$, posons $b_r := a_r^2 + 2 \sum_{i \geq 1} (-1)^i a_{r+i} a_{r-i}$. Soit maintenant $\phi : A \rightarrow A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$ le morphisme d'anneaux gradués qui envoie a_i sur e_i pour tout $1 \leq i \leq 2n+1-m$. Comme les e_p engendrent $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$, ce morphisme est surjectif. Pour prouver que les relations (R1) et (R2) sont vérifiées, on doit vérifier que $\phi(\delta_r) = 0$ pour tout $r > m$ et $\phi(b_r) = 0$ pour tout $n+2-m \leq r \leq n$.

(R1) En développant le déterminant δ_r par rapport à la première colonne, on obtient

$$\delta_r = \sum_{i=1}^r (-1)^{i-1} a_i \delta_{r-i}.$$

D'où l'identité de séries formelles :

$$\left(\sum_{i=0}^{2n-1} a_i t^i \right) \left(\sum_{i \geq 0} (-1)^i \delta_i t^i \right) = 1. \quad (2.6)$$

Sur $\text{IG} := \text{IG}(m, 2n+1)$ on a la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{S}_{\text{IG}} \rightarrow \mathcal{O}_{\text{IG}}^{\oplus 2n+1} \rightarrow \mathcal{Q}_{\text{IG}} \rightarrow 0$$

d'où $c(\mathcal{S}_{\text{IG}})c(\mathcal{Q}_{\text{IG}}) = 1$, où $c(-)$ désigne la classe de Chern totale. Mais

$$c(\mathcal{Q}_{\text{IG}}) = \sum_{i=0}^{2n+1-m} e_i t^i,$$

donc (2.6) implique

$$c(\mathcal{S}_{\text{IG}}) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \phi(\delta_i) t^i.$$

Comme \mathcal{S}_{IG} est de rang m , on a $\phi(\delta_r) = 0$ pour tout $r > m$, d'où les relations (R1).

(R2) D'après la présentation de $\text{IG}(m, 2n + 2)$ énoncée au paragraphe 1.3.2.1, on sait que

$$(\sigma_n^+)^2 + 2 \sum_{i \geq 1} (-1)^i \sigma_{n+i}^+ \sigma_{n-i}^+ = 0$$

dans $\text{IG}(m, 2n + 2)$. L'image inverse par \mathbf{i} nous donne (R2).

De plus, on a vu au paragraphe 2.2.3 que le rang de $A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$ est $2^{m-1} \binom{n}{m} \frac{2n+2-m}{n+1-m}$.

Pour terminer la preuve de la proposition, on applique le lemme 1.15 énoncé au paragraphe 1.3.2.1 à

$$H = A^*(\text{IG}(m, 2n + 1)), \quad I = (\delta_{m+1}, \dots, \delta_{2n+2-m}, b_{n+2-m}, \dots, b_n),$$

et A, ϕ comme ci-dessus. La condition 1 du lemme 1.15 est une conséquence immédiate du calcul du rang de $A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$. Pour la condition 2, il suffit de prouver que A/I est un quotient de $A/(\delta_{m+1}, \dots, \delta_{2n+1})$. En effet, d'après le lemme 1.16, ce dernier module est un \mathbb{Z} -module libre de rang fini. Donc il reste à prouver que $\delta_{2n+3-m}, \dots, \delta_{2n+1}$ appartiennent à l'idéal I . Mais on a les identités de séries formelles suivantes :

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{2n+1-m} a_i t^i \right) \left(\sum_{i=0}^{2n+1-m} (-1)^i a_i t^i \right) &= \sum_{i=0}^{2n+1-m} (-1)^i b_i t^{2i}, \\ \left(\sum_{i=0}^{2n+1-m} (-1)^i a_i t^i \right) \left(\sum_{i \geq 0} \delta_i t^i \right) &= 1. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{i=0}^{2n+1-m} a_i t^i = \left(\sum_{i=0}^{2n+1-m} (-1)^i b_i t^{2i} \right) \left(\sum_{i \geq 0} \delta_i t^i \right).$$

Modulo l'idéal I , cela donne :

$$\sum_{i=0}^{2n+1-m} a_i t^i \equiv \left(\sum_{i=0}^{n+1-m} (-1)^i b_i t^{2i} + \sum_{i=n+1}^{2n+1-m} (-1)^i b_i t^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^m \delta_i t^i + \sum_{i \geq 2n+3-m} \delta_i t^i \right)$$

En degrés $2n + 3 - m$ à $2n + 1$, on obtient

$$0 \equiv \delta_{2n+3-m} \equiv \dots \equiv \delta_{2n+1},$$

ce qui termine la preuve de la proposition. \square

2.5.2 En fonction des classes σ_{1^r}

Tout d'abord, on utilise la présentation de la cohomologie de $\text{IG}(m, 2n + 2)$ en termes des classes $\sigma_{1^r}^+$ ($1 \leq r \leq m$) prouvée au paragraphe 1.3.2.2 et on en déduit une présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n + 1))$ en fonction des classes σ_{1^r} ($1 \leq r \leq m$) :

Proposition 2.13 (Une autre présentation de $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$). *L'anneau $A^*(\text{IG}(m, 2n+1))$ est engendré par les classes $\sigma_{1^r}^+$ ($1 \leq r \leq m$) et les relations sont, si $m = 2l$ est pair :*

$$d_{2r} = 0 \text{ pour } n+1-l \leq r \leq n, \quad (\text{R1}')$$

$$f_{2r} = 0 \text{ pour } n+2-m \leq r \leq n+1-l \quad (\text{R2}')$$

et si $m = 2l+1$ est impair :

$$d_{2r} = 0 \text{ pour } n+2-l \leq r \leq n \text{ et } d_{2n+2-m} = 0, \quad (\text{R1}')$$

$$f_{2r} = 0 \text{ pour } n+2-m \leq r \leq n+1-l, \quad (\text{R2}')$$

où $d_p := \det(\sigma_{1^{1+j-i}})_{1 \leq i, j \leq p}$ et $f_{2r} := c_{2r}(\mathcal{Q}_{\text{IG}}^*/\mathcal{S}_{\text{IG}})$ est donné par la formule suivante :

$$f_{2r} = \sum_{l=0}^r (-1)^l \det(\sigma_{1^{2(1+j-i)}})_{1 \leq i, j \leq l} d_{2(r-l)}. \quad (2.7)$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que les $\sigma_{1^r}^+$ ($1 \leq r \leq m$) engendrent l'anneau de cohomologie de $\text{IG}(m, 2n+1)$ car ce sont les images inverses des classes de Chern du fibré tautologique dual de $\text{G}(m, 2n+1)$ par l'application de restriction surjective \mathbf{j} . Notons ensuite que les relations (R1') et (R2') sont les restrictions de relations analogues vraies sur $\text{IG}(m, 2n+2)$ (par la proposition 1.17) et sur $\text{G}(m, 2n+1)$. Enfin, pour montrer que ces générateurs et ces relations engendrent l'anneau de cohomologie de $\text{IG}(m, 2n+1)$, on utilise la même méthode que dans la preuve de la proposition 2.12. \square

2.6 Variété des droites

Lorsque $m = 2$, nous verrons que la cohomologie quantique de $\text{IG}(m, 2n+1)$ est entièrement déterminée par le calcul des invariants de degré 1, et sous réserve que la conjecture 5.1 soit vraie, on verra au chapitre 5 que c'est encore le cas pour $m > 2$. En raison de l'énumérativité de certains de ces invariants, démontrée au paragraphe 2.7.2, ce calcul peut se ramener à un calcul d'intersection sur la variété des droites Y_1 de $\text{IG}(m, 2n+1)$. Dans ce paragraphe, on va donc présenter quelques propriétés générales de cette variété, et au paragraphe 3.2.3, on étudiera sa cohomologie dans le cas $m = 2$.

2.6.1 Orbites sous l'action de Sp_{2n+1}

Les points de la variété des droites Y_1 sont les droites

$$\mathcal{D}(V, W) = \{\Sigma \in \text{IG}(m, 2n+1) \mid V \subset \Sigma \subset W \subset V^\perp\},$$

où $\dim V = m-1$ et $\dim W = m+1$. Remarquons que V est nécessairement isotrope et que $\omega|_W$ est de rang 0 ou 2.

La variété Y_1 est munie d'une action du groupe symplectique impair Sp_{2n+1} qui en fait un espace quasi-homogène. Elle possède 5 orbites pour cette action :

1. une unique orbite fermée $\mathcal{O}_1 = \{\mathcal{D}(V, W) \mid W \text{ isotrope, } V \supset K\}$;
2. $\mathcal{O}_2 = \{\mathcal{D}(V, W) \mid W \text{ non isotrope, } V \supset K\}$;

3. $\mathcal{O}_3 = \{\mathcal{D}(V, W) \mid W \supset K, V \not\subset K\}$;
4. $\mathcal{O}_4 = \{\mathcal{D}(V, W) \mid W \not\subset K, W \text{ isotrope}\}$;
5. l'orbite ouverte $\mathcal{O}_5 = \{\mathcal{D}(V, W) \mid W \not\subset K, W \text{ non isotrope}\}$

En effet, on remarque que chacun de ces ensembles est stable par Sp_{2n+1} . Il reste donc à vérifier que l'action de Sp_{2n+1} sur chacun d'eux est transitive.

En ce qui concerne l'orbite fermée \mathcal{O}_1 , remarquons qu'elle est isomorphe à la variété de drapeaux $\mathrm{IF}(m-2, m; \mathbb{C}^{2n+1}/K)$, qui possède une action transitive du groupe symplectique pair $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n+1}/K) = \mathrm{Sp}_{2n}$.

Soient maintenant deux éléments $\mathcal{D}(V_1, W_1)$ et $\mathcal{D}(V_2, W_2)$ de \mathcal{O}_2 . Considérons la projection sur la première coordonnée :

$$\pi_1 : \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathrm{IG}(m-2, \mathbb{C}^{2n+1}/K).$$

Comme l'action de $\mathrm{Sp}(\mathbb{C}^{2n+1}/K)$ sur $\mathrm{IG}(m-2, \mathbb{C}^{2n+1}/K)$ est transitive, on peut supposer que $V_1 = V_2 =: V$, et il suffit donc de montrer qu'on peut envoyer $\mathcal{D}(V, W_1)$ sur $\mathcal{D}(V, W_2)$. Soit (e_1, \dots, e_{2n+1}) une base symplectique de \mathbb{C}^{2n+1} telle que $V = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_m)$ et $W_1 = V \oplus \mathrm{Vect}(e_{m+1}, e_{2n+2-m})$. On a deux cas pour W_2 :

1. si $W_1 \cap W_2 = V$, on écrit $W_2 = V \oplus \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$, avec

$$f_1, f_2 \in \mathrm{Vect}(e_{m+1}, \dots, e_{2n+2-m})$$

et $\omega(f_1, f_2) = 1$. Quitte à changer la base symplectique (on peut le faire sans changer V et W_1), on peut supposer que

$$f_1, f_2 \in U := \mathrm{Vect}(e_{m+1}, e_{m+2}, e_{2n+1-m}, e_{2n+2-m}).$$

On voit alors qu'il existe un élément de $g \in \mathrm{Sp}_{2n+1}$ qui envoie W_1 sur W_2 et laisse stables les e_i qui ne sont pas dans U , et donc qui envoie V sur V , d'où $g(\mathcal{D}(V, W_1)) = \mathcal{D}(V, W_2)$.

2. si $W_1' \cap W_2' = L$, où L est une droite, comme auparavant, on peut supposer que $L = \mathbb{C}e_{m+1}$ et $W_2' = \mathrm{Vect}(e_{m+1}, e_{2n+2-m} + e_{m+2})$; si on note à nouveau $U = \mathrm{Vect}(e_{m+1}, e_{m+2}, e_{2n+1-m}, e_{2n+2-m})$, on peut à nouveau trouver un élément de $g \in \mathrm{Sp}_{2n+1}$ qui envoie W_1 sur W_2 et laisse stable V .

Pour les orbites \mathcal{O}_3 et \mathcal{O}_5 , on procède de manière analogue au cas de l'orbite \mathcal{O}_2 . Enfin, l'orbite \mathcal{O}_4 est isomorphe à l'orbite ouverte de la variété de drapeaux $\mathrm{IF}(m-1, m+1; \mathbb{C}^{2n+1})$, sur laquelle l'action de Sp_{2n+1} est transitive.

Remarquons pour terminer que la dimension de Y_1 est donnée par :

$$\begin{aligned} \dim Y_1 &= \dim \mathcal{O}_5 = \dim \mathrm{IG}(m-1, 2n+1) + \dim \mathrm{G}(2, V^\perp/V) \\ &= 2mn - \frac{3}{2}m^2 + 2n + \frac{1}{2}m - 1. \end{aligned}$$

De plus, les codimensions des autres orbites sont :

1. $\mathrm{codim} \mathcal{O}_1 = 2(n-m) + 3$;
2. $\mathrm{codim} \mathcal{O}_2 = 2(n-m) + 2$;
3. $\mathrm{codim} \mathcal{O}_3 = 2(n-m) + 1$;
4. $\mathrm{codim} \mathcal{O}_4 = 1$.

La figure 2.5 décrit l'incidence des orbites.

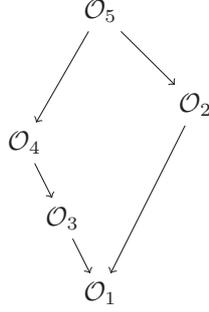


FIGURE 2.5 – Incidence des orbites de la variété des droites

2.6.2 Description géométrique

On considère l'application

$$\pi : \begin{array}{ccc} Y_1 & \rightarrow & \mathbb{G}(m+1, 2n+1) \\ \mathcal{D}(V, W) & \mapsto & W \end{array}$$

La fibre $\pi^{-1}(W)$ est :

1. vide si $\text{rg}(\omega|_W) > 2$;
2. réduite au point $\mathcal{D}(W \cap W^\perp, W)$ si $\text{rg}(\omega|_W) = 2$ (notons que dans ce cas, $W \cap W^\perp$ est bien de dimension $m-1$);
3. l'ensemble

$$\pi^{-1}(W) = \{\mathcal{D}(V, W) \mid V \subset W\} \cong \mathbb{G}(m-1, m+1).$$

si W est isotrope.

En termes d'orbites, on a :

- $\pi^{-1}(\mathbb{G}(m+1, 2n+1) \setminus \text{IG}(m+1, 2n+1)) = \mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_5$ et π est bijective sur son image;
- $\pi : \overline{\mathcal{O}_4} = \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4 \rightarrow \text{IG}(m+1, 2n+1)$ est une fibration en grassmanniennes $\mathbb{G}(m-1, m+1)$;
- $\mathcal{O}_2 \cup \mathcal{O}_5$ est ouvert; $D := \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$ est un diviseur.

Lorsque $m=2$, π est surjective et il découle de cette description que :

Proposition 2.14. *La variété Y_1 des droites de $\text{IG}(2, 2n+1)$ est isomorphe à l'éclatement de $\text{IG}(3, 2n+1)$ dans $\mathbb{G}(3, 2n+1)$.*

Démonstration. Pour démontrer la proposition, on utilise un résultat de Moishezon (cf [Moi66]) qui prouve que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre birationnel de variétés lisses, si le diviseur exceptionnel E de f contient une seule composante et si le lieu fondamental S de f est lisse, alors f est un éclatement. Dans notre cas, ces hypothèses sont clairement vérifiées, d'où la proposition. \square

Le cas $m=2$ sera étudié plus en détail au paragraphe 3.2.3.

2.7 Applications stables de degré 1

Dans cette partie, on met en place les résultats qui nous permettront de calculer les invariants de Gromov-Witten de degré 1 aux paragraphes 3.2.1, 5.2 et 5.3.1. Plus précisément, on étudie les espaces de modules des courbes de degré 1 (cf § 2.7.1) et on en déduit un résultat d'énumérativité pour certains invariants (cf § 2.7.2).

2.7.1 Espaces de modules

Comme au chapitre 1, si X est une variété projective lisse, on note $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ l'espace de modules des applications stables n -pointées de genre g sur X et de degré β et $(ev_i)_{1 \leq i \leq n}$ les morphismes d'évaluation. Dans cette partie, on ne supposera plus que X est convexe. L'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, \beta)$ reste néanmoins un champ de Deligne-Mumford. Il peut posséder une obstruction et n'est pas forcément de la dimension attendue. Cependant, il possède une *théorie de l'obstruction parfaite* et un *cycle fondamental virtuel* (cf [BF97] et [LT98]), lequel permet de construire des invariants de Gromov-Witten possédant exactement les mêmes propriétés que dans le cas convexe.

Dans cette section, on prouve la

- Proposition 2.15.** 1. Les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\text{IG}, 1)$ sont lisses de la dimension attendue, respectivement $m(2n+1-m) - \frac{m(m-1)}{2} + (2n+2-m) - 1$ et $m(2n+1-m) - \frac{m(m-1)}{2} + (2n+2-m)$.
2. Le lieu $\mathcal{M}_{0,r}(\text{IG}, 1)$ dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(\text{IG}, 1)$ des applications stables de source irréductible est lisse de dimension $m(2n+1-m) - \frac{m(m-1)}{2} + (2n+2-m) + r - 3$.

D'après la théorie de l'obstruction des espaces de modules d'applications stables, pour prouver que $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$, $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\text{IG}, 1)$ et $\mathcal{M}_{0,r}(\text{IG}, 1)$ sont lisses, il suffit de montrer que pour toute application stable f dans ces espaces, on a $H^1(\mathbb{P}^1, f^* \text{TIG}) = 0$, où TIG désigne le fibré tangent de IG. On pourra se référer à [Gra01] pour plus de détails.

2.7.1.1 $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$

Soit $f : (C, p_1, p_2) \rightarrow \text{IG}$ une application stable rationnelle de degré 1 avec 2 points marqués. Il y a deux possibilités pour C :

- soit C est irréductible ;
- soit $C = C_0 \cup C_1$, où C_0 et C_1 sont deux courbes rationnelles (lisses) se coupant en un point q , p_1 et p_2 sont sur C_0 , f contracte C_0 et est de degré 1 sur C_1 .

Cela nous donne cinq cas pour l'application f :

1. C est irréductible et $f(C) \not\subset \mathbb{O}$;
2. C est irréductible et $f(C) \subset \mathbb{O}$;
3. C est réductible, $f(C) \not\subset \mathbb{O}$ et $f(p_1) = f(p_2) \notin \mathbb{O}$;

4. C est réductible, $f(C) \not\subset \mathbb{O}$ et $f(p_1) = f(p_2) \in \mathbb{O}$;
5. C est réductible, $f(C) \subset \mathbb{O}$,

où \mathbb{O} est l'orbite fermée de IG.

Obstruction dans les cas 1 et 3. Comme dans [Gra01], on utilise l'action de Sp_{2n+1} sur IG. Cette action est transitive sur $\mathrm{IG} \setminus \mathbb{O}$, donc le fibré tangent TIG est globalement engendré en dehors de \mathbb{O} . Si l'application f est telle qu'aucune composante de C n'est entièrement envoyée dans \mathbb{O} , ce qui est vérifié dans les cas 1 et 3, alors $f^*\mathrm{TIG}$ est génériquement engendré par ses sections globales, donc $H^1(C, f^*\mathrm{TIG}) = 0$, et par conséquent il n'y a pas d'obstruction.

Obstruction dans le cas 2. On utilise la suite exacte tangente de l'orbite fermée

$$0 \rightarrow \mathrm{T}\mathbb{O} \rightarrow \mathrm{TIG}|_{\mathbb{O}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathbb{O}} \rightarrow 0, \quad (2.8)$$

où l'on note $\mathcal{N}_{\mathbb{O}}$ le fibré normal de l'orbite fermée. En prenant l'image inverse par f , on en déduit la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(C, f^*\mathrm{T}\mathbb{O}) \rightarrow H^0(C, f^*\mathrm{TIG}) \rightarrow H^0(C, f^*\mathcal{N}_{\mathbb{O}}) \rightarrow H^1(C, f^*\mathrm{T}\mathbb{O}) \\ \rightarrow H^1(C, f^*\mathrm{TIG}) \rightarrow H^1(C, f^*\mathcal{N}_{\mathbb{O}}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comme \mathbb{O} est homogène sous l'action de Sp_{2n+1} , $\mathrm{T}\mathbb{O}$ est engendré par des sections globales, donc $H^1(C, f^*\mathrm{T}\mathbb{O}) = 0$. Pour calculer l'obstruction, il suffit donc de connaître $f^*\mathcal{N}_{\mathbb{O}}$.

Lemme 2.16. $\mathcal{N}_{\mathbb{O}} = \mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}$, où l'on note \mathcal{S} la restriction à l'orbite fermée du fibré tautologique de IG.

Démonstration. Commençons par décrire le fibré tangent de IG au-dessus de \mathbb{O} comme sous-fibré de la grassmannienne $G(m, 2n+1)$:

$$0 \rightarrow \mathrm{TIG}|_{\mathbb{O}} \rightarrow \mathrm{TG}|_{\mathbb{O}} \rightarrow \bigwedge^2 \mathcal{S}^* \rightarrow 0. \quad (2.10)$$

Or $\mathrm{TG}|_{\mathbb{O}} = \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{Q}$ et $\mathcal{S}^* \otimes (\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathrm{TIG}|_{\mathbb{O}}$. Pour obtenir la deuxième inclusion, il suffit de voir que pour tout $\Sigma \in \mathrm{IG}$, toute application linéaire $\Sigma \rightarrow \Sigma^\perp/\Sigma$ est envoyée à zéro par la deuxième flèche de la suite exacte (2.10). On a donc le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & & & 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
& & E & & & & 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{TIG}|_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & \mathrm{TG}|_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & \wedge^2 \mathcal{S}^* \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \wr & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{S}^* \otimes (\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{S}^* \otimes (\mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
& & 0 & & & & F \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

Le lemme du serpent donne alors un isomorphisme entre E et F . De la même manière, pour le fibré tangent de \mathbb{O} , qui est isomorphe à $\mathrm{IG}(m-1, 2n)$ par l'application $\Sigma \mapsto \Sigma/K$, on a

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & & & 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
& & E' & & & & 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{T}\mathbb{O} & \longrightarrow & \mathrm{TG}(m-1, 2n) & \longrightarrow & \wedge^2 (\mathcal{S}/K)^* \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \wr & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & (\mathcal{S}/K)^* \otimes (\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) & \longrightarrow & (\mathcal{S}/K)^* \otimes \mathcal{Q} & \longrightarrow & (\mathcal{S}/K)^* \otimes (\mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp) \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & & & \uparrow \\
& & 0 & & & & E' \\
& & & & & & \uparrow \\
& & & & & & 0
\end{array}$$

Montrons qu'on a en fait $E \cong E'$. Pour cela, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{S}/K)^* & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{S}^* \otimes (\mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp) & \longrightarrow & \bigwedge^2 \mathcal{S}^* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & (\mathcal{S}/K)^* \otimes (\mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp) & \longrightarrow & \bigwedge^2 (\mathcal{S}/K)^* \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & 0 & & 0
\end{array}$$

L'isomorphisme $\mathbb{C}^{2n+1}/\mathcal{S}^\perp \cong (\mathcal{S}/K)^*$ est donné par la forme symplectique induite sur \mathbb{C}^{2n+1}/K . Finalement, l'isomorphisme $\mathcal{N}_\mathbb{O} \cong \mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}$ est donné par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & E & \xrightarrow{\sim} & E & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & T\mathbb{O} & \longrightarrow & TIG|_{\mathbb{O}} & \longrightarrow & \mathcal{N}_\mathbb{O} \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & (\mathcal{S}/K)^* \otimes (\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) & \xrightarrow{i} & \mathcal{S}^* \otimes (\mathcal{S}^\perp/\mathcal{S}) & \longrightarrow & \mathcal{S}^\perp/\mathcal{S} \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

□

On peut maintenant calculer $f^*\mathcal{N}_\mathbb{O}$. Une droite \mathcal{D} de l'orbite fermée est de la forme

$$\mathcal{D} := \mathcal{D}(V, W) = \{\Sigma \in \text{IG} \mid V \subset \Sigma \subset W \subset V^\perp\},$$

où $V \supset K$ est de dimension $m-1$ et W est de dimension $m+1$. De plus, on a deux possibilités pour W , selon qu'il est ou non isotrope.

Dans le premier cas, $W \subset \Sigma^\perp$, d'où la suite exacte de fibrés vectoriels :

$$0 \rightarrow W/\Sigma \rightarrow \Sigma^\perp/\Sigma \rightarrow \Sigma^\perp/W \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Mais le fibré W/Σ sur \mathcal{D} est isomorphe à $\mathcal{O}_\mathcal{D}(1)$. De plus, on vérifie facilement qu'il existe W' de dimension m et U de dimension $2n-2m$ tels que

- $\mathbb{C}^{2n+1} = W \oplus W' \oplus U$;
- $U \perp W \oplus W'$
- $\omega|_{W \oplus W'}$ est de rang $2m$.

Comme $\Sigma^\perp \supset U$, on trouve $\mathcal{S}^\perp/W \cong \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(-1) \oplus \mathcal{O}^{\oplus(2n-2m)}$, donc la suite exacte (2.11) devient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(1) \rightarrow \mathcal{S}^\perp/\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}^{\oplus(2n-2m)} \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte est scindée. Par conséquent

$$f^*\mathcal{N}_0 \cong \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{D}}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathcal{D}}^{\oplus(2n-2m)},$$

d'où $H^1(C, f^*\mathcal{N}_0) = H^1(C, f^*\text{TIG}) = 0$.

Dans le second cas, W peut s'écrire $W = W_2 \oplus W'$, avec W_2 de dimension 2 tel que $\omega|_{W_2}$ soit non dégénérée et W' de dimension $m-1$ isotrope. De plus il existe W'' de dimension $m-2$ et U de dimension $2n+2-2m$ tels que

- $\mathbb{C}^{2n+1} = W \oplus W'' \oplus U$;
- $U \perp W \oplus W''$
- $\omega|_{W \oplus W''}$ est de rang $2m-2$.

On en déduit que pour tout $\Sigma \in \mathcal{D}$, on a $\Sigma^\perp = \Sigma \oplus U$, et $\mathcal{N}_0|_{\mathcal{D}}$ est trivial.

Obstruction dans le cas 5. L'application $f^*\text{TIG} \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_1}$ est surjective. Son noyau correspond aux sections de $f^*\text{TIG}|_{C_0}$ qui s'annulent en q , ce qui signifie, comme C_0 est contractée par f , qu'on a la suite exacte suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{C_0}^{\oplus(\dim \text{IG})} \otimes \mathcal{I}_q \rightarrow f^*\text{TIG} \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_1} \rightarrow 0,$$

d'où la suite exacte longue de cohomologie

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0\left(C_0, \mathcal{O}_{C_0}^{\oplus(\dim \text{IG})} \otimes \mathcal{I}_q\right) &\rightarrow H^0(C, f^*\text{TIG}) \rightarrow H^0(C_1, f^*\text{TIG}|_{C_1}) \rightarrow \\ \rightarrow H^1\left(C_0, \mathcal{O}_{C_0}^{\oplus(\dim \text{IG})} \otimes \mathcal{I}_q\right) &\rightarrow H^1(C, f^*\text{TIG}) \rightarrow H^1(C_1, f^*\text{TIG}|_{C_1}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{I}_q \cong \mathcal{O}_{C_0}(-1)$, on a $H^1\left(C_0, \mathcal{O}_{C_0}^{\oplus(\dim \text{IG})} \otimes \mathcal{I}_q\right) = 0$. De plus, la preuve du cas 2 avait montré que $H^1(C_1, f^*\text{TIG}|_{C_1}) = 0$, donc $H^1(C, f^*\text{TIG}) = 0$.

Obstruction dans le cas 4. La preuve est analogue à celle du cas 5. Ceci termine la preuve de la première partie de la proposition 2.15 pour $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$. \square

2.7.1.2 $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\text{IG}, 1)$

Soit $f : (C, p_1, p_2, p_3) \rightarrow \text{IG}$ un élément de $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\text{IG}, 1)$. On a quatre possibilités pour C :

- C est irréductible ;

- $C = C_0 \cup C_1$, où C_0 et C_1 sont deux courbes rationnelles se coupant en un point q , p_1 et p_2 sont sur C_0 , p_3 est sur C_1 , f contracte C_0 et est de degré 1 sur C_1 ;
- $C = C_0 \cup C_1$, où C_0 et C_1 sont deux courbes rationnelles se coupant en un point q , p_1 , p_2 et p_3 sont sur C_0 , f contracte C_0 et est de degré 1 sur C_1 ;
- $C = C'_0 \cup C_0 \cup C_1$, où C'_0 et C_0 se coupent en q' , C_0 et C_1 se coupent en q , p_1 et p_2 sont sur C_0 , p_3 est sur C_0 , f contracte C_0 et C'_0 et est de degré 1 sur C_1 .

Dans les trois premières situations, des arguments semblables à ceux utilisés pour $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$ montrent qu'il n'y a pas d'obstruction. Reste à calculer l'obstruction dans la dernière situation, ce qui nous donne trois cas :

1. $f(C) \not\subset \mathbb{O}$, $f(q) \notin \mathbb{O}$;
2. $f(C) \not\subset \mathbb{O}$, $f(q) \in \mathbb{O}$;
3. $f(C) \subset \mathbb{O}$.

Obstruction dans le cas 1. Comme $f^*\text{TIG}$ est engendré par ses sections globales, on obtient $H^1(C, f^*\text{TIG}) = 0$, donc il n'y a pas d'obstruction.

Obstruction dans le cas 2. L'application $f^*\text{TIG} \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_1}$ est surjective de noyau $f^*\text{TIG}|_{C_0 \cup C'_0} \otimes \mathcal{I}_q$. De plus, l'application $f^*\text{TIG}|_{C_0 \cup C'_0} \otimes \mathcal{I}_q \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_0} \otimes \mathcal{I}_q$ est surjective de noyau $f^*\text{TIG}|_{C'_0} \otimes \mathcal{I}_{q'}$. On a donc deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_0 \cup C'_0} \otimes \mathcal{I}_q \rightarrow f^*\text{TIG} \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_1} \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C'_0} \otimes \mathcal{I}_{q'} \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_0 \cup C'_0} \otimes \mathcal{I}_q \rightarrow f^*\text{TIG}|_{C_0} \otimes \mathcal{I}_q \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dans la seconde suite exacte, on a

$$f^*\text{TIG}|_{C_0} = \mathcal{O}_{C_0}^{\oplus(2n-2)},$$

donc

$$f^*\text{TIG}|_{C'_0} \otimes \mathcal{I}_{q'} = \mathcal{O}_{C'_0}(-1)^{\oplus(2n-2)},$$

d'où

$$H^1(C_0 \cup C'_0, (f^*\text{TIG})|_{C_0 \cup C'_0} \otimes \mathcal{I}_q) = 0.$$

Mais $H^1(C_1, f^*\text{TIG}|_{C_1}) = 0$ d'après la preuve du cas où C est irréductible, donc la première suite exacte nous donne

$$H^1(C, f^*\text{TIG}) = 0.$$

Obstruction dans le cas 3. La preuve est analogue à celle du cas 5. Ceci termine la preuve de la première partie de la proposition 2.15. \square

2.7.1.3 $\mathcal{M}_{0,r}(\text{IG}, 1)$

Soit $f : (C, p_1, \dots, p_r) \rightarrow \text{IG}$ un élément de $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(\text{IG}, 1)$. Comme C est supposée irréductible, on a seulement deux possibilités :

1. $f(C) \not\subset \mathbb{O}$;
2. $f(C) \subset \mathbb{O}$.

Dans le premier cas, on utilise à nouveau le fait que TIG est globalement engendré en dehors de l'orbite fermée, tandis que dans le second cas, le calcul du fibré normal au lemme 2.16 permet de conclure. \square

2.7.2 Enumérativité des invariants en degré 1

Rappelons que l'invariant de Gromov-Witten $I_\beta(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ sur la variété projective X (où $\beta \in H_2(X, \mathbb{Z})$ est effectif et $\gamma_1, \dots, \gamma_r \in H^*(X)$) est :

$$\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]^{\text{vir}}} ev_1^* \gamma_1 \dots ev_r^* \gamma_r,$$

où $[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ est le cycle fondamental virtuel dans $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)$. On dit que cet invariant est *énumératif* s'il est égal au nombre de courbes irréductibles de degré β dans X passant par des cycles génériques $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ représentant les classes de cohomologie $\gamma_1, \dots, \gamma_r$. Plusieurs raisons peuvent empêcher un invariant d'être énumératif :

1. le cycle fondamental virtuel $[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta)]^{\text{vir}}$ peut être différent du cycle fondamental ;
2. il peut être impossible de trouver des cycles représentant les γ_i qui soient en position générale dans X (dans ce cas on peut par exemple avoir un invariant strictement négatif tandis que le nombre de courbes sera nul) ;
3. les applications stables de $\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(X, \beta) \setminus \mathcal{M}_{0,r}(X, \beta)$ peuvent contribuer à l'invariant (c'est-à-dire qu'il peut y avoir une contribution des applications stables de source réductible) ;
4. une courbe peut couper un des cycles Γ_i en plusieurs points, auquel cas plusieurs applications stables lui correspondent ;
5. une courbe peut couper un des cycles Γ_i avec multiplicité.

Dans le cas d'un espace homogène, il y a toujours énumérativité pour les invariants associés à des classes effectives. En effet, les espaces homogènes sont convexes donc on n'est pas dans le cas 1, le lemme de Kleiman (lemme 2.17) assure qu'on peut mettre les cycles en position générale, rendant 2 impossible, et permet également de montrer que les problèmes 3, 4 et 5 n'ont pas lieu pour des cycles généraux. Pour un espace quasi-homogène comme $\text{IG}(m, 2n+1)$, la situation est plus complexe. L'étude de l'espace de modules a été effectuée au paragraphe précédent ; dans cette section, on donne la preuve d'un analogue du lemme de Kleiman pour les espaces quasi-homogènes, dû à Graber (cf [Gra01]). Enonçons tout d'abord le lemme de Kleiman :

Lemme 2.17 ([Kle74]). *Soit G un groupe algébrique connexe, X une variété algébrique irréductible sur \mathbb{C} munie d'une action transitive de G . Soit $i : Y \hookrightarrow X$ le plongement d'une sous-variété irréductible et $f : Z \rightarrow X$ un morphisme, où Z est un schéma algébrique irréductible. Pour g dans G , notons gY le translaté de Y par g .*

(i) *Il existe un ouvert dense U_1 de G tel que pour tout g dans U_1 , soit le schéma $f^{-1}(gY)$ est vide, soit il est équidimensionnel, sa dimension étant donnée par la formule*

$$\dim(f^{-1}(gY)) = \dim(Y) + \dim(Z) - \dim(X).$$

(ii) *Supposons que Y et Z soient lisses. Alors il existe un ouvert dense U_2 de G tel que pour tout g dans U_2 , le schéma $f^{-1}(gY)$ soit lisse.*

On va maintenant prouver une version du lemme précédent valable pour les espaces quasi-homogènes. Remarquons que l'hypothèse du nombre fini d'orbites sous l'action de G est cruciale.

Lemme 2.18 ([Gra01]). *Soit X une variété algébrique complexe munie d'une action d'un groupe algébrique connexe G avec un nombre fini d'orbites, Z un schéma irréductible et $f : Z \rightarrow X$ un morphisme. Soit Y une sous-variété de X qui coupe proprement la stratification par les orbites. Alors il existe un ouvert dense U de G tel que $\forall g \in U$, $f^{-1}(gY)$ est soit vide, soit de dimension pure inférieure ou égale à $\dim Y + \dim Z - \dim X$. De plus, si X , Y et Z sont lisses, l'inégalité devient une égalité, et si l'on note Y_{reg} le sous-ensemble de Y le long duquel l'intersection avec la stratification est transverse, alors l'ouvert (éventuellement vide) $f^{-1}(gY_{\text{reg}})$ est lisse.*

Démonstration. Soit O une G -orbite. On applique le lemme de Kleiman au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & f^{-1}(O) \\ & & \downarrow f \\ Y \cap O & \xrightarrow{i} & O \end{array}$$

On en déduit qu'il existe un ouvert non vide $U_O \subset G$ tel que pour tout $g \in U_O$, $f^{-1}(gY \cap O)$ est soit vide, soit de dimension pure $\dim f^{-1}(O) + \dim(Y \cap O) - \dim O$. Mais $\text{codim}_O(Y \cap O) = \text{codim}_X Y$ par l'hypothèse de transversalité, donc si $f^{-1}(gY \cap O)$ est non vide, alors

$$\dim f^{-1}(gY \cap O) = \dim f^{-1}(O) - \text{codim}_X Y \leq \dim Y + \dim Z - \dim X.$$

Donc l'intersection finie $U := \bigcap U_O$ a les propriétés souhaitées.

Supposons maintenant que X , Y et Z soient lisses. Alors l'inégalité

$$\dim f^{-1}(gY \cap O) = \dim f^{-1}(O) - \text{codim}_X Y \leq \dim Y + \dim Z - \dim X$$

est une égalité lorsque O est l'orbite ouverte, donc $\dim f^{-1}(gY) = \dim Y + \dim Z - \dim X$. Le lemme de Kleiman appliqué au diagramme précédent montre

que pour $g \in U'_O$, où U'_O est un ouvert non vide de G , $f^{-1}(gY \cap O)$ est lisse, d'où

$$d_f(\mathbb{T}_z Z) + \mathbb{T}_{f(z)}(Y \cap O) = \mathbb{T}_{f(z)} O$$

pour tout z tel que $f(z) \in O$. De plus, sur Y_{reg} , l'intersection avec O est transverse, donc

$$\mathbb{T}_{f(z)} Y + \mathbb{T}_{f(z)} O = \mathbb{T}_{f(z)} X,$$

puis

$$d_f(\mathbb{T}_z Z) + \mathbb{T}_{f(z)} Y = \mathbb{T}_{f(z)} X,$$

ce qui donne la transversalité cherchée. \square

Théorème 2.19 (Enumérativité des invariants de Gromov-Witten). *Soient $r = 2$ ou 3 et $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ des classes de cohomologie représentées par des sous-variétés Y_1, \dots, Y_r de codimension au moins 2 qui coupent l'orbite fermée de manière génériquement transverse. Alors il existe un ouvert dense $U \subset \text{Sp}_{2n+1}^r$ tel que pour tout $(g_1, \dots, g_r) \in U$, l'invariant de Gromov-Witten $I_1(\gamma_1, \dots, \gamma_r)$ soit égal au nombre de droites de IG coupant les translatés $g_1 Y_1, \dots, g_r Y_r$.*

Démonstration. Ce résultat est prouvé en appliquant de manière répétée le lemme 2.18. On calcule l'invariant

$$I_1(\gamma_1, \dots, \gamma_r) = \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{0,r}(\text{IG}, 1)]} ev_1^* \gamma_1 \cup \dots \cup ev_r^* \gamma_r$$

en s'assurant que les cycles $ev_1^{-1}(g_1 \Gamma_1), \dots, ev_r^{-1}(g_r \Gamma_r)$ se coupent de manière transverse pour $(g_1, \dots, g_r) \in U$ et que leurs points d'intersection représentent de vraies droites.

On montre tout d'abord que les applications stables de source réductible ne contribuent pas à l'invariant de Gromov-Witten en appliquant le lemme au diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}^* & \\ & \downarrow \underline{ev} & \\ \underline{Y} & \xrightarrow{i} & \text{IG}^r \end{array}$$

où $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_r)$, $\underline{ev} = ev_1 \times \dots \times ev_r$, $\overline{\mathcal{M}} = \overline{\mathcal{M}}_{0,r}(\text{IG}, 1)$ et \mathcal{M}^* est le lieu des applications de source irréductible, qui est un ouvert dense d'après la proposition 2.15.

Il faut également prouver qu'il n'est pas possible qu'une droite coupe l'une des sous-variétés Y_i en plus d'un point. En effet, dans ce cas, elle contribuerait plusieurs fois à l'invariant. Supposons par exemple qu'il existe une droite L qui coupe Y_1 en au moins deux points. Alors toute application stable f dont l'image est L correspond à une application \tilde{f} de $\overline{\mathcal{M}}_{0,r+1}(\text{IG}, 1)$ qui contribue à l'invariant $I_1(\gamma_1, \gamma_1, \dots, \gamma_r)$. Comme le cas des applications de source réductible a déjà été exclu, \tilde{f} se trouve en fait dans $\mathcal{M}_{0,r+1}^*(\text{IG}, 1)$, qui est de dimension $m(2n+1-m) - \frac{m(m-1)}{2} + (2n+2-m) + r - 2$ d'après la seconde partie de la proposition 2.15. Donc en appliquant le lemme 2.18 au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{M}_{0,r+1}^*(\mathbb{IG}, 1) & \\
& \downarrow \underline{ev} & \\
Y_1 \times Y_1 \times \cdots \times Y_r & \xrightarrow{i} & \mathbb{IG}^{r+1}
\end{array}$$

et en utilisant le fait que $\text{codim } \gamma_1 \geq 2$, on conclut qu'une telle droite ne peut pas exister. On considère ensuite :

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{M}^* & \\
& \downarrow \underline{ev} & \\
\text{Sing } \underline{Y} & \xrightarrow{i} & \mathbb{IG}^r
\end{array}$$

où $\text{Sing } \underline{Y}$ désigne le lieu singulier de \underline{Y} , ce qui nous permet de supposer que \underline{Y} est lisse. De plus, puisque Y_1, \dots, Y_r coupent l'orbite fermée de manière génériquement transverse, en appliquant une quatrième fois le lemme 2.18, on peut supposer que cette intersection est partout transverse. Finalement, en utilisant le lemme avec

$$\begin{array}{ccc}
& \mathcal{M}^* & \\
& \downarrow \underline{ev} & \\
\underline{Y} & \xrightarrow{i} & \mathbb{IG}^r
\end{array}$$

on conclut qu'il existe un ouvert dense $U \subset \text{Sp}_{2n+1}^r$ tel que pour tous éléments $(g_1, \dots, g_r) \in U$, $\bigcap_{i=1}^r \underline{ev}_i^{-1}(g_i Y_i)$ est un nombre fini de points réduits, égal au nombre de droites qui coupent tous les $g_i Y_i$. \square

Grâce aux propriétés des espaces de modules de courbes de degré 1, on a pu démontrer l'énumérativité des invariants de Gromov-Witten correspondants. Pour les courbes de plus haut degré, en revanche, la preuve de la proposition 2.15 montre qu'il va nécessairement y avoir de l'obstruction. Néanmoins, étant donné que ces obstructions sont concentrées au niveau des courbes qui possèdent une ou plusieurs composantes contenues dans l'orbite fermée, imposer comme on l'a fait au théorème 2.19 que les variétés utilisées pour définir les invariants coupent l'orbite ouverte de manière génériquement transverse devrait suffire à éviter ce problème. On fera une conjecture en ce sens au chapitre 5. En attendant, au chapitre suivant, on utilisera le théorème 2.19 pour traiter plus en détail le cas des grassmanniennes symplectiques impaires de droites.

Chapitre 3

Grassmanniennes de droites symplectiques impaires

Dans ce chapitre on s'intéressera uniquement aux grassmanniennes symplectiques impaires de droites $IG(2, 2n + 1)$, que l'on notera simplement IG lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Ce cas est plus simple que le cas général pour au moins trois raisons. Tout d'abord, $IG(2, 2n + 1)$ est une section hyperplane de la grassmannienne usuelle $G(2, 2n + 1)$, alors que pour $m > 2$, $IG(m, 2n + 1)$ n'est même pas intersection complète dans $G(m, 2n + 1)$. De plus, la restriction de classes de Schubert depuis la grassmannienne symplectique paire prend une expression très simple (cf § 3.1). Enfin, la variété des droites est un éclatement d'une grassmannienne de type A , donc on peut aisément décrire sa cohomologie (ce qui sera fait à la partie 3.2.3).

On obtiendra des règles de Pieri et de Giambelli classiques (cf propositions 3.2, 3.4, 3.5 et 3.6), une règle de Pieri quantique (cf théorème 3.12), ainsi qu'une présentation quantique (cf proposition 3.13).

3.1 Cohomologie classique

On a vu au paragraphe 2.2 la description des partitions indexant les variétés de Schubert de $IG(m, 2n + 1)$. Pour $m = 2$, ce sont donc :

- les partitions $(n - 2)$ -strictes "usuelles" $\lambda = (2n - 1 \geq \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq 0)$;
- la "partition" $\lambda = (2n - 1, -1)$ correspondant à l'orbite fermée \mathbb{O} .

Le morphisme surjectif \mathbf{i}^* de restriction des classes de la grassmannienne symplectique paire $IG(2, 2n + 2)$ vers celles de $IG(2, 2n + 1)$ étudié au paragraphe 2.3.1 est particulièrement simple :

$$\mathbf{i}^* \sigma_{a,b}^+ = \begin{cases} \sigma_{a,b} & \text{si } a + b \neq 2n - 2, 2n - 1, \\ \sigma_{a,b} + \sigma_{a+1,b-1} & \text{si } a + b = 2n - 2 \text{ ou } 2n - 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Comme expliqué au paragraphe 2.4, on en déduit la dualité de Poincaré dans $IG(2, 2n + 1)$:

Proposition 3.1 (Dualité de Poincaré). *La base duale de Poincaré de la base des classes de Schubert de $\text{IG}(2, 2n+1)$ est donnée par :*

$$\sigma_{a,b}^\vee = \begin{cases} \sigma_{2n-1-b, 2n-2-a} & \text{si } a+b < 2n-2, \\ \sigma_{2n-2-b, 2n-1-a} + \sigma_{2n-1-b, 2n-2-a} & \text{si } a+b = 2n-2 \text{ ou } 2n-1, \\ \sigma_{2n-2-b, 2n-1-a} & \text{si } a+b > 2n-1. \end{cases}$$

3.1.1 Formules de Pieri

L'expression de \mathbf{i}^* ci-dessus permet de déduire les formules de Pieri de la grassmannienne symplectique impaire $\text{IG}(2, 2n+1)$ de celles de $\text{IG}(2, 2n+2)$.

Tout d'abord, exprimons les classes de Schubert de $\text{IG}(2, 2n+1)$ en termes des restrictions de celles de $\text{IG}(2, 2n+2)$. On déduit directement de la proposition 3.1 que

$$\sigma_{c,d} = \begin{cases} \mathbf{i}^* \sigma_{c,d}^+ & \text{si } c+d \neq 2n-2, 2n-1, \\ \sum_{j=0}^{c-n} (-1)^{c-n-j} \mathbf{i}^* \sigma_{n-1+j, n-1-j}^+ & \text{si } c+d = 2n-2, \\ \sum_{j=c-n}^{n-1} (-1)^{j-c+n} \mathbf{i}^* \sigma_{n+j, n-1-j}^+ & \text{si } c+d = 2n-1. \end{cases}$$

En écrivant $\sigma_{a,b} = \mathbf{i}^* \alpha$, où $\alpha \in A^*(\text{IG}(2, 2n+2))$ est donné par la formule ci-dessus, on trouve

$$\sigma_{a,b} \cup \sigma_1 = \mathbf{i}^*(\alpha \cup \sigma_1^+),$$

et on en déduit la

Proposition 3.2 (Formule de Pieri pour $\text{IG}(2, 2n+1)$).

$$\sigma_{a,b} \cup \sigma_1 = \begin{cases} \sigma_{a+1,b} + \sigma_{a,b+1} & \text{si } a+b \neq 2n-3, \\ \sigma_{a,b+1} + 2\sigma_{a+1,b} + \sigma_{a+2,b-1} & \text{si } a+b = 2n-3. \end{cases}$$

$$\sigma_{a,b} \cup \sigma_{1,1} = \begin{cases} \sigma_{a+1,b+1} & \text{si } a+b \neq 2n-4, 2n-3, \\ \sigma_{a+1,b+1} + \sigma_{a+2,b} & \text{si } a+b = 2n-4 \text{ ou } 2n-3. \end{cases}$$

Voici également une règle donnant la multiplication par les classes de Chern du fibré tautologique $c_p(\mathcal{Q})$. Tout d'abord, remarquons que ces classes de Chern s'expriment de la manière suivante en fonction des classes de Schubert

Lemme 3.3.

$$c_p(\mathcal{Q}) = \begin{cases} \sigma_p & \text{si } 0 \leq p \leq 2n-1 \text{ et } p \neq 2n-2 \\ \sigma_{2n-2} + \sigma_{2n-1,-1} & \text{si } p = 2n-2. \end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que $c_p(\mathcal{Q}) = \mathbf{i}^* c_p(\mathcal{Q}^+) = \mathbf{i}^* \sigma_p^+$, où \mathcal{Q}^+ est le fibré quotient sur $\text{IG}(2, 2n+2)$, et de calculer la restriction $\mathbf{i}^* \sigma_p^+$ à l'aide de la formule (3.1). \square

Proposition 3.4 (D'autres formules de Pieri).

$$\sigma_{a,b} \cup \sigma_p = \begin{cases} (\sigma_{a+1,b+1}^+ \cup \sigma_p^+)_- & \text{si } p \neq 2n-2 \text{ ou } (a+b \neq 2n-1 \\ & \text{et } (a,b) \neq (2n-1, -1)), \\ (-1)^a \sigma_{2n-1, 2n-2} & \text{si } p = 2n-2, a+b = 2n-1 \text{ et } b \neq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\sigma_{a,b} \cup \sigma_{2n-1,-1} = \begin{cases} (-1)^{a-1} \sigma_{2n-1,2n-2} & \text{si } a+b = 2n-1, \\ \sigma_{2n-1,a-1} & \text{si } b=0 \text{ et } a \neq 2n-2, \\ \sigma_{2n-1,2n-3} & \text{si } (a,b) = (2n-1,-1), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 3.1. 1. Rappelons que si σ_α^+ est une classe de Schubert de la grassmannienne symplectique $\text{IG}(2, 2n+2)$, où α est une partition $(n-1)$ -stricte telle que $\alpha_2 \geq 1$ ou $\alpha_1 = 2n$, on note α_- l'unique classe de Schubert σ_β de $\text{IG}(2, 2n+1)$ telle que $\mathbf{i}_*(\sigma_\beta) = \sigma_\alpha^+$. Si

$$\sigma_{a+1,b+1}^+ \cup \sigma_p^+ = \sum_{e,f} c_{e,f} \sigma_{e,f}^+,$$

l'expression $(\sigma_{a+1,b+1}^+ \cup \sigma_p^+)_-$ désigne

$$\sum_{e,f} c_{e,f} (\sigma_{e,f}^+)_-.$$

2. Les formules ci-dessus sont obtenues par la même méthode que celle utilisée pour démontrer la proposition 3.2. Remarquons également la présence pour certains produits d'intersection de coefficients négatifs, ce qui, du fait du lemme de Kleiman 2.17, ne se produit jamais dans le cas homogène.

3.1.2 Formules de Giambelli

La grassmannienne symplectique impaire de droites $\text{IG}(2, 2n+1)$ est une section hyperplane de la grassmannienne usuelle $\text{G}(2, 2n+1)$, donc la restriction surjective \mathbf{j}^* des classes de $\text{G}(2, 2n+1)$ vers celles de $\text{IG}(2, 2n+1)$ étudiée au paragraphe 2.3.2 est particulièrement simple :

- si $a+b < 2n-2$ alors $\mathbf{j}^* \sigma_{a,b}^{\text{G}} = \sigma_{a,b}$;
- si $a+b \geq 2n-2$ alors $\mathbf{j}^* \sigma_{a,b}^{\text{G}} = \sigma_{a,b} + \sigma_{a+1,b-1}$.

Une justification de ces formules est donnée au lemme 3.8.

Grâce à cette expression et à la formule de Giambelli pour $\text{G}(2, 2n+1)$, on peut prouver une formule de Giambelli exprimant chaque classe de Schubert en fonction des générateurs σ_1 et $\sigma_{1,1}$. Soit $d_r := (\sigma_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r}$, où l'on pose $\sigma_{1^p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > 2$. On a :

Proposition 3.5 (Formule de Giambelli).

$$\sigma_{a,b} = \begin{cases} \sigma_{1,1}^b d_{a-b} & \text{si } a+b \leq 2n-3, \\ \sum_{q=0}^p (-1)^{p-q} \sigma_{1,1}^{c-q} d_{2q} & \text{si } (a,b) = (c+1+p, c-1-p), \\ \sum_{q=p}^{2n-2-c} (-1)^{q-p} \sigma_{1,1}^{c-q} d_{2q+1} & \text{si } (a,b) = (c+1+p, c-p), \end{cases}$$

où $n-1 \leq c \leq 2n-2$ et $0 \leq p \leq 2n-2-c$.

On peut aussi mentionner une formule de Giambelli en fonction des classes $e_p = c_p(\mathcal{Q})$:

Proposition 3.6 (Une autre formule de Giambelli).

$$\sigma_{a,b} = \begin{cases} e_a e_b - e_{a+1} e_{b-1} & (a+b \leq 2n-3) \\ (-1)^{a-n} e_{n-1}^2 - e_a e_b + 2 \sum_{j=1}^{a-n} (-1)^{a-n-j} e_{n-1+j} e_{n-1-j} & (a+b = 2n-2) \\ e_a e_b + 2 \sum_{j=1}^{2n-1-a} (-1)^j e_{a+j} e_{b-j} & (a+b \geq 2n-1). \end{cases}$$

3.2 Cohomologie quantique

Dans cette partie, on donne trois méthodes permettant d'obtenir des informations sur la cohomologie quantique de $\text{IG}(2, 2n+1)$. La première est d'utiliser le plongement de $\text{IG}(2, 2n+1)$ dans la grassmannienne usuelle afin de construire une famille de sous-variétés auxquelles on applique le théorème d'énumérativité 2.19. Cette technique permet de démontrer une règle de Pieri quantique (cf théorème 3.12) ainsi qu'une présentation de la cohomologie quantique (cf proposition 3.13). Les deux dernières méthodes, qui font intervenir des calculs plus complexes, ne nous permettent pas d'obtenir des résultats aussi généraux. Néanmoins, la première, consistant à utiliser le calcul de la fonction J de $\text{IG}(2, 2n+1)$, permet de vérifier les résultats obtenus pour $\text{IG}(2, 5)$ et $\text{IG}(2, 7)$ (cf § 3.2.2), et la seconde, qui fait intervenir un calcul de la cohomologie de la variété des droites, permet de vérifier le cas de $\text{IG}(2, 9)$ (cf § 3.2.3).

3.2.1 A l'aide du plongement dans $G(2, 2n+1)$

Le théorème d'énumérativité 2.19 nous permet de calculer les invariants par des méthodes géométriques (c'est-à-dire en comptant effectivement des droites vérifiant certaines conditions d'incidence). Cependant, les variétés de Schubert ne conviennent pas pour effectuer ce calcul. En effet, l'intersection d'une variété de Schubert et de l'orbite fermée n'est pas propre, donc a fortiori pas génériquement transverse : le lemme de Kleiman ne s'applique pas. Au lieu des variétés de Schubert de $\text{IG}(2, 2n+1)$, on va donc utiliser les restrictions à $\text{IG}(2, 2n+1)$ des variétés de Schubert de la grassmannienne usuelle.

3.2.1.1 Calcul des invariants de $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\text{IG}, 1)$

On commence par énoncer les conditions que devront vérifier les drapeaux définissant les variétés que nous allons considérer. Le lemme ci-dessous assure que ces conditions sont bien vérifiées par un drapeau général.

Notation 3.2. Notons

- \mathbb{F}_n la variété des drapeaux complets de \mathbb{C}^{2n+1} ;
- Λ_n la variété des 2-formes antisymétriques de rang maximal sur \mathbb{C}^{2n+1} .

Lemme 3.7. *On suppose $n \geq 2$. L'ensemble des triplets $(F_\bullet, G_\bullet, \omega) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \times \Lambda_n$ tels que les conditions suivantes soient vérifiées :*

- (C1) $\forall 0 \leq p \leq 2n+1$, $\omega|_{F_p}$ est de rang maximal;
- (C2) $\forall 0 \leq p \leq 2n+1$, $\omega|_{G_p}$ est de rang maximal;
- (C3) $\forall 0 \leq p, q \leq 2n+1$, $F_p \cap G_q$ a la dimension attendue;
- (C4) _{i} $\dim(F_{2n+1-i} \cap G_{i+3} \cap F_1^\perp \cap G_1^\perp) = 1$; ($0 \leq i \leq 2n-2$)
- (C5) _{i} $\dim F_{2n-i} \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp = 1$ et $\dim(F_{2n-i} \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp)^\perp \cap F_2 = 1$; ($0 \leq i \leq 2n-2$)
- (C6) _{i} $\dim F_{2n+1-i} \cap G_{i+2} \cap F_1^\perp = 1$ et $\dim(F_{2n+1-i} \cap G_{i+2} \cap F_1^\perp)^\perp \cap G_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-4$)
- (C7) _{i} $\dim(F_{2n-i} \cap G_{i+2})^\perp \cap F_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-4$)
- (C8) _{i} $\dim(F_{2n-i} \cap G_{i+2})^\perp \cap G_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-4$)
- (C9) $F_1 \not\subset G_1^\perp$;
- (C10) $G_1 \not\subset F_1^\perp$;
- (C11) _{i} $F_{2n-1-i} \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp = 0$; ($0 \leq i \leq 2n-6$)
- (C12) _{i} $F_{2n+1-i} \cap G_{i+1} \cap F_1^\perp = 0$; ($4 \leq i \leq 2n-2$)

est un ouvert dense de $\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \times \Lambda_n$.

Démonstration. $\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \times \Lambda_n$ est une variété (quasi-projective) irréductible. De plus, toutes les conditions sont clairement ouvertes. Donc il suffit de montrer que chacune d'entre elles définit un ouvert non vide.

(C1),(C2) et (C3) Evident.

(C4) _{i} Comme $n \geq 2$, on peut choisir les drapeaux F_\bullet et G_\bullet de telle sorte que le sous-espace $A := F_{2n+1-i} \cap G_{i+3}$ soit de dimension 3 et que A ainsi que les droites $L := F_1$ et $L' := G_1$ soient en somme directe. Alors il existe une forme $\omega \in \Lambda_n$ telle que $A \cap L^\perp \cap L'^\perp$ soit de dimension 1.

(C5) _{i} Comme auparavant on peut choisir F_\bullet et G_\bullet tels que $A := F_{2n-i} \cap G_{i+3}$ soit de dimension 2 et que A , $L := G_1$ ainsi que $B := F_2$ soient supplémentaires. On peut donc construire $\omega \in \Lambda_n$ telle que $(A \cap L^\perp)^\perp \cap B$ soit de dimension 1. Pour cela, on construit tout d'abord ω_0 sur $A \oplus B \oplus L$. Soient $a \in A \setminus 0$ et $b \in B \setminus 0$. Il existe une forme symplectique ω_0 sur $A \oplus B$ telle que $\omega_0(a, b) \neq 0$. On étend alors ω_0 en ω définie sur $A \oplus B \oplus L$ en posant $\omega(a, l) = 0$, $\omega(a', l) \neq 0$ et par exemple $\omega(\beta, l) = 0$ pour tout $\beta \in B$, où l engendre L et a, a' engendrent A .

(C6) _{i} Comme pour (C5).

(C7) _{i} On peut choisir F_\bullet et G_\bullet tels que $L := F_{2n-i} \cap G_{i+2}$ soit de dimension 1 et en somme directe avec $A := F_2$. Mais alors il existe $\omega \in \Lambda_n$ tel que $A \not\subset L^\perp$.

(C8)_i Comme pour (C7)_i.

(C9) G_1^\perp est un hyperplan générique, donc il ne contient pas F_1 .

(C10) Comme pour (C9).

(C11)_i $F_{2n-1-i} \cap G_{i+3}$ est une droite, G_1^\perp un hyperplan général, donc leur intersection est nulle.

(C12)_i Comme pour (C11)_i. □

On peut maintenant définir les variétés que nous allons utiliser pour calculer les invariants ; ce sont les restrictions des variétés de Schubert de la grassmannienne usuelle :

Lemme 3.8. Soient $0 \leq j \leq n-1$ et $0 \leq i \leq 2n-1-2j$ des entiers. Soit

$$X_{i,j} := \{\Sigma \in G \mid \Sigma \cap F_{j+1} \neq 0, \Sigma \subset F_{2n+1-i-j}\},$$

une sous-variété de $G := G(2, 2n+1)$, où F_\bullet est un drapeau complet vérifiant la condition (C1).

1. $X_{i,j}$ et IG se coupent de manière génériquement transverse.
2. Soit $Y_{i,j} := X_{i,j} \cap \text{IG}$. Sa classe fondamentale est donnée par

$$[Y_{i,j}]^{\text{IG}} = \begin{cases} \sigma_{2n-1-j,i+j} + \sigma_{2n-j,i+j-1} & \text{si } j \neq 0 \text{ et } i \neq 2n-1-2j, \\ \sigma_{2n-j,2n-2-j} & \text{si } j \neq 0 \text{ et } i = 2n-1-2j, \\ \sigma_{2n-1,i} & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 2n-1, \\ 0 & \text{si } j = 0 \text{ et } i = 2n-1. \end{cases}$$

On note $[V]^{\text{IG}}$ (respectivement $[V]^G$) la classe d'une sous-variété V de IG (respectivement de G) et $\mathbf{j} : \text{IG}(2, 2n+1) \hookrightarrow G(2, 2n+1)$ l'inclusion naturelle.

Démonstration. 1. Dans la cellule de Schubert $C_{i,j} \subset X_{i,j}$, un calcul direct montre que $T_p X_{i,j} \not\subset T_p \text{IG}$ dès que $F_{j+1} \not\subset F_{2n+1-i-j}^\perp$, ce qui est vrai par la condition (C1). Donc $C_{i,j} \cap \text{IG}$ est transverse. En appliquant encore (C1), on remarque que $C_{i,j} \cap \text{IG}$ est un ouvert de $X_{i,j} \cap \text{IG}$.

2. On a $[X_{i,j}]^G = \sigma_{2n-1-j,i+j}^G$. De plus, le point précédent implique que $[Y_{i,j}]^G = \sigma_1^G \cup [X_{i,j}]^G$. Donc

$$[Y_{i,j}]^G = \begin{cases} \sigma_{2n-1-j,i+j+1}^G + \sigma_{2n-j,i+j}^G & \text{si } j \neq 0 \text{ et } i \neq 2n-1-2j, \\ \sigma_{2n-j,2n-1-j}^G & \text{si } j \neq 0 \text{ et } i = 2n-1-2j, \\ \sigma_{2n-1,i+1}^G & \text{si } j = 0 \text{ et } i \neq 2n-1, \\ 0 & \text{si } j = 0 \text{ et } i = 2n-1. \end{cases}$$

De plus

$$\begin{aligned} [Y_{i,j}]^G &= \mathbf{j}_* [Y_{i,j}]^{\text{IG}}, \\ [Y_{i,j}]^{\text{IG}} &= \sum_{p=0}^{\lfloor n-1-\frac{i}{2} \rfloor} \alpha_p \sigma_{2n-1-p,i+p}, \\ \mathbf{j}_* \sigma_{a,b} &= \sigma_{a,b+1}^G \text{ pour } a+b \geq 2n-2. \end{aligned}$$

La dernière identité provient du fait que si l'on considère (a, b) une partition $(n - 2)$ -stricte telle que $a + b \geq 2n - 2$, les conditions d'incidence associées par rapport à un drapeau isotrope F_\bullet de $\text{IG}(2, 2n + 1)$ sont $p_1 = 2n - a$ et $p_2 = 2n - b$. On a donc $p_1 + p_2 \leq 2n - 2$, donc la variété de Schubert $X_{p_1, p_2}(F_\bullet)$ de $G(2, 2n + 1)$ est automatiquement isotrope. Par conséquent, elle est égale à la variété de Schubert $Y_{p_1, p_2}(F_\bullet)$ de $\text{IG}(2, 2n + 1)$, c'est-à-dire que

$$\mathbf{j}(Y_{p_1, p_2}(F_\bullet)) = X_{p_1, p_2}(F_\bullet)$$

et par conséquent $\mathbf{j}_* \sigma_{a, b} = \sigma_{a, b+1}^G$. Enfin, on détermine les α_p en identifiant les deux expressions obtenues pour $[Y_{i, j}]^G$. \square

On suppose maintenant que les conditions de généralité **(C1-12)** sont vérifiées et on prouve la

Proposition 3.9. *Soient $0 \leq i \leq 2n - 2$, $0 \leq 2j \leq 2n - 2 - i$ et $0 \leq 2l \leq i$ des entiers. On pose $Y_1 := Y_{i, j}(F_\bullet)$ et $Y_2 := Y_{i, 2n-2-i}(G_\bullet)$, où les drapeaux complets F_\bullet et G_\bullet ainsi que la forme ω vérifient les conditions de transversalité du lemme 3.7. Alors*

1. *Les intersections $Y_1 \cap \mathbb{O}$ et $Y_2 \cap \mathbb{O}$ sont transverses. De plus*

$$Y_1 \cap \mathbb{O} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \text{ ou } j \neq 0 \\ \{F_1 \oplus K\} & \text{si } i = j = 0 \end{cases}$$

$$Y_2 \cap \mathbb{O} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq 2n - 2 \text{ ou } l \neq 0 \\ \{G_1 \oplus K\} & \text{si } i = 2n - 2 \text{ et } l = 0 \end{cases}$$

2. *Si j ou $l \geq 2$, il n'existe pas de droite passant par Y_1 et Y_2 .*

3. *Si $j, l \leq 1$, il existe une unique droite passant par Y_1 et Y_2 .*

Démonstration. 1. On a

$$Y_1 \cap \mathbb{O} = \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap F_{j+1} \neq \emptyset, K \subset \Sigma \subset F_{2n+1-i-j}\}.$$

Or si $i + j \neq 0$, d'après **(C1)**, alors $K \not\subset F_{2n+1-i-j}$, donc l'intersection est vide. Par contre, si $i + j = 0$, on obtient $Y_1 \cap \mathbb{O} = \{F_1 \oplus K\}$. Notons Σ_0 le point $K \oplus F_1$. Pour prouver la transversalité en Σ_0 , on utilise le plongement dans la grassmannienne usuelle $G := G(2, 2n + 1)$. On a $T_{\Sigma_0} G = \text{Hom}(\Sigma_0, \mathbb{C}^{2n+1}/\Sigma_0)$. Exprimons maintenant $T_{\Sigma_0} Y_1$ et $T_{\Sigma_0} \mathbb{O}$ comme sous-espaces de $T_{\Sigma_0} G$:

$$T_{\Sigma_0} Y_1 = \{\phi \in T_{\Sigma_0} G \mid \phi(f_1) = 0\}$$

$$T_{\Sigma_0} \mathbb{O} = \{\phi \in T_{\Sigma_0} G \mid \phi(k) = 0\},$$

où f_1 et k engendrent F_1 et K . On voit que ces sous-espaces sont en somme directe dans $T_{\Sigma_0} G$. En calculant $\dim Y_1 = 2n - 2$ et $\dim \mathbb{O} = 2n - 1$, on conclut qu'ils engendrent $T_{\Sigma_0} \text{IG}$. On procède de manière analogue pour $Y_2 \cap \mathbb{O}$.

2. Soit $\mathcal{D} := \mathcal{D}(V, W)$ une droite coupant Y_1 et Y_2 . On doit alors avoir $V \subset F_{2n+1-i-j} \cap G_{i+3-l}$. Mais d'après **(C3)**, ce sous-espace est soit nul, soit de codimension $2n - 2 + j + l$. Donc pour $j + l \geq 3$, il est nul et il n'existe pas de droite. Si $j = 2$ et $l = 0$ (et de manière analogue si $j = 0$ et $l = 2$), on doit avoir $V \subset F_{2n-1-i} \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp = 0$, ce qui est impossible par **(C11)_i** (respectivement par **(C12)_i**). Donc pour qu'une droite existe, on doit avoir j et $l \leq 1$.

3. Il y a quatre cas à étudier :

- a) $j = l = 0$;
- b) $j = 1, l = 0$;
- c) $j = 0, l = 1$;
- d) $j = l = 1$.

a) Soit $A = F_{2n+1-i} \cap G_{i+3}$. On a $\dim A = 3$ par **(C3)**. Mais $V \subset A$ et $V \subset F_1^\perp \cap G_1^\perp$ puisque $F_1, G_1 \subset W$ et $W \subset V^\perp$. D'après **(C4)_i**, on a $\dim(A \cap F_1^\perp \cap G_1^\perp) = 1$, d'où $V = A \cap F_1^\perp \cap G_1^\perp$. Donc $W \supset V + (F_1 \oplus G_1)$ (F_1 et G_1 sont en somme directe par **(C3)**). Pour montrer l'égalité, il suffit de montrer que la somme est directe. Sinon, il existe un vecteur non nul de la forme $af_1 + bg_1$ dans V , où f_1 et g_1 engendrent F_1 et G_1 . Donc $af_1 + bg_1 \in A \subset F_{2n+1-i}$, ce qui implique que $bg_1 \in F_{2n+1-i}$, d'où $b = 0$ ou $i = 0$. Si $b = 0$, alors $V = F_1$, et par conséquent $F_1 \subset G_1^\perp$, ce qui est impossible par **(C9)**. Donc $i = 0$. Mais alors $af_1 + bg_1 \in G_3$, donc $af_1 \in G_3$ et aussi $a = 0$. Finalement $V = G_1 \subset F_1^\perp$, ce qui est exclu par **(C9)**.

b) Soit $A = F_{2n-i} \cap G_{i+3}$. Par **(C3)**, $\dim A = 2$. Par **(C5)_i**, $\dim(A \cap G_1^\perp) = 1$, donc $V = A \cap G_1^\perp$. De plus $\dim(V^\perp \cap F_2) = 1$. On a $W \supset V + G_1 + V^\perp \cap F_2$. Pour déterminer W , il suffit de montrer que la somme est directe. Tout d'abord, $V + G_1$ est directe, car sinon on aurait $V = G_1$, donc $G_1 \subset F_{2n-i}$, ce qui est impossible par **(C3)**. Enfin, la somme $(V \oplus G_1) + V^\perp \cap F_2$ est directe, sinon on aurait $V^\perp \cap F_2 \subset G_{i+3}$. Mais $\dim(F_2 \cap G_{i+3}) = 0$ par **(C3)** puisque $i \leq 2n - 4$.

c) Ce cas est analogue au cas 3b; la preuve utilise **(C3)** et **(C6)_i**.

d) Par **(C3)**, on obtient $\dim(F_{2n-1} \cap G_{i+2}) = 1$, donc $V = F_{2n-1} \cap G_{i+2}$. On doit avoir $\dim(W \cap F_2) \neq 0$. Mais $V \not\subset F_2$, sinon on aurait $G_{i+2} \cap F_2 \neq 0$, ce qui est impossible par **(C3)** puisque $i \leq 2n - 4$. Alors $W \subset V^\perp$ implique que $W \cap F_2 \subset V^\perp \cap F_2$, qui est de dimension 1 par **(C7)_i**. Donc $W \subset V^\perp \cap F_2 \oplus V$. De manière analogue, en utilisant **(C8)_i**, on obtient $W \cap G_2 = V^\perp \cap G_2$, donc $W \supset V \oplus V^\perp \cap F_2 + V^\perp \cap G_2$. Il suffit maintenant de montrer que cette somme est directe. Sinon, il existe un vecteur non nul de la forme $av + bf_2$ dans $V^\perp \cap G_2$, où v et f_2 engendrent V et $V^\perp \cap F_2$. Comme $v \in G_{i+2}$, on obtient $bf_2 \in G_{i+2}$, d'où $b = 0$ car $i \leq 2n - 4$. Par conséquent $V^\perp \cap G_2 = V$, puis $V \subset G_2$ et $\dim F_{2n-i} \cap G_2 \leq 1$, ce qui est impossible puisque $i \geq 2$. \square

3.2.1.2 Calcul des invariants de $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\text{IG}, 1)$

Au paragraphe précédent, on a calculé les invariants 2-pointés de IG, ce qui équivaut à calculer les termes quantiques de la multiplication par la classe hy-

perplane σ_1 . En effet, la propriété du diviseur (cf 1.1.2) nous donne :

$$I_1(\gamma_1, \gamma_2, \sigma_1) = I_1(\gamma_1, \gamma_2),$$

où γ_1 et γ_2 sont deux classes de cohomologie. Donc pour obtenir une règle de Pieri quantique pour IG $(2, 2n+1)$, il nous reste à calculer le produit par $\sigma_{1,1}$. On doit donc déterminer tous les invariants de la forme $I_1(\sigma_{1,1}, \sigma_\lambda, \sigma_\mu)$ avec $|\lambda| + |\mu| = 6n - 5$, c'est-à-dire calculer le nombre de droites passant par les sous-variétés suivantes :

$$\begin{aligned} Y_1 &= \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap F_{j+1} \neq 0, \Sigma \subset F_{2n+2-i-j}\}, \\ Y_2 &= \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap G_{l+1} \neq 0, \Sigma \subset G_{i+3-l}\}, \\ Y_3 &= \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \subset H\} \end{aligned}$$

où $0 \leq i \leq 2n-1$, $0 \leq 2j \leq 2n-1-i$ et $0 \leq 2l \leq i$ sont des entiers, F_\bullet et G_\bullet sont des drapeaux isotropes et H est un hyperplan.

Comme auparavant, on utilise un lemme de généralité qui se prouve comme le lemme 3.7 :

Lemme 3.10. *Supposons que $n \geq 2$. L'ensemble des 4-uplets $(F_\bullet, G_\bullet, H, \omega) \in \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \times \mathbb{P}^{2n} \times \Lambda_n$ vérifiant les conditions suivantes*

- (C1) $\forall 0 \leq p \leq 2n+1$, $\omega|_{F_p}$ est de rang maximal ;
- (C2) $\forall 0 \leq p \leq 2n+1$, $\omega|_{G_p}$ est de rang maximal ;
- (C3) $\omega|_H$ est symplectique ;
- (C4) $\forall 0 \leq p, q \leq 2n+1$, $F_p \cap G_q$ a la dimension attendue ;
- (C5) $\forall 0 \leq p, q \leq 2n+1$, $F_p \cap G_q \cap H$ a la dimension attendue ;
- (C6) $_i$ $\dim(F_{2n+2-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap F_1^\perp \cap G_1^\perp) = 1$; ($1 \leq i \leq 2n-2$) ;
- (C7) $_i$ $\dim F_{2n+1-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap G_1^\perp = 1$ et $\dim(F_{2n+1-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap G_1^\perp)^\perp \cap F_2 = 1$; ($0 \leq i \leq 2n-3$) ;
- (C8) $_i$ $\dim F_{2n+2-i} \cap G_{i+2} \cap H \cap F_1^\perp = 1$ et $\dim(F_{2n+2-i} \cap G_{i+2} \cap H \cap F_1^\perp)^\perp \cap G_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-1$) ;
- (C9) $_i$ $\dim(F_{2n+1-i} \cap G_{i+2} \cap H)^\perp \cap F_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-3$) ;
- (C10) $_i$ $\dim(F_{2n+1-i} \cap G_{i+2} \cap H)^\perp \cap G_2 = 1$; ($2 \leq i \leq 2n-3$) ;
- (C11) $F_1 \not\subset G_1^\perp$;
- (C12) $G_1 \not\subset F_1^\perp$;
- (C13) $_i$ $F_{2n-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap G_1^\perp = 0$; ($0 \leq i \leq 2n-5$) ;
- (C14) $_i$ $F_{2n+2-i} \cap G_{i+1} \cap H \cap F_1^\perp = 0$; ($4 \leq i \leq 2n-1$) ;
- (C15) $_i$ $F_2 \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp = 0$; $0 \leq i \leq 2n-3$;
- (C16) $_i$ $G_2 \cap F_{2n+2-i} \cap F_1^\perp = 0$; $2 \leq i \leq 2n-1$.

est un ouvert dense de $\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n \times \mathbb{P}^{2n} \times \Lambda_n$.

Sous ces hypothèses, on peut prouver la

Proposition 3.11. 1. Les intersections $Y_i \cap \mathbb{O}$ sont transverses. De plus

$$Y_1 \cap \mathbb{O} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i + j \geq 2 \\ \{F_1 \oplus K\} & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 0 \\ \{K \oplus L \mid L \subset F_2\} & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1 \end{cases}$$

$$Y_2 \cap \mathbb{O} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } i \neq 2n - 2 \text{ ou } l \neq 0 \\ \{G_1 \oplus K\} & \text{si } i = 2n - 2 \text{ et } l = 0 \end{cases}$$

$$Y_3 \cap \mathbb{O} = \emptyset$$

2. Si j ou $l \geq 2$, il n'existe pas de droite coupant Y_1 , Y_2 et Y_3 .

3. Si j et $l \leq 1$, il existe une unique droite coupant Y_1 , Y_2 et Y_3 .

Démonstration. 1. Le cas de $Y_2 \cap \mathbb{O}$ a déjà été traité dans la preuve de la proposition 3.9. Si $\Sigma \in Y_1 \cap \mathbb{O}$, on doit avoir $K \subset F_{2n+2-i-j}$, donc $i + j = 1$. Si $i = 1$ et $j = 0$, alors $Y_1 \cap \mathbb{O} = \{K \oplus F_1\}$, et la transversalité se prouve comme à la proposition 3.9. Si $i = 0$ et $j = 1$, alors $Y_1 \cap \mathbb{O} = \{K \oplus L \mid L \subset F_2\}$. Prenons $\Sigma_0 = K \oplus \langle f_2 \rangle$, où f_2 est un élément non nul de F_2 . Comme précédemment, on exprime $T_{\Sigma_0} Y_1$ et $T_{\Sigma_0} \mathbb{O}$ en tant que sous-espaces de $T_{\Sigma_0} G$, où G est la grassmannienne usuelle :

$$T_{\Sigma_0} Y_1 = \{\phi \in T_{\Sigma_0} G \mid \phi(f_2) \in F_2 / \langle f_2 \rangle, \phi(k) \perp f_2\}$$

$$T_{\Sigma_0} \mathbb{O} = \{\phi \in T_{\Sigma_0} G \mid \phi(k) = 0\},$$

avec k un générateur de K . On remarque que l'intersection de $T_{\Sigma_0} Y_1$ et de $T_{\Sigma_0} \mathbb{O}$ est de dimension 1. En calculant $\dim Y_1 = 2n - 1$ et $\dim \mathbb{O} = 2n - 1$ on conclut qu'ils engendrent $T_{\Sigma_0} \text{IG}$. Finalement, $Y_3 \cap \mathbb{O} = \emptyset$ car $K \not\subset H$ par **(C3)**.

2. Par **(C5)**, $F_{2n+2-i-j} \cap G_{i+3-l} \cap H = 0$ dès que $j + l \geq 3$. De plus, si $j = 2$ et $l = 0$, on a $W \supset G_1$, d'où $V \subset F_{2n-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap G_1^\perp$. Mais cet espace est nul par **(C13)**_{*i*}, donc il n'y a pas de droite. Par **(C13)**_{*i*}, on obtient le même résultat lorsque $j = 0$ et $l = 2$.

3. Il y a quatre cas :

- a) $j = l = 0$;
- b) $j = 1, l = 0$;
- c) $j = 0, l = 1$;
- d) $j = l = 1$.

a) On a $V = F_{2n+2-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap F_1^\perp \cap G_1^\perp$ par **(C6)**_{*i*}. De plus $W \supset V + F_1 + G_1$. Pour obtenir l'égalité il suffit de montrer que la somme est directe. Tout d'abord $V \neq F_1$ car $F_1 \not\subset G_1^\perp$ par **(C11)**. Finalement si $G_1 \subset V \oplus F_1$, comme $V \subset F_1^\perp$, on aurait $G_1 \subset F_1^\perp$, ce qui est impossible par **(C12)**.

- b) On a $V = F_{2n+1-i} \cap G_{i+3} \cap H \cap G_1^\perp$ par **(C7)**_i. De plus $W \subset V + G_1 + F_2 \cap V^\perp$. Montrons maintenant que cette somme est directe. Tout d'abord $V \neq G_1$, sinon on aurait $G_1 \subset H$, ce qui est exclu par **(C5)**. Mais $F_2 \cap V^\perp \not\subset V \oplus G_1$ car $F_2 \cap G_{i+3} \cap G_1^\perp = 0$ pour $i \leq 2n-3$ par **(C15)**_i.
- c) $V = F_{2n+2-i} \cap G_{i+2} \cap H \cap F_1^\perp$ par **(C8)**_i. De plus $W \supset V + F_1 + G_2 \cap V^\perp$ (par **(C9)**_i et **(C10)**_i), et cette somme est directe (même argument que dans le cas précédent, en utilisant la condition **(C16)**_i).
- d) $V = F_{2n+1-i} \cap G_{i+2} \cap H$, $W \supset V + W \cap F_2 + W \cap G_2 = V + F_2 \cap V^\perp + G_2 \cap V^\perp$. Cette somme est directe ; en effet, $F_2 \cap V^\perp \neq G_2 \cap V^\perp$ car $F_2 \cap G_2 = 0$ par **(C4)** ; de plus $V \not\subset F_2 \cap V^\perp \oplus G_2 \cap V^\perp$, sinon on aurait $G_2 \cap F_{2n+1-i} \neq 0$, ce qui est impossible car $i \geq 2$. \square

3.2.1.3 Formule de Pieri quantique

Le degré du paramètre quantique est égal à l'indice de $\text{IG}(2, 2n+1)$, d'où $\deg q = 2n$. À l'aide des calculs effectués dans les propositions 3.9 et 3.11, on peut maintenant prouver le

Théorème 3.12 (Règle de Pieri quantique pour $\text{IG}(2, 2n+1)$).

$$\sigma_1 \star \sigma_{a,b} = \begin{cases} \sigma_{a+1,b} + \sigma_{a,b+1} & \text{si } a+b \neq 2n-3 \text{ et } a \neq 2n-1, \\ \sigma_{a,b+1} + 2\sigma_{a+1,b} + \sigma_{a+2,b-1} & \text{si } a+b = 2n-3, \\ \sigma_{2n-1,b+1} + q\sigma_b & \text{si } a = 2n-1 \text{ et } 0 \leq b \leq 2n-3, \\ q(\sigma_{2n-1,-1} + \sigma_{2n-2}) & \text{si } a = 2n-1 \text{ et } b = 2n-2. \end{cases}$$

$$\sigma_{1,1} \star \sigma_{a,b} = \begin{cases} \sigma_{a+1,b+1} & \text{si } a+b \neq 2n-4, 2n-3 \text{ et } a \neq 2n-1, \\ \sigma_{a+1,b+1} + \sigma_{a+2,b} & \text{si } a+b = 2n-4 \text{ ou } 2n-3, \\ q\sigma_{b+1} & \text{si } a = 2n-1 \text{ et } b \neq 2n-3, \\ q(\sigma_{2n-1,-1} + \sigma_{2n-2}) & \text{si } a = 2n-1 \text{ et } b = 2n-3. \end{cases}$$

Démonstration. On commence par les invariants de la forme $I_1(\sigma_1, \sigma_{a,b}, \sigma_{c,d})$, qui sont égaux aux invariants 2-pointés $I_1(\sigma_{a,b}, \sigma_{c,d})$ par l'axiome du diviseur. La première partie de la proposition 3.9 nous permet d'appliquer le théorème d'énumérativité 2.19. On utilise ensuite la deuxième partie de la proposition 3.9. Pour $j = l = 0$ on obtient que $I_1(\sigma_{2n-1,i}, \sigma_{2n-1,2n-2-i}) = 1$ pour tout $0 \leq i \leq 2n-2$. Ensuite, en posant $j = 0$ et $l > 0$ on obtient par récurrence que $I_1(\sigma_{2n-1,i}, \sigma_{2n-1-l,2n-2-i+l}) = 0$ (pour tous i et $l > 0$). Finalement, en prenant j et $l > 0$ on obtient $I_1(\sigma_{2n-1-j,i+j}, \sigma_{2n-1-l,2n-2-i+l}) = 0$ (pour tous i et $j, l > 0$). Par conséquent :

$$I_1(\sigma_1, \sigma_{a,b}, \sigma_{c,d}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = c = 2n-1, \\ 0 & \text{si } a \text{ ou } c < 2n-1. \end{cases}$$

De la même manière, la proposition 3.11 et le théorème 2.19 impliquent

$$I_1(\sigma_{1,1}, \sigma_{a,b}, \sigma_{c,d}) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = c = 2n-1, \\ 0 & \text{si } a \text{ ou } c < 2n-1. \end{cases}$$

Le résultat suit en utilisant la règle de Pieri classique et la dualité de Poincaré. \square

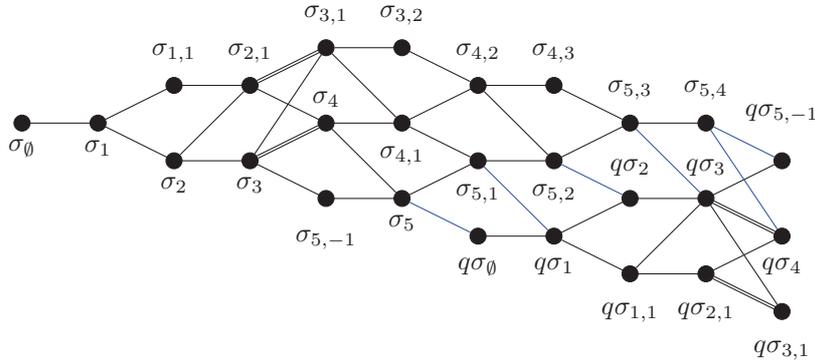


FIGURE 3.1 – Diagramme de Hasse quantique de $IG(2, 7)$

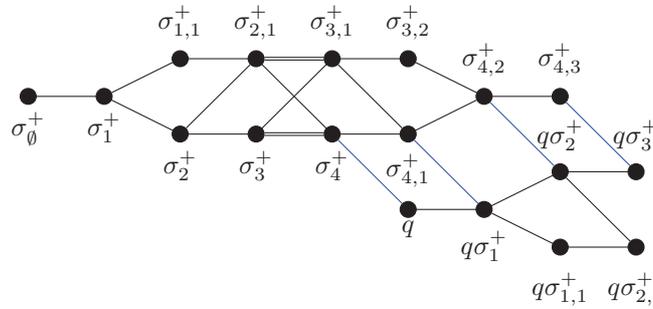


FIGURE 3.2 – Diagramme de Hasse quantique de $IG(2, 6)$

La formule de Pieri quantique permet de compléter le diagramme de Hasse de $IG(2, 2n + 1)$ déterminé au paragraphe 2.2.2 pour obtenir son diagramme de Hasse quantique. Ce diagramme est l'analogie quantique du diagramme de Hasse classique construit au paragraphe 2.2.2, c'est-à-dire que ses sommets représentent les monômes $q^d \sigma_\lambda$, où d est un entier et σ_λ une classe de Schubert. De plus, il y a une arête de multiplicité r entre les sommets $q^d \sigma_\lambda$ et $q^e \sigma_\mu$ si et seulement si le terme $q^e \sigma_\mu$ intervient avec multiplicité r dans le produit quantique $\sigma_1 \star q^d \sigma_\lambda$. Toute l'information contenue dans ce diagramme pouvant être retrouvée en connaissant simplement les arêtes partant des sommets indexés par les monômes de la forme $q^0 \sigma_\lambda$, on se contentera de représenter seulement cette partie du diagramme.

On a représenté à la figure 3.1 le diagramme de Hasse quantique de $IG(2, 7)$, et à titre de comparaison, celui de la grassmannienne symplectique $IG(2, 6)$ est représenté à la figure 3.2.

3.2.1.4 Présentation quantique et semi-simplicité

En combinant la présentation classique démontrée à la proposition 2.13 et la règle de Pieri quantique du paragraphe précédent, on peut trouver une présentation de l'anneau de cohomologie quantique de $IG(2, 2n + 1)$.

Proposition 3.13 (Présentation de $\text{QA}^*(\text{IG}(2, 2n+1))$). *L'anneau de cohomologie $\text{QA}^*(\text{IG}(2, 2n+1))$ est engendré par les classes $\sigma_1, \sigma_{1,1}$ et le paramètre quantique q . Les relations sont*

$$\det(\sigma_{1^{1+j-i}})_{1 \leq i, j \leq 2n} = 0$$

$$\frac{1}{\sigma_1} \det(\sigma_{1^{1+j-i}})_{1 \leq i, j \leq 2n+1} + q = 0,$$

où la notation de la deuxième relation signifie simplement que l'on simplifie le facteur σ_1 .

Démonstration. Pour trouver les relations quantiques, on utilise les résultats de Siebert et Tian (cf théorème 1.10). Soient $d_{2n} = \det(\sigma_{1^{1+j-i}})_{1 \leq i, j \leq 2n}$ et $d'_{2n+1} = \frac{1}{\sigma_1} \det(\sigma_{1^{1+j-i}})_{1 \leq i, j \leq 2n+1}$; notons également $\overline{d_{2n}}$ et $\overline{d'_{2n+1}}$ les mêmes expressions dans lesquelles on remplace le produit d'intersection par le produit quantique.

Considérons maintenant les produits quantiques $\Pi_a := (\sigma_1)^{2(n-a)} \star (\sigma_{1,1})^a$ pour $0 \leq a \leq n$. Pour des raisons de degré, ils ne possèdent pas de terme en q^d avec $d > 1$. Montrons tout d'abord que Π_a n'a pas de terme en q si $a \neq 0, 1$. Pour cela, on décompose Π_a pour $a > 0$ en

$$\Pi_a = \sigma_{1,1} \star \left((\sigma_1)^{2(n-a)} (\sigma_{1,1})^{a-1} \right).$$

Pour des raisons de degré, on remarque que $(\sigma_1)^{2(n-a)} (\sigma_{1,1})^{a-1}$ n'a pas de terme en q . De plus, si $a \geq 2$, la règle de Pieri classique 3.2 implique que ce produit contient seulement des classes $\sigma_{c,d}$ avec $c < 2n-1$. On utilise alors la règle de Pieri quantique 3.12 pour conclure qu'il n'y a pas de terme en q dans Π_a . Il reste maintenant à calculer le terme en q de Π_0 et Π_1 . Posons $\alpha_p := (\sigma_1)^p$ pour $p \leq 2n-1$. α_p n'a pas de terme en q . On a $\Pi_0 = \sigma_1 \star \alpha_{2n-1}$ et $\Pi_1 = \sigma_{1,1} \star \alpha_{2n-2}$. Calculons récursivement les coefficients de σ_p et $\sigma_{p-1,1}$ pour $p \leq 2n-3$ dans α_p à l'aide de la règle de Pieri classique. On trouve

$$\alpha_p = \sigma_p + (p-1)\sigma_{p-1,1} + \text{termes avec première part plus petite.}$$

Alors

$$\alpha_{2n-2} = \sigma_{2n-1,-1} + (2n-2)\sigma_{2n-2} + \text{termes avec première part plus petite}$$

et

$$\alpha_{2n-1} = (2n-1)\sigma_{2n-1} + \text{termes avec première part plus petite.}$$

Finalement, à l'aide de la règle de Pieri quantique, on trouve :

$$\begin{aligned} \Pi_0 &= \text{termes classiques} + (2n-1)q \\ \Pi_1 &= \text{termes classiques} + q. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} \overline{d_{2n}} &= \Pi_0 - (2n-1)\Pi_1 + \text{combinaison linéaire de } \Pi_a \text{ avec } a \geq 2 \\ \overline{d'_{2n+1}} &= \Pi_0 - 2n\Pi_1 + \text{combinaison linéaire de } \Pi_a \text{ avec } a \geq 2, \end{aligned}$$

d'où $\overline{d_{2n}} = d_{2n}$ et $\overline{d'_{2n+1}} = d'_{2n+1} - q$. □

Montrons maintenant que la cohomologie quantique de $\text{IG}(2, 2n + 1)$ localisée en $q \neq 0$ est semi-simple. Pour cela, on utilise une présentation en termes des racines de Chern du fibré tautologique \mathcal{S} qui rend les symétries plus apparentes :

Théorème 3.14. 1. *L'anneau $\text{QA}^*(\text{IG}(2, 2n + 1))$ est isomorphe à l'anneau $R^{\mathfrak{S}_2}$ des invariants de R sous l'action du groupe symétrique \mathfrak{S}_2 (qui échange x_1 et x_2), où*

$$R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, q] / (h_{2n}(x_1, x_2), h_n(x_1^2, x_2^2) + q)$$

avec x_1 et x_2 les racines de Chern du fibré tautologique \mathcal{S} et $h_r(x_1, x_2)$ la r -ième fonction symétrique complète en les variables x_1, x_2 .

2. $\text{QA}^*(\text{IG}(2, 2n + 1))_{q \neq 0}$ est semi-simple.

Démonstration. 1. On utilise la relation de récurrence $d_r = \sigma_1 d_{r-1} - \sigma_{1,1} d_{r-2}$ pour prouver que $d_r = h_r(x_1, x_2)$ pour tout r . Alors :

$$d'_{2n+1} = \frac{h_{2n+1}(x_1, x_2)}{x_1 + x_2} = h_n(x_1^2, x_2^2).$$

2. Il suffit de prouver la semi-simplicité de R localisé en $q \neq 0$. On peut supposer $q = -1$. En utilisant le fait que $(x_1 - x_2)h_{2n}(x_1, x_2) = x_1^{2n+1} - x_2^{2n+1}$ et en remarquant qu'on doit avoir $x_2 \neq 0$, la première relation implique que $x_1 = \zeta x_2$, où $\zeta \neq 1$ est une racine $(2n + 1)$ -ème de l'unité. En remplaçant ceci dans la seconde relation $h_n(x_1^2, x_2^2) - 1 = 0$, on obtient $x_1^{2n} = 1 + \zeta$. Puisque $\zeta \neq -1$, cette équation possède $2n$ solutions distinctes. Donc on a $2n$ solutions distinctes pour x_1 , et pour chaque x_1 on a $2n$ solutions distinctes pour x_2 , ce qui nous donne (au moins) $4n^2$ solutions distinctes pour le couple (x_1, x_2) . Mais le nombre de solutions, comptées avec leur multiplicité, doit être égal au double du rang de $\text{A}^*(\text{IG}(2, 2n + 1))$, qui est égal à $2n^2$. Donc il n'y pas d'autre solution, et toutes les solutions sont simples. D'où la semi-simplicité. \square

Dans [Kuz08], Kuznetsov a calculé des collections exceptionnelles pour la grassmannienne symplectique paire de droites. On verra au chapitre 4 que ce résultat s'adapte facilement au cas impair, et que par conséquent la première partie de la conjecture de Dubrovin (cf conjecture 4.1) est vérifiée pour la grassmannienne symplectique impaire de droites.

3.2.2 A l'aide de la fonction J

Dans cette partie, on explicite la fonction J (définie au paragraphe 1.4.1) des grassmanniennes de droites symplectiques impaires. Lorsque X est une variété dont la cohomologie est engendré par les diviseurs, le théorème de reconstruction de Kontsevich-Manin (cf [KM94]) permet de reconstruire tous les invariants de Gromov-Witten à partir des invariants à un point avec descendants, et donc à partir de la fonction J . Lorsque X est une grassmannienne symplectique impaire, on peut se demander dans quelle mesure cette propriété reste vraie. On verra dans la suite comment extraire certains invariants que nous avons déjà calculés, en on constatera au passage que cette opération n'est en général pas particulièrement aisée. Les résultats confirment en tout cas ceux du paragraphe 3.2.1.

3.2.2.1 Fonction J de $\text{IG}(2, 2n + 1)$

Pour déterminer la fonction J de $\text{IG}(2, 2n + 1)$, on utilise un théorème miroir (cf [Prz07], corollaire 4.2.2) donnant la fonction J d'une intersection complète de Fano :

Proposition 3.15. *Soit Y une variété de Fano d'indice ≥ 2 intersection complète d'hypersurfaces Y_1, \dots, Y_l de degrés d_1, \dots, d_l dans une variété projective lisse X telle que $\text{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Alors*

$$\sum_{d \geq 0} \prod_{j=1}^l \prod_{i=1}^{d \cdot d_j} (Y_j + i) J_d^X q^{\deg Y \cdot d} = \sum_{d \geq 0} J_d^Y q^{\deg Y \cdot d},$$

où $\deg Y := d_1 \cdots d_l$.

Or on a vu au chapitre 1 que la fonction J^G de la grassmannienne usuelle est connue (cf théorème 1.25). Dans le cas $m = 2$, on dispose même d'un résultat plus précis pour le terme constant de J^G :

Corollaire 3.16 ([BCFK05]). *Le terme constant de J^G pour $G := G(2, N)$ est*

$$\sum_{d \geq 0} \frac{q^d}{(d!)^N} \frac{(-1)^d}{2} \sum_{l=0}^d \binom{d}{l}^N (N(d-2l)(\gamma(l) - \gamma(d-l)) + 2),$$

où $\gamma(l) := \sum_{j=1}^l \frac{1}{j}$ si $l > 0$ et $\gamma(0) = 0$.

Les propositions 3.15 et 1.25 ainsi que le corollaire 3.16 nous permettent de calculer la fonction J de $\text{IG}(2, 2n + 1)$ (et par la même occasion de $\text{IG}(2, 2n)$) :

Proposition 3.17. *Soient x_1 et x_2 les racines de Chern du fibré tautologique dual \mathcal{S}^* sur $\text{IG} := \text{IG}(2, N)$. Alors*

$J^{\text{IG}} =$

$$\sum_{d \geq 0} (-1)^d \prod_{l=1}^d (x_1 + x_2 + l\hbar) \sum_{d_1+d_2=d} \frac{(x_1 + d_1\hbar - x_2 - d_2\hbar)}{(x_1 - x_2) \prod_{l=1}^{d_1} (x_1 + l\hbar)^N \prod_{l=1}^{d_2} (x_2 + l\hbar)^N} q^d.$$

De plus, le terme constant de J^{IG} est donné par :

$$\sum_{d \geq 0} \frac{q^d}{(d!)^{N-1}} \frac{(-1)^d}{2} \sum_{l=0}^d \binom{d}{l}^N (N(d-2l)(\gamma(l) - \gamma(d-l)) + 2),$$

Démonstration. En appliquant les formules des propositions 3.15 et 1.25, on obtient :

$$\sum_{d \geq 0} \prod_{i=1}^d ([\text{IG}] + i) J_d^{\text{IG}} q^d = \sum_{d \geq 0} J_d^{\text{IG}} q^d.$$

car $\text{IG}(2, N)$ est une section hyperplane de la grassmannienne usuelle $G(2, N)$ (cf § 3.1.2). En remarquant que $[\text{IG}] = x_1 + x_2$ on obtient la première formule. Cette formule nous indique aussi immédiatement que le terme constant de J^{IG} est égal à $d!$ fois celui de J^G , qui est calculé au corollaire 3.16. \square

3.2.2.2 Calcul pour IG(2, 5) et IG(2, 7)

Dans [Prz07], Przyjalkowski présente une méthode pour calculer certains invariants de Gromov-Witten de deux variétés de Fano de dimension 3 à l'aide de la fonction J . En effet, connaître la fonction J équivaut à connaître tous les invariants à un point marqué avec descendants. L'axiome du diviseur ainsi que les relations de récurrence topologique de Kontsevich et Manin (cf [KM94]) permettent d'exprimer ces invariants en fonction d'invariants premiers (c'est-à-dire sans descendants) à deux points marqués. Or les invariants à deux points marqués permettent de calculer le diagramme de Hasse quantique.

Cette méthode peut s'appliquer au cas de IG(2, $2n + 1$) avec quelques difficultés supplémentaires. En effet, contrairement à ce qui se passe dans les exemples de [Prz07], la cohomologie de IG(2, $2n + 1$) n'est pas engendrée par les diviseurs, donc l'application des relations de récurrence topologique est plus compliquée. De plus, ces formules utilisent la dualité de Poincaré, qui, comme on l'a vu à la proposition 3.1, n'est pas particulièrement simple pour IG(2, $2n + 1$). Enfin, une fois les coefficients de la fonction J exprimés en fonction des invariants premiers à deux marques, on obtient simplement des équations (polynomiales) à coefficients rationnels en ces invariants ; reste ensuite à les résoudre, ce qui est en général compliqué. Néanmoins, cette méthode nous permet de retrouver certains des résultats du paragraphe 3.2.1.3 dans deux exemples : celui de IG(2, 5) et celui de IG(2, 7).

IG(2,5) Les classes de Schubert $\{1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_{3,-1}, \sigma_{2,1}, \sigma_3, \sigma_{3,1}, \sigma_{3,2}\}$ forment une base de la cohomologie de IG(2, 5). On cherche à calculer les invariants $\alpha := I_1(\sigma_{2,1}, \sigma_{3,2})$, $\beta := I_1(\sigma_3, \sigma_{3,2})$ et $\gamma := I_1(\sigma_{3,1}, \sigma_{3,1})$. En effet, pour des raisons de dimension, on a $I_d(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ si $d \geq 2$, donc les seuls invariants à deux points marqués non classiques sont les trois invariants de degré 1 ci-dessus. On cherche donc à exprimer en fonction de α , β et γ le terme constant de la fonction J , c'est-à-dire les coefficients $I_d(\tau_{4d-2}\sigma_{3,2})$ pour $d \geq 1$.

D'après l'axiome du diviseur, on a

$$I_d(\tau_{4d-2}\sigma_{3,2}) = \frac{1}{d}I_d(\sigma_1, \tau_{4d-2}\sigma_{3,2}).$$

Posons $b_{\lambda,d} := I_d(\sigma_\lambda, \tau_{4d-1-|\lambda|}\sigma_{3,2})$. A nouveau par l'axiome du diviseur, on a

$$b_{\lambda,d} = \frac{1}{d}I_d(\sigma_1, \sigma_\lambda, \tau_{4d-1-|\lambda|}\sigma_{3,2}).$$

On utilise maintenant les formules de récursion topologique (cf [KM94]) pour faire décroître progressivement le coefficient de la classe ψ_1 :

$$\begin{aligned} db_{\lambda,d} &= I_d(\sigma_1, \sigma_\lambda, \tau_{4d-1-|\lambda|}\sigma_{3,2}) \\ &= \sum_{d_1+d_2=d} \sum_{\mu} I_{d_1}(\sigma_\mu, \tau_{4d-2-|\lambda|}\sigma_{3,2}) I_{d_2}(\sigma_1, \sigma_\lambda, \sigma_\mu^\vee). \end{aligned}$$

Remarquons que $I_{d_2}(\sigma_1, \sigma_\lambda, \sigma_\mu^\vee) = 0$ si $d_2 \notin \{0, 1\}$. De plus, ce nombre est nul sauf si ($d_2 = 0$ et $|\mu| = |\lambda| + 1$) ou ($d_2 = 1$ et $|\mu| = |\lambda| - 3$). Par conséquent, on

obtient les relations de récurrence suivantes sur les $b_{\lambda,d}$:

$$\begin{aligned}
db_{(3,2),d} &= (\alpha + \beta)b_{(2),d-1} + \beta b_{(3,-1),d-1} \\
db_{(3,1),d} &= b_{(3,2),d} + \gamma b_{(1),d-1} \\
db_{(3),d} &= b_{(3,1),d} + \beta b_{(0),d-1} \\
db_{(2,1),d} &= b_{(3,1),d} + \alpha b_{(0),d-1} \\
db_{(3,-1),d} &= b_{(3),d} \\
db_{(2),d} &= b_{(2,1),d} + b_{(3),d} \\
db_{(1),d} &= 2b_{(2),d} + b_{(3,-1),d} \\
db_{(0),d} &= b_{(1),d}.
\end{aligned}$$

Les valeurs initiales sont :

$$\begin{aligned}
b_{(2,1),1} &= \alpha \\
b_{(3),1} &= \beta.
\end{aligned}$$

Grâce à ces relations de récurrence, on peut calculer les premières valeurs de $I_d(\tau_{4d-2}\sigma_{3,2}) = \frac{1}{d}b_{(1),d}$ en fonction de α, β, γ :

- Terme en degré 1 :

$$I_1(\tau_2\sigma_{3,2}) = 2\alpha + 3\beta.$$

- Terme en degré 2 :

$$I_2(\tau_6\sigma_{3,2}) = \frac{21}{64}\alpha^2 + \frac{29}{32}\alpha\beta + \frac{23}{32}\beta^2 + \frac{5}{16}\alpha\gamma + \frac{15}{32}\beta\gamma.$$

- Terme en degré 3 :

$$\begin{aligned}
I_3(\tau_{10}\sigma_{3,2}) &= \frac{289}{23328}\alpha^3 + \frac{2311}{46656}\alpha^2\beta + \frac{1697}{23328}\alpha\beta^2 + \frac{307}{7776}\beta^3 \\
&+ \frac{575}{23328}\alpha^2\gamma + \frac{425}{7776}\beta^2\gamma + \frac{275}{3888}\alpha\beta\gamma + \frac{25}{1944}\alpha\gamma^2 + \frac{25}{1296}\beta\gamma^2.
\end{aligned}$$

Or d'après la proposition 3.17, le terme constant de $J^{\text{IG}(2,5)}$ est

$$1 + 3q + \frac{19}{16}q^2 + \frac{49}{432}q^3 + \frac{139}{3834}q^4 + \dots$$

On a donc le système d'équations suivant, à inconnues dans \mathbb{Z} (les invariants de Gromov-Witten sur des variétés lisses étant nécessairement entiers) :

$$\begin{cases}
2\alpha + 3\beta & = 3 \\
\frac{21}{64}\alpha^2 + \frac{29}{32}\alpha\beta + \frac{23}{32}\beta^2 + \frac{5}{16}\alpha\gamma + \frac{15}{32}\beta\gamma & = \frac{19}{16} \\
\frac{289}{23328}\alpha^3 + \frac{2311}{46656}\alpha^2\beta + \frac{1697}{23328}\alpha\beta^2 + \frac{307}{7776}\beta^3 \\
+ \frac{575}{23328}\alpha^2\gamma + \frac{425}{7776}\beta^2\gamma + \frac{275}{3888}\alpha\beta\gamma + \frac{25}{1944}\alpha\gamma^2 + \frac{25}{1296}\beta\gamma^2 & = \frac{49}{432}.
\end{cases}$$

dont la seule solution entière est

$$\begin{cases}
\alpha & = 0 \\
\beta & = 1 \\
\gamma & = 1.
\end{cases}$$

Pour le voir, il suffit d'utiliser les deux premières expressions, qui permettent d'exprimer α et γ comme des polynômes en β , puis de remplacer dans la dernière relation et d'utiliser le critère d'Eisenstein.

On remarque que ce résultat est cohérent avec la formule de Pieri quantique démontrée au paragraphe 3.2.1.3.

IG(2,7) Les classes de Schubert

$\{1, \sigma_1, \sigma_{1,1}, \sigma_2, \sigma_{2,1}, \sigma_3, \sigma_{3,1}, \sigma_4, \sigma_{5,-1}, \sigma_{3,2}, \sigma_{4,1}, \sigma_5, \sigma_{4,2}, \sigma_{5,1}, \sigma_{4,3}, \sigma_{5,2}, \sigma_{5,3}, \sigma_{5,4}\}$

forment une base de la cohomologie de $\text{IG}(2,5)$. On cherche à calculer les invariants

$$\begin{aligned} \alpha &= I_1(\sigma_{3,2}, \sigma_{5,4}) & \beta &= I_1(\sigma_{4,1}, \sigma_{5,4}) & \gamma &= I_1(\sigma_5, \sigma_{5,4}) & \delta &= I_1(\sigma_{4,2}, \sigma_{5,3}) \\ \epsilon &= I_1(\sigma_{5,1}, \sigma_{5,3}) & \zeta &= I_1(\sigma_{4,3}, \sigma_{4,3}) & \eta &= I_1(\sigma_{4,3}, \sigma_{5,2}) & \theta &= I_1(\sigma_{5,2}, \sigma_{5,2}). \end{aligned}$$

En effet, pour des raisons de dimension on a $I_d(\gamma_1, \gamma_2) = 0$ si $d \geq 2$ donc les seuls invariants à deux points marqués non classiques sont les huit invariants de degré 1 ci-dessus. Exprimons donc en fonction des variables ci-dessus le terme constant de la fonction J , c'est-à-dire les coefficients $I_d(\tau_{6d-2}\sigma_{5,4})$ pour $d \geq 1$. D'après l'axiome du diviseur, on a

$$I_d(\tau_{6d-2}\sigma_{5,4}) = \frac{1}{d} I_d(\sigma_1, \tau_{6d-2}\sigma_{5,4}).$$

Posons $b_{\lambda,d} := I_d(\sigma_\lambda, \tau_{6d-1-|\lambda|}\sigma_{5,4})$. A nouveau par l'axiome du diviseur, on a

$$b_{\lambda,d} = \frac{1}{d} I_d(\sigma_1, \sigma_\lambda, \tau_{6d-1-|\lambda|}\sigma_{5,4}).$$

On utilise maintenant les formules de récursion topologique :

$$\begin{aligned} db_{\lambda,d} &= I_d(\sigma_1, \sigma_\lambda, \tau_{6d-1-|\lambda|}\sigma_{5,4}) \\ &= \sum_{d_1+d_2=d} \sum_{\mu} I_{d_1}(\sigma_\mu, \tau_{6d-2-|\lambda|}\sigma_{5,4}) I_{d_2}(\sigma_1, \sigma_\lambda, \sigma_\mu^\vee). \end{aligned}$$

Remarquons que $I_{d_2}(\sigma_1, \sigma_\lambda, \sigma_\mu^\vee) = 0$ si $d_2 \notin \{0, 1\}$. De plus, ce nombre est nul sauf si ($d_2 = 0$ et $|\mu| = |\lambda| + 1$) ou ($d_2 = 1$ et $|\mu| = |\lambda| - 5$). Par conséquent, on

obtient les relations de récurrence suivantes sur les $b_{\lambda,d}$:

$$\begin{aligned}
db_{(5,4),d} &= (\alpha + \beta)b_{(3,1),d-1} + (\beta + \gamma)b_{(4),d-1} + \gamma b_{(5,-1),d-1} \\
db_{(5,3),d} &= b_{(5,4),d} + \delta b_{(2,1),d-1} + \epsilon b_{(3),d-1} \\
db_{(4,3),d} &= b_{(5,3),d} + \zeta b_{(1,1),d-1} + \eta b_{(2),d-1} \\
db_{(5,2),d} &= b_{(5,3),d} + \eta b_{(1,1),d-1} + \theta b_{(2),d-1} \\
db_{(4,2),d} &= b_{(4,3),d} + b_{(5,2),d} + \delta b_{(1),d-1} \\
db_{(5,1),d} &= b_{(5,2),d} + \epsilon b_{(1),d-1} \\
db_{(3,2),d} &= b_{(4,2),d} + \alpha b_{(0),d-1} \\
db_{(4,1),d} &= b_{(5,1),d} + b_{(4,2),d} + \beta b_{(0),d-1} \\
db_{(5),d} &= b_{(5,1),d} + \gamma b_{(0),d-1} \\
db_{(3,1),d} &= b_{(4,1),d} + b_{(3,2),d} \\
db_{(4),d} &= b_{(4,1),d} + b_{(5),d} \\
db_{(5,-1),d} &= b_{(5),d} \\
db_{(2,1),d} &= b_{(4),d} + 2b_{(3,1),d} \\
db_{(3),d} &= b_{(5,-1),d} + 2b_{(4),d} + b_{(3,1),d} \\
db_{(1,1),d} &= b_{(2,1),d} \\
db_{(2),d} &= b_{(3),d} + b_{(2,1),d} \\
db_{(1),d} &= b_{(2),d} + b_{(1,1),d} \\
db_{(0),d} &= b_{(1),d}.
\end{aligned}$$

Les valeurs initiales sont :

$$\begin{aligned}
b_{(5),1} &= \gamma \\
b_{(4,1),1} &= \beta \\
b_{(3,2),1} &= \alpha.
\end{aligned}$$

Grâce à ces relations de récurrence, on peut calculer les premières valeurs de $I_d(\tau_{6d-2}\sigma_{5,4}) = \frac{1}{d}b_{(1),d}$ en fonction de α, \dots, θ . Cependant ces relations sont bien plus compliquées qu'au cas précédent ; on ne citera donc que celle correspondant aux degrés 1 et 2 :

- Terme en degré 1 :

$$I_1(\tau_4\sigma_{5,4}) = 5\alpha + 9\beta + 5\gamma$$

- Terme en degré 2 :

$$\begin{aligned}
I_2(\tau_{10}\sigma_{5,4}) &= \frac{121}{256}\gamma^2 + \frac{21}{64}\gamma\eta + \frac{21}{32}\beta\eta + \frac{49}{128}\alpha\eta + \frac{7}{16}\gamma\theta + \frac{21}{32}\beta\theta + \frac{21}{64}\alpha\theta \\
&+ \frac{161}{256}\gamma\delta + \frac{315}{256}\beta\delta + \frac{91}{128}\alpha\delta + \frac{203}{256}\gamma\epsilon + \frac{315}{256}\beta\epsilon + \frac{161}{256}\alpha\epsilon \\
&+ \frac{345}{256}\beta^2 + \frac{381}{256}\alpha\beta + \frac{221}{512}\alpha^2 + \frac{381}{256}\beta\gamma + \frac{25}{32}\alpha\gamma + \frac{7}{128}\gamma\zeta \\
&+ \frac{21}{128}\beta\zeta + \frac{7}{64}\alpha\zeta.
\end{aligned}$$

Le terme constant de $J^{IG(2,7)}$ est

$$1 + 5q + \frac{109}{64}q^2 + \frac{3317}{46656}q^3 + \frac{121501}{191102976}q^4 + \dots$$

Comme pour $\text{IG}(2, 5)$, on obtient un système d'équations polynomiales à coefficients rationnels en les inconnues (entières) α, \dots, θ . Cette fois, il est difficile de le résoudre. Néanmoins, on peut vérifier que les valeurs de α, \dots, θ obtenues par les techniques du paragraphe 3.2.1 sont bien solutions des premiers termes de ce système.

3.2.3 A l'aide de la variété des droites

Au paragraphe 2.6.2, on a montré que la variété des droites Y_1 de la grassmannienne symplectique impaire de droites $\text{IG}(2, 2n+1)$ est isomorphe à l'éclatement de la sous-variété de codimension trois $\text{IG}(3, 2n+1)$ dans $\text{G}(3, 2n+1)$. On peut donc décrire l'anneau de Chow de Y_1 en fonction de celles de $\text{IG}(3, 2n+1)$, de $\text{G}(3, 2n+1)$, et du diviseur exceptionnel $D := \mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_3 \cup \mathcal{O}_4$ (cf § 2.6 pour les notations).

3.2.3.1 Anneau de Chow de la variété des droites

Pour comprendre l'anneau de Chow de la variété des droites, on utilise la méthode présentée au paragraphe 6.7 de [Ful84] pour décrire l'anneau de Chow d'un éclatement. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{j} & Y_1 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \text{IG}(3, 2n+1) & \xrightarrow{i} & \text{G}(3, 2n+1) \end{array}$$

où i et j sont les inclusions naturelles, π est définie à la partie 2.6 et ϕ est la restriction de π au diviseur D . D'après [Ful84], on a pour chaque degré k une suite exacte scindée

$$(\star) \quad 0 \rightarrow A_k(\text{IG}(3, 2n+1)) \begin{array}{c} \xleftarrow{\gamma} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} A_k(D) \oplus A_k(\text{G}(3, 2n+1)) \xrightarrow{\beta} A_k(Y_1) \rightarrow 0$$

avec

$$\begin{cases} \alpha(x) = (\phi^*x, -i_*x), \\ \beta(\tilde{x}, y) = j_*\tilde{x} + \pi^*y, \\ \gamma(\tilde{x}, y) = \phi_*\tilde{x}. \end{cases}$$

De plus, on a la "formule-clé" :

$$\pi^*i_*(x) = j_*(c_{d-1}(E) \cap \phi^*x), \quad (3.2)$$

où $E := \phi^*\mathcal{N}_{\text{IG}}\text{G}/\mathcal{N}_D Y_1 = \phi^*\mathcal{N}_{\text{IG}}\text{G}/\mathcal{O}_N(-1)$ et d est la dimension relative de ϕ .

La structure d'anneau est déterminée par les règles suivantes (cf [Ful84], ex. 8.3.9) :

1. $\pi^*y \cup \pi^*y' = \pi^*(y \cup y')$;
2. $j_*\tilde{x} \cup j_*\tilde{x}' = j_*(c_1(j^*\mathcal{O}_{Y_1}(D))\tilde{x} \cup \tilde{x}')$;
3. $\pi^*y \cup j_*\tilde{x} = j_*((\phi^*i^*y) \cup \tilde{x})$.

A l'aide de ces résultats, on peut obtenir la présentation suivante de l'anneau de Chow de Y_1 :

Proposition 3.18 (Présentation de $A^*(Y_1)$).

$$A^*(Y_1) \cong \mathbb{Z}[a_1, a_2, a_3, \delta]/(\rho, f_{2n-1}, d_{2n-1}, d_{2n}, d_{2n-1})$$

où

- $\rho := (a_1a_2 - a_3) - \delta((a_1 - \delta)^2 + a_2)$;
- $f_{2n-1} := \delta f_{2n-2}$, où f_{2r} est la relation définie à la proposition 2.13 ;
- $d_r := \det(a_{1+j-i})_{1 \leq i, j \leq r}$, où l'on pose $a_r := 0$ si $r < 0$ ou $r > 3$ et $a_0 := 1$.

avec $a_1 := \pi^*\sigma_1^G$, $a_2 := \pi^*\sigma_{1,1}^G$, $a_3 := \pi^*\sigma_{1,1,1}^G$ et $\delta = j_*[D]$.

Démonstration. • Montrons tout d'abord que les classes a_1, a_2, a_3 et δ engendrent $A^*(Y_1)$. Pour cela, il suffit de considérer la suite exacte (\star) et de constater

- que $\sigma_1^G, \sigma_{1,1}^G$ et $\sigma_{1,1,1}^G$ engendrent $A^*(G(3, 2n+1))$;
- que $\delta, \phi^*\sigma_1^+, \phi^*\sigma_{1,1}^+$ et $\phi^*\sigma_{1,1,1}^+$ engendrent $A^*(D)$, ce qui est immédiat car D est un fibré projectif au-dessus de $\text{IG}(3, 2n+1)$ et que $\delta = \mathcal{O}_D(-1)$;
- que $j_*(\phi^*\sigma_{1^r}^+) = j_*((\phi^*i^*\sigma_{1^r}^G) \cup [D]) = \pi^*\sigma_{1^r}^G \cup j_*[D] = a_r\delta$ d'après la troisième règle décrivant la structure d'anneau.

- Montrons maintenant que les relations $\rho, f_{2n-1}, d_{2n-1}, d_{2n}$ et d_{2n+1} sont vraies dans $A^*(Y_1)$. En effet, d_{2n-1}, d_{2n} et d_{2n+1} sont les images inverses par π de trois relations vraies sur $A^*(G(3, 2n+1))$ et f_{2n-1} est l'image directe par j de l'image inverse par ϕ d'une relation vraie sur $A^*(\text{IG}(3, 2n+1))$. Enfin, la relation ρ provient de la "formule-clé" (3.2) :

$$\pi^*i_*([\text{IG}(3, 2n+1)]) = j_*(c_2(E) \cap \phi^*[\text{IG}(3, 2n+1)]).$$

En effet, on a $\pi^*i_*([\text{IG}(3, 2n+1)]) = \pi^*(\sigma_1^G \cup \sigma_{1,1}^G - \sigma_{1,1,1}^G) = a_1a_2 - a_3$. Il reste maintenant à calculer $c_2(E)$. Pour cela, remarquons que l'on peut définir deux fibrés vectoriels canoniques sur Y_1 :

- le fibré en droites \mathcal{V} de fibre V au-dessus de $\mathcal{D}(V, W) \in Y_1$;
- le fibré de rang trois \mathcal{W} de fibre W au-dessus de $\mathcal{D}(V, W) \in Y_1$.

Remarquons que $\mathcal{W} = \pi^*\mathcal{S}_G$. Par abus de notation on notera également \mathcal{W} le fibré \mathcal{S}_G .

On a $\mathcal{N} \cong i^*\bigwedge^2 \mathcal{W}^*$. En effet, $\text{IG}(3, 2n+1) \hookrightarrow G(3, 2n+1)$ est le lieu des zéros de la section $\omega \in \bigwedge^2(\mathbb{C}^{2n+1})^*$ de $\bigwedge^2 \mathcal{W}^*$. On en déduit

$$c(E) = c\left(\phi^*i^*\bigwedge^2 \mathcal{W}^*\right) c(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1))^{-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} c_2(E) &= c_2\left(\phi^* i^* \bigwedge^2 \mathcal{W}^*\right) + c_1\left(\phi^* i^* \bigwedge^2 \mathcal{W}^*\right) \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1)) + c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1))^2 \\ &= \phi^*\left((\sigma_1^+)^2 + \sigma_{1,1}^+\right) + 2\phi^* \sigma_1^+ \cup c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1)) + c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1))^2. \end{aligned}$$

Notons $c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1)) =: h_G$ et $c_1(j^* \mathcal{V}^*) =: h = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{W}}(1))$. On a alors $h_G = h - \phi^* \sigma_1^+$. En effet

$$\mathcal{W} \cong \bigwedge^2 \mathcal{W}^* \otimes \det \mathcal{W},$$

d'où

$$\mathcal{O}_{\mathcal{W}}(-1) = \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1) \otimes \det \mathcal{W}.$$

Finalement

$$\begin{aligned} c_2(E) &= \phi^*\left((\sigma_1^+)^2 + \sigma_{1,1}^+\right) + 2\phi^* \sigma_1^+ (h - \phi^* \sigma_1) + (h - \phi^* \sigma_1^+)^2 \\ &= h^2 + \phi^* \sigma_{1,1}^+. \end{aligned}$$

Donc $j_*(c_2(E) \cap \phi^*[\text{IG}(3, 2n+1)]) = j_*(h^2 + \phi^* \sigma_{1,1}^+)$. Or d'après la règle 2 concernant la structure d'anneau, on remarque facilement que

$$j_* h^2 = (\pi^* \sigma_1^G - j_*[D])^2 j_*[D],$$

d'où

$$j_*(c_2(E) \cap \phi^*[\text{IG}(3, 2n+1)]) = (\pi^* \sigma_1^G - j_*[D])^2 j_*[D] + \pi^* \sigma_{1,1}^G j_*[D].$$

La relation $\rho = (a_1 a_2 - a_3) - \delta((a_1 - \delta)^2 + a_2)$ est donc bien vérifiée sur Y_1 .

- Pour montrer que ces cinq relations suffisent à engendrer l'anneau de Chow de Y_1 , il suffit de remarquer que ce résultat est une conséquence du théorème 1 de [DL09]. \square

3.2.3.2 Anneau de Chow de la variété d'incidence

Grâce à cette présentation de l'anneau de Chow de Y_1 , on peut (au moins théoriquement) retrouver les invariants de Gromov-Witten de $\text{IG}(2, 2n+1)$ calculés au paragraphe 3.2.1.3. En effet, considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & I & \\ p \swarrow & & \searrow q \\ \text{IG}(2, 2n+1) & & Y_1 \end{array}$$

où I est la variété d'incidence point/droite, c'est-à-dire

$$I = \{(V, \Sigma, W) \mid \mathcal{D}(V, W) \in Y_1, \Sigma \in \mathcal{D}(V, W)\}.$$

Pour calculer l'invariant de Gromov-Witten de degré 1 $I_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, où γ_1, γ_2 et γ_3 sont des classes de cohomologie de $\text{IG}(2, 2n+1)$, il suffit donc de comprendre

le produit d'intersection $p^*\gamma_1 \cup p^*\gamma_2 \cup p^*\gamma_3$ de I . Or I est un fibré en droites projectives au-dessus de Y_1 . Par conséquent, son anneau de Chow s'exprime en fonction de celui de Y_1 et des classes de Chern du fibré vectoriel associé (cf [Ful84], ex. 8.3.4). On a

$$A^*(I) = (q^*A^*(Y_1)) [H] / (H^2 + c_1(F)H + c_2(F)),$$

où F est un fibré de rang 2 sur Y_1 tel que $\mathbb{P}(F) = I$. Pour comprendre l'anneau de Chow de I il suffit donc d'explicitier la relation $H^2 + c_1(F)H + c_2(F) = 0$.

Notons que, quitte à tensoriser F par un fibré en droites, on peut supposer que

$$H = p^*\sigma_1 = c_1(\Sigma^*),$$

où Σ est (l'image inverse par p du) fibré tautologique sur IG^+ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Sigma \rightarrow \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}/\Sigma \rightarrow 0,$$

où par abus de notation on note également \mathcal{W} l'image inverse par q du fibré \mathcal{W} défini précédemment. Cette suite exacte permet de calculer :

$$c(\mathcal{W}/\Sigma) = 1 + c_1(\mathcal{W}) - c_1(\Sigma) = 1 - q^*\pi^*\sigma_1^G + H.$$

Par conséquent

$$c(\Sigma) = c(\mathcal{W})c(\mathcal{W}/\Sigma)^{-1} = 1 - H + (q^*\pi^*\sigma_{1,1}^G - Hq^*\pi^*\sigma_1^G + H^2). \quad (3.3)$$

Pour trouver la relation sur H , cherchons une autre expression de $c(\Sigma)$ à l'aide de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{V} \rightarrow \Sigma \rightarrow \Sigma/\mathcal{V} \rightarrow 0. \quad (3.4)$$

Calculons tout d'abord $c_1(\mathcal{V}^*)$. Pour cela, remarquons que

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{V}^*) &= [\{\mathcal{D}(V, W) \in Y_1 \mid \phi|_V = 0\}] \text{ pour une forme } \phi \text{ générale} \\ &= [\{\mathcal{D}(V, W) \in Y_1 \mid V \subset H\}] \text{ pour un hyperplan } H \text{ général.} \end{aligned}$$

Comme $c_1(\mathcal{V}^*) \in A^1(Y_1)$, on peut l'écrire sous la forme

$$c_1(\mathcal{V}^*) = \alpha j_*[D] + \beta \pi^*\sigma_1^G$$

avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Pour déterminer β , calculons $\pi_*c_1(\mathcal{V}^*) = \beta\sigma_1^G$. La classe $\pi_*c_1(\mathcal{V}^*)$ est représentée par le diviseur

$$\pi_*c_1(\mathcal{V}^*) = \left[\overline{\{W \in G \setminus \text{IG} \mid W \cap W^\perp \subset H\}} \right].$$

Intersectons ce diviseur avec une droite générale Δ de G :

$$\Delta = \{W \in G \mid U_2 \subset W \subset U_4\},$$

où $U_2 \subset U_4$ sont des sous-espaces de dimension 2 et 4. Comme U_2 est général, on peut supposer que U_2 et U_2^\perp sont supplémentaires dans \mathbb{C}^{2n+1} , d'où $U_4 = U_2 \oplus V_2$ avec $V_2 \subset U_2^\perp$. Si $W \in \Delta$, alors $W = U_2 \oplus L$ avec $L \subset V_2$ de dimension 1, donc $W \cap W^\perp = L$. Or on doit aussi avoir $W \cap W^\perp \subset H$, d'où $L = V_2 \cap H$.

L'intersection est un point, donc $\beta = 1$. Pour déterminer α , calculons $j^*c_1(\mathcal{V}^*)$. Montrons tout d'abord que

$$j^*c_1(\mathcal{V}^*) = D \cap c_1(\mathcal{V}^*) = [\{\mathcal{D}(V, W) \in D \mid V \subset H\}].$$

En effet, l'intersection de D et du diviseur $X_1 = \{\mathcal{D}(V, W) \in Y_1 \mid V \subset H\}$ dans Y_1 est génériquement transverse. On vérifie tout d'abord facilement que $D \cap X_1 \neq D$, donc l'intersection $D \cap X_1$ est propre. On montre également qu'en un point (V, W) de $D \cap X_1$ avec W non isotrope, D et X_1 définissent des conditions indépendantes dans l'espace tangent à Y_1 , donc l'intersection $D \cap X_1$ est en fait génériquement transverse.

Regardons maintenant l'intersection de $\{\mathcal{D}(V, W) \in D \mid V \subset H\}$ avec chaque fibre. Pour $W \in \text{IG}^+$ général, la condition $V \subset W \cap H$ définit une condition de codimension 1 dans la fibre $\mathbb{P}(W) \cong \mathbb{P}^2$. Donc

$$j^*c_1(\mathcal{V}^*) = h + \gamma\phi^*\sigma_1^+ \text{ pour } \gamma \in \mathbb{Z}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} j_*j^*c_1(\mathcal{V}^*) &= j_*h + \gamma j_*\phi^*\sigma_1^+ \\ &= j_*[D]c_1(\mathcal{V}^*) \\ &= j_*[D](\alpha j_*[D] + \pi^*\sigma_1^G) \\ &= -\alpha j_*h + (\alpha + 1)j_*\phi^*\sigma_1 \end{aligned}$$

d'après les règles de multiplication de [Ful84]. D'où finalement

$$c_1(\mathcal{V}^*) = -j_*[D] + \pi^*\sigma_1^G.$$

On peut maintenant calculer d'une autre manière $c(\Sigma)$ grâce à la suite exacte (3.4) :

$$\begin{aligned} c_2(\Sigma) &= c_1(\mathcal{V})c_1(\Sigma/\mathcal{V}) \\ &= c_1(\mathcal{V})(c_1(\Sigma) - c_1(\mathcal{V})) \\ &= Hq^*(\pi^*\sigma_1^G - j_*[D]) + q^*(j_*\phi^*\sigma_1^+ + j_*h - \pi^*(\sigma_1^G)^2). \end{aligned}$$

En identifiant cette expression avec celle de l'équation (3.3), on trouve la relation sur H :

$$H^2 + Hq^*(j_*[D] - 2\pi^*\sigma_1^G) + q^*(\pi^*(\sigma_1^G)^2 - j_*\phi^*\sigma_1^+ - j_*h + \pi^*\sigma_{1,1}^G).$$

En termes des générateurs $q^*a_1, q^*a_2, q^*a_3, q^*\delta$ et H de $A^*(I)$ (cf la proposition 3.18), on obtient finalement la

Proposition 3.19.

$$A^*(I) = A^*(Y_1)[H] / \left(H^2 + Hq^*(\delta - 2a_1) + q^*((a_1 - \delta)^2 + a_2) \right).$$

3.2.3.3 Calcul des invariants

La présentation de l'anneau de Chow de la variété d'incidence I explicitée au paragraphe précédent donne un moyen de calculer les invariants de Gromov-Witten de degré 1 de $\text{IG}(2, 2n+1)$. En effet, l'anneau de Chow de $\text{IG}(2, 2n+1)$

est engendrée par les classes σ_1 et $\sigma_{1,1}$ (pour $n \geq 3$), et il est facile d'exprimer leurs images inverses par p dans l'anneau de Chow de I :

$$\begin{aligned} p^* \sigma_1 &= H, \\ p^* \sigma_{1,1} &= Hq^* (\pi^* \sigma_1^G - j_* [D]) + q^* (j_* \phi^* \sigma_1^\dagger + j_* h - \pi^* (\sigma_1^G)^2). \end{aligned}$$

En termes des générateurs $q^* a_1, q^* a_2, q^* a_3, q^* \delta$ et H de $A^*(Y_1)$ (cf la proposition 3.18), cela donne :

$$\begin{aligned} p^* \sigma_1 &= H \\ p^* \sigma_{1,1} &= Hq^* (a_1 - \delta) - q^* (a_1 - \delta)^2. \end{aligned}$$

Comme mentionné au paragraphe précédent, l'invariant $I_1(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ (où γ_1, γ_2 et γ_3 sont des classes de cohomologie de $\text{IG}(2, 2n + 1)$) est égal au produit d'intersection $p^* \gamma_1 \cup p^* \gamma_2 \cup p^* \gamma_3$. Etant donné que l'on sait exprimer les classes γ_j à l'aide des générateurs σ_1 et $\sigma_{1,1}$ par la formule de Giambelli 3.1.2, le produit d'intersection $p^* \gamma_1 \cup p^* \gamma_2 \cup p^* \gamma_3$ devient un polynôme en $p^* \sigma_1$ et $p^* \sigma_{1,1}$, que l'on peut réduire modulo l'idéal de définition de I grâce à la relation (3.19).

Pour illustrer cette méthode, calculons le diagramme de Hasse de $\text{IG}(2, 9)$. On doit calculer les invariants suivants :

$$\begin{array}{cccc} I_1(\sigma_1, \sigma_7, \sigma_{7,6}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,1}, \sigma_{7,6}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{5,2}, \sigma_{7,6}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{4,3}, \sigma_{7,6}) \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{7,1}, \sigma_{7,5}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,2}, \sigma_{7,5}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{5,3}, \sigma_{7,5}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,2}, \sigma_{7,4}) \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{6,3}, \sigma_{7,4}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{5,4}, \sigma_{7,4}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,2}, \sigma_{6,5}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,3}, \sigma_{6,5}) \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{5,4}, \sigma_{6,5}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,3}, \sigma_{7,3}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,3}, \sigma_{6,4}) & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,4}, \sigma_{6,4}). \end{array}$$

Les calculs effectués à l'aide du logiciel Macaulay2 donnent :

$$\begin{array}{lll} I_1(\sigma_1, \sigma_7, \sigma_{7,6}) = 1 & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,1}, \sigma_{7,6}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{5,2}, \sigma_{7,6}) = 0 \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{4,3}, \sigma_{7,6}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,1}, \sigma_{7,5}) = 1 & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,2}, \sigma_{7,5}) = 0 \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{5,3}, \sigma_{7,5}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,2}, \sigma_{7,4}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,3}, \sigma_{7,4}) = 0 \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{5,4}, \sigma_{7,4}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,2}, \sigma_{6,5}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{6,3}, \sigma_{6,5}) = 0 \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{5,4}, \sigma_{6,5}) = 0 & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,3}, \sigma_{7,3}) = 1 & I_1(\sigma_1, \sigma_{7,3}, \sigma_{6,4}) = 0 \\ I_1(\sigma_1, \sigma_{6,4}, \sigma_{6,4}) = 0 & & \end{array}$$

ce qui est bien cohérent avec la règle de Pieri quantique énoncée au paragraphe 3.2.1.3.

L'étude de l'anneau de Chow de la variété des droites et de la variété d'incidence permettent en principe de retrouver les résultats du paragraphe 3.2.1. Cependant la complexité des calculs empêche de faire fonctionner cette méthode au-delà de l'exemple qui vient d'être traité.

Chapitre 4

Sur une conjecture de Dubrovin

Dans ce chapitre, nous allons présenter une conjecture de Dubrovin reliant, lorsque X est une variété de Fano, une propriété de la catégorie dérivée bornée des faisceaux cohérents sur X – l’existence d’une collection exceptionnelle complète (cf § 4.1), à la semi-simplicité de sa grande cohomologie quantique (cf § 4.2). On verra à la partie 4.3 que cette conjecture n’a été établie que dans relativement peu de cas ; elle n’a notamment pas été démontrée pour tous les espaces homogènes. Enfin, au paragraphe 4.4.2, on présentera une collection exceptionnelle pour le cas de la grassmannienne symplectique impaire de droites $\text{IG}(2, 2n + 1)$, inspirée d’une construction de Kuznetsov pour $\text{IG}(2, 2n)$, ce qui nous permettra de constater que la conjecture de Dubrovin est vérifiée dans ce cas.

4.1 Collections exceptionnelles complètes

Une collection exceptionnelle complète est une suite d’objets dans la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(X)$ d’une variété X , qui joue en quelque sorte le rôle d’une base semi-orthogonale. Avant d’introduire cette notion, commençons tout d’abord par rappeler la définition de la catégorie dérivée. On se permettra des approximations dans ce qui suit ; pour des énoncés plus précis on réfère à [Huy06].

Définition 4.1 (Catégorie dérivée de X). Soit X une variété. On note $\mathcal{D}^b(X) := \mathcal{D}^b(\text{Coh}(X))$ la *catégorie dérivée bornée des faisceaux cohérents sur X* :

- les *objets* de $\mathcal{D}^b(X)$ sont les complexes bornés de faisceaux cohérents sur X ;
- un *morphisme* entre les complexes de faisceaux A^\bullet et B^\bullet est un *toit*, c’est-à-dire un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
& C^\bullet & \\
s \swarrow & & \searrow f \\
A^\bullet & & B^\bullet
\end{array}$$

où f est un morphisme de complexes et s un *quasi-isomorphisme*, c'est-à-dire un morphisme de complexes induisant un isomorphisme des faisceaux de cohomologie.

Rappelons que $\mathcal{D}^b(X)$ est une catégorie \mathbb{C} -linéaire triangulée. En particulier, elle possède un foncteur de translation $[1]$, défini de la manière suivante pour tout objet A^\bullet :

$$A[1]^i := A^{i+1} \text{ pour tout } i.$$

$[1]$ possède un inverse $[-1]$; de plus, si l'on applique l fois le foncteur $[1]$ à A^\bullet , on note le résultat simplement $A[l]^\bullet$. Définissons maintenant la notion de collection exceptionnelle complète.

Définition 4.2 (Collection exceptionnelle complète). Notons $\mathrm{RHom}(\bullet, \bullet)$ le foncteur dérivé à droite du foncteur $\mathrm{Hom}(\bullet, \bullet)$. Une collection d'objets

$$(E_1, E_2, \dots, E_n)$$

dans $\mathcal{D}^b(X)$ est dite

1. *exceptionnelle* si l'on a
 - $\mathrm{RHom}(E_i, E_i) = \mathbb{C}$ pour tout i ;
 - $\mathrm{RHom}(E_i, E_j) = 0$ pour tous $i > j$;
2. *complète* si la plus petite sous-catégorie triangulée de $\mathcal{D}^b(X)$ contenant E_1, E_2, \dots, E_n est $\mathcal{D}^b(X)$.

Cette notion est importante car lorsqu'elle existe, une telle collection permet de décrire tous les objets de $\mathcal{D}^b(X)$. En effet, si $\mathcal{D}^b(X)$ possède une collection exceptionnelle complète (E_1, \dots, E_n) , alors tout objet de $\mathcal{D}^b(X)$ possède une filtration dont les quotients sont des sommes directes de $E_i[l_i]$. Il existe également une notion de *collection fortement exceptionnelle*, où la collection vérifie la condition supplémentaire $\mathrm{RHom}(E_i, E_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Notons également qu'à tout faisceau cohérent $\mathcal{F} \in \mathrm{Coh}(X)$ est associé un élément de $\mathcal{D}^b(X)$, correspondant au complexe $(\dots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0 \rightarrow \dots)$. Lorsque par la suite on parlera d'un faisceau comme d'un objet de la catégorie dérivée, c'est à cette identification qu'on fera allusion.

Notons que pour une variété X quelconque, $\mathcal{D}^b(X)$ n'a aucune raison de posséder une collection exceptionnelle complète, ni même des objets exceptionnels (c'est-à-dire des objets E tels que $\mathrm{RHom}(E, E) = \mathbb{C}$). Par exemple, si X est une variété de Calabi-Yau projective lisse, alors $\mathcal{D}^b(X)$ ne possède aucun objet exceptionnel. Cependant, les variétés de Fano possèdent toujours des collections exceptionnelles (pas nécessairement complètes) : si X est une variété de Fano d'indice i (cf remarque 1.3) et H un diviseur ample tel que $-K_X = iH$, alors par le théorème d'annulation de Kodaira, la collection

$$(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(H), \dots, \mathcal{O}_X((i-1)H)) \tag{4.1}$$

est exceptionnelle. On verra à la partie 4.3 que la conjecture de Dubrovin relie l'existence de collections exceptionnelles complètes pour les variétés de Fano à certaines propriétés de leur cohomologie quantique. Dans ce qui suit, on va énumérer les variétés de Fano pour lesquelles sont connues des collections exceptionnelles complètes.

Notons tout d'abord qu'Orlov a montré dans [Orl92] que le projectivisé d'un fibré vectoriel sur une base possédant une collection exceptionnelle complète admet également une collection exceptionnelle complète, et que l'éclatement en un nombre fini de points d'une variété possédant une collection exceptionnelle complète en possède également une.

Variétés de Fano de dimension 2 ou 3. Le résultat a été démontré par Kuleshov et Orlov dans [KO94] pour les surfaces de Del Pezzo. En dimension 3, il a été démontré pour 36 des 59 familles de variétés de Fano de dimension 3 n'ayant pas de cohomologie en dimension impaire (cf [Cio05]).

Variétés toriques projectives. Dans le cas où X est une variété torique projective avec au plus des singularités quotients, Kawamata a construit dans [Kaw06] une collection exceptionnelle complète. Une conjecture de King [Kin97] affirme que sur toute variété torique projective lisse de Fano X , il existe une collection fortement exceptionnelle complète constituée de fibrés vectoriels. A l'origine, cette conjecture a été formulée sans la condition X Fano, mais des contre-exemples ont été trouvés par Hille et Perling [HP06] et Michalek [Mic10].

Espaces homogènes en type A , quadriques. Dans tous ces cas, des collections exceptionnelles complètes ont été explicitement déterminées par Kapranov dans [Kap88]. Par exemple, pour l'espace projectif \mathbb{P}^n , cette collection est $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \dots, \mathcal{O}(n))$. Notons que cette collection correspond à la collection (4.1), qui est exceptionnelle pour toutes les variétés de Fano, mais qui dans le cas de l'espace projectif se trouve en plus être complète.

Grassmanniennes isotropes de droites. Kuznetsov a montré dans [Kuz08] que les grassmanniennes isotropes $IG(2, 2n)$ et $OG(2, 2n + 1)$ possèdent des collections exceptionnelles complètes de fibrés vectoriels (et pas seulement de complexes de faisceaux). Les fibrés intervenant dans la collection sont des puissances symétriques du fibré tautologique dual tensorisées par $\mathcal{O}(1)$. On énoncera plus précisément ce résultat à la partie 4.4, où on l'adaptera au cas des grassmanniennes symplectiques impaires de droites.

Autres espaces homogènes. L'existence d'une collection exceptionnelle complète pour les variétés de drapeaux complets en types B , C et D a été démontrée par Samokhin dans [Sam07] à l'aide du résultat d'Orlov mentionné précédemment. Dans le même article, il a aussi prouvé ce résultat pour $LG(3, 6)$, et avec Polishchuk, il l'a étendu à $LG(4, 8)$ et à $LG(5, 10)$ dans [PS09]. L'existence d'une collection exceptionnelle complète a été démontrée par Kuznetsov dans [Kuz06] pour $OG(5, 10)$ et la grassmannienne G_2/P_2 . Enfin, le plan de Cayley $\mathbb{O}\mathbb{P}^2 = E_6/P_1$ possède une collection exceptionnelle de 27 fibrés vectoriels, qui est conjecturée être complète (cf [Man11]).

4.2 Cohomologie quantique et semi-simplicité

Dans cette partie, on va considérer non pas, comme dans le reste de ce travail, la petite cohomologie quantique mais la grande, définie à la remarque 1.3 du chapitre 1. On dira que la cohomologie quantique d'une variété projective lisse X est *semi-simple* s'il existe un $\tau \in U \subset H^*(X, \mathbb{Z})$, où $U \ni 0$ est l'ouvert de convergence du grand produit quantique, tel que l'algèbre $(QH^*(X, \mathbb{Z}), \star_\tau)$ soit semi-simple. En particulier, si la petite cohomologie quantique est semi-simple, alors la grande l'est également, mais la réciproque est a priori fautive.

La semi-simplicité de la cohomologie quantique est une propriété très intéressante ; en effet, Givental a conjecturé dans [Giv01] que lorsque cette propriété est vérifiée, les invariants de Gromov-Witten en genre supérieur ou égal à 1 peuvent être reconstruits à partir des invariants en genre 0. Givental a prouvé ce résultat pour les variétés toriques de Fano, et le cas général a été démontré par Teleman (cf [Tel07]). Cependant, la semi-simplicité est une propriété très forte qui est loin d'être tout le temps vérifiée ; en particulier, Hertling, Manin et Teleman ont prouvé que si la cohomologie paire d'une variété X est semi-simple, alors X n'a pas de cohomologie impaire (cf [HMT09]).

La semi-simplicité de la grande cohomologie quantique a été démontrée dans les cas suivants :

- les variétés toriques projectives lisses (cf [Iri07]) ;
- les grassmanniennes en type A , et plus généralement les espaces homogènes minuscules et cominuscules (cf [CMP10]) ;
- les surfaces de Del Pezzo (cf [BM04]), et plus généralement les surfaces rationnelles (cf [Bay04]) ;
- les éclatements en un nombre fini de points d'une variété dont la cohomologie quantique est semi-simple (cf [Bay04]) ;
- les espaces homogènes adjoints non coadjoints : $OG(2, 2n + 1)$, F_4/P_1 et G_2/P_2 (cf [CP09]) ;
- 36 des 59 familles de variétés de Fano de dimension 3 dont la cohomologie impaire est nulle (cf [Cio05]).

Notons que dans tout les cas sauf le premier, le résultat démontré est en fait la semi-simplicité de la *petite* cohomologie quantique.

Autour d'un point τ pour laquelle la cohomologie quantique est semi-simple, Dubrovin définit dans [Dub99] une famille d'équations différentielles. A une singularité de cette famille est associée une matrice S à coefficients entiers appelée *matrice de Stokes*. Pour une explication de la définition de ce système différentiel et de la matrice de Stokes, on réfère à [Ued05a]. Dans [Dub99], Dubrovin montre que S est définie de manière unique modulo une action du groupe de tresses B_N , où $N = \text{rg } H^*(X, \mathbb{C})$. On verra à la partie suivante que cette action est la même que celle que le groupe de tresses définit sur les collections exceptionnelles complètes (cf proposition 4.3).

Pour conclure ce paragraphe, présentons les exemples pour lesquels la matrice de Stokes est connue :

- l'espace projectif (cf [Guz99]) ;

- les grassmanniennes usuelles (cf [Ued05b]);
- la surface cubique lisse (cf [Ued05a]).

4.3 Conjecture de Dubrovin

Dans cette partie, nous allons énoncer une conjecture de Dubrovin [Dub98] qui relie, pour les variétés de Fano, l'existence de collections exceptionnelles complètes dans leur catégorie dérivée et la semi-simplicité de leur cohomologie quantique. Plus précisément :

Conjecture 4.1 (Dubrovin). *Soit X une variété de Fano et N le rang de son anneau de cohomologie. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathcal{D}^b(X)$ possède une collection exceptionnelle complète (E_1, E_2, \dots, E_N) constituée de N objets;
2. la grande cohomologie quantique de X est semi-simple.

De plus, dans ce cas, modulo l'action du groupe de tresses, la matrice de Stokes $S = (s_{ij})$ est donnée par

$$s_{ij} = \chi(E_i, E_j) = \sum_k (-1)^k \dim \text{Ext}^k(E_i, E_j) \text{ pour tous } i, j.$$

Remarque 4.1. La conjecture initiale était légèrement différente, puisqu'elle postulait l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

1. la cohomologie quantique de X est semi-simple;
2. X est une variété de Fano possédant une collection exceptionnelle complète.

Sous cette forme, la conjecture est inexacte, puisqu'il n'est pas nécessaire que X soit Fano pour que sa cohomologie quantique soit semi-simple ou qu'elle possède une collection exceptionnelle complète. En effet, ces deux propriétés sont préservées lorsqu'on éclate un nombre fini de points (cf [Orl92] et [Bay04]).

A la partie précédente, on a évoqué l'existence d'une action du groupe de tresses B_N sur la matrice de Stokes. On va maintenant décrire une action de B_N sur les collections exceptionnelles complètes par *mutations* :

Définition 4.3. Soit (A, B) une paire exceptionnelle dans $\mathcal{D}^b(X)$. Il existe un morphisme canonique $\text{RHom}(A, B) \otimes A \rightarrow B$, et par définition, la *mutation à gauche* de B sur A , notée $L_A B$, est l'objet qui complète ce morphisme en un triangle distingué

$$L_A B[-1] \rightarrow \text{RHom}(A, B) \otimes A \rightarrow B \rightarrow L_A B. \quad (4.2)$$

De même, il existe un morphisme canonique $A \rightarrow \text{RHom}(A, B)^* \otimes B$, et on définit la *mutation à droite* de A sur B comme l'objet qui complète ce morphisme en un triangle distingué

$$R_B A \rightarrow A \rightarrow \text{RHom}^*(A, B) \otimes B \rightarrow R_B A[1]. \quad (4.3)$$

Si $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_N)$ est une collection exceptionnelle, on définit les collections

$$\begin{aligned} L_i \mathcal{E} &= (E_1, \dots, E_{i-1}, L_{E_i} E_{i+1}, E_i, E_{i+2}, \dots, E_N) \\ R_i \mathcal{E} &= (E_1, \dots, E_{i-1}, E_{i+1}, R_{E_{i+1}} E_i, E_{i+2}, \dots, E_N). \end{aligned}$$

Théorème 4.2 ([Gor90], section 2.3). *1. Les opérations R_i et L_i sont inverses l'une de l'autre.*

2. Les collections $L_i \mathcal{E}$ et $R_i \mathcal{E}$ sont exceptionnelles.

3. Si \mathcal{E} est complète, alors $L_i \mathcal{E}$ et $R_i \mathcal{E}$ le sont aussi.

4. Les mutations à droite et à gauche définissent une action du groupe de tresses B_N sur les collections exceptionnelles, c'est-à-dire que $R_i \circ R_{i+1} \circ R_i = R_{i+1} \circ R_i \circ R_{i+1}$ et $L_i \circ L_{i+1} \circ L_i = L_{i+1} \circ L_i \circ L_{i+1}$.

Notons $M = (m_{i,j})$ la matrice définie par $m_{i,j} = \chi(E_i, E_j)$. On donne ici un résultat probablement bien connu mais dont nous n'avons pas trouvé de référence dans la littérature.

Proposition 4.3. *L'action de $R_i \in B_N$ sur la matrice M est donnée par $M \mapsto K^i(M)MK^i(M)$, où $K^i(M)$ est une matrice diagonale par blocs construite à partir de M :*

$$K^i(M) = \text{Diag}(I_{i-1}, A(M), I_{N-i-1}),$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -m_{i,i+1} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer les trois résultats suivants :

$$\chi(E_l, R_{E_{i+1}} E_i) = \chi(E_l, E_i) - \chi(E_l, E_{i+1})\chi(E_i, E_{i+1}) \text{ pour } l < i, \quad (4.4)$$

$$\chi(E_{i+1}, R_{E_{i+1}} E_i) = -\chi(E_i, E_{i+1}), \quad (4.5)$$

$$\chi(R_{E_{i+1}} E_i, E_m) = \chi(E_i, E_m) - \chi(E_{i+1}, E_m)\chi(E_i, E_{i+1}) \text{ pour } m > i + 1. \quad (4.6)$$

Pour démontrer (4.4), on applique le foncteur $\text{Hom}(E_l, -)$ pour $l < i$ au triangle distingué (4.3), ce qui nous donne la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(E_l, R_{E_{i+1}} E_i) &\rightarrow \text{Hom}(E_l, E_i) \rightarrow \text{Hom}(E_l, \text{RHom}^*(E_i, E_{i+1}) \otimes E_{i+1}) \\ \cdots \rightarrow \text{Ext}^r(E_l, R_{E_{i+1}} E_i) &\rightarrow \text{Ext}^r(E_l, E_i) \rightarrow \text{Ext}^r(E_l, \text{RHom}^*(E_i, E_{i+1}) \otimes E_{i+1}) \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow \end{aligned}$$

d'où l'identité de caractéristiques d'Euler (4.4). De même, on démontre (4.5) en appliquant le foncteur $\text{Hom}(E_{i+1}, -)$ au triangle (4.3). Enfin, si on applique le foncteur $\text{Hom}(-, E_m)$ pour $m > i + 1$ à (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Hom}(\text{RHom}^*(E_i, E_{i+1}) \otimes E_{i+1}, E_m) &\rightarrow \text{Hom}(E_i, E_m) \rightarrow \text{Hom}(R_{E_{i+1}} E_i, E_m) \\ \cdots \rightarrow \text{Ext}^r(\text{RHom}^*(E_i, E_{i+1}) \otimes E_{i+1}, E_m) &\rightarrow \text{Ext}^r(E_i, E_m) \rightarrow \text{Ext}^r(R_{E_{i+1}} E_i, E_m) \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow \end{aligned}$$

d'où l'équation (4.6). □

Cette action du groupe de tresses sur la matrice M se trouve être la même que celle sur la matrice de Stokes S . Ceci permet de donner un sens précis à la conjecture 4.1.

Pour terminer, récapitulons les exemples présentés dans les deux parties précédentes. On constate que la première partie de la conjecture (l'équivalence) a été démontrée dans les cas suivants :

- les variétés toriques projectives lisses ;
- les grassmanniennes en type A ;
- les surfaces de Del Pezzo et les 36 variétés de Fano de dimension 3 mentionnées précédemment ;
- les quadriques ;
- les grassmanniennes orthogonales $OG(2, 2n + 1)$ et $OG(5, 10)$;
- les grassmanniennes lagrangiennes $LG(3, 6)$, $LG(4, 8)$ et $LG(5, 10)$;
- G_2/P_2 .

La seconde partie, quant à elle, n'a été démontrée que dans deux cas :

- les espaces projectifs, plus généralement les grassmanniennes de type A ;
- la surface cubique lisse.

En plus des exemples présentés ci-dessus, un argument allant dans le sens de la conjecture 4.1 est apporté par la symétrie miroir, comme le fait remarquer Teleman dans [Tel10]. En effet, à une variété de Fano X dont la cohomologie quantique est semi-simple devrait être associé un modèle de Landau-Ginzburg dont le potentiel W est suffisamment peu singulier pour que la catégorie de Fukaya-Seidel correspondante possède une collection exceptionnelle complète, ce qui devrait assurer l'existence d'une collection exceptionnelle complète dans $\mathcal{D}^b(X)$. Cette idée s'inscrit dans le contexte de la *symétrie miroir homologique* introduite par Kontsevich dans [Kon95b]. En effet, Kontsevich conjecture que la catégorie dérivée associée à une variété X devrait être, dans un certain sens, équivalente à la catégorie de Fukaya de son miroir \hat{X} , et dans le cas Fano, on prévoit que le miroir soit un modèle de Landau-Ginzburg. Cette conjecture a par exemple été vérifiée pour les courbes elliptiques (cf [PZ01]) ou les surfaces de Del Pezzo (cf [AKO06]).

4.4 Cas de IG $(2, 2n + 1)$

Dans cette partie, on explique comment trouver une collection exceptionnelle complète pour la grassmannienne symplectique impaire de droites $IG(2, 2n + 1)$. Si on ajoute à cela le fait que la petite – et donc la grande – cohomologie quantique de $IG(2, 2n + 1)$ est semi-simple, cela permettra de vérifier la première partie de la conjecture de Dubrovin 4.1 pour le cas de $IG(2, 2n + 1)$.

Pour trouver cette collection exceptionnelle complète, on utilise celle démontrée par Kuznetsov [Kuz08] pour le cas de la grassmannienne $G(2, N)$, et on adopte la même méthode que celle qu'il emploie pour en déduire une collection

exceptionnelle pour la grassmannienne symplectique $\text{IG}(2, 2n)$. Au paragraphe 4.4.1, on présente la méthode de Kuznetsov, et au paragraphe 4.4.2, on explique comment l'adapter au cas de $\text{IG}(2, 2n + 1)$.

4.4.1 Collection exceptionnelle complète pour $\text{IG}(2, 2n)$

Pour construire une collection exceptionnelle complète pour $\text{IG}(2, 2n)$, Kuznetsov part d'une *collection exceptionnelle de Lefschetz* sur la grassmannienne usuelle $\text{G}(2, 2n)$, dont $\text{IG}(2, 2n)$ est une section hyperplane. Voici la définition d'une collection de Lefschetz :

Définition 4.4. Soit X une variété projective lisse complexe munie d'un fibré en droites ample $\mathcal{O}_X(1)$. Une *collection de Lefschetz* dans $\mathcal{D}^b(X)$ par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$ est une suite d'objets de $\mathcal{D}^b(X)$ possédant une structure par blocs indexés par une partition $\lambda = (\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{i-1} > 0)$, $i > 0$ étant un entier, de la forme

$$\left(\underbrace{E_1, \dots, E_{\lambda_0}}_{\text{premier bloc}}, \underbrace{E_1(1), \dots, E_{\lambda_1}(1)}_{\text{deuxième bloc}}, \dots, \underbrace{E_1(i-1), \dots, E_{\lambda_{i-1}}(i-1)}_{\text{bloc } i} \right)$$

L'intérêt des collections exceptionnelles de Lefschetz est leur comportement vis-à-vis des sections hyperplanes. En effet :

Proposition 4.4. Soit $(E_1, \dots, E_{\lambda_0}, \dots, E_1(i-1), \dots, E_{\lambda_{i-1}}(i-1))$ une *collection exceptionnelle de Lefschetz* de $\mathcal{D}^b(X)$ par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$. Si $Y \subset X$ est une section hyperplane par rapport à $\mathcal{O}_X(1)$, alors

$$(E_1, \dots, E_{\lambda_1}, E_1(1), \dots, E_{\lambda_2}(1), \dots, E_1(i-2), \dots, E_{\lambda_{i-2}}(i-2))$$

est une *collection exceptionnelle de Lefschetz* dans $\mathcal{D}^b(Y)$.

Une collection exceptionnelle de Lefschetz est donc d'autant plus intéressante que l'entier i est grand. De plus, si X est de Fano, on a nécessairement l'inégalité $i \leq \text{ind}(X)$, où $\text{ind}(X)$ désigne l'indice de X (cf remarque 1.3).

Remarquons néanmoins que dans la proposition 4.4, même si l'on part d'une collection de Lefschetz complète pour X , on n'a aucune raison d'obtenir une collection complète pour Y .

Dans un premier temps, Kuznetsov construit une collection exceptionnelle de Lefschetz sur la grassmannienne usuelle $\text{G}(2, N)$, qui est différente de la collection de Kapranov – laquelle n'est pas une collection de Lefschetz. Cette collection est constituée des fibrés $S^l \mathcal{U}^*(k)$ pour certains entiers (k, l) que nous allons décrire. Dans cette partie, pour éviter les risques de confusion avec les puissances symétriques, on désignera le fibré tautologique par \mathcal{U} au lieu de \mathcal{S} . Soient $r = \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ et

$$\mathcal{Y}_N = \left\{ (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq N-1, 0 \leq l \leq r-1 \text{ et } (l \leq r-2 \text{ si } k \geq r \text{ et } N \text{ pair}) \right\}.$$

On considère les \mathcal{Y}_N (et les \mathcal{Y}_N^I , $\tilde{\mathcal{Y}}_N^I$ définis par la suite) comme des ensembles ordonnés pour l'ordre lexicographique sur les couples (k, l) . On a alors le

Théorème 4.5. *La collection de Lefschetz $\{S^l \mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_N\}$ est une collection exceptionnelle complète dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{G}(2, N))$.*

On ne donne pas ici la preuve de ce résultat, mais on va donner l'idée de celle pour le cas de $\mathrm{IG}(2, 2n)$, dont on s'inspirera pour étudier la grassmannienne symplectique impaire (cf § 4.4.2). Posons

$$\mathcal{Y}_{2n}^I = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq 2n - 2, 0 \leq l \leq n - 1 \text{ et } l \leq n - 2 \text{ si } k \geq n - 1\}.$$

Théorème 4.6. *La collection de Lefschetz $\{S^l \mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n}^I\}$ est une collection exceptionnelle complète dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{IG}(2, 2n))$.*

Idée de preuve. Remarquons tout d'abord que le fait que cette collection soit exceptionnelle provient simplement du fait que celle décrite ci-dessus pour $\mathrm{G}(2, 2n)$ l'est, et de la proposition 4.4. Le principal point à démontrer est donc qu'elle est complète. Donnons ici le schéma général de l'argument à utiliser.

La démonstration se fait par récurrence sur n . L'initialisation ($n = 2$) est simplement le cas de la quadrique de dimension trois $\mathrm{IG}(2, 4)$ et de la collection $(\mathcal{O}, \mathcal{U}^*, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2))$, cas qui est connu depuis Kapranov. Supposons maintenant que la propriété est montrée pour $n - 1$ (c'est-à-dire pour $\mathrm{IG}(2, 2n - 2)$) et supposons par l'absurde qu'elle est fautive pour n , c'est-à-dire que la collection $\{S^l \mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n}^I\}$ n'est pas exceptionnelle dans $\mathcal{D}^b(X)$, où $X := \mathrm{IG}(2, 2n)$. On note également $W = \mathbb{C}^{2n}$ et ω une forme symplectique sur W , de telle sorte que $\mathrm{G}_\omega(2, W) = \mathrm{IG}(2, 2n)$.

Par une propriété classique (cf [Bon89]) de la catégorie dérivée des faisceaux cohérents sur une variété, le fait que la collection $\{S^l \mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n}^I\}$ ne soit pas complète implique l'existence d'un objet F non nul orthogonal à droite à tous les fibrés de la collection. Le but va être de montrer qu'un tel objet n'existe pas, c'est-à-dire que si F est orthogonal à droite à tous les fibrés de la collection, alors il est en fait nécessairement nul. Or on a

$$0 = \mathrm{RHom}(S^l \mathcal{U}^*(k), F) = \mathrm{H}^\bullet(X, S^l \mathcal{U}(-k) \otimes F).$$

On utilise maintenant l'hypothèse de récurrence. Pour cela considérons un sous-espace de dimension deux $\mathrm{Vect}(w_1, w_2) \subset W$ tel que $\omega(w_1, w_2) \neq 0$. Si l'on note $V := \mathrm{Vect}(w_1, w_2)^\perp$, $X_V := \mathrm{IG}(2, V)$ est une grassmannienne symplectique avec $\dim V = 2(n - 1)$. L'idée est maintenant de montrer que $i_V^* F = 0$ pour tout V construit comme ci-dessus. En effet, si cette propriété est vraie, le lemme suivant, dont la preuve est analogue à celle du lemme 4.13, nous permet de conclure :

Lemme 4.7 ([Kuz08], lemme 5.5). *Si $i_V^* F = 0$ pour tout sous-espace de dimension deux $\mathrm{Vect}(w_1, w_2) \subset W$ tel que $\omega(w_1, w_2) \neq 0$, alors $F = 0$.*

Pour montrer l'annulation de $i_V^* F = 0$, on utilise une résolution de Koszul du faisceau de structure \mathcal{O}_{X_V} sur $\mathrm{IG}(2, W)$:

Lemme 4.8. *Pour tout sous-espace de dimension deux $\mathrm{Vect}(w_1, w_2) \subset W \cong W^* = \mathrm{H}^0(\mathrm{IG}(2, W), \mathcal{U}^*)$ tel que $\omega(w_1, w_2) \neq 0$, le lieu des zéros de la section associée*

$$\phi = \phi_{w_1, w_2} \in \mathrm{H}^0(\mathrm{IG}(2, W), \mathcal{U}^* \oplus \mathcal{U}^*)$$

sur $\text{IG}(2, W)$ est la grassmannienne symplectique $X_V = \text{IG}(2, V) \subset \text{IG}(2, W)$, où $V = \text{Vect}(w_1, w_2)^\perp$. De plus, on a la résolution suivante du faisceau de structure \mathcal{O}_{X_V} sur $\text{IG}(2, W)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \mathcal{U}_X(-1) \oplus \mathcal{U}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus 3} \oplus S^2\mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{U}_X \oplus \mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_{V*}\mathcal{O}_{X_V} \rightarrow 0,$$

où $i_V : X_V \hookrightarrow X$ est l'inclusion naturelle.

Définissons

$$\tilde{\mathcal{Y}}_{2n-2}^I = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq 2n-2, 0 \leq l \leq n \text{ et } l \leq n-1 \text{ pour } k \geq n-2\}.$$

On a alors le lemme suivant :

Lemme 4.9. *Pour tout $(k, l) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{2n-2}^I$, le fibré vectoriel $S^l\mathcal{U}^*(k)$ est dans la sous-catégorie de $\mathcal{D}^b(\text{IG}(2, 2n))$ engendrée par la collection de Lefschetz*

$$\{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n}^I\}.$$

En écrivant le produit tensoriel de la résolution de Koszul donnée par le lemme 4.8 par $S^l\mathcal{U}(-k) \otimes F$ pour $(k, l) \in \mathcal{Y}_{2n-2}^S$, et en utilisant le lemme 4.9, on remarque que les cinq premiers termes du complexe s'annulent, ce qui donne

$$0 = \text{RHom}(S^l\mathcal{U}^*(k), i_V^*F) = H^\bullet(X_V, S^l\mathcal{U}(-k) \otimes i_V^*F)$$

pour tout $(k, l) \in \mathcal{Y}_{2n-2}^I$. Donc i_V^*F est dans l'orthogonal à droite de la sous-catégorie de $\mathcal{D}^b(X_V)$ engendrée par la collection exceptionnelle

$$\{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n-2}^I\},$$

qui est complète par hypothèse de récurrence. Donc $i_V^*F = 0$ comme souhaité, d'où $F = 0$ par le lemme 4.7, ce qui termine la preuve du théorème 4.6. \square

Pour conclure, on va donner les suites exactes qui interviennent dans la preuve du lemme 4.9, car celles-ci nous seront utiles pour le cas de la grassmannienne symplectique impaire $\text{IG}(2, 2n+1)$. Tout d'abord, on a sur $\text{G}(2, N)$, et également sur $\text{IG}(2, 2n)$ en posant $N = 2n$:

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S^{N-2-p}\mathcal{U}^* \rightarrow W \otimes S^{N-3-p}\mathcal{U}^*(1) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigwedge^{N-3-p} W \otimes \mathcal{U}^*(N-3-p) \rightarrow \\ \bigwedge^{N-2-p} W \otimes \mathcal{O}^*(N-p-2) \rightarrow \bigwedge^p W^* \otimes \mathcal{O}(N-p-1) \rightarrow \bigwedge^{p-1} W^* \otimes \mathcal{U}^*(N-p-1) \\ \rightarrow \cdots \rightarrow W^* \otimes S^{p-1}\mathcal{U}^*(N-p-1) \rightarrow S^p\mathcal{U}^*(N-p-1) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Cette suite exacte s'obtient à partir de la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigwedge^p \mathcal{U}^\perp \rightarrow \bigwedge^p W^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow \bigwedge^{p-1} W^* \otimes \mathcal{U}^* \rightarrow \cdots \rightarrow \\ \rightarrow W^* \otimes S^{p-1}\mathcal{U}^* \rightarrow S^p\mathcal{U}^* \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

associée à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \mathcal{U}^\perp \rightarrow W^* \otimes \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}^* \rightarrow 0$$

et de la suite exacte longue “duale”

$$0 \rightarrow S^{N-2-p}\mathcal{U}^*(p+2-N) \rightarrow W \otimes S^{N-3-p}\mathcal{U}^*(p+3-N) \rightarrow \cdots \rightarrow \quad (4.9)$$

$$\bigwedge^{N-3-p} W \otimes \mathcal{U}^*(-1) \rightarrow \bigwedge^{N-2-p} W \otimes \mathcal{O} \rightarrow \bigwedge^{N-2-p} (W/\mathcal{U}) \rightarrow 0$$

à l’aide des identifications

$$\begin{aligned} \mathcal{U}^{\perp*} &\cong W/\mathcal{U}, \\ S^l\mathcal{U} &\cong S^l\mathcal{U}^*(-l), \\ \bigwedge^p \mathcal{U}^{\perp} &\cong \bigwedge^{N-2-p} (W/\mathcal{U}) \otimes \mathcal{O}_X(-1). \end{aligned}$$

Sur $\text{IG}(2, 2n)$, il existe également un complexe double

$$\begin{array}{ccccccc} & & S^{n-1}\mathcal{U}^* & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & W^* \otimes S^{n-2}\mathcal{U}^*(1) & \longrightarrow & S^{n-1}\mathcal{U}^*(1) & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ \Lambda^2 W^* \otimes S^{n-3}\mathcal{U}^*(2) & \longrightarrow & W^* \otimes S^{n-2}\mathcal{U}^*(2) & \longrightarrow & S^{n-1}\mathcal{U}^*(2) & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \Lambda^{n-2} W^* \otimes \mathcal{U}^*(n-2) & \longrightarrow & \Lambda^{n-3} W^* \otimes S^2\mathcal{U}^*(n-2) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & S^{n-1}\mathcal{U}^*(n-2) \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ \Lambda^{n-1} W^* \otimes \mathcal{O}(n-1) & \longrightarrow & \Lambda^{n-2} W^* \otimes \mathcal{U}^*(n-1) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & W^* \otimes S^{n-2}\mathcal{U}^*(n-1) \rightarrow S^{n-1}\mathcal{U}^*(n-1) \end{array}$$

dont le complexe total est exact. Les lignes du complexe s’obtiennent en recollant des morceaux twistés de la suite exacte (4.8), et ses colonnes s’obtiennent de la même manière à partir de (4.9) (cf [Kuz08], proposition 5.3).

4.4.2 Collection exceptionnelle complète pour $\text{IG}(2, 2n+1)$

Adaptons maintenant la preuve du théorème 4.6 au cas impair. Tout d’abord, on note $W = \mathbb{C}^{2n+1}$ muni d’une forme antisymétrique de rang maximal ω , de sorte qu’on ait $X := G_\omega(2, W) = \text{IG}(2, 2n+1)$. Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{2n+1} &= \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq 2n \text{ et } 0 \leq l \leq n-1\}, \\ \mathcal{Y}_{2n+1}^I &= \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq 2n-1 \text{ et } 0 \leq l \leq n-1\}, \\ \tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I &= \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq k \leq 2n-1 \text{ et } 0 \leq l \leq n\}. \end{aligned}$$

On a vu que $\{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n+1}\}$ est une collection exceptionnelle de Lefschetz pour $G(2, 2n+1)$. Par conséquent, la proposition 4.4 montre que $\{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n+1}^I\}$ est une collection exceptionnelle pour $\text{IG}(2, 2n+1)$. Il reste comme auparavant à montrer que celle-ci est complète. Pour cela, on utilise le même schéma de preuve que pour le théorème 4.6, et les lemmes suivants :

Lemme 4.10. *Pour tout $(k, l) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I$, le fibré vectoriel $S^l\mathcal{U}^*(k)$ est dans la sous-catégorie de $\mathcal{D}^b(X)$ engendrée par la collection de Lefschetz*

$$\mathcal{L} := \{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n+1}^I\}.$$

Démonstration. On a $\tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I \setminus \mathcal{Y}_{2n-1} = \{(0, n), \dots, (2n-1, n)\}$. Or par la preuve du lemme 4.9, on a sur $G(2, W)$ les suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow S^{2n-1-p}\mathcal{U}^* \rightarrow W \otimes S^{2n-2-p}\mathcal{U}^*(1) \rightarrow \dots \rightarrow \bigwedge^{2n-2-p} W \otimes \mathcal{U}^*(2n-2-p) \rightarrow \\ \rightarrow \bigwedge^{2n-1-p} W \otimes \mathcal{U}^*(2n-1-p) \rightarrow \bigwedge^p W^* \otimes \mathcal{O}(2n-p) \rightarrow \bigwedge^{p-1} W^* \otimes \mathcal{U}^*(2n-p) \\ \rightarrow \dots \rightarrow S^p\mathcal{U}^*(2n-p) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour tout $0 \leq p \leq n$. On peut restreindre ces suites exactes à $\text{IG}(2, 2n+1)$.

La suite exacte obtenue pour $p = n$ nous donne une résolution de $S^n\mathcal{U}^*(n)$ par des faisceaux de la sous-catégorie engendrée par \mathcal{L} . En faisant le produit tensoriel par $\mathcal{O}(i)$ pour $1 \leq i \leq n-1$, on obtient également des résolutions pour $S^n\mathcal{U}^*(n+1), \dots, S^n\mathcal{U}^*(2n-1)$. Ensuite, la suite exacte obtenue pour $p = n-1$ donne une résolution de $S^n\mathcal{U}^*$, puis également, après produit tensoriel par $\mathcal{O}(i)$ pour $1 \leq i \leq n-2$, des résolutions de $S^n\mathcal{U}^*(1), \dots, S^n\mathcal{U}^*(n-2)$.

Pour pouvoir conclure, il reste alors simplement à trouver une résolution de $S^n\mathcal{U}^*(n-1)$ par des faisceaux de la sous-catégorie engendrée par \mathcal{L} . Considérons alors $\overline{W} \supset W$ un espace vectoriel de dimension $2n+2$ muni d'une forme symplectique $\overline{\omega}$ prolongeant ω . Sur $G_{\overline{\omega}}(2, \overline{W})$, on a le complexe double rencontré à la fin du paragraphe 4.4.1 :

$$\begin{array}{ccccccc} & S^n\mathcal{U}^* & & & & & \\ & \downarrow & & & & & \\ \overline{W}^* \otimes S^{n-1}\mathcal{U}^*(1) & \longrightarrow & S^n\mathcal{U}^*(1) & & & & \\ & \downarrow & \downarrow & & & & \\ \Lambda^2 \overline{W}^* \otimes S^{n-2}\mathcal{U}^*(2) & \longrightarrow & \overline{W}^* \otimes S^{n-1}\mathcal{U}^*(2) & \longrightarrow & S^n\mathcal{U}^*(2) & & \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ & \dots & \dots & & \dots & & \\ \Lambda^{n-1} \overline{W}^* \otimes \mathcal{U}^*(n-1) & \longrightarrow & \Lambda^{n-2} \overline{W}^* \otimes S^2\mathcal{U}^*(n-1) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & S^n\mathcal{U}^*(n-1) \\ & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^n \overline{W}^* \otimes \mathcal{O}(n) & \longrightarrow & \Lambda^{n-1} \overline{W}^* \otimes \mathcal{U}^*(n) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \overline{W}^* \otimes S^{n-1}\mathcal{U}^*(n) \rightarrow S^n\mathcal{U}^*(n) \end{array}$$

dont le complexe total associé est exact. En restreignant ce complexe à

$$G_{\omega}(2, W) \subset G_{\overline{\omega}}(2, \overline{W}),$$

on obtient un complexe dont tous les termes autres que $S^n\mathcal{U}^*(n-1)$, sont des faisceaux de la sous-catégorie engendrée par \mathcal{L} . Par conséquent, $S^n\mathcal{U}^*(n-1)$ appartient à cette sous-catégorie, ce qui termine la preuve. \square

Lemme 4.11. *Soit $V \subset W$ un sous-espace vectoriel de dimension $2n-1$ tel que $\omega|_V$ soit de rang maximal. Notons $X_V := \text{IG}(2, V)$. Soit $i_V : X_V \hookrightarrow \text{IG}(2, W)$ l'inclusion naturelle. On a alors la résolution de Koszul suivante pour $i_{V*}\mathcal{O}_{X_V}$:*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-2) \rightarrow \mathcal{U}_X(-1) \oplus \mathcal{U}_X(-1) \rightarrow \mathcal{O}_X(-1)^{\oplus 3} \oplus S^2\mathcal{U}_X \rightarrow \mathcal{U}_X \oplus \mathcal{U}_X \rightarrow \\ \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow i_{V*}\mathcal{O}_{X_V} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons qu'à tout sous-espace V comme ci-dessus correspond une section ϕ_V de $\mathcal{U}^* \oplus \mathcal{U}^*$ sur $\text{IG}(2, W)$, et que le lieu des zéros de ϕ_V est $\text{IG}(2, V) \subset \text{IG}(2, W)$. De plus, comme

$$\dim X_V = 4n - 7 = \dim X - 4 = \text{rg}(\mathcal{U}_X^* \oplus \mathcal{U}_X^*),$$

toute section ϕ_V de ce type est régulière, donc le faisceau $i_*\mathcal{O}_{X_V}$ admet une résolution de Koszul qui prend la forme souhaitée. \square

On peut maintenant prouver le résultat suivant :

Théorème 4.12. *La collection de Lefschetz exceptionnelle*

$$\{S^l\mathcal{U}^*(k) \mid (k, l) \in \mathcal{Y}_{2n+1}^I\}$$

est complète dans $\mathcal{D}^b(\text{IG}(2, 2n+1))$.

Démonstration. Comme auparavant, la preuve se fait par récurrence sur n . Lorsque $n = 1$, on se retrouve avec $\text{IG}(2, 3) \cong \mathbb{P}^1$ et la collection exceptionnelle $(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))$, qui est bien complète. Supposons maintenant que n soit supérieur ou égal à 2, qu'on ait prouvé le résultat pour $n - 1$, et qu'en revanche la collection de Lefschetz pour n ne soit pas complète. Alors il existe un objet $F \in \mathcal{D}^b(X)$ qui est orthogonal à droite à tous les fibrés de la collection. On a

$$0 = \text{RHom}(S^l\mathcal{U}^*(k), F) = \mathbf{H}^\bullet(X, S^l\mathcal{U}^*(-k) \otimes F)$$

pour tout $(k, l) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I$. Soit V un espace vérifiant les conditions du lemme 4.11 et $i_V : X_V \hookrightarrow X$ l'inclusion. On va montrer que $i_V^*F = 0$. Pour cela, soit $(k, l) \in \tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I$. Faisons le produit tensoriel de la résolution du lemme 4.11 par $S^l\mathcal{U}^*(-k) \otimes F$. On obtient

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow S^l\mathcal{U}(-2-k) \otimes F \rightarrow (S^{l+1}\mathcal{U}(-1-k) \otimes F \oplus S^{l-1}\mathcal{U}(-2-k) \otimes F)^{\oplus 2} \rightarrow \\ &\rightarrow (S^l\mathcal{U}(-1-k) \otimes F)^{\oplus 4} \oplus S^{l+2}\mathcal{U}(-k) \otimes F \oplus S^{l-2}\mathcal{U}(-2-k) \otimes F \rightarrow \\ &\rightarrow (S^{l+1}\mathcal{U}(-k) \otimes F \oplus S^{l-1}\mathcal{U}(-1-k) \otimes F)^{\oplus 2} \rightarrow S^l\mathcal{U}(-k) \otimes F \rightarrow \\ &\rightarrow S^l\mathcal{U}(-k) \otimes F \otimes i_{V*}\mathcal{O}_{X_V} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Or

$$S^l\mathcal{U}(-k) \otimes F \otimes i_{V*}\mathcal{O}_{X_V} \cong i_{V*}(i_V^*(S^l\mathcal{U}(-k) \otimes F)) \cong i_{V*}(S^l\mathcal{U}(-k) \otimes i_V^*(F)).$$

De plus, si $(k, l) \in \mathcal{Y}_{2n-1}^I$, alors $(k+2, l)$, $(k+2, l-1)$, $(k+1, l+1)$, $(k+1, l)$, $(k+2, l-2)$, $(k, l+2)$, $(k, l+1)$, $(k+1, l-1)$ et (k, l) sont dans $\tilde{\mathcal{Y}}_{2n-1}^I$. Donc la cohomologie des cinq premiers termes du complexe ci-dessus s'annule. Par conséquent

$$\text{RHom}_V(S^l\mathcal{U}^*(k), i_V^*F) = \mathbf{H}^\bullet(X_V, S^l\mathcal{U}^*(-k) \otimes i_V^*F) = 0$$

pour tout $(k, l) \in \mathcal{Y}_{2n-1}^I$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit $i_V^*F = 0$. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 4.13. *Si, pour $F \in \mathcal{D}^b(X)$, on a $i_V^*F = 0$ pour tout sous-espace V de dimension $2n - 1$ vérifiant les conditions du lemme 4.11, alors $F = 0$.*

Preuve du lemme. Si $F \neq 0$, soit q l'entier maximal tel que $H^q(F) \neq 0$. On prend un plan $P \in \text{Supp}H^q(F)$. Alors il existe, dès que $n \geq 2$, un sous-espace V de dimension $2n - 1$ tel que $P \subset V$ et $\omega|_V$ soit de rang maximal. Comme le foncteur i_V^* est exact à gauche, on obtient que $H^q(i_V^*F) \neq 0$, d'où $i_V^*F \neq 0$. \square

Ceci conclut la preuve du théorème. \square

On rappelle qu'on a montré au chapitre 3 la semi-simplicité de la cohomologie quantique de $\text{IG}(2, 2n + 1)$ (cf théorème 3.14). Le théorème ci-dessus nous permet donc de conclure que la première partie de la conjecture de Dubrovin est valide pour $\text{IG}(2, 2n + 1)$. Pour étudier la seconde partie, il faudrait commencer par calculer les $\chi(E_i, E_j)$ pour la collection exceptionnelle décrite ci-dessus, ce qui ne devrait pas poser de difficulté particulière.

Chapitre 5

Cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires

Dans ce chapitre, on tente de généraliser au cas $m > 2$ certains des résultats obtenus pour les grassmanniennes symplectiques impaires de droites. On rencontre deux types de difficultés : le fait qu'il soit malaisé pour $m > 2$ de calculer et d'inverser l'application de restriction $\mathbf{i}^* : A^*(\mathrm{IG}(m, 2n + 2)) \rightarrow A^*(\mathrm{IG}(m, 2n + 1))$, et le fait que les invariants de degré 1 ne suffisent a priori plus à déterminer la règle de Pieri quantique.

En effet, lors du calcul de la règle de Pieri pour les grassmanniennes symplectiques impaires de droites, on a remarqué que pour des raisons de dimension et de degré du paramètre quantique, il ne peut pas y avoir d'invariant de Gromov-Witten de degré supérieur ou égal à deux non nul. Cet argument n'est plus valable pour les $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ avec $m > 2$. Cependant, dans le cas de la grassmannienne symplectique paire, Buch, Kresch et Tamvakis démontrent dans [BKT09] l'annulation de tous les invariants de Gromov-Witten de la forme $I_d(\sigma_p^+, \sigma_\lambda^+, \sigma_\mu^+)$ avec $d \geq 2$. On peut supposer qu'un résultat similaire pourrait être vrai pour $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$. Néanmoins, prouver un tel résultat par la méthode de [BKT09] nécessite d'avoir, pour les invariants de degré supérieur ou égal à deux, un résultat analogue au théorème 2.19 (qui donnait l'énumérativité des invariants de degré 1).

Or l'un des ingrédients fondamentaux de la preuve du théorème 2.19 est la proposition 2.15, qui affirme que les espaces de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,2}(\mathrm{IG}, 1)$ et $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\mathrm{IG}, 1)$ sont lisses. En degré ≥ 2 , ce résultat n'a plus de raison d'être vrai, puisque les espaces deviennent obstrués. En effet, considérons par exemple une application stable $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ qui est un revêtement double d'une droite $\mathcal{D}(V, W)$ contenue dans l'orbite fermée et telle que W soit isotrope. On a vu dans la preuve de la proposition 2.15 que dans ce cas, on a un isomorphisme

$$\mathcal{N}_0 \cong \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}^{\oplus(2n-2m)}.$$

Par conséquent, on trouve que $H^1(\mathbb{P}^1, f^*\mathcal{N}_0) = H^1(\mathbb{P}^1, f^*\mathrm{TIG}) \neq 0$, ce qui montre que $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}(\mathrm{IG}, 2)$ est obstrué. Cependant, la présence d'une obstruction semble liée à l'existence de conditions bien particulières sur l'application stable,

et l'on peut supposer qu'elles ne sont pas valides pour des applications vérifiant des conditions d'incidence par rapport à certaines sous-variétés en position générale. On émet donc la conjecture suivante :

Conjecture 5.1. *Soient Y_1, Y_2, Y_3 des sous-variétés de $\text{IG}(m, 2n + 1)$ de codimension au moins deux représentant des classes de cohomologie γ_1, γ_2 et γ_3 et coupant l'orbite fermée de manière génériquement transverse. On considère $d \geq 1$. Alors il existe un ouvert dense $U \subset \text{Sp}_{2n+1}^3$ tel que pour tout $(g_1, g_2, g_3) \in U$, l'invariant de Gromov-Witten $I_d(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ soit égal au nombre de courbes de degré d de IG coupant les translatés g_1Y_1, g_2Y_2 et g_3Y_3 .*

Dans la suite de ce chapitre, on va donner quelques résultats sur les grassmanniennes symplectiques impaires de la forme $\text{IG}(m, 2n + 1)$; certains ne seront valides que sous réserve que la conjecture ci-dessus soit vraie. A la partie 5.1, on démontre, en admettant la conjecture 5.1 l'annulation de certains invariants de Gromov-Witten. A la partie 5.2, on donne un principe quantique-classique pour les invariants de degré 1 dans $\text{IG}(m, 2n + 1)$. On conclut en décrivant précisément la cohomologie quantique de quelques grassmanniennes symplectiques impaires à la partie 5.3.

5.1 Invariants de Gromov-Witten et variété des courbes de degré d

Dans cette partie, on démontre, sous réserve que la conjecture 5.1 soit vraie, un résultat analogue à celui du théorème 3 de [BKT09] concernant l'annulation de certains invariants de Gromov-Witten. Commençons par introduire quelques notations. Soient E^+ un \mathbb{C} -espace vectoriel symplectique de dimension $2n + 2$ et E un hyperplan de E^+ . Notons

$$\begin{aligned} \text{IG} &:= \text{IG}(m, E) = \text{IG}(m, 2n + 1), \\ \text{IG}^+ &:= \text{IG}(m, E^+) = \text{IG}(m, 2n + 2), \end{aligned}$$

et $\mathbf{i} : \text{IG} \hookrightarrow \text{IG}^+$ l'inclusion naturelle. On désignera également par σ_α^+ la classe de Schubert de IG^+ associée à la partition $(n + 1 - m)$ -stricte α . Considérons également F_\bullet^+, G_\bullet^+ et H_\bullet^+ des drapeaux isotropes de E^+ en position générale (entre eux et par rapport à l'hyperplan E). Pour ne pas alourdir les notations, on pose $X_\lambda^+ := X_\lambda^+(F_\bullet^+)$, et de même pour X_μ^+ et X_ν^+ .

Soit

$$Y_d^+ = \{(A, B) \mid A \subset B \subset A^\perp, \dim A = m - d, \dim B = m + d\}.$$

C'est une variété lisse de dimension $2mn - \frac{3}{2}m^2 + \frac{5}{2}m + d(2n - m) + \frac{3}{2}d(d - 1)$, munie d'une action (non transitive) du groupe symplectique Sp_{2n+2} . On va voir que cette variété paramètre grâce à l'assignation $f \mapsto (\text{Ker } f, \text{Vect } f)$ les applications stables de degré d sur IG^+ qui sont "suffisamment générales". Posons également $Y_d = \{(A, B) \in Y_d^+ \mid B \subset E\}$, et, si X_α^+ est une variété de Schubert de IG^+ :

$$Y_\alpha^+ = \{(A, B) \in Y_d^+ \mid \exists \Sigma^+ \in X_\alpha^+, A \subset \Sigma^+ \subset B\}.$$

Supposons la conjecture 5.1 vérifiée. On a alors la

Proposition 5.2. *On considère $d \geq 0$ un entier et λ, μ, ν des partitions $(n + 1 - m)$ -strictes de IG^+ telles que*

- $|\lambda| + |\mu| + |\nu| = \dim \text{IG} + d(2n + 2 - m)$;
- λ_1, μ_1 et ν_1 soient tous inférieurs ou égaux à $2n + 1 - m$ (de telle sorte que les restrictions des classes correspondantes à IG soient non nulles).

Soient X_λ^+, X_μ^+ et X_ν^+ des variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n + 2)$ en position générale, et $Y_\lambda^+, Y_\mu^+, Y_\nu^+$ les sous-variétés de Y_d^+ associées. Alors :

$$I_d(\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+) = \int_{Y_d^+} [Y_\lambda^+] \cup [Y_\mu^+] \cup [Y_\nu^+] \cup [Y_d].$$

De plus

$$I_d(\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+) = 0$$

si λ ne contient pas la partition $\rho_d = (d, d - 1, \dots, 2, 1)$.

Démonstration. On reprend point par point la preuve de [BKT09]. On a vu que la variété Y_d^+ de IG^+ possède une action de Sp_{2n+2} qui en fait un espace quasi-homogène. Posons

$$Y_{e_1, e_2}^r = \{(A, B) \mid A \subset B \subset A^\perp, \dim A = m - e_1, \dim B = m + e_2, \\ \dim(B \cap B^\perp) = m - e_1 + r\}$$

où $0 \leq e_1, e_2 \leq d$ et $0 \leq r \leq e_1 + e_2$ sont des entiers. Ces variétés possèdent une action transitive de Sp_{2n+2} , et

$$Y_d^+ = \bigsqcup_r Y_{d, d}^r.$$

Définissons également

$$Y_\alpha^r = \{(A, B) \in Y_{e_1, e_2}^r \mid \exists \Sigma^+ \in X_\alpha^+, A \subset \Sigma \subset B\}$$

$$Y_{\text{IG}}^r = \{(A, B) \in Y_{e_1, e_2}^r \mid B \subset E\},$$

pour toute partition $(n + 1 - m)$ -stricte α de $\text{IG}(m, 2n + 2)$.

Montrons tout d'abord que $Y_\lambda^r \cap Y_\mu^r \cap Y_\nu^r \cap Y_{\text{IG}}^r = \emptyset$, sauf si $e_1 = e_2 = d$ et $r = 0$, auquel cas l'intersection est un nombre fini de points. En effet, les fibres de l'application

$$\begin{array}{ccc} Y_{e_1, e_2}^r & \rightarrow & \text{IF}(m - e_1, m - e_1 + r; 2n + 2) \\ (A, B) & \mapsto & (A, B \cap B^\perp) \end{array}$$

sont isomorphes à des ouverts de la grassmannienne $G(e_1 + e_2 - r, 2(n + 1 - m + e_1 - r))$, donc

$$\dim Y_{e_1, e_2}^r = \frac{1}{2}(4mn - 3m^2 + 5m + 2e_1m - e_1^2 + 4e_2n + 4e_2 - 2e_2^2 - e_1 + r - r^2 - 4e_2m).$$

Soit

$$T^r = \{(A, \Sigma^+, B) \mid (A, B) \in Y_{e_1, e_2}^r, \Sigma^+ \in \text{IG}^+, A \subset \Sigma^+ \subset B\}.$$

On note $\pi_1 : T^r \rightarrow \text{IG}^+$ et $\pi_2 : T^r \rightarrow Y_{e_1, e_2}^r$ les projections. On a alors $Y_\lambda^r = \pi_2(\pi_1^{-1}(X_\lambda^+))$. Si $(A, B) \in Y_{e_1, e_2}^r$, la fibre $\pi_2^{-1}((A, B))$ est l'union des variétés

$$Q_s = \{ \Sigma^+ \in \text{IG}^+ \mid A \subset \Sigma^+ \subset B, \dim(\Sigma^+ \cap B \cap B^\perp) = m - e_1 + s \}.$$

Comme dans [BKT09], on a $Q_s = \emptyset$ sauf si $2s \geq r + e_1 - e_2$, et dans ce cas

$$\dim Q_s = \frac{1}{2}(2e_1e_2 - e_1^2 + e_1 + 2e_1s - 2e_2s + 2rs - 3s^2 - s).$$

Considérons s tel que Q_s ait la même dimension que les fibres de π_2 . Alors

$$\text{codim}_{Y_{e_1, e_2}^r} Y_\lambda^r \geq |\lambda| - \dim Q_s.$$

Calculons maintenant $\text{codim}_{Y_{e_1, e_2}^r} Y_{\text{IG}}^r$. Soit l'application

$$\begin{aligned} \psi : \quad Y_{\text{IG}}^r &\rightarrow \text{IF}(m - e_1, m - e_1 + r; 2n + 1) \\ (A, B) &\mapsto (A, B \cap B^\perp). \end{aligned}$$

On note K le noyau de la forme symplectique sur IG . Si $A \not\supset K$, on a

$$\begin{aligned} \{ C \in \text{G}(m - e_1 + r, 2n + 1) \mid (A, C) \in \text{IF}(m - e_1, m - e_1 + r; 2n + 1) \} \\ \cong \text{IG}(r, 2(n - m + e_1 - r) + 1). \end{aligned}$$

La composante correspondant à $A \supset K$ étant de dimension plus petite, on en déduit

$$\begin{aligned} \dim \text{IF}(m - e_1, m - e_1 + r; 2n + 1) &= \dim \text{IG}(m - e_1, 2n + 1) \\ &\quad + \dim \text{IG}(r, 2(n - m + e_1 - r) + 1). \end{aligned}$$

De plus, si $C \not\supset K$, la fibre $\psi^{-1}(A, C)$ est isomorphe à un ouvert de $\text{G}(e_1 + e_2 - r, 2(n - m + e_1 - r) + 1)$. Finalement, on en déduit

$$\text{codim}_{Y_{e_1, e_2}^r} Y_{\text{IG}}^r = m + e_2.$$

Par conséquent

$$\text{codim } Y_\lambda^r + \text{codim } Y_\mu^r + \text{codim } Y_\nu^r + \text{codim } Y_{\text{IG}}^r - \dim Y_{e_1, e_2}^r \geq \Delta'(e_1, e_2, r, s), \quad (5.1)$$

où

$$\begin{aligned} \Delta'(e_1, e_2, r, s) &= \dim \text{IG} + d(2n + 2 - m) + m + e_2 - \dim Y_{e_1, e_2}^r - 3 \dim Q_s \\ &= \frac{(r-3s)(r-3s-1)}{2} + (d - e_1) + (2n + 1 - m)(d - e_2) \\ &\quad + (m + e_2 - 2e_1 + 3s)(e_2 - e_1). \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $e_1 = e_2 = d$. Si $Y_\lambda^r \cap Y_\mu^r \cap Y_\nu^r \cap Y_{\text{IG}}^r \neq \emptyset$, comme Sp_{2n+2} agit transitivement sur Y_{e_1, e_2}^r , d'après le lemme de Kleiman (cf lemme 2.17) et l'inégalité 5.1, on a $\Delta'(e_1, e_2, r, s) \leq 0$. Si $e_2 \geq e_1$, on en déduit immédiatement $e_1 = e_2 = d$, ce qui est le résultat cherché, donc on peut supposer que $e_2 < e_1$. Si $(A, B) \in Y_\lambda^r \cap Y_\mu^r \cap Y_\nu^r \cap Y_{\text{IG}}^r$, alors il existe un sous-espace $B' \subset A^\perp \cap E$ contenant B tel que $\dim B' = m + e_1$. On en déduit que $(A, B') \in Y_\lambda^{r'} \cap Y_\mu^{r'} \cap Y_\nu^{r'} \cap Y_{\text{IG}}^{r'} \subset Y_{e_1, e_1}^{r'}$ pour un certain entier r' . Par conséquent $\Delta'(e_1, e_1, r', s') \leq 0$, où l'entier s' est défini comme l'était s . On en déduit facilement que $e_1 = d$. Par hypothèse, on

a donc $e_2 < d$, ce qui implique qu'il existe un sous-espace $B'' \subset A^\perp \cap E$ contenant B tel que $\dim B'' = m + d - 1$. Alors $(A, B'') \in Y_\lambda^{r''} \cap Y_\mu^{r''} \cap Y_\nu^{r''} \cap Y_{\text{IG}}^{r''} \subset Y_{d,d-1}^{r''}$ pour un certain entier r'' . Or pour tout s'' :

$$\Delta'(d, d-1, r'', s'') = \frac{(r'' - 3s'')(r'' - 3s'' - 1)}{2} + 2(n+1-m) - 3s'' + d.$$

Mais $r'' \leq 2n + 3 - 2m$ et $r'' \leq 2s'' - 1$, d'où $r'' < 3s''$, donc

$$\Delta'(d, d-1, r'', s'') > 0,$$

ce qui contredit l'existence de (A, B'') . Donc on a en fait $e_1 = e_2 = d$, ce qui est le résultat cherché. Reste à vérifier la condition :

$$\Delta'(d, d, r, s) = \frac{(r - 3s)(r - 3s - 1)}{2} \leq 0,$$

qui n'est possible que si $r = 3s$ ou $r = 3s + 1$. Comme $2s \geq r$, on obtient $r = s = 0$ comme annoncé. On conclut que $Y_\lambda^+, Y_\mu^+, Y_\nu^+$ et Y_d se coupent transversalement dans Y_d^+ , que l'intersection $Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_d$ est finie et que si $(A, B) \in Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_d$, alors $A = B \cap B^\perp$. En effet, pour la transversalité, il suffit de constater que l'intersection est contenue dans $Y_{d,d}^0 \subset Y_d^+$, qui est la Sp_{2n+2} -orbite ouverte. Pour la finitude, on utilise l'inégalité

$$\begin{aligned} & \text{codim } Y_\lambda^+ + \text{codim } Y_\mu^+ + \text{codim } Y_\nu^+ + \text{codim } Y_d \\ & \geq |\lambda| + |\mu| + |\nu| - 3 \dim Q_0 + m + d \\ & \geq \dim Y_d^+. \end{aligned}$$

Montrons maintenant à l'aide de la conjecture 5.1 que le nombre de points de l'intersection $Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_d$ est égal à l'invariant $I_d(\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+)$. Soit $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{IG} \subset \text{IG}^+$ une application rationnelle de degré d telle que $f(0) \in X_\lambda^+ \cap \text{IG}$, $f(1) \in X_\mu^+ \cap \text{IG}$, $f(\infty) \in X_\nu^+ \cap \text{IG}$. Alors $(\text{Ker } f, \text{Vect } f)$ est un point d'une intersection $Y_\lambda^r \cap Y_\mu^r \cap Y_\nu^r \cap Y_{\text{IG}}^r$ dans une variété Y_{e_1, e_2}^r . On a vu ci-dessus qu'on a nécessairement $e_1 = e_2 = d$ et $r = 0$, d'où $(\text{Ker } f, \text{Vect } f) \in Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_d$.

Réciproquement, soit $(A_0, B_0) \in Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_d$. Il faut montrer qu'il existe une unique application $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{IG}$ de degré d telle que $f(0) \in X_\lambda^+ \cap \text{IG}$, $f(1) \in X_\mu^+ \cap \text{IG}$, $f(\infty) \in X_\nu^+ \cap \text{IG}$ et $(\text{Ker } f, \text{Vect } f) = (A_0, B_0)$. On considère

$$\begin{aligned} P & \in X_\lambda^+ \text{ tel que } A_0 \subset P \subset B_0 \\ Q & \in X_\mu^+ \text{ tel que } A_0 \subset Q \subset B_0 \\ R & \in X_\nu^+ \text{ tel que } A_0 \subset R \subset B_0. \end{aligned}$$

Comme $(A_0, B_0) \in Y_d$, on a $B_0 \subset E$, d'où $P, Q, R \subset E$, et par conséquent $P \in X_\lambda^+ \cap \text{IG}$, $Q \in X_\mu^+ \cap \text{IG}$ et $R \in X_\nu^+ \cap \text{IG}$. Montrons que $P \cap Q = A_0$. Sinon, il existe $A_0 \subset A'_0 \subset P \cap Q$ avec $\dim A'_0 = m - d + 1$. Posons

$$Y' = \{(A, A', B) \mid (A, B) \in Y_{d,d}^0, A \subset A' \subset B, \dim A' = m - d + 1\}.$$

Sp_{2n+2} agit transitivement sur Y' et $\dim Y' = \dim Y_d^+ + 2d - 1$. Posons également, pour toute partition $(n+1-m)$ -stricte de $\text{IG}(m, 2n+2)$:

$$\begin{aligned} Y'_\alpha & = \{(A, A', B) \in Y' \mid \exists \Sigma^+ \in X_\alpha^+, A' \subset \Sigma^+ \subset B\}, \\ Y'_{\text{IG}} & = \{(A, A', B) \in Y' \mid B \subset E\}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$(A_0, A'_0, B_0) \in Y'_\lambda \cap Y'_\mu \cap Y'_{\text{IG}} \cap \pi^{-1}(Y_\nu^+),$$

où $\pi : Y' \rightarrow Y_d^+$ est la projection. Soit

$$T' = \{(A, A', \Sigma^+, B) \mid (A, A', B) \in Y', \Sigma^+ \in \text{IG}^+, A' \subset \Sigma^+ \subset B\}.$$

Notons $\pi'_1 : T' \rightarrow \text{IG}^+$ et $\pi'_2 : T' \rightarrow Y'$ les projections. Les fibres de π'_2 sont isomorphes à des grassmanniennes lagrangiennes $\text{IG}(d-1, 2d-2)$, donc elles sont de dimension $\frac{d(d-1)}{2}$. Comme $Y'_\lambda = \pi'_2(\pi'_1(X_\lambda^+))$, cela implique que $\text{codim } Y'_\lambda \geq |\lambda| - \frac{d(d-1)}{2}$. On trouve également $\text{codim } Y'_{\text{IG}} = m + d$. Finalement

$$\begin{aligned} & \text{codim } Y'_\lambda + \text{codim } Y'_\mu + \text{codim } Y'_{\text{IG}} + \text{codim } (\pi^{-1}(Y_\nu^+)) \\ & \geq |\lambda| + |\mu| - d(d-1) + m + d + |\nu| - \frac{d(d+1)}{2} \\ & \geq \dim Y_d^+ > \dim Y'. \end{aligned}$$

Par conséquent $Y'_\lambda \cap Y'_\mu \cap Y'_{\text{IG}} \cap \pi^{-1}(Y_\nu^+) = \emptyset$, d'où une contradiction. On doit donc avoir $P \cap Q = A_0$, et de même $P \cap R = Q \cap R = A_0$.

Notons que $\{\Sigma \in \text{IG}^+ \mid A_0 \subset \Sigma^+ \subset B_0\} \cap X_\lambda^+$ doit être de dimension nulle. En effet, sinon, pour des raisons de dimension, on pourrait choisir P dans cet ensemble tel que $P \cap Q \neq A_0$. On utilise maintenant le

Lemme 5.3 ([BKT09], lemme 3). *Soit*

$$T_d^+ = \{(A, \Sigma^+, B) \mid (A, B) \in Y_d^+, \Sigma^+ \in \text{IG}^+\}.$$

Pour toute variété de Schubert X_α^+ de IG^+ , on définit également :

$$T_\alpha^+ = \{(A, \Sigma^+, B) \in T_d^+ \mid \Sigma^+ \in X_\alpha^+\}.$$

Alors la projection $p : T_\alpha^+ \rightarrow Y_\alpha^+$ est génériquement bijective lorsque $\rho_d \subset \alpha$, et a des fibres de dimension strictement positive lorsque $\rho_d \not\subset \alpha$.

On utilise le lemme ci-dessus avec la projection $p : T_\lambda^+ \rightarrow Y_\lambda^+$. On a montré que $p^{-1}(A_0, B_0)$ est de dimension nulle, donc le lemme nous permet de conclure que $\rho_d \subset \lambda$. L'invariant

$$I_d(\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+) = 0$$

est donc nul si $\rho_d \not\subset \lambda$.

De plus, $\{\Sigma^+ \in \text{IG}^+ \mid A_0 \subset \Sigma \subset B_0\} \cap X_\lambda^+$ est réduit à un point, et ce point est dans IG car $B_0 \subset E$. Par conséquent :

$$\{\Sigma \in \text{IG}^+ \mid A_0 \subset \Sigma \subset B_0\} \cap X_\lambda^+ = \{P\} = \{\Sigma \in \text{IG} \mid A_0 \subset \Sigma \subset B_0\},$$

et de même pour Q et R . On utilise maintenant le

Lemme 5.4 ([BKT09], proposition 1). *Soit $W \cong \mathbb{C}^{2n}$ un espace symplectique. Soient U_1, U_2 et U_3 trois éléments de $\text{IG}(d, W)$ tels que $U_i \cap U_j = 0$ pour $i \neq j$. Alors il existe un unique morphisme $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \text{IG}(d, W)$ de degré d tel que $f(0) = U_1, f(1) = U_2$ et $f(\infty) = U_3$.*

En appliquant le lemme ci-dessus, avec $U_1 = P, U_2 = Q$ et $U_3 = R$, on remarque qu'il existe une unique application rationnelle $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow Z$ de degré d telle que $f(0) \in X_\lambda^+ \cap \text{IG}, f(1) \in X_\mu^+ \cap \text{IG}$ et $f(\infty) \in X_\nu^+ \cap \text{IG}$, où $Z = \{\Sigma \mid A_0 \subset \Sigma \subset B_0\}$. Ceci termine la preuve de la proposition. \square

5.2 Principe quantique-classique pour les invariants de degré 1

Dans cette partie, on va montrer comment calculer certains invariants de Gromov-Witten de degré 1 de $\text{IG}(m, 2n+1)$ à l'aide du produit classique dans $\text{IG}(m, 2n+3)$, en adaptant la preuve de la proposition 2 de [BKT09], dans lequel est démontré un principe quantique-classique pour les invariants de degré 1 de la grassmannienne symplectique paire.

On reprend les notations du paragraphe précédent, et on considère également A un espace vectoriel symplectique de dimension 2. On note $\overline{E} = E^+ \oplus A$, et $\overline{\text{IG}} := \text{IG}(m+1, \overline{E}) = \text{IG}(m+1, 2n+4)$. Soient f, g, h des éléments génériques de A . On pose $\overline{F}_\bullet, \overline{G}_\bullet, \overline{H}_\bullet$ les drapeaux augmentés génériques donnés par $\overline{F}_p = F_{p-1} \oplus \mathbb{C}f$, etc... Si λ, μ et ν sont des partitions $(n+1-m)$ -strictes contenues dans le rectangle $m \times (2n+2-m)$, notons :

$$\overline{X}_\lambda(\overline{F}_\bullet) := \{ \overline{\Sigma} \in \overline{\text{IG}} \mid \dim(\overline{\Sigma} \cap (F_{p_j(\lambda)} + \mathbb{C}f)) \geq j \forall 1 \leq j \leq l(\lambda) \},$$

où les $p_j(\lambda)$ sont les conditions d'incidence associées à λ (cf annexe A). Ce sont des variétés de Schubert de $\overline{\text{IG}}$. On note de même $\overline{X}_\mu(\overline{G}_\bullet), \overline{X}_\nu(\overline{H}_\bullet)$. Dans la suite, on omettra les drapeaux et on notera simplement \overline{X}_λ , etc... Enfin, soit $\overline{X}_{\text{IG}} := \{ \overline{\Sigma} \in \overline{\text{IG}} \mid \overline{\Sigma} \subset E + A \} \cong \text{IG}(m+1, 2n+3)$.

Proposition 5.5. *Soient λ, μ et ν des partitions $(n+1-m)$ -strictes de IG^+ telles que $|\lambda| + |\mu| + |\nu| = \dim \text{IG} + 2n + 2 - m$, $l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu) \leq 2m + 1$ et λ_1, μ_1 et ν_1 soient tous inférieurs ou égaux à $2n + 1 - m$. Alors*

$$I_1(\mathbf{i}^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+) = \frac{1}{2} \# (\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}})$$

Démonstration. On cherche tout d'abord à montrer, comme dans [BKT09], que l'on a une application bien définie

$$\begin{aligned} \phi : \overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} &\rightarrow Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_1 \subset Y_1^+ \\ &\xrightarrow{\overline{\Sigma}} (\overline{\Sigma} \cap E^+, (\overline{\Sigma} \oplus A) \cap E^+). \end{aligned}$$

Remarquons que le groupe $G = \text{Sp}(E^+) \times \text{SL}(A)$ agit sur $\overline{\text{IG}}$. Pour des choix génériques des drapeaux complets F_\bullet, G_\bullet et H_\bullet de E^+ d'une part, et des éléments f, g et h d'autre part, les sous-variétés $\overline{X}_\lambda, \overline{X}_\mu, \overline{X}_\nu$ et \overline{X}_{IG} sont en position générale. Par ailleurs, on voit facilement que $\overline{\text{IG}}$ possède quatre orbites sous l'action de G :

1. $\mathcal{O}_1 = \text{IG}(m+1, E^+)$;
2. $\mathcal{O}_2 = \text{IG}(m, E^+) \times \text{IG}(1, A)$;
3. $\mathcal{O}_3 = \{ \overline{\Sigma} \in \overline{\text{IG}} \mid \dim(\overline{\Sigma} \cap E^+) = m, \overline{\Sigma} \cap A = 0 \}$;
4. $\mathcal{O}_4 = \{ \overline{\Sigma} \in \overline{\text{IG}} \mid \dim(\overline{\Sigma} \cap E^+) = m - 1 \}$.

On va montrer que l'intersection $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}}$ est nécessairement contenue dans l'orbite ouverte \mathcal{O}_4 .

Montrons tout d'abord que $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_1 = \emptyset$. En effet, $\overline{X}_\lambda \cap \mathcal{O}_1$ est une variété de Schubert de $\text{IG}(m+1, E^+)$ associée à la partition $\overline{\lambda} = (\lambda_1 -$

$1, \dots, \lambda_{l(\lambda)} - 1$) obtenue en enlevant la première colonne de λ , et de même pour $\overline{X}_\mu \cap \mathcal{O}_1$ et $\overline{X}_\nu \cap \mathcal{O}_1$. De plus, $\overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_1 = \text{IG}(m+1, E)$, d'où

$$\begin{aligned} & \text{codim}(\overline{X}_\lambda \cap \mathcal{O}_1) + \text{codim}(\overline{X}_\mu \cap \mathcal{O}_1) + \text{codim}(\overline{X}_\nu \cap \mathcal{O}_1) + \text{codim}(\overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_1) \\ &= |\lambda| + |\mu| + |\nu| - (l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu)) + m + 1 \\ &= \dim \mathcal{O}_1 + 2m + 2 - (l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu)) > 0. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Sinon, soit $\overline{\Sigma} = \Sigma^+ \oplus \mathbb{C}l$ un élément de cet ensemble, où $\Sigma^+ \in \text{IG}^+$ et $l \in A$ non nul. Le vecteur l ne peut pas être à la fois dans $\mathbb{C}f$, dans $\mathbb{C}g$ et dans $\mathbb{C}h$, donc on peut supposer que $l \notin \mathbb{C}g$ et $l \notin \mathbb{C}h$, ce qui implique que $\Sigma^+ \in X_\mu^+ \cap X_\nu^+$. Si α est une partition $(n+1-m)$ -stricte de IG^+ , notons

$$\delta_j^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha_1 + \alpha_j \leq 2n + 1 - 2m + j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On montre facilement que

$$\alpha_1 + \sum_{j=2}^{l(\alpha)} \delta_j^\alpha \leq 2n + 1 - m. \quad (5.2)$$

Remarquons également que si

$$\dim(\overline{\Sigma} \cap (F_{p_j(\lambda)} \oplus \mathbb{C}f)) \geq j,$$

alors

$$\dim(\Sigma^+ \cap F_{p_j(\lambda)}) \geq j - 1.$$

Si l'on note η la partition $(n+1-m)$ -stricte de IG^+ définie par

$$\eta_j = \begin{cases} \lambda_{j+1} - \delta_{j+1}^\lambda & \text{si } 1 \leq j \leq l(\lambda) - 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on a donc $\Sigma^+ \in X_\eta^+ \cap X_\mu^+ \cap X_\nu^+ \cap \text{IG}$. Mais

$$\begin{aligned} & \text{codim}_{\text{IG}^+} X_\eta^+ + \text{codim}_{\text{IG}^+} X_\mu^+ + \text{codim}_{\text{IG}^+} X_\nu^+ + \text{codim}_{\text{IG}^+} \text{IG} \\ &= |\eta| + |\mu| + |\nu| + m \\ &\geq |\lambda| - (2n + 1 - m) + |\mu| + |\nu| + m \text{ d'après l'équation (5.2)} \\ &> \dim \text{IG}^+, \end{aligned}$$

ce qui contredit l'existence de Σ^+ , et donc de $\overline{\Sigma}$.

Enfin, montrons que $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_3 = \emptyset$. Sinon, soit $\overline{\Sigma}$ un élément de cet ensemble. Notons $\Sigma^+ = \overline{\Sigma} \cap E^+ \in \text{IG}^+$. Si $\overline{\Sigma} \notin (E^+ \oplus \mathbb{C}g)$, alors $\overline{\Sigma} \cap (E^+ \oplus \mathbb{C}g) = \Sigma^+$. En particulier, pour tout i , on a

$$\overline{\Sigma} \cap (G_i \oplus \mathbb{C}g) = \Sigma^+ \cap G_i,$$

d'où $\Sigma^+ \in X_\mu^+$. Comme $\overline{\Sigma}$ ne peut pas être contenu à la fois dans $E^+ \oplus \mathbb{C}f$ et dans $E^+ \oplus \mathbb{C}g$, quitte à permuter λ , μ et ν , on peut supposer que $\overline{\Sigma} \notin (E^+ \oplus \mathbb{C}g)$

et $\bar{\Sigma} \notin (E^+ \oplus \mathbb{C}h)$. Par conséquent $\Sigma^+ \in X_\mu^+ \cap X_\nu^+$. De plus, comme $\bar{\Sigma} \in \overline{\text{IG}}$, on a $\Sigma^+ \in \text{IG}$. Or pour des raisons de dimension, l'ensemble $X_\lambda^+ \cap X_\mu^+ \cap X_\nu^+ \cap \text{IG}$ est vide, d'où $\bar{\Sigma} \subset E^+ \oplus \mathbb{C}f$. Par conséquent, $\bar{\Sigma}$ s'écrit sous la forme

$$\bar{\Sigma} = \Sigma^+ \oplus \mathbb{C}v,$$

où $v \in (E^+ \oplus \mathbb{C}f) \setminus (E^+ \cup \mathbb{C}f)$ (v ne peut pas être égal à f , sinon $\bar{\Sigma} \notin \mathcal{O}_3$). Par définition de \bar{X}_λ , on a, pour tout $1 \leq j \leq l(\lambda)$:

$$\dim(\bar{\Sigma} \cap (F_{p_j(\lambda)} \oplus \mathbb{C}f)) \geq j.$$

On en déduit qu'il existe $1 \leq j_0 \leq l(\lambda)$ tel que $v \in F_{p_{j_0}(\lambda)} \oplus \mathbb{C}f$ et $v \notin F_{p_{j_0-1}(\lambda)} \oplus \mathbb{C}f$. L'espace Σ^+ vérifie alors les conditions d'incidence :

$$\begin{cases} \dim(\Sigma^+ \cap F_{p_j(\lambda)}) \geq j & \text{pour } 1 \leq j \leq j_0 - 1, \\ \dim(\Sigma^+ \cap F_{p_{j+1}(\lambda)}) \geq j & \text{pour } j_0 \leq j \leq l(\lambda). \end{cases}$$

Notons $\eta_j^{j_0}$ la partition correspondante. Un calcul simple nous donne

$$\eta_j^{j_0} = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } 1 \leq j \leq j_0 - 1, \\ \lambda_{j+1} - \delta_{j+1} & \text{si } j_0 \leq j \leq l(\lambda) - 1, \\ 0 & \text{si } j \geq l(\lambda). \end{cases}$$

Par conséquent, $|\eta^{j_0}| = |\lambda| - N$, où

$$N = \lambda_{j_0} + \#\{j_0 + 1 \leq j \leq l(\lambda) \mid \lambda_{j_0} + \lambda_j \leq 2(n+1-m) + j - j_0\}.$$

On va montrer que $N \leq 2n+1-m$. Pour cela, on distingue deux cas, selon que $\lambda_{j_0} = 2n+1-m$ ou que $\lambda_{j_0} < 2n+1-m$:

1. lorsque $\lambda_{j_0} = 2n+1-m$, on a nécessairement $j_0 = 1$, d'où

$$\#\{j_0 + 1 \leq j \leq l(\lambda) \mid \lambda_{j_0} + \lambda_j \leq 2(n+1-m) + j - j_0\} = 0,$$

et par conséquent $N = 2n+1-m$;

2. lorsque $\lambda_{j_0} < 2n+1-m$ et que

$$\{j_0 + 1 \leq j \leq l(\lambda) \mid \lambda_{j_0} + \lambda_j \leq 2(n+1-m) + j - j_0\} = \emptyset,$$

on a directement $N < 2n+1-m$; on peut donc supposer que cet ensemble est non vide. On note alors j_1 son minimum, de telle sorte que $N = \lambda_{j_0} + l(\lambda) + 1 - j_1$. Comme $\lambda_{j_1} + \lambda_{j_0} \leq 2(n+1-m) + j_1 - j_0$ et que $j_0 \geq 1$, $\lambda_{j_1} \geq 1$ et $l(\lambda) \leq m$, on en déduit finalement $N \leq 2n+1-m$.

Pour terminer, remarquons que l'on a montré que

$$\Sigma^+ \in \bigcup_{j_0} X_{\eta^{j_0}}^+ \cap X_\mu^+ \cap X_\nu^+ \cap \text{IG}.$$

Mais

$$\begin{aligned} |\eta^{j_0}| + |\mu| + |\nu| + \text{codim}_{\text{IG}^+} \text{IG} &\geq |\lambda| + |\mu| + |\nu| - (2n+1-m) + m \\ &\geq \dim \text{IG}^+ + 1, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par conséquent $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} \cap \mathcal{O}_3 = \emptyset$.

On a donc prouvé que $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}} \subset \mathcal{O}_4$, ce qui permet de montrer comme dans [BKT09] que l'application ϕ introduite au début de la preuve est bien définie. Considérons maintenant $(V, W) \in Y_\lambda^+ \cap Y_\mu^+ \cap Y_\nu^+ \cap Y_1$. Pour démontrer la proposition, on doit prouver que

$$\phi^{-1}(V, W) \cap \overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}}$$

contient exactement deux points. On a vu lors de la preuve de la proposition 5.2 que $V = W \cap W^\perp$. Par conséquent $S := W/V \oplus A$ est un espace symplectique de dimension 4. De plus $\text{LG}(2, S)$ s'identifie à la sous-variété de $\overline{\text{IG}}$ correspondant aux espaces $\overline{\Sigma}$ tels que $V \subset \overline{\Sigma} \subset W \oplus A$. On a vu dans la preuve de la proposition 5.2 qu'il existe des sous-espaces uniquement déterminés $\Sigma_1 \in X_\lambda^+ \cap \text{IG}$, $\Sigma_2 \in X_\mu^+ \cap \text{IG}$ et $\Sigma_3 \in X_\nu^+ \cap \text{IG}$ deux à deux distincts tels que $V \subset \Sigma_i \subset W$ pour chaque i . Or il existe exactement deux plans isotropes de $\text{IG}(2, S)$ incidents à $\Sigma_1/V \oplus \mathbb{C}f$, $\Sigma_2/V \oplus \mathbb{C}g$ et $\Sigma_3/V \oplus \mathbb{C}h$. En effet, dans la quadrique $\text{IG}(2, 4)$, on a

$$\sigma_1^3 = 2\sigma_{2,1} = 2[\text{pt}].$$

Si l'on pose $\tilde{F} = \Sigma_1 \oplus \mathbb{C}f$, $\tilde{G} = \Sigma_2 \oplus \mathbb{C}g$ et $\tilde{H} = \Sigma_3 \oplus \mathbb{C}h$, on en déduit qu'il existe également deux sous-espaces $\overline{\Sigma} \in \overline{\text{IG}}$ tels que $V \subset \overline{\Sigma} \subset W \oplus A$ et

$$\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{F}) \geq m,$$

$$\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{G}) \geq m,$$

$$\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{H}) \geq m.$$

Ces deux sous-espaces sont dans l'intersection $\overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu$. Enfin, les sous-espaces \tilde{F} , \tilde{G} et \tilde{H} étant tous contenus dans E , ils sont également dans \overline{X}_{IG} .

Réciproquement, si $\overline{\Sigma} \in \overline{X}_\lambda \cap \overline{X}_\mu \cap \overline{X}_\nu \cap \overline{X}_{\text{IG}}$ est tel que $V \subset \overline{\Sigma} \subset W \oplus A$, alors $V = \overline{\Sigma} \cap E^+$ et $W = (\overline{\Sigma} + A) \cap E^+$. Montrons que $\Sigma_1 = (\overline{\Sigma} + \mathbb{C}f) \cap E^+$. Pour cela, notons $\Sigma'_1 = (\overline{\Sigma} + \mathbb{C}f) \cap E^+$. L'espace Σ'_1 est un m -plan isotrope qui vérifie les conditions d'incidence $V \subset \Sigma'_1 \subset W$. Comme

$$\dim((\overline{\Sigma} + \mathbb{C}f) \cap (F_{p_j(\lambda)} \oplus \mathbb{C}f)) \geq j + 1,$$

on trouve $\dim(\Sigma'_1 \cap F_{p_j(\lambda)}) \geq j$ pour tout j , donc $\Sigma'_1 = \Sigma_1$ est l'unique m -plan isotrope de X_λ^+ situé entre V et W , et par conséquent $\Sigma_1 = (\overline{\Sigma} + \mathbb{C}f) \cap E^+$. On en déduit que $\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{F}) \geq m$. De même, on montre que $\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{G}) \geq m$ et $\dim(\overline{\Sigma} \cap \tilde{H}) \geq m$, ce qui termine la preuve du fait que $\phi^{-1}(V, W)$ est constitué de deux points. \square

Corollaire 5.6. *Soient λ , μ et ν des partitions de $\text{IG}(m, 2n + 2)$ telles que $l(\lambda) + l(\mu) + l(\nu) \leq 2m + 1$ et λ_1 , μ_1 et ν_1 soient tous inférieurs ou égaux à $2n + 1 - m$. Notons $\mathbf{i} : \text{IG}(m, 2n + 1) \hookrightarrow \text{IG}(m, 2n + 2)$ et $\mathbf{i}' : \text{IG}(m, 2n + 3) \hookrightarrow \text{IG}(m, 2n + 4)$ les inclusions naturelles. Notons τ'_α les classes de Schubert de $\text{IG}(m + 1, 2n + 4)$. On a alors :*

$$I_1(\mathbf{i}^* \tau_\lambda, \mathbf{i}^* \tau_\mu, \mathbf{i}^* \tau_\nu) = \frac{1}{2} I_0(\mathbf{i}'^* \sigma_\lambda^+, \mathbf{i}'^* \sigma_\mu^+, \mathbf{i}'^* \sigma_\nu^+).$$

En théorie, les résultats de cette partie ainsi que la proposition 5.2 permettent (sous réserve que la conjecture 5.1 soit vraie) de calculer le produit quantique par les classes (e_p) définies à la partie 2.5, et donc de trouver une règle de Pieri quantique. Néanmoins, ceci nécessite de savoir inverser l'application de restriction \mathbf{i}^* , et on a déjà remarqué que ce problème est compliqué en général.

5.3 Quelques exemples

Dans cette partie, on explicite le calcul de la cohomologie quantique pour quelques exemples particuliers. On donne en particulier une règle de Pieri et une présentation quantiques pour les grassmanniennes symplectiques impaires de la forme $\text{IG}(3, 2n + 1)$, ce qui est l'occasion de constater que les résultats trouvés sont analogues à ceux du cas $m = 2$. On décrit enfin en détail les exemples de $\text{IG}(2, 5)$ et $\text{IG}(3, 9)$, donnant dans le premier cas une table de multiplication, et dans le second une formule analogue à celle du théorème B.8.

5.3.1 Cohomologie quantique de $\text{IG}(3, 2n + 1)$

Dans cette partie, on donne une règle permettant de calculer les termes quantiques des produits par les classes $\sigma_1, \sigma_{1,1}$ et $\sigma_{1,1,1}$ dans $\text{IG}(3, 2n + 1)$, en supposant que la conjecture 5.1 soit valable. On ne donne pas ici la règle permettant de calculer les termes classiques car elle serait trop longue à énoncer. Précisons simplement qu'elle s'obtient en calculant l'application de restriction \mathbf{i}^* à l'aide de la formule de Pieri 1.12 par la méthode suivante. Pour calculer le produit $\sigma_{1^r} \cup \sigma_\lambda$, on écrit σ_λ sous la forme

$$\sigma_\lambda = \sum_{\nu} c_\nu \mathbf{i}^* \sigma_\nu^+,$$

on utilise l'égalité

$$\sigma_{1^r} \cup \sigma_\lambda = \mathbf{i}^* \left(\sum_{\nu} c_\nu \sigma_{1^r}^+ \cup \sigma_\nu^+ \right).$$

Le produit d'intersection $\sigma_{1^r}^+ \cup \sigma_\nu^+$ se calcule à l'aide de la règle de Pieri classique de [PR96] (cf théorème 1.12). On exprime ensuite le résultat sur la base des classes de Schubert de $\text{IG}(3, 2n + 1)$ à l'aide de l'application \mathbf{i}^* .

On utilisera également la convention suivante pour en simplifier l'écriture : dans chaque formule, il faut enlever les termes qui ne correspondent pas à des partitions $(n - 3)$ -strictes de $\text{IG}(3, 2n + 1)$.

Dans les paragraphes qui suivent, on notera comme précédemment $E = \mathbb{C}^{2n+1}$ un espace vectoriel muni d'une forme antisymétrique de rang maximal ω et E^+ un espace de dimension $2n+2$ contenant E muni d'une forme symplectique ω^+ prolongeant ω , de telle sorte que :

$$G_\omega(3, E) \cong \text{IG}(3, 2n + 1) \hookrightarrow \text{IG}(3, 2n + 2) \cong G_{\omega^+}(3, E^+).$$

Produit par σ_1 . Pour calculer le produit quantique par σ_1 dans $\text{IG}(3, 2n + 1)$, il suffit de calculer les termes de degré 1 par rapport au paramètre quantique. En effet, la conjecture 5.1 et la proposition 5.2 impliquent que les termes de

degré ≥ 2 sont nuls. On cherche donc à calculer les invariants de la forme $I_1(\sigma_\lambda, \mathbf{i}^* \sigma_{(\mu+1^3)^\vee}^+)$, où λ et μ sont deux partitions $(n-3)$ -strictes de $\text{IG}(m, 2n+1)$ telles que $|\lambda| = |\mu| + 2n - 2$.

Pour $i < j$, notons

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda_i + \lambda_j \leq 2n - 6 + j - i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu_i + \mu_j \leq 2n - 6 + j - i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère F_\bullet un drapeau isotrope complet de $\text{IG}(3, 2n+1)$ et G_\bullet^+ un drapeau isotrope complet de $\text{IG}(3, 2n+2)$, et on pose

$$Y_1 = \left\{ \Sigma \in \text{IG}(3, 2n+1) \mid \dim(\Sigma \cap F_{p_j}) \leq j \right\},$$

$$Y_2 = \left\{ \Sigma \in \text{IG}(3, 2n+1) \mid \dim(\Sigma \cap G_{q_j}^+) \leq j \right\},$$

où

$$p_j = 2n - 1 - \lambda_j + \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

et

$$q_j = 2n - 1 - \mu_j - \sum_{i=1}^{j-1} b_{i,j}.$$

Pour calculer l'invariant $I_1(\sigma_\lambda, \mathbf{i}^* \sigma_{(\mu+1^3)^\vee}^+)$, il suffit donc de calculer le nombre de droites de $\text{IG}(3, 2n+1)$ passant par les sous-variétés Y_1 et Y_2 . Notons $\mathcal{D}(V, W)$ une telle droite, où V et W sont des sous-espaces de dimensions 2 et 4 de E tels que $W \subset V^\perp$. Le sous-espace V doit alors vérifier les conditions d'incidence

$$\begin{aligned} \dim(V \cap F_{p_2}) &\geq 1, & \dim(V \cap G_{2n+3-q_2}^+) &\geq 1 \\ \dim(V \cap F_{p_3}) &\geq 2, & \dim(V \cap G_{2n+3-q_1}^+) &\geq 2. \end{aligned}$$

On en déduit en particulier :

$$\begin{aligned} F_{p_2} \cap G_{2n+3-q_1}^+ &\neq 0, \\ F_{p_3} \cap G_{2n+3-q_2}^+ &\neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, le sous-espace de dimension deux V existe si et seulement si

$$\begin{aligned} \mu_1 - \lambda_2 + a_{1,2} &\geq 0 \\ \mu_2 - \lambda_3 + a_{1,3} + a_{2,3} - b_{1,2} &\geq 0, \end{aligned}$$

avec toujours la condition $|\lambda| = |\mu| + 2n - 2$. Par un calcul, on montre que ces trois conditions ne peuvent être simultanément valables que dans les deux cas suivants :

1. si $a_{1,2} = a_{1,3} = 0$ et $a_{2,3} = b_{1,2} = 1$; dans ce cas on doit également avoir $\lambda_1 = 2n - 2$, $\lambda_3 \geq 0$ et $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, 0)$,

2. si $a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,3} = b_{1,2} = 0$; dans ce cas, on doit également avoir soit $\lambda_1 = 2n - 2$, $\lambda_3 \geq 0$ et $\mu = (\lambda_2, \lambda_3, 0)$, soit $\lambda_1 = 2n - 2$, $\lambda_2 = 2n - 3$ et $\mu = (2n - 2, \lambda_3, -1)$.

Dans chacune des situations ci-dessus, on a prouvé que V est uniquement déterminé. On montre facilement que W l'est également, donc $I_1(\sigma_\lambda, \mathbf{i}^* \sigma_{(\mu+1^3)^v}^+) = 1$, d'où finalement le résultat :

$$(\sigma_1 \star \sigma_{a,b,c})_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } a \neq 2n - 2 \\ \sigma_{b,c} & \text{si } a = 2n - 2 \text{ et } b \neq 2n - 3 \\ \sigma_{2n-2,c,-1} + \sigma_{2n-3,c} & \text{si } a = 2n - 2 \text{ et } b = 2n - 3. \end{cases} \quad (5.3)$$

Produit par $\sigma_{1,1}$. On utilise une méthode analogue à celle du paragraphe précédent pour démontrer :

$$(\sigma_{1,1} \star \sigma_{a,b,c})_1 = 0 \text{ si } a \neq 2n - 2, \quad (5.4)$$

$$(\sigma_{1,1} \star \sigma_{2n-2,b,c})_1 = \begin{cases} \sigma_{b+1,c} + \sigma_{b,c+1} & \text{si } b + c \leq 2n - 6 \text{ ou } (b + c \geq 2n - 4 \\ & \text{et } b \neq 2n - 4, 2n - 3) \\ \sigma_{b+2,c-1} + 2\sigma_{b+1,c} + \sigma_{b,c+1} & \text{si } b + c = 2n - 5 \text{ et } c \geq 1 \\ \sigma_{2n-2,-1,-1} + 2\sigma_{b+1,c} + \sigma_{b,c+1} & \text{si } b + c = 2n - 5 \text{ et } c \leq 0 \\ \sigma_{2n-4,c+1} + \sigma_{2n-3,c} + \sigma_{2n-2,c,-1} & \text{si } b = 2n - 4 \text{ et } c \geq 0 \\ \sigma_{2n-3,c+1} + \sigma_{2n-2,c} + \sigma_{2n-2,c+1,-1} & \text{si } b = 2n - 3. \end{cases}$$

De plus, on vérifie qu'il ne peut pas y avoir de terme de degré 2 dans le produit $\sigma_{1,1} \star \sigma_{a,b,c}$. Cette fois, on ne peut plus se contenter d'appliquer la proposition 5.2, car la condition sur les longueurs n'est pas toujours vérifiée. Néanmoins, on remarque que $\sigma_{1,1} = \sigma_1^2 - \sigma_2$. Or la proposition 5.2 montre qu'il n'y a pas de terme de degré 2 dans le produit quantique par σ_2 . Enfin, la formule (5.3) permet d'arriver à la même conclusion pour le produit quantique par σ_1^2 .

Produit par $\sigma_{1,1,1}$. On peut cette fois montrer le résultat suivant :

$$(\sigma_{1,1,1} \star \sigma_{a,b,c})_1 = 0 \text{ si } a \neq 2n - 2, \quad (5.5)$$

$$(\sigma_{1,1,1} \star \sigma_{2n-2,b,c})_1 = \begin{cases} \sigma_{b+1,c+1} & \text{si } b + c \leq 2n - 7 \text{ ou } (b + c \geq 2n - 4 \text{ et} \\ & b \neq 2n - 4 \text{ et } ((b, c) \neq (2n - 3, 2n - 5))) \\ \sigma_{b+2,c} + \sigma_{b+1,c+1} & \text{si } b + c = 2n - 6 \text{ avec } c \geq 0 \\ & \text{ou } b + c = 2n - 5 \text{ avec } c \geq 1 \\ \sigma_{b+1,c+1} + \sigma_{b+2,c} + \sigma_{2n-2,0,-1} & \text{si } b + c = 2n - 5 \text{ et } c \leq 0 \\ \sigma_{b+1,c+1} + \sigma_{2n-2,-1,-1} & \text{si } (a, b, c) = (2n - 2, 2n - 5, -1) \\ \sigma_{2n-3,c+1} + \sigma_{2n-2,c+1,-1} & \text{si } b = 2n - 4 \text{ et } c \geq 0 \\ \sigma_{2n-2,2n-4} + \sigma_{2n-2,2n-3,-1} & \text{si } (a, b, c) = (2n - 2, 2n - 3, 2n - 5). \end{cases}$$

De plus, on vérifie comme au paragraphe précédent qu'il ne peut pas y avoir de terme de degré 2 dans le produit $\sigma_{1,1,1} \star \sigma_{a,b,c}$. En effet, $\sigma_{1,1,1} = \sigma_3 + 2\sigma_1\sigma_{1,1} - \sigma_1^3$.

La proposition 5.2 montre qu'il n'y a pas de terme de degré 2 dans le produit quantique par σ_3 . De plus, les formules (5.3) et (5.5) montrent que

$$(\sigma_1 \star \sigma_{1,1} \star \sigma_{a,b,c})_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } (a, b) \neq (2n-2, 2n-3) \\ \sigma_c & \text{si } (a, b) = (2n-2, 2n-3) \\ & \text{et } c \leq 2n-5 \\ \sigma_{2n-4} + \sigma_{2n-2, -1, -1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, un autre calcul nous donne

$$(\sigma_1^3 \star \sigma_{a,b,c})_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } (a, b) \neq (2n-2, 2n-3) \\ 2\sigma_c & \text{si } (a, b) = (2n-2, 2n-3) \\ & \text{et } c \leq 2n-5 \\ 2\sigma_{2n-4} + 2\sigma_{2n-2, -1, -1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où l'annulation du terme de degré 2 du produit $\sigma_{1,1,1} \star \sigma_{a,b,c}$. Ces calculs permettent de voir que cette annulation n'a a priori rien d'évident ; contrairement au cas des classes $\mathbf{i}^* \sigma_p$, on ne dispose en effet pas d'un résultat du type de la proposition 5.2 permettant de l'assurer. Elle constitue une autre analogie avec le cas de la grassmannienne symplectique paire, puisque les résultats de [LL] démontrent dans ce cas l'annulation des termes de degré 2 du produit quantique par les $\sigma_{1^r}^+$ dans $\text{IG}(m, 2n)$.

Présentation de $\text{QA}^*(\text{IG}(3, 2n+1))$. Les formules de Pieri quantique ci-dessus nous permettent de déterminer une présentation de l'anneau de cohomologie quantique de $\text{IG}(3, 2n+1)$. Si l'on définit les f_{2r} et les d_r comme à la proposition 2.13, on a

Proposition 5.7. *L'anneau de cohomologie quantique $\text{QA}^*(\text{IG}(3, 2n+1))$ est engendré par les classes $\sigma_1, \sigma_{1,1}, \sigma_{1,1,1}$ et le paramètre quantique q . Les relations sont*

$$\begin{aligned} f_{2n-2} &= 0 \\ d_{2n-1} &= q \\ f_{2n} &= q\sigma_1. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que par définition des d_r , on a $d_r = c_r(\mathcal{Q})$ pour tout $r < \deg q = 2n-1$, où \mathcal{Q} est le fibré quotient sur $\text{IG}(3, 2n+1)$. Par conséquent :

$$d_r = \begin{cases} \sigma_r & \text{si } 1 \leq r \leq 2n-5 \text{ ou } r = 2n-2 \\ \sigma_{2n-4} + \sigma_{2n-2, -1, -1} & \text{si } r = 2n-4 \\ \sigma_{2n-3} + \sigma_{2n-2, 0, -1} & \text{si } r = 2n-3. \end{cases}$$

Rappelons également que d'après la proposition 2.13, f_{2n-2} , d_{2n-1} et f_{2n} sont les relations classiques. Donc pour trouver une présentation quantique, il suffit d'après les résultats de Siebert et Tian (cf théorème 1.10) de calculer ces relations avec le produit quantique. On a les relations de récurrence suivantes sur les f_{2r} et les d_r :

$$\begin{aligned} d_r &= \sigma_1 d_{r-1} - \sigma_{1,1} d_{r-2} + \sigma_{1,1,1} d_{r-3} \\ f_{2r} &= d_{2r} - \sigma_{1,1} f_{2r-2}. \end{aligned}$$

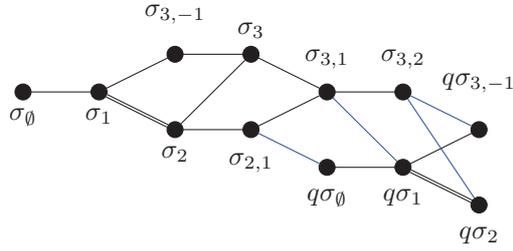


FIGURE 5.1 – Diagramme de Hasse quantique de $IG(2, 5)$

Comme $\deg f_{2n-2} = 2n - 2 < \deg q = 2n - 1$, la première relation est inchangée. Pour la seconde :

$$\begin{aligned} d_{2n-1} &= \sigma_1 d_{2n-2} - \sigma_{1,1} d_{2n-3} + \sigma_{1,1,1} d_{2n-4} \\ &= \sigma_1 \star \sigma_{2n-2} - \sigma_{1,1} \star (\sigma_{2n-3} + \sigma_{2n-2,0,-1}) + \sigma_{1,1,1} \star (\sigma_{2n-4} + \sigma_{2n-2,-1,-1}) \\ &= q \text{ d'après les règles de Pieri quantiques ci-dessus.} \end{aligned}$$

Enfin, par la même méthode, on trouve :

$$f_{2n} = d_{2n} - \sigma_{1,1} \star f_{2n-2} = q\sigma_1,$$

ce qui montre que les relations quantiques sont bien celles de l'énoncé de la proposition. \square

5.3.2 Etude complète pour $IG(2, 5)$

La grassmannienne symplectique impaire de plus petite dimension qui n'est pas un espace projectif est $IG(2, 5)$, qui est de dimension 5. Dans cette partie, on va donner une description complète de la cohomologie quantique de cet exemple.

Remarquons tout d'abord que la cohomologie de $IG(2, 5)$ est de rang 8. Plus précisément, les classes de Schubert sont :

$$1, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_{3,-1}, \sigma_{2,1}, \sigma_3, \sigma_{3,1}, \sigma_{3,2}.$$

En utilisant la règle de Pieri quantique du théorème 3.12, on peut dessiner son diagramme de Hasse (cf figure 5.1)

Donnons également la table de multiplication quantique :

	1	σ_1	σ_2	$\sigma_{3,-1}$	$\sigma_{2,1}$	σ_3	$\sigma_{3,1}$	$\sigma_{3,2}$
1	1							
σ_1	σ_1	$2\sigma_2 + \sigma_{3,-1}$						
σ_2	σ_2	$\sigma_{2,1} + \sigma_3$	$\sigma_{3,1}$					
$\sigma_{3,-1}$	$\sigma_{3,-1}$	σ_3	q	$\sigma_{3,1} - q$				
$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{2,1}$	$\sigma_{3,1}$	$\sigma_{3,2}$	$-\sigma_{3,2} + q\sigma_1$	$q\sigma_{3,-1}$			
σ_3	σ_3	$\sigma_{3,1} + q$	$q\sigma_1$	$\sigma_{3,2}$	$q\sigma_2$	$q(\sigma_{3,-1} + \sigma_2)$		
$\sigma_{3,1}$	$\sigma_{3,1}$	$\sigma_{3,2} + q\sigma_1$	$q(\sigma_{3,-1} + \sigma_2)$	$q\sigma_2$	$q\sigma_3$	$q(\sigma_{2,1} + \sigma_2)$	$q\sigma_{3,1} + q^2$	
$\sigma_{3,2}$	$\sigma_{3,2}$	$q(\sigma_{3,-1} + \sigma_2)$	$q\sigma_3$	$q\sigma_{2,1}$	q^2	$q\sigma_{3,1}$	$q^2\sigma_1$	$q^2\sigma_2$

On constate en particulier qu'il y a des coefficients négatifs, aussi bien pour la multiplication classique que quantique, ce qui traduit le fait que les variétés

de Schubert ne peuvent pas toujours être mises en position transverse et que les invariants de Gromov-Witten associés aux classes de Schubert ne sont pas toujours énumératifs.

On va également donner une règle de Giambelli quantique de $\text{IG}(2, 5)$. Pour cela, remarquons tout d'abord que les générateurs ne sont pas, comme pour $\text{IG}(2, 2n + 1)$ avec $n \geq 3$, les classes σ_1 et $\sigma_{1,1}$, car $\sigma_{1,1}$ est non définie. Si on considère l'inclusion $\mathbf{i} : \text{IG}(2, 5) \hookrightarrow \text{G}(2, 5)$, on a $\mathbf{i}^* \sigma_1^{\text{G}} = \sigma_1$ mais $\mathbf{i}^* \sigma_{1,1}^{\text{G}} = \sigma_2$. Par conséquent, σ_1 et σ_2 sont des générateurs de $H^*(\text{IG}(2, 5), \mathbb{Z})$, et à l'aide de la table de multiplication, on remarque que les autres classes s'expriment en fonction de ces générateurs de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{3,-1} &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2 & \sigma_3 &= \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_{2,1} &= -\sigma_1^3 + 3\sigma_1\sigma_2 & \sigma_{3,1} &= \sigma_2^2 \\ \sigma_{3,2} &= -\sigma_1^3\sigma_2 + 3\sigma_1\sigma_2^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, la formule de Giambelli quantique est identique à la formule de Giambelli classique.

Enfin, la présentation de $\text{QH}^*(\text{IG}(2, 5), \mathbb{Z})$ en fonction des générateurs σ_1 et σ_2 est :

$$\text{QH}^*(\text{IG}(2, 5), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\sigma_1, \sigma_2, q] / (R_1, R_2),$$

où $R_1 : \sigma_1^4 - 3\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_2^2 = 0$ et $R_2 : \sigma_1^4 - 2\sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_2^2 = q$.

5.3.3 Etude complète pour $\text{IG}(3, 9)$

Au chapitre 3, on a décrit précisément la cohomologie quantique des grassmanniennes symplectiques impaires de droites $\text{IG}(2, 2n + 1)$. En revanche, pour $m > 2$, non seulement l'application de restriction \mathbf{i}^* définie au paragraphe 2.3.1 prend une forme nettement plus compliquée, mais en plus, connaître les invariants de Gromov-Witten de degré 1 ne suffit plus à déterminer la règle de Pieri. Or en degré plus grand que 1, les espaces de modules font apparaître des obstructions non triviales.

Néanmoins, sous réserve que la conjecture 5.1 soit vraie, la proposition 5.2 va nous permettre d'obtenir des résultats analogues à ceux du chapitre 3 pour un exemple relativement simple de grassmannienne symplectique impaire avec $m > 2$: $\text{IG}(3, 9)$. Ceci peut laisser supposer que certains au moins des résultats du chapitre 3 ne sont pas spécifiques au cas $m = 2$. Notons que la plus petite grassmannienne symplectique impaire $\text{IG}(m, 2n + 1)$ avec $m > 2$ n'est pas $\text{IG}(3, 9)$ mais $\text{IG}(3, 7)$; cependant, comme $\text{IG}(3, 7)$ est indexé par des partitions *strictes*, il ne possède pas de classes $\sigma_{1,1}$ et $\sigma_{1,1,1}$, donc pour rendre la comparaison avec les formules 3.12 plus aisée, on étudie plutôt le cas de $\text{IG}(3, 9)$.

La formule de Pieri quantique pour $\text{IG}(3, 9)$ s'obtient à l'aide des formules du paragraphe 5.3.1. On va ici simplement représenter son diagramme de Hasse quantique à la figure 5.2. Notons que pour des raisons de place, on n'a pas indiqué la classe de Schubert correspondant à chaque sommet; on réfère à la figure 2.4 pour connaître cette indexation.

On remarque que le sous-diagramme induit par les classes de Schubert dont le produit quantique par σ_1 possède un terme en q est isomorphe au diagramme de Hasse de $\text{IG}(2, 7)$ (en vert). Or pour la grassmannienne symplectique paire $\text{IG}(m, 2n)$, la règle de Pieri quantique (cf théorème 1.18) permet de montrer que les classes de Schubert dont le produit quantique par σ_1 possède un terme

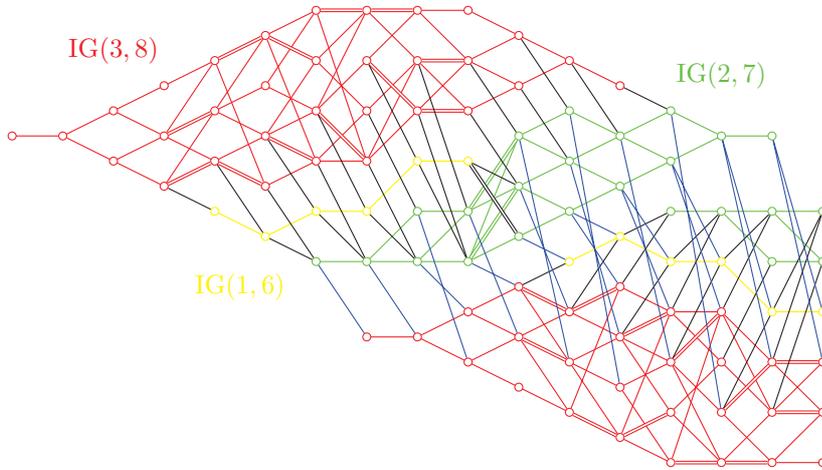


FIGURE 5.2 – Diagramme de Hasse quantique de IG(3,9)

en q sont les classes σ_λ^+ avec $\lambda_1 = 2n - m$. On remarque également facilement que le sous-diagramme du diagramme de Hasse de IG($m, 2n$) correspondant est isomorphe au diagramme de Hasse de IG($m - 1, 2n - 2$). On observe donc pour IG(3,9) un phénomène semblable à celui mis en évidence pour la grassmannienne paire. De plus, dans le cas des droites, ce résultat est démontré par le théorème 3.12. Il paraît donc raisonnable de conjecturer le résultat suivant :

Conjecture 5.8 (Diagramme de Hasse quantique de IG($m, 2n + 1$)). *Le sous-diagramme du diagramme de Hasse de IG($m, 2n + 1$) induit par les classes de Schubert dont le produit quantique par σ_1 possède un terme en q est isomorphe au diagramme de Hasse de IG($m - 1, 2n - 2$).*

D'après la proposition 5.7, la présentation quantique de IG(3,9) en fonction des classes $\sigma_1, \sigma_{1,1}$ et $\sigma_{1,1,1}$ est donnée par les relations $f_6 = 0, d_7 = q$ et $f_8 = q\sigma_1$.

A l'annexe B, on donne une formule pour la multiplication quantique dans IG($2, 2n + 1$) par la classe $\sigma_{n+1,n} = \mathbf{i}^* \sigma_{n+1,n}^+, \sigma_{n+1,n}^+$ étant la classe associée au poids cominusculaire ω_{n+1} dans IG($2, 2n + 2$). En général, la classe associée à ω_{n+1} dans IG($m, 2n + 2$) est $\sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m}^+$, et on peut se demander à quoi correspond la multiplication quantique par la classe $\mathbf{i}^* \sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m}^+$ dans IG($m, 2n + 1$). Dans le cas de IG(3,9), le problème est donc de calculer la multiplication quantique par la classe $\sigma_{5,4,3} = \mathbf{i}^* \sigma_{5,4,3}^+$.

Pour faire ce calcul, remarquons que

$$\begin{aligned} \sigma_{5,4,3} = & \sigma_1 \sigma_{1,1} \sigma_{1,1,1}^3 - \sigma_{1,1}^3 \sigma_{1,1,1}^2 + \sigma_1^3 \sigma_{1,1,1}^4 - 3\sigma_{1,1,1}^4 - q\sigma_1^3 \sigma_{1,1,1} + 3q\sigma_1 \sigma_{1,1}^2 \\ & - 3q\sigma_{1,1} \sigma_{1,1,1}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Pieri quantique, on peut donc trouver la multiplication quantique dans IG(3,9). On n'écrit pas ces formules faute de place. Néanmoins, on remarque que comme dans le cas $m = 2$:

- le résultat du produit $\sigma_{5,4,3} \star \sigma_{a,b,c}$ est homogène en q ;

- pour tout $0 \leq d \leq 3$, l'ensemble des classes de Schubert de $\text{IG}(3, 9)$ dont le degré en q du produit quantique par $\sigma_{5,4,3}$ est égal à d est un intervalle. Plus précisément :
 1. pour $d = 0$, c'est l'intervalle $[1, \sigma_{1,1,1}]$;
 2. pour $d = 1$, c'est l'intervalle $[\sigma_2, \sigma_{6,1,1}]$;
 3. pour $d = 2$, c'est l'intervalle $[\sigma_{3,2}, \sigma_{6,5,1}]$;
 4. pour $d = 3$, c'est l'intervalle $[\sigma_{4,3,2}, \sigma_{6,5,4}]$.
- $\sigma_{5,4,3}^2 = q^3 \sigma_{1,1,1}$.

Ce résultat est analogue à celui obtenu dans le cas pair à l'annexe, et que l'on énonce ici :

Proposition 5.9. 1. *Le produit quantique $\sigma_{n,n-1,\dots,n+1-m}^+ \star \sigma_\lambda^+$ dans la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m, 2n)$ est homogène en q .*

2. *Soit*

$$I_d = \{ \sigma_\lambda^+ \mid \sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m}^+ \star \sigma_\lambda^+ \text{ est de degré } d \}.$$

Alors I_d est l'intervalle

$$[\sigma_{n-m+d,\dots,n-m+1}^+, \sigma_{2n-m,\dots,2n+1-m-d,\underbrace{n-m,\dots,n-m}_{m-d \text{ fois}}}^+]$$

dans le diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\text{IG}(m,2n)}$ de $\text{IG}(m, 2n)$. De plus

$$\sigma_\lambda^+ \in I_d \Leftrightarrow \# \{ 1 \leq j \leq m \mid \lambda_j > n - m \} = d$$

et

$$\mathcal{H}_{\text{IG}(m,2n)} = \bigsqcup_{d=0}^m I_d.$$

3. $(\sigma_{n,n-1,\dots,n+1-m}^+)^2 = q^m$.

On peut supposer que ces résultats vus pour le cas $m = 2$ (cf § B.4) et celui de $\text{IG}(3, 9)$ restent valables dans le cas général, c'est-à-dire que la conjecture suivante est vraie :

Conjecture 5.10. 1. *Le produit quantique $\sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m} \star \sigma_\lambda$ dans la grassmannienne symplectique impaire $\text{IG}(m, 2n + 1)$ est homogène de degré q .*

2. *Soit*

$$\tilde{I}_d = \{ \sigma_\lambda \mid \sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m} \star \sigma_\lambda \text{ est de degré } d \}.$$

Alors \tilde{I}_d est l'intervalle

$$[\sigma_{n-m+d,\dots,n-m+1}, \sigma_{2n+1-m,\dots,2n+2-m-d,\underbrace{n-m,\dots,n-m}_{m-d \text{ fois}}}]$$

dans le diagramme de Hasse $\mathcal{H}_{\text{IG}(m,2n+1)}$ de $\text{IG}(m, 2n + 1)$, de telle sorte que

$$\mathcal{H}_{\text{IG}(m,2n+1)} = \bigsqcup_{d=0}^m \tilde{I}_d.$$

3. Si l'on note, comme à la proposition 5.9 :

$$\mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m,2n+2)} = \bigsqcup_{d=0}^m I_d,$$

on a $\tilde{I}_d = I_d \cap \mathcal{H}_{\mathrm{IG}(m,2n+1)}$.

4. $\sigma_{n+1,n,\dots,n+2-m}^2 = q^m \sigma_{1^m}$.

Cette conjecture, si elle s'avère être vraie, représente un autre exemple des similitudes entre grassmanniennes symplectiques paires et impaires que nous nous sommes efforcés de mettre en évidence dans ce travail. En particulier, les propositions 1.17 et 2.13 nous ont permis de constater que les présentations de la cohomologie classique de $\mathrm{IG}(m, 2n)$ et de $\mathrm{IG}(m, 2n + 1)$ revêtent des formes très semblables. Par ailleurs, les propositions 2.3 et 2.4 ont montré des inclusions entre les diagrammes de Hasse de ces variétés. Concernant le cas des grassmanniennes de droites, on a constaté que les formules de Pieri pour la multiplication par les classes colonnes étaient très proches (cf § 3.2.1.3), de même que celles pour la multiplication par les classes $\sigma_{n+1,n}$ dans $\mathrm{IG}(2, 2n + 1)$ et $\sigma_{n+1,n}^+$ dans $\mathrm{IG}(2, 2n + 2)$ respectivement. Les exemples étudiés dans cette partie suggèrent que certains de ces résultats devraient être valides pour $m > 2$.

Annexe A

Variétés de Schubert dans la grassmannienne symplectique

A.1 Quatre indexations des variétés de Schubert

Dans cette partie, on présente quatre indexations différentes pour les variétés de Schubert de la grassmannienne symplectique $IG(m, 2n)$, et on explique quels sont les liens entre elles.

A.1.1 Par le groupe de Weyl

On a vu au paragraphe 1.2.1 que les espaces homogènes possèdent une décomposition cellulaire appelée décomposition de Bruhat, qui permet d'obtenir une décomposition additive de leur cohomologie, de la forme

$$H^*(G/P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{w \in W/W_P} \mathbb{Z}\sigma_w.$$

Pour décrire les variétés de Schubert de $IG(m, 2n)$, on va décrire l'ensemble $W^P \subset W$ des représentants de longueur minimale des éléments de W/W_P :

$$W^P = \{w \in \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}_2^n \mid \exists 0 \leq l \leq m, w = (y_1, \dots, y_{m-l}, \bar{z}_l, \dots, \bar{z}_1 \mid v_1, \dots, v_{n-m}) \\ \text{avec } y_1 < \dots < y_{m-l}, z_l > \dots > z_1, v_1 < \dots < v_{n-m}\},$$

où $\bar{z}_i = -z_i$ et les y_i, z_i et v_i sont des entiers distincts entre 1 et n .

Enfin, le degré de la classe de Schubert σ_w^+ associée à

$$w = (y_1, \dots, y_{m-l}, \bar{z}_l, \dots, \bar{z}_1 \mid v_1, \dots, v_{n-m}) \in W^P$$

est

$$\deg \sigma_w^+ = l(w) = \sum_{j=1}^l (m+1 - z_j) + \sum_{r=1}^{n-l} (m+r - v_r + d_r),$$

où $l(w)$ est la longueur de w et $d_r = \#\{1 \leq j \leq l \mid z_j < v_r\}$.

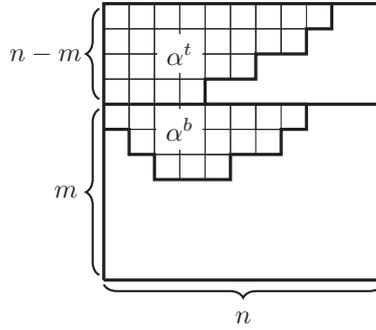


FIGURE A.1 – Paire de partitions

A.1.2 Par les paires de partitions

Par paire de partitions, on entendra une paire $\alpha = (\alpha^t \mid \alpha^b)$, où α^t est une partition stricte du rectangle $(n-m) \times n$ et α^b une partition stricte du rectangle $m \times n$, avec la condition $\alpha_{n-m}^t \geq l(\alpha^b) + 1$, où $l(\alpha^b)$ désigne le nombre de parts non nulles de α^b . Cette définition est introduite dans [PR96]. On notera $\mathcal{P}_{m,n}$ l'ensemble des paires de partitions. Un exemple est représenté à la figure A.1.

Si $w = (y_1, \dots, y_{m-l} \mid \bar{z}_l, \dots, \bar{z}_1 \mid v_1, \dots, v_{n-m}) \in \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}_2^n$, l'application $w \mapsto \alpha = (\alpha^t \mid \alpha^b)$ donnée par

- $\alpha_j^b = n + 1 - z_j$ pour $1 \leq j \leq l$,
- $\alpha_r^t = n + 1 - v_r + d_r$ pour $1 \leq r \leq n - m$

définit une bijection entre les éléments de $\mathcal{P}_{m,n}$ et ceux de W/W_P .

Le degré de la classe de Schubert σ_α^+ associée à la paire de partitions α est donné par la formule

$$\deg \sigma_\alpha^+ := |\alpha| := \sum_{j=1}^{l(\alpha^b)} \alpha_j^b + \sum_{i=1}^{n-m} (\alpha_i^t - n + m - 1 + i).$$

Cette notation est utilisée pour écrire la formule de Pieri en fonction des classes de Chern du fibré tautologique dual (cf théorème 1.12). En revanche, elle n'est pas commode lorsque l'on souhaite exprimer la dualité de Poincaré.

A.1.3 Par les partitions k -strictes

La notion de partition k -stricte est introduite dans [BKT09]. Soit k un entier positif. Une partition λ est dite k -stricte si aucune part plus grande que k n'est répétée, c'est-à-dire si $\lambda_j > k$ implique $\lambda_{j+1} < \lambda_j$. La figure A.2 donne un exemple de partition 2-strictes mais pas 1-strictes.

Soit $k = n - m$. Les variétés de Schubert de $\text{IG}(m, 2n)$ sont indexées par les partitions k -strictes λ contenues dans le rectangle $m \times (n + k)$. Notons $\mathcal{Q}_{m,n}$ l'ensemble de ces partitions. La bijection $\lambda \mapsto \alpha = (\alpha^t \mid \alpha^b)$ entre $\mathcal{P}_{m,n}$ et $\mathcal{Q}_{m,n}$ est donnée par

- $\alpha_j^b = \lambda_j - k$ pour $1 \leq j \leq \max \{1 \leq i \leq m \mid \lambda_i > k\}$,

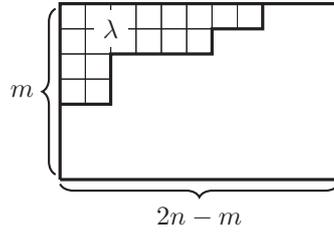


FIGURE A.2 – Une partition 2-strict

- $\alpha_r^t = k + 1 - r + \#\{1 \leq i \leq m \mid \lambda_i \geq r\}$ pour $1 \leq r \leq n - m$

Enfin, le degré de la classe de Schubert σ_λ^+ associée à la partition k -strict λ est simplement la somme des parts de λ :

$$\deg \sigma_\lambda^+ = |\lambda| = \sum_{j=1}^m \lambda_j.$$

Cette notation est utilisée pour écrire la formule de Pieri en fonction des classes de Chern du fibré quotient (cf théorème 1.13). Elle a également l'avantage de rendre très simple le calcul du degré d'une classe de Schubert.

A.1.4 Par les conditions d'incidence

Soit F_\bullet un *drapeau isotrope* de \mathbb{C}^{2n} , c'est-à-dire un drapeau complet $F_\bullet = (0 = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{2n} = \mathbb{C}^{2n})$ tel que $F_{n-i}^\perp = F_{n+i}$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Pour faire le lien avec les définitions précédentes, notons que les sous-groupes de Borel de Sp_{2n} sont en bijection avec les drapeaux isotropes de \mathbb{C}^{2n} . Soit $P = (p_1, \dots, p_m)$ un m -uplet d'entiers *admissibles*, c'est-à-dire tels que $p_i + p_j \neq 2n + 1$ pour tous $1 \leq i, j \leq 2n$. On note $\mathcal{I}_{m,n}$ l'ensemble de ces m -uplets. La variété de Schubert associée au drapeau F_\bullet et aux conditions d'incidence P est définie par :

$$X_P(F_\bullet) = \{\Sigma \in \mathrm{IG}(m, 2n) \mid \dim(\Sigma \cap F_{p_i}) \geq i\}.$$

La bijection $P \mapsto \lambda$ entre $\mathcal{I}_{m,n}$ et $\mathcal{Q}_{m,n}$ est donnée par

$$\lambda_j = n + k + 1 - p_j + \#\{i < j \mid p_i + p_j > 2n + 1\}$$

pour $1 \leq j \leq m$.

On verra que l'avantage de cette notation est qu'elle permet d'exprimer très facilement la dualité de Poincaré. En revanche, il n'est pas évident de calculer le degré d'une classe de Schubert avec cette écriture.

A.2 Dualité de Poincaré

Dans cette partie, on expose la dualité de Poincaré pour certaines des écritures précédentes (la dualité de Poincaré étant très peu commode à exprimer avec l'écriture en paires de partitions, on ne donnera pas de formule pour ce cas).

A.2.1 Pour les éléments du groupe de Weyl

Notons w_0 l'élément de longueur maximale de W . On a vu au paragraphe 1.2.1 que la classe duale associée à une classe σ_w pour $w \in W^P$ (où W^P est l'ensemble des représentants de longueur minimale de W/W_P décrit au début de la partie A.1) est la classe σ_{w^\vee} , où $w^\vee \in W^P$ est le représentant de longueur minimale de la classe de $w_0 w$ dans W/W_P . Si l'on note

$$w = (y_1 < \cdots < y_{m-l}, \bar{z}_l < \cdots < \bar{z}_1 \mid v_1 < \cdots < v_{n-m}),$$

on a alors

$$w^\vee = (z_1 < \cdots < z_l, \bar{y}_{m-l} < \cdots < \bar{y}_1 \mid v_1 < \cdots < v_{n-m}).$$

A.2.2 Pour les partitions k -strictes

Soit $\lambda \in \mathcal{Q}_{m,n}$ une partition k -stricte ($k = n - m$). La *partition duale* λ^\vee est définie par

$$\begin{aligned} \lambda_{m+1-j}^\vee &= 2k + 1 - \lambda_j + \#\{i < j \mid \lambda_i + \lambda_j \leq 2k + j - i\} \\ &\quad + \#\{i > j \mid \lambda_i + \lambda_j > 2k + j - i\}. \end{aligned}$$

Elle est encore k -stricte, et on a

$$\int_{\text{IG}(m,2n)} [X_\lambda] \cdot [X_\mu] = \delta_{\mu, \lambda^\vee}.$$

Il existe également une description plus visuelle de la dualité de Poincaré pour les partitions k -strictes dans [BKT09], § 4.4.

A.2.3 Pour les conditions d'incidence

Soient F_\bullet un drapeau isotrope de \mathbb{C}^{2n} et $P = (p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{I}_{m,n}$ un ensemble de conditions d'incidence. On définit l'ensemble dual $P^\vee = (p_1^\vee, \dots, p_m^\vee)$ par $p_j^\vee = 2n + 1 - p_{m+1-j}$. Si Q est un autre élément de $\mathcal{I}_{m,n}$ et G_\bullet un drapeau isotrope en position générale avec F_\bullet , on a

$$\int_{\text{IG}(m,2n)} [X_P(F_\bullet)] \cdot [X_Q(G_\bullet)] = \delta_{Q, P^\vee}.$$

A.3 Règle de Pieri

Dans cette partie, on introduit les notions combinatoires qui sont nécessaires pour comprendre les deux règles de Pieri classiques énoncées au paragraphe 1.3.1.

A.3.1 En fonction des classes σ_{1^r}

La règle de Pieri classique pour les classes colonnes (cf proposition 1.12) démontrée par Pragacz et Ratajski dans [PR96] utilise l'indexation des variétés de Schubert par les paires de partitions présentée au paragraphe A.1.2. La notion fondamentale est celle de *paires compatibles* (cf définition A.2), mais pour pouvoir l'introduire, on a tout d'abord besoin de quelques définitions et notations concernant les paires de partitions :

Définition A.1. Dans la suite du paragraphe, on représente une paire de partitions $\lambda = (\lambda^t \mid \lambda^b)$ sous la forme d'un diagramme $D_\lambda = D_\lambda^t \cup D_\lambda^b$ contenu dans le carré $n \times n$ tel que :

- D_λ^t est composé de $(n-m)$ lignes de longueur $\lambda_1^t, \dots, \lambda_{n-m}^t$ ayant chacune leur extrémité gauche dans la première colonne ;
- D_λ^b est composé de $l(\lambda^b)$ lignes de longueur $\lambda_1^b, \dots, \lambda_{l(\lambda^b)}^b$ *décalées*, c'est-à-dire que la première ligne a son extrémité gauche dans la première colonne, la deuxième dans la deuxième colonne, etc, comme à la figure A.1.

Soient $l_1 < l_2$; on dit que la ligne L_1 de D_λ d'indice l_1 est située *en haut à droite* de la ligne L_2 d'indice l_2 si

- la case la plus à gauche de L_2 est située à gauche (au sens large) de la case la plus à gauche de L_1 ;
- la case la plus à droite de L_2 est située à gauche (au sens large) de la case la plus à droite de L_1 .

On note alors $L_1 \prec L_2$. On dit que deux cases sont adjacentes si elles ont un côté en commun. On introduit maintenant les définitions principales :

- Une *bande quasi-horizontale* est un ensemble de cases à lignes et colonnes connexes tel que les lignes soient totalement ordonnées pour \prec , comme à la figure A.3 ;
- Une *bande horizontale* est une bande quasi-horizontale qui ne possède pas plus d'une case à chaque colonne ;
- Une *composante* est une bande quasi-horizontale connexe.
- L'*excroissance* d'une composante C est la réunion, sur les lignes L de C , des cases de C situées strictement en bas à droite de la case la plus à gauche de L , comme à la figure A.4.

Considérons maintenant deux paires de partitions λ et μ , que l'on représente dans le même carré $n \times n$.

- Par *ligne*, sauf indication contraire, on entend une ligne de la partition du haut λ^t ; sa λ -part (respectivement sa μ -part) est son intersection avec D_λ^t (respectivement avec D_μ^t).
- On dit qu'une case t de la partition du haut est *au-dessus* d'une case b de la partition du bas si elles sont dans la même colonne. Inversement, b est *au-dessous* de t .
- Une ligne est dite *exceptionnelle* si sa λ -part contient strictement sa μ -part.
- Par *composante* on entend une composante de $D_\mu^b \setminus D_\lambda^b$; une composante E est dite *extrémale* s'il existe un entier i tel que E possède une case à la ligne i et à la colonne i de la partition du bas.
- On appelle $(\mu \setminus \lambda)$ -cases les cases de $D_\mu^t \setminus D_\lambda^t$.

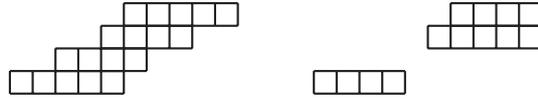


FIGURE A.3 – Exemples de bandes quasi-horizontales



FIGURE A.4 – Exemples d'excroissance (en gris)

Définition A.2 (Paires compatibles). La paire de partitions μ est *compatible* avec λ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (Cd.1) $D_\mu^b \supset D_\lambda^b$, et $D_\mu^b \setminus D_\lambda^b$ est une bande quasi horizontale; $D_\mu^t \setminus D_\lambda^t$ est une bande horizontale à lignes deux à deux disjointes.
- (Cd.2) La λ -part d'au plus une ligne s'arrête au-dessus d'une composante donnée (de $D_\mu^b \setminus D_\lambda^b$). Si la λ -part d'une ligne s'arrête au-dessus d'une composante, on dit que la ligne et la composante sont reliées. Une composante qui est reliée à une certaine ligne est dite reliée. De même, une ligne qui est reliée à une certaine composante est dite reliée. La composante extrême n'est jamais reliée.
- (Cd.3) Toute ligne exceptionnelle est reliée à une composante au-dessus de laquelle s'arrête la μ -part de cette ligne.
- (Cd.4) Si une $(\mu \setminus \lambda)$ -case est au-dessus d'une composante, alors cette composante n'est ni extrême, ni reliée, et cette case est au-dessus de la case la plus à gauche de cette composante.
- (Cd.5) Une excroissance ne peut apparaître que dans une composante reliée, sous la λ -part de la ligne reliée; aucune case de la μ -part de la ligne reliée ne se trouve au-dessus de l'excroissance.

Finalement, si $\lambda \in \mathcal{P}_{m,n}$ est une paire de partitions admissible et μ une paire compatible avec λ , on définit l'entier $e(\lambda, \mu)$ comme le cardinal de l'ensemble des composantes qui ne sont ni reliées, ni extrêmes, et n'ont pas de $(\mu \setminus \lambda)$ -case au-dessus d'elles. Cet entier intervient dans le calcul de la multiplicité pour la règle de Pieri 1.12.

A.3.2 En fonction des classes σ_p

La règle de Pieri en fonction des classes σ_p^+ (cf 1.13) démontrée dans [BKT09] utilise l'indexation des classes de Schubert par les partitions k -strictes ($k := n - m$) exposée au paragraphe A.1.3. On introduit ici les définitions combinatoires permettant d'énoncer précisément ce résultat.

Définition A.3. 1. Soit λ une partition k -stricte. Une case de λ située à la ligne l et à la colonne c est dite k -reliée à la case (l', c') si

$$|c - k - 1| + l = |c' - k - 1| + l'.$$

2. Si $\lambda \subset \mu$, le diagramme gauche $\mu \setminus \lambda$ est appelé une *bande horizontale* (respectivement une *bande verticale*) si elle possède au plus une case par colonne (respectivement par ligne).
3. Soient λ et μ deux partitions k -strictes. On note $\lambda \rightarrow \mu$ si μ peut être obtenue en enlevant une bande verticale parmi les k premières colonnes de λ et en ajoutant une bande horizontale au résultat, de telle sorte que :
 - (a) si l'une des k premières colonnes de μ possède autant de cases que la même colonne de λ , alors la case du bas de cette colonne est k -reliée à au plus une case de $\mu \setminus \lambda$;
 - (b) si l'une des k premières colonnes de μ possède strictement moins de cases que la même colonne de λ , alors les cases enlevées ainsi que la case du bas de cette colonne doivent chacune être k -reliées à exactement une case de $\mu \setminus \lambda$; de plus, les cases de $\mu \setminus \lambda$ ainsi définies doivent toutes être dans la même ligne.

Si $\lambda \rightarrow \mu$, notons \mathbb{A} l'ensemble des cases de $\mu \setminus \lambda$ situées entre les colonnes $k + 1$ à n qui ne sont pas mentionnées dans les conditions 3a et 3b. On définit alors le nombre $N(\lambda, \mu)$ de composantes connexes de \mathbb{A} qui ne possèdent pas de case à la colonne $k + 1$. Ce nombre intervient dans l'énoncé du théorème 1.13. Ici, contrairement au paragraphe précédent, on dit que deux cases sont adjacentes si elles partagent au moins un sommet.

Annexe B

Involution quantique et décomposition en P -orbites

Dans [CMP09], Chaput, Manivel et Perrin ont prouvé une formule (cf théorème B.1 ci-dessous) donnant, pour un espace homogène G/P , le produit quantique par des classes de Schubert particulières associées aux poids cominuscules. Ces classes correspondent également aux éléments de l'image de la représentation de Seidel $\pi_1(G^{\text{ad}}) \rightarrow \text{QA}^*(G/P)_{\text{loc}}^{\times}$, où $G^{\text{ad}} = G/Z(G)$ et $\text{QA}^*(G/P)_{\text{loc}}^{\times}$ désigne l'ensemble des éléments inversibles de $\text{QA}^*(G/P)$ localisé en les paramètres quantiques. La preuve de cette formule utilise la comparaison entre la cohomologie quantique d'un espace homogène et l'homologie de la grassmannienne affine correspondante mentionnée au paragraphe 1.4.2.

A la partie B.2, nous allons faire le lien entre cette formule et la décomposition en P_I -orbites, où P_I est le sous-groupe parabolique correspondant à un poids cominuscule. Un poids ω est dit *cominuscule* s'il est minuscule pour le système de racines dual (en types ADE , les deux notions sont donc équivalentes). D'une description précise des orbites paraboliques, on déduira à la partie B.3 une décomposition du diagramme de Hasse des grassmanniennes. En types A , B , C et D , on décrira cette décomposition de manière explicite. Enfin, on verra à la partie B.4 comment obtenir, par une méthode différente, des résultats analogues pour la grassmannienne symplectique impaire de droites.

Soit G un groupe algébrique semi-simple. On considère $X = G/P_J$ un espace homogène, où P_J est un sous-groupe parabolique standard. Dans ce qui suit, on supposera que P_J est un parabolique maximal, c'est-à-dire que J est le complémentaire d'un singleton, même si le théorème B.1 est vrai dans un cadre plus large. Soit \mathcal{I} le sous-ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de G correspondant aux poids cominuscules. Pour simplifier les notations, on identifiera les sommets du diagramme de Dynkin à leur indexation dans la notation de Bourbaki (cf [Bou68]). Si $i \in \mathcal{I}$, soit v_i le plus petit élément du groupe de Weyl W de G tel que $v_i \omega_i^{\vee} = w_0 \omega_i^{\vee}$, où ω_i^{\vee} est le i -ème copoids fondamental et w_0 est l'élément de longueur maximale de W . Le produit quantique dans X par la classe de Schubert σ_{v_i} associé à v_i est alors donné par la formule suivante :

Théorème B.1 ([CMP09], théorème 1). *Pour tout $w \in W/W_J$, où W_J est le*

groupe de Weyl de P_J et pour tout $i \in \mathcal{I}$, on a

$$\sigma_{v_i} \star \sigma_w = q^{\eta_J(\omega_i^\vee - w^{-1}(\omega_i^\vee))} \sigma_{v_i w},$$

où $\eta_J : Q^\vee \rightarrow Q^\vee / Q_J^\vee \cong \mathbb{Z}$ est la surjection naturelle de l'ensemble Q^\vee des coracines de G vers le quotient de Q^\vee par le sous-ensemble Q_J^\vee des coracines de P_J , qui est de rang 1.

Notons $\delta(w) := \eta_J(\omega_i^\vee - w^{-1}(\omega_i^\vee))$. Dans la suite, on va montrer que les ensembles sur lesquels l'entier $\delta(w)$ est constant correspondent à des orbites paraboliques dans X .

On commence tout d'abord par rappeler à quoi correspondent les poids cominusculs et les classes de Schubert σ_{v_i} pour les grassmanniennes de types A , B , C et D . Dans la dernière colonne du tableau ci-dessous, les classes de Schubert de la grassmannienne usuelle sont indexées par des partitions et celles des grassmanniennes isotropes par des partitions $(n-m)$ -strictes (cf annexe A). Notons qu'en type D , le cas $m = n-1$ ne correspond pas à une grassmannienne (le groupe de Picard de la variété correspondante étant de rang 2); par conséquent on ne le traitera pas ici.

Type	X	ω_i	σ_{v_i}
A	$G(m, n)$	$\omega_i \ (1 \leq i \leq m)$ $\omega_i \ (m \leq i \leq n-1)$	$\underbrace{\sigma_{n-m, \dots, n-m}}_{i \text{ fois}}$ $\underbrace{\sigma_{n-i, \dots, n-i}}_{m \text{ fois}}$
B	$OG(m, 2n+1)$	ω_1	σ_{2n-m}
C	$IG(m, 2n)$	ω_n	$\sigma_{n, n-1, \dots, n-m+1}$
D	$OG(m, 2n) \ (m < n-1)$ $OG(n, 2n)$	ω_1 $\omega_{n-1} \ (m \text{ pair})$ $\omega_n \ (m \text{ pair})$ $\omega_{n-1} \ (m \text{ impair})$ $\omega_n \ (m \text{ impair})$ ω_1 $\omega_{n-1} \ (n \text{ pair})$ $\omega_n \ (n \text{ pair})$ $\omega_{n-1} \ (n \text{ impair})$ $\omega_n \ (n \text{ impair})$	σ_{2n-1-m} $\sigma_{n-1, n-2, \dots, n-m, 0}$ $\sigma_{n-1, n-2, \dots, n-m}$ $\sigma_{n-1, n-2, \dots, n-m}$ $\sigma_{n-1, n-2, \dots, n-m, 0}$ σ_{n-1} $\sigma_{n-2, n-3, \dots, 1}$ $\sigma_{n-1, n-2, \dots, 1}$ $\sigma_{n-1, n-2, \dots, 1}$ $\sigma_{n-2, n-3, \dots, 1}$

A l'aide du tableau ci-dessus et du théorème B.1, on remarque en particulier qu'en type C , on a $\sigma_{n, n-1, \dots, n-m+1}^2 = q^m$. Ce résultat a été mentionné dans la proposition 5.9.

A la partie B.1, on va décrire les orbites paraboliques dans les espaces homogènes avant d'expliquer à la partie B.2 leur lien avec les ensembles sur lesquels $\eta_J(\omega_i^\vee - w^{-1}(\omega_i^\vee))$ est constant.

B.1 Orbites paraboliques

Soit $X = G/P_J$ un espace homogène, où G est un groupe algébrique semi-simple et P_J un sous-groupe parabolique standard. Soit P_I un autre sous-groupe parabolique standard associé à un poids cominusculaire. Les P_I -orbites dans X sont

indexées par les éléments de $W_I \backslash W/W_J$, où W est le groupe de Weyl associé à G , W_I et W_J correspondant à P_I et P_J . Notons $W^J \subset W$ l'ensemble des représentants de longueur minimale des éléments de W/W_J .

On notera R^+ les racines positives de G , R_I^+ et R_J^+ celles de P_I et P_J , R^- les racines négatives de G et

$$L_J(w) := \{ \alpha \in R^+ \setminus R_J^+ \mid w(\alpha) \in R^- \},$$

de telle sorte que $l_J(w) = \#L_J(w)$ soit la longueur d'un représentant de longueur minimal de w dans W/W_J . De plus, on note Δ l'ensemble des racines simples de W , Δ_J l'ensemble des racines simples de W_J .

Soit $\mathcal{E} \subset W$ la double classe associée à l'élément $w \in W_I \backslash W/W_J$. La P_I -orbite correspondante est alors

$$\mathcal{O}_w := \bigcup_{w' \in \mathcal{E} \cap W^J} C_{w'} \subset X,$$

où $C_{w'}$ est la cellule de Schubert de X associée à w' (cf [Mit08]). La variété X est réunion des P_I -orbites :

$$X = \bigsqcup_{w \in W_I \backslash W/W_J} \mathcal{O}_w.$$

Pour mieux comprendre la géométrie des P_I -orbites, on utilise deux résultats : la proposition B.2, qui décrit la structure des ensembles indexant les orbites paraboliques dans le groupe de Weyl de G , et le théorème B.3, qui montre que les orbites paraboliques sont isomorphes à des fibrés vectoriels sur des variétés de drapeaux généralisées.

Énonçons tout d'abord le premier résultat, qui fait l'objet d'un exercice dans [Bou68], chapitre 4, § 1 :

Proposition B.2. *Soit \mathcal{E} la double classe associée à $w \in W_I \backslash W/W_J$. Alors \mathcal{E} contient un unique élément w_{min} de longueur minimale, et un unique élément w_{max} de longueur maximale. De plus, l'ensemble $\mathcal{E} \cap W^J$ est l'intervalle $[\bar{w}_{min}, \bar{w}_{max}]$ pour l'ordre de Bruhat dans W^J , où l'on note $\bar{w}_{min}, \bar{w}_{max} \in W^J$ les représentants de longueur minimale de $[w_{min}], [w_{max}] \in W/W_J$.*

Démonstration. On donne ici une preuve géométrique. Soit \mathcal{O} une P_I -orbite. Alors son adhérence est une variété de Schubert $X_{w_{max}}$. Par conséquent, toute double classe $\mathcal{E} = W_I w W_J$ admet un unique élément de longueur maximale w_{max} . De même, la double classe $\mathcal{E}' := W_J w^{-1} W_I$ admet un unique élément de longueur maximale, qui correspond à un unique élément de longueur minimale w_{min} pour \mathcal{E} .

Montrons maintenant que $\mathcal{E} \cap W^J$ est l'intervalle $[\bar{w}_{min}, \bar{w}_{max}]$. Pour cela, considérons \mathcal{O} la P_I -orbite associée à \mathcal{E} . La cellule de Schubert $C_{\bar{w}_{min}}$ est contenue dans toutes les cellules $C_{w'}$ pour $w' \in \mathcal{E} \cap W^J$. Le bord $\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ est fermé, donc c'est une réunion de variétés de Schubert X_{w_i} et on peut écrire :

$$\bar{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O} = \bigsqcup_{i=1}^r X_{w_i},$$

pour certains $w_i \in W^J$. Soit $C_{w'}$ une cellule de Schubert contenue dans $\bar{\mathcal{O}} = X_{\bar{w}_{max}}$ (ce qui équivaut à $w' \in [1, \bar{w}_{max}]$). Alors $C_{w'} \in \mathcal{O}$ équivaut à $C_{w'} \not\subset X_{w_i}$ pour tout $1 \leq i \leq r$, c'est-à-dire à $w' \notin [1, w_i]$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

En particulier, $\bar{w}_{min} \in [1, \bar{w}_{max}] \setminus \bigcup_{i=1}^r [1, w_i]$. Considérons maintenant $w' \in [\bar{w}_{min}, \bar{w}_{max}]$. S'il existait un i tel que $w' \in [1, w_i]$, alors on aurait $\bar{w}_{min} \in [1, w_i]$, ce qui est exclus. Par conséquent, $w' \in [1, \bar{w}_{max}] \setminus \bigcup_{i=1}^r [1, w_i]$, c'est-à-dire que $w' \in \mathcal{E} \cap W^J$, d'où finalement $\mathcal{E} \cap W^J = [\bar{w}_{min}, \bar{w}_{max}]$. \square

On déduit en particulier de cette proposition que les orbites paraboliques sont donc indexées par des intervalles.

Pour énoncer le second résultat, on remarque qu'à l'unique élément w_{min} de longueur minimale d'une P_I -orbite \mathcal{O} est associé un ensemble $K_{w_{min}} = \{s \in I \mid w_{min}^{-1} s w_{min} \in J\}$. On note alors $Q_{w_{min}}$ le sous-groupe parabolique du facteur de Levi L_I de P_I associé à l'ensemble de sommets $K_{w_{min}}$. Enfin, $V_{w_{min}}$ est une représentation de $Q_{w_{min}}$ définie dans [Mit08], que l'on n'explicitera pas car elle ne joue aucun rôle dans ce texte.

Théorème B.3 ([Per02], proposition 5 et section 2.1). *L'orbite $\mathcal{O}_{w_{min}}$ est isomorphe à l'espace total du fibré vectoriel $L_I \times_{Q_{w_{min}}} V_{w_{min}}$ sur la variété de drapeaux généralisée $L_I/Q_{w_{min}}$.*

Une conséquence est que la cohomologie et l'anneau de Chow des orbites paraboliques sont isomorphes à ceux des variétés de drapeaux $L_I/Q_{w_{min}}$ (cf [Ful84], chapitre 3). Ceci nous permettra de trouver des décompositions du diagramme de Hasse des espaces homogènes au paragraphe B.3. Géométriquement, les orbites paraboliques sont décrites par la position relative de leurs éléments par rapport à un espace associé au poids cominuscule considéré.

Commençons par décrire précisément les orbites paraboliques associées aux poids cominuscules en types A , B , C et D . Notons que dans chaque cas, les arguments utilisés sont très similaires. On les exposera donc en détail seulement en type C (car c'est le cas dont on s'inspirera pour étudier $\text{IG}(2, 2n+1)$), et dans les autres cas, on se contentera de donner les résultats. D'une manière générale, dans cette partie, on représentera les éléments du groupe de Weyl comme des permutations (en type A) ou des permutations signées (en type B , C ou D).

Type C. Le seul poids cominuscule est ω_n , et X est la grassmannienne symplectique $\text{IG}(m, 2n)$. Notons $I = \{1, \dots, n-1\}$ et $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{m\}$. On remarque facilement grâce à l'action à gauche de $W_I = \mathfrak{S}_n$ et à l'action à droite de $W_J = \mathfrak{S}_m \times (\mathfrak{S}_{n-m} \rtimes \mathbb{Z}_2^{n-m})$ que tout représentant de longueur minimale d'un élément de $W_I \backslash W / W_J$ est de la forme

$$(1 < \dots < l, \bar{n} < \overline{n-1} \dots < \overline{n+1+l-m} \mid l+1 < \dots < n-m+l),$$

où $\bar{a} := -a$. Les P_I -orbites sont donc caractérisées par l'entier

$$d(w) := \#\{1 \leq j \leq m \mid w(j) < 0\}.$$

Par conséquent, la P_I -orbite \mathcal{O}_d est

$$\mathcal{O}_d = \{\Sigma \in \text{IG}(m, 2n) \mid \dim(\Sigma \cap E_n) = d\}.$$

De plus, l'élément de longueur minimale de la P_I -orbite \mathcal{O}_d est

$$w_d = (1 < \dots < m-d, \bar{n} < \overline{n-1} < \dots < \overline{n+1-d} \mid m-d+1 < \dots < n-d).$$

Calculons maintenant K_{w_d} . On trouve

$$w_d^{-1} s_l w_d = \begin{cases} s_l & \text{si } 1 \leq l \leq m-d-1, \\ t_{m-d, m+1} & \text{si } l = m-d, \\ s_{l+d} & \text{si } m-d+1 \leq l \leq n-d-1, \\ t_{m, n} & \text{si } l = n-d, \\ s_{m+n-d-l} & \text{si } n-d+1 \leq l \leq n-1, \end{cases}$$

où $t_{i,j}$ désigne la transposition qui échange i et j , et $s_i = t_{i, i+1}$. Par conséquent $K_{w_d} = [1, \dots, n] \setminus \{m-d, n-d\}$, donc L_I/Q_{w_d} est la variété de drapeaux à deux crans (de type A) $F(m-d, n-d; n)$.

Type A. Soit ω_i un poids cominuscule. L'espace homogène X est la grassmannienne usuelle $G(m, n)$. Notons $J = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{m\}$ et $I = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i\}$. On peut montrer qu'il y a deux cas, selon que $1 \leq i \leq m$ ou $m \leq i \leq n$:

- Si $1 \leq i \leq m$, il y a $i+1$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq i$. L'orbite parabolique \mathcal{O}_d est un fibré vectoriel sur le produit de grassmanniennes $G(i-d, i) \times G(m+d-i, n-i)$. De plus, si l'on note \mathcal{E}_d la double classe associée à l'orbite parabolique \mathcal{O}_d , alors pour tout $w \in W^J$, $w \in \mathcal{E}_d$ si et seulement si $d = d(w)$, où $d(w) := i - \#\{1 \leq l \leq m \mid w(l) \leq i\}$. Enfin :

$$\mathcal{O}_d = \{\Sigma \in G(m, n) \mid \dim(\Sigma \cap E_{n-i}) = m+d-i\}.$$

- Si $m \leq i \leq n-1$, il y a $n-i+1$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq n-i$. L'orbite parabolique \mathcal{O}_d est un fibré vectoriel sur le produit de grassmanniennes $G(m-d, i) \times G(d, n-i)$. De plus, si l'on note \mathcal{E}_d la double classe associée à l'orbite parabolique \mathcal{O}_d , alors pour tout $w \in W^J$, $w \in \mathcal{E}_d$ si et seulement si $d = d(w)$, où $d(w) := m - \#\{1 \leq l \leq m \mid w(l) \leq i\}$. Enfin :

$$\mathcal{O}_d = \{\Sigma \in G(m, n) \mid \dim(\Sigma \cap E_{n-i}) = d\}.$$

Type B. Le seul poids cominuscule est ω_1 , et X est la grassmannienne orthogonale $OG(m, 2n+1)$. Notons $I = \{2, \dots, n\}$ et $J = \{1, \dots, n\} \setminus \{m\}$. Il y a deux cas, selon que $m < n$ ou $m = n$:

- Si $m < n$, on peut montrer qu'il y a trois P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq 2$. Les orbites paraboliques \mathcal{O}_0 et \mathcal{O}_2 sont des fibrés vectoriels sur la grassmannienne orthogonale $OG(m-1, 2n-1)$, tandis que \mathcal{O}_1 est un fibré au-dessus de $OG(m, 2n-1)$. De plus, les doubles classes \mathcal{E}_d associées sont :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \{w \in W/W_J \mid w(1) = 1\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \{w \in W/W_J \mid w(m+1) = 1\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \{w \in W/W_J \mid w(m) = -1\}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_0 &= \{\Sigma \in OG(m, 2n+1) \mid \Sigma \not\subset E_{n-1}\}, \\ \mathcal{O}_1 &= \{\Sigma \in OG(m, 2n+1) \mid \Sigma \subset E_{n-1} \text{ et } \Sigma \not\supset E_1\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \{\Sigma \in OG(m, 2n+1) \mid \Sigma \supset E_1\}. \end{aligned}$$

- Si $m = n$, on peut montrer qu'il y a deux P_I -orbites, notées \mathcal{O}_0 et \mathcal{O}_1 , qui sont isomorphes à des fibrés vectoriels sur la grassmannienne orthogonale $\text{OG}(n-1, 2n-1)$. De plus, si l'on note \mathcal{E}_d l'ensemble indexant l'orbite parabolique \mathcal{O}_d , alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \{w \in W/W_J \mid w(1) = 1\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \{w \in W/W_J \mid w(n) = -1\}.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_0 &= \{\Sigma \in \text{OG}(n, 2n+1) \mid \Sigma \not\supset E_1\}, \\ \mathcal{O}_1 &= \{\Sigma \in \text{OG}(n, 2n+1) \mid \Sigma \supset E_1\}.\end{aligned}$$

Type D. Supposons tout d'abord $m < n-1$, de telle sorte que $X \cong \text{OG}(m, 2n)$. En type D , rappelons que les éléments de W^J sont des permutations signées avec un nombre pair de signes moins, de la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}),$$

où $c_{n-m} > c_{n-m-1}$ et $0 \leq l \leq m$. De plus, il y a trois poids cominusculs : ω_1 , ω_{n-1} et ω_n . Décrivons les orbites paraboliques dans chacune de ces situations :

- Pour le cas de ω_1 , notons $I = \{2, \dots, n\}$. Il y a trois P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq 2$. Les orbites \mathcal{O}_0 et \mathcal{O}_2 sont des fibrés vectoriels sur la grassmannienne orthogonale $\text{OG}(m-1, 2n-2)$, tandis que \mathcal{O}_1 est un fibré au-dessus de $\text{OG}(m, 2n-2)$. De plus, les doubles classes \mathcal{E}_d associées sont :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 &= \{w \in W/W_J \mid w(1) = 1\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \{w \in W/W_J \mid w(m+1) = 1\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \{w \in W/W_J \mid w(m) = -1\}.\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_0 &= \{\Sigma \in \text{OG}(m, 2n) \mid \Sigma \not\subset E_{n-1}\}, \\ \mathcal{O}_1 &= \{\Sigma \in \text{OG}(m, 2n) \mid \Sigma \Sigma \subset E_{n-1} \text{ et } \Sigma \not\supset E_1\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \{\Sigma \in \text{OG}(m, 2n) \mid \Sigma \supset E_1\}.\end{aligned}$$

- Traitons maintenant le cas de ω_n (celui de ω_{n-1} étant similaire). Notons $I = \{1, \dots, n-1\}$. Il y a $m+1$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq m$. L'orbite \mathcal{O}_d est un fibré vectoriel sur la variété de drapeaux à deux crans $F(m-d, n-d; n)$. De plus, si l'on note \mathcal{E}_d la double classe associée à \mathcal{O}_d , alors pour tout $w \in W/W_J$, $w \in \mathcal{E}_d$ si et seulement si $d = d(w)$, où $d(w) := \#\{1 \leq l \leq m \mid w(l) < 0\}$. Enfin :

$$\mathcal{O}_d = \{\Sigma \in \text{OG}(m, 2n) \mid \dim(\Sigma \cap E_n) = d\}.$$

Supposons finalement $m = n$. La variété X est alors la grassmannienne isotrope maximale $\text{OG}(n, 2n) \cong \text{OG}(n-1, 2n-1)$. Par conséquent, le cas de ω_1 a déjà été traité dans le paragraphe précédent. Il nous reste à déterminer les orbites paraboliques pour les cas de ω_{n-1} et de ω_n . On doit également distinguer le cas où n est pair du cas où il est impair :

- Si $n = 2r$ est pair et que l'on considère le poids ω_n , il y a $(r+1)$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq r$. De plus, l'orbite \mathcal{O}_d est un fibré vectoriel sur la grassmannienne $G(2d, n)$. Enfin, si l'on note \mathcal{E}_d l'ensemble indexant \mathcal{O}_d , alors pour tout $w \in W/W_J$, $w \in \mathcal{E}_d$ si et seulement si $d = d(w)$, où $d(w) := \frac{1}{2} \# \{1 \leq l \leq n \mid w(l) < 0\}$.
- Si $n = 2r$ est pair et que l'on considère le poids ω_{n-1} , il y a r P_I -orbites. L'orbite \mathcal{O}_d est cette fois un fibré vectoriel sur $G(2d+1, n)$, et $\mathcal{E}_d \cap W^J$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{n-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_1),$$

avec $l = 2d$ et $b_l < n$ ou $l = 2d+2$ et $b_l = n$.

- Si $n = 2r+1$ et que l'on considère le poids ω_n , il y a $(r+1)$ P_I -orbites. L'orbite \mathcal{O}_d est toujours un fibré vectoriel sur $G(2d+1, n)$, et $\mathcal{E}_d \cap W^J$ est l'ensemble des éléments de la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{n-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_1),$$

avec $l = 2d$ et $b_l < n$ ou $l = 2d+2$ et $b_l = n$.

- Enfin, si $n = 2r+1$ et que l'on considère le poids ω_{n-1} , il y a à nouveau $(r+1)$ P_I -orbites. L'orbite \mathcal{O}_d est un fibré vectoriel sur la grassmannienne $G(2d, n)$. De plus, pour tout $w \in W/W_J$, $w \in \mathcal{E}_d$ si et seulement si $d = d(w)$, où $d(w) := \frac{1}{2} \# \{1 \leq l \leq n \mid w(l) < 0\}$.

Résumons maintenant les résultats obtenus :

- Proposition B.4.**
1. En type A, si $1 \leq i \leq n-m$, il y a $\min(i, m) + 1$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \min(i, m)$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur le produit de grassmanniennes $G(\min(i, m) - d, i) \times G(m + d - \min(i, m), n - i)$. Si $n - m \leq i \leq n - 1$, il y a $\min(n - i, n - m) + 1$ P_I -orbites, notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \min(n - i, n - m)$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur le produit de grassmanniennes $G(\min(n - i, n - m) - d, n - i) \times G(n - m + d - \min(n - i, n - m), i)$.
 2. En type B, la grassmannienne orthogonale $OG(m, 2n+1)$ avec $m < n$ possède trois orbites paraboliques associées au poids ω_1 , isomorphes à l'espace total de fibrés vectoriels au-dessus de $OG(m-1, 2n-1)$ ou $OG(m, 2n-1)$.
 3. En type C, la grassmannienne symplectique $IG(m, 2n)$ possède $m+1$ orbites paraboliques associées au poids ω_n , notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq m$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la variété de drapeaux à deux crans $F(m-d, n-d; n)$.
 4. En type D, la grassmannienne orthogonale $OG(m, 2n)$ avec $m < n-1$ possède trois orbites paraboliques associées au poids ω_1 , isomorphes à l'espace total de fibrés vectoriels au-dessus de $OG(m-1, 2n-2)$ ou $OG(m-1, 2n-2)$. Elle possède $m+1$ orbites paraboliques associées au poids ω_n (et de même pour le poids ω_{n-1}), notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq m$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la variété de drapeaux à deux crans $F(m-d, n-d; n)$.

5. En type B ou D , la grassmannienne orthogonale maximale $\text{OG}(n-1, 2n-1) \cong \text{OG}(n, 2n)$ possède deux orbites paraboliques associées au poids ω_1 , isomorphes à l'espace total de fibrés vectoriels au-dessus de $\text{OG}(n-1, 2n-2)$. Si n est pair, elle possède $\frac{n}{2} + 1$ orbites paraboliques associées au poids ω_n , notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \frac{n}{2}$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $\text{G}(2d, n)$. Elle possède également $\frac{n}{2}$ orbites paraboliques associées au poids ω_{n-1} , notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \frac{n}{2} - 1$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $\text{G}(2d+1, n)$. Enfin, si n est impair, elle possède $\frac{n+1}{2}$ orbites paraboliques associées au poids ω_n , notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \frac{n}{2}$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $\text{G}(2d+1, n)$. Elle possède également $\frac{n+1}{2}$ orbites paraboliques associées au poids ω_{n-1} , notées \mathcal{O}_d pour $0 \leq d \leq \frac{n}{2}$, et \mathcal{O}_d est l'espace total d'un fibré vectoriel sur la grassmannienne $\text{G}(2d, n)$.

B.2 Lien entre P_I -orbites et produit quantique

Dans cette partie, on va faire le lien entre le théorème B.1 et les orbites paraboliques. Plus précisément, on va montrer que les lieux sur lesquels le degré $\delta(w)$ (défini dans l'introduction de l'annexe) est constant correspondent exactement aux ensembles \mathcal{E}_d indexant les P_I -orbites. Cela signifie que pour tout $w \in W^J$, $\delta(w)$ est égal à l'entier $d(w)$ introduit pour chacun des types A , B , C et D à la partie précédente.

$\delta(w)$ est constant sur les P_I -orbites. On commence d'abord par montrer que $\delta(w)$ est constant pour tout $w \in \mathcal{E} := W_I w_{\min} W_J$, où I correspond à un poids cominusculaire et w_{\min} est l'unique élément de longueur minimale de \mathcal{E} . Pour cela, montrons que pour tout $w \in \mathcal{E}$, on a $\delta(w) = \delta(w_{\min})$.

En effet, d'après la proposition B.2, tout $w \in \mathcal{E}$ admet une écriture réduite de la forme $w = w_I w_{\min} w_J$, où $w_I \in W_I$ et $w_J \in W_J$. On a donc $\delta(w) = \delta(w_I w_{\min} w_J)$. Or si $l \neq i$, on a

$$s_l(\omega_i^\vee) = \omega_i^\vee - (\alpha_l, \omega_i^\vee) \alpha_l^\vee = \omega_i^\vee,$$

d'où

$$w_I^{-1}(\omega_i^\vee) = \omega_i^\vee. \quad (\text{B.1})$$

Soit maintenant $e := \eta_J(w_{\min}^{-1}(\omega_i^\vee))$. Alors par définition de η_J ,

$$w_{\min}^{-1}(\omega_i^\vee) = e \alpha_m^\vee + \sum_{p \neq m} c_p \alpha_p^\vee,$$

où les c_p sont certains coefficients. Or si $l \neq m$, on a

$$s_l(\alpha_m^\vee) = \alpha_j^\vee - (\alpha_l, \alpha_m^\vee) \alpha_l^\vee.$$

De même, pour $p \neq m$ et $l \neq p, m$,

$$s_l(\alpha_p^\vee) = \alpha_p^\vee - (\alpha_l, \alpha_p^\vee) \alpha_l^\vee,$$

et si $p \neq m$ et $l = p$:

$$s_p(\alpha_p^\vee) = -\alpha_p^\vee.$$

Par conséquent, on en déduit que si l'on applique s_l pour $l \neq m$, le coefficient de α_m^\vee ne change pas. On conclut donc que $\eta_J(w_J^{-1}w_{min}^{-1}\omega_i^\vee) = \eta_J(w_{min}^{-1}\omega_i^\vee)$. En utilisant l'équation (B.1), on en déduit le résultat cherché :

$$\eta_J(w_J^{-1}w_{min}^{-1}w_I^{-1}\omega_i^\vee) = \eta_J(w_{min}^{-1}\omega_i^\vee).$$

$\delta(w)$ change lorsqu'on change de P_I -orbite. Soit

$$I_d := \{w \in W^J \mid \delta(w) = d\},$$

où l'on a choisi un d pour lequel cet ensemble est non vide. On a démontré au paragraphe précédent que c'est une réunion d'ensembles de la forme $\mathcal{E} = W_I w_{min} W_J$ indexant les P_I -orbites. Supposons que I_d contienne deux tels ensembles distincts \mathcal{E} et \mathcal{E}' . Alors comme I_d est un intervalle, quitte à échanger \mathcal{E} et \mathcal{E}' , il existe $w \in \mathcal{E}$ et $w' \in \mathcal{E}'$ tels que $w \rightarrow w'$ (c'est-à-dire que w' est un successeur de w pour l'ordre de Bruhat dans W/W_J).

Dans la situation présente, comme $w \rightarrow w'$ et que w et w' ne correspondent pas à la même P_I -orbite, on a $w' = s_{\alpha_0} w$ pour une certaine racine positive $\alpha_0 \in R^+ \setminus (R_J^+ \cup R_I^+)$. En effet, si $\alpha \in R_J^+$, on a $[w] = [s_\alpha w]$ dans W/W_J , et si $\alpha \in R_I^+$, la réflexion s_α ne fait pas changer de P_I -orbite. On a de plus $l_J(w') = l_J(w) + 1$.

Il existe $\beta_0 \in R^+ \setminus R_J^+$ tel que $w(\beta_0) = \alpha_0$. En effet, si ce n'était pas le cas, alors pour tout $\alpha \in L_J(w')$, on aurait $s_{\alpha_0} w(\alpha) \in R^-$ et $w(\alpha) \neq \alpha_0$, d'où $w(\alpha) \in R^-$, et donc $\alpha \in L_J(w)$. On en déduirait $l_J(w') \leq l_J(w)$, ce qui est absurde.

Calculons maintenant $\delta(w')$:

$$\delta(w') = \eta_J(\omega_i^\vee - w^{-1}s_{\alpha_0}(\omega_i^\vee)) = \delta(w) + (\alpha_0, \omega_i^\vee)\eta_J(w^{-1}\alpha_0^\vee).$$

Comme $\alpha_0 \in R^+ \setminus R_J^+$, on a $(\alpha_0, \omega_i^\vee) > 0$. De plus, $w(\beta_0) = \alpha_0$ implique $w^{-1}(\alpha_0^\vee) = \beta_0^\vee$, et $\eta_J(\beta_0) > 0$ car $\beta_0 \in R^+ \setminus R_J^+$. D'où finalement $\delta(w') > \delta(w)$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle w et w' sont tous deux dans I_d .

Par conséquent, I_d est une P_I -orbite.

B.3 Décomposition du diagramme de Hasse

Dans [CMP07], Chaput, Manivel et Perrin relient le produit quantique par la classe du point dans les variétés minuscules à une décomposition de leur diagramme de Hasse. Les résultats ci-dessus nous permettent de trouver des décompositions similaires dans le cas non minuscule, correspondant au produit quantique par les classes de Schubert σ_{v_i} associées aux poids cominuscules. Si, dans cette partie, on ne décrit explicitement que le cas des grassmanniennes classiques (types A , B , C et D), la même méthode fonctionne pour les autres espaces homogènes, avec simplement une combinatoire plus compliquée.

Considérons \mathcal{O} une orbite parabolique de X . C'est la réunion des variétés de Schubert $X_w \subset X$ pour tout w dans un certain ensemble \mathcal{E} . Rappelons que d'après la proposition B.2, l'ensemble \mathcal{E} est un intervalle pour l'ordre de Bruhat dans W/W_J . On note donc $\mathcal{E} = [w_{min}, w_{max}]$. D'après le théorème B.3, \mathcal{O} est un fibré vectoriel au-dessus de la variété de drapeaux $F := L_I/Q_{w_{min}}$.

On donne ici un résultat faisant le lien entre les diagrammes de Hasse de l'orbite parabolique \mathcal{O} et de la variété de drapeaux F :

Proposition B.5. Soient $\psi : \mathcal{O} \rightarrow F$ la fibration, $i : \mathcal{O} \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle et h la classe hyperplane de X . Alors :

1. Il existe une classe $h' \in A^1(F)$ telle que $i^*h = \psi^*h'$;
2. Le diagramme de Hasse de \mathcal{O} est isomorphe au diagramme de la multiplication par la classe h' dans F .

Démonstration. 1. Pour démontrer le premier point, il suffit de constater que $i^*h \in A^1(\mathcal{O}) \cong A^1(F)$, donc il existe $h' \in A^1(F)$ tel que $i^*h = \psi^*h'$.

2. Soit ϕ l'isomorphisme $\mathcal{E} \cap W^J \rightarrow W^F$, où W^F est l'ensemble des représentants de longueur minimale de $W_{L_I}/W_{Q_{w_{min}}}$. Cette application nous donne une correspondance entre les sommets du diagramme de Hasse de \mathcal{O} et ceux du diagramme de la multiplication par la classe h' dans F .

On étudie maintenant la correspondance entre les arêtes de ces deux diagrammes. Supposons que

$$[Y_w] \cup h' = \sum_v a_v [Y_v],$$

où Y_v désigne la variété de Schubert de F associée à l'élément v . Ceci signifie qu'une section hyperplane générale de Y_w est rationnellement équivalente à la réunion des Y_v avec multiplicités a_v . or l'image inverse par ψ de Y_v dans \mathcal{O} est $X_{\phi(v)} \cap \mathcal{O}$ pour un certain $\phi(v)$ (on note X_u la variété de Schubert de X associée à l'élément u). Par conséquent, une section $X_{\phi(w)} \cap \mathcal{O} \cap h$ est rationnellement équivalente à la réunion des $X_{\phi(v)} \cap \mathcal{O} \cap h$ avec les multiplicités a_v . Si l'on considère l'adhérence dans $\overline{\mathcal{O}}$, on en déduit que $X_{\phi(w)} \text{caph}$ est rationnellement équivalente à la somme des $X_{\phi(v)}$ avec les multiplicités a_v , plus une classe supportée dans le bord $\overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$. Or une telle classe est rationnellement équivalente à une somme de variétés de Schubert incluses dans $\overline{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$, avec certaines multiplicités. Cette équivalence rationnelle reste valable dans tout $X = G/P_J$. Finalement, on remarque que la contribution du bord apparaît en dehors de l'intervalle défini par l'orbite parabolique \mathcal{O} , d'où finalement l'isomorphisme entre le diagramme de Hasse de \mathcal{O} et le diagramme de la multiplication par la classe h' dans F . \square

Dans ce qui suit, on explicite, pour chacune des grassmanniennes de type A , B , C et D et chacun des poids cominusculs, les applications ϕ et ψ ainsi que l'élément $h' \in A^1(F)$. On verra qu'on a en fait $i^*h = r\psi^*H$, où H est la somme des diviseurs de Schubert et $r \geq 1$ un entier. Si on note $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ le diagramme de Hasse de \mathcal{O} et \mathcal{H}_F le diagramme de la multiplication par H dans F , on verra que $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ est isomorphe à \mathcal{H}_F avec la multiplicité des arêtes multipliée par r . On décrira également les arêtes entre les orbites paraboliques à l'aide de la formule de Chevalley pour les espaces homogènes, démontrée dans [Che94].

Pour énoncer cette formule, on reprend les notations précédentes, et on pose pour tout $\alpha \in R^+$, pour tout $\beta \in \Delta \setminus \Delta_J$:

$$h_{\alpha}(\beta) := c_{\alpha, \beta} \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)},$$

avec $c_{\alpha, \beta}$ le coefficient de β dans la décomposition de α en somme de racines simples. On a alors le

Théorème B.6. Soient $\beta \in \Delta \setminus \Delta_J$ et $w \in W^J$. Alors :

$$\sigma_{s_\beta} \cup \sigma_w = \sum_{\substack{\alpha \in R^+ \\ l_J(s_\alpha w) = l_J(w) + 1}} h_\alpha(\beta) \sigma_{s_\alpha w}.$$

Type C. Dans ce paragraphe, notons \mathcal{O}_d une P_I -orbite associée à l'unique poids cominuscule ω_n , \mathcal{E}_d la double classe correspondante et $F_d = L_I/Q_{w_d}$ la variété de drapeaux associée à \mathcal{O}_d . On commence par décrire la fibration $\psi_d : \mathcal{O}_d \rightarrow F_d$. Notons $\text{IG}(m, 2n) = G_\omega(m, V)$, où $V \cong \mathbb{C}^{2n}$ et ω est une forme symplectique sur V , et considérons E_\bullet un drapeau isotrope complet de V . On a vu que si $\Sigma \in \mathcal{O}_d$, alors $\dim(\Sigma \cap E_n) = d$, donc on pose :

$$\begin{aligned} \psi_d : \mathcal{O}_d &\rightarrow \text{F}(m-d, n-d; V/E_n) \\ \Sigma &\mapsto (\Sigma/(\Sigma \cap E_n), \Sigma^\perp/(\Sigma^\perp \cap E_n)) \end{aligned}$$

Montrons maintenant que l'application $\phi_d : \mathcal{E}_d \cap W^J \rightarrow W^{F_d}$ est donnée, si

$$w = (a_1 < \dots < a_{m-d}, \bar{b}_d < \dots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \dots < c_{n-m}) \quad (\text{B.2})$$

est un élément de $\mathcal{E}_d \cap W^J$, par l'expression

$$\phi_d(w) = (a_1 < \dots < a_{m-d} \mid c_1 < \dots < c_{n-m} \mid b_1 < \dots < b_d).$$

Pour cela, montrons que pour tout $w \in \mathcal{E}_d \cap W^J$, on a

$$i^*[X_w] = \psi_d^*[F_{\phi_d(w)}],$$

où X_w est la variété de Schubert associée à w dans X et $F_{\phi_d(w)}$ celle associée à $\phi_d(w)$ dans F_d . On définit un drapeau complet \bar{E} sur V/E_n en posant $\bar{E}_i := E_{i+n}/E_n$ pour tout $0 \leq i \leq n$. Remarquons que si $w \in W^J$ est de la forme (B.2), alors les conditions d'incidence (cf paragraphe A.1.4) associées sont

$$\mathcal{P} = (b_1, \dots, b_d, 2n+1-a_{m-d}, \dots, 2n+1-a_1).$$

Par conséquent, tout $(\Sigma_1, \Sigma_2) \in \psi(i^{-1}X_w)$ vérifie les conditions d'incidence :

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma_1 \cap \bar{E}_{n+1-a_{m-d+1-j}}) &\geq j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m-d \\ \dim(\Sigma_2 \cap \bar{E}_{n-b_i}) &\geq n-d+i-b_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq d. \end{aligned}$$

On remarque que ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{aligned} \dim(\Sigma_1 \cap \bar{E}_{n+1-a_{m-d+1-j}}) &\geq j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m-d \\ \dim(\Sigma_2 \cap \bar{E}_{n+1-e_{n-d+1-j}}) &\geq j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n-d, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où $\{e_1 < \dots < e_{n-d}\} = \{a_1 < \dots < a_{m-d}\} \cup \{c_1 < \dots < c_{n-m}\}$.

Or les conditions d'incidence (B.3) sont justement celles définissant la variété de Schubert $F_{\phi_d(w)}$ dans F_d , ce qui montre qu'on a bien $i^*[X_w] = \psi_d^*[F_{\phi_d(w)}]$.

Pour calculer la classe $h' \in A^1(F)$ définie au début de cette partie, montrons tout d'abord que si \mathcal{S} est le fibré tautologique sur X et $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2$ sont les fibrés tautologiques sur F_d , alors

$$i^*(\det \mathcal{S}^*) = \psi_d^*(\det \mathcal{S}_1^* \otimes \det \mathcal{S}_2^*). \quad (\text{B.4})$$

En effet, la forme symplectique ω sur V donne une identification

$$(\Sigma^\perp/(\Sigma^\perp \cap E_n))^* = E_n/(\Sigma \cap E_n).$$

On en déduit

$$\det \Sigma_1^* \otimes \det \Sigma_2^* = \det (\Sigma^*/(\Sigma \cap E_n)^*) \otimes \det (E_n/(\Sigma \cap E_n)),$$

d'où l'identité (B.4).

Comme $c_1(\det \mathcal{S}^*)$ est la classe hyperplane h sur X et $c_1(\det \mathcal{S}_1^* \otimes \det \mathcal{S}_2^*)$ la somme H des diviseurs de Schubert dans F_d , on trouve $i^*h = \psi_d^*H$, donc $h' = H$, ce qui démontre l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$.

Type B. Le type B correspond à la grassmannienne orthogonale impaire $\text{OG}(m, 2n+1)$. Notons $V = \mathbb{C}^{2n+1}$ et Q une forme quadratique non dégénérée sur V , de telle sorte que $G_Q(m, V) = \text{OG}(m, 2n+1)$. Le seul poids cominusculaire est ω_1 . On a trois cas, selon si $m < n-1$, $m = n-1$ ou $m = n$. On va décrire précisément le cas $m = n-1$, car il fournit un exemple où $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} ne sont pas isomorphes, même si seule la multiplicité des arêtes est différente. Dans les cas $m < n-1$ et $m = n$, on donnera simplement le résultat.

- Si $m < n-1$, on reprend les notations du paragraphe précédent, de telle sorte que $F_0 = F_2 = \text{OG}(m-1, 2n-1)$ et $F_1 = \text{OG}(m, 2n-1)$. Pour $d = 0, 1, 2$, définissons l'application $\phi_d : \mathcal{E}_d \cap W^J \rightarrow W^{F_d}$. Remarquons tout d'abord que tout $w \in \mathcal{E}_0 \cap W^J$ est de la forme

$$w = (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \cdots < c_{n-m}) \quad (\text{B.5})$$

pour un certain $0 \leq l \leq m-1$ et posons

$$\begin{aligned} \phi_0(w) = (a_2 - 1 < \cdots < a_{m-l} - 1, \bar{b}_l + 1 < \cdots < \bar{b}_1 + 1 \\ \mid c_1 - 1 < \cdots < c_{n-m} - 1). \end{aligned}$$

De même, si $w \in \mathcal{E}_1 \cap W^J$, il est de la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_1 \mid 1 < c_1 < \cdots < c_{n-m}) \quad (\text{B.6})$$

pour un certain $0 \leq l \leq m$, et on pose

$$\begin{aligned} \phi_1(w) = (a_1 - 1 < \cdots < a_{m-l} - 1, \bar{b}_l + 1 < \cdots < \bar{b}_1 + 1 \\ \mid c_2 - 1 < \cdots < c_{n-m} - 1). \end{aligned}$$

Enfin, si $w \in \mathcal{E}_2 \cap W^J$, il est de la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1} \mid c_1 < \cdots < c_{n-m}) \quad (\text{B.7})$$

pour un certain $1 \leq l \leq m$, et on pose

$$\begin{aligned} \phi_2(w) = (a_1 - 1 < \cdots < a_{m-l} - 1, \bar{b}_l + 1 < \cdots < \bar{b}_2 + 1 \\ \mid c_1 - 1 < \cdots < c_{n-m} - 1). \end{aligned}$$

Décrivons maintenant la fibration $\psi_d : \mathcal{O}_d \rightarrow F_d$ pour $d = 0, 1, 2$. Pour cela, on considère E_\bullet un drapeau isotrope complet de V . On a vu que

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_0 &= \{\Sigma \in X \mid \Sigma \not\subset E_{n-1}\}, \\ \mathcal{O}_1 &= \{\Sigma \in X \mid \Sigma \subset E_{n-1} \text{ et } \Sigma \not\supset E_1\}, \\ \mathcal{O}_2 &= \{\Sigma \in X \mid \Sigma \supset E_1\}.\end{aligned}$$

La fibration ψ_d est alors donnée par

$$\begin{aligned}\psi_0 : \mathcal{O}_0 &\rightarrow \text{OG}(m-1, E_{2n-1}/E_1) \\ \Sigma &\mapsto (\Sigma \cap E_{n-1})/E_1, \\ \\ \psi_1 : \mathcal{O}_1 &\rightarrow \text{OG}(m, E_{2n-1}/E_1) \\ \Sigma &\mapsto \Sigma/E_1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi_2 : \mathcal{O}_2 &\rightarrow \text{OG}(m-1, E_{2n-1}/E_1) \\ \Sigma &\mapsto \Sigma/E_1.\end{aligned}$$

Montrons maintenant que pour tout $w \in \mathcal{E}_d \cap W^J$, on a bien

$$i^*[X_w] = \psi_d^*[F_{\phi_d(w)}].$$

Tout d'abord, définissons un drapeau complet \overline{E} sur E_{2n-1}/E_1 en posant $\overline{E}_i := E_{i+1}/E_1$ pour tout $0 \leq i \leq 2n-2$. Si $w \in \mathcal{O}_0 \cap W^J$ est de la forme (B.5), alors les conditions d'incidence associées sont

$$\mathcal{P} = (b_1, \dots, b_l, 2n+1-a_{m-l}, \dots, 2n+1-a_2, 2n).$$

Par conséquent, tout $\Sigma' \in \psi(i^{-1}X_w)$ vérifie les conditions d'incidence :

$$\begin{aligned}\dim(\Sigma' \cap \overline{E}_{b_i-1}) &\geq i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq l, \\ \dim(\Sigma' \cap \overline{E}_{2n-a_{m-l+1-j}}) &\geq l+j \text{ pour tout } 1 \leq j \leq m-l-1.\end{aligned}$$

Or ces conditions d'incidence sont justement celles qui définissent la variété de Schubert $F_{\phi_0(w)}$ dans F_0 , ce qui montre qu'on a bien

$$i^*[X_w] = \psi_0^*[F_{\phi_0(w)}].$$

Le cas $d = 1$ ou 2 se démontre de manière analogue.

Pour calculer la classe $h' \in A^1(F)$, on montre que quelque soit d , on a $i^*(\det \mathcal{S}^*) = \psi_d^*(\det \mathcal{S}'^*)$, où \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont les fibrés tautologiques sur X et F_d . Par ailleurs, $c_1(\det \mathcal{S}^*)$ est la classe hyperplane h sur X et $c_1(\det \mathcal{S}'^*)$ est la classe hyperplane H de F_d , donc $i^*h = \psi_d^*H$, d'où $h' = H$, ce qui démontre l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$.

- Si $m = n-1$, les applications ϕ_d et ψ_d sont les mêmes que dans le cas précédent. De plus, on a toujours $i^*(\det \mathcal{S}^*) = \psi_d^*(\det \mathcal{S}'^*)$, où \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont les fibrés tautologiques sur X et F_d , et pour $d = 0$ ou 2 , les identités $c_1(\det \mathcal{S}^*) = h$ et $c_1(\det \mathcal{S}'^*) = H$ sont encore valables. Cependant, pour $d = 1$, on a $c_1(\det \mathcal{S}'^*) = 2H$. En effet, $\text{OG}(n-1, 2n-1)$ et $\text{OG}(n-1, 2n-2)$ sont projectivement isomorphes, donc il suffit de montrer

que $c_1 \left(\det \left(\mathcal{S}_{\text{OG}(n-1, 2n-2)}^* \right) \right)$ est égal à deux fois la section hyperplane. Pour voir cela, il suffit de remarquer que la grassmannienne orthogonale maximale $\text{OG}(n-1, 2n-2)$ se plonge dans $\mathbb{P}(V_{\omega_{n-1}})$, où $V_{\omega_{n-1}}$ est la représentation $\frac{1}{2}$ -spinorielle. La classe hyperplane correspond donc au déterminant du fibré en droites associé au poids $\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1})$, tandis que $\det \left(\mathcal{S}_{\text{OG}(n-1, 2n-2)}^* \right)$ est le fibré en droites associé au poids $\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1}$, ce qui nous donne le résultat cherché.

Par conséquent, si pour $d = 0$ ou 2 , on retrouve bien l'isomorphisme $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$, ce n'est pas le cas pour $d = 1$; $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ est alors obtenu à partir de \mathcal{H}_{F_d} en doublant toutes les arêtes.

- Supposons maintenant que $m = n$. La variété X est alors la grassmannienne orthogonale maximale $\text{OG}(n, 2n+1) \cong \text{OG}(n+1, 2n+2)$. Cette fois $F_0 = F_1 = \text{OG}(n-1, 2n-1)$. Pour $d = 0$ ou 1 , décrivons l'application $\phi_d : \mathcal{E}_d \cap W^J \rightarrow W^{F_d}$. Si $w \in \mathcal{E}_0 \cap W^J$, il est de la forme

$$w = (1 < a_2 < \dots < a_{m-l}, -b_l < \dots < -b_1)$$

pour un certain $0 \leq l \leq m-1$. On a alors

$$\phi_0(w) = (a_2 - 1 < \dots < a_{m-l} - 1, -b_l + 1 < \dots < -b_1 + 1).$$

De plus, si $w \in \mathcal{E}_1 \cap W^J$, il est de la forme

$$w = (a_1 < \dots < a_{m-l}, -b_l < \dots < -b_2 < -1)$$

pour un certain $1 \leq l \leq m$, et

$$\phi_1(w) = (a_1 - 1 < \dots < a_{m-l} - 1, -b_l + 1 < \dots < -b_2 + 1).$$

De plus, on peut montrer que la fibration $\mathcal{O}_d \rightarrow F_d$ pour $d = 0$ ou 1 est définie de la manière suivante. Considérons un drapeau isotrope complet E_\bullet de V . On a alors

$$\begin{array}{ccc} \psi_0 : \mathcal{O}_0 & \rightarrow & \text{OG}(n-1, E_{2n-1}/E_1) \\ & \mapsto & \Sigma \cap E_{2n-1}/E_1, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 : \mathcal{O}_1 & \rightarrow & \text{OG}(n-1, E_{2n-1}/E_1) \\ & \mapsto & \Sigma/E_1 \end{array}$$

Par une méthode analogue à celle du cas précédent, on montre que

$$i^*h = \psi_d^*H,$$

où h est la classe hyperplane de X et H la classe hyperplane de F_d , d'où $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$.

Type A. Dans ce paragraphe, nous allons voir que pour toute P_I -orbite \mathcal{O}_d associée à un poids ω_i , si l'on note F_d la variété de drapeaux associée à \mathcal{O}_d (qui en type A est un produit de grassmanniennes), on a $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$. En type A , on a $X = G(m, V)$, où $V \cong \mathbb{C}^n$.

On distingue toujours les cas $i \leq m$ et $i \geq m$:

- Si $1 \leq i \leq m$, décrivons tout d'abord l'application $\phi_d : \mathcal{E}_d \cap W^J \rightarrow W^{F_d}$.
Si

$$w = (a_1 < \cdots < a_{i-d} < b_1 < \cdots < b_{m+d-i} \mid c_1 < \cdots < c_{n-m})$$

avec $a_{i-d} \leq i < b_1$, posons

$$\phi_d(w) = ((a_1 < \cdots < a_{i-d} \mid \dots), (b_1 - i < \cdots < b_{m+d-i} - i \mid \dots)),$$

où les derniers pointillés de chaque permutation correspondent respectivement :

- pour la partition de gauche, à

$$\{1, \dots, i\} \setminus \{a_p \mid 1 \leq p \leq i-d\}$$

ordonné en croissant ;

- pour la partition de droite, à

$$\{1, \dots, n-i\} \setminus \{b_q - i \mid 1 \leq q \leq m+d-i\}$$

ordonné en croissant.

Considérons maintenant E_\bullet un drapeau complet de V . On a vu que si $\Sigma \in \mathcal{O}_d$, alors $\dim \Sigma \cap E_{n-i} = m+d-i$, et la fibration $\psi_d : \mathcal{O}_d \rightarrow F_d$ est donnée par :

$$\begin{array}{ccc} \psi_d : \mathcal{O}_d & \rightarrow & G(i-d, V/E_{n-i}) \times G(m+d-i, E_{n-i}) \\ \Sigma & \mapsto & (\Sigma/(\Sigma \cap E_{n-i}), \Sigma \cap E_{n-i}) \end{array}$$

Notons alors \mathcal{S} , \mathcal{S}_1 et \mathcal{S}_2 les fibrés tautologiques sur $G(m, n)$, $G(i-d, i)$ et $G(m+d-i, n-i)$. La suite exacte

$$0 \rightarrow \psi^* \mathcal{S}_2 \rightarrow i^* \mathcal{S} \rightarrow \psi^* \mathcal{S}_1 \rightarrow 0$$

implique

$$i^*(\det \mathcal{S}^*) = \psi^*(\det \mathcal{S}_1^* \otimes \det \mathcal{S}_2^*),$$

d'où l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} .

- Si $m \leq i \leq n$, l'application

$$\phi_d : \mathcal{E}_d \rightarrow W^{F_d}$$

est définie, si

$$w = (a_1 < \cdots < a_{m-d} < b_1 < \cdots < b_d \mid c_1 < \cdots < c_{n-m})$$

avec $a_{m-d} \leq i < b_1$, par

$$\phi_d(w) = ((a_1 < \cdots < a_{m-d} \mid \dots), (b_1 - i < \cdots < b_d - i \mid \dots)),$$

où les derniers pointillés de chaque permutation correspondent respectivement :

– pour la partition de gauche, à

$$\{1, \dots, i\} \setminus \{a_p \mid 1 \leq p \leq m - d\}$$

ordonné en croissant ;

– pour la partition de droite, à

$$\{1, \dots, n - i\} \setminus \{b_q - i \mid 1 \leq q \leq d\}$$

ordonné en croissant.

On a vu que si $\Sigma \in \mathcal{O}_d$, alors $\dim \Sigma \cap E_{n-i} = d$, et la fibration $\psi_d : \mathcal{O}_d \rightarrow F_d$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \psi_d : \mathcal{O}_d &\rightarrow \mathrm{G}(m - d, V/E_{n-i}) \times \mathrm{G}(d, E_{n-i}) \\ \Sigma &\mapsto (\Sigma / (\Sigma \cap E_{n-i}), \Sigma \cap E_{n-i}) \end{aligned}$$

On démontre alors à nouveau l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} par la même méthode que dans le cas précédent.

Type D. On distingue quatre cas, selon que $m < n - 1$ ou $m = n$ et que l'on considère ω_1 ou ω_n (ou de manière analogue ω_{n-1}):

- Si $m < n - 1$ et que l'on considère le poids ω_1 , on a trois orbites paraboliques. De plus $F_0 = F_2 = \mathrm{OG}(m-1, 2n-2)$ et $F_1 = \mathrm{OG}(m, 2n-2)$. Notons que lorsque $m = n - 2$, F_1 n'est plus une grassmannienne, mais la variété de drapeaux $\mathrm{OG}(n-2, 2n-2)$. Cependant les calculs sont les mêmes que pour $m < n - 2$. On ne va pas décrire précisément les applications ϕ_d et ψ_d car elles sont très proches de celles que l'on avait obtenues en type B, mais on peut montrer de la même manière qu'avant l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} .
- Si $m < n - 1$ et qu'on considère le poids ω_n (ou de manière analogue le poids ω_{n-1}), on a $F_d = \mathrm{F}(m - d, n - d; n)$. Cette fois la situation est très proche de celle observée en type C, et on a toujours l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} .
- Si $m = n$, le cas du poids ω_1 a déjà été traité lors de l'étude du type B. En effet, on a un isomorphisme entre $\mathrm{OG}(n, 2n)$ et $\mathrm{OG}(n - 1, 2n - 1)$.
- Si $m = n$, on a quatre cas, selon que n est pair ou impair et que le poids cominusculaire considéré est ω_{n-1} ou ω_n . Dans tous les cas, on peut montrer que $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d} \cong \mathcal{H}_{F_d}$. Etant donné qu'ils sont tous similaires, on ne présente ici que le cas où $n = 2r$ est pair et où l'on considère le poids ω_n .

Soit E_\bullet un drapeau isotrope complet de $V = \mathbb{C}^{2n}$. Si $\Sigma \in \mathcal{O}_d$, on a vu que $\dim \Sigma \cap E_n = 2d$. La fibration $\psi_d : \mathcal{O}_d \rightarrow F_d$ s'exprime alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \psi_d : \mathcal{O}_d &\rightarrow \mathrm{G}(2d, E_n) \\ \Sigma &\mapsto \Sigma \cap E_n \end{aligned}$$

De plus, l'application $\phi_d : \mathcal{E}_d \cap W^J \rightarrow W^{F_d}$ est définie, si

$$w = (a_1 < \dots < a_{n-2d}, \bar{b}_{2d} < \dots < \bar{b}_1)$$

par l'expression

$$\phi_d(w) = (a_1 < \cdots < a_{n-2d}).$$

Pour démontrer l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} , remarquons que la fibre de ψ_d au-dessus d'un point $\Sigma' \in G(2d, E_n)$ est un ouvert affine de la grassmannienne orthogonale $\text{OG}(n-2d, \Sigma'^{\perp}/\Sigma')$, correspondant à

$$\left\{ \Sigma/\Sigma' \in \text{OG}(n-2d, \Sigma'^{\perp}/\Sigma') \mid \Sigma/\Sigma' \rightarrow \Sigma'^{\perp}/E_n \text{ est un isomorphisme} \right\}.$$

On en déduit que $\det(\Sigma) = \det(\Sigma'^{\perp}/E_n) \otimes \det(\Sigma')$. Comme $\Sigma'^{\perp}/E_n = (E_n/\Sigma')^*$, on trouve $\det(\Sigma) = (\det(\Sigma'))^2$. Or on a vu dans l'étude du type B que $c_1(\det(\Sigma)) = 2h$, où h est la classe hyperplane de $\text{OG}(n, 2n)$, et on a également $c_1(\det(\Sigma')) = H$, avec H la classe hyperplane de $G(2d, E_n)$, d'où l'isomorphisme entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et \mathcal{H}_{F_d} .

Pour terminer cette partie, décrivons à l'aide du théorème B.6 les arêtes entre les diagrammes de Hasse de deux P_I -orbites différentes.

Type C. Remarquons tout d'abord que si $|d-d'| \geq 2$, alors il n'existe pas d'arête entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$. En effet, les orbites paraboliques sont indexées par

$$d(w) = \#\{1 \leq l \leq m \mid w(l) < 0\},$$

et si α est une racine positive, on vérifie facilement grâce à la description du groupe de Weyl en type C que $|d(s_{\alpha}w) - d(w)| \leq 1$. On peut donc supposer que $d' = d+1$ avec $d \leq m-1$. Soit $w \in \mathcal{E}_d$. Cet élément peut s'écrire sous la forme

$$w = (a_1 < \cdots < a_{m-d}, \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \cdots < c_{n-m}).$$

Si $a_{m-d} = n$, on remarque qu'il existe une seule racine positive α telle que $l(s_{\alpha}w) = l(w) + 1$ et $s_{\alpha}w \in \mathcal{E}_{d+1}$: la racine simple α_n . De plus, on a alors $h_{\alpha_n}(\alpha_m) = 1$, donc la multiplicité est 1. En revanche, si $a_{m-d} \neq n$, il n'existe pas de racine positive vérifiant ces propriétés, donc il n'y a pas d'arête de w vers un élément de \mathcal{E}_{d+1} .

Par conséquent, les seules arêtes entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{d+1}}$ sont les arêtes

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{m-d-1} < n, \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \cdots < c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{m-d-1}, \bar{n} < \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \mid c_1 < \cdots < c_{n-m}). \end{array}$$

Type B. Supposons tout d'abord que $m \leq n-1$. On peut montrer que les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_1 sont les arêtes simples de la forme :

$$\begin{array}{c} (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_r < \bar{r} < \cdots < \bar{2} \quad \mid \quad r+1 < c_2 < \cdots < c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (r+1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_r < \bar{r} < \cdots < \bar{2} \quad \mid \quad 1 < c_2 < \cdots < c_{n-m}) \end{array}$$

pour certains $0 \leq l \leq m-1$ et $1 \leq r \leq l+1$. Les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_2 sont les arêtes doubles de la forme :

$$\begin{array}{c} (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{2} \quad \mid \quad c_1 < \cdots < c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (2 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1} \quad \mid \quad c_1 < \cdots < c_{n-m}) \end{array}$$

pour un certain $1 \leq l \leq m - 1$. Enfin, les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_2 sont les arêtes simples de la forme :

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{b}_1 \quad | \quad 1 < c_2 < \cdots < c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1} \quad | \quad b_1 < c_2 < \cdots < c_{n-m}) \end{array}$$

avec $b_1 < c_2$ et $1 \leq l \leq m$.

Enfin, si $m = n$, on montre que les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_1 sont les arêtes simples de la forme :

$$\begin{array}{c} (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l} \quad , \quad \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{2}) \\ \downarrow \\ (2 < a_2 < \cdots < a_{m-l} \quad , \quad \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1}) \end{array}$$

pour $1 \leq l \leq m - 1$.

Type A. Supposons tout d'abord que $i \leq m$. On remarque tout d'abord que si $|d - d'| \geq 2$, il n'y a pas d'arête entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$. On peut donc supposer que $d' = d + 1$ avec $0 \leq d \leq i - 1$, et on montre que les arêtes entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$ sont les arêtes simples de la forme

$$\begin{array}{c} \left(\overbrace{a_1 < \cdots < a_{i-d}}^{\leq i} < \overbrace{b_1 < \cdots < b_{m+d-i}}^{> i} \quad | \quad \overbrace{c_1 < \cdots < c_d}^{\leq i} < \overbrace{c_{d+1} < \cdots < c_{n-m}}^{> i} \right) \\ \downarrow \\ \left(\overbrace{a_1 < \cdots < a_{i-d-1}}^{\leq i} < \overbrace{c_{d+1} < b_1 < \cdots < b_{m+d-i}}^{> i} \quad | \quad \overbrace{c_1 < \cdots < c_d < a_{i-d}}^{\leq i} < \overbrace{c_{d+2} < \cdots < c_{n-m}}^{> i} \right), \end{array}$$

avec les conditions $c_{d+1} < b_1$ et $a_{i-d} > c_d$.

Enfin, si $i \geq m$, on remarque comme avant que si $|d - d'| \geq 2$, alors il n'y a pas d'arête entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$. On peut donc supposer que $d' = d + 1$ avec $0 \leq d \leq i - 1$, et on montre que les arêtes entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$ sont les arêtes simples de la forme

$$\begin{array}{c} \left(\overbrace{a_1 < \cdots < a_{m-d}}^{\leq i} < \overbrace{b_1 < \cdots < b_d}^{> i} \quad | \quad \overbrace{c_1 < \cdots < c_{i+d-m}}^{\leq i} < \overbrace{c_{i+d-m+1} < \cdots < c_{n-m}}^{> i} \right) \\ \downarrow \\ \left(\overbrace{a_1 < \cdots < a_{m-d-1}}^{\leq i} < \overbrace{c_{i+d-m+1} < b_1 < \cdots < b_d}^{> i} \quad | \quad \overbrace{c_1 < \cdots < c_{i+d-m} < a_{m-d}}^{\leq i} < \overbrace{c_{i+d-m+2} < \cdots < c_{n-m}}^{> i} \right). \end{array}$$

avec les conditions $c_{i+d-m+1} < b_1$ et $a_{m-d} > c_{i+d-m}$.

Type D Considérons tout d'abord le cas de ω_1 lorsque $m < n - 1$. On peut montrer que les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_1 sont les arêtes simples de la forme :

$$\begin{array}{c} (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_r < \bar{r} < \cdots < \bar{2} \quad | \quad r + 1 < c_2 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (r + 1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_r < \bar{r} < \cdots < \bar{2} \quad | \quad 1 < c_2 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}) \end{array}$$

avec $1 \leq r \leq l+1$. Les arêtes entre \mathcal{E}_0 et \mathcal{E}_2 sont les arêtes doubles de la forme :

$$\begin{array}{c} (1 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{2} \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (2 < a_2 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1} \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}). \end{array}$$

Enfin, les arêtes entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont les arêtes simples de la forme :

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{b}_1 \quad | \quad 1 < c_2 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{m-l}, \bar{b}_l < \cdots < \bar{b}_2 < \bar{1} \quad | \quad b_1 < c_2 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^l c_{n-m}) \end{array}$$

avec $b_1 < c_2$.

Considérons maintenant le cas du poids ω_n lorsque $m < n-1$ (celui de ω_{n-1} étant similaire). Remarquons tout d'abord que si $|d-d'| > 2$, alors il n'existe pas d'arête entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$. Ensuite, supposons tout d'abord que $d' = d+1$ avec $d \leq m-1$. Alors les arêtes entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{d+1}}$ sont les arêtes simples

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{m-d-1} < a_{m-d}, \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^d c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{m-d-1}, \bar{c}_{n-m} < \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^{d+1} a_{m-d}), \end{array}$$

avec les conditions $a_{m-d} > c_{n-m-1}$ et $c_{n-m} > b_d$.

Enfin, si $d' = d+2$ avec $d \leq m-2$, alors les arêtes entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{d+1}}$ sont les arêtes doubles

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{m-d-2} < a_{m-d-1} < a_{m-d}, \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^d c_{n-m}) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{m-d-2}, \bar{a}_{m-d} < \bar{a}_{m-d-1} < \bar{b}_d < \cdots < \bar{b}_1 \quad | \quad c_1 < \cdots < c_{n-m-1}, (-1)^d c_{n-m}), \end{array}$$

avec les conditions $a_{m-d-1} > b_d$ et $c_j < a_{m-d-1}$ pour tout $1 \leq j \leq n-m$.

Enfin, étudions le cas du poids ω_n lorsque $m = n$ et $n = 2r$ (les trois autres situations étant analogues). Remarquons tout d'abord que si $|d-d'| > 1$, alors il n'existe pas d'arête entre \mathcal{O}_d et $\mathcal{O}_{d'}$. Supposons donc $d' = d+1$ avec $d \leq r$. Alors les arêtes entre $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_d}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_{d+1}}$ sont les arêtes simples

$$\begin{array}{c} (a_1 < \cdots < a_{n-2d-2} < n-1 < n, \bar{b}_{2d} < \cdots < \bar{b}_1) \\ \downarrow \\ (a_1 < \cdots < a_{n-2d-2}, \bar{n} < \bar{n-1} < \bar{b}_{2d} < \cdots < \bar{b}_1). \end{array}$$

Résumons brièvement une partie des résultats obtenus :

Proposition B.7. 1. En types *A*, *C*, *D*, et en type *B* pour les grassmanniennes orthogonales de la forme $\text{OG}(m, 2n+1)$ avec $m \neq n-1$, si \mathcal{O} est une orbite parabolique associée à un poids cominusculaire ω_i , les diagrammes de Hasse $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ et \mathcal{H}_F de \mathcal{O} et de la variété de drapeaux F correspondante sont isomorphes.

2. En type *B* pour la grassmannienne $\text{OG}(n-1, 2n+1)$, si l'on note \mathcal{O}_0 , \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 les orbites paraboliques correspondant au poids ω_1 et F_0 , F_1 et F_2 les variétés de drapeaux correspondantes, on a $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_0} \cong \mathcal{H}_{F_0}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_2} \cong \mathcal{H}_{F_2}$, mais $\mathcal{H}_{\mathcal{O}_1}$ correspond à \mathcal{H}_{F_1} avec les arêtes doublées.

Ceci conclut l'étude du lien entre les orbites paraboliques associées aux poids cominusculaires et le produit quantique pour les grassmanniennes classiques. Dans la partie suivante, on tente d'obtenir un résultat similaire pour la grassmannienne symplectique impaire de droites $\text{IG}(2, 2n+1)$.

B.4 Produit quantique par $\sigma_{n+1,n}$ dans $\text{IG}(2, 2n+1)$

Dans cette partie, nous allons donner, sous réserve de la conjecture d'énumérativité 5.1, une formule pour la multiplication quantique par la classe de Schubert $\sigma_{n+1,n}$ dans $\text{IG}(2, 2n+1)$. Etant donné que cette classe est la restriction à $\text{IG}(2, 2n+1)$ de la classe de Schubert $\sigma_{n+1,n}^+$ de $\text{IG}(2, 2n+2)$, qui est la classe associée au poids cominusculaire ω_{n+1} , on peut s'attendre à ce que la multiplication par $\sigma_{n+1,n}$ dans $\text{IG}(2, 2n+1)$ soit particulièrement simple.

On va montrer que $\sigma_{n+1,n} \star \sigma_{a,b}$ est homogène en q (de degré 0, 1 ou 2), et fait intervenir au plus deux classes de Schubert. Plus précisément, on prouve le résultat suivant :

Théorème B.8.

$$\sigma_{n+1,n} \star \sigma_{a,b} = \begin{cases} \sigma_{n+1+a,n+b} & \text{si } a \leq n-2 \\ q\sigma_{b+n,a-n+1} & \text{si } a \geq n-1 \text{ et } a+b \leq 2n-4 \\ q(\sigma_{b+n,a-n+1} + \sigma_{b+n+1,a-n}) & \text{si } a+b = 2n-3 \\ q\sigma_{b+n+1,a-n} & \text{si } a+b \geq 2n-2 \text{ et } b \leq n-2 \\ q^2\sigma_{a-n,b-n+1} & \text{si } b \geq n-1 \text{ et} \\ & (a,b) \neq (2n-1, 2n-2) \\ q^2\sigma_{n,n-2} & \text{si } (a,b) = (2n-1, 2n-2). \end{cases}$$

Pour démontrer ce théorème, on calcule dans un premier temps par des arguments énumératifs les termes de degré 0 du produit par $\sigma_{n+1,n}$ (proposition B.9) ainsi que certains des termes de degré 1 (proposition B.10) et de degré 2 (cf proposition B.13). Ensuite, on utilise le fait que $\sigma_{n+1,n}^2 = q^2\sigma_{1,1}$ (corollaire B.15) et la règle de Pieri quantique (théorème 3.12) pour calculer les invariants manquants. On notera $(\sigma_{a,b})_k$ le terme de degré k (en q) du produit $\sigma_{n+1,n} \star \sigma_{a,b}$.

Termes de degré 0.

Proposition B.9. *Le terme de degré 0 du produit $\sigma_{n+1,n} \star \sigma_{a,b}$ est*

$$(\sigma_{a,b})_0 = \begin{cases} \sigma_{n+1+a,n+b} & \text{si } 0 \leq a \leq n-2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $a+b > 2n-4$, pour des raisons de dimension on a toujours $(\sigma_{a,b})_0 = 0$. Si $a+b \leq 2n-4$, rappelons que $\mathbf{i}^*\sigma_{a,b}^+ = \sigma_{a,b}$, et remarquons également que $\mathbf{i}^*\sigma_{n+1,n}^+ = \sigma_{n+1,n}$ (cf § 3.1). Alors

$$(\sigma_{a,b})_0 = \mathbf{i}^*\sigma_{n+1,n}^+ \cup \mathbf{i}^*\sigma_{a,b}^+ = \begin{cases} \mathbf{i}^*\sigma_{n+1+a,n+b}^+ = \sigma_{n+1+a,n+b} & \text{si } a \leq n-2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

Termes de degré 1.

Proposition B.10. *Lorsque $a \geq n+1$ et $b \geq n-1$, on a $(\sigma_{a,b})_1 = 0$.*

Démonstration. On utilise la même méthode qu'aux paragraphes 3.2.1.1 et 3.2.1.2, sauf que cette fois, on fait appel à l'inclusion dans la grassmannienne symplectique paire $\text{IG}^+ := \text{IG}(2, 2n+2)$. On cherche à déterminer les invariants de la forme $I_1(\sigma_{n+1,n}, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-1-j, i+j-1}, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-1-l, l-i-1})$, c'est-à-dire à calculer le nombre de droites passant par les sous-variétés suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \{ \Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \subset F_{n+1}^+ \cap E \} \\ Y &= \begin{cases} \{ \Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap G_{j+2}^+ \cap E \neq \emptyset, \Sigma \subset G_{2n+2-i-j}^+ \cap E \} & \text{si } i \geq 2 \\ \{ \Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap G_{j+2}^+ \cap E \neq \emptyset, \Sigma \subset G_{2n+3-i-j}^+ \cap E \} & \text{si } i = 0 \text{ ou } 1 \end{cases} \\ Z &= \{ \Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap H_{l+2}^+ \cap E, \Sigma \subset H_{2n+3-l+i}^+ \cap E \} \end{aligned}$$

où i, j, l sont des entiers, F_\bullet^+ , G_\bullet^+ et H_\bullet^+ des drapeaux isotropes génériques de IG^+ et $E = \mathbb{C}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ l'hyperplan définissant $\text{IG} := \text{IG}(2, 2n+1)$.

On utilise un lemme de généralité qui se prouve comme le lemme 3.7 :

Lemme B.11. *Supposons que $n \geq 2$ et notons \mathbb{F}_n^+ la variété des drapeaux isotropes complets de $\text{IG}(2, 2n+2)$, Λ_n^+ la variété des formes symplectiques sur \mathbb{C}^{2n+2} . L'ensemble des quadruplets $(F_\bullet^+, G_\bullet^+, H_\bullet^+, \omega^+) \in \mathbb{F}_n^+ \times \mathbb{F}_n^+ \times \mathbb{F}_n^+ \times \Lambda_n^+$ vérifiant les conditions suivantes*

- (C1) $\forall 0 \leq p \leq 2n+2$, $\omega_{|F_p^+}^+$, $\omega_{|G_p^+}^+$ et $\omega_{|H_p^+}^+$ sont de rang maximal,
- (C2) $\forall 0 \leq p, q, r \leq 2n+2$, $F_p^+ \cap G_q^+ \cap H_r^+$ et $F_p^+ \cap G_q^+ \cap H_r^+ \cap E$ ont la dimension attendue,
- (C3) $K \not\subset F_{2n+1}^+ \cup G_{2n+1}^+ \cup H_{2n+1}^+$,

est un ouvert dense de $\mathbb{F}_n^+ \times \mathbb{F}_n^+ \times \mathbb{F}_n^+ \times \Lambda_n^+$.

Sous ces hypothèses, on peut prouver le

Lemme B.12. 1. *Les intersections $X \cap \mathbb{O}$, $Y \cap \mathbb{O}$ et $Z \cap \mathbb{O}$ sont transverses. De plus*

$$\begin{aligned} X \cap \mathbb{O} &= \emptyset, \\ Y \cap \mathbb{O} &= \begin{cases} \{K \oplus L \mid L \subset G_3^+ \cap E\} & \text{si } i = 0 \text{ et } j = 1, \\ \{G_2^+ \cap E \oplus K\} & \text{si } i = 1 \text{ et } j = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases} \\ Z \cap \mathbb{O} &= \begin{cases} \emptyset & \text{si } l \neq i+1, \\ \{K \oplus L \mid L \subset H_{l+2}^+ \cap E\} & \text{si } l = i+1. \end{cases} \end{aligned}$$

- 2. *Si $i \geq 2$ et $j+l > n$ ou si $i \leq 1$ et $j+l > n+1$, alors il n'existe pas de droite coupant X , Y et Z .*

Preuve du lemme. 1. Le cas de $X \cap \mathbb{O}$ est évident, et celui de $Y \cap \mathbb{O}$ a déjà été traité dans la preuve de la proposition 3.11. Quant au cas de Z , on remarque que si $\Sigma \in Z \cap \mathbb{O}$, on doit avoir $K \subset H_{2n+3-l+1}^+ \cap E$, d'où, par (C2), la condition $l = i+1$. Si $l = i+1$, alors $Z \cap \mathbb{O} = \{K \oplus L \mid L \subset H_{l+2}^+ \cap E\}$. Prenons $\Sigma_0 = K \oplus \langle h \rangle$, où h est un élément non nul de $H_{l+2}^+ \cap E$. On

exprime $T_{\Sigma_0}Z$ et $T_{\Sigma_0}\mathbb{O}$ en tant que sous-espaces de $T_{\Sigma_0}G$, où G est la grassmannienne usuelle :

$$\begin{aligned} T_{\Sigma_0}Z &= \{\phi \in T_{\Sigma_0}G \mid \phi(h) \in (H_{l+2}^+ \cap E) / \langle h \rangle, \phi(k) \perp h\} \\ T_{\Sigma_0}\mathbb{O} &= \{\phi \in T_{\Sigma_0}G \mid \phi(k) = 0\}, \end{aligned}$$

avec k un générateur de K . On remarque que l'intersection de $T_{\Sigma_0}Z$ et de $T_{\Sigma_0}\mathbb{O}$ est de dimension l . En calculant $\dim Z = 2n-2-l$ et $\dim \mathbb{O} = 2n-1$, on conclut qu'ils engendrent $T_{\Sigma_0}IG$.

2. Notons $\mathcal{D}(V, W)$ une droite passant par X , Y et Z . Supposons $i \geq 2$. La droite vectorielle V doit alors vérifier

$$V \subset F_{n+1}^+ \cap G_{2n+2-i-j}^+ \cap H_{2n+3-l+i}^+ \cap E,$$

ce qui, par la condition **(C2)**, impose $j + l \leq n$.

Si maintenant $i \leq 1$, V doit vérifier

$$V \subset F_{n+1}^+ \cap G_{2n+3-i-j}^+ \cap H_{2n+3-l+i}^+ \cap E,$$

d'où nécessairement $j + l \leq n + 1$. □

Pour terminer la preuve de la proposition B.10, considérons (a, b) avec $a \geq n + 1$ et $b \geq n - 1$. Notons

$$(a, b) = (2n - 1 - j, i + j - 1).$$

On va utiliser la seconde partie du lemme B.12 ci-dessus. Pour cela, on remarque que si $b \geq n - 1$, alors $i + j \geq n$, d'où $j \geq n - i$. Supposons que pour un certain l , l'invariant $I_1(\sigma_{n+1, n}, \sigma_{2n-1-j, i+j-1}, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-1-l, l-i-1})$ soit non nul. Alors il existe une droite $\mathcal{D}(V, W)$ passant par X , Y et Z définis comme ci-dessus. De plus, comme $a + b \geq 2n$, on a nécessairement $i \geq 2$. L'existence de $\mathcal{D}(V, W)$ impose alors $j + l \leq n$, donc $l \leq i$. Mais pour que la troisième partition ait un sens, on doit avoir $l - i - 1 \geq 0$, d'où une contradiction. Ceci termine la preuve de la proposition. □

Termes de degré 2. Sous réserve de la conjecture d'énumérativité 5.1, on montre

Proposition B.13. *Le terme de degré 2 du produit quantique par $\sigma_{n+1, n}$ est*

$$(\sigma_{a, b})_2 = \begin{cases} \sigma_{a-n, b-n+1} & \text{si } b \geq n - 1 \text{ et } (a, b) \notin \{(n, n - 1), (2n - 1, 2n - 2)\}, \\ 0 & \text{si } b < n - 1 \text{ et } (a, b) \notin \{(n, n - 1), (2n - 1, 2n - 2)\}. \end{cases}$$

Remarque B.1. La proposition ci-dessus ne donne aucune information sur les invariants $(\sigma_{n, n-1})_2$ et $(\sigma_{2n-1, 2n-2})_2$. En effet, on verra que le lemme B.14 servant à démontrer la proposition ne permet pas de calculer l'invariant

$$I_2(\sigma_{n+1, n}, \sigma_{2n-1, 2n-2}, \sigma_{n, n-1}).$$

On le calculera donc dans la suite par une autre méthode.

Preuve de la proposition. On cherche à déterminer les invariants de la forme

$$I_2(\sigma_{n+1,n}, \sigma_{2n-1-j, n-1+i+j}, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-1-l, n-1+l-i}),$$

c'est-à-dire calculer le nombre de courbes de degré 2 passant par les sous-variétés suivantes :

$$\begin{aligned} X &= \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \subset F_{n+1}^+ \cap E\} \\ Y &= \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap G_{j+2}^+ \cap E, \Sigma \subset G_{n+2-i-j}^+ \cap E\} \\ Z &= \begin{cases} \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap H_{l+2}^+ \cap E \neq \emptyset, \Sigma \subset H_{n+2+i-l}^+ \cap E\} & \text{si } 0 \leq i \leq n-2 \\ \{\Sigma \in \text{IG} \mid \Sigma \cap H_{l+2}^+ \cap E \neq \emptyset, \Sigma \subset H_{2n+2-l}^+ \cap E\} & \text{si } i = n-1 \end{cases} \end{aligned}$$

où i, j, l sont des entiers, F_{\bullet}^+ , G_{\bullet}^+ et H_{\bullet}^+ des drapeaux isotropes de IG^+ et $E = \mathbb{C}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ l'hyperplan définissant $\text{IG} := \text{IG}(2, 2n+1)$.

Lemme B.14.

1. $I_2(\sigma_{n+1,n}, \sigma_{2n-1-j, n-1+i+j}, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-1-l, n-1+l-i}) = \begin{cases} 1 & \text{si } l = i+j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
2. $I_2(\sigma_{n+1,n}, \sigma_{2n-1, 2n-2}, \sigma_{2n-1-l, l}) = 0$ si $0 \leq l \leq n-2$.

Preuve du lemme. Pour démontrer le lemme, on admet la conjecture 5.1 et on utilise le principe quantique-classique de Buch (cf § 1.2.2.1). A une courbe rationnelle C de degré 2 sur $\text{IG}(2, 2n+1)$, on associe son noyau (ici trivial) et son image, qui est un sous-espace vectoriel U de dimension 4 de \mathbb{C}^{2n+1} . Les conditions d'incidence $C \cap X \neq \emptyset$, $C \cap Y \neq \emptyset$ et $C \cap Z \neq \emptyset$ se traduisent alors par l'appartenance de U à certaines variétés de Schubert de $\text{G}(4, 2n+1)$.

1. Lorsque $0 \leq i \leq n-2$, on remarque que la condition d'incidence associée à X correspond à la classe de Schubert $\sigma_{n-1, n-1}^{\text{G}} \in \text{A}^*(\text{G}(4, 2n+1))$. De même, les conditions associées à Y et Z correspondent respectivement à $\sigma_{2n-3-j, n-2+i+j}^{\text{G}}$ et à $\sigma_{2n-3-l, n-2-i-l}^{\text{G}}$. Pour connaître l'invariant, il suffit donc de calculer le produit d'intersection

$$\sigma_{n-1, n-1}^{\text{G}} \cup \sigma_{2n-3-j, n-2+i+j}^{\text{G}} \cup \sigma_{2n-3-l, n-2-i-l}^{\text{G}}.$$

On utilise la règle de Littlewood-Richardson, avec le vocabulaire et les notations de [Ful97]. Notons, de gauche à droite, λ , μ et ν les trois partitions ci-dessus. Le coefficient de Littlewood-Richardson $c_{\lambda, \mu}^{\nu}$ dans $\text{G}(4, 2n+1)$ est obtenu en comptant le nombre de tableaux gauches de forme ν^{\vee}/λ (c'est-à-dire dont le diagramme est le complémentaire du diagramme de λ dans celui de ν^{\vee}) et de poids μ (c'est-à-dire dont les cases sont numérotées avec μ_1 coefficients 1, μ_2 coefficients 2, etc...). Il y a également deux conditions supplémentaires :

- la numérotation doit être croissante sur les lignes et strictement croissante sur les colonnes ;
- le mot $x_1 \dots x_r$ obtenu en lisant la numérotation du diagramme de droite à gauche et de haut en bas doit être *de Yamanouchi*, c'est-à-dire que pour tout s , le sous-mot $x_1 \dots x_s$ doit comporter au moins autant de 1 que de 2, au moins autant de 2 que de 3, etc...

Dans notre cas, on remarque facilement que si $l \neq i + j$, alors il n'existe pas de tel tableau gauche. En revanche, si $l = i + j$, il en existe un unique, représenté à la figure suivante :

				$n - 2$		
$n - 1 - j$				1	...	1
				2	...	2
1	...	1				
2	...	2				
$i + j$						

On trouve donc le résultat suivant :

$$\sigma_{n-1, n-1}^G \cup \sigma_{2n-3-j, n-2+i+j}^G \cup \sigma_{2n-3-l, n-2-i-l}^G = \begin{cases} \sigma_{\text{pt}}^G & \text{si } l = i + j \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où la première partie du lemme.

2. Lorsque $i = n - 1$, on a nécessairement $j = 0$ et $0 \leq l \leq n - 1$. Les conditions d'incidence sur $U \in G(4, 2n + 1)$ correspondent aux classes de Schubert $\sigma_{n-1, n-1}^G$, $\sigma_{2n-3, 2n-3}^G$ et $\sigma_{2n-3-l, l-2}^G$. Lorsque $l \leq n - 2$, on remarque donc facilement que leur produit d'intersection est nul, d'où la deuxième partie du lemme. \square

Ceci termine la preuve de la proposition B.13. \square

Une conséquence de la proposition B.13 est que le carré de $\sigma_{n+1, n}$ prend une forme particulièrement simple :

Corollaire B.15. $\sigma_{n+1, n}^2 = q^2 \sigma_{1, 1}$.

Démonstration. Par la proposition B.9, on a $\sigma_{n+1, n} \cup \sigma_{n+1, n} = 0$. De plus, la proposition B.10 assure de l'annulation du terme en q du produit quantique $\sigma_{n+1, n}^2$. Il reste donc simplement à calculer le terme en q^2 , ce qui est fait à la proposition B.13. \square

L'intérêt de ce corollaire est que l'on connaît le produit quantique par la classe $\sigma_{1, 1}$ (cf théorème 3.12). Par conséquent, ceci va nous permettre de calculer les invariants de degré 1 et 2 que l'on n'a pas pu déterminer par un calcul énumératif, et donc de terminer la preuve du théorème B.8 :

Preuve du théorème B.8. Commençons par montrer que

$$(\sigma_{n, n-1})_2 = 1. \tag{B.8}$$

En effet, notons $\alpha := (\sigma_{n, n-1})_2$. On a alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1, n}^S 2 \star \sigma_{n, n-1} &= q^2 \sigma_{1, 1} \star \sigma_{n, n-1} \\ \Rightarrow \alpha q^2 \sigma_{n+1, n} &= q^2 \sigma_{n+1, n} \\ \Rightarrow \alpha &= 1. \end{aligned}$$

On connaît donc dans tous les cas le terme de degré 2 du produit quantique par $\sigma_{n+1, n}$.

Traitons maintenant le cas du degré 1 par les deux lemmes suivants.

Lemme B.16. $(\sigma_{n,n-2})_1 = \sigma_{2n-1}$.

Preuve du lemme B.16. Il s'agit de calculer l'invariant

$$I_1(\mathbf{i}^* \sigma_{n,n-2}^+, \mathbf{i}^* \sigma_{n+1,n}^+, \mathbf{i}^* \sigma_{2n-2}),$$

c'est-à-dire de compter le nombre de droites $\mathcal{D}(V, W)$ passant par les sous-variétés :

$$\begin{aligned} X &= \{ \Sigma \in \text{IG}(2, 2n+1) \mid \Sigma \cap F_{n+2}^+ \neq 0, \Sigma \subset F_{n+3}^+ \}, \\ Y &= \{ \Sigma \in \text{IG}(2, 2n+1) \mid \Sigma \cap G_n^+ \neq 0, \Sigma \subset G_{n+1}^+ \}, \\ Z &= \{ \Sigma \in \text{IG}(2, 2n+1) \mid \Sigma \cap H_3^+ \neq 0 \}, \end{aligned}$$

où F_{\bullet}^+ , G_{\bullet}^+ et H_{\bullet}^+ sont des drapeaux isotropes de \mathbb{C}^{2n+2} , $\text{IG}(2, 2n+1) = \text{IG}(2, E) \subset \text{IG}(2, 2n+2)$, ces objets vérifiant les conditions du lemme B.11. On montre alors facilement qu'on a $V = F_{n+3}^+ \cap G_{n+1}^+ \cap E$ et que le nombre d'espaces W vérifiant les conditions d'incidence et d'isotropie nécessaires est égal au coefficient de la classe du point dans le produit d'intersection

$$\sigma_{2n-2}^G \cap \sigma_{2n-2}^G \cap \sigma_{n-2}^G \cap \sigma_n^G \in A^*(G(3, 2n+1)).$$

La règle de Pieri classique de la grassmannienne usuelle nous assure que ce coefficient est égal à 1, d'où le lemme. \square

Lemme B.17. *Le terme de degré 1 du produit quantique par $\sigma_{n+1,n}$ est*

$$(\sigma_{a,b})_1 = \begin{cases} \sigma_{b+n, a-n+1} & \text{si } a+b \leq 2n-4 \text{ et } a \geq n-1, \\ \sigma_{b+n, a-n+1} + \sigma_{b+n+1, a-n} & \text{si } a+b = 2n-3, \\ \sigma_{b+n+1, a-n} & \text{si } a+b \geq 2n-2 \text{ et } b \leq n-2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve du lemme B.17. Montrons tout d'abord que

$$(\sigma_{a,b})_1 = 0 \text{ si } a \leq n-2. \quad (\text{B.9})$$

En effet, si $a \leq n-2$ et $(a, b) \neq (n-2, n-2)$, on a

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1,n}^2 \star \sigma_{a,b} &= q^2 \sigma_{1,1} \star \sigma_{a,b} \\ &\Rightarrow q^2 \sigma_{a+1, b+1} + \sigma_{n+1,n} \star q(\sigma_{a,b})_1 = q^2 \sigma_{a+1, b+1} \\ &\Rightarrow (\sigma_{a,b})_1 = 0. \end{aligned}$$

De plus, si $(a, b) = (n-2, n-2)$, on conclut par la même méthode en utilisant l'équation (B.8).

En utilisant toujours le corollaire B.15, on montre également que

$$(\sigma_{n-1, b})_1 = \begin{cases} \sigma_{b+n} & \text{si } b \neq n-2 \\ \sigma_{2n-1, -1} + \sigma_{2n-2} & \text{si } b = n-2. \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

On peut maintenant démontrer le lemme par récurrence sur la codimension $c := a+b$. L'initialisation ($c \leq n-1$) est donnée par les équations (B.9) et (B.10).

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vraie en codimension $c \leq 2n - 4$. Alors

$$\sigma_{n+1,n}^2 \star \sigma_{b+n-1,a-n} = \sigma_{n+1,n} \star q\sigma_{a,b} = q^2 \sigma_{1,1} \star \sigma_{b+n-1,a-n} = q^2 \sigma_{b+n,a-n+1}.$$

On en déduit que

$$\sigma_{n+1,n} \star \sigma_{a,b} = q\sigma_{b+n,a-n+1},$$

ce qui démontre l'hypothèse en codimension $c + 1$.

Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vraie en codimension $c = 2n - 3$. Alors

$$\sigma_{n+1,n}^2 \star \sigma_{b+n-1,a-n} = q^2 (\sigma_{b+n,a-n+1} + \sigma_{b+n+1,a-n}),$$

d'où l'hypothèse en codimension $2n - 2$.

Lorsque $c = 2n - 2$, on a, pour tout $0 \leq i \leq n - 2$:

$$\sigma_{n+1,n}^2 \star \sigma_{n-1+i,n-2-i} = q^2 (\sigma_{n+i,n-1-i} + \sigma_{n+1+i,n-2-i}),$$

d'où

$$(\sigma_{2n-1-i,i-1})_1 + (\sigma_{2n-1-i,i-1})_1 = \sigma_{n+i,n-1-i} + \sigma_{n+1+i,n-2-i}$$

et on a vu que $(\sigma_{n,n-2})_1 = \sigma_{2n-1}$ (cf lemme B.16).

On en déduit aisément $(\sigma_{2n-1-i,i-1})_1 = \sigma_{n+i,n-1-i}$ pour tout $0 \leq i \leq n - 1$, ce qui est l'hypothèse en codimension $2n - 1$.

Supposons finalement que l'hypothèse de récurrence est vraie en codimension $c \geq 2n - 1$. Alors

$$\sigma_{n+1,n}^{*2} \star \sigma_{b+n-1,a-n} = q^2 \sigma_{b+n+1,a-n},$$

d'où l'hypothèse en codimension $c + 1$. □

Pour terminer la preuve du théorème B.8, il suffit de combiner les propositions B.9, B.13, le lemme B.17 et l'équation (B.8). □

Le théorème B.8 nous donne pour $\text{IG}(2, 2n + 1)$, sous réserve de la conjecture d'énumérativité 5.1, un résultat proche de celui donné par le théorème B.1 pour la grassmannienne symplectique. Cependant, tandis que dans le cas pair, ce résultat permet de définir des automorphismes de la cohomologie quantique, ce n'est a priori plus vrai dans le cas impair.

Bibliographie

- [AKO06] Denis Auroux, Ludmil Katzarkov, and Dmitri Orlov. Mirror symmetry for del Pezzo surfaces: vanishing cycles and coherent sheaves. *Invent. Math.*, 166(3):537–582, 2006.
- [Bat93] Victor V. Batyrev. Quantum cohomology rings of toric manifolds. *Astérisque*, (218):9–34, 1993. Journées de Géométrie Algébrique d’Orsay (Orsay, 1992).
- [Bat94] Victor V. Batyrev. Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi-Yau hypersurfaces in toric varieties. *J. Algebraic Geom.*, 3(3):493–535, 1994.
- [Bay04] Arend Bayer. Semisimple quantum cohomology and blowups. *Int. Math. Res. Not.*, (40):2069–2083, 2004.
- [BCFK05] A. Bertram, I. Ciocan-Fontanine, and B. Kim. Two proofs of a conjecture of Hori and Vafa. *Duke Mathematical Journal*, 126(1):101–136, 2005.
- [BCFK08] Aaron Bertram, Ionuț Ciocan-Fontanine, and Bumsig Kim. Gromov-Witten invariants for abelian and nonabelian quotients. *J. Algebraic Geom.*, 17(2):275–294, 2008.
- [BCFKvS98] Victor V. Batyrev, Ionuț Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim, and Duco van Straten. Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians. *Nuclear Phys. B*, 514(3):640–666, 1998.
- [BCFKvS00] Victor V. Batyrev, Ionuț Ciocan-Fontanine, Bumsig Kim, and Duco van Straten. Mirror symmetry and toric degenerations of partial flag manifolds. 184(1):1–39, 2000.
- [Ber97] A. Bertram. Quantum Schubert calculus. *Advances in Mathematics*, 128(2):289–305, 1997.
- [Ber00] Aaron Bertram. Some applications of localization to enumerative problems. *Michigan Math. J.*, 48:65–75, 2000. Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday.
- [BF97] K. Behrend and B. Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1):45–88, 1997.

- [BGG73] I. N. Bernšteĭn, I. M. Gel'fand, and S. I. Gel'fand. Schubert cells and cohomology of the spaces G/P . *Russian Mathematical Surveys*, 28:1, 1973.
- [BKT08a] A.S. Buch, A. Kresch, and H. Tamvakis. A Giambelli formula for isotropic Grassmannians. *Arxiv preprint math/0811.2781 - arxiv.org*, 2008.
- [BKT08b] A.S. Buch, A. Kresch, and H. Tamvakis. Quantum Giambelli formulas for isotropic Grassmannians. *Arxiv preprint arXiv:0812.0970*, 2008.
- [BKT09] A.S. Buch, A. Kresch, and H. Tamvakis. Quantum Pieri rules for isotropic Grassmannians. *Inventiones Mathematicae*, 178(2):345–405, 2009.
- [BM04] Arend Bayer and Yuri I. Manin. (Semi)simple exercises in quantum cohomology. In *The Fano Conference*, pages 143–173. Univ. Torino, Turin, 2004.
- [Bon89] A. I. Bondal. Representations of associative algebras and coherent sheaves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 53(1):25–44, 1989.
- [Bor53] Armand Borel. Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts. *Ann. of Math. (2)*, 57:115–207, 1953.
- [Bou68] N. Bourbaki. *Eléments de mathématiques, fasc. 34: groupes et algèbres de Lie, chap. 4, 5 et 6*. Hermann, 1968.
- [Buc03] A.S. Buch. Quantum cohomology of Grassmannians. *Compositio Mathematica*, 137(2):227–235, 2003.
- [CF99] Ionuț Ciocan-Fontanine. On quantum cohomology rings of partial flag varieties. *Duke Math. J.*, 98(3):485–524, 1999.
- [Che94] C. Chevalley. Sur les décompositions cellulaires des espaces G/B . In *Algebraic groups and their generalizations: classical methods (University Park, PA, 1991)*, volume 56 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 1–23. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994. With a foreword by Armand Borel.
- [Cio05] Gianni Ciolli. On the quantum cohomology of some Fano threefolds and a conjecture of Dubrovin. *Internat. J. Math.*, 16(8):823–839, 2005.
- [CK99] David A. Cox and Sheldon Katz. *Mirror symmetry and algebraic geometry*, volume 68 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [CMP07] Pierre-Emmanuel Chaput, Laurent Manivel, and Nicolas Perrin. Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces. II. Hidden symmetries. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (22):Art. ID rnm107, 29, 2007.

- [CMP08] P. E. Chaput, L. Manivel, and N. Perrin. Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces. *Transform. Groups*, 13(1):47–89, 2008.
- [CMP09] Pierre-Emmanuel Chaput, Laurent Manivel, and Nicolas Perrin. Affine symmetries of the equivariant quantum cohomology ring of rational homogeneous spaces. *Math. Res. Lett.*, 16(1):7–21, 2009.
- [CMP10] P. E. Chaput, L. Manivel, and N. Perrin. Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces III. Semi-simplicity and consequences. *Canad. J. Math.*, 62(6):1246–1263, 2010.
- [Cos] Izzet Coskun. A Littlewood-Richardson rule for partial flag varieties. <http://www.math.uic.edu/~coskun/newpartial.pdf>.
- [Cos09] Izzet Coskun. A Littlewood-Richardson rule for two-step flag varieties. *Invent. Math.*, 176(2):325–395, 2009.
- [CP09] P.E. Chaput and N. Perrin. On the quantum cohomology of adjoint varieties. *Arxiv preprint arXiv:0904.4824*, 2009.
- [DCP85] C. De Concini and C. Procesi. Complete symmetric varieties. II. Intersection theory. In *Algebraic groups and related topics (Kyoto/Nagoya, 1983)*, volume 6 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 481–513. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [DL09] Haibao Duan and Banghe Li. Topology of Blow-ups and Enumerative Geometry. *Arxiv preprint arXiv:0906.4152*, 2009.
- [Dub98] Boris Dubrovin. Geometry and analytic theory of Frobenius manifolds. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 315–326 (electronic), 1998.
- [Dub99] Boris Dubrovin. Painlevé transcendents in two-dimensional topological field theory. In *The Painlevé property*, CRM Ser. Math. Phys., pages 287–412. Springer, New York, 1999.
- [FP97] W. Fulton and R. Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995. In *Proc. Sympos. Pure Math.*, volume 62, pages 45–96, 1997.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [Ful97] William Fulton. *Young tableaux*, volume 35 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With applications to representation theory and geometry.
- [FW04] W. Fulton and C. Woodward. On the quantum product of Schubert classes. *J. Algebraic Geom.*, 13(4):641–661, 2004.
- [Giv96] Alexander B. Givental. Equivariant Gromov-Witten invariants. *Internat. Math. Res. Notices*, (13):613–663, 1996.

- [Giv98] Alexander Givental. A mirror theorem for toric complete intersections. In *Topological field theory, primitive forms and related topics (Kyoto, 1996)*, volume 160 of *Progr. Math.*, pages 141–175. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1998.
- [Giv01] Alexander B. Givental. Gromov-Witten invariants and quantization of quadratic Hamiltonians. *Mosc. Math. J.*, 1(4):551–568, 645, 2001. Dedicated to the memory of I. G. Petrovskii on the occasion of his 100th anniversary.
- [GK95] Alexander Givental and Bumsig Kim. Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices. *Comm. Math. Phys.*, 168(3):609–641, 1995.
- [Gor90] A. L. Gorodentsev. Exceptional objects and mutations in derived categories. In *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 57–73. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [Gra01] Tom Graber. Enumerative geometry of hyperelliptic plane curves. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):725–755, 2001.
- [Guz99] Davide Guzzetti. Stokes matrices and monodromy of the quantum cohomology of projective spaces. *Comm. Math. Phys.*, 207(2):341–383, 1999.
- [GZ84] I. M. Gel’fand and A. V. Zelevinskii. Models of representations of classical groups and their hidden symmetries. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 18(3):14–31, 1984.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HMT09] C. Hertling, Yu. I. Manin, and C. Teleman. An update on semisimple quantum cohomology and F -manifolds. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 264(Mnogomernaya Algebraicheskaya Geometriya):69–76, 2009.
- [HP06] L. Hille and M. Perling. A counterexample to king’s conjecture. *Compositio Mathematica*, 142(06):1507–1521, 2006.
- [Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [Iri07] Hiroshi Iritani. Convergence of quantum cohomology by quantum Lefschetz. *J. Reine Angew. Math.*, 610:29–69, 2007.
- [Iri09] Hiroshi Iritani. An integral structure in quantum cohomology and mirror symmetry for toric orbifolds. *Adv. Math.*, 222(3):1016–1079, 2009.
- [Kap88] M. M. Kapranov. On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces. *Invent. Math.*, 92(3):479–508, 1988.

- [Kaw06] Yujiro Kawamata. Derived categories of toric varieties. *Michigan Math. J.*, 54(3):517–535, 2006.
- [Kim99] Bumsig Kim. Quantum hyperplane section theorem for homogeneous spaces. *Acta Math.*, 183(1):71–99, 1999.
- [Kin97] A. King. Tilting bundles on some rational surfaces. *Unpublished manuscript*, 1997.
- [Kle74] S. Kleiman. The transversality of a general translate. *Compositio Math.*, 28:287–297, 1974.
- [KM94] M. Kontsevich and Y. Manin. Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry. *Communications in Mathematical Physics*, 164(3):525–562, 1994.
- [KO94] S. A. Kuleshov and D. O. Orlov. Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 58(3):53–87, 1994.
- [Kon95a] Maxim Kontsevich. Enumeration of rational curves via torus actions. In *The moduli space of curves (Texel Island, 1994)*, volume 129 of *Progr. Math.*, pages 335–368. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.
- [Kon95b] Maxim Kontsevich. Homological algebra of mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 120–139, Basel, 1995. Birkhäuser.
- [KT03] Andrew Kresch and Harry Tamvakis. Quantum cohomology of the Lagrangian Grassmannian. *J. Algebraic Geom.*, 12(4):777–810, 2003.
- [Kuz06] A. G. Kuznetsov. Hyperplane sections and derived categories. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 70(3):23–128, 2006.
- [Kuz08] Alexander Kuznetsov. Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 97(1):155–182, 2008.
- [LL] Naichung Conan Leung and Changzheng Li. Quantum Pieri rules for tautological subbundles.
- [LL10] Naichung Conan Leung and Changzheng Li. Functorial relationships between $QH^*(G/B)$ and $QH^*(G/P)$. *J. Differential Geom.*, 86(2):303–354, 2010.
- [LLY97] Bong H. Lian, Kefeng Liu, and Shing-Tung Yau. Mirror principle. I. *Asian J. Math.*, 1(4):729–763, 1997.
- [LS10] Thomas Lam and Mark Shimozono. Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian. *Acta Math.*, 204(1):49–90, 2010.
- [LT98] Jun Li and Gang Tian. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties. *J. Amer. Math. Soc.*, 11(1):119–174, 1998.

- [Mac79] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1979. Oxford Mathematical Monographs.
- [Man98] Laurent Manivel. *Fonctions symétriques, polynômes de Schubert et lieux de dégénérescence*, volume 3 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [Man11] L. Manivel. On the derived category of the Cayley plane. *J. Algebra*, 330:177–187, 2011.
- [Mic10] M. Michalek. Family of counterexamples to king’s conjecture. *Comptes Rendus Mathématique*, 2010.
- [Mih07] I.A. Mihai. Odd symplectic flag manifolds. *Transformation groups*, 12(3):573–599, 2007.
- [Mit08] S.A. Mitchell. Parabolic orbits in flag varieties. *preprint*, 1, 2008.
- [Moř66] B. G. Mořezon. On n -dimensional compact complex manifolds having n algebraically independent meromorphic functions. I. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 30:133–174, 1966.
- [Orl92] D. O. Orlov. Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 56(4):852–862, 1992.
- [Per02] Nicolas Perrin. Courbes rationnelles sur les variétés homogènes. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(1):105–132, 2002.
- [Pet] D. Peterson. Quantum cohomology of g/p .
- [Pon07] Dalide Pontoni. Quantum cohomology of $\text{Hilb}^2(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$ and enumerative applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(11):5419–5448, 2007.
- [PR96] Piotr Pragacz and Jan Ratajski. A Pieri-type theorem for Lagrangian and odd orthogonal Grassmannians. *J. Reine Angew. Math.*, 476:143–189, 1996.
- [PR03] Piotr Pragacz and Jan Ratajski. A Pieri-type formula for even orthogonal Grassmannians. *Fund. Math.*, 178(1):49–96, 2003.
- [Pro86] Robert A. Proctor. Odd symplectic groups and combinatorics. In *Lie algebras and related topics (Windsor, Ont., 1984)*, volume 5 of *CMS Conf. Proc.*, pages 357–360. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.
- [Prz07] V.V. Przyjalkowski. Gromov-Witten invariants of Fano threefolds of genera 6 and 8. *Sbornik: Mathematics*, 198:433, 2007.
- [PS09] A. Polishchuk and A. Samokhin. Full exceptional collections on the lagrangian grassmannians $\text{LG}(4, 8)$ and $\text{LG}(5, 10)$. *Arxiv preprint arXiv:0910.2356*, 2009.

- [PZ01] Alexander Polishchuk and Eric Zaslow. Categorical mirror symmetry in the elliptic curve. In *Winter School on Mirror Symmetry, Vector Bundles and Lagrangian Submanifolds (Cambridge, MA, 1999)*, volume 23 of *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 275–295. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [RT94] Yongbin Ruan and Gang Tian. A mathematical theory of quantum cohomology. *Math. Res. Lett.*, 1(2):269–278, 1994.
- [Sam07] Alexander Samokhin. Some remarks on the derived categories of coherent sheaves on homogeneous spaces. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(1):122–134, 2007.
- [ST97] Bernd Siebert and Gang Tian. On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator. *Asian J. Math.*, 1(4):679–695, 1997.
- [Tam07] H. Tamvakis. Quantum cohomology of homogeneous varieties: a survey. <http://www.math.umd.edu/~harryt/papers/report.07.pdf>, 2007.
- [Tel07] C. Teleman. The structure of 2d semi-simple field theories. *Arxiv preprint arXiv:0712.0160*, 2007.
- [Tel10] Constantin Teleman. Topological field theories in 2 dimensions. In *European Congress of Mathematics*, pages 197–210. Eur. Math. Soc., Zürich, 2010.
- [Ued05a] K. Ueda. Stokes matrix for the quantum cohomology of cubic surfaces. *Arxiv preprint math/0505350*, 2005.
- [Ued05b] Kazushi Ueda. Stokes matrices for the quantum cohomologies of Grassmannians. *Int. Math. Res. Not.*, (34):2075–2086, 2005.
- [Vis89] Angelo Vistoli. Intersection theory on algebraic stacks and on their moduli spaces. *Invent. Math.*, 97(3):613–670, 1989.
- [Wit91] Edward Witten. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space. In *Surveys in differential geometry (Cambridge, MA, 1990)*, pages 243–310. Lehigh Univ., Bethlehem, PA, 1991.
- [Wit95] Edward Witten. The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian. In *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, pages 357–422. Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
- [Woo05] Christopher T. Woodward. On D. Peterson’s comparison formula for Gromov-Witten invariants of G/P . *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(6):1601–1609 (electronic), 2005.

Résumé

Les grassmanniennes symplectiques impaires sont une famille d'espaces quasi-homogènes très proches des grassmanniennes symplectiques de par leur construction et leurs propriétés. Dans ce travail, j'étudie leur cohomologie classique et quantique.

Pour les grassmanniennes symplectiques impaires de droites, j'obtiens une règle de Pieri quantique ainsi qu'une présentation de l'anneau de cohomologie quantique. J'en déduis la semi-simplicité de cet anneau et je détermine une collection exceptionnelle complète pour la catégorie dérivée, ce qui me permet de vérifier pour cet exemple une conjecture de Dubrovin.

Dans le cas général, je démontre un principe quantique-classique pour certains invariants de Gromov-Witten de degré un. Sous réserve de l'énumérativité des invariants de degré supérieur, je prouve que la règle de Pieri quantique est entièrement déterminée par le calcul des invariants de degré un.

Abstract

Odd symplectic Grassmannians are a family of quasi-homogeneous spaces that are closely related to symplectic Grassmannians by their construction and properties. The goal of this work is to study their classical and quantum cohomology.

For odd symplectic Grassmannians of lines, I obtain a quantum Pieri rule and a presentation of the quantum cohomology ring. I prove the semisimplicity of this ring and determine a full exceptional collection for the derived category, which enables me to check a conjecture of Dubrovin in this example.

In the general case, I prove a quantum-to-classical principle for some degree one Gromov-Witten invariants. Assuming that the higher-dimensional Gromov-Witten invariants are enumerative, I conclude that the quantum Pieri rule is entirely determined by the knowledge of degree one invariants.